

# Tese de Mestrado

Inês Nicau

17 de Dezembro de 2006

# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Notação</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>Introdução</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Noções básicas de espaços vectoriais, matrizes e grafos</b>	<b>1</b>
1.1 Espaços vectoriais . . . . .	1
1.1.1 Definição de espaço vectorial . . . . .	2
1.1.2 Subespaços vectoriais . . . . .	3
1.1.3 Dependência e independência linear . . . . .	4
1.1.4 Base e dimensão de um espaço vectorial . . . . .	6
1.1.5 Aplicações lineares . . . . .	6

1.1.6	Produto interno . . . . .	8
1.1.7	Normas vectoriais . . . . .	12
1.2	Matrizes . . . . .	15
1.2.1	Noção de matriz . . . . .	15
1.2.2	Tipos especiais de matrizes quadradas . . . . .	17
1.2.3	Operações com matrizes . . . . .	17
1.2.4	Característica de uma matriz . . . . .	23
1.2.5	Matriz em forma de escada . . . . .	25
1.2.6	Aplicações lineares e matrizes . . . . .	26
1.2.7	Determinantes . . . . .	27
1.2.8	Valores e vectores próprios . . . . .	31
1.2.9	Matrizes semelhantes . . . . .	34
1.2.10	Diagonalização de matrizes . . . . .	38
1.3	Grafos . . . . .	39
1.3.1	Noção de grafo . . . . .	39
1.3.2	Definições em grafos . . . . .	40

## 2 Matrizes

<b>Estudo complementar</b>	<b>42</b>	
2.1	Matrizes ortogonais e unitárias . . . . .	42
2.2	Matrizes em blocos . . . . .	46
2.3	Matrizes semidefinidas positivas . . . . .	47
2.4	Outros produtos de matrizes . . . . .	49

2.5	Matrizes hermíticas . . . . .	52
2.6	Valores singulares . . . . .	54
2.7	Matrizes normais . . . . .	54
2.8	Normas matriciais . . . . .	57
2.9	Matrizes não negativas . . . . .	66
2.10	Matrizes redutíveis . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Algumas noções teóricas sobre padrões</b>	<b>81</b>
3.1	Padrões e padrões de sinais	
	Noções introdutórias . . . . .	81
3.1.1	Padrão arbitrário ou matriz padrão . . . . .	81
3.1.2	Padrão de sinais ou matriz padrão de sinais . . . . .	84
3.1.3	Noção de requerer/admitir uma propriedade . . . . .	88
3.1.4	Conceitos matriciais em padrões . . . . .	92
3.2	Padrões de sinais - mais algumas noções . . . . .	93
3.2.1	Ciclos e combinações . . . . .	95
3.2.2	Não singularidade de padrões de sinais . . . . .	96
3.3	Grafos e padrões . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Padrões que admitem determinadas somas de linhas e colunas</b>	<b>100</b>
4.1	Estudo do problema da admissão fraca . . . . .	104
4.2	Estudo do problema da admissão forte . . . . .	111

<b>5</b>	<b>Alguns padrões de sinais que admitem uma matriz e a sua inversa na sua classe</b>	<b>121</b>
5.1	Introdução . . . . .	122
5.2	Condições necessárias . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Padrões de sinais que requerem valores próprios reais, não reais ou imaginários puros</b>	<b>140</b>
6.1	Introdução . . . . .	141
6.2	Respostas ao problema . . . . .	145
	<b>Bibliografia</b>	<b>162</b>

# Agradecimentos

Tenho a agradecer, de um modo especial:

- À minha família, em especial ao Hugo, pelo apoio e constante incentivo, por todo o carinho e dedicação;
- À Professora Doutora Maria da Graça Marques, pela sua orientação e acompanhamento, pelo seu entusiasmo e optimismo face ao trabalho, que muito contribuíram para a minha formação profissional e pessoal;
- Ao júri da minha dissertação, que se dispôs a ler e corrigir o meu trabalho e contribuiu para o melhorar substancialmente;
- Aos meus amigos e colegas de trabalho, pela compreensão e tolerância.

# Notação

$car$  - característica;

$T : U \longrightarrow V$  - aplicação linear entre os espaços vectoriais  $U$  e  $V$ ;

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  - base canónica;

$\dim(U)$  - dimensão do espaço vectorial  $U$ ;

$Nuc(T)$  - núcleo de uma aplicação linear;

$Im(T)$  - imagem de uma aplicação linear;

$\langle \cdot \rangle$  - produto interno;

$\|v\|$  - norma de um vector  $v$ ;

$p(t)$  - polinómio;

$\bar{z}$  - conjugado de um número complexo  $z$ ;

$Re(z)$  - parte real de um número complexo  $z$ ;

$Im(z)$  - parte imaginária de um número complexo  $z$ ;

$| \quad |$  - módulo;

$\theta$  - ângulo entre dois vectores;

$S^\perp$  - complemento ortogonal do conjunto  $S$ ;

$\|v\|_2$  - norma euclidiana;

$\|v\|_1$  - norma soma;

$\|v\|_\infty$  - norma do máximo;

$v_B$  - vector das coordenadas do vector  $v$  na base  $B$ ;

$C[a, b]$  - espaço vectorial das funções contínuas no intervalo  $[a, b]$ ;

$\max \{ \quad \}$  - máximo de um conjunto de elementos;

$\min \{ \quad \}$  - mínimo de um conjunto de elementos;

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$  - matriz do tipo  $m \times n$ ;

$a_{ij}$  - elemento de uma matriz situado na linha  $i$  e na coluna  $j$ ;

$Nuc(A)$  - núcleo da matriz  $A$ ;

$Im(A)$  - espaço imagem da matriz  $A$ ;

$M_{m \times n}(F)$  - espaço vectorial das matrizes  $m \times n$  com entradas no corpo  $F$ ;

$M_n(F)$  - espaço vectorial das matrizes quadradas de ordem  $n$  com entradas no corpo  $F$ ;

$tr(A)$  - traço da matriz  $A$ ;

$A^T$  - matriz transposta da matriz  $A$ ;

$-A$  - matriz simétrica da matriz  $A$ ;

$0_{m \times n}$  - matriz nula do tipo  $m \times n$ ;

$I_n$  - matriz identidade de ordem  $n$ ;

$\alpha I_n$  - matriz escalar de ordem  $n$ ;

$A^{-1}$  - matriz inversa da matriz  $A$ ;

$\bar{A}$  - matriz conjugada da matriz  $A$ ;

$A^*$  - matriz transconjugada da matriz  $A$ ;

$\tilde{A}$  - submatriz principal da matriz  $A$ ;

$\det(A)$  - determinante da matriz  $A$ ;

$\hat{A}$  - matriz dos complementos algébricos da matriz  $A$ ;

$\text{adj}(A)$  - adjunta da matriz  $A$ ;

$p_A(\lambda)$  - polinómio característico da matriz  $A$ ;

$\sigma(A)$  - espectro da matriz  $A$ ;

$\rho(A)$  - raio espectral da matriz  $A$ ;

$J_n$  - matriz quadrada de ordem  $n$  que tem todas as entradas iguais a 1;

$\sim$  - sinal de semelhança de matrizes;

$G(V, E)$  - grafo com conjunto  $V$  de vértices e conjunto  $E$  de arestas;

$A \succeq 0$  - matriz semidefinida positiva;

$A \succ 0$  - matriz definida positiva;

$A^{\frac{1}{2}}$  - raiz quadrada da matriz  $A$ ;

$A \otimes B$  - produto de Kronecker entre as matrizes  $A$  e  $B$ ;

$A \circ B$  - produto de Hadamard entre as matrizes  $A$  e  $B$ ;

$\sigma_i$  - valores singulares da matriz  $A$ ;

$\lambda_i$  - valores próprios da matriz  $A$ ;

$\|A\|$  - norma da matriz  $A$ ;

$A \geq 0$  - matriz não negativa;

$A > 0$  - matriz positiva;

$\mathcal{P}_{m \times n}$  - padrão do tipo  $m \times n$ ;

$\hat{\mathcal{P}}$  - padrão subordinado ao padrão  $\mathcal{P}$ ;

$Q(\mathcal{P})$  - classe do padrão  $\mathcal{P}$ ;

$\mathcal{A}_{m \times n}$  - padrão de sinais do tipo  $m \times n$ ;

$Q(\mathcal{A})$  - classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$sgn(a_{ij})$  - sinal do elemento  $a_{ij}$  de uma matriz;

$\mathcal{A}^+$  - padrão positivo completo;

$\mathcal{A}^-$  - padrão negativo completo;

$\det(\mathcal{A})$  - determinante do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$car_{\min}(\mathcal{A})$  - característica mínima do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$\mathcal{A}^{-1}$  - padrão inverso do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$D(\mathcal{A})$  - grafo orientado associado ao padrão ou padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$\mathcal{P}^T$  - padrão transposto do padrão  $\mathcal{P}$ ;

$RS$  - espaço das linhas de uma matriz ou padrão;

$IP$  - propriedade do par inverso;

$\mathcal{JP}$  - conjunto dos padrões de sinais que admitem a propriedade  $IP$ ;

$\mathcal{A}_1 \xleftrightarrow{c} \mathcal{A}_2$  - padrão  $\mathcal{A}_1$  compatível ao padrão  $\mathcal{A}_2$ ;

$adj(\mathcal{A})$  - padrão adjunto do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ;

$\#$  - soma qualitativa ambígua;

$\#X$  - cardinalidade do conjunto  $X$ ;

$i(B)$  - inércia da matriz  $B$ .

# Resumo

Um padrão  $\mathcal{P}$  é uma matriz com entradas no conjunto  $\{0, *\}$ , em que  $*$  designa uma entrada não nula. Dizemos que a matriz  $A = [a_{ij}]$ , com elementos num corpo arbitrário, tem padrão  $\mathcal{P}$ , se é do mesmo tipo que  $\mathcal{P}$  e  $a_{ij} \neq 0$  se e só se a entrada  $(i, j)$  de  $\mathcal{P}$  é  $*$ . Quando se trata de matrizes reais, consideramos também a noção de padrão de sinais,  $\mathcal{A}$ , como sendo uma matriz com entradas no conjunto  $\{+, -, 0\}$ . Associamos a um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  uma matriz real, se as suas entradas positivas estão nas posições  $+$ , as suas entradas negativas estão nas posições  $-$ , e as suas entradas nulas estão nas entradas  $0$  do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ .

Nesta dissertação abordamos propriedades de matrizes associadas ou derivadas do seu padrão ou padrão de sinais, estudando com maior pormenor a não singularidade, comutatividade e tipo de valores próprios. Este tipo de estudo, em que uma matriz requer ou admite determinada propriedade, baseado apenas no conhecimento da posição das suas entradas não nulas (ou, no caso de padrões de sinais, da posição das suas entradas positivas e negativas), está inserido na teoria qualitativa de matrizes. Foi, no entanto, importante incluir

capítulos iniciais dedicados exclusivamente à introdução de noções sobre espaços vectoriais, matrizes e grafos, bem como a um estudo complementar da teoria matricial clássica, abarcando muitos conceitos que serão utilizados ao longo do trabalho.

**Palavras-chave:** matriz, padrão, padrão de sinais, grafo.

# Abstract

An (unsigned) pattern  $\mathcal{P}$  is a rectangular array with entries from  $\{0, *\}$ . A matrix  $A = [a_{ij}]$  belongs to the pattern  $\mathcal{P}$  if its dimensions agree with those of  $\mathcal{P}$  and the nonzero entries of  $A$  appear precisely in the positions of  $*$ 's in  $\mathcal{P}$ . We can also consider a sign pattern matrix, as a matrix whose entries belong to the set  $\{+, -, 0\}$ . A matrix  $A$  belongs to the sign pattern  $\mathcal{A}$ , if the positive entries appear in the  $+$  positions, the negative entries appear in the  $-$  positions, and the zero entries appear in the  $0$  positions in  $\mathcal{A}$ .

In this dissertation we study some matrices properties that are associated to their pattern (or sign pattern), such as nonsingularity, comutativity and eigenvalues types. Qualitative matrix analysis involves the study of properties that are either required or allowed, based just upon knowledge of the nonzero entries (or, when we talk about sign patterns, the entries signs) of a matrix  $A$ . For seek of completeness, the initial chapters introduce concepts of vector spaces, matrices, graphs and also a complementary matrices study. Some of these concepts are very usefull for the rest of the work.

**Key-words:** matrix, pattern, sign pattern, graph.

# Introdução

A Teoria Qualitativa de Matrizes é uma área relativamente recente do campo de investigação da Álgebra Linear, tendo sido o seu estudo iniciado na década de 60. No entanto, tem sofrido, nos últimos tempos, um grande desenvolvimento, uma vez que as questões qualitativas têm múltiplas aplicações, nomeadamente na Economia, na Química, na Biologia, nas Ciências Sociais, entre outras.

Este tema suscita bastante interesse: por um lado, por não estar ainda compilado nos manuais de Álgebra Linear, havendo apenas artigos publicados sobre o assunto, os quais resultaram de investigação acerca de algumas propriedades das matrizes padrão e padrão de sinais, tais como a comutatividade, a simetria, a não singularidade, as características do seu espectro, entre outras; por outro lado, por tentar estabelecer conexões entre a Teoria Matricial Clássica, a qual estuda as propriedades de matrizes numéricas, e este novo tipo de matrizes, que apenas nos dão as características qualitativas das entradas de uma matriz, isto é, se são ou não nulas, no caso de matrizes padrão arbitrárias, ou quais os seus sinais, no caso de matrizes padrão de

sinais.

É óbvio que a Teoria Matricial Clássica, sendo já estudada há muito tempo, está muito desenvolvida, enquanto que a Teoria Qualitativa de Matrizes, por ter como base matrizes não numéricas, e por isso com poucas características conhecidas, está ainda no seu início. É, no entanto, necessário conhecer a fundo a Teoria Matricial, para compreender e investigar propriedades das matrizes padrão, tentando chegar, com êxito, a alguns resultados.

Foi, por isso, essencial, na elaboração desta dissertação, a qual apresenta um estudo introdutório da Teoria Qualitativa de Matrizes, fazer um estudo aprofundado da Teoria Matricial Clássica, a qual constituiu uma ferramenta indispensável na compreensão dos resultados descritos em todas as publicações consultadas sobre matrizes padrão e padrão de sinais, permitindo assim fazer uma análise de várias propriedades, nomeadamente, acerca da sua invertibilidade, comutatividade, e natureza dos valores próprios.

Face a isto, este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Uma primeira parte, composta por dois capítulos, onde estão apresentadas a Teoria Matricial e de Grafos. O primeiro capítulo, que não inclui quaisquer demonstrações, contém as noções iniciais de espaços vectoriais, matrizes e grafos. Este, apesar de ser introdutório, fornece conhecimentos básicos, essenciais para a leitura do restante documento. No segundo capítulo continuamos a abordar a Teoria Matricial, mas aqui são apresentados alguns temas complementares, habitualmente não abordados

nas disciplinas de Álgebra de uma Licenciatura em Matemática; aqui, são introduzidos vários tipos especiais de matrizes e algumas propriedades, nomeadamente, matrizes semidefinidas e definidas positivas, matrizes hermiticas, matrizes normais, matrizes não negativas, e matrizes redutíveis.

- Uma segunda parte, composta por quatro capítulos, na qual é já abordada a Teoria Qualitativa. Começamos por fazer uma introdução ao estudo qualitativo de matrizes, apresentando as noções de matriz padrão e matriz padrão de sinais, bem como algumas propriedades. Este terceiro capítulo é indispensável para a compreensão da restante dissertação, trazendo também alguma inovação no que concerne a uma compilação cuidada dos conceitos introdutórios sobre padrões, os quais não constam dos manuais de Álgebra. Nos três últimos capítulos fazemos uma análise de algumas publicações cuja investigação se centrou no estudo de algumas propriedades específicas em padrões e padrões de sinais. Enquanto que o primeiro artigo analisado trabalha com padrões arbitrários, os dois restantes estudam padrões de sinais, e nestes elaborámos já alguns cálculos, análogos aos efectuados em matrizes numéricas, já que muitos dos cálculos com estas admitem generalizações qualitativas.

Tentámos, ao longo de toda a dissertação, introduzir exemplos, sempre que considerámos pertinente. Decidimos também, para que a sua leitura não se tornasse demasiado exhaustiva, omitir cálculos intermédios, mais elementares, bem como demonstrações de teoremas.

# Capítulo 1

## Noções básicas de espaços vectoriais, matrizes e grafos

O objectivo deste capítulo é introduzir conceitos básicos de espaços vectoriais, matrizes e grafos, alguns dos quais vão ser utilizados posteriormente ao longo do trabalho. A maioria das definições e resultados aqui apresentados é parte dos conteúdos programáticos de disciplinas introdutórias de um curso de Matemática e o objectivo é relembrá-las de um modo não exaustivo, mas sistemático.

### 1.1 Espaços vectoriais

Para definir espaço vectorial em geral, é fundamental a definição algébrica de corpo, pois é através dos elementos de um corpo que se define o produto escalar em espaços vectoriais. As definições mais utilizadas de espaços

vectoriais são associadas a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , que são corpos, mas na definição geral pode ser utilizado outro corpo qualquer. Relembremos que um corpo é um conjunto fechado para duas operações binárias específicas (denominadas habitualmente por soma e produto) em que ambas têm que ser comutativas e associativas e ter um elemento neutro no conjunto; para além disso, relativamente à soma, todos os elementos têm que ter inversos no conjunto e, relativamente ao produto, todos os elementos, à excepção do elemento neutro da adição, têm que ter inversos no conjunto; finalmente o produto tem que ser distributivo em relação à soma. No que se segue, designamos o elemento neutro da soma por 0 e o elemento neutro do produto por 1.

### 1.1.1 Definição de espaço vectorial

Um espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$  é um conjunto  $V$  de objectos, chamados **vectores**, que é fechado para uma operação binária (denominada por **soma**), a qual é associativa, comutativa, tem elemento neutro (denominado por **vector nulo** e representado por 0) e para a qual todos os elementos têm inverso. O conjunto é também fechado para um produto de elementos do corpo  $F$  pelos vectores (denominado por **produto escalar**), satisfazendo, para todo o  $a, b \in F$  e todo  $u, v \in V$ , as seguintes propriedades:

- $a(u + v) = au + av$ ;
- $(a + b)u = au + bu$ ;
- $a(bu) = (ab)u$ ;
- $1u = u$ .

**Nota 1.1.1** *No âmbito de espaços vectoriais, os elementos do corpo designam-se por **escalares**.*

**Exemplo 1.1.2** *Dado um corpo  $F$ , o conjunto*

$$F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in F\}$$

*com a soma*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

*e o produto escalar definido, para qualquer  $\lambda$  em  $F$ , por*

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

*é um espaço vectorial sobre  $F$ .*

**Nota 1.1.3** *Quando falamos do espaço  $F^n$ , sem indicar as operações, é ao espaço do exemplo anterior que nos referimos.*

## 1.1.2 Subespaços vectoriais

Um **subespaço vectorial**  $U$ , de um espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$ , é um subconjunto não vazio de  $V$  que ainda é um espaço vectorial sobre  $F$  relativamente à restrição das operações do espaço a esse subconjunto. Verifica-se que um subconjunto não vazio  $U$  de um espaço vectorial  $V$  é subespaço vectorial de  $V$  se e só se é fechado para a soma e para o produto escalar.

### 1.1.3 Dependência e independência linear

Num espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$ , chama-se **combinação linear** de uma família de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  a qualquer expressão da forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k, \text{ com } a_1, a_2, \dots, a_k \in F.$$

Os elementos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  são os **coeficientes** da combinação linear. Uma família de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  num espaço vectorial é **linearmente dependente** se existem coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , não todos nulos, no corpo  $F$ , tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0.$$

Quando isto não se verifica, o conjunto diz-se **linearmente independente**.

A partir da definição podem-se concluir os seguintes resultados sobre dependência e independência linear:

- Uma família de vectores é linearmente dependente se e só se um dos vectores da família se pode obter como combinação linear dos restantes;
- Qualquer subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente;
- $\{0\}$  é um conjunto linearmente dependente e qualquer conjunto que inclua o vector nulo é linearmente dependente;
- A dependência ou independência linear de uma família de vectores não se altera se se somar a um dos vectores uma combinação linear dos outros.

A noção de independência linear conduz à definição de característica de uma família de vectores:

Se  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$  é uma família de vectores num espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$ , a **característica** de  $X$ ,  $car(X)$ , é o número máximo de vectores linearmente independentes de  $X$ . A partir da definição pode-se concluir que:

- Se  $car(X) = k$ , então os vectores de  $X$  são linearmente independentes e vice-versa;
- Se  $car(X) < k$ , então os vectores de  $X$  são linearmente dependentes e vice-versa;
- Se algum dos vectores de  $X$  é o vector nulo, então  $car(X) < k$ ;
- Se um dos vectores de  $X$  é combinação linear dos restantes, então  $car(X) < k$ .

Uma família de vectores pode ser manipulada de forma a que a sua característica não se altere:

**Teorema 1.1.4** *Seja  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$  uma família de vectores num espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$ . A característica de  $X$  não se altera se se efectuar qualquer das seguintes operações:*

1. *Trocar a ordem de dois vectores;*
2. *Multiplicar a qualquer um dos vectores um escalar  $\alpha \neq 0$ ;*
3. *Somar a um dos vectores qualquer outro multiplicado por um escalar.*

### 1.1.4 Base e dimensão de um espaço vectorial

Se  $S$  é um conjunto linearmente independente de vectores de um espaço vectorial  $V$  e se qualquer elemento de  $V$  se pode obter como combinação linear de elementos de  $S$ , então  $S$  é uma **base** de  $V$ . Sendo  $S$  uma base, verifica-se que cada elemento de  $V$  é representado, **de forma única**, como combinação linear dos elementos de  $S$ . Os escalares utilizados nessa combinação linear são as **coordenadas do vector** relativamente à base  $S$ . Se uma base de um espaço vectorial  $V$  tiver um número finito de elementos, prova-se que todas as suas bases têm o mesmo número de elementos. A este número comum chamamos **dimensão** do espaço vectorial  $V$  ( $\dim V$ ).

**Exemplo 1.1.5** *Sendo  $F$  um corpo qualquer, o conjunto*

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

*é uma base do espaço vectorial  $F^n$ , pelo que  $\dim F^n = n$ . Esta base é conhecida como **base canónica** de  $F^n$ .*

### 1.1.5 Aplicações lineares

Entre as aplicações que podem ser definidas entre dois espaços vectoriais, têm interesse especial as que são, por assim dizer, compatíveis com as operações do espaço vectorial. Consideremos dois espaços vectoriais  $U$  e  $V$  sobre o mesmo corpo  $F$ . Uma **aplicação linear  $\mathbf{T}$**  é uma aplicação  $T : U \longrightarrow V$  que verifica as duas condições seguintes:

1.  $\forall u, v \in U, T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
2.  $\forall u \in U, \alpha \in F, T(\alpha u) = \alpha T(u)$ .

Estas duas condições podem juntar-se, dando origem à seguinte condição:

$$\forall u, v \in U, \forall \alpha, \beta \in F, T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

A cada aplicação linear  $T$  associam-se os seguintes subespaços vectoriais de  $U$  e  $V$ , respectivamente:

- Núcleo de  $T$  :  $Nuc(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}$ ;
- Espaço imagem de  $T$  :  $Im(T) = \{T(u) : u \in U\}$ .

Uma aplicação linear  $T$  de  $U$  em  $V$  é **não degenerada** se  $Nuc(T) = \{0\}$ .

Prova-se que uma aplicação linear é não degenerada se e só se é uma aplicação injectiva. As aplicações deste tipo também se chamam **monomorfismos** de espaços vectoriais. Quando uma aplicação linear entre dois espaços é bijectiva e, portanto, é uma aplicação invertível, então chama-se **isomorfismo**. Quando é possível definir um isomorfismo entre dois espaços vectoriais, diz-se que estes são **isomorfos**. Prova-se que dois espaços vectoriais de dimensão finita sobre o mesmo corpo são isomorfos se e só se têm a mesma dimensão. Concluimos, por isso, que qualquer espaço vectorial de dimensão  $n$  sobre um corpo  $F$  é isomorfo a  $F^n$  e, portanto, que qualquer espaço vectorial real de dimensão  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Temos ainda:

**Teorema 1.1.6** *Sejam  $U$  e  $V$  dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo  $F$ . O conjunto de todas as aplicações lineares de  $U$  em  $V$  é também um espaço vectorial sobre  $F$  e se  $\dim U = m$  e  $\dim V = n$ , então a sua dimensão é  $m \times n$ .*

## 1.1.6 Produto interno

### Produto Interno

Seja  $V$  um espaço vectorial sobre o corpo  $\mathbb{C}$ . Uma aplicação

$$\langle \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

chama-se **produto interno** se,  $\forall v, u \in V$  :

- $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$  (propriedade hermitica);
- $\langle v + u, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle u, z \rangle$ ;
- $\langle cv, u \rangle = c \langle v, u \rangle, \forall c \in \mathbb{C}$ ;
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ ;
- $\langle v, v \rangle = 0$  se e só se  $v = 0$ .

Se considerarmos o espaço vectorial  $V$  sobre o corpo  $\mathbb{R}$ , dos números reais, a aplicação  $\langle \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  chama-se **produto interno** se,  $\forall v, u \in V$  :

- $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ ;
- $\langle v + u, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle u, z \rangle$ ;

- $\langle cv, u \rangle = c \langle v, u \rangle, \forall c \in \mathbb{R};$
- $\langle v, v \rangle \geq 0;$
- $\langle v, v \rangle = 0$  se e só se  $v = 0$ .

**Exemplo 1.1.7** Em  $\mathbb{C}^n$ , a aplicação definida, para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , por

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

é um produto interno complexo, chamado **produto interno euclidiano**.

Em  $\mathbb{R}^n$  a expressão do produto interno euclidiano simplifica-se:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

**Nota:** A partir deste ponto, todas as definições e teoremas desta secção vão ser considerados num espaço vectorial  $V$ , real ou complexo, com um produto interno definido.

### Ortogonalidade

Dois vectores  $v$  e  $u \in V$  são **ortogonais** se  $\langle u, v \rangle = 0$ . Se falarmos num conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , este é **ortogonal**, se cada par de vectores no conjunto é ortogonal. Um conjunto ortogonal de vectores em que nenhum deles é o vector nulo, é necessariamente **linearmente independente**.

## Norma

Se  $v \in V$ , a **norma** de  $v$  (relativamente ao produto interno definido em  $V$ ) é o escalar não negativo  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Um vector com norma 1 chama-se **normalizado** ou **unitário**.

O teorema seguinte relaciona o produto interno de dois vectores com as suas normas:

### **Teorema 1.1.8** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

Se  $\langle \cdot \rangle$  é um produto interno num espaço vectorial  $V$ , então

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|, \forall v, u \in V.$$

A igualdade ocorre se e só se  $v$  e  $u$  são linearmente dependentes, isto é, se  $u = \alpha v$  ou  $v = \alpha u$  para algum escalar  $\alpha$ .

### **Ângulo entre dois vectores**

A desigualdade de Cauchy-Schwarz permite generalizar a definição de ângulo entre vectores de qualquer espaço vectorial com um produto interno definido.

