Representação Proporcional – Métodos dos Divisores

Susana Fernandes (sfer@ualg.pt)

Departamento de Matemática, FCT, Universidade do Algarve

Centro de Estudos e de Desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui, sob o tema da teoria da partilha equilibrada, a representação proporcional, que é uma aplicação da teoria da divisão proporcional no caso discreto. Neste âmbito são abordados alguns métodos de origem norte-americana (Hamilton, Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill), pelo seu interesse histórico, e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente (D'Hondt e Sainte-Laguë). Neste texto salientaremos que todos estes métodos, exceto o de Hamilton, são métodos de divisores e que os dois métodos europeus abordados (D'Hondt e Sainte-Laguë) são na realidade equivalentes a dois dos métodos americanos (Jefferson e Webster), diferindo apenas na forma de cálculo. **Infelizmente esta equivalência não é mencionada nos manuais escolares disponíveis**.

O que é a representação proporcional?

Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento - "house of representatives" – proporcional à sua população, segundo o último censo realizado. Em inúmeros países da Europa, como é o caso de Portugal, cada partido – lista eleitoral – recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições. Mais concretamente, em Portugal o número total de lugares no parlamento é distribuído pelos distritos do país (círculos eleitorais) de forma proporcional às respetivas populações, de acordo com o último censo; depois, em cada eleição, cada partido elege em cada círculo eleitoral um número de deputados proporcional ao número de votos aí obtidos. Em Portugal usa-se o método de D'Hondt tanto na determinação do número de lugares correspondentes a cada círculo eleitoral como no cálculo do número de deputados eleitos por cada partido em cada círculo eleitoral.

Porque são necessários "métodos" para determinar uma representação proporcional?

Consideremos o exemplo fictício (Balinsky and Young pag. 96) de um país federal com uma população total de 100 mil habitantes distribuídos por 6 estados A, B, C, D, E e F, que pretende eleger os 36 membros do seu parlamento de forma proporcional às populações dos 6 estados (ou considerar um total de 100 mil votos válidos para distribuir 36 mandatos por 6 partidos de forma proporcional aos votos obtidos por cada partido). A seguinte *tabela 1* apresenta para cada estado (ou partido), a sua população - *P* (ou votos), a respetiva proporção da população total (ou proporção do total de votos válidos) e a correspondente proporção dos *M* lugares no parlamento. As proporções são apresentadas com 5 casas decimais.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Proporção populacional ($^{p_i}/_P$)	0.27744	0.25178	0.19951	0.14610	0.09225	0.03292
Proporção de lugares ($M \times {}^{p_i}/_P$)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512

tabela 1: Dados do exemplo fictício adaptado de Balinsky and Young.

total de habitantes – P=100000 ; lugares no parlamento – M=36

Ora obviamente o número de lugares no parlamento a atribuir a cada estado (ou partido) tem de ser um número inteiro não negativo. Como passamos das proporções de lugares para o número de lugares? A primeira solução que vem à ideia será arredondar a proporção de lugares de cada estado (ou partido), o que neste exemplo conduziria à seguinte distribuição de lugares no parlamento apresentada na *tabela 2*.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	10	9	7	5	3	1

tabela 2: Solução para o exemplo da *tabela 1* obtida por arredondamento das proporções.

Mas esta não é uma solução admissível pois o número total de lugares atribuídos é 35, inferior aos 36 lugares que formam o parlamento. Com outros exemplos podemos encontrar situações em que arredondando as proporções de lugares seriam atribuídos mais lugares do que o total do parlamento.

Como o simples senso comum nos pode conduzir a soluções não admissíveis para o problema da representação proporcional, surge a necessidade de definir formas sistemáticas para resolver o problema.

Antes de descrever alguns dos métodos propostos, apresentamos a nomenclatura usual da representação proporcional.

