

**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**MODOS  $r$  DE OSCILAÇÃO EM ESTRELAS DE NEUTRÕES**

(Tese para a obtenção do grau de doutor no ramo de Física, especialidade de Astrofísica)

**BRIGITTE MELO TOMÉ LEHODEY**

**ORIENTADOR: Professor Doutor PAULO MIGUEL DE BARROS PACHECO SEARA DE SÁ**

**Constituição do júri:**

**Presidente: Reitor da Universidade do Algarve**

**Vogais:**

Doutor **Alfredo Barbosa Henriques**, Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor **Robertus Josephus Hendrikus Potting**, Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;

Doutor **Orfeu Bertolami Neto**, Professor Associado do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa;

Doutor **Paulo Miguel de Barros Pacheco Seara de Sá**, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;

Doutor **Ilídio Pereira Lopes**, Professor Auxiliar da Universidade de Évora;

Doutor **José Manuel Pé-Curto Velhinho**, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências Exactas da Universidade da Beira Interior;

Doutor **Óscar João Campos Dias**, Investigador da Universidade de Barcelona, Espanha.

**FARO**  
**(2007)**

# Resumo

NOME: Brigitte Melo Tomé Lehodey

FACULDADE: Faculdade de Ciências e Tecnologia

ORIENTADOR: Professor Doutor Paulo Sá

DATA: 2 de Julho de 2007

TÍTULO DA TESE: Modos  $r$  de oscilação em estrelas de neutrões

A presente tese é dedicada ao estudo dos modos  $r$  de oscilação em estrelas de neutrões. O seu objectivo consiste em determinar a influência da rotação diferencial na evolução da instabilidade do modo  $r$  e na detectabilidade das ondas gravitacionais associadas a este modo de oscilação. A rotação diferencial, como foi demonstrado recentemente, é uma característica inevitável dos modos  $r$  não lineares. Analisamos o papel desempenhado por esta rotação diferencial na evolução da instabilidade do modo em estrelas de neutrões recém-nascidas. Mostramos que, devido à presença de rotação diferencial, a amplitude do modo  $r$  satura naturalmente, enquanto a velocidade angular da estrela diminui para valores compatíveis com os dados observacionais. Estudamos, ainda, a detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas, devido à instabilidade do modo  $r$ , por uma estrela de neutrões recém-nascida, tendo em conta a presença de rotação diferencial. Mostramos que a detectabilidade destas

ondas gravitacionais depende crucialmente da rotação diferencial associada ao modo  $r$ . Se a rotação diferencial inicial for pequena, as ondas gravitacionais poderão ser detectadas pelas versões avançadas dos detectores interferométricos LIGO e Virgo, desde que a estrela se encontre a menos de 20 Mpc da Terra.

Palavras-chave: oscilações estelares, rotação diferencial, estrelas de neutrões, modos  $r$ , ondas gravitacionais.

# Abstract

## *R*-modes oscillations in neutron stars

This thesis is devoted to the study of *r*-modes in neutron stars. Its aim is to determine the influence of differential rotation on the evolution of the *r*-mode instability and on the detectability of gravitational waves from the *r*-mode. Differential rotation, as shown recently, is an unavoidable feature of nonlinear *r*-modes. We analyse the role played by this differential rotation on the evolution of the *r*-mode instability in newly-born neutron stars. We show that, due to the presence of differential rotation, the amplitude of the *r*-mode saturates in a natural way, whereas the angular velocity of the star decreases to values compatible with observational data. We also study the detectability of gravitational waves emitted by newly-born neutron stars, due to the *r*-mode instability, taking into account differential rotation. We show that the detectability of these waves depends crucially on the differential rotation associated to the *r*-mode instability. For small initial differential rotation, gravitational waves could be detected by the advanced laser interferometer detectors LIGO and Virgo, if the neutron star is located less than 20 Mpc away from Earth.

Key-words: stellar oscillations, differential rotation, neutron stars, *r*-modes, gravitational waves.

# Agradecimentos

Ao concluir a minha tese de doutoramento não posso deixar de mencionar aqueles que, de uma ou outra forma, tornaram possível a sua concretização.

As primeiras palavras de agradecimento são dirigidas, naturalmente, ao meu orientador científico, Professor Doutor Paulo Sá, ao qual quero agradecer e manifestar o meu profundo reconhecimento pela orientação desta tese, pelas críticas, sugestões e incentivos, que ao longo destes anos me permitiram compreender melhor as sucessivas dúvidas com que me fui confrontando. Quero também agradecer pela contínua disponibilidade e, acima de tudo, pela confiança e o estímulo que permitiram a realização deste trabalho.

Reconheço igualmente o papel que desempenharam os membros do CENTRA (Algarve), nomeadamente, o Professor Doutor Alexander Krasnitz e o Professor Doutor Robertus Potting na cooperação concedida ao nível da informática.

Inevitavelmente, não poderei deixar de reconhecer que os sucessivos presidentes da FCT me proporcionaram o acolhimento imprescindível, no departamento de Física da Faculdade de Ciências e Tecnologia, à realização da pesquisa.

Desejo aqui dirigir um agradecimento muito especial, à Professora Doutora Conceição Bento pela confiança que em mim depositou.

Os reconhecimentos ficariam incompletos se não os dirigisse também à Fundação

para a Ciência e Tecnologia pela concessão da Bolsa de Estudo de doutoramento.

Finalmente, mas não no fim, à Ana Carolina e aos professores da Faculdade de Ciências e Tecnologia com os quais tive o prazer de partilhar momentos agradáveis durante a hora do almoço, e que foram indispensáveis no desenvolvimento deste trabalho.

*Ao João e à Alice.*

# Prefácio

Os modos  $r$  são oscilações não radiais em estrelas com rotação cuja força de restituição é a força de Coriolis. Estes modos de pulsação foram descobertos por Papaloizou e Pringle em 1978. Contudo, só a partir de 1998 é que os modos  $r$  atraíram as atenções, quando Andersson descobriu que estes modos são instáveis em estrelas de fluido perfeito qualquer que seja o valor da velocidade de rotação. Posteriormente, verificou-se que mesmo na presença de viscosidade, a instabilidade dos modos  $r$  continuava activa para valores relevantes da velocidade angular da estrela.

O estudo dos modos  $r$  de oscilação em estrelas de neutrões pode ser relevante para vários domínios de investigação. Em primeiro lugar, os modos  $r$  podem explicar a diminuição da velocidade de rotação em estrelas de neutrões recém-nascidas, reconciliando a teoria com os dados observacionais. Efectivamente, a teoria de formação das estrelas de neutrões prevê valores para a velocidade angular da estrela muito maiores do que aqueles que são observados. A emissão de ondas gravitacionais devido à instabilidade dos modos  $r$  de pulsação poderia levar à diminuição da velocidade angular da estrela, explicando a discrepância acima referida. Em segundo lugar, os modos  $r$  de oscilação representam também uma provável fonte de ondas gravitacionais que poderá ser detectada pelos detectores interferométricos de ondas



gravitacionais LIGO e Virgo. Finalmente, a detecção destas ondas poderá permitir estudar a composição do núcleo interno das estrelas de nêutrons.

A maioria dos estudos sobre os modos  $r$  e as suas implicações astrofísicas foi realizada no âmbito da teoria linear. No entanto, um conhecimento mais profundo dos modos  $r$  e da sua relevância astrofísica requer que se tenham em conta os efeitos não lineares na evolução do modo.

Nestes últimos anos, dedicámo-nos à investigação da evolução da instabilidade do modo  $r$  no âmbito da teoria não linear e ainda ao estudo da detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas devido a esta instabilidade. Os resultados obtidos são descritos nesta tese.

Uma introdução às estrelas de nêutrons, às pulsações não radiais, ao mecanismo CFS (Chandrasekhar-Friedman-Schutz) e às ondas gravitacionais é apresentada no primeiro capítulo. Nesta introdução limitamo-nos a descrever os aspectos que consideramos essenciais para a compreensão do material contido nos capítulos seguintes.

No capítulo 2 apresentamos os modos  $r$  no âmbito da teoria linear. Começamos por descrever os modos  $r$  em estrelas de fluido perfeito, explicando como surge a instabilidade CFS. Seguidamente, debruçamo-nos sobre a influência da viscosidade e determinamos a curva de instabilidade no caso de estrelas de nêutrons recém-nascidas. Descrevemos, ainda, a evolução da instabilidade do modo  $r$ , usando um modelo fenomenológico simples proposto por Owen *et al.* Por fim, descrevemos de forma sucinta os modos  $r$  em estrelas de nêutrons mais realistas, em que a presença de uma crosta, de um campo magnético ou de matéria exótica é considerada.

O capítulo 3 é consagrado ao estudo dos modos  $r$  no âmbito da teoria não linear. Começamos por descrever, de forma sucinta, os primeiros trabalhos em que se sugere a existência de rotação diferencial associada aos modos  $r$  de oscilação. Seguidamente, descrevemos de forma detalhada a extensão não linear dos modos  $r$

obtida no caso de estrelas newtonianas de fluido perfeito barotrópico. Esta solução corresponde a rotação diferencial que produz derivas em larga escala de elementos de fluido ao longo das latitudes estelares.

No capítulo 4, estudamos a evolução da instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões. Para tal, usamos a solução não linear descrita em detalhe no capítulo 3, que descreve rotação diferencial associada aos modos  $r$ . Mostramos que esta rotação diferencial desempenha um papel crucial na saturação da amplitude do modo  $r$  e na diminuição da velocidade de rotação da estrela de neutrões para valores compatíveis com os dados observacionais.

Finalmente, o último capítulo é consagrado ao estudo da influência da rotação diferencial na detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões. Mostramos que a detectabilidade destas ondas depende crucialmente da rotação diferencial associada ao modo  $r$ . Se a rotação inicial for pequena, as ondas gravitacionais poderão ser detectadas pelas versões avançadas dos detectores interferométricos LIGO e Virgo, desde que a estrela de neutrões emissora das ondas gravitacionais se encontre a uma distância da Terra inferior a 20 Mpc.

Esta tese compila os resultados originais das seguintes publicações:

- P. M. Sá e B. Tomé, “Nonlinear evolution of r-modes: the role of differential rotation”, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 044007.
- P. M. Sá e B. Tomé, “The influence of differential rotation on the detectability of gravitational waves from the r-mode instability”, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 044011.
- P. M. Sá e B. Tomé, “Gravitational waves from r-modes”, *Astrophys. Space Sci.* **308** (2007) 557.

- P. M. Sá e B. Tomé, “The role of differential rotation in the evolution of r-mode instability”, em Proceedings of the Fifth International Workshop on New Worlds in Astroparticle Physics (Faro, Portugal, 8-10 January 2005), publicado por World Scientific (2006) 162-168.
- P. M. Sá e B. Tomé, “Differential rotation of r-modes”, em Proceedings of the XXVIII Spanish Relativity Meeting (Oviedo, Spain, 6-10 September 2005), publicado por American Institute of Physics, Vol. 841 (2006) 590-593.
- P. M. Sá e B. Tomé, “Detectability of gravitational waves from the r-mode instability in newly-born neutron stars”, em Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (Berlin, Germany, 23-29 July 2006), a ser publicado por World Scientific.
- P. M. Sá e B. Tomé, “Gravitational waves from r-modes of newly-born neutron stars”, em Proceedings of the Seventh Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves (Sydney, Australia, 8-14 July 2007), a ser publicado em Journal of Physics: Conference Series.
- P. M. Sá e B. Tomé, “Detectability of gravitational waves from r-modes: the role of differential rotation”, em Proceedings of the Sixth International Workshop on New Worlds in Astroparticle Physics (Faro, Portugal, 6-8 September 2007), a ser publicado em DVD pelo Centro Multidisciplinar de Astrofísica.

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Prefácio</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estrelas de neutrões . . . . .	2
1.2 Pulsações não radiais . . . . .	8
1.3 A instabilidade CFS (Chandrasekhar–Friedman–Schutz) . . . . .	14
1.4 Ondas gravitacionais . . . . .	16
Referências . . . . .	20
<b>2 Modos <math>r</math> lineares</b>	<b>23</b>
2.1 Modos $r$ de oscilação . . . . .	24
2.2 Modos $r$ em estrelas de fluido perfeito . . . . .	26
2.3 Modos $r$ em estrelas com viscosidade . . . . .	32
2.4 Evolução da instabilidade dos modos $r$ . . . . .	37
2.5 Modos $r$ em estrelas de neutrões com crosta . . . . .	44

2.6	Estrelas de neutrões com um campo magnético . . . . .	46
2.7	Estrelas de neutrões com matéria exótica . . . . .	48
	Referências . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Modos <math>r</math> não lineares</b>	<b>53</b>
3.1	Introdução . . . . .	54
3.2	Primeiras abordagens à rotação diferencial . . . . .	57
3.3	Expressão exacta para a rotação diferencial . . . . .	59
	Referências . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Evolução da instabilidade dos modos <math>r</math></b>	<b>68</b>
4.1	Introdução . . . . .	69
4.2	Momento angular físico do modo $r$ . . . . .	70
4.3	Modelo de evolução . . . . .	72
4.4	Evolução não linear do modo $r$ : solução analítica . . . . .	76
4.4.1	$K \geq -5/4$ . . . . .	78
4.4.2	$K < -5/4$ . . . . .	85
4.5	Evolução não linear do modo $r$ : solução numérica . . . . .	87
4.6	Conclusões . . . . .	91
	Referências . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Detectabilidade das ondas gravitacionais</b>	<b>94</b>
5.1	Introdução . . . . .	95
5.2	Detectabilidade no âmbito da teoria linear . . . . .	100
5.3	Detectabilidade no âmbito da teoria não linear . . . . .	103
5.4	Conclusões . . . . .	118
	Referências . . . . .	119

# Capítulo 1

## Introdução

Esta tese tem como objectivo estudar os modos  $r$  de pulsação em estrelas de neutrões recém-nascidas, a emissão de ondas gravitacionais associada à instabilidade dos modos  $r$  e a detectabilidade destas ondas gravitacionais com os modernos detectores de interferometria laser. Antes de nos debruçarmos sobre estes assuntos, introduzimos alguns temas que serão abordados com maior ou menor ênfase ao longo deste trabalho. Assim, nesta introdução descrevemos brevemente as estrelas de neutrões, as pulsações não radiais nestas estrelas, a instabilidade CFS (Chandrasekhar-Friedman-Schutz) e as ondas gravitacionais.

## 1.1 Estrelas de neutrões

Em 1934, Baade e Zwicky sugeriram que um novo tipo de estrela poderia existir, a estrela de neutrões, que representaria o ponto final da evolução estelar. Assim, eles escreveram [1]: “Com toda a reserva, avançamos com a ideia que uma supernova representa a transição de uma estrela comum para uma estrela de neutrões, constituída principalmente por neutrões. Tal estrela pode possuir um raio muito pequeno e uma densidade extremamente elevada.”

Mais tarde, em 1939, foram publicados os primeiros modelos teóricos sobre estrelas de neutrões por Oppenheimer e Volkoff [2], onde se assumia que estas estrelas eram constituídas por um gás perfeito de neutrões livres com uma densidade elevada.

Como nessa altura se desconhecia a proveniência da energia das estrelas, os primeiros trabalhos sobre estrelas de neutrões procuravam essencialmente associar a fonte da energia estelar à existência de um núcleo de neutrões em estrelas maciças normais. No entanto, assim que se compreendeu o mecanismo de fusão nuclear e a produção de energia no núcleo das estrelas, as estrelas de neutrões deixaram de ser

estudadas e foram praticamente ignoradas pela comunidade científica durante os 30 anos que se seguiram. Outra razão pela qual, nessa altura, as estrelas de neutrões não despertaram grande interesse por parte dos cientistas estava relacionada com o facto de estas estrelas serem objectos muito pequenos e frios, parecendo impossível observá-los.

Este cenário modificou-se consideravelmente com a descoberta do primeiro pulsar. Em 1967, foi detectado um objecto astronómico que emitia ondas de rádio sob a forma de sinais periódicos, parecidos com um pulso [3]. A associação dos pulsares a estrelas de neutrões não é óbvia, e o primeiro a propô-la foi Gold em 1968 [4]. Efectivamente, Gold propôs que estes sinais eram emitidos por estrelas de neutrões que giravam muito rapidamente sobre si próprias e que tinham um campo magnético na sua superfície da ordem de  $10^{12}$  G. A partir desse momento, começou a realizar-se investigação teórica sobre as propriedades e a composição das estrelas de neutrões, que continuou muito activa até hoje.

As descobertas quase simultâneas dos pulsares do Carangueijo [5] e de Vela [6] em 1968, os dois situados em remanescentes de supernovas, vieram confirmar as previsões de Baade e Zwicky sobre a formação de estrelas de neutrões em explosões de supernovas.

Os termos “pulsar” e “estrela de neutrões”, apesar de aparecerem muitas vezes associados, não são equivalentes. Assim, o termo “pulsar” é usado para definir um objecto astrofísico observado que tem a propriedade de emitir radiação pulsada, enquanto o termo “estrela de neutrões” refere-se ao objecto teórico, independentemente da sua observação como pulsar, ou a uma estrela muito compacta que não seja observada através da sua radiação pulsada mas por outro meio qualquer.

Uma estrela de neutrões tem, tipicamente, uma massa  $M$  da ordem de 1.4 massas solares ( $1M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$  kg), um raio  $R$  da ordem de 12 km e uma



densidade central  $\rho_c$  da ordem de 5 a 10 vezes a densidade nuclear de equilíbrio  $\rho_0 \simeq 2.7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$  [7]. Assim, uma estrela de neutrões representa uma das formas mais densas de matéria no Universo. Embora os neutrões sejam maioritários na composição nuclear das estrelas de neutrões, alguns prótons (assim como electrões e muões) também estão presentes. A densidades supra nucleares, vários tipos de partículas podem aparecer como, entre outras, mesões condensados ou até quarks desconfiados. Além do mais, espera-se que na região mais central, devido às elevadas temperaturas, os fluidos de neutrões e de prótons sejam superfluidos [8].

O termo estrelas de neutrões abrange as estrelas ditas “normais”, as quais são compostas por matéria hadrónica “clássica”, onde os quarks estão confinados em hádrões, as estrelas “híbridas” e as estrelas “estranhas”, compostas, em parte ou totalmente, por quarks desconfiados do tipo *up*, *down* e *strange* [9].

Uma estrela de neutrões tem cinco regiões principais, os núcleos interno e externo, a crosta, o envelope e a atmosfera.

A atmosfera e o envelope representam uma proporção negligenciável da massa total. No entanto, a atmosfera tem um papel preponderante na forma do espectro dos fótons emergentes e o envelope influencia de forma crucial o transporte e a libertação da energia térmica para a superfície estelar [7].

A crosta, com uma espessura de 1 a 2 km, é composta essencialmente por núcleos atómicos. Dependendo da densidade, encontram-se diferentes tipos de núcleos. Assim, quando a densidade é menor do que aproximadamente  $10^9 \text{ kg.m}^{-3}$ , estão presentes essencialmente núcleos de  $^{56}\text{Fe}$ , mas mais perto do núcleo, quando se atinge densidades da ordem de  $\rho \approx \rho_0/3$ , encontram-se núcleos com  $A \approx 200$ . Este tipo de núcleos, com uma quantidade tão elevada de neutrões não são observados em laboratório [7].

Os restantes 10 a 11 km formam os núcleos externo e interno. Estas regiões

centrais representam cerca de 99% da massa da estrela. O núcleo externo, cuja espessura varia conforme os modelos, consiste numa “sopa” de nucleões, electrões e muões. Os neutrões são provavelmente superfluidos e os protões supercondutores. No núcleo interno existem provavelmente partículas exóticas [7].

Subsistem ainda muitas incertezas acerca das estrelas de neutrões, nomeadamente no que diz respeito à sua equação de estado. Efectivamente, a equação de estado está relativamente bem determinada para a crusta e o núcleo externo, mas permanece uma incógnita para a região central da estrela de neutrões.

Um factor importante para a definição da equação de estado é a determinação da massa limite da estrela de neutrões, valor máximo da massa que a estrela pode sustentar. Assim, o valor da massa limite para um determinado modelo de estrelas de neutrões vai depender do tipo de equação de estado escolhido. Por exemplo, quanto mais “stiff” a equação de estado, maior será o valor da massa limite [9].

Devido à dificuldade de modelar uma estrela de neutrões real e também à falta de consenso quanto à composição do núcleo, uma das equações de estado mais utilizadas é a politrópica. As estrelas politrópicas são modelos pseudo-estelares onde se assume *a priori* que a densidade e a pressão estão relacionadas por  $p = \kappa\rho^\gamma$ , mas onde não se faz nenhuma referência ao transporte de calor ou ao equilíbrio térmico. Apesar destas equações serem apenas uma aproximação da estrutura estelar, têm-se mostrado muito úteis para interpretar muitos aspectos da estrutura estelar real.

No que diz respeito à massa das estrelas de neutrões, modelos teóricos mostram que a faixa de massas permitidas varia entre 0.2 e  $3M_\odot$  [9]. Uma massa inferior a  $0.2M_\odot$  não seria suficiente para a força gravitacional manter a estrela no seu estado condensado e uma massa maior do que  $3M_\odot$  levaria ao colapso gravitacional para um buraco negro. Porém, valores próximos do limite de Chandrasekhar ( $1.4M_\odot$ ) para uma estrela de neutrões parecem ser favorecidos pela Natureza. O limite de

Chandrasekhar corresponde ao valor máximo da massa de uma estrela que pode ser suportada pela pressão de degenerescência dos electrões, valor máximo da massa de uma anã branca. O valor final da massa da estrela de neutrões pode ser inferior a este limite se houver perda de massa durante a formação da estrela de neutrões. Num estudo recente, onde foram determinadas as massas de doze estrelas de neutrões com elevada precisão, mostrou-se que dez destas estrelas tinham massas muito próximas do limite de Chandrasekhar e que apenas duas ultrapassavam este valor [10]. Outro levantamento das massas de 23 estrelas de neutrões encontrou valores que variam entre  $0.6M_{\odot}$  e  $2.5M_{\odot}$  [11]. A determinação precisa da massa das estrelas de neutrões desempenha um papel fundamental no constrangimento da equação de estado da estrela de neutrões e, portanto, no conhecimento detalhado das suas propriedades e composição.

O raio de uma estrela de neutrões está relacionado com a sua massa através da equação de estado. Por exemplo, o raio típico de uma estrela com uma massa de  $1.4M_{\odot}$  é de 10 a 15 km, dependendo da equação de estado do interior [8]. Aqui, mais uma vez, constatamos que a determinação exacta da equação de estado da estrela de neutrões é essencial para a descrição e a compreensão das estrelas de neutrões.

Nesta tese, assumimos para o nosso modelo de estrela de neutrões uma estrela barotrópica e newtoniana, na qual a densidade  $\rho$  e a pressão  $p$  da estrela estão relacionadas por uma equação de estado politrópica  $p = \kappa\rho^2$ , com  $\kappa$  tal que a massa é de  $1.4M_{\odot}$  e o raio de 12.53 km.

Vários aspectos da teoria das estrelas de neutrões ainda não foram esclarecidos. Por exemplo, um dos problemas da astrofísica dos pulsares ainda não resolvido diz respeito à baixa taxa de rotação observada para estes objectos. De facto, assumindo que as estrelas de neutrões são o resultado do colapso gravitacional de uma estrela no fim da sua vida, e considerando a conservação do momento angular,

uma estrela de neutrões recém-nascida deveria apresentar uma velocidade de rotação muito próxima da velocidade angular de Kepler (velocidade angular máxima da estrela, acima da qual a matéria começa a escapar-se pelo plano equatorial). Porém, nenhum dos pulsares observados até hoje apresenta uma velocidade angular tão elevada, bem pelo contrário, as velocidades angulares observadas são, no máximo, de aproximadamente 10% da velocidade angular de Kepler. Várias propostas foram avançadas ao longo dos anos para tentar resolver este problema, mas nenhuma foi conclusiva. Recentemente, foi sugerido que a instabilidade dos modos  $r$  de oscilação poderia resolver este problema, ao extrair momento angular da estrela de neutrões sob a forma de ondas gravitacionais, o que levaria ao abrandamento da estrela para velocidades de rotação compatíveis com os dados observacionais. Voltaremos a este ponto nos próximos capítulos. A detecção de ondas gravitacionais associadas aos modos  $r$  de pulsação também poderia ajudar a clarificar a questão da composição da parte central das estrelas de neutrões [12, 13, 14].

Outro problema que poderia eventualmente ser esclarecido pelos modos  $r$  refere-se aos pulsares em sistemas binários. As observações mostram que as estrelas de neutrões mais antigas e frias existentes em sistemas binários de massa reduzida e que emitem raios  $X$  (LMXB: Low Mass X-ray Binaries) também têm frequências de rotação menores do que seria esperado. Nestes objectos, a emissão de ondas gravitacionais devido à instabilidade do modo  $r$  de pulsação compensaria o aumento de velocidade angular resultante da acreção de matéria da outra estrela do sistema binário, limitando desta forma a velocidade angular máxima da estrela de neutrões a valores compatíveis com as observações [15, 16, 17].

## 1.2 Pulsações não radiais

O estudo de pulsações em estrelas pode ser uma ferramenta poderosa para estudar a sua estrutura interna, da mesma maneira que a sismologia permite estudar o interior da Terra. Por analogia, este domínio de investigação é chamado de astrosismologia. A maneira como uma estrela oscila depende obviamente da sua estrutura interna e de outros factores como, por exemplo, a presença ou a ausência de um campo magnético e de rotação. Assim, a observação de oscilações em estrelas de neutrões poderia constranger a equação de estado do núcleo interno.

As pulsações estelares dividem-se em dois grupos, as pulsações radiais e as não radiais [18, 19]. Pulsações radiais são um tipo simples de oscilações: a estrela oscila em torno de um estado de equilíbrio, expandindo-se e contraindo-se, mas conservando a sua forma esférica. As pulsações não radiais, às quais os modos  $r$  pertencem, são um tipo mais geral de oscilação: a estrela oscila de tal modo que se desvia da sua forma esférica original. Como veremos a seguir, as pulsações não radiais são as únicas capazes de induzir a emissão de ondas gravitacionais.

Quando as oscilações de uma estrela são de pequena amplitude, estas podem ser aproximadas por perturbações lineares. Para estudar estas perturbações é necessário usar modelos muito simplificados para descrever a estrela. Assim, consideramos a estrela como um fluido perfeito ligado pela força de gravidade. Tais perturbações podem ser estudadas de duas maneiras equivalentes. A descrição euleriana consiste em considerar todas as propriedades físicas do fluido como funções da posição  $\vec{r}$  e do tempo  $t$ . O vector  $\vec{r}$  não indica a posição de um determinado elemento de fluido, mas sim a posição de observação. Assim, considerando um exemplo simples, para estudar o escoamento de um fluido num tubo usando a abordagem euleriana,

faríamos um buraco no tubo e observaríamos as propriedades físicas do fluido através desse buraco. A perturbação euleriana de uma quantidade  $f$  é designada por  $\delta^{(1)}f$ . Na descrição lagrangiana, pelo contrário, o fluido é estudado, seguindo o movimento de um dado elemento de fluido. Assim, neste caso, o vector  $\vec{r}$  representa a posição de um dado elemento de fluido. A perturbação lagrangiana de uma quantidade  $f$  é designada por  $\Delta_{\xi}^{(1)}f$ .

Dito de uma forma diferente, a abordagem euleriana representa um ponto de vista “macroscópico”, de acordo com o qual consideramos modificações das variáveis que descrevem o fluido num determinado ponto do espaço. A abordagem lagrangiana é “microscópica” no sentido em que elementos de fluido na configuração de equilíbrio estão relacionados com elementos de fluido correspondentes na configuração perturbada através de um vector deslocamento lagrangiano  $\vec{\xi}^{(1)}$ . A variação lagrangiana das grandezas que descrevem o fluido é definida então como a variação relativamente a um referencial arrastado por  $\vec{\xi}^{(1)}$ . Assim, a variação lagrangiana  $\Delta_{\xi}^{(1)}f$  e a variação euleriana  $\delta^{(1)}f$  de uma grandeza escalar  $f$  estão relacionadas por [18, 19, 20]

$$\Delta_{\xi}^{(1)}f = \delta^{(1)}f + \vec{\xi}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} f_0, \quad (1.1)$$

onde  $f_0$  representa a grandeza  $f$  na configuração de equilíbrio.

De uma forma mais geral, a relação entre as variações euleriana e lagrangiana de um tensor  $T^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_m}$  é dada por [20]

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}^{(1)}T^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_m} &= \delta^{(1)}T^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_m} + \xi^{(1)c} \nabla_c T^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_m} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T^{a_1, \dots, c, \dots, a_k}_{b_1, \dots, b_m} \nabla_c \xi^{(1)a_i} + \sum_{j=1}^m T^{a_1, \dots, a_k}_{b_1, \dots, c, \dots, b_m} \nabla_{b_j} \xi^{(1)c}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Em segunda ordem da teoria das perturbações, as expressões que relacionam as variações euleriana e lagrangiana devem ser generalizadas de modo a incluírem termos quadráticos no vector lagrangiano de primeira ordem,  $\vec{\xi}^{(1)}$ , e termos lineares

no vector deslocamento lagrangiano de segunda ordem,  $\vec{\xi}^{(2)}$ . Em particular, para grandezas escalares,  $f$ , e para a componente contravariante do vector velocidade,  $v^i$  (usadas no capítulo 3) temos [20, 21]

$$\Delta_{\xi}^{(2)} f = \delta^{(2)} f + \xi^{(2)a} \nabla_a f_0 + \frac{1}{2} \xi^{(1)a} \xi^{(1)b} \nabla_a \nabla_b f_0 + \xi^{(1)a} \nabla_a \delta^{(1)} f \quad (1.3)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}^{(2)} v^i &= \delta^{(2)} v^i + \xi^{(2)a} \nabla_a v_0^i - v_0^a \nabla_a \xi^{(2)i} - \nabla_a \xi^{(1)i} (\xi^{(1)b} \nabla_b v_0^a - v_0^b \nabla_b \xi^{(1)a}) \\ &\quad + \xi^{(1)a} \nabla_a \delta^{(1)} v^i - \delta^{(1)} v^a \nabla_a \xi^{(1)i}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde, na última expressão,  $v_0^i$  é a componente contravariante do vector velocidade de um elemento de fluido na configuração não perturbada.

Vejamos agora a solução geral para as pulsações não radiais numa estrela sem rotação, constituída por um fluido perfeito e considerando a aproximação adiabática, onde assumimos que todos os mecanismos de transferência de energia podem ser ignorados, de modo que o sistema é puramente mecânico. As equações fundamentais para estudar estas pulsações são a equação de Euler, a equação da continuidade e a equação de Poisson para o potencial gravitacional  $\Phi$ :

$$\rho \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi \quad (1.5)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.7)$$

onde  $\vec{v}$ ,  $p$  e  $\rho$  são, respectivamente, a velocidade, a pressão e a densidade do fluido, e  $\Phi$  é o potencial gravitacional. Todas estas variáveis são funções de  $\vec{r}$  e de  $t$ .

Vamos considerar que, inicialmente, a estrela está num estado de equilíbrio. As variáveis físicas  $\rho_0$ ,  $p_0$  e  $\Phi_0$ , que caracterizam este estado de equilíbrio, são unicamente função de  $r = |\vec{r}|$  ( $\vec{v}_0 = 0$ , já que estamos a considerar estrelas sem rotação).