O ângulo  $\theta$ , entre dois vectores não nulos  $v$  e  $u \in V$ , é definido por:

$$\theta = \arccos \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\| \|u\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

### **Método de Ortonormalização de Gram-Schmidt**

Uma base de  $V$  pode ser substituída por uma base **ortonormal** (base ortogonal em que os vectores são normalizados). Vemos em seguida qual

o procedimento a utilizar, conhecido como Método de Ortonormalização de Gram-Schmidt. Seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Para definirmos o conjunto ortonormal correspondente  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , definimos um conjunto auxiliar  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ :

$$u_1 = v_1;$$

$$z_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \text{ é um vector normalizado;}$$

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, z_1 \rangle z_1 \text{ (} u_2 \text{ é ortogonal a } z_1 \text{);}$$

$$z_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}.$$

O processo continua iterativamente. Para  $k \in \{3, \dots, n\}$ , define-se:

$$u_k = v_k - \langle v_k, z_{k-1} \rangle z_{k-1} - \langle v_k, z_{k-2} \rangle z_{k-2} - \dots - \langle v_k, z_1 \rangle z_1 \text{ (} u_k \text{ é ortogonal a } z_1, \dots, z_{k-1} \text{).}$$

$$z_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} \text{ (} z_k \text{ é normalizado e ortogonal a } z_1, \dots, z_{k-1} \text{).}$$

### Complemento Ortogonal

Seja  $S \subseteq V$ . O **complemento ortogonal de  $S$**  é o conjunto

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

Mesmo que  $S$  não seja subespaço vectorial de  $V$ ,  $S^\perp$  é sempre subespaço; temos ainda:

1.  $(S^\perp)^\perp = S'$ , onde  $S'$  é o menor (relativamente à relação de inclusão) subespaço de  $V$  que contém  $S$ ;
2.  $(S^\perp)^\perp = S$  (se e só se  $S$  for subespaço).

### 1.1.7 Normas vectoriais

#### Norma Vectorial

Seja  $V$  um espaço vectorial real ou complexo. Uma aplicação  $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$

é uma **norma vectorial** se, para  $\forall v, u \in V$ :

1.  $\|v\| \geq 0$  e  $\|v\| = 0$  se e só se  $v = 0$ ;
2.  $\|cv\| = |c| \|v\|$ , para qualquer escalar  $c$ ;
3.  $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ .

Uma aplicação que satisfaça os axiomas, mas não necessariamente  $\|v\| = 0$  se e só se  $v = 0$ , é chamada **seminorma vectorial**.

#### Exemplos 1.1.9

1. *Se  $V$  é um espaço vectorial com produto interno, então a norma associada ao produto interno (definida na página 10) é uma norma vectorial em  $V$ .*

2. **Norma Euclidiana ou  $l_2$  em  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$  :**

$$\|v\|_2 = \left(|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Esta é a norma vectorial mais conhecida e é a norma associada ao produto interno euclidiano.*

3. **Norma Soma ou  $l_1$  em  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$  :**

$$\|v\|_1 = |v_1| + \dots + |v_n|.$$

*Esta norma é também chamada norma 1 ou norma Manhattan.*

4. *Norma do Máximo ou  $l_\infty$  em  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$*

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}.$$

5. *Norma  $l_p$  em  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$*

$$\|v\|_p = \sum_{i=1}^n (|v_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

De notar que  $\|v\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_p, \forall v \in \mathbb{C}^n$ .

Os exemplos anteriores, de normas vectoriais em  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$ , podem ser usados para criar normas vectoriais em qualquer espaço vectorial real ou complexo  $V$  de dimensão finita. Se  $V$  é um espaço vectorial complexo de dimensão finita e se  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  é uma base de  $V$ , então, para cada vector  $v \in V$ ,  $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$ , pode-se formar um vector  $v_B = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ . A aplicação de  $V$  em  $\mathbb{C}^n$  que a cada vector  $v$  faz corresponder  $v_B$ , é um **isomorfismo** de  $V$  em  $\mathbb{C}^n$ . Se  $\|\cdot\|$  é qualquer norma vectorial em  $\mathbb{C}^n$ , então, para cada base  $B$ , consideramos uma norma relativa a essa base:

$$\|v\|_B = \|v_B\| = \|(v_1, \dots, v_n)\|.$$

**Nota 1.1.10** *A definição de norma vectorial não exige que o espaço vectorial  $V$  seja de dimensão finita; o espaço  $V$  pode ser, por exemplo,  $C[a, b]$ , o espaço vectorial de todas as funções reais contínuas no intervalo real  $[a, b]$ . Por exemplo, algumas normas em  $C[a, b]$  são semelhantes às normas já referidas para  $\mathbb{C}^n$  :*

$$\|f\|_2 = \left[ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt;$$

$$\|f\|_p = \left[ \int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, p \geq 1;$$

$$\|f\|_\infty = \max \{|f(v)| : v \in [a, b]\}.$$

### Propriedades algébricas das normas vectoriais

Para qualquer norma ou normas dadas, podem ser construídas novas normas de várias maneiras; por exemplo, é fácil mostrar que a soma de duas normas (ou seminormas) vectoriais é ainda uma norma (seminorma) vectorial e que qualquer múltiplo positivo de uma norma (seminorma) vectorial é ainda uma norma (seminorma) vectorial. Podemos ainda mostrar facilmente que se  $\|\cdot\|_\alpha$  e  $\|\cdot\|_\beta$  são normas vectoriais, então a função  $\|\cdot\|$  definida por

$$\|v\| = \max \left\{ \|v\|_\alpha, \|v\|_\beta \right\}$$

é também uma norma vectorial. Estas observações são casos especiais do próximo teorema:

**Teorema 1.1.11** *Sejam  $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \dots, \|\cdot\|_{\alpha_m}$ ,  $m$  normas vectoriais num espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $F$ , e seja  $\|\cdot\|_\beta$  uma norma vectorial em  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\|u\|_\beta \leq \|u+z\|_\beta, \forall u, z \in \mathbb{R}^m$  com entradas não negativas. Então a função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\|v\| = \|\|v\|_{\alpha_1}, \dots, \|v\|_{\alpha_m}\|_\beta$  é uma norma vectorial em  $V$ .*

## 1.2 Matrizes

### 1.2.1 Noção de matriz

Seja  $F$  um corpo. Sendo  $m$  e  $n$  números naturais, uma **matriz de tipo**  $m \times n$  sobre  $F$  é uma função  $A$  definida no conjunto

$$\{(i, j) : i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

e com valores em  $F$ .

Abreviando  $A(i, j)$  por  $a_{ij}$ , uma matriz  $A$  de tipo  $m \times n$  é usualmente representada numa das formas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ou

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  uma matriz. Os elementos  $a_{ij}$  chamam-se **entradas da matriz** e diz-se habitualmente que  $A$  tem  $m$  **linhas** e  $n$  **colunas**. O elemento  $a_{ij}$  está posicionado na linha  $i$  (chamado **índice de linha**) e na coluna  $j$  (chamado **índice de coluna**) da matriz  $A$ . Se  $m = 1$ ,  $A$  chama-se **matriz linha**. Se  $n = 1$ , chama-se **matriz coluna**. Se  $m = n$ ,  $A$  chama-se **matriz quadrada** e, neste caso, diz-se simplesmente que tem ordem  $n$ .

Em matrizes quadradas de ordem  $n$ , os elementos que têm os dois índices iguais,  $a_{ii}$ , chamam-se **elementos principais da matriz**. A **diagonal principal da matriz** é constituída pelos elementos principais da matriz. O **traço** de uma matriz quadrada  $A$  é a soma dos elementos principais:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Os elementos que ocupam posições simétricas em  $A$ ,  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$ , chamam-se **elementos opostos**. A **transposta de  $A$**  é a matriz

$$A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$$

do tipo  $n \times m$ , tal que  $b_{ij} = a_{ji}$ . Claramente se observa que

$$(A^T)^T = A$$

e que

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A).$$

Define-se ainda a **matriz simétrica** da matriz  $A$ , como a matriz

$$-A = [b_{ij}]_{m \times n}, \text{ em que } b_{ij} = -a_{ij}.$$

A **matriz nula** do tipo  $m \times n$  é a matriz

$$0_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ em que } a_{ij} = 0..$$

Definimos **matriz identidade** de ordem  $n$  como a matriz

$$I_n = [a_{ij}]_{n \times n}, \text{ em que } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Duas matrizes do mesmo tipo  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  **são iguais** se  $a_{ij} = b_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Vamos designar por  $M_{m \times n}(F)$  o conjunto das matrizes de tipo  $m \times n$  com elementos em  $F$ . Designamos por  $M_n(F)$  o conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$ .

### 1.2.2 Tipos especiais de matrizes quadradas

Há algumas matrizes quadradas de tipo especial, quer pela posição dos zeros dentro da matriz, quer pelas relações entre os elementos da matriz:

1. **Triangular superior**, se  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ ;
2. **Triangular inferior**, se  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ ;
3. **Diagonal**, se for triangular superior e inferior, isto é, se  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ;
4. **Simétrica**, se  $A^T = A$ ;
5. **Hemi-simétrica**, se  $-A^T = A$ ;
6. **Escalar**: sendo  $\alpha$  um escalar pertencente ao conjunto  $F$ , uma **matriz escalar** é uma matriz da forma  $\alpha I_n$ .

### 1.2.3 Operações com matrizes

Ao longo desta subsecção as matrizes consideradas têm elementos num corpo arbitrário  $F$ .

### Soma

Se  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , a **soma** das matrizes  $A$  e  $B$  é

$$A + B = [c_{ij}]_{m \times n}, \text{ onde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

### Propriedades da soma de matrizes

São válidas, para quaisquer matrizes do mesmo tipo  $A, B$  e  $C$ , as seguintes propriedades:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- $A + B = B + A$ ;
- $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ ;
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ;
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ ;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

### Produto escalar

Se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz de tipo  $m \times n$ , e  $\alpha \in F$ , o **produto escalar** de  $\alpha$  por  $A$  é a matriz

$$\alpha A = [c_{ij}]_{m \times n}, \text{ onde } c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

### Propriedades do produto escalar

São válidas, para quaisquer matrizes do mesmo tipo  $A, B$  e  $\alpha, \beta \in F$ , as seguintes propriedades:

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;
- $1.A = A$ ;
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ ;
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$ ;
- $\alpha 0_{m \times n} = 0_{m \times n}$ ;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ .

Considerando as propriedades enunciadas para a soma e produto escalar verifica-se que:

**Teorema 1.2.1** *O conjunto  $M_{m \times n}(F)$ , com as operações de soma e produto escalar, é um espaço vectorial sobre  $F$ , de dimensão  $m \times n$ .*

**Nota 1.2.2** *Considerando o isomorfismo entre espaços vectoriais da mesma dimensão, é frequente identificar os espaços  $M_{n \times 1}(F)$ ,  $M_{1 \times n}(F)$  e  $F^n$ .*

### Produto de matrizes

Contrariamente à definição de soma, o produto de matrizes não se define para matrizes do mesmo tipo, mas sim para pares de matrizes em que o número de colunas da primeira matriz coincida com o número de linhas da segunda matriz.

Se  $A = [a_{ij}]_{m \times q}$  e  $B = [b_{ij}]_{q \times n}$ , o produto das matrizes  $A$  e  $B$  é a matriz

$$A \cdot B = [c_{ij}]_{m \times n}, \text{ onde } c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}.$$

Habitualmente omitimos o símbolo  $\cdot$ , escrevendo apenas  $AB$ .

Notamos desde já que  $AB = BA$  não é, em geral, verdadeiro (o produto de matrizes não é, em geral, comutativo).

A definição de produto permite referir mais alguns tipos de matrizes especiais de matrizes quadradas:

1. **Idempotente**, se  $A^2 = A$ ;
2. **Nilpotente**, se  $A^q = 0$  para algum inteiro positivo  $q$ . O mínimo valor de  $q$  é chamado **índice de nilpotência**.

### Propriedades do produto de matrizes

Sejam  $A, B, C$  matrizes e  $\alpha$  um escalar. Então, sempre que seja possível definir os produtos, tem-se:

- $(AB)C = A(BC)$ ;
- $AI = IA = A$ ;
- $(A + B)C = AC + BC$ ;
- $A(B + C) = AB + AC$ ;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ;
- $(AB)^T = B^T A^T$ ;
- $A0 = 0$ .

### Matrizes invertíveis

A matriz identidade é elemento neutro, à direita ou esquerda, para o produto de matrizes. No caso do produto de matrizes quadradas de ordem  $n$ , a matriz identidade  $I_n$  é elemento neutro do produto.

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Se existe uma matriz  $X$  tal que

$$AX = XA = I_n$$

diz-se que a matriz  $A$  é **invertível**. À matriz  $X$ , que se prova facilmente ser única, chama-se **inversa** de  $A$  e denota-se por  $A^{-1}$ . Uma condição necessária para uma matriz ter inversa, é esta ser quadrada, mas esta condição não é, de modo nenhum, suficiente.

### Propriedades de matrizes invertíveis

Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis de ordem  $n$ :

- $A^{-1}$  é invertível e  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $AB$  é invertível e  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
- $A^T$  é invertível e  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ;
- Para  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha A$  é invertível e  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ ;
- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ .

### Conjugação e transconjugação de matrizes complexas

Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , podem-se formar novas matrizes

1. **Conjugada de  $A$ :**  $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{m \times n}$ ;
2. **Transconjugada de  $A$ :**  $A^* = \bar{A}^T$ .

Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  diz-se **hermítica** se  $A^* = A$ .

Verificam-se as seguintes propriedades para a conjugação e transconjugação:

- $\overline{\bar{A}} = A$ ;
- $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$ ;
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ ;
- $(A^*)^* = A$ ;
- $(A + B)^* = A^* + B^*$ ;
- $(AB)^* = B^*A^*$ .

### Submatrizes

Dada uma matriz  $A \in M_{m \times n}(F)$  e sendo  $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\}$  e  $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ , chama-se **submatriz**  $A(\alpha, \beta)$  à matriz que é obtida da matriz inicial, escolhendo as linhas e as colunas indicadas nos conjuntos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

a submatriz  $A(\{1, 3\}, \{1, 2, 3\})$  é

$$A(\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Se  $m = n$  e  $\alpha = \beta$ , a submatriz  $A(\alpha, \alpha)$  chama-se **submatriz principal de**  $A$ .

#### 1.2.4 Característica de uma matriz

Considerando as linhas de uma matriz  $A \in M_{m \times n}(F)$  como vectores de  $F^n$ , a característica de  $A$ ,  $car(A)$ , é um número inteiro não negativo associado a  $A$  e é, por definição, o maior número de linhas de  $A$  que forma um conjunto linearmente independente. Prova-se que

$$car(A) = car(A^T)$$

e, portanto, esta definição pode ser escrita usando as colunas em vez de usar as linhas. Pode-se estabelecer o teorema seguinte, análogo ao teorema 1.1.4, para as matrizes:

**Teorema 1.2.3** *A característica de uma matriz não se altera efectuando qualquer das operações:*

1. Trocar a ordem de duas linhas;
2. Multiplicar a qualquer linha um escalar  $\alpha \neq 0$ ;
3. Somar a uma das linhas qualquer outra, multiplicada por um escalar.

**Nota 1.2.4** *As operações anteriores designam-se por **operações elementares nas linhas**. Existem operações análogas sobre as colunas de uma matriz.*

A característica de matrizes goza de inúmeras propriedades, das quais enunciaremos algumas, divididas em desigualdades e igualdades.

**Desigualdades da característica:**

- Se  $A \in M_{m \times n}(F)$ ,  $\text{car}(A) \leq \min\{m, n\}$ ;
- Se  $A, B \in M_{m \times n}(F)$ ,  $\text{car}(A + B) \leq \text{car}(A) + \text{car}(B)$ ;
- Se  $A \in M_{m \times n}(F)$  e  $B$  é uma submatriz de  $A$ , então  $\text{car}(B) \leq \text{car}(A)$ ;
- Se  $A \in M_{m \times k}(F)$  e  $B \in M_{k \times n}(F)$ ,

$$(\text{car}(A) + \text{car}(B) - k) \leq \text{car}(AB) \leq \min\{\text{car}(A), \text{car}(B)\};$$

- **(Desigualdade de Frobenius)** Se  $A \in M_{m \times k}(F)$ ,  $B \in M_{k \times p}(F)$  e  $C \in M_{p \times n}(F)$ ,  $\text{car}(AB) + \text{car}(BC) \leq \text{car}(B) + \text{car}(ABC)$ .

**Igualdades da característica:**

- Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\text{car}(A) = \text{car}(\bar{A}) = \text{car}(A^*)$ ;
- Se  $A \in M_m(F)$  e  $C \in M_n(F)$  são invertíveis e  $B \in M_{m \times n}(F)$ , então  $\text{car}(AB) = \text{car}(B) = \text{car}(BC) = \text{car}(ABC)$ ;
- Se  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , então  $\text{car}(A^*A) = \text{car}(A)$ ;

- Se  $A, B \in M_{m \times n}(F)$ , então  $\text{car}(A) = \text{car}(B)$  se e só se  $\exists X \in M_m(F)$  e  $Y \in M_n(F)$ ,  $X$  e  $Y$  invertíveis, tais que  $B = XAY$ ;
- Se  $A \in M_{m \times n}(F)$  tem característica  $k$ , então existem  $X \in M_{m \times k}(F)$ ,  $Y \in M_{k \times n}(F)$  e  $B \in M_k(F)$ , não singular, tais que  $A = XBY$ ; isto quer dizer que, se considerarmos o caso particular de uma matriz  $A$  com  $\text{car}(A) = 1$ , esta matriz pode ser sempre escrita na forma

$$A = xu^T (x \in F^m, u \in F^n).$$

### 1.2.5 Matriz em forma de escada

Seja  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(F)$ . A matriz  $A$  está em **forma de escada** se, para cada linha  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , se verifica:

1. Se a linha  $i$  é nula então, para todo o  $r > i$ , a linha  $r$  é nula.
2. Se a linha  $i$  não é nula e se  $a_{is}$  é o primeiro elemento não nulo da linha  $i$  (denominado o **pivot**), então para todo o  $l > i$  e para todo o  $c \leq s$ ,  $a_{lc} = 0$ .

A matriz  $A$  está na **forma de escada reduzida** se está em forma de escada e, para cada linha  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  se verificam:

1. O pivot é a identidade;
2. Se  $a_{is}$  é o pivot, então para todo o  $l < i$ ,  $a_{ls} = 0$ .

**Teorema 1.2.5** *Toda a matriz pode ser transformada, através de operações elementares, numa matriz em forma de escada.*

**Teorema 1.2.6** *Toda a matriz pode ser transformada, através de operações elementares, numa matriz em forma de escada reduzida.*

### 1.2.6 Aplicações lineares e matrizes

A cada aplicação linear entre espaços vectoriais de dimensão finita podem-se associar matrizes que definem completamente essa aplicação linear. Sejam  $U$  e  $V$  espaços vectoriais sobre o mesmo corpo  $F$ ,  $\dim(U) = n$ ,  $\dim(V) = m$  e  $T : U \rightarrow V$  uma aplicação linear. Se  $B_U$  for uma base de  $U$  e  $B_V$  for uma base de  $V$ , a matriz  $A \in M_{m \times n}(F)$  é a matriz da aplicação linear  $T$  relativamente a essas bases, se e só se, para qualquer  $u \in U$ , sendo  $v = T(u)$

$$v_{B_V} = Au_{B_U}.$$

Por outro lado, cada matriz  $A \in M_{m \times n}(F)$  define uma aplicação linear de  $F^n$  em  $F^m$ , fazendo corresponder a cada  $x \in F^n$  o vector  $Ax \in F^m$ . O **espaço imagem** de  $A$  é o espaço imagem dessa aplicação,  $\text{Im}(A) = \{Ax : x \in F^n\}$ , e o **núcleo** ou **espaço nulo** da matriz  $A$  é o núcleo da aplicação linear, isto é  $\text{Nuc}(A) = \{x \in F^n : Ax = 0\}$ , cujas dimensões se relacionam da seguinte forma:

$$n = \dim(\text{Nuc}(A)) + \dim(\text{Im}(A)).$$

Podemos ainda associar à matriz  $A$  outros subespaços vectoriais como, por exemplo, o espaço das linhas  $RS(A)$ , que é o menor subespaço de  $F^n$  que

contém as linhas de  $A$ . Atendendo à definição de característica, temos que

$$\text{car } A = \dim (\text{Im } A) = \dim \text{RS } (A).$$

### 1.2.7 Determinantes

Uma **permutação**  $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  do conjunto de inteiros  $\{1, 2, \dots, n\}$  é um arranjo dos  $n$  inteiros nalguma ordem, sem haver repetição ou omissão dos elementos. Chamamos  $S_n$  ao conjunto de todas as permutações do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  e vemos que a sua cardinalidade é  $n!$ . Considerando  $\sigma$  como uma aplicação bijectiva de  $\{1, 2, \dots, n\}$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$ , temos

$$j_1 = \sigma(1), j_2 = \sigma(2), \dots, j_n = \sigma(n).$$

Dizemos que ocorre uma **inversão na permutação** quando um inteiro menor precede um que lhe é superior. Uma permutação tem **sinal positivo** ( $\text{sgn}\sigma = +$ ) se o seu número total de inversões é par. Uma permutação tem **sinal negativo** ( $\text{sgn}\sigma = -$ ) se o seu número total de inversões é ímpar. Dada uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ , chama-se **produto elementar** da matriz  $A$  ao produto de  $n$  entradas de  $A$ , das quais não há duas na mesma linha ou coluna, isto é, um produto da forma

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

em que  $\sigma \in S_n$  é uma permutação. A cada produto elementar está associada uma permutação e vice-versa. Um **produto elementar com sinal** é um produto elementar afectado do sinal da permutação que lhe está associada.

Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . O **determinante** da matriz  $A$ ,  $\det A$ , é a soma de todos os produtos elementares com sinal de  $A$ , isto é:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

O determinante de uma submatriz quadrada é chamado **menor de  $A$**  e o determinante de uma submatriz principal de  $A$  é chamado **menor principal de  $A$** .

**Alterações no determinante de uma matriz (através de operações elementares nas linhas da matriz)**

- Se  $B$  for obtida de  $A$  trocando duas linhas, então  $\det(B) = -\det(A)$ ;
- Se  $B$  for obtida de  $A$  multiplicando uma linha por um escalar  $\alpha$ , então  $\det(B) = \alpha \det(A)$ ;
- Se  $B$  for obtida de  $A$  somando a uma linha outra linha multiplicada por um escalar, então  $\det(B) = \det(A)$ .

### Propriedades do determinante

Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ . Então:

- Se  $A$  é diagonal ou triangular,  $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ ;
- $\det(A) = \det(A^T)$ ;
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ ;

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ;
- $\det(A) = 0$  se e só se  $\text{car}(A) < n$ ;
- Para  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ ;
- Se  $A$  é invertível,  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ .

### Teorema de Laplace

Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ . O **menor**  $(i, j)$  da matriz  $A$ ,  $\det A(i, j)$  é o determinante da matriz que se obtém de  $A$  retirando-lhe a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Chama-se **complemento algébrico** ou **co-factor** de  $a_{ij}$  a  $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ .

**Teorema 1.2.7** (*Teorema de Laplace*) *Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ . Então:*

1. Se  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{lj} \hat{A}_{lj}$ .
2. Se  $c \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ic} \hat{A}_{ic}$ .

Este teorema estabelece que o determinante pode ser obtido efectuando a soma do produto dos elementos de uma linha ou coluna pelos respectivos complementos algébricos, reduzindo o cálculo do determinante de ordem  $n$  para o cálculo de determinantes de ordem  $n - 1$ .

### Cálculo da matriz inversa usando determinantes

Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ . Chama-se **matriz dos complementos algébricos** de  $A$  a

$$\hat{A} = \left[ \hat{A}_{ij} \right]$$

e chama-se **matriz adjunta de  $A$**  a

$$\text{Adj}(A) = \hat{A}^T.$$

**Teorema 1.2.8** *Seja  $A \in M_n(F)$ . Então  $A \times \text{Adj}(A) = \det(A)I_n$ .*

**Corolário 1.2.9** *Seja  $A \in M_n(F)$ . Então:*

1. *Se  $A$  não é invertível,  $A \cdot \text{Adj}(A)$  é a matriz nula de ordem  $n$ ;*
2. *Se  $A$  é invertível,  $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{Adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$ .*

### **Matriz não singular**

Uma matriz quadrada  $A$  diz-se **não singular** se  $\det(A) \neq 0$ .

**Teorema 1.2.10** *Seja  $A \in M_n(F)$ . Então, as condições seguintes são equivalentes:*

1.  *$A$  é invertível;*
2.  *$A$  é não singular;*
3.  *$\text{car}(A) = n$ ;*
4. *As linhas (colunas) de  $A$  são linearmente independentes;*
5.  *$\det(A) \neq 0$ ;*
6.  *$\dim(\text{Im}(A)) = n$ ;*
7.  *$\dim(\text{Nuc}(A)) = 0$ ;*

8. O sistema de equações lineares  $Ax = b$  é possível determinado;

9. O sistema de equações lineares  $Ax = 0$  tem como solução única  $x = 0$ .

### Matrizes de Permutação

Uma matriz  $P_{n \times n}$  é uma **matriz de permutação** se exactamente uma entrada em cada linha e coluna é 1 e todas as outras entradas são 0. A multiplicação de  $P$  por uma matriz  $A$  realiza uma permutação nas linhas ou colunas de  $A$ , consoante  $P$  esteja à esquerda ou à direita de  $A$ , respectivamente. O produto de duas matrizes de permutação ainda é uma matriz de permutação. Além disso, estas matrizes  $P$  são invertíveis e ortogonais, ou seja,  $P^{-1} = P^T$ .

**Exemplo 1.2.11**  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3$  é uma matriz de permutação. De

facto,  $P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Houve uma troca entre a 1ª e a 2ª linhas.

### 1.2.8 Valores e vectores próprios

Sejam  $A \in M_n(F)$ ,  $x \in F^n$  um vector,  $x \neq 0$ , e  $\lambda \in F$ . Se  $x$  satisfaz a condição  $Ax = \lambda x$ ,  $\lambda$  é chamado **valor próprio** da matriz  $A$  e  $x$  é o **vector próprio** de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ . Prova-se facilmente que se  $x$  é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ , outro vector não nulo e múltiplo de  $x$  é ainda um vector próprio.

### Polinómio Característico e Equação Característica

Os valores próprios de  $A \in M_n(F)$  são os valores de  $\lambda$  para os quais o sistema de equações  $(A - \lambda I_n)x = 0$  tem soluções não nulas. Pelo teorema 1.2.10,  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $A - \lambda I_n$  é uma matriz singular, isto é, se e só se  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Definimos, então, o **polinómio característico** de  $A$  como

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

e a **equação característica** como

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

É ao resolvê-la que obtemos os valores próprios da matriz  $A$ . Observa-se que o grau de  $p_A(\lambda)$  é  $n$ , pelo que a matriz  $A$  tem, no máximo,  $n$  valores próprios e a **multiplicidade algébrica** de um valor próprio  $\lambda$  é a sua multiplicidade como raiz do polinómio característico. Para cada valor próprio  $\lambda$ , os vectores próprios de  $A$  associados a  $\lambda$  obtêm-se determinando as soluções não nulas do sistema de equações  $(A - \lambda I_n)x = 0$ .

### Subespaço próprio associado a um valor próprio

Seja  $A \in M_n(F)$ . Os vectores próprios correspondentes a um mesmo valor próprio  $\lambda$ , juntamente com o vector nulo, constituem um subespaço vectorial de  $F^n$ , chamado **subespaço próprio associado a  $\lambda$** . A dimensão desse subespaço é chamada **multiplicidade geométrica do valor próprio  $\lambda$** . As multiplicidades algébrica e geométrica do mesmo valor próprio podem

coincidir mas, em geral, são diferentes. Notemos que a multiplicidade geométrica é apenas o máximo número de vectores próprios linearmente independentes associados a um valor próprio.

### **Raio Espectral e Espectro**

Seja  $A \in M_n(F)$ . O conjunto de todos os valores próprios  $\lambda \in F$  de  $A$  chama-se **espectro** de  $A$  e é denotado por  $\sigma(A)$ . Se  $F = \mathbb{C}$ , o **raio espectral** de  $A$  define-se como sendo o maior módulo dos valores próprios de  $A$ :

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}.$$

**Exemplo 1.2.12** *Vamos considerar a matriz  $J_n \in M_n(F)$ , em que todas as entradas são 1:*

*O polinómio característico de  $J_n$  é  $p_{J_n}(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1}$ , pelo que os valores próprios de  $J_n$  são 0, com multiplicidade algébrica  $n - 1$ , e  $n$ , com multiplicidade algébrica 1. Neste caso  $\sigma(J_n) = \{0, n\}$  e  $\rho(J_n) = n$ .*

Vamos agora enunciar alguns resultados que relacionam os valores próprios de uma matriz com as suas propriedades, ou que caracterizam os valores próprios de alguns tipos de matrizes referidas anteriormente.