P – total da população (ou total de votos válidos); M – total de lugares (ou mandatos) no parlamento; N – número de estados (ou número de listas eleitorais – partidos); $D = \frac{P}{M}$ – divisor ou quociente eleitoral standard – representa o número de habitantes (ou votos) por mandato; $p_i, i = 1, \dots, N$ – população do estado i (ou votos do partido i); $q_i = \frac{p_i}{P} \times M = \frac{p_i}{D}, i = 1, \dots, N$ – quota standard do estado i (ou do partido i); $\lfloor q_i \rfloor$ – quota mínima – quota arredondada por defeito; $\lceil q_i \rceil$ – quota máxima – quota arredondada por excesso; $s_i, i = 1, \dots, N$ – número de lugares no parlamento atribuídos ao estado (ou partido) i. Temos uma solução admissível para o problema da representação proporcional quando os s_i são inteiros não negativos, calculados com base nas quotas q_i e tais que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$.

O método de Hamilton

Em 1791 o estadista norte americano Alexander Hamilton apresentou ao congresso dos Estados Unidos da América a seguinte proposta para resolver o problema da representação proporcional dos estados no parlamento:

- Calcular a quota standard de cada estado.
- Atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota standard mínima.
- Se sobrarem lugares por atribuir, adicionar um lugar por estado, por ordem decrescente da parte decimal da sua quota standard, até completar o parlamento.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512	
Afectação inicial de lugares ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1	34
Parte decimal da quota	0.98784	0.06408	0.18236	0.25960	0.32100	0.18512	
Lugares adicionados	1º				2º		2
Lugares no	10	9	7	5	4	1	36

parlamento (s_i)

tabela 3: Solução para o exemplo da *tabela 1* obtida com o método de Hamilton.

A *tabela 3* apresenta a solução obtida com o método de Hamilton para o exemplo da *tabela 1*.

O método de Hamilton foi adotado pelo congresso norte americano de 1852 a 1900 tendo sido abandonado após ter sido detetado, e demoradamente discutido, o que ficou conhecido como o Paradoxo de Alabama. Em 1882 discutia-se a alteração do número total de lugares no parlamento americano e constatou-se que, com um total de 299 lugares o estado do Alabama receberia 8 lugares enquanto que com um total de 300 lugares no parlamento o estado do Alabama perderia um lugar. No início do século XX descobriu-se que o método de Hamilton está também sujeito aos Paradoxo da População e Paradoxo dos Novos Estados. O primeiro acontece quando tendo um estado A uma taxa de crescimento superior à de um estado B, o estado A perde um lugar para o estado B. O segundo ocorre quando a inclusão de um novo estado, sendo acrescentados ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota, provoca alterações na distribuição de lugares dos restantes estados. Para exemplos da verificação dos paradoxos descritos sugere-se ao leitor interessado a consulta do livro de Tannenbaum.

O problema do método de Hamilton está na forma como se distribuem os lugares extra. Uma vez que não existem lugares extra para todos os estados, e escolhendo beneficiar os estados com maior parte decimal em termos absolutos, não se está a considerar a proporção da população de cada estado correspondente a essa parte decimal, afastando-se o método do "princípio de proporcionalidade".

O método de Jefferson e outros métodos de divisores americanos

No início do funcionamento do parlamento norte americano, o número de lugares do parlamento não era fixo, fixando-se sim o rácio do número de habitantes por lugar no parlamento (o divisor D), que não poderia ser inferior a 30 mil. Escolhido o divisor era determinada a quota de cada estado $q_i = \frac{p_i}{D}$ de acordo com a sua população, restando o problema de definir o número inteiro de lugares correspondente a cada quota. (Obviamente não há necessidade de arredondamentos das quotas que são um número inteiro.)

Em 1792 o estadista Thomas Jefferson propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota mínima, isto é, a quota arredondada por defeito. A proposta de Jefferson foi adotada pelo congresso norte americano de 1792 a 1832.

Ao fixar-se o número de lugares no parlamento M, o número de habitantes representado por cada mandato passa a depender do total da população P, sendo o divisor standard definido por $D = \frac{P}{M}$.

Considerando o número de lugares fixo o método de Jefferson funciona da seguinte forma: se a distribuição de lugares aos estados pela sua quota standard mínima é diferente de M, modifica-se o divisor D de forma adequada, isto é, por forma a que ao atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota mínima modificada se totalize os M lugares do parlamento.

Observemos na *tabela 4* o cálculo da solução obtida com o método de Jefferson para o exemplo fictício da *tabela 1*. O divisor standard é $D = \frac{100000}{36} = 2777.(7)$

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512	
Quota mínima ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1	34

tabela 4: Distribuição dos lugares para o exemplo da *tabela 1* obtida com o método de Jefferson usando o divisor standard $D = 2777.(7)$.