A pulsação é considerada como uma perturbação deste estado de equilíbrio. Vamos assumir que estas perturbações são suficientemente pequenas para que possamos considerar unicamente os termos de primeira ordem nas perturbações e negligenciar os termos de ordem superior, isto é, vamos considerar a teoria linear:

$$\vec{v} = \delta^{(1)}\vec{v}, \quad (1.8)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta^{(1)}\rho, \quad (1.9)$$

$$p = p_0 + \delta^{(1)}p, \quad (1.10)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \delta^{(1)}\Phi. \quad (1.11)$$

Introduzindo estas expressões nas equações de Euler, da continuidade e de Poisson para o campo gravitacional e retendo apenas os termos de primeira ordem, obtemos:

$$\rho_0 \partial_t \delta^{(1)}\vec{v} = -\vec{\nabla} \delta^{(1)}p + \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho_0} \vec{\nabla} p_0, \quad (1.12)$$

$$\partial_t \delta^{(1)}\rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta^{(1)}\vec{v}) = 0, \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \delta^{(1)}\Phi = 4\pi G \delta^{(1)}\rho. \quad (1.14)$$

Para obter a Eq. (1.12) usámos a equação de equilíbrio hidrostático,  $\vec{\nabla} p_0 + \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_0 = 0$ , e ainda a aproximação de Cowling, i.e., negligenciámos  $\delta^{(1)}\Phi$ .

Cada elemento de fluido é deslocado da sua posição de equilíbrio em  $\vec{r}$  por um vector  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$  (deslocamento lagrangiano), tal que<sup>1</sup>

$$\delta^{(1)}\vec{v} = \partial_t \vec{\xi}^{(1)}. \quad (1.15)$$

Assumimos, agora, que  $\vec{\xi}^{(1)}$ , tal como as demais variáveis hidrodinâmicas de primeira ordem,  $\delta^{(1)}p$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}\Phi$ , tem uma dependência temporal do tipo  $e^{i\omega t}$ ,

---

<sup>1</sup>Visto estarmos a considerar uma estrela sem rotação ( $\vec{\omega} = 0$ ), temos  $\Delta_{\vec{\xi}}^{(1)}\vec{v} = \delta^{(1)}\vec{v} = \partial_t \vec{\xi}^{(1)}$ .



podendo ser escrita na forma<sup>2</sup>

$$\vec{\xi}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}^{(1)}(\vec{r})e^{i\omega t}. \quad (1.16)$$

Introduzindo as expressões anteriores nas equações linearizadas de Euler e da continuidade, obtemos, no sistema de coordenadas esféricas:

$$\omega^2 \xi_r^{(1)} = \frac{1}{\rho_0} \partial_r \delta^{(1)} p - \frac{\delta^{(1)} \rho}{\rho_0^2} \frac{dp_0}{dr}, \quad (1.17)$$

$$\omega^2 \xi_\theta^{(1)} = \partial_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\delta^{(1)} p}{\rho_0} \right), \quad (1.18)$$

$$\omega^2 \xi_\phi^{(1)} = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \left( \frac{1}{r} \frac{\delta^{(1)} p}{\rho_0} \right), \quad (1.19)$$

$$\frac{\delta^{(1)} \rho}{\rho_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}^{(1)} - \frac{\vec{\xi}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} \rho_0}{\rho_0}. \quad (1.20)$$

Na equação da continuidade, a constante de integração foi igualada a zero, já que  $\delta^{(1)} \rho = 0$  quando  $\vec{\xi}^{(1)} = 0$ . Tendo em conta que as variações euleriana e lagrangiana da densidade  $\rho$  estão relacionadas por

$$\Delta_\xi^{(1)} \rho = \delta^{(1)} \rho + \vec{\xi}^{(1)} \cdot \vec{\nabla} \rho_0, \quad (1.21)$$

a Eq. (1.20) pode ser reescrita como:

$$\frac{\Delta_\xi^{(1)} \rho}{\rho_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}^{(1)}. \quad (1.22)$$

Vamos também reescrever a Eq. (1.17) noutra forma, mais conveniente:

$$\omega^2 \xi_r^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta^{(1)} p}{\rho_0} \right) - A \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}^{(1)}, \quad (1.23)$$

onde utilizamos a relação

$$\frac{\Delta_\xi^{(1)} p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta_\xi^{(1)} \rho}{\rho_0}, \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup>Aqui, e nas equações seguintes, iremos cometer um pequeno abuso de notação, usando o símbolo  $\vec{\xi}^{(1)}$  para representar quer a função que depende de  $\vec{r}$  e  $t$ , quer a função que só depende de  $\vec{r}$ .

válida na aproximação adiabática, sendo  $\gamma = (\rho_0/p_0)(\partial p_0/\partial \rho_0)$  a constante adiabática. Introduzimos, ainda, o discriminante de Schwarzschild

$$A(r) = \frac{d \ln \rho_0}{dr} - \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p_0}{dr}, \quad (1.25)$$

que permite avaliar o grau de instabilidade (no caso,  $A > 0$ ) ou de estabilidade (no caso,  $A < 0$ ) convectiva. As Eqs. (1.18), (1.19), (1.22) e (1.23) admitem duas separações de variáveis: a esferoidal e a toroidal. A esferoidal é dada por

$$\vec{\xi}^{(1)}(\vec{r}) = \left[ \xi_r^{(1)}(r)\vec{e}_r + \xi_t^{(1)}(r)\vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \xi_t^{(1)}(r)\vec{e}_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.26)$$

$$\frac{\delta^{(1)}p(\vec{r})}{\rho_0} = \frac{\delta^{(1)}p(r)}{\rho_0} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.27)$$

onde  $\xi_t^{(1)}$  e  $\delta^{(1)}p$  estão relacionados por

$$\omega^2 \xi_t^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \frac{\delta^{(1)}p(r)}{\rho_0} \quad (1.28)$$

e  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  é a função harmónica esférica de índices  $\ell$  e  $m$ . Esta função é solução da equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \phi^2} + \ell(\ell + 1)Y_{\ell m} = 0. \quad (1.29)$$

Aqui  $\ell$  pode ser igual a um inteiro positivo ou a zero e  $m$  só pode ser um inteiro compreendido entre  $-\ell$  e  $\ell$ . Assim, para um dado valor de  $\ell$  existem  $2\ell + 1$  valores possíveis para  $m$ . Esta separação de variáveis corresponde à classe dos modos esferoidais onde  $\omega^2 \neq 0$  [22].

A separação de variáveis toroidal é dada por:

$$\vec{\xi}^{(1)}(\vec{r}) = \left[ 0, \frac{T_{\ell m}(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, -\frac{T_{\ell m}(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.30)$$

onde  $T_{\ell m}(r)$  é uma função arbitrária de  $r$ . Os modos toroidais em estrelas esféricas sem rotação têm frequência angular  $\omega$  igual a zero e as variações eulerianas e lagrangianas de pressão, densidade e potencial gravitacional são nulas. Os modos  $r$  de

pulsação são um caso particular destes modos; correspondem aos modos toroidais quando a estrela está em rotação [18]. Neste caso, como veremos no próximo capítulo, a frequência do modo já não é nula.

Para completar esta introdução às pulsações não radiais, damos a expressão da função harmónica esférica:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.31)$$

onde  $P_{\ell}^m(\cos \theta)$  são os polinómios de Legendre associados,

$$P_{\ell}^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} \sin^m \theta \frac{d^{\ell+m}}{d \cos^{\ell+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^{\ell}. \quad (1.32)$$

### 1.3 A instabilidade CFS (Chandrasekhar–Friedman–Schutz)

A instabilidade CFS (Chandrasekhar, Friedman e Schutz) foi descoberta por Chandrasekhar, em 1970, em esferóides incompressíveis de Maclaurin [23]. Mais tarde, em 1978, Friedman e Schutz mostraram que esta instabilidade existia em todas as estrelas de fluido perfeito com rotação, surgindo devido à emissão de ondas gravitacionais [20]. Nesse trabalho, foi introduzida uma nova classe de deslocamentos, chamados deslocamentos canónicos,  $\xi^{(1)a}$ , para descrever as perturbações adiabáticas em fluidos estacionários. Esta classe de deslocamentos é suficientemente vasta para incluir todas as perturbações físicas. A estabilidade da perturbação é

então aferida pelo sinal de uma energia canónica  $E_c$ ,

$$\begin{aligned}
 E_c = & \frac{1}{2} \int \left[ \rho_0 \partial_t \xi^{(1)i} \partial_t \xi_i^{(1)} - \rho_0 v_0^j \nabla_j \xi^{(1)i} v_0^k \nabla_k \xi_i^{(1)} \right. \\
 & + \gamma p_0 (\nabla_i \xi^{(1)i})^2 + 2\xi^{(1)i} \nabla_i p_0 \nabla_j \xi^{(1)j} \\
 & \left. + \xi^{(1)i} \xi^{(1)j} (\nabla_i \nabla_j p_0 + \rho_0 \nabla_i \nabla_j \Phi_0) - \frac{1}{4\pi G} \nabla_i \delta^{(1)} \Phi \nabla^i \delta^{(1)} \Phi \right] dV, \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

expressa em termos dos deslocamentos canónicos. Quando  $E_c < 0$ , o modo é instável e quando  $E_c \geq 0$ , o modo é estável.

A instabilidade CFS permite que alguns modos de pulsação de uma estrela de fluido perfeito com rotação sejam excitados devido à emissão de ondas gravitacionais. Podemos descrever as propriedades de uma estrela com rotação no referencial que gira com a estrela (referencial de co-rotação) ou no referencial que está fixo relativamente às estrelas distantes (referencial inercial).

Consideremos um modo de pulsação que, no referencial de co-rotação, se propaga no sentido contrário ao do movimento de rotação da estrela. Neste caso, o momento angular do modo é negativo, pois a estrela perturbada tem momento angular menor do que a estrela não perturbada. Se a estrela tiver uma velocidade de rotação suficientemente elevada, este modo, no referencial inercial, pode propagar-se no sentido do movimento de rotação da estrela. Neste caso, a radiação gravitacional emitida devido a este modo de pulsação remove momento angular positivo da estrela. Em consequência, o momento angular do modo torna-se mais negativo.

Em resumo, um modo é instável se, no referencial de co-rotação, se propagar no sentido contrário ao de rotação da estrela e se no referencial inercial se propagar no mesmo sentido de rotação da estrela, i.e.,

$$\omega_I \omega_{CR} = \omega_I (\omega_I + m\Omega) < 0, \quad (1.34)$$

onde  $\omega_I$  é a frequência angular no referencial inercial,  $\omega_{CR} = \omega_I + m\Omega$  é a frequência

angular no referencial de co-rotação e onde  $m$  foi introduzido na Eq. (1.31). Este critério é equivalente a exigir que  $E_c < 0$ .

Como veremos no próximo capítulo, a relevância astrofísica dos modos  $r$  provém essencialmente do facto de estes verificarem o critério de instabilidade do mecanismo CFS para qualquer valor da velocidade angular em estrelas de fluido perfeito.

## 1.4 Ondas gravitacionais

As ondas gravitacionais surgem como uma das soluções das equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.35)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente,  $G_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$  são o tensor de Einstein e a métrica, respectivamente, enquanto  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento. Esta solução, que tem a particularidade de se comportar como uma onda, só é válida em determinadas condições, i.e. no vácuo, num espaço-tempo assintoticamente plano e num regime linearizado para os campos gravitacionais.

As equações de Einstein linearizadas, no vácuo, escrevem-se como [24]

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.36)$$

onde

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad (1.37)$$

e

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^\gamma{}_\gamma. \quad (1.38)$$

Nesta última equação,  $h^{\alpha\beta}$  é uma pequena perturbação da métrica ( $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$ ),

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (1.39)$$

onde  $\eta_{\alpha\beta}$  é a métrica de Minkowski. Estas equações admitem a solução [24]:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\gamma x^\gamma), \quad (1.40)$$

onde  $k_\gamma$  são as componentes de um quadri-vector nulo,  $k^\alpha k_\alpha = 0$  e  $A^{\alpha\beta}$  são as componentes de um tensor ortogonal a  $k_\gamma$ ,

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0. \quad (1.41)$$

Podemos utilizar a liberdade de *gauge* para restringir ainda mais a amplitude  $A^{\alpha\beta}$ , nomeadamente,

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (1.42)$$

e

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0, \quad (1.43)$$

onde  $U^\beta$  são as componentes de um quadri-vector constante do tipo temporal.

As condições (1.41)–(1.43) são as chamadas condições de *gauge* transversa e traço nulo (*transverse-traceless*, TT). Impondo estas condições, verificamos que a amplitude  $A^{\alpha\beta}$  tem apenas duas componentes independentes, que têm um significado físico: correspondem aos dois estados de polarização independentes das ondas gravitacionais. Efectivamente, escolhendo  $U^\beta = \delta^\beta_0$ , a Eq. (1.43) implica que  $A_{\alpha 0} = 0$  para qualquer  $\alpha$ . Se orientarmos os eixos espaciais de tal forma que a onda se propague na direcção  $z$ , o vector  $k^\alpha$  tem componentes  $(\omega, 0, 0, \omega)$ , onde  $\omega \equiv k^0$  é a frequência da onda. Usando agora a Eq. (1.41) e  $A_{\alpha 0} = 0$ , obtemos  $A_{\alpha z} = 0$ , para qualquer  $\alpha$ . Por fim, a Eq. (1.42) implica que  $A_{xx} = -A_{yy}$ . Em resumo, na *gauge* TT a amplitude  $A_{\alpha\beta}$  tem apenas duas componentes independentes,  $A_{xx}$  e  $A_{xy} = A_{yx}$ .

A quantidade de energia transportada pelas ondas gravitacionais pode ser obtida fazendo um paralelo com o electromagnetismo. De facto, em electrodinâmica clássica, esta quantidade corresponde à energia emitida por unidade de tempo por um dipolo

eléctrico em oscilação; para as ondas gravitacionais, esta quantidade corresponde à energia emitida por unidade de tempo por uma massa quadrupolar em oscilação. Assim, a fórmula quadrupolar para a luminosidade das ondas gravitacionais é dada por

$$L = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{q}_{jk} \ddot{q}_{jk} \rangle, \quad (1.44)$$

onde  $q_{jk}$  é o tensor momento quadrupolar reduzido, definido como

$$q_{jk} = \int \rho \left( x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} x_i x^i \right) dV, \quad (1.45)$$

com  $\rho$  correspondendo à densidade de massa e os parênteses  $\langle \dots \rangle$  indicando a média temporal.

Enquanto as ondas electromagnéticas são oscilações dos campos eléctricos e magnéticos que se propagam no espaço-tempo, as ondas gravitacionais são oscilações do próprio espaço-tempo, isto é, correspondem a uma contribuição oscilatória à curvatura do espaço-tempo. Neste sentido, as ondas gravitacionais são mais parecidas com as ondas que se propagam à superfície dos oceanos do que com as ondas electromagnéticas. Estas ondas comprovam directamente o estado dinâmico do sistema. Isto significa que elas podem revelar-nos informações sobre regiões opacas à radiação electromagnética, tais como o interior de uma supernova ou o próprio Big Bang. As ondas gravitacionais interagem fracamente com a matéria, o que torna muito difícil a sua detecção [25].

A teoria das ondas gravitacionais já contribui de maneira considerável para a compreensão de sistemas astrofísicos como estrelas de neutrões em sistemas binários e LMXB e até para a compreensão da anisotropia da radiação de fundo de microondas. À medida que a compreensão dos sistemas relativistas aumenta, é de esperar que as ondas gravitacionais se tornem cada vez mais importantes como ferramenta teórica. Porém, a perspectiva mais excitante para a área é a observação directa

de ondas gravitacionais, que poderá fornecer informações únicas sobre sistemas astrofísicos. Por exemplo, as ondas gravitacionais representam a única possibilidade de observação directa de buracos negros. Todas as outras informações sobre buracos negros são indirectas, provenientes dos seus efeitos sobre a matéria na sua vizinhança.

As ondas gravitacionais entraram definitivamente no domínio da física como uma consequência natural da relatividade geral. Pouco tempo depois de ter introduzido a relatividade geral, Einstein previu a existência das ondas gravitacionais numa publicação de 1916 [26]. Esta análise compreendia alguns erros de álgebra importantes que foram corrigidos num artigo subsequente [27]. Einstein mostrou que a radiação gravitacional provinha de variações do momento quadrupolar da fonte e derivou o que ficaria conhecido como “fórmula quadrupolar”. Uma das consequências importantes desta fórmula é que se houver simetria esférica, o momento quadrupolar é constante e não há emissão de ondas gravitacionais. Eis a razão pela qual o nosso estudo se limita às pulsações não radiais e, em particular, aos modos  $r$ .

Hoje, a ciência das ondas gravitacionais encontra-se na seguinte situação: do ponto vista teórico, temos uma descrição completa deste tipo de radiação; existem, também, provas irrefutáveis indirectas da sua existência. Porém, até hoje, não houve nenhuma detecção directa sem ambiguidade de ondas gravitacionais.

A prova indirecta mais relevante da existência das ondas gravitacionais provém da descoberta do primeiro pulsar binário PSR 1913+16 por Hulse e Taylor em 1974 [28]. Depois de vários anos de observação, constatou-se que neste sistema binário, formado por um pulsar e uma estrela de neutrões, o período orbital do pulsar diminuía. Este resultado corresponde ao que Einstein já tinha previsto em 1916 quando sugeriu que duas massas em rotação em torno uma da outra perderiam energia sob a forma de ondas gravitacionais. Como os cálculos teóricos e os dados



observacionais concordam com uma elevada precisão, esta foi a primeira prova observacional indirecta da existência das ondas gravitacionais. Como tal, em 1993, Hulse e Taylor receberam o prémio Nobel.

Neste contexto, os modos  $r$  de oscilação em estrelas de neutrões, enquanto fonte de ondas gravitacionais, representam uma esperança para a detecção directa de ondas gravitacionais.

## Referências

- [1] W. Baade e F. Zwicky, *Phys. Rev.* **45** (1934) 138.
- [2] J. R. Oppenheimer e G. Volkoff, *Phys. Rev.* **55** (1939) 374.
- [3] A. Hewish, S. J. Bell, J. H. D. Pilkington, P. F. Scott e R. A. Collins, *Nature* **217** (1968) 709.
- [4] T. Gold, *Nature* **218** (1968) 731.
- [5] D. H. Staelin e E. C. Reifenstein, *Science* **162** (1968) 1481.
- [6] M. I. Large, A. E. Vaughan e B. Y. Mills, *Nature* **220** (1968) 340.
- [7] J. M. Lattimer e M. Prakash, *Science* **304** (2004) 536.
- [8] A. G. Lyne e F. Graham-Smith, em: *Pulsar Astronomy*, 2<sup>a</sup> edição (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [9] N. K. Glendenning, em: *Compact Stars, Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [10] C. O. Heinke, J. E. Grindlay, D. A. Lloyd e P. D. Edmonds, *Astrophys. J.* **588** (2003) 452.

- [11] D. M. Lorimer e M. Kramer, em: *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [12] J. Madsen, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3311.
- [13] N. Andersson, D. I. Jones e K. D. Kokkotas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **337** (2002) 1224.
- [14] X. Zheng, Y. Yu e J. Li, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **369** (2006) 376.
- [15] L. Bildsten, *Astrophys. J.* **501** (1998) L89.
- [16] N. Andersson, K. D. Kokkotas e N. Stergioulas, *Astrophys. J.* **516** (1999) 307.
- [17] J. Heyl, *Astrophys. J.* **574** (2002) L57.
- [18] J. P. Cox, em: *Theory of Stellar Pulsation* (Princeton University Press, Princeton, 1980).
- [19] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando e H. Shibahashi, em: *Nonradial Oscillations of Stars, 2ª edição* (University of Tokyo Press, Tokyo, 1989).
- [20] J. L. Friedman e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **221** (1978) 937.
- [21] P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 084001.
- [22] C. J. Hansen e S. D. Kawaler, em: *Stellar Interiors, Physical Principles, Structure, and Evolution* (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [23] S. Chandrasekhar, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 611.
- [24] B. F. Schutz, em: *An Introduction to General Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).

- [25] S. A. Hughes, *Ann. of Phys.* **308** (2003) 142.
- [26] A. Einstein, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften Berlin, Sitzungsberichte* (1916) 688.
- [27] A. Einstein, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften Berlin, Sitzungsberichte* (1918) 154.
- [28] R. A. Hulse e J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **191** (1974) L59.

# Capítulo 2

## Modos $r$ lineares

Os primeiros estudos sobre os modos  $r$  foram realizados no âmbito da teoria linearizada, considerando estrelas newtonianas em rotação, com equação de estado barotrópica.

Recentemente, verificou-se que os modos  $r$  são instáveis para qualquer valor da velocidade angular de estrelas de fluido perfeito. Os estudos sobre a influência da viscosidade na instabilidade dos modos  $r$  de estrelas de neutrões recém-formadas mostraram que a viscosidade, apesar de dificultar o crescimento da instabilidade, não a elimina. Isto é, existe uma “janela” de temperaturas e velocidades angulares da estrela, onde a instabilidade está activa apesar da viscosidade. Assim, a instabilidade do modo  $r$  pode ser relevante do ponto de vista astrofísico.

Um modelo de evolução para a instabilidade do modo  $r$ , proposto no âmbito da teoria linearizada, permite-nos analisar de forma aproximada a evolução ao longo do tempo da amplitude do modo e da velocidade angular da estrela, duas grandezas que são fundamentais para estudar as ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$ .

Os trabalhos acima referidos foram realizados no âmbito de modelos estelares simples. Contudo, os modos  $r$  de pulsação foram também analisados em modelos estelares mais realistas, nomeadamente, considerando a existência de uma crosta, de campos magnéticos ou de matéria exótica no núcleo da estrela.

## 2.1 Modos $r$ de oscilação

Os modos  $r$  de pulsação foram descobertos por Papaloizou e Pringle durante um estudo de oscilações não radiais em estrelas variáveis cataclísmicas [1]. Consideraram estrelas newtonianas em rotação, com equação de estado barotrópica, tendo

procurado soluções do tipo toroidal das equações da hidrodinâmica (1.5)–(1.7). Este tipo de soluções é caracterizado por  $\xi_r^{(1)} = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}^{(1)} = 0$ , onde  $\vec{\xi}^{(1)}$  é o vector deslocamento lagrangiano e  $\xi_r^{(1)}$  é a sua componente radial em coordenadas esféricas. No caso de estrelas sem rotação, a solução para os modos toroidais é trivial, no sentido em que a frequência do modo é nula. Quando se consideram estrelas com rotação, os modos deixam de ser triviais e passam a ser modos de oscilação, com frequência diferente de zero. Papaloizou e Pringle mostraram [1] que, em ordem mais baixa na velocidade angular  $\Omega$  da estrela,  $\xi_\theta^{(1)} \propto P_\ell^m(\cos \theta)e^{im\phi}$  e  $\xi_\phi^{(1)} \propto \partial_\theta P_\ell^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ , onde  $P_\ell^m$  são os polinómios de Legendre associados (Eq. 1.32), e a frequência do modo, no referencial inercial, é dada por:

$$\omega_I = -m\Omega + \frac{2m\Omega}{\ell(\ell + 1)}. \quad (2.1)$$

Como estes modos são similares às ondas de Rossby na atmosfera e oceanos terrestres, Papaloizou e Pringle [1] optaram por denominá-los “modos  $r$ ”.

Provost, Berthomieu e Rocca estudaram, posteriormente, os modos  $r$  para estrelas com rotação lenta até à segunda ordem em  $\Omega$  [2]. Neste estudo, foram procuradas soluções do tipo modo  $r$  para estrelas politrópicas distorcidas considerando, num caso, estrelas totalmente convectivas e, noutro caso, estrelas isentrópicas, para as quais os gradientes de temperatura são nulos. No primeiro caso, obtiveram um problema de Sturm-Liouville para o qual existe um conjunto infinito de modos  $r$  para cada combinação de  $\ell$  e de  $m$ . Dada a complexidade das equações, estas foram resolvidas numericamente. No segundo caso, onde se negligencia a convecção, as equações simplificam-se nitidamente, permitindo uma resolução analítica do problema. Provost, Berthomieu e Rocca procuraram soluções do tipo  $\xi_r^{(1)} = \Omega^2 f(a)P_m^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ , onde a coordenada  $a$  é constante em superfícies de nível ( $a = r$ , se se negligenciar a deformação da estrela devido ao movimento de rotação),

concluindo, erradamente, que não existiam soluções do tipo modo  $r$  em estrelas isentrópicas. Este resultado deve-se ao facto do *Ansatz* escolhido ser demasiado restritivo. Se se considerar o *Ansatz*  $\xi_r^{(1)} = \Omega^2 f(a) P_{m\pm 1}^\ell(\cos \theta) e^{im\phi}$ , obtém-se uma solução do tipo modo  $r$ , para  $\ell = m$ , em que  $f(a)$  é proporcional a  $a^\ell$  [2].

Posteriormente, o estudo dos modos  $r$  foi aprofundado por Saio [3], o qual investigou o comportamento destes modos de pulsação em vários tipos de estrelas.

Os modos  $r$  são modos de oscilação atípicos, porque as oscilações de elementos de fluido têm lugar em superfícies de nível e as perturbações de densidade de fluido são pequenas. Efectivamente as componentes  $\theta$  e  $\phi$  da perturbação da velocidade são proporcionais a  $\Omega$ , enquanto a componente  $r$  da perturbação da velocidade é proporcional a  $\Omega^3$  e a perturbação da densidade é proporcional a  $\Omega^2$ .

Vejamos, então, a solução dos modos  $r$  lineares em estrelas de fluido perfeito.

## 2.2 Modos $r$ em estrelas de fluido perfeito

Consideremos uma estrela newtoniana de fluido perfeito, de raio  $R$  e velocidade angular  $\Omega$  constante para a qual a densidade  $\rho$  e a pressão  $p$  do fluido estão relacionadas por uma equação de estado do tipo barotrópico  $p = p(\rho)$ . A fim de negligenciarmos a deformação da estrela devida à força centrífuga, consideramos que  $\Omega \ll \Omega_K$ , onde  $\Omega_K$  é a velocidade angular máxima da estrela (aquela acima da qual a estrela perde massa pelo equador). As equações de Euler, da continuidade e de

Poisson para o campo gravitacional, no referencial inercial, são dadas por

$$\rho \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.2)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.4)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do fluido e  $\Phi$  é o potencial gravitacional.

As equações linearizadas são obtidas a partir das Eqs. (2.2)–(2.4) considerando que  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta^{(1)}\vec{v}$ , onde  $\vec{v}_0 = \Omega r \sin \theta \vec{e}_\phi$  é a velocidade da estrela não perturbada e  $\delta^{(1)}\vec{v}$  representa a perturbação euleriana de primeira ordem da velocidade, proporcional a  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é a amplitude adimensional da perturbação. Da mesma maneira, considera-se que  $\rho = \rho_0 + \delta^{(1)}\rho$ ,  $p = p_0 + \delta^{(1)}p$  e  $\Phi = \Phi_0 + \delta^{(1)}\Phi$ , onde  $p_0$ ,  $\rho_0$  e  $\Phi_0$  dependem apenas de  $r$ . Assim, a evolução de uma pequena perturbação do estado de equilíbrio é descrita pelas equações linearizadas de Euler, da continuidade e de Poisson para o campo gravitacional, que no referencial inercial são dadas por:

$$\partial_t \delta^{(1)}\vec{v} + \left( \delta^{(1)}\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0 + \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \delta^{(1)}\vec{v} = -\vec{\nabla} \left( \frac{\delta^{(1)}p}{\rho_0} + \delta^{(1)}\Phi \right), \quad (2.5)$$

$$\partial_t \delta^{(1)}\rho + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \delta^{(1)}\rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta^{(1)}\vec{v}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \delta^{(1)}\Phi = 4\pi G \delta^{(1)}\rho. \quad (2.7)$$

Assumindo uma dependência temporal do tipo  $e^{i\omega t}$  e conservando para as várias quantidades unicamente os termos de ordem mais baixa numa expansão em termos de  $\Omega$ , obtém-se para as Eqs. (2.5) e (2.6) uma solução do tipo modo  $r$  que em



coordenadas esféricas e considerando apenas a parte real fica [4]:

$$\delta^{(1)}v_r = 0, \quad (2.8)$$

$$\delta^{(1)}v_\theta = \alpha\Omega C_\ell \ell R \left(\frac{r}{R}\right)^\ell \sin^{\ell-1}\theta \sin(\ell\phi + \omega_I t), \quad (2.9)$$

$$\delta^{(1)}v_\phi = \alpha\Omega C_\ell \ell R \left(\frac{r}{R}\right)^\ell \sin^{\ell-1}\theta \cos\theta \cos(\ell\phi + \omega_I t), \quad (2.10)$$

$$\delta^{(1)}U = 2\alpha\Omega^2 \frac{C_\ell \ell}{\ell+1} R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell+1} \sin^\ell\theta \cos\theta \cos(\ell\phi + \omega_I t), \quad (2.11)$$

onde

$$\delta^{(1)}U \equiv \frac{\delta^{(1)}p}{\rho_0} + \delta^{(1)}\Phi, \quad (2.12)$$

$$C_\ell = (2\ell - 1)!! \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2\pi(2\ell)! \ell(\ell + 1)}} \quad (2.13)$$

e

$$\omega_I = -\ell\Omega + \frac{2\Omega}{\ell + 1}. \quad (2.14)$$

Consideramos apenas os modos cujo número harmônico é  $\ell \geq 2$ .

A separação dos termos  $\delta^{(1)}p$  e  $\delta^{(1)}\Phi$  na Eq. (2.11) é feita a partir da equação de Poisson perturbada (2.7) e das condições fronteira para o potencial gravitacional na superfície da estrela e no infinito. O potencial gravitacional perturbado  $\delta^{(1)}\Phi$  deve desaparecer no infinito,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta^{(1)}\Phi = 0$ . Além disso,  $\delta^{(1)}\Phi$  e a sua primeira derivada devem ser contínuas na superfície da estrela. Assumindo que  $\delta^{(1)}\Phi$  tem a mesma dependência angular que  $\delta^{(1)}U$ , ou seja,  $\delta^{(1)}\Phi$  tem a forma

$$\delta^{(1)}\Phi = \alpha\Omega^2 f(r) \sin^\ell\theta \cos\theta \cos(\ell\phi + \omega_I t), \quad (2.15)$$

e substituindo na Eq. (2.7), obtém-se que a parte radial  $f(r)$  deve ser solução da equação [5]

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr} + \left( 4\pi G \rho_0 \frac{d\rho_0}{dp_0} - \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{r^2} \right) f(r) = 4\pi G \rho_0 \frac{d\rho_0}{dp_0} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell+1}. \quad (2.16)$$

A solução (2.8)–(2.11) também satisfaz a condição fronteira para a pressão, ou seja, a perturbação lagrangiana da pressão desaparece na superfície da estrela <sup>1</sup>,

$$\Delta_{\xi}^{(1)} p = \delta^{(1)} p + \xi^{(1)i} \nabla_i p_0 = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\xi^{(1)i}$  são as componentes contravariantes do vector deslocamento lagrangiano. O deslocamento lagrangiano  $\xi^{(1)i}$  é solução das equações [6]

$$\delta^{(1)} v^i = \partial_t \xi^{(1)i} + v_0^k \nabla_k \xi^{(1)i} - \xi^{(1)m} \nabla_m v_0^i = (\partial_t + \Omega \partial_{\phi}) \xi^{(1)i}, \quad (2.18)$$

$$\delta^{(1)} \rho = -\nabla_i (\rho_0 \xi^{(1)i}), \quad (2.19)$$

onde  $v_0^i = \Omega \delta_{\phi}^i$  é a velocidade do fluido na estrela não perturbada e  $\partial_{\nu'} = \partial_t + \Omega \partial_{\phi}$  é simplesmente a derivada em relação ao tempo no referencial em co-rotação ( $\phi' = \phi - \Omega t$  e  $t'$  são, respectivamente, as coordenadas azimutal e temporal de um observador num referencial em co-rotação com a estrela). Em ordem mais baixa em  $\Omega$ , estas equações admitem para  $\xi^{(1)i}$  a seguinte solução [4]:

$$\xi^{(1)r} = 0, \quad (2.20)$$

$$\xi^{(1)\theta} = -\frac{1}{2} \alpha C_{\ell} \ell (\ell + 1) \left( \frac{r}{R} \right)^{\ell-1} \sin^{\ell-1} \theta \cos(\ell \phi + \omega_{I} t), \quad (2.21)$$

$$\xi^{(1)\phi} = \frac{1}{2} \alpha C_{\ell} \ell (\ell + 1) \left( \frac{r}{R} \right)^{\ell-1} \sin^{\ell-2} \theta \cos \theta \sin(\ell \phi + \omega_{I} t). \quad (2.22)$$

Visto  $p_0$  só depender da coordenada radial,  $p_0 = p_0(r)$ ,  $\xi^{(1)r}$  ser nulo e  $\delta^{(1)} p$  ser proporcional a  $\Omega^2$  [ver Eq. (2.11)], concluímos que, em ordem mais baixa em  $\Omega$ , a perturbação lagrangiana da pressão  $\Delta_{\xi}^{(1)} p$  desaparece em toda a estrela, incluindo a superfície.

