

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve



**MODELAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS ATMOSFÉRICOS:  
EFEITOS OROGRÁFICOS E DE CAMADA LIMITE**

José Luís Almaguer Argáin

Dissertação submetida para a obtenção do grau de Doutor em Física na Faculdade de Ciências e  
Tecnologia da Universidade do Algarve

15 de Dezembro de 2002



Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve



**MODELAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS ATMOSFÉRICOS:  
EFEITOS OROGRÁFICOS E DE CAMADA LIMITE**

José Luís Almaguer Argáin

Dissertação submetida para a obtenção do grau de Doutor em Física na Faculdade de Ciências e  
Tecnologia da Universidade do Algarve

15 de Dezembro de 2002

3248T.

UNIVERSIDADE DO ALGARVE	
SERVIÇO DE DOCUMENTAÇÃO	
10/03/04	54243
53	
ARG*Mod	

1

## Resumo

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo numérico bidimensional para estudar escoamentos na vizinhança de obstáculos. Para tratar um largo espectro de problemas físicos, o modelo possui um conjunto de características numéricas, em que se incluem: a) o emprego de coordenadas generalizadas ortogonais, geradas por um método baseado na mobilidade dos nós nas fronteiras, b) o tratamento das equações do escoamento, para isolar os termos associados à não ortogonalidade, c) um novo método de refinamento local da malha, adaptado ao uso de coordenadas generalizadas e estendido a esquemas de 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ordem de precisão para as derivadas advectivas, d) o uso de um novo método de extrapolação nas fronteiras, para atenuar a degradação dos esquemas de discretização, e) um novo tratamento dos termos advectivos no algoritmo de solução das equações discretizadas e f) a combinação de funções de parede com as funções de Monin-Obukhov para o estudo de escoamentos atmosféricos não neutros. As equações de Navier-Stokes foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à compressibilidade e à heterogeneidade da viscosidade turbulenta. A incorporação de coordenadas generalizadas foi efectuada de modo a permitir a inclusão, opcional, dos termos associados à não ortogonalidade, importantes em escoamentos com fronteiras de grande declive, como é o caso de escarpas.

O código desenvolvido foi testado por comparação com dados experimentais publicados e com diferente modelos teóricos, verificando-se uma boa concordância com os resultados numéricos. Foram efectuados múltiplos testes de performance computacional e de sensibilidade a parâmetros. A aplicação do modelo a diversos casos de estudo permitiu fazer uma exploração do espaço de parâmetros de escoamentos neutros e estratificados de diferentes escalas, com ênfase para o estudo da distribuição do acréscimo relativo de velocidade em escoamentos orográficos, e da geração de escoamentos ressonantes na presença de perfis heterogêneos de estabilidade e/ou de velocidade. A existência de heterogeneidade simultânea nos perfis de estabilidade e de velocidade revelou-se um factor essencial para a geração de ventos severos no declive a jusante de obstáculos topográficos. Alguns dos resultados deste trabalho poderão ser relevantes para aplicações meteorológicas e de engenharia eólica.

## Abstract

A two dimensional numerical model was developed, for the simulation of flows past obstacles. To allow for a large spectrum of physical problems, the model includes a number of features, such as: a) the use of generalized orthogonal coordinates, generated by an algorithm based on the mobility of grid points at the boundaries, b) the handling of equations to isolate terms related with non-orthogonality, c) the use of a new local grid refinement technique, adapted for the use of generalized coordinates, and for the incorporation of 2nd and 3rd order schemes to represent the advective terms, d) the use of a new extrapolation method at the boundaries, to improve the numerical discretization schemes, e) a new treatment of the advective terms in the algorithm used to solve the discretized equation system and f) the combination of a wall function with Monin-Obukhov similarity theory for the simulation of non-neutral flow. The Navier-Stokes equations were manipulated in order to isolate the contributions of compressible and turbulent heterogeneity effects. The implementation of generalized coordinates was performed in a way that allows for the optional incorporation of non-orthogonal terms, which become important when the lower boundary has a large slope, as in escarpments.

The new code was validated by comparison of its results with theoretical models, published experimental data and published numerical results, revealing, in all cases, a good agreement. The computational performance of the code, and its sensitivity to parameters were also analyzed. The application of the model to a number of case studies has allowed for some exploration of the parameter space, for both neutral and stratified flow past obstacles, with emphasis on the study of the distribution of speed-up in orographic flow, and for the establishment of resonant flow in the presence of heterogeneous velocity and/or stability profiles. The coexistence of heterogeneity in both stability and velocity profiles was found to be an essential factor in the generation of some downslope wind storms. Some of the results of this study may be relevant for meteorological and wind energy applications.

## Agradecimentos

Agradeço especialmente à minha família que tanto apoio me deu nos momentos mais complicados. A seguir agradeço a orientação, paciência e conselhos úteis do meu supervisor, Professor Pedro Miranda, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Agradeço a todos os meus amigos, que não nomearei para que não correr o risco de me esquecer de algum. E por último, agradeço a todos os meus colegas da Área Departamental de Física, pela paciência e compreensão mostradas para com o meu trabalho e a minha pessoa. Um sincero obrigado a todos.

Parte do trabalho desenvolvido nesta tese integra-se no Projecto BULET (Boundary Layer Effects and Turbulence in Complex Terrain, POCTI/1999/CTA/33980), financiado pela FCT, com apoio da União Europeia, no âmbito do Programa FEDER. O autor desta tese beneficiou ainda do apoio do Programa PRODEP.

# Índice

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xv
Nomenclatura	xvi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objectivos do trabalho . . . . .	1
1.2 Revisão bibliográfica. . . . .	4
1.3 Conteúdo da Tese. . . . .	6
<b>2 Introdução teórica</b>	<b>8</b>
2.1 Equações fundamentais de conservação e transporte . . . . .	8
2.2 Conceitos e aproximações fundamentais . . . . .	10
2.2.1 Decomposição de Reynolds e turbulência . . . . .	10
2.2.2 Números de Froude . . . . .	12
2.2.3 Número de Richardson . . . . .	13
2.2.4 Frequência de Brunt Väisälä . . . . .	13
2.2.5 Aproximação de Boussinesq . . . . .	13
2.2.6 Aproximação hidrostática . . . . .	14
2.2.7 Aproximação anelástica . . . . .	14
2.3 Teoria da similaridade de Monin-Obukhov . . . . .	15
2.4 Estrutura geral dos escoamentos atmosféricos sobre obstáculos topográficos . . . . .	18
2.5 Teoria linear dos escoamentos atmosféricos . . . . .	18
2.5.1 Equações linearizadas . . . . .	18
2.6 Escoamentos turbulentos sobre colinas . . . . .	21
<b>3 Modelo numérico flexível em coordenadas generalizadas.</b>	<b>26</b>
3.1 Introdução . . . . .	26
3.2 Equações fundamentais de conservação e transporte do modelo . . . . .	27
3.2.1 Escoamento médio . . . . .	27
3.3 Estado de referência . . . . .	27

3.4	Equação da termodinâmica . . . . .	28
3.5	Modelação dos processos de subescala. . . . .	29
3.5.1	Modelo $k - \epsilon$ . . . . .	29
3.5.2	Modificações do modelo $k - \epsilon$ . . . . .	33
3.5.3	Outras modificações do modelo $k - \epsilon$ . . . . .	33
3.5.4	Fecho de Lilly (1962). . . . .	35
3.6	Notas sobre a cascata de Kolmogorov . . . . .	35
3.7	Simplificação das equações de movimento . . . . .	36
3.8	Aspecto final das equações do modelo . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Métodos numéricos de solução das equações de conservação e de transporte</b>	<b>39</b>
4.1	Discretização da equação de transporte de um escalar . . . . .	39
4.1.1	Regras fundamentais da discretização . . . . .	40
4.2	Discretização da equação diferencial de conservação do momento para uma malha desfasada . . . . .	41
4.3	Algoritmo SIMPLE . . . . .	41
4.4	Malhas não desfasadas . . . . .	41
4.4.1	Esquemas de discretização dos termos advectivos e difusivos . . . . .	42
4.5	Precisão . . . . .	44
4.5.1	O problema dos VC's adjacentes às fronteiras . . . . .	46
4.5.2	Esquemas Compostos de Alta Resolução (ECAR) . . . . .	51
4.5.3	Outras fontes de erro . . . . .	53
4.5.4	Modificações no tratamento conservativo dos termos advectivos na malha não desfasada . . . . .	54
4.6	Método de resolução do sistema linear de equações discretizadas. Convergência e relaxação	55
4.6.1	Convergência . . . . .	56
4.6.2	Relaxação . . . . .	56
4.7	Integração temporal . . . . .	57
4.7.1	Esquema FI . . . . .	57
4.7.2	Esquema FTTLI . . . . .	58
4.8	Refinamento local de malhas . . . . .	58
4.8.1	Tratamento das interfaces . . . . .	61
4.8.2	Critérios para o refinamento local . . . . .	62
4.9	Coordenadas generalizadas ortogonais . . . . .	63
4.9.1	Geração de malhas com coordenadas generalizadas ortogonais . . . . .	63
4.9.2	Estrutura das equações diferenciais de transporte e conservação em coordenadas generalizadas . . . . .	66
4.9.3	Método numérico de solução das equações de conservação e de transporte em coordenadas generalizadas . . . . .	67
4.10	Condições de fronteira . . . . .	68
4.10.1	Imposição de um valor fixo de $\phi_P$ . . . . .	69
4.10.2	Prescrição do fluxo de $\phi$ numa fronteira . . . . .	69
4.10.3	Prescrição de $\phi$ numa fronteira . . . . .	69
4.10.4	Condições de fronteiras anti-reflexão . . . . .	70
4.10.5	Equação de correcção da pressão . . . . .	72
4.11	Tratamento do modelo $k - \epsilon$ nas fronteiras . . . . .	73
4.11.1	Modificação do modelo $k - \epsilon$ junto da superfície . . . . .	73

4.12 Filtragem . . . . .	79
<b>5 Validação da componente numérica no modelo</b>	<b>80</b>
5.1 Escoamento numa cavidade quadrada com uma parede móvel . . . . .	80
5.1.1 Precisão numérica. . . . .	80
5.1.2 Método de refinamento local para esquemas de 3 pontos. . . . .	92
5.2 Geração de malhas e refinamento local em coordenadas ortogonais generalizadas . . .	96
5.2.1 Validação e teste do método de geração de malhas ortogonais generalizadas . .	96
5.2.2 Geração de malhas ortogonais generalizadas refinadas localmente. . . . .	97
<b>6 Escoamentos de microscala em camadas limites turbulentas bidimensionais</b>	<b>103</b>
6.1 Estudo da resposta da camada limite turbulenta a uma descontinuidade do fluxo de calor superficial . . . . .	104
6.1.1 Discussão de resultados e conclusões . . . . .	109
6.2 Escoamento sobre uma colina isolada. . . . .	115
6.2.1 Discussão de resultados e conclusões . . . . .	119
6.3 Escoamento sobre uma duna de areia . . . . .	126
6.3.1 Discussão de resultados e conclusões . . . . .	128
<b>7 Escoamentos orográficos estavelmente estratificados de subcamada externa</b>	<b>132</b>
7.1 Introdução . . . . .	132
7.2 Escoamento hidrostático uniforme linear numa atmosfera isotérmica . . . . .	139
7.3 Escoamento hidrostático não linear uniforme. . . . .	144
7.4 Escoamento uniforme, não hidrostático e não linear . . . . .	147
7.5 Rebentação de ondas num escoamento homogéneo moderadamente hidrostático . . . .	150
7.6 Reflexão parcial . . . . .	154
7.6.1 Enquadramento . . . . .	154
7.6.2 Estudo numérico da reflexão parcial . . . . .	155
7.7 Simulação de ondas de reflexão total a jusante da orografia . . . . .	185
7.7.1 Enquadramento . . . . .	185
7.7.2 Simulação numérica e discussão de resultados. . . . .	185
7.8 Tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado. . . . .	188
7.8.1 Simulação numérica e discussão de resultados. . . . .	190
7.9 Discussão . . . . .	202
<b>8 Outros escoamentos atmosféricos de camada limite</b>	<b>203</b>
8.1 Enquadramento . . . . .	203
8.1.1 Análise de alguns resultados teóricos e modificações propostas . . . . .	203
8.2 Escoamento sobre o monte de Cooper . . . . .	208
8.3 Escoamentos neutros e estáveis sobre orografias idealizadas . . . . .	216
8.4 Assimetria e arrastos ondulatório e aerodinâmico . . . . .	221
8.5 Conclusões . . . . .	228
<b>9 Conclusões</b>	<b>231</b>

<b>A Anexos</b>	<b>236</b>
A.1 Anexo I- Determinação dos perfis de $k$ e $\varepsilon$ da CLT com base no modelo de Hwang e Liou (1991). . . . .	236
A.2 Anexo II- Método de Scorer (1949)-Sawyer(1960). . . . .	238
<b>Referências</b>	<b>241</b>

# Lista de Figuras

2.1	Estrutura da camada limite turbulenta para a análise linear. Retirado de BW96. . . . .	19
4.1	a) Volume de controlo numa malha não desfasada, b) Volume de controlo numa malha desfasada, para o cálculo da componente horizontal da velocidade. . . . .	40
4.2	VC's do nó de cálculo $P$ nos casos: a) a face $ww$ está na fronteira ( $wwb$ )(caso I), b) a face $w$ está na fronteira ( $wb$ ) (caso II). . . . .	46
4.3	VC's do nó de cálculo $P$ nos casos: a) em que não são necessários os valores de $\phi$ nas fronteiras (caso III -nós equidistantes), b) O nó $W$ está na fronteira ( $Wb$ ) (caso IV) . . . . .	47
4.4	(a)Representação gráfica das funções de $\tilde{\phi}_e = f(\tilde{\phi}_P)$ , mostradas na tabela 4.7, (b)Esquema composto de alta resolução Smart (Gaskell e Lau, 1988). . . . .	52
4.5	VC do nó $P$ , situado no lado menos refinado da malha (Coelho et al., 1991)). . . . .	59
4.6	VC do nó $P$ , situado: a) no lado menos refinado da malha, b) no lado mais refinado da malha. Método de refinamento de (Coelho et al., 1991)) modificado. . . . .	59
5.1	Linhas de corrente para $Re = 1000$ . . . . .	83
5.2	Representação gráfica dos erros relativos médios, em função do número de Reynolds para uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1. . . . .	84
5.3	Figuras a), b), c) e d): Erros relativos médios, em função do número de Reynolds para uma malha de (20x20) nós. Figuras e) e f): Erros relativos máximos em função de $Re$ . . . . .	85
5.4	Perfis de velocidade normalizados com a velocidade $U_0$ . Com excepção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1. . . . .	87
5.5	Perfis de velocidade normalizados com a velocidade $U_0$ . Com excepção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1. . . . .	88
5.6	Perfis de velocidade normalizados com a velocidade $U_0$ . Com excepção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1. . . . .	90
5.7	Perfis de velocidade normalizados com a velocidade $U_0$ . Com excepção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1. . . . .	91
5.8	Erros estimados com a técnica de extrapolação de Richardson. (a) Erro $\epsilon_{40}^U$ , b) erro $\epsilon_{80}^U$ , (c) erro $\epsilon_{40}^V$ , b) erro $\epsilon_{80}^V$ . Os erros estão normalizados com o erro máximo, $\epsilon_{40,max}^U$ . . . . .	93
5.9	Malha base de (20x20) nós com 3 níveis de refinamento local, usada para o cálculo do escoamento da cavidade com $Re = 1000$ . A malha tem 6016 nós de cálculo e 1911 nós auxiliares. . . . .	94
5.10	Gráficos de: a) número de iterações (ver tabela 5.2), b) tempo de CPU (ver tabela 5.3). O número de iterações e o tempo de CPU são valores de convergência do modelo FLEX. . . . .	98

5.11	Perfis da velocidade $U(y)$ em diferentes secções de $x$ . a) $x = 0.075$ m, b) $x = 0.45$ m, c) $x = 0.8$ m e d) $x = 0.95$ m. Os perfis foram obtidos com a malha da figura 5.9 e foram normalizados com $U_0$ . . . . .	99
5.12	Perfis da velocidade $V(x)$ em diferentes secções de $y$ . a) $y = 0.016$ m, b) $y = 0.119$ m, c) $y = 0.475$ m e d) $y = 0.963$ m. Os perfis foram obtidos com a malha da figura 5.9 e foram normalizados com $U_0$ . . . . .	100
5.13	Malhas curvilíneas ortogonais num domínio simétrico: a) com os nós móveis nas fronteiras norte e oeste, b) com todos os nós fixos, c) com os nós móveis só na fronteira norte, d) com os nós móveis só na fronteira oeste. . . . .	101
5.14	Malhas curvilíneas ortogonais num domínio assimétrico: a) com os nós móveis nas fronteiras norte e oeste, b) com todos os nós fixos, c) com os nós móveis só na fronteira norte, d) com os nós móveis só na fronteira oeste. . . . .	102
5.15	Malha em coordenadas ortogonais generalizadas com refinamento local. . . . .	102
6.1	Diagrama esquemático da experiência de Antonia et al. (1977). . . . .	104
6.2	Perfis adimensionais da energia cinética turbulenta ( $k^+$ ) e da dissipação ( $\varepsilon^+$ ) em função da altura adimensional ( $z^+$ ), determinados com o modelo semi-analítico de Hwang e Liou (1991) ( $k^+ = k/u_*^2$ e $\varepsilon^+ = \mu\varepsilon/(\rho u_*^4)$ ). A seta indica a espessura adimensional da camada limite de velocidade. . . . .	107
6.3	Perfis adimensionais da componente horizontal da velocidade média e da viscosidade turbulenta ( $z^+$ ) ( $\mu_t^+ = \mu_t/(\rho k u_* \delta_0)$ ), em função da altura adimensional ( $z^+$ ). O perfil de $\mu_t^+$ corresponde ao modelo LB81. . . . .	108
6.4	a) Malha de cálculo base de (50x30) nós, com $\Delta x_{min} = 0.01$ m e $\Delta z_{min} = 0.0004$ m, $r_x = 1.048572$ , $r_z = 1.168112$ , b) Malha da alínea anterior com 2 níveis de refinamento local, 4650 nós de cálculo, e 342 nós auxiliares. De acordo com os critérios de Patel et al.(1985), $\Delta x_{min}^{Patel} = 0.0015$ e $\Delta z_{min}^{Patel} = 0.00005$ . Na representação, a malha foi exagerada verticalmente, 2.5 vezes. O domínio de cálculo tem (2.4x0.23) m. . . . .	109
6.5	Perfis verticais da temperatura média, normalizados com a escala de temperatura $\theta_*$ . Os perfis correspondem as seguintes secções: a) $x/\delta_0 = 2.3$ , b) $x/\delta_0 = 5.7$ , c) $x/\delta_0 = 11.4$ , d) $x/\delta_0 = 18.9$ , e) $x/\delta_0 = 25.7$ , f) $x/\delta_0 = 42.9$ . Os símbolos correspondem as dados experimentais de Antonia et al. (1977). (---) corresponde à simulação com LB81 e (—) corresponde à simulação com Chen e Patel (1987). . . . .	110
6.6	Variação ao longo da zona aquecida de: a) $T_w - T_1$ , b) $u_*$ , c) $Q_w$ , d) $\delta_T/\delta_0$ , e) $St$ e $0.5c_f$ , e f) quociente $St/(0.5c_f)$ . O símbolo (o) corresponde aos dados experimentais de Antonia et al. (1977), e (*) à simulação de Coelho et al. (1992). . . . .	111
6.7	Resultados de Coelho et al. (1992) para serem comparados com os da figura 6.5. Neste caso $\theta_\tau$ representa $\theta_*$ . . . . .	112
6.8	Resultados de Coelho et al. (1992) para serem comparados com os da figura 6.6a. Os símbolos (x) representam os resultados obtidos pelos autores com uma malha de 2373 nós, e 2 níveis de refinamento local. (o) corresponde aos dados experimentais de Antonia et al. (1977).( $\lambda$ ) corresponde a uma simulação de Coelho et al. (1992) com uma malha base grosseira e sem refinamento. . . . .	113
6.9	Escoamento de microscala sobre uma montanha 2D (adaptado de Almeida et al., 1992). . . . .	115
6.10	Malha base de 80x40 nós com 2 níveis de refinamento local. A malha tem 7751 nós de cálculo, 2174 nós auxiliares, um desvio médio da ortogonalidade de $0.23^\circ$ e um desvio máximo de $3.44^\circ$ . O domínio de cálculo tem (0.7x0.17) m e começa em $x_0 = -0.2$ m. O primeiro nó de cálculo, no canto inferior esquerdo está a uma distância da superfície de $z_P = 0.53124$ mm. . . . .	115

6.11	Perfis verticais da componente de velocidade $U$ normalizados com $U_0$ . As secções estão indicadas nas figuras. Os símbolos representam os dados experimentais de Almeida et al. (1992), e a linha contínua, os resultados do presente modelo. . . . .	116
6.12	Perfis experimentais de Almeida et al.(1992): a) $x = -0.2$ , b) $x = 0.03$ m. . . . .	117
6.13	Como na figura 6.11, mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). A malha usada pelo autor para o domínio de (600x170) mm ( $x_0 = -100$ m), é de (320x150)(48000 nós), e a simbologia usada é: $z_p = 0.125$ mm (—), $z_p = 0.075$ mm(- . -), $z_p = 0.05$ mm (- -), em que $z_p$ é a distância vertical do 1º nó da malha (canto inferior esquerdo) à superfície. Os traços descontínuos (- -) correspondem à solução obtida com ( $x_0 = -400$ m) e $z_p = 0.125$ mm. . . . .	118
6.14	Termos de: transporte advectivo pelo escoamento médio ( $A$ ), produção ( $S$ ), transporte advectivo pela turbulência ( $T$ ) e dissipação ( $D$ ), da equação de transporte de $k$ (2.20). Os termos estão adimensionalizados com o fluxo de $k$ à entrada do domínio de cálculo situada neste caso em $x_0 = 0.2$ m. Foi usado FLEX . . . . .	119
6.15	Como na figura 6.11, mas os perfis são da componente de velocidade $V$ normalizada com $U_0$ . . . . .	120
6.16	Como na figura 6.15, mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). As características da malha usada por C97 estão descritas na figura 6.13. . . . .	121
6.17	Perfis verticais da energia cinética turbulenta normalizada com $U_0^2$ . As secções estão indicadas nas figuras. Os símbolos representam os dados experimentais de Almeida et al.(1992), e a linha contínua, os resultados com o presente modelo (FLEX) . . . . .	122
6.18	Como na figura 6.17 mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). As características da malha usada por C97 estão descritas na figura 6.13. . . . .	123
6.19	Perfil da duna de Mierlo e de Ruiter (1988). $\beta$ é o declive local da duna. . . . .	126
6.20	Secções de corte da duna de Mierlo e Ruiter (1988). Os perfis escolhidos são o 3 ( $x = 0.13$ m), o 8 ( $x = 0.48$ m) e o 15 ( $x = 1.27$ m). . . . .	126
6.21	Malha de cálculo base de 50x40 nós com 3 níveis de refinamento. Possui 6606 nós de cálculo, 2287 nós auxiliares, um desvio médio da ortogonalidade de $0.39^\circ$ e um desvio máximo de $3.9^\circ$ . . . . .	127
6.22	Malha de cálculo usada por Yoon e Patel (1996). Esta tem (82x69) nós (5658 nós) e é não ortogonal. . . . .	127
6.23	Perfis verticais da velocidade $U$ e da energia cinética turbulenta $k$ . $U$ e $k$ foram normalizadas com $U_0$ e $U_0^2$ , respectivamente. As secções são: a) e b) (secção 3), c) e d) (secção 8), e e) e f) (secção 15)(ver figura 6.20). (o) - dados experimentais de Mierlo e Ruiter (1988), (—) resultados do presente modelo. . . . .	129
6.24	Como na figura 6.23 mas os resultados numéricos são os de Yoon e Patel (1996). $y$ está normalizado com $d = 0.292$ m. . . . .	130
7.1	Deslocamento das linhas isopícnicas produzidas por um escoamento com estratificação e velocidade uniformes sobre uma orografia sinusoidal de pequena amplitude: a) topografia com um comprimento de onda grande, $k < N/U_\tau$ , b) o caso contrário de a). . . . .	134
7.2	Campos das isolinhas de $u'$ e $w'$ . Nas figuras a) e b) estão representadas as isolinhas de $u'$ e nas figuras c) e d) as isolinhas de ( $w'$ ). (—) solução analítica obtida com o modelo linear de Queney (1948), (- - -) solução numérica obtida com FLEX. Os campos de $u'$ e $w'$ foram amplificados 1000 vezes. . . . .	142
7.3	Como na figura 7.2 mas os de campos $u'$ e $w'$ correspondem à solução de Durran e Klemp (1983).143	
7.4	Linhas de corrente. A linha contínua corresponde à solução analítica linear e a linha descontínua, à solução obtida com FLEX. Os deslocamentos verticais das linhas de corrente $\delta(x, z)$ foram amplificados 250 vezes. . . . .	143

7.5	(a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear. . . . .	144
7.6	Campos das isolinhas das velocidade $u'$ e $w'$ . Nas figuras a) e b) estão representadas as isolinhas de $u'$ e nas figuras c) e d) as isolinhas de $w'$ . A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)), e a linha (---) à solução obtida com FLEX. A isolinha mais grossa corresponde à primeira maior perturbação de $u'$ . . . . .	145
7.7	Linhas de corrente. A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)), e a linha (---) à solução do modelo. . . . .	146
7.8	(a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para $U_r t/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão de Miles e Huppert (1969) (7.64) e esta representado com (···) em ambos gráficos. . . . .	146
7.9	Linhas de corrente. A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)) e a linha (---) à solução obtida com FLEX. . . . .	149
7.10	Como na figura 7.9 mas as linhas de corrente correspondem à solução de Durran e Klemp (1983). . . . .	149
7.11	(a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para $U_r t/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear calculado com a expressão (7.49). O arrasto linear é corrigido com a expressão de Miles e Huppert (1969) (7.64) e está representado por (···) em ambos os gráficos. . . . .	149
7.12	Evolução temporal das linhas de corrente obtidas por simulação numérica. O escoamento é homogéneo. A solução f) é estacionária e corresponde ao modelo analítico de Long (1953). . . . .	151
7.13	(a) Fluxo de quantidade de movimento, normalizado pelo arrasto linear (expressão (7.49)), para diferentes tempos: 1500s ( $U_r t/L = 2$ ), 3000s ( $U_r t/L = 4$ ), 6000s ( $U_r t/L = 8$ ), 9000s ( $U_r t/L = 12$ ), b) Evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido pela expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969). . . . .	152
7.14	Evolução temporal do factor de amplificação do vento tangencial. . . . .	153
7.15	(a) Fluxo, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49) para $U_r t/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. Corresponde ao caso 1 da tabela 7.1. . . . .	158
7.16	Linhas de corrente. As linhas (—) e (---) correspondem às soluções analíticas linear (equação (7.83) e numérica (para $U_r t/L = 100$ ), respectivamente. As perturbações foram amplificadas 200 vezes. . . . .	159
7.17	(a) Fluxo, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49), para $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. . . . .	159
7.18	Linhas de corrente (linha contínua: solução analítica não linear (equação (7.83), linha descontínua: modelo.) . . . . .	160
7.19	(a) Fluxo vertical de quantidade de movimento, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49), para $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969). . . . .	160
7.20	Linhas isentrópicas do escoamento correspondente ao caso 4 da tabela 7.1. a) FLEX, b) Modelo de D86. O intervalo de temperatura é de $5^\circ$ e $U_r t/L = 20$ . . . . .	161
7.21	a) Evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear ( $D_{lin}$ ), do caso 4 ( $U_r t/L = 20$ ) em que $D_{lin}$ , corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969) está representado com (---) e b) campo das isentrópicas do caso 4 obtidas por D86 com um modelo hidrostático. . . . .	161
7.22	Linhas isentrópicas dos escoamentos especificados na tabela 7.1 para $U_r t/L = 30$ . Neste caso só varia $H$ . $H_d = \lambda_z/2$ e $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ . O traço curto mais espesso horizontal representa o comprimento de onda aproximado das ondas a jusante. . . . .	163
7.23	Como na figura 7.22 mas neste caso só varia $H_d$ . $H = 600$ m e $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ . . . . .	165

7.24	Como na figura 7.22 mas só varia $\sigma_d = N_{in}/N_{sup}$ . $H = 600$ m e $H_d = \lambda_z/2$ . O traço vertical comprido mostra a posição do primeiro cume das ORP e a seta define o valor teórico de $x/L$ em que a deflexão é mínima. O traço horizontal grosso é usado para estimar o comprimento de onda das ORP. . . . .	167
7.25	Evolução temporal do campo das isentrópicas do caso 4 especificado na tabela 7.1. . . . .	169
7.26	Como na figura 7.22 mas mantendo constante $H_d = \lambda_z/4$ e $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 4$ . $H$ toma dois valores $H = 1$ m e $H = 600$ m. . . . .	171
7.27	Como na figura 7.22, mas mantendo constante $H = 600$ m, $H_d = \lambda_z/2$ e $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ . $L$ toma dois valores $L = 10000$ m e $L = 7500$ m. . . . .	171
7.28	Evolução temporal do arrasto numérico, normalizado por $D_{lin}$ , para os casos especificados na tabela 7.1. . . . .	173
7.29	Campos das linhas isentrópicas de: a) caso 20 ( $U_r t/L = 30$ ), b) caso 4 ( $U_r t/L = 30$ ), c) caso 15 ( $U_r t/L = 30$ ), d) caso 15 ( $U_r t/L = 50$ ), e) caso 16c ( $U_r t/L = 30$ ) e f) caso 16c ( $U_r t/L = 50$ ). O domínio apresentado tem um comprimento vertical de $3\lambda_z$ . . . . .	175
7.30	Campos das linhas isentrópicas do caso 14 para: a) $U_r t/L = 10$ , b) $U_r t/L = 20$ , c) $U_r t/L = 30$ , d) $U_r t/L = 50$ , e) $U_r t/L = 80$ , f) $U_r t/L = 100$ . O domínio apresentado tem um comprimento vertical de $5\lambda_z$ . . . . .	177
7.31	Fluxo normalizado com o arrasto linear para os casos especificados na tabela 7.1, a) caso 4, b) caso 14. . . . .	178
7.32	Perfis longitudinais: a) de $\sigma_d$ para diferentes valores de $c$ (ponto 1), e b) de $c$ para diferentes valores de $\sigma_d$ (ponto 2). . . . .	179
7.33	a) Campo das linhas isentrópicas e b) evolução temporal do arrasto ondulatório normalizado com o arrasto linear. . . . .	181
7.34	Campos das isentrópicas dos escoamentos especificados na tabela 7.2 para $U_r t/L = 20$ . Em todos os casos $L = 10000$ m e $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ , $H = 1$ m (caso acentuadamente linear), só varia $H_d$ . Para facilitar a comparação com o caso não linear, as flutuações $\theta'$ foram amplificadas 600 vezes. . . . .	182
7.35	Como na figura 7.29 para para o caso não linear com $H = 600$ m. . . . .	183
7.36	Evolução temporal do arrasto numérico normalizado com $D_{lin}$ para os casos especificados na tabela 7.2. . . . .	184
7.37	Perfis de referência (a) da temperatura, b) da componente horizontal do vento, e (c) da temperatura potencial, em função da altitude. . . . .	186
7.38	Perfis do parâmetro de Scorer $\ell^2$ e da diferença $\ell^2 - k_d^2$ em função da altitude. . . . .	186
7.39	Linhas de corrente a) presente modelo, b) solução do modelo analítico de Scorer (1949) e Sawyer (1960). . . . .	187
7.40	(a) Perfil do valor normalizado da amplitude complexa, em função da altitude, para o modo $k_m \approx 4.5 \times 10^{-4} m^{-1}$ (modelo analítico de Sawyer, 1960). (b) Deslocamentos das linhas de corrente em $x/L = 12.5$ , calculados com o modelo analítico de Sawyer (1960) e com o presente modelo. . . . .	188
7.41	(a) Fluxo normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.45) para $U_r t/L = 90$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969). . . . .	189
7.42	Perfis verticais a) de vento horizontal e b) de temperatura usados para simular a tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder. . . . .	190
7.43	Campo das linhas isentrópicas. Simulação com FLEX da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado. Em cada figura esta indicado o instante correspondente ao campo representado. $H = 2000$ m e $L = 10000$ m. . . . .	192