Como o total de lugares distribuídos é inferior ao número de lugares que compõem o parlamento, é necessário encontrar um divisor modificado adequado. Para aumentar o número de lugares distribuídos é necessário aumentar as quotas logo procura-se um divisor menor que o divisor standard. Experimentemos $D' = 2522$ (*tabela 5*).

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota modificada (q'_i)	11.00079	9.98335	7.91079	5.79302	3.65781	1.30531	
Quota modificada mínima ($\lfloor q'_i \rfloor$)	11	9	7	5	3	1	36

tabela 5: Distribuição dos lugares para o exemplo da *tabela 1* obtida com o método de Jefferson usando o divisor modificado $D' = 2522$.

Sejam D' o divisor modificado adequado, $q'_i = \frac{p_i}{D'}$ a respetiva quota modificada com $a_i < q'_i < a_i + 1$ onde $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ (a quota mínima modificada) e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$ (a quota máxima modificada). O método atribui a cada estado um número de lugares $s_i = a_i$.

O método de Jefferson não está sujeito a nenhum dos paradoxos. Foi no entanto abandonado após se ter verificado em 1832 que por vezes o número de lugares atribuídos a um estado era superior à sua quota standard máxima (como é neste exemplo o caso para o estado A), e que tal acontecia favorecendo estados com mais população em detrimento de estados com menos população (para exemplos consultar o livro de Tannenbaum).

O método de Jefferson viola a importante **regra da quota** que estabelece que a cada estado seja atribuído um número de lugares não inferior à sua quota standard mínima e não superior à sua quota standard máxima.

Em 1832 são propostos três novos métodos de divisores modificados, diferindo do método de Jefferson apenas na forma de arredondamento da quota modificada de cada estado para obter o número de lugares correpondentes.

O estadista John Quincy Adams propôs que fosse atribuído a cada estado um número de lugares igual à sua quota máxima modificada, ou seja, a quota modificada arredondada por excesso. Isto é, com $q'_i = \frac{p_i}{D'}$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$ $(a_i < q'_i < a_i + 1)$, o número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i + 1$.

A proposta de Adams nunca foi adotada pelo congresso americano.

O estadista Daniel Webster propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota modificada arredondada na forma usual – por defeito quando a parte decimal for inferior a 0.5 e por excesso no caso contrário. Isto é, com $q'_i = \frac{p_i}{D'}$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, $(a_i < q'_i < a_i + 1)$; o número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i$ quando $q'_i < a_i + \frac{1}{2}$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário. Reparemos que o ponto de arredondamento é a média aritmética das quotas modificadas mínima e máxima, isto é $a_i + \frac{1}{2} = \frac{a_i+(a_i+1)}{2}$.

A proposta de Webster foi adotada pelo congresso americano em 1852, 1901, 1911 e 1931.

O matemático James Dean propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota modificada arredondada pela média harmónica das quotas modificadas máxima e mínima. Sejam $q'_i = \frac{p_i}{D'}$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, $(a_i < q'_i < a_i + 1)$; a média harmónica de a_i e $a_i + 1$ é dada por $\frac{2a_i(a_i+1)}{2a_i+1}$. O número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i$ quando $q'_i < \frac{2a_i(a_i+1)}{2a_i+1}$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário.

Desde 1941 até aos dias de hoje o congresso americano adota o método de Huntington–Hill para determinar a distribuição dos lugares no parlamento pelos estados. Este método, proposto em 1911 por Joseph Hill, o estatístico chefe do gabinete dos censos populacionais, e posteriormente melhorado pelo matemático Edward Huntington, é um método de divisores modificados em que o número de lugares é obtido arredondando a quota modificada pela média geométrica das quotas modificadas máxima e mínima. Isto é, sendo $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, $(a_i < q'_i < a_i + 1)$, a média geométrica de a_i e $a_i + 1$ é dada por $\sqrt{a_i(a_i+1)}$ e o número de lugares a atribuir a cada estado é $s_i = a_i$ quando $q'_i < \sqrt{a_i(a_i+1)}$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário.