---

<sup>1</sup>Nos resultados que se seguem deixamos de considerar um referencial ortonormado e passamos a diferenciar as componentes covariantes das componentes contravariantes. As componentes contravariantes  $A^i$  e covariantes  $A_i$  estão relacionadas por  $A_i = g_{ij} A^j$ , onde as componentes da métrica,  $g_{ij}$ , são dadas, em coordenadas esféricas, por  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\theta\theta} = r^2$  e  $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$  e  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

Os deslocamentos lagrangianos (2.20)–(2.22) constituem um conjunto canónico, tal como é definido na teoria das perturbações lagrangianas de Friedman-Schutz para fluidos não relativistas [6], i.e., os deslocamentos  $\xi^{(1)}$  são ortogonais aos deslocamentos triviais  $\eta^{(1)i}$ , os quais satisfazem as Eqs. (2.18) e (2.19) com  $\delta^{(1)}v^i$  e  $\delta^{(1)}\rho$  iguais a zero,

$$0 = \partial_t \eta^{(1)i} + v_0^k \nabla_k \eta^{(1)i} - \eta^{(1)m} \nabla_m v_0^i, \quad (2.23)$$

$$0 = -\nabla_i (\rho_0 \eta^{(1)i}). \quad (2.24)$$

Assim, os deslocamentos lagrangianos  $\xi^{(1)i}$  e  $\hat{\xi}^{(1)i}$  correspondem à mesma perturbação física se  $\hat{\xi}^{(1)i} = \xi^{(1)i} + \eta^{(1)i}$ . Da condição de ortogonalidade de  $\xi^{(1)i}$  e  $\eta^{(1)i}$  resulta [6] que os deslocamentos lagrangianos canónicos satisfazem a condição

$$\epsilon^{ijk} \nabla_j \Delta_\xi^{(1)} v_k = 0, \quad (2.25)$$

onde a perturbação lagrangiana da velocidade é dada por

$$\Delta_\xi^{(1)} v_i = \partial_t \xi_i^{(1)} + v_0^k \nabla_k \xi_i^{(1)} + v_0^k \nabla_k \xi_i^{(1)}. \quad (2.26)$$

A condição (2.25) está directamente relacionada com uma propriedade dos modos  $r$  em primeira ordem: a conservação da vorticidade,

$$\Delta_\xi^{(1)} (\epsilon^{ijk} \nabla_j v_k) = 0. \quad (2.27)$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^{(1)} (\epsilon^{ijk} \nabla_j v_k) &= \Delta_\xi^{(1)} \epsilon^{ijk} \nabla_j v_{0k} + \epsilon^{ijk} \nabla_j \Delta_\xi^{(1)} v_k - \epsilon^{ijk} v_0^m \nabla_j \nabla_k \xi_m^{(1)} \\ &= \epsilon^{ijk} \nabla_j \Delta_\xi^{(1)} v_k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde usámos  $\Delta_\xi^{(1)} \epsilon^{ijk} = 0$ . Para estes deslocamentos, a energia canónica  $E_c$ , dada pela Eq. (1.33), é invariante relativamente a transformações de *gauge* (adição de um

deslocamento trivial), permitindo, assim, definir um critério de estabilidade [7]. Para os deslocamentos lagrangianos canónicos (2.20)–(2.22), a energia canónica  $E_c$  é negativa para qualquer  $\ell \geq 2$  e para uma rotação arbitrariamente lenta [8], implicando que os modos  $r$  são instáveis relativamente à emissão de radiação gravitacional [7]. Este resultado foi obtido analiticamente após Andersson [9] ter demonstrado, numericamente, que os modos  $r$  são instáveis em estrelas relativistas devido à emissão de ondas gravitacionais para qualquer valor da rotação.

A partir do trabalho de Andersson [9], o número de publicações sobre os modos  $r$  de pulsação conheceu um grande crescimento. De facto, existem outros modos de pulsação que também são instáveis devido à emissão de radiação gravitacional, mas a principal diferença e, por conseguinte, o principal interesse dos modos  $r$  de pulsação reside no facto de estes se tornarem instáveis em estrelas de fluido perfeito para *qualquer* valor da velocidade angular. Note-se que para os outros modos de pulsação esta instabilidade só se torna activa para valores elevados da velocidade angular da estrela.

A instabilidade dos modos  $r$  é explicada em termos do mecanismo descrito por Chandrasekhar [10] e Friedman e Schutz [7] (instabilidade CFS). Como vimos no capítulo anterior, o critério de existência da instabilidade CFS pode ser expresso na forma

$$\omega_I(\omega_I + \ell\Omega) < 0. \quad (2.29)$$

Substituindo  $\omega_I = -\ell\Omega + 2\Omega/(\ell + 1)$ , verificamos que para os modos  $r$  de pulsação o critério é satisfeito para qualquer  $\ell \geq 2$ .

No seu trabalho [9], Andersson frisou também o possível papel dos modos  $r$  de pulsação na limitação do período de rotação de estrelas de neutrões recém-nascidas. Efectivamente, como já mencionámos no capítulo anterior, o valor muito alto do período de rotação dos pulsares jovens relativamente ao período mínimo possível é

uma questão ainda em aberto para a qual os modos  $r$  aparecem como uma resposta plausível. Voltaremos a esta questão na secção seguinte.

Apesar dos resultados até aqui apresentados ignorarem a viscosidade, esta tem um papel preponderante na estabilização do modo, e portanto um efeito oposto à emissão de ondas gravitacionais. Na secção seguinte, analisaremos os efeitos da viscosidade na instabilidade do modo  $r$  de pulsação.

### 2.3 Modos $r$ em estrelas com viscosidade

Num estudo sobre os efeitos da viscosidade e da radiação gravitacional nos modos de oscilação de estrelas newtonianas com rotação rápida, Ipser e Lindblom propuseram um método para derivar as escalas temporais de variação destes efeitos [11]. Num primeiro tempo, assumiram que a frequência do modo de oscilação é dada por  $\omega_I = \omega_0 + i\varpi$ , de tal forma que a perturbação da velocidade  $\delta^{(1)}\vec{v}$  passa a ter, além da componente oscilatória  $e^{i\omega_0 t}$ , uma componente  $e^{-\varpi t}$ , que dependendo do sinal de  $\varpi$  vai levar ao crescimento ou à diminuição da amplitude do modo. Num segundo tempo, a fim de determinar o valor de  $\varpi$ , definiram uma energia das perturbações:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int \left[ \rho_0 \delta^{(1)}\vec{v} \cdot \delta^{(1)}\vec{v}^* + \frac{1}{2} (\delta^{(1)}\rho \delta^{(1)}U^* + \delta^{(1)}\rho^* \delta^{(1)}U) \right] d^3x, \quad (2.30)$$

onde o asterisco representa o complexo conjugado e  $\delta^{(1)}\vec{v}$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}U$  são as soluções das equações da hidrodinâmica, as quais incluem os efeitos da viscosidade e da radiação gravitacional. Como já anteriormente referimos, as quantidades  $\delta^{(1)}\vec{v}$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}U$  são proporcionais a  $e^{i\omega_I t}$ . Usando  $\omega_I = \omega_0 + i\varpi$  e a Eq. (2.30), obtém-se que  $E \propto e^{-2\varpi t}$ , de onde resulta que  $dE/dt = -2\varpi E$ . Definindo a escala temporal como

$\tau = 1/\varpi$ , obtemos

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt}, \quad (2.31)$$

a qual pode ser escrita como

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_V} + \frac{1}{\tau_{GR}} = -\frac{1}{2E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_V - \frac{1}{2E} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{GR}, \quad (2.32)$$

onde  $\tau_V$  e  $\tau_{GR}$  representam, respectivamente, as escalas temporais relativas aos efeitos da viscosidade e da radiação gravitacional. A fim de calcular  $dE/dt$  na Eq. (2.31), Ipser e Lindblom [11] derivaram em ordem ao tempo a energia dada pela Eq. (2.30) e eliminaram as derivadas temporais de  $\delta^{(1)}\vec{v}$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}U$  usando as equações da hidrodinâmica linearizadas (para um fluido viscoso e incluindo os efeitos da radiação gravitacional). Deste modo, expressaram as escalas temporais  $\tau_V$  e  $\tau_{GR}$  em função de  $\delta^{(1)}\vec{v}$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}U$ . Se os efeitos da viscosidade e da radiação gravitacional nas equações da hidrodinâmica forem pequenos, as soluções das equações da hidrodinâmica para um fluido perfeito constituem uma boa aproximação das soluções das equações que incluem os efeitos da viscosidade e da radiação gravitacional, pelo que para calcular  $\tau_V$  e  $\tau_{GR}$  Ipser e Lindblom usaram simplesmente  $\delta^{(1)}\vec{v}$ ,  $\delta^{(1)}\rho$  e  $\delta^{(1)}U$  dadas pelas Eqs. (2.8)–(2.11).

É de referir que Ipser e Lindblom estavam interessados nos modos  $f$  de pulsação, pelo que deduziram a escala temporal relativa à radiação gravitacional  $\tau_{GR}$  considerando apenas o momento multipolar de massa (os diversos termos da expansão multipolar da radiação gravitacional estão definidos na Ref. [12]).

O método de Ipser e Lindblom foi aplicado posteriormente aos modos  $r$  de oscilação nos artigos de Lindblom, Owen e Morsink [13] e Andersson, Kokkotas e Schutz [14]. Nestes artigos foram deduzidas as expressões explícitas para as escalas temporais de variação dos efeitos da radiação gravitacional e da viscosidade na evolução da perturbação. No cálculo de  $\tau_{GR}$  tiveram em conta que, no caso dos modos  $r$ , o

momento multipolar dominante é o de corrente. Consideraram dois tipos de viscosidade, a viscosidade de cisalhamento (*shear*) caracterizada pelo coeficiente  $\eta$ , inversamente proporcional ao quadrado da temperatura, e a viscosidade de volume (*bulk*) caracterizada pelo coeficiente  $\zeta$ , proporcional à sexta potência da temperatura. As expressões analíticas obtidas para cada escala temporal para os modos  $r$  foram as seguintes [13]:

$$\frac{1}{\tau_{GR}} = -\frac{32\pi G\Omega^{2\ell+2}}{c^{2\ell+3}} \frac{(\ell-1)^{2\ell}}{[(2\ell+1)!!]^2} \left(\frac{\ell+2}{\ell+1}\right)^{2\ell+2} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\tau_S} = (\ell-1)(2\ell+1) \int_0^R \eta r^{2\ell} dr \left( \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr \right)^{-1}, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{\tau_B} = \frac{4R^{2\ell-2}}{(\ell+1)^2} \int_V \zeta \left| \frac{\Delta_\xi^{(1)} \rho}{\rho_0} \right|^2 d^3x \left( \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr \right)^{-1}, \quad (2.35)$$

onde  $\tau_{GR}$ ,  $\tau_S$  e  $\tau_B$  são, respectivamente, as escalas temporais para a radiação gravitacional, a viscosidade de cisalhamento e a viscosidade de volume, e  $\Delta_\xi^{(1)} \rho = \delta^{(1)} \rho + \xi^{(1)i} \nabla_i \rho_0$  é a perturbação lagrangiana da densidade.

Das Eqs. (2.33)–(2.35) podemos imediatamente concluir que, para  $\ell \geq 2$ ,  $\tau_{GR} < 0$  e  $\tau_S, \tau_B > 0$ , pelo que enquanto a radiação gravitacional tende a tornar os modos  $r$  de pulsação instáveis, a viscosidade tende a estabilizá-los.

A escala temporal relativa à radiação gravitacional também foi obtida usando outro método. Dias e Sá [15] resolveram explicitamente para  $\ell = 2$  as equações da hidrodinâmica linearizadas na presença da força da radiação gravitacional, usando uma expansão pós-newtoniana até à ordem 3.5 para a força da radiação gravitacional. Demonstraram que a variação euleriana da velocidade tem o mesmo comportamento oscilatório e a mesma frequência que a variação euleriana da velocidade no caso em que a força de radiação gravitacional é nula. Também provaram que a amplitude da velocidade perturbada é proporcional a  $e^{-t/\tau_{GR}}$ , onde  $\tau_{GR}$  é dada pela Eq. (2.33). Finalmente, mostraram que a variação euleriana da velocidade possui

também termos proporcionais a  $\Omega^6$ .

Para determinar o valor numérico da escala temporal associada à viscosidade de volume,  $\tau_B$ , Lindblom, Owen e Morsink [13] usaram, na Eq. (2.35), a perturbação euleriana da densidade  $\delta^{(1)}\rho$  em vez da perturbação lagrangiana da densidade  $\Delta_\xi^{(1)}\rho$ . Efectivamente, em ordem mais baixa em  $\Omega$ ,  $\Delta_\xi^{(1)}\rho = 0$  [ver condição fronteira para a pressão, Eq. (2.17)], o que implica que  $1/\tau_B = 0$ . Assim, é necessário ir para a ordem seguinte, onde  $\Delta_\xi^{(1)}\rho \neq 0$ . Para o efeito, é preciso conhecer  $\vec{\xi}^{(1)}$  até à segunda ordem em  $\Omega$ , o qual só pode ser obtido a partir da resolução das Eqs. (2.5)–(2.7) até à ordem  $\Omega^4$ . Como Lindblom, Owen e Morsink não tinham esta solução, assumiram que  $\delta^{(1)}\rho$  é aproximadamente igual a  $\Delta_\xi^{(1)}\rho$ . Andersson, Kokkotas e Schutz calcularam o valor de  $\tau_B$  usando a perturbação lagrangiana da densidade  $\Delta_\xi^{(1)}\rho$  [14]. Para tal, resolveram as Eqs. (2.5)–(2.7), até à ordem  $\Omega^4$ , usando o formalismo desenvolvido por Saio [3]. Posteriormente, Lindblom, Mendell e Owen [5] usaram um outro formalismo, o dos dois potenciais [11], para resolver também as Eqs. (2.5)–(2.7) até à ordem  $\Omega^4$  e, deste modo, determinar o valor da perturbação lagrangiana da densidade  $\Delta_\xi^{(1)}\rho$ . Existe, no cálculo de  $\Delta_\xi^{(1)}\rho$ , uma discrepância entre os resultados obtidos por Andersson, Kokkotas e Schutz [14] e aqueles obtidos por Lindblom, Mendell e Owen [5], discrepância que proviria, segundo estes últimos autores, de alegados erros associados ao formalismo desenvolvido por Saio. Nesta tese, adoptamos para  $\tau_B$  o valor obtido por Lindblom, Mendell e Owen [5].

Lindblom, Owen e Morsink [13] aplicaram o método de Ipser e Lindblom [11] a uma estrela de neutrões, jovem, quente e com rotação lenta. Para o efeito, assumiram que uma estrela de neutrões é, em boa aproximação, modelada por uma esfera de fluido com equação de estado politrópica de índice 2,  $p_0 = \kappa\rho_0^2$ , onde  $\kappa$  é tal que a massa da estrela é  $M = 1.4M_\odot$  e o seu raio  $R = 12\,530$  m. Assim, considerando



apenas o modo  $\ell = 2$ , as expressões (2.33)–(2.35) podem ser simplificadas,

$$\frac{1}{\tau_{GR}} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{\tau_S} = \frac{1}{\tilde{\tau}_S} \left( \frac{10^9 \text{ K}}{T} \right)^2, \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{\tau_B} = \frac{1}{\tilde{\tau}_B} \left( \frac{T}{10^9 \text{ K}} \right)^6 \left( \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^2, \quad (2.38)$$

onde  $\tilde{\tau}_{GR} = -3.26 \text{ s}$ ,  $\tilde{\tau}_S = 2.52 \times 10^8 \text{ s}$  [13] e  $\tilde{\tau}_B = 2.01 \times 10^{11} \text{ s}$  [5]. Nas expressões anteriores,  $T$  denota a temperatura da estrela e  $\bar{\rho}$  é a sua densidade média.

Analisando as expressões (2.36)–(2.38), notamos que existe um conjunto de temperaturas  $T$  e de velocidades angulares  $\Omega$ , para o qual se verifica a relação  $-\tau_{GR}^{-1} = \tau_S^{-1} + \tau_B^{-1}$ , ou seja, para o qual o efeito da viscosidade é exactamente compensando pelo efeito da radiação gravitacional. Assim, de acordo com a Eq. (2.31), a energia do modo neste caso mantém-se constante e a sua amplitude não aumenta nem diminui.

Num diagrama  $(\Omega, T)$ , os pontos que satisfazem a equação

$$\frac{1}{\tau(\Omega, T)} = \frac{1}{\tau_{GR}(\Omega)} + \frac{1}{\tau_S(T)} + \frac{1}{\tau_B(\Omega, T)} = 0 \quad (2.39)$$

definem uma curva a que se chama curva de instabilidade (ver Fig. 2.1). Para uma dada temperatura existe um valor da velocidade angular, a que chamamos velocidade angular crítica  $\Omega_c$ , acima da qual a instabilidade já se encontra activa.

Como vemos na Fig. 2.1, há uma “janela” de temperaturas dentro da qual a instabilidade dos modos  $r$  está activa. Como a viscosidade de cisalhamento tende a estabilizar o modo para valores baixos da temperatura e a viscosidade de volume domina para temperaturas elevadas, esta janela corresponde a valores intermédios da temperatura. A forma desta janela vai depender de vários factores, entre os quais, a composição e a equação de estado da estrela de neutrões, a existência ou

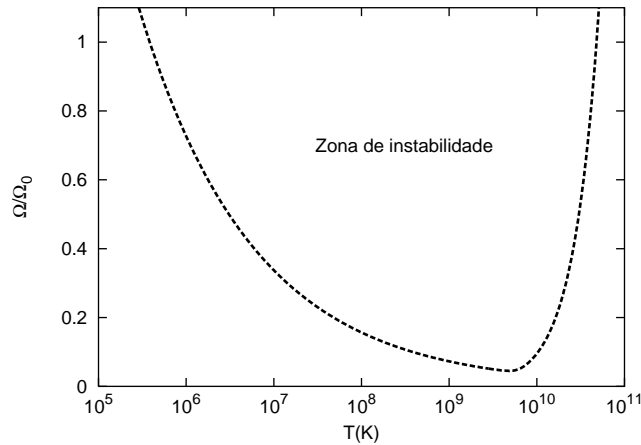


Figura 2.1: Curva de instabilidade dos modos  $r$  em função da velocidade angular e da temperatura da estrela.

não de uma crusta e a presença de campos magnéticos. A influência destes diversos factores sobre a instabilidade do modo  $r$  será analisada na Sec. 2.5.

Na secção seguinte, analisaremos um modelo simples de evolução da instabilidade do modo  $r$ , considerando apenas a viscosidade de cisalhamento e a de volume na determinação da curva de instabilidade.

## 2.4 Evolução da instabilidade dos modos $r$

Um modelo de evolução da instabilidade do modo  $r$  de pulsação permite-nos verificar se a instabilidade tem a possibilidade de crescer durante um tempo suficientemente longo para que o modo  $r$  seja astrofisicamente relevante.

Owen *et al.* [16] propuseram um modelo simples para estudar a evolução dos modos  $r$ , com o objectivo de determinar a forma das ondas gravitacionais que eram produzidas devido à instabilidade do modo  $r$  numa estrela de neutrões quente, jovem

e com rotação rápida. Para atingir este objectivo é necessário estudar o comportamento da estrela de neutrões ao longo da evolução da instabilidade.

De acordo com o modelo de Owen *et al.* [16], a evolução da estrela e do modo  $r$  de pulsação é caracterizada por duas grandezas, a amplitude do modo,  $\alpha$ , e a velocidade angular da estrela,  $\Omega$ . Consideraram que, inicialmente, a amplitude do modo  $r$  é muito pequena (por exemplo,  $\alpha_0 = 10^{-6}$ ), pelo que a evolução do modo é descrita de forma adequada pela teoria linear. Assumiram ainda que, inicialmente, a velocidade angular da estrela é a máxima possível,  $\Omega_0 = \Omega_K = \frac{2}{3}\sqrt{\pi G \bar{\rho}}$ . Neste modelo, o momento angular total da estrela depende apenas da velocidade angular da estrela e da amplitude do modo  $r$ , sendo dado por

$$J(\alpha, \Omega) = I\Omega + J_c(\alpha, \Omega), \quad (2.40)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da estrela não perturbada e  $J_c$  é o momento angular canónico do modo  $r$  (tal como é definido Eq. (3.25) do próximo capítulo). É de referir que Owen *et al.* [16] consideraram que o momento angular físico do modo  $r$  em segunda ordem é sempre igual ao momento angular canónico; como veremos no próximo capítulo, este resultado só se verifica num caso muito particular. No caso geral, estas duas quantidades são diferentes.

Como veremos a seguir, as estrelas de neutrões estudadas por Owen *et al.* [16] têm, inicialmente, uma velocidade angular elevada ( $\Omega \approx \Omega_K$ , onde  $\Omega_K$  é a velocidade angular de Kepler) e, após algumas centenas de segundos de evolução, a amplitude do modo  $r$  cresce para valores próximos da unidade ( $\alpha \approx 1$ ). Em rigor, nestas condições extremas, Owen *et al.* deviam usar, para calcular  $J_c$ , uma solução geral das Eqs. (2.2)–(2.4), válida para  $\Omega$  e  $\alpha$  arbitrários. Contudo, tal solução analítica não é conhecida, pelo que é usada a solução (2.20)–(2.22), válida para  $\Omega \ll \Omega_K$  e  $\alpha \ll 1$ . Estudos numéricos mostram, no entanto, que a evolução dos modos  $r$  em

estrelas de neutrões com velocidade de rotação elevada não difere significativamente da evolução em estrelas lentas [17], pelo que os resultados de Owen *et al.* são válidos numa boa aproximação.

Partindo da Eq. (2.40) para o momento angular total e considerando, por um lado, que a estrela perde momento angular sob a forma de ondas gravitacionais devido à instabilidade do modo  $r$  e, por outro lado, que a viscosidade dificulta o crescimento do modo, Owen *et al.* [16] obtiveram o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2\Omega}{\tau_V} \frac{\alpha^2 Q}{1 + \alpha^2 Q}, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha}{\tau_{GR}} - \frac{\alpha}{\tau_V} \frac{1 - \alpha^2 Q}{1 + \alpha^2 Q}, \quad (2.42)$$

onde  $Q = 9.4 \times 10^{-2}$  no modelo politrópico considerado. Estas duas equações determinam a evolução da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ , e da amplitude do modo,  $\alpha$ , na fase inicial da evolução, i.e., quando a amplitude do modo é ainda suficientemente pequena para que a teoria linear seja válida. Numa estrela de neutrões jovem, a temperatura é muito elevada ( $T \gg 10^9$  K), pelo que, de acordo com as Eqs. (2.36)–(2.38), a escala temporal associada à radiação gravitacional,  $\tau_{GR}$ , é muito menor do que as escalas temporais associadas à viscosidade,  $\tau_S$  e  $\tau_B$ .

Analisando as Eqs. (2.41) e (2.42), notamos que durante a fase linear da evolução, a velocidade angular da estrela,  $\Omega$ , é praticamente constante, evoluindo na escala temporal da viscosidade, enquanto a amplitude do modo  $\alpha$  cresce exponencialmente na escala temporal da radiação gravitacional. Após aproximadamente 500 s [16], a amplitude do modo torna-se tão elevada que já não se podem ignorar os efeitos não lineares. Contudo, Owen *et al.* [16] desconheciam a solução não linear dos modos  $r$ , pelo que não possuíam as ferramentas necessárias para descrever com precisão a fase de evolução não linear. Não tendo nenhum mecanismo não linear de saturação disponível, optaram por saturar o modo  $r$  à mão, escolhendo um valor de saturação

próximo da unidade. O valor escolhido para a amplitude de saturação é justificado pela analogia entre este estudo e estudos sobre os efeitos da radiação gravitacional na evolução dos modelos elipsoidais [18, 19]. Neste último caso, o modo instável cresce exponencialmente até atingir uma amplitude da ordem da unidade. A partir deste momento, ocorre uma espécie de saturação não linear que faz parar o crescimento do modo. O excesso de momento angular da estrela é emitido sob a forma de ondas gravitacionais e a estrela evolui para um novo estado de equilíbrio com momento angular menor. Owen *et al.* [16] esperavam uma evolução idêntica para os modos  $r$ .

Assim, durante a primeira fase de evolução, a amplitude do modo  $r$  cresce exponencialmente. Quando atinge o valor

$$\alpha = \alpha_{sat} = \sqrt{\kappa} \quad (2.43)$$

(onde  $\kappa$  é uma constante da ordem da unidade), entramos na fase não linear da evolução do modo e as Eqs. (2.41) e (2.42) deixam de ser adequadas para descrever o sistema. Durante a fase não linear, a amplitude do modo  $\alpha$  é dada pela Eq. (2.43) e a evolução da velocidade angular é determinada pela equação [16]

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\Omega}{\tau_{GR}} \frac{\kappa Q}{1 - \kappa Q}. \quad (2.44)$$

No decurso desta fase, a velocidade angular da estrela diminui (na escala temporal associada à radiação gravitacional) para valores muito inferiores à sua velocidade angular inicial, a velocidade de Kepler  $\Omega_K$ , e uma parte importante do seu momento angular inicial é emitida sob a forma de ondas gravitacionais.

Ao fim de aproximadamente um ano (segundo as simulações numéricas de Owen *et al.* [16]), a velocidade angular e a temperatura da estrela de neutrões já são suficientemente pequenas para que o modo  $r$  deixe de ser instável, i.e., a estrela sai da janela de instabilidade apresentada na Fig. 2.1. A evolução do modo  $r$  passa a ser

novamente descrita pelas Eqs. (2.41) e (2.42). Durante esta última fase da evolução, a amplitude do modo diminui e torna-se de novo suficientemente pequena para ser descrita pela teoria linear.

Resumindo, no modelo de evolução de Owen *et al.* [16], podemos distinguir três fases. Durante a primeira fase a amplitude do modo cresce exponencialmente, enquanto a velocidade angular da estrela se mantém aproximadamente constante. Depois, a amplitude do modo é saturada à mão num valor próximo da unidade devido a efeitos hidrodinâmicos não lineares não especificados, seguindo-se uma segunda fase, que dura aproximadamente um ano, em que a velocidade angular diminui de maneira significativa e uma parte importante do momento angular da estrela é irradiada sob a forma de ondas gravitacionais. Finalmente, durante a terceira fase, a amplitude do modo decresce e a velocidade angular da estrela continua a diminuir muito lentamente.

Com base no modelo acima descrito, considerando uma amplitude inicial do modo  $r$   $\alpha_0 = 10^{-6}$  e uma velocidade angular inicial da estrela igual a  $\Omega_K$ , Owen *et al.* [16] concluíram que, ao fim de aproximadamente um ano, a estrela abrandaria para uma velocidade angular de aproximadamente  $0.1\Omega_K$ . Este último resultado está de acordo com os valores observados em pulsares jovens.

Usando o seu modelo de evolução, Owen *et al.* [16] analisaram a possibilidade de detectar ondas gravitacionais emitidas por estrelas de neutrões recém-formadas em que a instabilidade do modo  $r$  se encontra activa, concluindo que o sinal poderia ser detectado, por detectores de interferometria laser como o LIGO e o Virgo, se as estrelas de neutrões emissoras estivessem a uma distância da Terra inferior a 20 Mpc.

O modelo de evolução proposto por Owen *et al.* [16] permite-nos estudar a evolução da instabilidade do modo  $r$  de pulsação a partir das duas grandezas funda-

mentais que são a velocidade angular da estrela e a amplitude do modo. No entanto, este modelo de evolução não descreve satisfatoriamente o que acontece durante a fase não linear. A opção de Owen *et al.* [16] de saturar a amplitude do modo à mão introduz um critério arbitrário que torna os resultados finais pouco fidedignos.

As Figs. 2.2 e 2.3 mostram os primeiros 1000 s da evolução de  $\alpha$  e  $\Omega$ , respectivamente, para diferentes valores da amplitude de saturação. Nestas figuras, além do valor  $\alpha_{sat} \approx 1$  escolhido por Owen *et al.* [16], consideram-se ainda outros valores da amplitude de saturação que, sabemos hoje, são mais realistas.

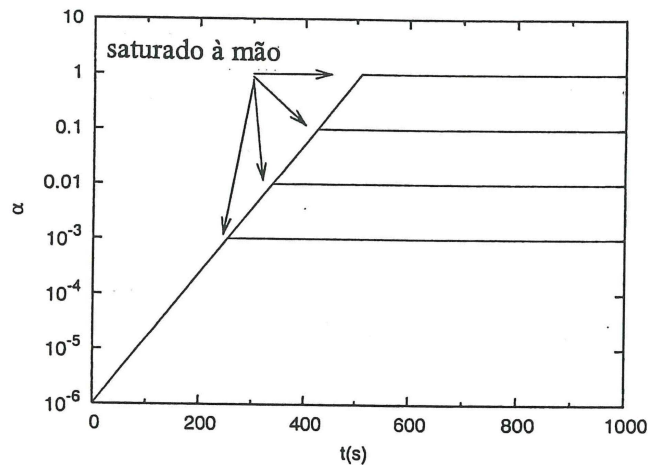


Figura 2.2: Evolução da amplitude do modo,  $\alpha$ , em função do tempo, para diferentes valores de saturação da amplitude do modo.