**Teorema 1.2.13**  *$A \in M_n(F)$  é singular se e só se  $0 \in \sigma(A)$ .*

**Teorema 1.2.14** *Se  $A \in M_n(F)$  é uma matriz triangular, então  $\sigma(A)$  é o conjunto das entradas diagonais de  $A$ .*

**Teorema 1.2.15** *Todos os valores próprios de uma matriz nilpotente são zero.*

**Teorema 1.2.16** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Os valores próprios de  $A^T$  são os mesmos de  $A$  e os valores próprios de  $A^*$  são os conjugados dos valores próprios de  $A$ .*

**Teorema 1.2.17** *Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os valores próprios (possivelmente repetidos) de uma matriz  $A \in M_n(F)$ , então:*

1.  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ ;
2.  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

**Teorema 1.2.18** *Seja  $A \in M_n(F)$ . Então:*

1. *Se  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ ,  $\lambda^k$  é valor próprio de  $A^k$ .*
2. *Se  $A$  é não singular, então  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $\lambda^{-1}$  é valor próprio de  $A^{-1}$ .*

**Teorema 1.2.19** *Se  $A, B \in M_n(F)$ , então  $AB$  e  $BA$  têm os mesmos valores próprios.*

## 1.2.9 Matrizes semelhantes

### Semelhança de Matrizes

Uma matriz  $B \in M_n(F)$  é **semelhante** a uma matriz  $A \in M_n(F)$  se existe uma matriz não singular  $S \in M_n(F)$  tal que  $B = S^{-1}AS$ . Observamos que a semelhança é uma relação de equivalência em  $M_n(F)$ , e, por isso, podemos dizer que  $A$  e  $B$  são semelhantes e escrevemos  $A \sim B$ . Esta noção de

semelhança é fulcral em teoria de matrizes, pois matrizes semelhantes partilham importantes propriedades, nomeadamente no que se refere a valores próprios.

**Teorema 1.2.20** *Sejam  $A, B \in M_n(F)$ . Se  $A$  e  $B$  são semelhantes, então  $A$  e  $B$  têm o mesmo polinómio característico.*

**Corolário 1.2.21** *Se  $A, B \in M_n(F)$  e se  $A \sim B$ , então  $A$  e  $B$  têm os mesmos valores próprios.*

**Nota 1.2.22** *Ter os mesmos valores próprios ou o mesmo polinómio característico é condição necessária, mas não suficiente para haver semelhança de matrizes. Vejamos o seguinte exemplo:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*têm ambas como valor próprio apenas o zero, com multiplicidade algébrica 2, mas é óbvio que não são semelhantes, pois a única matriz semelhante à matriz  $B$  é ela própria.*

Matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios. O seguinte teorema estabelece a relação entre os seus vectores próprios:

**Teorema 1.2.23** *Sejam  $A, B \in M_n(F)$ ,  $A \sim B$ , com matriz de semelhança  $S$ . Se  $x \in F^n$  é um vector próprio correspondente a  $\lambda \in \sigma(B)$ , então  $Sx$  é vector próprio de  $A$  correspondente ao valor próprio  $\lambda$ .*

**Demonstração.** Se  $B = S^{-1}AS$  e se  $Bx = \lambda x$ , então  $(S^{-1}AS)x = \lambda x$ , isto é,

$$ASx = S\lambda x \iff ASx = \lambda Sx.$$

Como  $S$  é não singular e  $x \neq 0$ , então  $Sx \neq 0$  e  $Sx$  é vector próprio de  $A$  associado a  $\lambda$ . ■

**Teorema 1.2.24** *Se  $B \in M_n(F)$  é semelhante a  $A \in M_n(F)$ , então  $\text{car}(B) = \text{car}(A)$ .*

**Teorema 1.2.25** *Sejam  $A, B, C, D \in M_n(F)$ . Se  $A \sim B$  pela matriz de semelhança  $S$  e  $C \sim D$  pela mesma matriz de semelhança  $S$ , então*

$$A + C \sim B + D.$$

**Teorema 1.2.26** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então:*

1.  $A$  é semelhante a  $A^T$ ;
2.  $A^*A$  é semelhante a  $AA^*$ ;
3.  $\overline{AA}$  é semelhante a  $A\overline{A}$ .

**Teorema 1.2.27** *Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é semelhante a  $A^*$  ou a  $\overline{A}$ , se e só se é semelhante a uma matriz real.*

**Teorema 1.2.28** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Se  $P$  é uma matriz invertível complexa tal que  $P^{-1}AP = B$ , então existe uma matriz real invertível,  $Q$ , tal que  $Q^{-1}AQ = B$ .*

### Alguns tipos especiais de matrizes sob semelhança

Há três tipos de matrizes quadradas que têm estruturas simples sob semelhança: idempotentes, nilpotentes e de involução. As idempotentes e as nilpotentes já foram definidas anteriormente, mas vamos relembrar essas noções e também introduzir a de matriz de involução. Seja  $A \in M_n(F)$ .

Então  $A$  é

- matriz **idempotente** ou projecção:  $A^2 = A$ ;
- matriz **nilpotente**:  $A^k = 0$ ;
- matriz de **involução**:  $A^2 = I_n$ .

**Teorema 1.2.29** *Seja  $A \in M_n(F)$ . Então:*

1.  *$A$  é idempotente se e só se  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal da forma  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ;*
2.  *$A$  é nilpotente se e só se todos os valores próprios de  $A$  são zero;*
3.  *$A$  é de involução se e só se  $A$  é semelhante a uma matriz diagonal da forma  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ .*

**Nota 1.2.30** *Se  $A$  é uma matriz idempotente, do teorema anterior concluímos que:*

1. *Os valores próprios de  $A$  são 0 ou 1;*
2.  *$\text{tr}(A) = \text{car}(A)$ .*

### 1.2.10 Diagonalização de matrizes

Se uma matriz  $A \in M_n(F)$  é semelhante a uma matriz diagonal, dizemos que  $A$  é **diagonalizável**. Como matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios e os valores próprios de uma matriz diagonal são as suas entradas diagonais, então, se  $A$  é diagonalizável, as entradas diagonais de qualquer matriz diagonal semelhante a  $A$  são os valores próprios de  $A$ . Ainda, como matrizes semelhantes têm a mesma característica e a característica de uma matriz diagonal é o número das suas entradas diagonais não nulas, a característica de uma matriz diagonalizável é o número dos seus valores próprios não nulos (contando as suas multiplicidades algébricas). Vamos, então, estudar com algum detalhe a caracterização das matrizes diagonalizáveis.

**Teorema 1.2.31**  *$A \in M_n(F)$  é diagonalizável se e só se, em  $F^n$ , há um conjunto linearmente independente de  $n$  vectores, cada um deles vector próprio de  $A$ .*

**Teorema 1.2.32** *Suponhamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são valores próprios (todos distintos) de  $A \in M_n(F)$  e suponhamos que  $x_i$  é um vector próprio associado a  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Então  $\{x_1, \dots, x_k\}$  é um conjunto linearmente independente.*

**Teorema 1.2.33** *Uma matriz  $A \in M_n(F)$  é diagonalizável se e só se a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios é  $n$ .*

**Corolário 1.2.34** *Se  $A \in M_n(F)$  tem  $n$  valores próprios distintos, então  $A$  é diagonalizável.*

**Teorema 1.2.35** *Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é simétrica, então  $A$  é diagonalizável.*

## 1.3 Grafos

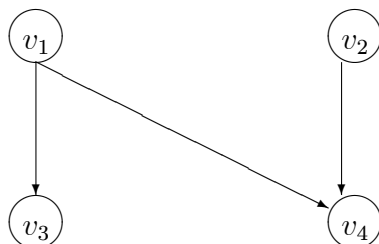
Nesta secção apresentam-se sucintamente e sem muitos formalismos algumas definições básicas em teoria de grafos.

### 1.3.1 Noção de grafo

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma estrutura matemática constituída por 2 conjuntos,  $V$  e  $E$ . Ao conjunto  $V$  chama-se o conjunto dos **vértices** e ao conjunto  $E$  conjunto das **arestas**. Cada aresta tem um conjunto de 1 ou 2 vértices a ela associados. Há dois tipos de Grafos:

- Grafo **Orientado ou Dirigido**, quando as arestas têm um sentido definido, isto é, há um vértice inicial ou de partida, e um vértice final, ou de chegada; neste caso podemos identificar  $E$  com um subconjunto de  $V \times V$ .
- Grafo **Não Orientado**, quando as arestas não têm qualquer sentido; neste caso cada aresta pode ser identificada com um conjunto  $\{a, b\}$  em que  $a, b \in V$ .

Os grafos podem ser representados esquematicamente, como se vê na figura seguinte:



### 1.3.2 Definições em grafos

Apresentamos de seguida uma listagem de noções comuns em grafos:

**Arestas múltiplas** - Duas ou mais arestas que têm o mesmo conjunto de vértices associados.

**Laço** - Aresta que une um vértice a ele próprio.

**Grafo Trivial** - Grafo com 1 vértice e sem arestas.

**Grafo Nulo** - Grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são vazios.

**Grafo Simples** - Grafo que não tem laços nem arestas múltiplas.

**Vértices Adjacentes** - Vértices que estão unidos por uma aresta (pelo menos).

**Arestas Adjacentes** - São arestas que têm 1 vértice em comum.

**Grau de um vértice** - Número de arestas que entram ou saem desse vértice.

**Grafo Regular** - Grafo não orientado em que todos os vértices têm o mesmo grau.

**Grafo Completo** - Grafo no qual há sempre uma aresta que une dois vértices do grafo. Um grafo não orientado completo com  $n$  vértices é denominado  $K_n$ .

**Grafo Bipartido** - Grafo cujo conjunto de vértices  $V$  pode ser particionado em 2 subconjuntos  $U$  e  $W$ , tais que cada aresta do grafo une um vértice de  $U$  a um vértice de  $W$ , não unindo qualquer par de vértices pertencentes ao mesmo subconjunto.

**Grafo Bipartido Completo ( $K_{n,m}$ )** - Grafo simples bipartido tal que to-

dos os vértices de um subconjunto estão ligados aos vértices do outro subconjunto.

**Grafo Estrela** ( $K_{1,n}$ ) - Grafo bipartido em que um dos conjuntos  $U$  ou  $V$  tem cardinal 1 e o único vértice desse conjunto está unido a todos os outros.

**Caminho** - Sucessão de arestas que une dois vértices diferentes,  $x_i$  e  $x_j$ , tais que cada aresta começa onde a anterior acaba. O número de arestas de um caminho determina o seu **comprimento**.

**Circuito** - Caminho que começa e acaba no mesmo vértice.

**Caminho Elementar** - Caminho ou circuito que tem todos os vértices distintos. Um circuito elementar que contenha todos os vértices de um grafo não orientado, chama-se **Circuito de Hamilton**.

**Caminho Simples** - Caminho ou circuito que tem todas as arestas distintas. Um circuito simples que contenha todas as arestas de um grafo não orientado chama-se **Circuito de Euler**.

**Grafo Conexo** - Grafo onde, entre quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$ , há um caminho. (Se o grafo é orientado, diz-se **fortemente conexo**).

**Árvore** - Grafo não orientado conexo sem circuitos.

**Matriz de Adjacência** - Matriz  $A = [a_{ij}]$  de ordem  $n$  associada a um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $\#V = n$  e  $\#E = m$ , definida por:

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se existe uma aresta entre } x_i \text{ e } x_j \\ a_{ij} = 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Se um grafo não é orientado, esta matriz é sempre simétrica.

# Capítulo 2

## Matrizes

### Estudo complementar

#### 2.1 Matrizes ortogonais e unitárias

Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é **ortogonal** se

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

Uma matriz  $U \in M_n(\mathbb{C})$  é **unitária** se

$$U^* U = U U^* = I_n.$$

**Nota 2.1.1** *As matrizes ortogonais são unitárias, pelo que, o que se segue se aplica, com as devidas adaptações, também a este tipo de matrizes.*

As matrizes ortogonais e unitárias desempenham um papel muito importante no estudo de matrizes reais e complexas. Essa importância pode ser

perceptível através das inúmeras propriedades que estas matrizes gozam e das quais algumas são agora apresentadas.

### Propriedades das matrizes unitárias

Sejam  $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ , unitárias. Então:

1.  $U^T$  é unitária;
2.  $UV$  é unitária;
3.  $|\det U| = 1$ ;
4. Se  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana,  $\|Ux\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$ ;
5.  $|\lambda| = 1, \forall \lambda$  valor próprio de  $U$ ;
6.  $U = W \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) W^*$ , onde  $W$  é uma matriz unitária;
7. As colunas de  $U$  formam uma base ortogonal para  $\mathbb{C}^n$ , relativamente ao produto interno euclidiano;
8.  $\text{adj}(U) = (\det U)U^{-1} = (\det U)U^*$ .

**Demonstração.** Todas estas propriedades são fáceis de demonstrar. A título de exemplo demonstramos as propriedades 4 e 5:

$$4. \|Ux\| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, U^*Ux)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|.$$

5. Se  $x$  for um vector próprio unitário correspondente ao valor próprio  $\lambda$ , e, usando a propriedade 4., temos  $|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ux\| = \|x\| = 1$ . ■

**Teorema 2.1.2** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$  com todos os valores próprios iguais a 1, em módulo. Então  $A$  é unitária se para qualquer  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|Ax\| \leq \|x\|$ .*

**Teorema 2.1.3** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , matrizes ortogonais. Se  $B$  não tem valores próprios repetidos e se  $BA = AB^T$ , então  $A$  é uma matriz de involução.*

**Teorema 2.1.4** *Seja  $U$  uma matriz simétrica unitária, isto é,  $U^T = U$  e  $U^* = U^{-1}$ . Então existe uma matriz complexa  $S$  que satisfaz as condições seguintes:*

1.  $S^2 = U$ ;
2.  $S$  é unitária;
3.  $S$  é simétrica;
4.  $S$  comuta com todas as matrizes que comutam com  $U$ .

Isto quer dizer que toda a matriz simétrica unitária tem uma raiz quadrada simétrica unitária que comuta com qualquer matriz que comute com a primeira.

**Teorema 2.1.5** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Se  $A = UBU^*$  para alguma matriz unitária  $U$ , então existe uma matriz real ortogonal  $Q$  tal que  $A = QBQ^T$ .*

Isto quer dizer que se duas matrizes reais são unitariamente semelhantes, então são ortogonalmente semelhantes.

**Demonstração.** Como  $A$  e  $B$  são reais,  $A = \overline{A}$ ,  $B = \overline{B}$ ,  $A^* = A^T$  e  $B^* = B^T$ .

Além disso,  $U^* = U^{-1}$ ,  $U^* = \overline{U^T}$ , e  $\overline{U^T} = U^T$ . Temos que

$$\begin{aligned} UBU^* &= A \iff \\ &\iff (\overline{UBU^*}) = A \\ &\iff \overline{U}BU^T = A. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} UBU^* &= \overline{U}BU^T \\ &\Rightarrow U^TUB = BU^TU. \end{aligned}$$

Daqui conclui-se que a matriz  $U^TU$ , que é simétrica unitária, comuta com a matriz  $B$ . Pelo teorema anterior,  $U^TU$  tem uma raiz quadrada simétrica, unitária  $S$  tal que  $U^TU = S^2$ , que comuta também com  $B$ :  $SB = BS$ .

Definimos  $Q = US^{-1}$ .

$Q$  é produto de duas matrizes unitárias, logo também é unitária. Vamos mostrar que  $Q$  é ortogonal:

$$Q^TQ = (US^{-1})^T(US^{-1}) = SU^TUS^{-1} = I_n.$$

$Q$  é real porque

$$Q^T = Q^{-1} = Q^* \implies Q = \overline{Q}.$$

Então temos que:

- $S$  e  $B$  comutam;
- $S$  é unitária;

- $Q$  é real e ortogonal;

Então

$$\begin{aligned} A &= UBU^* = (US^{-1})(SB)U^* = Q(BS)U^* = QB(S^{-1})^*U^* \\ &= QB(US)^* = QBQ^* = QBQ^T. \end{aligned}$$

■

## 2.2 Matrizes em blocos

Uma matriz  $A \in M_n(F)$  pode ser particionada em submatrizes  $A_{ij}$ , em que cada submatriz  $A_{ii}$  é quadrada de ordem  $t_i$  e cada  $A_{ij}, i \neq j$ , é de tipo  $t_i \times t_j$ , obtendo-se **uma matriz em blocos**:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & & & \\ A_{h1} & A_{h2} & \cdots & A_{hk} \end{bmatrix}$$

Quando uma matriz em blocos  $A$  tem todos os blocos não diagonais (os blocos  $A_{ij}$ , com  $i \neq j$ ) nulos diz-se que  $A$  é **soma directa** de  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ .

Particionar matrizes em blocos pode ser útil, como se pode ver nos exemplos seguintes:

### Exemplos 2.2.1

1. Seja  $A$  uma matriz em blocos, quadrada e complexa:  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , onde  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes quadradas da mesma ordem. Então:

- Se  $A_{11}$  for invertível,  $\det(A) = \det(A_{11})(\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}))$ ;
- Se  $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$ ,  $\det(A) = \det(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$ .

2. Sejam  $A, B \in M_n(F)$  matrizes em blocos,  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,

$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ , em que  $A_{11}$  e  $B_{11}$  são da mesma ordem. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Matrizes semidefinidas positivas

Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , chama-se **semidefinida positiva** ( $A \succeq 0$ ) se  $x^*Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$ . Chama-se **definida positiva** ( $A \succ 0$ ) se  $x^*Ax > 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$ .

**Teorema 2.3.1** Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , então

$$A \succeq 0 \implies \det(A) \geq 0 \quad e \quad A \succ 0 \implies \det(A) > 0.$$

**Teorema 2.3.2**  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é semidefinida positiva se e só se existe uma matriz unitária  $U$  tal que

$$A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U,$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são números reais não negativos.

**Teorema 2.3.3** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então:*

- *$A$  é definida positiva se e só se o determinante de cada submatriz principal de  $A$  é positivo;*
- *$A$  é semidefinida positiva se e só se todo o determinante de cada submatriz principal de  $A$  é não negativo.*

**Teorema 2.3.4** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  *$A$  é semidefinida positiva;*
2.  *$A = B^*B$  para alguma matriz  $B$ ;*
3.  *$A = C^*C$  para alguma matriz triangular superior  $C$ ;*
4.  *$A = D^*D$  para alguma matriz triangular superior  $D$  com entradas diagonais não negativas;*
5.  *$A = P^* \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$  para alguma matriz invertível  $P$  e onde  $r = \text{car}(A)$ .*

Sabemos que qualquer número não negativo tem uma raiz quadrada não negativa. Pode-se estabelecer algo análogo para matrizes semidefinidas positivas:

**Teorema 2.3.5** *Para qualquer matriz  $A \succeq 0$ , existe uma única matriz  $B \succeq 0$  tal que  $B^2 = A$ . Esta matriz  $B$  é chamada **raiz quadrada** de  $A$  e é denotada por  $A^{\frac{1}{2}}$ .*

Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  matrizes hermíticas (isto é,  $A^* = A$ ). Se  $A - B \succeq 0$ , escrevemos  $A \succeq B$ . Esta relação é uma **relação de ordem parcial**, isto é:

- $A \succeq A, \forall A$ ;
- $A \succeq B \wedge B \succeq A \implies A = B$ ;
- $A \succeq B \wedge B \succeq C \implies A \succeq C$ .

**Nota 2.3.6** Como  $A \succeq 0 \iff x^*Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$ , temos

$$A \succeq B \iff x^*Ax \geq x^*Bx, \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

**Teorema 2.3.7** Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , matrizes hermíticas tais que  $A \succeq 0$  e  $B \succeq 0$ . Então:

- $A + B \succeq B$ ;
- $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \succeq 0$ ;
- $tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$ ;
- Os valores próprios de  $AB$  são todos não negativos e  $AB \succeq 0$  se e só se  $AB = BA$ .

## 2.4 Outros produtos de matrizes

Além do produto usual de matrizes, podem-se definir outros produtos.

### Produto de Kronecker

O **produto de Kronecker**, também chamado produto directo ou produto tensorial, é definido para duas matrizes  $A_{m \times n}$  e  $B_{s \times t}$ , pela matriz  $A \otimes B_{(ms) \times (nt)}$  :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2.4.1** Em  $M_{n \times 1}(F)$ , sendo

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix},$$

tem-se:

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1v_1 & \dots & u_1v_n & \dots & u_nv_1 & \dots & u_nv_n \end{bmatrix}.$$

### Teorema 2.4.2 (Propriedades do Produto de Kronecker)

Para matrizes  $A, B, C, D$  :

1.  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$  (desde que os produtos sejam possíveis);
2.  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$  (se  $A$  e  $B$  forem não singulares);
3. Se  $A, B$  são matrizes complexas,  $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ ;
4. Se  $A, B$  são matrizes complexas,  $A \otimes B$  é unitária se  $A$  e  $B$  o forem.

**Teorema 2.4.3** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordens  $m$  e  $n$  respectivamente, com valores próprios  $\lambda_i$  e  $\mu_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , respectivamente.

Então os valores próprios de  $A \otimes B$  são  $\lambda_i \mu_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  e os valores próprios de  $A \otimes I_n + I_m \otimes B$  são  $\lambda_i + \mu_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Teorema 2.4.4** *Sejam  $A \succeq 0$  e  $B \succeq 0$ . Então  $A \otimes B \succeq 0$ .*

### Produto de Hadamard

O **produto de Hadamard**, também chamado **produto de Schur**, é definido para duas matrizes  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , por

$$A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]_{m \times n}.$$

**Exemplo 2.4.5**  $u \circ v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_n v_n \end{bmatrix}$ .

**Teorema 2.4.6 (Teorema de Schur)** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ . Então:*

- $A \succeq 0$ ,  $B \succeq 0 \implies A \circ B \succeq 0$ ;
- $A \succ 0$ ,  $B \succ 0 \implies A \circ B \succ 0$ .

**Teorema 2.4.7** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $A \succeq 0$  e  $B \succeq 0$ . Então:*

- $A^2 \circ B^2 \succeq (A \circ B)^2$ ;
- $A^{-1} \circ B^{-1} \succeq (A \circ B)^{-1}$ , (se  $A$  e  $B$  forem não singulares);
- $A \circ A^{-1} \succeq I_n$ , (se  $A$  for não singular).

## 2.5 Matrizes hermíticas

A definição de matriz hermítica foi apresentada no capítulo anterior. Vamos agora ver algumas caracterizações e propriedades destas matrizes.

**Teorema 2.5.1** *Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é hermítica, então  $A$  apenas admite valores próprios reais.*

**Teorema 2.5.2**  *$A \in M_n(\mathbb{C})$  é hermítica se e só se existe uma matriz unitária  $U$  tal que  $A = U^* \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U$ , onde os  $\lambda_i$  são números reais.*

**Nota 2.5.3** *Destes teoremas concluímos que qualquer matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  hermítica tem  $n$  valores próprios reais (contando as multiplicidades). Vamos, então, designar cada valor próprio da matriz hermítica  $A$  por  $\lambda_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e considerá-los ordenados por ordem decrescente:*

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A).$$

**Teorema 2.5.4** *Para  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $A$  é hermítica;
2.  $x^* Ax \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{C}^n$ ;
3.  $A^2 = A^* A$ ;
4.  $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^* A)$ .

### Produto de matrizes hermíticas

O produto de duas matrizes hermíticas não é, em geral, uma matriz hermítica. De facto, o produto de duas matrizes hermíticas é hermítico se e só se as matrizes comutam. No entanto, notamos que o traço do produto de duas matrizes hermíticas é sempre real, apesar do produto poder ser ou não hermítico:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A^*B^*) = \operatorname{tr}(BA)^* = \operatorname{tr}(\overline{BA}) = \operatorname{tr}(\overline{AB}), \text{ logo } \operatorname{tr}(AB) \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 2.5.5** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  matrizes hermíticas. Então*

$$\operatorname{tr}(AB)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2B^2).$$

*A igualdade ocorre se e só se  $A$  e  $B$  comutam.*

**Teorema 2.5.6**  *$A \in M_n(\mathbb{C})$  é produto de duas matrizes hermíticas se e só se  $A$  é semelhante a  $A^*$ .*

**Teorema 2.5.7** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  matrizes hermíticas. Então*

$$A \succeq B \implies \lambda_i(A) \geq \lambda_i(B), i = 1, \dots, n.$$

**Teorema 2.5.8** *Sejam  $A, B \in M_n$  matrizes hermíticas. Então temos:*

1.  $\lambda_i(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_1(B)$ ;
2. *Se  $A, B \succeq 0$ ,  $\lambda_i(A)\lambda_n(B) \leq \lambda_i(AB) \leq \lambda_i(A)\lambda_1(B)$ ;*
3. *Se  $A, B \succeq 0$ ,  $a_{ii}\lambda_n(B) \leq \lambda_i(A \circ B) \leq a_{ii}\lambda_1(B)$ .*

## 2.6 Valores singulares

Os **valores singulares** de uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  são  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ , as raízes quadradas positivas dos valores próprios não nulos de  $A^*A$ .

**Teorema 2.6.1** *Sejam  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  matrizes complexas. Então:*

$$\sigma_i(A) + \sigma_n(B) \leq \sigma_i(A + B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_1(B)$$

$$\text{e } \sigma_i(A)\sigma_n(B) \leq \sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\sigma_1(B).$$

**Teorema 2.6.2 (Decomposição em valores singulares)** *Seja  $A_{m \times n}$  com valores singulares não nulos  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ . Então existem matrizes unitárias  $U \in M_m(\mathbb{C})$  e  $V \in M_n(\mathbb{C})$  tais que*

$$A = U \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V,$$

onde  $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ . Temos ainda  $\text{car}(A) = r$ .

## 2.7 Matrizes normais

Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é uma **matriz normal** se comuta com a sua transconjugada:  $AA^* = A^*A$ .

**Teorema 2.7.1** *Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ , com valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .*

*Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A é normal;*

2.  $A$  é unitariamente diagonalizável, isto é, existe uma matriz unitária  $U$  tal que  $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ;
3. Existe um polinómio  $p(x)$  tal que  $A^* = p(A)$ ;
4. Existe um conjunto de vectores próprios de  $A$  que formam uma base ortonormal para  $\mathbb{C}^n$ ;
5. Todos os vectores próprios de  $A$  são vectores próprios de  $A^*$ ;
6.  $A = B + iC$  para algumas matrizes  $B$  e  $C$  hermíticas e  $BC = CB$ ;
7.  $\text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1, j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ ;
8.  $\text{tr}(AA^*)^2 = \text{tr}((A^*)^2A^2)$ ;
9. Os valores singulares de  $A$  são  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ ;
10. Os valores próprios de  $A + A^*$  são  $\lambda_1 + \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_n + \bar{\lambda}_n$ ;
11.  $\|Ax\| = \|A^*x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$ ;
12.  $A^* = AU$  ( $U$  unitária);
13.  $A^* = VA$  ( $V$  unitária);
14.  $A$  comuta com  $A + A^*$ ;
15.  $A$  comuta com  $A - A^*$ ;
16.  $A + A^*$  comuta com  $A - A^*$ ;

17.  $A$  comuta com  $A^*A$ ;
18.  $A$  comuta com  $AA^* - A^*A$ ;
19.  $A^*B = BA^*$  quando  $AB = BA$ ;
20.  $A^*A - AA^*$  é semidefinida positiva.

**Nota 2.7.2** Matrizes com entradas 0 e 1, são habitualmente referidas como *matrizes (0,1)*.

**Teorema 2.7.3** Seja  $A$  uma matriz  $(0,1)$  de ordem  $n$ . Se

$$AA^T = tI_n + J_n$$

para algum inteiro positivo  $t$ , então  $A$  é uma matriz normal.