7.44	Campo das linhas isentrópicas. Simulação de PC79 da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder. Os instantes correspondente às figuras representadas são: a) 1600 s, b) 2240 s, c) 2880 s, d) 3520 s, e) 4160 s e f) 4800 s (retirado de PC79). . . . .	193
7.45	Campo das linhas isentrópicas da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado (Lilly, 1978). . . . .	194
7.46	Evolução temporal do arrasto. (a) FLEX, (b) Simulação de PC79. A seta (2) na figura (a) indica o tempo em que é atingida a inclinação crítica na estratosfera inferior (4000 s). Na simulação de Peltier e Clark (1979) este tempo é assinalado com o número (2) e é de aproximadamente 4000 s ( $\Delta t = 4s$ ). O arrasto representado com a linha descontínua foi corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert(1969). . . . .	194
7.47	Perfis verticais (a) da estabilidade $N$ , do número de Scorer $\ell^2$ , da diferença $\ell^2 - k_a^2$ e do comprimento de onda vertical $\lambda_z$ , determinados com so perfis de PC79; (b) funções $\delta_{H_{dn}}$ e $\delta_{H_{cn}}$ dadas pelas equações 7.96 e 7.97 respectivamente. . . . .	195
7.48	Perfis verticais (a) da estabilidade $N$ e do número de Scorer $\ell^2$ obtidas com os perfis PC79 e com as duas modificações introduzidas aos mesmos; mod1 e mod2; (b) da função $\delta_{H_{dn}}$ obtida com mod1 e mod2. . . . .	195
7.49	(a) Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis PC79, mod1 e mod2; (b) campo das linhas isentrópicas obtido com mod1. . . . .	197
7.50	Perfis verticais (a) das funções $\delta_{H_{d1}}$ e $\delta_{H_{c1}}$ correspondentes às diferentes modificações do perfis mod1, (b) do perfil de referência de PC79 $U_r$ modificado para obter (mod1a sem $H_{d1}$ ). . . . .	198
7.51	Campo das linhas isentrópicas obtidos com: (a) (mod1 sem $H_{d1}$ ) e (b) (mod1 sem $H_{c1}$ ). . . . .	198
7.52	Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis mod1 e as suas modificações (mod1 sem $H_{d1}$ ) e (mod1 sem $H_{c1}$ ). . . . .	199
7.53	(a) Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis mod1, (mod1 sem $H_{c1}$ ) e (mod1a sem $H_{c1}$ ); (b) campo das isentrópicas obtido com (mod1a sem $H_{c1}$ ). . . . .	200
7.54	(a) Perfis verticais das funções $\delta_{H_{cn}}$ correspondentes a mod1 e à modificação (mod1a sem $H_{d1}$ ); (b) evolução temporal do arrasto de mod1 e das modificações (mod1 sem $H_{d1}$ ) e (mod1a sem $H_{d1}$ ). . . . .	200
7.55	Campo das linhas isentrópicas obtidos com a modificação (mod1a sem $H_{d1}$ ) representado em dois domínios com alturas diferentes: (a) 13 km, (b) 35 km (neste caso o domínio de cálculo tem uma altitude de 35 km e não 29 km como nos restantes casos). . . . .	201
7.56	Evolução temporal do arrasto obtido para dois conjuntos de simulações: (a) variação de $H_{d1}$ em perfis do tipo mod1, e (b) variação de $H_{d1}$ em perfis do tipo (mod1 sem $H_{c1}$ ). . . . .	202
8.1	a) Perfis dos arrastos ondulatório ( $D_w$ ) e aerodinâmico ( $D_f$ ) em função de $L/L_{mo}$ obtidos com o modelo analítico linear de BW96; b) Evolução temporal de $D_w$ e $D_f$ obtida com FLEX para $L_{mo} = 200$ m. A orografia consiste numa colina de Agnesi com $L = 400$ m e $H = 50$ m. . . . .	207
8.2	a) Mapa topográfico e b) perspectiva da colina de Cooper. Os pontos indicam a localização dos postes de medição. O intervalo entre as curvas de nível é de 5 m. . . . .	208
8.3	Secção transversal da colina de Cooper ajustada e alisada. . . . .	208
8.4	Perfis em função da estabilidade. a) Velocidade de fricção $u_*$ determinada com a expressão 8.7, b) acréscimo relativo de velocidade ( $\Delta S$ ) calculado com o modelo HLR-HRB-W97. . . . .	210
8.5	Parte real dos termos $ki$ , $Dy$ e $Sh$ da perturbação $\tilde{u}'(k)$ dada pela expressão (8.15). . . . .	211
8.6	a) Perfil de $h_i$ e $h_m$ em função de $1/L_{mo}$ , e b) perfil de $(Fr_L^{-2} - 1)$ em função de $L/L_{mo}$ . . . . .	211
8.7	Caracterização da malha usada para as simulações de escoamentos sobre a colina de Cooper. . . . .	213
8.8	Perfis verticais em $x = 0$ m de $\Delta S$ , $\Delta U$ , $U$ e $U_r$ , obtidos para $L_{mo} = \infty$ (caso 1 da tabela 8.1) e normalizados com a velocidade de fricção $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	214

8.9	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o caso neutro (caso 1 da tabela 8.1): a) $z = 2$ m, b) $z = 16$ m, c) $z = 32$ m e d) $z = 64$ m. . . . .	215
8.10	Perfis verticais no topo da orografia ( $x = 0$ m) para o escoamento com $L_{mo} = 400$ m (caso 2 da tabela 8.1). a) $U$ e $U_r$ , b) $\Delta S$ e $\Delta U$ . Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção $u_*$ . . . . .	216
8.11	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o caso com $L_{mo} = 400$ m (caso 2 da tabela 8.1). a) $z = 2$ m, b) $z = 16$ m, c) $z = 32$ m e d) $z = 64$ m. . . . .	217
8.12	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para $L_{mo} = 167$ m (caso 3 da tabela 8.1), $z = 2$ m. . . . .	217
8.13	Perfis verticais ( $x = 0$ m) de $\Delta S$ , $\Delta U$ , $U$ e $U_r$ , obtidos para $L_{mo} = 118$ m (caso 4 da tabela 8.1). Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	218
8.14	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o caso com $L_{mo} = 118$ m (caso 4 da tabela 8.1). a) $z = 2$ m, b) $z = 16$ m, c) $z = 32$ m e d) $z = 64$ m. A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	218
8.15	Perfis verticais em $x = 0$ m para o escoamento com $L_{mo} = 24$ m (caso 5). a) $U$ e $U_r$ b), $\Delta S$ e $\Delta U$ . Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	219
8.16	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o caso com $L_{mo} = 24$ m (caso 5 da tabela 8.1). a) $z = 2$ m, b) $z = 16$ m, c) $z = 32$ m e d) $z = 64$ m. A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	220
8.17	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o caso $L_{mo} = 4$ m e $z = 2$ m (caso 6 da tabela 8.1). A orografia corresponde à colina de Cooper. . . . .	220
8.18	a) Colina e planalto de Agnesi, b) Escarpas de Agnesi ascendente e descendente. . . . .	221
8.19	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para o planalto de Agnesi. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 1 ( $L_{mo} = \infty$ ) da tabela 8.1. A orografia está representadas na figura 8.18. . . . .	222
8.20	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para a colina e o planalto de Agnesi. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 4 ( $L_{mo} = 118$ m) da tabela 8.1. . . . .	223
8.21	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para as escarpas de Agnesi representadas na figura 8.18. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 1 ( $L_{mo} = \infty$ ) da tabela 8.1. . . . .	224
8.22	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para as escarpas de Agnesi representadas na figura 8.7. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 4 ( $L_{mo} = 118$ m) da tabela 8.1. . . . .	225
8.23	Perfis de $\Delta S$ em função de $x/L$ para uma colina de Agnesi ( $L_{mo} = 54$ m). Os parâmetros deste escoamento são os do caso 8 da tabela 8.1. . . . .	226
8.24	Evolução temporal dos arrastos, a) ondulatório ( $D_w$ ) e b) aerodinâmico. Os perfis foram obtidos com três configurações diferentes. Estas são: (1) Fecho de Lilly (1962), sem refinamento da malha junto da superfície e com a condição de livre escorregamento, 2) fecho de Lilly (1962) e 3) fecho do modelo $k - \varepsilon$ . As configurações 2) e 3) têm refinamento junto da superfície, fricção, e usam os perfis de similaridade de Monin-Obukhov. . . . .	227
8.25	Comparação dos perfis de evolução temporal do arrasto $D_w$ obtidos para o caso 7, usando três orografias com assimetrias diferentes e o modelo $k - \varepsilon$ . a) Arrasto ondulatório ( $D_w$ ) para o caso 7, b) $D_w$ para o caso 6, c) arrasto aerodinâmico ( $D_f$ ) para o caso 7, e d) $D_f$ para o caso 6. Agn1:4 significa que $L_e/L_d = 1/4$ . As características dos diferentes casos estão expostas na tabela 8.1. . . . .	228
8.26	Campos das linhas isentrópicas obtidas com o modelo $k - \varepsilon$ usando perfis de orografias calculados com a expressão (8.20). Agn1:4 significa que $L_e/L_d = 1/4$ . As figuras a) c) e e) correspondem ao caso 6 ( $l_{mo} = 4$ m) e b) d) e f) ao caso 7 ( $l_{mo} = 56$ m)(ver tabela 8.1). . . . .	229

# Lista de Tabelas

4.1	<i>Coefficientes para determinar <math>\phi</math> nas faces dum VC, com os esquemas de discretização dos termos advectivos (nós equidistantes).</i> . . . . .	44
4.2	<i>Equações modificadas para os esquemas de discretização da tabela (4.1).</i> . . . . .	45
4.3	<i>Expressões para o cálculo de <math>\phi_e</math> dos caso II (figura (4.2b) para <math>C_e &gt; 0</math>.</i> . . . . .	48
4.4	<i>Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o nó P do caso III (figura 4.3a).</i>	49
4.5	<i>Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o caso II (figura 4.2a).</i> . . . .	49
4.6	<i>Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o caso I (ver figura 4.2b).</i> . .	49
4.7	<i>Relações funcionais de <math>\phi_e</math> na forma original e em FVN (ver figura 4.4).</i> . . . . .	52
4.8	<i>Coefficientes para o modelo <math>k - \epsilon</math> para números de Reynolds baixos de Lam e Bremhorst (1981).</i>	74
5.1	<i>Configuração dos esquemas advectivos enunciados nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5, com base nas modificações propostas na secção 4.5.</i> . . . . .	82
5.2	<i>Número de iterações dos esquemas Híbrido e Quick obtidos para malhas com e sem refinamento local. A malha base de 20x20 com 3 níveis de refinamento (6016 nós), está representada na figura 5.9.</i> . . . . .	95
5.3	<i>Tempos de cálculo: total (<math>t_{total}</math>) e por iteração (<math>t_{iter}</math>), obtidos para malhas com e sem refinamento local. Os cálculos foram feitos com o esquema Quick. O presente modelo foi corrido num PC com um processador Pentium III de 1 GHz.</i> . . . . .	95
5.4	<i>Valores médio e máximo do desvio da ortogonalidade para os diferentes casos mostrados nas figuras 5.13 e 5.14.</i> . . . . .	98
7.1	<i>Experiências numéricas para o estudo da reflexão parcial, no caso em que <math>\sigma_d = N_{in}/N_{sup} &gt; 1</math>. Os parâmetros gerais dos escoamentos são: <math>U_r = 20</math> m/s, <math>N_{in} = 0.020944</math> s<sup>-1</sup>, <math>L = 10000</math> m, <math>\hat{L}_{in} \approx 10</math>, <math>\lambda_{z,in} = 6000</math> m. <math>\Re</math> corresponde ao arrasto calculado com o modelo linear, normalizado por <math>D_{lin}</math> (arrasto da camada inferior). <math>(D_w/D_{lin})_{max}</math> é o arrasto numérico normalizado por <math>D_{lin}</math>. O caso 17 não está exposto na tabela porque é idêntico ao caso 4, mas com <math>L = 7500</math> m e <math>\hat{L}_{in} = 7.5</math>. Para todos os casos, <math>N_{in}/U_r = 1.05 \times 10^{-3}</math> rad/m e <math>k_d = 6.28 \times 10^{-4}</math> rad/m.</i> . .	156
7.2	<i>Experiências numéricas para o estudo da reflexão parcial no caso em que <math>\sigma_d = N_{in}/N_{sup} &lt; 1</math>. Os parâmetros gerais dos escoamentos são: <math>U_r = 10</math> m/s, <math>N_{in} = 0.010472</math> s<sup>-1</sup>, <math>L = 10000</math> m, <math>\hat{L}_{in} \approx 10</math>, <math>\lambda_{z,in} = 6000</math> m. <math>N_{in}/U_r = 1.05 \times 10^{-3}</math> m<sup>-1</sup> e <math>k_d = 6.28 \times 10^{-4}</math> rad/m.</i> . . . . .	181
8.1	<i>Parâmetros para caracterizar os diferentes tipos de escoamento. <math>N</math> representa o valor de estratificação na subcamada externa. Os casos 1-6 e 8 têm as dimensões características da orografia de Cooper, <math>H = 115</math> m e <math>L = 400</math> m. Os casos 7 e 9 têm as seguintes dimensões características: caso 7) <math>H = 500</math> m e <math>L = 3000</math> m, e caso 9) <math>H = 50</math> m e <math>L = 400</math> m. Em todo os casos, exceptuando o 7, <math>U_r(h) = 6</math> m/s. No caso 7 <math>U_r(h) = 4</math> m/s. Em todos os casos <math>z_0 = 0.05</math> m.</i> . .	209

## Nomenclatura

### Abreviaturas

BW96	Belcher e Woob (1996)
BP88	Bacmeister e Pierrehumbert (1988)
CL	Camada Limite
CLA	Camada Limite Atmosférica
CLT	Camada Limite Turbulenta
CLTP	Camada Limite turbulenta de Parede
CN	Esquema de de integração temporal de Crank-Nicolson
CP77	Clark e Peltier (1977)
CP84	Clark e Peltier (1984)
C97	Castro (1997)
COOP94	Coopin et al. (1994)
DC	Diferenças Centradas
D86	Durran (1986)
DK83	Durran e Klemp (1983)
DK87	Durran e Klemp (1987)
ECAR	Esquema Composto de Alta Resolução (FBS <i>Flux Blending Schemes</i> )
FLEX	Modelo desenvolvido neste trabalho
FVN	Formulação das Variáveis Normalizadas
FI	Esquema de integração temporal totalmente implícito ( <i>Fully Implicit</i> )
FTLI - Fromm's	Esquema de de integração temporal implícito de 3 níveis <i>Fully Three Level Implicit</i> Esquema de Fromm (1968)
HLR	Hunt et al. (1988a)
HRB	Hunt et al. (1988b)
KL78	Klemp e Lilly (1978)
KDB	Refere-se aos artigos de Klemp e Durran (1983) e Bougeault (1983)
LR1	Leutbecher (2001)
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
L62	Lilly (1962)
LH82	Lipps e Helmer (1982)
MAP	<i>Mesoscale Alpine Experiment</i>
MVT	Modelos de Viscosidade Turbulenta
Max,max	máximo
Min,min	mínimo
MSA	Método de Separação dos Arrastos
MD91	Miller e Durran (1991)
New	esquema advectivo de 3ª ordem implementado nesta tese
nb	nós vizinhos (do termo em inglês <i>neighbor</i> )
ORT	Ondas de Reflexão Total ( <i>Lee waves</i> )
ORP	Ondas de Ressonância Parcial
PC79	Peltier e Clark (1979)
PC83	Peltier e Clark (1983)
PM	Presente Modelo (1983)
Quick	Esquema de Leonard (1979)

RD	Decomposição à Reynolds ( <i>Reynolds decomposition</i> )
SIMPLE	<i>Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations</i>
Smart	ECAR de Gaskell e Lou (1988)
S85	Smith (1985)
SDWS	<i>Severe Downslope Wind Storm</i>
TDMA	<i>Tri-Diagonal Matrix Algorithm</i>
VC	Volume de Controlo
VSJO	Ventos Severos a jusante da Orografia
WKB	Aproximação de Liouville-Green
W89	Weng (1989)
W97	Weng (1997)
YP	Yoon e Patel (1996)

### Caracteres romanos

$A$	amplitude de uma variável genérica
$A_E, A_P$ , etc.	coeficientes das equações algébricas
$b$	termo fonte implícito de uma equação discretizada
$c$	termo fonte explícito de uma equação discretizada
$c_x, c_z$	velocidade de fase nas direcções $x$ e $z$
$c_{orp}$	velocidade de fase das ORP
$c_g$	velocidade de grupo no referencial vento
$c_g^s$	velocidade de grupo no referencial superfície
$C_e, C_w$ , etc.	fluxos advectivos
$c_f$	coeficiente de fricção
$c_p$	calor específico mássico a pressão constante
$c^p$	constante de integração da equação de $p'$
$c_v$	calor específico mássico a volume constante
$C_{cur}$	factor de curvatura
$C_\mu, C_1, C_2, C_D$	constantes do modelo $k - \epsilon$
$D_e, D_w$ , etc.	coeficientes de difusão de uma equação discretizada
$D_w$	arrasto ondulatorio
$D_f$	arrasto aerodinâmico (de forma)
$E(k)$	função espectral da turbulência
$E$	energia total por unidade de volume das ondas
$F_s$	força na face sul de um VC
$F_z'(z)$	fluxo de densidade de energia na direcção $z$
$Fr_H$	número de Froude horizontal
$Fr_L$	número de Froude vertical
$f$	frequência angular de Coriolis, função de distorção
$f_\mu$	factor de amortecimento da viscosidade turbulenta

$g$	módulo do vector aceleração da gravidade
$g_{ij}$	tensor das métricas na transformação de coordenadas
$h$	espessura da camada limite, altura
$h_i$	espessura da subcamada interna da camada limite
$h_m$	espessura da subcamada intermédia da camada limite
$h_\xi, h_\eta$	factores de escalas de uma transformação de coordenadas
$H$	altura típica ou altura máxima de uma orografia
$\hat{H}$	altura adimensional da orografia
$H_d$	altura de descontinuidade do perfil de $N$
$H_c$	altura de um nível crítico
$J$	matriz Jacobiana
$k$	energia cinética turbulenta e número de onda horizontal
$k_d$	número de onda dominante da orografia
$k_s$	rugosidade equivalente dos grãos de areia
$k_m$	número de onda horizontal de ORT
$L$	escala horizontal do escoamento, semi-largura em perfis simétricos
$\hat{L}$	largura adimensional de uma orografia
$L_{mo}$	comprimento de Monin-Obukhov
$L_{Ozm}$	comprimento de Ozmidov
$l_m$	comprimento de mistura dos vortices turbulentos
$l_\epsilon$	comprimento de dissipação dos vortices turbulentos
$M$	número de Mach
$M(z)$	fluxo vertical de momento, modificação de HRB
$m$	número de onda vertical
$N$	frequência de Brunt-Väisälä
$p$	pressão
$p'_s$	perturbação da pressão dinâmica turbulenta e (ou) ondulatória
$p^*$	campo de pressão não corrigido no algoritmo SIMPLE
$Pe$	número de Peclet
$P_n(x)$	polinómio na forma de Newton de ordem $n$
$Q, q$	fluxo térmico
$Re$	número de Reynolds, parte real de uma função complexa
$Ri^f$	número de Richardson de fluxo
$Ri^g$	número de Richardson de gradiente
$Ro$	número de Rossby
$R$	constante universal dos gases, função de resposta de um filtro
$R_\phi$	resíduo da variável $\phi$
$R_{z_n}$	número de Reynolds de associado à energia $k$ , calculado com $z_n$
$R_f$	factor de amplificação ou redução do fluxo vertical total
$r$	coeficiente de reflexão
$S_\phi$	termo fonte da variável $\phi$
$S_l$	número de Stanton
$S_R$	rugosidade associada aos grãos de areia
$v$	volume específico

$t$	tempo
$T$	temperatura
$u_*$	velocidade de fricção
$U_0, u_0$	escala da componente horizontal da velocidade média
$U$	componente horizontal da velocidade média
$U_t$	velocidade tangencial a uma superfície
$u$	componente horizontal da velocidade total
$u^c$	componente horizontal da velocidade total contravariante
$-\overline{u'_i u'_j}$	tensões de Reynolds
$W$	componente vertical da velocidade média
$-\overline{w'\theta'}$	fluxo de calor turbulento vertical
$z, Z$	coordenada vertical cartesiana, impedância reflectiva
$z_0$	comprimento de rugosidade
$z_n$	distância normal à superfície

### Caracteres gregos

$\alpha$	coeficiente de relaxação, ângulo de inclinação das linhas de fase constante
$\beta$	coeficiente das funções adimensionais de Obukhov
$\Gamma_{\phi,t}$	difusividade turbulenta da variável $\phi$
$\Gamma_{\phi,ef}$	difusividade efectiva de $\phi$
$\gamma$	constante adiabática, parâmetro de controlo da relaxação numérica
$\Delta S$	acréscimo de velocidade ( <i>speed-up</i> ), área de um VC
$\Delta$	diferença
$\delta$	deflexão, deslocamento das isentrópicas, espessura da camada limite
$\delta_0$	espessura da camada limite de velocidade
$\delta_m$	espessura da camada limite de momento
$\delta_H$	espessura de entalpia
$\delta_{ij}$	tensor de Kronecker
$\epsilon_x$	coeficiente de expansão de uma malha na direcção $x$
$\epsilon$	taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, erro de truncatura
$\epsilon_{ij}$	tensor unitário
$\eta$	coordenada $z$ transformada
$\theta$	temperatura potencial, ângulo genérico
$\theta_*$	temperatura potencial de fricção
$\kappa$	constante Von Karman
$\kappa_c$	constante do fecho de Lilly (1962)
$\lambda$	comprimento de onda genérico
$\lambda_z$	comprimento de onda vertical
$\lambda_\phi$	condutividade térmica da variável $\phi$
$\mu$	viscosidade dinâmica molecular
$\mu_t$	viscosidade dinâmica turbulenta

$\mu_{ef}$	viscosidade efectiva
$\nu$	viscosidade cinemática molecular
$\xi$	altitude adimensional $z/L_{mo}$ , coordenada $x$ transformada
$\pi$	3.141592653589 . . . . .
$\rho$	densidade
$\sigma_d$	relação entre as estratificações das camadas inferior e superior
$\sigma_\phi$	número de Prandtl laminar da variável $\phi$
$\sigma_\phi^t$	número de Prandtl turbulento da variável $\phi$
$\sigma_\varepsilon, \sigma_k$	constantes do modelo $k - \varepsilon$
$\tau_{ij}$	tensor das tensões viscosas
$\tau(z)$	função de absorção da esponja de Rayleigh
$\phi$	variável escalar genérica, linhas de fase constante, latitude
$\phi_U$	gradiente adimensional de Obukhov de $U$
$\Phi$	função de dissipação viscosa
$\psi$	função de integração de Paulson (1970), função de corrente
$\omega$	frequência angular, frequência característica da turbulência
$\Omega$	velocidade angular da Terra ( $\approx 7.293 \times 10^{-5} s^{-1}$ )
$\ell(z)^2$	parâmetro de Scorer

## Índices e operadores

$\overline{(\ )}$	operador valor médio
$(\ )^n$	iteração numérica em curso
$(\ )'$	flutuação, correcção
$(\ )_r$	estado de referência
$(\ )_{lin}$	valores previstos pela teoria linear
$(\ )_s$	superfície
$(\ )_{in}$	inferior
$(\ )_{sup}$	superior
$(\ )_{xx}$	operador da segunda derivada em $x$
$ \  $	módulo de um vector, determinante de uma matriz
$(\ )_{nh}$	regime não hidrostático
$(\ )_h$	regime hidrostático
$(\ )_0$	valor inicial, altitude de referência
$(\ )$	transformada de Fourier, forma adimensional de FVN
$(\ )_w, (\ )_e, \text{ etc.}$	faces este, oeste, etc. de um VC
$(\ )^+$	valor adimensional de uma variável no contexto das funções da parede
$(\ )_w$	valor de uma variável junto da superfície
$(\ )^T$	transposição de uma matriz
$\partial/\partial$	derivada parcial
$d/d$	derivada total
$\nabla$	gradiente
$\nabla^2$	Laplaciano

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e objectivos do trabalho

A circulação atmosférica é, em larga medida, uma circulação forçada pela superfície. Parte do forçamento tem carácter local, envolvendo fluxos de quantidade de movimento, massa e energia, transportados na vertical por processos de difusão molecular e pela turbulência. Outros efeitos actuam profundamente sobre o fluido atmosférico, promovendo alterações do escoamento a grande distância horizontal e vertical da zona de forçamento, sob a forma de perturbações estacionárias e transientes, forçadas quer pela orografia quer por padrões de heterogeneidade superficial, em todas as escalas. Estas duas classes de interacção atmosfera-superfície são, em geral, tratadas com metodologias diferentes, em que se tende, em cada caso, a simplificar a fenomenologia, focando a atenção nos processos e nas escalas consideradas mais relevantes. Assim, quando o interesse é o estudo do escoamento muito perto da superfície, i.e. na camada limite atmosférica, é comum desprezar-se o efeito da estratificação. Pelo contrário quando se estuda o efeito da superfície sobre o escoamento na troposfera média, é vulgar recorrer-se a aproximações invíscidas. Uma convergência das duas metodologias é, no entanto, inevitável quando se trata de estudar escoamentos atmosféricos reais, quer seja para fins de previsão do tempo à escala local quer no âmbito das novas aplicações da modelação atmosférica, para fins ambientais ou energéticos.

A camada limite atmosférica (CLA) é aquela zona da troposfera que é directamente influenciada pela superfície da Terra numa escala temporal comparável com o ciclo diurno (Stull, 1988). Ao nível da camada limite têm origem, nomeadamente, modificações do escoamento atmosférico induzidas pela orografia. Alguns desses efeitos, como por exemplo os arrastos ondulatorio e aerodinâmico (*form drag*) produzidos por montanhas, têm um forte impacto sobre a circulação global na troposfera, estratosfera e mesosfera (Palmer et al., 1986). Efeitos orográficos têm igualmente grande impacto no clima local, sob a forma de ventos severos, assimetrias na distribuição de temperatura, humidade e precipitação, e, no caso das grandes cadeias de montanhas, pelo favorecimento de processos de ciclogénese a jusante das montanhas (Smith, 1986). Na presença de obstáculos orográficos, a dispersão e deposição de poluentes são afectadas pelas mudanças dos ventos médios, da turbulência, e pela presença de nuvens orográficas (Egan, 1984, Carruthers e Choularton, 1984). A movimentação das dunas de areia e de neve, a erosão dos solos e o transporte de poeiras e areia são afectados significativamente pela presença de montanhas.

A interacção da atmosfera com a orografia tem muitas aplicações de carácter prático, pelo que o seu estudo é de grande importância. Por exemplo, o aproveitamento do potencial eólico pode ser optimizado conhecendo a localização dos máximos da velocidade média do vento, em função do perfil da orografia e da estratificação; os riscos associados a ventos orográficos sobre estruturas e sobre a

vegetação podem ser estimados; os fogos florestais podem ser melhor controlados, etc.

O estudo do escoamento na vizinhança de orografia complexa pode ser realizado recorrendo a diferentes metodologias. A metodologia experimental, baseada na observação de escoamentos laboratoriais e, melhor ainda, de escoamentos reais em torno de obstáculos, constitui uma base fundamental para este estudo. No entanto, as experiências são em geral muito dispendiosas. Em escala real, normalmente não é possível controlar os parâmetros do escoamento, a resolução é sempre limitada e a localização dos locais de observação é quase sempre difícil. Em escala laboratorial muitas desvantagens do caso real desaparecem, mas não é possível satisfazer todos os requisitos de similaridade, e o domínio, por razões óbvias, é limitado. Estas desvantagens obrigam ao recurso à modelação teórica. Esta última pode ser empírica, analítica ou numérica. A modelação empírica é barata, eficaz e rápida, mas requer dados fiáveis para a calibração dos modelos. A modelação analítica é também barata e assenta em princípios físicos mais sólidos do que a empírica mas requer aproximações (exemplo: a linearidade) que a tornam frequentemente inaplicável a casos reais. A modelação numérica permite estudar qualquer tipo de geometria, analisar casos reais altamente não lineares, controlar os parâmetros do escoamento, e isolar diferentes fenómenos físicos. Esta tem, no entanto, as seguintes desvantagens fundamentais: depende de confirmação experimental ou de modelos teóricos, precisa de uma grande capacidade computacional para tratar casos tridimensionais, o domínio de cálculo tem que ser limitado e requer aproximações numéricas e físicas. Existe, portanto, uma certa complementaridade entre as diferentes abordagens, sendo óbvio que o progresso resulta de combinação de resultados experimentais, teóricos e numéricos.