Vemos, na Fig. 2.3, que a velocidade angular da estrela depende sensivelmente do valor da amplitude de saturação. Como este último é escolhido arbitrariamente, o valor final da velocidade angular também é arbitrário. Assim, se em vez de escolhermos um valor de saturação para  $\alpha$  próximo da unidade, como sugerido por Owen *et al.* [16], considerarmos amplitudes de saturação muito inferiores à unidade, verificamos que a velocidade angular final da estrela já não diminui significativamente. Do mesmo modo, para amplitudes de saturação  $\alpha_{sat} \ll 1$ , o momento angular emi-

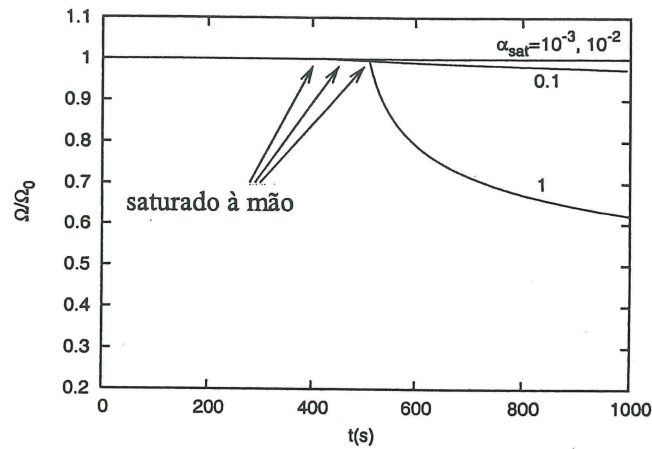


Figura 2.3: Evolução da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ , em função do tempo, para diferentes valores de saturação da amplitude do modo.

tido pela estrela sob a forma de ondas gravitacionais é apenas uma pequena fracção do momento angular inicial. Assim, devido à arbitrariedade na escolha da amplitude de saturação, o modelo de evolução proposto por Owen *et al.* [16] não nos permite concluir sobre a relevância astrofísica dos modos  $r$ . Para o efeito, é preciso considerar os efeitos não lineares, o que nos propomos fazer no capítulo 4 desta tese.

Uma vez definido um modelo de evolução da instabilidade para estrelas com viscosidade de volume e de cisalhamento, as publicações subsequentes debruçaram-se sobre modelos de estrelas de neutrões mais realistas e verificaram se, nestas condições, a instabilidade dos modos  $r$  continuava activa para valores relevantes da temperatura e velocidade angular da estrela. Assim, alguns autores introduziram um campo magnético, outros consideraram os efeitos da crusta ou ainda a existência de matéria estranha.



## 2.5 Modos $r$ em estrelas de neutrões com crusta

Como referimos no capítulo anterior, todas as estrelas de neutrões, excepto as mais quentes, possuem uma crusta sólida com espessura de alguns quilómetros. A presença da crusta aumenta os efeitos dissipativos, o que leva a uma redução do tamanho da “janela” de instabilidade do modo  $r$  [20]. De facto, quando se tem em conta a presença da crusta, a curva de instabilidade passa a ser definida por

$$\frac{1}{\tau(\Omega, T)} = \frac{1}{\tau_{GR}(\Omega)} + \frac{1}{\tau_S(T)} + \frac{1}{\tau_B(\Omega, T)} + \frac{1}{\tau_C(\Omega, T)} = 0, \quad (2.45)$$

onde  $\tau_C$  é a escala temporal associada aos efeitos dissipativos provocados pela presença da crusta. Assim, é importante verificar se em estrelas de neutrões com crusta a instabilidade dos modos  $r$  está activa para valores relevantes da temperatura e velocidade angular da estrela.

Entre os vários trabalhos que estudaram a instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões com crusta, diferentes modelos foram propostos. Bildsten e Ushomirsky assumiram uma crusta sólida e infinitamente rígida, onde as oscilações do modo  $r$  não podem penetrar [20]. Esta crusta envolve um núcleo de fluido viscoso, no qual os modos  $r$  de oscilação estão activos. Devido a estas oscilações a camada superficial do núcleo é friccionada contra a crusta rígida, levando à dissipação de energia do modo  $r$ . Esta dissipação de energia é tal que a escala temporal associada à viscosidade é muito menor do que para uma estrela de fluido sem crusta, tornando-se comparável à escala temporal da radiação gravitacional. Assim, a janela de instabilidade é, neste caso, muito menor do que numa estrela sem crusta e, conseqüentemente, para qualquer valor da temperatura, o valor mínimo da velocidade angular crítica é da ordem de  $0.3\Omega_K$  [20]. Assim, o valor final da velocidade angular da estrela, em resultado da evolução da instabilidade do modo  $r$ , é superior a  $0.3\Omega_K$ , ou seja, muito maior do

que os valores observados em pulsares jovens. Por outro lado, a instabilidade só vai estar activa durante  $10^4$  s em vez de aproximadamente 1 ano (como no caso sem crusta), o que implica uma quantidade menor de ondas gravitacionais emitidas.

Posteriormente, Andersson *et al.* [21], considerando também uma crusta rígida e usando diferentes parâmetros para a estrela de neutrões, chegaram à conclusão que a janela de instabilidade é um pouco maior do que no modelo analisado por Bildsten e Ushomirsky e, conseqüentemente, obtiveram valores para velocidade angular crítica mínima um pouco inferiores a  $0.3\Omega_K$ .

Levin e Ushomirsky [22] consideraram um modelo mais realista, em que a crusta é elástica. Neste caso, os modos  $r$  já penetram na crusta e esta começa a oscilar com as camadas superficiais do fluido viscoso, pelo que a dissipação de energia é muito menor do que no caso da crusta rígida. Deste modo, a escala temporal associada à viscosidade é muito menos afectada pela presença da crusta, sendo cerca de 100 vezes maior do que aquela obtida por Bildsten e Ushomirsky, levando o tamanho da janela de instabilidade a aumentar relativamente ao caso da crusta rígida. Assim, para qualquer valor da temperatura, o valor mínimo da velocidade angular crítica é inferior àquele obtido por Bildsten e Ushomirsky, e, por conseguinte, o valor da velocidade angular final da estrela devido à instabilidade do modo  $r$  também.

Lindblom, Owen e Ushomirsky [23] avançaram a possibilidade do derretimento da crusta como consequência da instabilidade dos modos  $r$ . Efectivamente, se a amplitude de saturação do modo for maior ou igual a um determinado valor crítico ( $\alpha_{sat} = 5 \times 10^{-3}$  para estrelas com velocidade angular  $\Omega = \Omega_K$ ), o calor resultante da fricção entre a camada superior do núcleo e a crusta pode ser suficiente para derreter a crusta. Neste caso, Lindblom, Owen e Ushomirsky mostraram que a velocidade angular final da estrela, em resultado da evolução da instabilidade do modo  $r$ , é da mesma ordem de grandeza do que aquela obtida no caso sem crusta.

Em resumo, ao contrário do que foi sugerido inicialmente, o efeito da crusta sobre a evolução da instabilidade do modo  $r$  é muito pequeno. Assim, modelos de estrelas sem crusta permitem-nos descrever de forma mais simples a evolução da instabilidade do modo  $r$ , sem alteração significativa dos resultados finais.

## 2.6 Estrelas de neutrões com um campo magnético

Supondo que uma estrela de neutrões é o resultado do colapso gravitacional de uma estrela da sequência principal com um campo magnético de 100 G “congelado” na sua superfície, uma diminuição do raio de um factor de  $10^5$  provoca um aumento do campo magnético de um factor de  $10^{10}$ . Assim, uma estrela de neutrões pode possuir um campo magnético da ordem de  $10^{12}$  G.

Rezzolla *et al.* [24] foram os primeiros a sugerir a existência de rotação diferencial associada ao modo  $r$ , tendo obtido uma expressão analítica aproximada para a rotação diferencial induzida pelos modos  $r$ . Esta expressão foi obtida a partir da variação euleriana de primeira ordem da velocidade de um elemento de fluido, expandida em potências da amplitude do modo, fazendo a média sobre uma oscilação e conservando unicamente os termos de ordem mais baixa. Rezzolla *et al.* [24, 25, 26] investigaram a influência do campo magnético de uma estrela de neutrões na evolução da instabilidade dos modos  $r$  a partir da análise da interacção da rotação diferencial induzida pelos modos  $r$  com o campo magnético. Mostraram que o campo magnético inicialmente presente na estrela vai enrolar-se em torno desta devido à rotação diferencial que produz derivas em grande escala de elementos de fluido, na direcção azimutal. Assim, a interacção entre a rotação diferencial induzida pelos modos  $r$  e o campo magnético da estrela é tal que uma parte da energia da osci-

lação é transferida para o campo magnético. Dependendo, então, da amplitude do campo magnético inicial, o crescimento da instabilidade do modo  $r$  pode ser atenuado ou, até, a instabilidade pode não ter a possibilidade de se activar (para campos magnéticos suficientemente fortes). Paralelamente, o campo magnético inicial da estrela é amplificado devido à transferência de energia dos modos  $r$ , podendo até explicar a existência de “magnetars” (pulsares com campos magnéticos superiores a  $10^{15}$  G). É de referir que apesar das conclusões serem muito interessantes, nos artigos de Rezzolla *et al.* assumiu-se que a estrutura dos modos  $r$  de oscilação não era afectada pela presença do campo magnético, ou seja, assumiu-se que a velocidade de elementos de fluido numa estrela magnetizada é dada pelas Eqs. (2.8)–(2.10). Um estudo mais realista deverá ter em conta a reacção do campo magnético na estrutura dos modos  $r$ , a qual pode ser significativamente alterada, levando eventualmente a outro tipo de conclusões.

Num artigo subsequente, Ho e Lai [27] investigaram o efeito de um campo magnético na evolução da instabilidade do modo  $r$  de oscilação, usando o modelo proposto por Owen *et al.*. Assumiram também que o momento angular físico do modo  $r$  era dado pelo momento angular canónico, afirmação, que, como já referimos, não é verdadeira no caso geral. O efeito do campo magnético foi introduzido, considerando, nas equações que determinam a evolução de  $\alpha$  e  $\Omega$ , uma escala temporal suplementar associada ao campo magnético e que favorece o crescimento da instabilidade. O efeito do campo magnético só se torna relevante para valores muito elevados (muito maiores do que  $10^{14}$  G); nestes casos, o crescimento da instabilidade faz-se mais lentamente e, como a janela de instabilidade é maior, o valor final da velocidade angular da estrela diminui nitidamente. Ho e Lai sugeriram também que a análise da forma das ondas gravitacionais emitidas e do valor da velocidade angular final da estrela poderia, eventualmente, permitir o constrangimento da amplitude

do campo magnético na estrela de neutrões.

Estes resultados mostraram a importância de incluir o campo magnético num estudo completo dos modos  $r$ , visto que a sua influência pode ser decisiva para a evolução da instabilidade.

## 2.7 Estrelas de neutrões com matéria exótica

Como referimos no primeiro capítulo, a composição da região central das estrelas de neutrões é ainda uma questão em aberto. Várias hipóteses foram avançadas, entre as quais, devido às condições extremas, a presença de matéria exótica. Alguns autores debruçaram-se sobre a eventual influência da matéria exótica na evolução da instabilidade do modo  $r$ .

Jones [28] foi o primeiro a propor que a presença de hiperões no núcleo da estrela de neutrões poderia alterar o coeficiente de viscosidade de volume e, logo, influenciar a instabilidade dos modos  $r$ . De facto, a escala temporal associada à viscosidade de volume é suficientemente pequena para impedir o desenvolvimento da instabilidade. Com o objectivo de melhorar a análise anterior, Lindblom e Owen [29] consideraram as propriedades da matéria nuclear no núcleo da estrela. Esta análise mostrou que a viscosidade de volume devida aos hiperões suprimia totalmente a instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões com temperaturas inferiores a  $10^9$  K.

No entanto, ainda subsistem muitas dúvidas acerca da natureza da matéria exótica em estrelas de neutrões. Estas estrelas poderiam ter um núcleo de quarks *up*, *down* e *strange* desconfiados, as chamadas estrelas estranhas. Neste caso, Madsen [30] mostrou que o coeficiente de viscosidade de volume é maior do que em estrelas de neutrões usuais, deslocando, assim, a janela de instabilidade para valores

da temperatura menores. Por conseguinte, em estrelas estranhas jovens, a instabilidade dos modos  $r$  não se activa, pelo que estas estrelas deveriam possuir uma velocidade angular final maior do que estrelas de neutrões usuais. Segundo Andersson, Jones e Kokkotas [31] os modos  $r$  em estrelas estranhas deveriam emitir um sinal de ondas gravitacionais persistente que poderia ser detectado por detectores de interferometria laser, como o LIGO e o Virgo, durante um período de observação de semanas a meses. A observação de um sinal deste tipo poderia ser uma prova indiscutível da existência de estrelas estranhas e, ao mesmo tempo, poderia constranger os parâmetros da Cromodinâmica Quântica. Finalmente, estudando o efeito da instabilidade do modo  $r$  sobre a evolução de uma estrela estranha, Zheng, Yu e Li [32] sugeriram que se o campo magnético não for muito elevado então a estrela demora milhões de anos para arrefecer devido à instabilidade do modo  $r$ .

Estes trabalhos mostram que a influência da matéria exótica sobre a instabilidade do modo  $r$  permanece uma questão em aberto devido à complexidade dos mecanismos envolvidos e às incertezas relativamente à composição exacta das estrelas de neutrões.

Apresentámos, neste capítulo, um resumo dos trabalhos realizados nos últimos anos sobre os modos  $r$  lineares. Apesar de estes estudos terem elucidado muitas características interessantes dos modos  $r$  não permitiram determinar o valor da amplitude de saturação do modo. De facto, a amplitude de saturação, de fulcral importância, é determinada pelos efeitos não lineares, pelo que se torna imprescindível estudar a evolução da instabilidade do modo  $r$  no âmbito da teoria não linearizada. Este é o objectivo do próximo capítulo.

## Referências

- [1] J. Papaloizou e J. E. Pringle, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **182** (1978) 423.
- [2] J. Provost, G. Berthomieu e A. Rocca, *Astron. Astrophys.* **94** (1981) 126.
- [3] H. Saio, *Astrophys. J.* **256** (1982) 717.
- [4] P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 084001.
- [5] L. Lindblom, G. Mendel e B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 064006.
- [6] J. L. Friedman e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **221** (1978) 937.
- [7] J. L. Friedman e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **222** (1978) 281.
- [8] J. L. Friedman e S. M. Morsink, *Astrophys. J.* **502** (1998) 714.
- [9] N. Andersson, *Astrophys. J.* **502** (1998) 708.
- [10] S. Chandrasekhar, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 611.
- [11] J. R. Ipser e L. Lindblom, *Astrophys. J.* **373** (1991) 213.
- [12] K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **158** (1969) 997.
- [13] L. Lindblom, B. J. Owen e S. M. Morsink, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4843.
- [14] N. Andersson, K. Kokkotas e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **510** (1999) 846.
- [15] Ó. J. C. Dias e P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 024020.
- [16] B. J. Owen, L. Lindblom, C. Cutler, B. F. Schutz, A. Vecchio e N. Andersson, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 084020.

- [17] S'i. Yoshida, S. Karino, S. Yoshida e Y. Eriguchi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **316** (2000) L1.
- [18] S. L. Detweiler e L. Lindblom, *Astrophys. J.* **213** (1977) 193.
- [19] D. Lai e S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **442** (1995) 259.
- [20] L. Bildsten e G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **529** (2000) L33.
- [21] N. Andersson, D. I. Jones, K. D. Kokkotas e N. Stergioulas, *Astrophys. J.* **534** (2000) L75.
- [22] Yu. Levin e G. Ushomirsky, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **324** (2001) 917.
- [23] L. Lindblom, B. J. Owen e G. Ushomirsky, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 084030.
- [24] L. Rezzolla, F. K. Lamb e S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **531** (2001) L139.
- [25] L. Rezzolla, F. K. Lamb, D. Markovic e S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 104013.
- [26] L. Rezzolla, F. K. Lamb, D. Markovic e S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 104014.
- [27] W. C. G. Ho e D. Lai, *Astrophys. J.* **543** (2000) 386.
- [28] P. B. Jones, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 084003.
- [29] L. Lindblom e B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 063006.
- [30] J. Madsen, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3311.
- [31] N. Andersson, D. I. Jones e K. D. Kokkotas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **337** (2002) 1224.



- [32] X. Zheng, Y. Yu e J. Li, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **369** (2006) 376.

# Capítulo 3

## Modos $r$ não lineares

### 3.1 Introdução

A primeira fase de crescimento da instabilidade dos modos  $r$  é adequadamente descrita pela teoria linear. No entanto, quando a amplitude do modo atinge valores próximos da unidade, a teoria linear deixa de ser válida para descrever a evolução do modo. É importante compreender o que acontece no regime não linear, visto que são efeitos não lineares que levam à saturação da amplitude do modo  $r$ , impedindo que este cresça infinitamente. Antes dos primeiros trabalhos no âmbito da teoria não linear, o modo  $r$  era saturado à mão, como no modelo fenomenológico de evolução de Owen *et al.* [1]. O valor escolhido para a amplitude de saturação era aquele em que, supostamente, o modo  $r$  saturaria se fossem considerados os efeitos não lineares. Esta escolha era justificada qualitativamente por analogia com os resultados obtidos no caso dos elipsóides [2, 3]. No entanto, como já referimos no capítulo anterior, a arbitrariedade na escolha da amplitude de saturação do modo  $r$  tornava as conclusões obtidas no âmbito da teoria linear pouco fidedignas.

Todos os estudos consagrados aos modos  $r$  não lineares partilham o mesmo objetivo, determinar o valor de saturação da amplitude do modo. Os primeiros estudos foram numéricos. Stergioulas e Font [4] resolveram numericamente as equações relativistas da hidrodinâmica para estrelas com rotação rápida sem ter em conta a força de reacção da radiação gravitacional. A ausência da força de reacção da radiação gravitacional nas equações não permite estudar a evolução da instabilidade do modo, mas apenas a interacção entre os vários modos e mais precisamente a transferência de energia. Partindo de um valor inicial próximo da unidade para a amplitude do modo, mostraram que a transferência de energia entre os modos não é significativa. Verificaram ainda que surgia rotação diferencial. No entanto, a precisão da análise

numérica não era suficiente para confirmar se esta rotação diferencial era a mesma que havia sido prevista por Rezzolla *et al.* [5].

Lindblom, Tohline e Vallisneri [6, 7] também resolveram numericamente as equações da hidrodinâmica mas no caso newtoniano e tendo em conta a força de reacção da radiação gravitacional. Visto que o tempo real de crescimento da amplitude do modo devido ao efeito desta força é demasiado longo para um estudo numérico, consideraram uma força de reacção da radiação gravitacional artificialmente amplificada. Neste caso, mostraram que o modo cresce até valores superiores à unidade. Nessa altura, ondas de choque na superfície da estrela provocam a diminuição brusca da amplitude do modo. Também nestes estudos numéricos surgiu rotação diferencial, que se encontra confinada a uma camada de espessura infinitesimal na superfície da estrela.

Mais tarde, Arras *et al.* [8] estudaram analiticamente a interacção entre modos. Para o efeito, consideraram a teoria das perturbações até à segunda ordem na amplitude do modo e, negligenciando o acoplamento com ordens superiores, reduziram a descrição da evolução não linear à análise de um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas para as amplitudes dos diferentes modos do sistema. Mostraram que, devido à interacção entre os modos, o modo perde energia levando à saturação da amplitude. O valor obtido para a amplitude de saturação do modo, em torno de  $10^{-3} - 10^{-2}$ , é nitidamente menor do que aquele escolhido por Owen *et al.* [1], mostrando que a interacção entre os modos representa um mecanismo de saturação eficiente para a amplitude do modo  $r$ . Este resultado difere daqueles obtidos nos estudos numéricos descritos anteriormente [4, 6, 7]. No entanto, a validade dos estudos numéricos pode ser contestada tendo em conta as metodologias usadas. No primeiro estudo, Stergioulas e Font [4] não tiveram em conta o efeito da força de reacção da radiação gravitacional, não permitindo o crescimento da instabilidade e,

por conseguinte, a saturação da amplitude do modo. No segundo estudo, Lindblom, Tohline e Vallisneri [6, 7] consideraram a força de reacção da radiação gravitacional amplificada artificialmente. Mas será que amplificar a força de radiação gravitacional produz o mesmo resultado ou, pelo menos, um resultado semelhante a uma integração numérica durante o tempo completo da evolução? Segundo Arras *et al.* [8], fazendo um paralelo com o efeito do vento sobre as ondas do mar, não se pode comparar o crescimento lento das ondas na superfície da água devido a uma ligeira brisa com o efeito de um tornado.

Em artigos subsequentes, Brink, Teukolsky e Wasserman [9, 10] integraram numericamente um conjunto de aproximadamente 5000 modos acoplados e mostraram que o crescimento linear do modo cessava antes deste atingir uma amplitude de  $10^{-3}$ .

Usando o modelo proposto por Owen *et al.* [1] (ver Sec. 2.4), Arras *et al.* [8] analisaram a detectabilidade das ondas gravitacionais devidas à instabilidade do modo  $r$  no caso em que há interacção não linear entre modos. Apesar da amplitude de saturação do modo ser muito menor do que a unidade, mostraram que ainda existia a possibilidade do sinal emitido por estrelas de neutrões recém-formadas ser detectado pela versão avançada do detector de interferometria laser LIGO se a fonte emissora estivesse a uma distância da Terra inferior a 100 – 200 kpc.

Além da interacção entre vários modos, podemos ainda considerar a auto-interacção do modo  $r$ , que produz rotação diferencial. Rezzolla *et al.* [5] foram os primeiros a sugerir a existência de rotação diferencial de origem cinemática e também a deduzir, no âmbito da teoria linear, uma expressão analítica aproximada. Posteriormente, usando um modelo muito simplificado, que consistia num fluido perfeito incompressível numa camada esférica de espessura infinitesimal, e considerando o efeito da força de reacção da radiação gravitacional, Levin e Ushomirsky [11] mostraram a existência de outro tipo de rotação diferencial, uma rotação diferencial induzida

pela força de reacção da radiação gravitacional. Finalmente, Sá [12] encontrou a expressão analítica exacta da rotação diferencial induzida pelo modo  $r$ , em segunda ordem na amplitude do modo, para estrelas newtonianas de fluido perfeito barotrópico com velocidade angular constante. Esta rotação diferencial de origem puramente cinemática constitui, como mostraremos no próximo capítulo, um mecanismo muito eficiente de saturação do modo  $r$ .

### 3.2 Primeiras abordagens à rotação diferencial

Rezzolla *et al.* [5, 13, 14] incluíram na análise da evolução da instabilidade do modo  $r$  a influência dos campos magnéticos, os quais, como vimos no primeiro capítulo, se encontram presentes nas estrelas de neutrões. Rezzolla *et al.* estudaram o acoplamento entre o campo magnético e o modo  $r$  e as suas consequências na evolução da instabilidade. Mostraram que as propriedades cinemáticas das oscilações do modo  $r$  dão origem a rotação diferencial que, acoplada ao campo magnético pré-existente na estrela, leva ao aparecimento de campos magnéticos toroidais que crescem exponencialmente à medida que a instabilidade vai crescendo, extraíndo assim energia ao modo.

Visto que Rezzolla *et al.* [5] não conheciam a expressão exacta para a rotação diferencial obtida no âmbito da teoria não linear, usaram uma técnica que permite calcular quantidades não lineares a partir de quantidades lineares. Deste modo, Rezzolla *et al.* deduziram uma expressão analítica aproximada para a rotação diferencial induzida pelo modo  $r$  de pulsação. A técnica usada dá, no caso de ondas sonoras ou ondas em águas profundas, resultados exactos [15]. Contudo, no caso estudado por Rezzolla *et al.* não era claro se o resultado obtido seria exacto ou apenas aproximado.

Expandindo a velocidade de um elemento de fluido em potências da amplitude do modo  $r$ , fazendo a média sobre uma oscilação e conservando unicamente os termos de ordem mais baixa não nulos, obtiveram, para  $\ell = 2$ , que a velocidade de deriva de um elemento de fluido é dada por

$$\vec{v}_D = \frac{2}{3} \kappa_2(\theta) \alpha^2(t) \Omega(t) R \left( \frac{r}{R} \right)^2 \vec{e}_\phi, \quad (3.1)$$

onde  $\kappa_2(\theta) \equiv (1/2)^7 (5!/\pi) (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta)$ . Assim, a rotação diferencial associada aos modos  $r$  produz uma deriva de elementos de fluido na direcção azimutal. Como é sublinhado pelos autores, este resultado é apenas uma aproximação, visto que a técnica usada para a sua obtenção não é equivalente à resolução das equações da hidrodinâmica até à segunda ordem em  $\alpha$ . No entanto, como em alguns casos particulares (ondas sonoras ou ondas em águas profundas) a expressão exacta da velocidade de deriva é, em ordem  $\alpha^2$ , determinada pela velocidade linear [15], Rezzolla *et al.* esperavam que, no caso dos modos  $r$ , a velocidade de deriva fosse qualitativamente correcta e talvez mesmo exacta em ordem  $\alpha^2$ . Contudo, a solução das equações não lineares poderia conter termos que cancelassem total ou parcialmente a velocidade de deriva obtida a partir da velocidade linear. De facto, como veremos na última parte deste capítulo, a solução das equações não lineares até à segunda ordem em  $\alpha$  [12] mostra que a expressão (3.1) não é exacta. Contudo, apesar de não ser exacta, esta expressão foi útil ao mostrar que os modos  $r$  poderiam induzir rotação diferencial.

A existência de outro tipo de rotação diferencial associada ao modo  $r$  foi posteriormente demonstrada por Levin e Ushomirsky [11] num modelo muito simplificado, em que a estrela era representada por uma camada esférica de espessura infinitesimal de fluido incompressível. Neste caso, as soluções exactas do tipo modo  $r$  das equações da hidrodinâmica não lineares são conhecidas e encontram-se descritas na literatura

geofísica [16], não comportando rotação diferencial. Neste modelo, a rotação diferencial só surge na solução das equações da hidrodinâmica quando é introduzida a força de reacção da radiação gravitacional. As equações da hidrodinâmica deixam, então, de ter uma solução exacta, pelo que Levin e Ushomirsky procuraram uma solução até à segunda ordem em  $\alpha$ . Esta solução é composta por dois termos, um termo associado ao abrandamento da estrela e outro termo que representa rotação diferencial.

Levin e Ushomirsky [11] demonstraram a existência de rotação diferencial associada aos modos  $r$  em camadas esféricas de espessura infinitesimal. Esta rotação diferencial aparece como uma consequência da introdução da força de reacção da radiação gravitacional nas equações da hidrodinâmica, não sendo puramente cinemática como no caso de Rezzolla *et al.* [13]. Com base nos seus estudos sobre camadas esféricas, Levin e Ushomirsky conjecturaram que, em três dimensões, também existiria rotação diferencial induzida pela força de reacção da radiação gravitacional. Porém, esta conjectura ainda não foi confirmada, apesar dos esforços desenvolvidos nesse sentido [17].

### 3.3 Expressão exacta para a rotação diferencial

Sá [12] investigou os modos  $r$  no âmbito da teoria não linear até à segunda ordem na amplitude do modo,  $\alpha$ , no caso de uma estrela newtoniana de fluido perfeito barotrópico com velocidade angular  $\Omega \ll \Omega_K$ , onde  $\Omega_K$  é a velocidade angular de Kepler. Encontrou uma extensão não linear do modo  $r$  que representa rotação diferencial. Nesta secção, descrevemos em detalhe esta solução, a qual será usada, no próximo capítulo, para estudar a evolução não linear da instabilidade do modo  $r$ .



As grandezas de segunda ordem são obtidas expandindo simultaneamente em potências de  $\alpha$  e de  $\Omega$ . De modo a negligenciar de forma consistente os termos de ordem superior que surgem numa expansão em  $\Omega$ , assumiremos neste capítulo que  $\alpha \gg (\Omega/\Omega_K)^2$ . A investigação dos modos  $r$  até segunda ordem em  $\Omega$ , negligenciando os termos de ordem superior que surgem numa expansão em  $\alpha$ , foi realizada na Ref. [18] (usando o formalismo de Saio [19]) e na Ref. [20] (usando o formalismo dos dois potenciais [21]).

As equações não lineares são obtidas a partir das equações da hidrodinâmica Eqs. (2.2)–(2.4) considerando que  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta^{(1)}\vec{v} + \delta^{(2)}\vec{v}$ , onde  $\vec{v}_0 = \Omega r \sin\theta \vec{e}_\phi$  é a velocidade da estrela não perturbada,  $\delta^{(1)}\vec{v}$  representa a perturbação euleriana de primeira ordem da velocidade e  $\delta^{(2)}\vec{v}$  é a perturbação euleriana de segunda ordem da velocidade. Da mesma maneira, considera-se que  $\rho = \rho_0 + \delta^{(1)}\rho + \delta^{(2)}\rho$ ,  $p = p_0 + \delta^{(1)}p + \delta^{(2)}p$  e  $\Phi = \Phi_0 + \delta^{(1)}\Phi + \delta^{(2)}\Phi$ , onde  $p_0$ ,  $\rho_0$  e  $\Phi_0$  dependem apenas de  $r$ . As grandezas  $\delta^{(1)}q$  e  $\delta^{(2)}q$  são proporcionais a  $\alpha$  e  $\alpha^2$ , respectivamente, onde  $\alpha$  é a amplitude adimensional da perturbação. Assim, a evolução de uma pequena perturbação do estado de equilíbrio é descrita pelas equações não lineares de Euler, da continuidade e de Poisson para o campo gravitacional, que no referencial inercial são dadas por [12]

$$\begin{aligned} \partial_t \delta^{(2)}v_i + \delta^{(2)}v^k \nabla_k v_{0i} + v_0^k \nabla_k \delta^{(2)}v_i + \delta^{(1)}v^k \nabla_k \delta^{(1)}v_i &= -\nabla_i \delta^{(2)}U \\ &+ \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho_0} \nabla_i \left( \frac{\delta^{(1)}p}{\rho_0} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\partial_t \delta^{(2)}\rho + v_0^i \nabla_i \delta^{(2)}\rho + \nabla_i (\rho_0 \delta^{(2)}v^i) + \nabla_i (\delta^{(1)}\rho \delta^{(1)}v^i) = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla^i \nabla_i \delta^{(2)}\Phi = 4\pi G \delta^{(2)}\rho, \quad (3.4)$$

onde  $\delta^{(2)}U \equiv \delta^{(2)}p/\rho_0 + \delta^{(2)}\Phi$ . Nas equações anteriores distinguimos as componentes covariantes das contravariantes. Assumindo que  $\alpha \gg (\Omega/\Omega_K)^2$ , negligencia-se, então, termos em  $\delta^{(2)}v^i$  proporcionais a  $\alpha\Omega^3$  (aparecendo numa expansão em

potências da velocidade angular da estrela) relativamente a termos proporcionais a  $\alpha^2\Omega$  (aparecendo numa expansão em potências da amplitude do modo). Pelo mesmo motivo, negligencia-se em  $\delta^{(2)}\rho$ ,  $\delta^{(2)}p$  e  $\delta^{(2)}\Phi$  os termos proporcionais a  $\alpha\Omega^4$ . Da mesma maneira, o último termo da Eq. (3.2), sendo de ordem  $\alpha^2\Omega^4$ , é negligenciado. Com estas simplificações, a equação (3.2) admite a solução [12]

$$\delta^{(2)}v^r = 0, \quad (3.5)$$

$$\delta^{(2)}v^\theta = 0, \quad (3.6)$$

$$\delta^{(2)}v^\phi = \frac{1}{2}\alpha^2\Omega C_\ell^2 \ell^2 (\ell^2 - 1) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell-2} \sin^{2\ell-4}\theta + \alpha^2\Omega A r^{N-1} \sin^{N-1}\theta, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}U &= -\frac{1}{4}\alpha^2\Omega^2 C_\ell^2 \ell R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell} \sin^{2\ell-2}\theta (\sin^2\theta - 2\ell^2) \\ &\quad + \frac{2\alpha^2\Omega^2 A}{N+1} r^{N+1} \sin^{N+1}\theta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $A$  e  $N$  são constantes arbitrárias fixadas pelas condições iniciais,  $\omega = -\Omega\ell + 2\Omega/(\ell + 1)$  é a frequência angular do modo no referencial inercial,  $R$  é o raio da estrela não perturbada e  $C_\ell = (2\ell - 1)!!\sqrt{(2\ell + 1)/[2\pi(2\ell)! \ell(\ell + 1)]}$ . Esta solução satisfaz também a Eq. (3.3), que em ordem mais baixa em  $\Omega$  fica simplesmente  $\nabla_i(\rho_0\delta^{(2)}v^i) = 0$ . A separação de  $\delta^{(2)}p$  e  $\delta^{(2)}\Phi$  na Eq. (3.8) é feita usando a Eq. (3.4) e as condições fronteira para o potencial gravitacional na superfície da estrela e no infinito.

