Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

A EXPERIMENTAÇÃO E A ACTIVIDADE DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA DOS ALUNOS

Ana Margarida Franco de Mendonça Viegas e Silva Baioa

Dissertação apresentada para obtenção do grau de

Mestre em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Orientadora: Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

Faro

2011

Resumo

O principal objectivo deste estudo é compreender de que modo os alunos desenvolvem a sua actividade de modelação matemática quando esta tem por base um trabalho experimental que lhes permita lidar de forma activa com problemas e questões ligadas ao real. Assim, formulei a seguinte questão geral:

Como se caracteriza a actividade de modelação matemática dos alunos em problemas da realidade que envolvem situações de experimentação e manipulação de objectos concretos?

Foram definidas as seguintes sub-questões orientadoras do estudo:

1) De que forma a experimentação, através da manipulação de objectos concretos, ajuda os alunos a descobrir a matemática envolvida num problema da realidade e a representá-la na forma de modelos matemáticos?
2) Quais as rotas, dentro do ciclo da modelação matemática, que os alunos percorrem desde o modelo manipulativo (tangível) até à fase do modelo matemático, vistas através de duas teorias: a Perspectiva de Modelos e Modelação (MMP) e a Educação Matemática Realista (RME)?

O referencial teórico assenta na análise e discussão da Educação Matemática Realística e da Perspectiva de Modelos e Modelação, no sentido de articular estas duas teorias, tendo em conta aspectos teóricos relativos à matemática experimental.

O estudo foi realizado a partir de uma intervenção pedagógica em sala de aula, em duas turmas de 9.º ano, das quais era professora. A metodologia adoptada foi a investigação-acção, tratando-se de uma investigação sobre a própria prática. O trabalho desenvolvido pelos alunos, na sala de aula, foi registado em vídeo e áudio e foram recolhidos os relatórios produzidos pelos alunos.

As principais conclusões obtidas vão ao encontro da complementaridade das duas teorias e conduziram à proposta um novo tipo de actividades de modelação chamadas Actividades Realísticas Geradoras de Modelos, que agrupa as principais potencialidades, tanto da Educação Matemática Realística como da Perspectiva de Modelos e Modelação, com recurso à matemática experimental.

Palavras-Chave: Modelos matemáticos; Educação Matemática Realística; Perspectiva de Modelos e Modelação; Matemática experimental; Actividades Realísticas Geradoras de Modelos; Investigação-acção.

Abstract

The main purpose of this study is to understand how students develop their mathematical modelling activity when it is based on an experimental work that allows them to actively deal with problems and issues related to the real world. So I formulated the following general question:

What characterizes students' mathematical modelling activity on real problems that involve experimentation and manipulation of material objects?

I have identified the following sub-questions that guided the study:

1) How does experimentation, through the manipulation of material objects, help students to discover the mathematics involved in a real problem and represent it in the form of mathematical models?
2) What routes within the mathematical modelling cycle, do students follow from the manipulative model (tangible) to the stage of the mathematical model, as seen through two theories: Models and Modelling Perspective (MMP) and Realistic Mathematics Education (RME)?

The theoretical framework is based on the analysis and discussion of the Realistic Mathematics Education and of the Models and Modelling Perspective, aiming at linking these two theories by taking into account the theoretical aspects related to experimental mathematics.

The study was developed based on a teaching experiment carried out in the classroom with two classes of 9th graders, of which I was the teacher. The methodology adopted was action research, under the approach of researching my own teaching practice. The work done by students in the classroom was recorded on video and audio and the written reports produced by the students were collected.

The main conclusions are in line with the complementarities of the two theories and led to the proposal for a new type of modelling activities called Realistic Modelling Eliciting Activities, which groups the main potentialities, both of Realistic Mathematics Education and of the Models and Modelling Perspective, through the inclusion of experimental mathematics.

Keywords: Mathematical models; Realistic Mathematics Education; Models and Modelling Perspective; Experimental Mathematics; Realistic Modelling Eliciting Activities; Action research.

Agradecimentos

À Professora Doutora Susana Carreira, que me orientou neste trabalho, pelas suas sugestões, críticas e ensinamentos, bem como, pelas palavras de estímulo e encorajamento com que sempre me apoiou e incentivou.

À Professora Doutora Nélia Amado, pela sua amizade e apoio em todos os momentos.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo empenho e disponibilidade que sempre revelaram.

Aos meus amigos, pelo interesse que manifestaram, pelo encorajamento dado e pelo carinho demonstrado.

À minha família, pela paciência que tiveram e por todo o apoio e encorajamento que me deram mesmo nos momentos mais difíceis.

Dedico este trabalho à memória da minha irmã, Aninhas.

Índice geral

Índice de figuras

Capítulo 1

Âmbito do estudo e problema de investigação

> "A Matemática tem-se desenvolvido quer na resposta a solicitações internas e sobretudo pelo esforço na resolução de problemas que lhe são próprios, quer também, como muitos exemplos da sua história ilustram, na resposta a solicitações de outras ciências e aos problemas que elas colocam. Estas solicitações exteriores têm, em muitos momentos, constituído inspiração e motor do desenvolvimento da Matemática, nuns casos conduzindo à elaboração de modelos para resolver o problema colocado, em outros casos levando mesmo à incorporação, na Matemática, de elementos que lhe são externos."
>
> (Ministério da Educação-DGIDC, 2007, p.2)

Muitas áreas da ciência e da sociedade têm recorrido à Matemática para resolver determinados problemas ou explicar diversas situações ou conhecer e compreender inúmeros fenómenos. Em muitos dos casos, são elaborados modelos matemáticos para resolver o problema colocado ou perceber e actuar sobre determinada situação.

A investigação em educação matemática, que tem sido desenvolvida desde os anos 80, tem evoluído em relação a este domínio específico, especialmente a nível internacional. O ensino da Matemática em Portugal tem mostrado algum progresso no que diz respeito ao reconhecimento da importância da Modelação Matemática no nosso quotidiano, mas só agora começa a aparecer como indicação metodológica no programa do Ensino Básico.

No novo programa do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) vem referida a importância de professores/educadores proporcionarem aos alunos uma formação que lhes permita compreender e utilizar a Matemática numa sociedade em pleno desenvolvimento científico e social.

> "A Matemática é uma das ciências mais antigas e é igualmente das mais antigas disciplinas escolares (…). É (…) uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizamos."
>
> (Ministério da Educação-DGIDC, 2007, p.2)

Matemática, educação, ensino, modelação, sociedade, resolução de problemas, explicação de fenómenos. Porquê? Porque é hoje consensual a importância de preparar os indivíduos para que sejam capazes de identificar e entender o papel da Matemática na nossa sociedade e de fazer julgamentos matemáticos fundamentados, no sentido de se tornarem, na sua vida futura, cidadãos reflexivos, interessados e construtivos (Alsina, 2002).

O que acontece actualmente é que os indivíduos parecem não revelar capacidade suficiente para argumentar matematicamente, acabando por aceitar o que lhes é apresentado como sendo inquestionável. Esta análise traz implicações ao nível do papel e da pertinência da modelação em educação matemática. Se assumirmos que a educação deve ir além do que constitui a preparação para o mundo do trabalho (D'Ambrósio, 1999), então o ambiente de modelação deve envolver modelos matemáticos que ilustrem e revelem a presença da Matemática nas mais variadas esferas da sociedade de hoje. Esta preocupação é tanto mais legítima quanto vários autores sublinham e mostram em que medida a Matemática é formatadora do mundo em que vivemos (Keitel, 1993; Skovsmose, 1995).

Blum (1995) defende que a modelação matemática deve ser incluída na educação escolar pois permite uma compreensão do papel sócio-cultural da matemática. Este motivo está “directamente conectado com o interesse de formar sujeitos para actuar activamente na sociedade e, em particular, capazes de analisar a forma como a matemática é usada nos debates sociais” (Barbosa, 2003, p.2). Os argumentos aduzidos por Blum e Niss (1991) para a introdução da modelação matemática na matemática escolar são cinco: o argumento formativo, o argumento da competência crítica, o argumento utilitarista, o argumento da visão da Matemática e o argumento da aprendizagem.

Destes cinco argumentos, três são especialmente importantes neste trabalho: o argumento formativo, com bastante relevo no currículo português, onde a modelação é um meio através do qual os alunos podem desenvolver capacidades transversais e atitudes, nomeadamente a resolução de problemas, o sentido de investigação, a criatividade e a comunicação matemática; o argumento da “visão da Matemática”, pois as actividades de modelação promovem a descoberta de uma matemática rica e ampla em todas as suas facetas, como ciência e como um suporte para a actividade na sociedade; e o argumento da aprendizagem, sustentando que a modelação auxilia os alunos na aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos, promovendo a compreensão e a consolidação da matemática quando aplicada em novas situações.

1.1. Perspectivas actuais sobre a modelação na educação matemática

A modelação matemática é utilizada por muitas áreas das Ciências para explicar fenómenos e/ou resolver problemas, tais como o melhor design/construção de um automóvel ou de um motor a jacto, a previsão do tempo ou da economia, ou mesmo a construção de uma rede social na Internet. Devido ao desenvolvimento da sociedade, a todos os níveis, nomeadamente tecnológico, começou-se a entender que era necessário que os alunos tivessem contacto com diversas questões relacionadas com a modelação matemática antes de ingressarem no mundo do trabalho, tornando-se importante despertar o seu interesse e aumentar a sua apetência por novas áreas profissionais e científicas. Assim, surge a intenção de incluir a modelação matemática no ensino. Essa intenção começou, primordialmente, no ensino universitário e depois surgiu no ensino secundário e progressivamente tem-se estendido ao ensino básico, de forma mais subtil, em várias regiões do mundo.

É razoável começar por admitir que a especificidade da modelação matemática a nível profissional seja diferente da especificidade da modelação matemática a nível escolar, pois os objectivos a atingir são diferentes, os conhecimentos dos alunos estão longe dos que possuem os matemáticos que se dedicam à modelação em situações mais complexas, os contornos dos problemas a tratar são distintos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas são muito díspares (Matos e Carreira, 1996). Mais ainda, há que ter em linha de conta o tipo de interacção que é própria do ambiente de sala de aula, os conceitos abordados, bem como a interpretação e análise dos dados possíveis de concretizar no contexto escolar (Biembengut e Hein, 2003).

Hoje, têm lugar e estão institucionalizados vários encontros internacionais onde investigadores de todo o mundo se reúnem para debater e comunicar resultados de estudos feitos no âmbito da educação matemática. Mas dentro desta comunidade existem grupos de trabalho e de investigadores que se dedicam à modelação matemática em contexto escolar. Os estudos realizados e apresentados actualmente são referentes aos vários níveis de ensino, desde o básico ao universitário.

Exemplos desses encontros, que incluem e promovem grupos de trabalho específicos são: ICME (Internacional Congress on Mathematical Education), CERME (Conference of European Research in Mathematics Education) e ICTMA (International Conference on the Teaching of Modelling and Applications).

O International Congress on Mathematical Education (ICME,) tem lugar de quatro em quatro anos. O seu principal objectivo é a apresentação do estado da arte e das principais tendências da investigação em educação matemática bem como da prática do ensino da Matemática em todos os níveis de ensino, no mundo inteiro. As questões abordadas no domínio da modelação matemática são as mais variadas:

- Modelação e aplicações da Matemática nos negócios, no ambiente, na indústria e locais de trabalho e avaliação da eficácia de modelos;
- Questões pedagógicas para o ensino-aprendizagem;
- Promoção das competências da modelação e aspectos cognitivos envolvidos na modelação matemática;
- Aplicabilidade da modelação nos diferentes níveis de ensino, investigação sobre as práticas;
- Abordagens teóricas sobre modelos e modelação;
- Práticas inovadoras com modelação matemática;

- Influências da tecnologia no ensino da modelação matemática;
- Exemplos e situações de modelação matemática;
- Avaliação das actividades de modelação nas escolas e universidades.

Participam neste congresso investigadores, professores, educadores, matemáticos e outros interessados nesta área, onde a troca de ideias, informação, pontos de vista e trabalhos produzidos contribuem para o avanço do conhecimento científico e para o estabelecer de ligações e parcerias entre os diversos participantes.

A Conference of European Research in Mathematics Education (CERME) é organizada pela ERME (European Society for Research in Mathematics Education) com o objectivo de promover a comunicação, cooperação e colaboração entre os participantes na investigação em educação matemática na Europa, onde o trabalho colaborativo dentro do congresso tem sido uma direcção a seguir. Procura discutir a investigação que se está a desenvolver e quais os grupos de trabalho que estão a funcionar, além de promover a oportunidade de colaboração entre europeus, de forma a criarem e a desenvolverem projectos de investigação conjuntos dentro dos vários grupos temáticos promovidos no encontro. Este encontro realiza-se de dois em dois anos.

A International Conference on the Teaching of of Modelling and Applications (ICTMA) é um congresso específico sobre o ensino da modelação matemática e aplicações em todos os níveis de ensino. Realiza-se bianualmente desde 1983. Este congresso promove um fórum de discussão em torno de todos os aspectos do ensino das aplicações e modelação matemática, em todas as suas dimensões e em todos os níveis de ensino, desde o básico ao universitário. O ICTMA começou com preocupações sobre a preparação dos alunos que mais tarde, como profissionais, teriam que resolver problemas reais em contextos autênticos. Os desafios continuaram a surgir nesta área, crescendo para outros campos, de acordo com a variedade de objectivos com os quais modelação e as aplicações da Matemática eram implementadas. Em 1976, Henry Pollak apresentou um documento sobre a interacção entre a Matemática e outros domínios, defendendo a integração das Aplicações e Modelação no ensino da Matemática. A ênfase expandiu-se então no sentido de estabelecer metas de aprendizagem nos diferentes níveis de ensino e na formação inicial de professores, conjuntamente com ambientes profissionais onde a aplicação da Matemática a problemas reais era um objectivo claro.

De modo a atingir este propósito, o meio académico dedicou-se, assim, a temas como o desenho e criação de programas educacionais, a análise das competências e desempenhos dos alunos, desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos de ensino e de avaliação e na especialização dos alunos na resolução de problemas reais, de forma individual ou em grupos.

Toda a comunidade de professores que partilha o interesse pelas aplicações e modelação matemática continua interessada em experimentar, investigar e conceber metodologias de ensino-aprendizagem nesta perspectiva e de perceber como os alunos aprendem na actividade de resolução de problemas de Modelação Matemática.

Durante as últimas décadas vários estudos foram feitos, surgindo a necessidade de categorizar as várias perspectivas emergentes da investigação em modelação matemática no ensino, de forma a organizar e sistematizar as várias abordagens em estudo. É de referir que estas perspectivas não são estanques e não cobrem totalmente toda a área de investigação actual. Neste momento, são seis as perspectivas categorizadas por alguns autores, estando uma delas subdivida em duas. Porém, não se trata de uma classificação exaustiva pois as perspectivas elencadas foram distinguidas pelos seus objectivos centrais relativamente ao processo de modelação, de acordo com a literatura existente. São elas a perspectiva realista, a contextual, a educacional (que envolve a conceptual e a didáctica), a sócio-crítica, a epistemológica e a cognitiva (Kaiser e Sriraman, 2006; Blomhoej, 2008).

A perspectiva realista assenta numa utilização pragmática na resolução de problemas do mundo real, na compreensão do mundo e na promoção das competências da modelação, com ligação à perspectiva pragmática de Pollak (1969). No ensino e aprendizagem, esta perspectiva tem o seu ponto de partida no facto de os modelos e a modelação serem extensivamente usados nas várias disciplinas científicas e tecnológicas como uma forma de resolução de problemas. Portanto, o ensino da modelação matemática ajuda os alunos nas suas futuras profissões, quando se estudam com cuidado questões do mundo real, e no criar de situações suportadas pela tecnologia onde os estudantes trabalham com modelação matemática autêntica, avaliam o modelo e os resultados obtidos, confrontando-os com a realidade. Os critérios principais em termos de aprendizagem consistem em proporcionar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de aplicar a Matemática na resolução de problemas da vida real. Como já foi dito, Henry Pollak pode ser visto como uma referência fundamental da perspectiva realista. A perspectiva realista vê a aplicação da Matemática de forma muito séria e a modelação matemática como uma actividade interdisciplinar de resolução de problemas. Certos estudos podem-se ser vistos numa perspectiva realista mas com características da perspectiva educacional, como por exemplo a investigação de Lombardo e Jacobini (2008) que relatam o trabalho desenvolvido em programação linear e modelação matemática com trabalhadores-estudantes cuja profissão está relacionada com negócios e indústria.

A perspectiva contextual foi desenvolvida primeiramente em solo americano e baseada numa investigação extensa em resolução de problemas e no papel dos "word problems", pelo que muitas vezes lhe é dado o nome de modelação contextual no ensino da matemática.

Na última década, a perspectiva da modelação emergente ou dedutiva tem-se desenvolvido dentro da perspectiva contextual, aprofundando a base filosófica da noção de modelo matemático, assim como a sua conexão com teorias de aprendizagem.

A perspectiva educacional divide-se em duas sub-perspectivas: a didáctica da modelação na aprendizagem da matemática, onde a modelação é entendida como um meio para aprender matemática, e a modelação conceptual onde a aquisição de competências em modelação matemática é um objectivo educacional. A ideia principal da perspectiva educacional reside na preocupação de integração da modelação matemática no ensino da matemática. Sob esta perspectiva, têm-se ajustado objectivos a atingir e respectivas justificações, no ensino da matemática a vários níveis, o modo de organizar actividades de modelação em diferentes tipos de currículos de matemática, os problemas relacionados com a implementação da modelação nas práticas dos professores e os problemas relacionados com a avaliação dos alunos nas actividades de modelação. Niss (1987) e Blum e Niss (1991) são referências clássicas para esta perspectiva, que tem tido muita atenção na Europa Ocidental nas últimas três décadas. Definir e discutir noções básicas neste campo de investigação, como modelo, modelação, ciclo ou ciclos de modelação, competências inerentes ao trabalho em modelação e aplicações, e o significado destas noções em relação ao ensino da matemática, em vários níveis de educação, é um elemento importante na investigação dentro desta perspectiva.

A perspectiva epistemológica subordina o desenvolvimento de teorias mais gerais no ensino e aprendizagem da matemática. Dois exemplos diferentes destas teorias são a RME (Realistic Mathematics Education), com raízes nos trabalhos de Hans Freudenthal (1973, 1991), e a ATD (Anthropological Theory of Didactics) que tem vindo a ser desenvolvida, em especial, por Chevallard e por Garcia, Gascón, Higueras e Bosch (2006).

O interesse principal dentro da perspectiva cognitiva é a compreensão das funções cognitivas que estão na base da actividade de modelação matemática dos alunos. Com este intuito, os processos utilizados pelos alunos são analisados mediante a observação da sua actividade, procurando-se reconstruir os seus caminhos no decurso do processo de modelação em situações específicas, bem como os significados matemáticos e extra-matemáticos que são construídos pelos alunos. Esta perspectiva está relacionada com a perspectiva educacional, próxima do desenvolvimento de competências para a modelação matemática, mas também pode ser considerada como a investigação básica sobre o desenvolvimento das competências da modelação. Borromeo Ferri (2006) é um bom exemplo de produção de investigação dentro da perspectiva cognitiva na modelação matemática. Em Portugal, vários dos trabalhos realizados por Matos (1994, 1995), Matos e Carreira (1997), Matos, Carreira, Santos e Amorim (1995) e Carreira (1992, 1998) poderão integrar-se nesta linha.

Um dos investigadores que analisou o poder formatador da modelação matemática e discutiu as consequências para a educação matemática foi Skosmose (2005). Esta análise forma uma importante parte da base da perspectiva sócio-crítica da modelação matemática na educação matemática. Outros investigadores que têm trabalhado nesta temática são Barbosa (2003) e Araújo (2009), entre outros. Também Ubiratan D'Ambrósio (1986, 1999) tem discutido e investigado dentro da perspectiva sócio-crítica pois, para este autor, numa sociedade do conhecimento, educar para a cidadania "exige uma 'apreciação' do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia" (D'Ambrósio, 1998, p.87) e a ciência moderna está sedimentada na Matemática. Um dos objectivos predominantes para o ensino da modelação matemática sob a perspectiva sócio-crítica é tornar os estudantes cidadãos autónomos, independentes e críticos com capacidade de interagir e tomar decisões através da análise de modelos matemáticos.

As referidas perspectivas de investigação em ensino e aprendizagem de modelação matemática são uma tentativa de categorização aberta à interpretação e ao debate (Blomhoej, 2008).

A realidade é entendida como uma complexa inter-relação natural, ambiental, sócio-cultural e emocional de factos e fenómenos, estimulando o indivíduo para a acção. (D'Ambrósio, 1999) De forma a perceber e controlar determinados fenómenos, a sociedade socorre-se de modelos matemáticos, uns já encontrados, outros por encontrar. Para encontrar e estabelecer modelos, a sociedade recorre a modeladores matemáticos profissionais. Mas com o rápido desenvolvimento do mundo actual, os indivíduos devem começar desde o ensino básico a ter contacto com formas de representar/modelar fenómenos. Esse contacto começou a revelar-se, a dada altura, necessário a nível universitário mas o mundo começa agora a dar passos largos no envolvimento dos indivíduos com modelos matemáticos. A modelação matemática torna-se, portanto, uma importante componente no treino profissional e começa a ganhar relevo particular na Educação Matemática (D'Ambrósio, 1999). A incorporação da modelação matemática na educação matemática leva à criação de ambientes próprios de aprendizagem. A este respeito, podem-se colocar várias questões: Como elaborar actividades de modelação? Com que objectivos? Como reagem os alunos a estas actividades? Que competências se podem adquirir com este tipo de actividades? Para dar resposta ou avançar com ideias sobre estas questões é necessário investigar e partilhar resultados e conhecimentos. A necessidade de categorizar as várias abordagens em diferentes perspectivas surge no intuito de clarificar caminhos a percorrer. Apesar desta categorização, ao analisar vários trabalhos apresentados em congressos e outros divulgados em revistas e jornais académicos, é possível verificar que as perspectivas não são estanques, sendo a perspectica sócio-crítica, aparentemente, a mais independente de todas. Algumas perspectivas parecem entrelaçar-se e mesmo complementar-se tais como a perspectiva realista e a educacional bem como a cognitiva e a educacional ou mesmo a contextual e a realista.

Para que a investigação não seja apenas disseminada através de congressos, que por vezes só se realizam de quatro em quatro anos, é necessário que os vários investigadores publiquem as suas descobertas e teorias de forma a sustentar a partilha de informação e a discussão entre pares. No que diz respeito à modelação matemática existem várias revistas e jornais especializados tais como: *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, *Applied Mathematical Modelling*, *Mathematical and Computer Modelling*, *Mathematical Modelling and Applied Computing*, *International Journal of Mathematical Modelling, Simulation and Applications*, *Teaching Mathematics and its Applications e Revista de Modelagem na Educação Matemática*. Outras publicações que muitas vezes têm artigos relacionados com modelação e aplicações em educação matemática são: *Educational Studies in Mathematics*, *Mathematical Thinking and Learning*, *Mathematics Education Research Journal*, *Journal for Didactics of Mathematics*, *International Journal of Science and Mathematics Education*, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *For the Learning of Mathematics*, *Journal of Mathematical Behavior*, *Journal for Research in Mathematics Education* e *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*

Uma outra modalidade, que tem ganho destaque nos últimos anos, de tornar conhecida e popular a modelação matemática, assim como a resolução de problemas reais, é a promoção de concursos e campeonatos. Por exemplo, o CUMCM (Concurso Contemporâneo Universitário em Modelação, do inglês, Contemporary Undergraduate Mathematical Contest in Modeling) organizado pela CSIAM (Sociedade Chinesa de Matemática Industrial e Aplicada) para alunos universitários; o HiMCM (Competição de Modelação Matemática no Ensino Secundário, do inglês, High School Mathematical Contest in Modeling) que oferece aos alunos a oportunidade de competirem em equipa, usando a matemática para apresentarem soluções para problemas de modelação do mundo real, estimulando e melhorando as capacidades de resolução de problemas e comunicação matemática; os MCM/ICM (Competição de modelação matemática/ Competição interdisciplinar de modelação) realizados a partir dos Estados Unidos e organizados pelo COMAP (Consórcio de Matemática e Aplicações) para alunos do ensino secundário e universitário, desafiando-os a clarificarem, analisarem e proporem soluções a problemas abertos; a Mathematics A-lympiad nos Países Baixos, organizada pelo Instituto Freudenthal da Universidade de Utrecht para alunos do último ano do ensino secundário, com o objectivo de preencher os espaços vazios que existem no ensino de diversos países ou por quase ausência da prática de actividades de modelação nas actividades lectivas ou por os professores não saberem lidar com este tipo de actividades ou pela inexistência de tarefas apropriadas nos manuais; e o A B Paterson College Mathematical Modelling Challenge organizado pelo A B Paterson College, Gold Coast Queensland, Australia, que pretende levar os alunos a desenvolverem ferramentas matemáticas para recolher, analisar e sintetizar informação, identificar, desenvolver e verificar modelos, além de promover a comunicação com base em linguagem corrente e em linguagem matemática.

É importante referir que estes concursos são realizados a nível mundial, existindo outros que são de âmbito regional e têm a duração aproximada de trinta e seis horas contínuas.

Dentro da diversidade de projectos de investigação em educação matemática, centrados na área da modelação matemática, poderá destacar-se o recentemente concluído projecto LEMA (Learning and Education in and through Modelling and

Applications). Este projecto reuniu educadores matemáticos de seis países europeus na produção de materiais de suporte para o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, tendo em vista a introdução de actividades de modelação nas práticas docentes. O maior objectivo deste projecto foi facilitar a mudança das práticas dos professores com a introdução de actividades de modelação matemática situadas em contextos do mundo real como os que se podem encontrar nos testes internacionais dos estudos do PISA. As actividades foram elaboradas de acordo com as várias perspectivas teóricas dos diversos membros do grupo de trabalho, resultando um pano de fundo teórico rico e tarefas diversificadas.

1.2. Modelação Matemática no Ensino Básico Português

Em Portugal, uma das referências explícitas à utilização da modelação matemática no ensino aparece como orientação no livro "Renovação do Currículo de Matemática", onde "se considera essencial proporcionar a todos os alunos experiências frequentes com situações variadas (externas e internas à Matemática) que envolvam processos e actividades como interpretar, organizar e representar dados; analisar, construir e criticar modelos matemáticos; planear executar e avaliar projectos ou ensaios." (APM, 1988/2009, p.32).

A modelação matemática aparece de modo ténue sem assumir uma importância que salte à vista do leitor. Surge como uma actividade a desenvolver pelos alunos de forma a fazer a ponte entre os conteúdos a leccionar e as capacidades a adquirir, tais como interpretar situações reais do quotidiano e traduzir uma situação real para linguagem matemática, ou seja, como meio para a formalização de modelos que traduzam uma situação.

Encontra-se depois, explicitamente, no currículo de 1991 como um objectivo geral, o desenvolvimento da capacidade do raciocínio matemático:

> "Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, factos conhecidos, propriedades e relações."
>
> (Ministério da Educação, 1991, Vol. II, p.10)

O novo programa de Matemática para o ensino básico vem alterar e reforçar algumas indicações curriculares do programa ainda em vigor. Em grande destaque estão três capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática: a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático e a Comunicação Matemática que têm objectivos gerais e específicos bem explícitos. A modelação matemática, como actividade na Matemática escolar, consegue reunir no seu desenvolvimento as três capacidades destacadas anteriormente. Sendo, "para além disso, uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizarmos" (Ministério da Educação-DGIDC, 2007, p.2)

A modelação matemática é referenciada no novo programa de matemática do ensino básico, nas finalidades do ensino da Matemática, como uma das dimensões principais da actividade matemática. "Nesta actividade, a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais." (Ministério da Educação-DGIDC, 2007, p.2).

Referências à modelação matemática aparecem, por outro lado, nas dimensões principais da actividade matemática a desenvolver pelos alunos: "capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática" (p.3) e, ainda, como alguns dos objectivos gerais do ensino da matemática: "os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas *representações*. Isto é, devem ser capazes de usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais" (p.5) e "os alunos devem ser capazes de *estabelecer conexões* entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de (…) reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples." (p.6).

Apenas aparece, de forma concreta, no tema "Álgebra":

- Como propósito principal de ensino:

  "Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos." (p.55);

- Nos objectivos gerais de aprendizagem:

  “ (…) Os alunos devem ser capazes de (…) resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.” (p.55);

- Como objectivo específico:

  “Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando funções.” (p.58).

- Como indicação metodológica:

  Propondo-se como tarefa e recurso, onde é indicada, principalmente, no campo das funções:

  “ (…) O trabalho com tarefas que envolvam actividades de simbolização e de modelação. (p.55),

  “As tarefas a propor aos alunos devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente, sem perder de vista a consolidação dos procedimentos de rotina.” (p.56), e;

A modelação matemática pode ser desenvolvida pelos alunos não só ligada às funções mas também às proporções, trigonometria, interpretação e análise de dados, além de outros conteúdos constantes do novo programa de matemática do ensino básico.

Também no programa de Matemática anterior, na secção que diz respeito aos recursos a utilizar, a modelação matemática estava considerada, ainda que de forma dissimulada: “Um programa que se pretende ligado à experiência e à intuição pressupõe a possibilidade de largo uso de materiais diversificados” (ME, 1991, Vol. I, p.197) tais como materiais simples do quotidiano. Aqui consegue-se perceber que a matemática experimental é um dos veículos a utilizar para que os alunos desenvolvam as capacidades destacadas, facto igualmente observado no novo programa (ME-DGIDC, 2007). A matemática experimental constitui, de facto, uma forma de os alunos tomarem um conhecimento vivo e prático do problema ou situação problemática a estudar, no âmbito da modelação matemática. Promove e desenvolve nos alunos a capacidade de recolherem dados, de interpretarem os dados para abordarem problemas, bem como de desenvolverem o seu raciocínio e a sua comunicação matemática no modo como transmitem as suas ideias e resultados aos demais. Torna visível, aos olhos dos alunos, a matemática oculta no fenómeno a ser estudado e de que forma a podemos usar para compreender o que se passa à nossa volta (Keitel, 1993). A matemática experimental coloca o fenómeno a estudar como uma parte integrante do trabalho do aluno, permitindo-lhe entender como o fenómeno funciona, do ponto de vista matemático, e como o pode "manobrar" matematicamente, observando essas alterações na realidade.

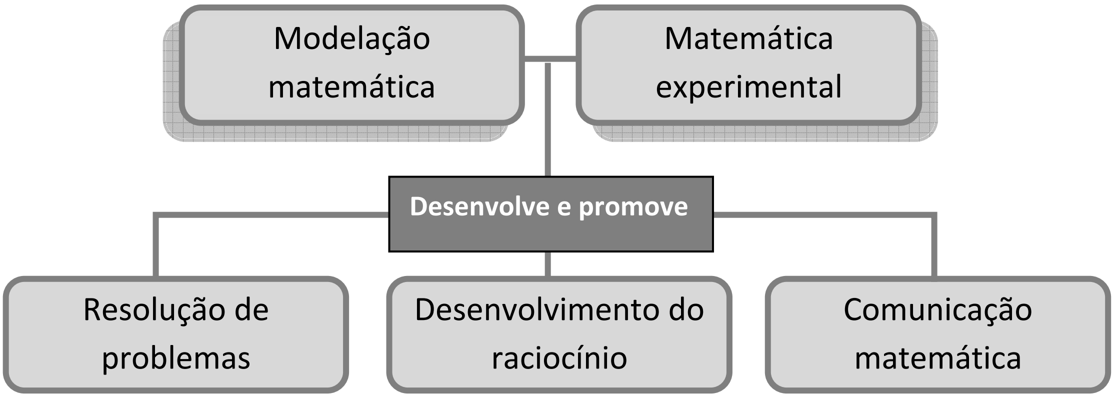


Figura 1. Potencialidades de actividades baseadas em matemática experimental e modelação matemática

1.3. Motivações para o estudo

As motivações que estão na base deste trabalho remetem para preocupações de natureza pessoal e profissional.

Parti, por isso, do papel que a Matemática pode assumir na explicação de situações e fenómenos na actual sociedade do conhecimento, tendo em vista dar aos alunos a hipótese de se emanciparem matematicamente, tornando-os capazes de identificarem a matemática no seu dia-a-dia, dando sentido à aplicação da matemática em situações quotidianas e do seu meio social.

Durante os últimos anos, tem-se verificado que os alunos mostram algumas dificuldades em perceber a ligação entre a Matemática e a sociedade onde estão inseridos. Assim, a introdução de actividades de modelação como estratégia de ensino-aprendizagem pode promover uma aprendizagem mais ampla da matemática, em particular quando se combina a matemática experimental com a modelação matemática (Bonotto, 2002, Halverscheid, 2008).