O estudo de escoamentos atmosféricos usando modelos teóricos tem registado avanços notáveis. A teoria linear foi aplicada por Lyra (1943), Queney (1948), Scorer (1949), Smith (1980), etc., no estudo da geração e propagação de ondas gravíticas internas. Long (1952) e Yih (1965) obtiveram soluções para escoamentos estratificados sobre topografias finitas (não lineares) enquanto que Drazin (1961) estudou escoamentos potenciais tridimensionais com elevada estratificação. A teoria linear foi também aplicada por Jackson e Hunt (1975) a escoamentos neutros de camada limite sobre colinas pequenas e médias, e foi depois refinada por Hunt et al. (1988a, HLR daqui em diante). Hunt et al. (1988b, HRB) introduziram o efeito da estratificação no cálculo do acréscimo de velocidade relativo. Belcher et al. (1993), usando uma abordagem similar a HLR, determinaram teoricamente o arrasto aerodinâmico para o caso neutro, e Belcher e Wood (1996, BW96) introduziram o efeito da estratificação no cálculo desta grandeza. Eimes (1987), usando argumentos de escala e alguns resultados numéricos, estima diferentes tipos de arrasto sobre orografia.

Pouco trabalho teórico tem sido desenvolvido para regimes de escoamento onde predominam os efeitos claramente não lineares, estando o seu estudo essencialmente reservado à modelação numérica. Um bom exemplo é o de ventos severos nas encostas a jusante de orografia (VSJO), cuja importância se deve não só ao carácter extremo do fenómeno em causa como aos elevados fluxos verticais de quantidade de movimento que lhe estão associados, capazes de influenciar a circulação atmosférica em grandes regiões. Estes estados de arrasto elevado são induzidos pela propagação de ondas internas em atmosferas com perfis de velocidade e/ou de estabilidade fortemente heterogéneos, podendo essa heterogeneidade ser produzida por efeitos não lineares associados a ondas internas de grande amplitude. Diversos estudos permitiram esclarecer as características gerais destes escoamentos: Clark e Peltier (1977) e (1984) (CP77, CP84), Peltier e Clark (1979) e (1983) (PC79 e PC83), Klemp e Lilly (1978), Durran (1986), Bacmeister e Pierrehumbert (1988), Miranda e Valente (1997), Smith (1985).

Os modelos analíticos e numéricos de geração de ondas gravíticas internas têm sido usados, de um modo geral, para o estudo de escoamentos de subcamada externa, i.e., sobre montanhas com larguras ( $L$ ) consideravelmente superiores à profundidade da camada limite ( $h$ ), i.e.,  $h/L \ll 1$ . Para os valores típicos de velocidade e estratificação dos escoamentos atmosféricos (por exemplo,  $U = 10 \text{ m s}^{-1}$  e

$N = 0.01 \text{ s}^{-1}$ ), a propagação vertical de ondas internas é possível para escalas suficientemente grandes ( $L \sim L_B = U/N = 1000 \text{ m}$ ), em que  $L_B$  representa  $1/2\pi$  do comprimento da onda interna livre. No entanto, os efeitos turbulentos da tensão de corte e do fluxo de calor estão confinados à profundidade da CLA,  $h$ , pelo que a condição ( $h/L \ll 1$ ) não é adequada para o estudo de casos com condições propícias a uma possível interação entre as subcamadas externa e interna.

Por outro lado, os modelos teóricos são geralmente invíscidos, adiabáticos e laminares, só sendo aplicáveis à subcamada externa. BW96 abordaram estes problemas estendendo a análise linear de HLR e BNH ao estudo do efeito da estratificação em toda a extensão da CLA turbulenta. No mesmo artigo, estes autores compararam os resultados teóricos com o modelo numérico de Wood e Mason (1993), obtendo uma boa coincidência. BW96 concluem que no caso linear os efeitos dominantes da turbulência estão confinados à subcamada interna e que, portanto, os resultados obtidos com a análise invíscida para o estudo das ondas gravíticas são bastante relevantes. A teoria de BW96 é aplicável a um vasto leque de casos de interesse prático mas, sendo linear, está limitada a escoamentos lineares e nos quais a estratificação não desempenhe um papel importante na subcamada interna ( $h_i/L_{mo} \ll 1$ ).

Os modelos numéricos para o estudo das ondas gravíticas sobre montanhas são, de um modo geral, dimensionados para o estudo de escoamentos com as características indicadas no parágrafo anterior. Por isso, os efeitos da superfície ou são desprezados ou incorporados recorrendo a formulas volumétricas. A turbulência é frequentemente parametrizada com modelos de 1ª ordem (e.g., Lilly, 1962), que têm reconhecidas limitações.

A maioria dos modelos numéricos são aplicados em condições de pequeno declive, i.e. para os quais  $H/L \ll 1$  ( $H$  é a altura da montanha). Neste caso, é possível recorrer a uma transformação da coordenada vertical (coordenada  $\sigma$ ) que defina a superfície inferior como uma superfície coordenada, desprezando a distorção da malha de cálculo. Usando um modelo com estas características, Miller e Durran (1991) fizeram um estudo de escoamentos com  $h/L \ll 1$  e  $H/L \ll 1$ , sobre a sensibilidade dos ventos severos a jusante da orografia (VSJO) à assimetria do perfil da montanha. Seria interessante realizar o mesmo estudo destes autores em escoamentos sobre orografias similares mas com dimensões muito mais pequenas e declives mais pronunciados. Por outro lado, nos escoamentos de subcamada externa, o mecanismo de geração de VSJO, associado à existência de uma variação brusca nas condições de estabilidade, não tem sido motivo de um estudo aprofundado. O mesmo se pode dizer sobre o processo de interação entre um nível ( $H_d$ ) onde ocorre a variação brusca de estabilidade antes citada e os níveis críticos ( $H_c$ ) induzidos pelo escoamento ou impostos mediante o perfil de referência da velocidade.

A breve exposição acima apresentada permite identificar algumas áreas onde a modelação numérica pode trazer contributos relevantes. Pretende-se verificar se no caso não linear os efeitos dominantes da turbulência estão confinados, ou não, à subcamada interna, em escoamentos com ( $h/L \ll 1$ ) e ( $h/L \sim 1$ ) (BW96 analisaram escoamentos com  $h/L \ll 1$  mas não  $h/L \sim 1$ ) com estratificação intermédia (como se verá adiante,  $h_i/L_{mo} \approx 1$ ). Em diferentes escoamentos lineares e não lineares será testada a validade das teorias lineares descritas em HLR, HRB, BNH e BW96. Estes estudos serão feitos recorrendo à modelação numérica. O caso experimental de Coopin et al. (1994) será estudado com detalhe, recorrendo a diferentes modelos teóricos disponíveis e a simulações numéricas com o modelo aqui desenvolvido, pois este caso possui muitas características dos escoamentos que se pretendem investigar. Um outro tipo de escoamentos não linear que se pretende estudar, é o dos VSJO induzidos pelo rompimento de ondas gravíticas não lineares. Neste caso, estudar-se-á a localização da zona de rompimento, o comportamento dos arrastos ondulatórios e aerodinâmicos e a distribuição das perturbações do campo da velocidade. Verificar-se-á em que tipo de escoamento as conclusões de Miller e Durran (1991) permanecem válidas. De um modo geral, pode-se dizer que, na presente tese, serão estudados efeitos orográficos em escoamentos atmosféricos na subcamada externa da camada

limite e na subcamada interna. Também serão estudados diferentes escoamentos de microescala que são muito importantes para a validação dos modelos numéricos.

Sendo necessário dispor de um código numérico para resolver escoamentos nas mais variadas escalas, decidiu-se que era conveniente elaborar um novo modelo. Assim, outro objectivo importante deste trabalho consiste na elaboração e validação de um modelo numérico bidimensional. Este modelo será usado para tratar um largo espectro de problemas físicos e, em particular, para tentar esclarecer as questões levantadas nos parágrafos anteriores. O código tem as seguintes características:

- a) O emprego de coordenadas generalizadas ortogonais, geradas por um algoritmo baseado na mobilidade dos nós nas fronteiras. O uso de coordenadas generalizadas permite estudar escoamentos sobre orografias complexas arbitrarias. No modelo, as equações em coordenadas generalizadas são manipuladas de modo a isolar os termos associados à não ortogonalidade, tomando estas um aspecto muito similar ao das equações no sistema cartesiano. Graças a este método, a penalização em tempo de CPU pelo uso da transformação de coordenadas é insignificante. Por outro lado, esta metodologia permite incluir o efeito da não ortogonalidade em domínios mais complexos.
- a) O modelo possibilita a escolha de diferentes esquemas de discretização dos termos advectivos e a sua incorporação de forma consistente e compacta, mediante a normalização das variáveis.
- b) No código é implementado um método de refinamento local que permite concentrar o esforço computacional nas zonas desejadas. No modelo, este método é adaptado para poder ser usado com coordenadas generalizadas ortogonais e para poder incluir os esquemas de discretização de 2ª e 3ª ordens atrás referidos.
- c) Foi incorporado um método de extrapolação nas fronteiras para atenuar a degradação do grau de precisão dos esquemas de discretização dos termos advectivos.
- d) As equações de Navier-Stokes foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à compressibilidade e à heterogeneidade da turbulência, no contexto dos modelos baseados na viscosidade turbulenta. Este procedimento facilita consideravelmente o tratamento dos termos difusivos nestas equações.
- e) O modelo usa uma aproximação anelástica eficaz para a equação da continuidade.
- f) Os efeitos da superfície são modelados recorrendo às funções de similaridade adaptadas às coordenadas generalizadas.
- g) No código, a turbulência é parametrizada com fechos de 1ª ordem (Lilly, 1962) e de ordem 1.5. O código desenvolvido é validado por comparação com dados experimentais publicados e com resultados de modelos analíticos.

## 1.2 Revisão bibliográfica.

Na secção anterior foram citadas algumas obras de referência e introduzidos diversos tópicos que são centrais no enquadramento do presente trabalho. O estudo de escoamentos sobre orografia tem sido uma área de intensa actividade científica, experimental, teórica e, mais recentemente, numérica. No campo teórico, especialmente no que se refere a escoamentos lineares de subcamada externa, devem realçar-se os trabalhos pioneiros de Lyra (1943) e Queney (1948), usando a teoria das perturbações

lineares. Estes autores obtiveram importantes soluções para as ondas gravíticas forçadas por uma topografia bidimensional isolada, numa atmosfera aberta, invíscida, estratificada e homogénea. Os resultados de Queney (1948) abrangem os casos não hidrostático, hidrostático e com rotação, demonstrando a importância da escala horizontal da orografia na definição do tipo de escoamento (cf. Miranda, 1991). Queney (1948) demonstra também a capacidade das ondas gravíticas de transferir quantidade de movimento (e momento angular quando a rotação é importante) de uma região para outra, por exemplo, entre a superfície e uma região a grande altitude.

No caso das ondas gravíticas geradas em montanhas, a transferência vertical de momento é compensada pela força resultante exercida pela perturbação de pressão sobre a montanha (arrasto ondulatorio). Um importantíssimo resultado teórico no que se refere à propagação de ondas internas em escoamentos reais, em que existe cisalhamento e/ou heterogeneidade da estratificação, é teoria desenvolvida por Eliassen and Palm (1961). O resultado principal desta teoria sobre a interação das ondas com o escoamento médio, é o célebre teorema de Eliassen e Palm: num escoamento estacionário, não dissipativo e sem níveis críticos ( $U \neq 0$ ), o fluxo ondulatorio de momento é constante, ou seja, as ondas não modificam o escoamento médio.

Smith (1980) determinou soluções para escoamentos tridimensionais forçados por orografia e discutiu os efeitos da aproximação hidrostática. Scorer (1949) estendeu a análise linear de Queney (1948) ao caso de uma atmosfera não homogénea, e definiu as condições para a existência de ondas a jusante (*lee waves*). Sawyer (1962) obteve soluções analíticas para estas ondas. Klemp and Lilly (1975), usando um modelo linear, estudaram a propagação das ondas gravíticas numa atmosfera multi-camadas com descontinuidades no perfil de estabilidade ( $N$ ).

Usando teoria linear, Long (1953) obteve soluções analíticas para o caso em que a amplitude da montanha não é considerada pequena e portanto o escoamento é não linear. As soluções de Long (1953) foram obtidas para escoamentos bidimensionais, invíscidos, estacionários, incompressíveis, e nos quais as linhas de corrente (isentrópicas) nunca se fecham. Este autor chegou à conclusão de que os efeitos não lineares produzem um aumento de inclinação das isentrópicas, com a consequente geração de ventos nas encostas a jusante da orografia e incremento do arrasto ondulatorio. Autores como Clark e Peltier (1977, 1984), Peltier e Clark (1979, 1983), Durran (1986) e outros, têm utilizado o modelo de Long (1953) como referência teórica em escoamentos não lineares, e têm também estudado fenómenos que vão para além da validade deste modelo, tal como o rompimento das ondas gravíticas.

Muito autores têm trabalhado na compreensão da origem dos regimes de arrasto elevado. Klemp e Lilly (1978) sugeriram que o mecanismo crucial era a ressonância linear associada à reflexão parcial das ondas gravíticas internas, resultante da variação da estabilidade estática numa atmosfera multicamada (Klemp e Lilly, 1975). Clark e Peltier (1979) sugeriram um mecanismo de ressonância não linear, em que a reflexão ocorre numa cavidade formada entre um nível crítico ( $U = 0$ ) gerado pelas ondas gravíticas quando rompem e a superfície. O ponto crítico do mecanismo de Clark e Peltier (1979), estava relacionado com a falta de uma justificação teórica para o facto de o nível crítico actuar como um reflector perfeito, de modo a produzir interferência construtiva entre o nível crítico ( $z_c$ ) e a superfície. Smith (1985) desenvolveu uma teoria hidráulica baseada no modelo de Long (1953) para demonstrar a possibilidade da formação de ventos fortes a jusante de uma zona de estagnação de fluido bem misturado. Esta teoria prevê explicitamente a ocorrência de escoamentos ressonantes para níveis críticos do escoamento de referência localizados em níveis espaçados por um comprimento de onda vertical. Os trabalhos numéricos de Bacmeister e Pierrehumbert (1985) e a experiência de Rottman e Smith (1989) confirmaram o modelo de Smith (1985). No caso tridimensional, no entanto, o trabalho de Miranda e Valente (1997), mostra a existência de um mecanismo de ressonância qualitativamente diferente, caracterizado por um espaçamento vertical entre níveis críticos ressonantes de meio comprimento de onda, análogo ao das teorias clássicas da ressonância de cordas vibrantes.

Sobre os escoamentos turbulentos na vizinhança de orografia têm sido publicados diversos trabalhos, alguns dos quais constituem aperfeiçoamentos da teoria de Jackson e Hunt (1975) para escoamentos bidimensionais de camada limite sobre colinas médias e pequenas. Na secção anterior estão citados os trabalhos mais relevantes sobre escoamentos atmosféricos turbulentos sobre orografia.

Paralelamente aos trabalhos teóricos desenvolvidos sobre os escoamentos sobre orografia, têm sido feitos muitos trabalhos experimentais sobre o tema. Taylor et. al (1987) fazem uma revisão dos trabalhos experimentais mais importantes, realizados em condições de estabilidade estática quase neutra. Bradley (1980) realizou medidas sobre uma colina isolada, e verificou uma boa concordância entre os seus resultados e as expressões de Jackson e Hunt (1975). Coppin et al. (1994) levaram a cabo uma importante experiência sobre a orografia de Cooper, na Australia, estudando atmosferas neutras e estratificadas. Estes autores chegaram à conclusão que nos casos instável, neutro e pouco estável, o modelo teórico de Hunt et al. (1988) conseguia descrever bem o escoamento, mas que nos casos moderada a fortemente estáveis, o mesmo sobrestimava os acréscimos de velocidade em relação aos perfis experimentais. O projecto experimental do monte Askervein (Taylor e Teunissen, 1985) foi um projecto ambicioso que proporcionou um conjunto de medidas importantes para o estudo dos escoamentos sobre colinas tridimensionais isoladas.

O estudo experimental das ondas gravíticas sobre montanhas também tem atraído a atenção de muitos investigadores. O registo da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado (Lilly, 1978) constitui um dos melhores casos de estudo de fenómenos de reflexão parcial, rompimento e propagação de ondas gravíticas sobre montanhas reais de grande dimensão. Importantes trabalhos observacionais sobre as ondas a jusante (*lee waves*) podem ser encontrados em Cruette (1976), Starr e Browning (1972), Mitchell et al. (1990) e Smith (1976). Diversas experiências internacionais de grande dimensão foram organizadas nos últimos anos, nomeadamente as campanhas ALPEX (ALPine EXPeriment), PYREX (*PYR*renean *EX*periment) e MAP (*Mesoscale Alpine Experiment*).

### 1.3 Conteúdo da Tese.

A presente tese está dividida em 9 capítulos, incluindo o presente capítulo de introdução, e dois apêndices. No capítulo 2 é feita uma introdução teórica sobre escoamentos na vizinhança de orografia e são introduzidos uma série de conceitos fundamentais. No capítulo 3 é feita uma descrição detalhada do modelo físico, incluindo uma parte importante dedicada à modelação da turbulência. O capítulo 4 é dedicado inteiramente à componente numérica do modelo, enquanto que no Capítulo 5 a mesma é validada com o caso de estudo clássico de escoamento numa cavidade quadrada com uma parede móvel. Os capítulos 6, 7, e 8 são dedicados à validação e estudo de escoamentos sobre orografia de diferentes escalas. No capítulo 6 são analisados e simulados 3 escoamentos de microescala, para os quais existem bons dados experimentais, nomeadamente: a) Resposta da camada limite turbulenta a uma descontinuidade do fluxo de calor superficial (Antonia et al., 1977); b) Escoamento sobre uma colina isolada (Almeida et al., 1993); e c) Escoamento sobre uma duna de areia (Mierlo e de Ruiter, 1988). O capítulo 7 é dedicado ao estudo de escoamentos estavelmente estratificados de subcamada externa sobre orografia complexa, sendo os resultados comparados com os de diferentes modelos analíticos e com a experiência da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder, Colorado (Lilly, 1978). No capítulo 8 é feito um estudo numérico do escoamento de camada limite turbulenta tomando como referência os dados experimentais de Coopin (1994). No mesmo capítulo são realizados mais dois estudos: a) estudo do mecanismo de geração de VSJO associado à existência de níveis críticos induzidos pelo escoamento ou impostos mediante o perfil de referência da velocidade, e b) estudo da influência da assimetria do perfil da orografia no comportamento dos arrastos ondulatorio e aerodinâmico.

No capítulo 9 as principais conclusões do presente trabalho são apresentadas e são descritas algumas ideias para trabalho futuro. No apêndice, está exposto o modelo semi-empírico de Hwang e Liou (1991) para o cálculo dos perfis de  $k$  e  $\varepsilon$  na camada limite turbulenta (CLT), parabólica e plana.

## Capítulo 2

# Introdução teórica

### 2.1 Equações fundamentais de conservação e transporte

Estas equações podem ser encontradas em vários livros de texto (ver por exemplo Stull, 1988). Em notação tensorial, e utilizando a convenção da soma dos índices repetidos (convenção de Einstein) para um sistema de coordenadas cartesianas, a equação da continuidade tem o seguinte aspecto (ver lista de símbolos):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

em que  $u_i$  representa as componentes da velocidade e  $\rho$  é a massa volúmica.

De acordo com Stull, 1988, usando sistema de coordenadas cartesianas no referencial terra (não inercial), e desprezando a força centrífuga, a equação de conservação da quantidade de movimento pode ser escrita na forma:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j}}_{II} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\delta_{i3} \rho g}_V - \underbrace{f \varepsilon_{ij3} u_j}_{VI} \quad (2.2)$$

em que  $p$  representa a pressão,  $\tau_{ij}$  é o tensor das tensões,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\delta_{ij}$  é o tensor de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1, i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0, i \neq j$ ),  $f$  é o parâmetro ou frequência de Coriolis, definido como  $f = 2\Omega \sin \phi_l$  ( $\Omega$  é a velocidade angular da Terra,  $\phi_l$  é a latitude). Note-se que neste caso a coordenada correspondente ao índice 3 tem a mesma direcção do vector  $\vec{g}$ . Na equação anterior,

**Termo I** Representa a tendência da quantidade de movimento.

**Termo II** Descreve o processo de advecção ou convecção.

**Termo III** Representa a contribuição da força do gradiente de pressão.

**Termo IV** Representa a contribuição dos fluxos viscosos moleculares.

**Termo V** Representa o efeito da gravidade.

**Termo VI** Representa o efeito de Coriolis.

A importância relativa dos diferentes termos na equação anterior pode ser caracterizada por análise dimensional. Para escoamentos sobre orografia de mesoscala, com escalas horizontais da ordem de

$L \approx 10^2 - 10^4$  m, com velocidades típicas de  $U_0 \sim 10$  m s<sup>-1</sup>, e considerando um valor típico da frequência de Coriolis de  $f = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>, obtém-se um número de Rossby, definido como

$$Ro = U_0/fL \quad (2.3)$$

tal que  $Ro \sim 10$ .  $Ro$  caracteriza a relação entre as forças de inércia e a força de Coriolis, pelo que se  $Ro \gg 1$  esta última força é desprezável. Como os parâmetros que serão usados neste trabalho ( $U_r$  e  $L$ ) são da mesma ordem de grandeza dos valores acima referidos, o termo VI da equação (2.2) será desprezado em todos os casos.

No caso do ar, é válida a aproximação do fluido Newtoniano, sendo as tensões viscosas (moleculares) dadas por:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.4)$$

em que  $\mu$  representa a viscosidade dinâmica. A expressão (2.4) não é válida nos casos em que se pretendam estudar estruturas de ondas de choque e os processos de atenuação e absorção de ondas acústicas. No caso incompressível ( $\rho = const.$ ) a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

Por outro lado, o ar satisfaz, em boa aproximação, a equação de estado de um gás ideal:

$$p = \rho RT \quad (2.6)$$

em que  $R = c_p - c_v = 287.04$  J/(kg K) representa a constante universal dos gases dividida pela massa molar do ar e  $c_p$  e  $c_v$  os calores específicos mássicos a pressão e volume constantes, respectivamente.

Os escoamentos neutros de baixa velocidade (i.e., com números de Mach - quociente entre a velocidade do escoamento e a velocidade som -  $M \ll 1$ ) podem ser considerados incompressíveis. Nesse caso, a 1ª lei da termodinâmica, num sistema de coordenadas cartesianas, pode ser dada por:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda_T}{c_p} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right) + \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{\Phi}{c_p} + S_q \quad (2.7)$$

em que  $\lambda_T$  representa a condutividade térmica. Na expressão (2.7) assumiu-se que  $c_p(T) \approx const.$  Os termos associados à pressão podem ser desprezados para  $M \ll 1$  (Stull, 1988). O termo  $\Phi$  é denominado função de dissipação e representa a dissipação de energia mecânica devida ao trabalho de deformação das forças viscosas.  $\Phi$  é dado por:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

Nos escoamentos meteorológicos  $\Phi$  é desprezável, mas nos escoamentos de microscala, com dimensões da ordem dos poucos de centímetros, este termo pode ser importante.  $S_q$  representa as fontes de calor. O primeiro termo do segundo membro da equação (2.7) representa a convergência dos fluxos de calor. Os restantes termos têm significados análogos aos da equação (2.2).

No caso da atmosfera é conveniente recorrer reescrever as equações, recorrendo à temperatura potencial

$$\theta = T(p/p_0)^{R/c_p} \quad (2.9)$$

que é a temperatura com que uma parcela de ar ficaria, se a sua pressão fosse modificada adiabaticamente até uma pressão padrão  $p_p$ , que usualmente toma o valor de  $p_p = 100$  kPa. Neste caso, pode escrever-se a 1ª Lei da Termodinâmica em função de  $\theta$  ( $c_p \approx \text{const.}$ ), na forma compacta:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \theta)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + S_q \quad (2.10)$$

Na equação (2.10),  $S_q$  engloba os termos fonte associados às mudanças de fase e à radiação. Note-se que esta expressão é a equação da entropia específica, pois  $s = c_p \ln \theta$ . Refira-se que as equações (2.2), (2.7) e (2.10), foram escritas na forma conservativa com ajuda da equação da continuidade (2.1).

Na ausência de difusão e fontes de calor, a 1ª lei da termodinâmica (2.10) reduz-se ao caso adiabático ou reversível:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

É fácil verificar que a equação de estado de um gás ideal pode ser escrita em função da pressão e da temperatura potencial:

$$\rho = f(\theta, p) \quad (2.12)$$

Derivando (2.12) tem-se que:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.13)$$

Se a atmosfera for adiabática, é válida a equação de Poisson (equivalente a (2.9) com  $\theta = \text{const.}$ ):

$$pv^\gamma = \text{const.} \quad (2.14)$$

em que  $\gamma$  é a constante adiabática definida como  $\gamma = c_p/c_v$ . Derivando (2.14) obtém-se  $\partial\rho/\partial p = \rho/(p\gamma)$  (Nota:  $v = 1/\rho$ ). Sabendo que a velocidade do som é dada por:

$$c_s^2 = \gamma RT = \gamma p/\rho \quad (2.15)$$

então  $\partial\rho/\partial p = 1/c_s^2$ . Com estes resultados, (2.13) pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c_s^2} \frac{dp}{dt} \quad (2.16)$$

A equação de transporte de um escalar pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (2.17)$$

em que os termos têm significados análogos aos da equação da termodinâmica.

## 2.2 Conceitos e aproximações fundamentais

### 2.2.1 Decomposição de Reynolds e turbulência

As equações estabelecidas na secção anterior tratam o fluido atmosférico como um meio contínuo. Na prática, tanto os sistemas de observação como os modelos numéricos procedem a uma discretização desse meio contínuo. No caso dos sistemas de observação, a discretização resulta das características dos instrumentos de medida (e.g. tempo de resposta), enquanto que no caso dos modelos numéricos,

ela é inerente ao processo de cálculo. A discretização tem implicações não triviais sobre as equações, devido à existência de termos não lineares. O estudo dessas implicações pode ser realizado recorrendo à técnica de decomposição de Reynolds (daqui em diante RD).

Considere-se então o caso da velocidade. Pode decompor-se a velocidade ( $u$ ) como a soma de um "valor médio" ( $U$  ou  $\bar{u}$ ) e de uma perturbação ( $u'$ ):  $u_i = U_i + u'_i$ . Introduzindo esta decomposição (para a velocidade e para as outras variáveis) e fazendo a média das equações assim obtida, obtém-se um sistema de equações que rege a evolução das grandezas médias e que contém termos adicionais, que têm a forma de correlações entre as grandezas perturbadas. No caso das equações da quantidade de movimento, as correlações incluem as tensões de Reynolds,  $\tau'_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_j}$  (ou fluxo de quantidade de movimento turbulento). De modo análogo, na equação de transporte da temperatura potencial  $\theta$ , quando se usa RD aparecem os fluxos turbulentos de calor,  $q' = \overline{\rho u'_i \theta'}$ .

As regras da aplicação de RD são bastantes simples e podem ser encontradas por exemplo em Stull (1988). Um exemplo simples da aplicação de RD pode ser dado com o tensor das viscosidades moleculares (2.4). Como o valor médio de uma perturbação é zero então:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \underbrace{\mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right)}_{=0} \quad (2.18)$$

Quando se trata de uma RD, a tensão  $\tau_{ij}$  calculada com os gradientes da velocidade média é representada daqui em diante com o mesmo símbolo da calculada com os gradientes da velocidade instantânea (2.4). A designação  $\tau'_{ij}$  é usada exclusivamente para as tensões de Reynolds. Estas provêm da aplicação da RD aos termos advectivos.

Os termos adicionais introduzidos pela RD (termos turbulentos) vêm tornar impossível a solução do sistema de equações da mecânica de fluidos, visto que o sistema se tornou subdeterminado (maior número de variáveis do que equações). Adiante, discutir-se-á com algum detalhe o modo de ultrapassar este problema. A importância relativa dos termos turbulentos é um factor fundamental nesse processo. Esta pode ser quantificada, recorrendo ao conceito de energia cinética turbulenta média

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u'_i u'_i} \right) \quad (2.19)$$

A equação de transporte de energia cinética turbulenta  $k$ , pode ser deduzida a partir das equações da mecânica de fluidos (na forma contínua e na forma de Reynolds), tomando o seguinte aspecto (Stull, 1988):

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_{Temp} + \underbrace{\frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j}}_A = \underbrace{\delta_{i3} \frac{g}{\theta} \left( \overline{u'_i \theta'} \right)}_B - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_S - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\rho u'_j k} \right)}_{T_k} + \underbrace{\frac{\partial \left( \overline{\rho u'_i p'} \right)}{\partial x_i}}_{T_p} - \underbrace{\rho \epsilon}_D \quad (2.20)$$

em que  $\theta'$ ,  $u'$  e  $p'$ , são as perturbações turbulentas de temperatura potencial, da velocidade e da pressão, respectivamente, e  $\epsilon$  é a dissipação de  $k$ .

Tanto os fluxos turbulentos de quantidade de movimento como de calor estão presentes na equação de transporte de  $k$  (2.20). Note-se que quando  $i = j$  obtêm-se as tensões normais de Reynolds, verificando-se que  $k = 0.5 \tau'_{ii} / \rho$  (ver (2.19)). A equação de transporte de  $k$  (2.20) está escrita na forma RD.

Os termos indicados com as chavetas na equação (2.20), são caracterizados da seguinte forma:

**Termo Temp** Representa a tendência de  $k$ .

**Termo A** Descreve a advecção de  $k$  pelo escoamento médio ( $U_j$ ).

**Termo B** Representa a produção ou o consumo de  $k$  pelo efeito da flutuação associada ao fluxo cinemático de calor  $q_\theta = \delta_{i3} \left( \overline{u_i' \theta'} \right)$ . Se  $q_\theta < 0$  há consumo de  $k$ , e viceversa<sup>1</sup>.

**Termo S** Representa a produção mecânica de  $k$  a partir do campo médio de velocidades pelas tensões de corte turbulentas  $\tau_{ij}'$ . Na maioria dos casos, as tensões têm sinais opostos ao do gradiente das velocidades médias. Como resultado, o termo  $S$  tem quase sempre sinal positivo, i.e, gera  $k$ , e não consome.

**Termo  $T_k$**  Caracteriza o transporte de  $k$  pela turbulência (escoamento de subescala).

**Termo  $T_p$**  Descreve como  $k$  é redistribuída pelo campo das perturbações turbulentas da pressão.

**Termo D** Representa a dissipação viscosa molecular, i.e., a transformação de  $k$  em calor que acontece nos comprimentos de onda mais pequenos da turbulência.