A solução (3.5)–(3.8) é apenas uma parte da solução, a parte independente do tempo e axissimétrica. Na realidade, o termo  $\delta^{(1)}v^k\nabla_k\delta^{(1)}v_i$  na Eq. (3.2) induz também uma solução proporcional a  $\cos[2(\ell\phi + \omega t)]$ , que corresponde a uma oscilação com frequência igual a duas vezes a frequência do modo na teoria linear. Devido ao seu carácter oscilatório, esta solução não traz contribuição ao momento angular físico da perturbação e não está relacionada com a rotação diferencial.

A solução (3.5)–(3.8) representa uma extensão não linear da perturbação linear do modo  $r$ , descrevendo rotação diferencial de carácter puramente cinemático que

produz derivas em grande escala ao longo das latitudes estelares. Esta rotação diferencial tem duas componentes: uma induzida pelo termo  $\delta^{(1)}v^k\nabla_k\delta^{(1)}v_i$  e outra que é um efeito puro de segunda ordem. Como uma das componentes está estratificada em cilindros e a outra não, então não se podem cancelar mutuamente. Assim, a rotação diferencial é uma característica inevitável dos modos  $r$  não lineares.

Comparando a expressão (3.7) com a velocidade de deriva (3.1) encontrada por Rezzolla *et al.* [5], verificamos que esta última é apenas uma aproximação.

Como vimos no capítulo 2, uma das características dos modos  $r$  lineares é a conservação da vorticidade. Com a solução (3.5)–(3.7), é possível verificar que a vorticidade não se conserva em segunda ordem. Efectivamente, a variação lagrangiana da vorticidade em segunda ordem é dada por [12]

$$q^i \equiv \Delta_\xi^{(2)} (\epsilon^{ijk} \nabla_j v_k) = \Delta_\xi^{(2)} \epsilon^{ijk} \nabla_j v_{0k} + \epsilon^{ijk} \Delta_\xi^{(2)} \nabla_j v_k + \Delta_\xi^{(1)} \epsilon^{ijk} \Delta_\xi^{(1)} \nabla_j v_k. \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^{(2)} \epsilon^{ijk} &= -\epsilon^{ijk} \nabla_m \xi^{(2)m} - \xi^{(1)n} \nabla_n (\epsilon^{ijk} \nabla_m \xi^{(1)m}) \\ &\quad + \epsilon^{ijk} \nabla_m (\xi^{(1)n} \nabla_n \xi^{(1)m}) + \epsilon^{imn} \nabla_m \xi^{(1)j} \nabla_n \xi^{(1)k} \\ &\quad + \epsilon^{mjn} \nabla_m \xi^{(1)i} \nabla_n \xi^{(1)k} + \epsilon^{mnk} \nabla_m \xi^{(1)i} \nabla_n \xi^{(1)j}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Delta_\xi^{(2)} \nabla_j v_k = \nabla_j \Delta_\xi^{(2)} v_k - v_0^m \nabla_j \nabla_k \xi_m^{(2)} - (\partial_t \xi^{(1)m} + v_0^n \nabla_n \xi^{(1)m}) \nabla_j \nabla_k \xi_m^{(1)} \quad (3.11)$$

e

$$\Delta_\xi^{(2)} v_i = \partial_t \xi^{(1)k} \nabla_i \xi_k^{(1)} + v_0^k \nabla_k \xi^{(1)m} \nabla_i \xi_m^{(1)} + \partial_t \xi_i^{(2)} + v_0^k (\nabla_i \xi_k^{(2)} + \nabla_k \xi_i^{(2)}). \quad (3.12)$$

Nas equações anteriores,  $\xi^{(1)i}$  e  $\xi^{(2)i}$  são, respectivamente, as componentes contravariantes do vector deslocamento lagrangiano em primeira ordem (dadas no capí-

tulo 2) e as componentes lagrangianas do vector deslocamento lagrangiano em segunda ordem. Estas últimas são determinadas pelas equações [12]

$$\delta^{(2)}v^i = \partial_t \xi^{(2)i} + v_0^k \nabla_k \xi^{(2)i} - \xi^{(2)k} \nabla_k v_0^i - \xi^{(1)k} \nabla_k \delta^{(1)}v^i, \quad (3.13)$$

$$\nabla_k \xi^{(2)k} = \frac{1}{2} \nabla_k \xi^{(1)m} \nabla_m \xi^{(1)k}, \quad (3.14)$$

$$\xi^{(2)k} \nabla_k \rho_0 = -\frac{1}{2} \xi^{(1)k} \xi^{(1)m} \nabla_k \nabla_m \rho_0, \quad (3.15)$$

que admitem, em ordem mais baixa em  $\Omega$ , a seguinte solução

$$\xi^{(2)r} = \frac{1}{16} \alpha^2 C_\ell^2 \ell^2 (\ell + 1)^2 R \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell-1} \sin^{2\ell-2} \theta (\sin^2 \theta - 2), \quad (3.16)$$

$$\xi^{(2)\theta} = \frac{1}{16} \alpha^2 C_\ell^2 \ell^2 (\ell + 1)^2 R \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell-2} \sin^{2\ell-3} \theta \cos \theta (\sin^2 \theta + 2\ell - 2), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \xi^{(2)\phi} &= \frac{1}{4} \alpha^2 \Omega C_\ell^2 \ell^2 (\ell + 1)(2\ell - 1) \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell-2} \sin^{2\ell-2} \theta t \\ &\quad + \alpha^2 \Omega A r^{N-1} \sin^{N-1} \theta t + C(r, \theta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $C$  é uma função arbitrária de  $r$  e de  $\theta$ .

Usando  $\xi^{(1)i}$  e  $\xi^{(2)i}$  dadas, respectivamente, no capítulo 2 e pelas Eqs. (3.16)–(3.18), obtém-se para  $q^i$  as seguintes expressões [12]:

$$\begin{aligned} q^r &= \frac{1}{4} \alpha^2 \Omega C_\ell^2 \ell^2 (\ell + 1) \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell-2} \sin^{2\ell-4} \theta \cos \theta [\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta + 4(\ell - 1)^2] \\ &\quad + \alpha^2 \Omega A (N + 1) r^{N-1} \sin^{N-1} \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} q^\theta &= -\frac{1}{4} \alpha^2 \Omega C_\ell^2 \ell^3 (\ell + 1) R^{-1} \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell-3} \sin^{2\ell-3} \theta [(\ell + 1) \sin^2 \theta + 4(\ell - 1)] \\ &\quad - \alpha^2 \Omega A (N + 1) r^{N-2} \sin^N \theta, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$q^\phi = 0. \quad (3.21)$$

As expressões (3.19)–(3.21) mostram que a variação lagrangiana da vorticidade em segunda ordem é sempre diferente de zero qualquer que sejam os valores das constantes arbitrárias  $A$  e  $N$ . Este resultado é uma consequência directa da existência de rotação diferencial. É de notar que Levin e Ushomirsky [11], num modelo simples de estrela em camada esférica de espessura infinitesimal, haviam mostrado que

a variação lagrangiana da vorticidade não era nula devido à presença de rotação diferencial.

A solução (3.5)–(3.8) permite calcular exactamente o momento angular físico do modo  $r$  em segunda ordem em  $\alpha$ , o qual é dado por:

$$\delta^{(2)}J = \int \rho \delta^{(2)}v_\phi dV. \quad (3.22)$$

É de referir que a parte da solução que corresponde a uma oscilação de frequência dupla não contribui para o momento angular físico da perturbação. Substituindo, então,  $\delta^{(2)}v_\phi$  na Eq. (3.22), obtemos [12]:

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}J &= \frac{1}{2}(\ell - 1)(2\ell + 1)\alpha^2\Omega R^{2-2\ell} \int_0^R \rho r^{2\ell+2} dr \\ &+ 2\pi\alpha^2\Omega A \int_0^R \rho r^{N+3} dr \int_0^\pi \sin^{N+2} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Segundo Friedman e Schutz [22], o momento angular físico pode ser decomposto em duas partes: uma parte linear na variação lagrangiana em segunda ordem da velocidade  $\Delta_\xi^{(2)}v_i$  e outra, chamada por eles momento angular canónico  $J_c$ , quadrática no vector deslocamento lagrangiano de primeira ordem  $\xi^{(1)i}$ , i.e. ,

$$\delta^{(2)}J = \frac{1}{\Omega} \int \rho_0 v_0^i \Delta_\xi^{(2)}v_i dV + J_c, \quad (3.24)$$

onde

$$J_c = - \int \rho_0 \partial_\phi \xi^{(1)i} \left( \partial_t \xi_i^{(1)} + v_0^k \nabla_k \xi_i^{(1)} \right) dV \quad (3.25)$$

e a variação lagrangiana em segunda ordem da velocidade,  $\Delta_\xi^{(2)}v_i$ , é dada pela Eq. (3.12).

Até se ter demonstrado que os modos  $r$  induziam rotação diferencial, considerava-se que o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.24) era nulo, pelo que o momento angular físico da perturbação era identificado com o momento angular

canónico. Contudo, a presença de rotação diferencial faz com que o primeiro termo da Eq. (3.24) seja, em geral, diferente de zero [12],

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int \rho_0 v_0^i \Delta_\xi^{(2)} v_i dV &= \frac{1}{4} (5\ell^2 - \ell - 2) \alpha^2 \Omega R^{2-2\ell} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr \\ &+ 2\pi \alpha^2 \Omega A \int_0^R \rho_0 r^{N+3} dr \int_0^\pi \sin^{N+2} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim, o momento angular físico do modo  $r$  difere do momento angular canónico.

Quando olhamos para a energia física do modo em segunda ordem, verificamos que também esta é diferente da energia canónica dada pela Eq. (1.33). Efectivamente, a energia física do modo  $r$  em segunda ordem em  $\alpha$  é dada por [22]

$$\delta^{(2)} E = \int \rho_0 v_0^i \Delta_\xi^{(2)} v_i dV + E_c, \quad (3.27)$$

onde, tal como no caso anterior, o integral de volume é, em geral, diferente de zero.

Com as expressões analíticas exactas da velocidade e do deslocamento lagrangiano do modo  $r$  em segunda ordem em  $\alpha$  foi possível obter as expressões analíticas exactas para o momento angular físico e a energia física do modo  $r$ . Na maior parte dos trabalhos publicados até então, nomeadamente no modelo fenomenológico de evolução de Owen *et al.* [1], como a solução analítica em segunda ordem em  $\alpha$  do modo  $r$  não era conhecida, partia-se do princípio que o momento angular físico e a energia física do modo eram idênticos ao momento angular canónico e à energia canónica, respectivamente. É de lembrar que para calcular as quantidades canónicas apenas são necessários os deslocamentos lagrangianos em primeira ordem. A igualdade das quantidades físicas e canónicas foi, pela primeira vez, posta em causa por Levin e Ushomirsky [11], com o modelo da camada esférica de fluido. No âmbito deste modelo, contudo, só se demonstrou que as quantidades físicas e canónicas são diferentes em duas dimensões; para uma estrela em três dimensões, os autores limitaram-se a conjecturar que estes resultados também se aplicaríam. Porém, só

com a solução exacta em segunda ordem em  $\alpha$  foi possível verificar esta afirmação. Contudo, no modelo da camada esférica, Levin e Ushomirsky encontraram um momento angular físico nulo para o modo  $r$ , o que não é o caso em três dimensões.

Os resultados acima descritos mostram que o modelo fenomenológico proposto por Owen *et al.* [1] analisa apenas uma situação muito particular e não pode ser considerado como representativo da evolução dos modos  $r$  no caso geral. Para obter um modelo de evolução mais próximo da realidade física, é essencial calcular o momento angular físico e a energia física do modo  $r$  tendo em conta a contribuição da solução de segunda ordem.

Visto que a diferença entre as quantidades canónicas e físicas surge devido à existência de rotação diferencial, esta tem um papel preponderante na evolução dos modos  $r$ , em particular no que se refere à saturação do modo. O nosso próximo capítulo é consagrado ao estudo detalhado da evolução dos modos  $r$  tendo em conta a rotação diferencial.

## Referências

- [1] B. J. Owen, L. Lindblom, C. Cutler, B. F. Schutz, A. Vecchio e N. Andersson, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 084020.
- [2] S. L. Detweiler e L. Lindblom, *Astrophys. J.* **213** (1977) 193.
- [3] D. Lai e S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **442** (1995) 259.
- [4] N. Stergioulas e J. A. Font, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1148.
- [5] L. Rezzolla, F. K. Lamb e S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **531** (2000) L139.
- [6] L. Lindblom, J. E. Tohline e M. Vallisneri, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1152.

- [7] L. Lindblom, J. E. Tohline e M. Vallisneri, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084039.
- [8] P. Arras, E. E. Flanagan, S. M. Morsink, A. K. Schenk, S. A. Teukolsky e I. Wasserman, *Astrophys. J.* **591** (2003) 1129.
- [9] J. Brink, S. A. Teukolsky e I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 121501.
- [10] J. Brink, S. A. Teukolsky e I. Wasserman, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 124017.
- [11] Yu. Levin e G. Ushomirsky, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **324** (2001) 917.
- [12] P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 084001.
- [13] L. Rezzolla, F. K. Lamb, D. Markovic e S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 104013.
- [14] L. Rezzolla, F. K. Lamb, D. Markovic e S. L. Shapiro, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 104014.
- [15] L. D. Landau e E. M. Lifshitz em: *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987).
- [16] I. Silberman, *J. Meteorol.* **11** (1954) 27.
- [17] Ó. J. C. Dias e P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 024020.
- [18] N. Andersson, K. Kokkotas e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **510** (1999) 846.
- [19] H. Saio, *Astrophys. J.* **256** (1982) 717.
- [20] L. Lindblom, G. Mendel e B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 064006.
- [21] J. R. Ipser e L. Lindblom, *Astrophys. J.* **355** (1990) 226.
- [22] J. F. Friedman e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **221** (1978) 937.



## Capítulo 4

# Evolução da instabilidade dos modos $r$

## 4.1 Introdução

No capítulo anterior, apresentámos uma solução dos modos  $r$  em segunda ordem na amplitude do modo no caso de uma estrela newtoniana de fluido perfeito barotrópico com velocidade angular  $\Omega \ll \Omega_K$  [1]. Como vimos, esta solução é uma extensão não linear da perturbação linear do modo  $r$  e descreve uma rotação diferencial de origem puramente cinemática que produz derivas em grande escala ao longo das latitudes estelares. Também verificámos que esta rotação diferencial é uma característica inevitável dos modos  $r$  não lineares. Entre os potenciais mecanismos de saturação dos modos  $r$  de oscilação, a rotação diferencial é um dos mais promissores. Neste capítulo, iremos estudar a evolução dos modos  $r$  no âmbito da teoria não linear aplicando a solução encontrada por Sá [1] ao modelo fenomenológico proposto por Owen *et al.* [2].

O modelo de evolução simples que escolhemos para aplicar aos modos  $r$  não lineares é aquele que descrevemos no capítulo 2 mas com duas alterações. Primeiro, como já mencionámos, o momento angular físico da perturbação do modo  $r$  não é somente o momento angular canónico como sugerido por Owen *et al.* [2], mas sim o momento angular físico completo calculado por Sá [1]. Esta primeira alteração, como veremos, traz diferenças fundamentais com o modelo de Owen *et al.* [2] e abrange todas as possibilidades de evolução, não se limitando apenas a um caso particular. A segunda alteração, menos significativa, diz respeito à dedução das equações de evolução da amplitude do modo,  $\alpha$ , e da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ . Em vez de seguir o método de Owen *et al.* [2], em que se faz um balanço da energia do sistema, optámos por usar a proposta de Ho e Lai [3], que considera unicamente variações do momento angular.

No modelo de evolução de estrelas de neutrões recém-nascidas que iremos usar, assumiremos que, inicialmente, a velocidade angular da estrela é da ordem da velocidade angular máxima possível ( $\Omega \approx \Omega_K$ ). Além disso, após algumas centenas de segundos, verificaremos que a amplitude do modo cresce para valores que poderão ser da ordem da unidade. Nestas condições extremas, para calcular o momento angular físico do modo  $r$  devíamos usar, em rigor, soluções do tipo modo  $r$  das equações da hidrodinâmica válidas para valores de  $\Omega$  e  $\alpha$  arbitrários. Contudo, tais soluções analíticas não são conhecidas, pelo que usaremos as soluções de primeira e segunda ordem, derivadas nos capítulos 2 e 3, as quais são estritamente válidas para  $\Omega \ll \Omega_K$ ,  $\alpha \ll 1$  e, no caso de segunda ordem, para  $\alpha \gg (\Omega/\Omega_K)^2$ . Estudos numéricos mostram, no entanto, que a evolução dos modos  $r$  em estrelas de neutrões com velocidade de rotação elevada não difere significativamente da evolução em estrelas lentas [4], pelo que os nossos resultados serão válidos numa boa aproximação.

Antes de desenvolvermos o modelo de evolução, vamos primeiro definir o momento angular físico do modo  $r$ .

## 4.2 Momento angular físico do modo $r$

No capítulo anterior, mostrámos que, de maneira geral, o momento angular físico do modo  $r$  é diferente do momento angular canónico.

O momento angular canónico do modo  $r$ , que depende apenas das componentes do vector deslocamento lagrangiano em primeira ordem,  $\xi^{(1)i}$ , definidas no capítulo

2, é dado por

$$\begin{aligned} J_c &= - \int \rho_0 \partial_\phi \xi^{(1)i} \left( \partial_t \xi_i^{(1)} + v_0^k \nabla_k \xi_i^{(1)} \right) dV \\ &= -\frac{1}{4} \alpha^2 \Omega \ell (\ell + 1) R^{2-2\ell} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr. \end{aligned} \quad (4.1)$$

No entanto, o momento angular canónico  $J_c$  não é o momento angular físico total em segunda ordem  $\delta^{(2)}J$ , a diferença sendo dada por [5]

$$\delta^{(2)}J - J_c = \frac{1}{\Omega} \int \rho_0 v_0^i \Delta_\xi^{(2)} v_i dV, \quad (4.2)$$

onde  $\Delta_\xi^{(2)} v_i$  é a variação lagrangiana em segunda ordem da velocidade, definida na Eq. (3.12). O integral da Eq. (4.2) contém termos lineares no vector deslocamento lagrangiano em segunda ordem,  $\xi^{(2)i}$ , além dos termos quadráticos em  $\xi^{(1)i}$ . Este integral está relacionado com a conservação da vorticidade [5]. Visto que em segunda ordem na amplitude do modo  $r$  a vorticidade não é conservada [1], o integral da Eq. (4.2) é, em geral, diferente de zero. Efectivamente, usando as equações para  $\xi^{(2)i}$ , deduzidas no capítulo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int \rho_0 v_0^i \Delta_\xi^{(2)} v_i dV &= \frac{1}{4} (5\ell^2 - \ell - 2) \alpha^2 \Omega R^{2-2\ell} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr \\ &\quad + 2\pi \alpha^2 \Omega A \int_0^R \rho_0 r^{N+3} dr \int_0^\pi \sin^{N+2} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das expressões anteriores, concluímos que o momento angular físico do modo  $r$  é dado por:

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}J &= \frac{1}{2} (\ell - 1) (2\ell + 1) \alpha^2 \Omega R^{2-2\ell} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr \\ &\quad + 2\pi \alpha^2 \Omega A \int_0^R \rho_0 r^{N+3} dr \int_0^\pi \sin^{N+2} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nesta tese, vamos considerar que  $N = 2\ell - 1$  e redefinir a constante  $A$  como

$$A = \frac{1}{2} C_\ell^2 \ell^2 (\ell + 1) R^{2-2\ell} K, \quad (4.5)$$

pelo que o momento angular físico em segunda ordem pode ser escrito como [6]:

$$\delta^{(2)}J = \frac{1}{2}\alpha^2\Omega[2K\ell + (\ell - 1)(2\ell + 1)]R^{2-2\ell} \int_0^R \rho_0 r^{2\ell+2} dr. \quad (4.6)$$

Existe um valor particular para a constante  $K$  para o qual o momento angular físico do modo  $r$  é igual ao momento angular canónico,  $K = (-5\ell^2 + \ell + 2)/4\ell$ . Este caso particular (para  $\ell = 2$ ), corresponde ao caso estudado em detalhe por Owen *et al.* [2] no âmbito do seu modelo fenomenológico de evolução para o modo  $r$ . Porém, a nosso ver, não existe nenhuma razão física para a escolha deste valor específico para a constante  $K$ . Optámos, portanto, por estudar a evolução da instabilidade do modo  $r$  para valores arbitrários de  $K$ .

### 4.3 Modelo de evolução

Depois de ter definido o momento angular físico do modo  $r$ , podemos, agora, apresentar o nosso modelo de evolução. Como o modo  $\ell = 2$  é o modo mais instável, vamos considerar, no nosso modelo de evolução, apenas este valor de  $\ell$ . O momento angular físico do modo  $r$ , dado pela Eq. (4.6) fica então [6]

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}J &= \frac{1}{2}\alpha^2\Omega(4K + 5)\frac{1}{R^2} \int_0^R \rho_0 r^6 dr \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2\Omega(4K + 5)\tilde{J}MR^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\tilde{J} = 1/(MR^4) \int_0^R \rho_0 r^6 dr$ . No nosso modelo, o momento angular total da estrela é dado por

$$J(\alpha, \Omega) = I\Omega + \delta^{(2)}J(\alpha, \Omega), \quad (4.8)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da estrela em equilíbrio

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho_0 r^4 dr = \tilde{I}MR^2, \quad (4.9)$$

com  $\tilde{I} = (8\pi)/(3MR^2) \int_0^R \rho_0 r^4 dr$ . Nas Eqs. (4.7) e (4.9),  $M$  e  $R$  são, respectivamente, a massa e o raio da estrela, para os quais escolhemos os valores  $M = 1.4M_\odot$  e  $R = 12.53$  km.

Usando as Eqs. (4.7) e (4.9), podemos expressar o momento angular total da estrela como

$$J = \left[ \tilde{I} + \left( 2K + \frac{5}{2} \right) \tilde{J} \alpha^2 \right] \Omega M R^2. \quad (4.10)$$

Os valores das constantes  $\tilde{I}$  e  $\tilde{J}$  dependem da equação de estado escolhida para a estrela. No nosso caso, vamos considerar para a estrela não perturbada a equação de estado politrópica  $p_0(r) = k\rho_0^2(r)$ , para a qual a solução de Lane-Emden é bem conhecida [7]:

$$\rho_0(r) = \rho_c \theta(r), \quad (4.11)$$

onde  $\rho_c = \pi M/(4R^3)$  é a densidade no centro da estrela e a variável adimensional  $\theta(r)$  é dada por  $\theta = (\pi r/R)^{-1} \sin(\pi r/R)$ .

Usando a solução de Lane-Emden, podemos calcular facilmente as constantes  $\tilde{I}$  e  $\tilde{J}$ :

$$\tilde{I} = \frac{2}{3\pi^3} \int_0^\pi \xi^3 \sin \xi d\xi = 0.261, \quad (4.12)$$

$$\tilde{J} = \frac{1}{4\pi^6} \int_0^\pi \xi^5 \sin \xi d\xi = 1.635 \times 10^{-2}. \quad (4.13)$$

O momento angular total da estrela  $J$ , dado pela Eq. (4.10), decresce, devido à emissão de radiação gravitacional, como [2]

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{c^3}{16\pi G} \left( \frac{4\Omega}{3} \right)^5 S_{22}^2, \quad (4.14)$$

onde o momento multipolar de corrente é [8]

$$S_{22} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{15} \frac{GM}{c^5} \alpha \Omega R^3 \tilde{J}. \quad (4.15)$$

Substituindo o momento multipolar na expressão (4.14), obtemos

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{2^{17}\pi}{3^7 \times 5^2} \frac{GM^2 R^6}{c^7} \alpha^2 \Omega^7 \tilde{J}^2. \quad (4.16)$$

Mas a escala temporal de variação dos efeitos da radiação gravitacional  $\tau_{GR}$ , dada pela Eq. (2.33), fica, para  $\ell = 2$ ,

$$\frac{1}{\tau_{GR}} = -\frac{2^{17}\pi}{3^8 \times 5^2} \frac{GMR^4}{c^7} \Omega^6 \tilde{J}. \quad (4.17)$$

pelo que a Eq. (4.16) pode ser escrita como

$$\frac{dJ}{dt} = 3\tilde{J}MR^2 \frac{\alpha^2 \Omega}{\tau_{GR}}. \quad (4.18)$$

A escala temporal  $\tau_{GR}$  pode ser reexpressa na forma

$$\frac{1}{\tau_{GR}} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6, \quad (4.19)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média da estrela e, para o modelo politrópico considerado,

$$\tilde{\tau}_{GR} = -\frac{3^5 \times 5^2}{2^{11}\pi} \frac{c^7 R^5}{G^4 M^4 \tilde{J}} = -3.26 \text{ s}. \quad (4.20)$$

Introduzindo na expressão (4.18) o momento angular total da estrela, dado pela Eq. (4.10), obtemos uma equação diferencial para a evolução temporal de  $\alpha$  e  $\Omega$ :

$$\left[ 1 + \frac{1}{3}(4K + 5)Q\alpha^2 \right] \frac{d\Omega}{dt} + \frac{2}{3}(4K + 5)Q\Omega\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 2Q \frac{\Omega\alpha^2}{\tau_{GR}}, \quad (4.21)$$

onde introduzimos a notação  $Q \equiv 3\tilde{J}/(2\tilde{I}) = 0.094$ .

Precisamos agora encontrar outra equação diferencial de forma a poder determinar a evolução temporal da amplitude do modo  $r$ ,  $\alpha$ , e da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ . Como já foi referido anteriormente, as equações de evolução são deduzidas no âmbito do nosso modelo, considerando apenas variações do momento angular, de acordo com a proposta de Ho e Lai [3]. Efectivamente, Ho e Lai mostraram que

o método de Owen *et al.* [2], para a obtenção das equações diferenciais de evolução temporal de  $\alpha$  e  $\Omega$ , não é adequado quando a amplitude do modo e a velocidade angular da estrela variam simultaneamente. Para demonstrar esta afirmação, os autores consideraram uma situação hipotética, onde não há viscosidade nem rotação gravitacional mas existe uma força externa como, por exemplo, uma força electromagnética que abranda o movimento da estrela de forma gradual. Numa tal situação, uma oscilação do tipo do modo  $r$  é amplificada por um factor  $\alpha \propto \Omega^{-1/2}$  [3]. Por outro lado, se considerarmos a equação de balanço energético adoptada por Owen *et al.* [2],

$$\frac{dE_c}{dt} = -2E_c \left( \frac{1}{\tau_{GR}} + \frac{1}{\tau_V} \right), \quad (4.22)$$

onde  $E_c = \tilde{J}MR^2\Omega^2\alpha^2/2$ , no caso em que  $\tau_{GR}^{-1} = \tau_V^{-1} = 0$ , teríamos  $\alpha \propto \Omega^{-1}$ , em contradição com o resultado obtido por Ho e Lai.

Assumimos, então, que o momento angular físico do modo  $r$ ,  $\delta^{(2)}J$ , aumenta devido à emissão de radiação gravitacional e diminui devido ao efeito dissipativo da viscosidade,

$$\frac{d\delta^{(2)}J}{dt} = -2\delta^{(2)}J \left( \frac{1}{\tau_{GR}} + \frac{1}{\tau_V} \right). \quad (4.23)$$

Para a escala temporal da viscosidade,  $\tau_V$ , usamos as Eqs. (2.37) e (2.38) definidas no capítulo 2 para uma estrela recém-nascida, quente, com rotação rápida, considerando apenas as viscosidades de volume e de cisalhamento,

$$\frac{1}{\tau_V} = \frac{1}{\tilde{\tau}_S} \left( \frac{10^9 \text{ K}}{T} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{\tau}_B} \left( \frac{T}{10^9 \text{ K}} \right)^6 \left( \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^2, \quad (4.24)$$

onde  $T$  é a temperatura da estrela e as escalas temporais  $\tilde{\tau}_S$  e  $\tilde{\tau}_B$  são dadas, respectivamente, por  $\tilde{\tau}_S = 2.52 \times 10^8$  s [9] e  $\tilde{\tau}_B = 2.01 \times 10^{11}$  s [10].

Substituindo o momento angular físico do modo  $r$ , dado pela Eq. (4.7), na Eq. (4.23), obtém-se uma segunda equação diferencial para a evolução temporal



de  $\alpha$  e  $\Omega$ :

$$2\Omega \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\Omega}{dt} = -2\alpha\Omega \left( \frac{1}{\tau_{GR}} + \frac{1}{\tau_V} \right). \quad (4.25)$$

A partir das Eqs. (4.21) e (4.25), obtém-se facilmente um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, acopladas, não lineares, que determinam a evolução temporal da amplitude do modo  $r$ ,  $\alpha(t)$ , e da velocidade angular da estrela,  $\Omega(t)$  [6]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{8}{3}(K+2)Q \frac{\Omega\alpha^2}{\tau_{GR}} + \frac{2}{3}(4K+5)Q \frac{\Omega\alpha^2}{\tau_V}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2 \right] \frac{\alpha}{\tau_{GR}} - \left[ 1 + \frac{1}{3}(4K+5)Q\alpha^2 \right] \frac{\alpha}{\tau_V}. \quad (4.27)$$

É a partir destas equações que vamos estudar a evolução da instabilidade do modo  $r$  em função do parâmetro  $K$ . É importante notar que, para o caso particular  $K = -2$ , as Eqs. (4.26) e (4.27) coincidem com as equações encontradas por Ho e Lai [3] (quando se negligencia o efeito do campo magnético) e com as equações de Owen *et al.* [2] a menos de termos de ordem  $Q\alpha^2$ .

## 4.4 Evolução não linear do modo $r$ : solução analítica

Como vimos no capítulo 2, a condição  $\tau_{GR}^{-1}(\Omega) + \tau_V^{-1}(\Omega, T) = 0$  define a curva de instabilidade, isto é, o conjunto de pontos no diagrama  $(\Omega, T)$  para o qual o efeito da viscosidade é exactamente compensado pelo efeito da radiação gravitacional. Para uma estrela de neutrões recém-formada, quente e com rotação rápida, existe um intervalo de temperaturas e velocidades angulares da estrela para o qual a escala temporal da radiação gravitacional  $\tau_{GR}$  é muito menor do que a escala temporal

da viscosidade  $\tau_V$ . Assim, neste intervalo, a evolução da amplitude do modo  $r$  e da velocidade angular da estrela é determinada, numa boa aproximação, pelas equações

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{8}{3}(K+2)Q\frac{\Omega\alpha^2}{\tau_{GR}}, \quad (4.28)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left[1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2\right]\frac{\alpha}{\tau_{GR}}. \quad (4.29)$$

Estas equações podem ser consideradas como uma boa aproximação das Eqs. (4.26) e (4.27) para um período de tempo durante o qual a temperatura e a velocidade angular da estrela são tais que o ponto correspondente, num diagrama  $(\Omega, T)$ , fique acima da curva de instabilidade. Para o nosso modelo, este período de tempo varia entre aproximadamente um e três meses, como veremos na secção 4.5.