**Teorema 2.7.4** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $(0,1)$  de ordem  $n$ , tais que

$$AB = J_n - I_n.$$

Então  $AB = BA$ .

**Teorema 2.7.5 (Desigualdade de Schur)** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz quadrada complexa de ordem  $n$  com valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Então

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i=1, j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

A igualdade ocorre se e só se  $A$  é normal.

## 2.8 Normas matriciais

Introduzimos alguns conceitos sobre normas matriciais, os quais são necessários para a secção seguinte. No Capítulo 1 foram vistas as normas vectoriais. Como  $M_n(\mathbb{C})$  é um espaço vectorial, esses conceitos vão aplicar-se também a normas matriciais. Vamos considerar apenas espaços vectoriais reais ou complexos e, por isso, nesta secção, referimo-nos apenas a  $M_n$  para designar o espaço das matrizes complexas de ordem  $n$ .

### Definição de Norma Matricial

Chamamos a uma função  $\|\cdot\| : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$  uma **norma matricial** se, para  $\forall A, B \in M_n$ , satisfaz os 5 axiomas seguintes:

1.  $\|A\| \geq 0$ ;
2.  $\|A\| = 0$  se e só se  $A = 0$ ;
3.  $\|cA\| = |c| \|A\|$ , para qualquer  $c \in \mathbb{C}$ ;
4.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
5.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Nota 2.8.1** Como  $\|A^2\| = \|AA\| \leq \|A\| \|A\| = \|A\|^2$  para qualquer norma matricial, temos  $\|A\| \geq 1$  para qualquer matriz não nula  $A$  para a qual  $A^2 = A$ . Em particular,  $\|I_n\| \geq 1$  para qualquer norma matricial. Se  $A$  é invertível, então  $I_n = AA^{-1}$  e temos  $\|A^{-1}\| \geq \frac{\|I_n\|}{\|A\|}$  para qualquer norma matricial  $\|\cdot\|$ .

Algumas das normas vectoriais são normas matriciais quando aplicadas ao espaço vectorial  $M_n$ , mas outras não o são. Vamos ver alguns exemplos, notando que apenas é necessário verificar o axioma 5, pois os outros são da definição de norma vectorial.

### Exemplos 2.8.2

1. A norma  $l_1$  definida para  $A \in M_n$  por  $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ , é uma norma matricial:

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| \\ &\leq \sum_{i,j,k,m=1}^n |a_{ik} b_{mj}| \\ &= \left( \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| \right) \left( \sum_{j,m=1}^n |b_{mj}| \right) \\ &= \|A\|_1 \|B\|_1. \end{aligned}$$

2. A norma Euclidiana definida para  $A \in M_n$  por  $\|A\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  é uma norma matricial:

$$\begin{aligned} (\|AB\|_2)^2 &= \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left[ \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{m=1}^n |b_{mj}|^2 \right) \right] \\ &= \left( \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{m,j=1}^n |b_{mj}|^2 \right) \\ &= (\|A\|_2)^2 (\|B\|_2)^2. \end{aligned}$$

Esta norma, quando aplicada a matrizes, é por vezes chamada **norma de Frobenius**, **norma de Schur** ou **norma de Hilbert-Schmidt**.

3. A norma  $l_\infty$  definida para  $A \in M_n$  por  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ , é uma norma vectorial em  $M_n$ , mas não é uma norma matricial:

Consideremos, por exemplo, a matriz  $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$ . Para esta matriz calculamos facilmente que  $J_2^2 = 2J_2$  e  $\|J_2\|_\infty = 1$ . Daqui deduz-se que

$$\|J_2^2\|_\infty = \|2J_2\|_\infty = 2\|J_2\|_\infty = 2$$

Então não se verifica  $\|J^2\|_\infty \leq \|J\|_\infty^2$  e, por isso,  $\|\cdot\|_\infty$  não é uma norma matricial.

Contudo, se definirmos  $\|A\| = n\|A\|_\infty$ ,  $A \in M_n$ , então temos

$$\begin{aligned} \|AB\| &= n \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \\ &\leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| \\ &\leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty. \end{aligned}$$

Concluimos que, neste caso, é necessária uma pequena alteração à norma vectorial  $\|\cdot\|_\infty$  para criar uma norma matricial.

## Norma matricial induzida

Embora nem todas as normas vectoriais definam automaticamente normas matriciais, qualquer norma vectorial permite a definição de uma norma ma-

tricial. Se  $\|\cdot\|$  é uma norma vectorial em  $\mathbb{C}^n$ , define-se  $\|\cdot\|$  em  $M_n$  por

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

**Teorema 2.8.3**

1. A função  $\|\cdot\|$  definida atrás é uma norma matricial em  $M_n$ ;
2.  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ , para toda a matrix  $A \in M_n$  e todo  $x \in \mathbb{C}^n$ ;
3.  $\|I_n\| = 1$ .

**Demonstração.** Para demonstrar a primeira parte do teorema, é necessário demonstrar os cinco axiomas da definição de norma matricial:

1.  $\|A\|$  é o máximo de uma função não negativa;
2.  $Ax = 0, \forall x$ , quando  $A = 0$ ;
3.  $\|cA\| = \max \|cAx\| = \max |c| \|Ax\| = |c| \max \|Ax\| = |c| \|A\|$ ;
4.  $\|A + B\| = \max \|(A + B)x\| = \max \|Ax + Bx\| \leq \max (\|Ax\| + \|Bx\|)$   
 $\leq \max \|Ax\| + \max \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$ ;
5.  $\|AB\| = \max \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \max \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$   
 $= \|A\| \|B\|$ .

Para a 2ª parte da demonstração, observamos que

$$\left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|,$$

devido à definição desta norma como o máximo. Por homogeneidade com a norma vectorial, obtemos

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

o que se mantém quando  $x = 0$ .

Finalmente,

$$\|I_n\| = \max_{\|x\|=1} \|I_n x\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

■

A norma matricial  $\|\cdot\|$  definida atrás é chamada **norma matricial induzida pela norma vectorial**  $\|\cdot\|$ .

Vamos agora estudar alguns exemplos de normas matriciais que são induzidas por normas  $l_p$  familiares, mas que podem ser calculadas independentemente da definição. Em todos os exemplos que se seguem, vamos considerar

$$A = [a_{ij}] \in M_n.$$

#### Exemplos 2.8.4

1. *Define-se a norma matricial  $\|\cdot\|_c$  em  $M_n$  como o máximo das somas dos módulos dos elementos das colunas, isto é  $\|A\|_c = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ .*

*-Vamos mostrar que a norma  $\|\cdot\|_c$  é a norma induzida pela norma vectorial  $l_1$ , e, por isso, é uma norma matricial.*

*Seja  $A \in M_n$  em forma de colunas:  $A = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$ . Então*

$$\|A\|_c = \max_{1 \leq i \leq n} \|c_i\|_1.$$

Se  $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ , então:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \|x_1c_1 + \dots + x_nc_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i c_i\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \|c_i\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \left( \max_{1 \leq k \leq n} \|c_k\|_1 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \|A\|_c = \|x\|_1 \|A\|_c. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \|A\|_c.$$

Por outro lado, sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canónica de  $\mathbb{C}^n$ , se escolhermos  $x = e_k$ , então, para  $\forall k = 1, \dots, n$ , temos

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \|1a_k\|_1 = \|a_k\|_1,$$

e então,

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \max_{1 \leq k \leq n} \|a_k\|_1 = \|A\|_c.$$

Provadas ambas as desigualdades, concluímos que

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \|A\|_c.$$

2. Define-se a norma matricial  $\|\cdot\|_l$  em  $M_n$  como o máximo das somas dos módulos dos elementos das linhas, isto é  $\|A\|_l = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

Vamos ver que a norma  $\|\cdot\|_l$  é a norma induzida pela norma vectorial  $l_\infty$  e, por isso, é uma norma matricial:

O argumento para esta demonstração é semelhante ao anterior; calculamos:

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_\infty = \|A\|_l \|x\|_\infty.\end{aligned}$$

É claro que se  $A = 0$ , não temos nada a provar. Vamos por isso assumir que  $A \neq 0$ :

Suponhamos então que a linha  $k$  de  $A$  é não nula e vamos definir o vector  $z = [z_i] \in \mathbb{C}^n$  por:

$$\begin{cases} z_i = \frac{\overline{a_{ki}}}{a_{ki}}, & \text{se } a_{ki} \neq 0 \\ z_i = 1, & \text{se } a_{ki} = 0 \end{cases}.$$

Então,  $\|z\|_\infty = 1$ .

$$a_{kj}z_j = |a_{kj}|, \forall j = 1, \dots, n$$

e

$$\begin{aligned}\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty &\geq \|Az\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j \right| \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}z_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \|A\|_l.\end{aligned}$$

Podemos, então, concluir a igualdade.

**Teorema 2.8.5** Se  $\|\cdot\|$  é uma norma matricial em  $M_n$ , e se  $S \in M_n$  é não singular, então  $\|A\|_S = \|S^{-1}AS\|$ ,  $\forall A \in M_n$ , é também uma norma matricial.

**Demonstração.** Os primeiros 4 axiomas são triviais. O 5º axioma mostra-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\|AB\|_S &= \|S^{-1}ABS\| = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\| \\ &\leq \|S^{-1}AS\| \|S^{-1}BS\| = \|A\|_S \|B\|_S.\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.8.6** *Se  $\|\cdot\|$  é qualquer norma matricial e se  $A \in M_n$ , então*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

**Demonstração.** Observemos que se  $\lambda$  é qualquer valor próprio de  $A$ , então

$$|\lambda| \leq \rho(A).$$

Além disso, existe pelo menos um valor próprio  $\lambda$ , para o qual

$$|\lambda| = \rho(A).$$

Se  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  e se  $|\lambda| = \rho(A)$ , consideremos a matriz  $X \in M_n$ , cujas colunas são iguais ao vector próprio  $x$  e observemos que  $AX = \lambda X$ .

Se  $\|\cdot\|$  for qualquer norma matricial, temos

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$$

e por isso

$$|\lambda| \|X\| \leq \|A\| \|X\| \iff \rho(A) \leq \|A\|.$$

■

Embora a função raio espectral não seja por si uma norma vectorial ou matricial em  $M_n$  para cada matriz  $A \in M_n$  fixa, é a melhor aproximação, por defeito, para todas as normas matriciais de  $A$  :

**Teorema 2.8.7** *Seja  $A \in M_n$  e  $\epsilon > 0$  dado. Então existe uma norma matricial  $\|\cdot\|$  tal que*

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

### Matrizes convergentes

As matrizes  $A \in M_n$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$  (isto é, todas as entradas de  $A^k$  tendem para zero quando  $k \rightarrow \infty$ ) chamam-se **convergentes** e são importantes para muitas aplicações, por exemplo em processos iterativos.

O resultado do teorema que se segue é muito útil e uma ferramenta necessária para abordar esta questão:

**Teorema 2.8.8** *Seja  $A \in M_n$  uma dada matriz. Se existe uma norma matricial  $\|\cdot\|$  tal que  $\|A\| < 1$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ .*

**Demonstração.** Se  $\|A\| < 1$ , então  $\|A^k\| \leq \|A\|^k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Isto quer dizer que  $A^k \rightarrow 0$  em relação à norma  $\|\cdot\|$ , mas como todas as normas vectoriais no espaço  $M_n$  de dimensão  $n^2$  são equivalentes, também se pode tratar do caso em que  $A^k \rightarrow 0$  em relação à norma vectorial  $\|\cdot\|_\infty$ . ■

**Teorema 2.8.9** *Seja  $A \in M_n$ . Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$  se e só se  $\rho(A) < 1$ .*

**Demonstração.** ( $\implies$ ) Se  $A^k \longrightarrow 0$  e se  $x \neq 0$  é um vector tal que  $Ax = \lambda x$ , então  $A^k x = \lambda^k x \longrightarrow 0$  apenas se  $|\lambda| < 1$ . Como esta desigualdade tem que se manter para todos os valores próprios de  $A$ , concluimos que  $\rho(A) < 1$ .

( $\impliedby$ ) Por outro lado, se  $\rho(A) < 1$ , então, pelo teorema 2.8.8, existe uma norma matricial  $\|\cdot\|$  tal que  $\|A\| < 1$ . Então  $A^k \longrightarrow 0$  quando  $k \longrightarrow \infty$ . ■

**Corolário 2.8.10** *Seja  $\|\cdot\|$  uma norma matricial em  $M_n$ . Então,  $\forall A \in M_n$ ,*

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

**Corolário 2.8.11** *Uma matriz  $A \in M_n$  é invertível se existe uma norma matricial  $\|\cdot\|$  tal que  $\|I_n - A\| < 1$ . Se esta condição é satisfeita, então*

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I_n - A)^k.$$

**Corolário 2.8.12** *Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n$ , e suponhamos que*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \forall i = 1, \dots, n$$

*(a matriz é diagonal dominante). Então,  $A$  é invertível.*

## 2.9 Matrizes não negativas

Nesta secção são estudadas matrizes não negativas, sendo referidas propriedades como o seu comportamento assintótico, diagonalização e características dos valores próprios, nomeadamente do seu raio espectral. O

exemplo seguinte concretiza uma aplicação prática de algumas propriedades neste tipo de matrizes.

### Exemplo introdutório [8]

Suponhamos que existem  $n \geq 2$  cidades  $c_1, \dots, c_n$  onde a migração se faz do seguinte modo:

Simultaneamente, às 8h00 de todos os dias, uma fracção constante  $a_{ij}$  da população da cidade  $j$  vai para a cidade  $i$ , para todos os  $i \neq j$ . A fracção  $a_{jj}$  da população da cidade  $j$  fica na cidade  $j$ . Então, denotando a população da cidade  $i$  no dia  $m$  por  $p_i^{(m)}$ , temos a relação:

$$p_i^{(m+1)} = a_{i1}p_1^{(m)} + \dots + a_{in}p_n^{(m)}$$

onde  $a_{i1}p_1^{(m)}$  é a parte da população que vai da cidade 1 para a cidade  $i$  e  $a_{in}p_n^{(m)}$  é a parte da população que vai da cidade  $n$  para a cidade  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $m = 0, 1, \dots$

Se denotarmos a matriz  $n \times n$  dos coeficientes de migração por  $A = [a_{ij}]$  e o vector distribuição da população no dia  $m$  por  $p^{(m)} = [p_i^{(m)}]$ , então temos:

$$p^{(m+1)} = Ap^{(m)} = A^2p^{(m-1)} = \dots = A^{m+1}p^{(0)}$$

$m = 0, 1, \dots$  e  $p^{(0)}$  é a população inicial.

Como os coeficientes  $a_{ij}$  representam fracções da população, temos

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \text{ para cada } j = 1, \dots, n.$$

Antes de fazer planos a longo prazo para os serviços da cidade, o governo quer

saber como é que a população total estará distribuída num futuro longínquo, isto é, quer analisar o comportamento assintótico de  $p^{(m)}$  (para  $m$  grande).

Consideremos

$$p = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)}$$

a população inicial total.

Mas como  $p^{(m)} = A^m p^{(0)}$  e  $p$  é fixo, basta estudar o comportamento assintótico da matriz  $A^m$ .

Vamos então analisar o caso  $n = 2$  (considerando 2 cidades, que é o mínimo possível para esta questão):

Fracção total da população da cidade 1 = 1 (100%);

Fracção total da população da cidade 2 = 1 (100%).

Logo,

$$a_{11} + a_{21} = a_{12} + a_{22} = 1.$$

A fracção total inicial na cidade 1 (a que é da cidade 1 e vai lá ficar:  $a_{11}$ , e a que vai migrar para a cidade 2:  $a_{21}$ ) é igual à fracção total inicial da cidade 2 (a que é da cidade 2 e vai lá ficar:  $a_{22}$ , e a que vai migrar para a cidade 1:  $a_{12}$ ).

Vamos denominar as fracções da população que vão migrar, de outro modo, já que são estas que vão trazer alterações:

$a_{21} = \alpha$  (mudança da cidade 1 para a cidade 2);

$a_{12} = \beta$  (mudança da cidade 2 para a cidade 1).

Então temos:

$$a_{11} + \alpha = 1 \iff a_{11} = 1 - \alpha;$$

$$a_{22} + \beta = 1 \iff a_{22} = 1 - \beta.$$

Portanto, neste caso, a matriz  $A$  dos coeficientes de migração é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Queremos analisar o comportamento assintótico de  $A$ , isto é, estamos interessados em estudar  $A^m$  para  $m$  muito grande:

Se  $A$  for diagonalizável, poderemos obter  $A^m$  explicitamente. Vamos então analisar esta possibilidade, calculando os valores e vectores próprios de  $A$ .

Por cálculos directos obtém-se

$$\det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda + \alpha + \beta - 1)$$

e, portanto, os valores próprios de  $A$  são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$ . Como  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ , temos

$$|1 - \alpha - \beta| = |\lambda_2| \leq 1.$$

Então sabemos que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \implies \lambda_1 = 1 = \rho(A).$$

Notamos que, excepto no caso em que  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\lambda_1 = \rho(A)$  é um valor próprio simples de  $A$ .

Então, se  $\alpha + \beta \neq 0$ , os vectores próprios de  $A$  são (novamente efectuando cálculos directos):

Para  $\lambda_1 = 1$  temos  $X = k \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Para  $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$  temos  $X = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Daqui concluímos que  $A$  é diagonalizável e podemos considerar a matriz diagonalizante

$$S = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix},$$

tal que  $A = SDS^{-1}$ , em que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  não são ambos 1, então  $|\lambda_2| = |1 - \alpha - \beta| < 1$  e, por isso,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_2^m = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} A^m &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{bmatrix}^m S^{-1} \underset{1 - \alpha - \beta \rightarrow 0}{=} \\ &= S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{-(\alpha + \beta)} \begin{bmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & \beta \end{bmatrix}^T = \\
&= \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então, a distribuição da população em equilíbrio é

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} A^m p^{(0)} \\
&= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta(p_1^{(0)} + p_2^{(0)}) \\ \alpha(p_1^{(0)} + p_2^{(0)}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mas  $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} = 1$ , logo, a última expressão fica  $\frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$  que é inteiramente independente da distribuição inicial.

Casos exceção:

1)  $\alpha = \beta = 0$

$$A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lim_{m \rightarrow \infty} A^m = I_2^m = I_2 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} p^{(m)} = I_2 p^{(0)} = p^{(0)} \text{ e}$$

aí a distribuição em equilíbrio é dependente da população inicial;

2)  $\alpha = \beta = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ o que quer dizer que as duas cidades trocam as suas populações totais em dias sucessivos.}$$

### Matriz não negativa e matriz positiva

Uma matriz  $A$  com elementos reais,  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , é **não negativa** ( $A \geq 0$ ) se todos os elementos de  $A$  são não negativos ( $a_{ij} \geq 0$ ), e é **positiva** ( $A > 0$ ) se todos os elementos de  $A$  são positivos ( $a_{ij} > 0$ ).

Vamos agora apresentar algumas definições e proposições básicas sobre este assunto. Para as desigualdades  $<$  e  $\leq$ , as definições são análogas:

#### Definições:

Sejam  $B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então temos:

1.  $A \geq B$  se  $A - B \geq 0$ ;
2.  $A > B$  se  $A - B > 0$ ;
3. Módulo de  $A$ :  $|A| = [|a_{ij}|]$ .

#### Proposições:

1.  $|A| \geq 0, \forall A$ , e  $|A| = 0$  se e só se  $A = 0$ ;
2.  $|aA| = |a| |A|, \forall a \in \mathbb{C}$ ;
3.  $|A + B| \leq |A| + |B|$ ;
4. Se  $A \geq 0, B \geq 0$  e  $a, b \geq 0$ , então  $aA + bB \geq 0$ ;
5. Se  $A \geq B$  e  $C \geq D$ , então  $A + C \geq B + D$ ;
6. Se  $A \geq B$  e  $B \geq C$ , então  $A \geq C$ .

Para  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$  e  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , temos ainda:

1.  $|Ax| \leq |A| |x|$ ;
2.  $|AB| \leq |A| |B|$ ;
3. Para  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|A^m| \leq |A|^m$ ;
4. Se  $0 \leq A \leq B$  e  $0 \leq C \leq D$  então  $0 \leq AC \leq BD$ ;
5. Se  $0 \leq A \leq B$  então, para  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq A^m \leq B^m$ ;
6. Se  $A \geq 0$  então  $A^m \geq 0$  e se  $A > 0$  então, para  $m \in \mathbb{N}$ ,  $A^m > 0$ ;
7. Se  $A > 0, x \geq 0$  e  $x \neq 0$  então  $Ax > 0$ ;
8. Se  $|A| \leq |B|$  então  $\|A\|_2 \leq \|B\|_2$ ;
9.  $\|A\|_2 = \|(|A|)\|_2$ .

**Teorema 2.9.1** *Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  e  $|A| \leq B$ . Então*

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

**Demonstração.** Para uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , sabemos pelo corolário 2.8.10, que o raio espectral  $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ , para qualquer norma. Para  $m \in \mathbb{N}$  temos  $|A^m| \leq |A|^m$  e sabemos que  $|A| \leq B$  por hipótese. Então, para  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |A^m| &\leq |A|^m \leq B^m \Rightarrow \\ \Rightarrow \|A^m\|_2 &\leq \||A|^m\|_2 \leq \|B^m\|_2 \\ \Rightarrow \|A^m\|_2^{\frac{1}{m}} &\leq \||A|^m\|_2^{\frac{1}{m}} \leq \|B^m\|_2^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Se  $m \rightarrow \infty$ , sabemos, pela definição dada no início da demonstração, que estas desigualdades coincidem com  $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ . ■

**Corolário 2.9.2** *Seja  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Se*

$$0 \leq A \leq B \implies \rho(A) \leq \rho(B) \text{ e se } 0 \leq A < B \implies \rho(A) < \rho(B).$$

**Corolário 2.9.3** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Se  $A \geq 0$  e  $\tilde{A}$  é uma submatriz principal de  $A$ , então  $\rho(\tilde{A}) < \rho(A)$ . Em particular,  $\max_{i=1, \dots, n} a_{ii} \leq \rho(A)$ .*

**Teorema 2.9.4** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $A \geq 0$ . Se a soma das linhas de  $A$  é constante, então  $\rho(A) = \|A\|_\infty$ . Se a soma das colunas de  $A$  é constante, então  $\rho(A) = \|A\|_1$ .*

**Demonstração.** Sabemos que  $\rho(A) \leq \|A\|$  ( $\|A\|_\infty = \max \|A\|$ ). Mas se a soma das linhas é constante,  $x = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$  é um vector próprio com valor próprio  $\|A\|_\infty$  e por isso  $\rho(A) = \|A\|_\infty$ . Analogamente obtemos a demonstração da segunda parte do teorema, aplicando os mesmos argumentos a  $A^T$ . ■

**Teorema 2.9.5** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $A \geq 0$ . Então*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

(onde a primeira expressão representa o mínimo da soma dos elementos de cada linha e a segunda, o máximo dessa mesma soma) e

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

(onde a primeira expressão representa o mínimo da soma dos elementos de cada coluna e a segunda, o máximo dessa mesma soma).

**Demonstração.** Seja  $\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}$  e vamos construir uma nova matriz  $B$  tal que  $0 \leq B \leq A$  e  $\sum_{j=1}^n b_{ij} = \alpha, \forall i$  (isto é, a soma dos elementos de cada linha de  $B$  é constante e igual a  $\alpha$ ). Se, por exemplo,  $\alpha = 0$  então  $B = 0$ . Se  $\alpha > 0$ , podemos ter  $b_{ij} = \alpha a_{ij} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$ . Sabemos, pelo teorema anterior, que  $\rho(A) = \alpha$  e sabemos que se  $0 \leq B \leq A$ , então

$$\rho(B) < \rho(A) \implies \alpha \leq \rho(A)$$

e a primeira parte da desigualdade está demonstrada. O limite superior da desigualdade, assim como as duas desigualdades seguintes, são demonstradas de modo análogo (as duas últimas, aplicando a soma de linhas a  $A^T$  em vez de aplicar a  $A$ ). ■

## 2.10 Matrizes redutíveis

### Definição de matriz redutível

Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$  é **redutível** se o conjunto  $1, \dots, n$  pode ser dividido em dois conjuntos complementares (isto é, sem índices comuns),  $i_1, \dots, i_\mu, j_1, \dots, j_\nu$  ( $\mu + \nu = n$ ) tais que  $a_{i_\alpha j_\beta} = 0$  ( $\alpha = 1, \dots, \mu, \beta = 1, \dots, \nu$ ). Caso contrário,  $A$  é **irredutível**. Em termos matriciais esta definição pode ser apresentada da seguinte forma: Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é **redutível** se existe uma matriz de permutação  $P$ , tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

onde  $B$  e  $D$  são matrizes quadradas de ordem mínima 1. As matrizes de ordem 1 não nulas são irredutíveis.

**Teorema 2.10.1** *Qualquer matriz  $A \in M_n(F)$  é semelhante, por permutação, a uma matriz da forma*

$$A' = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,k} \\ 0 & A_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k,k} \end{bmatrix}$$

no qual cada bloco  $A_{i,i}$  é quadrado e irredutível ou é 0.

**Teorema 2.10.2** *Toda a matriz de permutação redutível é semelhante por permutação a uma soma directa de matrizes de permutação irredutíveis.*

**Nota 2.10.3** Há uma propriedade comum a todas as matrizes irredutíveis: qualquer matriz irredutível de ordem maior que 1 não pode ter uma linha ou coluna nula.

**Teorema 2.10.4** Se  $A \geq 0$  é uma matriz irredutível de ordem  $n$ , então

$$(I_n + A)^{n-1} > 0.$$

**Demonstração.** Para provar que  $(I_n + A)^{n-1} > 0$ , é suficiente mostrar que, para qualquer vector  $y > 0$ ,  $(I_n + A)^{n-1}y > 0$  se mantém verdadeiro. Isto verificar-se-á se, considerando  $y > 0$ , o vector  $z = (I_n + A)y$  tem sempre menos coordenadas nulas que  $y$ . Partimos do facto que

$$z = I_n y + Ay = y + Ay \text{ e } Ay \geq 0,$$

o que implica que, para coordenadas positivas de  $y$ , temos coordenadas positivas de  $z$ . Então, vamos, por absurdo, supor que  $y$  e  $z$  têm as mesmas coordenadas nulas:

Vamos, por isso, assumir que as colunas  $y$  e  $z$  têm a forma:

$$y = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } z = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo  $u, v > 0$ , com o mesmo número de coordenadas.

Colocando  $A$  na forma de blocos  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ , em que a ordem de  $A_{11}$

é o número de coordenadas de  $u$  e  $v$ , temos

$$\begin{aligned} z &= y + Ay = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}u \\ A_{21}u \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u + A_{11}u \\ A_{21}u \end{bmatrix}, \text{ o que implica que } A_{21}u = 0. \end{aligned}$$

Como  $u > 0$ , então  $A_{21} = 0$  e

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \text{ é redutível, o que é uma contradição.}$$

■

### Propriedades espectrais de matrizes não negativas irredutíveis

O Matemático *Perron (1907)* encontrou uma propriedade muito importante para o espectro de matrizes positivas e enunciou o seguinte teorema:

**Teorema 2.10.5 (Teorema de Perron)** *Se  $A$  é uma matriz quadrada positiva de ordem  $n$ ,  $A$  tem um valor próprio positivo real  $\lambda$  com as seguintes propriedades:*

- $\lambda$  é raiz simples da equação característica;
- $\lambda$  é valor próprio associado a um vector próprio positivo  $x$ ;
- Se  $\mu$  é outro valor próprio de  $A$ , então  $|\mu| < \lambda$ .