## 2.2.2 Números de Froude

Na literatura dos escoamentos estratificados, o número e Froude é definido de diferentes maneiras, e com significados físicos diferentes. Veja-se:

$$Fr_H = \frac{U}{NH} \quad (2.21)$$

$$Fr_L = \frac{U}{NL} \quad (2.22)$$

$$Fr = \frac{U^2}{c^2} \quad (2.23)$$

em que  $H$  e  $L$ , representam a altura máxima e semi-largura da montanha, e  $c$  a velocidade de fase das ondas na aproximação de águas pouco profundas. A definição clássica é a da teoria hidráulica, (corresponde à expressão (2.23)), muito usada por diferentes autores (a partir do trabalho de Long, 1953) para explicar as tempestades de vento no declive a jusante de uma montanha. Apesar de (2.23) ser a definição mais formal, a verdade é que na literatura as definições (2.21) e (2.22) são usadas mais frequentemente do que (2.23). Para permitir uma comparação mais fácil com os resultados disponíveis na literatura, no presente trabalho foram adoptadas as definições (2.21) e (2.22) do número de Froude. Note-se que as grandezas

$$Fr_H^{-1} = \hat{H} \quad (2.24)$$

e

$$Fr_L^{-1} = \hat{L} \quad (2.25)$$

podem ser interpretadas como a altura e a semi-largura adimensionais da orografia.

<sup>1</sup>Durante o dia, como a superfície da terra é aquecida, a diferença de temperatura entre o topo da CLA e a superfície é considerável, e por isso, o gradiente vertical da temperatura potencial média é negativo. Sendo assim a correlação  $\overline{u_i' \theta'}$  tem de ser positiva. Durante a noite verifica-se o caso contrário.

### 2.2.3 Número de Richardson

Na Camada Limite Atmosférica (CLA) a existência da força de Coriolis e o efeito da parede produzem uma tensão de corte considerável, que é um agente importante de geração de turbulência. Numa camada limite instável, este processo adiciona-se à produção térmica de turbulência. Pelo contrário, numa CLA estável a estratificação tende a suprimir a turbulência. Tomando em conta a necessidade de caracterizar a importância relativa destes dois processos, Richardson (1922) introduziu a grandeza:

$$Ri^g = \frac{g/\theta (\partial\theta/\partial z)}{(\partial U/\partial z)^2 + (\partial V/\partial z)^2} \quad (2.26)$$

conhecida como número de Richardson de gradiente, em que  $(U, V)$  representam as componentes médias horizontais do vento. Richardson sugeriu que se  $Ri^g > 1$ , então o nível de energia cinética turbulenta na atmosfera tenderá a diminuir. Miles (1961) aplicou a análise de estabilidade linear a escoamentos laminares chegando à conclusão que se  $Ri^g < 1/4$ , então as perturbações do escoamento crescem no tempo, e viceversa.

Para estudar escoamentos turbulentos, faz todo o sentido usar uma grandeza análoga a  $Ri^g$  mas que em vez de conter os gradientes das grandezas médias, contenha os fluxos turbulentos. Esta grandeza denomina-se número de Richardson de fluxo, e é dado por:

$$Ri^f = -\frac{\delta_{i3} \frac{g}{\theta} (\overline{u'_i \theta'})}{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} \quad (2.27)$$

Para uma CLA horizontalmente homogênea, a expressão anterior toma a forma:

$$Ri^f = -\frac{\frac{g}{\theta} (\overline{w' \theta'})}{(\overline{u' w'} \frac{\partial U}{\partial z}) + (\overline{v' w'} \frac{\partial V}{\partial z})} \quad (2.28)$$

### 2.2.4 Frequência de Brunt Väisälä

Na equação (2.26),  $\sqrt{(g/\theta (\partial\theta/\partial z))}$  é denominada frequência de Brunt Väisälä,

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (2.29)$$

Num escoamento estratificado, em que  $N^2 > 0$ , a força restauradora é a força de flutuação (resultante da gravidade e da impulsão). Uma partícula de ar deslocada da sua posição sofre, neste caso, uma aceleração por parte do meio no sentido de a trazer de volta à sua posição de partida, dando origem a uma oscilação gravítica. Dependendo da inclinação das linhas de fase do sistema oscilatório, maior ou menor será a frequência, mas nunca superior à  $N$  (Rayleigh, 1883). Note-se que se  $N^2 < 0$ ,  $N$  é imaginário, e a equação do movimento da partícula perturbada deixa de ter soluções oscilatórias.

Se um fluido não perturbado se deslocar inicialmente com uma velocidade  $U_r$ , num terreno homogêneo e numa atmosfera estavelmente estratificada, e de repente encontra no seu passo uma colina, a mesma perturbará o seu estado inicial. Um observador no referencial inercial  $U_r$ , verá um padrão de ondas gravíticas, cuja frequência de oscilação vai depender de  $U_r$  e das características da orografia.

### 2.2.5 Aproximação de Boussinesq

Na prática, existe frequentemente conveniência em introduzir simplificações ao sistema de equações introduzido na secção anterior ((2.1), (2.2), (2.7) (ou (2.10)), (2.6) e (2.17)). A aproximação de Boussinesq assume que as perturbações de densidade podem ser desprezadas em todos os termos das equações,

excepto no termo de flutuação na equação do momento vertical. A mesma é válida quando a escala vertical do movimento é muito menor do que a escala vertical atmosférica,  $RT/g \approx 8$  km. É comum encontrar esta aproximação nas formas:

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (2.30)$$

ou

$$\rho = \rho(z) \quad (2.31)$$

### 2.2.6 Aproximação hidrostática

É frequentemente aceitável proceder a uma simplificação drástica da equação do movimento vertical, substituindo-a pela condição de equilíbrio hidrostático,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.32)$$

estritamente válida no caso de fluidos em repouso (lei de Pascal) e aproximadamente válida em escoamentos cuja escala vertical é muito inferior à escala horizontal.

### 2.2.7 Aproximação anelástica

Nos escoamentos atmosféricos, as ondas sonoras não têm praticamente nenhuma relevância em termos energéticos. No entanto, é bem conhecido que, devido a sua rápida propagação, restringem fortemente o passo de tempo de integração das equações. Teoricamente demonstra-se (ver por exemplo Haltiner e Williams, 1984) que as ondas acústicas, por estarem associadas à compressibilidade do meio, podem ser filtradas manipulando o perfil de densidade nas equações da continuidade e do momento. O resultado da filtragem resume-se a considerar que as perturbações de pressão relacionadas às ondas acústicas filtradas se transmitem de um lugar a outro com velocidade infinita, e não à velocidade do som. As formulações que usam esta abordagem são denominadas anelásticas. Para não restringir demasiado o passo de tempo de integração do presente modelo, decidiu-se adoptar um sistema anelástico.

Com este propósito, foram estudadas as três aproximações anelásticas mais relevantes e mais usadas em meteorologia. Estas são as aproximações de: a) Ogura e Phillips (1962), b) Lipps and Hemler (1982) (LH82) e c) Durran (1989). Do ponto de vista energético, as três aproximações são fechadas, mas a níveis diferentes. A mais consistente é a de Durran (1989), mas está vocacionada, essencialmente, para o estudo de escoamentos atmosféricos isotérmicos, o que é bastante limitativo. Por outro lado, a aproximação de Ogura e Phillips (1962) exige que o estado de referência seja isentrópico, o que não é realista em muitos casos. LH82 propuseram uma forma de corrigir este defeito sem sacrificar o aspecto energético. A aproximação física básica deste sistema inelástico consiste em considerar que as perturbações de densidade não tomam parte no processo de balanço de massa. O sistema de LH82 conserva a energia, se  $d\theta_r/dz$  não for muito elevado.

A equação da continuidade (2.1) pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot V = 0 \quad (2.33)$$

A equação (2.33) escrita na forma anelástica de LH82 tem o seguinte aspecto:

$$\nabla \cdot V + (W/\rho_r) d\rho_r/dz = 0 \quad (2.34)$$

o que equivale a usar a aproximação de Boussinesq (2.31). Por conveniência no presente modelo a equação 2.34 será usada na forma:

$$\frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.35)$$

em o índice  $r$  refere-se a um estado de referência que será definido no próximo capítulo. Apesar da simplicidade das equações da continuidade nas diferentes formas anelásticas, os trabalhos de Ogura e Phillips (1962), Lipps and Helmer (1982) e Durran (1989), provam a que justificação para uma dada escolha não é trivial. Por outro lado, a aplicação da aproximação de LH82 é bastante simples, bastando substituir em todas as equações  $\rho(x, z, t)$  por  $\rho_r(z)$ , exceptuando no termo  $V$  da equação 2.2. O tipo de substituição a fazer neste termo será abordada mais adiante.

Como se verá mais a frente (expressão 2.79), o gradiente  $\rho_r^{-1} \partial \rho_r / \partial z$  pode ser escrito como  $N^2/g - g/c_s^2$ . Usando este facto a expressão 2.34 pode ser dada por:

$$\nabla \cdot V = - (W/\rho_r) d\rho_r/dz = W \left( \frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right) = \alpha \quad (2.36)$$

em que  $\alpha$  é denominado parâmetro de compressibilidade, por razões que serão explicadas mais tarde. A expressão anterior representa outra forma da aproximação anelástica de LH82. Na aproximação de Ogura e Phillips (1962), o termo  $N^2/g$  da equação anterior omite-se porque, nesse caso, o estado de referência é adiabático. É interessante notar que a aproximação de Durran (1989) tem um aspecto idêntico ao de Ogura e Phillips (1962), mas como o estado de referência é diabático, o perfil de  $c_s^2$  é diferente.

## 2.3 Teoria da similaridade de Monin-Obukhov

A teoria da similaridade de Monin e Obukhov tem tido um grande sucesso para a compreensão dos processos turbulentos na CLA. Para os escoamentos neutralmente estáveis sobre terrenos homogêneos, as únicas escalas de velocidade e comprimento de que se dispõe são: a velocidade de fricção  $u_*$  e a altura  $z$ . Se a tensão de corte é considerada constante, o gradiente adimensional da velocidade  $U$  pode ser dado pela expressão:

$$\frac{z\kappa}{u_*} \frac{dU}{dz} = 1 \quad (2.37)$$

onde  $\kappa$  é a constante universal de Von Karman com um valor aproximado de 0.4. A integração da equação anterior dá:

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \ln(z/z_0) \quad (2.38)$$

em que o comprimento de rugosidade  $z_0$  depende do tipo de superfície. Esta expressão é válida para escoamentos neutros tanto de mesoscala como de microscala.

Se a CLA está sujeita a aquecimento ou arrefecimento, o fluxo superficial de calor é dado por

$$Q_H = \rho c_p \overline{\theta'w'} \quad (2.39)$$

e é denominado fluxo de calor ou de flutuação (*buoyancy flux*) para os gases ideais. Comparando a produção ou consumo de energia cinética turbulenta, pela flutuação  $B$ , com a produção associada à tensão de corte  $S$  (ver equação (2.20)), pode-se definir um determinado comprimento  $L_{mo}$ , onde estas duas grandezas são comparáveis. A geração de  $k$  (termo  $S$  da expressão 2.20) pode ser modelada usando a hipótese do comprimento de mistura de Prandtl, obtendo-se que:

$$S \sim u_*^3/\kappa z \quad (2.40)$$

De acordo com esta hipótese, a viscosidade turbulenta é dada por

$$\mu_t = \rho l_m |\partial U / \partial z| = \rho \kappa z u_* \quad (2.41)$$

No próximo capítulo este conceito será abordado com mais detalhe. Assim, o comprimento de Monin-Obukhov é dado por

$$L_{mo} = \frac{u_*^3}{\kappa(-B)} = -\frac{u_*^3/\kappa}{g/\theta_s(\overline{\theta'w'})_s} \quad (2.42)$$

Note-se que  $L_{mo}$  é positivo no caso estável, e negativo no caso instável. No caso estável  $L_{mo}$  pode ser interpretado como a altura acima da superfície onde  $B$  começa a dominar sobre  $S$ .

Se a CLA não é neutra então o perfil da velocidade não será logarítmico e tem-se

$$\frac{z\kappa}{u_*} \frac{dU}{dz} = \phi_U \left( \frac{z}{L_{mo}} \right) \quad (2.43)$$

onde  $\phi_U$  é uma função de estabilidade que tem de ser determinada empiricamente. Uma expressão similar existe para a temperatura potencial  $\theta$

$$\frac{z\kappa}{\theta_*} \frac{d\theta}{dz} = \phi_\theta \left( \frac{z}{L_{mo}} \right) \quad (2.44)$$

onde

$$\theta_* = -(\overline{\theta'w'})_s / u_* \quad (2.45)$$

Deste modo,  $L_{mo}$  pode ser dado por:

$$L_{mo} = \frac{u_*^2}{\frac{g}{\theta_s} \theta_* \kappa} \quad (2.46)$$

Tomando como exemplo o caso estavelmente estratificado, as funções  $\phi_U$  e  $\phi_\theta$  são dadas para ( $0 < z/L_{mo} < 1$ ) por

$$\phi_U = \phi_\theta \approx 1 + \beta z / L_{mo} \quad (2.47)$$

Esta função foi obtida experimentalmente por Businger et al. (1971). Neste caso, a constante  $\beta$  da expressão (2.47) toma um valor de  $\beta \approx 5$ . Integrando as equações (2.43) e (2.44), depois de substituir nelas a expressão (2.47) obtém-se:

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \left( \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) + \frac{\beta}{L_{mo}} z \right) \quad (2.48)$$

$$\theta = \theta_s + \frac{\theta_*}{\kappa} \left( \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) + \frac{\beta}{L_{mo}} z \right) \quad (2.49)$$

Alguns testes realizados neste trabalho permitiram verificar que a expressão de  $\theta$  se ajusta bastante bem aos perfis experimentais muito para além do limite teórico ( $z \sim L_{mo}$ ). Portanto, é uma boa aproximação determinar a derivada  $d\theta/dz$  quando  $z/L_{mo} \rightarrow \infty$  para obter a seguinte expressão (ver equação 2.29):

$$N_\infty = \frac{u_*}{\kappa L_{mo}} \sqrt{\beta} \quad (2.50)$$

A equação 2.50 é extremamente útil para relacionar  $L_{mo}$  com  $N_\infty$ , quando se estudam escoamentos onde a propagação das ondas gravíticas é importante. Nos escoamentos de camada externa, é costume representar  $N_\infty$ , simplesmente, como  $N$ .

Substituindo (2.43) e (2.44) nas expressões de  $Ri^g$  e  $Ri^f$  (ver (2.26) e (2.27)), e usando (2.42) para  $L_{m0}$ , chega-se à conclusão que  $Ri^g$  e  $Ri^f$  podem ser escritos em dependência das funções de estabilidade na forma:

$$Ri^g = \frac{z}{L_{m0}} \frac{\phi_\theta}{\phi_U} \quad (2.51)$$

$$Ri^f = \frac{z}{L_{m0}} \frac{1}{\phi_U} \quad (2.52)$$

Portanto os dois números de Richardson podem ser facilmente relacionados dividindo as expressões anteriores para obter:

$$Ri^g = \frac{\phi_\theta}{\phi_U} Ri^f \quad (2.53)$$

Não é difícil verificar que, no caso estratificado, a expressão da viscosidade turbulenta do modelo de comprimento de mistura, (2.41), é dada por:

$$\nu_t = \kappa u_* z / \phi_U \quad (2.54)$$

De modo análogo, a difusividade turbulenta da temperatura potencial é dada por<sup>2</sup>:

$$\Gamma_{\theta,t}/\rho = \nu_t/\sigma_\theta^t = \kappa u_* z / \phi_\theta \quad (2.55)$$

em que  $\sigma_\theta^t$  representa o número de Prandtl turbulento da temperatura potencial ( $\theta$ ). Tem-se então que

$$\phi_\theta/\phi_U = \sigma_\theta^t \quad (2.56)$$

A expressão anterior permite determinar  $\sigma_\theta^t$ , usando as funções experimentais  $\phi_U$  e  $\phi_\theta$ . Isto é muito importante para a modelação da equação de transporte de  $\theta$  pois, como se vê em (2.55), o parâmetro  $\sigma_\theta^t$  é importante para a definição de  $\Gamma_{\theta,t}$ .

Nieuwstadt (1984) estende a teoria da similaridade de Monin-Obukhov a toda a camada limite. Este autor mostra que a combinação adimensional de variáveis medidas à mesma altitude, pode ser expressa em função de um só parâmetro  $z/\Lambda$ , em que  $\Lambda$  foi chamado de comprimento local de Obukhov,

$$\Lambda = \frac{\tau^{2/3}}{\kappa(g/\theta)(\theta'w')} \quad (2.57)$$

e é geralmente função da altitude. No limite  $z/\Lambda \rightarrow \infty$  as quantidades adimensionais tendem a ser constantes. Esta teoria prevê que quando  $z/\Lambda \rightarrow \infty$ , o número  $Ri^g$  escrito em função destas grandezas locais, tende para o valor constante de 0.218. Isto acontece porque, a uma distância suficiente da superfície, o tamanho dos turbilhões é limitado, não por esta última, mas sim pela estratificação. Este fenómeno é conhecido como estratificação *z-less*.

Usando o modelo de comprimento de mistura pode-se provar que:

$$\frac{l_m}{\kappa z} = 1 - \frac{Ri^g}{Ri_c^g} \quad (2.58)$$

em que  $Ri_c^g \approx 0.2$ , representa o número crítico de Richardson de gradiente. No caso neutro, a expressão anterior reduz-se a  $l_m = \kappa z$ , como requer o modelo do comprimento de mistura, e no caso estratificado quando  $Ri^g$  atinge o seu valor crítico,  $l_m = 0$ . As observações de Derbyshire (1995a) e Derbyshire (1995b) confirmaram bem este facto. Businger et al. (1971) desenham um quadro bastante claro sobre

<sup>2</sup>Para o caso molecular  $\mu/\sigma = \lambda/c_p$ .

o comportamento da turbulência na CLA. Mediante o ajuste de funções a dados experimentais, estes autores determinaram as dependências  $Ri^g(z/L_{mo})$ , que são:

$$Ri^g = \frac{\xi(0.74 + 4.7\xi)}{1 + 4.7\xi} \quad \text{se } \xi > 0 \quad (\text{caso estável}) \quad (2.59)$$

$$Ri^g \approx \xi \quad \text{se } \xi < 0 \quad (\text{caso instável}) \quad (2.60)$$

em que  $\xi = z/L_{mo}$ . É importante notar que  $\xi$  só pode ser calculado em escoamentos turbulentos e portanto só nesses casos tem significado físico. De acordo com o modelo de Nieuwstadt (1984), e com a expressão (2.58) obtida com o modelo de comprimento de mistura, se  $\xi \rightarrow \infty$ , então  $Ri^g \rightarrow 0.2$ . Por outro lado, no caso instável, um aumento da instabilidade estática ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) implica um aumento mais ou menos proporcional da geração de turbulência pelas tensões de corte ( $S$ ), e pela estratificação ( $B$ ) (ver expressão (2.20)). Portanto, ao contrário da estratificação estável, a instável ( $q\theta > 0$ ) favorece a produção de turbulência.

## 2.4 Estrutura geral dos escoamentos atmosféricos sobre obstáculos topográficos

Não é possível definir com precisão os limites da Camada Limite Atmosférica. Na prática, ela é definida como a camada que é directamente influenciada pela superfície da terra (fricção, troca de calor, etc.) numa escala de tempo menor que 1 dia, e na qual os fluxos de transporte de momento, calor e massa, estão associados a um movimento turbulento com escalas espaciais, iguais ou inferiores à profundidade da CLA (Garratt, 1992).

Os diferentes processos que têm lugar nos escoamentos sobre montanhas dependem, entre outras coisas, das dimensões características da orografia que são: a altura e a largura características da orografia,  $H$  e  $L$  respectivamente. As grandezas  $H$  e  $L$  permitem definir as seguintes classes de escoamentos: a) sobre superfícies suaves ( $L \approx 1$  mm), onde dominam as forças viscosas, porque os números de Reynolds são muito baixos, b) sobre vegetação, edifícios e colinas onde domina o efeito das tensões turbulentas ( $L \approx 10^{-1} - 10^2$  m), c) sobre montanhas pequenas e médias ( $L \approx 10^4 - 10^5$ ) m, onde as ondas gravíticas são importantes, e d) sobre grandes montanhas ( $L \approx 10^6$ ) m onde domina a força de Coriolis. Para montanhas muito grandes o número de onda característico da topografia ( $k_d \approx 2\pi/L$ ) é tão pequeno, que as linhas de fase constante das ondas gravíticas fazem um ângulo quase de  $90^\circ$  com a vertical. Nesse caso as ondas inerciais são dominantes. Exceptuando o regime d), os outros tipos de escoamentos serão estudados nesta tese. Sendo os escoamentos atmosféricos tão complexos, é claro que esta divisão por classes não é rígida, tendo como única função definir um enquadramento fenomenológico para cada caso.

## 2.5 Teoria linear dos escoamentos atmosféricos

### 2.5.1 Equações linearizadas

A teoria linear continua a ser uma ferramenta muito importante para a compreensão da física da atmosfera. Neste trabalho muitos resultados numéricos serão validados com soluções analítica de modelos lineares. Sendo assim, é conveniente fazer uma pequena introdução sobre a linearização das equações fundamentais.

Para linearizar as equações é necessário definir um estado de referência. Este pode ser interpretado como o que descreveria o escoamento num terreno plano. Neste contexto, as perturbações representam

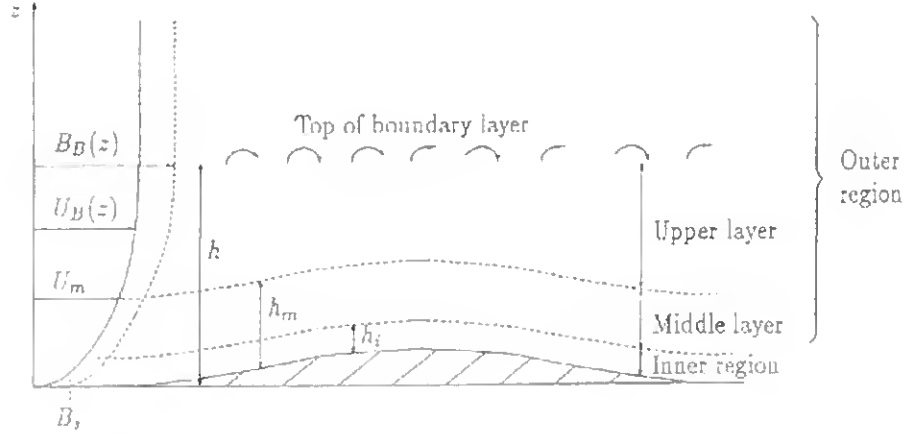


Figura 2.1: Estrutura da camada limite turbulenta para a análise linear. Retirado de BW96.

o efeito da orografia. Desta forma as variáveis instantâneas podem ser decompostas na forma:

$$u(x, z) = U_r(z) + u'(x, z) \quad (2.61)$$

$$w(x, z) = W_r(z) + w'(x, z, t) \quad (2.62)$$

$$p(x, z) = p_r(z) + p'(x, z, t) \quad (2.63)$$

$$\rho(x, z) = \rho_r(z) + \rho'(x, z, t) \quad (2.64)$$

$$T(x, z) = T_r(z) + T'(x, z, t) \quad (2.65)$$

$$\theta(x, z) = \theta_r(z) + \theta'(x, z, t) \quad (2.66)$$

em que se assume que o estado de referência não tem componente vertical de velocidade,  $W_r(z) = 0$ . Os perfis de referência  $\rho_r$  e  $p_r$  devem estar em equilíbrio hidrostático. Assim, de acordo com (2.32)

$$dp_r/dz = -\rho_r g \quad (2.67)$$

Neste contexto, convém referir que a aproximação hidrostática (2.32) só prova que a aceleração vertical é pequena comparada com  $g$ . Holton (1992), com argumentos de escala simples, prova que a perturbação de densidade também está em equilíbrio com o gradiente vertical da perturbação de pressão, i.e:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g \quad (2.68)$$

Usando a aproximação linear ( $\phi'/\phi_r \ll 1$ ) e ( $\phi'\theta' \ll 1$ ), a equação de estado de um gás ideal pode ser decomposta numa equação para o estado de referência:

$$p_r = \rho_r R T_r \quad (2.69)$$

e uma para as perturbações (ver Stull, 1988, página 82)

$$\rho' = \rho_r \left( \frac{p'}{p_r} - \frac{T'}{T_r} \right) \quad (2.70)$$

Usando a expressão (2.9) e a fórmula da velocidade do som (2.15), obtém-se a equação de (2.9) linearizada:

$$\rho' = -\rho_r \frac{\theta'}{\theta_r} + \frac{p'}{c_s^2} \quad (2.71)$$

Usando a aproximação de Boussinesq (2.31), as equações (2.1), (2.2), (2.16) e (2.10), depois de linearizadas, considerando o escoamento invíscido, adiabático, sem rotação, e estacionário, são dadas por (ver Smith, 1979, Holton, 1992, Haltiner e Williams, 1984):

de (2.1):

$$U_r \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\rho_r}{dz} = \rho_r \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \quad (2.72)$$

de (2.2) e (2.68):

$$\rho_r \left( U_r \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.73)$$

e

$$\rho U_r \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \quad (2.74)$$

de (2.16):

$$\frac{U_r}{\rho_r} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = w' \left( \frac{-1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dz} + \frac{g}{c_s^2} \right) - \frac{U_r}{\rho_r c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.75)$$

de (2.10) e (2.29):

$$U_r \frac{\partial \theta'}{\partial x} = -\frac{w' N^2 \theta_r}{g} \quad (2.76)$$

As equações (2.75) e (2.76) não devem ser usadas simultaneamente, pois descrevem de maneira diferente a formação das perturbações de densidade, as quais através da equação (2.73) produzem a força de flutuação. A expressão (2.75) descreve a geração de  $\theta'$  directamente. Por outro lado, a expressão (2.76) descreve a geração de  $\theta'$  a qual, através de (2.71), produz  $\rho'$ .

A combinação da equação (2.9) escrita para o estado de referência, com a equação de estado de um gás ideal (2.6), permite escrever  $N^2$  (2.29) na forma:

$$N^2 = \frac{g}{T_r} \left( \frac{\partial T_r}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) \quad (2.77)$$

Por outro lado, derivando a expressão (2.6) tem-se que:

$$\frac{1}{T_r} \frac{\partial T_r}{\partial z} = \frac{1}{p_r} \frac{\partial p_r}{\partial z} - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \rho_r}{\partial z} \quad (2.78)$$

Substituindo (2.67), (2.15) e  $R = c_p - c_v$  em (2.78) obtém-se:

$$N^2 = \left( \frac{g}{c_s} \right)^2 - \frac{g}{\rho_r} \frac{\partial \rho_r}{\partial z} \quad (2.79)$$

Substituindo (2.79) na equação (2.75) obtém-se:

$$\frac{U_r}{\rho_r} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = w' \underbrace{\left( \frac{N^2}{g} \right)}_I - \underbrace{\frac{U_r}{\rho_r c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial x}}_{II} \quad (2.80)$$



De acordo com esta expressão a geração de  $\rho'$  está associada aos processos adiabáticos da parcela de ar acima descritos (termo I), e ao termo II que caracteriza o desvio da pressão do estado de equilíbrio hidrostático. Tipicamente  $U_r \sim 10$  m/s e  $c_s \approx 300$  m/s, portanto o termo II é desprezável  $U_r/c_s^2 \ll 1$  (Smith, 1979). Assim, na generalidade dos escoamento atmosféricos, a perturbação de pressão  $p'$  participa pouco na formação de  $\rho'$ , e portanto as expressões (2.70) e (2.71) podem tomar a forma:

$$\rho' \cong -\rho_r \frac{T'}{T_r} \quad (2.81)$$

$$\rho' \cong -\rho_r \frac{\theta'}{\theta_r} \quad (2.82)$$

Se depois de desprezar o termo associado à  $p'$  na equação (2.75), esta for usada substituir o termo  $U_r \partial \rho' / \partial x$  na equação (2.72), obtém-se:

$$\left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = \frac{g}{c_s^2} w' \quad (2.83)$$

Note-se que equação (2.83) representa uma versão linearizada da aproximação anelástica de Durran (1989) aplicada à equação da continuidade. Este resultado demonstra que a divergência do campo de velocidades está associado à subida (descida) adiabática da parcela de ar (Smith, 1979).

O sistema de equações composto por (2.72), (2.73), (2.74) e (2.75) (ou (2.76)), por ser invíscido, é muito usado em modelos teóricos para o estudo de escoamentos lineares, fundamentalmente de subcamada externa. Estas equações, convenientemente combinadas, podem ser reduzidas a uma simples equação para a velocidade vertical chamada equação de Scorer:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \ell^2(z) \right] \hat{w}' = 0 \quad (2.84)$$

onde

$$\hat{w} = [\rho_r(z)/\rho_r(0)]^{1/2} w' \quad (2.85)$$

e o parâmetro  $\ell^2(z)$ , que leva o mesmo nome, é dado por:

$$\ell^2(z) = \frac{N^2}{U_r^2} + \frac{S_r}{U_r} \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{1}{4} S_r^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial S_r}{\partial z} - \frac{1}{U_r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \quad (2.86)$$

com

$$S_r = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \rho_r}{\partial z} \quad (2.87)$$

Se se usar a aproximação de Boussinesq 2.30 então,  $S_r = 0$ , e o parâmetro de Scorer reduz-se à conhecida expressão:

$$\ell^2(z) = \frac{N^2(z)}{U^2(z)} - \frac{1}{U(z)} \frac{d^2 U(z)}{dz^2} \quad (2.88)$$

## 2.6 Escoamentos turbulentos sobre colinas

Nesta secção serão apresentados de forma sucinta alguns resultados da aplicação da teoria linear a escoamentos atmosféricos de camada limite onde dominam os efeitos das tensões turbulentas,  $L \approx (10^{-1} - 10^2)$  m (regime b) descrito no início da secção (2.4). Como já foi referido, Jackson and Hunt (1975) foram os primeiros em aplicar a teoria linear a escoamentos neutros turbulentos de camada

limite sobre colinas e montanhas pequenas. Esta teoria foi posteriormente refinada por HLR. O efeito da estratificação no cálculo do acréscimo de velocidade relativo foi incluído por 1ª vez por HRB. BNH, usando uma abordagem similar a HLR, determinaram teoricamente o arrasto aerodinâmico para o caso neutro, e BW96 introduziram o efeito da estratificação no cálculo desta grandeza. A seguir, será feito um breve resumo dos resultados teóricos mais importantes destes autores. Estes modelos teóricos serão usados posteriormente para validar resultados experimentais e numéricos.