Para resolver o sistema de equações diferenciais (4.28) e (4.29), temos que definir as condições iniciais. Em  $t = t_0$ , as condições iniciais devem ser tais que  $\delta^{(2)}J(t_0) \ll I\Omega(t_0)$ , i.e., inicialmente, o momento angular físico da perturbação deve ser muito inferior ao momento inercial da estrela não perturbada. Para uma amplitude inicial  $\alpha_0 \equiv \alpha(t_0) = 10^{-6}$ , a condição  $\delta^{(2)}J(t_0) \ll I\Omega(t_0)$  impõe um limite para  $|K|$ , nomeadamente,  $|K| \ll 10^{13}$ . Para  $K < -5/4$ , o momento angular físico do modo  $r$ , dado pela Eq. (4.7), é negativo,  $\delta^{(2)}J < 0$ . Isto implica que à medida que a amplitude do modo cresce devido à instabilidade da radiação gravitacional, o momento angular total da estrela, dado pela Eq. (4.8), decresce até se tornar negativo. Para evitar esta situação, que não é fisicamente viável, o crescimento da amplitude do modo tem de ser parado à mão num valor de saturação  $\alpha_{sat} \leq \sqrt{-3/[(4K+5)Q]}$ , valor para o qual o momento angular da estrela é nulo ou positivo. Esta situação ocorre no caso estudado por Owen *et al.* [2]. No caso  $K \geq -5/4$ , o momento angular físico do modo  $r$  é positivo, pelo que, à medida que a amplitude do modo cresce, o momento angular mantém-se sempre positivo. Assim, não é necessário saturar a amplitude do modo  $r$  à mão; como veremos, tal saturação ocorre naturalmente.

No que se segue, iremos considerar separadamente os casos  $K \geq -5/4$  e  $K < -5/4$ .

#### 4.4.1 $K \geq -5/4$

No caso  $K \geq -5/4$ , a amplitude do modo,  $\alpha(t)$ , e a velocidade angular da estrela,  $\Omega(t)$ , são determinadas pelo sistema de Eqs. (4.28) e (4.29). A partir deste sistema, eliminando  $\tau_{GR}$ , é fácil obter a equação diferencial

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{\frac{8}{3}(K+2)Q\alpha}{1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2} d\alpha, \quad (4.30)$$

que admite a solução [6]

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2}{1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2}, \quad (4.31)$$

onde  $\Omega_0 \equiv \Omega(t_0)$  e  $\alpha_0 \equiv \alpha(t_0)$  são, respectivamente, a velocidade angular inicial da estrela e a amplitude inicial do modo  $r$ . Esta última expressão permite-nos eliminar  $\Omega$  da Eq. (4.29), obtendo

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6 \left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 \right]^6 \frac{\alpha}{\left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2 \right]^5}. \quad (4.32)$$

A equação diferencial (4.32) admite a solução [6]

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6 \left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 \right]^6 (t - t_0) \\ & = \ln \frac{\alpha}{\alpha_0} + \sum_{n=1}^5 \frac{5!}{2n(5-n)!n!} \left[ \frac{4}{3}(K+2)Q \right]^n (\alpha^{2n} - \alpha_0^{2n}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Visto não ser possível resolver esta última equação explicitamente em ordem a  $\alpha$ , vamos analisar o seu comportamento para valores limites de  $t$ .

Nos primeiros instantes da evolução da instabilidade do modo  $r$ , o lado direito da Eq. (4.33) é dominado pelo primeiro termo, pelo que  $\alpha$  cresce exponencialmente

$$\alpha(t) \simeq \alpha_0 \exp \left\{ 0.027 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_K} \right)^6 (t - t_0) \right\}, \quad (4.34)$$

onde  $\Omega_K = (2/3)\sqrt{\pi G \bar{\rho}} = 5612 \text{ s}^{-1}$  é a velocidade angular de Kepler, acima da qual a estrela começa a perder massa pelo equador. No entanto, à medida que o tempo passa, no lado direito da Eq. (4.33), o último termo ( $n = 5$ ) torna-se cada vez mais importante e, para  $t \gg t_0$ ,  $\alpha$  passa a crescer muito lentamente como

$$\alpha(t) \simeq 2.48 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_K} \right)^{3/5} (t - t_0)^{1/10} \frac{1}{\sqrt{K + 2}}. \quad (4.35)$$

Nas Eqs. (4.34) e (4.35),  $t - t_0$  é dado em segundos e assumimos que a constante  $K$  e a amplitude inicial do modo  $\alpha_0$  são tais que  $4(K + 2)Q\alpha_0^2/3 \ll 1$ .

A transição entre os dois regimes (4.34) e (4.35) faz-se de forma suave e acontece algumas centenas de segundos depois da instabilidade se tornar activa. O momento em que ocorre esta transição pode ser definido de maneira mais precisa, introduzindo um tempo de transição  $t_a$ . Este tempo corresponde ao momento, determinado pela condição  $d^2\alpha/dt^2(t_a) = 0$ , em que a amplitude do modo passa de um crescimento exponencial para um crescimento mais lento do tipo  $t^n$ . Usando as Eqs. (4.19), (4.28) e (4.29), da condição anterior obtemos  $\alpha(t_a) = [12(K + 2)Q]^{-1/2}$ . Inserindo  $\alpha(t_a)$  na Eq. (4.33), assumindo que  $\Omega_0 = \Omega_K$  e tendo em conta que  $4(K + 2)Q\alpha_0^2/3 \ll 1$  e  $\alpha_0 \ll \alpha(t_a)$ , obtém-se

$$t_a \approx t_0 + [521.0 - 18.5 \ln(K + 2)] \text{ s}. \quad (4.36)$$

A Eq. (4.33) descreve a evolução temporal da amplitude do modo  $r$  a partir do momento em que a instabilidade se torna activa até ao momento em que os efeitos da viscosidade passam a dominar, levando à diminuição da amplitude do modo. Esta equação mostra que a saturação do modo  $r$  acontece algumas centenas de segundos depois do início do crescimento exponencial de  $\alpha$ . Assim, no âmbito do nosso modelo de evolução, que inclui os efeitos não lineares da rotação diferencial induzida pelos modos  $r$ , a amplitude do modo satura de forma natural (ver Fig. 4.1).

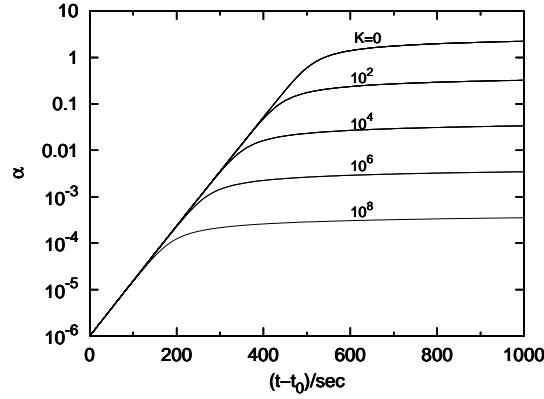


Figura 4.1: Evolução da amplitude do modo  $r$ ,  $\alpha$ , em função do tempo, para diferentes valores de  $K$ . O valor de saturação da amplitude do modo depende, de forma crucial, do valor do parâmetro  $K$ , que está relacionado com a quantidade de rotação diferencial inicial associada ao modo  $r$ . Os valores iniciais da amplitude do modo e da velocidade angular da estrela são, respectivamente,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  e  $\Omega_0 = \Omega_K$ .

O valor de saturação da amplitude do modo  $r$  depende de forma crucial do parâmetro  $K$ ,  $\alpha_{sat} \propto (K+2)^{-1/2}$ . A quantidade inicial de rotação diferencial associada ao modo  $r$  pode ser minimizada se  $K$  for escolhido de maneira apropriada, nomeadamente,  $K \simeq 0$ , levando a amplitude do modo a saturar em valores próximos da unidade. Neste caso, como vimos no capítulo 2, existem outros efeitos não lineares como, por exemplo, a interação modo-modo que induz uma saturação do modo em valores muito inferiores à unidade [11]. Contudo, se a quantidade inicial de rotação diferencial associada aos modos  $r$  for significativa, então a amplitude de saturação é pequena. Por exemplo, se  $K \approx 10^6$ , então  $\alpha_{sat} \simeq 10^{-2} - 10^{-3}$ . Neste caso, a rotação diferencial tem um papel muito importante na saturação dos modos  $r$ .

Analisemos, agora, a evolução temporal da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ . Usando a Eq. (4.31) para eliminar  $\alpha$  da Eq. (4.28), obtemos a seguinte equação

diferencial,

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2\Omega_0}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6 \left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \right], \quad (4.37)$$

a qual admite a seguinte solução [6]

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi G \bar{\rho}}} \right)^6 \left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 \right]^6 (t - t_0) &= \ln \frac{\Omega_0}{\Omega} \\ + \sum_{n=1}^5 \frac{\left[ 1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 \right]^n}{n} \left[ \left( \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^n - 1 \right] &+ \ln \frac{1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 - \frac{\Omega}{\Omega_0}}{\frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Visto não ser possível resolver esta equação explicitamente em ordem a  $\Omega$ , vamos, então, proceder da mesma maneira que para a evolução temporal de  $\alpha$ , isto é, vamos analisar o comportamento da Eq. (4.38) para os valores limites de  $t$ .

Nos primeiros instantes da evolução da instabilidade do modo  $r$ , o lado direito da Eq. (4.38) é dominado pelo último termo e  $\Omega$  decresce como

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} \simeq 1 - \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha_0^2 \exp \left\{ 0.054 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_K} \right)^6 (t - t_0) \right\}. \quad (4.39)$$

Mais tarde, o lado direito da Eq. (4.38) passa a ser dominado pelo segundo termo ( $n = 5$ ) e  $\Omega$  passa, então, a decrescer lentamente como

$$\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} \simeq 1.30 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_K} \right)^{-6/5} (t - t_0)^{-1/5}. \quad (4.40)$$

Analisando a Eq. (4.39), notamos que inicialmente  $\Omega$  decresce muito lentamente, mantendo-se praticamente constante, como no modelo de Owen *et al.* [2]. A transição suave entre os regimes (4.39) e (4.40) ocorre algumas centenas de segundos depois da instabilidade se tornar activa (ver Fig. 4.2), tal como foi o caso para  $\alpha$ .

É de salientar que, de acordo com a Eq. (4.40), a velocidade angular não depende do valor do parâmetro  $K$  durante a segunda fase da evolução e, conseqüentemente, também não depende do valor da amplitude de saturação do modo  $\alpha_{sat}$ . Como

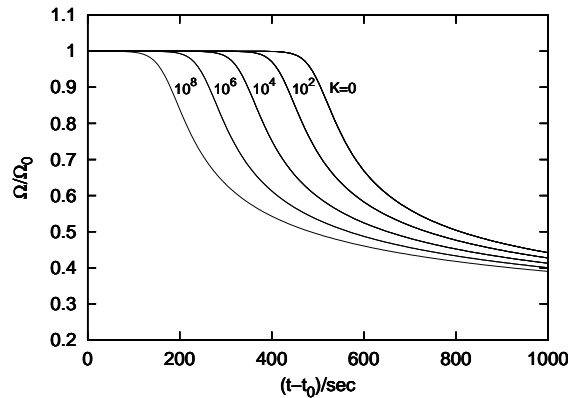


Figura 4.2: Evolução da velocidade angular da estrela,  $\Omega$ , em função do tempo, para diferentes valores de  $K$ . Depois de algumas centenas de segundos, o valor da velocidade angular torna-se praticamente insensível ao valor de  $K$ . Os valores iniciais da amplitude do modo e da velocidade angular da estrela são, respectivamente,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  e  $\Omega_0 = \Omega_K$ .

podemos ver na Fig. 4.2, já em  $t - t_0 = 1000$  s, para valores de  $K$  variando entre 0 e  $10^8$ , as velocidades angulares não diferem muito; ao fim de alguns meses, as diferenças entre as velocidades angulares correspondendo a cada valor de  $K$  são negligenciáveis. Este resultado difere daquele obtido por Owen *et al.* [2], onde o valor da velocidade angular final da estrela dependia, de maneira crítica, da escolha do valor de  $\alpha_{sat}$  (ver Fig. 2.3 do capítulo 2).

Depois de alguns meses de evolução, quando os efeitos dissipativos da viscosidade passam a dominar e começam a abrandar o crescimento do modo  $r$ , a velocidade angular da estrela atinge valores consistentes com os resultados observacionais. De facto, assumindo que a estrela gira inicialmente com a velocidade angular máxima permitida,  $\Omega_0 = \Omega_K$ , obtemos da Eq. (4.40) que  $\Omega(t=2 \text{ meses}) \simeq 0.06\Omega_K$ . Este último valor está de acordo com os valores das velocidades angulares iniciais inferidos para os pulsares mais rápidos associados a remanescentes de supernovas.

É importante lembrar aqui que a Eq. (4.40) é o resultado de uma aproximação, pois na resolução das equações que determinam a evolução de  $\alpha$  e  $\Omega$  os termos da viscosidade foram negligenciados. Na realidade, como veremos na próxima secção com a resolução numérica das Eqs. (4.26) e (4.27), em que os termos de viscosidade não são negligenciados, a velocidade angular da estrela ao fim de alguns meses de evolução depende muito ligeiramente do valor de  $K$ .

Os gráficos relativos à evolução da amplitude do modo  $r$  e da velocidade angular da estrela em função do tempo (Figs. 4.1 e 4.2) mostram, nitidamente, as duas fases na evolução. Como a transição entre as duas fases de evolução acontece ao fim de algumas centenas de segundos, dependendo do valor de  $K$ , optámos por representar a evolução durante os primeiros 1000 s da instabilidade e para vários valores do parâmetro  $K$ . As Figs. 4.1 e 4.2 podem ser comparadas com as Figs. 2.2 e 2.3 do capítulo 2, respectivamente, que ilustram os resultados de Owen *et al.* [2]. No trabalho de Owen *et al.* [2], o valor da amplitude de saturação do modo  $r$  foi escolhido de maneira arbitrária, enquanto no nosso caso, a saturação ocorre de forma natural. Assim, a inclusão de rotação diferencial associada ao modo  $r$  elimina a arbitrariedade na escolha de  $\alpha_{sat}$ . Notamos ainda que, enquanto no trabalho de Owen *et al.* [2] o valor da velocidade angular final da estrela depende fortemente do valor arbitrário da amplitude de saturação do modo  $r$ , no nosso caso, o valor da velocidade angular final da estrela é praticamente independente de  $\alpha_{sat}$ .

Durante a evolução não linear do modo  $r$ , o fluido desenvolve uma forte rotação diferencial. Para quantificar esta rotação diferencial, definimos uma rotação diferencial média como a variância ponderada da velocidade angular  $\Omega$  [12],

$$(\Delta\Omega)^2 = \frac{\int \rho_0 r^2 \sin^2 \theta (\delta^{(2)} v^\phi - \bar{\Omega}_{dr})^2 dV}{\int \rho_0 r^2 \sin^2 \theta dV}, \quad (4.41)$$

onde a velocidade angular média  $\bar{\Omega}_{dr}$ , caracterizando a deriva de elementos de fluido



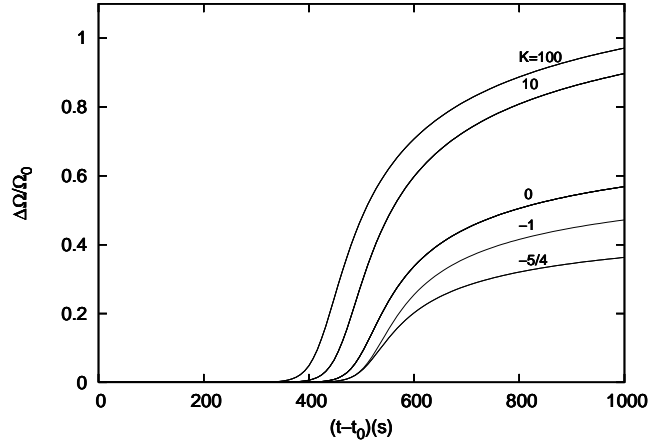


Figura 4.3: Evolução temporal da rotação diferencial média  $\Delta\Omega$  para diferentes valores de  $K$ . Depois de algumas centenas de segundos, a rotação diferencial média cresce rapidamente, saturando em valores elevados relativamente à velocidade angular inicial da estrela não perturbada. O valor inicial da amplitude do modo é  $\alpha_0 = 10^{-6}$ .

ao longo das latitudes estelares, é dada por

$$\bar{\Omega}_{dr} = \frac{\delta^{(2)}J}{I} = \frac{\int \rho_0 r^2 \sin^2 \theta \delta^{(2)}v^\phi dV}{\int \rho_0 r^2 \sin^2 \theta dV}. \quad (4.42)$$

Para o modelo politrópico considerado, as Eqs. (4.41) e (4.42) dão para a rotação diferencial média a seguinte expressão:

$$\Delta\Omega = \frac{1}{3}\alpha^2\Omega Q \left[ \frac{15}{56} (24K^2 + 56K + 35) \frac{\tilde{I}\tilde{H}}{\tilde{J}^2} - (4K + 5)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.43)$$

onde  $\tilde{H} = \int_0^R \rho_0 r^8 dr / (MR^6) = 0.01$ . Como podemos ver na Fig. 4.3, depois de algumas centenas de segundos, a rotação diferencial média cresce rapidamente, saturando em valores elevados relativamente à velocidade angular inicial da estrela.

É de notar que a rotação diferencial média é sempre diferente de zero, qualquer que seja o valor do parâmetro  $K$ . Este resultado é a consequência directa do facto da variação euleriana de segunda ordem da velocidade ser composta por dois termos, um

termo induzido pelas quantidades de primeira ordem e outro, fixado pelas condições iniciais, que é um efeito puro de segunda ordem. Visto que estes dois termos não se cancelam mutuamente, qualquer que seja o valor de  $K$ , a rotação diferencial ao longo das latitudes estelares é uma característica inevitável dos modos  $r$  não lineares.

#### 4.4.2 $K < -5/4$

Consideremos agora o caso  $K < -5/4$ , e vejamos como se processa a evolução de  $\alpha$  e  $\Omega$ . Neste caso, como já foi mencionado, a um dado ponto da evolução, o modo  $r$  tem de ser saturado à mão para evitar que o momento angular total da estrela se torne negativo. Assim, durante uma primeira fase da evolução,  $\alpha$  e  $\Omega$  são determinados a partir das equações (4.28) e (4.29) e durante uma segunda fase  $\alpha = \alpha_{sat} \leq \sqrt{-3/[(4K+5)Q]}$  e  $\Omega$  é determinado pela Eq. (4.21) com  $d\alpha/dt = 0$ :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\Omega}{\tau_{GR}} \frac{\alpha_{sat}^2 Q}{1 + \frac{1}{3}(4K+5)\alpha_{sat}^2 Q}. \quad (4.44)$$

Como já foi frisado, o facto de se fixar o valor da amplitude de saturação  $\alpha_{sat}$  à mão introduz um elemento de arbitrariedade que não existia no caso  $K \geq -5/4$ . Em particular, é possível escolher  $\alpha_{sat}$  de tal forma que o valor final de  $\Omega$  seja consistente com os dados observacionais.

Para  $K < -2$  e  $-2 < K < -5/4$ , a evolução de  $\alpha(t)$  e  $\Omega(t)$  na primeira fase é dada pelas Eqs. (4.33) e (4.38). Durante a segunda fase da evolução,  $\alpha = \alpha_{sat}$  e  $\Omega(t)$  é dada por

$$\Omega(t) = \Omega(t_*) \left[ \frac{0.030\alpha_{sat}^2}{1 + \frac{1}{3}(4K+5)Q\alpha_{sat}^2} \left( \frac{\Omega(t_*)}{\Omega_K} \right)^6 (t - t_*) + 1 \right]^{-1/6}, \quad (4.45)$$

onde  $t_*$  é o momento em que ocorre a transição da primeira para a segunda fase da evolução e  $t - t_*$  é dado em segundos.

O caso  $K = -2$  é o caso particular que foi tratado detalhadamente por Owen et al. [2] e que apresentámos no capítulo 2. Neste caso, durante a primeira fase da evolução, a evolução das variáveis  $\alpha(t)$  e  $\Omega(t)$  é determinada pelas equações

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad (4.46)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha}{\tau_{GR}}. \quad (4.47)$$

que admitem as soluções

$$\Omega(t) = \Omega_0, \quad (4.48)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_{GR}}}. \quad (4.49)$$

Se a velocidade inicial for  $\Omega_0 = \Omega_K$ , então  $\tau_{GR} = -37.1$  s, o que implica que a perturbação cresce exponencialmente, da amplitude inicial  $\alpha_0 = 10^{-6}$  até valores da ordem da unidade, em apenas aproximadamente 500 s. Depois desta primeira fase, relativamente breve, em que  $\Omega$  se mantém constante e  $\alpha$  cresce exponencialmente, a amplitude do modo  $\alpha$  tem de ser saturada à mão num valor inferior ou igual a  $Q^{-1/2} = 3.26$ . A evolução é então determinada pela Eq. (4.44), cuja solução é

$$\Omega(t) = \Omega_0 \left[ \frac{0.030\alpha_{sat}^2(t-t_*)}{1 - Q\alpha_{sat}^2} + 1 \right]^{-1/6}, \quad (4.50)$$

onde  $t_*$  representa o momento em que ocorre a transição da primeira para a segunda fase. O valor da velocidade angular da estrela depois de um ano de evolução está sujeito a um elemento de arbitrariedade devido à escolha subjectiva do valor da amplitude de saturação. Por exemplo, depois de um ano de evolução, para  $\alpha_{sat} = 1$  e  $\Omega_0 = \Omega_K$  obtém-se  $\Omega(t=1 \text{ ano}) \approx 0.1\Omega_K$ , enquanto para  $\alpha_{sat} = 10^{-3}$  a velocidade angular é  $\Omega(t=1 \text{ ano}) \approx 0.9\Omega_K$ .

## 4.5 Evolução não linear do modo $r$ : solução numérica

As Eqs. (4.26) e (4.27) são demasiado complexas para que consigamos encontrar a sua solução analítica. Assim, vamos, agora, estudar a evolução temporal da amplitude do modo  $\alpha$  e da velocidade angular da estrela  $\Omega$  resolvendo numericamente as Eqs. (4.26) e (4.27). Para isso precisamos especificar como é que a temperatura da estrela varia com o tempo, visto que a escala temporal da viscosidade, dada pela Eq. (4.24), é uma função da temperatura  $T$ .

Assumimos, tal como na Ref. [2], que a temperatura da estrela decresce devido à emissão de neutrinos através do processo URCA,

$$\frac{T(t)}{10^9\text{K}} = \left[ \frac{t}{\tau_c} + \left( \frac{10^9\text{K}}{T_0} \right)^6 \right]^{-1/6}, \quad (4.51)$$

onde  $T_0$  é a temperatura inicial da estrela e  $\tau_c = 1$  ano caracteriza a taxa de arrefecimento.

A escala temporal da viscosidade, dada pela Eq. (4.24), aplica-se a um modelo simples de uma estrela de neutrões com viscosidade de volume e de cisalhamento. Como vimos no capítulo 2, existem outros tipos de viscosidade associados à presença da crusta [13] ou à composição do núcleo [14]. Porém, como os processos envolvidos são muito complexos, não existe ainda consenso quanto à escala temporal da viscosidade mais apropriada para descrever uma estrela de neutrões real. Assim, neste trabalho, usamos simplesmente a escala temporal da viscosidade descrita pela Eq. (4.24).

Assumimos que a temperatura, a amplitude do modo  $r$  e a velocidade angular da estrela tomam os valores iniciais  $T_0 = 10^{11}\text{K}$ ,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  e  $\Omega_0 = \Omega_K$ , onde

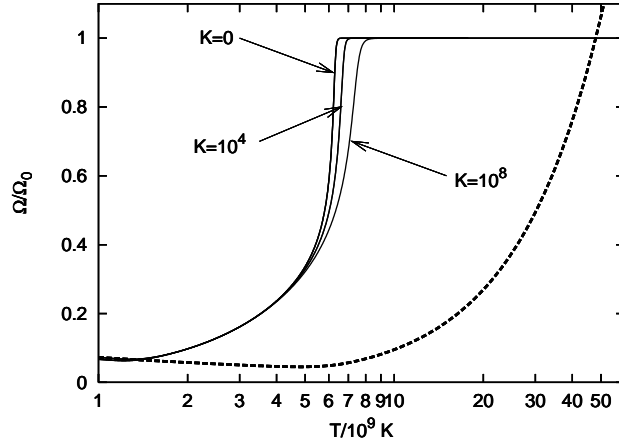


Figura 4.4: Velocidade angular da estrela em função da temperatura. A linha tracejada representa a curva de instabilidade,  $\tau_{GR}^{-1}(\Omega) + \tau_V^{-1}(\Omega, T) = 0$ , ou seja o conjunto de pontos onde o efeito da viscosidade é exactamente compensado pelo efeito da radiação gravitacional.

$\Omega_K = (2/3)\sqrt{\pi G \bar{\rho}} = 5612 \text{ s}^{-1}$  é a velocidade angular de Kepler, acima da qual a estrela começa a perder massa pelo equador. Assim, durante os primeiros instantes da evolução, a viscosidade de volume domina a dinâmica das Eqs. (4.26) e (4.27). Mas isto só acontece durante uma fracção de segundo. Efectivamente, a temperatura da estrela cai tão rapidamente que a força de reacção da radiação gravitacional torna-se quase imediatamente dominante. Esta preponderância da radiação gravitacional continua durante a maior parte da evolução, terminando entre  $t_b = 3.6 \times 10^6 \text{ s}$  (para  $K = -5/4$ ) e  $t_b = 7.1 \times 10^6 \text{ s}$  (para  $K \gg 1$ ). A Fig. 4.4 ilustra a evolução da velocidade angular da estrela em função da sua temperatura. À medida que a estrela arrefece e emite ondas gravitacionais, a sua velocidade angular decresce para valores quase insensíveis ao valor de  $K$ . Efectivamente, para  $T = 10^9 \text{ K}$ , as curvas correspondentes a diferentes valores de  $K$  são quase indistinguíveis. Na Fig. 4.5 fazemos uma ampliação do canto inferior esquerdo da Fig. 4.4. Podemos aí ver que

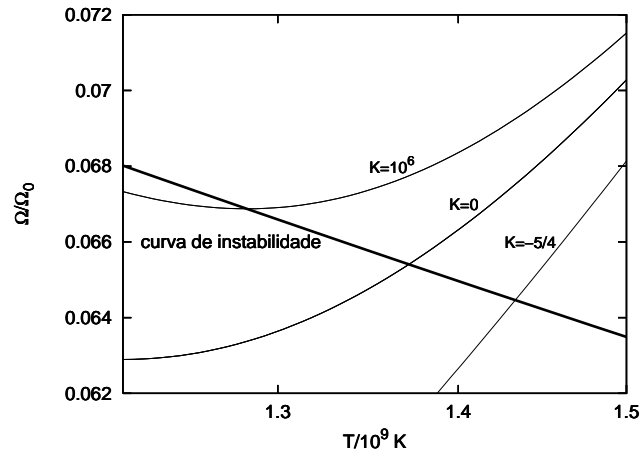


Figura 4.5: Velocidade angular da estrela em função da temperatura para diferentes valores de  $K$ . A linha mais grossa representa a curva de instabilidade,  $\tau_{GR}^{-1}(\Omega) + \tau_V^{-1}(\Omega, T) = 0$ .

para diferentes valores de  $K$ , as curvas  $\Omega(T)$  intersectam a curva de instabilidade para diferentes valores da temperatura. Contudo, os valores da velocidade angular da estrela na altura da intersecção (isto é, quando os efeitos dissipativos começam a dominar a dinâmica da evolução) dependem apenas ligeiramente de  $K$ . Por exemplo, para  $K = -5/4$ , obtemos  $\Omega(t_b) = 0.065\Omega_0$ , enquanto para  $K \gg 1$ , obtemos  $\Omega(t_b) = 0.067\Omega_0$ , onde  $t_b$  corresponde ao momento em que a curva da evolução da velocidade angular da estrela em função do tempo intersecta a curva de instabilidade. Assim, a conclusão obtida com a solução analítica da secção anterior é confirmada pela solução numérica: a velocidade angular da estrela no fim da evolução da instabilidade do modo  $r$  praticamente não depende do valor da rotação diferencial inicial, parametrizado por  $K$ .

A partir do instante  $t_b$ , a viscosidade de cisalhamento passa a dominar a dinâmica da evolução e a instabilidade do modo  $r$  torna-se inactiva. Em consequência, a amplitude  $\alpha$  do modo começa a diminuir.

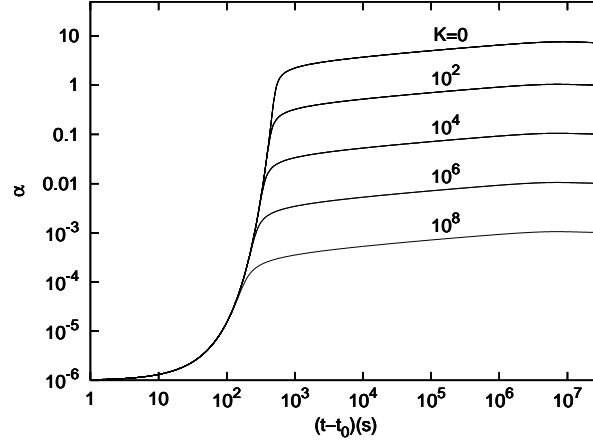


Figura 4.6: Amplitude do modo  $r$  em função do tempo para vários valores de  $K$ , tendo em conta o efeito da viscosidade.

Em  $t = 1$  ano, paramos a integração numérica das Eqs. (4.26) e (4.27), dado que a esta temperatura se espera que os efeitos superfluidos se tornem importantes, tornando inadequada a escala temporal da viscosidade dada pela Eq. (4.24).

Nas Figs. 4.6 e 4.7 apresentamos a evolução temporal de  $\alpha$  e  $\Omega$ , durante um ano, usando a integração numérica das Eqs. (4.26) e (4.27). Tal como referimos, a amplitude do modo  $r$  cresce inicialmente de forma exponencial, saturando ao fim de algumas centenas de segundos, em valores que dependem de  $K$ . Quando os efeitos da viscosidade de cisalhamento passam a dominar, no instante  $t_b$  (que depende de  $K$ ), a amplitude do modo  $r$  começa a diminuir. No que diz respeito à velocidade angular da estrela, verificamos que, após algum tempo, esta deixa de depender significativamente de  $K$ . No instante  $t_b$ , os valores da velocidade angular diferem muito pouco, estando compreendidos entre  $0.065\Omega_K$  (para  $K = -5/4$ ) e  $0.067\Omega_K$  (para  $K \gg 1$ ), valores estes que estão de acordo, em boa aproximação, com os dados observacionais. As Figs. 4.6 e 4.7 mostram claramente que os resultados obtidos a partir da solução analítica da secção 4.4 constituem uma aproximação muito boa.

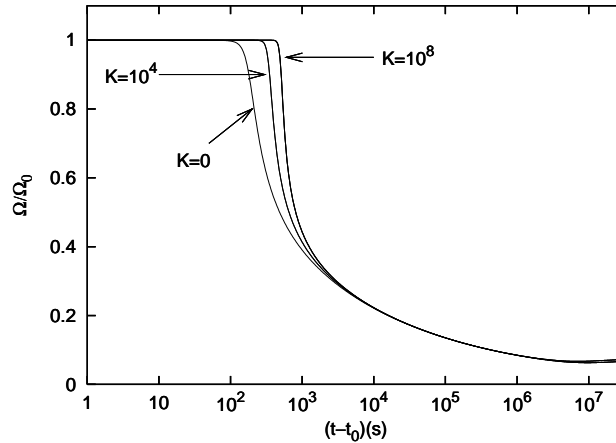


Figura 4.7: Velocidade angular da estrela em função do tempo para vários valores de  $K$ , tendo em conta o efeito da viscosidade.