Uma matriz positiva é um caso especial de uma matriz irredutível não negativa. *Frobenius* generalizou o Teorema de Perron, para propriedades espectrais de matrizes irredutíveis não negativas:

**Teorema 2.10.6 (Teorema de Frobenius)** *Uma matriz irredutível não negativa,  $A = [a_{ij}] \in M_n$ , tem sempre um valor próprio real e positivo  $\lambda$ , que é uma raiz simples da equação característica. O módulo de todos os outros valores próprios não excede  $\lambda$ . Ao valor próprio  $\lambda$  corresponde um vector próprio com coordenadas positivas.*

Além disto, se  $A$  tem  $h$  valores próprios  $\lambda_0 = \lambda, \mu_1, \dots, \mu_{h-1}$ , de módulos  $\lambda$ , então estes números são todos diferentes e raízes da equação  $\mu^n - \lambda^n = 0$ . Se  $h > 1$ , então  $A$  é semelhante por permutação a uma matriz na seguinte forma cíclica:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_{h-1h} \\ A_{h1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

As propriedades espectrais de matrizes irredutíveis não negativas já estudadas, não são preservadas quando passamos para matrizes redutíveis. Mas, como todas as matrizes não negativas podem ser representadas como o limite de uma sequência de matrizes positivas irredutíveis,  $A_m$ :

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m \quad (A_m > 0, \quad m = 1, 2, \dots),$$

quer dizer que algumas das propriedades se mantêm, de uma forma mais fraca, nas matrizes redutíveis.

**Teorema 2.10.7** *Uma matriz não negativa  $A = [a_{ij}] \in M_n$  tem sempre um valor próprio não negativo  $\lambda$ , tal que o módulo de todos os outros valores próprios de  $A$  não excede  $\lambda$ . A este valor próprio máximo corresponde um vector próprio não negativo,  $y$  :*

$$Ay = \lambda y \quad (y \geq 0, y \neq 0).$$

Para terminar esta secção vamos apenas dar mais uma definição, que só é aplicada em matrizes não negativas:

### **Matriz Primitiva**

Uma matriz não negativa  $A$  é chamada **primitiva** se e só se alguma potência de  $A$  é positiva:

$$A^p > 0, \quad p \geq 0.$$

## Capítulo 3

# Algumas noções teóricas sobre padrões

Neste capítulo vamos fornecer as bases específicas para trabalhar em teoria qualitativa de matrizes, nomeadamente a definição de padrão, padrão de sinais e as noções de requerer ou admitir uma dada propriedade. São também introduzidas algumas noções sobre grafos aplicadas à teoria qualitativa.

### 3.1 Padrões e padrões de sinais

#### Noções introdutórias

##### 3.1.1 Padrão arbitrário ou matriz padrão

Uma matriz **padrão** de tipo  $m \times n$  é uma matriz  $\mathcal{P}_{m \times n}$  com entradas pertencentes ao conjunto  $\{*, 0\}$ .

Dizemos que uma matriz real  $A$  **tem padrão**  $\mathcal{P}_{m \times n}$ , se:

- $A$  é uma matriz de tipo  $m \times n$  (do mesmo tipo de  $\mathcal{P}$ );
- As entradas não nulas de  $A$  estão no lugar dos  $*$  de  $\mathcal{P}$ ;
- As entradas nulas de  $A$  estão no lugar dos  $0$  de  $\mathcal{P}$ .

### Classe de um padrão

A cada padrão  $\mathcal{P}$  associamos a sua **classe**,  $Q(\mathcal{P})$ , a qual inclui todas as matrizes  $A$ , que têm padrão  $\mathcal{P}$ , isto é, todas as matrizes do mesmo tipo que  $\mathcal{P}$ , e onde

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ se } p_{ij} = 0 \\ a_{ij} \neq 0, \text{ se } p_{ij} = * \end{cases}.$$

**Exemplo 3.1.1** Consideremos o padrão  $\mathcal{P}_{3 \times 3}$

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar várias matrizes pertencentes à classe do padrão  $\mathcal{P}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 4 & 5 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P})$$

ou ainda,

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}).$$

### Padrão Subordinado

Dizemos que um padrão  $\hat{\mathcal{P}} = [\hat{p}_{ij}]_{m \times n}$  é **subordinado** a um padrão

$\mathcal{P} = [p_{ij}]_{m \times n}$  se

$$p_{ij} = 0 \implies \hat{p}_{ij} = 0.$$

**Exemplo 3.1.2** *O padrão*

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

é subordinado ao padrão

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

### Padrão Completo

É um padrão só com \*, isto é, sem entradas nulas.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \text{ é o padrão completo de ordem 3.}$$

Qualquer matriz  $3 \times 3$ , totalmente não nula, pertence à classe deste padrão;

por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}).$$

### Padrão Combinatoriamente Simétrico

Dizemos que um padrão  $\mathcal{P}$  é **combinatoriamente simétrico** se  $p_{ji} = *$ , sempre que  $p_{ij} = *$ .

#### Exemplo 3.1.3

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \text{ é um padrão combinatoriamente simétrico.}$$

### 3.1.2 Padrão de sinais ou matriz padrão de sinais

Um **padrão de sinais** ou matriz padrão de sinais de tipo  $m \times n$  é uma matriz  $\mathcal{A}_{m \times n}$ , com entradas pertencentes ao conjunto  $\{0, +, -\}$ .

Dizemos que uma matriz real  $B$  **tem padrão de sinais**  $\mathcal{A}$ , se:

- $B$  é uma matriz de tipo  $m \times n$ ;
- As entradas positivas de  $B$  estão nas entradas  $+$  de  $\mathcal{A}$ ;
- As entradas negativas de  $B$  estão nas entradas  $-$  de  $\mathcal{A}$ ;
- As entradas nulas de  $B$  estão nos  $0$ 's de  $\mathcal{A}$ .

#### Classe de um padrão de sinais

A cada padrão de sinais  $\mathcal{A}$ , associamos a sua **classe**,  $Q(\mathcal{A})$ , a qual inclui todas as matrizes  $B$ , que têm padrão de sinais  $\mathcal{A}$ , isto é, todas as matrizes do mesmo tipo que  $\mathcal{A}$ , e onde, sendo  $\text{sgn}(b_{ij})$  o sinal do elemento  $b_{ij}$ ,

$$\begin{cases} b_{ij} = 0, \text{ se } a_{ij} = 0 \\ \text{sgn}(b_{ij}) = a_{ij}, \text{ se } a_{ij} \neq 0 \end{cases} .$$

**Exemplo 3.1.4** Consideremos o padrão de sinais  $\mathcal{A}_{2 \times 2}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - \\ 0 & - \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar várias matrizes pertencentes à classe do padrão de sinais

$\mathcal{A}$ :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A})$$

ou ainda,

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}).$$

### Padrões de sinais completos

São padrões de sinais sem entradas nulas. Entre estes distinguimos o **padrão completo positivo** (padrão de sinais só com entradas positivas) e o **padrão completo negativo** (padrão de sinais só com entradas negativas):

$$\mathcal{A}^+ = \begin{bmatrix} + & + & \dots & + \\ + & + & \dots & + \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & + & \dots & + \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{A}^- = \begin{bmatrix} - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & \dots & - \end{bmatrix}.$$

**Exemplos 3.1.5**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}_{2 \times 2}^+);$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}_{2 \times 2}^-).$$

Define-se ainda:

**Padrão identidade**  $\mathcal{I}_n^+ = \text{diag}(+, +, \dots, +)$ .

**Determinantes de padrões de sinais**

Muitos dos cálculos com matrizes numéricas admitem generalizações qualitativas. Abordamos aqui a noção de **determinante de um padrão de sinais**. Pode-se calcular o determinante de um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  se o sinal do determinante de qualquer matriz pertencente à classe desse padrão é o mesmo. A esse sinal comum chama-se determinante do padrão de sinais.

Obviamente, o sinal do determinante de uma matriz  $A \in Q(\mathcal{A})$  pode assumir 3 valores distintos:

$$\text{sgn}(\det A) = \begin{cases} +, & \text{se } \det A > 0 \\ -, & \text{se } \det A < 0 \\ 0, & \text{se } \det A = 0 \end{cases} .$$

Através dos seguintes exemplos, vamos ver as possibilidades de valor que pode tomar o determinante de um padrão de sinais. Os determinantes calculam-se seguindo a definição habitual para matrizes, mas efectuando os cálculos com os sinais  $+$ ,  $-$  e  $0$  de acordo com as regras usuais:

### Exemplos 3.1.6

1. Consideremos o padrão de sinais  $\mathcal{A}_1$ :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix}$$

Calculemos  $\det(\mathcal{A}_1)$

$$\det(\mathcal{A}_1) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (++) - (+-) = +.$$

Concluimos que o padrão de sinais  $\mathcal{A}_1$  tem **determinante**  $+$ , o que quer dizer que qualquer matriz pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}_1$  tem determinante com sinal positivo.

2. Consideremos o padrão de sinais  $\mathcal{A}_2$ :

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}$$

Calculemos  $\det(\mathcal{A}_2)$  :

$$\det(\mathcal{A}_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -.$$

Concluimos que o padrão de sinais  $\mathcal{A}_2$  tem determinante  $-$ , o que quer dizer que qualquer matriz pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}_2$  tem determinante com sinal negativo.

3. O padrão de sinais

$$\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} + & + \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem, claramente, determinante nulo, o que quer dizer que qualquer matriz pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}_3$  tem determinante 0.

4. Consideremos, finalmente, o padrão completo positivo  $\mathcal{A}_4$ :

$$\mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

Neste caso

$$\det(\mathcal{A}_4) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (+) - (+),$$

que não permite concluir sobre o sinal dos determinantes das matrizes pertencentes à sua classe. Diz-se então que

$$\det(\mathcal{A}_4) = \#.$$

Realmente, se considerarmos as três matrizes seguintes, todas pertencentes à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}_4$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Apercebemo-nos que

$$\det(A) = -2 < 0; \quad \det(B) = 12 > 0; \quad \det(C) = 0.$$

**Nota 3.1.7** O sinal  $\#$ , que acabámos de introduzir, representa uma **soma qualitativa ambígua**, e é usado quando as somas dão um resultado ambíguo.

### 3.1.3 Noção de requerer/admitir uma propriedade

A noção de requerer/admitir uma propriedade é muito importante para o estudo das propriedades das matrizes padrão ou padrão de sinais, já que

estamos a tratar de questões qualitativas da teoria matricial e, por isso, bastante genéricas. Torna-se então necessário fazer a distinção entre uma propriedade que é comum a todas as matrizes pertencentes à classe de um dado padrão e uma propriedade que apenas algumas matrizes dessa classe verificam.

Consideremos então uma propriedade  $p$ :

1. Dizemos que um padrão  $\mathcal{P}$  (ou um padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ) **requer** a propriedade  $p$ , se todas as matrizes pertencentes à classe desse padrão (ou padrão de sinais) têm essa propriedade  $p$ ;
2. Dizemos que um padrão  $\mathcal{P}$  (ou um padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ) **admite** a propriedade  $p$ , se alguma matriz pertencente à classe desse padrão (ou padrão de sinais) tem essa propriedade  $p$ .

**Exemplo 3.1.8** *Consideremos o padrão de sinais*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ - & - & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

1.  $\mathcal{A}$  **requer** a propriedade de ter determinante negativo, pois

$$\det(\mathcal{A}) = [(+).(-) - (-).(-)] = [(-) - (+)] = -,$$

*o que quer dizer, como vimos atrás, que qualquer matriz pertencente à classe deste padrão de sinais tem sempre determinante com sinal ne-*

gativo. Seja, por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}).$$

É claro que o determinante de  $A$  é negativo e, de facto,  $\det(A) = -7$ .

2.  $\mathcal{A}$  **admite** a propriedade da simetria, mas **não a requer**. Vejamos um exemplo: A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A})$$

e

$$B^T = B$$

No entanto, a matriz  $A$  do exemplo anterior não é simétrica, já que

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq A.$$

**Exemplo 3.1.9** Um padrão de sinais como o a seguir apresentado **admite** a propriedade da involução ( $A^2 = A$ ); no entanto **não requer** essa propriedade:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & 0 \\ + & 0 \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos a matriz  $A \in Q(\mathcal{A})$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

verifica-se que  $A$  é de involução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

No entanto, se escolhermos uma outra matriz  $B$ , também da mesma classe,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que

$$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto,  $B^2 \neq B$ .

Por vezes as noções de requerer e admitir propriedades envolvem mais do que um padrão:

**Exemplo 3.1.10** *Os seguintes padrões de sinais, diagonais de ordem 3, requerem a propriedade da comutatividade:*

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix}$$

já que

$$\forall A_1 \in Q(\mathcal{A}_1), \forall A_2 \in Q(\mathcal{A}_2), A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Consideremos agora os padrões

$$\mathcal{P}_c = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{P}_d = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}_c) \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}_d),$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = BA,$$

de onde se conclui que  $\mathcal{P}_c$  e  $\mathcal{P}_d$  admitem a propriedade da comutatividade. No entanto não requerem esta propriedade, já que, se considerarmos as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}_c) \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P}_d),$$

e calcularmos os produtos  $CD$  e  $DC$ , obtemos

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} e$$

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix},$$

logo,  $C$  e  $D$  não comutam.

### 3.1.4 Conceitos matriciais em padrões

Para além de conceitos matriciais que necessitam de definições específicas no contexto de padrões, muitos outros conceitos, como irredutibilidade, produto por uma matriz de permutação ou por uma matriz diagonal, soma directa, matrizes em blocos, submatrizes, etc., podem ser generalizados a padrões, ou padrões de sinais, de uma forma não ambígua, pelo que serão utilizados ao longo do resto do trabalho sem serem definidos.

## 3.2 Padrões de sinais - mais algumas noções

Uma vez que a maior parte do nosso estudo vai abranger algumas propriedades específicas em padrões de sinais, há ainda algumas noções necessárias, que vamos agora introduzir, por constituírem ferramentas essenciais à compreensão dos próximos capítulos.

### Subpadrão e Superpadrão de sinais

Um **subpadrão**  $\mathcal{A}_1$  de um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  é um padrão do mesmo tipo de  $\mathcal{A}$  que é obtido a partir de  $\mathcal{A}$ , substituindo algumas das suas entradas não nulas por zeros. Dizemos que, se  $\mathcal{A}_1$  é subpadrão de  $\mathcal{A}$ , então  $\mathcal{A}$  é **superpadrão** de  $\mathcal{A}_1$ .

**Exemplo 3.2.1** *Consideremos os padrões de sinais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_1$ , de ordem 3:*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ + & + & - \\ - & + & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \\ - & + & 0 \end{bmatrix};$$

*Notamos, a partir da observação das entradas em cada padrão, que  $\mathcal{A}_1$  é subpadrão de  $\mathcal{A}$ .*

### Característica mínima de um padrão de sinais $\mathcal{A}$

A **característica mínima** do padrão de sinais  $\mathcal{A}$  é a característica de menor valor, entre todas as características das matrizes pertencentes à classe desse padrão de sinais  $\mathcal{A}$ :

$$\text{car}_{\min}(\mathcal{A}) = \min \{ \text{car} B : B \in Q(\mathcal{A}) \}.$$

**Exemplo 3.2.2** Consideremos o padrão completo positivo de ordem 3:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A \in Q(\mathcal{A})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ tem característica igual a 3;}$$

A matriz  $B \in Q(\mathcal{A})$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ tem característica igual a 2;}$$

Finalmente, se escolhermos a matriz  $C \in Q(\mathcal{A})$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \text{ tem característica igual a 1.}$$

Daqui, concluímos que a  $\text{car}_{\min}(\mathcal{A}) = 1$ .

### 3.2.1 Ciclos e combinações

#### Ciclos simples e compostos

Consideremos  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  um padrão de sinais  $n \times n$ . Um produto não nulo da forma

$$\gamma = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$$

onde o conjunto de índices  $\{i_1, \dots, i_k\}$  consiste em valores distintos, é chamado **ciclo simples de comprimento  $k$**  ou  **$k$ -ciclo simples**.

Um **ciclo composto de comprimento  $k$**  ou um  **$k$ -ciclo composto** é um produto de ciclos simples cujo comprimento total é  $k$  e cujos conjuntos de índices são mutuamente disjuntos, isto é um ciclo  $\gamma$  é um  $k$ -ciclo composto se

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m, \text{ para algum inteiro } m \text{ (} 2 \leq m \leq n \text{),}$$

onde  $\gamma_i$  é um ciclo simples de comprimento  $l_i$ ,  $\sum_{i=1}^m l_i = k$ , e nenhum índice aparece ao mesmo tempo em  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ .

#### Ciclos negativos e positivos

Um ciclo é **negativo** se contém um número ímpar de entradas negativas e nenhuma entrada nula. Um ciclo é **positivo** se contém um número par de entradas negativas e nenhuma entrada nula.

**Exemplos 3.2.3** Consideremos o padrão  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - & - \\ 0 & - & - \\ + & + & - \end{bmatrix}$$

e o ciclo

$$\gamma_1 = a_{12}a_{23}a_{31} = (-)(-)(+) = +.$$

$\gamma_1$  é um ciclo simples, positivo e de comprimento 3.

Consideremos agora o ciclo

$$\gamma_2 = a_{23}a_{32} = (-)(+) = -.$$

Este é um ciclo simples, negativo e de comprimento 2.

Consideremos finalmente o ciclo

$$\gamma_3 = (a_{13}a_{31}) \cdot (a_{22}a_{23}a_{32}) = [(-)(+)] \cdot [(-)(-)(+)] = -.$$

Este é um ciclo composto, negativo e de comprimento 5.

### 3.2.2 Não singularidade de padrões de sinais

Assim como as matrizes numéricas, também na teoria qualitativa podemos falar na questão da singularidade e não singularidade.

#### Padrão de sinais não singular

Um padrão de sinais é **não singular** se requer a propriedade da não singularidade, isto é, se todas as matrizes pertencentes à classe desse padrão forem não singulares. É claro que um padrão de sinais pode não ser não singular mas admitir a propriedade da não singularidade, isto é, existir pelo menos uma matriz na classe desse padrão que é não singular, apesar de outras na mesma classe não o serem.

### Exemplos 3.2.4

1. Observemos o padrão de sinais  $\mathcal{A}_1$  :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix}.$$

Como  $\det(\mathcal{A}_1) = +$ , concluímos que  $\mathcal{A}_1$  requer a propriedade da não singularidade. Neste caso particular podemos calcular

$$\mathcal{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} + & - \\ + & + \end{bmatrix}$$

pois todas as matrizes da classe do padrão  $\mathcal{A}_1$  vão ter inversa, pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}_1^{-1}$ .

2. Observemos agora o padrão de sinais  $\mathcal{A}_2$  :

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ + & - \end{bmatrix}.$$

Vemos que  $\det(\mathcal{A}_2) = 0$ , o que quer dizer que este padrão tem determinante nulo, e por isso  $\mathcal{A}_2$  requer a propriedade da singularidade (claro que qualquer padrão com uma linha ou coluna totalmente nula requer a propriedade da singularidade, isto é, todas as matrizes pertencentes à classe de um padrão desse tipo são singulares).

3. Consideremos o padrão positivo completo  $\mathcal{A}_3$  :

$$\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}.$$

*Este padrão admite a propriedade da não singularidade, mas não a requer. De facto, se escolhermos as matrizes  $A$  e  $B$ , ambas pertencentes à classe deste padrão:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

*temos que*

$$\det(A) = -3 \neq 0 \quad e \quad \det(B) = 0,$$

*o que quer dizer que a matriz  $A$  é não singular, enquanto que a matriz  $B$  é singular.*

### 3.3 Grafos e padrões

A noção de padrão é uma noção claramente combinatória e é fácil relacioná-la com a noção de grafo

#### Grafo orientado de um padrão

O **grafo orientado**  $D(\mathcal{A})$  associado a um padrão (ou padrão de sinais)  $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ , é o grafo orientado (as arestas têm sentido definido) com  $n$  vértices  $1, 2, \dots, n$ , no qual existe uma aresta de  $i$  para  $j$ , se e só se  $a_{ij} \neq 0$ .

#### Padrão de sinais bipartido

Um **padrão de sinais bipartido** é um padrão de sinais cujo grafo é bipartido. Observamos que os padrões de sinais bipartidos têm entradas diagonais nulas e só podem ter ciclos com comprimento par.

### Árvore padrão de sinais

Chamamos a um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  uma **árvore padrão de sinais**, se, para  $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\mathcal{A}$  é:

- Combinatoriamente simétrico, isto é,  $a_{ij} \neq 0$  se e só se  $a_{ji} \neq 0$ ;
- $D(\mathcal{A})$  é fortemente conexo, isto é, existe um caminho entre quaisquer dois vértices;
- Não existem ciclos simples de comprimento superior ou igual a 3 em  $D(\mathcal{A})$ .

## Capítulo 4

# Padrões que admitem determinadas somas de linhas e colunas

*(Johnson, Charles R. e Stanford, David P.: "Patterns that allow given row and column sums", 2000)*

Iniciamos, com esta primeira análise, uma abordagem aos padrões generalizados, tentando responder à seguinte questão:

*"Dado um padrão  $\mathcal{P}_{m \times n}$  e dois vectores  $r$  e  $c \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente, em que condições existe uma matriz real  $A$  pertencente à classe do padrão  $\mathcal{P}$ , cujo vector soma das linhas (vector cujas componentes são o somatório dos elementos da linha respectiva) é  $r$  e o vector soma das colunas (vector cujas coordenadas são o somatório dos elementos da coluna respectiva) é  $c$ ?"*

Temos dois problemas diferentes a considerar:

1. **Problema da Admissão Forte** - Neste caso existe uma matriz real  $A$  pertencente à classe do padrão  $\mathcal{P}$ , cujo vector soma das linhas é  $r$  e o vector soma das colunas é  $c$ . Dizemos que  $\mathcal{P}$  admite fortemente soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ ;
2. **Problema de Admissão Fraca** - Neste caso é um padrão  $\hat{\mathcal{P}}$ , subordinado ao padrão  $\mathcal{P}$ , que admite fortemente soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ .

O estudo deste problema tem várias aplicações, ligadas por exemplo à comutatividade de padrões. De facto

**Proposição 4.0.1** *Se um padrão  $\mathcal{P}$  admite fortemente uma matriz em que a soma das filas (linhas e colunas) é igual, então  $\mathcal{P}$  comuta com o padrão completo (da ordem respectiva, de modo a que seja possível fazer o produto entre as duas matrizes pertencentes às classes do padrão  $\mathcal{P}$  e do padrão completo).*

Esta é uma propriedade muito importante e explica-se com facilidade. Consideremos uma matriz  $A$ , pertencente à classe do padrão  $\mathcal{P}_{n \times n}$ , onde a soma dos elementos em cada linha é igual à soma dos elementos em cada coluna, e consideremos  $J_n$  a matriz em que todas as entradas são 1, que pertence à classe do padrão completo. Então é claro que  $AJ_n = J_nA$ .

**Exemplo 4.0.2** *Consideremos o caso  $2 \times 2$  :*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{P})$$

e

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AJ_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$$

e

$$J_2A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}.$$

Mas como a soma dos elementos das linhas ( $a + b = c + d$ ) é igual à soma dos elementos das colunas ( $a + c = b + d$ ), então  $AJ_2 = J_2A$ .

Para concretizar, consideremos outro exemplo, o qual mostra como um padrão triangular superior completo, de ordem superior ou igual a 3, comuta com o padrão completo da mesma ordem:

**Exemplo 4.0.3** Observemos a matriz triangular superior,  $n \times n$ ,  $n \geq 3$ , da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{n-2}} & - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{n-2}} & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apercebemo-nos, olhando para as linhas e colunas da matriz, que a soma dos elementos em cada linha é igual à soma dos elementos em cada coluna e igual

a 1. Temos, portanto, uma matriz com soma de linhas e soma de colunas constante, que comuta com a matriz  $J_n$ .

Podemos agora particularizar esta matriz  $n \times n$ , escrevendo as matrizes correspondentes, de ordens 3, 4 e 5, as quais pertencem à classe de um padrão que comuta com o padrão completo da mesma ordem:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Antes de iniciarmos o estudo dos dois problemas, é importante observar que uma condição necessária para o padrão  $\mathcal{P}$  admitir (fortemente ou fracamente) soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ , é

$$\sum_{j=1}^m r_j = \sum_{j=1}^n c_j.$$

(É claro que se o padrão for quadrado,  $m = n$ ).

## 4.1 Estudo do problema da admissão fraca

Nesta secção vamos estudar o caso em que um padrão  $\hat{\mathcal{P}}$ , subordinado a  $\mathcal{P}$ , admite fortemente soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ .

Consideremos então  $\mathcal{P}$ , um padrão de tipo  $m \times n$  com  $k$  \*'s. Vamos associar a  $\mathcal{P}$  os seguintes objectos:

### 1. Padrão de Variáveis de $\mathcal{P}$

É o padrão  $\mathcal{X}$  obtido de  $\mathcal{P}$  substituindo os \*'s por variáveis  $x_1, \dots, x_k$ , de tal modo que se  $1 \leq t < k$  e se a variável  $x_t$  aparece na linha  $i$  e na coluna  $j$  de  $\mathcal{X}$ , e se a variável  $x_{t+1}$  aparece na linha  $p$  e na coluna  $q$  de  $\mathcal{X}$ , então também  $p \geq i$  e  $q > j$ . (Isto quer dizer que há uma ordenação crescente dos índices das variáveis  $x_1, \dots, x_k$ ). Vamos considerar no nosso estudo, **as filas de  $\mathcal{X}$** , isto é, consideramos as linhas e as colunas de  $\mathcal{X}$  como elementos de um mesmo conjunto. Temos por isso  $1 \leq i \leq m+n$  filas. Definimos então a fila  $i$  de  $\mathcal{X}$  como: **a linha  $i$  de  $\mathcal{X}$** , se  $1 \leq i \leq m$ , isto é, se  $i$  é mesmo uma linha; **a coluna  $(i-m)$  de  $\mathcal{X}$** , se  $m+1 \leq i \leq m+n$ , isto é, se  $i$  já é uma coluna. Esta definição quer dizer que nas  $m+n$  filas, os primeiros  $m$  elementos são linhas, e os restantes  $n$  são colunas.

### 2. Grafo bipartido do padrão $\mathcal{P}$

É um grafo  $G$  com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$ , que representam as filas de  $\mathcal{X}$  e que contém a aresta  $(v_i, v_j)$  se e só se há uma variável

$x_r$  que aparece em ambas as filas  $i$  e  $j$  de  $\mathcal{X}$  (isto é, na linha  $i$  e na coluna  $j - m$  de  $\mathcal{X}$ ). Se isto acontece, essa aresta denomina-se  $e^{(r)}$  e  $r$  é o índice da variável.

### 3. Matriz de coeficientes do padrão de variáveis de $\mathcal{P}$

É uma matriz  $C$  de ordem  $(m + n) \times k$ , de 0's e 1's, com  $c_{ij} = 1$  se e só se  $x_j$  aparece na fila  $i$  de  $\mathcal{X}$ . Notamos que  $c_{ij} = 1$  se e só se no grafo bipartido de  $\mathcal{P}$ , o vértice  $v_i$  é um ponto terminal da aresta  $e^{(j)}$ .