Os escoamentos sobre colinas são muito sensíveis à turbulência associada às tensões de corte do escoamento médio. Os conceitos desenvolvidos por HLR restringem-se essencialmente a este tipo de escoamentos, e traçam um quadro bastante preciso sobre os fenómenos que neles acontecem. Estes autores dividem o escoamento em 3 regiões diferentes, do ponto de vista dinâmico: a) a região interna mostrada na figura 2.1, de profundidade  $h_i$ , na qual, a aceleração (termos advectivos), o gradiente de pressão e a divergência do fluxo turbulento de momento, têm grandezas comparáveis, b) a subcamada intermédia, com a profundidade  $h_m > h_i$ , onde o escoamento é considerado invíscido, mas rotacional, e c) a subcamada externa, onde o escoamento é invíscido e irrotacional, sendo afectado só pela pressão e a perturbação da densidade. Por sua vez, a subcamada interna é dividida em duas regiões: uma região onde a tensão de corte é dominante (camada de corte), é outra denominada subcamada superficial, cuja função é fazer a conexão entre a superfície e a camada de corte. Na subcamada interna os efeitos da estratificação são importantes só quando esta é muito elevada. Na teoria de HLR assume-se que o escoamento flue por cima da montanha de modo que  $Fr_H > 1$ , e que o declive das montanhas não excede os 30%, i.e,  $H/L < 0.3$ . Estas são condições imprescindíveis para que a teoria linear possa ser considerada uma boa aproximação de efeitos tais como a rugosidade e a orografia. O modelo linearizado de HLR conecta estes três domínios usando um método de expansão assintótica. É importante referir que, apesar do modelo se restringir a pequenas e médias orografias, o seu carácter generalista o tornam uma ferramenta muito valiosa para o estudo de escoamentos atmosféricos.

A profundidade da subcamada interna,  $h_i$ , pode ser definida como a altura na qual as tensões perturbadas pela montanha são da mesma ordem de grandeza que os termos de advecção não lineares, na equação da quantidade de movimento horizontal. Usando uma análise de escala, HLR obtiveram a seguinte equação para estimar a profundidade da região interna:

$$h_i \left( \ln \left( \frac{h_i}{z_0} \right) + \frac{\beta h_i}{L_{mo}} \right) = 2\kappa^2 L \quad (2.89)$$

Segundo HLR, esta expressão é válida quando  $H/L < 0.3$ .

Na região externa invíscida, a equação que governa o comportamento do escoamento é a de Scorer (2.84), com  $\ell(z)^2$  dado por (2.86). De acordo com HLR e HRB, a subcamada intermédia é definida como a região inferior da subcamada externa onde o termo de curvatura  $(U^{-1}d^2U/dz^2)w'$  está em equilíbrio com o termo da segunda derivada da velocidade na equação de Scorer (1949) (2.84),  $\partial^2 w' / \partial z^2$ . Isto é equivalente às seguintes desigualdades:

$$|U^{-1}d^2U/dz^2| \gg |\partial^2/\partial x^2| \sim L^{-2} \quad (2.90)$$

e

$$|U^{-1}d^2U/dz^2| \gg \frac{N^2}{U_0^2} \quad (2.91)$$

Como  $|U^{-1}d^2U/dz^2|$  diminui com o aumento de  $z$ ,  $h_m$  pode ser estimado, substituindo o sinal ( $\gg$ ) por ( $=$ ). Assumindo que as condições acima enunciadas se verificam,  $h_m$  pode ser determinado calculando o zero da seguinte expressão:

$$|U^{-1}d^2U/dz^2| = L^{-2} \quad (2.92)$$

A partir do estudo comparativo de diferentes trabalhos experimentais, HRB argumentam que num intervalo bastante grande de estabilidade ( $30 \leq L_{mo} \leq 300$ ) se verifica que:

$$|U^{-1}d^2U/dz^2| \gg 5\frac{N^2}{U_0^2} \quad (2.93)$$

e que, portanto, o efeito de  $N$  poderia ser desprezado. Com esta consideração, HLR propõem calcular  $h_m$  mediante a expressão (2.92), que depois foi usada pela maioria dos autores. No entanto, Weng (1997, W97) argumenta que em muitas topografias e para diferentes perfis de  $U_r$  a condição (2.93) não é satisfeita. Para considerar o efeito da estabilidade, este autor propõe estimar  $h_m$  de uma forma mais abrangente, através da expressão

$$|U^{-1}(h_m)d^2U(h_m)/dz^2| = \frac{N^2(h_m)}{U^2(h_m)} + L^{-2} \quad (2.94)$$

W97 faz um estudo comparativo das três formas mais conhecidas de estimar  $h_m$  com os parâmetros da orografia de Coopin et al. (1994). O autor comparou os valores de  $h_m$  obtidos com as expressões (2.92), (2.94) e por último com a fórmula proposta por BW96,

$$1 - \frac{N^2(h_m)}{k^2U^2(h_m)} = -\frac{1}{k^2U(h_m)} \frac{d^2U(h_m)}{dz^2} \quad (2.95)$$

que determina  $h_m$  em dependência do número de onda  $k$ .

W97 demonstra que, as expressões (2.94) e (2.95) não são as mais adequadas para determinar  $h_m$ . Os valores de  $h_m$  determinados por BW96 com (2.95), com o aumento da estabilidade ( $L_{mo} \rightarrow 0$ ), primeiro decrescem ligeiramente e depois aumentam, também ligeiramente. No modelo de HLR-HRB (2.92),  $h_m$  diminui monotonamente com o aumento da estratificação. Em ambos os casos, a variação de  $h_m$  com a estabilidade não é muito significativa. Quando se usa a expressão proposta por Weng (1997) (2.94), como ela toma mais em conta o efeito da estabilidade quando esta é elevada,  $h_m$  é menor que os valores calculados com as outras expressões. Quando a estabilidade diminui, como seria de esperar, os resultados de HLR, HRB e Weng (1997), são muito similares. Por ser mais abrangente, no presente trabalho será usada a expressão de Weng (1997).

Uma vez introduzidos alguns dos conceitos fundamentais, é conveniente discutir com mais detalhe o significado das relações entre as grandezas adimensionais, mais usadas na literatura para caracterizar os escoamentos. O número de Reynolds,

$$Re = \frac{U_0H_0}{\nu} \quad (2.96)$$

caracteriza a relação entre as forças de inercia e as forças viscosas moleculares. A escala da velocidade horizontal  $U_0$  pode ser tomada, por exemplo, como o valor na altura da camada intermédia, como propõem BW96,  $U(h_m)$ . A escala vertical de comprimento,  $H_0$ , pode ser, por exemplo, a altura da montanha,  $H$ . Nos escoamento atmosféricos geralmente  $Re$  toma valores muito elevados.

A relação  $H/L$  caracteriza o declive característico da orografia, e determina em que medida a orografia pode ou não ser considerada finita no contexto da teoria linear. Se  $H/L \ll 1$  então  $u' \ll U$  e  $w' \ll U$ , e o escoamento pode ser considerado linear no caso neutro. No caso estratificado, para caracterizar a linearidade do escoamento é necessário tomar em conta o valor da altura adimensional  $\hat{H}$ .

A relação  $h/L$  caracteriza a importância da subcamada externa na CL. A escala horizontal da orografia pode ser tomada como a escala de profundidade ( $h_e$ ) da subcamada externa, i.e., ( $h_e \sim L$ ).

Se a escala horizontal da orografia é muito grande, ou a atmosfera é acentuadamente estável, então:  $h/h_e \sim h/L \ll 1$ , e o escoamento pode ser considerado de camada externa. Se a atmosfera é muito estável, então  $L$  não precisa de ser muito elevado para se cumprir a condição necessária para que o efeito da gravidade se faça sentir: ( $L \sim L_B = U/N$ ). Se  $h/L \sim 1$  então, muitos dos efeitos induzidos pela orografia tem lugar a partir de  $z > h$ .

A relação  $|h_i/L_{mo}|$  permite avaliar o papel que a estratificação tem na subcamada interna. Se  $|h_i/L_{mo}| \ll 1$ , o escoamento é muito pouco estratificado e a produção (ou consumo) de energia cinética turbulenta  $k$  (termo B de (2.20)), só é comparável à produção por tensão de corte (termo S de (2.20)), a uma altitude bastante maior do que  $h_i$ . Se  $|h_i/L_{mo}| \sim 1$ , a estratificação é tão elevada que  $B$  e  $S$  são comparáveis na profundidade  $z \sim h_i$ . Refira-se que, exceptuando os casos com estratificação extrema,  $h_i$  varia pouco com  $L_{mo}$ . Isto será verificado posteriormente.

No seu estudo sobre os arrastos aerodinâmicos e ondulatórios em escoamentos estavelmente estratificados sobre colinas, BW96 mostraram que, nos escoamentos pouco e moderadamente estratificados, as equações de movimento da região interna da camada limite poderiam ser consideradas formalmente as mesmas que nos escoamentos neutros estudados por HLR. Portanto para os escoamentos estáveis, as soluções em ambos os casos são bastante coincidentes, salvaguardando o facto de que as escalas de comprimento e o perfil de velocidade  $U$  serem diferentes. Usando o método das expansões assintóticas em  $\delta = [\ln h_i/z_0]^{-1}$ , e resolvendo as equações no espaço dos números de onda (ver HLR para mais detalhes), o termo de ordem 1 da expansão para a velocidade horizontal, i.e, a transformada da perturbação da componente horizontal da velocidade  $\tilde{u}'$ , é dada por

$$\tilde{u}'(k, z) = -\frac{U^2(h_m)}{U(h_i)} \tilde{p}'_s \left( 1 + \frac{1 - \ln(z/h_i) - 4K_0(2\sqrt{ikzL/h_i})}{\ln(h_i/z_0)} \right) \quad (2.97)$$

em que o  $\tilde{(\ )}$  representa a transformada de Fourier e  $K_0$  é a função modificada de Bessel de ordem 0.  $\tilde{p}'_s$  representa a transformada da perturbação da pressão à superfície.

Num escoamento neutro, o termo de ordem 1 de  $\tilde{p}'_s$  é dado por:

$$\tilde{p}'_s = -|k|\tilde{h} \quad (2.98)$$

em que  $\tilde{h}$  representa a transformada da orografia. Para um escoamento estavelmente estratificado, a contribuição de  $\tilde{p}'_s$ , de acordo com HRB, é dada por

$$\tilde{p}'_s = \tilde{h}E(k) = \tilde{h}M e^{-Mz} \quad (2.99)$$

em que

$$M = \begin{cases} \sqrt{k^2 - S_m^2} & |k| \geq S_m \\ -i [\text{sgn}(k)] \sqrt{S_m^2 - k^2} & |k| < S_m \end{cases} \quad (2.100)$$

onde  $S_m = N(h_m)/U(h_m)$ . Esta modificação de HRB é válida para  $Fr_L^{-1} \in [0, 10]$  (limite hidrostático), e  $Fr_H^{-1} \in [0, 1]$  (ver comentários anteriores sobre estas condições).

Weng (1989) detectou que a solução (2.97) sobrestimava  $u'$  especialmente junto da superfície, devido ao facto de a teoria de HLR requerer uma subcamada de superfície muito fina que sirva de fronteira à solução (2.97), para poder descrever o comportamento do escoamento nessa zona. A modificação proposta por Weng (1997) é a seguinte:

$$\tilde{u}'(x, z) = -\frac{U^2(h_m)}{U(h_i)} \tilde{p}'_s \left[ 1 + \frac{1 - \ln z/h_i}{\ln h_i/z_0} - \left( 2 + \frac{1}{\ln h_i/z_0} \right) \frac{K_0(2\sqrt{(ikzL/h_i)})}{K_0 2\sqrt{(ikz_0L/h_i)}} \right] \quad (2.101)$$

A diferença fundamental entre (2.97) e (2.101) consiste em que esta última garante que  $\tilde{u}' \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ . Note-se que uma característica da função  $K_0(z)$ , é que  $K_0(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , e, portanto, na expressão anterior,  $\tilde{u}'$  vai tender para a solução da região intermédia.

Um parâmetro importante dos escoamentos sobre orografia é o denominado acréscimo de velocidade (*speed up*), que é definido como o quociente da perturbação de velocidade a uma dada altura do terreno, sobre a velocidade à montante, à mesma altura, i.e,

$$\Delta S(x, z) = \frac{U(x, z) - U_r(z)}{U_r(z)} = \frac{u'(x, z)}{U_r(z)} \quad (2.102)$$

De acordo com a solução (2.101), na região interna  $\Delta S$  pode ser escrito como

$$\Delta S(x, z) = \frac{U^2(h_m)}{U(h_i)U(z)} \zeta(x, z_0) = S_U \zeta(x, z_0) \quad (2.103)$$

em que a função  $\zeta(x, z_0)$  depende do perfil da orografia, da rugosidade e da estratificação. De modo similar, para a região intermédia pode ser definido o acréscimo do seguinte modo:

$$\Delta S(x, z) = \frac{U^2(h_m)}{U(z)} \xi(x, z_0) = S_U \xi(x, z_0) \quad (2.104)$$

em que  $\xi(x, z_0)$  depende essencialmente do perfil da orografia e da estratificação. Assumindo que as funções  $\zeta(x, z_0)$  e  $\xi(x, z_0)$  são de ordem similar, a comparação destas duas últimas expressões revela que  $\Delta S$  na região interna é consideravelmente maior do que na região intermédia, conseqüentemente, maior também do que na região externa. O campo da perturbação de pressão que produz as perturbações de velocidade ajusta-se globalmente a toda a colina, sendo da mesma ordem que  $\rho U^2(h_m)$  (Coopin et al., 1994). Nas regiões intermédia e externa este campo de  $p'_s$  acelera o escoamento médio com uma velocidade da ordem de  $O(U(h_m))$ , produzindo o  $\Delta S$ , dado pela expressão anterior, e sendo da mesma ordem dos resultados previstos para os escoamentos potenciais. Na região interna, o mesmo campo de  $p'_s$ , acelera o escoamento até  $O(U(h_i))$ . Como  $U(h_i) > U(h_m)$ , então é de esperar que o acréscimo de velocidade na região interna seja maior do que nas outras regiões.

Na região externa ( $z \geq h_i$ ), a tensão de corte da perturbação da velocidade é desprezável e as equações de movimento reduzem-se à conhecida equação de Scorer (1949) (2.84). Como já foi referido, esta região divide-se em duas subcamadas, a subcamada intermédia,  $h_m \leq z$  e a subcamada superior ou externa  $h_m < z$ . As soluções obtidas para estas duas subcamadas têm que ser cuidadosamente conectadas (para mais detalhes ver HRB e BW96).

Quando o escoamento é considerado exclusivamente de camada externa, porque os efeitos na região interna não afectam significativamente o escoamento (por exemplo, quando  $h_i/|L_{mo}| > 1$  a estratificação destrói a turbulência na subcamada interna), as soluções lineares são as obtidas, por exemplo, por Lyra (1943), Queney (1948), Smith (1979), Smith (1980), etc., a partir da equação (2.84). Sobre orografias finitas, talvez os resultados teóricos mais relevante sejam as soluções analíticas de Long (1953), pois são muito importantes para o estudo dos fenómenos não lineares. Nos casos sem rotação aqui estudados, este tipo de escoamento corresponde ao tipo c) mencionado no início desta secção  $L \sim (10 - 100)$  Km. No capítulo dedicado à validação e estudo de escoamentos de subcamada externa, em cada caso será feita uma abordagem breve sobre os resultados teóricos mais relevantes para cada tipo de escoamento.

## Capítulo 3

# Modelo numérico flexível em coordenadas generalizadas.

### 3.1 Introdução

O escoamento de um fluido na vizinhança de obstáculos reveste-se de grande importância científica e prática. A variedade dos regimes de escoamento que podem ter lugar, em função das dimensões do obstáculo, da natureza da superfície e da importância relativa de efeitos tão diversos como o atrito, os fluxos de calor, a estabilidade estática ou a variação vertical do perfil do escoamento ambiente, obriga ao recurso de técnicas numéricas sofisticadas apropriadas a cada situação.

Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo numérico, bidimensional, em que se procurou garantir o máximo de flexibilidade, com a introdução de uma série de características numéricas opcionais que, no seu conjunto, são capazes de tratar um largo espectro de problemas físicos.

O código desenvolvido é testado por comparação com resultados experimentais publicados, e são efectuados alguns testes de desempenho computacional e de sensibilidade a parâmetros. O modelo resolve as equações de Navier-Stokes, da continuidade, de transporte de escalares e da termodinâmica, numa malha generalizada ortogonal. As malhas são geradas usando um método baseado na mobilidade dos nós nas fronteiras para atingir a máxima ortogonalidade. As equações foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à não ortogonalidade, para que possam ser excluídos ou incluídos caso o seu efeito seja significativo. O modelo utiliza um algoritmo *standard* para acoplar a pressão e a velocidade, a fim de resolver as equações de Navier-Stokes.

Para melhorar a resolução em regiões com elevados gradientes, o modelo utiliza um método de refinamento local eficaz e bastante económico, adaptado neste trabalho para o uso de coordenadas generalizadas e estendido a esquemas de 2ª e 3ª ordem de precisão para os termos advectivos, que requerem mais de 2 pontos nas interfaces com diferentes níveis de refinamento.

O modelo utiliza a aproximação anelástica e, opcionalmente, fechos de ordens 1 e 1.5, para parametrizar a turbulência. As equações foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à compressibilidade, e à heterogeneidade da turbulência de maneira a poderem ser incluídos ou excluídos em função do tipo de escoamento.

## 3.2 Equações fundamentais de conservação e transporte do modelo

### 3.2.1 Escoamento médio

No modelo (FLEX) é usado um modelo de viscosidade turbulenta que será exposto mais a frente. Por agora, refira-se, que FLEX resolve as equações do escoamento médio escritas na forma de Reynolds, i.e., usando RD (ver subsecção 2.2.1). A equação da continuidade (2.1), a da quantidade de movimento (2.2) e a de transporte de um escalar (2.17), na forma RD, têm o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tau_{ij} - \overline{u'_i u'_j} \right) - \delta_{i3} \rho' g \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_r \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \rho_r \overline{\phi' u'_j} \right) + S_\phi \quad (3.3)$$

$$\rho' = \rho - \rho_r \quad \text{e} \quad p' = p - p_r \quad (3.4)$$

em que  $U_i$ ,  $p'$  e  $\rho'$  representam: a componente de velocidade média na direção  $i$ , a perturbação de pressão em torno de  $p_r$ , a perturbação de densidade em torno de  $\rho_r$ , e um escalar.  $\phi$  é um escalar arbitrário,  $\mu$  representa a viscosidade molecular, e  $\Gamma_\phi$  a difusividade molecular do escalar  $\phi$ . O sub índice  $r$  refere-se a um estado de referência que será definido mais a frente. Nestas equações, de acordo com (2.3), a rotação foi desprezada, e empregou-se a aproximação de Boussinesq (2.31). As tensões viscosas moleculares são dadas em função do escoamento médio (ver equação 2.18).

## 3.3 Estado de referência

O estado de referência, de acordo com a aproximação anelástica (ver subsecção 3.5.2), dever estar em equilíbrio hidrostático (ver equação (2.67)). Como já foi anteriormente referido, as formulações anelásticas assumem que as variáveis termodinâmicas não experimentam grandes desvios do estado de referência. O uso de um estado de referência que esteja muito afastado das características do escoamento real pode desvirtuar a solução, além de criar serias dificuldades numéricas.

Na subsecção 2.5.1, para derivar as equações linearizadas em coordenadas cartesianas, foi definido um estado de referência em função da coordenada vertical  $z$ . Isto não tem que ser necessariamente assim, sendo só imprescindível garantir que o estado definido esteja em equilíbrio hidrostático. Geralmente é conveniente definir o estado de referência em dependência do género de coordenada vertical adoptada. Por exemplo quando se usa a pressão normalizada, ou coordenadas  $\sigma$ , como coordenada vertical, é conveniente definir o estado de referência em função da pressão  $p$  ( $\theta_r(p), \rho_r(p)$ ) (ver Miranda, 1991), ou uma grandeza proporcional. Como em FLEX se usa como coordenada vertical uma altitude então, por comodidade, o estado de referência também é definido em função de uma altitude.

Para derivar as expressões do estado de referência são usadas as equações: da hidrostática (2.67), de estado de um gás ideal (2.6), e da temperatura potencial (2.9). A combinação das mesmas permite obter:

$$\theta_r(z) = \underbrace{\theta_0 e^{\frac{N^2}{g}(h(x)-z_0)}}_{\theta_s} e^{\frac{N^2}{g}(z-h(x))} = \theta_0 e^{\frac{N^2}{g}(z-z_0)} \quad (3.5)$$

$$p_r(z) = \left[ p_0^\gamma + \frac{p_p^\gamma g^2}{c_p N^2 \theta_0} \left( \frac{1}{\theta_r(z)} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right]^{1/\gamma} \quad (3.6)$$

$$\rho_r(z) = \frac{p_p^\gamma p_r(z)^{1-\gamma}}{R\theta_r(z)} \quad (3.7)$$

$$T_r(z) = \frac{p_r(z)}{\rho_r(z)R} \quad (3.8)$$

em que  $p_p$  se refere à pressão padrão da definição da temperatura potencial ( $10^5$  Pa), o sub índice 0 a uma altitude de referência,  $z_0$ , e  $s$  indica tratar-se da superfície. Neste caso, o estado de referência tem homogeneidade horizontal. Na maioria dos escoamentos aqui estudados assume-se que o estado de referência só tem velocidade horizontal.

O conjunto de equações definido por Clark (1977) no seu modelo anelástico, usado também em Clark e Peltier (1977), é o de Ogura e Phillips (1962). As equações aqui obtidas são equivalentes às de Peltier e Clark (1979), permitindo obter resultados quase idênticos.

Quando se entra em consideração com as subcamadas interna e intermédia da CLA, o perfil de  $\theta_r$  tem de ser modificado de acordo com as funções de similaridade de Monin e Obukhov (1954), para incluir os efeitos de superfície (ver secção 2.3). De acordo com esta teoria,  $\theta_r$  varia segundo a expressão (2.49). A teoria das funções de similaridade de Monin e Obukhov (1954) assenta essencialmente em relações empíricas obtidas para superfícies planas (ver por exemplo Panofsky e Dutton, 1984). Nesse caso, pode-se considerar que  $\theta_s = const$ , mas se a orografia for significativa, ou a estratificação for muito elevada, isso não é verdade. Para considerar a variação  $\theta_s(h(x))$  na equação (2.49),  $\theta_s$  é substituída por  $\theta_0$ , e  $z$  variará, não desde a superfície da montanha ( $z = h(x)$ ), mas sim desde  $h_{ref}$ . Quando  $z$  é maior do que a altura da subcamada interna ( $z > h_i$ ), as expressões (2.49) e (3.5) têm um comportamento bastante similar.

Para impor uma dada estratificação na sub camada externa, deriva-se a expressão de  $N$ , calculando o limite da derivada de  $\theta_r$  (equação (2.49)), quando  $z \rightarrow \infty$ , obtendo-se a expressão:

$$N_\infty = \frac{u_* \sqrt{\beta}}{\kappa L_{mo}} \quad (3.9)$$

Deste modo pode-se calcular  $N_\infty$  conhecendo  $L_{mo}$  ou viceversa.

### 3.4 Equação da termodinâmica

A equação da termodinâmica (2.7), escrita na forma RD, tem o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial(\rho_r T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda_T}{c_p} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \rho_r \overline{u'_j T'} \right) + \frac{\Phi}{c_p} + \frac{\overline{\Phi'}}{c_p} + S_q \quad (3.10)$$

na qual se considerou que ( $M \ll 1$ ). O termo  $\overline{\Phi'}$  foi desprezado nos cálculos. A justificação para esta decisão assenta exclusivamente nas conclusões tiradas de testes numéricos efectuados.

A equação da termodinâmica, escrita em função da temperatura potencial, na forma RD, é dada por:

$$\frac{\partial(\rho_r \theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \theta)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \rho_r \overline{u'_j \theta'} \right) + S_q \quad (3.11)$$

ou em função de  $\theta' = \theta - \theta_r$ , como uma via mais directa de impor a estratificação,

$$\frac{\partial(\rho_r \theta')}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \theta')}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma'_\theta \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} - \rho_r \overline{\theta' u'_j} \right) + \rho_r W \frac{\theta_r}{g} N^2 + S_q \quad (3.12)$$

Exceptuando a formulação anelástica de Durran (1989), todas as outras usam a equação de estado linearizada (2.71) obtida mediante a linearização da equação de estado original.

### 3.5 Modelação dos processos de subescala.

Nenhum modelo de turbulência pode ser considerado superior a todos os outros. A escolha do modelo de turbulência mais apropriado, depende das condições físicas do problema, do nível de precisão requerido, e do tempo disponível para a obtenção de resultados. Para fazer a opção mais apropriada é necessário analisar as limitações e vantagens de cada modelo.

A abordagem RD requer que as chamadas tensões de Reynolds ( $-\overline{u'_i u'_j}$ ) sejam modeladas. A forma mais divulgada de relacionar ( $-\overline{u'_i u'_j}$ ) com o escoamento médio assenta no uso da hipótese de Boussinesq, usada em modelos tais como o  $k - \epsilon$ , o  $k - \omega$ , o  $k - l$ , etc. Uma abordagem alternativa consiste em resolver uma equação para cada um dos termos do tensor das tensões de Reynolds. Na maior parte das aplicações, o modelo deste tipo mais divulgado é o de transporte das tensões de Reynolds.

Os modelos de transporte das tensões são mais apropriados aos casos em que há processos anisotrópicos, tais como a flutuação e a curvatura acentuada das linhas de corrente (por exemplo nas zonas de recirculação). Isto torna-o atractivo por exemplo para o estudo de escoamentos atmosféricos. No entanto, mesmo na sua versão mais simples (o modelo algébrico), o custo computacional no caso 3D é muito elevado. Por exemplo, o modelo de transporte das tensões requer 5 equações de transporte em 2D e 7 em 3D. Além disso, é necessário sempre contar com a equação de dissipação da energia cinética turbulenta. Por outro lado, estes modelos apresentam um nível de dificuldade elevado na modelação das tensões associadas às perturbações de pressão, e também têm tendência para a instabilidade numérica.

Ao contrário dos modelos de transporte das tensões de Reynolds, os modelos de viscosidade turbulenta (MVT) são bastante mais simples e estáveis, podendo ser facilmente implementados em códigos já existentes para escoamentos laminares. No entanto, uma das maiores deficiências dos MVT de duas equações, como o modelo  $k - \epsilon$ , é o seu carácter isotrópico (Hanjalic, 1994). Por exemplo num escoamento de canal completamente desenvolvido, este modelo prevê tensões turbulentas normais iguais a  $2k/3$ , o que contradiz os resultados experimentais. Afortunadamente, existe hoje em dia um conjunto de métodos para modelar os processos anisotrópicos. As correcções de Leschziner e Rodi (1981) para o efeito de curvatura das linhas de corrente do escoamento médio, e para a resposta preferencial da dissipação de energia cinética turbulenta ( $k$ ) às tensões normais de Reynolds, são dois bons exemplos destes métodos. Sendo isotrópico, o modelo  $k - \epsilon$  *standard* tem dificuldade, em muitos escoamentos de interesse, em reconhecer o limite superior do tamanho dos turbilhões, que pode ser limitado por exemplo, pela estratificação ou pela profundidade da camada limite. É sabido que a estratificação tende a acentuar a anisotropia da turbulência, "achatando" os turbilhões à medida que a estratificação se torna dominante em relação ao efeito das tensões de corte. Detering e Etling (1985) limitam a escala espacial da turbulência, manipulando convenientemente o termo de produção na equação de dissipação de  $k$ .

FLEX é, nesta fase, um modelo 2D. Requerendo o modelo  $k - \epsilon$  *standard* bastante menos esforço computacional que o de transporte das tensões de Reynolds, e existindo a possibilidade de o tornar sensível aos efeitos da anisotropia da turbulência, optou-se por implementá-lo em FLEX. Refira-se no entanto que no FLEX foram criadas as condições para a implementação de modelos tais como o de transporte das tensões de Reynolds.

#### 3.5.1 Modelo $k - \epsilon$

O modelo  $k - \epsilon$  (Jones e Launder, 1972), pertencendo ao grupo dos MVT, usa a hipótese de *Boussinesq* (*gradient transport hypothesis*) para modelar os termos turbulentos. Esta hipótese assume que as

tensões são proporcionais aos gradientes de velocidade média do escoamento, através de um escalar denominado viscosidade turbulenta. Assim, o tensor das tensões de Reynolds pode ser escrito na forma análoga a (2.4):

$$\tau'_{ij} = -\rho_r \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \rho_r k \right) \quad (3.13)$$

sendo  $k$  a energia cinética turbulenta, dada por (2.19). Para escoamentos incompressíveis, a divergência no segundo termo do membro direito de (3.13) é nula.

De modo análogo, o fluxo turbulento do escalar  $\phi$  é modelado relacionando-o com o gradiente do seu valor médio, através da viscosidade turbulenta acima referida,

$$-\rho_r \overline{u'_j \phi'} = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi^t} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (3.14)$$

em que  $\sigma_\phi^t$  é o número de Prandtl turbulento da variável  $\phi$ .

A analogia com o movimento molecular é a ideia fundamental deste tipo de modelação.  $\mu_t$  tem as dimensões do produto

$$\mu_t = [\text{densidade}] \times [\text{velocidade}] \times [\text{comprimento}] \quad \text{ou} \quad \mu_t = \rho_r l_m u_0 \quad (3.15)$$

A escala de velocidade,  $u_0$ , deve ser proporcional à perturbação turbulenta, enquanto que  $l_m$  representa um comprimento de mistura característico da turbulência. No modelo  $k - \varepsilon$  a escala de velocidade e o comprimento de dissipação são dados pelas expressões:

$$u_0 = c_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad \text{e} \quad l_\varepsilon = \frac{u_0^3}{\varepsilon} \quad (3.16)$$

em que a dissipação de  $k$  ( $\varepsilon$ ) é dada por:

$$\varepsilon = 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\nu}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad (3.17)$$

Refira-se que  $l_m$  pode ser considerado um comprimento de mistura no contexto do modelo  $k - \varepsilon$ , se a estratificação estável não for muito elevada. Mais a diante voltar-se-á a esta questão.

