

ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS ADAPTATIVAS PIEZOLAMINADAS

José Moita*, Cristóvão Mota Soares** e Carlos Mota Soares**

*Universidade do Algarve, Escola Superior de Tecnologia
Campus da Penha, 8000 Faro, Portugal
e-mail: jmoita@ualg.pt

**IDMEC/IST–Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal

Palavras chave: Actuadores, Sensores, Compositos laminados, Elementos Finitos.

Resumo. Neste trabalho apresenta-se um modelo de elementos finitos, baseado na teoria clássica de placas, para a análise linear e não-linear de estruturas do tipo placa/casca integrando sensores e actuadores piezoeléctricos. É usado um simples e eficiente elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, e em cuja formulação se introduz um grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoeléctrica do elemento finito. É utilizada a formulação Lagrangeana actualizada associada à técnica de Newton - Raphson para a solução iterativa das equações de equilíbrio. O modelo pode ser aplicado a cascas piezolaminadas com geometria e carregamento arbitrários. Apresentam-se vários exemplos ilustrativos cujos resultados mostram a eficiência do modelo proposto.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o estudo de estruturas inteligentes tem atraído muitos investigadores devido às suas potenciais vantagens numa larga gama de aplicações, tais como controle de forma, supressão de vibrações, atenuação de ruído e detecção de dano. O uso de materiais “inteligentes” tal como os materiais piezoelétricos na forma de lâminas ou “patches”, embebidas ou coladas na superfície de estruturas construídas de materiais compósitos, permite assim obter estruturas que por um lado são adaptativas e por outro revelam excelentes propriedades mecânicas, aumentando assim bastante o desempenho e a fiabilidade de sistemas estruturais. Os materiais piezoelétricos têm a propriedade de gerar uma carga eléctrica sob a acção duma carga mecânica e o reverso, isto é, aplicando um campo eléctrico nos elementos piezoelétricos da estrutura, esta deforma-se.

Investigação pioneira no domínio das estruturas inteligentes é devida a Allik e Hughes [1] que analisaram a interação entre electricidade e elasticidade. Referem-se ainda os trabalhos de Crawley e Luis [2], que estudaram o controle de vibrações de vigas laminadas com material piezoelétrico embebido ou colado à superfície da viga, e de Tzou e Tseng [3], que apresentaram uma formulação por elementos finitos em placa e cascas contendo actuadores e sensores piezoelétricos. Mais recentemente são de referir os trabalhos de Chandrachekhara e Agarwal [4], Saravanos et al. [5], os quais apresentaram respectivamente, formulações por elementos finitos para o controle de vibrações, controle de deslocamentos de flexão, e análise dinâmica de placas laminadas. Referem-se ainda revisões bibliográficas acerca da modelação de estruturas adaptativas por elementos finitos publicada por Benjeddou [6] e Senthil et al. [7]. Recentemente Yi *et al.* [8] desenvolveu um elemento finito 3D para análise da resposta não-linear dinâmica de estruturas laminadas adaptativas usando uma formulação Lagrangeana actualizada. Os resultados numéricos mostram que a amplitude, a frequência da vibração e as diferenças de potencial são significativamente influenciadas pelas grandes deformações da estrutura.

Neste trabalho, é apresentado um modelo de elementos finitos, baseado na teoria clássica de placas, para a análise linear e não-linear de estruturas do tipo placa/casca integrando sensores e actuadores piezoelétrico na forma de lâminas ou “patches”. É usado um simples e eficiente elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, com 18 graus de liberdade referentes ao vector de deslocamentos generalizados, e em cuja formulação se introduz um grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoelétrica do elemento finito. É utilizada a formulação Lagrangeana actualizada associada à técnica de Newton-Raphson para a solução iterativa das equações de equilíbrio. O modelo pode ser aplicado a cascas piezolaminadas com geometria e carregamento arbitrários. Apresentam-se vários exemplos ilustrativos cujos resultados mostram a eficiência do modelo proposto.

2. CAMPO DOS DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

É usada a Teoria Clássica de Kirchhoff. Assume-se que as componentes do deslocamento, Figura 1, dum ponto genérico referenciadas ao sistema de eixos locais (x,y,z) , têm a forma:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \theta_y \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \theta_x \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde (u_0, v_0, w_0) são os deslocamentos dum ponto no plano de referencia do laminado, e

$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$ and $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ são as rotações em torno dos eixos x e y , respectivamente.