**Exemplo 4.1.1** *Consideremos o padrão*

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar, para este padrão  $3 \times 5$ , os elementos  $\mathcal{X}$ ,  $G$  e  $C$ :

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 \end{bmatrix}, m = 3, n = 5, k = 8.$$

Para construir  $G$  e  $C$ :

No padrão  $\mathcal{X}$  temos 8 filas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} &\hookrightarrow \text{fila 1 (linha 1);} \\ \begin{bmatrix} x_4 & x_5 & 0 & 0 & x_6 \end{bmatrix} &\hookrightarrow \text{fila 2 (linha 2);} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 \end{bmatrix} &\hookrightarrow \text{fila 3 (linha 3);} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} &\hookrightarrow \text{fila 4 (coluna 4 - 3 = 1);} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_7 \\ x_2 \\ 0 \\ x_8 \\ x_3 \\ x_6 \\ 0 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{fila 5 (coluna 2);} \\ \\ \\ \hookrightarrow \text{fila 6 (coluna 3);} \\ \\ \\ \hookrightarrow \text{fila 7 (coluna 4);} \\ \\ \hookrightarrow \text{fila 8 (coluna 5).} \end{array}
 \end{array}$$

Vamos agora construir o grafo  $G$ . Como temos 8 filas, vamos ter 8 vértices no grafo:  $v_1, v_2, \dots, v_8$ . Como temos 3 linhas, construímos o subconjunto de vértices

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e como temos 5 colunas, vamos construir o segundo subconjunto de vértices

$$V_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

As arestas de  $G$  são:

$e^{(1)} \rightarrow x_1$  está nas filas 1 e 5, logo há uma aresta  $(v_1, v_5)$ ;

$e^{(2)} \rightarrow x_2$  está nas filas 1 e 7, logo há uma aresta  $(v_1, v_7)$ ;

$e^{(3)} \rightarrow x_3$  está nas filas 1 e 8, logo há uma aresta  $(v_1, v_8)$ ;

$e^{(4)} \rightarrow x_4$  está nas filas 2 e 4, logo há uma aresta  $(v_2, v_4)$ ;

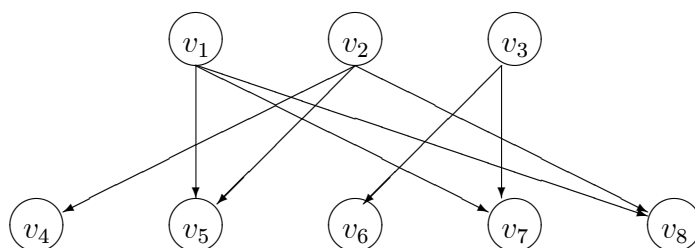
$e^{(5)} \rightarrow x_5$  está nas filas 2 e 5, logo há uma aresta  $(v_2, v_5)$ ;

$e^{(6)} \rightarrow x_6$  está nas filas 2 e 8, logo há uma aresta  $(v_2, v_8)$ ;

$e^{(7)} \rightarrow x_7$  está nas filas 3 e 6, logo há uma aresta  $(v_3, v_6)$ ;

$e^{(8)} \rightarrow x_8$  está nas filas 3 e 7, logo há uma aresta  $(v_3, v_7)$ .

Este grafo pode-se representar na seguinte forma:



Falta-nos apenas construir a matriz  $C = [c_{ij}]$  que é definida por  $c_{ij} = 1$  se e só se  $x_j$  aparece na fila  $i$  de  $\mathcal{X}$ , e  $c_{ij} = 0$  nos outros casos.

Na linha 1 temos 1's nas posições 1, 2 e 3, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_1, x_2, x_3$ .

Na linha 2 temos 1's nas posições 4, 5 e 6, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_4, x_5, x_6$ .

Na linha 3 temos 1's nas posições 7 e 8, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_7, x_8$ .

Na linha 4 temos 1 na posição 4, porque temos, nesta fila, a variável  $x_4$ .

Na linha 5 temos 1's nas posições 1 e 5, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_1, x_5$ .

Na linha 6 temos 1 na posição 7, porque temos, nesta fila, a variável  $x_7$ .

Na linha 7 temos 1's nas posições 2 e 8, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_2, x_8$ .

Finalmente, na linha 8 temos 1's nas posições 3 e 6, porque temos, nesta fila, as variáveis  $x_3, x_6$ .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos então voltar ao problema em estudo, e para isso consideramos as somas dos elementos de cada fila da matriz  $\mathcal{X}$ . Se  $b = (b_1, \dots, b_8)$  é qualquer vector em  $\mathbb{R}^8$ , a resposta ao problema consiste em encontrar soluções para o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = b_2 \\ x_7 + x_8 = b_3 \\ x_4 = b_4 \\ x_1 + x_5 = b_5 \\ x_7 = b_6 \\ x_2 + x_8 = b_7 \\ x_3 + x_6 = b_8 \end{array} \right. .$$

Mas, este sistema não é mais do que o sistema de equações  $Cx = b$ , com  $x = (x_1, \dots, x_8)$ .

No caso geral, se  $b$  é qualquer vector em  $\mathbb{R}^{m+n}$ , então qualquer solução da equação  $Cx = b$  encontra valores para os \*'s em  $\mathcal{P}$ , de modo a produzir uma

matriz com o padrão subordinado a  $\mathcal{P}$ , cujas somas de linhas são  $b_1, \dots, b_m$  e somas de colunas são  $b_{m+1}, \dots, b_{m+n}$ .

Se a solução for totalmente não nula, a matriz resultante vai mesmo ter padrão  $\mathcal{P}$  e não  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Necessitamos agora de mais uma definição:

### **Padrão Conexo**

Um padrão  $\mathcal{P}$  é **conexo** quando o seu grafo bipartido  $G$  é conexo.

De um modo geral, podemos considerar sempre os padrões como sendo conexos, porque se um padrão  $\mathcal{P}$  não é conexo, é equivalente a uma soma directa de subpadrões conexos e aí resolvemos o problema substituindo a condição necessária por condições necessárias correspondentes a estas somas dos subpadrões de  $\mathcal{P}$ .

**Proposição 4.1.2** *Se  $\mathcal{P}$  é conexo, a característica da matriz de coeficientes  $C$  é  $m+n-1$  e qualquer linha de  $C$  pode ser retirada de forma que a matriz resultante, de ordem  $(m+n-1) \times k$  tenha esse número de linhas linearmente independentes.*

**Proposição 4.1.3** *Seja (de acordo com a proposição 4.1.2)  $\hat{C}$ , a matriz obtida de  $C$  quando retiramos a última linha. Suponhamos que  $r \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$  e que  $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n c_j$ . Se*

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} r \\ c^T \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} r \\ \hat{c}^T \end{bmatrix},$$

então, para  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $Cx = b$  se e só se  $\hat{C}x = \hat{b}$ .

**Demonstração.**  $(\Rightarrow) Cx = b \Rightarrow \hat{C}x = \hat{b}$  é trivial, já que para passarmos da primeira equação para a segunda, só temos que retirar uma linha (a última, por hipótese) e por isso só retiramos uma condição.

$(\Leftarrow) \hat{C}x = \hat{b} \Rightarrow Cx = b$  é verdade, porque segundo a proposição 4.1.2, qualquer linha pode ser retirada, mantendo-se a característica. ■

**Teorema 4.1.4** *Se  $\mathcal{P}$  é um padrão conexo  $m \times n$ ,  $r \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ , com  $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n c_j$ , então  $\mathcal{P}$  admite fracamente soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ .*

**Demonstração.** Realmente, se  $\mathcal{P}$  for um padrão conexo onde o número de  $*$ 's é  $k$ , pela proposição 4.1.2, a característica de  $\hat{C}$  é  $m + n - 1$ . Então existe um vector  $x \in \mathbb{R}^k$ , tal que  $\hat{C}x = \hat{b}$ , e pela proposição 4.1.3,  $\hat{C}x = \hat{b} \Rightarrow Cx = b$ , logo as entradas de  $x$  preenchem os valores para os  $*$ 's, podendo alguns ser 0, e por isso se trata de um problema de admissão fraca. ■

**Corolário 4.1.5** *Se  $\mathcal{P}$  é um padrão conexo quadrado de ordem  $n$ , combinatoriamente simétrico, e se  $r \in \mathbb{R}^n$ , então  $\mathcal{P}$  admite fracamente uma matriz simétrica com soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $r$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema 4.1.4, existe uma matriz  $A_{n \times n}$  cujo padrão  $\hat{\mathcal{P}}$  é subordinado a  $\mathcal{P}$  e tem soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $r$ . A matriz  $\frac{1}{2}(A + A^T)$  tem um padrão subordinado a  $\mathcal{P}$ , e sabemos que é simétrica, logo tem a soma de linhas e colunas pedidas. ■

## 4.2 Estudo do problema da admissão forte

Vamos agora supor que o padrão  $\mathcal{P}$  pode ser particionado em

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & * \\ 0 & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathcal{P}_{11}$  e  $\mathcal{P}_{22}$  são padrões quadrados, o bloco  $*$  contém apenas um  $*$  e as restantes entradas são zero, e o bloco 0 só contém entradas nulas.

Suponhamos agora que  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & B \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  é uma matriz da classe do padrão  $\mathcal{P}$ , com soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ . Observamos que:

- A soma das entradas de  $A$  nas linhas que passam pelo bloco  $A_{11}$  é a soma das entradas de  $A_{11}$  com uma única entrada não nula do bloco  $B$  (o  $*$ );
- A soma das entradas de  $A$  nas colunas que passam pelo bloco  $A_{11}$  é simplesmente a soma das entradas de  $A_{11}$ , já que o bloco inferior esquerdo só tem zeros.

Destas duas observações, concluímos que estas somas têm valores diferentes.

### Generalização: Condição de estrela única

Suponhamos que  $\mathcal{P}$  é um padrão  $m \times n$ . Seja  $\alpha \subseteq M = \{1, 2, \dots, m\}$  e  $\beta \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja  $\alpha^c$  o complemento de  $\alpha$  em  $M$  e  $\beta^c$  o complemento de  $\beta$  em  $N$ . Dizemos que  $\mathcal{P}$  satisfaz a **condição de estrela única** (\*) relativamente a  $\alpha$  e  $\beta$ , quando o subpadrão  $\mathcal{X}[\alpha, \beta^c]$  contém exactamente uma variável  $x_i$  e o subpadrão  $\mathcal{X}[\alpha^c, \beta]$  não contém variáveis. Dizemos então

que  $x_i$  é uma **estrela única para  $\alpha$  e  $\beta$** . Então, se  $\mathcal{P}$  admite soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ , e se  $\mathcal{P}$  satisfaz a condição de estrela única em relação a  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $\sum_{j \in \alpha} r_j \neq \sum_{k \in \beta} c_k$ . (A variável  $x_i$  é uma estrela única se e só se a aresta  $e^{(i)}$  é uma **aresta de corte** no grafo  $G$ ). É claro que se  $\alpha = \emptyset$ , a parte esquerda da igualdade é zero, e se  $\beta = \emptyset$ , a parte direita da igualdade é zero.

**Teorema 4.2.1** *Seja  $\mathcal{P}$  um padrão conexo  $m \times n$  com  $k$  \*'s. Seja  $C$  a matriz dos coeficientes de  $\mathcal{P}$ . Então, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $e_i \in RS(C)$  se e só se existe  $\alpha \subseteq M$  e  $\beta \subseteq N$  tal que  $x_i$  é estrela única para  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathcal{P}$ .*

( $e_i$  é o vector de ordem  $i$  da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Teorema 4.2.2** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $1 \leq i \leq n$ . Então*

$$e_i \in RS(A) \text{ se e só se } Au = 0 \Rightarrow u_i = 0.$$

*Além disso, existe  $u \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $Au = 0$  e se  $e_i \notin RS(A)$ , então  $u_i \neq 0$ .*

**Demonstração.** Se  $R$  é a forma de escada reduzida da matriz  $A$ , e considerarmos o conjunto  $\varepsilon = \{i : e_i \text{ é linha de } R\}$ , então

$$e_i \in RS(A) \Leftrightarrow i \in \varepsilon \Leftrightarrow Ru = 0 \Rightarrow u_i = 0 \Leftrightarrow Au = 0 \Rightarrow u_i = 0.$$

Além disso, as variáveis não pivot em  $u$  podem ter valores atribuídos de modo a que  $u_i = 0$  apenas para  $i \in \varepsilon$ . ■

**Teorema 4.2.3** *Seja  $A$  uma matriz real  $m \times n$ . Então as condições seguintes são equivalentes:*

1.  $Ax = 0$  tem uma solução totalmente não nula;
2. Para  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i \notin RS(A)$ ;
3. Cada linha não nula de  $A$  em forma de escada reduzida tem pelo menos duas entradas não nulas;
4. Se  $B$  é obtida de  $A$  por eliminação de uma coluna, então

$$\text{car}(B) = \text{car}(A);$$

5. Para  $1 \leq i \leq n$  há uma solução de  $Ax = 0$ , com  $x_i \neq 0$ .

**Demonstração.** (1  $\Rightarrow$  2) Foi visto no Teorema 4.2.2.

(2  $\Rightarrow$  3) Trivial, por definição dos vectores  $e_i$  (têm só uma entrada não nula e não pertencem a  $RS(A)$ ).

(3  $\Rightarrow$  4) Suponhamos, por hipótese, que cada linha não nula de  $A$  em forma de escada tem pelo menos 2 entradas não nulas, e que  $B$  é a matriz obtida de  $A$  pela eliminação da coluna  $j$ . Vamos chamar  $R$  à forma reduzida de  $A$ , e  $S$  à matriz obtida de  $R$  pela eliminação da coluna  $j$  ( $B$  é equivalente a  $S$  em termos de linhas). Se a coluna  $j$  de  $R$  não for coluna pivot, então é combinação linear das outras colunas de  $R$  e por isso

$$\text{car}(B) = \text{car}(S) = \text{car}(R) = \text{car}(A).$$

Se a coluna  $j$  de  $R$  for coluna pivot, então escolhemos  $i$  de forma a que  $r_{ij}$  seja uma entrada pivot. Por hipótese, existe  $k$  com  $j \leq k \leq n$  e  $r_{ik} \neq 0$  (porque há pelo menos 2 entradas não nulas nas linhas de  $A$  na forma reduzida).

Como  $R$  é a forma reduzida de  $A$ , a coluna  $k$  de  $R$  não pode ser coluna pivot, porque a coluna  $j$  já o é, mas, tal como a coluna  $(j - 1)$  de  $S$ , ela contém a primeira entrada não nula na linha  $i$  de  $S$  (porque na matriz  $S$  retirámos a coluna  $j$ ) e por isso é coluna pivot de  $S$ . Então  $S$  e  $R$  têm o mesmo número de colunas pivot, o que implica que

$$\text{car}(B) = \text{car}(S) = \text{car}(R) = \text{car}(A).$$

(4  $\Rightarrow$  5) Suponhamos que se  $B$  é obtida de  $A$  eliminando uma coluna, então  $\text{car}(B) = \text{car}(A)$  e suponhamos, por absurdo, que para algum  $x_i$ ,

$$1 \leq i \leq n, Ax_i = 0 \Rightarrow x_i = 0.$$

Como  $R$  é a forma reduzida de  $A$ , alguma linha de  $R$  é  $e_i$ , que pertence à base. (Se  $(Ax_i = 0 \Rightarrow x_i = 0)$  então os  $x_i$  são linearmente independentes). Então a eliminação da coluna  $i$  de  $R$  diminui a característica, o que é uma contradição da nossa hipótese. Logo a condição 5 verifica-se.

(5  $\Rightarrow$  1) Suponhamos que para  $1 \leq i \leq n$  há uma solução de  $Ax = 0$  com  $x_i \neq 0$ . Queremos mostrar que  $Ax = 0$  tem uma solução totalmente não nula. Se para cada  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) há uma solução de  $Ax = 0$  com  $x_i \neq 0$ , conseguimos encontrar, para cada  $i$ , um vector  $x_i$ , tal que  $Ax_i = 0$  e  $x_i \neq 0$ . Fazendo uma combinação linear destes vectores, encontramos uma solução totalmente não nula para  $Ax = 0$ . ■

**Teorema 4.2.4** *Seja  $A$  uma matriz real  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. A equação  $Ax = b$  tem uma solução totalmente não nula;
2. Para cada  $1 \leq i \leq n + 1, e_i \notin RS([A|b])$ ;
3. Cada linha não nula de  $[A|b]$  em forma de escada reduzida tem pelo menos duas entradas não nulas;
4. Se  $B$  é obtida de  $[A|b]$  por eliminação de uma coluna, então

$$\text{car}(B) = \text{car}([A|b]);$$

5. Para  $1 \leq i \leq n$ , há uma solução de  $Ax = b$ , com  $x_i \neq 0$ .

**Demonstração.** Basta observarmos que  $y$  é solução da equação  $Ax = b$  se

e só se  $\begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix}$  é solução da equação  $[A|b]x = 0$ .

Usando este facto, vemos que a condição 1. é equivalente a dizermos que  $[A|b]x = 0$  tem uma solução totalmente não nula, e a condição 5. é equivalente a dizermos que, para  $1 \leq i \leq n + 1$ , há uma solução de  $[A|b]x = 0$  com  $x_i \neq 0$ . Observamos então que este teorema vem directamente do teorema anterior. ■

**Exemplo 4.2.5** Voltemos ao exemplo 4.1.1, usado no problema de admissão fraca. Vamos ver como encontrar as estrelas únicas:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & 0 & 0 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 & 0 \end{bmatrix}, \text{ que tem 3 linhas e 5 colunas, pelo que}$$

$$M = \{1, 2, 3\} \text{ e } N = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Consideramos  $\alpha \subseteq M$  e  $\beta \subseteq N$ . Pela definição, para uma variável  $x_r$  ser estrela única para  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\mathcal{X}[\alpha, \beta^c]$  tem que conter exactamente uma variável  $x_i$  e  $\mathcal{X}[\alpha^c, \beta]$  não pode conter variáveis.

**Caso 1:**  $x_8$  é estrela única para  $\alpha = \{3\}$  e  $\beta = \{3\}$  :

Se  $\alpha = \{3\} \Rightarrow \alpha^c = \{1, 2\}$ ;

Se  $\beta = \{3\} \Rightarrow \beta^c = \{1, 2, 4, 5\}$ .

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[\alpha, \beta^c] &= \mathcal{X}[\{3\}, \{1, 2, 4, 5\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_8 & 0 \end{bmatrix} \text{ (só contém uma variável: } x_8) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[\alpha^c, \beta] &= \mathcal{X}[\{1, 2\}, \{3\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (não contém variáveis)}. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $x_2$  é estrela única para  $\alpha = \{1, 2\}$  e  $\beta = \{1, 2, 5\}$  :

Se  $\alpha = \{1, 2\} \Rightarrow \alpha^c = \{3\}$ ;

Se  $\beta = \{1, 2, 5\} \Rightarrow \beta^c = \{3, 4\}$ .

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[\alpha, \beta^c] &= \mathcal{X}[\{1, 2\}, \{3, 4\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{só contém uma variável: } x_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[\alpha^c, \beta] &= \mathcal{X}[\{3\}, \{1, 2, 5\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{não contém variáveis}).\end{aligned}$$

**Caso 3:**  $x_7$  é estrela única para  $\alpha = \{1, 2, 3\}$  e  $\beta = \{1, 2, 4, 5\}$  :

Se  $\alpha = \{3\} \Rightarrow \alpha^c = \emptyset$ ;

Se  $\beta = \{1, 2, 4, 5\} \Rightarrow \beta^c = \{3\}$ .

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[\alpha, \beta^c] &= \mathcal{X}[\{1, 2, 3\}, \{3\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (\text{só contém uma variável: } x_7)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{X}[\alpha^c, \beta] = \mathcal{X}[\emptyset, \{1, 2, 4, 5\}] = 0$$

(as colunas 1, 2, 4, 5 não têm  $x_7$  : não contém variáveis).

**Caso 4:**  $x_4$  é estrela única para  $\alpha = \{1, 2, 3\}$  e  $\beta = \{2, 3, 4, 5\}$  :

Se  $\alpha = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \alpha^c = \emptyset$ ;

Se  $\beta = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \beta^c = \{1\}$ .

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[\alpha, \beta^c] &= \mathcal{X}[\{1, 2, 3\}, \{1\}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (só contém uma variável: } x_4 \text{)} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{X}[\alpha^c, \beta] = \mathcal{X}[\emptyset, \{2, 3, 4, 5\}] = 0$$

(as colunas 2,3,4,5 não têm  $x_4$ : não contém variáveis).

Podemos, então, concluir que  $\mathcal{P}$  admite soma de linhas  $r$  e soma de colunas  $c$ , se e só se se verificarem ambas as condições:

- $r_1 + r_2 + r_3 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$  (soma de linhas igual à soma de colunas);
- Nos conjuntos onde há estrelas únicas, as somas não dão o mesmo, como vimos anteriormente:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_3 \neq c_3 \\ r_1 + r_2 \neq c_1 + c_2 + c_5 \\ r_1 + r_2 + r_3 \neq c_1 + c_2 + c_4 + c_5 \\ r_1 + r_2 + r_3 \neq c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \end{array} \right.$$

Vimos no exemplo 4.0.3 que o padrão triangular completo de ordem maior ou igual a 3 comuta com o padrão completo, o que não surpreende dado

que é fácil ver que não possui estrelas únicas. Analisemos agora o padrão triangular completo  $2 \times 2$ .

**Exemplo 4.2.6** *Consideremos o padrão*

$$\mathcal{P}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

*Este padrão admite a condição necessária  $r_1 + r_2 = c_1 + c_2$ , pois a matriz triangular*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*pertence à classe de  $\mathcal{P}$ .*

*Temos o padrão de variáveis*

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}.$$

*Como temos 2 linhas e 2 colunas,  $M = \{1, 2\}$  e  $N = \{1, 2\}$ .*

*Se  $\alpha = \{2\}$ , então  $\alpha^c = \{1\}$ ;*

*Se  $\beta = \{2\}$ , então  $\beta^c = \{1\}$ . Aplicando as condições necessárias para encontrar estrelas únicas:*

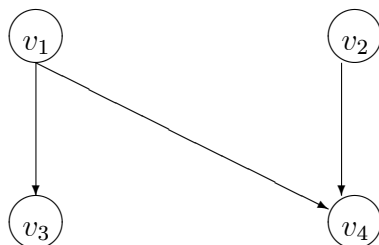
$$\mathcal{X}[\alpha, \beta^c] = \mathcal{X}[\{2\}, \{1\}] = \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{X}[\alpha^c, \beta] = \mathcal{X}[\{1\}, \{2\}] = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

*Logo, concluímos que  $x_2$  é estrela única para  $\alpha = \{2\}$  e  $\beta = \{2\}$ . Este facto implica  $r_2 \neq c_2$ . Por isso, o padrão triangular de tipo  $2 \times 2$  não comuta com o padrão completo.*

*Podemos ainda representar o grafo  $G$ , do padrão  $\mathcal{P}$ :*

Temos as arestas:  $e^{(1)} = (v_1, v_3)$ ;  $e^{(2)} = (v_1, v_4)$ ; e  $e^{(3)} = (v_2, v_4)$ . Então, o grafo  $G$  é:



De facto e de acordo com as noções teóricas, como  $x_2$  é estrela única,  $e^{(2)} = (v_1, v_4)$  é uma aresta de corte neste grafo, já que, se for removida, torna o grafo desconexo, isto é, cria dois subgrafos que têm pelo menos uma conexão.

## Capítulo 5

# Alguns padrões de sinais que admitem uma matriz e a sua inversa na sua classe

(*Eschenbach, Carolyn A.; Hall, Frank e Li, Zhongshan : "Some signs Patterns that Allow a Real Inverse Pair  $B$  and  $B^{-1}$ ", 1997*)

Neste capítulo, o objectivo é determinar quais os padrões de sinais que admitem, na sua classe, uma matriz real e a sua inversa. A propriedade em estudo envolve matrizes e as respectivas inversas e, por isso é denominada **propriedade do par inverso**, abreviadamente *IP* (de *Inverse Pair*). Temos então a seguinte definição:

### Propriedade $IP$

Seja  $\mathcal{A}$  um padrão de sinais. Dizemos que uma matriz pertencente à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$  tem a **propriedade do par inverso** quando a sua inversa pertence também à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ .

Neste capítulo vamos investigar padrões  $\mathcal{A}$  que admitem  $IP$ , isto é, para os quais existe uma matriz não singular  $B \in Q(\mathcal{A})$ , tal que  $B^{-1} \in Q(\mathcal{A})$ . Já distinguimos, no capítulo 3, as noções de requerer e admitir uma propriedade. Neste caso, existe uma reciprocidade inversa entre o requerer e o admitir a propriedade do par inverso, já que o conjunto dos padrões que requer esta propriedade é uma classe pequena e homogênea, enquanto que o conjunto dos padrões que a admite é uma classe de grande amplitude e heterogênea.

## 5.1 Introdução

### Notação

Ao longo do capítulo vamos utilizar a seguinte notação:

- $\mathcal{A}$  é um padrão de sinais quadrado de ordem  $n$ ;
- $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$  é o subpadrão obtido de  $\mathcal{A}$  através da eliminação de linhas no conjunto de índices  $\alpha$  e da eliminação de colunas no conjunto de índices  $\beta$ ;
- Se  $\alpha = \beta$ , então  $\mathcal{A}(\alpha, \alpha) = \mathcal{A}(\alpha)$ , é um subpadrão principal de  $\mathcal{A}$ ;
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  é um conjunto de índices.

$\mathcal{JP}$  é o conjunto de todos os padrões de sinais que admitem  $IP$ . Este conjunto é fechado para a semelhança por uma matriz diagonal com entradas  $+$  e  $-$ , semelhança por permutação, passagem ao simétrico, e transposição (já que temos, de facto, uma relação de equivalência em  $\mathcal{JP}$ , fazendo combinações finitas das operações referidas).

Antes de iniciarmos o estudo, introduzimos duas noções indispensáveis:

### Padrão de Sinais Generalizado

Chamamos padrão de sinais generalizado a uma matriz  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ , com entradas no conjunto  $\{+, -, 0, \#\}$ .

A classe do padrão de sinais generalizado  $\mathcal{A}$  é o conjunto  $Q(\mathcal{A})$ , definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) : b_{ij} \text{ é arbitrário se } a_{ij} = \#, b_{ij} = 0 \text{ se } a_{ij} = 0 \\ \text{e } \text{sgn}(b_{ij}) = a_{ij} \text{ se } a_{ij} \in \{+, -\} \end{array} \right\}.$$

**Exemplo 5.1.1** *Consideremos o padrão de sinais generalizado*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \# & + & - \\ 0 & 0 & \# \\ + & \# & - \end{bmatrix}.$$

*As matrizes  $B$  e  $C$  pertencem à classe do padrão generalizado  $\mathcal{A}$ :*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

### Padrões Compatíveis

Dois padrões generalizados  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são **compatíveis** se existe uma matriz  $B$  tal que  $B \in Q(\mathcal{A}_1) \cap Q(\mathcal{A}_2)$ . Então escrevemos  $\mathcal{A}_1 \xleftrightarrow{c} \mathcal{A}_2$ .

**Exemplo 5.1.2**  $\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} \# & + \\ - & \# \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ \# & 0 \end{bmatrix}$  são compatíveis.

De facto, existe  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}_1) \cap Q(\mathcal{A}_2)$ .

**Nota 5.1.3** Dizer que um determinado valor é compatível com  $+$  ou  $-$  significa apenas que pode tomar esses valores ou o valor  $\#$ .

## 5.2 Condições necessárias

**Teorema 5.2.1** Seja  $\mathcal{A}_{n \times n} \in \mathcal{JP}$ . Então:

1.  $\mathcal{A}$  contém um ciclo de comprimento  $n$  não nulo;
2.  $\mathcal{A}^2 \xleftrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{I}_n^+$ ;
3.  $\text{adj}(\mathcal{A}) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{A}$  e  $\det \mathcal{A} \xleftrightarrow{\mathcal{C}} +$ , ou  $\text{adj}(\mathcal{A}) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} -\mathcal{A}$  e  $\det \mathcal{A} \xleftrightarrow{\mathcal{C}} -$ .

Relativamente a este teorema, vamos fazer algumas demonstrações:

Se  $\mathcal{A}$  admite  $IP$ , então é claro que  $\mathcal{A}$  admite não singularidade, isto é, existe alguma matriz não singular  $B \in Q(\mathcal{A})$ .

Se  $\mathcal{A}$  admite não singularidade, então claramente existe pelo menos um termo não nulo em  $\det(\mathcal{A})$ .

Para qualquer padrão de sinais  $\mathcal{A}$  estar em  $\mathcal{JP}$ , sabemos que existe uma matriz não singular  $B \in Q(\mathcal{A})$  tal que  $B^{-1} \in Q(\mathcal{A})$  e  $BB^{-1} = I_n$ . Numa perspectiva qualitativa, isto é, falando de padrões, isto significa que  $\mathcal{A}^2$  admite o padrão  $\mathcal{I}_n^+ = \text{diag}(+, +, \dots, +)$ .