A combinação das equações (3.15) e (3.16), permite obter a seguinte expressão para a viscosidade turbulenta:

$$\mu_t = \rho_r c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.18)$$

Para calcular  $\mu_t$ , o modelo  $k - \varepsilon$  resolve 2 equações de transporte, para  $k$  e para  $\varepsilon$ . A equação de transporte de  $k$  (2.20) já foi apresentada e explicada detalhadamente na secção 2.2. Os termos de transporte  $T$  na equação (2.20) são modelados da seguinte forma:

$$-\left( \rho_r \overline{u'_j k} + \frac{\partial (\rho_r \overline{u'_i p'})}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

O termo  $S$  da equação (2.20) representa a produção mecânica de  $k$  a partir do campo médio de velocidades, pelas tensões de corte turbulentas. Na maioria dos casos, as tensões de Reynolds têm

sinais opostos ao do gradiente das velocidades médias. Como resultado, o termo  $S$  tem sempre sinal positivo, i.e, gera  $k$  e não consome.  $S$  é modelado como:

$$S = -\overline{\rho_r u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\mu_t}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (3.20)$$

No termo de flutuação  $B$  (*buoyancy*), e na equação de transporte da temperatura potencial, (3.11) ou (3.12), os fluxos de calor são modelados de modo análogo;

$$\overline{\rho_r u'_i \theta'} = -\frac{\mu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (3.21)$$

A equação de transporte de  $\varepsilon$  usada neste modelo é a proposta por Jones e Launder (1972) no seu modelo original. A ideia fundamental, que torna esta equação bastante simples, assenta na premissa de que  $\varepsilon$  é determinada predominantemente pela dinâmica das maiores escalas do espectro. Deste modo,  $\varepsilon$  é determinada pelo termo que produz (ou destrói)  $k$ , i.e,  $S_k$ . As equações de transporte de  $k$  e  $\varepsilon$ , depois de modeladas tomam o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial (\rho_r k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_r U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + S_k - C_D \rho_r \varepsilon \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial (\rho_r \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_r U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \left( S_\varepsilon - \frac{1}{\tau_\varepsilon} C_{\varepsilon 2} \rho_r \varepsilon \right) \quad (3.23)$$

em que

$$S_\varepsilon = \frac{1}{\tau_\varepsilon} C_{\varepsilon 1} S_k \quad \text{com} \quad \tau_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon} \quad (3.24)$$

representa a geração de  $\varepsilon$ . Os termos  $S$  e  $B$  foram agrupados num só termo

$$S_k = S + B = \frac{\mu_t}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 + \delta_{i3} \frac{g}{\theta_r} \frac{\mu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (3.25)$$

Na equação de transporte de  $\varepsilon$ , os fluxos turbulentos de  $\varepsilon$  foram modelados de maneira análoga aos da equação de  $k$ .

As constantes do modelo  $k - \varepsilon$  *standard*, que têm proporcionado uma boa concordância com os resultados experimentais de escoamentos de micro-escalas neutros são (Launder e Spalding, 1974):

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.11, \quad \sigma_T = 0.9, \quad C_D = 1.0 \quad (3.26)$$

Numa camada de superfície neutra em equilíbrio local, o termo de transporte na equação de  $k$  (3.12) é desprezável, e, portanto,  $S_k \simeq D$ . Usando um perfil logarítmico de velocidade, a equação de  $\varepsilon$  (3.23) (nesta equação os termos de transporte não podem ser desprezados) reduz-se a (Rodi, 1980):

$$C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1} = \frac{\kappa^2}{C_\mu^{1/2} \sigma_\varepsilon} \quad (3.27)$$

O modelo  $k - \varepsilon$  *standard*, revela mais sensibilidade às constantes  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  e  $C_{\varepsilon 2}$ .  $C_\mu$  regula o nível da turbulência e a diferença  $C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}$  regula o balanço entre a produção e o consumo na equação de  $\varepsilon$ , definindo a escala de dissipação. A relação entre estas constantes está bem patente na equação (3.27). A constante  $C_\mu$  depende da função de estrutura<sup>1</sup>  $C_\mu = \tau/k^2 = (u_* / k)^2$ , sendo o valor dado em

<sup>1</sup>É obtida para uma camada superficial neutra com a equação de  $k$ . Neste caso os dois maiores termos são  $S_k$  e  $D$ , pelo que é razoável fazer  $S_k = D$ . Desta última igualdade, usando (3.13), (3.18) e (3.20), prova-se que  $C_\mu = \tau/k^2 = (u_* / k)^2$ .

(3.26) para uma superfície lisa. O resto das constantes em (3.26) foram calibradas por Launder e Spalding (1974), tomando como referência este valor de  $C_{mu}$ . Duynkerke (1988) fez uma calibração das constantes do modelo  $k - \varepsilon$  *standard* para a sua aplicação a escoamentos atmosféricos em CL homogêneas neutras e estavelmente estratificadas. Baseado no valor de  $C_{mu} = 0.033$  para superfícies rugosas (Raithby et al., 1987), Duynkerke (1988) determinou as seguintes constantes:

$$C_{\mu} = 0.033, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.46, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.83, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 2.38, \quad \sigma_{\theta} = 1.0, \quad C_D = 1.0 \quad (3.28)$$

Note-se que a equação de conservação da quantidade de movimento (3.2), depois de ser modelada, toma uma forma idêntica à de um escoamento laminar. A única diferença reside no facto de, a viscosidade ser dada agora pela soma das componentes molecular e turbulenta, sendo por isso denominada viscosidade efectiva

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_t \quad (3.29)$$

A equação de transporte de um escalar (3.3), depois de modelada, toma o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial(\rho_r \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\phi,ef} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_{\phi} \quad (3.30)$$

em que  $\Gamma_{\phi,ef}$  é o coeficiente efectivo de difusão de  $\phi$  dado por<sup>2</sup>

$$\Gamma_{\phi,ef} = \frac{\mu}{\sigma_{\phi}} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\phi}^t} = \Gamma_{\phi} + \Gamma_{\phi,t} \quad (3.31)$$

No modelo  $k - \varepsilon$ , as equações de conservação da massa, momento, energia e da propriedade  $\phi$  estão relacionadas com as equações de  $k$  e de  $\varepsilon$  mediante a expressão de  $\mu_t$  (2.33).

É importante notar que quando os escoamentos são estratificados pode-se provar que os comprimentos de mistura e dissipação não são iguais, como acontece no caso neutro. Se à equação de transporte de  $k$  de um escoamento de corte, forem aplicadas as condições de um escoamento de Couette 1D, obtém-se a seguinte expressão:

$$S + B = \varepsilon \quad (3.32)$$

A expressão (3.32) reflecte o equilíbrio entre a produção e a dissipação de  $k$ . De acordo com a hipótese da viscosidade turbulenta:

$$\tau = \mu_t \frac{dU_r}{dz} \quad (3.33)$$

e portanto a geração de  $k$  pela tensão de corte pode ser determinada como:

$$S = \tau \frac{dU_r}{dz} = \frac{\tau^2}{\mu_t} \quad (3.34)$$

Sabendo que o número de Richardson de fluxo é dado por  $Ri^f = -B/S$  (ver (2.27)), então a equação (3.32) pode ser escrita na forma:

$$\mu_t = \frac{\tau^2}{\varepsilon} (1 - Ri^f) \quad (3.35)$$

De acordo com a lei dos  $-5/3$ ,  $\varepsilon \sim k^{3/2}/l_{\varepsilon}$ . Por outro lado, tomando como escala da velocidade a velocidade de fricção  $u_*$ , tem-se que  $k^{1/2} \sim u_*$  e, como consequência,  $l_{\varepsilon} \sim u_*^3/\varepsilon$ . Se se considerar que  $\tau = u_*^2$  e que, de acordo com a hipótese de viscosidade turbulenta,  $\mu_t = \rho_r l_m u_*$ , então a expressão (2.58) pode ser escrita na forma:

$$l_m \sim l_{\varepsilon} (1 - Ri^f) \quad (3.36)$$

(3.36) representa a relação entre os comprimentos de mistura e dissipação. Note-se que se há geração de  $k$  só pelo termo  $S$  da equação de transporte (2.20) verifica-se a igualdade  $l_m = l_{\varepsilon}$ .

<sup>2</sup>Para o caso molecular  $\mu/\sigma = \lambda/c_p$ .

### 3.5.2 Modificações do modelo $k - \epsilon$

#### Curvatura das linhas de corrente

Para corrigir o comportamento do modelo  $k-\epsilon$  nos escoamentos onde se verificam valores elevados da curvatura das linhas de corrente, Leschziner e Rodi (1981) introduziram uma modificação baseada no uso do modelo algébrico de transporte das tensões de Reynolds em 2D. Usando este modelo, aqueles autores verificaram que a curvatura contribuía para a redução de  $\overline{w'^2}$  e  $\overline{u'w'}$  se  $\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} < 0$  ou para o seu aumento se  $\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} > 0$ . Dito de outra forma, quando a curvatura é côncava (a velocidade aumenta na direcção do centro da curvatura), tem um efeito desestabilizador e quando é convexa (a velocidade diminui na direcção do centro da curvatura), o efeito é contrário. De acordo com esta correcção, a constante  $C_\mu$  é modificada através da expressão:

$$C_\mu = \frac{C_{\mu 0}}{1 + 4\beta \left(\frac{k}{\epsilon}\right)^2 \left(\frac{\partial U_s}{\partial n} + \kappa_C U_s\right) \kappa_C U_s} \quad (3.37)$$

em que  $\beta$  é o coeficiente do modelo algébrico de transporte das tensões de Reynolds,  $\kappa_C = 1/R$  é a curvatura e  $(\kappa_C U_s, \partial U_s / \partial n)$ , são as componentes do tensor da taxa de deformação da velocidade média no sistema de coordenadas  $(s, n)$ .  $C_{\mu 0}$  é a constante original do modelo. Esta modificação só é válida nas proximidades da superfície onde se verifique equilíbrio local<sup>3</sup>, entre a produção e a dissipação de  $k$ . A modificação introduz melhorias notáveis, fundamentalmente no campo das grandezas turbulentas.

#### Resposta preferencial da dissipação às tensões normais

Como já foi referido, outro defeito do modelo  $k - \epsilon$  está associado ao facto de as tensões normais de Reynolds serem mais efectivas que as de corte no processo de transferência de energia, das maiores para as menores escalas. Leschziner e Rodi (1981), com base neste facto, introduziram a seguinte correcção (ver equação (3.23))

$$S_\epsilon = (C'_{\epsilon 1} S_k - C''_{\epsilon 2} \mu_l (2S_{ns})) \frac{1}{\tau_\epsilon} \quad (3.38)$$

A tensão de corte  $S_{ns}$  é dada pela expressão

$$S_{ns} = (S_{zz} - S_{xx}) \sin(2\theta) + 2S_{xz} \cos(2\theta) \quad (3.39)$$

em que  $\theta$  é o ângulo que o vector velocidade faz com  $x$ . Note-se que no termo  $S_k$ , se a geração for feita predominantemente pelas tensões de corte e não pelas normais ou pela flutuação  $B$ , então tem que se cumprir a condição  $C'_{\epsilon 1} - C''_{\epsilon 2} = C_{\epsilon 1}$ . As constantes propostas por Leschziner e Rodi (1981) para o conjunto de constantes em (3.26) são:  $C'_{\epsilon 1} = 2.26$  e  $C''_{\epsilon 2} = 0.8$ . Para o conjunto de constantes em (3.28), serão usados os valores  $C'_{\epsilon 1} = 2.26$  e  $C''_{\epsilon 2} = 0.8$ . Nas desacelerações bruscas a montante de obstáculos, o modelo  $k-\epsilon$  *standard* prevê valores baixos de  $\epsilon$ , e portanto elevados níveis de turbulência. A modificação acima exposta corrige este defeito.

### 3.5.3 Outras modificações do modelo $k - \epsilon$

Detering e Etling (1985), na sua simulação da experiência de Leipzig (escoamento quase neutro) concluíram que o modelo  $k - \epsilon$  *standard* previa valores demasiado elevados de  $h$ ,  $u_*$  e  $l_m$ , verificando assim, como já foi antes referido, a incapacidade do referido modelo de reconhecer um limite superior

<sup>3</sup>Na subcamada inercial, onde a turbulência está completamente desenvolvida ( $z_n^+ > 30$ ), considera-se que a difusão e o transporte médio e turbulento de  $k$  são desprezáveis, existindo um equilíbrio entra a produção  $S$  e a dissipação de  $k$ .

para o tamanho dos turbilhões. A mesma constatação foi feita por Duynkerke (1988). A solução para o problema, encontrada por estes autores, baseia-se na manipulação do termo de produção na equação de  $\varepsilon$ ,  $S_\varepsilon$ .

É interessante tentar compreender qual pode ser a dimensão máxima dos turbilhões permitidos numa atmosfera estável. No caso em que há estratificação estável, não é  $h$  que determina as dimensões dos maiores turbilhões, mas sim o cumprimento de Monin-Obukhov  $L_{mo}$ . Como já foi antes referido (ver expressão (2.55)), a viscosidade turbulenta pode ser dada por:

$$\mu_t = \frac{\rho \kappa u_* z}{\phi_U} \quad (3.40)$$

em que  $\phi_U$  representa uma função de estabilidade dada pela expressão (2.47). Assumindo que a escala de velocidade é  $u_*$ , pela definição de viscosidade turbulenta, de acordo com a hipótese do comprimento de mistura, tem-se que:

$$l_m = \frac{\kappa z}{1 + \beta z/L_{mo}} \quad (3.41)$$

A comparação da expressão anterior permite definir  $l_{max}$  como:

$$l_{max} = \frac{\kappa}{\beta} L_{mo} \quad (3.42)$$

Se  $\kappa = 0.4$  e  $\beta = 5$  (Businger et al., 1971) então,  $l_{max} = 0.08 L_{mo}$ . É um resultado interessante.

Duynkerke (1988) considerou que o termo  $B$  na equação que  $k$  deveria ser incorporado no termo de geração de  $\varepsilon$ , só quando este fosse produtivo. O autor chegou a esta conclusão, tomando como base as simulações de Wyngaard (1974), para a CLA neutra e convectiva e de Wyngaard (1975), para a CLA estável. Também, baseado no facto de que no caso neutro, os termos de transporte de  $k$  jogam um papel importante no topo da CL neutra (Mason e Thompson, 1987), o autor propõe que eles façam parte do processo de produção de  $\varepsilon$ . A ideia de Duynkerke (1988) baseou-se também na análise das discrepâncias verificadas por ele e por Detering e Etling (1985), nas simulações do caso de Leipzig. De acordo com Duynkerke (1988), o termo  $S_k$  na equação de  $\varepsilon$  deve ser substituído por (ver equação (3.23)):

$$S_k = S + \max[0, B] + \max[0, T] \quad (3.43)$$

em que  $T$  representa o termo de transporte de  $k$ . Note-se que esta ideia de Duynkerke (1988) é também uma forma de moldar o modelo em causa, de modo a torná-lo sensível à anisotropia da turbulência. Segundo esta modificação,  $B$  e  $T$  só participam na equação de  $\varepsilon$  de forma produtiva e nunca destrutiva.

É interessante notar que estas duas últimas modificações são para os casos neutro e estável. No caso instável, o fluxo de calor turbulento vertical é positivo e, portanto, gera  $k$  através do termo  $B$ . Neste caso, o problema da anisotropia também se coloca porque a geração de  $k$  é feita por um fluxo vertical que alonga os vórtices nessa direcção. Wyngaard (1974) usou com sucesso o modelo *standard*, para simular a CLA neutra e instável. Para isto, este autor introduziu novos valores das constantes  $C_{\varepsilon 1}$  e  $C_{\varepsilon 2}$ , nomeadamente  $C_{\varepsilon 1} = 1.5$  e  $C_{\varepsilon 2} = 2.0$ . Nas simulações dos casos instáveis que serão feitas, este será o modelo adoptado.

O modelo  $k - \varepsilon$  também será aplicado ao cálculo de escoamentos sobre orografia em que se verifica o rompimento de ondas gravíticas. Na zona de rompimento, número de *Richardson* de fluxo ( $Ri^f$ ) (2.27), muda de sinal por causa da derivada  $\partial\theta/\partial z$  (PC79, CP84). Isto significa que, localmente, o escoamento passa de estável a instável. Algumas modificações do modelo  $k - \varepsilon$  baseiam-se na limitação do tamanho dos vórtices, usando a expressão do comprimento de mistura ( $l_m$ ) (3.41), que regula  $\mu_t$  em função de  $l_{max}$ . Por sua vez,  $l_{max}$  é definido em função da estabilidade estática. Portanto

havendo uma transição, embora local, de estabilidade, não parece muito conveniente usar este tipo de abordagem. Por este motivo, adoptou-se o modelo  $k - \varepsilon$  com as modificações de Duynkerke (1980). Estas modificações são mais abrangentes, pois têm como base as calibrações do modelo  $k - \varepsilon$  feitas por Wingaard (1974) para a CLA neutra e instável, e por Wingaard (1975) para a CLA estável.

### 3.5.4 Fecho de Lilly (1962).

Uma forma bastante simples, e bastante eficaz em muitos casos, de parametrizar a turbulência, particularmente na subcamada externa da CLT estavelmente estratificada, consiste em usar o modelo de 1ª ordem de Lilly (1962). Este modelo, tal como outros, parametriza os efeitos de subescala da turbulência em função do escoamento médio (de maior escala). Esta formulação de 1ª ordem depende do tensor das deformações médias e da estratificação, e pode ser descrita sucintamente do seguinte modo:

$$D_U = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_t A) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu_t B) \quad (3.44)$$

$$D_W = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_t A) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu_t B) \quad (3.45)$$

onde  $D_U$  e  $D_W$  são os termos difusivos das equações das componentes  $U$  e  $W$  e

$$A = \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad \text{e} \quad B = \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (3.46)$$

e

$$\mu_t = \kappa_c^2 \Delta x \Delta z (A^2 + B^2)^{1/2} \times \max \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sigma_\theta^t} \right) Ri^g, 0 \right] \quad (3.47)$$

$\sigma_\theta^t$  representa o número de Prandtl turbulento da temperatura potencial ( $\theta$ ). Na formulação original, Lilly (1962) considerou  $\sigma_\theta^t = 1$ , mas para estabelecer um limite mais realista de acordo com valor crítico de  $Ri^f$  normalmente aceite, de  $Ri_c = 0.25$ , será usado o valor de  $\sigma_\theta^t = 4$ .  $\kappa_c = 0.21$ , é uma constante que garante a consistência desta formulação com o espectro de Kolmogorov (1941).  $Ri^g$  representa o número de Richardson de gradiente dado por:

$$Ri^g = \frac{N^2}{A^2 + B^2} \quad (3.48)$$

Note-se que, de acordo com esta formulação, se  $Ri_c^g > 0.25$   $\mu_t = 0$ . Apesar de ser uma imposição relativamente brusca, no sentido que se  $Ri^g > 0.25$  a turbulência não deixa de existir, este modelo descreve razoavelmente bem o processo destrutivo que a estratificação exerce sobre os turbilhões.

## 3.6 Notas sobre a cascata de Kolmogorov

Quando a turbulência é parametrizada mediante integração temporal das equações, a filtragem inclui os processos turbulentos tridimensionais isotrópicos e os processos afectados pela estratificação. Ambos participam na cascata turbulenta, transferido energia do escoamento médio para menores escalas, onde existe dissipação viscosa.

Segundo o conceito de espectro de energia cinética turbulenta  $k$ , os vórtices podem ser vistos como ondas de diferentes comprimentos e períodos, conformando o espectro de energia cinética turbulenta,  $E(\kappa)$  ( $\kappa$ -número de onda). O espectro de energia, pode ser dividido em três intervalos: a banda de largas escalas, ou banda anisotrópica, a banda inercial, e a banda de pequenas escalas ou banda

isotrópica. Nas grandes escalas, os processos de dissipação molecular são desprezáveis e a turbulência obtém a energia do escoamento médio e transfere-a para escalas mais pequenas à taxa de dissipação de  $k$ , ( $\varepsilon$ ). Na banda isotrópica  $E(\kappa)$  depende de  $\varepsilon$ , da viscosidade molecular  $\mu$  e do fluxo de energia. Nesta região de vórtices mais pequenos (grandes números de onda), predomina em média a isotropia (é a banda de equilíbrio de acordo com a hipótese de Kolmogorov) e é onde acontece a dissipação de  $k$  à escala molecular. A banda inercial caracteriza-se pela isotropia dos vórtices, cuja energia não depende nem da taxa de deformação do escoamento médio, nem dos processos de dissipação molecular. A energia conserva-se, quando atravessa a banda inercial. Se a teoria da banda de equilíbrio de Kolmogorov for aplicada à zona inercial, então o espectro é dado pela conhecida lei dos  $-5/3$ ,

$$E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3} \varepsilon^{2/3} \quad (3.49)$$

dependendo apenas do número de onda  $\kappa$  e de  $\varepsilon$ .

Ozmidov (1965) introduziu uma escala de comprimento representativa da dimensão característica dos maiores vórtices turbulentos. A escala de Ozmidov é dada por (Stull, 1988):

$$L_{Ozm} = \left( \frac{\varepsilon}{N^3} \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

e é da ordem dos 50 m para a atmosfera. Quando o tamanho dos vórtices atinge o valor de  $L_{Ozm}$  inicia-se o processo de achatamento dos mesmos e portanto a difusão turbulenta torna-se anisotrópica. A difusão vertical atinge um valor limite e a horizontal continua a aumentar até ser perturbada, por exemplo, pelos gradientes horizontais da velocidade média.

O inverso da escala de Ozmidov define o número de onda de flutuação  $\kappa_B$ . Para números de onda maiores do que  $\kappa_B$ , os vórtices não sentem directamente os efeitos da estabilidade estática, são tridimensionais e obedecem a lei dos  $-5/3$ .

### 3.7 Simplificação das equações de movimento

Os termos difusivos das equações da quantidade de movimento, depois de modeladas com uma determinada viscosidade turbulenta, podem ser manipulados de modo a simplificar o seu tratamento. Usando a equação da continuidade, e depois de alguma manipulação, (3.2) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}_{II} + \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial(\mu_{ef} \alpha)}{\partial x_i}}_{III} + \rho' g \quad (3.51)$$

em que  $\alpha$  é o factor de compressibilidade introduzido anteriormente (2.36). Na equação anterior, o termo I denominou-se, em analogia à difusão de um escalar, termo difusivo, o termo II está associado à heterogeneidade da viscosidade turbulenta no escoamento, e o termo III representa o efeito combinado da compressibilidade e da heterogeneidade. A equação (3.51) apresenta-se de forma bastante conveniente do ponto de vista físico, pois permite simplificar consideravelmente o tratamento dos termos difusivos e isolar os efeitos da compressibilidade e heterogeneidade caso eles sejam importantes. Por outro lado é interessante notar que a mesma tem um aspecto bastante atractivo do ponto de vista computacional, pois é muito semelhante à equação diferencial de transporte de um escalar (2.17). Este facto, como veremos mais à frente, facilita a implementação de diferentes esquemas de discretização dos termos advectivos e a incorporação das condições de fronteira.

A seguir será feita uma análise de escala simples para determinar a ordem de grandeza dos termos da equação (3.51). De acordo com a aproximação anelástica aqui usada,  $\alpha$  é dado pela equação

(2.36). Se tomarmos  $N^2 \sim 10^{-4} s^{-2}$ ,  $g = 10 m/s^2$  e  $c_s^2 \sim 10^5 (m/s)^2$ , então  $\alpha \sim 10^{-5}$ . Por outro lado, é bastante realista para escoamentos de mesoscala, definir os seguintes valores de escala: para a componente horizontal da velocidade  $U \sim 10 m/s$ , para a velocidade vertical  $W \sim 0.1 m/s$ , para a escala horizontal  $L \sim 10^4 m$ , para a escala vertical  $H \sim 10^3 m$  e para a viscosidade turbulenta pode-se tomar por exemplo  $\mu_t \sim 1$ . Usando estes valores, podem-se determinar as magnitudes características dos termos I, II e III da equação (3.51),

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial x} \right)}_{\sim \frac{U}{L^2} = 10^{-7}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial z} \right)}_{\sim \frac{U}{H^2} = 10^{-5}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial x} \right)}_{\sim \frac{U}{L^2} = 10^{-7}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{ef} \frac{\partial W}{\partial z} \right)}_{\sim \frac{W}{LH} = 10^{-8}} + \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial(\alpha \mu_{ef})}{\partial x}}_{\sim \frac{\alpha}{L} = 10^{-9}} \quad (3.52)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial W}{\partial x} \right)}_{\sim \frac{W}{L^2} = 10^{-9}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{ef} \frac{\partial W}{\partial z} \right)}_{\sim \frac{W}{H^2} = 10^{-7}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial z} \right)}_{\sim \frac{U}{LH} = 10^{-6}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{ef} \frac{\partial W}{\partial z} \right)}_{\sim \frac{W}{H^2} = 10^{-7}} + \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial(\alpha \mu_{ef})}{\partial z}}_{\sim \frac{\alpha}{H} = 10^{-8}} \quad (3.53)$$

Desta análise pode-se concluir que para estratificações fracas ( $N^2 = 10^{-5} s^{-2}$ ) e médias ( $N^2 = 10^{-4} s^{-2}$ ), o termo III pode ser desprezado nas equações das velocidades.

Tomando em conta que na atmosfera é muito comum haver estratificações da ordem de ( $N^2 = 10^{-4} s^{-2}$ ), esta conclusão é importante, porque simplifica consideravelmente o cálculo dos termos difusivos, que como se sabe tem grande custo computacional. Para estratificações elevadas ( $N^2 = 10^{-3}$ ), III não pode ser desprezado. O termo II pode ser desprezado só parcialmente, sendo interessante notar que a heterogeneidade da viscosidade turbulenta está associada fundamentalmente às derivadas horizontais. Numa CLA homogênea a derivada  $\partial U / \partial x$  é normalmente pequena, pelo que o termo II na equação de  $U$  pode ser desprezado. Na equação de  $W$  o membro  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial z} \right)$  do termo II, nunca pode ser desprezado pois ele é um agente importante na definição da estrutura vertical da turbulência. Em geral a influência de II é geralmente pequena excepto nas zonas onde as propriedades do escoamento variam consideravelmente. Note-se na equação (3.52) que, tal como foi mencionado na secção anterior sobre a difusão turbulenta em escoamento estratificado, a difusão horizontal depende dos gradientes horizontais da velocidade média, e que estes gradientes são importantes quando o terreno é não homogêneo. Nas simulações cujos resultados serão apresentados nos seguintes capítulos, para verificar a importância dos os termos II e III nunca, além da análise de escala, foram feitos testes de cálculo em que os termos II e III eram desligados alternadamente.

No topo da CL, onde normalmente a divergência da tensão de corte ( $\tau$ ) se anula ( $\partial \tau / \partial z = 0$ ) porque  $\tau = const.$ , ou varia linearmente com  $z$ , a força de Coriolis é determinante, pois ela deve contrabalançar a força do gradiente de pressão. Se a força de Coriolis é desprezada, como é o caso, então há que garantir que no topo da CL o gradiente de pressão seja compensado por outra força. Para permitir a geração de ondas gravíticas, em FLEX usam-se perfis de velocidade nos quais para  $z > h$ ,  $U \simeq const.$  e portanto ( $\partial \tau / \partial z = 0$ ). No caso neutro, por exemplo na equação de  $U$ ,  $-\partial p / \partial x$  é compensado com o termo advectivo  $U \partial U / \partial x$ . É claro que neste caso o uso de condições de fronteira periódicas só pode ser possível se as fronteiras laterais estão tão afastadas que os efeitos da orografia não se fazem sentir nelas. No caso estratificado o problema coloca-se do ponto de vista computacional. Se o escoamento gera ondas gravíticas que se propagam verticalmente o problema é bastante mais complexo e será abordado com mais detalhe na secção dedicada as condições de fronteira.

### 3.8 Aspecto final das equações do modelo

Depois de introduzidas as bases da modelação dos processos de subescala e as aproximações fundamentais, pode-se definir o sistema de equações finais. Para os escoamentos atmosféricos, o sistema de equações já modeladas que o modelo resolve são :

$$\frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial(\rho_r U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{ef} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial(\mu_{ef} \alpha)}{\partial x_i} - \rho' g \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial(\rho_r \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\phi,ef} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (3.56)$$

em que  $\mu_{\phi,ef}$  depende do tipo de modelo de turbulência. A equação de transporte de  $\phi$  (3.56) serve para incorporar qualquer escalar. Por exemplo, para a variável  $\theta'$ ,  $S_{\theta'} = \rho_r W \theta_r / g N^2 + S_\theta$  (ver equação (3.12)). Nesse caso a perturbação de  $\rho'$  é calculada com a expressão (2.71). Para a equação de transporte de  $k$  (3.22) tem-se que  $S_k = S + B$  (ver equação (3.25)). Para o resto das equações o tratamento é análogo.

## Capítulo 4

# Métodos numéricos de solução das equações de conservação e de transporte

### 4.1 Discretização da equação de transporte de um escalar

A resolução numérica das equações diferenciais de um modelo obriga à sua prévia discretização. Esta operação pode ser efectuada seguindo diferentes metodologias, em que se incluem fundamentalmente técnicas baseadas na substituição das derivadas por diferenças finitas, definidas a partir dos valores das variáveis do modelo numa grelha discreta, e técnicas que, apesar de manterem as diferentes variáveis como funções contínuas, procedem a uma redução do número de graus de liberdade do problema mediante o recurso a séries truncadas de funções de base (caso do método espectral e de métodos de elementos finitos). Neste trabalho utilizar-se-á exclusivamente a técnica das diferenças finitas. Neste contexto, é muito conveniente considerar o domínio de cálculo como subdividido em volumes de controlo (VC) (ver figura 4.1).

Dado que as diferentes variáveis interagem entre si por intermédio de operações diferenciais, que no esquema das diferenças finitas são traduzidas por operações algébricas envolvendo valores discretos dessas variáveis em vários pontos da grelha, existe grande conveniência em desfasar a localização espacial das diferentes variáveis (Arakawa, 1966). No caso não desfasado, os nós de cálculo estão localizados no centro do volume de controlo (VC), (ver figura 4.1a), enquanto que numa malha desfasada os nós de cálculo estão localizados nas interfaces apropriadas do VC (ver figura 4.1a). Os índices em letras minúsculas  $e, w, n, s$  identificam as faces este, oeste, norte e sul, respectivamente. Os índices com letras maiúsculas são usados de modo análogo, mas para identificar os nós de cálculos centrados nos VC's.