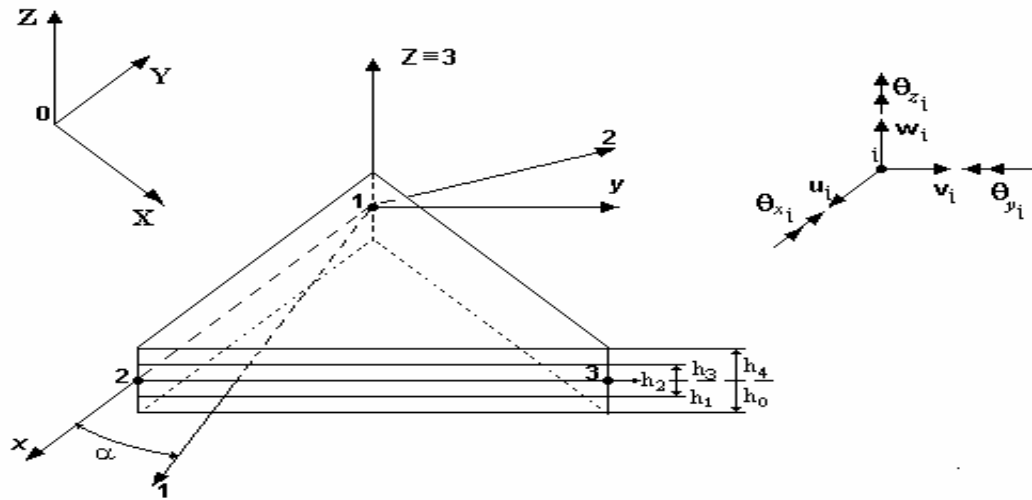


Figure 2. Elemento finito triangular com os eixos materiais (1,2,3) e geometricos (x,y,z)

A presente teoria considera grandes deslocamentos e pequenas deformações. As componentes das deformações de Green associadas com os deslocamentos da equação (1) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \epsilon_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

3. LAMINADOS PIEZOELÉTRICOS. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.

Num material piezoelétrico, a interacção entre os campos mecânico e eléctrico são definidos pelas equações de Maxwell [9]:

$$\Phi = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} p_{kl} E_k E_l \quad (3)$$

tal que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad D_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial E_i} \quad (4)$$

onde \mathbf{E} é o vector do campo electrico, \mathbf{D} é o vector do deslocamento electrico, \mathbf{C} o tensor dos módulos de elasticidade, \mathbf{e} o tensor das deformações, \mathbf{s} o tensor das tensões, \mathbf{e} o tensor dos módulos piezoelétricos, e \mathbf{p} o tensor das constantes dieléctricas, no sistema de eixos materiais 1,2,3.

Substituindo as equações (3) em (4), são obtidas as equações constitutivas dum meio piezoelétrico deformável [10]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}} &= \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T$ é o vector das tensões elásticas e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T$ é o vector das deformações elásticas, $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz constitutiva, $\bar{\mathbf{e}}$ é a matriz dos coeficientes piezoelétricos, $\bar{\mathbf{E}}$ o vector do campo electrico, $\bar{\mathbf{D}}$ o vector do deslocamento eléctrico e $\bar{\mathbf{p}}$ a matriz dos coeficientes dieléctricos, no sistema de eixos local (x,y,z) do elemento laminado.

O vector do campo eléctrico $\bar{\mathbf{E}}$, é o gradiente negativo do potencial eléctrico ϕ na lâmina k :

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \phi \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \{0 \ 0 \ E_z\}^T \quad (7)$$

onde

$$E_z = -\phi/t_k \quad (8)$$

Sendo ainda [10]:

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{d}} \quad (9)$$

onde $\bar{\mathbf{d}}$ é a matriz dos coeficientes de deformação piezoelétricos no sistema de eixos local (x,y,z) do laminado, as equações (5) podem também ser escritas na forma:

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{E}})$$

$$\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{d}})^T \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{E}} \quad (10)$$

O vector das deformações em electroelasticidade pode então ser escrito na forma:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^L + \bar{\mathbf{e}}^{NL} \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

em que as deformações mecânicas podem ser representadas pela soma das respectivas parte linear e não-linear.

A parte linear pode ser escrita sinteticamente na forma seguinte:

$$\bar{\mathbf{e}}^L = \bar{\mathbf{e}}_m^L + z \bar{\mathbf{e}}_b^L \quad (12)$$

As equações constitutivas (5) podem ser então escritas na forma:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^L + \bar{\mathbf{e}}^{NL} \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}} \quad (13)$$

Integrando as tensões ao longo da espessura do laminado, obtêm-se as relações entre as forças e momentos resultantes e as deformações

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_m^L \\ \bar{\mathbf{e}}_b^L \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & 0 \\ 0 & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

onde os elementos da rigidez mecânica, de membrana, flexão-membrana e flexão são dados por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k^2 - h_{k-1}^2) / 2 \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (h_k^3 - h_{k-1}^3) / 3 \end{aligned} \quad (i,j = 1,2,6) \quad (15)$$