Então, os padrões de sinais  $\mathcal{A}$  que admitem  $IP$  têm que ter, necessariamente a condição de compatibilidade

$$\mathcal{A}^2 \xleftrightarrow{c} \mathcal{I}_n^+.$$

Outra condição necessária para  $A \in \mathcal{JP}$  vem da fórmula para determinar a entrada  $(i, j)$  da inversa de uma matriz  $B$  :

$$(B^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det B(j, i)}{\det B}.$$

Se substituirmos  $B$  pelo padrão  $\mathcal{A}$ , obtemos a entrada  $(i, j)$  do padrão generalizado de sinais  $\mathcal{A}^{-1}$  :

$$(\mathcal{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det \mathcal{A}(j, i)}{\det \mathcal{A}}.$$

Se  $\det \mathcal{A} = \#$ , então  $(\mathcal{A}^{-1})_{ij} = \#$ , uma vez que  $\det \mathcal{A}(j, i) \neq 0$  (estamos interessados apenas nas entradas não nulas). Consequentemente, se  $\det \mathcal{A}$  é qualitativamente ambíguo ( $\#$ ), não obtemos muita informação sobre os sinais das entradas não nulas em  $\mathcal{A}^{-1}$ . No entanto, se definirmos o padrão de sinais generalizado  $adj(\mathcal{A})$ , por

$$(adj \mathcal{A})_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathcal{A}(j, i).$$

Então

$$(\mathcal{A}^{-1})_{ij} = \frac{(adj \mathcal{A})_{ij}}{\det \mathcal{A}}.$$

$\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$  apenas se  $adj(\mathcal{A}) \xleftrightarrow{c} \mathcal{A}$  e  $\det \mathcal{A} \xleftrightarrow{c} +$ , ou  $adj(\mathcal{A}) \xleftrightarrow{c} - \mathcal{A}$  e  $\det \mathcal{A} \xleftrightarrow{c} -$ .

Temos ainda uma última observação a fazer: as condições 2. e 3. são independentes. Consideremos alguns exemplos que ilustram esse facto:

**Exemplo 5.2.2** *Seja o padrão de sinais*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & - \\ 0 & 0 & + & - \\ + & - & + & - \\ + & - & + & - \end{bmatrix}.$$

*Calculando*

$$\mathcal{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & - \\ 0 & 0 & + & - \\ + & - & + & - \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & + & - \\ 0 & 0 & + & - \\ + & - & + & - \\ + & - & + & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} = \#J_4$$

*Concluimos que o padrão  $\mathcal{A}$  satisfaz a condição 2.*

Mas  $(\text{adj}\mathcal{A})_{44} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \\ + & - & + \end{bmatrix} = 0$ , logo  $\mathcal{A}$  não satisfaz a condição 3, e por isso  $\mathcal{A} \notin \mathcal{JP}$ .

**Exemplo 5.2.3** *Consideremos o padrão positivo completo:*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}.$$

*Claramente,  $(\text{adj}\mathcal{A})_{ij} = \#$ , para todos os índices  $i$  e  $j$  e, por isso,  $\mathcal{A}$  satisfaz a condição 3.*

Mas

$$\mathcal{A}^2 = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{bmatrix}.$$

Concluimos que  $\mathcal{A}^2$  não tem padrão compatível com  $\mathcal{I}_n^+$ , logo não satisfaz a condição 2 e  $\mathcal{A} \notin \mathcal{JP}$ .

As condições estabelecidas no teorema são necessárias para padrões  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$  de tipos  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ , mas não são suficientes para  $n \geq 4$ , como mostra o exemplo seguinte:

**Exemplo 5.2.4** Consideremos o padrão

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & + & - & - \\ 0 & - & + & + \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathcal{A}^2 = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & + & - & - \\ 0 & - & + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & + & - & - \\ 0 & - & + & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \end{bmatrix},$$

o que implica

$$\mathcal{A}^2 \not\leftrightarrow \mathcal{I}_4^+.$$

Calculamos

$$\det \mathcal{A} = (+) \det \begin{bmatrix} + & + & + \\ + & - & - \\ - & + & + \end{bmatrix} = \#$$

e

$$\text{adj}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & + & + \\ 0 & \# & - & - \end{bmatrix}, \text{ logo } \text{adj}\mathcal{A}_{\overleftrightarrow{c}} = -\mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$  satisfaz todas as condições necessárias do teorema, mas não podemos concluir já que  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ .

Vamos mesmo provar que

$$\mathcal{A} \notin \mathcal{JP}$$

Vamos supor, por absurdo, que existem  $B, C \in Q(\mathcal{A})$  tais que  $BC = I_n$ .

Então, para quaisquer matrizes diagonais positivas  $D_1$  e  $D_2$ , temos

$$(D_1BD_2)(D_2^{-1}CD_1^{-1}) = I_n,$$

e como não houve alteração no padrão de sinais,  $D_1BD_2$  e  $D_2^{-1}CD_1^{-1}$  ainda pertencem à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ . Se substituirmos  $B$  por  $D_1BD_2$ , podemos assumir que  $B$  tem a seguinte forma (ainda pertencendo a  $Q(\mathcal{A})$ ):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & f & g \\ 0 & 1 & -i & -j \\ 0 & -1 & l & m \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}), \text{ com } f, g, i, j, l, m > 0.$$

Como

$$(\text{adj}B)_{44} = + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} = -i - f < 0.$$

Se  $B^{-1} \in Q(\mathcal{A})$ , então,  $\det B < 0$  e, por isso,  $\text{sgn}(\text{adj}B) = -\mathcal{A}$ , o que nos conduz às seguintes desigualdades:

$$1. (\text{adj}B)_{11} < 0 \implies im + ig + fm > fj + gl + jl;$$

$$2. (\text{adj}B)_{12} < 0 \implies jl + j + l > im + m + i;$$

$$3. (\text{adj}B)_{13} < 0 \implies gl + m + g > fm + l + f;$$

$$4. (\text{adj}B)_{14} < 0 \implies gi + g + j > fj + i + f;$$

$$5. (\text{adj}B)_{22} < 0 \implies im > jl;$$

$$6. (\text{adj}B)_{23} < 0 \implies fm > gl;$$

$$7. (\text{adj}B)_{24} < 0 \implies fj > gi;$$

$$8. (\text{adj}B)_{32} < 0 \implies m > j;$$

$$9. (\text{adj}B)_{42} > 0 \implies l > i.$$

Podemos mostrar os cálculos de algumas delas:

$$1. (\text{adj}B)_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & f & g \\ 1 & -i & -j \\ -1 & l & m \end{bmatrix} = -im + gl + fj - ig + lj - mf.$$

Então, temos a inequação

$$-im + gl + fj - ig + lj - mf < 0$$

$$\iff im + ig + fm > fj + gl + jl.$$

$$2. (\text{adj}B)_{12} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -j \\ -1 & l & m \end{bmatrix} = -(-im + l + j - i + lj - m)$$

Que nos conduz à inequação

$$im - l - j + i - lj < 0$$

$$\iff jl + j + l > im + m + i.$$

$$9. (adjB)_{42} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -1 & l \end{bmatrix} = l - i.$$

Obtemos a desigualdade

$$l - i > 0$$

$$\iff l > i.$$

Prosseguindo com a demonstração, vamos ainda operar com estas desigualdades de um modo bastante particular

**a)**  $1. + 2. + 3. \implies 4.$

$$\begin{aligned} & (im + ig + fm > fj + gl + jl) + (jl + j + l > im + m + i) + (gl + m + g > fm + l + f) \\ & = (im + ig + fm + jl + j + l + gl + m + g > fj + gl + jl + im + m + i + fm + l + f) \\ & \implies ig + j + g > fj + i + f. \end{aligned}$$

**b)**  $5. \times 7. \implies 6.$

$$\begin{aligned} & (im > jl) \times (fj > gi) = imfj > jgli \\ & \implies fm > gl \quad (i, j > 0). \end{aligned}$$

**c)**  $5. \times 9. \implies 8.$

$$\begin{aligned} & (im > jl) \times (m > j) \\ & im^2 > lj^2 \quad (\text{e como } m > j) \implies l > i. \end{aligned}$$

d) 2. + 5.

$$\begin{aligned} jl + j + l + im &> im + m + i + jl \\ \implies j + l &> m + i \end{aligned}$$

mas tendo em conta 8. temos,

$$l - i > m - \underset{>0}{j} \implies l - i > 0 \quad . \quad (10.)$$

e) 3. + 6.

$$\begin{aligned} gl + m + g + fm &> fm + l + f + gl \\ \implies m + g &> l + f \quad . \quad (11.) \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando as 2 últimas desigualdades a que chegámos, obtemos:

f) 10.  $\times$  11.

$$\begin{aligned} (l - i)(m + g) &> (m - j)(l + f) \\ lm + gl - im - ig &> ml + fm - jl - jf \\ \implies im + ig + fm &< fj + gl + jl \quad . \end{aligned}$$

Chegamos à contradição da condição 1., logo, podemos concluir que  $\mathcal{A} \notin \mathcal{JP}$ .

Este exemplo mostra que a caracterização geral de padrões de sinais em  $\mathcal{JP}$  é muito complexa. Podemos, no entanto, identificar algumas classes de padrões de sinais em  $\mathcal{JP}$ . Se  $\mathcal{A}$  é um padrão de sinais que não satisfaz as condições

do teorema em estudo, então é claro que não pertence a  $\mathcal{JP}$ . Existe, no entanto, uma questão lógica:

**Problema 5.2.5** *Existem alguns padrões não triviais de ordem  $n$ , com  $n \geq 4$ , para os quais as condições do teorema são ainda suficientes?*

**Teorema 5.2.6** *Seja  $\mathcal{A}$  um padrão de sinais com  $\text{car}_{\min}(\mathcal{A}) = 1$ . Então, as condições seguintes são equivalentes:*

1.  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ ;
2.  $\mathcal{A}^2 \xleftrightarrow{c} \mathcal{I}_n^+$ ;
3.  $(\mathcal{A}^2)_{ij} = \#, \forall i, j \in N$ ;
4.  $\mathcal{A}$  é totalmente não nula e existe um inteiro positivo  $k$  tal que

$$a_{1k}a_{k1} = -.$$

Vamos regressar agora ao estudo da dependência qualitativa e quantitativa das entradas  $\#$  na  $\text{adj}\mathcal{A}$ . Definimos o conjunto  $S(\mathcal{A})$  como o conjunto de todos os padrões de sinais que ocorrem nas adjuntas das matrizes reais de  $Q(\mathcal{A})$ :

$$S(\mathcal{A}) = \{\text{sgn}(\text{adj}B) : B \in Q(\mathcal{A})\}.$$

### Adjunta $\#$ -independente

Se a  $\text{adj}\mathcal{A}$  contém  $k$  entradas  $\#$ , então chama-se  **$\#$ -independente** se

$$|S(\mathcal{A})| = 3^k,$$

isto é, cada entrada  $\#$  pode assumir todos os valores possíveis em  $\{0, +, -\}$ , com todas as possíveis combinações das outras entradas  $\#$  na  $\text{adj}\mathcal{A}$ .

Se  $k = 0$ , então é claro que a  $\text{adj}\mathcal{A}$  não tem entradas  $\#$  e por isso podemos considerá-la  $\#$ -independente.

Se  $k = 1$ , então a  $\text{adj}\mathcal{A}$  é também  $\#$ -independente.

**Exemplo 5.2.7** *Seja*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ + & + & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

*Sabendo que  $(\text{adj}\mathcal{A})_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathcal{A}(j, i)$ , vamos calcular  $\text{adj}\mathcal{A}$ :*

$$(\text{adj}\mathcal{A})_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ + & - & + \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} = +.$$

$$(\text{adj}\mathcal{A})_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ + & - & + \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} = -(-) = +.$$

$$(\text{adj}\mathcal{A})_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} = 0.$$

$$(\text{adj}\mathcal{A})_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ + & + & + \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} = -(+-(+)) = \#, \quad \text{e assim por diante}$$

*Depois de todos os cálculos efectuados, obtemos finalmente:*

$$\text{adj}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ + & \# & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

Vamos agora considerar a matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -d & 0 & 0 \\ e & f & -g & h \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \text{ com } a, b, \dots, i > 0,$$

uma matriz pertencente a  $Q(\mathcal{A})$ .

Vamos analisar a  $(\text{adj}B)_{32}$  (que é a posição do  $\#$  na  $\text{adj}\mathcal{A}$ ):

$$(\text{adj}B)_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ e & f & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = -(afi - ebi) = i(-af + eb).$$

Então,

$$(\text{adj}B)_{32} = \begin{cases} -, & \text{se } af > eb \\ +, & \text{se } af < eb \\ 0, & \text{se } af = eb \end{cases}.$$

Observamos que a entrada  $(\text{adj}B)_{32}$  pode ter 3 valores possíveis, o que implica

$$|S(\mathcal{A})| = 3^k = 3^1 = 3,$$

logo  $\text{adj}\mathcal{A}$  é  $\#$ -independente.

Relembrando a noção de padrão de sinais não singular, definido no capítulo 3, observamos que este tipo de padrões tem sempre determinante com sinal definido (+ ou -). Uma vez que os padrões não singulares aparecem em

muitas aplicações de matrizes, vamos agora caracterizar padrões de sinais  $\#$ -independentes não singulares em  $\mathcal{JP}$ .

**Teorema 5.2.8** *Suponhamos que  $\text{adj}\mathcal{A}$  é  $\#$ -independente e  $\mathcal{A}$  é um padrão de sinais não singular. Então  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$  se e só se  $\text{adj}\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}\mathcal{A}$  e  $\det\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}+$ , ou  $\text{adj}(\mathcal{A})_{\leftarrow\mathcal{C}} - \mathcal{A}$  e  $\det\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}} -$ .*

**Demonstração.** ( $\implies$ ) Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ . Queremos provar que  $\text{adj}\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}\mathcal{A}$  e  $\det\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}+$ . Suponhamos que  $\det\mathcal{A} = +$  e  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ . Se

$$\mathcal{A} \in \mathcal{JP} \implies \exists B, B^{-1} \in Q(\mathcal{A}).$$

Então

$$\underbrace{\text{sgn}(B^{-1})}_{=\mathcal{A}} = \frac{\text{sgn}(\text{adj}B)}{\underbrace{\text{sgn}(\det B)}_{+}} = \text{sgn}(\text{adj}B) = \mathcal{A}.$$

Concluimos que

$$\text{adj}\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}\mathcal{A} \text{ e } \det\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}+.$$

( $\impliedby$ ) Sabemos que  $\text{adj}\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}\mathcal{A}$  e  $\det\mathcal{A}_{\leftarrow\mathcal{C}}+$ . Queremos provar que  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ .

Como  $\text{adj}\mathcal{A}$  é  $\#$ -independente,

$$\mathcal{A} \in S(\mathcal{A}) \implies \text{sgn}(\text{adj}B) = \mathcal{A},$$

para algum  $B \in Q(\mathcal{A})$

$$\text{Então } \text{sgn}(B^{-1}) = \frac{\text{sgn}(\text{adj}B)}{\underbrace{\text{sgn}(\det B)}_{+}} = \text{sgn}(\text{adj}B) = \mathcal{A}.$$

Concluimos que

$$B^{-1} \in Q(\mathcal{A}) \implies \mathcal{A} \in \mathcal{JP}.$$

De um modo análogo se prova que se  $\det \mathcal{A} = -$  e  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ , se verifica a segunda condição. ■

**Exemplo 5.2.9** Consideremos o padrão de sinais  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ + & + & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

Calculemos  $\det \mathcal{A}$  ao longo da linha 4:

$$\det \mathcal{A} = (+) \det \begin{bmatrix} + & + & 0 \\ + & - & 0 \\ + & + & - \end{bmatrix} = (+) \cdot [(+) - (-)] = +.$$

Como  $\mathcal{A}$  tem determinante com sinal definido,  $\mathcal{A}$  é não singular.

Vamos calcular a  $\text{adj} \mathcal{A}$ , para analisarmos as condições do teorema 5.2.8:

$$\text{adj} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 \\ + & \# & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix}.$$

Observamos que  $\text{adj} \mathcal{A} \xleftrightarrow{c} \mathcal{A}$  e que a  $\text{adj} \mathcal{A}$  é #-independente, logo o teorema 5.2.8 diz-nos que  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ .

Realmente, se consideramos uma matriz pertencente à classe deste padrão de sinais:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}).$$

Calculando a sua inversa, obtemos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}).$$

Existem padrões em  $\mathcal{JP}$  para os quais  $\text{adj}\mathcal{A}$  não é  $\#$ -independente. Observemos o exemplo seguinte, que mostra que há padrões de sinais que **não** verificam as condições do teorema 5.2.8 e, no entanto, **aditem a propriedade do par inverso**:

**Exemplo 5.2.10** *Consideremos o padrão de sinais*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & 0 & + & - \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & + & - & - \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular  $\text{adj}\mathcal{A}$  e verificar se tem entradas  $\#$ :

$$\begin{aligned} (\text{adj}\mathcal{A})_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ + & - & 0 \\ + & - & - \end{bmatrix} = (+) - (+) = \#. \\ (\text{adj}\mathcal{A})_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & - \end{bmatrix} = - \times (0) = 0. \end{aligned}$$

E assim por diante, até obtermos todas as entradas de  $\text{adj}\mathcal{A}$ . Obtemos então:

$$\text{adj}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & \# & \# & \# \end{bmatrix} \xleftrightarrow{c} \begin{bmatrix} + & 0 & + & - \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & + & - & 0 \\ 0 & + & - & - \end{bmatrix}.$$

Vemos, em primeiro lugar, que  $\text{adj}\mathcal{A} \xleftrightarrow{c} \mathcal{A}$ . No entanto, se calcularmos  $\det \mathcal{A}$ , obtemos:

$$\det \mathcal{A} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ + & - & 0 \\ + & - & - \end{bmatrix} = (+) - (+) = \#.$$

O determinante de  $\mathcal{A}$  deveria ser  $+$ , para estar nas condições do teorema 5.2.8.

Vamos considerar a matriz  $B$ , pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}$ , definida da seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & c & -d \\ 0 & e & -f & 0 \\ 0 & g & -h & 0 \\ 0 & i & -j & -k \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}), \text{ com } a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \in \mathbb{R}^+.$$

Calculemos, por exemplo:

$$\begin{aligned} (\text{adj}B)_{44} &= (-1)^{4+4} \det \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & -f \\ 0 & g & -h \end{bmatrix} \\ &= -aeh + agf = a(fg - eh). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(adjB)_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} e & -f & 0 \\ g & -h & 0 \\ i & -j & -k \end{bmatrix} \\
&= ehk - kfg = k(eh - fg) \\
&= -k(fg - eh).
\end{aligned}$$

Analisando as expressões obtidas para estas duas posições na  $adjB$ , concluímos que se  $(adjB)_{11} > 0$ , então  $(adjB)_{44} < 0$ , ou vice-versa. Então,  $|S(\mathcal{A})| \neq 3^k$ , o que implica que  $adj\mathcal{A}$  não é  $\#$ -independente (nem todos os  $\#$  podem ter qualquer valor).

No entanto temos, por exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in Q(\mathcal{A}).$$

Logo,  $\mathcal{A} \in \mathcal{JP}$ , apesar de não se verificarem as condições do teorema 5.2.8.

## Capítulo 6

# Padrões de sinais que requerem valores próprios reais, não reais ou imaginários puros

*(Eschenbach, Carolyn A e Johnson, Charles R.: "Signs Patterns that Require Real, NonReal and Pure Imaginary Eigenvalues", 1990)*

Neste capítulo vamos caracterizar padrões de sinais  $n \times n$  que requerem  $n$  valores próprios não reais. É claro que aqui surge logo uma questão: "Serão alguns destes valores próprios não reais, imaginários puros?". Por isso, vamos também tentar identificar e caracterizar padrões de sinais que requerem valores próprios imaginários puros. Finalmente, caracterizamos padrões de

sinais que requerem  $n$  valores próprios reais.

## 6.1 Introdução

Podemos desde já afirmar que:

1. Nenhum padrão de sinais de dimensão ímpar requer todos os valores próprios não reais, porque os valores próprios não reais vêm aos pares, dado que, se um número complexo é valor próprio de uma matriz real, o seu conjugado também é;
2. Nenhum padrão de sinais com um ciclo de comprimento ímpar ou uma entrada diagonal não nula requer todos os valores próprios não reais;
3. A classe do padrão de sinais que requer todos os valores próprios imaginários puros é uma subclasse da classe do padrão de sinais que requer todos os valores próprios não reais, e forma uma classe mais pequena;
4. As matrizes que requerem todos os valores próprios reais incluem todas as permutações por semelhança, de padrões diagonais, triangulares, **tridiagonais** (padrões que só admitem entradas não nulas na diagonal principal e imediatamente acima e abaixo desta) e em **estrela** (padrões cujos grafos são estrelas e cujos ciclos são sempre de comprimento 2 e positivos);
5. Como um padrão de sinais admite um valor próprio não real se e só se não requer todos os valores próprios reais, as classes dos padrões

de sinais que admitem um valor próprio real e que admitem um valor próprio não real, têm ambas muitos elementos.

Vamos agora entrar no tema em estudo; antes porém, vamos fazer algumas observações, necessárias à simplificação de algumas demonstrações:

- Sabemos que se um padrão de sinais  $\mathcal{A}$   $n \times n$  é não singular, então tem pelo menos 1 ciclo de comprimento  $n$ . Concluimos, por isso, que cada componente irredutível de um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  que requer todos os valores próprios não reais, tem que ter dimensão par.
- Suponhamos que  $\mathcal{A}$  tem um ciclo  $\gamma$  simples de comprimento  $n$ , definido por  $\gamma = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_n i_1}$ . Então, se  $\mathcal{A}$  é bipartido, cada aresta une um vértice de  $V_1$  a um vértice de  $V_2$ , ou vice-versa. Daqui, tiramos que  $V_1 = \{i_1, i_3, \dots, i_{n-1}\}$  e  $V_2 = \{i_2, i_4, \dots, i_n\}$  e  $\#(V_1) = \#(V_2) = \frac{n}{2}$ .
- Nas demonstrações dos teoremas, usamos o facto dos valores próprios dependerem continuamente das entradas de uma matriz real.

Suponhamos que  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  é um padrão de sinais irredutível, com um ciclo simples  $\gamma$ , de comprimento  $k$ . Vamos definir a matriz real  $B_\gamma(0) = [b_\gamma(0)_{ij}]$  por:

$$b_\gamma(0)_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{se } a_{ij} = + \text{ e está em } \gamma \\ -1, & \text{se } a_{ij} = - \text{ e está em } \gamma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Definimos a **matriz perturbação**,  $B_\gamma(\epsilon) = [b_\gamma(\epsilon)_{ij}]$  do mesmo modo, se  $a_{ij}$  está no ciclo  $\gamma$ , e por:

$$b_\gamma(\epsilon)_{ij} = \begin{cases} +\epsilon, & \text{se } a_{ij} = + \text{ e não está em } \gamma \\ -\epsilon, & \text{se } a_{ij} = - \text{ e não está em } \gamma, \epsilon > 0. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como os  $k$  valores próprios de  $B_\gamma(0)$  não nulos são algebricamente simples (isto é, têm multiplicidade algébrica 1), para perturbações suficientemente pequenas das entradas de  $B_\gamma(0)$ , a matriz perturbação  $B_\gamma(\epsilon)$  tem  $k$  valores próprios algebricamente simples, próximos dos  $k$  valores próprios distintos de  $B_\gamma(0)$ . Então,  $B_\gamma(\epsilon)$  é uma matriz da classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ , e tem  $k$  valores próprios distintos próximos das  $k$  raízes complexas de 1 ou  $-1$  (dependendo do sinal da permutação associada a  $\gamma$ ). Então, se  $\gamma$  é um ciclo negativo par de comprimento  $k$ ,  $B_\gamma(0)$  tem  $k$  valores próprios distintos não reais que estão longe do eixo real. Para um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, as entradas de  $B_\gamma(0)$  podem ser perturbadas e todos os  $k$  valores próprios não reais de  $B_\gamma(\epsilon)$  permanecem longe do eixo real. À semelhança, se  $\gamma$  é um ciclo positivo par de comprimento  $k$ ,  $B_\gamma(0)$  tem valores próprios reais  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$ . Para um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, os valores próprios reais permanecem algebricamente simples e não podem ligar-se para formar um par complexo conjugado.

- Ainda em relação às demonstrações, e de forma a simplificá-las, vamos sempre assumir que o padrão de sinais em estudo é irredutível. A

explicação para isso é a seguinte:

Suponhamos que um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  tem como componentes irreduzíveis  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ . Então, o espectro de uma matriz real  $B$  pertencente à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$  é a união do espectro das componentes irreduzíveis  $B_1, B_2, \dots, B_k$ , onde  $B_i$  está na classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Seja  $\gamma_i$  um ciclo simples de comprimento  $k_i$  em  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  e suponhamos que  $B(\epsilon)$  é uma matriz real com padrão de sinais  $\mathcal{A}$ . Definimos  $B(\epsilon) = [(b(\epsilon)_{ij})]$  por:

$$|b(\epsilon)_{ij}| = \begin{cases} 1, & a_{ij} \in \gamma_1 \\ 10, & a_{ij} \in \gamma_2 \\ \dots\dots\dots & \\ 10^{k-1}, & a_{ij} \in \gamma_k \\ \epsilon, & a_{ij} \neq 0 \text{ e } a_{ij} \notin \gamma_i, \quad i = 1, \dots, k \end{cases} .$$

Os valores absolutos das entradas não nulas ao longo dos ciclos  $\gamma_i$  em componentes irreduzíveis adjacentes diferem num factor de 10. Consequentemente, para perturbações suficientemente pequenas, os valores próprios não nulos numa componente irreduzível de  $B(\epsilon)$  permanecem distintos uns dos outros e dos valores próprios não nulos de todas as outras componentes irreduzíveis. Então, não há interacção entre os valores próprios não nulos de diferentes componentes irreduzíveis, quando  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Por exemplo, dois valores próprios reais de diferentes componentes não podem combinar-se e bifurcar-se do eixo real para formar um par complexo conjugado. Podemos por isso assumir que o padrão de sinais  $\mathcal{A}$  é irreduzível.

## 6.2 Respostas ao problema

**Teorema 6.2.1** *Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$  requer todos os valores próprios não reais se e só se cada componente irredutível de  $\mathcal{A}$  satisfaz o seguinte:*

1. *É bipartida;*
2. *Tem todos os ciclos simples negativos;*
3. *É não singular.*

**Demonstração.** Vamos supor, como já vimos, que  $\mathcal{A}$  é irredutível.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos, em primeiro lugar, que o padrão de sinais  $\mathcal{A}$  satisfaz as 3 condições do teorema. Queremos provar que  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios não reais. Vamos mostrar que se  $B$  é uma matriz da classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ , então a soma dos  $\binom{n}{k}$   $k \times k$  menores principais,  $E_k(B)$ , é não negativa se  $k$  é par, nula, se  $k$  é ímpar e  $E_n(B) \neq 0$ , isto é, vamos mostrar que o polinómio característico de qualquer matriz  $B$  pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}$  é dado por

$$p_B(x) = x^n + E_2(B)x^{n-2} + E_4(B)x^{n-4} + \dots + E_n(B),$$

com cada coeficiente não nulo, não negativo e  $E_n(B) > 0$ . Então, como  $p(x) > 0$  para  $x$  real, é claro que este polinómio não tem raízes reais.