A equação de transporte de um escalar é sempre discretizada usando uma malha não desfasada. Integrando, com utilização do teorema de divergência de Gauss, e discretizando os termos advectivos da expressão (3.56), obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial (\rho U_j \phi)}{\partial x_j} dS = C_e \phi_e - C_w \phi_w + C_n \phi_n - C_s \phi_s \quad (4.1)$$

Os fluxos de massa, tomando como exemplo a face este (ver figura 4.1a), são dados por:

$$C_e = (\rho U \Delta y)_e \quad (4.2)$$

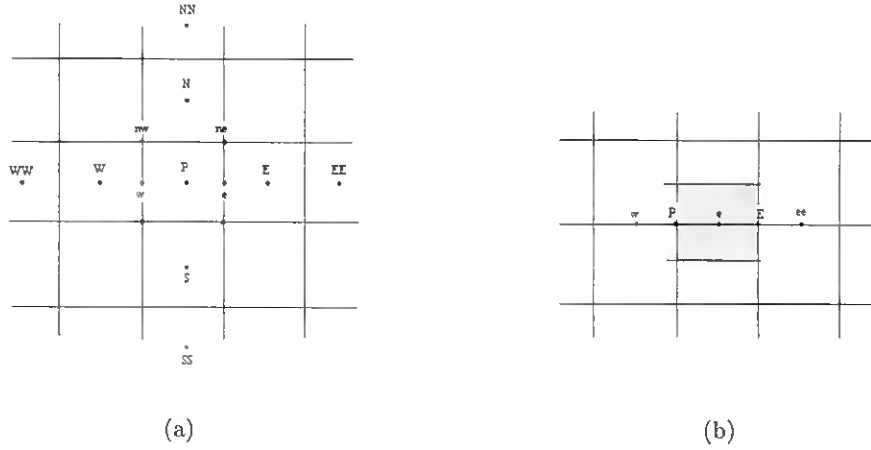


Figura 4.1: a) Volume de controlo numa malha não desfasada, b) Volume de controlo numa malha desfasada, para o cálculo da componente horizontal da velocidade.

Os valores de  $\phi$  nas faces dos volumes de controlo são determinados usando um dos esquemas de diferenças finitas para discretizar derivadas de 1ª ordem. Integrando os termos difusivos de (3.56) obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda_T \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dS = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) \quad (4.3)$$

onde os coeficientes de difusão são dados por:

$$D_e = \left( \frac{\Gamma_\phi}{\Delta x} \right)_e \Delta y \quad (4.4)$$

e de modo análogo para os restantes termos. A integração do termo fonte é efectuada mediante linearização:

$$\int_S S_\phi dS = b\phi_P + c \quad (4.5)$$

A combinação das equações (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) conduz à seguinte equação discretizada:

$$(a_P - b) \phi_P = \sum_i a_i \phi_i + c \quad (4.6)$$

onde o somatório se estende aos 4 nós vizinhos do nó  $P$ , e os coeficientes  $a_i$  representam os efeitos combinados dos fluxos advectivos e difusivos, através da face do VC, associado ao nó  $P$  (ver figura 4.1a). Portanto,

$$a_P = \sum_i a_i \quad (4.7)$$

#### 4.1.1 Regras fundamentais da discretização

As quatro regras fundamentais da discretização são (Patankar, 1980):

1. Positividade dos coeficiente  $a_P$  e  $a_i$  (ver equação 4.7).

2. Consistência dos fluxos nas faces dos VC's.
3. O declive  $b$ , de um termo fonte linearizado (ver expressão (4.5)) deve ser sempre negativo.
4. A soma dos coeficientes  $a_P = \sum_i a_i$  deve ser sempre válida.

O requisito (1) garante a obtenção de soluções fisicamente realistas. A presença de um coeficiente negativo pode implicar, por exemplo, que o aumento da temperatura num nó provoque a sua diminuição no nó adjacente, o que não faz sentido. Existem muitos esquemas conhecidos que violam esta regra, devido a difusão numérica, como é o caso do esquema DC (Diferenças Centradas). Mais à frente este tema será abordado com mais detalhe. O requisito (2) garante que as equações discretizadas preservam as suas propriedades conservativas. A regra (2) pode ser usada eficientemente nos códigos, porque possibilita que os fluxos na interface de um VC possam ser calculados uma só vez. A regra (3) garante a estabilidade, e favorece a convergência, pois o aumento de  $a_P - b$  torna a diagonal da matriz de solução mais dominante (ver secção 4.6). E, por último, o requisito (4) garante que a variável dependente  $\phi$  satisfaz a equação discretizada, tal como acontece com a equação diferencial original.

## 4.2 Discretização da equação diferencial de conservação do momento para uma malha desfasada

A discretização da equação diferencial dos momentos com diferenças finitas faz-se normalmente usando malhas desfasadas (ver figura (4.1b)), para evitar possíveis desacoplamentos entre os campos de pressão e velocidade, capazes de produzir soluções fisicamente irrealistas. Para o VC mostrado na figura (4.1b), a equação dos momentos, integrada e discretizada (para a 1<sup>ª</sup> derivada da pressão usa-se DC), vem dada por:

$$(a_P - b) U_e = \sum_i a_i U_i + (p_P - p_E) \Delta y_e + c \quad (4.8)$$

e de modo semelhante para as restantes direcções. Note-se que, de um modo geral, pode-se considerar que a equação (4.8) teria a mesma forma que a equação (4.6), se os termos associados à pressão fossem incorporados explicitamente no coeficiente  $c$  de (4.6). O método de resolução é um híbrido do algoritmo tridiagonal de Thomas e o método de Gauss-Seidel, denominado Gauss-Seidel linha a linha (ver por exemplo Patankar, 1980).

## 4.3 Algoritmo SIMPLE

A solução do sistema de equações de Navier-Stokes na forma (3.54-3.54) pode ser efectuada de modo sequencial. No entanto, esse procedimento não garante a satisfação simultânea das diferentes equações, traduzindo-se em oscilações indesejáveis devidas à falta de balanço entre o campo da pressão e o campo das velocidades. Uma solução para este problema foi proposta por Patankar e Spalding (1972) na forma do algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*), pormenorizadamente descrito em Patankar (1980). O algoritmo SIMPLE realiza um processo iterativo de correcção da pressão e das velocidades.

## 4.4 Malhas não desfasadas

Como já foi anteriormente referido, a discretização da equação diferencial dos momentos com diferenças finitas, faz-se normalmente usando malhas desfasadas (4.1b), para evitar possíveis desacoplamentos

entre os campos de pressão e velocidade. Os esquemas de 2 pontos<sup>1</sup> para discretizar as derivadas de 1ª ordem dos termos advectivos, particularmente as diferenças centrais e em parte o Upwind II, são muito propensos a estes desacoplamentos, especialmente quando se trata de campos ondulatórios. Os esquemas para os termos advectivos que usam mais informação dos nós vizinhos, tais como os esquemas de 3 pontos (ex: Quick de Leonard, 1979, Fromm's de Fromm, 1968, etc.), são menos propensos a estes efeitos indesejáveis. Embora o uso de malhas desfasadas seja uma boa solução para este problema, o método de refinamento local (Coelho et al., 1991) utilizado no presente código, torna impraticável o seu uso. O método de refinamento local deste autor, inicialmente concebido para esquemas de discretização da derivada advectiva de 1 e 2 pontos, foi estendido para esquemas de 3 pontos. Esta adaptação pode complicar ainda mais o uso de malhas desfasadas. Por este motivo, todas as equações serão discretizadas usando malhas não desfasadas, tal como fez Coelho et al. (1991), e as dificuldades acima referidas serão contornadas como é descrito a seguir.

#### 4.4.1 Esquemas de discretização dos termos advectivos e difusivos

Como já foi anteriormente referido, os coeficientes  $a_i$  da equação (4.6), representam os efeitos combinados dos fluxos advectivos e difusivos. Obviamente, estes efeitos dependem do tipo de esquema usado para discretizar os termos advectivos e difusivos. Os termos difusivos no presente código são discretizados usando diferenças centrais de 1ª ordem para os fluxos. Por exemplo na interface este da figura 4.1a, o fluxo difusivo é dado por:

$$\left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_e \approx \left( \frac{\Gamma_\phi}{\Delta x} \right)_e (\phi_E - \phi_P) \quad (4.9)$$

Fazendo o mesmo na face oeste, o termo difusivo da equação (3.3) na direcção  $x$ , integrado e discretizado, vem dado por:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS \approx \frac{\left[ \left( \frac{\Gamma_\phi}{\delta x} \right)_e (\phi_E - \phi_P) - \left( \frac{\Gamma_\phi}{\delta x} \right)_w (\phi_P - \phi_W) \right]}{\Delta x} \Delta S \quad (4.10)$$

Pode-se facilmente verificar agora de onde provêm as expressões (4.3) e (4.4). Se se considerar, a título de exemplo, que os coeficientes de difusão são unitários, então pode-se constatar que o membro direito de (4.10) corresponde ao esquema de diferenças centradas de segunda ordem. Este será sempre o esquema adoptado para estes termos, pois um esquema que requeira mais pontos não traz maiores benefícios e complica o tratamento das fronteiras e a implementação do método de refinamento local. Os termos advectivos são os indutores da não linearidade nas equações, requerendo, por isso, mais atenção. Usando o esquema de diferenças centradas e considerando os nós equidistantes para simplificar, a variável  $\phi$  nas faces este e oeste, é determinada através das expressões:

$$\begin{cases} \phi_e = 0.5 (\phi_P + \phi_E) \\ \phi_w = 0.5 (\phi_P + \phi_W) \end{cases} \quad (4.11)$$

Sendo assim, temos que na equação (4.1)

$$\begin{cases} C_e \phi_e = 0.5 C_e (\phi_P + \phi_E) \\ C_w \phi_w = 0.5 C_w (\phi_P + \phi_W) \end{cases} \quad (4.12)$$

<sup>1</sup>O número de pontos refere-se a quantidade de nós de cálculo necessários, para calcular o valor de  $\phi$  na face de um VC.

Expressões análogas podem ser escritas para as restantes faces. Para este esquema, os coeficientes  $a_E$  e  $a_W$  de (4.6) vêm dados por:

$$\begin{cases} a_E = D_e - C_e/2 \\ a_W = D_w + C_w/2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Roache (1972), usando a equação da quantidade de movimento linearizada, ou Patankar (1980), usando exemplos simples, mostram que este esquema se torna instável e produz oscilações fisicamente irrealistas para números de Peclet<sup>2</sup>  $|Pe| > 2$ . Portanto DC, mesmo sendo um esquema de segunda ordem de precisão, é bastante indesejável para discretizar os termos advectivos. Usando o esquema Upwind I (I relativo a 1<sup>a</sup> ordem), para determinar  $\phi$  nas faces este e oeste, e multiplicando estes valores pelos fluxos advectivos das mesmas faces (ver figura 4.1a), os fluxos advectivos  $(C\phi)_i$ , da equação (4.1), tomam a forma:

$$\begin{cases} C_e\phi_e = \phi_P \|C_e, 0\| - \phi_E \|-C_e, 0\| \\ C_w\phi_w = \phi_W \|C_w, 0\| - \phi_P \|-C_w, 0\| \end{cases} \quad (4.14)$$

O operador  $\|A, B\|$  escolhe o maior valor entre A e B. Note-se que fazendo  $(C_e\phi_e - C_w\phi_w)$ , obtém-se a primeira derivada integrada e discretizada do termo advectivo de  $\phi$ , na direcção  $x$ . Esta derivada só precisa de dois pontos para ser calculada. Neste caso os coeficientes  $a_E$  e  $a_W$  de (4.6) vêm dados por:

$$\begin{cases} a_E = D_e + \|-C_e, 0\| \\ a_W = D_w + \|C_w, 0\| \end{cases} \quad (4.15)$$

O esquema Upwind I é de 1<sup>a</sup> ordem de precisão, mas não padece do mesmo mal que o das diferenças centradas, i.é, não desvirtua a solução do ponto de vista físico, e é altamente estável. Por outro lado, estes benefícios consegue-os a custa da introdução de uma difusão artificial que tende a destruir os gradientes elevados. Spalding (1972) combina os aspectos positivos deste dois últimos esquemas num só, que denominou de Híbrido. Segundo este esquema,  $a_E$  e  $a_W$  são dados por:

$$\begin{cases} a_E = D_e \|-P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 0\| = \|-C_e, D_e - \frac{C_e}{2}, 0\| \\ a_W = D_w \|P_w, 1 + \frac{P_w}{2}, 0\| = \|C_w, D_w + \frac{C_w}{2}, 0\| \end{cases} \quad (4.16)$$

Se  $|Pe| > 2$ , o esquema comporta-se como Upwind I, e no caso contrário, como DC de 1<sup>a</sup> ordem. O presente código permite, opcionalmente, a incorporação de qualquer um dos 3 esquemas, Upwind I, DC e Híbrido. Até agora, só foram analisados esquemas de 2 pontos para discretizar os termos advectivos. Os esquemas de 3 pontos, por utilizarem mais informação dos nós vizinhos, são mais precisos e menos propensos aos problemas de desacoplamento já antes referidos. No presente modelo implementaram-se, para serem usados opcionalmente, um esquema de 2 pontos, o Upwind II, e três esquemas de 3 pontos: Quick, Fromm's, e um esquema que será chamado New. O esquema New será explicado com detalhe, mais à frente. As expressões de  $(C\phi)_i$  nas faces de um VC, correspondentes aos diferentes esquemas de discretização da derivada advectiva, podem ser generalizadas mediante as expressões (ver figura 4.1a):

$$\begin{cases} C_e\phi_e = (a\phi_E + b\phi_P + c\phi_W) \|C_e, 0\| - (a\phi_P + b\phi_E + c\phi_{EE}) \|-C_e, 0\| \\ C_w\phi_w = (a\phi_P + b\phi_W + c\phi_{WW}) \|C_w, 0\| - (a\phi_W + b\phi_P + c\phi_E) \|-C_w, 0\| \end{cases} \quad (4.17)$$

Se se quiser determinar só os valores de  $\phi_e$  e  $\phi_w$ , então usa-se a expressão:

$$\begin{cases} \phi_e = (a\phi_E + b\phi_P + c\phi_W) \|S_e, 0\| - (a\phi_P + b\phi_E + c\phi_{EE}) \|-S_e, 0\| \\ \phi_w = (a\phi_P + b\phi_W + c\phi_{WW}) \|S_w, 0\| - (a\phi_W + b\phi_P + c\phi_E) \|-S_w, 0\| \end{cases} \quad (4.18)$$

<sup>2</sup>Número de Peclet é o número de Reynolds do VC,  $Pe = \text{fluxo advectivo de } \phi / \text{fluxo difusivo de } \phi$ .

em que

$$\begin{cases} S_e = \frac{C_e}{|C_e|} \\ S_w = \frac{C_w}{|C_w|} \end{cases} \quad (4.19)$$

Hayase et al. (1992) mostram que é de toda a conveniência incorporar estes esquemas para a resolução da equação geral (4.6), usando o esquema Upwind I como base. Este autor, com base nas regras (4), prova que esta formulação é a mais consistente, tornando os esquemas mais estáveis, e convergindo mais rapidamente. Usando Upwind I como esquema base (ver equação 4.15), as expressões (4.17) podem ser escritas do seguinte modo (ver tabela 4.1)

$$\begin{aligned} C_e \phi_e &= \phi_P \|C_e, 0\| - \phi_E \|-C_e, 0\| \\ &+ (a\phi_E + (b-1)\phi_P + c\phi_W) \|C_e, 0\| - (a\phi_P + (b-1)\phi_E + c\phi_{EE}) \|-C_e, 0\| \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} C_w \phi_w &= \phi_W \|C_w, 0\| - \phi_P \|-C_w, 0\| \\ &+ (a\phi_P + (b-1)\phi_W + c\phi_{WW}) \|C_w, 0\| - (a\phi_W + (b-1)\phi_P + c\phi_E) \|-C_w, 0\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

A implementação deste esquema é feita explicitamente, i.e, o esquema base Upwind I é usado para determinar os coeficientes  $a_i$  da equação (4.6), e os termos terceiro e quarto dos membros direitos das expressões (4.20) e (4.21), são incorporados explicitamente mediante o termo  $c$  da equação (4.6). A incorporação denomina-se explícita porque não é feita através de  $b$  em (4.6), e portanto não influencia directamente o calculo de  $\phi_P$ . Se a implementação fosse feita mediante  $b$ , então seria implícita. Este procedimento, embora reduza a influência directa ou implícita dos nós vizinhos mais afastados de  $\phi_P$ , tende a ser muito estável, e acelera a convergência. Sendo assim, o termo  $c$  de (4.6), na direcção  $x$  é

Tabela 4.1: Coeficientes para determinar  $\phi$  nas faces dum VC, com os esquemas de discretização dos termos advectivos (nós equidistantes).

Esq. de discretização	Coeficientes			Grau de precisão	nº de pontos
	a	b	c		
Upwind I	0	1	0	1	1
DC II	1/2	1/2	0	2	2
Upwind II	0	3/2	-1/2	2	3
Quick	3/8	3/4	-1/4	2	3
Fromm's	1/4	1	-1/4	2	3
New	1/3	5/6	-1/6	3	3

igual a (ver figura (4.1a):

$$\begin{aligned} c &= -(a\phi_E + (b-1)\phi_P + c\phi_W) \|C_e, 0\| + (a\phi_P + (b-1)\phi_E + c\phi_{EE}) \|-C_e, 0\| \\ &+ (a\phi_P + (b-1)\phi_W + c\phi_{WW}) \|C_w, 0\| - (a\phi_W + (b-1)\phi_P + c\phi_E) \|-C_w, 0\| \end{aligned} \quad (4.22)$$

## 4.5 Precisão

Uma fonte importante de erros é a difusão numérica, associada ao esquema de discretização. Esta pode desvirtuar a solução física ou tende a "suavizar" os gradientes elevados. O nome de difusão numérica aparece como analogia à difusão física, pois resulta dos termos com derivadas pares (normalmente predomina a 2ª derivada) na expressão do erro de truncatura<sup>3</sup>. Outra fonte importante de erros

<sup>3</sup>O erro de truncatura é a diferença entre a equação diferencial original e a sua equação discretizada.

é a dispersão numérica associada às derivadas ímpares. Estes dois tipos de erros coexistem sempre, predominando quase sempre um deles. A difusão numérica, embora reduza os gradientes, não desvirtua tanto o significado físico da solução como a dispersão numérica, que é responsável por oscilações capazes de tornar incompreensível a solução numérica. Quanto maior é o grau de precisão de um esquema, menos significativos são estes erros. No caso estacionário, o uso do esquema Upwind I, para as derivadas advectivas das equações dos momentos estacionárias, evidencia uma predominância do efeito da difusão numérica. Por outro lado, o esquema de diferenças centradas, nas mesmas condições, revela-se dispersivo, particularmente se o número de Peclet for elevado (ver comentários acima ao respeito).

Os diferentes esquemas usados para discretizar a 1ª derivada advectiva, têm comportamentos diferentes de caso para caso. Muitos esquemas conhecidos, tal como o Quick, sofrem de dispersão numérica. Shyy (1985) mostra que este esquema, aplicado à equação de Burger linear e unidimensional,

$$\partial U / \partial t + c \partial U / \partial x = \mu \partial^2 U / \partial x^2 \quad (4.23)$$

possui um número de Peclet crítico de  $|Pe_{cr}| = 8/3$ , valor que não se afasta muito do valor crítico do esquema de diferenças centrais (DC) ( $|Pe_{cr}| = 2$ ), já anteriormente discutido. Na tabela (4.2), estão expostas as equações modificadas<sup>4</sup>, obtidas com a equação de Burger (4.23), usando os esquemas advectivos da tabela (4.1). Na equações anteriores, o termo  $U_{xx}$  é sempre discretizado usando diferenças centradas de 2ª ordem, e assume-se que a velocidade de advecção  $c > 0$ . O número de Peclet neste

Tabela 4.2: Equações modificadas para os esquemas de discretização da tabela (4.1).

Esquema	Equação modificada ( $cU_x - \mu U_{xx} =$ )
Upwind I	$-\frac{1}{2}U_{xx}\Delta x - \frac{1}{6}U_{xxx}\Delta x^2 + \frac{\mu}{12}U_{xxxx}\Delta x^2 + \dots$
Upwind II	$+\frac{c}{12}U_{xxx}\Delta x^2 + \frac{\mu}{12}U_{xxxx}\Delta x^2 + \dots$
DC	$-\frac{c}{6}U_{xxx}\Delta x^2 + \frac{\mu}{12}U_{xxxx}\Delta x^2 - \frac{c}{120}U_{xxxxx}\Delta x^4 - + \dots$
Quick	$-\frac{c}{24}U_{xxx}\Delta x^2 + U_{xxxx} \left( -\frac{c}{16}\Delta x^3 + \frac{\mu}{12}\Delta x^2 \right) + \dots$
Fromm's	$\frac{c}{12}U_{xxx}\Delta x^2 + \frac{\mu}{12}U_{xxxx}\Delta x^2 + \dots$
New	$U_{xxxx} \frac{\Delta x^2}{12} (1 - Pe) + \Delta x^4 \left( \frac{1}{30}U_{xxxx} - \frac{1}{360}U_{xxxxx} \right) \dots$

caso é dado por  $Pe = c\Delta x/\mu$  (a densidade é tomada como  $\rho = 1$ ). Note-se que se  $Pe = 1$  no esquema New, o grau de precisão aumenta para 4. Isto só é possível neste contexto idealizado, unidimensional e estacionário. Para melhor visualização, a equação modificada deste esquema pode ser escrita na forma:

$$cU_x - \mu U_{xx} = \frac{\mu}{12}U_{xxxx}\Delta x^2 - \frac{1}{12}U_{xxxx}\Delta x^3 + \frac{1}{30}U_{xxxxx}\Delta x^4 \dots \quad (4.24)$$

Embora o esquema New seja de terceira ordem, na equação modificada predomina a ordem inferior, que provém do esquema DC de 2ª ordem do termo de difusão (Laplaciano). Para aumentar o grau de precisão desta derivada, seria necessário representá-la com DC de 4ª ordem ou diferenças progressivas (ou regressivas) de 3ª ordem. Estes esquemas usam 5 e 4 pontos respectivamente, o que como se verá, não é nada desejável para o tratamento das fronteiras.

<sup>4</sup>É a equação diferencial obtida pela substituição das derivadas da equação diferencial original, pelas derivadas expandidas em série de Taylor. O membro direito desta equação representa o erro de truncatura.

#### 4.5.1 O problema dos VC's adjacentes às fronteiras

O método de refinamento local implementado no presente modelo constitui, como se verá, uma ferramenta muito eficaz em termos de poupança de tempo de CPU, sendo por isso prioritário. No entanto, como era de esperar, este método exige alguns "sacrifícios", sendo um deles a necessidade de que as faces dos VC's adjacentes às fronteiras coincidam com as mesmas. Um consequência do método é que os nós de cálculo nesta zona não são equidistantes, o que, como se explicará mais adiante, penaliza a precisão dos esquemas de discretização. Neste subsecção faz-se um estudo do problema e propõem-se algumas soluções para atenuar o efeito negativo desta forma de estruturar a malha. Refira-se, no entanto, que a estruturação da malha nesta forma também tem vantagens, pois facilita a incorporação dos fluxos nas fronteiras, e garante a satisfação de condições de conservação.

Para um nó adjacente à fronteira, como está exemplificado na figura 4.2b, (caso II), o uso de esquemas de 2 pontos para discretizar as derivadas não coloca problemas. No VC da figura 4.2b, centrado no nó P, para calcular o valor de  $\phi_e$  (assume-se que na fronteira  $wb$ , os valores de  $\phi_{wb}$  e  $C_{wb}$  são conhecidos) só se precisa de  $\phi_E$  e  $\phi_P$ , quando se usam as diferenças centradas, e de  $\phi_E$  ou  $\phi_P$ , se se usar Upwind I. Se se recorre a esquemas Upwind de 2 pontos (Upwind II), ou esquemas de 3 pontos (Quick, Fromm's, etc), para calcular a primeira derivada advectiva, então, para determinar  $\phi_e$ , se  $C_e > 0$ , é preciso usar o valor de  $\phi_{wb}$ . Aparentemente, isso não levanta grandes dificuldades, mas o facto de os nós necessários ao cálculo de  $\phi_e$  não serem equidistantes, tem implicações mais sérias, nomeadamente a degradação do grau de precisão dos esquemas de 3 pontos, que podem passar de 2º ou 3º, para 1º grau, ou inclusive para um grau inferior a 1.

A mesma situação verifica-se no caso I da mesma figura, onde o nó P, embora não seja adjacente à fronteira, requer o valor de  $\phi_{wb}$ , para calcular  $\phi_w$  (se  $C_w > 0$ ). Para determinar o valor de  $\phi_e$ , no

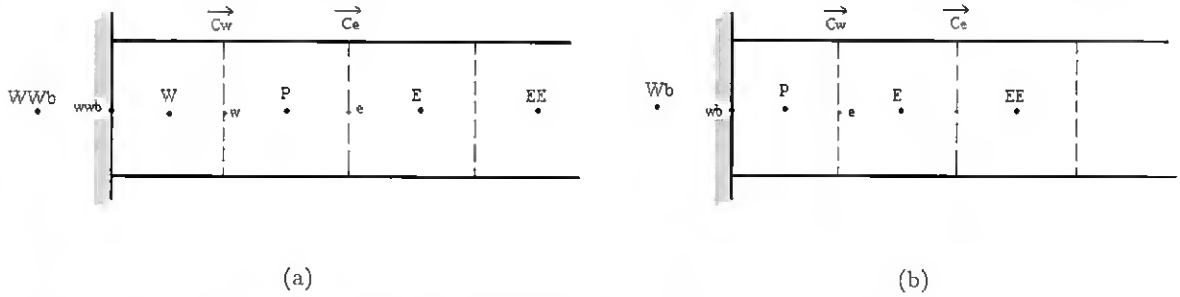


Figura 4.2: VC's do nó de cálculo P nos casos: a) a face  $ww$  está na fronteira ( $wwb$ ) (caso I), b) a face  $w$  está na fronteira ( $wb$ ) (caso II).

caso II, é necessário usar uma expressão análoga a (4.18), para  $C_e > 0$ ,

$$c = (a\phi_E + b\phi_P + c\phi_{wb}) \quad (4.25)$$

só que agora os coeficientes  $a, b$  e  $c$ , mostrados na tabela (4.1), não se adequam, porque os nós não são equidistantes. De facto, na figura 4.2b pode-se ver que o nó  $wb$  na fronteira está a uma distância de  $\Delta x/2$  do nó P, enquanto que o nó E está a uma distância de  $\Delta x$  do mesmo nó. É então preciso, neste caso II, determinar os valores de  $a, b$  e  $c$ , quando os nós não são equidistantes. Os esquemas Upwind II e Quick baseiam-se em interpolações linear e quadrática, respectivamente, de modo que a determinação dos coeficientes  $a, b$  e  $c$  é simples. O esquema Fromm's é obtido como a média aritmética entre o esquema DC (esquema de Lax-Wendroff) e o esquema Upwind II, e, portanto, os seus coeficientes podem também ser facilmente determinados. Por último, o esquema New é mais complexo porque

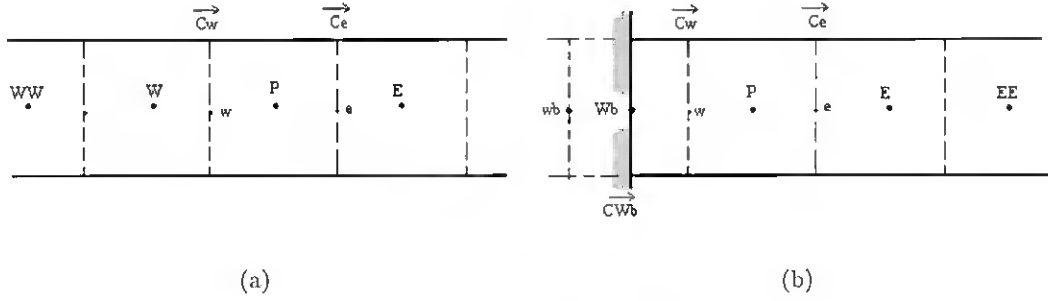


Figura 4.3: VC's do nó de cálculo  $P$  nos casos: a) em que não são necessários os valores de  $\phi$  nas fronteiras (caso III - nós equidistantes), b) O nó  $W$  está na fronteira ( $Wb$ ) (caso IV)

ele tem origem na decomposição da derivada obtida usando um polinómio interpolador na forma de Newton, com diferenças divididas. Antes de prosseguir, refira-se que a designação New foi escolhida não pelo facto de este ser um esquema novo. Como se verá mais adiante, o esquema New é obtido mediante um procedimento *standard* (polinómios de Newton) e por isso obviamente nunca pode ser considerado novo. No entanto até onde foi possível saber não há nenhuma implementação deste esquema na forma que será exposta a seguir. É nesse contexto que se decidiu atribuir a este esquema o nome de New. De acordo com este método, a primeira derivada  $d\phi/dx$ , no ponto  $P$  da figura 4.3a pode ser calculada pela expressão:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_P \approx \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\right)_P = P'_3(x) = \frac{2\phi_E + 3\phi_P - 6\phi_W + \phi_{WW}}{6h} \quad (4.26)$$

que corresponde às diferenças finitas regressivas de 3º grau ( $C_e > 0$  e  $C_w > 0$ ). A expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$h \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\right)_P = \phi_e - \phi_w = \frac{1}{3}\phi_E + \frac{1}{2}\phi_P - \phi_W + \frac{1}{6}\phi_{WW} \quad (4.27)$$

Para obter as expressões de  $\phi$  nas faces do VC centrado em  $P$ , e para preservar a forma conservativa de representação da equação (3.21), a expressão anterior deve ser escrita na forma:

$$\phi_e - \phi_w = \left(\frac{1}{3}\phi_E + \frac{5}{6}\phi_P - \frac{1}{6}\phi_W\right) - \left(\frac{1}{3}\phi_P + \frac{5}{6}\phi_W - \frac{1}{6}\phi_{WW}\right) \quad (4.28)$$

Assim se obtiveram os coeficientes do esquema New  $a = 1/3$ ,  $b = 5/6$  e  $c = -1/6$ , já antes mostrados na tabela (4.1). Note-se que a soma de todos os coeficientes de  $h \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\right)_P$  é igual a 0, e que a soma dos coeficientes do valor de  $\phi$  numa interface (por exemplo  $\phi_e$ ) é sempre igual a 1.

Quando os nós não são equidistantes não é possível obter, para o esquema New, uma expressão para  $\phi_w$  na figura 4.2b, caso II. No entanto, pode-se fazer a mesma analogia que para o esquema Quick. Este esquema pode ser interpretado como a interpolação linear de  $\phi_P$  e  $\phi_E$  (equivale a utilizar DC de primeira ordem), corrigida com a curvatura a montante, ponderada com um factor  $C_{cur}$  (factor de curvatura). Este factor é constante, não dependendo do facto dos nós serem, ou não, equidistantes. Esta análise pode ser estendida aos restantes esquemas de três pontos. Assim, quando os nós são equidistantes, os esquemas Quick, Fromm's e New podem ser dados pela expressão geral (caso de  $\phi_e$  para  $C_e > 0$ ):

$$\phi_e = \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2} - C_{cur}(\phi_E - 2\phi_P + \phi_W) \quad (4.29)$$

em que  $C_{cur} = 1/8$  para o esquema Quick,  $C_{cur} = 1/4$  para o Fromm's e  $C_{cur} = 1/6$  para o New. Note-se que a curvatura está associada à 2ª derivada.