Os elementos da rigidez piezoelétrica são:

$$A'_{ij} = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{Q}_{im} \bar{d}_{mj} (h_k - h_{k-1}) \quad (i,m,j = 1,2,6) \quad (16)$$

$$B'_{ij} = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{Q}_{im} \bar{d}_{mj} (h_k^2 - h_{k-1}^2)/2$$

onde h é a espessura total do laminado e h_k e h_{k-1} são as distâncias da superfície de referência do laminado à superfície superior e inferior da lamina k , respectivamente, N é o número de lâminas, e N^P é o número de lamina ou patches de material piezoelétrico.

Por sua vez integrando o vector $\bar{\mathbf{D}}$ ao longo das espessuras das lamina piezoelétricas, vem:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} A' & B' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_m^L \\ \bar{\mathbf{e}}_b^L \end{Bmatrix} - [A''] \{\mathbf{E}\} \quad (17)$$

onde

$$A''_{ij} = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{p}_{ij} (h_k - h_{k-1}) \quad (i,j = 1,2,3) \quad (18)$$

4. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.

4.1 Formulação Lagrangeana Actualizada.

O princípio do trabalho virtual é usado em conjugação com a formulação Lagrangeana actualizada. Uma configuração de referência é associada com o tempo t , e a configuração actualizada é associada com o tempo corrente $t + \Delta t$. A formulação segue o desenvolvimento apresentado por Bathe [11]. As equações de equilíbrio linearizadas para um elemento finito laminado são:

$$\sum_{K=1}^N \left\{ \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \left({}_t \hat{\mathbf{e}}_k^L \right)^T \hat{\mathbf{C}}_k {}_t \hat{\mathbf{e}}_k^L dz {}^t dA^e + \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \left({}_t \hat{\mathbf{e}}_k^{NL} \right)^T {}^t \hat{\mathbf{s}}_k dz {}^t dA^e \right\} \quad (19)$$

$$= {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}_t^e - \sum_{k=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \left({}_t \hat{\mathbf{e}}_k^L \right)^T {}^t \hat{\mathbf{s}}_k dz {}^t dA^e$$

Substituindo as equações (11) and (13), na equação (19), pode escrever-se:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{t_A^e}^{h_k} \int_{t_A^e}^{h_{k-1}} \mathbf{d} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^L \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^L \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} dz \, {}^t dA^e + \int_{t_A^e}^{h_k} \int_{t_A^e}^{h_{k-1}} \mathbf{d} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^{NL} \\ 0 \end{Bmatrix}^T {}^t \hat{\mathbf{S}}_k dz \, {}^t dA^e \right\} \\
 & = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}^e - \sum_{k=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \int_{t_A^e}^{h_{k-1}} \mathbf{d} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_k^L \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}^T {}^t \hat{\mathbf{S}}_k dz \, {}^t dA^e \quad (20)
 \end{aligned}$$

Assumindo-se ainda que o carregamento é independente do estado de deformação do corpo, o termo correspondente ao trabalho virtual externo vem então dado por:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = & \int_{0V} {}^{t+\Delta t} f \, \delta u \, d^0V + \int_{0S} {}^{t+\Delta t} T \, \delta u \, d^0S + \sum_i F_i \, \delta u_i + \\
 & \int_{0V} {}^{t+\Delta t} q \, \delta \phi \, d^0V + \int_{0S} {}^{t+\Delta t} Q \, \delta \phi \, d^0S + \sum_i P_i \, \delta \phi_i \quad (21)
 \end{aligned}$$

onde f é vector das forças de volume, T o vector das forças de superfície, F_i são forças concentradas, q o vector das cargas eléctricas de volume, Q o vector das cargas eléctricas de superfície e P_i cargas eléctricas pontuais.

No presente trabalho um elemento finito triangular plano de três nós é usado para obter a resposta não-linear de estruturas multilaminadas finas do tipo placa-casca. Como se mostra na Figura 1, o elemento tem três nós com seis graus de liberdade por nó, os deslocamentos u_i , v_i , w_i e as rotações θ_{xi} , θ_{yi} , θ_{zi} . Os deslocamentos locais u , v , w , são expressos em termos das variáveis nodais através das funções de forma dadas em termos de coordenadas de área L_i [12]:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (22)$$