Todos estes métodos necessitam de encontrar, por tentativas, um divisor modificado que conduza a que a soma das quotas modificadas arredondadas, de acordo com o método em consideração, totalize exatamente o número de lugares do parlamento. O seguinte diagrama da *figura1* esquematiza os métodos dos divisores.

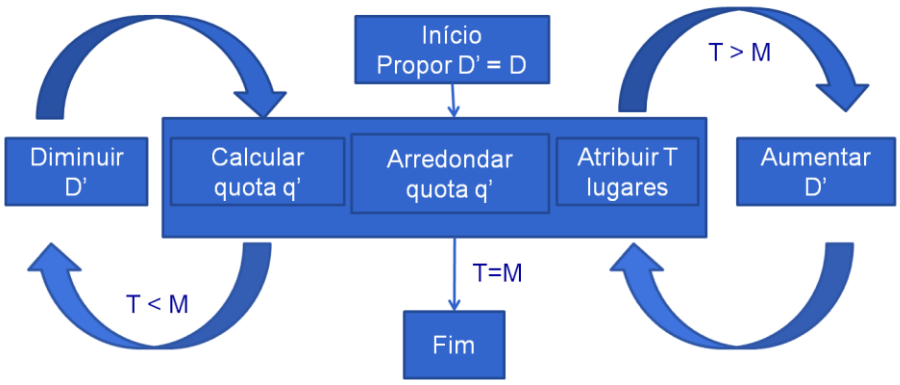

figura 1: Diagrama de métodos de divisores modificados.

A próxima *tabela 6* apresenta para cada um dos cinco métodos de divisores, ditos tradicionais, os respetivos pontos de arredondamento das quotas $d(a)$, por ordem crescente de $d(a)$.

Métodos dos divisores	**Pontos de arredondamento $d(a)$ $a = \lfloor q \rfloor$**
Adams	$d(a) = a$
Dean	$d(a) = \frac{2a(a+1)}{a+(a+1)}$
Huntington-Hill	$d(a) = \sqrt{a(a+1)}$
Webster	$d(a) = \frac{a+(a+1)}{2}$
Jefferson	$d(a) = a + 1$

tabela 6: Pontos de arredondamento para os cinco métodos de divisores tradicionais.

Características dos métodos dos divisores

Algumas das características fundamentais para métodos de representação proporcional são a "imunidade" aos paradoxos, a verificação da regra da quota e o não enviesamento.

Todos os métodos de divisores estão imunes a paradoxos (Balinsky and Young pg. 106).

Relativamente à verificação da regra da quota, isto é, verificar que na distribuição de lugares do parlamento pelos estados, nenhum recebe mais lugares do que a sua quota máxima nem menos que a sua quota mínima; já referimos que o método de Jefferson por vezes viola a quota máxima. No entanto este método nunca viola a quota mínima. Simetricamente, o método de Adams por vezes viola a quota mínima mas nunca viola a quota máxima. Nos restantes métodos as violações da regra da quota são menos frequentes e tanto podem ocorrer violações da quota máxima como da quota mínima; mas nunca simultaneamente (Balinsky and Young pg. 130). Destes três métodos, o método de Webster é aquele em que as violações da regra da quota são mais raras (Balinsky and Young pg. 132).

Relativamente ao enviesamento dos métodos, já referimos que o método de Jefferson tende a favorecer estados grandes. Simetricamente o método de Adams tende a favorecer estados pequenos. A ordem em que os 5 métodos tradicionais dos divisores ficam colocados, começando naquele que mais favorece estados pequenos e terminando no que menos favorece estados pequenos é: Adams > Dean > Huntington-Hill > Webster > Jefferson (Balinsky and Young pg. 119). O método de Webster é o único método de divisores que não é enviesado, isto é, que não favorece nem estados grandes nem estados pequenos (Balinsky and Young pg. 125).

O leitor interessado encontrará a demonstração destas e de outras propriedades dos métodos dos divisores no livro de Balinsky and Young; assim como as formulações matemáticas quer do problema de representação proporcional quer dos métodos de divisores.