Seja então  $\mathcal{A}[\alpha]$  o subpadrão principal de  $\mathcal{A}$ , com as linhas e colunas indicadas pelo conjunto de índices  $\alpha$ . Se  $\mathcal{A}[\{i_1, i_2, \dots, i_p\}]$  é o subpadrão principal de  $\mathcal{A}$  com  $p$  ímpar, então cada produto elementar  $\mathcal{A}[\{i_1, i_2, \dots, i_p\}]$  é nulo, e daqui

$E_p(B) = 0, \forall p < n$ , ímpar. Se  $p$  for par, então, o único produto elementar não nulo em  $\mathcal{A}[\{i_1, i_2, \dots, i_p\}]$  consiste em produtos de ciclos pares. Se o número de ciclos pares num ciclo  $\gamma$  de comprimento  $p$  é par, então  $\gamma$  é não negativo e  $sgn(\gamma)\gamma \geq 0$ . Por outro lado, se o número de ciclos pares num ciclo  $\gamma$  de comprimento  $p$  é ímpar, então  $\gamma$  é não positivo,  $sgn(\gamma)$  é negativo e por isso  $sgn(\gamma)\gamma \geq 0$ . Então,

$$\det \mathcal{A}[\{i_1, i_2, \dots, i_p\}] \geq 0$$

e

$$E_p(B) \geq 0, \forall p \leq n, \text{ par.}$$

Se  $B \in Q(\mathcal{A})$ , então a 3ª condição requer que  $\det B = E_n(B) \neq 0$  (já que  $B$  é não singular). Pelo argumento anterior, sabemos que

$$E_i(B) \geq 0, \forall i \leq n, \text{ par.}$$

Também sabemos que

$$E_i(B) = 0 \text{ para } i \text{ ímpar, logo concluímos que } n \text{ é par e } E_n(B) > 0.$$

( $\implies$ ) Suponhamos agora que  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios não reais, e vamos assumir, por absurdo, que  $\mathcal{A}$  não satisfaz uma das 3 condições propostas.

Em primeiro lugar, suponhamos que  $\mathcal{A}$  não é bipartido. Se não o é, então tem um ciclo simples ímpar, ou, não satisfazendo a 2ª condição, tem um ciclo  $\gamma$  positivo par de comprimento  $k$ . Então, a matriz  $B_\gamma(0) = [b_\gamma(0)_{ij}]$ , como definida atrás, tem  $k$  valores próprios distintos, iguais a  $k$  distintas raízes

complexas de 1 ou  $-1$ , dependendo do número de  $-1$ 's no ciclo  $\gamma$  e do sinal do ciclo  $\gamma$  de comprimento  $k$  no determinante. Para algum  $\epsilon > 0$ , definimos como anteriormente, a matriz real  $B_\gamma(\epsilon) = [b_\gamma(\epsilon)_{ij}]$ . Então  $B_\gamma(\epsilon)$  pertence à classe do padrão de sinais  $\mathcal{A}$ , e para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, tem  $k$  valores próprios próximos das  $k$  raízes complexas distintas de 1 ou  $-1$ . Então,  $B_\gamma(\epsilon)$  é uma matriz de  $Q(\mathcal{A})$  e tem pelo menos 1 valor próprio real, o que é uma contradição.

Suponhamos agora que a última condição (não singularidade) não se verifica. Então existe uma matriz  $B$  pertencente à classe do padrão  $\mathcal{A}$  que é singular, o que implica que  $\gamma = 0$  é um valor próprio real de  $B$  : contradição. ■

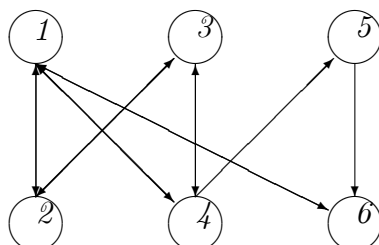
**Nota 6.2.2** *Seja  $n$  ímpar. Então nenhum padrão de sinais  $n \times n$  satisfaz o teorema 6.2.1. Isto porque não consegue, nestas condições, satisfazer simultaneamente as condições 1 e 3, isto é, se  $\mathcal{A}$  é não singular, então  $\mathcal{A}$  tem um determinante com sinal específico. Daqui,  $E_n(B) \neq 0, \forall B \in Q(\mathcal{A})$  e  $\mathcal{A}$  contém pelo menos 1 ciclo ímpar não nulo de comprimento  $n$ , logo  $\mathcal{A}$  não pode ser bipartido. Por outro lado, se  $\mathcal{A}$  é bipartido, todos os ciclos ímpares de comprimento  $n$  em  $\mathcal{A}$  são zero. Daqui,  $E_n(B) = \det(B) = 0$ ; concluimos que  $\mathcal{A}$  é não singular.*

**Exemplo 6.2.3** *Seja  $\mathcal{A} =$* 

$$\begin{bmatrix} 0 & + & 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
*. Verificamos que  $\mathcal{A}$  é*

bipartido.

De facto,  $V_1 = \{1, 3, 5\}$  e  $V_2 = \{2, 4, 6\}$ . O grafo dirigido de  $\mathcal{A}$  é:



Calculando

$$\begin{aligned}
 \det \mathcal{A} &= -a_{61} \det \begin{bmatrix} + & 0 & + & 0 & - \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} = \\
 &= -a_{61} \cdot (-a_{56}) \det \begin{bmatrix} + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 \\ - & 0 & + & 0 \\ 0 & - & 0 & - \end{bmatrix} = \\
 &= a_{61} \cdot a_{56} \cdot (-a_{45}) \det \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \\ - & 0 & + \end{bmatrix} = \\
 &= -a_{45} \cdot a_{56} \cdot a_{61} (a_{12}a_{23}a_{34} - a_{14}a_{23}a_{32}) = \\
 &= -(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} \cdot a_{56} \cdot a_{61}) + (a_{14}a_{45}a_{56}a_{61}a_{23}a_{32}) = \\
 &= (-)(-) + (-)(-) = +.
 \end{aligned}$$

Concluimos que  $\mathcal{A}$  tem determinante positivo, o que implica que  $\mathcal{A}$  é não singular e todos os ciclos simples de  $\mathcal{A}$  são negativos. Logo  $\mathcal{A}$  satisfaz as condições do teorema, e por isso requer todos os valores próprios não reais.

**Lema 6.2.4** *Seja  $\mathcal{A}_{n \times n}$  um padrão de sinais bipartido. Se  $\lambda$  é um valor próprio de qualquer matriz  $B \in Q(\mathcal{A})$  com multiplicidade  $k$ , então  $-\lambda$  é também um valor próprio de  $B$  com multiplicidade  $k$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$ , é bipartido. Então podemos assumir, sem perder a generalidade, que  $\mathcal{A}$  pode ser particionada

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_1 \text{ de tipo } \#V_1 \times \#V_2 \text{ e } \mathcal{A}_2 \text{ de tipo } \#V_2 \times \#V_1.$$

Seja  $B \in Q(\mathcal{A})$ , a qual tem um valor próprio  $\lambda$ , de multiplicidade  $k$ . Vamos mostrar, usando uma semelhança, que  $B$  é semelhante a  $-B$  :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios,  $\lambda$  é valor próprio de  $B$ , com multiplicidade  $k$  e  $-\lambda$  é valor próprio de  $-B$  com multiplicidade  $k$ , então  $-\lambda$  também é valor próprio de  $B$  com multiplicidade  $k$ .

■

Antes de prosseguir necessitamos da definição de **inércia** de uma matriz real  $n \times n$ ,  $B$ , que é o terno ordenado:

$$i(B) = (i_+(B), i_-(B), i_0(B))$$

onde, contando com as multiplicidades:

$i_+(B)$  = número de valores próprios de  $B$  com a parte real positiva;

$i_-(B)$  = número de valores próprios de  $B$  com a parte real negativa;

$i_0(B)$  = número de valores próprios de  $B$  com a parte real nula.

**Corolário 6.2.5** *Se um padrão de sinais  $\mathcal{A}$ ,  $n \times n$ , satisfaz as condições do teorema 6.2.1 e  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ , então  $\mathcal{A}$  requer um par de valores próprios conjugados imaginários puros. Também se  $B \in Q(\mathcal{A})$ , então a inércia de  $B$  é:*

$$i(B) = \left( \frac{n-2}{k}, \frac{n-2}{k}, k \right),$$

para algum  $k \in \{2, 4, \dots, n\}$ .

**Demonstração.** Suponhamos que  $B$  é bipartida e tem todos os valores próprios em conjugados complexos. Pelo teorema 6.2.4, se  $\lambda = a + bi$  e  $\bar{\lambda} = a - bi$ , são valores próprios de  $B$ , também  $-\lambda = -a - bi$  e  $-\bar{\lambda} = -a + bi$ , são valores próprios de  $B$ . Daqui concluímos que os valores próprios não reais aparecem em quádruplos complexos  $\pm a \pm bi$ , ou em pares imaginários puros. No entanto, como  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ , então,  $B$ ,  $n \times n$ , tem que ter 1 par de valores próprios imaginários puros. Então,  $B$  tem pelo menos 2 valores próprios com parte real zero, e daqui tiramos que a inércia de  $B$  é

$$i(B) = \left( \frac{n-2}{k}, \frac{n-2}{k}, k \right),$$

para algum  $k \in \{2, 4, \dots, n\}$ . Como  $B$  é uma matriz qualquer de  $Q(\mathcal{A})$ , mostrámos que  $\mathcal{A}$  requer 1 par de valores próprios conjugados imaginários puros. ■

**Exemplo 6.2.6** *Seja*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & + & 0 & - \\ - & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Este é o padrão do exemplo anterior. É uma matriz  $6 \times 6$  e  $6 \equiv 2 \pmod{4}$ . Logo, através deste corolário, podemos concluir que  $\mathcal{A}$  requer 1 par de valores próprios conjugados imaginários puros.*

**Corolário 6.2.7** *Se um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$ , satisfaz as condições do teorema 6.2.1,  $n = 2^j$  para algum inteiro  $j \geq 2$  e  $\mathcal{A}$  não tem ciclos de comprimento  $k = 2m$  ( $2 \leq k \leq n - 2$ ), para algum inteiro positivo ímpar  $m$ , então  $\mathcal{A}$  não admite um valor próprio imaginário puro não nulo. Se  $B \in Q(\mathcal{A})$ , então a inércia de  $B$  é*

$$i(B) = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0\right).$$

**Demonstração.** Vamos supor, por hipóteses, que:

- $\mathcal{A}$  é um padrão  $n \times n$ , que não tem ciclos de comprimento  $2, 6, \dots, n - 2$ ;
- $\mathcal{A}$  satisfaz as condições do teorema 6.2.1;
- $n = 2^j$  para algum inteiro  $j \geq 2$ .

Então,  $\mathcal{A}$  é uma matriz 4-cíclica (todos os ciclos têm comprimento múltiplo de 4) e o polinómio característico de  $\forall B \in Q(\mathcal{A})$  é dado por:

$$p_B(x) = x^n + E_4(B)x^{n-4} + E_8(B)x^{n-8} + \dots + E_n(B).$$

Do teorema 6.2.1, sabemos que cada coeficiente  $E_k(B) \geq 0$ .

Suponhamos então, por absurdo, que  $\lambda = ci$  e  $\bar{\lambda} = -ci$  ( $c > 0$ ), formam um par de valores próprios imaginários puros de  $B \in Q(\mathcal{A})$ . Como

$$\lambda^4 = c^4 i^4 = c^4 > 0$$

o polinómio característico é:

$$p_B(\lambda) = c^n + E_4(B)c^{n-4} + E_8(B)c^{n-8} + \dots + E_n(B) > 0,$$

o que é uma contradição, já que  $\lambda$  é valor próprio de  $B$  e por isso teria que ser raiz do polinómio característico respectivo. Como  $B$  é uma matriz arbitrária de  $Q(\mathcal{A})$ , concluímos que nenhum  $B \in Q(\mathcal{A})$  tem um par de valores próprios imaginários puros, o que implica que o padrão  $\mathcal{A}$  não admite um par de valores próprios imaginários puros.

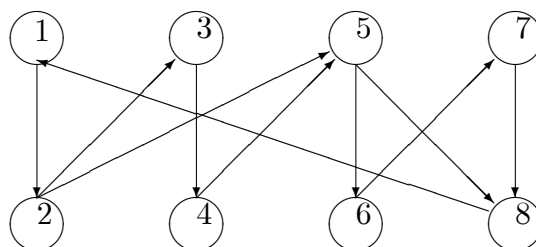
Além disso, como  $\mathcal{A}$  verifica as condições do teorema 6.2.1,  $\mathcal{A}$  é não singular, logo nenhum  $B \in Q(\mathcal{A})$  tem valor próprio 0. Também, pelo teorema 6.2.4, sabemos que o número de valores próprios com parte real positiva é igual ao número de valores próprios com parte real negativa. Logo a inércia de  $B$  é  $i(B) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0)$ . O zero na terceira posição explica-se muito facilmente, já que mostrámos anteriormente que não há valores próprios imaginários puros.

■

**Exemplo 6.2.8** *Seja*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (8 \times 8).$$

Notamos que  $\mathcal{A}$  é bipartida, sendo que  $V_1 = \{1, 3, 5, 7\}$  e  $V_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ . O grafo dirigido de  $\mathcal{A}$  é:



Calculemos  $\det \mathcal{A}$ :

$$\det \mathcal{A} = -a_{81} \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -a_{81}(-a_{78}) \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} = \\
&= -a_{81}(-a_{78})(-a_{67}) \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} = \\
&= -a_{81}a_{78}a_{67}a_{56} \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} = \\
&= a_{81}a_{78}a_{67}a_{56}a_{45} \det \begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix} = \\
&= -a_{34}a_{45}a_{56}a_{67}a_{78}a_{81} \det \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix} = \\
&= -(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{67}a_{78}a_{81}) = -(-) = +.
\end{aligned}$$

Então  $\mathcal{A}$  é não singular. Além disso,  $\mathcal{A}$  contém apenas ciclos pares e negativos, e por isso satisfaz as condições do teorema 6.2.1, logo requer todos os valores próprios não reais. Contudo,  $n = 8 = 2^3$ , e como  $\mathcal{A}$  não contém ciclos de comprimento  $k = 2m$ , para um inteiro ímpar  $m$ ,  $\mathcal{A}$  satisfaz as condições

do corolário 6.2.7, e por isso, apesar de  $\mathcal{A}$  requerer todos os valores próprios não reais,  $\mathcal{A}$  não admite um valor próprio imaginário puro não nulo.

**Teorema 6.2.9** *Um padrão de sinais  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios imaginários puros se e só se:*

1. Cada entrada diagonal de  $\mathcal{A}$  é igual a 0;
2. Cada componente irredutível de  $\mathcal{A}$  é uma árvore padrão de sinais onde cada ciclo de comprimento 2 é negativo.

**Demonstração.** Podemos assumir novamente que  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  é irredutível.

( $\Leftarrow$ ) 1. e 2. significam que cada matriz  $B \in Q(\mathcal{A})$  é diagonalmente semelhante a uma matriz anti-simétrica ( $B^T = -B$ ), e que por isso só tem valores próprios imaginários puros. Vamos ver isso mesmo:

Como  $\mathcal{A}$  e por isso  $B$ , é combinatoriamente simétrica, (já que é condição necessária e suficiente para ser uma árvore),  $a_{ij} \neq 0 \iff a_{ji} \neq 0$  e o seu grafo é uma árvore, podemos escolher uma matriz diagonal positiva  $D$ , de tal forma que entradas não diagonais colocadas simetricamente em  $D^{-1}BD$  tenham os mesmos valores absolutos. Como cada ciclo de comprimento 2 é negativo, estas entradas têm sinal oposto, e porque as entradas diagonais são zero,  $D^{-1}BD$  é anti-simétrica.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos agora que  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios imaginários puros, mas, por absurdo, não satisfaz uma das condições estabelecidas. Então:

- Ou  $\mathcal{A}$  tem uma entrada diagonal não nula;
- Ou  $\mathcal{A}$  tem um ciclo de comprimento 2 positivo, ou um ciclo simples de comprimento superior ou igual a 3.

Vamos considerar a primeira hipótese e supor que  $\mathcal{A}$  tem uma entrada diagonal não nula. Então, se  $\gamma = a_{ii}$  para algum  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , então  $B_\gamma(\epsilon)$ , como definida anteriormente, tem um valor próprio real, próximo de 1 ou  $-1$ , dependendo do sinal de  $a_{ii}$ . Mas sabemos, por hipótese, que  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios imaginários puros, o que quer dizer que  $\gamma$  não pode ser uma entrada diagonal não nula de  $\mathcal{A}$ .

Vamos agora supor que  $\gamma = a_{ij}a_{ji}$  é um ciclo simples de comprimento 2 positivo. Então,  $B_\gamma(\epsilon)$  tem valores próprios reais próximos de 1 e  $-1$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Mas, por hipótese,  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios imaginários puros. Logo  $\gamma$  não pode ser um ciclo simples de comprimento 2 positivo.

Finalmente, suponhamos que  $\gamma$  é um ciclo simples de comprimento  $k \geq 3$  e vamos definir, como na introdução,  $B_\gamma(0)$ . Então,  $B_\gamma(0)$  tem  $k$  valores próprios iguais a  $k$  raízes complexas de 1 ou  $-1$ , dependendo do número de  $-1$ 's em  $\gamma$ . Como estes valores próprios estão distribuídos igualmente em redor do círculo unitário centrado na origem (raízes de 1 ou  $-1$ ), pelo menos  $k - 2$  deles não são imaginários puros. Como  $k \geq 3$ , sabemos que  $3 - 2 = 1$ , ou mais, valores próprios não são imaginários puros. Então, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $B_\gamma(\epsilon)$  tem pelo menos 1 valor próprio não nulo que não é imaginário puro, o que contradiz a hipótese.

Para terminar, observamos que, como  $\mathcal{A}$  é irredutível ( $D(\mathcal{A})$  é fortemente conexo),  $a_{ij} \neq 0 \implies a_{ji} \neq 0$ . Então, para haver um caminho de  $j$  para  $i$  em  $D(\mathcal{A})$ , teria que haver um ciclo simples de comprimento  $\geq 3$ . Como não há,  $\mathcal{A}$  tem que ser uma árvore padrão de sinais. ■

**Exemplo 6.2.10** *Seja*  $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}$ .

$\mathcal{A}$  é um padrão de sinais  $6 \times 6$  irredutível só com ciclos negativos e cujo grafo não dirigido é uma árvore. Então  $\mathcal{A}$  é uma árvore padrão de sinais que requer todos os valores próprios não nulos imaginários puros.

**Teorema 6.2.11** *Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$ , requer todos os valores próprios reais se e só se cada componente irredutível de  $\mathcal{A}$  é uma árvore padrão de sinais onde cada ciclo simples de comprimento 2 é positivo.*

**Demonstração.** Vamos mais uma vez assumir que  $\mathcal{A}$  é um padrão de sinais irredutível.

( $\Leftarrow$ ) Queremos provar que qualquer  $B \in Q(\mathcal{A})$  é diagonalmente semelhante a uma matriz simétrica, já que se o for, tem espectro real. Temos por hipótese  $\mathcal{A}$  ser uma árvore padrão de sinais onde cada ciclo simples de comprimento 2 é positivo. Como  $\mathcal{A}$  é uma árvore, é combinatoriamente simétrica (e logo  $B$  também o é) e o seu grafo é uma árvore, podemos escolher uma matriz

diagonal  $D$  de tal modo que as entradas não diagonais colocadas simetricamente em  $D^{-1}BD$  tenham o mesmo valor. Então,  $D^{-1}BD$  é simétrica, já que, como os ciclos de comprimento 2 são positivos, as entradas simétricas têm que ter o mesmo sinal.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios reais mas que, por absurdo, não satisfaz as condições do teorema. Então:

- Ou  $\mathcal{A}$  tem um ciclo de comprimento 2 negativo;
- Ou  $\mathcal{A}$  tem um ciclo simples de comprimento  $l \geq 3$ .

Se se verificar a primeira hipótese, suponhamos que  $\gamma$  é um ciclo de comprimento 2 negativo; então  $B\gamma(\epsilon)$  como foi definida anteriormente, tem 2 valores próprios não reais, fechados para  $i$  e  $-i$ , para um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, o que contradiz a hipótese.

Se, por outro lado,  $l \geq 3$ , então  $B\gamma(\epsilon)$  tem  $l - 2$  valores próprios não reais quando  $l$  é par e  $\gamma$  negativo, e  $l - 1$  valores próprios não reais, quando  $l$  é ímpar. Em qualquer dos casos,  $B\gamma(\epsilon) \in Q(\mathcal{A})$  contradiz a hipótese do teorema.

Finalmente, como  $\mathcal{A}$  é irredutível,  $a_{ij} \neq 0 \implies a_{ji} \neq 0$ , logo  $\mathcal{A}$  é uma árvore padrão de sinais, já que de outro modo, para haver um caminho de  $i$  para  $j$ , em  $D(\mathcal{A})$ , teria que haver um ciclo simples de comprimento superior ou igual a 3. ■

**Exemplo 6.2.12** Seja  $\mathcal{A} =$  
$$\begin{bmatrix} \# & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & \# & - & - & + & - \\ 0 & - & \# & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & \# & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & \# & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}$  é uma árvore padrão de sinais em estrela irredutível. Tem apenas ciclos de comprimento 2 positivos, já que  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$  têm o mesmo sinal. Então, pelo teorema 6.2.11,  $\mathcal{A}$  requer todos os valores próprios reais.

**Teorema 6.2.13** Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$  admite um valor próprio real se e só se  $\mathcal{A}$  tem uma componente irredutível que satisfaz pelo menos uma das condições seguintes:

1. Tem um ciclo simples ímpar;
2. Tem um ciclo simples positivo par;
3. Não é não singular.

**Demonstração.** Sabemos que  $\mathcal{A}$  admite a propriedade  $p$  se e só se não requer não ter essa mesma propriedade. Logo, este teorema vem directamente do teorema 6.2.1. ■

**Teorema 6.2.14** Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$  admite um valor próprio não real se e só se  $\mathcal{A}$  tem um ciclo simples de comprimento  $l \geq 3$  ou tem um ciclo negativo simples de comprimento 2.

**Demonstração.** À semelhança dos teorema e demonstração anteriores, este teorema vem directamente do teorema 6.2.11. ■

Enunciamos agora, sem demonstração, dois resultados finais:

**Teorema 6.2.15** *Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$  requer valores próprios reais não positivos e/ou valores próprios não reais se e só se  $\mathcal{A}$  não tem ciclos simples positivos.*

**Teorema 6.2.16** *Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$ , admite um valor próprio real positivo se e só se  $\mathcal{A}$  tem um ciclo simples positivo.*

**Nota 6.2.17** *O teorema 6.2.13 vem também do teorema 6.2.16. Um padrão de sinais  $\mathcal{A}_{n \times n}$ , admite um valor próprio real negativo se  $-\mathcal{A}$  admite um valor próprio real positivo. Do teorema 6.2.16 tiramos que  $-\mathcal{A}$  tem um ciclo (par ou ímpar) positivo  $\gamma$ . Se  $\gamma$  é par, então  $\mathcal{A}$  também tem um ciclo positivo par. Se  $\gamma$  é ímpar, então  $\mathcal{A}$  terá um ciclo negativo ímpar. Em ambos os casos,  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio real negativo. Como  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio real se e só se  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio real positivo, negativo ou zero, obtemos as condições 1 e 2 do teorema 6.2.13 a partir do teorema 6.2.16. Notamos que o único valor próprio real não abrangido pelas 2 primeiras condições do teorema 6.2.13 é  $\lambda = 0$ , o qual está na 3ª condição.*

**Exemplo 6.2.18** *Consideremos o padrão*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} + & - & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 \\ + & 0 & + & + \\ - & 0 & - & + \end{bmatrix}$$

Então

$$-\mathcal{A} = \begin{bmatrix} - & + & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 \\ - & 0 & - & - \\ + & 0 & + & - \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}$  tem um ciclo positivo ímpar:  $a_{12}a_{23}a_{31}$ . Logo  $\mathcal{A}$  satisfaz o teorema 6.2.16.

$-\mathcal{A}$  admite um valor próprio real positivo e  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio real.

**Observações 6.2.19** Mencionámos logo ao início, que a classe dos padrões de sinais que admitem um valor próprio real, ou a classe dos padrões de sinais que admitem um valor próprio não real, são muito grandes. Por exemplo, qualquer padrão de sinais com uma entrada diagonal não nula ou com um ciclo simples de comprimento 2 positivo, admite um valor próprio real. Por outro lado, qualquer padrão de sinais com um ciclo simples de comprimento  $\geq 3$  admite um valor próprio não real. Qualquer matriz com um ciclo simples de comprimento 2 negativo admite também um valor próprio não real.

**Exemplo 6.2.20** Observemos o padrão

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & 0 \\ - & 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}$  tem um ciclo simples de comprimento 3:  $a_{12}a_{23}a_{31}$

Logo, pelo teorema 6.2.13,  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio real, e, pelo teorema 6.2.14,  $\mathcal{A}$  admite um valor próprio não real.

# Bibliografia

- [1] Bauldry, William C.; Evans, Benny e Johnson, Jerry: "Linear Algebra with Maple", John Wiley & sons inc, USA (1995);
- [2] Eduards, Harold M.: "Linear Algebra", Birkhäuser, USA (1995);
- [3] Fraleigh, John B e Beauregard, Raymond A.: "Linear Algebra (third edition)", Addison-Wesley Publishing Company (1995);
- [4] Gantmacher, F. R.: "The Theory of Matrices (vol II)", Chelsea Publishing Company, New York (1989);
- [5] Gross, Jonathan e Yellen, Jay: "Graph Theory and its applications", CRS Press, New York (1999);
- [6] Hill Jr., Richard O. e Jovanovich, Harcourt Brace: "Elementary Linear Algebra with Applications", 2ª edição, Publishers and its subsidiary, Academic Press USA (1991);
- [7] Hodge, W. V. D.: "Methods of Algebraic Geometry (vol I e II)", Cambridge Mathematical Library (1994);

- [8] Horn, Roger A.e Johnson, Charles R.: "Matrix Analysis", Cambridge University Press, New York (1985);
- [9] Lipschutz, Seymour: "Álgebra Linear", 3ª edição, McGraw-Hill (1994);
- [10] Luís, G. e Ribeiro, C. Silva: "Álgebra Linear", McGraw-Hill (1985);
- [11] Magalhães, Luís T.: "Álgebra Linear como introdução à Matemática Aplicada", Texto Editora (1991);
- [12] Monteiro, António J. e Matos, Isabel Teixeira: "Álgebra: um primeiro curso", Escolar Editora, Lisboa (1995);
- [13] Noble, Ben e Daniel, James W.: "Applied Linear Algebra", Prentice-Hall, New Jersey (1988);
- [14] Perry, William L.: "Elementary Linear Algebra", McGraw-Hill Publishing Company, USA (1988);
- [15] Steinbruch, A. e Winterle, P: "Álgebra Linear", McGraw-Hill (1987);
- [16] Zhang, Fuzhen: "Matrix Theory - Basic results and techniques", Springer-Verlag New York inc (1999);
- [17] Eschenbach, Carolyn A.; Hall, Frank; Johnson, Charles R.e Li, Zhongshan : "The graphs of the unambiguos entries in the product of two (+,-) sign pattern matrices", 1997;
- [18] Eschenbach, Carolyn A.; Hall, Frank e Li, Zhongshan : "Some signs Patterns that Allow a Real Inverse Pair B and  $B^{-1}$ ", 1997;

- [19] Eschenbach, Carolyn A e Johnson, Charles R.: "Signs Patterns that Require Real, NonReal and Pure Imaginary Eigenvalues", 1990;
- [20] Johnson, Charles R. e Marques, Maria G.: "Patterns of Commutativity: The commutant of the Full Pattern", 2005;
- [21] Johnson, Charles R. e Stanford, David P.: "Patterns that allow given row and column sums", 2000;
- [22] Li, Zhongshan e Hall, Frank: "Sign Patterns of Nonnegative Normal Matrices", 1997;

- **Outra documentação**

Curso inserido na "Escola de Verão de Matemática", da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, denominado: "As ideias mais poderosas sobre matrizes", Johnson, Charles R. (8 e 9 de Setembro de 2005).