O vector das deformações no plano da superfície media (ou de membrana) $\bar{\mathbf{e}}_m$, e o vector das curvaturas $\bar{\mathbf{e}}_b$, são dados por:

$$\bar{\mathbf{e}}_m = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i^m \mathbf{d}_i = \mathbf{B}^m \mathbf{a}_m^e \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_b = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i^b \mathbf{d}_i = \mathbf{B}^b \mathbf{a}_b^e \quad (24)$$

O vector do campo eléctrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}^\phi \phi \quad (25)$$

onde $\mathbf{B}^m, \mathbf{B}^b$ são as matrizes de deformação linear-deslocamento de membrana e de flexão respectivamente, e \mathbf{B}^ϕ é a matriz campo eléctrico – potencial

Substituindo estas últimas equações na equação (20), vem:

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^N \left\{ \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{e} \\ \bar{e}^T & -\bar{p} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix} dz \, {}^t dA^e + \right. \\ & \left. \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{nl} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}_k dz \, {}^t dA^e \right\} = \\ & {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}^e - \sum_{k=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{D} \end{Bmatrix}_k dz \, {}^t dA^e \end{aligned} \quad (26)$$

Ao primeiro termo do primeiro membro corresponde a matriz de rigidez linear do elemento, a qual é definida por:

$$\mathbf{K}_L^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^L & \mathbf{K}_{u\phi}^L \\ \mathbf{K}_{\phi u}^L & \mathbf{K}_{\phi\phi}^L \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{e} \\ \bar{e}^T & -\bar{p} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mb} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} dz \, {}^t dA^e \quad (27)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu}^L &= \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \mathbf{B}^{mbT} \bar{Q} \mathbf{B}^{mb} dz \, {}^t dA \\ \mathbf{K}_{u\phi}^L &= \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \mathbf{B}^{mbT} \bar{e} \mathbf{B}^\phi dz \, {}^t dA \\ \mathbf{K}_{\phi u}^L &= \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} \mathbf{B}^{\phi T} \bar{e}^T \mathbf{B}^{mb} dz \, {}^t dA \\ \mathbf{K}_{\phi\phi}^L &= \sum_{K=1}^N \int_{t_A^e}^{h_k} -\mathbf{B}^{\phi T} \bar{p} \mathbf{B}^\phi dz \, {}^t dA \end{aligned} \quad (28)$$

Entrando com a definição de deformação não-linear no segundo termo do primeiro membro da equação (19), e fazendo a integração ao longo da espessura, este termo pode ser escrito na forma:

$$\sum_{i=1}^N \int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \left(\bar{\mathbf{e}}_k^{NL} \right)^T \mathbf{t} \bar{\mathbf{S}}_k dz \, {}^t dA^e = \int_{A^e} \left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \right)^T \delta \left[\frac{1}{2} \left(u_{s,i} \, u_{s,j} \right) \right] {}^t dA^e \quad (29)$$

onde $i,j=x,y$ e $u_s = u, v, w$

Os deslocamentos u_s foram definidos na equação (1), e contêm uma componente referente ao alongamento na superfície média, e outra devida à flexão. Considerando apenas os deslocamentos na superfície média, expandindo o segundo membro da equação (29), vem ainda:

$$\int_{A^e} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \delta \left[\frac{1}{2} \left(u_{s,i} \, u_{s,j} \right) \right] {}^t dA^e = \int_{A^e} \left\{ N_x \left[u_{0,x} \, \delta u_{0,x} + v_{0,x} \, \delta v_{0,x} + w_{0,x} \, \delta w_{0,x} \right] + 2N_{xy} \left[u_{0,x} \, \delta u_{0,y} + v_{0,x} \, \delta v_{0,y} + w_{0,x} \, \delta w_{0,y} \right] + N_y \left[u_{0,y} \, \delta u_{0,y} + v_{0,y} \, \delta v_{0,y} + w_{0,y} \, \delta w_{0,y} \right] \right\} {}^t dA^e \quad (30)$$

Então o segundo termo do primeiro membro da equação (19) pode ser escrito [13]:

$$\sum_{i=1}^N \int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \left(\bar{\mathbf{e}}_k^{NL} \right)^T \mathbf{t} \bar{\mathbf{S}}_k dz \, {}^t dA^e = \int_{A^e} \delta \mathbf{a}^{eT} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{t} \mathbf{G} \right) \mathbf{a}^e \, {}^t dA^e \quad (31)$$

e a matriz de rigidez geometrica do elemento é dada por:

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^\sigma & \mathbf{K}_{u\phi}^\sigma \\ \mathbf{K}_{\phi u}^\sigma & \mathbf{K}_{\phi\phi}^\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

sendo

$$\mathbf{K}_{uu}^\sigma = \int_{A^e} \mathbf{G}^T \mathbf{t} \mathbf{G} \, {}^t dA \quad (33)$$

onde \mathbf{G} é uma matriz de derivadas apropriadas, designada por matriz de deformação não-linear – deslocamento, e \mathbf{t} a matriz das forças de membrana actualizadas.