Sendo a educação matemática realista, a matemática experimental e a modelação matemática, perspectivas actualmente abraçadas por vários investigadores, designadamente no que diz respeito à sua implementação na sala de aula, é minha intenção situar o meu trabalho de investigação neste campo. A minha contribuição vai no sentido de promover a actividade de modelação matemática no ensino como uma metodologia de trabalho inovadora, compreender como os alunos reagem a estas actividades do ponto de vista do processo de modelação matemática, e como se podem construir e elaborar actividades de modelação, tendo por base teorias que ganham espaço neste domínio, mais precisamente a educação matemática realista e a perspectiva didáctica de trabalho com modelos e modelação.

1.4. Problema e questões de investigação

O principal objectivo deste trabalho é compreender de que modo os alunos desenvolvem a sua actividade de modelação matemática quando esta tem por base um trabalho experimental que lhes permita lidar de forma activa com problemas e questões ligadas ao real.

O trabalho que me proponho desenvolver consiste numa intervenção pedagógica em sala de aula, em duas turmas de 9.º ano, das quais sou professora, com ênfase na realização de actividades de modelação. É de referir que os alunos participantes nesta experiência não tiveram qualquer contacto com a modelação matemática antes do estudo. As actividades de modelação a apresentar aos alunos dividem-se em duas partes, uma experimental com objectos manipuláveis e artefactos concretos e outra de interpretação e matematização, na qual têm que encontrar e trabalhar sobre um modelo matemático. No final da actividade, cada grupo de trabalho irá apresentar um relatório final escrito, com todo o trabalho desenvolvido. O propósito deste tipo de actividades consiste em colocar os alunos perante situações que envolvem a experimentação e a manipulação de objectos do dia-a-dia, tendo em vista um contexto activo de exploração da situação proposta e uma melhor compreensão do problema proposto.

O trabalho desenvolvido pelos alunos, na sala de aula, será registado em vídeo e áudio. Os alunos serão organizados em cinco grupos de trabalho e em cada actividade será feito o registo vídeo-áudio integral da actividade de um dos grupos (escolhido ao acaso), de modo a que os cinco grupos sejam rotativamente gravados. Outro registo de carácter mais alargado em vídeo-aúdio é feito através de uma câmara móvel que permite captar momentos do trabalho desenvolvido pelos restantes grupos de alunos em cada actividade. Deste modo, pretendo assegurar a observação e a cobertura do registo de imagem do trabalho realizado pelos vários alunos, conjuntamente com a recolha dos relatórios escritos de todos os grupos de alunos.

Este contexto de intervenção pedagógica servirá de base ao trabalho empírico no processo de investigação que me proponho realizar.

Assim, o meu problema de partida, neste estudo, será:

Como se caracteriza a actividade de modelação matemática dos alunos em problemas da realidade que envolvem situações de experimentação e manipulação de objectos concretos?

Com o objectivo de operacionalizar a questão central formulada, apresentam-se as seguintes sub-questões orientadoras do estudo:

1) De que forma a experimentação, através da manipulação de objectos concretos, ajuda os alunos a descobrir a matemática envolvida num problema da realidade e a representá-la na forma de modelos matemáticos?
2) Quais as rotas, dentro do ciclo da modelação matemática, que os alunos percorrem desde o modelo manipulativo (tangível) até à fase do modelo matemático, vistas através de duas teorias: a Perspectiva de Modelos e Modelação (MMP) e a Educação Matemática Realista (RME)?

Capítulo 2

Enquadramento teórico

Na investigação internacional em educação matemática, têm surgido inúmeros estudos, envolvendo a modelação matemática e as aplicações em campos extra-matemáticos ou naquilo a que se pode chamar de mundo real ou, ainda, de acordo com Henry Pollak (1969), “o resto do mundo”.

O estado da arte actual contém muitos exemplos, estudos, contribuições conceptuais e fontes, envolvendo as relações entre o mundo real e a matemática, para todos os níveis de ensino. (Blum, Galbraith, Henn, Niss, 2007).

Com o ensino em mudança, as actividades de modelação matemática começam a ser uma realidade nas salas de aula, pelo menos essas são orientações implícitas no currículo nacional. Ensinar Matemática hoje, com aplicações, significa menos conversa, menos quadro e giz no método de ensino, significa deixar de ensinar por um livro de texto, mas fornecer várias fontes de informação que abram novas janelas aos alunos, de modo a que estes se desenvolvam como indivíduos e como grupo (Alsina, 2007) de forma a integrarem a sociedade de forma activa e participativa.

Quando se pretende escolher alguém para ocupar um lugar no mundo do trabalho, um dos itens a ter em conta é a experiência. A experiência contribui para a formalização de conceitos abstractos, onde o próprio indivíduo constrói o seu percurso de aprendizagem, partindo do seu próprio conhecimento.

A escola de hoje não pode ficar à parte do que se passa na sociedade. A sociedade tem mudado, evoluído e a escola também tem que evoluir, mudar. O método tradicional de “quadro e giz” já não é tão motivador para os alunos, pelo que o papel dos estudantes na sala de aula tem que ser cada vez maior. Para que isso aconteça, o aluno deve ser instruído de forma a construir o seu próprio conhecimento. Os alunos de hoje querem saber para que serve e onde se pode aplicar a Matemática que lhes é ensinada e, nesse sentido, é importante proporcionar-lhes experiências nas quais vejam a sua realidade reflectida, o que se torna um desafio para o professor. É preciso colocar o aluno a *fazer* Matemática.

Monteiro (1991) afirma que o ensino da Matemática se torna mais significativo para quem aprende, quando se parte do real-vivido dos educandos para chegar a níveis mais formais e abstractos do conhecimento matemático. É preciso que os alunos partilhem ideias, raciocínios, processos, estabeleçam conexões, comparem, construam conjecturas e desenvolvam capacidades de comunicação e argumentação. A modelação matemática e a matemática experimental devem integrar as actividades lectivas pois abrangem todo este leque de competências. O ensino do século XXI deve integrar resolução de problemas, projectos, investigações e experiências relativas a assuntos que digam algo aos estudantes, para que estes se envolvam com motivação (Hurd, 2000).

O currículo nacional transmite a importância de os alunos desenvolverem de forma autónoma novos conhecimentos a partir de outros já existentes. Para desenvolver tais capacidades é necessário investir numa Matemática aplicada, contextualizada, interdisciplinar e em metodologias que os habituem a utilizar conhecimentos prévios, na perspectiva de encontrarem, por si próprios, respostas às perguntas a que precisem de responder sem dependerem do professor ou do livro de texto (Kfouri, 2009).

Jiang (2001) afirma que os alunos que necessitarão da Matemática para resolver problemas no futuro precisam de adquirir capacidades e métodos na descrição desses problemas em linguagem matemática, isto é, de construírem, eles próprios, modelos matemáticos. E o ensino tradicional não os prepara para tais situações.

A Matemática experimental e a modelação matemática estão de mãos dadas. As experiências de ensino devem ser realistas de forma a desocultar a matemática que existe ao nosso redor. Nós lidamos com a Matemática oculta todos os dias, ela está presente em situações simples como preparar uma lata de tinta com a cor escolhida por um cliente para pintar as paredes da casa (Keitel, 1993).

Na escola, ensina-se num determinado contexto social local mas não se pode esquecer o contexto global, político, económico e social.

Também o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) defende que é necessário que os indivíduos sejam capazes de identificar e entender o papel da Matemática na nossa sociedade, de fazer julgamentos matemáticos fundamentados, no sentido de se tornarem na sua vida futura, cidadãos reflexivos, interessados e construtivos (Alsina, 2002).

Em contexto escolar, as situações reais devem ser apresentadas aos alunos de forma que estes entendam o contexto do problema a estudar. Uma das várias metodologias a desenvolver, neste sentido, é a modelação matemática. Esta metodologia de ensino é muito rica pois abrange muitas competências que os alunos de hoje devem desenvolver, tais como a interpretação de um problema, a capacidade de analisar informação e de resolver problemas, a matematização, a procura de respostas e a capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chegam.

As actividades propostas aos alunos devem estar de acordo com a sua idade escolar; por exemplo, no ensino pré-escolar pode-se apresentar um problema fictício baseado numa história de fadas mas o mesmo pode não ser apropriado a alunos do 3.º ciclo, pois estes preferem lidar com algo que possam experimentar e que seja real.

A modelação na educação matemática tem as suas raízes na resolução de problemas, pois é, para vários teóricos, um tipo de resolução de problemas.

Entre os educadores matemáticos, o termo resolução de problemas tem vários significados. Para uns, são problemas as situações para as quais é necessário encontrar uma solução, para outros são os “word problems” (problemas de palavras) onde o aluno deve interpretar o que o problema pretende e depois decidir como encontrar a resposta, ou ainda, são puzzles tais como a Torre de Hanoi ou os quadrados mágicos.

A modelação matemática partilha de algumas destas características mas de uma forma distinta. Frequentemente, numa situação de modelação matemática, um fenómeno que é não-matemático tem que ser modelado, isto é, representado através de símbolos matemáticos, ou seja, há que matematizar o fenómeno, determinar várias relações entre variáveis, interpretar essas relações matemáticas e encontrar soluções para o problema em estudo (Swetz e Hartzler, 1991).

2.1. Modelos matemáticos e ciclos de modelação

Quando analisamos a ideia de modelo, é possível encontrar, numa primeira abordagem, vários tipos de modelos categorizados: os modelos físicos, tangíveis e concretos e os modelos teóricos (Mason e Davis, 1991). Os modelos físicos são normalmente réplicas de objectos reais, numa determinada escala; e os modelos teóricos, um conjunto de leis que representa adequadamente uma determinada situação (Swetz, 1989). É nesta última categoria que os modelos matemáticos, normalmente, se enquadram.

Modelo matemático não tem uma definição única; vários autores descrevem-no de diferentes formas com uma base comum: um modelo matemático é uma representação matemática de uma dada situação do mundo real (Carreira, 1998). Por exemplo, Davis e Hersh (1981) defendem que um modelo matemático é sempre uma tentativa de representação de uma determinada situação, esperando-se que resulte o melhor possível. O mesmo é defendido por Changeux e Connes (1991), tendo em conta que devido à revisão da nossa percepção da realidade, um modelo será sempre alterado por outro mais eficiente. Freudenthal (1991) também converge neste sentido, assumindo que modelos matemáticos são idealizações simplificadas da realidade, estruturadas por meio de conceitos matemáticos.

Uma realidade pode ser vista e modelada de formas diferentes, dependendo do objectivo da criação do modelo, pois propósitos diferentes originam modelos diferentes. Tudo depende de quem interpreta a situação e constrói o modelo. Analisando o lado interpretativo dos modelos, Skovsmose (1989) argumenta que existem três factores decisivos no processo de construção de um modelo:

(1) Nunca é directa a representação de uma situação através de um modelo, existe sempre no meio uma interpretação dessa mesma situação;

(2) É necessário ter em conta o quadro teórico que funciona como referência para a construção do modelo;

(3) Têm influência as intenções e os interesses de quem constrói e de quem o utiliza.

Assim, a noção de modelo matemático sustentada por Skovsmose é a de que “um modelo matemático está relacionado com uma situação, através de um sistema conceptual, com teorias e diferentes interesses” (p.114). Mogens Niss (1989) propõe um conceito de modelo matemático assente em três entidades. Essas três entidades formam o terno (R,M,f), em que R simboliza uma parte da realidade a ser estudada, M é constituído por um conjunto de objectos, conceitos e relações matemáticas e f é uma correspondência que permite fazer a transferência de determinados elementos de R para elementos de M, provocando assim uma indissociação entre os elementos do mundo real e os elementos do mundo matemático pela relação que se mantém sempre entre eles. Tal como Niss, também Warzel (1989) relaciona os diversos componentes do modelo, mas com uma diferença que está na introdução de um quarto componente – o sujeito – pois reconhece o papel decisivo do sujeito na construção de modelos. Segundo Warzel, a relação R(S,O,M,P) indica que o sujeito (S), tendo em vista o objectivo (O), assume a entidade (M) como modelo do protótipo (P), garantindo três propriedades essenciais nos modelos matemáticos. "A primeira é a propriedade da transferência (mapping), através da qual os modelos constituem mapas ou representações de certos originais. Uma segunda é a propriedade de redução (shorting), pelo facto de os modelos nunca conterem todos os possíveis pormenores dos seus protótipos; apenas são modelados os aspectos fundamentais do ponto de vista do(s) objectivo(s) do sujeito modelador. A terceira, que é a propriedade pragmática, mostra que os modelos têm uma relação com os seus protótipos com interferências pois a representação é estabelecida por um determinado sujeito, com visões e concepções próprias" (Carreira, 1998, p.70).

O processo de desenvolvimento da representação matemática de situações específicas, com objectivos específicos, é o que se entende por modelação matemática. Nesta perspectiva, é usual o processo cíclico e interactivo de teste e revisão de sucessivas interpretações e ajustamento do modelo à situação. Tal como qualquer noção, a de modelação matemática não está fechada e acabada, é uma construção teórica, uma forma de descrever e compactar o significado central do processo de modelação, tratando-se naturalmente de uma idealização, à semelhança de outras como o modelo de Polya da resolução de problemas. Muitos são os autores que ao longo dos últimos trinta anos têm contribuído para a actualização e desenvolvimento da noção de modelação matemática e do diagrama de representação do ciclo de modelação matemática.

Um investigador de referência no campo da modelação, com uma especial atenção à utilização da modelação para uma melhor compreensão do mundo real é com certeza Pollak. A seguir pode-se ver o ciclo, simples, de modelação proposto por este investigador (Figura 2.1.).

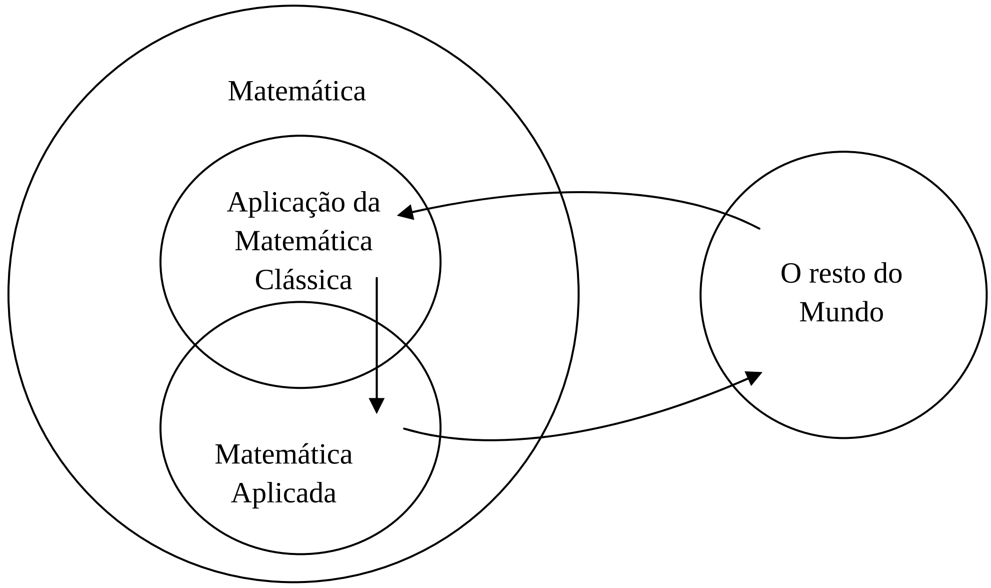


Figura 2.1. Ciclo de Modelação de Pollak (1979), apresentado por Borromeo Ferri (2006)

Niss (1989), outro importante investigador nesta área, entende por modelação matemática todo um processo que tem origem numa determinada situação (fragmento da realidade) e que termina na construção de um modelo matemático representativo dessa situação. O processo de construção desse modelo, segundo Niss (1989), consiste nas seguintes fases, que são afinal uma descrição do ciclo de modelação:

(1) Identificar os aspectos da situação a modelar;
(2) Seleccionar os objectos, relações e outros elementos que são relevantes para o estudo;
(3) Visionar os dados anteriores sob uma forma adequada para a sua representação matemática;
(4) Escolher um universo matemático adequado para conceber o modelo;
(5) Traduzir para a Matemática os aspectos seleccionados da realidade;
(6) Estabelecer relações matemáticas entre os objectos traduzidos, explicitando os pressupostos formulados e as propriedades encontradas;
(7) Usar métodos matemáticos para obter resultados matemáticos e conclusões;
(8) Interpretar os resultados e conclusões em função da realidade original;
(9) Avaliar o modelo, confrontando-o com a realidade.
(10) Modificar o modelo ou construir um novo modelo, se necessário, percorrendo de novo as fases anteriores.

Estas fases são encontradas também no ciclo de modelação apresentado por Blum/Leiss (2005) mas com uma adaptação ao contexto educacional, pois além de identificar os aspectos da situação a modelar, a situação real é preparada e simplificada, criando um modelo real, de modo a não levantar obstáculos insuperáveis aos alunos.

No ciclo de modelação de Blum/Leiss (2005), em primeiro lugar, a situação problemática tem que ser compreendida pelo aluno “modelador” (problem solver), ou seja, tem que ser construído um modelo da situação, seguindo-se uma simplificação, estruturação e preparação de um modelo real da situação, que permitirá ao aluno “modelador” definir o que é importante para explorar. Através da matematização, o modelo real é transformado num modelo matemático, que é trabalhado matematicamente (cálculos, resolução de equações, etc.), obtendo-se resultados matemáticos. Esses resultados são interpretados no mundo real, como resultados reais, de forma a serem validados. Se os resultados obtidos não forem congruentes com a realidade, um novo ciclo é realizado, tendo em conta factores que poderão ter sido ignorados no primeiro ciclo.

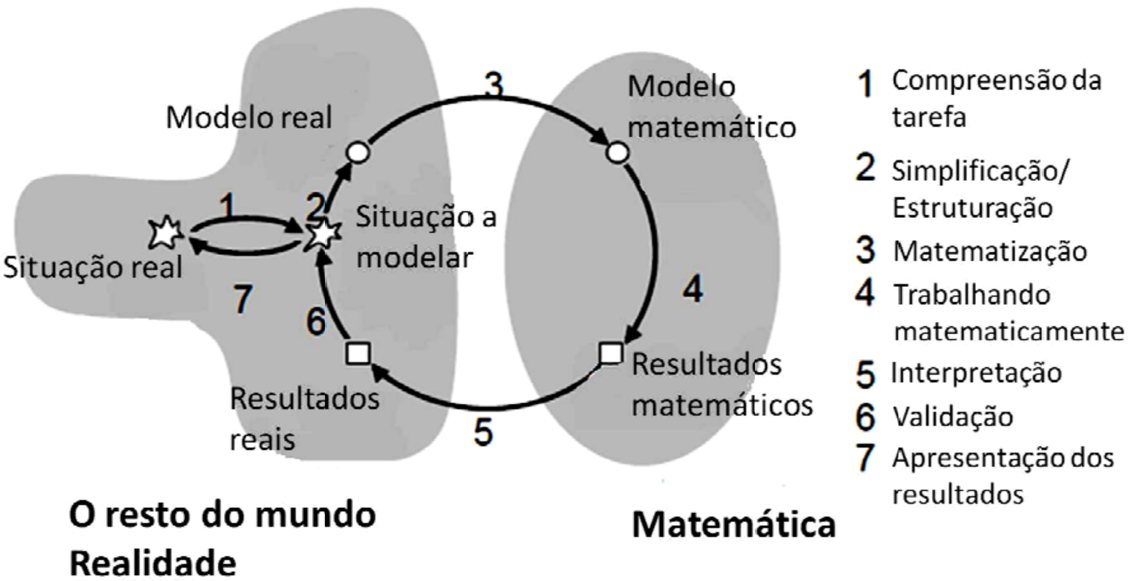


Figura 2.2. Ciclo de modelação matemática de Blum/Leiss (2005)

Outra apresentação do ciclo de modelação é feita por Blomhoej e Jensen (2007) que mostram o processo de modelação percorrido pelos alunos, dividido em 6 fases. Estes partem de uma situação problemática (a) e constroem um modelo matemático, resolvem o problema matematicamente e transferem a solução para a situação problemática inicial. A sistematização do problema é baseada em teorias, experiências ou em assumpções *ad hoc* que levam os alunos a um sistema ou modelo real que pode ser descrito matematicamente (b). A fase (c) consiste na representação matemática de objectos e suas relações dentro do modelo real, de forma coerente. Utilizam métodos matemáticos para encontrarem soluções e conhecimentos mais profundos da situação (d); interpretam os resultados obtidos em relação ao domínio inicial de investigação (e) e realizam uma avaliação da validade do modelo encontrado através das suas experiências, observações ou resultados previstos ou ainda através do seu conhecimento teórico, reflectindo sobre todo o processo de modelação (f).

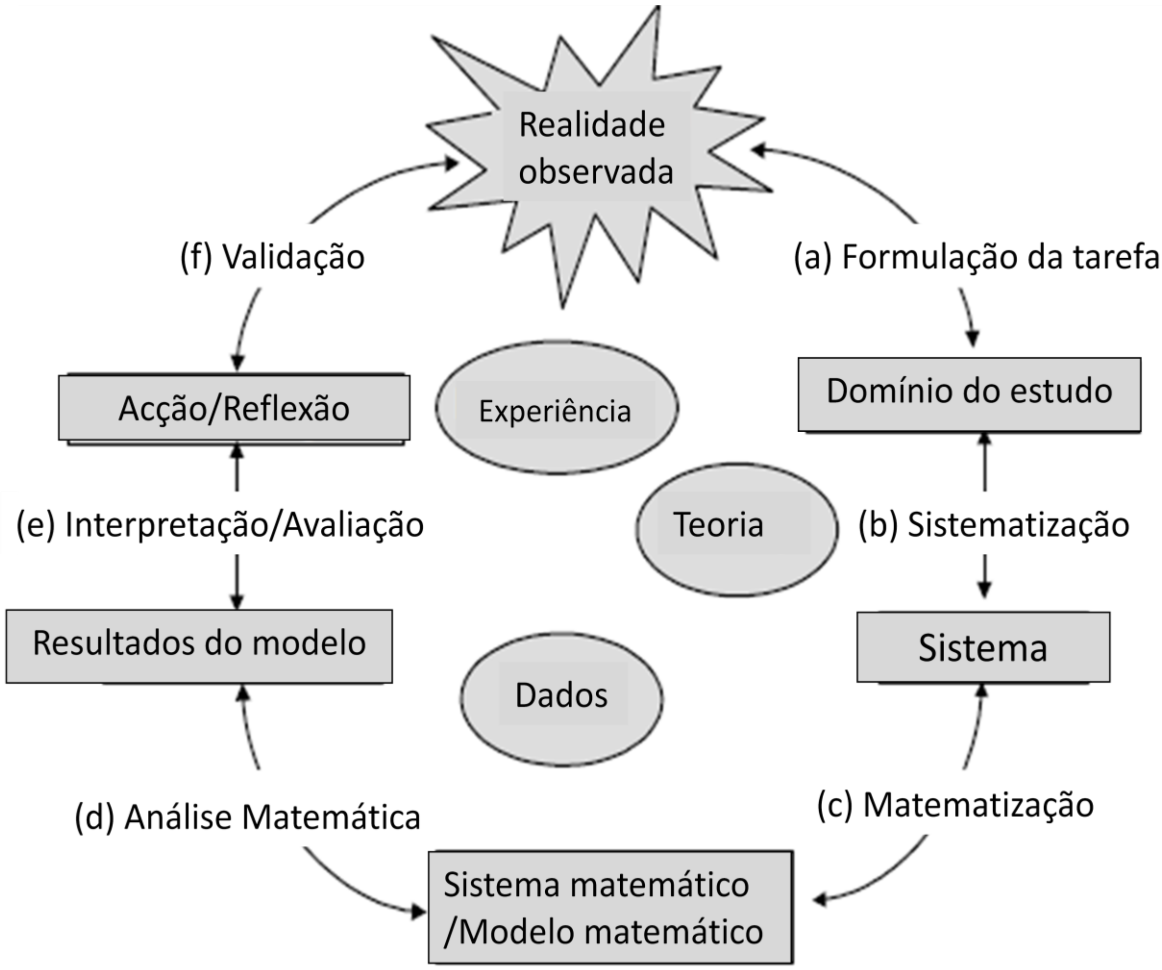


Figura 2.3. Modelo do ciclo de modelação de Blomhoej e Jensen (2007)

2.2. Educação Matemática Realista (RME – Realistic Mathematics Education)

A Educação Matemática Realista (RME – Realistic Mathematics Education) é uma teoria com raízes na interpretação de Freudenthal da Matemática como uma actividade humana (Freudenthal, 1971, 1973), tendo sido desenvolvida ao longo dos últimos trinta anos por investigadores, tais como Treffers, Gravemeijer, Van den Heuvel-Panhuizen, entre outros. Tal como outra teoria, esta não está fechada e acabada, mas em constante evolução.

A RME tem sido desenvolvida num processo contínuo de desenho, experimentação, análise e reflexão, existindo uma relação reflexiva entre a teoria RME e a investigação para o desenvolvimento curricular. Por um lado, a RME guia o desenho e a investigação, por outro lado, a investigação para o desenvolvimento serve a elaboração e o apuramento da teoria. O objectivo do programa de desenvolvimento da RME é determinar como a educação matemática pode ser apresentada aos estudantes de forma a facilitar a reinvenção da matemática (Gravemeijer, 1999). Note-se que não se espera que os alunos reinventem toda a matemática sozinhos; Freudenthal (1991) fala, neste sentido, de uma reinvenção guiada, dando ênfase ao carácter de processo evolutivo que tem a aprendizagem. A ideia é permitir ao aluno olhar para o conhecimento como um conhecimento próprio, pelo qual ele é responsável. Freudenthal caracteriza a actividade matemática como uma actividade de resolução de problemas, de procura de problemas e de organização de um determinado assunto, seja ele matematicamente puro ou incluindo elementos reais. Quando a matematização é estabelecida como um objectivo da educação matemática, isto implica considerar a matematização da matemática e a matematização da realidade (o resto do mundo), sem esquecer a interacção social no processo de ensino-aprendizagem. Na RME, matematizar envolve não só a matematização de uma situação real como principalmente generalizações e formalizações. A formalização abraça a modelação, a simbolização, a esquematização e a definição; a generalização serve a compreensão no sentido reflexivo.

De acordo com Freudenthal (1971), matematizar envolve quer a matematização de qualquer situação do dia-a-dia quer a matematização de qualquer conceito da matemática, não registando uma diferença substancial entre estes dois aspectos, mas dando a entender que é melhor começar por matematizar situações da vida real no contexto da educação, pois permite aos alunos utilizarem conhecimentos prévios e a interpretação do que se passa ao seu redor. Porém, a reinvenção requer que os alunos matematizem também a sua actividade matemática. Em relação a este aspecto, Treffers (1987) distingue matematização em dois sentidos, a matematização horizontal e a matematização vertical, sendo a matematização horizontal o processo de descrever o contexto do problema em termos matemáticos, de forma a ser possível resolvê-lo dentro do mundo matemático (passagem do mundo real para o mundo dos símbolos) e a matematização vertical refere-se ao trabalho dentro do mundo dos símbolos. Através da matematização vertical, o aluno alcança um nível matemático mais elevado em termos formais. Ao trabalhar dentro do mundo dos símbolos, o aluno matematiza progressivamente. É neste processo de matematização progressiva (que compreende tanto a matematização horizontal como a vertical) que o aluno (re)constrói a matemática (Gravmeijer e Doorman, 1999).

Historicamente, estas características da RME estão relacionadas com os níveis de Van Hiele de aprendizagem. Segundo Van Hiele (citado em De Lange, 1996), o processo de aprender é distribuído por três níveis:

(1) Um aluno consegue o primeiro nível do pensamento assim que possa manipular as características conhecidas de um modelo que lhe é familiar;

(2) Assim que aprenda a manipular as inter-relações das características, terá conseguido o segundo nível;

(3) O terceiro nível do pensamento será atingido quando começar a manipular as características intrínsecas das relações.

Tendencialmente, a instrução tradicional começa no segundo ou terceiro nível, enquanto que a abordagem realista começa no primeiro nível. Então, para começar ao primeiro nível, que trata um fenómeno que é familiar aos alunos, a fenomenologia didáctica de Freudenthal (a aprendizagem deve começar a partir de um problema contextualizado) é usada. Além disso, pela reinvenção guiada e matematização progressiva, os estudantes são guiados didacticamente para transitar eficientemente de um nível a outro nível, considerando todos os aspectos da matematização.

A combinação das três principais heurísticas de Van Hiele, com a fenomenologia didáctica de Freudenthal e a matematização progressiva de Treffers, resulta em seis características básicas de um ensino baseado na RME:

1. *Princípio da actividade* (“learning by doing”);
2. *Princípio da realidade;*
3. *Princípio dos níveis* (formais e informais);

4. *Princípio da conectividade*;
5. *Princípio da interactividade*;
6. *Princípio da reinvenção guiada*.

Estes princípios são explicados nos seguintes parágrafos, com base nas ideias de Van den Heuvel-Panhuizen (2000):

1) As situações através das quais os conceitos surgem devem ser a fonte da formação do conceito. O processo de extrair o conceito apropriado de uma situação concreta é designado por De Lange (1987) como matematização conceptual. Este processo provocará nos estudantes a exploração da situação, o encontrar e identificar a matemática relevante, a esquematização e a visualização, de forma a descobrirem regularidades e desenvolverem "um modelo" que resulte num conceito matemático. Reflectindo e generalizando, os alunos desenvolverão um conceito mais completo. Poderão então aplicar conceitos matemáticos a novas áreas do mundo real e fazer assim o reforço e o fortalecimento desse conceito. Os alunos aprendem matemática fazendo-a (*learning by doing*).

2) Na RME, o ponto de partida das experiências educativas deve ser "verdadeiro" para os alunos, isto é, mesmo que a situação apresentada aos alunos não seja real, esta deve ser real na sua mente. Os alunos devem ter experiências matemáticas baseadas em contextos ricos, de forma a matematizá-los.

3) Aprender matemática significa que os alunos passam por vários níveis de compreensão: desde a capacidade de encontrarem soluções informais relacionadas com o contexto, à criação de atalhos e esquematizações, à aquisição de conceitos e suas relações. A condição para chegar ao nível seguinte é a reflexão sobre as actividades realizadas, que pode emergir através da interacção entre os pares.

Os modelos são um veículo importante para a ponte entre a linguagem matemática informal e uma matemática mais formal. Primeiro, os alunos desenvolvem estratégias relacionadas com o contexto de trabalho. Mais tarde, alguns aspectos da situação tornam-se mais gerais, o que significa que o contexto vai adquirindo o carácter de um modelo que pode servir de suporte para a resolução de situações similares. Eventualmente, os modelos dão aos alunos acesso a um conhecimento matemático mais formal. De forma a preencher o espaço entre o nível informal e o nível formal os modelos mudam de um *modelo de* uma situação particular para um *modelo para* situações similares.

4) Em RME (De Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994), a integração de vários conceitos da Matemática é essencial. Neste princípio, a conexão entre vários conceitos é explorada na resolução de um problema. Em muitas situações, será preciso mais do que uma exploração de um único tema, como a álgebra e a geometria.

5) A interacção entre alunos e entre alunos e professores é uma parte essencial na RME (De Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994). A negociação explícita, a intervenção, a discussão, a cooperação e a avaliação são elementos essenciais num processo de aprendizagem construtivo, no qual os métodos informais do aluno são usados como uma alavanca para alcançar os formais. Neste ensino interactivo os alunos explicam, justificam, concordam e entram em desacordo, reflectindo e encontrando alternativas.

6) Um dos principais princípios para a educação matemática, segundo Freudenthal (1991), é a oportunidade guiada que é dada aos alunos de reinventarem a matemática. Isto implica que na RME tanto os professores como os currículos educacionais têm um papel crucial no modo como os alunos adquirem o conhecimento. Eles governam o processo de aprendizagem, não num sentido fixo de demonstração do que os alunos devem aprender, pois entraria em conflito com o princípio da actividade, mas no sentido em que os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas, por eles próprios. De forma a conseguirem este estado pretendido, os professores devem promover com os seus alunos um ambiente de aprendizagem onde o processo de construção possa emergir. Um requisito é a capacidade de os professores preverem onde e como podem antecipar a compreensão e as habilidades dos alunos que estão prestes a despontar. Sem esta perspectiva não é possível guiar a aprendizagem dos alunos.