Métodos dos divisores na Europa

Enquanto que os métodos dos divisores desenvolvidos por estadistas e matemáticos norte americanos determinam o total de representantes de um estado de uma só vez, os métodos desenvolvidos de forma independente na Europa, vão atribuindo um lugar de cada vez até completar todo o parlamento, verificando a cada passo a que partido será atribuído o lugar em consideração. Num método de divisores (nas versões desenvolvidas na Europa) considera-se uma sequência de divisores $d(a),\ a = 0, \ldots, M-1$. O método seleciona os M maiores rácios $\frac{p_i}{d(a)}, i = 1, \ldots, N, a = 0, \ldots, M-1$, atribuindo por cada rácio selecionado um lugar ao partido i correspondente.

Abordaremos apenas os dois métodos mais usados atualmente: o método de D'Hondt, proposto em 1878 pelo belga Victor D'Hondt – advogado e professor de direito civil; e o método de Sainte-Lagüe, proposto em 1910 pelo matemático francês André Sainte-Lagüe.

O método de D'Hondt

Este método é atualmente usado nas eleições de Portugal, Áustria, Bélgica, Espanha, Finlândia, Grécia, Holanda, Islândia, Luxemburgo e Suíça. O método de D'Hondt é usualmente descrito pelo seguinte algoritmo:

- Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista, no circulo eleitoral respetivo;
- O número de votos apurado por cada lista eleitoral é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza

numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respetivo;

- Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

Em caso de empate, a constituição portuguesa estabelece que o mandato seja atribuído à lista eleitoral com menos mandatos.

Apliquemos o método de D'Hondt ao exemplo fictício da *tabela 1*. A *tabela 7* apresenta os quocientes das populações dos estados divididas pela sequência de divisores 1, 2,..., 11.

	A	B	C	D	E	F
1	**27744**	**25178**	**19951**	**14610**	**9225**	**3292**
2	**13872**	**12589**	**9975.5**	**7305**	**4612.5**	1646
3	**9248**	**8392.667**	**6650.333**	**4870**	**3075**	1097.333
4	**6936**	**6294.5**	**4987,75**	**3652.5**	2306.25	823
5	**5548,8**	**5035.6**	**3990.2**	**2922**	1845	658.4
6	**4624**	**4196.333**	**3325.167**	2435	1537.5	548.6667
7	**3963.429**	**3596.857**	**2850.143**	2087.143	1317.857	470.2857
8	**3468**	**3147.25**	2493.875	1826.25	1153.125	411.5
9	**3082.667**	**2797.556**	2216.778	1623.333	1025	365.7778
10	**2774.4**	2517.8	1995.1	1461	922.5	329.2
11	**2522.182**	2288,909	1813.727	1328.182	838.6364	299.2727

tabela 7: Aplicação do método de D'Hondt ao exemplo da *tabela 1*. A sombreado os 36 maiores quocientes.

O maior quociente é $27744/1$ que corresponde ao estado A. O 2º maior quociente é $25178/1$ que corresponde ao estado B, o 3º maior quociente é $19951/1$, correspondente ao estado C, o 4º maior quociente é $14610/1$ correspondente ao estado D e assim sucessivamente até determinarmos os 36 maiores quocientes. Deste modo a distribuição pelos 6 estados dos 36 lugares no parlamento é a indicada na seguinte *tabela 8*.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	11	9	7	5	3	1

tabela 8: Solução para o exemplo da *tabela 1* encontrada com o método de D'Hondt.

O método de Sainte-Lagüe

O método de Sainte-Lagüe é usualmente descrito por um algoritmo análogo ao do método de D'Hondt, diferindo apenas na sequência de divisores que neste caso é 1, 3, 5, 7, etc...

Algoritmo do método de Sainte-Lagüe

- Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista, no circulo eleitoral respetivo;
- O número de votos apurado por cada lista eleitoral é dividido, sucessivamente, por 1, 3, 5, 7, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respetivo;
- Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

Apliquemos o método de Sainte-Lagüe ao exemplo fictício da *tabela 1*. A *tabela 9* apresenta os quocientes das populações dos estados divididas pela sequência de divisores 1, 3,..., 21.