O primeiro termo do segundo membro da equação (19), tendo em conta a equação (21), e assumindo que a carga eléctrica é zero, pode ser escrito na forma:

$${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{A^e} \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e \, {}^0 dA^e + \int_{S^e} \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e \, {}^0 dS^e + \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{F}_c^e \quad (34)$$

onde $\mathbf{p}^e, \mathbf{t}^e, \mathbf{F}_c^e$ são os vectores de forças distribuidas nas superfícies transversal e dos lados, e das forças concentradas.

O vector das forças externas é então definido por:

$$\mathbf{F}_{ext}^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e \, {}^0 dA^e + \int_{S^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e \, {}^0 dS^e + \mathbf{F}_c^e \quad (35)$$

Ao segundo termo do segundo membro da equação (19), corresponde o vector das forças internas, o qual é definido por:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}^1 \\ \mathbf{F}_{\text{int}}^2 \end{Bmatrix} = \int_{t_{A^e}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\text{mb}} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} {}^t dA^e = \int_{t_{A^e}} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^{\text{mb}^T} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{B}^{\phi^T} \tilde{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} {}^t dA^e \quad (36)$$

A equação (26) é válida para qualquer campo de deslocamentos virtual, $\delta \mathbf{a}^e$ e $\delta \phi^e$. Considerando as relações (27), (33), (35), (36), e introduzindo um ciclo iterativo, tem-se:

$${}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} (\mathbf{K}_L^e + \mathbf{K}_\sigma^e)^{(k-1)} (\Delta \hat{\mathbf{a}}^e)^{(k)} = {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}}^e - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} (\mathbf{F}_{\text{int}}^e)^{(k-1)} \quad (37)$$

A geometria do elemento, assim como as matrizes de rigidez e o vector das forças externas são inicialmente obtidas no sistema de coordenadas locais fixado no elemento. Para obter a solução de estruturas genéricas, transformações de coordenadas locais para globais são realizadas [12]. Depois destas transformações, o sistema de equações incrementais no referencial X,Y,Z são:

$${}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma)^{(k-1)} (\Delta \hat{\mathbf{q}})^{(k)} = {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} (\mathbf{F}_{\text{int}})^{(k-1)} \quad (38)$$

onde $\Delta \hat{\mathbf{q}} = \left\{ \Delta \mathbf{q} \quad \Delta \phi^{(S)} \right\}^T$ é o vector dos deslocamentos generalizados e dos potenciais eléctricos incrementais, no sistema de coordenadas globais.

Assumindo que tanto sensores como actuadores piezoeléctricos estão colados ou embebidos na estrutura, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma desenvolvida:

$${}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^L & \mathbf{K}_{u\phi}^{L(S)} \\ \mathbf{K}_{\phi u}^{L(S)} & \mathbf{K}_{\phi\phi}^{L(S)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{(k-1)} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \phi^{(S)} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left(\mathbf{K}_{u\phi}^{L(A)} \Delta \phi^{(A)} \right) \\ - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}^{L(A)} \Delta \phi^{(A)} \right) \end{Bmatrix} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}^1 \\ \mathbf{F}_{\text{int}}^2 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

onde A e S designam actuador e sensor, respectivamente.

Quando se têm lâminas piezoeléctricas funcionando só como actuadores ou só como sensores, tem-se respectivamente:

$${}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left(\mathbf{K}_{uu}^L + \mathbf{K}_{uu}^\sigma \right)^{(k-1)} \left\{ \Delta \mathbf{q} \right\}^{(k)} = {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}} \right\} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{K}_{u\phi}^{L(A)} \Delta \phi^{(A)} \right\} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^1 \right\} \quad (40)$$

$${}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^L & \mathbf{K}_{u\phi}^{L(S)} \\ \mathbf{K}_{\phi u}^{L(S)} & \mathbf{K}_{\phi\phi}^{L(S)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{(k-1)} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \phi^{(S)} \end{Bmatrix}^{(k)} = {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} - {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{F}_{\text{int}} \right\} \quad (41)$$

onde $\mathbf{F}^{\text{act}} = {}_{t+\Delta t}^{\text{t}+\Delta t} \left\{ \mathbf{K}_{u\phi}^{L(A)} \Delta \phi^A \right\}$ é o vector de carga actuadora devido ao potencial eléctrico aplicado nas lâminas piezoeléctricas.