De facto, notamos pequenas divergências apenas para  $t$  maior ou da ordem de  $t_b$ .

## 4.6 Conclusões

Este capítulo foi consagrado ao estudo da evolução da instabilidade dos modos  $r$  no âmbito da teoria não linear. Usámos a solução não linear dos modos  $r$ , que descreve rotação diferencial de natureza puramente cinemática, para calcular o momento angular físico do modo  $r$  até à segunda ordem na amplitude do modo [1]. Modificámos, então, o modelo de evolução de Owen *et al.* [2] de modo a incluir o efeito da rotação diferencial. Mostrámos que a rotação diferencial desempenha um papel fundamental na saturação da amplitude do modo  $r$ . Estudos anteriores haviam sugerido que os efeitos não lineares estariam na origem da saturação da amplitude do modo  $r$ . Contudo, a influência da rotação diferencial sobre a evolução da instabilidade não tinha sido demonstrada. Mostrámos ainda que a velocidade



angular da estrela no fim da evolução da instabilidade do modo  $r$  praticamente não depende do valor da rotação diferencial inicial, convergindo para valores que estão de acordo com os dados observacionais. Os resultados obtidos permitem-nos prever que a rotação diferencial também tem um papel importante no que diz respeito à detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$ . Assim, o nosso próximo capítulo é dedicado ao estudo da influência da rotação diferencial na detectabilidade da radiação gravitacional emitida por estrelas de neutrões recém-nascidas em que a instabilidade do modo  $r$  se encontra activa.

## Referências

- [1] P. M. Sá, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 084001.
- [2] B. J. Owen, L. Lindblom, C. Cutler, B. F. Schutz, A. Vecchio e N. Andersson, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 084020.
- [3] W. C. G. Ho e D. Lai, *Astrophys. J.* **543** (2000) 386.
- [4] S'i. Yoshida, S. Karino, S. Yoshida e Y. Eriguchi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **316** (2000) L1.
- [5] J. L. Friedman e B. F. Schutz, *Astrophys. J.* **222** (1978) 281.
- [6] P. M. Sá e B. Tomé, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 044007.
- [7] C. J. Hansen e S. D. Kawaler, *Stellar Interiors, Physical Principles, Structure, and Evolution* (Springer-Verlag, New York, 1994) p. 265.
- [8] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 299.
- [9] L. Linblom, B. J. Owen e S. M. Morsink, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4843.

- [10] L. Lindblom, G. Mendell e B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 064006.
- [11] P. Arras, E. E. Flanagan, S. M. Morsink, A. K. Schenk, S. A. Teukolsky e I. Wasserman, *Astrophys. J.* **591** (2003) 1129.
- [12] L. Lindblom, J. E. Tohline e M. Vallisneri, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084039.
- [13] L. Bildsten e G. Ushomirsky, *Astrophys. J. Lett.* **529** (2000) L33.
- [14] L. Lindblom e B. J. Owen, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 063006.

## Capítulo 5

# Detectabilidade das ondas gravitacionais

## 5.1 Introdução

Depois de estudar a evolução dos modos  $r$  no âmbito da teoria não linear e, em particular, a influência da rotação diferencial sobre esta evolução, vamos agora determinar se as ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões recém-nascidas podem ser detectadas pelos detectores interferométricos de ondas gravitacionais actualmente em actividade.

De acordo com a Relatividade Geral, as ondas gravitacionais são perturbações na curvatura do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz. Como a interacção gravitacional é muito fraca, são necessárias grandes quantidades de matéria e grandes acelerações para produzir ondas gravitacionais de amplitude significativa. Esta amplitude diminui à medida que as ondas se afastam da fonte. Ao atingirem a Terra, produzem pequeníssimas variações da curvatura do espaço-tempo, que, contudo, podem ser detectadas.

Os primeiros detectores de ondas gravitacionais, propostos por Joseph Weber no início dos anos 60 do século passado, eram barras ressonantes de grandes dimensões que se deformavam à passagem de ondas gravitacionais de determinadas frequências. Posteriormente, as barras ressonantes foram arrefecidas até temperaturas perto do zero absoluto, o que permitiu aumentar a sua sensibilidade em várias ordens de grandeza. Encontram-se em funcionamento, actualmente, várias barras ressonantes. Por exemplo, o detector NAUTILUS é uma barra de alumínio de 2300 kg arrefecida a 0.1 K que se encontra na Itália. As suas frequências de ressonância são de 908 e 924 Hz e tem, nestas frequências, uma sensibilidade de aproximadamente  $10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$ .

Nos anos 70 do século XX, surgiu outro tipo de detectores, os detectores inter-

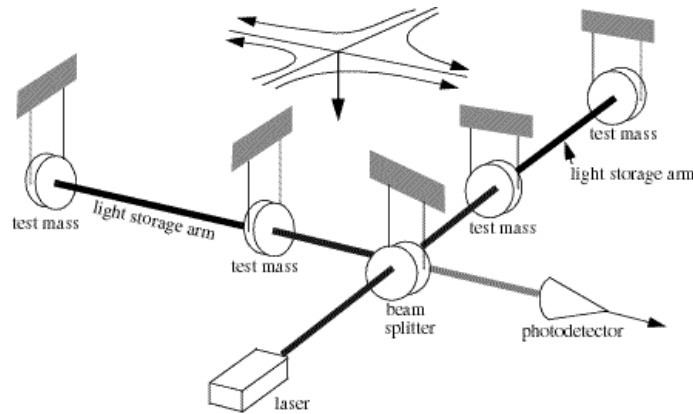


Figura 5.1: Esquema de um detector interferométrico de ondas gravitacionais (cortesia de [www.ligo.caltech.edu/LIGO\\_web/about/factsheet.html](http://www.ligo.caltech.edu/LIGO_web/about/factsheet.html)).

ferométricos, cujo princípio de funcionamento é idêntico ao de um interferômetro de Michelson. No interior dos dois tubos de aço que compõem os braços, geralmente perpendiculares, é mantido um vácuo profundo. Nas extremidades dos braços, encontram-se espelhos (massas de teste) suspensos de forma a minimizar as perturbações do meio ambiente. Um feixe de luz laser é injectado no interior dos braços, sendo reflectido várias vezes pelos espelhos. A interferência entre os feixes de luz provenientes de cada um dos braços é analisada a fim de detectar qualquer desvio na posição das massas de teste. Na Fig. 5.1 está representado esquematicamente o princípio de funcionamento de um detector interferométrico.

Os primeiros protótipos tinham braços com alguns metros de comprimento. A sua sensibilidade era, contudo, demasiado baixa para permitir a detecção de ondas gravitacionais. Actualmente, existem vários detectores interferométricos em completa operação, nomeadamente, LIGO, Virgo, GEO600 e TAMA.

O LIGO é um conjunto de três detectores interferométricos, dois construídos em Hanford (Washington, EUA), e outro em Livingston (Louisiana, EUA). Os dois detectores situados em Hanford têm braços com comprimentos de 2 e 4 km, par-

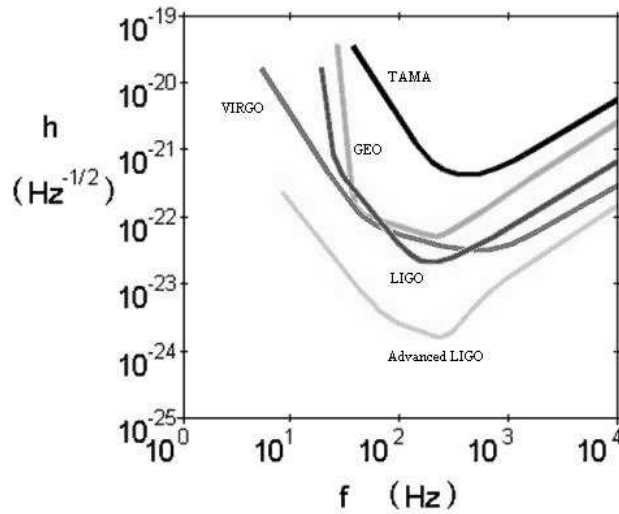


Figura 5.2: Curvas da sensibilidade dos vários detectores interferométricos de ondas gravitacionais, onde  $h(f) = \sqrt{S_h(f)}$  e  $S_h(f)$  é a densidade espectral de potência do ruído no detector (cortesia de [www.johnstonsarchive.net/relativity/pictures.html](http://www.johnstonsarchive.net/relativity/pictures.html)).

utilizando os mesmos tubos de aço. O detector em Livingston tem braços de 4 km de comprimento. Visto que os interferômetros em Hanford e Livingston estão separados por uma distância significativa (cerca de 3000 km), é possível correlacionar os sinais recolhidos de modo a determinar a localização no céu das fontes de ondas gravitacionais. O LIGO está em operação desde 2002. Na Fig. 5.2 estão representadas as curvas da sensibilidade dos vários detectores interferométricos em função da frequência da onda gravitacional.

O Virgo é um detector de ondas gravitacionais situado na Itália, próximo de Pisa. A dimensão dos braços é de 3 km e a sua sensibilidade máxima está muito próxima da sensibilidade do LIGO. Este detector está em operação desde 2003. Comparando as curvas de sensibilidade do Virgo e do LIGO (Fig. 5.2), verificamos que o Virgo é mais sensível a baixas frequências. Isto deve-se à sofisticada suspensão dos espelhos,

que permite um melhor isolamento das perturbações sísmicas do que o LIGO.

O GEO600, situado na Alemanha, e o TAMA, situado no Japão, têm braços com comprimentos menores, 600 m e 300 m, respectivamente. Estes detectores têm uma sensibilidade menor do que o LIGO e o Virgo, podendo, no entanto, detectar ondas gravitacionais de fontes localizadas mais perto da Terra.

No que diz respeito a futuros detectores interferométricos, o projecto da versão avançada do LIGO (“Advanced LIGO”) já foi aprovado e este deverá entrar em funcionamento por volta de 2013. Esta versão do LIGO deverá atingir uma sensibilidade pelo menos dez vezes maior do que a versão inicial. O aumento da sensibilidade de um factor dez significa que um sinal com amplitude suficiente para ser detectado pela primeira versão poderá ser detectado se for emitido a uma distância dez vezes maior, ou seja, o volume abrangido pelo Advanced LIGO será mil vezes maior. Consequentemente, a probabilidade de detecção de ondas gravitacionais aumentará.

Uma versão avançada do detector Virgo também está prevista para entrar em funcionamento por volta de 2013.

Os detectores interferométricos podem detectar ondas gravitacionais provenientes de várias fontes [1]. Entre estas fontes pode estar uma estrela de neutrões recém-nascida que emite ondas gravitacionais devido à instabilidade do modo  $r$ . A detectabilidade destas ondas gravitacionais depende crucialmente da distância entre o detector e a fonte. Por um lado, a amplitude da onda é inversamente proporcional à distância até ao detector, pelo que, quanto mais perto da Terra estiver a fonte maior será a amplitude do sinal recebido e, portanto, maior a possibilidade de ser detectado. Por outro lado, quanto menor a distância considerada, menor a probabilidade de ocorrer um evento susceptível de emitir ondas gravitacionais com amplitude suficiente para serem detectadas. Deste modo, para avaliar a detectabilidade das ondas gravitacionais, teremos que procurar um compromisso entre a amplitude do

sinal e a probabilidade de ocorrência de eventos. Assim, iremos nesta tese considerar distâncias até 20 Mpc (de forma a incluir o enxame de galáxias da Virgem), suficientemente pequenas para que a amplitude das ondas gravitacionais seja significativa, mas suficientemente grandes para que haja um número razoável de eventos por ano. Iremos, também, restringir a nossa análise aos detectores LIGO e Virgo por serem aqueles que têm maior probabilidade de detectar um sinal.

Na prática, a detecção do sinal produzido pelas ondas gravitacionais emitidas por uma estrela de neutrões recém-nascida em que a instabilidade do modo  $r$  se encontra activa é uma tarefa muito complicada, visto que o sinal é muito fraco relativamente ao ruído no detector. Assim, é necessário utilizar técnicas de processamento de sinal para isolar o sinal do ruído. Nesta tese, utilizaremos a técnica do filtro adaptado (*matched filtering*). Na realidade, o uso desta técnica implica o conhecimento bastante preciso da forma da onda gravitacional, que não está disponível actualmente, devido à extrema complexidade das estrelas de neutrões reais. Contudo, o uso desta técnica permite-nos fazer uma análise aproximada da detectabilidade das ondas gravitacionais.

A detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas pelo modo  $r$  já foi estudada no passado, nomeadamente por Owen *et al.* [2], usando o modelo de evolução fenomenológico que apresentámos detalhadamente no capítulo 2. Contudo, e tal como já referimos, a análise de Owen *et al.* é baseada na teoria linearizada e não tem em conta o efeito da rotação diferencial. Na próxima secção, discutiremos brevemente os resultados de Owen *et al.* e na secção seguinte apresentaremos os nossos resultados sobre a detectabilidade de ondas gravitacionais, tendo em conta a influência da rotação diferencial.



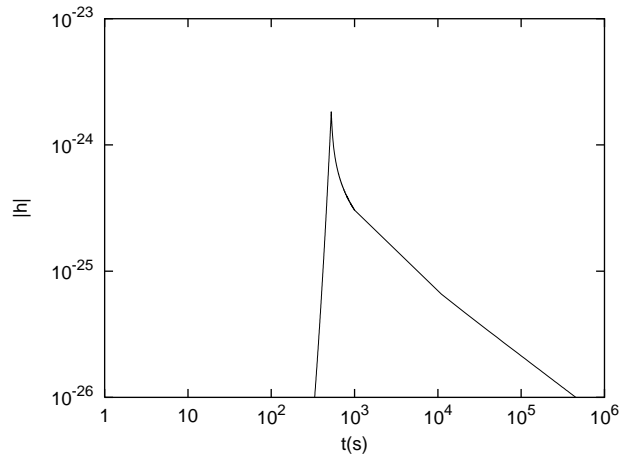


Figura 5.3: Amplitude da onda gravitacional  $|h(t)|$  para  $\alpha_{sat} = \sqrt{2}$  e para uma fonte situada a uma distância de 20 Mpc da Terra.

## 5.2 Detectabilidade no âmbito da teoria linear

Depois de propor um modelo fenomenológico de evolução da instabilidade do modo  $r$ , Owen *et al.* [2] debruçaram-se sobre a detectabilidade das ondas gravitacionais devidas a essa instabilidade. Para tal, determinaram a amplitude da onda gravitacional em função do tempo para  $\ell = 2$ , assumindo que as ondas gravitacionais retiram momento angular da estrela, essencialmente durante a fase de saturação não linear da instabilidade. Assumiram, ainda, que durante esta fase de saturação, a amplitude do modo  $r$  é da ordem da unidade. Na Fig. 5.3 está representada a amplitude  $h(t)$  da onda gravitacional. O facto da amplitude do modo  $r$  ter sido saturada à mão, provoca uma transição brusca entre a primeira e a segunda fases de evolução. Como veremos na próxima secção, quando a saturação da amplitude do modo acontece de forma natural, a transição entre as duas fases de evolução ocorre de forma suave.

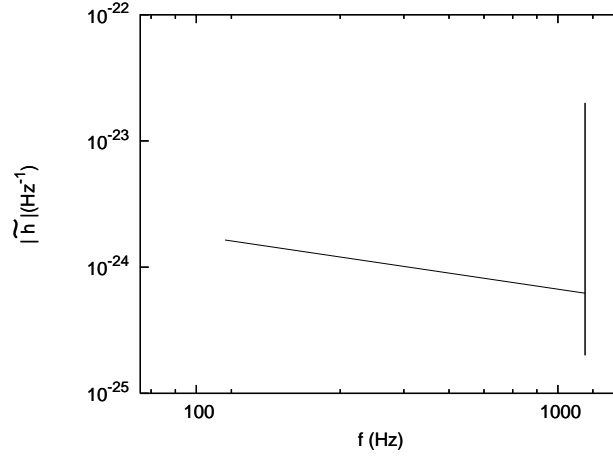


Figura 5.4: Amplitude da onda gravitacional  $|\tilde{h}(f)|$  para  $\alpha_{sat} = \sqrt{2}$  e para uma fonte situada a uma distância de 20 Mpc da Terra.

Owen *et al.* [2] também analisaram a evolução da amplitude da onda gravitacional em função da frequência, que se encontra representada na Fig. 5.4. O pico para uma frequência de aproximadamente 1200 Hz é devido ao facto de na primeira fase de evolução a velocidade angular da estrela praticamente não variar, o que leva à emissão de ondas gravitacionais quasi-monocromáticas. Efectivamente, como vimos no capítulo 2, ao descrevermos o modelo de evolução de Owen *et al.* [2], durante a primeira fase da evolução a velocidade angular da estrela é determinada por

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2\Omega}{\tau_V} \frac{\alpha^2 Q}{1 + \alpha^2 Q}, \quad (5.1)$$

onde  $\tau_V$  representa a escala temporal associada aos efeitos da viscosidade. Como inicialmente os efeitos da viscosidade podem ser negligenciados em comparação com os efeitos da radiação gravitacional, a Eq. (5.1) pode ser aproximada por  $d\Omega/dt \approx 0$ . Assim, na primeira fase,  $\Omega \approx \text{const.}$  e a frequência da onda gravitacional é  $f = 2\Omega/(3\pi) \approx \text{const.}$

No que diz respeito à detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas pelos modos  $r$ , Owen *et al.* [2] calcularam a razão entre o sinal e o ruído para uma fonte

localizada a  $D = 20$  Mpc da Terra. A esta distância (que inclui o enxame de galáxias da Virgem), espera-se uma taxa de formação de estrelas de neutrões em supernovas suficientemente elevada para que a probabilidade de detecção seja razoável. Obtiveram para a razão entre o sinal e o ruído, usando a técnica do filtro adaptado, os seguintes valores:  $S/N = 1.24, 7.6$  e  $10.6$  para LIGO I, II e III, respectivamente<sup>1</sup>. Analisando os valores de  $S/N$ , Owen *et al.* concluíram que somente a nova geração de detectores (LIGO II e III) teria a possibilidade de detectar um sinal proveniente de uma fonte situada à distância de 20 Mpc da Terra.

Outros autores debruçaram-se sobre a possibilidade de detectar ondas gravitacionais levando em conta efeitos não lineares na saturação da amplitude do modo  $r$ , nomeadamente, considerando a influência da interacção não linear entre os modos [3]. Para este efeito, usaram os resultados obtidos para a amplitude de saturação do modo  $r$  no modelo de Owen *et al.* [2]. Como a amplitude de saturação na presença da interacção não linear entre modos é cerca de duas ordens de grandeza inferior à amplitude de saturação de Owen *et al.* [2], a distância máxima até a qual esperam poder detectar um sinal é menor, da ordem de 200 kpc [3]. Visto que o número de supernovas num volume de raio 200 kpc é muito reduzido (algumas por século), a probabilidade de detecção de ondas gravitacionais emitidas por estrelas de neutrões também é muito reduzida.

---

<sup>1</sup>É de notar que, na altura em que Owen *et al.* escreveram o seu artigo (1998), estava previsto que o LIGO teria duas versões avançadas o LIGO II e o LIGO III. Mais tarde, estes dois projectos foram fundidos num só, o chamado “Advanced LIGO”.

### 5.3 Detectabilidade no âmbito da teoria não linear

Usando o modelo de evolução descrito em pormenor no capítulo anterior, propomo-nos analisar a detectabilidade das ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$ , tendo em conta a influência da rotação diferencial [4].

Como vimos no capítulo precedente, durante a evolução da instabilidade do modo  $r$ , uma parte do momento angular inicial de uma estrela de neutrões jovem é emitida sob a forma de ondas gravitacionais, levando a uma diminuição da velocidade de rotação da estrela. Estas ondas gravitacionais poderão em princípio ser detectadas pelos detectores de interferometria laser LIGO e Virgo, usando estratégias de detecção apropriadas.

A frequência das ondas gravitacionais é dada por [2]

$$f = \frac{2\Omega}{3\pi} \quad (5.2)$$

onde  $\Omega$  é a velocidade angular da estrela de neutrões. Assim, no nosso caso, o intervalo de frequências está compreendido entre  $f_{min} = (77 - 80)$  Hz e  $f_{max} = 1191$  Hz, onde a frequência máxima corresponde ao valor inicial da velocidade angular da estrela,  $\Omega_K = 5612 \text{ s}^{-1}$ , e a frequência mínima corresponde à velocidade angular final da estrela,  $\Omega(t_b)$ , que varia entre  $0.065\Omega_K$  (para  $K = -5/4$ ) e  $0.067\Omega_K$  (para  $K \gg 1$ )<sup>2</sup>.

Vamos começar por determinar a amplitude da onda gravitacional, que é dada

---

<sup>2</sup> $t_b$  corresponde ao momento em que termina a segunda fase da evolução e foi determinado resolvendo numericamente as Eqs. (4.26) e (4.27) para vários valores do parâmetro  $K$  (ver capítulo anterior).

pela expressão [2]

$$h(t) = \sqrt{\frac{3}{80\pi}} \frac{\omega^2 S_{22}}{D}, \quad (5.3)$$

onde o momento multipolar de corrente é [5]

$$S_{22} = \frac{32\sqrt{2}\pi}{15} \frac{GMR^3}{c^5} \alpha \Omega \tilde{J}, \quad (5.4)$$

$D$  é a distância até à fonte e  $\omega = -4\Omega/3$  é a frequência do modo  $r$  no referencial inercial. Para o modelo politrópico considerado no capítulo 4 ( $M = 1.4M_\odot$ ,  $R = 12.53$  km e  $\tilde{J} = 1.635 \times 10^{-2}$ ) obtemos para a amplitude da onda gravitacional

$$|h(t)| = 1.3 \times 10^{-24} \alpha \left( \frac{\Omega}{\Omega_K} \right)^3 \left( \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \right), \quad (5.5)$$

onde  $\Omega(t)$  é a velocidade angular da estrela e  $\alpha(t)$  é a amplitude do modo  $r$ . Para determinar como é que  $|h(t)|$  varia durante a evolução da instabilidade, usamos para  $\alpha$  e  $\Omega$  os valores obtidos no capítulo 4. Mais concretamente, resolvemos numericamente as Eqs. (4.26) e (4.27), que incluem os efeitos da viscosidade (ver Fig. 5.5). Visto que durante a maior parte da evolução da instabilidade, a influência da viscosidade é negligenciável, também podemos usar as Eqs. (4.28) e (4.29) para determinar  $\alpha(t)$  e  $\Omega(t)$ . Tal como vimos no capítulo anterior isto constitui uma boa aproximação.

Durante a primeira fase de evolução, substituindo  $\alpha$  e  $\Omega$  pelas expressões (4.34) e (4.39), respectivamente, obtém-se que  $|h(t)|$  cresce exponencialmente. Durante a segunda fase, substituindo  $\alpha$  e  $\Omega$  pelas expressões (4.35) e (4.40), respectivamente, obtém-se que  $|h(t)|$  decresce lentamente como  $t^{-1/2}$ . O valor máximo da amplitude da onda gravitacional é atingido no instante  $t_*$ , determinado pela expressão

$$\frac{d|h|}{dt}(t_*) = 0, \quad (5.6)$$

ou, equivalentemente,

$$\Omega \frac{d\alpha}{dt}(t_*) + 3\alpha \frac{d\Omega}{dt}(t_*) = 0. \quad (5.7)$$

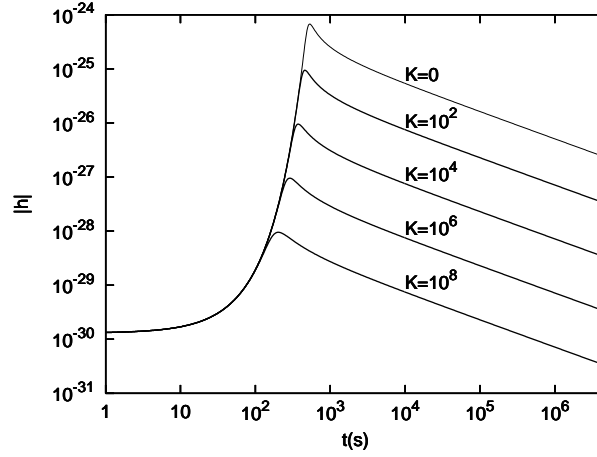


Figura 5.5: Amplitude da onda gravitacional  $|h(t)|$  para diferentes valores de  $K$  e para uma distância até à fonte  $D = 20$  Mpc. Em  $t_* \approx [543.1 - 18.5 \ln(K + 2)]$  s a amplitude da onda gravitacional atinge o seu valor máximo,  $h_{max} = 9.5 \times 10^{-25}(K + 2)^{-1/2}$ .

Substituindo  $d\alpha/dt$  e  $d\Omega/dt$  pelas expressões (4.28) e (4.29), respectivamente, obtemos a equação

$$- \left[ 1 + \frac{4}{3}(K + 2)Q\alpha(t_*)^2 \right] \frac{\Omega(t_*)\alpha(t_*)}{\tau_{GR}(t_*)} + 8(K + 2)Q \frac{\Omega(t_*)\alpha(t_*)^3}{\tau_{GR}(t_*)} = 0, \quad (5.8)$$

cuja solução é

$$\alpha(t_*) = \sqrt{\frac{3}{20(K + 2)Q}}, \quad (5.9)$$

onde  $Q = 0.094$  no âmbito do modelo politrópico considerado. Substituindo  $\alpha(t_*)$  na expressão (4.31), obtém-se que

$$\Omega(t_*) = \frac{5}{6}\Omega_0, \quad (5.10)$$

onde consideramos que  $4(K + 2)Q\alpha_0^2/3 \ll 1$ . O valor máximo da amplitude da onda gravitacional é então dado aproximadamente pela expressão (5.5) onde  $\alpha$  e  $\Omega$  são

substituídos pelas expressões (5.9) e (5.10), respectivamente,

$$h_{max} = 9.5 \times 10^{-25} \frac{1}{\sqrt{K+2}} \left( \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \right), \quad (5.11)$$

onde consideramos que  $\Omega_0 = \Omega_K$ . O momento  $t_*$  em que a amplitude da onda gravitacional atinge o seu valor máximo pode ser determinado simplesmente substituindo a expressão (5.9) na Eq. (4.33) ou a expressão (5.10) na Eq. (4.38). Considerando, por exemplo, o primeiro caso e assumindo que  $4(K+2)Q\alpha_0^2/3 \ll 1$ , temos que

$$-\frac{1}{\tilde{\tau}_{GR}} \left( \frac{2}{3} \right)^6 t_* = \ln \sqrt{\frac{3}{20(K+2)Q\alpha_0^2}} + \sum_{n=1}^5 \frac{5!}{2n(5-n)!n!} \left( \frac{1}{5} \right)^n, \quad (5.12)$$

de onde se obtém que

$$t_* = 543.1 - 18.5 \ln(K+2) \text{ s}, \quad (5.13)$$

onde  $\tilde{\tau}_{GR} = -3.26 \text{ s}$  (ver Eq. 4.20) e assumimos que  $\alpha_0 = 10^{-6}$ . Se compararmos este valor com o valor de  $t_a$  da expressão (4.36), notamos que o valor máximo da amplitude da onda gravitacional ocorre breves segundos depois do fim da primeira fase da evolução da instabilidade do modo.

Determinemos, agora, a amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências,  $|\tilde{h}(f)|$ <sup>3</sup>, usando a aproximação da fase estacionária, nomeadamente,

$$|\tilde{h}(f)| = |h(t)| / \sqrt{|df/dt|}, \quad (5.14)$$

onde  $df/dt$  é directamente deduzido da Eq. (4.26),

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \alpha^2 \left[ -8.1(K+2) \left( \frac{f}{f_{max}} \right)^7 + 0.02 \left( K + \frac{5}{4} \right) \left( \frac{f}{f_{max}} \right)^3 \frac{\text{s}}{t} \right. \\ \left. + 3.8 \times 10^{-9} \left( K + \frac{5}{4} \right) \frac{f}{f_{max}} \left( \frac{t}{\text{s}} \right)^{1/3} \right] \text{ Hz/s}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nesta expressão, o segundo termo do lado direito torna-se menor do que o primeiro termo depois de apenas uma fracção de segundo, enquanto o terceiro termo só se

---

<sup>3</sup> $\tilde{h}(f)$  é a transformada de Fourier de  $h(t)$ , dada por  $\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} h(t) dt$ .

torna comparável ao primeiro no fim da segunda fase da evolução. Assim, conservamos unicamente o primeiro termo do lado direito da Eq. (5.15), pelo que, a amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências,  $|\tilde{h}(f)|$ , é dada simplesmente por

$$|\tilde{h}(f)| = \frac{4.6 \times 10^{-25}}{\sqrt{K+2}} \sqrt{\frac{f_{max}}{f}} \left( \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \right) \text{ Hz}^{-1}. \quad (5.16)$$

Esta expressão é válida durante as duas fases da evolução da instabilidade do modo  $r$  para frequências variando de  $f_{min} = (77 - 80) \text{ Hz}$  até  $f_{max} = 1191 \text{ Hz}$ .

A amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências pode ser deduzida usando outro método. Esse método, que foi usado por Owen *et al.* [2], baseia-se no facto de  $dJ/df \propto I$ , onde  $J$  é o momento angular total da estrela,  $f$  é a frequência da onda gravitacional emitida e  $I$  é o momento de inércia da estrela não perturbada. Efectivamente, das Eqs. (4.7) e (4.8), obtemos que

$$\frac{dJ}{d\Omega} = I \left[ 1 + \frac{1}{3}(4K+5)Q\alpha^2 \left( 1 + 2\frac{\Omega}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\Omega} \right) \right], \quad (5.17)$$

onde  $Q \equiv 3\tilde{J}/(2\tilde{I})$ . Podemos usar, agora, as equações (4.28) e (4.29) para relacionar  $d\alpha$  e  $d\Omega$ , nomeadamente,

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{\frac{8}{3}(K+2)Q\alpha}{1 + \frac{4}{3}(K+2)Q\alpha^2} d\alpha. \quad (5.18)$$

Inserindo esta expressão na Eq. (5.17) e usando  $f = 2\Omega/(3\pi)$ , obtemos

$$\frac{dJ}{df} = \frac{9\pi I}{8(K+2)}. \quad (5.19)$$

Como a Eq. (5.19) é válida durante as duas fases da evolução da instabilidade do modo  $r$ , podemos deduzir a amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências pelo método proposto na Ref. [2] chegando à expressão (5.16). O facto da Eq. (5.19) ser válida durante as duas fases da evolução da instabilidade reveste-se, aqui, de uma grande importância dado que no trabalho de Owen *et al.* [2] isto



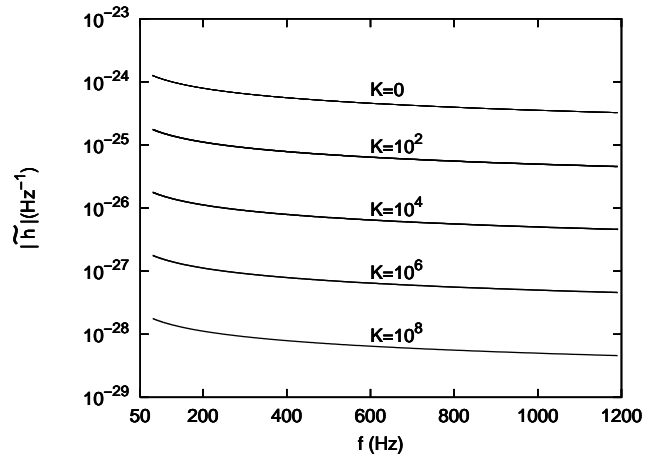


Figura 5.6: Amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências,  $|\tilde{h}(f)|$ , para diferentes valores de  $K$  e uma distância até à fonte  $D = 20$  Mpc.

não se verifica. Efectivamente, no modelo proposto por Owen *et al.* [2], a relação  $dJ/df \propto I$  só é válida durante a segunda fase da evolução, pelo que a expressão obtida por eles para  $|\tilde{h}(f)|$  só se aplica a esta fase.