	A	B	C	D	E	F
1	**27744**	**25178**	**19951**	**14610**	**9225**	**3292**
3	**9248**	**8392.667**	**6650.333**	**4870**	**3075**	1097.333
5	**5548.8**	**5035.6**	**3990.2**	**2922**	**1845**	658.4
7	**3963.429**	**3596.857**	**2850.143**	**2087.143**	1317.857	470.2857
9	**3082.667**	**2797.556**	**2216.778**	**1623.333**	1025	365.7778
11	**2522.182**	**2288.909**	**1813.727**	1328.182	838.6364	299.2727
13	**2134.154**	**1936.769**	**1534.692**	1123.846	709.6154	253.2308
15	**1849.6**	**1678.533**	**1330.067**	974	615	219.4667
17	**1632**	**1481.059**	1173.588	859.4118	542.6471	193.6471
19	**1460.211**	1325.158	1050.053	768.9474	485.5263	173.2632
21	1321.143	1198.952	950.0476	695.7143	439.2857	156.7619

tabela 9: Aplicação do método de Sainte_Lagüe ao exemplo da *tabela 1*. A sombreado os 36 maiores quocientes.

O maior quociente é $27744/1$ que corresponde ao estado A. O 2º maior quociente é $25178/1$ que corresponde ao estado B, o 3º maior quociente é $19951/1$, correspondente ao estado C, o 4º maior quociente é $14610/1$ correspondente ao estado D e assim sucessivamente até determinarmos os 36 maiores quocientes. Deste modo a distribuição pelos 6 estados dos 36 lugares no parlamento é a indicada na seguinte *tabela 10*.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	10	9	8	5	3	1

tabela 10: Solução para o exemplo da *tabela 1* encontrada com o método de Sainte_Lagüe.

O método de Sainte-Lagüe é atualmente utilizado nas eleições de Alemanha, Bósnia, Dinamarca, Polónia e Noruega. Na Suécia é usada uma versão modificada do método que considera como primeiro divisor 1.4 em vez de 1. Esta alteração tem como objetivo dificultar o acesso de partidos muito pequenos a um lugar no parlamento.

Forma recursiva do método de Jefferson a partir da quota mínima

Como referimos anteriormente, os métodos dos divisores desenvolvidos nos Estados Unidos da América atribuem a cada estado todos os lugares que lhe correspondem de uma só vez, enquanto que os métodos de divisores desenvolvidos na Europa vão atribuindo um lugar de cada vez aos diferentes partidos. Os primeiros têm a desvantagem prática de necessitar de “adivinhar” um divisor adequado, os segundos têm a morosidade de atribuir um lugar de cada vez.

Retomemos a aplicação do método de Jefferson ao exemplo fictício da *tabela 1*, no ponto da verificação da necessidade de alterar o divisor standard para um divisor adequado.

Observando a *tabela 4* verificamos que estão atribuídos 34 lugares, faltando atribuir outros 2. O método de Jefferson atribuiu um número de lugares igual à quota mínima modificada. Então para atribuir mais um lugar, para algum estado *i* a quota mínima modificada terá de ser $\lfloor q'_i \rfloor = \lfloor q_i \rfloor + 1$. Assim, por exemplo, para o estado A passar a ter 10=9+1 representantes no parlamento a sua quota modificada teria de ser pelo menos 10. Como $q'_i = \frac{p_i}{D'} <=> D' = \frac{p_i}{q'_i}$ procuramos o divisor modificado que atribuirá 10 lugares ao estado A, dividindo a sua população por 10. Da mesma forma, para que seja atribuído mais um lugar ao estado C (7+1), a sua quota modificada terá de ser pelo menos 8 e procuramos o divisor modificado adequado dividindo a sua população por 8. Procedamos aos cálculos para encontrar o divisor modificado que traria mais um lugar a cada um dos estados, ou seja, executemos a divisão da população de cada estado pela sua atual quota mínima +1, isto é, $\frac{p_i}{\lfloor q_i \rfloor+1}$, conforme mostra a *tabela 11*.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512
Quota mínima ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1
($\frac{p_i}{\lfloor q_i \rfloor+1}$)	$\frac{27744}{9+1}=$ 2774.4	$\frac{25178}{9+1}=$ 2517.8	$\frac{19951}{7+1}=$ 2493.875	$\frac{14610}{5+1}=$ 2435	$\frac{9225}{3+1}=$ 2306.25	$\frac{3292}{1+1}=$ 1646

tabela 11: Procura de um divisor modificado que partindo do divisor standard $D = 2777.(7)$ atribui mais um lugar do parlamento ao aplicar o método de Jefferson ao exemplo da *tabela 1*.