O sistema de equações (41) pode ser decomposto, tomando a forma:

$$\begin{matrix} t+\Delta t \\ t+\Delta t \end{matrix} \left[\mathbf{K}_{uu}^L + \mathbf{K}_{uu}^\sigma \right]^{(k-1)} \{\Delta \mathbf{q}\}^{(k)} = \begin{matrix} t+\Delta t \\ -t+\Delta t \end{matrix} \left\{ \mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}} \right\} - \begin{matrix} t+\Delta t \\ -t+\Delta t \end{matrix} \left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^1 \right\} \quad (42)$$

$$\{\Delta \phi\}^{(k)} = - \left[\begin{matrix} t+\Delta t \\ t+\Delta t \end{matrix} \left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{L(S)} \right]^{(k-1)} \right]^{-1} \left\{ \begin{matrix} t+\Delta t \\ t+\Delta t \end{matrix} \left[\mathbf{K}_{\phi u}^{L(S)} \right]^{(k-1)} \{\Delta \mathbf{q}\}^{(k)} - \begin{matrix} t+\Delta t \\ -t+\Delta t \end{matrix} \left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^2 \right\} \right\} \quad (43)$$

Introduzindo as condições de fronteira, o sistema de equações (40) ou o sistema de equações (42) e (43) são resolvidos usando a técnica de Newton-Raphson [14].

5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Análise linear duma viga piezoelétrica bimorfica.

Uma viga piezoelétrica bimorfica, Figura 2, encastrada numa extremidade, é constituída por duas lâminas de PVDF coladas. Estas lâminas são polarizadas em direcções opostas. As propriedades materiais e piezoelétricas do PVDF são: $E_1 = E_2 = 2 \text{ GPa}$, $G_{12} = 1 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0$, $e_{31} = e_{32} = 0.046 \text{ C/m}^2$, $p_{33} = 1.062 \times 10^{-10} \text{ F/m}$.

Às superfícies superior e inferior da viga é aplicada uma diferença de potencial de 1 Volt, funcionando as lâminas piezoelétricas como actuadores. O deslocamento obtido na extremidade livre da viga, usando uma malha de (5x2) elementos triangulares, é dado na Tabela 1, onde é comparado com outras soluções obtidas por outros autores. Uma boa concordância de resultados é observada.

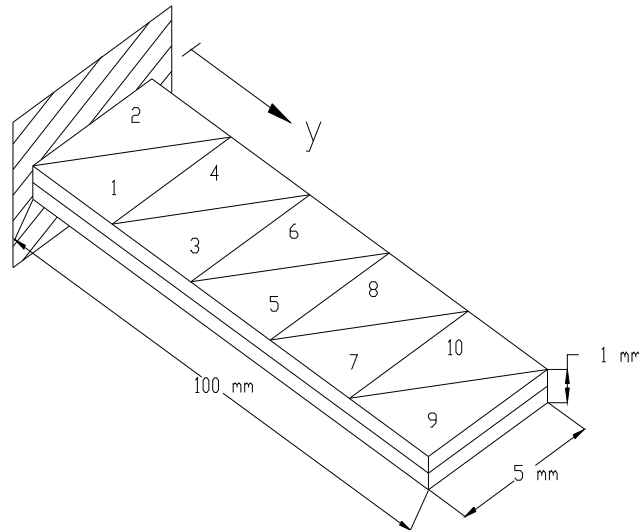


Figura 2. Viga encastrada bimorfica.

A distribuição do potencial eléctrico na viga para um deslocamento prescrito de 10 mm na sua extremidade livre é dada na Tabela 2, onde é comparada com as distribuições obtidas por outros autores. Da Tabela 2 observa-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos diferentes autores.

Localização y (mm)	Deslocamentos transversais x 10 ⁻⁷ m				
	20	40	60	80	100
Analytical solution					
Suleman and Venkayya [15]	0.138	0.552	1.24	2.21	3.45
Q9-FSDT5P					
Franco <i>et al.</i> [16]	0.138	0.552	1.24	2.11	3.45
FSDT4P					
Suleman and Venkayya [15]	0.14	0.55	1.24	2.21	3.45
CPT					
Present Solution	0.137	0.550	1.240	2.210	3.45
Experimental					
Suleman and Venkayya [15]	-	-	-	-	3.45

Tabela 1. Deslocamentos transversais produzidos por um potencial de 1Volt.

5.2 Análise não-linear numa viga piezoeléctrica bimorflca.

A mesma viga do problema anterior é analisada novamente, considerando agora deformação não-linear. O potencial eléctrico nos elementos 1,2 para diferentes níveis de carga mecânica, estão indicados na Tabela 3, onde o nível de carga $\mu=1.0$ corresponde ao deslocamento de 10 mm em análise linear. Como se esperava, observa-se um ligeiro decréscimo no deslocamento na análise não-linear, resultando disto menores potenciais eléctricos.