A forma presente de apresentação da RME é em grande parte determinada pela visão de Freudenthal sobre a Matemática (Freudenthal, 1991). Dois pontos fundamentais são a Matemática ligada à realidade e a Matemática como actividade humana. Em primeiro lugar, a Matemática deve estar próxima dos alunos e ser relevante em situações do dia-a-dia. A palavra realista não é só indicadora da ligação com o mundo real mas está relacionada com as situações problemáticas que os alunos podem imaginar como sendo reais. Isto significa que os problemas propostos aos alunos não têm que ser necessariamente problemas contextualizados no mundo real, mas sim, reais na mente dos alunos. A contextualização dos problemas é muito significativa na RME, sendo as situações problemáticas vistas como contextos de aplicação ou modelação. Em segundo lugar, a ideia da Matemática como actividade humana é salientada. A educação matemática é encarada como um processo guiado de reinvenção da Matemática, onde os alunos experimentam um processo semelhante ao da invenção da Matemática, promovendo uma oportunidade guiada aos alunos de que estes façam Matemática. Isto significa que a educação matemática não deve encarar a Matemática como um sistema fechado mas sim como uma actividade que envolve o processo de matematização (Freudenthal, 1968). A reinvenção guiada é baseada no conceito Freudenthaliano da Matemática como uma actividade humana. Os alunos não devem ser considerados como receptores passivos da Matemática já pronta e acabada, mas antes deve ser-lhes dada a oportunidade de a construírem por si próprios.

As situações propostas visam gerar experiências significativas para os alunos em que a matemática implícita numa situação emerge através do processo de matematização. Começa-se por situações contextualizadas, com soluções contextualizadas, onde os alunos gradualmente desenvolvem ferramentas matemáticas até alcançarem um nível mais formal. Os modelos que emergem das actividades dos alunos, com base na interacção promovida dentro da sala de aula, conduzirão a níveis mais elevados do pensamento matemático.

O princípio da reinvenção guiada requer que os problemas contextualizados apresentados aos alunos sejam bem escolhidos, de forma a proporcionar-lhes o desenvolvimento de estratégias na procura de soluções informais. (Doorman, 2001). O caminho informal ao encontro das soluções é um ponto de partida para a formalização e a generalização, que é referida como matematização progressiva (Gravemeijer, 1994). O processo de reinvenção é posto em marcha quando os alunos utilizam a linguagem corrente (descrição informal) para estruturar problemas contextuais em formas matemáticas informais ou formais (Armanto, 2002).

Esta estratégia permite aos alunos olharem para o conhecimento que adquirem como um conhecimento pelo qual eles são responsáveis e que lhes pertence. Com orientação, é dada aos alunos a oportunidade de eles próprios criarem o seu conhecimento matemático. A palavra realista na RME não quer dizer que os contextos do dia-a-dia sejam continuamente utilizados para motivar os alunos para reinventarem a Matemática. Significa antes que as situações problemáticas apresentadas devem ser realistas para os alunos de forma a catalisar a matematização progressiva (Gravemeijer, 1999).

A RME oferece uma nova visão sobre a forma como os contextos devem ser escolhidos e podem ser usados com vista ao suporte do desenvolvimento matemático. O uso de modelos é crucial aqui. Um modelo emerge de um contexto que inicialmente pode ser pouco mais do que uma representação, por exemplo, uma figura ou um esquema. Depois, estes modelos tornam-se matematicamente mais sofisticados, como por exemplo, uma recta numérica ou uma tabela de proporções.

Os modelos permitem aos alunos trabalharem em diferentes níveis de abstracção, pois mesmo aqueles que têm mais dificuldade com noções mais formais conseguem fazer progressos e criar estratégias para a resolução de problemas (Gravemeijer & Stephan, 2002). O termo modelo refere-se a modelos de situações e a modelos matemáticos que são desenvolvidos pelos próprios estudantes nos diferentes níveis de abstracção/actividade. Isto significa que os estudantes desenvolvem modelos para e na resolução de problemas. No início, o modelo é um modelo de uma situação que é familiar aos estudantes. Por um processo de generalização e formalização, o modelo, consequentemente, torna-se uma entidade. Quatro níveis de modelos no desenho de experiências/práticas de RME são descritos (Figura 2.4.):

- No *nível situacional*, as estratégias e as soluções dependem da interpretação de como agir em relação à situação descrita no problema, tendo em conta o conhecimento/experiências do aluno, muitas vezes obtido fora da escola;
- Um *nível referencial* ou o nível *modelo de*, onde os modelos e as estratégias dependem da interpretação de como agir em relação à situação descrita no problema, de acordo com problemas explorados na sala de aula;
- Um *nível geral* ou o nível *modelo para*, onde a actividade matemática como estratégia predomina, usando-se tanto uma linguagem matemática informal como formal;
- Um *nível de matemática formal*, onde cada um trabalha com procedimentos convencionais e notações (linguagem matemática formal) sem precisar do apoio do contexto da situação (modelo inicial).

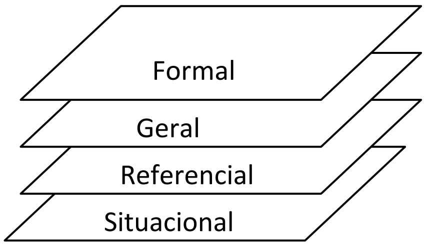


Figura 2.4. Níveis de modelos em RME (Gravenmeijer, 1994)

Na Figura 2.4. também é possível identificar a matematização horizontal e vertical. A matematização horizontal acontece na passagem do nível situacional para o nível referencial, pela criação de modelos emergentes, sendo a simbolização um resultado essencial para estas mudanças. A matematização vertical acontece quando existe a passagem do nível referencial para o nível geral, por outras palavras, quando acontece a passagem do *modelo de* para o *modelo para* (Andresen, 2007).

Apesar dos quatro níveis envolverem claramente um desenvolvimento progressivo da abstracção e dos modelos utilizados, isso não implica que a passagem pelos níveis seja sempre por esta ordem hierárquica; o aluno pode saltar um nível e até voltar atrás, por exemplo misturar o nível geral e o nível formal e voltar ao nível referencial (Gravenmeijer, 1994).

2.2.1. Actividades baseadas na RME

Um exemplo de uma actividade que usa os quatro níveis é a divisão longa (Dolk e Uittenbogaard, 1989).

Esta noite 81 pais visitarão a nossa escola.
Em cada mesa podem ser sentados seis pais.
Quantas mesas serão precisas?

No primeiro nível, a divisão longa associa-se com actividades da vida real. Por exemplo, partilhando doces entre as crianças. Aqui, os alunos fazem entrar o seu conhecimento situacional e as suas estratégias e aplicam-nos na situação. O segundo nível é introduzido quando a mesma divisão de doces é apresentada numa tarefa escrita e a divisão é modelada com papel e lápis. Então, o foco é deslocado em direcção a estratégias de um ponto de vista matemático. Agora, o aluno trabalha apenas com os números, sem pensar na situação. Finalmente, o quarto nível contém o padrão do algoritmo escrito da divisão longa na linguagem matemática formal.

Uma parte importante do desenvolvimento matemático é o reconhecimento de que alguns modelos podem ser usados numa variedade de situações e estruturar soluções para vários tipos de problemas (Gravenmeijer, 1994).

A Figura 2.5. mostra-nos o processo que os alunos percorrem desde o contacto com a situação problemática até à criação de um algoritmo que é reutilizável e aplicável em situações similares (modelo para). O esquema dá-nos a ideia de um ciclo de modelação com a particularidade de se observar onde os alunos utilizam matematização horizontal (correspondente às setas a cheio) e a matematização vertical (setas a ponteado). A utilização de uma linguagem informal surge durante a descrição matemática da situação problemática, sendo desenvolvida até à linguagem formal aquando da criação do algoritmo matemático (modelo para) que servirá para a sua reutilização em situações similares.

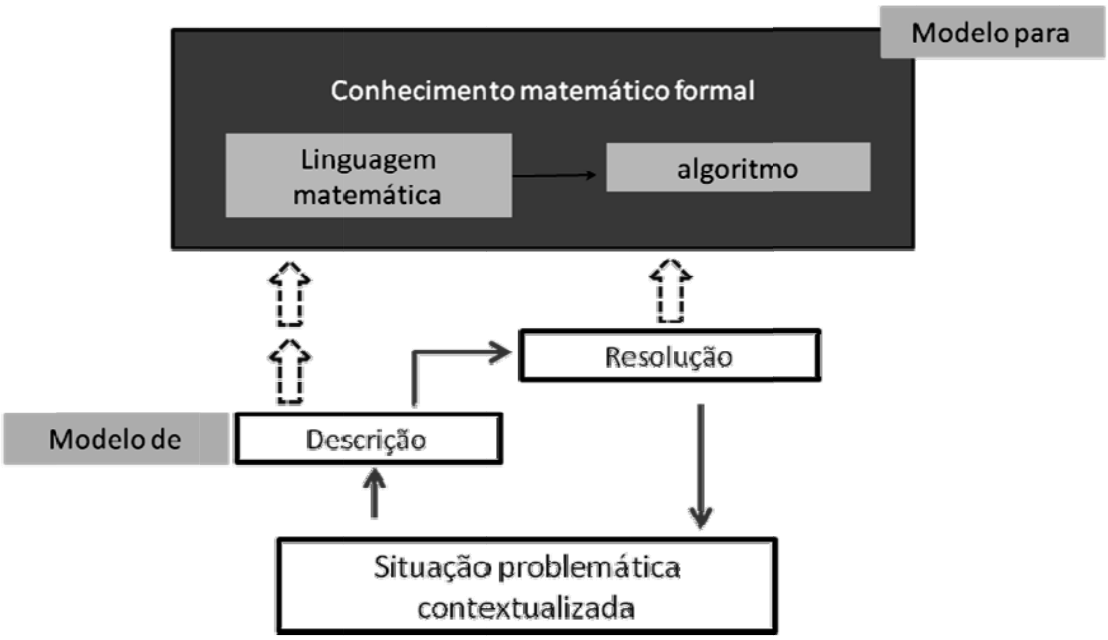


Figura 2.5. Esquema do desenvolvimento progressivo de uma actividade baseada na RME.

Um exemplo típico de um problema de modelação na linha teórica da RME é o seguinte (Barnes, 2004, p.59):

"Para controlar a diabetes, o meu gato precisa de tomar dois tipos de comprimidos e uma injecção de insulina duas vezes ao dia. O gato toma metade de um comprimido grande, de manhã e à noite, e um quarto de um comprimido pequeno, também de manhã e à noite. Primeiro, o veterinário deu-me 17 comprimidos grandes e 27 comprimidos pequenos para começar. Para quantos dias dão os comprimidos fornecidos pelo veterinário antes de ter que comprar mais? Depois, quantos comprimidos devo comprar para cada mês?"

Nesta actividade e noutras baseadas na RME, uma das características que sobressai da análise do enunciado é o conceito matemático que se espera que o aluno desenvolva; este é perceptível aquando da leitura e interpretação do texto, com a possibilidade de serem utilizadas diversas estratégias de resolução, notando-se um pedido subtil de produção de uma generalização. Pode-se então dizer que esta generalização não é um dos principais objectivos mas sim uma meta a alcançar com o trabalho continuado neste tipo de actividades.

2.3. Perspectiva de Modelos e Modelação (MMP – Models and Modelling Perspective)

Existem características chave associadas ao trabalho desenvolvido em educação matemática sob a perspectiva de modelos e de modelação (MMP – Models and Modelling Perspective) (Lesh e Doerr, 2003), que foram identificadas por Lester (2005, p.460).

a) Utiliza-se uma variedade de formas de representar e expressar os modelos que estão a ser desenvolvidos;
b) É direccionado para a resolução de problemas (ou tomadas de decisão);
c) É situado, isto é, os modelos são criados para determinados propósitos em situações específicas;
d) Os modelos são desenvolvidos de forma a serem modificados e adaptados.

O termo modelo é o ingrediente principal para explicar a aprendizagem da matemática pelos alunos pois é um sistema de elementos, relações entre elementos, operações que descrevem ou explicam como os elementos interagem, os padrões, regularidades e/ou regras que sustentam as relações entre os elementos. Para ser um modelo, o sistema tem que ser usado para descrever, reflectir, interpretar, explicar ou fazer previsões sobre o comportamento de um fenómeno. Um modelo matematicamente significativo deve focar as características estruturais do sistema estudado (Doerr e Tripp, 1999).

Assim, os alunos, nas suas tentativas de entender e resolver problemas, desenvolvem ou constroem modelos matemáticos que os ajudam a perceber o sistema (poder explicativo) e também os podem usar para atingir novas inferências ou aprender novos conteúdos (poder preditivo). Neste contexto, os alunos desenvolvem modelos para construir, descrever, ou explicar sistemas significativos ou fenómenos, em termos de recursos matemáticos, ou seja, matematicamente. Mais ainda, os alunos desenvolvem sistemas conceptuais e usam-nos para construir novos conceitos matemáticos.

> "Aprender matemática envolve o desenvolvimento de modelos onde a ênfase está nas características ocultas nas estruturas do sistema e na capacidade de raciocinar com ou sobre o sistema… O desenvolvimento de um novo modelo está na base do raciocínio que se apoia em modelos existentes que estarão relacionados, de alguma forma, com a nova situação. O raciocínio que ocorre durante o contacto com a situação problemática pode envolver analogias entre um sistema similar, ou pelo menos parte dele, e um sistema novo com uma estrutura matemática não familiar."
>
> (Doerr e Tripp, 1999, p.234)

Esta perspectiva reconhece a interacção e a interdependência de modelos mentais ou internos (representações que estão activas enquanto os alunos trabalham num problema particular e que guiam o uso de inferências e operações mentais) e modelos externos (aqueles que são expressos de várias formas: linguagem, símbolos, diagramas ou metáforas).

> "Os desencontros entre várias interpretações dos alunos, assim como os desencontros entre as interpretações do aluno e outras interpretações

> externas, podem criar a necessidade de uma nova interpretação ou representação. Isto pode levar a mudanças ou alterações no pensamento, num ou mais alunos, resultando no seu refinamento e potenciando um modelo mais poderoso."
>
> (Doerr e Tripp, 1999, p.233)

Nesta perspectiva, é reconhecido que as actividades de modelação são importantes para os alunos revelarem os seus diversos modos de raciocínio e que favorecem o desenvolvimento dos seus sistemas conceptuais, como resultado da resolução das actividades.

Em resumo, modelação é vista como a interacção entre três sistemas: (a) sistemas conceptuais internos, (b) sistemas representativos que funcionam, quer como uma exteriorização do sistema conceptual interno quer como interiorização de sistemas externos, e (c) sistemas externos que são experiências reais e concretas ou artefactos construídos por outros.

Um objectivo importante num ambiente de modelo-modelação é o desenvolvimento do sistema conceptual, isto é, dos *modelos do aluno* produzidos para atribuir sentido a situações problemáticas. Neste processo, os alunos precisam de expressar, testar, rever, rejeitar ou construir as suas ideias. "Nas actividades geradoras de modelos (model-eliciting activities, MEA's) os alunos produzem ferramentas conceptuais que incluem sistemas descritivos ou explicativos que funcionam como modelos que revelam aspectos importantes do modo como os alunos interpretam situações problemáticas." (Lesh e Doerr, 2003, p.9).

O conhecimento matemático de que os alunos dispõem durante a interacção com a actividade inicial depende do significado que dão ao problema. A missão dos alunos, na resolução do problema, é desenvolver uma ferramenta que possa ser útil ou transferível para outras situações, portanto, eles examinam padrões matemáticos e estruturas envolvidas nas soluções encontradas. Os alunos vão para além do pensar com um modelo, pensam igualmente acerca do modelo. Nesta perspectiva, a tarefa torna-se um veículo para aceder e estender o conhecimento matemático dos alunos.

> "Pensar matematicamente é construir, descrever e explicar, nem que seja com cálculos, quantidades, ou outros objectos matemáticos, nem que

seja construindo padrões e regularidades em sistemas complexos, nem que seja com conjuntos de dados."

(Lesh e Doerr, 2003, p.16)

Um aspecto chave na MMP é o reconhecimento de que as soluções encontradas para os problemas, em geral, envolvem vários ciclos de modelação onde as descrições, explicações e previsões são refinadas gradualmente, sendo revistas ou rejeitadas a partir da interpretação dessas mesmas soluções no contexto real.

2.3.1. Actividades Geradoras de Modelos (MEA's – Model-eliciting Activities)

As actividades de modelação diferem da tradicional resolução de problemas em pelo menos em dois aspectos. Primeiro, na resolução de problemas de modelação os alunos precisam de usar e fazer conexões entre conceitos matemáticos e operações (Lesh e Zawojewski, 2007). As actividades de modelação constituem oportunidades para os alunos fazerem emergir a sua própria matemática enquanto trabalham sobre os problemas e, para que a situação faça sentido matematicamente, os alunos precisam de matematizá-la. Segundo, nas actividades de modelação os alunos são encorajados a criar modelos que sejam aplicáveis numa janela de situações estruturalmente similares, e como resultado, os alunos podem generalizar e estender as suas soluções (English, 2006; Doerr e English, 2003).

Actividades geradoras de modelos são actividades que proporcionam aos estudantes simulações da vida real onde o pensamento matemático é necessário para o sucesso (Lesh e Lehrer, 2003). No final dos anos 70, surge o primeiro desenho das actuais MEA's, que tinham o objectivo de simular situações da vida real onde o raciocínio matemático desenvolvido era útil para além da escola, numa perspectiva de um desenvolvimento contínuo de conceitos matemáticos aplicáveis na vida futura dos alunos. A evolução do desenho das MEA's mantém-se até hoje, pois os objectivos da investigação têm mudado, passando pelo estudo das competências que os alunos adquirem, e que usam a partir da sua própria experiência, até ao desenvolvimento/refinamento de conceitos matemáticos utilizados na realização destas actividades (Lesh, 2009).

Uma das características deste tipo de actividades é a de não ficarem restritas a respostas únicas de perguntas pré-matematizadas; outras características fundamentais são as seguintes:

- As soluções geralmente requerem entre 15 e 60 minutos a serem encontradas, fornecendo protótipos poderosos para lidar com resultados que são importantes para os alunos;
- Os resultados servem os interesses e experiências dos alunos, e isso motiva-os no sentido de os levar a empenhar-se com o seu conhecimento pessoal, experiência e capacidades;
- Os procedimentos encorajam os alunos a utilizarem ferramentas realísticas e recursos, incluindo calculadoras, computadores, consultores, colegas e manuais;
- A avaliação dos procedimentos reconhece mais de um tipo de soluções correctas.

A construção das actividades geradoras de modelos desenvolve-se com base de seis princípios.

1 – *Princípio da realidade*: os problemas devem ser significativos e relevantes para os alunos, tendo em conta a sua experiência e o seu conhecimento.

2 – *Princípio da construção de um modelo*: os problemas devem ser desenhados para que a criação do modelo envolva elementos, relações e operações entre esses elementos, padrões, regularidades e regras que sustentem essas relações. Deve permitir o desenvolvimento (refinamento, modificação, extensão) de constructos matemáticos significantes.

3 – *Princípio da auto-avaliação*: os alunos devem ser capazes de avaliar quando as soluções são as melhores para a situação em estudo.

4 – *Princípio da documentação do modelo*: os alunos devem ser capazes de revelar e documentar o seu processo de raciocínio e as suas soluções.

5 – *Princípio da generalização*: as soluções encontradas pelos alunos devem ser generalizadas e também reutilizáveis em situações similares.

6 – *Princípio da simplicidade*: deve ser fácil para outros interpretar as soluções.

As actividades geradoras de modelos contribuem simultaneamente para a aprendizagem e para a avaliação porque o aluno aprende e documenta simultaneamente o que está a aprender.

Para a realização destas actividades, os alunos têm que recorrer a diversos conhecimentos e a determinadas competências, ao mesmo tempo, o que não acontece nas actividades dos livros de texto, as quais já estão previamente modeladas, pois o autor tem uma determinada ideia e encaminha o aluno para um certo caminho de resolução e os alunos apenas têm que entender o que está escrito de forma a proceder à sua resolução. Nas actividades geradoras de modelos, os alunos partem de uma situação real sem estar modelada e perante as variáveis que encontram assim escolhem um caminho a seguir. Para a sua resolução, os alunos têm que simular a situação real, através da experimentação, modelar a situação (matematizá-la através de esquemas, quadros, símbolos, relações entre variáveis…), analisar a situação matemática encontrada e descobrir uma ou mais soluções para o problema inicial.

A descrição matemática da situação real tem que abranger todas as pequenas partes do todo, o que não acontece nos problemas dos livros de texto (Lesh e Lehrer, 2003) onde apenas uma parte do todo é que está por descrever.

A introdução de actividades geradoras de modelos na sala de aula oferece novas experiências aos alunos. Este tipo de actividades difere de actividades tradicionais, tais como a resolução dos conhecidos "word problems", em vários pontos. Primeiro, não se sabe à partida o caminho a seguir, nem se terá soluções; depois a interpretação da situação proposta na actividade pode ser um pouco mais prolongada do que acontece na resolução de problemas bem definidos, devido ao desafio de descobrir os constructos necessários para dar continuidade ao desenvolvimento da actividade. Os alunos são levados a discutir ideias e/ou a desenhar diagramas na tentativa de encontrarem e/ou criarem um modelo matemático que descreva a situação em estudo. Este é um processo recursivo pois para obterem um modelo apropriado, este tem que ser revisto, testado, modificado ou rejeitado, tem de existir troca de ideias e impressões de forma a estenderem as interpretações (Ahn e Leavilh, s/d). Durante todo este percurso os alunos realizam micro-ciclos de matematização, ou seja, dentro do ciclo de modelação, as etapas não são todas realizadas sequencialmente, existem avanços e recuos dentro do próprio ciclo; por exemplo é analisado o modelo real e depois vem a matematização mas surgem dúvidas e assim a etapa seguinte não será a utilização das técnicas matemáticas para o encontro das soluções mas provavelmente uma nova análise do modelo real.

Elaborar uma actividade geradora de modelos (MEA) envolve pensar numa situação onde os alunos tenham a oportunidade de desenvolver e refinar constructos matemáticos com vista a representar e examinar relações associadas à tarefa ou problema.

Um bom exemplo é o problema do Pé Gigante (Big Foot Problem) que tem sido extensivamente utilizado no ensino básico (3.º ciclo) em países tais como Estados Unidos da América, Alemanha, África do Sul, Austrália, entre outros. A matemática fundamental que guia esta actividade é a proporcionalidade (razões, proporções, proporcionalidade directa), sendo o enunciado do problema o que se segue (Lesh e Harel, 2003, p.166):

"*Esta manhã, a polícia descobriu que, ontem à noite, algumas pessoas reconstruíram uma fonte do parque onde a vizinhança costuma brincar com os filhos. Os pais da vizinhança querem agradecer a quem fez tal proeza, mas tudo o que a polícia conseguiu encontrar foi muitas pegadas. Uma das pegadas é mostrada a seguir.*

A pessoa que fez esta pegada parece ser muito grande. Para encontrar a pessoa e os seus amigos é preciso descobrir quão grande ela é!

O teu trabalho é criar um kit para pegadas para a polícia de forma que esta consiga, através das pegadas, descobrir a altura da pessoa a que pertence a pegada *encontrada. O teu kit de trabalho para pegadas deve servir para pegadas como a encontrada no parque, mas também deve servir para quaisquer outras pegadas."*

Nesta actividade e noutras MEA's, uma das características que sobressai da análise do enunciado é o apelo à criação de um modelo matemático, estando implícitos os conceitos matemáticos que se espera que o aluno desenvolva. Isto é perceptível aquando da leitura e interpretação do texto, sendo pedido expressamente o recurso a uma generalização. Pode-se então dizer que esta generalização é um dos principais objectivos, para além do desenvolvimento de sistemas conceptuais que é porém mais implícito.

2.3.2. Desenvolvimento Conceptual Local

Para um dado conceito matemático, os primeiros dois componentes do modelo conceptual dos alunos, são: a compreensão da ideia pelos alunos, e a estrutura subjacente do conceito, dentro do sistema e entre sistemas conceptuais. O terceiro componente inclui uma variedade de sistemas qualitativos diferentes para a representação dessa compreensão que pode ser feita através de símbolos, linguagem escrita, modelos estatísticos, modelos manipulativos (materiais concretos) ou do mundo real. O quarto componente contém processos para modificar a situação real de forma a encaixar em compreensões existentes, modificar as compreensões de forma a encaixar na situação e, modificar o modelo de forma a preencher buracos, eliminando inconsistências e resolvendo conflitos com o próprio modelo (Lesh, Landau e Hamilton, 1983).

Os sistemas representacionais diferem uns dos outros porque enfatizam ou não diferentes aspectos da estrutura subjacente do conceito. Eles também diferem no poder gerador da informação pois por vezes uma imagem vale mais que mil palavras e outras vezes as palavras são mais claras e mais eficientes.

A distinção entre compreensão e representação da compreensão é muito importante em Matemática. Os maiores avanços em Matemática resultaram da criação de representações poderosas que inicialmente funcionavam como modelos externos de ideias já conhecidas e que depois providenciaram novas ferramentas para gerar novas ideias. Quando se diz que um aluno compreende um conceito matemático, isto quer dizer que o aluno pode utilizar uma espécie de processo de translação e transferi-lo para outros sistemas representacionais (Lesh, Post e Behr, 1987). Por exemplo, quando se diz que um aluno compreende as fracções, quer dizer que, em parte, ele consegue expressar a ideia de fracção, representando-as com regiões circulares, usando regiões rectangulares ou usando símbolos escritos.

Um modelo conceptual é definido como uma estrutura adaptável, consistindo em (Lesh, Landau e Hamilton, 1983):

(a) Um campo de conceitos intrínsecos, de relações e operações que o aluno deve coordenar de modo a fazer julgamentos de acordo com o conceito;

(b) Sistemas entre conceitos que ligam e combinam os conceitos intrínsecos ao problema sobre o qual se está a trabalhar;

(c) Sistemas de representações (símbolos, desenhos, e materiais concretos), coordenados com os sistemas de translações (utilizar representações já conhecidas) e transformações (adaptar as representações intrínsecas ao problema):

(d) Sistemas de processos de modelação que permitem que os três primeiros componentes sejam utilizados, modificados ou adaptados para encaixarem em situações reais.

Lesh e Harel (2003), em diversos dos seus trabalhos, desenharam actividades geradoras de modelos de forma que os conceitos e os sistemas conceptuais que os alunos precisavam de desenvolver fossem os mesmos, por exemplo, razões, proporções, fracções. Assim, os alunos podiam estender, rever e refinar os seus modos de pensamento sobre os constructos durante a resolução dos problemas. Eles chamaram a essas sessões de resoluções de problemas *sessões de desenvolvimento conceptual*. Constataram, que os alunos são capazes de compreender situações baseadas no seu conhecimento pessoal e em experiências, e que expressam o seu raciocínio de forma a conseguir testar e refinar repetidamente os seus modelos, muitas vezes modificando, estendendo ou revendo constructos matemáticos.

2.4. A combinação entre a perspectiva RME e a perspectiva MMP

Segundo a categorização estabelecida por Kaiser (2006) e Blomhoej (2008), podemos incluir a RME numa perspectiva epistemológica e a MMP numa perspectiva contextual.

Analisando as convergências e as divergências das duas teorias – RME e MMP – podemos dizer que as duas teorias promovem a aquisição de conceitos, a descoberta de relações entre conceitos, a procura de padrões e regularidades. Promovem a conexão de conceitos e envolvem processos geradores de modelos matemáticos. Os alunos passam por diversos níveis de compreensão da situação e dos conceitos envolvidos, criando modelos matemáticos. As actividades baseadas nestas teorias abrangem micro-ciclos de modelação assentes na matematização de uma situação real. As respostas encontradas para os problemas não são únicas, mas sim as mais adequadas, dependendo do propósito e da compreensão do problema. É solicitada sempre uma generalização do modelo matemático embora em linguagens diferentes. Enquanto que na RME a linguagem de criação do modelo pode ir de uma linguagem informal a uma mais formal e a generalização está implícita, na MMP a generalização é explícita e supostamente deverá ser feita numa linguagem formal. Os alunos não encontram uma única solução mas sim várias que avaliam de modo a apresentarem a melhor solução para o problema, sendo essa solução reutilizável em situações semelhantes.

Enquanto que na RME há um forte chamamento para o desenvolvimento e aperfeiçoamento de conceitos matemáticos, na MMP a construção de um modelo matemático generalizado é o principal objectivo.

RME	
Propósito	**Meio**
Desenvolvimento Conceptual	Criação de modelos
MMP	
Propósito	**Meio**
Criação de modelos	Desenvolvimento Conceptual

Figura 2.6. Distinção entre os propósitos e os meios da RME e da MMP.

Estas duas teorias (RME e MMP) têm muitas convergências entre si. As divergências encontradas funcionam como uma complementaridade entre as duas.

Uma possibilidade a considerar será o desenvolvimento e a criação de actividades de modelação baseadas numa combinação das duas teorias, que possa conduzir a actividades porventura mais poderosas, por aglutinarem as virtualidades de cada uma das teorias, pois tentarão promover tanto o desenvolvimento conceptual, como a passagem pelos diversos níveis de raciocínio, desde o mais simples (situacional) ao mais abstracto (formal), desenvolvendo e valorizando os modelos matemáticos criados pelos alunos. Essa nova "classe" de actividades poderá classificar-se como Actividades Realísticas Geradoras de Modelos, em inglês, Realistic Model-eliciting Activities (RMEA's).

Na Figura 2.7., ilustra-se de que modo se opera a ligação entre as duas teorias e que tipo de resultados se pretendem alcançar numa actividade do tipo RMEA. Estabelece-se claramente que o aluno irá activar formas de pensamento matemático informal e formal no decurso da sua actividade. O ponto de partida é uma situação contextualizada que apele ao conhecimento prévio do aluno e à sua experiência com situações reais e concretas, desejavelmente ligadas ao mundo real. A descrição da situação apresentada com vista à resolução de um problema irá permitir o desenvolvimento de diversos modelos da situação, cuja natureza evoluirá progressivamente para um modelo de carácter mais formal, que ficará disponível como um modelo matemático geral, através de sucessivos processos de matematização (horizontal e vertical). A procura de um modelo geral implicará a formulação e a utilização de constructos, possivelmente matemáticos, que irão sendo integrados num constructo de âmbito mais geral e mais abstracto, o qual ficará disponível para a aplicação em novas situações similares, tornando-se parte de um sistema conceptual para o aluno.

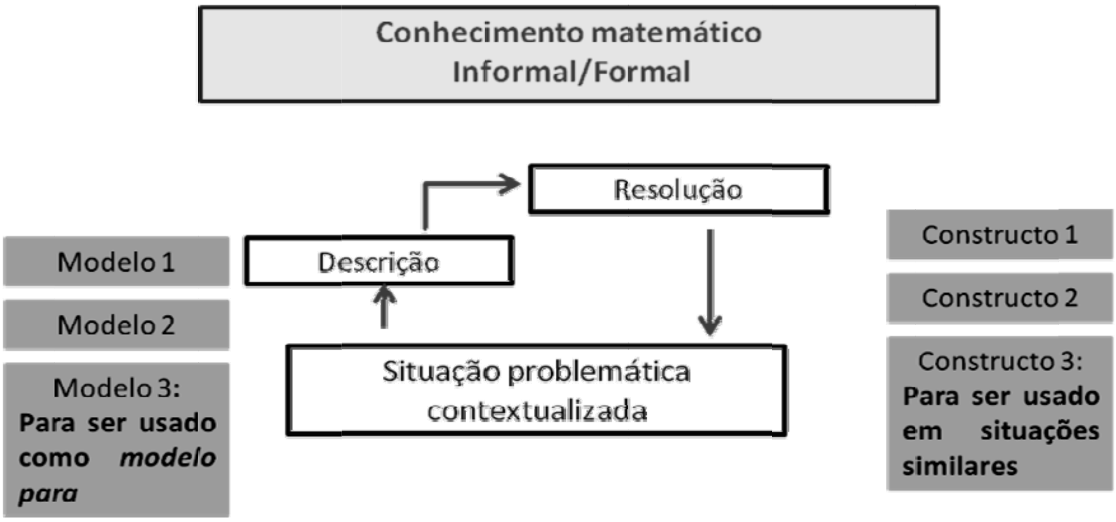


Figura 2.7. Esquema do desenvolvimento progressivo de uma actividade do tipo RMEA baseada na RME e na MMP.

2.5. Matemática Experimental

Sendo o objectivo principal da escola preparar os mais novos com informação organizada e aptidões para terem responsabilidades e sucesso na sua vida futura, é essencial que o professor reflicta verdadeiramente sobre as experiências a proporcionar aos seus alunos.

Todos nós conhecemos condutas escolares que vêm do passado, baseadas na concepção de que os conhecimentos devem ser transmitidos, promovendo-se uma atitude da receptividade e obediência por parte dos alunos. Os livros de texto são, muitas vezes, uma representação desse facto e o professor um agente de transmissão, de conexão entre os alunos e o conhecimento e as aptidões a serem desenvolvidos por estes. Isto é o retrato do ensino tradicional. Aí, a essência é a transmissão de cima para baixo e de fora para dentro. Este ensino impõe regras para as disciplinas e métodos que promovem um crescimento lento em relação à maturidade dos alunos, esquecendo as capacidades e a experiência que estes já possuem.

O espaço entre o conhecimento do professor e a experiência e habilidades dos mais novos é tão grande que proíbe a participação activa destes no desenvolvimento daquilo que lhes é ensinado.