O maior dos quocientes calculados é 2774.4, correspondente ao estado A. Isto significa que diminuindo o divisor standard $D = 2777.(7)$, o primeiro valor a partir do qual se consegue distribuir mais um lugar no parlamento é $D' = 2774.4$, sendo o novo lugar atribuído ao estado A. A *tabela 12* mostra a distribuição dos lugares pela quota mínima, usando o divisor modificado $D' = 2774$.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota modificada (q'_i)	10.00144	9.076424	7.192141	5.266763	3.325523	1.186734	
Quota mínima modificada($\lfloor q'_i \rfloor$)	10	9	7	5	3	1	35

tabela 12: Distribuição dos lugares para o exemplo da *tabela 1* obtida com o método de Jefferson usando o divisor standard $D' = 2774$.

Estão agora distribuídos 35 lugares restando 1 por atribuir. Para determinar qual o estado a receber o último lugar procede-se da mesma forma que anteriormente. O estado a receber o 36º lugar no parlamento será aquele que, ao reduzir-se o divisor, primeiro vir a sua quota mínima aumentar uma unidade. Ou seja, dividindo as populações dos estados pelo número de lugares que atualmente lhe estão atribuídos, mais um, o maior dos quocientes corresponde ao estado a quem primeiro será atribuído mais um lugar. A *tabela 13* mostra os referidos quocientes na última linha.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Quota modificada (q'_i)	10.00144	9.076424	7.192141	5.266763	3.325523	1.186734
Quota mínima modificada($\lfloor q'_i \rfloor$)	10	9	7	5	3	1
($\frac{p_i}{\lfloor q'_i \rfloor+1}$)	$\frac{27744}{10+1}=$ 2522.182	$\frac{25178}{9+1}=$ 2517.8	$\frac{19951}{7+1}=$ 2493.875	$\frac{14610}{5+1}=$ 2435	$\frac{9225}{3+1}=$ 2306.25	$\frac{3292}{1+1}=$ 1646

tabela 13: Procura de um divisor modificado que partindo do divisor modificado $D' = 2774$ atribui mais um lugar do parlamento ao aplicar o método de Jefferson ao exemplo da *tabela 1*.

O maior dos quocientes calculados é 2522.182, que corresponde novamente ao estado A. Isto significa que diminuindo o divisor modificado $D' = 2774$, o primeiro valor a partir do qual se consegue distribuir mais um lugar no parlamento é $D' = 2522.182$, sendo o novo lugar atribuído ao estado A. A *tabela 5* mostrou já a distribuição dos lugares pela quota mínima, usando o divisor modificado $D' = 2522$. Está agora esclarecida a escolha deste divisor modificado.

Forma recursiva completa do método de Jefferson

Imaginemos agora que em vez de iniciarmos o método de Jefferson com o divisor standard e as respetivas quotas, se inicia o método com um divisor tão grande que a quota mínima para todos os estados seja zero. Ou dito de outra forma, à partida considera-se que todos os estados têm zero lugares atribuídos. Para descobrir a que estado será atribuído o primeiro lugar, basta dividir as populações de cada estado pela sua quota mínima (zero) mais 1 e verificar qual o estado a que corresponde o maior quociente, isto é, o maior divisor a partir do qual se consegue atribuir um lugar do parlamento. Consideremos que o maior divisor corresponde ao estado *k*. Então numa primeira iteração, a todos os estados serão atribuídos zero lugares, exceto ao estado *k* (o estado com mais população), que terá 1 lugar atribuído. (No exemplo da *tabela 1* o 1º lugar será atribuído ao estado A.) Para encontrar o estado a que será atribuído o 2º lugar, dividem-se as populações dos estados pelos lugares que lhe estão atualmente atribuídos, mais 1 (isto é, divide-se a população do estado *k* por 2 e compara-se com as populações dos restantes estados). O lugar será atribuído ao estado ao qual corresponde o maior dos quocientes calculados. (No exemplo da *tabela 1* o 2º lugar será atribuído ao estado B.) O processo repete-se até que todos os lugares do parlamento sejam distribuídos.