Elementos	Potencial eléctrico (V)				
	1 e 2	3 e 4	5 e 6	7 e 8	9 e 10
Q9-FSDT5P					
Franco <i>et al.</i> [16]	290	226	161	97	32
FSDT4P					
Suleman e Venkayya [15]	290	-	-	-	-
Present Solution (CPT)					
	295	229	163	98	32

Tabela 2. Distribuição do potencial eléctrico para um deslocamento de 10 mm na extremidade livre.

Tipo de análise	Análise Linear		Análise não-linear	
	Potencial eléctrico (Volts)	Deslocamento na extremidade (mm)	Potencial eléctrico (Volts)	Deslocamento na extremidade (mm)
Nível de carga μ				
0.2	59	2.00	59	2.00
0.4	118	4.00	117.76	3.99
0.6	177	6.00	176.42	5.98
0.8	236	8.00	234.91	7.94
1.0	295	10.00	293.08	9.89

Tabela 3. Potencial eléctrico nos elementos 1,2 e deslocamentos na extremidade livre para diferentes níveis de carga.

5.3 Painel cilíndrico laminado com actuadores piezoelectricos

Um painel cilíndrico laminado, com lâminas piezoeléctricas PXE-52 coladas nas suas superfícies superior e inferior, Figura 3, articulado nos bordos rectos e livre nos bordos curvos, está sujeito a uma carga concentrada aplicada no seu ponto central e a uma diferença de potencial aplicada nas lâminas piezoeléctricas. A sequência de laminação é $[p/90^\circ/0^\circ/90^\circ/p]$ onde p representa as lâminas piezoeléctricas feitas de PXE-52, com as seguintes características materiais: $E_1 = E_2 = 62.5 \text{ GPa}$, $G_{12} = 24 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.3$, e piezoeléctricas $d_{31} = d_{32} = -280 \times 10^{-12} \text{ m/V}$, $d_{33} = 700 \times 10^{-12} \text{ m/V}$, $p_{33} = 3.45 \times 10^{-8} \text{ F/m}$. As restantes lâminas são feitas de S-vidro/epoxy, cujas características materiais são $E_1 = 55 \text{ GPa}$, $E_2 = 16 \text{ GPa}$, $G_{12} = 7.6 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.28$. As características geométricas são : $R = 2540 \text{ mm}$, $L = 508 \text{ mm}$, $\theta = 0.1 \text{ rad}$, e as espessuras das lamina S-vidro/epoxy e PXE-52 são respectivamente de 0.0004 m e 0.0002 m .

Na Figura 4 apresentam-se as curvas carga-deslocamento em comportamento não-linear, para diferentes casos de carga, obtidas com o painel discretizado por uma malha de (8×8) elementos. O carregamento do ponto central é definido por $F_{\text{ext}} = \mu F_{\text{ext}}^0$ com $F_{\text{ext}}^0 = 30 \text{ N}$, e a diferença de potencial aplicado é definido por $V = \mu V^0$ com $V^0 = 250 \text{ V}$. Soluções alternativas não foram encontradas na literatura disponível.

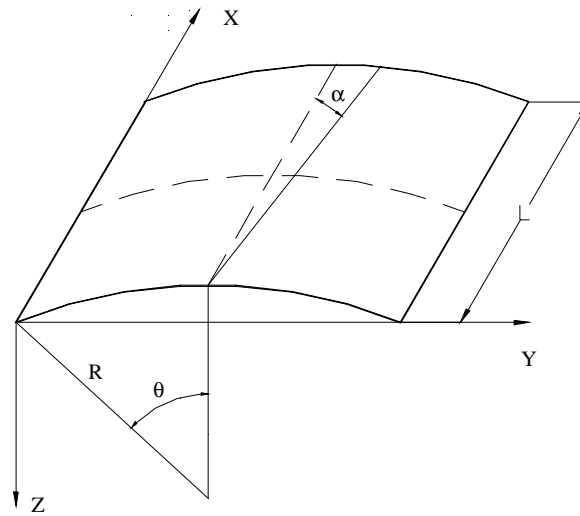


Figura 3. Painel cilíndrico.