No ensino tradicional, aprender significa adquirir o que está nos livros e na cabeça dos mais velhos. Esse conhecimento é transmitido como um produto acabado sem grande necessidade de explicações acerca de onde, como surgiu e para onde evoluirá. Para o ensino tradicional o conhecimento é estático, pronto a usar.

Em oposição ao ensino tradicional aparece a educação progressista defendida por Dewey.

> "Eu acredito que o elemento fundamental da mais nova filosofia progressista reside na ideia de que há uma relação necessária e íntima entre os processos da experiência e a educação."
>
> (Dewey, 1938/1997, p.20)

Então o que é a experiência?

No dicionário de Língua Portuguesa (Machado, 1981), experiência significa a acção ou o efeito de experimentar; conhecimento pessoal de alguma coisa ou pessoa pelo uso prático; soma de conhecimentos que faz com que se pense, ajuíze ou proceda melhor, que leve a melhores resultados.

Para Dewey (1938/1997), a experiência, como base da educação, deve influenciar positivamente experiências futuras de forma produtiva e criativa. E as experiências, em educação, vão buscar algo do conhecimento passado e modificam-no de alguma forma.

Com base nos significados acima descritos, o professor tem de preparar as actividades para os seus alunos, enfrentando um dilema entre a sua experiência pessoal e a orientação que pretende dar à actividade. Com efeito, "a convicção de que toda a educação genuína surge através da experiência não significa que todas as experiências sejam igualmente educativas." (Dewey, 1938/1997, p.25)

Para Dewey, a avaliação educacional de uma experiência traduz-se em dois aspectos: i) o facto de ser agradável ou desagradável ao aluno, podendo-se avaliar o mesmo facilmente pelas expressões e atitudes destes, e ii) pela influência dessa experiência em experiências posteriores, sendo este último aspecto mais difícil de avaliar pois não se vê à vista desarmada e tem de ser avaliado pelo professor, utilizando o seu conhecimento pedagógico e profissional.

Assim, "o problema central de qualquer educação baseada na experiência é seleccionar o tipo de experiências presentes que vivam de forma frutífera e criativa nas experiências subsequentes." (Dewey, 1938/1997, p.27-28)

2.5.1. Matemática Experimental com Objectos Concretos

Caleb Gattegno foi um dos grandes impulsionadores da matemática experimental no ensino, utilizando objectos manipulativos como fonte de experiência.

Examinando os títulos dos artigos que publicou enquanto ensinava no Cairo é evidente que entendeu como a condição social e como a psicologia influenciavam a aprendizagem. As suas investigações ocupavam-se da dinâmica da mente e do papel da atenção na aprendizagem, no âmbito da psicologia (Powell, 2007).

Seguindo sempre uma posição de uma abordagem dinâmica, no campo da aprendizagem, Gattegno em 1952 inventou o geoplano e incorporou-o na sua aproximação dinâmica ao ensino da geometria. Em 1953, familiariza-se com o trabalho engenhoso de Georges Cuisenaire, um professor belga, que inventou réguas de madeira pintadas de várias cores para ensinar aos seus alunos a aritmética – as conhecidas barras Cuisinaire. Perplexo com o poder pedagógico e poder matemático deste material manipulativo, Gattegno prepara professores para a sua utilização em níveis de ensino mais elevados, elaborando textos de apoio em diversas línguas para o uso das barras Cuisinaire. Em 1956, estende as barras Cuisinaire a uma variedade de sólidos rectangulares e prismas e viaja pelo mundo, dando a conhecer as potencialidades destes materiais manipulativos a níveis epistemológico e pedagógico, direccionados para o ensino da matemática. Gattegno defende então que professores e alunos encontram a álgebra antes da aritmética aquando da exploração das barras como objectos, expressando relações matemáticas implícitas, como se ilustra na Figura 2.8.

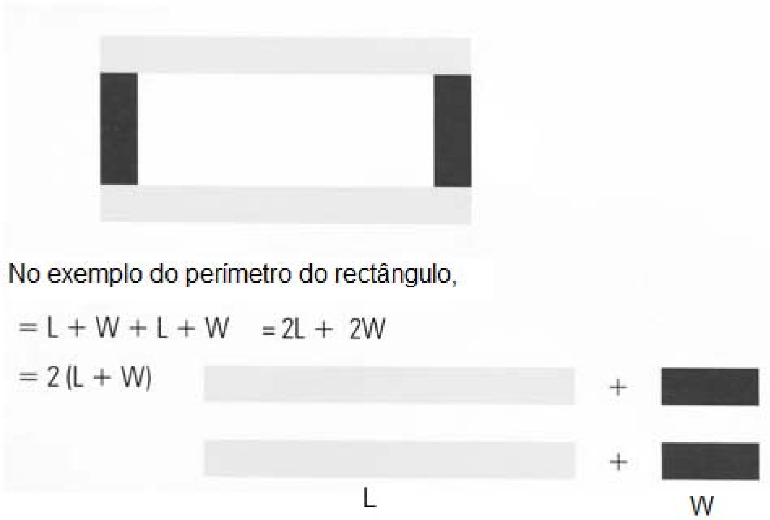


Figura 2.8. Fórmula do perímetro do rectângulo

Nos anos oitenta, Gattegno desenvolve materiais e direcções pedagógicas que estimulam os aprendizes a empenharem o seu poder de percepção e acção na matematização de situações e, por meio disso, a ficarem cientes das suas ideias matemáticas que se tornam visíveis a partir das relações implícitas nessas situações. Argumenta ainda que "os professores deviam aproveitar o tempo das aulas para que os alunos matematizassem situações" (Gattegno, 1984, p.21). Referindo-se mais tarde a esta noção, Gattegno apropriou-se da frase "muito a partir de pouco" que ele explica da seguinte forma: "dêem aos alunos apenas o eles que não conseguem descobrir razoavelmente e deixem-nos fazer o resto" (Gattegno, 1984, p.21).

Na sua abordagem ao ensino da matemática, os materiais manipulativos, tais como os geoplanos e as barras Cuisenaire, são parte do caminho para levar os alunos a desenvolverem o seu pensamento matemático através da exploração de problemas claros e compreensíveis.

Tal como Gattegno, também Bonotto e Basso (2001) defendem um ensino com a utilização de objectos manipuláveis. Argumentam que para os alunos trazerem a matemática para a realidade, é necessário levar para a sala de aula factos matemáticos que estejam embutidos e codificados em artefactos. De acordo com estes autores, nas experiências matemáticas onde foram introduzidos artefactos, os alunos passaram do mundo real para o mundo dos símbolos, actividade que Freudenthal designou como matematização horizontal. A utilização dos artefactos que os alunos compreenderam, analisaram e interpretaram deu-lhes a oportunidade de fazerem matematização vertical, passando de conceito para conceito. Os artefactos (materiais concretos) também podem ser utilizados como ferramentas para a aplicação de antigos conhecimentos em novos contextos e para reforçar o conhecimento matemático existente, puxando-o para um nível mais alto, e ainda para servirem de ferramentas de matematização, pois permitem criar novos objectivos matemáticos, desenvolver novos conceitos matemáticos e promover nos alunos experiências de matematização (Bonotto e Basso, 2001).

Bonotto (2007) defende que têm que ser operadas mudanças se queremos estabelecer situações de modelação matemática realística em actividades de resolução de problemas, ou seja, é importante usar situações problemáticas menos estereotipadas e mais realísticas com uso de materiais concretos; e têm de mudar as crenças e atitudes dos professores para mudarem igualmente as crenças e as atitudes dos alunos. Os materiais concretos são relevantes para os alunos pois fazem parte da sua experiência de vida, oferecendo referências significativas, ancoradas em situações concretas.

Favorecem processos de raciocínio com significado e permitem aos alunos monitorizar as suas hipóteses e as suas inferências, trazendo como consequência um aumento do seu conhecimento.

Vos e Kuiper (2002) afirmam que os manipulativos são úteis para elaborar actividades experimentais que liguem a matemática a outras áreas porque os actos mentais (manipulação de objectos com a mente) desenvolvem-se a partir de actos práticos (manipulação de objectos tangíveis), ou seja, aprende-se fazendo ("learning by doing").

"Learning by doing" emerge como uma perspectiva natural de aprendizagem quando se olha para a modelação como um trabalho muito parecido com os métodos das ciências experimentais (Dewey, 1938/1997).

> "Apesar de se poderem considerar as experiências como mais típicas das ciências do que da Matemática, muitas representações, modelos e actividades matemáticas estão fortemente ligados com experiências."
>
> (Halverscheid, 2008, p.225)

Uma abordagem de investigação experimental de situações reais através da modelação, proposta por Alsina (2002), é coerente com a perspectiva dos ambientes experimentais de modelação descrita por Halverscheid (2008). Este último apercebeu-se da necessidade de construir uma estrutura conceptual local, tendo por base ambientes de aprendizagem apoiados em experiências, que permita a construção do conhecimento matemático. Descreveu esta perspectiva num estudo que envolveu uma actividade realizada por professores em profissionalização em que se propunha estudar o movimento de uma bola numa mesa de bilhar circular.

O significado e o papel das experiências foram claramente identificados:

> "As experiências, que os próprios alunos deverão executar, são introduzidas quando a tarefa consiste em explicar a experiência através da construção de um modelo matemático adequado."
>
> (Halverscheid, 2008, p.225)

> “As experiências relacionadas com matemática encontram o seu lugar natural no quadro da modelação matemática porque representam “o resto do mundo” relativamente ao qual os modelos matemáticos são construídos.”
>
> (Halverscheid, 2008, p.226)

Em resumo, a possibilidade de ver as actividades experimentais com objectos reais como um tipo particular de actividades de modelação matemática baseia-se nos seguintes factos:

(1) Os alunos têm a oportunidade de “aprender fazendo” (enquanto manipulam e experimentam, conjecturam e validam).

(2) Trabalhar com materiais concretos é uma forma de questionar matematicamente as propriedades dos objectos.

(3) A investigação através da experimentação reflecte-se nas acções mentais e no passado e subsequente aprendizagem de ideias matemáticas e torna-se um meio de desenvolver a compreensão de modelos matemáticos.

É frequente encontrar-se o argumento de que o material manipulável só é útil nos anos de escolaridade mais elementares. Um dos objectivos deste estudo é mostrar que podemos encontrar materiais/objectos que promovem grandes oportunidades de experimentação, manipulação e construção de modelos matemáticos em sala de aula, no 3.º ciclo do ensino básico.

A abordagem teórica feita neste capítulo abraça a possibilidade de conectar modelação com experimentação e de considerar implicações desta ligação em abordagens teóricas sobre aplicações e modelação no ensino da Matemática, nomeadamente, na educação matemática realística (RME) e na perspectiva geradora de modelos e modelação (MMP).

Capítulo 3

Metodologia

3.1. O professor como investigador da sua própria prática

Stenhouse é um educador inglês, entre muitos outros, que defende que os professores podem investigar a sua própria prática. Para este autor não pode haver desenvolvimento curricular sem desenvolvimento profissional de professores. Um professor que questiona, que reflecte, é um professor para quem tem todo o sentido investigar a própria prática (Marangon, 2003).

Para um crescente número de professores/educadores, a investigação sobre a própria prática (ou o self-study) tornou-se um meio poderoso de análise e compreensão da prática enquanto simultaneamente se desenvolvem oportunidades para explorar situações no ensino e através do ensino (Loughran, 2007).

Uma simples pesquisa na base de dados ERIC mostra quase 2000 artigos onde a investigação sobre a própria prática é dominante.

Ponte (2002, p.7) aponta quatro grandes razões para que os professores façam pesquisa sobre a sua própria prática:

(i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática;

(ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional;

(iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e

(iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos.

As investigações sobre a própria prática recorrem a planos de trabalho e a técnicas usadas nas ciências sociais e humanas e, em particular, nos estudos em educação. Um professor-investigador tem que estabelecer um plano de trabalho, formular questões que determinem a natureza do estudo e dos dados a recolher. A recolha de dados deve ser sistemática e clara, de modo a possibilitar uma posterior análise e devem ser utilizadas técnicas tais como a observação, a análise de documentos, de registos vídeo e áudio. Os resultados e as conclusões obtidas indicam novas formas de olhar o contexto e o problema e/ou possibilidades de mudanças na prática. A investigação do professor sobre a prática pode contribuir fortemente para o desenvolvimento profissional do professor-investigador bem como para gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, sendo útil para os professores, para os investigadores académicos e para a comunidade em geral. (Ponte, 2002)

> "É um facto incontornável que os professores estão em posição privilegiada para fornecer uma visão de dentro da escola sobre as suas realidades e problemas."
>
> (Ponte, 2002, p.13)

Uma noção muito próxima da noção de investigação sobre a prática é a de reflexão. Já Dewey (1938/1997) caracterizava o acto reflexivo como um acto que não é simplesmente guiado por impulso, tradição ou autoridade, é uma reflexão cuidadosa e activa sobre aquilo em que se acredita ou se pratica, tendo por base os motivos que o justificam e apurando as consequências que daí resultam.

Para que a escola mude é necessário que as práticas docentes mudem. E para que estas mudem são necessários professores capazes de reflectir, analisar e indagar sobre sua própria prática docente. Latorre (2003) defende que a investigação no ensino constitui uma modalidade pedagógica de inovação e mudança que responde melhor às novas imagens de formação dos professores e que pode ser uma alternativa ao modelo tradicional de formação.

Dewey (1933) enfatizou a importância de colocar os professores a reflectir sobre a sua própria prática e a integrar as suas observações em teorias que emergem do ensino e da aprendizagem. Defendeu que o professor deveria ser, ao mesmo tempo, consumidor e gerador de conhecimento. Esta visão de Dewey é uma antecipação do conceito de professor reflexivo desenvolvido por Schön (1998).

A ideia do professor que se torna investigador na sua própria prática configura-se com o movimento do professor-investigador surgido em Inglaterra em torno do pensamento inovador e criativo de Stenhouse.

O professor-investigador questiona a sua prática, inova, renova, põe à prova as suas crenças, problematiza o que faz, com a finalidade de melhorar a sua prática profissional. Reflecte sobre a sua prática, utilizando por vezes ajuda externa, recolhe dados, analisa-os e coloca hipóteses de acção (Latorre, 2003).

A teoria e a prática devem ter um espaço em comum, onde o professor assume o papel de investigador, pois ninguém melhor do que o professor tem condições para identificar, analisar e dar resposta a problemas educativos (Latorre, 2003).

Defende-se, portanto, um profissional que reflecte sobre a acção, constrói novas estratégias de acção, novas formas de busca, novas teorias e categorias de compreensão para enfrentar e definir situações problemáticas.

3.2. Uma introdução à investigação-acção em Educação

Muitas vezes o termo professor como investigador aparece associado ao método de investigação-acção. Um dos eixos fundamentais de evolução do currículo português, defendido por Ponte, Matos e Abrantes (1998), é o da "generalização de projectos de investigação-acção visando a realização de experiências inovadoras e a mudança das práticas de ensino e de avaliação dos diversos níveis de ensino" (p.332).

A investigação-acção pode considerar-se um termo genérico que faz referência a uma ampla série de estratégias para melhorar o sistema educativo.

A natureza e objectivos da investigação-acção são caracterizados de modos muito diversos por vários autores. Por exemplo, Elliot (1993) define a investigação-acção como um estudo de uma situação para melhorar a qualidade da acção dentro da mesma. Entende-a como uma reflexão sobre as acções humanas e as situações sociais vividas pelos professores que tem como objectivo ampliar a compreensão sobre os problemas práticos. Para Kemmis (1984), a investigação-acção não se constitui só como ciência prática mas também como ciência crítica, pois é uma forma de investigação auto-reflexiva por quem pretende melhorar as suas práticas educativas ou sociais, compreendendo-as. Já Lomax (1990) define-a como uma intervenção na prática profissional com a intenção de a melhorar e Bartolomé (1986) define-a como um processo reflexivo que vincula dinamicamente a investigação, a acção e a formação realizada por profissionais das ciências sociais sobre a sua prática. Para Latorre (2003), a investigação-acção é vista como uma investigação prática realizada por professores, de forma colaborativa, com a finalidade de melhorar a sua prática educativa através de ciclos de acção e reflexão.

Uma das características salientes da investigação-acção é a sua forte ligação com os problemas da prática profissional; outra é a dimensão colaborativa, fazendo participar diversos actores que se estabelecem numa lógica de trabalho de equipa (Ponte, 2002).

Kemmis e McTaggart (1988) caracterizaram a investigação-acção como:

- Participativa, pois as pessoas trabalham com a intenção de melhorar as suas próprias práticas, sendo que a investigação segue uma espiral de ciclos de planificação, acção, observação e reflexão.
- Colaborativa, pois os participantes trabalham em equipa.
- Cria comunidades autocríticas que participam e colaboram em todas as fases do processo de investigação.
- É um processo sistemático de aprendizagem.
- Induz a teorizar sobre a prática.
- Submete à prova as práticas, as ideias e as suposições.
- Implica registar, compilar, analisar os próprios juízos, reacções e impressões em torno do que ocorre.
- É um processo político porque implica mudanças que afectam as pessoas.
- Realiza análises críticas das situações.
- Procede progressivamente com vista a mudanças mais amplas.
- Começa com pequenos ciclos de planificação, acção, observação e reflexão, avançando até problemas de maior envergadura.

Estas características parecem estar associadas a investigações onde se cruzam vários protagonistas e vários participantes. O presente estudo, entretanto, parece encaixar-se melhor nas características enunciadas por Elliot (1993) que diz que a investigação-acção educativa:

- Se centra na descoberta e resolução dos problemas enfrentados pelos professores para levar à prática os seus valores educativos.
- Supõe uma reflexão simultânea sobre os meios e os fins. Os valores educativos, como fins, definem as acções concretas que os professores seleccionam como meios para os atingir, pelo que as actividades realizadas constituem interpretações práticas dos valores.
- É uma prática reflexiva. Como forma de auto-avaliação, a investigação-acção consiste na avaliação, por parte do professor, das suas qualidades e do próprio "eu", tal como se manifestam nas suas acções.
- Integra a teoria na prática. As teorias educativas consideram-se como sistemas de valores, ideias e crenças. Essas teorias desenvolvem-se através do processo reflexivo sobre a prática. O desenvolvimento da teoria e a melhoria da prática consideram-se processos interdependentes.
- Supõe o diálogo com outros profissionais. O professor trata de colocar em prática os seus valores profissionais através da investigação-acção, sendo responsável pelos resultados perante os seus pares. Essa responsabilidade expressa-se na elaboração de documentos que mostrem as mudanças realizadas na prática e os processos de deliberação e reflexão que deram lugar a essas mudanças.

Os principais benefícios da investigação-acção são as mudanças da prática e a compreensão da prática. A investigação-acção propõe-se melhorar a educação através da mudança e aprender a partir das consequências da mudança (Kemmis e McTaggart, 1988).

O propósito fundamental da investigação-acção não é tanto o gerar de conhecimento como sobretudo o questionar das práticas sociais e dos valores que as integram com a finalidade de explicá-los. E as suas metas são: melhorar e/ou transformar a prática social e/ou educativa, uma vez que se procura uma melhor compreensão da referida prática; articular de maneira permanente a investigação, a acção e a formação; aproximar-se da realidade, vinculando a mudança e o conhecimento e colocar o professor como protagonista da investigação. Assim, a investigação-acção é um instrumento poderoso para reconstruir as práticas e os discursos. (Latorre, 2003)

Neste estudo optei por seguir uma metodologia qualitativa de investigação-acção pois tem como um dos seus pilares uma experiência em sala de aula onde, como professora, implemento uma abordagem pedagógica com vista a uma mudança na minha prática e à ampliação do conhecimento em relação a uma possibilidade de encarar o ensino e a aprendizagem da Matemática que conheço apenas com base em ideias teóricas.

A investigação-acção foi descrita pelo psicólogo Lewin (1946) como uma espiral de passos: planificação, implementação e avaliação do resultado da acção. Conceptualiza-se como um projecto de acção formado por estratégias de acção, vinculadas às necessidades do professor investigador. É um processo que se caracteriza pelo seu carácter cíclico que implica um vaivém – espiral dialéctica – entre a acção e a reflexão, de forma que ambos os momentos estejam integrados e se complementem. O processo é flexível e interactivo em todas as fases do ciclo.

O processo da investigação-acção foi idealizado por Lewin (1946) e desenvolvido logo a seguir por Kolb (1984), Carr e Kemmis (1988), entre outros. Sinteticamente a investigação-acção é uma espiral de ciclos de investigação e acção, constituídos pelas seguintes fases: planificar, actuar, observar e reflectir.

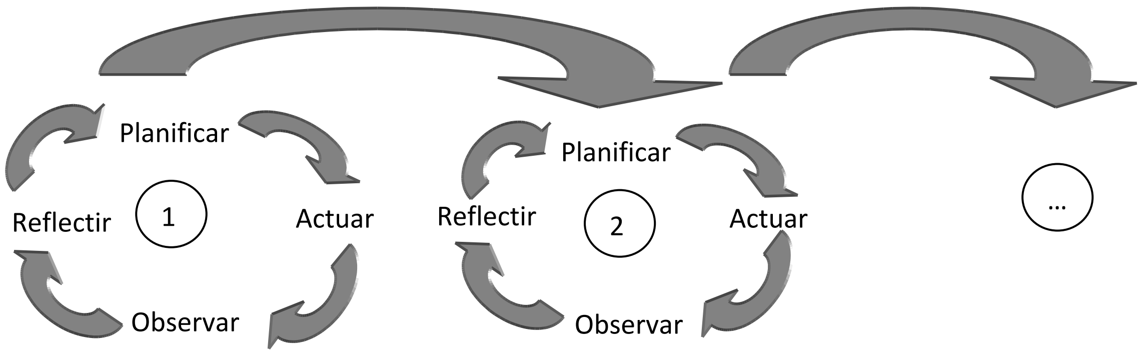


Figura 3.1. Espiral de ciclos da investigação-acção

A existência de diversas concepções sobre este processo deu origem a diversos modelos de investigação. Os modelos são bastante similares na sua estrutura e procedimento, pois todos têm raiz no modelo matriz Lewiniano. De todos os que encontrei na literatura, o que se ajusta mais a este estudo é o modelo de Whitehead (1989) pois, segundo este autor, as propostas de Kemmis e Elliot afastavam-se da realidade educativa, tornando-se mais num exercício académico do que num modelo que permitisse melhorar a relação entre a teoria educativa e o desenvolvimento profissional.

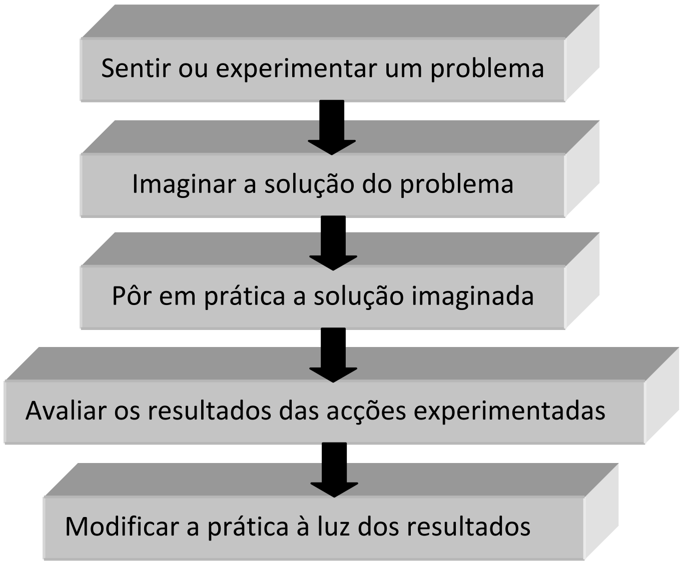


Figura 3.2. Modelo da investigação-acção, segundo Whitehead

3.3. A intervenção pedagógica e as actividades propostas

A recolha de dados para este estudo foi realizada, no período de Janeiro a Maio de 2009, numa Escola Básica de uma cidade do Algarve, escola sede de Agrupamento Vertical, no qual sou Professora do Quadro, no grupo de docência 500, desde 2001. Este agrupamento é um dos maiores do Algarve, abrangendo uma área territorial com aproximadamente 400 Km^2.

A população escolar é constituída por alunos de origens muito diversas, de zonas muito afastadas da cidade e de contextos socioculturais muito diferenciados: meio citadino (filhos de pequenos comerciantes, pequenos industriais, funcionários de serviços, profissões liberais e alguns pescadores), meio piscatório e meio rural**.**

Em estudo encontram-se duas turmas de 9.º, ano num total de 43 alunos, das quais fui professora durante todo o 3.º ciclo. Uma das turmas é constituída por 6 raparigas e 14 rapazes e a outra turma por 13 raparigas e 10 rapazes. As idades dos alunos variam entre os 14 e os 17 anos, sendo a média de 14 anos. Em relação ao aproveitamento, em termos de classificações obtidas no fim do 1º período, registaram-se apenas 4 níveis dois, e 3 níveis cinco, sendo o nível médio das turmas de 3,7. Em relação ao trabalho na aula, são turmas trabalhadoras, conversadoras mas por vezes algo desconcentradas. São geralmente alunos colaborativos, notando-se em alguns deles alguma competitividade. A maior parte dos alunos mais fracos revelam-se muito trabalhadores mas apresentam muitas dificuldades na aplicação de conteúdos matemáticos e na resolução de problemas. São turmas simpáticas e com as quais é agradável trabalhar e que nunca tinham antes realizado actividades de modelação.

As minhas preocupações pedagógicas para este estudo surgiram da necessidade que senti de dar um sentido útil e prático à aplicação da matemática em situações quotidianas, de contribuir para a transformação da visão negativa e inalcançável da matemática por parte de muitos alunos, de abrir os horizontes dos alunos, de lhes dar poder, emancipação e a capacidade de identificarem e compreenderem a Matemática no seu quotidiano.

As actividades surgiram da observação do quotidiano (monumentos históricos da cidade, comércio, lazer e jogos), da leitura da bibliografia e da necessidade de sair da tradicional resolução de problemas. Para a concepção das actividades foram tidas em consideração as características das actividades concebidas sob a teoria da RME e da MMP já descritas no capítulo 2. As actividades foram propostas na ordem descrita no quadro da figura 3.3, tendo em conta os objectivos a atingir e sempre depois de reflectir sobre a actividade anterior. As cinco actividades realizaram-se ao longo de um período de cinco meses, sempre que possível durante as aulas de remediação a que as turmas tinham direito pelo Plano da Matemática, de 90 minutos por semana. No quadro seguinte apresenta-se a cronologia das actividades e a duração de cada uma delas.

Actividade	Data de realização	Duração
1. Copos de pipocas. Qual escolher?	Início de Janeiro de 2009	90 minutos
2. A caixa de pasteleiro	Fim de Janeiro e Fevereiro	90 + 90 minutos
3. Serão estas escadas cómodas para subir e descer?	Fim de Fevereiro	90 minutos
4. Aviões de papel. Qual o melhor a voar?	Março	90 + 90 minutos
5. Paleta de cores	Maio	90 minutos

Figura 3.3. Quadro cronológico da realização das actividades de modelação

A primeira actividade “Copos de pipocas. Qual escolher?” tem um formato diferente das outras actividades. Nesta primeira actividade é feita uma introdução ao problema e é sugerida uma investigação sobre a melhor opção a tomar, tendo por base a manipulação de objectos manipuláveis. As outras actividades são compostas por 4 partes. A primeira é a introdução ao tema em estudo. A segunda, denominada “Da experiência…” consiste numa actividade prática, experimental, com recurso a materiais manipuláveis e a objectos do quotidiano cujos objectivos são a compreensão da situação e das variáveis envolvidas e a descoberta da matemática oculta no quotidiano. A terceira, denominada por “… ao modelo” é composta por um estudo analítico-algébrico dos dados obtidos na fase experimental, sendo um dos seus objectivos a criação de um modelo matemático local e de um modelo de carácter mais geral que possa ser utilizado em situações similares. Por fim, é solicitado um relatório escrito que foque os seguintes pontos: explicação da situação experimental, as hipóteses colocadas, a estratégia utilizada, os resultados obtidos, a avaliação da proposta de trabalho e as dificuldades sentidas ao longo da actividade.

Em seguida é feita uma caracterização de cada uma das cinco actividades realizadas.

Actividade 1: “Copos de pipocas. Qual escolher?”

É colocada a situação de um vendedor de pipocas num cinema que quer saber qual o formato de um pacote de pipocas cilíndrico que lhe dará mais lucro, tendo sempre por base uma folha de tamanho A4. Esta actividade caracteriza-se por uma situação real conhecida, é proposta a exploração de casos particulares, os alunos necessitam de tomar decisões, é necessário recorrer a um modelo matemático (volume do cilindro), descobrir soluções possíveis. Envolve conhecimentos e conceitos de geometria.

Actividade 2: “A caixa de pasteleiro”

É colocada uma situação real: a construção de uma caixa de pasteleiro por dobragens (origami) que acomode um objecto ou vários objectos. Nesta actividade é proposta a medição de folhas de papel de vários tamanhos, a construção de caixas seguindo as instruções e o registo das dimensões das caixas. É necessário identificar variáveis e estabelecer relações entre elas, é requerida a construção de um modelo real e de um modelo matemático que descreva a situação, é necessária a manipulação do modelo real e/ou a utilização do modelo criado para obter soluções. Estão envolvidos conhecimentos sobre fracções, razões e proporções.

Actividade 3: "Serão estas escadas cómodas para subir e descer?"

É colocado um problema concreto: a indicação das características desejáveis para a construção de uma escada para uso pessoal. Para esta actividade é requerido um modelo geométrico da escada, é proposta a exploração de casos particulares, é necessário definir critérios e tomar decisões, é necessário identificar variáveis e estabelecer relações entre elas e são necessários conhecimentos de geometria plana.

Actividade 4: "Aviões de papel. Qual o melhor a voar?"

É colocada uma situação real: dar a sugestão de um tipo de avião de papel para um concurso de planadores de papel. Nesta actividade é requerida a construção de modelos reais (aviões de papel), é necessária a experimentação desses modelos reais, é proposta a interpretação de gráficos e tabelas resultantes dos dados obtidos na experiência. É necessário encontrar uma relação entre variáveis, é preciso tomar decisões. São necessários conhecimentos sobre gráficos e sua interpretação.

Actividade 5: "Paleta de cores"

É colocada uma situação real conhecida: uma máquina de fazer tintas avaria e é necessário fornecer uma lista com as quantidades de pigmento a utilizar para cada cor.

Para esta actividade é requerida a construção de tabelas com os dados obtidos, um modelo matemático local e geral para cada situação, é necessário identificar variáveis e relações entre elas, é sugerida a experimentação e a generalização de resultados, é proposta a exploração de casos particulares. São necessários conhecimentos de medida e proporção.

Para realizar este estudo foi solicitado ao Presidente do Conselho Executivo e ao Conselho Pedagógico autorização para efectuar o estudo na escola (Anexo 1), a qual foi deferida. Foi também obtida autorização dos Encarregados de Educação para filmar e gravar as aulas onde se realizariam as actividades referentes ao estudo (Anexo 2).

Os alunos distribuíram-se em dez grupos com três ou quatro elementos (cinco grupos por turma), sendo livres de se organizarem em grupo por afinidades entre eles.

Durante a realização das actividades, os alunos tinham a possibilidade de se movimentarem pela sala, por exemplo, discutindo com outros colegas as ideias que não mereciam consenso no seu grupo.

No início de cada actividade eram distribuídos os enunciados das tarefas e o material manipulável necessário; seguia-se um período de leitura e compreensão da tarefa. Se surgissem dúvidas, estas eram esclarecidas de modo a não protelar o andamento dos trabalhos.

Durante a realização das tarefas os alunos discutiam as suas ideias, tiravam conclusões, esclareciam dúvidas, registando tudo no caderno para posteriormente elaborarem um relatório.

3.4. Recolha e análise dos dados

A recolha de dados foi feita com base na observação participante e na escrita de notas de campo, as aulas foram registadas em vídeo-áudio com uma câmara móvel e em cada actividade um grupo-foco foi gravado em vídeo e em áudio com uma câmara fixa. Os grupos-foco foram diferentes nas diversas actividades. Para cada actividade, foi escolhido um grupo, aleatoriamente e sem repetição, de forma a percorrer todos os grupos de trabalho, que se mantiveram sempre constantes ao longo da experiência. Os relatórios entregues pelos diferentes grupos no final de cada actividade também foram alvo de análise.

Depois da recolha de todos os dados, estes foram visionados e organizados de forma a permitir uma visão global das informações recolhidas e, seguidamente, foi efectuada uma triagem para apurar os dados mais relevantes e informativos para a continuação da análise. Das cinco actividades realizadas (Anexo III) foram escolhidas três: “A caixa de pasteleiro”, “Serão estas escadas cómodas para subir e descer?” e “Paleta de cores”. Foram estas três actividades que geraram os dados que identifiquei como mais produtivos para o propósito de obter respostas às questões de investigação. As outras duas actividades não foram esquecidas nem colocadas de parte, apenas não as escolhi para um tratamento mais profundo após analisar e reflectir sobre os dados mostrados nas cinco actividades. Nestas duas actividades os dados não acrescentavam aspectos substancialmente novos para a continuação do estudo em relação às outras três devido à necessidade de uma análise em profundidade.