Relembrando que $s_i, i = 1, \dots, N$ representa o número de lugares no parlamento atribuídos ao estado (ou partido) i e que temos uma solução admissível quando os s_i são inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$.

A forma recursiva do método de Jefferson é:

(i) $s_i = 0, i = 1, \dots, N$

(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$

Seja k tal que $\frac{p_k}{s_k+1} = max\ \frac{p_i}{s_i+1}$

Fazer $s_k = s_k + 1$ e $s_i = s_i, \forall i \neq k$

O que se traduz por ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores 1, 2, 3, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente. Ora este algoritmo recursivo corresponde à descrição do método de D'Hondt. Assim os métodos de Jefferson e de D'Hondt são na realidade formas computacionais diferentes do mesmo método.

Forma recursiva dos métodos de divisores americanos

Já vimos que no caso do método de Jefferson, a sua forma recursiva consiste em ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores 1, 2, 3, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente.

No método de Webster atribui-se a cada estado um número de lugares igual à sua quota arredondada usualmente. Admitamos que temos uma solução em que a cada estado i foi atribuído um número de lugares s_i tal que $\sum_{i=1}^{N} s_i < M$, isto é, ainda estão lugares por atribuir. Para que a um determinado estado seja atribuído mais um lugar é necessário que a sua quota modificada q'_i passe a ser pelo menos $s_i + \frac{1}{2}$. Usando um raciocínio análogo ao apresentado para o método de Jefferson chegamos à forma recursiva do método de Webster.

A forma recursiva do método de Webster é:

(i) $s_i = 0, i = 1, \dots, N$
(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$
Seja k tal que $\frac{p_k}{s_k+\frac{1}{2}} = max \ \frac{p_i}{s_i+\frac{1}{2}}$
Fazer $s_k = s_k + 1$ e $s_i = s_i, \forall i \neq k$

O que se traduz por ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente. Como o que interessa é a ordem de grandeza do quociente e não o seu valor exato, os estados escolhidos para atribuir mais um lugar serão exatamente os mesmos usando a sequência de divisores 1, 3, 5, etc., o que corresponde à sequência de divisores do método de Sainte-Lagüe. Assim sendo os métodos de Webster e de Sainte-Lagüe são na realidade formas computacionais diferentes do mesmo método.

Aplicando raciocínios análogos aos descritos para os métodos de Jefferson e Webster, chegamos às formas recursivas de todos os métodos de divisores, com as respetivas sequências de divisores que se apresentam na seguinte *tabela 14*.

Métodos dos divisores	**Pontos de arredondamento $d(a)$ $a = 0, 1, \dots, M-1$**	**Sequência de divisores**
Adams	$d(a) = a$	$0, 1, 2, 3, \dots$
Dean	$d(a) = \frac{2a(a+1)}{a+(a+1)} = \frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$	$0, \frac{4}{3}, \frac{12}{5}, \frac{24}{7}, \dots$
Huntington-Hill	$d(a) = \sqrt{a(a+1)}$	$0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \dots$
Webster	$d(a) = \frac{a+(a+1)}{2} = a + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$
Jefferson	$d(a) = a + 1$	$1, 2, 3, 4, \dots$

tabela 14: Sequência de divisores para os cinco métodos de divisores tradicionais.

A forma recursiva dos métodos dos divisores foi deduzida pela primeira vez em 1928 por Edward Huntington.

Repare-se que os métodos cujo primeiro divisor é zero, atribuem na primeira iteração um lugar a todos os estados, o que sendo viável na distribuição dos lugares do parlamento norte americano pelos vários estados, não o é na distribuição de mandatos por partidos eleitorais.

Referências

Balinsky, Michel L. , and H. Peyton Young (2001), “Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote”. Segunda edição Bookings Institution Press. (primeira edição em 1982)

Tannenbaum, Peter (2011), “Excursions in Modern Mathematics” (capítulo 4). Sétima edição Prentice Hall – Pearson. (primeira edição em 1992).

Huntington, Edward V. (1928) “The Apportionment of Representatives in Congress”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 30, pg 85-110.