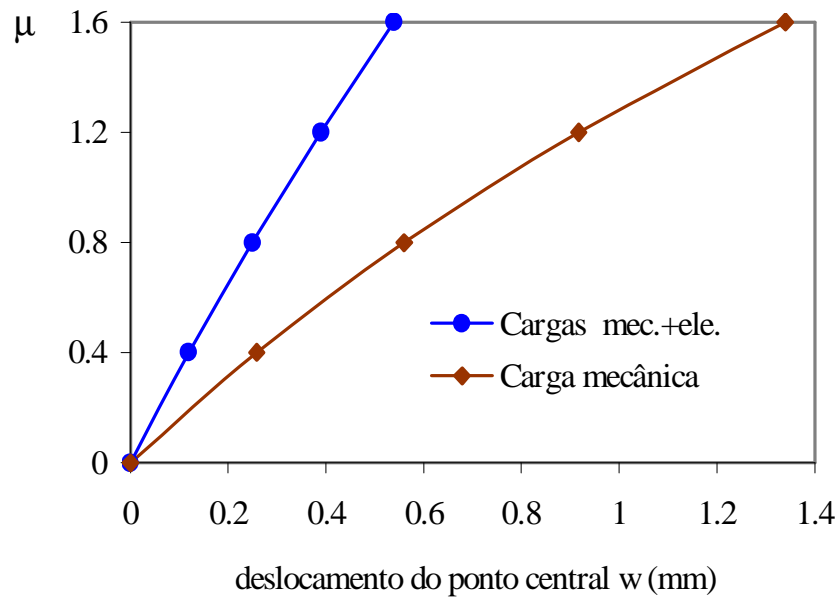


Figura 4. Curvas de carga – deslocamento.

6. CONCLUSÕES

Um elemento finito baseado na teoria clássica de Kirchhoff foi desenvolvido para a análise geometricamente não-linear de placas e cascas piezolaminadas, usando a formulação Lagrangeana. O modelo foi aplicado na análise linear e não-linear de problemas simples e ilustrativos. Os resultados obtidos na análise linear foram comparados com modelos

alternativos e uma excelente concordância foi encontrada. Os resultados também mostram que os deslocamentos transversais são significativamente influenciados na análise geometricamente não-linear. Devido à falta de exemplos na literatura disponível, no que respeita à análise não-linear, os resultados aqui apresentados podem ser usados por outros autores para fins comparativos.

AGRADECIMENTOS. Os autores agradecem o apoio financeiro concedido por: POCTI/FEDER, no âmbito dos projectos PRAXIS/P/EME/12028/1998 e POCTI/FEDER/EME/37559/2001.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Allik , T. Hughes, “Finite element method for piezoelectric vibration”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2, 151-157, (1970).
- [2] E.F. Crawley, and J. Luis, “Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures”, *AAIA Journal*, 25, 10, 1373-1385, (1987)
- [3] H.S. Tzou, and C.I. Tseng, “Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator Design for Dynamic Measurement/Control of Distributed Parametric Systems: A Piezoelectric Finite Element Approach”, *J. Sound Vibration*, 138, 17-34, (1990).
- [4] K. Chandrashekhara, and A.N. Agarwall, “Active Vibration Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Devices: A Finite Element Approach”, *Journal of Intelligent Mat. System and Struct.*, 4, 496-508, (1993).
- [5] D.A. Saravanas, P.R. Heyliger, and D.A. Hopkins, “Layerwise Mechanics and Finite Element for the Dynamic Analysis of Piezoelectric Composite Plates”, *Int. J. Solids Structures*, 34, 3, 359-378, (1997).
- [6] A. Benjeddou, “Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: A survey”, *Computer and Structures*, 76, 347-363, (2000).
- [7] V.G. Senthil, V.V. Varadan, and V.K. Varadan, “A review and critique of theories for piezoelectric laminates”, *Smart Material Structures*, 9, 24-28, (1999).
- [8] S. Yi, S.F. Ling, and M. Ying, “Large deformations finite element analyses of composite structures integrated with piezoelectric sensors and actuators”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 35, 1-15, (2000).
- [9] Penfield Jr, and A.H.Hermann, *Electrodynamics of moving media*. Research Monograph N° 40, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, (1967).
- [10] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates*, CRC Press, Boca Raton, New York, (1997).
- [11] K.J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1982).
- [12] O.C. Zienkiewicz , *The finite element method in engineering Sciences*, McGraw-Hill, 3 rd, London, (1977).
- [13] J.S. Moita, C.M. Mota Soares, and C.A. Mota Soares, “Buckling Behaviour of Laminated Composite Structures Using a Discrete Higher-Order Displacement Field”, *Composite Structures*, 35, 75-92, (1996)

- [14] M.A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, (1991).
- [15] A. Suleman, V.B. Venkayya, “A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers”, *J. Intell. Mater. Sys. Structures*, 6, 776-782, (1995).
- [16] V.M. Franco, M.A.A. Gomes, A. Suleman, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, “Modelling and design of adaptive composite structures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering*, 185, 325-346, (2000).