Foram sendo alvo de uma análise pormenorizada, as notas de campo que registei durante o decurso das actividades, os registos vídeo e áudio dos grupos-foco, o vídeo geral da turma e os relatórios dos vários grupos de alunos.

A observação permite-me contar a minha leitura e incluir a minha percepção do fenómeno em estudo, complementando os dados contidos nos documentos escritos, nos vídeos e nos áudios. A observação participante não é apenas uma actividade fundamental vinculada à investigação-acção mas é também uma técnica fundamental de recolha de informação e um procedimento chave na metodologia qualitativa (Latorre, 2003). A observação participante é apropriada para o estudo de fenómenos que exijam que o investigador se envolva e participe para obter uma compreensão do fenómeno, sendo portanto uma estratégia inerente à investigação-acção. O que caracteriza este tipo de observação é a sua natureza participativa, podendo-se considerar como um método interactivo que requer uma implicação do observador nos acontecimentos que está observando. Para registar a informação, o observador participante utiliza registos abertos, do tipo narrativo-descritivo, que contêm descrições detalhadas e amplas dos fenómenos observados, com o fim de explicar os processos desenvolvidos. A informação é registada num suporte físico (notas de campo, gravações vídeo ou áudio) que confere aos dados durabilidade e disponibilidade (Latorre, 2003).

Outra via de obtenção de informação é a recolha de relatórios escritos e/ou documentos produzidos pelos alunos. A sua análise implica examinar o documento com o propósito de obter informação útil e necessária para responder aos objectivos da investigação. Em certas situações, a análise de documentos é a única fonte de informação sobre determinado pormenor ou característica em estudo.

As gravações em vídeo e/ou áudio são ferramentas fiáveis e precisas para quem necessita de observar ambientes naturais. O uso do vídeo na investigação em educação é ilimitado, pois permite registar dados para interpretação posterior, permitindo recuperar as imagens das aulas em qualquer momento futuro (Latorre, 2003).

Durante a análise das transcrições das gravações vídeo e áudio e dos documentos produzidos pelos alunos foram utilizadas palavras de codificação dos dados, tais como: matematização horizontal, matematização vertical, linguagem formal, linguagem informal, modelo de e modelo para.

Por fim, a reflexão. A reflexão estabelece a fase com a qual se encerra um ciclo de investigação, constituindo-se como um dos momentos mais importantes de todo o processo. Não é uma fase isolada, nem ocorre unicamente no final da investigação mas sim durante a mesma. É o momento de pensar sobre o que fazer com os dados, como analisá-los e interpretá-los. É importante distinguir entre a acção, que nem sempre funciona como queremos, e a investigação-acção, que pode demonstrar o significado de uma prática, para que nós e outros aprendamos com ela.

Capítulo 4

Apresentação e análise dos dados

Neste capítulo serão apresentadas e analisadas três actividades de modelação, “A caixa de pasteleiro”, “Escadas cómodas” e “Paleta de cores”. Será dividido em duas partes, na primeira descreverei as três actividades separadas por turmas, começando com a descrição do grupo-foco e finalizando com uma ideia geral do que se passou na turma. A descrição das actividades incluirá a transcrição de alguns dos diálogos dos alunos, fotografias dos alunos em actividade e digitalização de excertos dos seus relatórios escritos. Na segunda parte, analisarei e interpretarei as actividades sem separar as turmas, fazendo a articulação dos dados com o quadro teórico, tendo em mente as questões de investigação e focando os aspectos mais importantes, independentemente de terem ocorrido numa ou noutra turma, com este ou aquele aluno.

Na descrição das várias actividades os alunos participantes serão identificados por uma letra maiúscula, como forma de preservar o anonimato.

4.1. Apresentação dos dados

4.1.1. **"A caixa de pasteleiro"** (Anexo 4)

Grupo-foco, Turma 1 (alunos F, I, M e R)

Os alunos lêem a actividade enquanto eu distribuo folhas brancas de 3 tamanhos diferentes para a construção das caixas de pasteleiro.

O aluno I começa a tirar apontamentos para incluir no relatório. O aluno R mede a folha mais pequena e I regista as suas dimensões, enquanto distribuo os pacotinhos de bolachas, dois por cada grupo.

O grupo começa por medir as folhas, desenhar esquemas e registar as dimensões das folhas no caderno, acabando por construir três caixas com as três folhas de diferentes tamanhos (grande, média, pequena).

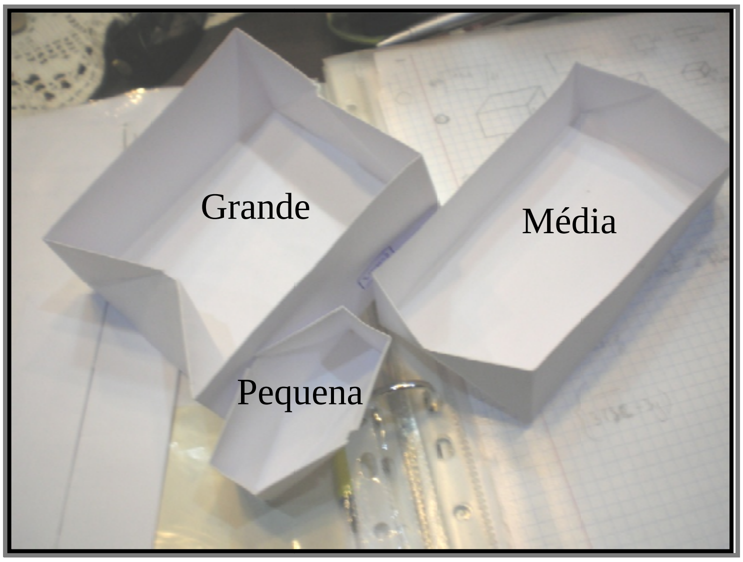


Figura 4.1. As três caixas construídas

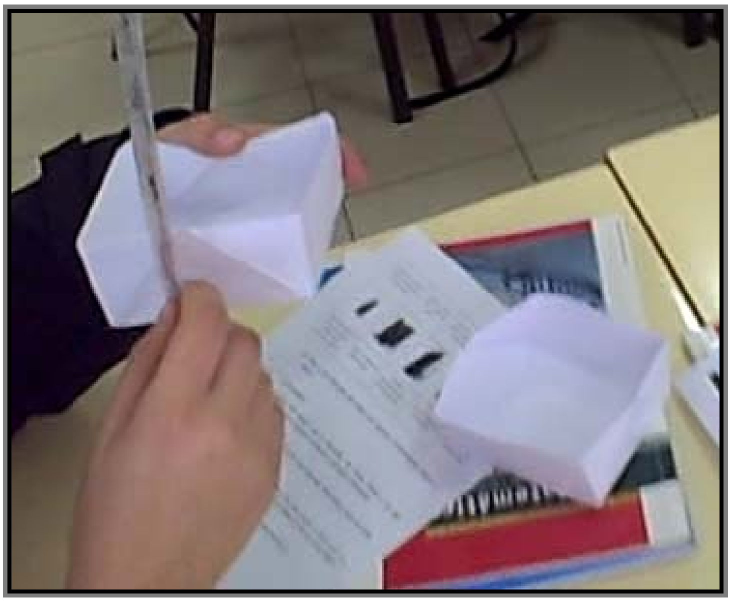


Figura 4.2. Aluno a medir as caixas

Tentam empacotar os pacotinhos de bolachas de forma circular nas caixas produzidas enquanto discutem qual das três caixas é a melhor para empacotar as cinco bolachas do pacotinho.

Colocam duas hipóteses. A primeira hipótese levantada refere que se a caixa média comporta dois pacotes de bolachas, então metade da folha deve dar origem a uma caixa que comportará um pacote de bolachas.

Figura 4.3. Dois pacotes de bolachas cabem na caixa média

I: Deixa perceber como é que isto é. Agora abre a caixa. Dizes que a caixa perfeita é metade da caixa média. Mede-me a caixa média.

R: 14,2 aqui, 3,5 e 7.

I: Então fica 21 vírgula…

M: 29,3?... 8,3… 10 vezes 3 dá 30.

I: É metade de uma folha A4. São duas folhas pequeninas.

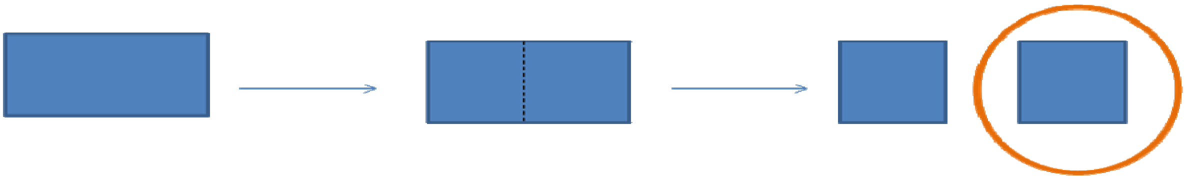


Figura 4.4. Esquema da primeira hipótese

Fazem um esquema da caixa, constroem-na e testam a sua hipótese.

Quando colocam o pacote das bolachas no interior, o resultado não satisfaz o pretendido.

A segunda hipótese colocada refere que se duas caixas pequenas unidas comportam o pacote então duplicar as dimensões da folha pode ser a solução.

F: É a pequenina que dá melhor, I! Olha!! É a pequenina que dá melhor.

(…)

I: Folhas pequenas dobradas na horizontal.

R: De largura... Isto é a largura... 5,5... não. Agora é que é 3,5.

I: E para a altura?

R: A altura é 5,5.

I: É a folha pequenina? Impossível...

R: 1,8. Agora esta, dobrada na vertical.

(...)

I: Deixa ver como é que isto é.

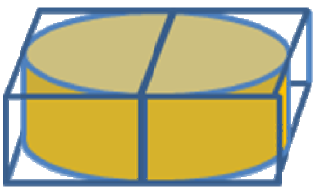


Figura 4.5. Esquema da segunda hipótese

Juntam duas folhas pequenas unidas com fita-cola, constroem a caixa e quando testam o resultado, este também não satisfaz o que se pretende.

Recorrem então a outra estratégia. Registam as dimensões das caixas, desdobram as caixas e tentam relacionar as dimensões da caixa com as dimensões da folha respectiva e as dobras resultantes. As caixas são medidas mais do que uma vez.

Uma relação algébrica começa a ser considerada pelo aluno I. Em seguida, tenta resolver o problema usando uma relação formal que encontrou. A solução adequada é encontrada no fim da aula.

Após reflectir sobre o que tinha acontecido, achei que deveria provocar a utilização da relação algébrica para a procura da solução, para ir além da experiência. Nesse caso, teria que colocar uma questão para a qual a via experimental fosse pouco cómoda e se tornasse ineficaz (Anexo 5). Assim, na aula seguinte coloquei a seguinte questão à turma.

Eu: Hoje vão ter que descobrir as dimensões de uma folha de cartão para construir uma caixa de pasteleiro para embalar um bolo de aniversário de forma cilíndrica com 13 cm de raio e 10 de altura.

Em relação a esta sétima questão relativa ao bolo de aniversário os alunos decidiram usar folhas de tamanho A4. A caixa foi construída, medida e as dimensões registadas.

As dimensões da folha estão novamente relacionadas com as dimensões da caixa. As dobras são analisadas e um dos alunos sugere o modelo matemático enquanto verifica os seus cálculos na calculadora.

Outro aluno continua com sucessivas experiências no modelo real da caixa, dobrando e desdobrando, incrementando o tamanho da folha adicionando mais tiras de papel com fita-cola.

Há alguma discussão entre eles e decidem então usar quatro folhas de tamanho A4 porque duas não eram suficientes, de acordo com o diâmetro do bolo e com as relações encontradas.

F: Eu já sei a solução.

M: Deixa-me lá fazer.

F: Oito caixas...não! Seis! Seis ou quatro! Não, 4! 4 ou 6 caixas daquelas médias.

I: Mas não sabes se fica com 10 cm.

F: Aí é que está, ou 4 ou 6. Vamos experimentar com 4.

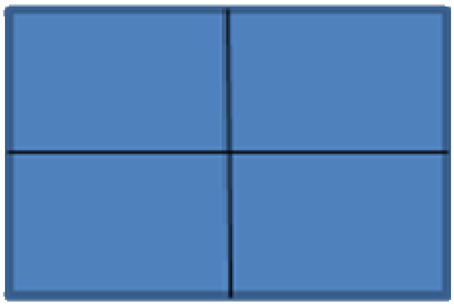


Figura 4.6. Esquema de uma solução hipotética usando 4 folhas A4

A nova caixa de tamanho grande é construída e medida mas o resultado continua a não satisfazer o pretendido. O aluno I trabalha individualmente, tirando dúvidas com o aluno R, utilizando o modelo matemático algébrico e os outros três elementos do grupo adicionam nova tira à folha de papel. Uma caixa ainda maior é construída. Entretanto, o aluno I encontra uma solução, comunica aos colegas e estes cessam o trabalho experimental.

I: Dá 11. Quanto é que nós precisamos?

R: 26. é melhor pôr 27.

I: 11 está para 30 assim como.... (aplicação da regra três simples). Isto assim não dá R. Não dá para fazer assim.

(...)

R: A altura é..

I: Isto! A altura é um sexto do comprimento. Queremos a altura 10... Tem que ser 60 de comprimento. Agora a largura.

(...)

I: Agora o comprimento. Então este comprimento tem que ser 60. Agora para dar 26.... (Faz cálculos e analisa a média inicial para confirmar as relações). Já sei!

Figura 4.7. Alunos trabalhando experimentalmente e alunos explorando algebricamente

Os quatro alunos prosseguem com a exploração algébrica do problema até encontrarem uma solução adequada.

Em relação à turma no seu geral, todos os grupos, à excepção de um, tentaram resolver o problema através do método experimental, o outro grupo chegou à solução pela exploração algébrica (método mais formal).

Figura 4.8. Alunos a trabalharem experimentalmente

Nos relatórios entregues, é possível observar os vários esquemas e as respostas às questões da actividade (figuras 4.9, 4.10, 4.11).

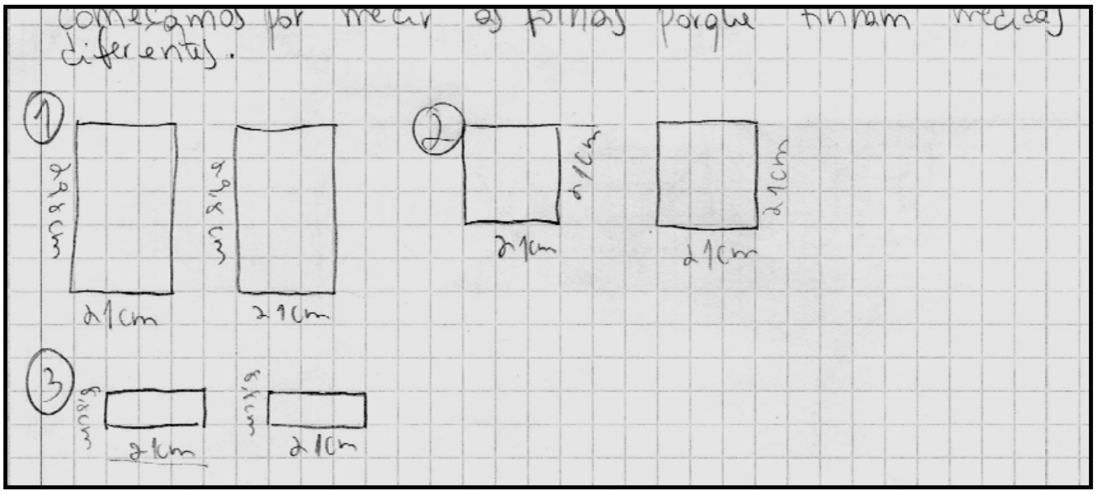


Figura 4.9. Esquema das folhas inicias com as dimensões registadas

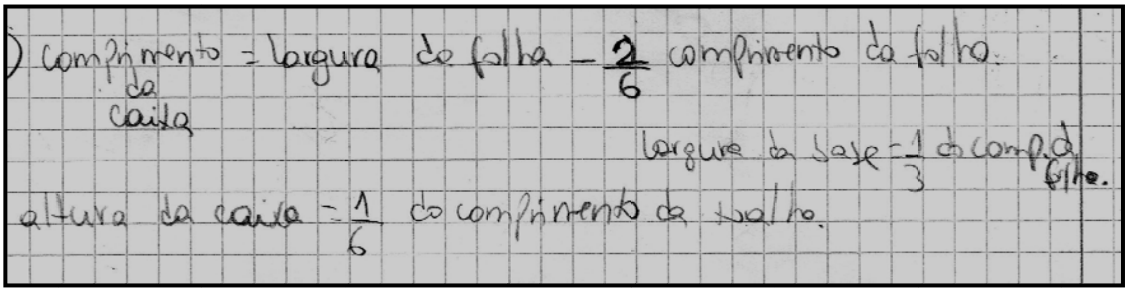


Figure 4.10. Relação entre variáveis em linguagem matemática informal

Como a altura do bolo era de 10 cm e a altura da caixa era 1/6 do comprimento da folha como já tínhamos visto, conseguimos descobrir que a comprimento da folha teria de ser 60 cm mas ai surgiu-nos um problema, não era somente a altura da caixa que dependia do comprimento da folha, a largura também e ai os cálculos não batiam certo.
Se o comprimento da folha fosse 60 cm a largura da caixa seria 60/3=20cm e precisávamos que a largura da caixa fosse 26 cm devido ao diâmetro do bolo, para isso o comprimento da folha teria de ser 3x26=78.
Então optámos por fazer uma caixa de pasteleiro com 13 cm de altura 78/6=13cm.

Para acharmos a largura da folha sabíamos que o comprimento da caixa teria que ser 26 cm então efectuamos os seguintes cálculos:
Largura da folha = comprimento da caixa + 2x altura da caixa
Largura da folha = 26 + 2x13 = 26 + 26 = 52 cm
A largura da folha seria 52 cm.

E então concluímos que a folha necessária para construir a caixa de pasteleiro para o bolo seria com as medidas:

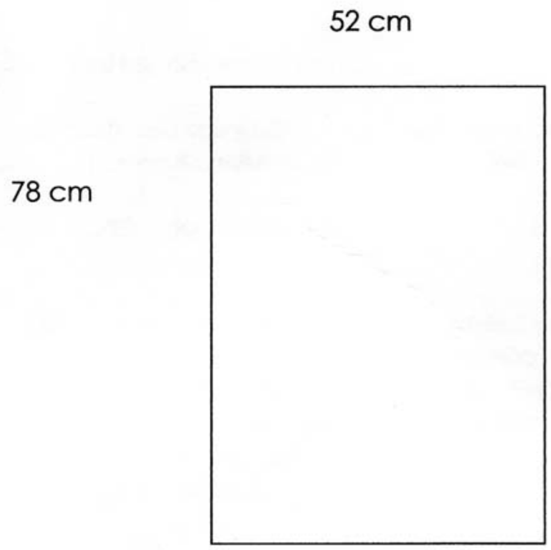


Figura 4.11. A solução para a questão suplementar obtida através do modelo matemático em linguagem matemática informal

Grupo-foco, Turma 2 (aluno B, aluno H, aluno J e aluno P)

O grupo lê a actividade. Medem as folhas e o aluno H divide o comprimento por 3 na calculadora, de acordo com a orientação geométrica da construção das caixas.

O aluno P escreve o relatório, seguindo as instruções do aluno B.

Constroem as caixas com a minha ajuda.

O aluno J lê novamente as questões da actividade para continuarem com o trabalho.

O aluno B analisa as medições para tentar encontrar relações entre as dimensões das folhas e das caixas. E o grupo mede novamente a caixa grande. Como o aluno B quer a medida exacta e não uma aproximação, resolve ser ele a medir.

Desmancham uma caixa e medem pelas dobras vincadas. Como têm algumas dificuldades para encontrarem as relações, pedem o meu auxílio.

Oriento a descoberta através de perguntas e registo as suas hipóteses na folha desmanchada, sem validar as hipóteses colocadas o que faz com os alunos discutam entre eles sobre as relações.

P: É o triplo.

Eu: Sim, mas o que é em relação a quê?

P: A caixa em relação à folha.

Eu: A caixa, mas o quê da caixa? Largura? Comprimento? O quê?

P: A base.

Eu: A base?! É a largura ou o comprimento da base? Vocês estavam a dizer que era a terça parte de qualquer coisa. Essa terça parte é em relação à largura ou ao comprimento da base da caixa?

(Discutem entre si se é realmente o comprimento ou a largura da base da caixa.)

(...)

J: O comprimento da caixa.

Eu: Será?

B: Não. A largura da caixa é que é a terça parte do comprimento da folha inicial.

(...)

Figura 4.12. Conversa entre os alunos e eu na descoberta das relações entre as variáveis

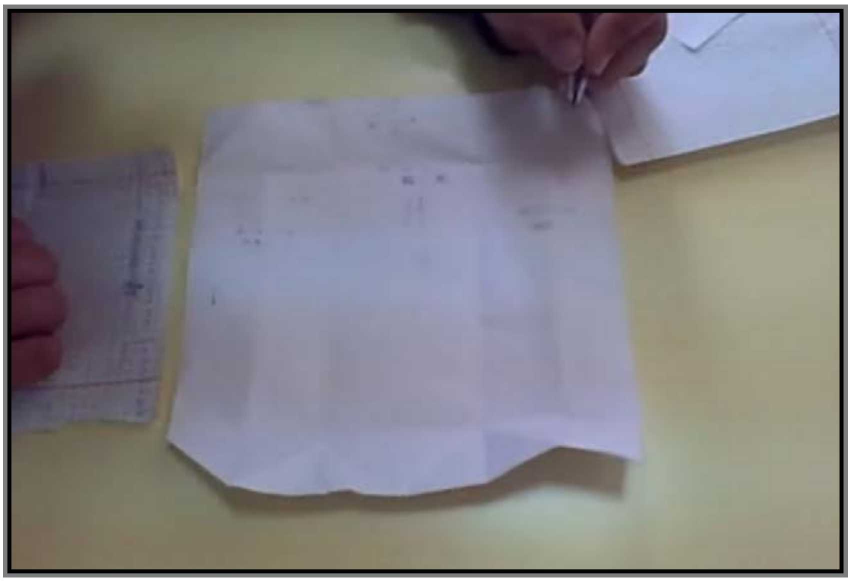


Figura 4.13. Caixa desmontada com anotações das relações entre as variáveis

Entretanto, descobrem as restantes relações. Transcrevem para a sua folha de dados as relações encontradas e escritas na caixa em linguagem matemática informal e tentam escrever as relações genéricas em linguagem matemática formal (criação do modelo matemático).

Utilizam "cc" para o comprimento da caixa, "lc" para a largura da caixa, "ac" para a altura da caixa, "cf" para o comprimento da folha, "lf" para a largura da folha.

O aluno B explica ao aluno J a relação entre a largura da caixa e as dimensões da folha.

Toca para sair. A aula termina aqui.

Na aula seguinte, coloquei, tal como na outra turma, a sétima questão de forma oral, relacionada com o acondicionamento de um bolo de aniversário.

O grupo-foco resolve facilmente a questão recorrendo às equações encontradas na aula anterior sem precisarem de passar pela parte experimental e sem terem o bolo na sua presença.

No conjunto da turma, uma aluna constrói a caixa sem problemas, mas antes cortou a folha para ter medidas certas em unidades de centímetro. Apesar de ter acertado os valores das dimensões, não percorre o caminho algébrico mas o caminho experimental. Ela tenta descobrir as medidas da folha para a caixa das bolachas por experiência. Coloca um pacote por cima do outro e verifica que perfazem um volume de 8x8x4 e então desenhou um quadrado na folha com 8 cm de lado e quando tentou construir a caixa esta não comportava os dois pacotes de bolachas.

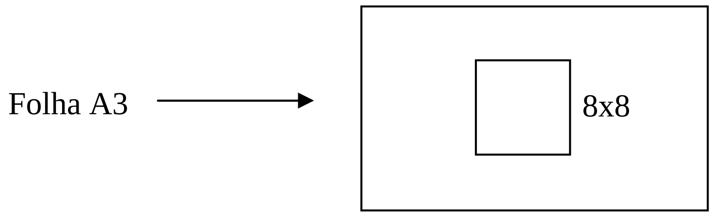


Figura 4.14. Esquema da solução encontrada por uma aluna

Mais tarde, encontra as relações entre as várias variáveis. Também outro grupo conseguiu encontrar as relações entre as variáveis, recorrendo a cálculos iterativos com a ajuda da calculadora.

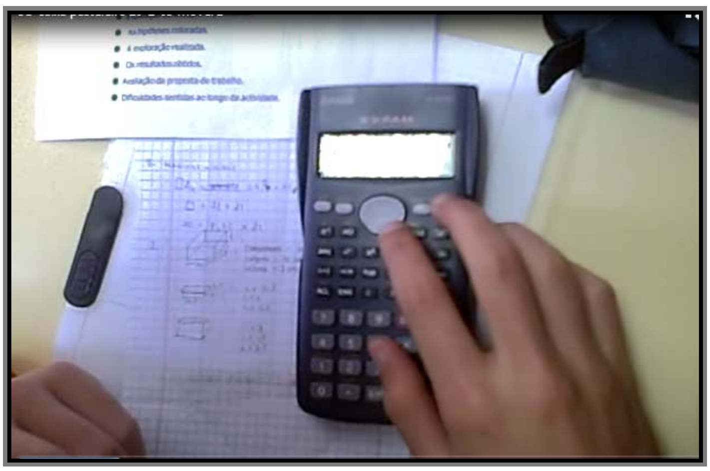


Figura 4.15. Aluno a confirmar as relações com a ajuda da calculadora

Nos relatórios entregues é possível observar os vários esquemas e as respostas às questões da actividade (figuras 4.16, 4.17, 4.18).

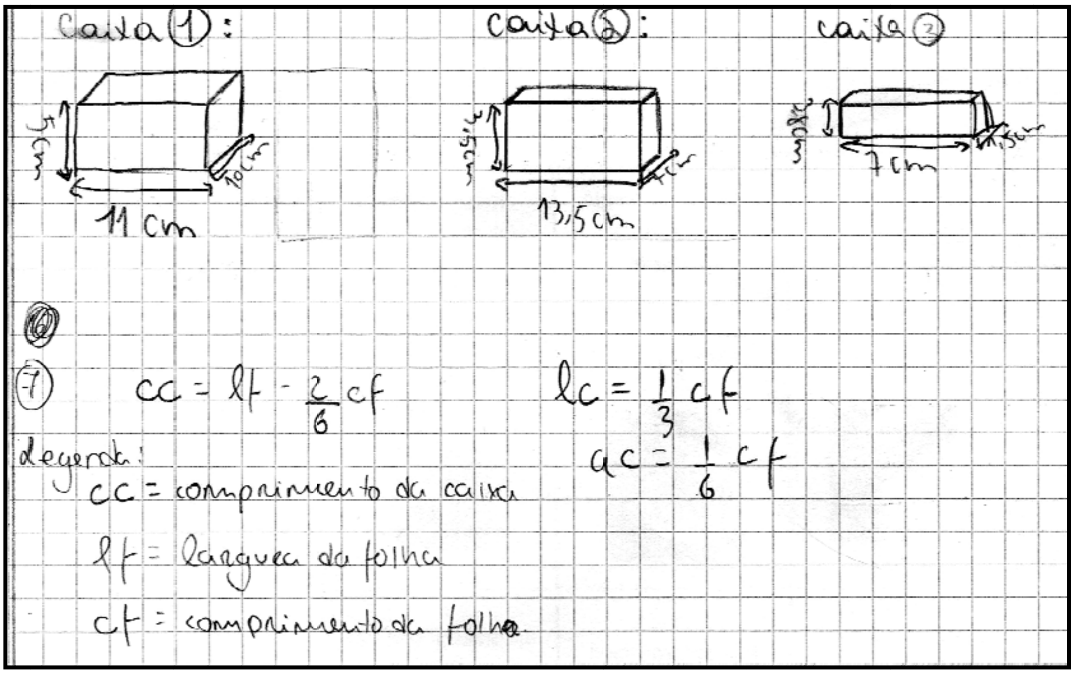
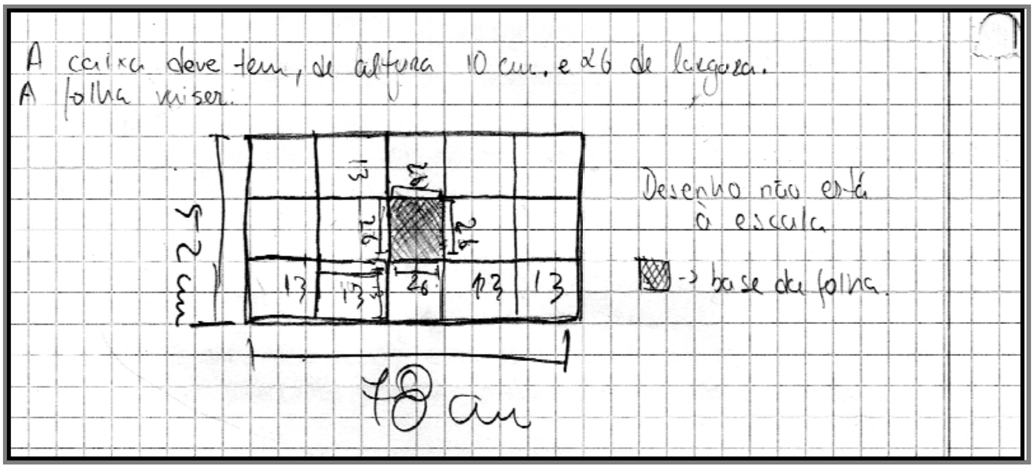
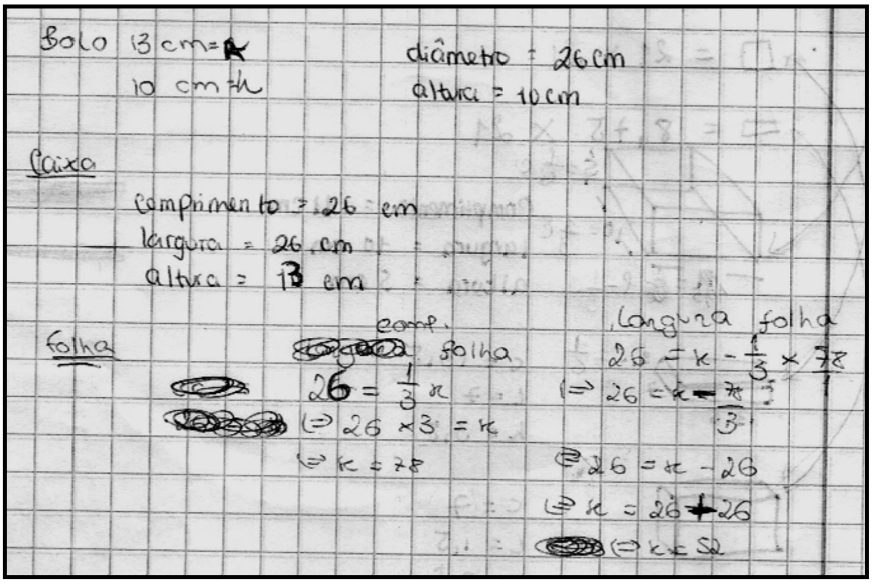


Figura 4.16. Esquemas das caixas com dimensões e relação entre variáveis (em palavras)



4.17. Resolução da questão suplementar através de um esquema



4.18. Resolução da questão suplementar através do modelo matemático

4.1.2. **“Serão estas escadas cómodas para subir e descer?”** (Anexo 6)

Durante a actividade, os alunos saíram da escola e percorreram diversos locais e experimentaram diversos tipos de escadas que fazem parte do património da cidade desde as mais antigas até às mais novas.

Figura 4.19. Alguns exemplos de escadas estudadas pelos alunos, escadas da muralha do castelo, escadas da porta da cidade remodeladas há alguns anos e as escadas do novo anfiteatro no centro da cidade

Grupo-foco, Turma 1 (alunos A, B, D e R)

No trabalho de campo, os alunos experimentaram subir e descer escadas de forma a classificarem-nas de 1 a 5, correspondente à escala de menos cómoda (1) a mais cómoda (5).

Para analisarem as relações pedidas na actividade, mediram as profundidades (cobertores) e as alturas (espelhos) dos degraus de cinco escadas, todas situadas ao ar livre pela cidade.

Figura 4.20. Alunos a experimentarem escadas para as classificarem

Durante a classificação das escadas os alunos dão a sua opinião e ouvem a opinião dos colegas para chegarem a um consenso.

R: Não gosto das escadas do castelo porque cada passo que dou tenho a sensação que vou cair. São muito altas e estreitas, não tinha o espaço suficiente para pôr o pé ... Dou-lhe 1 na classificação. E vocês?