Na Fig. 5.6 representamos a amplitude da onda gravitacional  $|\tilde{h}(f)|$  para diferentes valores de  $K$  e para frequências da onda gravitacional compreendidas entre  $f_{min}$  e  $f_{max}$ .

É importante lembrar, aqui, que no âmbito do modelo de evolução proposto por Owen *et al.* [2], a amplitude da onda gravitacional no domínio das frequências apresenta um pico nas altas frequências (ver Fig. 5.4). A existência desse pico deve-se ao facto de, durante a primeira fase da evolução da instabilidade do modo  $r$ , a velocidade angular da estrela evoluir muito lentamente segundo a escala temporal da viscosidade, conduzindo a uma emissão de ondas gravitacionais quasi-monocromáticas durante os primeiros 500 s da evolução. Contudo, como mostrámos no capítulo 4, se tivermos em conta a influência da rotação diferencial, nomeadamente, a sua contribuição para o momento angular físico da perturbação do modo  $r$ , então a

velocidade angular da estrela evolui segundo a escala temporal da radiação gravitacional logo na primeira fase de evolução [ver Eq. (4.26)]. Em consequência, a amplitude da onda gravitacional,  $|\tilde{h}(f)|$ , é dada pela expressão (5.16) também na primeira fase da evolução e não aparece o pico.

Analisemos, agora, a possibilidade de detectar as ondas gravitacionais emitidas devido à instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões recém-nascidas, usando os detectores interferométricos LIGO e Virgo. Devido à complexidade das estrelas de neutrões reais, o nosso conhecimento actual da evolução da instabilidade do modo  $r$  não é suficiente para prever a forma da onda gravitacional com uma precisão tal que nos permita aplicar uma técnica de processamento de sinal tipo filtragem adaptada. Contudo, podemos usar a filtragem adaptada para fazer uma estimativa da detectabilidade do sinal produzido pela passagem das ondas gravitacionais nos detectores. Com este objectivo, a amplitude característica do sinal,

$$h_c(f) \equiv f|\tilde{h}(f)| = \frac{5.5 \times 10^{-22}}{\sqrt{K+2}} \sqrt{\frac{f}{f_{max}}} \left( \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \right), \quad (5.20)$$

é comparada com o valor eficaz da sensibilidade do detector,

$$h_{rms}(f) = \sqrt{f S_h(f)}, \quad (5.21)$$

onde  $S_h(f)$  é a densidade espectral de potência do ruído. Para frequências no intervalo  $50 \text{ Hz} \leq f \leq 1200 \text{ Hz}$ , as curvas para as densidades espectrais de potência do ruído do LIGO [6], do Virgo [7] e do Advanced LIGO [8] são bem aproximadas pelas seguintes expressões analíticas [4], respectivamente,

$$S_h(f) = S_1 \left[ \left( \frac{f_1}{f} \right)^4 + \left( \frac{f}{f_1} \right)^2 \right], \quad (5.22)$$

onde  $S_1 = 3.4 \times 10^{-46} \text{ Hz}^{-1}$  e  $f_1 = 142.0 \text{ Hz}$ ,

$$S_h(f) = S_2 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{f_2}{f} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{f}{f_2} \right)^2 \right], \quad (5.23)$$

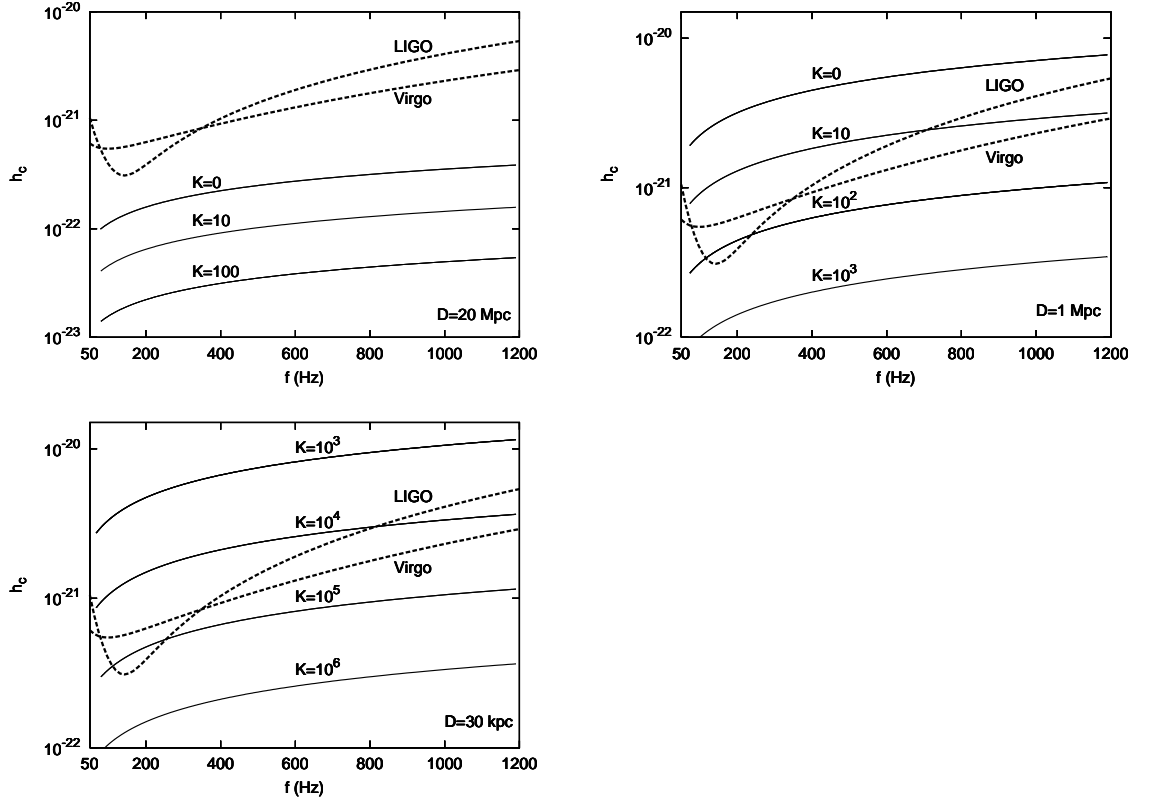


Figura 5.7: Comparação entre os valores eficazes da sensibilidade dos detectores LIGO e Virgo e as amplitudes características do sinal para  $D = 20$  Mpc,  $D = 1$  Mpc e  $D = 30$  kpc.

onde  $S_2 = 1.5 \times 10^{-45} \text{ Hz}^{-1}$  e  $f_2 = 249.6 \text{ Hz}$ , e

$$S_h(f) = S_3 \left\{ 1 + \left( \frac{f_3}{f} \right)^7 - \frac{10}{3} \left( \frac{f}{f_4} \right) \left[ 1 - \left( \frac{f}{f_4} \right) + \frac{3}{50} \left( \frac{f}{f_4} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.24)$$

onde  $S_3 = 2.2 \times 10^{-47} \text{ Hz}^{-1}$ ,  $f_3 = 52.8 \text{ Hz}$  e  $f_4 = 421.3 \text{ Hz}$ .

Na Fig. 5.7 as curvas correspondentes aos valores eficazes da sensibilidade dos detectores LIGO e Virgo são comparadas com as curvas correspondentes à amplitude característica do sinal da onda gravitacional para diferentes valores do parâmetro  $K$  e para distâncias da Terra até à fonte de  $D = 20$  Mpc,  $D = 1$  Mpc e  $D = 30$  kpc. Para uma distância de  $D = 20$  Mpc, que inclui o enxame de galáxias da Virgem, onde

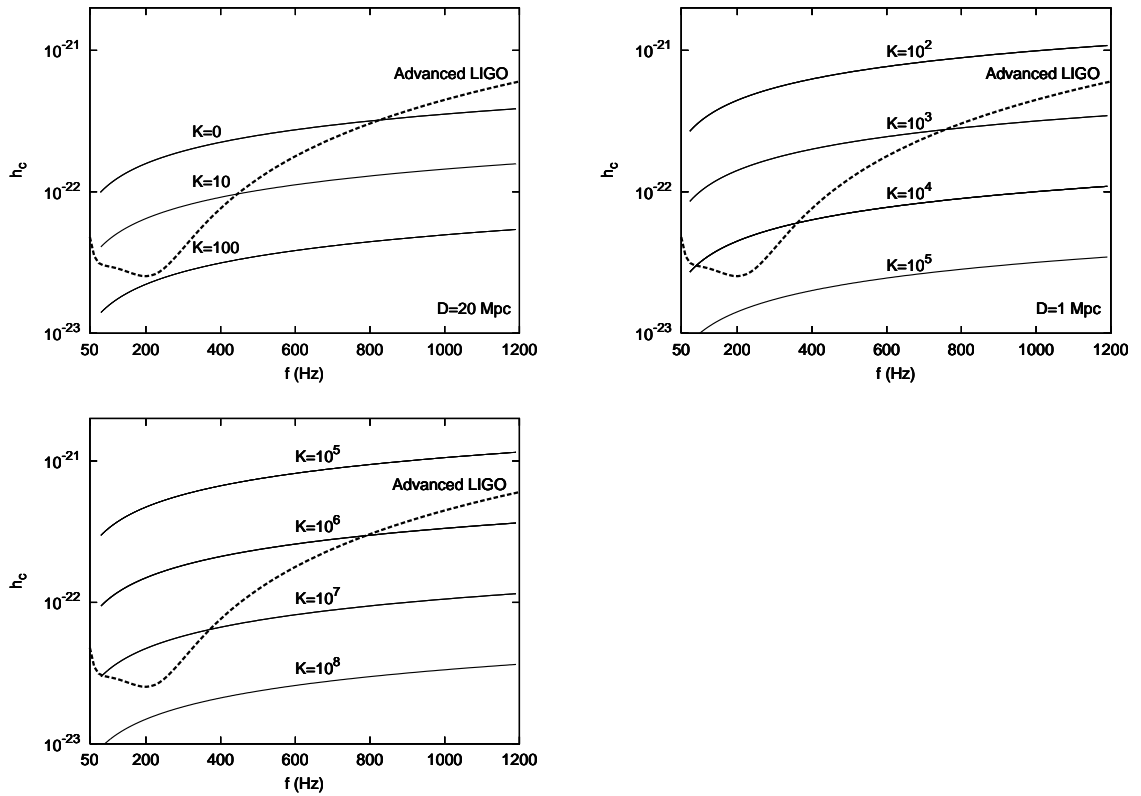


Figura 5.8: Comparação entre o valor eficaz da sensibilidade do detector Advanced LIGO e as amplitudes características do sinal para  $D = 20$  Mpc,  $D = 1$  Mpc e  $D = 30$  kpc.

algumas supernovas por ano são esperadas [9], notamos que não há possibilidade de detectar qualquer sinal com os detectores LIGO e Virgo, mesmo que a rotação diferencial inicial seja pequena ( $K \approx 0$ ). No entanto, quando consideramos uma distância menor entre o detector e a fonte, o sinal passa a ser detectável, mas a probabilidade de ocorrer algum evento diminui muito. Por exemplo, para  $D = 30$  kpc, que inclui a nossa Galáxia, a taxa de formação de supernovas é somente de 1 ou 2 supernovas por século [10]; neste caso, a probabilidade de detectar um sinal é muito reduzida.

Na Fig. 5.8, fazemos a mesma comparação mas, desta feita, considerando o

detector de ondas gravitacionais Advanced LIGO. Aqui, devido à maior sensibilidade do detector, verifica-se que para  $D = 20$  Mpc as ondas gravitacionais devidas à instabilidade do modo  $r$  podem ser detectadas se a rotação diferencial inicialmente presente na estrela não for muito elevada ( $K \lesssim 100$ ). Para distâncias inferiores, o sinal é detectável mesmo para  $K \gg 1$ ; contudo, tal como acima referimos, neste caso, a probabilidade de ocorrência de uma supernova é reduzida.

A característica mais importante das Figs. 5.7 e 5.8 é que a detectabilidade das ondas gravitacionais devidas à instabilidade do modo  $r$  em estrelas de neutrões jovens reduz-se drasticamente com o aumento do valor inicial da rotação diferencial associada ao modo  $r$ . Efectivamente, para  $K \gtrsim 100$ , até o detector Advanced LIGO não terá sensibilidade suficiente para detectar as ondas gravitacionais se a fonte estiver a uma distância de 20 Mpc da Terra. Quanto maior for a rotação diferencial inicial mais difícil se torna a detecção de ondas gravitacionais. Assim, a rotação diferencial associada aos modos  $r$  tem um papel fundamental na detectabilidade das ondas gravitacionais.

A comparação visual, nas Figs. 5.7 e 5.8, entre a amplitude característica do sinal e o valor eficaz da sensibilidade do detector dá-nos uma medida qualitativa da razão entre o sinal e o ruído usando a técnica de filtro adaptado. Uma determinação quantitativa da razão entre o sinal e o ruído é obtida a partir de

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 2 \int_{f_{min}}^{f_{max}} \frac{df}{f} \left(\frac{h_c}{h_{rms}}\right)^2, \quad (5.25)$$

de onde, para  $f_{min} = (77 - 80)$  Hz e  $f_{max} = 1191$  Hz, se obtém

$$\frac{S}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{K+2}} \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \times \begin{cases} 0.9 & (\text{LIGO}) \\ 0.7 & (\text{Virgo}) \\ 12.9 & (\text{Advanced LIGO}) \end{cases}. \quad (5.26)$$

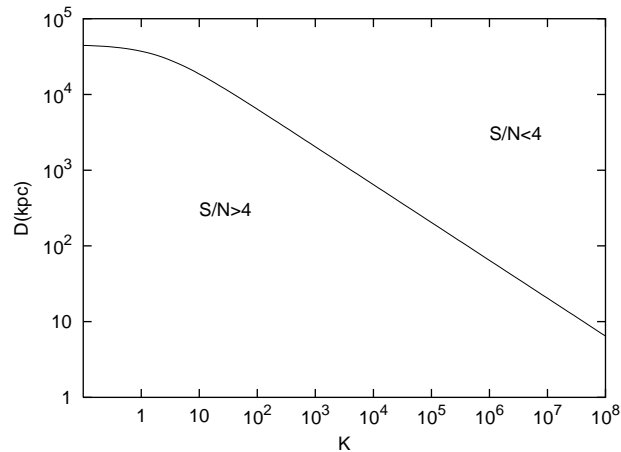


Figura 5.9: Para valores de  $D$  e de  $K$  correspondentes a pontos abaixo da linha, a razão entre o sinal e o ruído é  $S/N > 4$  para o detector Advanced LIGO.

Para os detectores LIGO e Virgo, até para uma rotação diferencial inicial pequena ( $K \approx 0$ ), a razão entre o sinal e o ruído não é significativa para  $D = 20$  Mpc. Evidentemente, esta razão pode ser aumentada se considerarmos fontes situadas a distâncias menores, mas será à custa do decréscimo do número de supernovas esperado por ano, e, por conseguinte, da probabilidade de uma detecção.

Para o detector Advanced LIGO, a situação melhora nitidamente. Assim, para pequenos valores de  $K$ , a razão entre o sinal e o ruído é significativa até para  $D = 20$  Mpc. Portanto, e dado que a tal distância é previsível a ocorrência de algumas supernovas por ano, é de esperar que o detector Advanced LIGO consiga detectar ondas gravitacionais devidas ao modo  $r$  de estrelas de neutrões jovens. Contudo, isto só se verificará se as estrelas de neutrões nascerem com pouca rotação diferencial associada ao modo  $r$ . Mas este pode não ser o caso! Se uma estrela de neutrões nascer com uma quantidade substancial de rotação diferencial ( $K \gtrsim 100$ ), então as ondas gravitacionais devidas ao modo  $r$  não poderão ser detectadas nem mesmo pelo detector Advanced LIGO. No entanto, como já mencionámos,

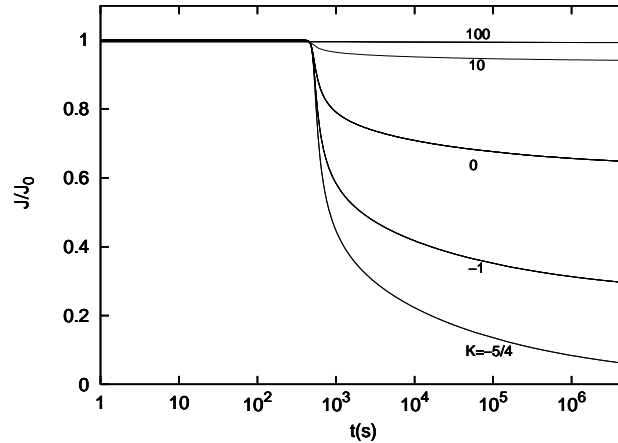


Figura 5.10: Evolução temporal do momento angular total da estrela,  $J$ , para diferentes valores de  $K$ .

poderíamos considerar distâncias menores até à fonte, porém o número de eventos por ano também diminuiria e, em consequência, diminuiria a probabilidade de uma detecção.

Considerando, por exemplo, que uma razão entre o sinal e o ruído  $S/N = 4$  é suficiente para uma detecção com o detector Advanced LIGO, então da Eq. (5.26), obtemos que um sinal de uma dada fonte pode ser detectado se a distância até essa fonte for menor do que  $64.5 \text{ Mpc}/\sqrt{K+2}$  (ver Fig. 5.9). Para pequenos valores da rotação diferencial inicial ( $K \lesssim 10$ ), um sinal poderia ser detectado se a distância até à fonte fosse menor do que aproximadamente 20 Mpc. Por outro lado, se estrela nascer com uma quantidade de rotação diferencial significativa (por exemplo,  $K \gtrsim 10^6$ ), então uma detecção só seria possível se a estrela estivesse situada a menos de 60 kpc da Terra. Numa esfera com este raio, somente uma ou duas supernovas por século são esperadas [10]; assim, neste caso, a probabilidade de detectar ondas gravitacionais devidas ao modo  $r$  é relativamente reduzida.

O resultado fundamental, que um aumento da rotação diferencial associada ao

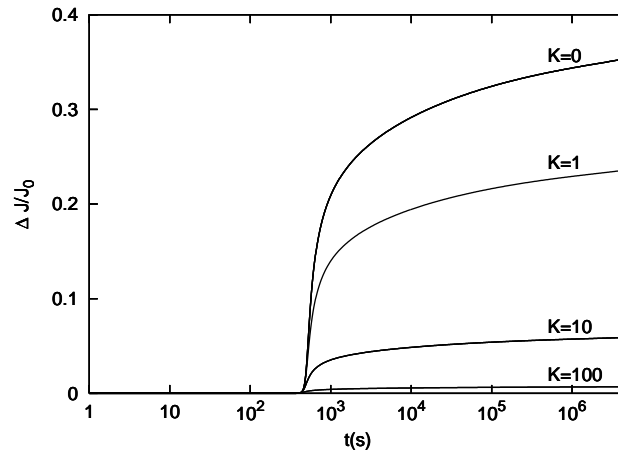


Figura 5.11: Momento angular transportado pelas ondas gravitacionais em função do tempo,  $\Delta J(t)$ , para diferentes valores de  $K$ . Para  $K \gg 1$ , só uma pequena porção do momento angular inicial da estrela é emitido sob a forma de ondas gravitacionais.

modo  $r$  torna mais difícil a detecção das ondas gravitacionais devidas à instabilidade deste modo, pode ser facilmente explicado do ponto de vista de variações do momento angular. Efectivamente, no início da evolução o momento angular da estrela é aproximadamente  $J_0 = I\Omega_0$  assumindo-se que  $(4K + 5)Q\alpha_0^2/3 \ll 1$ . Vamos considerar que, inicialmente,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  e  $\Omega_0 = \Omega_K$ . Devido à instabilidade do modo  $r$ , o momento angular inicial da estrela vai decrescer para valores que dependem crucialmente de  $K$ . Este resultado está claramente ilustrado na Fig. 5.10. A diferença  $\Delta J = J_0 - J(t)$  é emitida sob a forma de ondas gravitacionais (ver Fig. 5.11). Nesta figura, constatamos que quanto maior é o valor de  $K$ , menor é a quantidade de momento angular emitida sob a forma de ondas gravitacionais. Este resultado deve-se ao facto de quanto maior  $K$ , maior a quantidade de momento angular transferida para o modo  $r$  (ver Fig. 5.12).

Na Fig. 5.13, comparamos a evolução temporal, para  $K = 0$  e  $K = 10$ , dos diferentes momentos angulares: momento angular total da estrela,  $J$ , momento



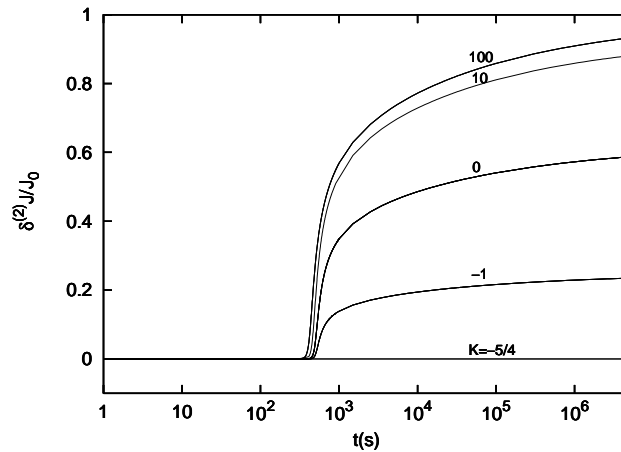


Figura 5.12: Evolução temporal do momento angular do modo  $r$ ,  $\delta^{(2)}J$ , para diferentes valores de  $K$ .

angular do modo  $r$ ,  $\delta^{(2)}J$ , momento angular transportado pelas ondas gravitacionais,  $\Delta J$ , e o momento angular da estrela não perturbada,  $I\Omega$ . Para o caso  $K = 0$ , apesar do momento angular da estrela não perturbada decrescer para aproximadamente 7% do seu valor inicial, o momento angular total da estrela só decresce para 65% do seu valor inicial. Isto deve-se ao facto de uma parte do momento angular inicial da estrela (mais precisamente 58%) ser transferida para o modo  $r$ , uma consequência do rápido aumento da rotação diferencial média,  $\Delta\Omega$ , como vimos no capítulo anterior. Em consequência, somente cerca de 35% do momento angular inicial da estrela é emitido sob a forma de ondas gravitacionais. Para  $K = 10$ , o momento angular da estrela não perturbada também decresce para aproximadamente 7% do seu valor inicial, mas o momento angular total da estrela só decresce para 94% do seu valor inicial, neste caso. Efectivamente, aproximadamente 87% do momento angular inicial da estrela é transferido para o modo  $r$  e somente 6% é emitido sob a forma de ondas gravitacionais. Para valores maiores de  $K$ , o momento angular emitido sob a forma de ondas gravitacionais é menor, nomeadamente,  $\Delta J/J_0 < 1\%$  para  $K > 100$ .

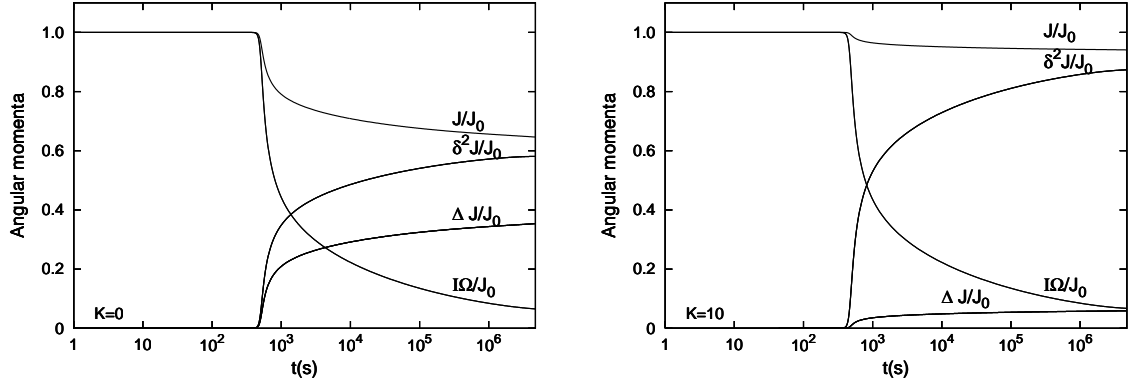


Figura 5.13: Evolução temporal do momento angular total da estrela,  $J$ , do momento angular da estrela não perturbada,  $I\Omega$ , do momento angular do modo  $r$ ,  $\delta^{(2)}J$ , e do momento angular emitido sob a forma de ondas gravitacionais,  $\Delta J$ , para  $K = 0$  e  $K = 10$ .

Tal como Owen e Lindblom mostraram [11], baseados num argumento não publicado de Blandford, a razão entre o sinal e o ruído dada pela expressão (5.25) é bem aproximada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \approx \frac{2G}{5\pi c^3 D^2} \frac{\Delta J(t_b)}{h_{rms}^2}, \quad (5.27)$$

onde  $\Delta J(t_b) = J_0 - J(t_b)$  e  $t_b$  é o instante em que a segunda fase da evolução termina. Usando as Eqs. (4.7) e (4.8), o momento angular total emitido sob a forma de ondas gravitacionais pode ser escrito como

$$\frac{\Delta J(t_b)}{J_0} \approx 1 - \frac{\Omega(t_b)}{\Omega_0} - \frac{1}{3}(4K + 5)Q \frac{\Omega(t_b)}{\Omega_0} \alpha^2(t_b), \quad (5.28)$$

ou, visto que  $\Omega \approx \Omega_0 [1 + \frac{4}{3}(K + 2)Q\alpha^2]^{-1}$ , como

$$\frac{\Delta J(t_b)}{J_0} \approx \frac{3}{4(K + 2)} \left(1 - \frac{\Omega(t_b)}{\Omega_0}\right), \quad (5.29)$$

onde  $\Omega(t_b) = (0.065 - 0.067)\Omega_0$ . Assim, para  $K \gg 1$ , somente uma pequena parte do momento angular da estrela é emitida sob a forma de ondas gravitacionais. Conse-

quentemente, quanto maior  $K$ , menor a razão entre o sinal e o ruído [ver Eq. (5.27)] e a detecção das ondas gravitacionais torna-se uma tarefa mais difícil.

## 5.4 Conclusões

Neste capítulo, investigámos a influência da rotação diferencial na detectabilidade da radiação gravitacional emitida por uma estrela de neutrões jovem, quente e com rotação rápida, quando esta abranda devido à instabilidade do modo  $r$ .

Usámos um modelo de evolução da instabilidade do modo  $r$ , que tem em conta a rotação diferencial [12], para deduzir a amplitude da onda gravitacional,  $|h(t)|$ , e a sua transformada de Fourier,  $|\tilde{h}(f)|$ . Mostrámos que o valor máximo da amplitude da onda gravitacional,  $h_{max}$ , depende da rotação diferencial inicial associada ao modo  $r$ , nomeadamente,  $h_{max} \propto (K + 2)^{-1/2}$ . Também mostrámos que a amplitude das ondas gravitacionais no domínio das frequências,  $|\tilde{h}(f)|$ , não tem um pico nas altas frequências, contrariamente ao resultado obtido na Ref. [2]. Aí, o pico de  $|\tilde{h}(f)|$  deve-se ao facto de durante a primeira fase da evolução da instabilidade do modo  $r$ , a velocidade angular da estrela evoluir muito lentamente na escala temporal da viscosidade, levando à emissão de uma onda gravitacional quasi-monocromática durante as primeiras centenas de segundos. Contudo, como vimos, se tivermos em conta a influência da rotação diferencial, então a velocidade angular da estrela evolui, já na primeira fase, na escala temporal da radiação gravitacional e, por conseguinte, durante esta fase da evolução a onda gravitacional não é monocromática e  $|\tilde{h}(f)|$  não apresenta um pico.

Neste estudo, assumimos a técnica de filtragem adaptada para investigar a detectabilidade do sinal de ondas gravitacionais. Porém, o nosso conhecimento da

evolução da instabilidade do modo  $r$  não é suficiente para prever a forma da onda gravitacional com uma precisão tal que nos permita aplicar esta técnica optimal de processamento de sinal. No entanto, existem estratégias de processamento de sinal não optimais que produzem resultados muito próximos daqueles obtidos com a filtragem adaptada (ver, por exemplo, [13] ou [14]). Assim, os nossos resultados sobre a detectabilidade das ondas gravitacionais dos modos  $r$  podem ser considerados como uma boa aproximação.

Assumindo, então, a técnica de filtragem adaptada, a amplitude característica do sinal,  $h_c(f)$ , foi comparada com o valor eficaz da sensibilidade dos detectores LIGO, Virgo e Advanced LIGO. Chegamos à conclusão que a detectabilidade das ondas gravitacionais devidas à instabilidade do modo  $r$  é drasticamente reduzida com o aumento do valor inicial da rotação diferencial associada ao modo  $r$ . Para os detectores LIGO e Virgo, a razão entre o sinal e o ruído para fontes situadas a 20 Mpc é menor do que a unidade, até para pequenos valores da rotação diferencial inicial associada aos modos  $r$  ( $K \approx 0$ ), tornando impossível qualquer detecção. Para o Advanced LIGO, se  $K \approx 0$ , então uma razão  $S/N \geq 10$  pode ser obtida para  $D = 20$  Mpc. Contudo, se as estrelas de neutrões nascerem com rotação diferencial substancial, então, neste caso, a detecção só seria possível se a distância até estas estrelas fosse consideravelmente menor que 20 Mpc. Por exemplo, se  $K = 10^5$ , para obter uma razão entre o sinal e o ruído maior que 10 é preciso que a fonte esteja situada a uma distância máxima de 80 kpc, o que corresponde a uma esfera que compreende a Via Láctea, as Nuvens de Magalhães e mais algumas pequenas galáxias, esfera na qual apenas algumas supernovas por século são esperadas.

## Referências

- [1] K. D. Kokkotas e N. Stergioulas, em: Proceedings of the Fifth International Workshop on New Worlds in Astroparticle Physics, Faro, Portugal, 2005, editado por A. M. Mourão *et al.* (World Scientific, Singapore, 2006).
- [2] B. J. Owen, L. Lindblom, C. Cutler, B. F. Schutz, A. Vecchio e N. Andersson, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 084020.
- [3] P. Arras, E. E. Flanagan, S. M. Morsink, A. K. Schenk, S. A. Teukolsky e I. Wasserman, *Astrophys. J.* **591** (2003) 1129.
- [4] P. M. Sá e B. Tomé, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 044011.
- [5] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 299.
- [6] A. Abramovici *et al.*, *Science* **256** (1992) 325.
- [7] <http://www.virgo.infn.it/senscurve/>
- [8] [http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/scripts/ref\\_des.shtml](http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/scripts/ref_des.shtml)
- [9] S. B. Popov e B. E. Stern, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **365** (2006) 885.
- [10] R. Diehl *et al.*, *Nature* **439** (2006) 45.
- [11] B. J. Owen e L. Lindblom, *Classical Quant. Grav.* **19** (2002) 1247.
- [12] P. M. Sá e B. Tomé, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 044007.
- [13] P. R. Brady e T. Creighton, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 082001.
- [14] C. Cutler, I. Gholami e B. Krishnan, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 042004.