(...)

A: Eu dava 1 ou 2.

R: Mas conseguiste subir bem as escadas?

A: Nem por isso. Tens razão, damos 1.

Figura 4.21. Medição dos cobertores e dos espelhos dos degraus das escadas

Durante as medições aperceberam-se que na escadaria do castelo, uma das mais antigas, feita de pedras irregulares, os cobertores e os espelhos tinham valores diferentes e que para conseguirem obter a relação entre o cobertor e o espelho tinham que calcular a média dos valores recolhidos. Assim, quando chegaram à aula:

Eu: E agora o que temos que fazer?

B: As médias!

Eu: As médias do quê?

B: Das coberturas.

Eu: E ....

B: Dos cobertores e das alturas.

Eu: Então vamos ao trabalho!

Calcularam a média dos valores dos cobertores e das alturas de cada escadaria.

Entretanto, na turma, alguns alunos já tinham feito este processo do cálculo das médias e continuaram o seu trabalho, analisando os dados obtidos, estabeleceram as relações entre as variáveis (cobertor e espelho) e apresentaram uma solução para o problema.

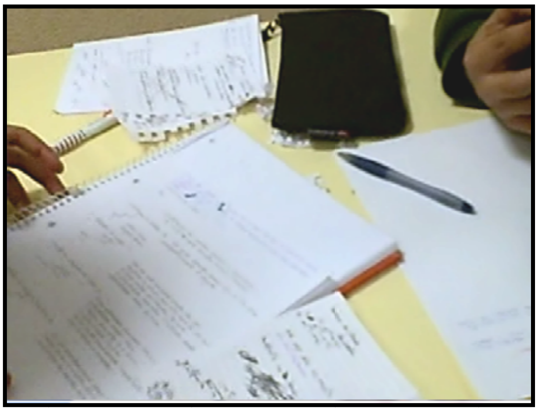
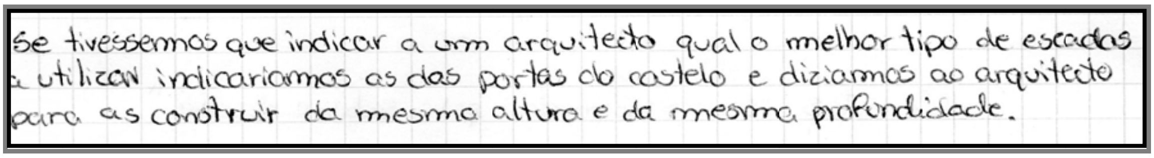


Figura 4.22. Análise dos resultados para a proposta de solução ao problema

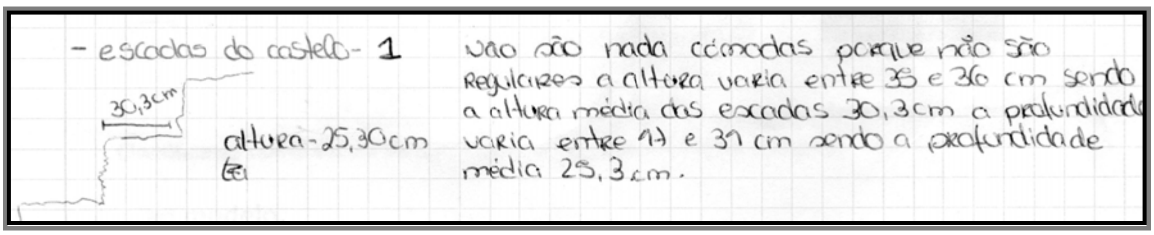


se tivessemos que indicar a um arquitecto qual o melhor tipo de escadas a utilizar indicariamos as das portas do castelo e diziamos ao arquitecto para as construir da mesma altura e da mesma profundidade.

Figura 4.23. Proposta de solução ao problema

Nesta actividade não se constataram grandes dificuldades no seu desenvolvimento, as variáveis foram claramente identificados e a relação entre elas encontrada. A resposta ao problema também não foi difícil de propor.

Os relatórios entregues são muito idênticos, com mais pormenor ou menos pormenor.



- escadas do castelo - 1

30,3cm

altura - 25,30cm

não são nada cómodas porque não são regulares a altura varia entre 35 e 36 cm sendo a altura média das escadas 30,3cm a profundidade varia entre 17 e 37 cm sendo a profundidade média 25,3 cm.

Figura 4.24. Classificação de uma das escadas com fundamentação matemática

Grupo-foco, Turma 2 (aluno B, aluno D, aluno M e aluno T)

O processo deste grupo foi muito parecido com o da turma anterior. Recolheram os dados, desenharam os esboços das escadas e na aula calcularam as médias das escadas que tinham medidas irregulares, tais como as escadas do castelo.

A maior dificuldade para este grupo foi no encontrar as relações entre as medidas do degrau.

B: O cobertor pode ser o dobro do espelho.

Eu: Por exemplo! Pode ser o dobro....pode ter unidades a mais ou a menos....

M: Nestas escadas é pouca a diferença entre as duas.

(...)

(o aluno analisa novamente os dados)

M: É aproximadamente metade...

Eu: Estás a tentar encontrar uma relação entre as duas...

M: Medidas.

(...)

M: Professora! Quanto maior for o cobertor mais cómodas são.

Eu: Se for um cobertor de 3 metros, será que são cómodas?

M: Não!!!

(...)

D: Falta a da última escada (Calçada D. Ana). Parece que é 4 vezes maior... o cobertor em relação ao espelho.

(...)

(Depois de analisarem a classificação que fizeram e as relações encontradas)

M: Ó professora! Então a conclusão é que o cobertor deve ser o dobro do espelho para que as escadas sejam cómodas!

Eu: Mas pode ser qualquer valor desde que seja o dobro?

D: Um bocado maior que o tamanho do pé (cobertor)

(...)

D: Mais ou menos 30 cm.

Eu: Isso podem saber pelas medidas que recolheram.

(...)

(Procuram a informação)

D: Pode ser 45 cm.

Verificam experimentalmente, no chão, simulando um degrau com 22,5 cm de espelho e 45 de cobertor.

Eu: Já imaginaram umas escadas dessas em casa?

M: Em casa não!

Discutem novamente entre eles e chegam à conclusão que o cobertor deve ter 30 cm e o espelho 15 cm.

Figura 4.25. Alunos a medirem escadas

Tal como na turma anterior, foi possível constatar que a actividade decorreu sem dificuldades especiais. O problema proposto foi bem interpretado, a identificação e a recolha de dados decorreu praticamente sem a necessidade da minha intervenção, pois os alunos sabiam claramente as ferramentas matemáticas a utilizar para poderem desenvolver a actividade e dar resposta ao problema.

Durante a fase experimental todos os alunos participaram, fazendo turnos entre eles para que todos interviessem. Um aluno perguntou-me se não poderia utilizar a Trigonometria para calcular a altura dos degraus, pois os degraus tinham uma protuberância que não os deixava medir como desejavam e isso dificultava na obtenção de valores mais exactos. Respondi afirmativamente. Como não tinham transferidor, mediram um cobertor e um espelho para calcularem o ângulo de inclinação da escada. Depois mediram a hipotenusa de um conjunto de 7 escadas e calcularam a medida média dos espelhos da escada. (Figura 4.26)

Outro grupo, que também detectou a problema da protuberância da escada, sugeriu que se utilizasse o Teorema de Pitágoras para calcularem a hipotenusa e do mesmo modo outro grupo determinou a hipotenusa de um vão de escadas (7 degraus) e acharam medidas uniformes dos degraus da escada. (Figura 4.27)

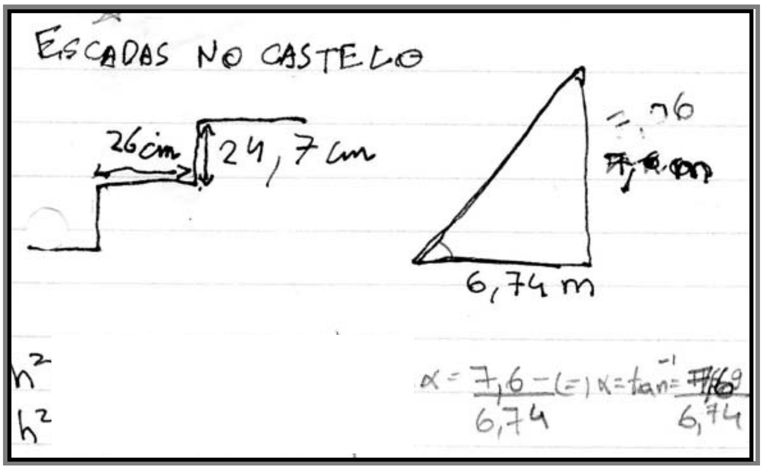


Figura 4.26. Rascunho do cálculo do ângulo, mas sem a medida da hipotenusa

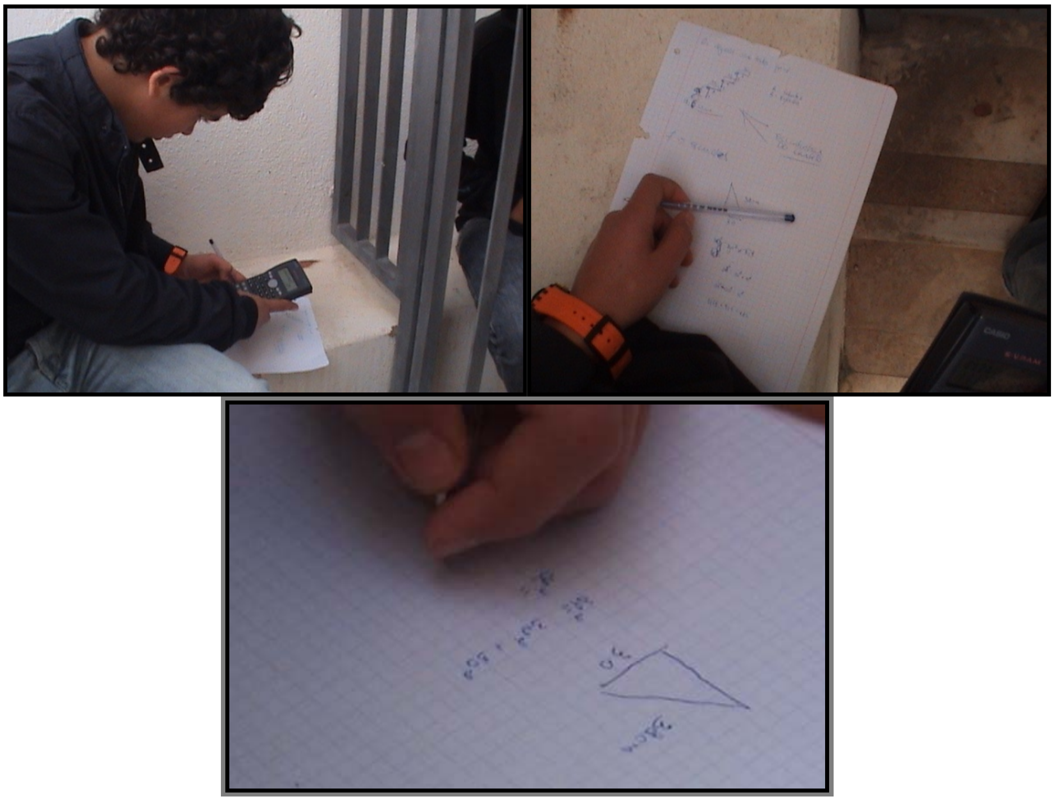


Figura 4.27. Aluno a calcular a medida do espelho através do Teorema de Pitágoras

Nos relatórios entregues é possível observar o processo desenvolvido pelos alunos através de vários esquemas e da resposta ao problema A figura seguinte é um relatório completo que mostra claramente todo o processo de desenvolvimento da actividade. (figuras 4.28).

Neste relatório é possível ver a identificação da escada estudada com a respectiva classificação sobre a sua comodidade de utilização. Apresenta esquemas das várias escadas com as suas medidas. Mostra o cálculo da média para obter medidas para uma escada regular. Estabelece a relação entre as variáveis de cada escada e a indicação de uma proposta de solução para o problema.

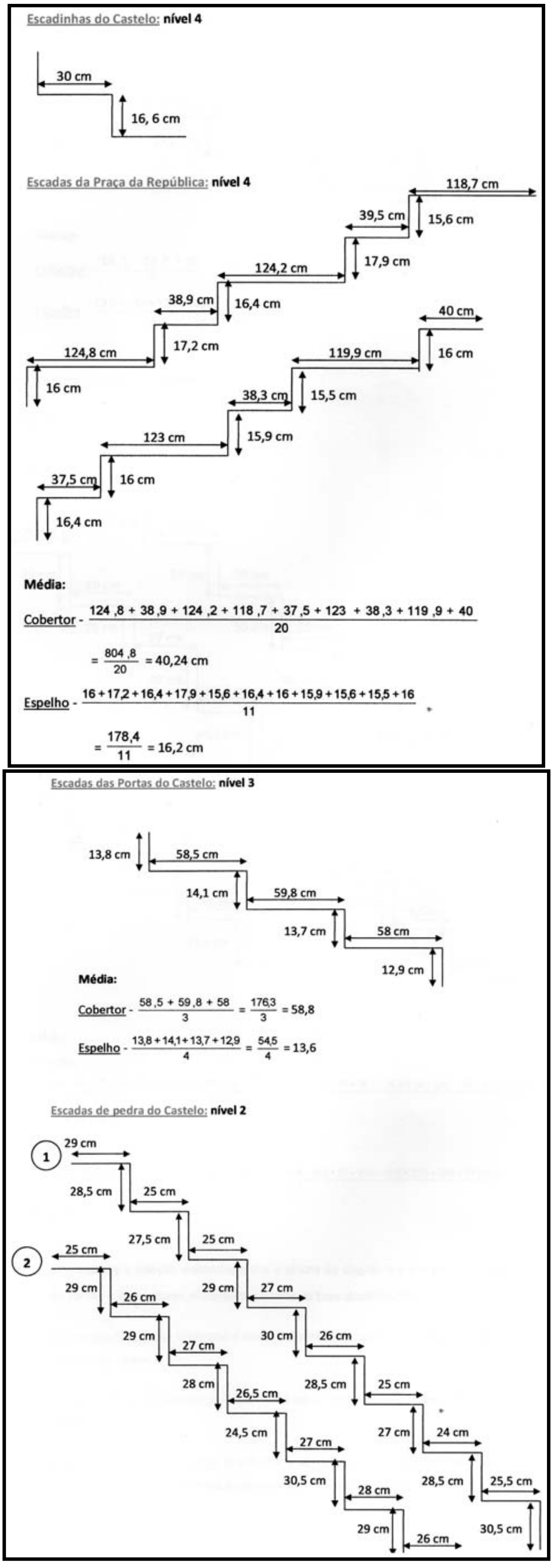
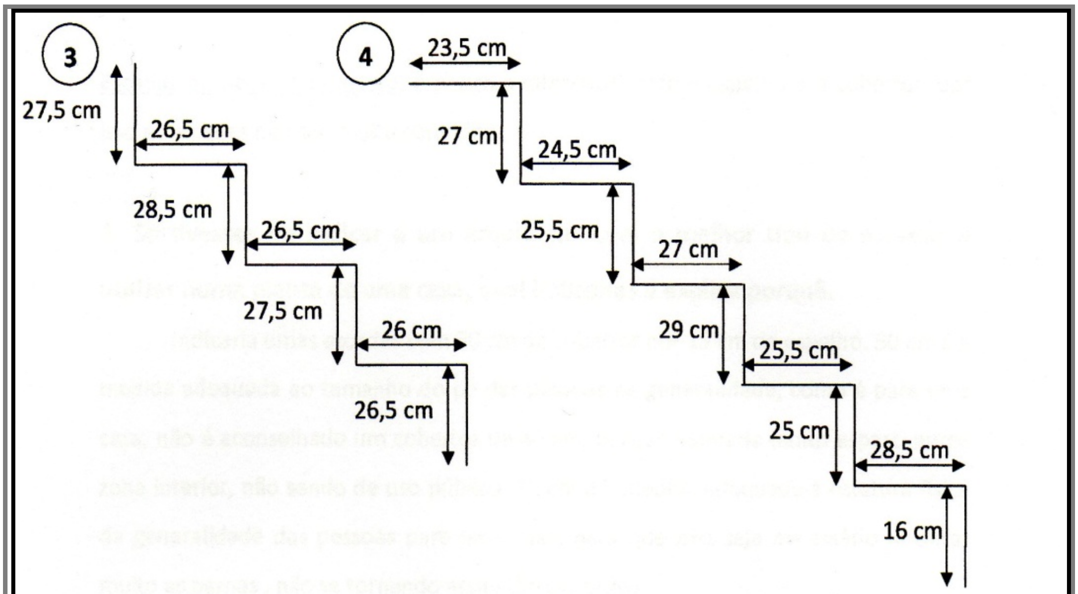


Figura 4.28. Relatório de um dos grupos



Média:

Cobertor –

$$\frac{29+25+25+27+26+25+24+24{,}5+25+26+27+26{,}5+27+28+26+26{,}5+26{,}5+26+23{,}5+24{,}5+27+25{,}5+28{,}5}{23}$$

$$= \frac{599}{23} = 26 \text{ cm}$$

Espelho –

$$\frac{28{,}5+27{,}5+29+30+28{,}5+27+28{,}5+30{,}5+29+29+28+24{,}5+30{,}5+29+27{,}5+28{,}5+27{,}5+26{,}5+27+25{,}5+29+25+16}{23}$$

$$= \frac{632}{23} = 27{,}5 \text{ cm}$$

3. Descobre a relação existente entre a altura do degrau e a sua profundidade de forma a sustentares matematicamente as tuas classificações.

Escadinhas do Castelo: O espelho é aproximadamente metade do cobertor, por isso as escadas são cómodas.

Escadas da Praça da República: O cobertor é aproximadamente 2,5 vezes maior que o espelho.

Escadas das Portas do Castelo: O cobertor é aproximadamente 4 vezes maior que o espelho, mas como é exagerado, as escadas não se adaptam ao nosso andar.

Figura 4.28. Continuação do relatório de um dos grupos

Escadas de pedra do Castelo: é pouca a diferença entre o espelho e o cobertor, por isso as escadas não são muito cómodas.

4. Se tivesses de indicar a um arquitecto qual o melhor tipo de escadas a utilizar numa planta de uma casa, qual indicarias e explica porquê.

Indicaria umas escadas com 30 cm de cobertor por 15 cm de espelho. 30 cm é a medida adequada ao tamanho do pé das pessoas na generalidade, como é para uma casa, não é aconselhado um cobertor de 40 cm, porque ocuparia muito espaço numa zona interior, não sendo de uso público. 15 cm é a medida adequada à estatura física da generalidade das pessoas para uma casa, para que não seja necessário levantar muito as pernas , não se tornando assim tão cansativo.

Explicação da situação experimental

Percorremos a cidade de Tavira, onde encontrámos algumas escadas, que nos foram propostas para estudar. Medimos o cobertor e o espelho de cada degrau de cada escada (excepto os degraus das Escadinhas do Castelo). Depois de concluído o trabalho de rua, voltámos à sala de aula para analisar os dados recolhidos. Resolvemos os exercícios que nos foram propostas no guião da actividade.

As hipóteses colocadas

Estivemos um pouco indecisos quanto à atribuição de um nível para cada escada, mas com a repetição da subida e descida de cada uma chegámos a uma conclusão.

Os resultados obtidos

Chegámos à conclusão que o cobertor deve ser aproximadamente o dobro do espelho para que as escadas sejam cómodas, sendo o cobertor com tamanho aproximado à medida do pé da generalidade das pessoas, com dimensões compreendidas entre 30 e 40 cm, conforme seja num espaço interior ou exterior. O espelho deverá ter entre 15 e 25 cm.

Figura 4.28. Conclusão do relatório de um dos grupos

4.1.3. “Paleta de cores” (Anexo 8)

Grupo-foco, Turma 1 (aluno A, aluno B, aluno C e aluno D)

Explico a actividade a toda a turma e, em seguida, distribuo os copos, as seringas de 1 ml, o leite e os pigmentos (corante alimentício) pelos grupos.

Os alunos começam por registar as quantidades de cada "ingrediente" nos seus cadernos. Ao grupo-foco foram distribuídos corantes amarelos e vermelho, ao qual eles chamaram de magenta.

Com a seringa de 1 ml retiram um pouco de cor vermelha (0,1 ml) e juntam ao leite (40 ml), misturando bem a solução. Obtiveram uma cor à qual eles chamaram rosa-carmim (Figura 4.29.). Juntaram depois 0,2 ml de corante amarelo, mas a cor não se alterou. Juntaram mais 0,1 ml de corante amarelo e obtiveram uma cor mais alaranjada.

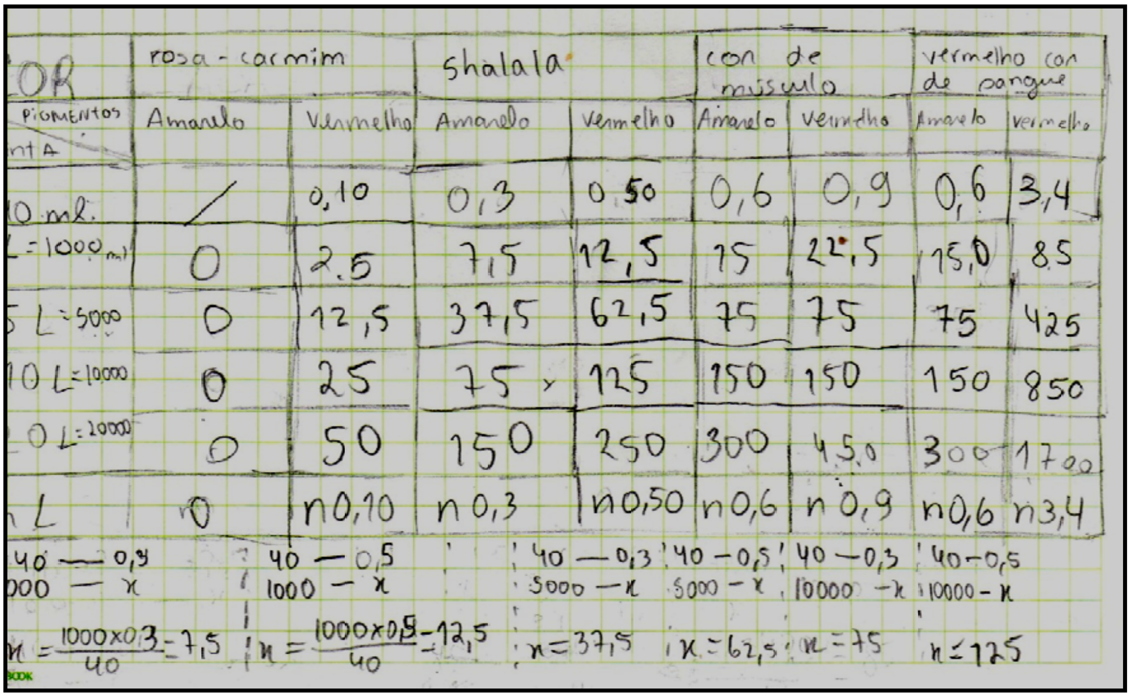
E, assim por diante, foram sempre adicionando um pouco de corante ora vermelho, ora amarelo, e dando nomes às cores encontradas.

Todos estes valores foram registados numa tabela (Figura 4.30.).

Para obterem a solução à segunda parte do problema com os valores da tabela utilizaram regras três simples e encontraram as quantidades de cada pigmento para latas de 1L, 5L, 10L e 20L.

Para a última parte do problema, facilmente substituíram na regra três simples o valor correspondente à capacidade de cada lata por uma variável. Deste modo, chegaram a um modelo matemático formal da situação.

Figura 4.29. Sequência da actividade



OR	rosa - carmim		shalala		cor de músculo		vermelho cor de sangue	
pigmentos nta	Amarelo	Vermelho	Amarelo	Vermelho	Amarelo	Vermelho	Amarelo	Vermelho
0 ml.	/	0,10	0,3	0,50	0,6	0,9	0,6	3,4
L = 1000 ml	0	2,5	7,5	12,5	15	22,5	15,0	85
5 L = 5000	0	12,5	37,5	62,5	75	75	75	425
10 L = 10000	0	25	75	125	150	150	150	850
0 L = 20000	0	50	150	250	300	450	300	1700
n L	0	n0,10	n 0,3	n0,50	n0,6	n 0,9	n0,6	n3,4

40 — 0,3 ; 1000 — x ; $x = \frac{1000 \times 0,3}{40} = 7,5$

40 — 0,5 ; 1000 — x ; $x = \frac{1000 \times 0,5}{40} = 12,5$

40 — 0,3 ; 5000 — x ; x = 37,5

40 — 0,5 ; 5000 — x ; x = 62,5

40 — 0,3 ; 10000 — x ; x = 75

40 — 0,5 ; 10000 — x ; x = 125

Figura 4.30. Rascunho da tabela das quantidades de pigmento para cada cor criada com os cálculos correspondentes

Em relação à turma, o processo foi idêntico em todos os grupos. Todos utilizaram pouco pigmento de cada vez e acrescentaram sempre à solução anterior. No início, tinham apenas o leite (equiparado à tinta branca de base) e depois foram obtendo cores com base nas anteriores mediante a adição de pigmentos. Uns escolheram verde e amarelo, outros azul e amarelo e outros azul e vermelho.

Praticamente todos registaram os valores em tabelas e calcularam as quantidades para as diferentes latas de tinta (diferentes capacidades). Na aula observei que dois dos grupos não chegaram à fórmula para qualquer quantidade de tinta (um "modelo para") ficando-se pelo cálculo das quantidades para determinadas quantidades de tinta pedidas no problema (um "modelo de"), como se verifica também nos relatórios entregues.

Figura 4.31. Algumas cores encontradas

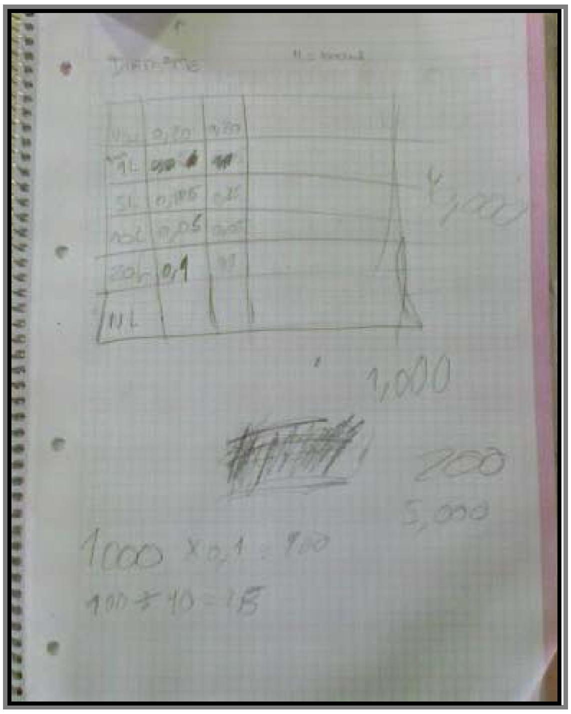
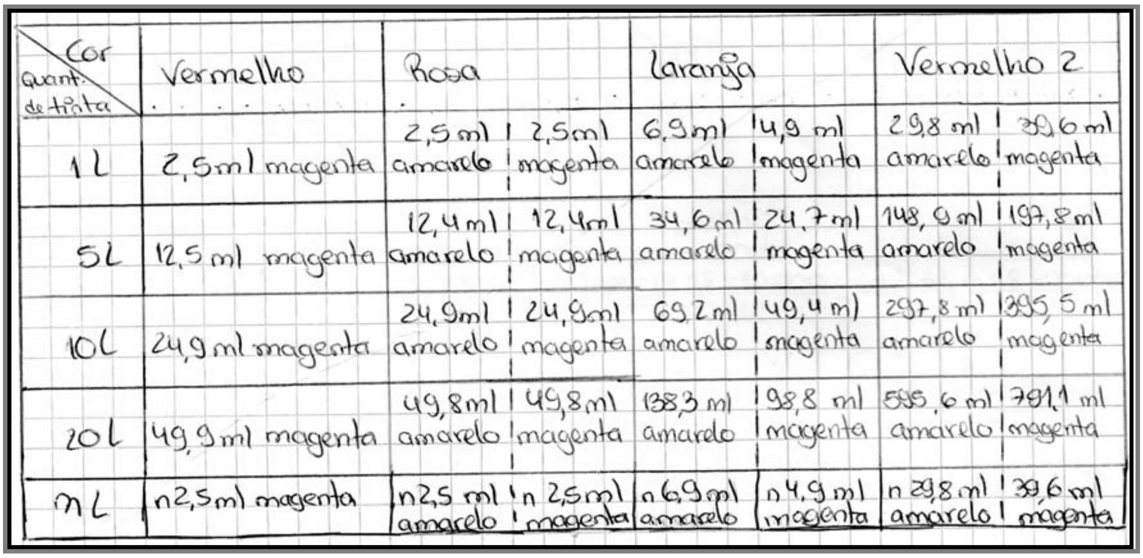


Figura 4.32. Registos das quantidades de pigmentos para cada cor

A maior parte dos relatórios tinha uma tabela idêntica à da figura 4.33.



Cor / Quant. de tinta	Vermelho	Rosa		Laranja		Vermelho 2	
1 L	2,5 ml magenta	2,5 ml amarelo	2,5 ml magenta	6,9 ml amarelo	4,9 ml magenta	29,8 ml amarelo	39,6 ml magenta
5 L	12,5 ml magenta	12,4 ml amarelo	12,4 ml magenta	34,6 ml amarelo	24,7 ml magenta	148,9 ml amarelo	197,8 ml magenta
10 L	24,9 ml magenta	24,9 ml amarelo	24,9 ml magenta	69,2 ml amarelo	49,4 ml magenta	297,8 ml amarelo	395,5 ml magenta
20 L	49,9 ml magenta	49,8 ml amarelo	49,8 ml magenta	138,3 ml amarelo	98,8 ml magenta	595,6 ml amarelo	791,1 ml magenta
n L	n2,5 ml magenta	n2,5 ml amarelo	n 2,5 ml magenta	n 6,9 ml amarelo	n 4,9 ml magenta	n 29,8 ml amarelo	39,6 ml magenta

Figura 4.33. Tabela de um relatório

Grupo-foco, Turma 2 (aluno B, aluno H, aluno J e aluno P)

Todos os grupos da turma 2, incluindo o grupo-foco, procederam da mesma forma que os grupos da turma 1.

Os alunos começam por registar as quantidades utilizadas nos seus cadernos.

E foram continuando, sempre adicionando um pouco de corante e nomeando as cores encontradas.

Todos os seus valores foram registados em tabelas.

Para obterem a solução à segunda parte do problema com os valores da tabela utilizaram regras três simples e encontraram as quantidades de cada pigmento para latas de 1L, 5L, 10L e 20L.

B: Tem-se que passar 60 ml para 1 L. 1 L tem que ser 1000 ml.

$$\begin{array}{rcl} 60 & \rightarrow & 0{,}01 \\ 1000 & \rightarrow & x \end{array}$$

(O aluno P fica a pensar, pois escreveu a regra três simples de outra forma)

$$\begin{array}{rcl} 60 & \rightarrow & 1000 \\ 0{,}01 & \rightarrow & x \end{array}$$

B: Não sabes fazer a regra três simples?

(O aluno P amua com o colega).

B: Professora, qual é que está certa.

(Verifico as duas e concordo com as duas formas de cálculo).

P: Eu sabia que também tinha bem.

Continuam com os cálculos e preenchem a tabela para 1L, 2L, 5L, 10L e 20L.

Dos dados recolhidos apenas um grupo encontrou a fórmula geral para n litros de tinta de determinada cor, que foi o grupo-foco.

A seguir mostro integralmente o relatórios produzido pelo grupo-foco, em que são perfeitamente visíveis todas as etapas realizadas pelos alunos.

Relatório

Actividade de Modelação Matemática

Introdução

Uma loja de tintas de interiores e exteriores faz as cores numa máquina na qual apenas é necessário colocar a lata com a tinta base, e dar-lhes as instruções da cor escolhida no catálogo.

Mas surgiu um problema na máquina e esta deixou de funcionar a 100%. Não deitava os pigmentos, apenas misturava. Assim os empregados resolveram colocar à mão os pigmentos de forma a obter a cor escolhida pelo cliente.

Novo problema. Os empregados não tinham informação sobre as quantidades de pigmento a utilizar para cada cor do catálogo, pois o *software* também deixou de fornecer as quantidades necessárias.

A nossa missão é ajudar os empregados fornecendo-lhes uma lista com as quantidades de pigmento a utilizar em cada cor.

Figura 4.34. Relatório completo de um grupo da actividade "Paleta de cores" (introdução)

Material»

- 60ml de leite num copo;
- 20 ml de pigmento azul;
- 20ml de pigmento amarelo;
- 1 seringa.

Situação Experimental»

Utilizando a seringa começámos por deitar 0,01ml de pigmento amarelo no copo de leite e este ficou cor de **baunilha**.

Depois juntamos mais 0,02ml de pigmento amarelo ao copo de leite com 0,01 de pigmento amarelo e foi a dar cor de **creme**.

De seguida juntamos 0,02ml de pigmento amarelo e 0,01ml de pigmento azul no mesmo copo com as restantes quantidades dos outros pigmentos e foi dar a cor **menta**.

Depois juntamos mais 0,04ml de pigmento amarelo e 0,50ml de pigmento azul e foi dar a cor **"verde Amazónia"**.

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Leite	**60 ml**	**60 ml**	**60 ml**	**60 ml**
Pigmento amarelo	**0,01 ml**	**0,03 ml**	**0,05ml**	**0,09 ml**
Pigmento azul	**-**	**-**	**0.01ml**	**0,51 ml**

Figura 4.34. Relatório completo de um grupo da actividade "Paleta de cores" (continuação)

Resultados Obtidos»

Agora, usando os resultados da tabela anterior, iremos determinar a quantidade de pigmentos a utilizar com 1L, 5L, 10L e 20L de tinta. Para obter este resultados, utilizamos a regra de 3 simples:

Tabela referente 1L de tinta

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Tinta	1000 ml	1000 ml	1000 ml	1000 ml
Pigmento amarelo	0,1(6) ml	0,5 ml	0,8(3) ml	1,5 ml
Pigmento azul	-	-	0,1(6) ml	8,5 ml

$$60 \;-\; 1000$$
$$0{,}01 \;-\; x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1000 \times 0{,}01}{60}$$
$$\Leftrightarrow x = 0{,}1(6) \text{ ml}$$

Vamos utilizar o valor da baunilha para mostrar. Na primeira tabela utilizamos 0,01 ml de pigmento amarelo no recipiente de leite com 60ml para obter baunilha. Para saber a quantidade de pigmento a utilizar num recipiente de tinta de 1000 ml, utilizamos a regra de 3 simples para saber. Neste caso, deu 0,1 (6) ml. Para as outras quantidades, utilizamos o mesmo método.

Tabela referentes 5L de tinta

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Tinta	5000 ml	5000 ml	5000 ml	5000 ml
Pigmento amarelo	0,8(3) ml	2,5 ml	4,17 ml	7,5 ml
Pigmento azul	-	-	0,8(3) ml	42.5 ml

Tabela referente a 10L de tinta

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Tinta	10000 ml	10000 ml	10000 ml	10000 ml
Pigmento amarelo	1,7 ml	5 ml	8, (6) ml	15 ml
Pigmento azul	-	-	1,7 ml	85 ml

Figura 4.34. Relatório completo de um grupo da actividade "Paleta de cores" (continuação)

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Tinta	20000 ml	20000 ml	20000 ml	20000 ml
Pigmento amarelo	3,(3) ml	10 ml	16,7 ml	30 ml
Pigmento azul	-	-	3,(3) ml	170 ml

	Baunilha	Creme	Menta	Verde Amazónia
Tinta	n	n	n	n
Pigmento amarelo	$\frac{n \times 0{,}01}{60}$	$\frac{n \times 0{,}03}{60}$	$\frac{n \times 0{,}05}{60}$	$\frac{n \times 0{,}09}{60}$
Pigmento azul	-	-	$\frac{n \times 0{,}01}{60}$	$\frac{n \times 0{,}51}{60}$

60 — n

Pigmento ($m\ell$) — x

$$\Leftrightarrow x = \boxed{\frac{\text{pigmento} (m\ell) \times n}{60}}$$

Depois de extrair a expressão, substituímos *pigmento (ml)* por o valor de pigmento utilizado na primeira tabela. Assim podemos dizer que esta expressão é uma "espécie" de regra de 3 simples.

Avaliação da proposta de Trabalho

Achamos a proposta inovadora e criativa, sobretudo na parte experimental, onde trabalhos com os corantes e o leite e misturamos estes para a criação de novas cores. Esta actividade mostra bem que (quase) tudo o que existe pode envolver matemática, até uma coisa muito simples.

Figura 4.34. Relatório completo de um grupo da actividade "Paleta de cores" (conclusão)

4.2. Análise e Interpretação dos dados

4.2.1. “A caixa de pasteleiro”

Os dados empíricos revelam um intenso trabalho experimental com o modelo real/objecto real pela maior parte dos alunos. Um largo tempo foi dispendido na análise e na compreensão da situação real. A identificação das variáveis e da relação entre elas surgiu devagar. Um bom tempo foi dispendido na experiência de tentativa e erro com manipulação física de construção e desmontagem das caixas. Vários modelos reais foram produzidos pelos alunos sem atingirem o objectivo pretendido. Ao mesmo tempo, o “modelo de” começou a ser testado: duplicar a folha deve duplicar a caixa. A matematização horizontal surgiu iterativamente enquanto, a dada altura, um “modelo para” começou a ser investigado e subitamente as relações matemáticas emergiram rapidamente e com sucesso. O modelo matemático surgiu escrito, tanto em linguagem matemática informal como linguagem matemática formal.

A figura 4.35. mostra o desenvolvimento da actividade dos alunos sobreposto ao ciclo de modelação.

Durante a fase 3 do ciclo geral aparecem micro-ciclos realizados pelos alunos, na procura e estabelecimento das relações entre as variáveis, daí o prolongamento desta fase em relação à fase 4, tendo em conta que alguns alunos resolveram o problema, buscando e utilizando um modelo matemático. A fase 4 é notoriamente mais longa quando a resolução do problema se centra no trabalho através da experiência sem a obtenção de um modelo matemático.

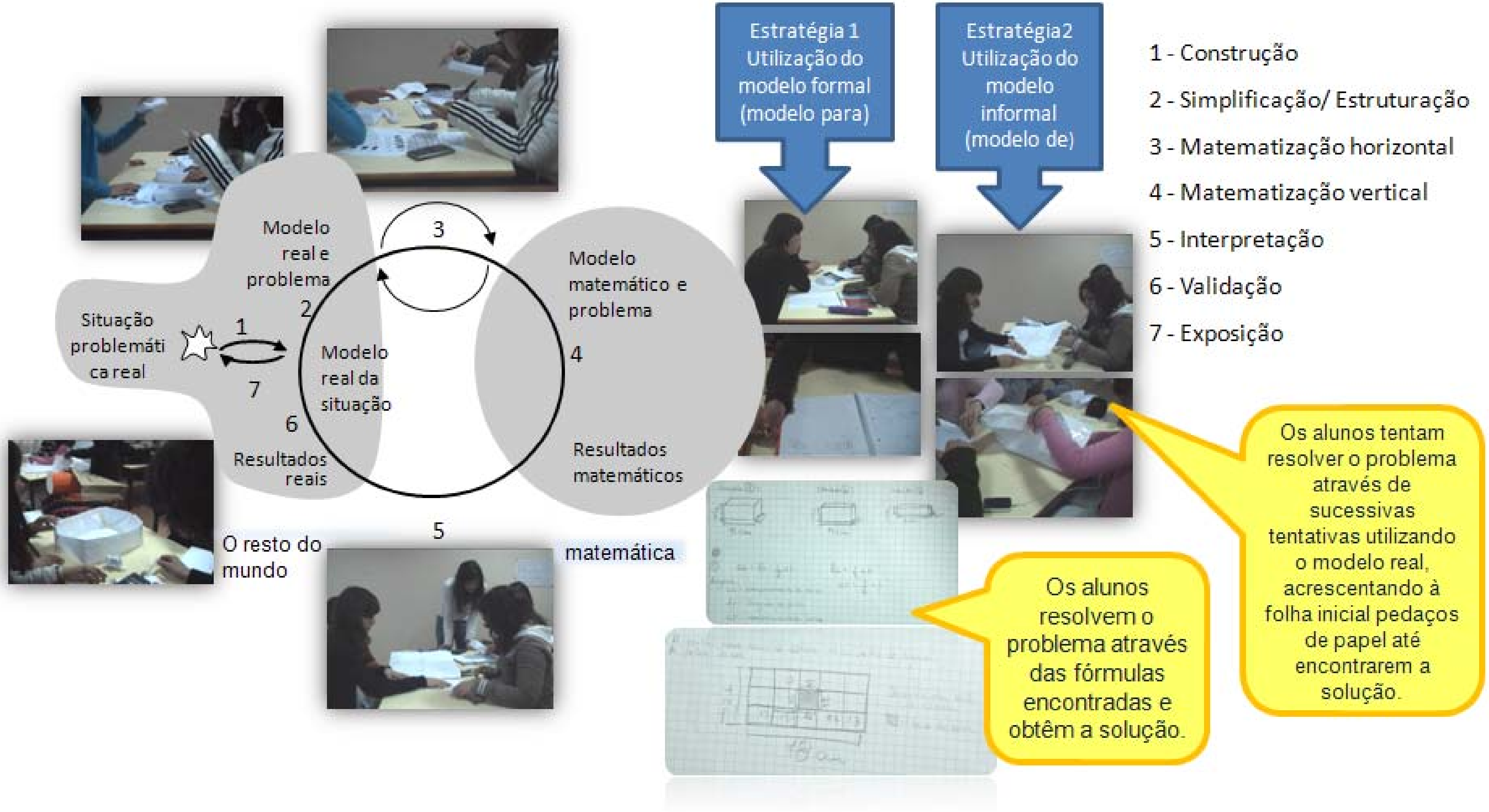


Figura 4.35. Resumo gráfico das rotas dentro do ciclo de modelação - 1

4.2.2. “Serão estas escadas cómodas para subir e descer?”

Verifica-se que, depois de se terem realizado três das cinco actividades, a destreza dos alunos para lidar com as situações problemáticas foi sendo mais visível. Os alunos já não se mantêm tanto tempo na parte experimental, só o suficiente para obterem os dados necessários para a criação do modelo matemático. Os micro-ciclos mantêm-se durante a fase experimental, consolidando os constructos envolvidos e a conexão entre as variáveis.

O modelo matemático (modelo para) tende a surgir mais depressa, facilitando a obtenção da resposta ao problema. Mas para a confirmação da solução, por vezes, continua a ser necessário o recurso à experiência.

A matematização horizontal manifesta-se com mais rapidez enquanto que o tempo dispendido na matematização vertical é maior nesta actividade.

A matemática oculta na situação revela-se cada vez com mais rapidez. Os alunos estão mais predispostos para perceberem matematicamente a situação e a enquadrá-la no seu quotidiano.

A figura 4.36. mostra o desenvolvimento da actividade dos alunos (usando a mesma estrutura da figura 4.35.) sobreposto ao ciclo de modelação.

A actividade de modelação matemática continua a revelar a realização de micro-ciclos. A duração da fase 3 já é muito idêntica à da fase 4, tendo em conta que os alunos durante a fase 3 repetem o ciclo de experimentar e classificar vários tipos de escadas, ao mesmo tempo que descrevem matematicamente os objectos estudados através das suas medidas e formas. Durante a fase 4, os micro-ciclos voltam a aparecer pois os alunos repetem, para cada caso particular, o cálculo de valores e analisam e escrevem as relações entre as variáveis em estudo, recorrendo frequentemente aos "modelos de". O recurso à experiência já não se observa ao longo de todo o ciclo geral, aparecendo apenas, frequentemente, no início do ciclo, envolvendo sobretudo um trabalho de matematização horizontal e, raramente, na fase final, para confirmação da solução encontrada.

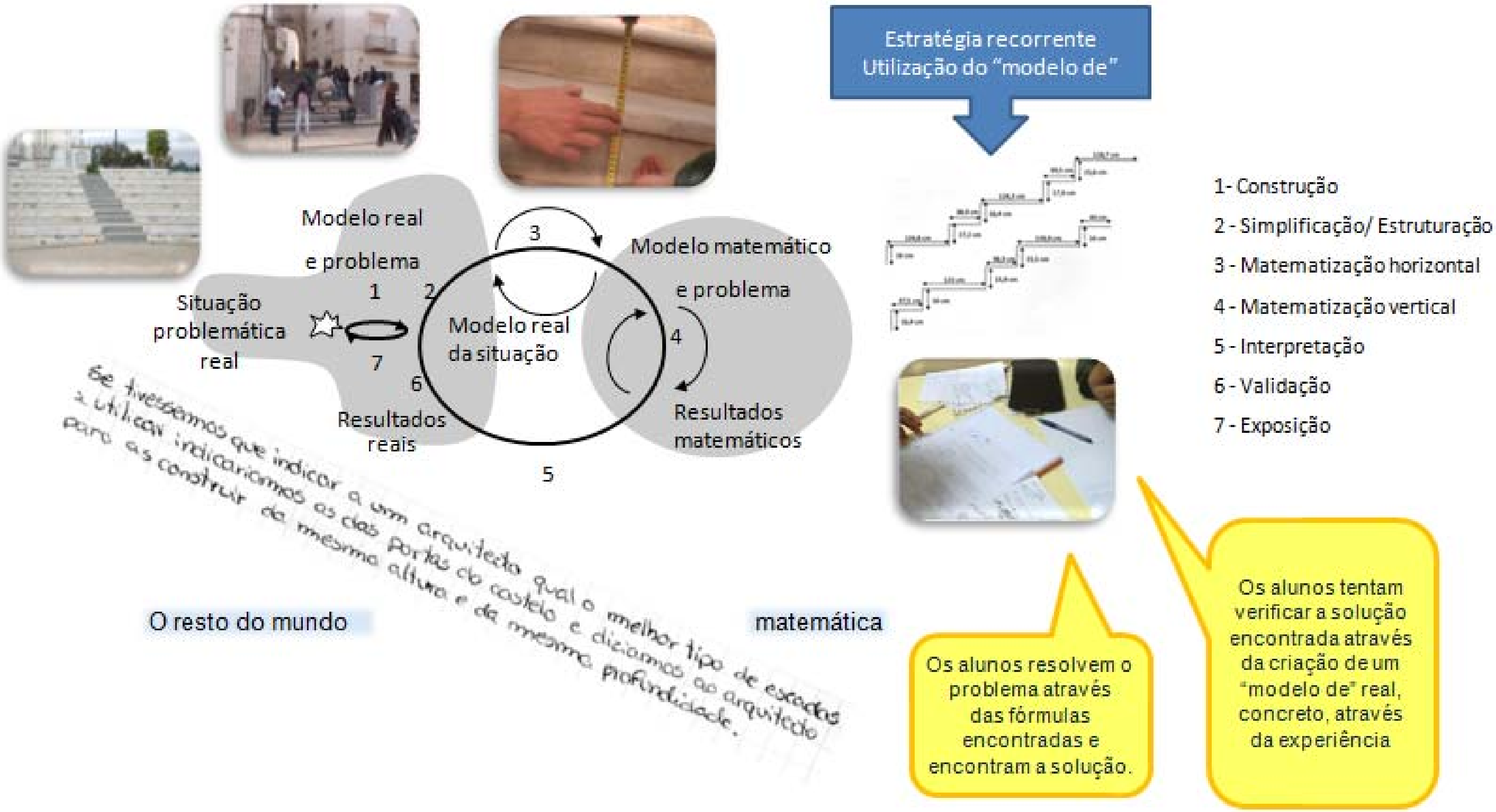


Figura 4.36. Resumo gráfico das rotas dentro do ciclo de modelação - 2

4.2.3. “Paleta de cores”

Verifica-se que a realização regular de actividades de modelação, com o recurso à experiência, ajuda os alunos a conseguir uma melhor interpretação e contextualização da actividade matemática, que parece tornar-se cada vez mais fácil para eles. Posso constatar que os alunos têm mais destreza, agora, em perceber a situação problemática, em entender o problema e revelam mais perspicácia na procura de respostas. A parte experimental continua a constituir uma mais valia, accionando para os alunos um contacto directo e fundamental com a situação problemática.

Claramente, a minha participação no trabalho realizado pelos grupos é mínima. Em determinados momentos, sou abordada para esclarecer dúvidas sobre algum pormenor que os transtorna, seja com a situação matemática que procuram compreender ou com a situação real que têm de interpretar. Nesta actividade foi visível observar a segurança dos alunos em escolherem os constructos a utilizar (razões e proporcionalidade directa). Um "modelo de" emergiu naturalmente e com a repetição da criação de "modelos de", um "modelo para" também emergiu fluentemente, sem dificuldades.

A matematização horizontal foi extensa devido ao tipo de experiência que os alunos desenvolveram, mas foi durante a fase da matematização vertical (procura dos valores para as diferentes latas de tinta) que se observaram vários micro-ciclos no processo de encontrar uma relação geral entre as variáveis.

Na parte final do relatório é possível verificar que os alunos já têm uma noção de que a matemática está presente no nosso quotidiano, mesmo que essa presença esteja muitas vezes oculta.

A figura 4.37. (à semelhança das figuras 4.35. e 4.36.) mostra novamente o desenvolvimento da actividade dos alunos sobreposto ao ciclo de modelação, em relação à última actividade analisada. Os alunos utilizam a experiência apenas para a recolha de dados e para a descrição da situação, desenvolvendo a noção de medida durante a matematização horizontal, que tem a duração necessária para a realização da experiência. O estabelecimento das relações entre as variáveis desenvolve-se durante a construção dos vários "modelos de", desenvolvendo e consolidando a noção de razão e proporcionalidade directa. A fase 4 é assim a mais longa neste ciclo, revelando a presença da realização de micro-ciclos e a obtenção de "modelos de" e de modelos matemáticos formais (modelos para) como meio de obter a solução do problema.

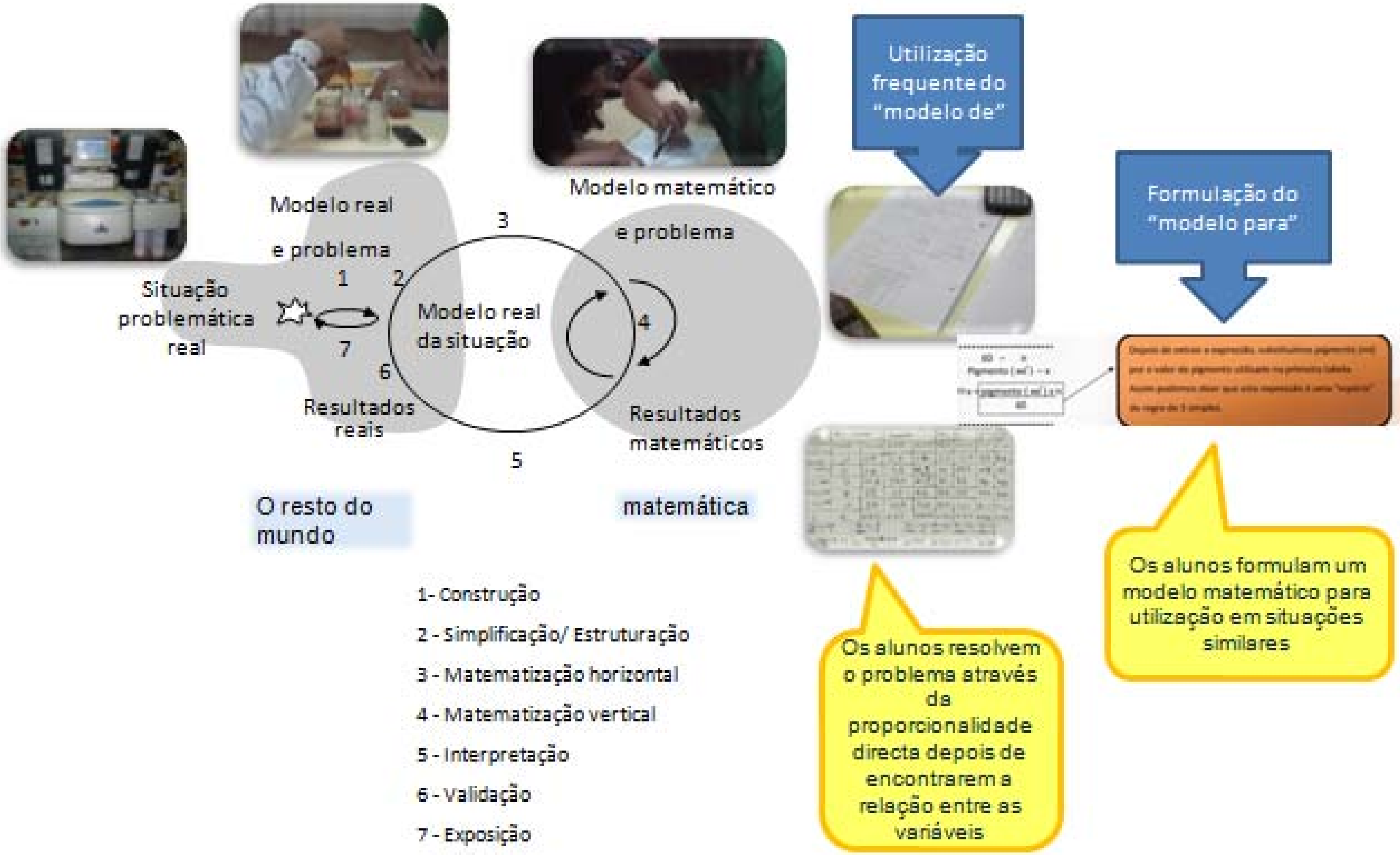


Figura 4.37. Resumo gráfico das rotas dentro do ciclo de modelação - 3

<u>Capítulo 5</u>

Conclusões

Neste capítulo irei sintetizar os principais resultados, integrando os dados empíricos e o quadro teórico do estudo, tendo em conta os principais conceitos teóricos e o problema inicial de investigação, que passo a recapitular.

Como se caracteriza a actividade de modelação matemática dos alunos em problemas da realidade que envolvem situações de experimentação e manipulação de objectos concretos?

Foi esta a questão abrangente que norteou todo o estudo. Desta questão, decorreram duas sub-questões mais específicas:

1) De que forma a experimentação, através da manipulação de objectos concretos, ajuda os alunos a descobrir a matemática envolvida num problema da realidade e a representá-la na forma de modelos matemáticos?
2) Quais as rotas, dentro do ciclo da modelação matemática, que os alunos percorrem desde o modelo manipulativo (tangível) até à fase do modelo matemático, vistas através de duas teorias: a Perspectiva de Modelos e Modelação (MMP) e a Educação Matemática Realista (RME)?

5.1. O papel da experimentação

Dewey referiu que a experiência, num dado momento, deve influenciar positivamente experiências futuras, fazendo-o de forma produtiva e criativa, preservando algo do conhecimento passado e modificando-o de alguma forma. Esta ideia foi visível ao longo do decorrer deste estudo, pois as dificuldades reveladas pelos alunos no início do trabalho em sala de aula foram sendo cada vez menores com o suceder continuado das experiências propostas. Foi evidente que os alunos foram capitalizando o que aprenderam com as experiências das actividades anteriores para darem respostas e actuarem nas actividades seguintes.

Revelou-se ainda a criação de um clima de trabalho e participação agradável, visível na receptividade dos alunos quando eram apresentadas as novas actividades, que transpareceu nas suas expressões e atitudes. Este ambiente agradável revelou-se ainda mais nos alunos que normalmente pouco participavam na realização de tarefas nas aulas, ou que não sentem tanta apetência pela Matemática, revelando ser capazes de dar contributos e sugerir ideias para o grupo de forma a tentar solucionar os problemas.

O facto de serem trazidas para o ambiente de sala de aula situações do quotidiano, também foi muito positivo. Primeiro, os alunos conseguiram ver e descobrir a matemática oculta nos objectos e nas situações do dia a dia, percorrendo um trajecto do mundo real para o mundo matemático, ou seja, desenvolvendo processos relevantes de matematização horizontal. Em segundo lugar, compreenderam e analisaram os conceitos e os resultados obtidos, realizando matematização vertical, passando de conceito para conceito, por exemplo, quando encontraram razões e proporções entre medidas e formularam expressões algébricas que funcionaram como modelos formais das situações tratadas experimentalmente.

É necessário relembrar que os materiais concretos são relevantes para os alunos pois fazem parte da sua experiência de vida, oferecendo referências significativas, ancoradas em situações concretas (Bonotto, 2007). O uso de objectos físicos tangíveis permite ao aluno monitorizar as suas hipóteses e as suas inferências, trazendo como consequência um aumento do seu conhecimento e um meio de desenvolver os seus actos mentais a partir de actos práticos, ou seja, uma forma de aprender fazendo (“learning by doing”), em que é essencial questionar matematicamente as propriedades dos objectos.

O ambiente de aprendizagem, apoiado em experiências de manipulação de materiais, permitiu a construção do conhecimento matemático através da construção de um modelo matemático adequado à situação, fornecendo uma estrutura conceptual local, ideia já defendida por Halverscheid em 2008.

Foi visível, ainda, a importância da construção de um modelo real da situação problemática, principalmente como veículo para a identificação das variáveis essenciais envolvidas no problema. Concluiu-se igualmente que a experimentação funcionou como um forte estímulo à realização de sucessivas iterações de aproximação ao modelo matemático formal.

5.2. Rotas de modelação matemática

De acordo com a ideia de matematização conceptual proposta por De Lange (1987), os alunos exploraram a situação, encontraram e identificaram matemática relevante oculta nos objectos reais, esquematizaram e visualizaram várias hipóteses concretas, de forma a descobrirem regularidades e a desenvolverem "um modelo". Reflectiram e generalizaram, desenvolvendo conceitos mais completos e abrangentes, como por exemplo a criação de uma fórmula geral para as quantidades de pigmento a utilizar para fabricar tinta de cada uma das cores encontradas. Daí em diante, os alunos ganham a capacidade de aplicar vários dos conceitos matemáticos emergentes em novas situações do mundo real e da própria matemática, tornando possível o fortalecimento do conceito explorado. Por outras palavras, os alunos podem aprender matemática, fazendo matemática com base em situações que promovam o surgimento de modelos.

Tendo por referência a RME, o ponto de partida das várias experiências propostas foi "verdadeiro" para os alunos, isto é, parece evidente que cada situação apresentada aos alunos passou a ser real nas suas mentes.

Ao longo de todo o estudo, constatei que aprender matemática significa passar por vários níveis de compreensão: desde a capacidade dos alunos de encontrarem soluções informais relacionadas com o contexto, à criação de atalhos e esquematizações, à aquisição de conceitos e suas relações. Foi nítido que uma das condições que permitiu chegar ao nível seguinte de compreensão e de apropriação de modelos consistiu na reflexão sobre as actividades realizadas, que muitas vezes teve lugar através da interacção entre os alunos ou nas discussões que envolveram toda a turma.

Os modelos são um veículo importante para criar uma ponte entre a linguagem matemática informal e uma matemática mais formal. Primeiro, os alunos desenvolveram estratégias estreitamente relacionadas com o contexto a explorar. Mais tarde, alguns aspectos da situação tornaram-se mais gerais, o que significa que o contexto foi adquirindo o carácter de um modelo que podia servir de suporte para a resolução de situações similares. De forma a preencher o espaço entre o nível informal e o nível formal, os modelos dos alunos mudaram de um *modelo de* uma situação particular para um *modelo para* situações similares, mais independentes do contexto de partida.

Com o decorrer das actividades, verifiquei que os alunos integraram vários conhecimentos matemáticos tais como, equações e métodos algébricos, áreas e volumes, razões, proporções, proporcionalidade directa, média aritmética, trigonometria, Teorema de Pitágoras, entre outros. Assim, a conexão entre vários conceitos foi amplamente explorada e desenvolvida na resolução dos problemas tratados. Em muitas situações, foi possível a exploração de mais do que um único tópico curricular, como a álgebra e a geometria.

A interacção entre os alunos e entre alunos e professora foi bastante intensa no início, tornando-se menos intensa no fim em virtude da maior independência adquirida pelos grupos, embora tenha estado sempre presente. A negociação explícita, a intervenção, a discussão, a cooperação e a avaliação foram elementos essenciais no processo de aprendizagem, marcado pelo facto de os métodos informais dos alunos serem usados como uma alavanca para alcançar métodos matemáticos formais. Neste ensino de carácter deliberadamente activo, que entrega aos alunos a missão de encontrarem os seus próprios caminhos para abordar um problema, é possível constatar que os alunos explicam, justificam, concordam e entram em desacordo, reflectindo e encontrando alternativas para chegar a respostas válidas e interessantes.

Os problemas propostos aos alunos foram todos contextualizados, no sentido em que ofereceram contextos de aplicação ou modelação, característica significativa na perspectiva da RME. As situações propostas visaram gerar experiências educativas para os alunos onde a matemática implícita emergiu através de processos intensos e contínuos de matematização. Apresentei aos alunos situações contextualizadas, que pressupunham soluções contextualizadas, para as quais gradualmente os alunos desenvolveram ferramentas matemáticas, tendo a maior parte deles alcançado um nível formal de apresentação dos resultados e da matemática envolvida.

O princípio da reinvenção guiada requer que os problemas contextualizados proporcionem o desenvolvimento de estratégias na procura de soluções informais (Doorman, 2001), como foi bem visível na actividade "A caixa de pasteleiro", quando os alunos chegaram ao modelo matemático, utilizando uma descrição informal para estruturar as relações matemáticas encontradas. Esta estratégia permitiu aos alunos olharem para o conhecimento que adquiriram como um conhecimento pelo qual eles são responsáveis e que lhes diz respeito.

Os modelos permitiram aos alunos trabalharem em diferentes níveis de abstracção, pois mesmo aqueles que manifestam mais dificuldade com noções matemáticas formais conseguem fazer progressos e criar estratégias para a resolução de problemas (Gravemeijer & Stephan, 2002), passando pelos vários níveis de desenho de experiências descritas por Gravemeijer.

Também foi possível identificar diversas instâncias de matematização horizontal e vertical. A matematização horizontal aconteceu na passagem do nível situacional para o nível referencial, pela criação de modelos emergentes, sendo a simbolização um resultado essencial para estas mudanças. A matematização vertical revelou-se quando os alunos passaram de um *modelo de* para um *modelo para*.

Apesar dos quatro níveis envolverem claramente um desenvolvimento progressivo da abstracção e dos modelos utilizados, isso não implicou que se tenha verificado sempre uma subida hierárquica pelos níveis pois os alunos agregaram, por vezes, o nível geral e o nível formal, voltando ao nível referencial (Gravemeijer, 1994).

De acordo com a perspectiva MMP, os alunos, nas suas tentativas de entender e resolver problemas, desenvolveram modelos matemáticos que os ajudaram a perceber o sistema em estudo (situação problemática). Neste contexto, os alunos desenvolveram modelos para construir, descrever, ou explicar sistemas significativos ou fenómenos, em termos de recursos matemáticos, isto é, matematicamente. Mais ainda, os alunos desenvolveram sistemas conceptuais e usaram-nos para construir novos conceitos matemáticos. Encontraram características matemáticas encapsuladas nas estruturas do sistema e, com isso, a possibilidade de raciocinarem sobre o sistema.

Esta perspectiva reconhece a interacção e a interdependência de modelos mentais ou internos (representações que estão activas enquanto os alunos trabalham num problema particular e que guiam o uso de inferências e operações mentais) e modelos externos (aqueles que são expressos de várias formas: linguagem, símbolos, diagramas ou metáforas). Em diversas ocasiões, nas discussões dos alunos em torna da procura de relações entre as variáveis, a opinião de uns alterou, por vezes, as representações mentais iniciais que outro aluno tinha em relação à situação.

A resolução das actividades de modelação foi importante no sentido de revelar os diversos modos de raciocínio e o desenvolvimento de sistemas conceptuais dos alunos, à medida que os alunos iterativamente expressavam, testavam, reviam, rejeitavam ou construíam as suas ideias, examinando padrões matemáticos e estruturas envolvidas nas soluções encontradas.

O reconhecimento das soluções encontradas para os diversos problemas envolveu vários ciclos de modelação onde as descrições, explicações e previsões foram sendo refinadas gradualmente, sendo revistas ou rejeitadas, a partir da interpretação dessas mesmas soluções no contexto real.

Posso considerar estas actividades como sessões de desenvolvimento conceptual, pois como argumentam Lesh e Harel (2003), os alunos desenvolveram sistemas conceptuais, entre os quais posso referir as razões e proporções, quando impelidos à extensão, revisão e refinamento dos seus modos de pensamento sobre os constructos matemáticos que se iam tornando explícitos durante a resolução dos problemas.

A forma como são construídas as actividades é fulcral para este desenvolvimento conceptual, em particular a sequência das questões, o nível de abstracção exigido nas várias questões, desde o mais concreto ao mais formal, entre outras características já referenciadas no capítulo 2.

5.3. As actividades realísticas geradoras de modelos (RMEA'S)

Tal como foi discutido no enquadramento teórico da investigação, as duas teorias – RME e MMP – podem-se considerar duas teorias complementares. Enquanto que a RME pede contextualização e matematização, a MMP pede modelação e construção de modelos conceptuais. Tanto uma como a outra promovem a aquisição de conceitos, a descoberta de relações entre conceitos e a procura de padrões e regularidades. Promovem também a conexão de conceitos matemáticos, envolvendo processos geradores de modelos matemáticos sucessivamente mais refinados.

Com a aplicação das RMEA'S – Actividades Realísticas Geradoras de Modelos –, os alunos passam por diversos níveis de compreensão da situação e dos conceitos envolvidos e criam modelos matemáticos que evoluem em micro-ciclos de modelação assentes na matematização de uma situação real.

O ponto de partida das RMEA'S é uma situação contextualizada que apela ao conhecimento prévio do aluno e à sua experiência com situações reais e concretas, desejavelmente ligadas ao mundo real. A descrição da situação apresentada, tendo como propósito a resolução de um problema, irá permitir o desenvolvimento de diversos modelos da situação, cuja natureza evoluirá progressivamente para um modelo de carácter mais formal, que ficará disponível como um modelo matemático geral através de sucessivos processos de matematização (horizontal e vertical).

É sempre solicitada uma generalização do modelo matemático, embora em linguagens diversas, que poderão ir de uma linguagem informal a um simbolismo mais formal, esperando-se uma generalização final traduzida explicitamente em linguagem matemática formal. Essa procura de um modelo geral implicará a formulação e a utilização de constructos, possivelmente matemáticos, que irão sendo integrados num constructo de âmbito mais geral e mais abstracto, o qual ficará disponível para a aplicação em novas situações similares, tornando-se parte de um sistema conceptual para o aluno.

As respostas encontradas para os problemas não são únicas, mas sim as mais adequadas, dependendo do propósito, do alcance da actividade, dos dados disponíveis e da compreensão do problema. Assim, os alunos não encontram uma única solução mas sim várias, que avaliam de modo a apresentarem aquela que será, na sua perspectiva, a melhor solução para o problema, sendo essa solução reutilizável em situações semelhantes.

Uma possibilidade que merece ser considerada em futuros trabalhos de investigação será o desenvolvimento e a criação de actividades de modelação baseadas numa combinação das duas teorias (porventura a par da procura de uma síntese de teorias), que possa conduzir a propostas pedagogicamente poderosas por aglutinarem as virtualidades de cada uma das teorias. Isto significa que se deve tentar promover tanto o desenvolvimento conceptual como a passagem pelos diversos níveis de raciocínio, desde o mais simples (situacional) ao mais abstracto (formal), ao mesmo tempo que se estimulam e valorizam os modelos matemáticos criados pelos alunos.

Referências Bibliográficas

Ahn, C. e Leavitt, D. (s/d). *Implementation Strategies for Model Eliciting Activities: A teachers guide*. [acedido em 30 de Abril de 2009 em http://site.educ.indiana.edu/Portals/161/Public/Ahn%20&%20Leavitt.pdf].

Andresen, M. (2007).Understandings of "modelling". (Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 2007). [Acedido em 2 de Abril de 2009 em http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG13.pdf].

Alsina, C. (2002). Too much is not enough. Teaching maths through useful applications with local and global perspectives. *Educational Studies in Mathematics.* V.50, pp. 239-250.

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp. 35-44). New York, NY: Springer.

APM (1988/2009). *Renovação do Currículo da Matemática*. APM: Lisboa.

Araújo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, V.2, N.2, pp. 55-68.

Armanto, D. (2002). *Teaching multiplication and division realistically in Indonesian primary schools: A prototype of local instruction theory.* Doctoral dissertation. The Netherlands, Enschede: University of Twente.

Barbosa, J. (2003). Uma perspectiva de modelagem matemática. [acedido em 4 de Fevereiro de 2008 em http://www.uefs.br/nupemm/cnmem2003.pdf].

Barnes, H. (2004). Realistic mathematics education: Eliciting alternative mathematical conceptions of learners. *African Journal of Research in SMT Education*, V.8, N.1, pp. 53-64.

Bartolomé, M. (1986). La investigación cooperativa. *Educar*, N. 10, pp.51-79.

Biembengut, M. S., Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no ensino*. São Paulo: Contexto.

Blomhoej, M. e Jensen, T. H., (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn e M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp. 35-44). New York, NewYork: Springer.

Blomhoej, M. (2008). *Different perspectives on mathematical modelling in educational research - categorising the TSG21 papers*. (Procedures of the 11th International Congress on Matematical Educational 2008). [Acedido em 25 de Abril de 2009 em http://tsg.icme11.org/tsg/show/22].

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 22, N. 1, pp. 37-68.

Blum, W. (1995). Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In C. Sloyer et al (Ed.) *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modeling and Applications*, (pp.1-20). Yorklyn, DE: Water Street Mathematics.

Blum, W. e Leiss, D. (2005). *"Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks*. (Proceedings of CERME4, WG 13, Modelling and Applications). Sant Feliu de Guíxols, Spain. [acedido em 2 de Janeiro de 2009 em http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG13.pdf].

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W., Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York, NewYork: Springer.

Bonotto, C. & Basso, M. (2001). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. V.32, N.3, pp.385-399.

Bonotto, C. (2002). *Suspension of sense-making in mathematical word problem solving: A possible remedy*. (Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics). Crete, Greece: Wiley & Sons Publishers.

Bonotto, C. (2007). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, H. W. Henn (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp.185-192). New York, NewYork: Springer.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, V.38, N.2, pp.86-95.

Carr, W. e Kemmis, S. (1988). *Teoria crítica de la enseñanza. La investigación acción en la formación del professorado*. Barcelona: Martinez Roca.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da Matemática: Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Changeux, J-P. e Connes, A. (1991). *Matéria pensante*. Lisboa: Gradiva.

Garcia, F. J., Gascón, J., Higueras, L. e Bosch, M. (2006). Mathematical modellingas a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, V.38, N.3, pp.226-246.

D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à acção: Reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo, Campinas: Editora da UNICAMP.

D'Ambrósio, U. (1998). Educação *matemática: da teoria à prática*. 4. Ed. Campinas: Papirus. (Perspectivas em educação matemática).

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical thinking and learning*, V.1, N.2, pp.131-153.

Davis, P. J. e Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. London: Penguin Books.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.

De Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In A. J. Bishop et al. (Eds.). *International handbook of mathematics education, Part one*, (pp.49-97). Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: Heath & Co.

Dewey, J. (1938/1997). *Experience and Education*. New York: Touchstone.

Doerr, H. e English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, N.34, pp. 110-136.

Doerr, H. M. e Tripp, J. S. (1999). Understanding How Students Develop Mathematical Models. *Mathematical Thinking and Learning*, V.1, N.3, pp.231-254.

Dolk, M. e Uittenbogaard, W. (1989). De ouderavond (The PMT meeting). *Willem Bartjens*, V.9, N.1, pp.14-20.

Doorman, M. (2001). How to guide students? A reinvention course on modeling movement. Texto apresentado em *"The Netherlands and Taiwan conference on* *common sense in mathematics educatio"',Taipei, Taiwan*. [Acedido em 22 de Abril de 2009 em http://www.fi.ruu.nl/en/publications.shtml].

Elliot, J. (1983). A curriculum for the study of human af-fairs: The contribution of Lawrence. *Journal of Curriculum Studies*, N.15, pp.105-133.

English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, N.63, pp.303-323.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, N.1, pp.3-8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, N.3, pp.413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht:Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education – China lectures*. Utrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gattegno, C. (1984). Curriculum and epistemology II. *For the Learning of Mathematics*, V.4, N.3, pp.19-22.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, V.1, N.2, pp.155-177.

Gravemeijer, K. e Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, N. 39, pp.111-129.

Gravemeijer, K. e Stephan, M. (2002) Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.) *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education,* (pp.145-169). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM*, V.40, N.2, pp.225-234.

Hurd, P. (2000). Science education for the 21st Century. *School Science and Mathematics*,V.100, N.6, pp.282-287.

Jiang, J. (2001). What are the areas for further research? Water Science &Technology, V.44, N.9, pp.17-25.

Kaiser, G. e Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, V.38, N.3, pp.302-310.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. In J. de Lange, I. Huntley, C. Keitel & M. Niss (Eds), *Innovation in maths education by modelling and applications*, (pp.19-30). Chichester, Great Britain: Elis Horwood.

Kemmis, S. (1984). *Point-by-point guide to action research*. Victoria: Deakin University.

Kemmis, S. e McTaggart, T. (1988). *Cómo planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes.

Kfouri, W. (2009). *Explorar e investigar para aprender matemática através da modelagem matemática*. [acedido em 2 de Janeiro de 2009 em http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/09-02.pdf].

Kolb, D. A. (1984). *Experiential Learning: experience as the source of learning and development.* New Jersey: Prentice-Hall.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Graó.

Lesh, R., Landau, M. e Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts & Processes* (pp.263-343). New York, NY: Academic Press.

Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R. e Doerr, H. (Eds). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. e Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, V.5, N.2 e 3, pp.157–189.

Lesh, R. e Lehrer, R. (2003). Models and Modelling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, V.5, N.2 e 3, pp.109-129.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.763-804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lesh, R. (2009). *A brief history of model-eliciting activitie's (MEA'S)*. Documento não publicado, distribuído no *ICTMA 14*, Hamburgo, Alemanha.

Lester, F.K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM,* V.37, N.6, pp.457-467.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues*, N.2, p.34-46.

Lombardo, D. e Jacobini, O. (2008). *Mathematical modelling: from classroom to the real world*. (Procedures of the 11th International Congress on Matematical Educational 2008). [Acedido em 25 de Abril de 2009 em http://tsg.icme11.org/document/get/451].

Lomax, P. (1990). *Managing staff development in schools*. Clevedon: Multi-Lingual Matters.

Loughran, J. (2007). Researching Teacher Education Practices**:** Responding to the Challenges, Demands, and Expectations of Self-Study. *Journal of Teacher Education*, N.58, pp.12-20.

Machado, J. P. (1981). *Grande dicionário da Língua Portuguesa*. Sociedade de Língua Portuguesa. Lisboa: Amigos do Livro.

Marangon, C. (2003). Lawrence Stenhouse: o defensor da pesquisa no dia-a-dia. *Escola*, (Editora Abril), N.165, pp.32-34.

Mason, J. e Davis, J. (1991). *Modelling with mathematics in primary and secondary schools*. Victoria: Deakin University Press.

Matos, J. F. (1994). Processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas de aplicação da Matemática. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*, (pp.65-91). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Matos, J. F. (1995). Prefácio. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Eds.), *Matemática e Realidade: que papel na educação e no currículo?*, (pp.1-5). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Matos, J. F., Amorim, I., Carreira, S., Mota, G. e Santos, M. (1995). *Matemática e Realidade: Que papel na Educação e no Currículo*. Lisboa: SPCE-SEM.

Matos, J. F. e Carreira, S. (1996). The quest for meaning in student's mathematical modelling activity. In L. Puig e A Guttiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, V.3, (pp.345-352). University of Valencia.

Matos, J. F. e Carreira, S. (1997). The quest for meaning in student's mathematical modelling activity. In S. Houston, W. Blum, I. Huntley e N. Neill (Eds.), *Teaching and learning mathematical modelling*, (p.63-75). Chichester: Albion Publishing.

ME (1991). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, V.I. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME (1991). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, V.II. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGIDC (2007). *Novo programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Monteiro, A. (1991). *O ensino de Matemática para adultos, através do método Modelagem Matemática.* Dissertação de Mestrado – Instituto de Geociências e Ciências Exactas, Rio Claro: Universidade Estadual Paulista.

Niss, M. (1987). Application and modelling in mathematics curricula - state and trends. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, N.18, pp.487-505.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. In W. Blum, J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messner e L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, (pp.22-31). Chichester: Ellis Horwood.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, N.2, pp.393-404.

Ponte, J. P., Matos, J. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (pp.5-28). Lisboa: APM.

Powell, A. B. (2007). Caleb Gattegno (1911-1988): A famous mathematics educator from Africa? *Revista Brasileira de História da Matemática [Brazilian Journal on the History of Mathematics]*, pp.199-209.

Schön, D. A. (1998). *El profesional reflexivo:como piensam los profesionales cuando actúan*. Barcelona: Paidós.

Swetz, F. (1989). When and how can we use modeling?. *Mathematics Teacher*, V.82, N.9, pp.722-726.

Swetz, F. e Hartzler, J. (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. Reston, Virginia: NCTM.

Skovsmose, O. (1989). Towards a philosophy of an applied oriented mathematical education. In W. Blum, J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messner e L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, (pp.110-114). Chichester: Ellis Horwood.

Skovsmose, O. (1995). Competência democrática e conhecimento reflexivo em matemática. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota, & M. Santos (Eds). *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp.137-169). Lisboa: SEM-SPCE.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education. Uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam: Sense Publishers.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Vos, P. e Kuiper,W. (2002). Exploring the potencials of hands-on investigative tasks for curriculum evaluations. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceeding of the 26th annual conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, (V.4, pp.329-336). University of East Anglia, Norwich.

Warzel, A. (1989). General theory of modelling and theory of action - a solution for the educational situation at school? In W. Blum, J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messner e L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, (pp.121-126). Chichester: Ellis Horwood.

Whitehead, J. (1989). How do we improve research based professionalism in Education. A question which includes action research, educational theory and the politics of educational knowledge. *British Educational Research Journal*, V.15, N.1, pp.3-17.

Anexos

Ana Margarida Franco de Mendonça Viegas e Silva Baioa

Exmo. Sr. Presidente do Conselho Executivo

do Agrupamento Vertical de Escolas **XXXXXX**

<u>Assunto</u>: Pedido de autorização para o desenvolvimento de um trabalho de dissertação de mestrado.

No estudo de investigação sobre as rotas realizadas pelos alunos de 9º ano de escolaridade em actividades de modelação matemática que me encontro a desenvolver, mais concretamente o desenvolvimento de uma investigação-acção onde terei participação activa, serão propostas aos alunos várias tarefas de investigação envolvendo problemas do quotidiano, modelação matemática e interpretação de resultados. Estas tarefas serão realizadas em grupo nas aulas de remediação e em aulas normais quando necessário, não comprometendo o normal desenvolvimento das actividades da escola.

Todas as orientações metodológicas inerentes ao desenvolvimento das tarefas estão em conformidade com as do currículo do ensino básico homologado em 2007 e anteriores.

A realização desta investigação está inserida no âmbito da dissertação de mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências – Ramo de Matemática, sob orientação da Prof. Doutora Susana Carreira, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. A investigação no campo será desenvolvida durante o ano lectivo 2008/2009.

Estas aulas serão leccionadas por mim e decorrerão no horário normal das aulas de remediação e serão registadas em videogravação.

Como o objectivo deste estudo visa uma descrição detalhada de um processo evolutivo inserido num determinado contexto educativo, será imprescindível uma análise aprofundada que só será conseguida se os dados recolhidos forem em quantidades suficientes. Desta forma é necessário para a realização da investigação que observe as aulas com videogravação das actividades realizadas pelos alunos das turmas em sessões de trabalho de grupo onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos.

E ainda, analisar o conteúdo das produções escritas dos alunos no final de cada actividade, pois será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa as opções tomadas por cada grupo em relação ao problema proposto.

Por ser professora do quadro de nomeação definitiva, do grupo 500 desta escola, solicito a V. Exa. a autorização para o desenvolvimento deste trabalho na Escola Básica XXXXXXXX, nas minhas turmas de 9º ano. Comprometo-me a tomar as medidas necessárias, sempre que haja alguma interferência na rotina usual dos participantes, tais como: pedir autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma envolvida em relação à videogravação durante a observação das aulas e em manter o anonimato dos intervenientes sempre que esse interesse seja manifestado.

Caso seja deferida a solicitação, deixo desde já, o desejo de esta investigação incorporar o plano anual de actividades da escola.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

XXXXXX, 1 de Setembro de 2008

Ana Margarida Baioa

Ana Margarida Franco de Mendonça Viegas e Silva Baioa

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Venho por este meio solicitar a V.Ex.ª que autorize o seu educando a participar num projecto de investigação que servirá de base à realização da dissertação de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências – Ramo de Matemática, que frequento na Universidade do Algarve.

O desenvolvimento do estudo não comprometerá o normal desenvolvimento das actividades da escola.

É necessário para a realização da investigação que observe as aulas do seu educando, gravando-as em suporte vídeo e áudio, onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos.

O anonimato será garantido sempre que esse interesse seja manifestado.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

XXXXXX, Dezembro de 2008

Ana Margarida Baioa

✂ ....

Declaro que autorizo o meu educando ____
a participar da investigação conduzida pela professora Ana Margarida Baioa, no âmbito da elaboração da sua dissertação de Mestrado, a ser gravado em vídeo e áudio.

☐ Gostaria que fosse garantido o anonimato. (Assinalar com cruz)

Data: ____/___/2008 Assinatura: ____________________________

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação

"Copos de pipocas. Qual escolher?"

Material: duas folhas de acetato, fita-cola e pipocas. Folhas brancas, lápis, borracha, caneta e calculadora.

Problema

Um vendedor de pipocas conseguiu um contrato para vender pipocas num cinema. Como o senhor não tem tempo para tudo, contratou-vos para lhe indicarem a melhor forma para um copo de pipocas cilíndrico, para ter o maior lucro possível.
As pipocas serão vendidas ao copo e este será construído com folhas tamanho A4.

Investiga e dá o teu conselho ao senhor por escrito através de um pequeno relatório, focando os seguintes tópicos:

- Explicar a situação experimental.
- As hipóteses colocadas.
- Estratégia utilizada.
- O resultado.
- A escolha do formato do copo.
- Mostrar analiticamente que a escolha indicada é a melhor.

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação Matemática

A caixa de pasteleiro

Saber construir uma caixa é sempre útil, seja para guardar aparas de lápis para não nos termos de levantar na sala de aula, seja para colocar uma camisola para oferecer, etc.

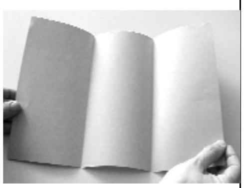
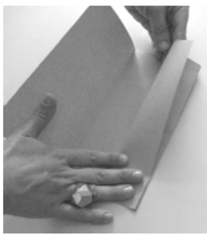
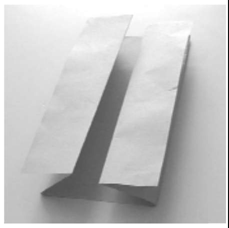
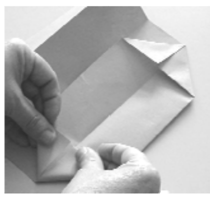
Os pasteleiros hoje em dia usam caixas standartizadas, isto é, com determinadas medidas já seleccionadas. Compram-nas já dobradas e prontas a utilizar. Mas estas caixas antes eram construídas pelos próprios pasteleiros.

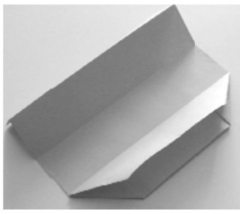
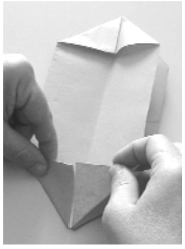
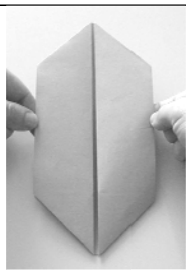
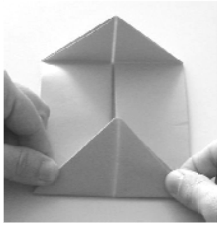
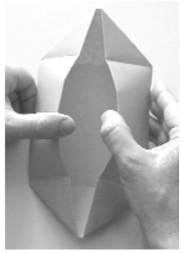
Os pasteleiros sabiam qual a folha de cartão que deveriam utilizar, para construir a caixa, de forma a embalar determinada quantidade de bolos e/ou bolachas. Vamos experimentar um pouco a construção dessas caixas de pasteleiro.

Da experiência….

1. Mede as folhas que te foram distribuídas (comprimento e largura). Não te esqueças de as registar, para não te esqueceres.

2. Constrói as caixas de pasteleiro de acordo com as instruções dadas a seguir.

				
Começas com um rectângulo. Divides em três partes iguais e dobras e vincas bem.	Dobra o lado direito ao meio e vinca.	Faz o mesmo para o lado esquerdo.	A folha agora tem duas asas (esquerda e direita).	Dobra em triângulos os cantos da asa direita.

				
Redobra a asa de forma a ter os triângulos para dentro.	Faz o mesmo para a asa esquerda e vinca.	Repara que as duas asas têm os cantos dobrados.	Dobra e vinca os topos formando triângulos.	Abre devagar e vinca muito bem cada aresta.

3. Mede as três dimensões das caixas que obtiveste. (comprimento, largura e altura)

… ao modelo.

4. Encontra uma relação entre as dimensões das folhas iniciais e as das respectivas caixas resultantes, analisando as dobragens efectuadas.

5. Descobre uma relação (pode ser uma expressão matemática) entre as várias dimensões.

6. Se quiseres embalar as bolachas que tens, para encher a caixa, quais as dimensões que a caixa deve ter e quais as medidas da folha que deves utilizar?

7. Elabora um pequeno relatório, focando os seguintes tópicos:

- Explicação da situação experimental.
- As hipóteses colocadas.
- A exploração realizada.
- Os resultados obtidos.
- Avaliação da proposta de trabalho.
- Dificuldades sentidas ao longo da actividade.

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação Matemática

A caixa de pasteleiro

Saber construir uma caixa é sempre útil, seja para guardar aparas de lápis para não nos termos de levantar na sala de aula, seja para colocar uma camisola para oferecer, etc.

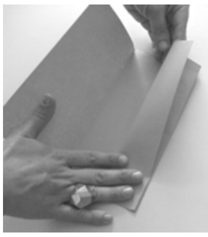
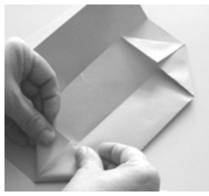
Os pasteleiros hoje em dia usam caixas standartizadas, isto é, com determinadas medidas já seleccionadas. Compram-nas já dobradas e prontas a utilizar. Mas estas caixas antes eram construídas pelos próprios pasteleiros.

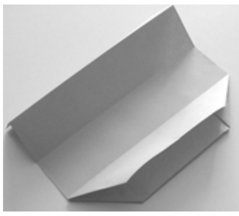
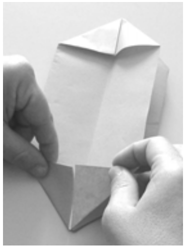
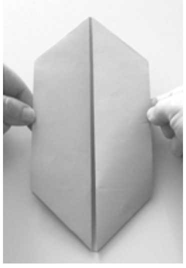
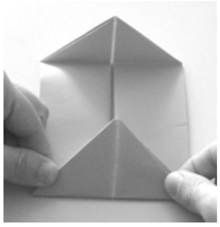
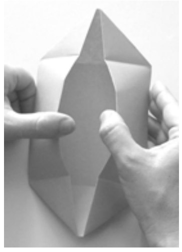
Os pasteleiros sabiam qual a folha de cartão que deveriam utilizar, para construir a caixa, de forma a embalar determinada quantidade de bolos e/ou bolachas. Vamos experimentar um pouco a construção dessas caixas de pasteleiro.

Da experiência….

1. Mede as folhas que te foram distribuídas (comprimento e largura). Não te esqueças de as registar, para não te esqueceres.

2. Constrói as caixas de pasteleiro de acordo com as instruções dadas a seguir.

				
Começas com um rectângulo. Divides em três partes iguais e dobras e vincas bem.	Dobra o lado direito ao meio e vinca.	Faz o mesmo para o lado esquerdo.	A folha agora tem duas asas (esquerda e direita).	Dobra em triângulos os cantos da asa direita.

				
Redobra a asa de forma a ter os triângulos para dentro.	Faz o mesmo para a asa esquerda e vinca.	Repara que as duas asas têm os cantos dobrados.	Dobra e vinca os topos formando triângulos.	Abre devagar e vinca muito bem cada aresta.

3. Mede as três dimensões das caixas que obtiveste. (comprimento, largura e altura)

… ao modelo.

4. Encontra uma relação entre as dimensões das folhas iniciais e as das respectivas caixas resultantes, analisando as dobragens efectuadas.

5. Descobre uma relação (pode ser uma expressão matemática) entre as várias dimensões.

6. Se quiseres embalar as bolachas que tens, para encher a caixa, quais as dimensões que a caixa deve ter e quais as medidas da folha que deves utilizar?

7. Quais as dimensões de uma folha de cartão para construir uma caixa de pasteleiro para embalar um bolo de aniversário de forma cilíndrica com 13 cm de raio e 10 de altura.

8. Elabora um pequeno relatório, focando os seguintes tópicos:
   - Explicação da situação experimental.
   - As hipóteses colocadas.
   - A exploração realizada.
   - Os resultados obtidos.
   - Avaliação da proposta de trabalho.
   - Dificuldades sentidas ao longo da actividade.

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação

"Serão estas escadas cómodas para subir e descer? "

Subir e descer escadas faz bem à saúde. Mas umas são mais cómodas de subir e descer que outras, porque serão?

Descobre porquê.

Da experiência…

1. Percorrendo a cidade de Tavira encontramos algumas escadas.


Fig. 1 – escadas do auditório público na Praça da República

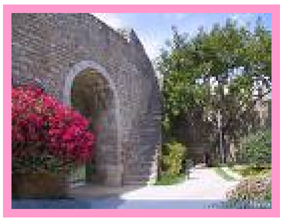


Fig.2 – escadas do castelo


Fig. 3- Portas do castelo

Percorre essas escadas e mais algumas que sejam interessantes de experimentar. Classifica-as numa escala de 1 a 5 (de menos cómoda a mais cómoda).

… ao modelo.

2. Elabora um esboço dessas escadas e tenta encontrar uma explicação para a qual possamos identificar quais as mais cómodas e as menos cómodas.
3. Descobre a relação existente entre a altura do degrau e a sua profundidade de forma a sustentares matematicamente as tuas classificações.
4. Se tivesses que indicar a um arquitecto qual o melhor tipo de escadas a utilizar numa planta de uma casa, qual indicarias e explica porquê.

5. Elabora um pequeno relatório, focando os seguintes tópicos:

- Explicação da situação experimental.
- As hipóteses colocadas.
- A exploração realizada.
- Os resultados obtidos.
- Avaliação da proposta de trabalho.
- Dificuldades sentidas ao longo da actividade

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação Matemática

Aviões de papel. Qual o melhor a voar?

Este é o avião de papel, modelo dardo, que aprendemos a fazer desde muito novos. E que ficamos muito contentes ao vê-lo voar.

Mas, existem outros modelos que talvez voem muito mais longe, como o modelo que apresento a seguir. O chamado “Best Plane” (o melhor avião).

Como bom investigador que és, desafio-te a mostrar efectivamente qual é o melhor avião e quais as características matemáticas que o tornam o melhor avião. Será o “Dardo” ou o “Best Plane”?

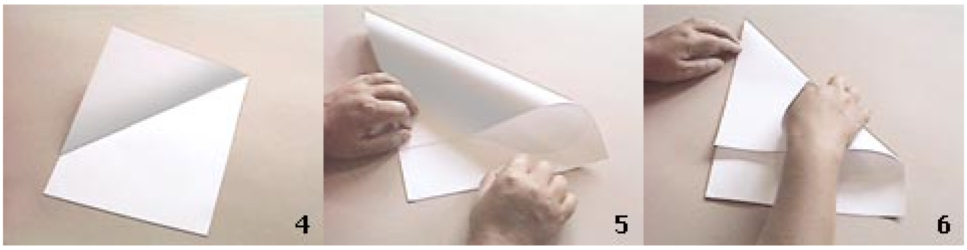
Da experiência…

1. Constrói os dois modelos de avião de papel com folhas A4.

   A seguir estão as instruções para a construção do “Best Plane”.

1. Começa com uma folha A4.

2 / 3. Dobra o canto esquerdo como mostra a figura.



4. Desdobra.

5 / 6. Dobra o canto direito como mostra a figura.

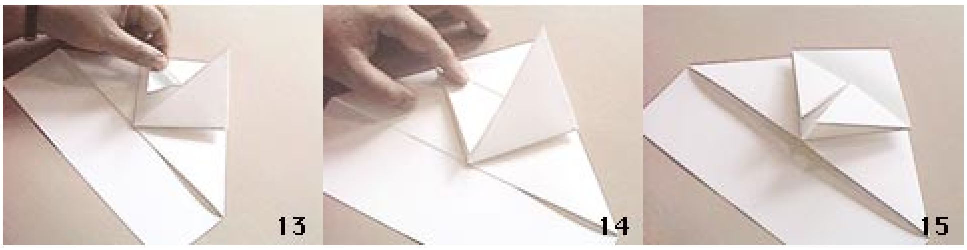
7. Desdobra.

8. Cuidadosamente junta os lados como exemplificado.

9. Dobra como mostra a figura.

10 / 11. Dobra a ponta esquerda para cima, como mostra a figura.

12. Repete com o lado direito.



13. Puxa a ponta esquerda para trás.

14. Dobra.

15. Repete com o lado direito.

16. Segura a parte esquerda como mostra.

17. Dobra de trás para a frente apenas 2/3 de distância.

Nota: A etapa 18 consegue-se dobrando a ponta lateral para baixo da última dobra efectuada.

18. Estuda as fotos 18 e 19 cuidadosamente. Essas dobras são difíceis de descrever. Tenta copiar da fotografia.

19. Repete com o lado direito.

20. Vira o avião e dobra essa parte para trás como mostra a figura.

21. Vira novamente o avião. O resultado deve ser similar ao da fotografia.

22. Dobra a asa como mostra.

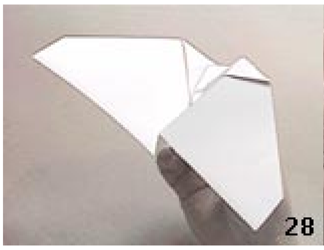
23. **CUIDADO!** - Molha levemente a dobra com a língua. Faz isso devagar e com cuidado ou poderás cortar a língua.

24. Cuidadosamente corta o papel. Guarda a tira de papel para fazer a cauda**.**

25. Para fazer a cauda, dobra a tira ao meio.

26. Corta como indicado para fazer as superfícies de controlo. As dobras devem ser paralelas à dobra inferior.

27. Dobre as asas para cima.



28. Dobra a asa direita como mostra as fotografias 28 e 29. Toma um cuidado especial ao ângulo. A parte da frente deve ficar ligeiramente mais alta que a parte de trás.

29. Estuda essa fotografia e verás que a dobra não é exactamente paralela à dobra inferior mas ligeiramente angular, como descrito na foto 28.

30. O avião deve parecer-se com o ilustrado.

31. Dobra as pontas das asas para cima.

32. Insere a cauda abaixo da asa.

33. ***Finalmente acabou!***


34. Trem de aterragem em baixo. Nota: o avião não voa com o trem de aterragem em baixo.

35. ***Pronto para voar!***

2. Lança os aviões as vezes que achares suficientes e regista o tempo de voo e a distância percorrida.

... ao modelo matemático.

3. Analisa os dados recolhidos e descobre possíveis relações entre os dados para cada tipo de avião.

4. A Junta de Freguesia de Santiago organizou um campeonato de planadores de papel. Se te pedissem conselho sobre qual o modelo a utilizar no campeonato, qual o avião de papel sugerias? Explica a tua decisão.

5. Elabora um pequeno relatório, focando os seguintes tópicos:

- Explicação da situação experimental.
- As hipóteses colocadas.
- A exploração realizada.
- Os resultados obtidos.
- Avaliação da proposta de trabalho.
- Dificuldades sentidas ao longo da actividade.

ESCOLA BÁSICA XXXXXXXXXXXXXXX

Actividade de Modelação Matemática

Paleta de cores

Uma loja de tintas de interiores e exteriores faz as cores numa máquina na qual apenas é necessário colocar a lata com a tinta base, e dar-lhe as instruções da cor escolhida no catálogo.

Mas surgiu um problema na máquina e esta deixou de funcionar a 100%. Não deitava os pigmentos, apenas misturava. Assim os empregados resolveram colocar à mão os pigmentos de forma a obter a cor escolhida pelo cliente.

Novo problema. Os empregados não tinham informação sobre as quantidades de pigmento a utilizar para cada cor do catálogo, pois o software também deixou de fornecer as quantidades necessárias. Assim a tua missão é ajudar estes empregados fornecendo-lhes uma lista com as quantidades de pigmento a utilizar para cada cor.

Da experiência…

Escolhe duas cores primárias e elabora uma paleta de cores com várias tonalidades e faz uma tabela com as quantidades para latas de 1L, 5L, 10L e 20L.

… ao modelo.

Tens à tua disposição líquido branco e pigmentos líquidos coloridos para trabalhar, medidores e seringas. A tua missão é formar uma paleta de cores em que entrem duas cores primárias e a tabela de consulta para os empregados da loja. Não te esqueças de registar todos os passos que realizares e de apresentar o relatório final.

Tópicos para a elaboração do relatório:

- Explicação da situação experimental.
- As hipóteses colocadas.
- A exploração realizada.
- Os resultados obtidos.
- Avaliação da proposta de trabalho.
- Dificuldades sentidas ao longo da actividade.