O problema dos nós não equidistantes na fronteira também afecta a segunda derivada (termo difusivo) da equação de Burger (4.23). Usando o mesmo procedimento para obter  $d\phi/dx$  do esquema New, mas desta vez para a segunda derivada calculada no nó P da figura 4.3a (caso III) obtém-se a conhecida expressão das diferenças finitas de segunda ordem,

$$h^2 \left( \frac{\Delta^2 \phi}{\Delta x^2} \right)_P = \phi_E - 2\phi_P + \phi_W \quad (4.30)$$

Esta derivada tem um erro de truncatura igual a:

$$\varepsilon = \frac{1}{12} U_{xxxx} \Delta x^2 + \frac{1}{12} U_{xxxxx} \Delta x^2 \quad (4.31)$$

No caso II, a expressão anterior modifica-se, passando a ser

$$h^2 \left( \frac{\Delta^2 \phi}{\Delta x^2} \right)_P = \frac{4}{3} \phi_E - 4\phi_P + \frac{8}{3} \phi_{wb} \quad (4.32)$$

e com um erro de truncatura dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{6} U_{xxx} \Delta x + \dots \quad (4.33)$$

Assim, chega-se à conclusão que a discretização da segunda derivada  $U_{xx}$  junto da fronteira, passa de 2ª para 1ª ordem. Portanto, mesmo que seja usado um esquema bastante preciso para os termos advectivos, se o problema da segunda derivada  $U_{xx}$  na fronteira não for resolvido não se verificará uma melhoria nos resultados.

A modificação de  $U_{xx}$ , para o nó P do caso II, permite determinar a nova equação geral, análoga a (4.29), para o cálculo de  $\phi$  nas faces adjacentes às fronteiras:

$$\phi_e = \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2} - C_{cur} \left( \frac{4}{3} \phi_E - 4\phi_P + \frac{8}{3} \phi_{wb} \right) \quad (4.34)$$

Na tabela a seguir são dadas as expressões para o cálculo de  $\phi_e$  do caso II, para  $C_e > 0$ .

Tabela 4.3: Expressões para o cálculo de  $\phi_e$  dos caso II (figura (4.2b)) para  $C_e > 0$ .

Esquema	$\phi_e$ para o caso III	$\phi_e$ para o caso II
Upwind II	$\frac{3}{2} \phi_E + \frac{1}{2} \phi_W$	$2\phi_P - \phi_{wb}$
Quick	$\frac{3}{8} \phi_E + \frac{3}{4} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_W$	$\frac{1}{3} \phi_E + \phi_P - \frac{1}{3} \phi_{wb}$
Fromm's	$\frac{1}{4} \phi_E + \phi_P - \frac{1}{4} \phi_W$	$\frac{1}{4} \phi_E + \frac{5}{4} \phi_P - \frac{1}{2} \phi_{wb}$
New	$\frac{1}{3} \phi_E + \frac{5}{6} \phi_P - \frac{1}{6} \phi_W$	$\frac{5}{18} \phi_E + \frac{7}{6} \phi_P - \frac{4}{9} \phi_{wb}$

Uma vez conhecidas as expressões para calcular as variáveis em todas as interfaces adjacentes, pode-se fazer um estudo das diferentes combinações possíveis (ver expressão (4.18)). Nas tabelas 4.4, 4.5 e 4.6, podem-se ver as diferentes expressões para calcular a primeira derivada advectiva para os casos III, II e I, respectivamente. No caso III (tabela 4.4), o esquema New passa de 3º para 2º grau de precisão, quando os fluxos advectivos têm sinais opostos, sendo o esquema Quick o que menos

Tabela 4.4: Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o nó P do caso III (figura 4.3a).

Esquema	$C_e > 0$ e $C_w > 0$	$C_e > 0$ e $C_w < 0$	$C_e < 0$ e $C_w > 0$
Upwind II	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{3}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{5}{6}\phi'''_P \Delta x^2$
Quick	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{24}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{24}\phi'''_P \Delta x^2$
Fromm's	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{12}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{3}\phi'''_P \Delta x^2$
New	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{12}\phi'''_P \Delta x^3$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$

se modifica em todos os casos. Se os fluxos são convergentes, todos os esquemas têm uma precisão idêntica à das DC de 1ª ordem. Se os fluxos são divergentes, ( $C_w < 0$   $C_e > 0$ ), o Quick é claramente o esquema mais preciso.

No caso I (tabela 4.5), quando ( $C_w > 0$  e  $C_e < 0$ ), as expressões são idênticas às da situação similar na tabela anterior. Devido ao bom comportamento do Quick junto da fronteira (no mesmo caso I) surgiu a ideia de combinar a expressão de  $\phi$ , para os nós adjacentes à fronteira ( $\frac{1}{3}\phi_E + \phi_P - \frac{1}{3}\phi_w b$ ,  $C_{cur} = 1/8$ ), com outros esquemas. A combinação mais vantajosa obteve-se com o New, que embora perca um grau de precisão em relação ao caso III, mantém-se tão bom como o Quick. Todos os esquemas, exceptuando o Upwind II, são de 2ª ordem.

Tabela 4.5: Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o caso II (figura 4.2a).

Esquema	$C_e > 0$ e $C_w > 0$	$C_e > 0$ e $C_w < 0$	$C_e < 0$ e $C_w > 0$
Upwind II	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{8}\phi'''_P \Delta x$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{8}\phi'''_P \Delta x$
Quick	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{16}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{16}\phi'''_P \Delta x^2$
Fromm's	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{5}{16}\phi'''_P \Delta x$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{16}\phi'''_P \Delta x$
New ( $C_{cur} = 1/6$ )	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{36}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{17}{54}\phi'''_P \Delta x^2$
New ( $C_{cur} = 1/8$ )	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{16}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{24}\phi'''_P \Delta x^2$

O caso II da tabela 4.6 é o mais importante, pois é onde se pode constatar claramente o efeito devastador na fronteira, quando os nós não são equidistantes. Todos os esquemas, exceptuando o Quick e parcialmente o New, passaram a 1º grau de precisão. A superioridade do Quick é evidente. O efeito benéfico da combinação de New com a expressão de  $C_{cur} = 1/8$ , pode ser constatado quando ( $C_e < 0$ ), pois conseguiu-se que não descasse até ao 1º grau de precisão.

Tabela 4.6: Derivadas advectivas discretizadas com diferentes esquemas para o caso I (ver figura 4.2b).

Esquema	$C_e > 0$	$C_e < 0$
Upwind II	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{4}\phi'''_P \Delta x$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{3}{4}\phi'''_P \Delta x$
Quick	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{12}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{48}\phi'''_P \Delta x^2$
Fromm's	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{16}\phi'''_P \Delta x$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{8}\phi'''_P \Delta x$
New ( $C_u = 1/6$ )	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{24}\phi'''_P \Delta x$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{24}\phi'''_P \Delta x$
New ( $C_u = 1/8$ )	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P + \frac{1}{12}\phi'''_P \Delta x^2$	$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \phi'_P - \frac{1}{6}\phi'''_P \Delta x^2$

Se se adoptam os esquemas Quick, ou New ( $C_{cur} = 1/8$ ), para os termos advectivos, então junto

das fronteiras o problema da degradação do grau de precisão associado aos termos advectivos fica resolvido. Pelo menos, o 2º grau de precisão fica sempre garantido. Neste caso, de acordo com a expressão (4.33), o esquema de discretização da segunda derivada da difusão é o responsável principal pela descida do grau de precisão da equação modificada.

Antes de avançar para uma solução, achou-se conveniente esclarecer alguns detalhes do caso IV. Este caso, com nós equidistantes, é melhor em termos de precisão do que os casos I e II. Para tornar os nós equidistantes, requere-se mais 1 ponto fora da fronteira, que equivale a  $Wb$  no caso II. A solução mais lógica seria colocar o nó  $W$  na fronteira (passa a ser  $Wb$ ), como é mostrado na figura 4.3b (caso IV). O valor de  $\phi$  na face  $w$  do caso IV  $\phi_w$  poderia ser sempre calculado por exemplo com o Quick, usando  $\phi_{Wb}$ ,  $\phi_P$  e  $\phi_E$ , mediante a expressão de  $\phi_w$  (4.18) para o caso progressivo ( $C_w < 0$ ),

$$\phi_w = \frac{3}{8}\phi_{Wb} + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_E \quad (4.35)$$

Esta expressão pode ser sempre usada sem grandes penalizações, mesmo quando  $C_w < 0$ , pois a tabela 4.4 mostra que o esquema Quick é mais ou menos insensível às diferentes combinações dos sinais dos fluxos. Assim, chega-se à conclusão que no caso IV o problema da advecção na fronteira não levanta grandes dificuldades. Pelo menos, usando os esquemas Quick ou New, a 1ª derivada advectiva é calculada com um esquema de 2º grau de precisão.

Antes de continuar, é conveniente analisar uma questão que se coloca naturalmente: porque não calcular  $\phi_w$  no caso IV com DC, em vez de usar o esquema Quick (4.35)? É fácil mostrar que não é aconselhável fazer isto. Recorrendo às DC para determinar  $\phi_w$ , tem-se que  $\phi_w = (\phi_{Wb} + \phi_P)/2$ . Recorrendo ao Quick para  $\phi_e$  (tome-se  $C_e > 0$ ), chega-se ao seguinte esquema, de 1º grau de precisão, para calcular a 1ª derivada advectiva:

$$\phi'_P = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \approx \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\right)_P \cong \phi'_P - \frac{1}{8}\phi''_P\Delta x + \dots \quad (4.36)$$

o que constitui um resultado nada satisfatório.

Voltando à questão do caso IV, note-se que as expressões (4.32) e (4.33) mostram que o verdadeiro problema quando os nós não são equidistantes junto das fronteiras reside na discretização da segunda derivada dos termos de difusão. Mais um argumento para usar o caso IV (nós equidistantes). De facto, se a condição de fronteira for do tipo Dirichlet (ver figura (4.3b)), o valor de  $\phi_{Wb}$  é dado, e a 2ª derivada da difusão no nó  $P$  pode ser calculada com a expressão (4.30), não havendo portanto, degradação do grau de precisão. Se a condição de fronteira é do tipo von Neumann, não é necessário calcular  $\phi_{Wb}$  porque o fluxo

$$\phi'_{Wb} = (\partial\phi/\partial x)_{Wb} \quad (4.37)$$

é dado e, portanto, imposto na fronteira<sup>5</sup>  $Wb$ . Deste modo, fica bem esclarecida a superioridade do caso IV em relação ao caso II, tanto na componente numérica advectiva como na difusiva.

O que fazer para resolver, ou pelo menos atenuar o problema? O valor de  $\phi_{Wb}$  (ver figura 4.2b, caso II) pode ser determinado por extrapolação directa, usando polinómios na forma de Newton. A extrapolação linear, quadrática, cúbica, etc..., usando os pontos mais próximos, é uma das duas soluções implementadas. Estes polinómios foram determinados analiticamente, usando a definição de

<sup>5</sup>Se o valor de  $\phi_{Wb}$  for necessário para outras finalidades, ele pode ser calculado igualando (4.37) à derivada Upwind I:  $(\partial\phi/\partial x)_{Wb} \approx (\phi_P - \phi_{Wb})/\Delta x$ .

diferenças divididas, e têm o seguinte aspecto (para o caso II):

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x_{wb}) \approx +2\phi(x_{wb}) - 2\phi(x_P) \\ \phi(x_{wb}) \approx +\frac{8}{3}\phi(x_{wb}) - 2\phi(x_P) + \frac{1}{3}\phi_{x_E} \\ \phi(x_{wb}) \approx +\frac{48}{15}\phi(x_{wb}) - 3\phi(x_P) + \phi(x_E) - \frac{1}{5}\phi(x_{EE}) \\ \phi(x_{wb}) \approx +\frac{384}{105}\phi(x_{wb}) - 4\phi(x_P) + 2\phi(x_E) - \frac{4}{5}\phi(x_{EE}) + \frac{3}{21}\phi(x_{EEE}) \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Note-se que se o cálculo é feito para a fronteira oposta, i.e, para o valor de  $\phi(x_{eb})$ , então o sinal dos coeficientes em (4.38) é oposto. Isto só é verdade para as derivadas ímpares.

A segunda solução consiste num método que é descrito sucintamente a seguir. Primeiramente constrói-se um polinómio interpolador na forma de Newton. A seguir deriva-se o polinómio, e determina-se a derivada no ponto  $wb$  (caso II). O grau de precisão do cálculo da derivada depende da ordem do polinómio. Assumindo que a distância entre os nós é  $\Delta x = h$ , as derivadas de ordem 1,2,3 e 4 no ponto  $wb$ , são calculadas pelas expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} hP'_1(x_{wb}) = -2\phi(x_{wb}) + 2\phi(x_P) \\ hP'_2(x_{wb}) = -\frac{8}{3}\phi(x_{wb}) + 3\phi(x_P) - \frac{1}{3}\phi_{x_E} \\ hP'_3(x_{wb}) = -\frac{46}{15}\phi(x_{wb}) + \frac{15}{4}\phi(x_P) - \frac{5}{6}\phi(x_E) + \frac{3}{20}\phi(x_{EE}) \\ hP'_4(x_{wb}) = -\frac{1898}{525}\phi(x_{wb}) + \frac{99}{20}\phi(x_P) - \frac{61}{30}\phi(x_E) + \frac{87}{100}\phi(x_{EE}) - \frac{6}{35}\phi(x_{EEE}) \end{array} \right. \quad (4.39)$$

Uma das propriedades destes polinómios é que a soma dos seus coeficientes é sempre igual a 0. Usando um procedimento análogo para as segundas derivadas, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2 P''_2(x_{wb}) = \frac{3}{8}\phi(x_{wb}) - 4\phi(x_P) + \frac{4}{3}\phi(x_E) \\ h^2 P''_3(x_{wb}) = \frac{24}{5}\phi(x_{wb}) - 8\phi(x_P) + 4\phi(x_E) - \frac{4}{5}\phi(x_{EE}) \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Conhecendo o valor da 1ª e 2ª derivadas em  $wb$ , pode-se determinar  $\phi_{wb}$ , usando uma série de Taylor,

$$\phi(x_{wb}) \approx \frac{1}{2}P'_n(x_{wb})h + \frac{1}{8}P''_n(x_{wb})h^2 \quad (4.41)$$

O grau de precisão das derivadas mais adequado oscila entre o 3º e o 4º.

No capítulo 4, estes dois métodos de extrapolação serão testados, com diferentes esquemas, no caso do escoamento dentro de uma cavidade quadrada com uma parede móvel de Ghia et al. (1982).

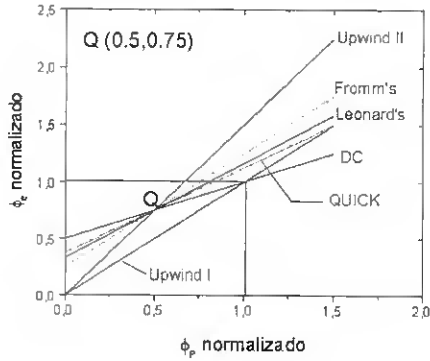
#### 4.5.2 Esquemas Compostos de Alta Resolução (ECAR)

Uma forma de contornar os problemas da difusividade numérica, consiste em usar os chamados esquemas FBS (*Flux Blending Schemes*), ou esquemas compostos, baseados no comportamento local do escoamento. O esquema Híbrido, já anteriormente descrito, é um bom exemplo destes esquemas. Neste caso, o critério de composição é o número de Peclet. No entanto, a alternativa do esquema Híbrido para evitar as oscilações espúrias para  $Pe > 2$ , é o esquema Upwind I, o qual, como já foi referido, é devastadoramente difusivo.

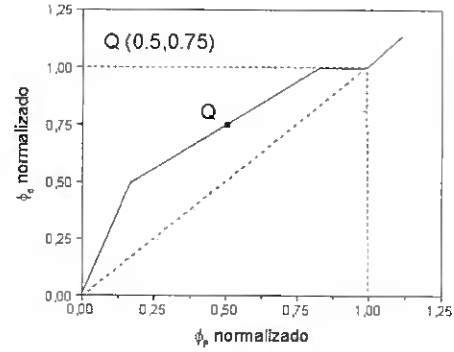
Em alternativa ao esquema Híbrido, para evitar as oscilações, existem os Esquemas Compostos de Alta Resolução (ECAR). Estes esquemas baseiam-se em critérios de monotonicidade, que limitam os fluxos através das faces dos VC's de modo a impedir a ocorrência de oscilações de origem numérica. A forma mais usual e cómoda de implementar estes esquemas, é mediante a formulação das variáveis normalizadas (FVN). Na tabela 4.7 mostram-se os esquemas de discretização dos termos advectivos na forma FVN (foram usados os coeficientes da tabela 4.1). As funções mostradas na tabela (4.7) referem-se a  $\phi_e$ , quando  $C_e > 0$ .

Tabela 4.7: Relações funcionais de  $\phi_e$  na forma original e em FVN (ver figura 4.4).

Esquema	$\phi_e$ original	$\phi_e$ normalizada
Upwind I	$\phi_P$	$\phi_P$
Upwind II	$\frac{3}{2}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W$	$\frac{3}{2}\phi_P$
DC	$\frac{1}{2}\phi_P + \frac{1}{2}\phi_E$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi_P$
Quick	$\frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W$	$\frac{3}{8} + \frac{3}{4}\phi_P$
Fromm's	$\frac{1}{4}\phi_E + \phi_P - \frac{1}{4}\phi_W$	$\frac{1}{4} + \phi_P$
New	$\frac{1}{3}\phi_E + \frac{5}{6}\phi_P - \frac{1}{6}\phi_W$	$\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\phi_P$



(a)



(b)

Figura 4.4: (a) Representação gráfica das funções de  $\tilde{\phi}_e = f(\tilde{\phi}_P)$ , mostradas na tabela 4.7, (b) Esquema composto de alta resolução Smart (Gaskell e Lau, 1988).

A relação funcional dos esquemas da tabela 4.7 está representada na figura 4.4. A formulação FVN, além de simplificar a implementação de diferentes esquemas, constitui uma boa ferramenta para testar a sua precisão e difusividade. Por exemplo, Leonard (1979) mostra que qualquer esquema cuja relação funcional intersekte o ponto  $Q$  é, pelo menos, de 2º grau de precisão, e que, se o declive em  $Q$  é 0.75, então o referido esquema é de 3º grau. Geralmente, os esquemas cuja relação funcional está próxima de  $\tilde{\phi}_e = \tilde{\phi}_P$  (Upwind I) têm tendência para a difusividade, e os que são próximos da relação  $\tilde{\phi}_e = 1$  têm tendência para a dispersividade. Na figura 4.4 pode-se constatar que o esquema DC, é de facto o mais dispersivo.

### Critérios de monotonicidade

Gaskell e Lau (1988), para o caso estacionário, formularam os critérios fundamentais de monotonicidade. Estes são:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\tilde{\phi}_P) & \text{tem que ser contínua} \\ f(\tilde{\phi}_P) = 0 & \text{para } \tilde{\phi}_P = 0 \\ f(\tilde{\phi}_P) = 1 & \text{para } \tilde{\phi}_P = 1 \\ f(\tilde{\phi}_P) < 1 \text{ e } f(\tilde{\phi}_P) > \tilde{\phi}_P & \text{para } 0 < \tilde{\phi}_P < 1 \\ f(\tilde{\phi}_P) = \tilde{\phi}_P & \text{para } \tilde{\phi}_P < 0 \text{ ou } \tilde{\phi}_P > 1 \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Uma análise imediata dos gráficos da figura 4.4, permite concluir que, nenhum esquema consegue cumprir as condições (4.42), e ser simultaneamente monótono e preciso. O esquema Upwind I cumpre todas as condições de monotonicidade, mas não é preciso. Portanto, para elevar a resolução sem produzir oscilações, é inevitável combinar diferentes esquemas de discretização. O esquema Smart (Gaskell e Lau, 1988), sendo um bom exemplo dos esquemas ECAR, será o escolhido para ser testado. Darwish (1993) desenvolveu um ECAR, que denominou Stoic, e fez vários testes com 6 esquemas diferentes, entre eles o Smart. De facto o Stoic é ligeiramente mais preciso que o Smart, mas diferentes testes realizados com o presente código permitiram concluir que o Smart, além de ser mais simples de implementar, é mais estável. O esquema Smart tem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\tilde{\phi}_P) = 3\tilde{\phi}_P & \text{para } 0 < \tilde{\phi}_P < \frac{1}{6} \\ f(\tilde{\phi}_P) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\tilde{\phi}_P & \text{para } \frac{1}{6} < \tilde{\phi}_P < \frac{5}{6} \quad \text{Quick} \\ f(\tilde{\phi}_P) = 1 & \text{para } \frac{5}{6} < \tilde{\phi}_P < 1 \quad \text{Upwind I} \\ f(\tilde{\phi}_P) = \tilde{\phi}_P & \text{para o resto do domínio} \end{array} \right. \quad (4.43)$$

### 4.5.3 Outras fontes de erro

#### Falsa difusão associada à malha

Outra fonte importante de erros é a chamada difusão associada à malha (De Vahl David e Mallison, 1972), que se manifesta quando o escoamento é oblíquo às linhas da malha, e quando o gradiente da variável em causa não é nulo na direcção normal ao escoamento.

O método de De Vahl Davis e Mallison (1972) estima a difusão associada à malha através da expressão:

$$\Gamma_\phi = \frac{\rho|\vec{V}|\Delta x\Delta z\sin(2\theta)}{4(\Delta z\sin^3\theta + \Delta x\cos^3\theta)} \quad (4.44)$$

em que  $\vec{V}$  é o vector velocidade resultante, e  $\theta$  o ângulo que este faz com  $x$  (varia entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ). O quociente entre  $\Gamma_\phi$  e a difusão real, define a difusão relativa. Esta última será considerada importante quando for maior do que 1. A difusão associada à malha é um fenómeno puramente multidimensional, não tendo lugar em escoamentos unidimensionais. O problema desta difusão é pouco relevante para números de Peclet baixos, pois a difusão física é predominante (os escoamentos marcadamente advectivos padecem mais deste mal). O seu efeito é dissipativo especialmente nas zonas de gradiente elevado. De acordo com (4.44), a difusão numérica anula-se quando o escoamento é paralelo a um dos eixos da malha, e atinge o seu valor máximo quando  $\theta = 45^\circ$ . De (4.44) pode-se deduzir também que o efeito negativo desta difusão pode ser reduzido aumentando o refinamento da malha de cálculo.

#### 4.5.4 Modificações no tratamento conservativo dos termos advectivos na malha não desfasada

Na análise da equação modificada feita nas secções anteriores, o termo advectivo é sempre representado como  $C\partial U/\partial x$ . Sendo as equações das velocidades (3.55), escritas na forma conservativa, a derivada advectiva tem a forma  $\partial(CU)/\partial x$ . É evidente que a análise anteriormente feita sobre o comportamento das derivadas advectivas está condicionada à precisão com que forem calculados os fluxos  $C_i$  em cada uma das faces do VC em causa. De acordo com (4.1), os termos advectivos são discretizados do seguinte modo:

$$\int_V \frac{\partial(\rho U_j \phi)}{\partial x_j} dS = C_e \phi_e - C_w \phi_w + C_n \phi_n - C_s \phi_s \quad (4.45)$$

No caso da malha ser não desfasada, o método de Rhie et al. (1983) permite calcular as velocidades (não corrigidas) nas faces, garantindo o acoplamento pressão-velocidade. Segundo o algoritmo SIMPLE, o passo a seguir é resolver a equação da correcção de pressão ( $p'$ ) para calcular os valores de  $p'$  nos nós, e com eles corrigir os fluxos advectivos nas faces dos VC's:

$$C_e = C_e^* + (\rho \Delta z d)_e (p'_P - p'_E) \quad (4.46)$$

em que  $C_e^*$  foi determinado com o método de Rhie et al. (1983).

Uma questão que se pode colocar é porque razão a preocupação com o problema do desacoplamento pressão velocidade (por vezes não justificada quando se usam esquemas de 3 pontos) não se estende também ao cálculo preciso da derivada advectiva? Veja-se que, uma vez corrigidos os fluxos com a expressão anterior, é preciso corrigir a velocidade, e para isso são necessárias as pressões nas faces dos VC's. Por exemplo, na face este da figura 4.1:

$$U_P = U_P^* + d_P (p'_w - p'_e) \quad (4.47)$$

onde  $p'_w$  e  $p'_e$  são as correcções de pressão nas faces oeste e este respectivamente. Mas estas correcções são determinadas normalmente com interpolação linear, i.e, com o esquema DC (malha sem expansão),

$$p'_w - p'_e = \left( \frac{p'_W + p'_P}{2} \right) - \left( \frac{p'_P + p'_E}{2} \right) \quad (4.48)$$

sem prestar muita atenção à precisão. Não é muito eficaz usar um esquema preciso para a derivada advectiva, e depois interpolar linearmente as pressões com (4.48), para determinar as velocidades nos nós de cálculo com (4.47), antes de resolver novamente as equações das velocidades (ver algoritmo o SIMPLE).

A ideia que se propõe consiste em calcular as velocidades nos nós, com a mesma expressão (4.47), mas, em vez de recorrer à interpolação linear (4.48), usa-se um dos esquemas de 3 pontos (Quick, Fromm's ou New), para calcular as pressões nas faces,

$$\begin{cases} p'_e = (ap'_E + bp'_P + cp'_W) \|S_e, 0\| - (ap'_P + bp'_E + cp'_{EE}) \|-S_e, 0\| \\ p'_w = (ap'_P + bp'_W + cp'_{WW}) \|S_w, 0\| - (ap'_W + bp'_P + cp'_E) \|-S_w, 0\| \end{cases} \quad (4.49)$$

Nas expressões anteriores,  $p'_w$  e  $p'_e$  são análogas a (4.18) e (4.19). Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , podem ser encontrados na tabela (4.1), e deverão ser os mesmos usados para calcular a derivada advectiva, ( $\partial\phi/\partial x_i$ ).

A seguir, em vez de usar (4.46) para corrigir os fluxos advectivos nas faces, estes são calculados directamente com as expressões similares à (4.2), mas para a malha não desfasada:

$$\begin{cases} C_e = (\rho \Delta z U)_e \\ C_w = (\rho \Delta z U)_e \end{cases} \quad (4.50)$$

em que agora  $U_e$  e  $U_w$  são determinados de modo análogo às correcções  $p'_e$  e  $p'_w$  (ver (4.49)).

$$\begin{cases} U_e = (aU_E + bU_P + cU_W) \|S_e, 0\| - (aU_P + bU_E + cU_{EE}) \|-S_e, 0\| \\ U_w = (aU_P + bU_W + cU_{WW}) \|S_w, 0\| - (aU_W + bU_P + cU_E) \|-S_w, 0\| \end{cases} \quad (4.51)$$

Como as velocidades e os fluxos advectivos nas faces ( $C_e$  e  $U_e$ ) são calculados com o mesmo esquema, é de esperar que a derivada calculada com a expressão:

$$\frac{\partial(\rho U \phi)}{\partial x} \approx \left( \frac{C_e \phi_e - C_w \phi_w}{\Delta x} \right)_P \quad (4.52)$$

seja mais precisa.

Para finalizar, propõe-se introduzir uma última modificação: nas equações das velocidades, em vez de calcular as pressões nas faces dos VC's com a interpolação linear (4.48), para determinar o gradiente de pressão, propõe-se fazê-lo de modo análogo ao método das correcções da pressão (ver (4.49)), acima referido. Por exemplo, na equação de  $U$  (4.2),  $p_e$  e  $p_w$  são dados por:

$$\begin{cases} p_e = (ap_E + bp_P + cp_W) \|S_e, 0\| - (ap_P + bp_E + cp_{EE}) \|-S_e, 0\| \\ p_w = (ap_P + bp_W + cp_{WW}) \|S_w, 0\| - (ap_W + bp_P + cp_E) \|-S_w, 0\| \end{cases} \quad (4.53)$$

Estas modificações serão testadas no caso do escoamento numa cavidade quadrada com uma parede móvel (Ghia et al., 1982), discutido na subsecção 5.1.1.

## 4.6 Método de resolução do sistema linear de equações discretizadas. Convergência e relaxação

O método de resolução usado no presente modelo é um híbrido entre Algoritmo Tridiagonal de Matriz de Thomas (TDMA) e o método de Gauss-Seidel denominado Gauss-Seidel linha a linha. Este método, extremamente simples e bastante divulgado (ver Patankar, 1980), tem uma taxa de convergência bastante superior à do Gauss-Seidel clássico, já que permite fazer varrimentos com o TDMA nas direcções  $x$  e  $z$ , com a sequência, periodicidade e alternância que se desejar. Este procedimento implica que a informação das condições de fronteira seja transmitida para o interior do domínio mais rapidamente, acelerando a convergência. Sem excluir a importância destas vantagens, a razão fundamental da escolha deste método prende-se com o facto de ele já ter sido modificado por Coelho et al. (1991) de modo a poder ser incorporado no seu método refinamento local. Mais tarde, será abordado este aspecto com mais detalhe.

Na secção 4.2 viu-se que a equação diferencial de conservação da quantidade de movimento, podia ser discretizada e apresentada do mesmo modo que a equação diferencial de transporte de um escalar, e na secção 4.3 chegou-se à mesma conclusão, para a equação de correcção da pressão. Tomando em conta estes factos, no presente modelo, todas as equações de transporte e conservação são resolvidas usando o mesma metodologia.

Como a equação da pressão é aproximada, a sua resolução, usando o método de Gauss-Seidel linha a linha, exige um número de varrimentos  $n_v$  maior do que o resto das equações. No entanto, verifica-se que  $n_v$  não precisa de ser constante. No início do processo de resolução, deve ser elevado, mas depois pode-se diminuir esse valor gradualmente, até um valor mais baixo (recomenda-se entre 3 e 10 para a pressão, e entre 1 e 3 para as velocidades), que depende das características do problema.

### 4.6.1 Convergência

O método de Gauss-Seidel linha a linha, embora seja um método híbrido entre o TDMA e o método de Gauss-Seidel ponto a ponto, exige as mesmas condições de convergência de este último método. Estas condições estão baseadas no critério de Scarborough (1958). Segundo Scarborough, as condições suficientes de convergência são:

$$\frac{\sum_i |a_i|}{|a_P|} \begin{cases} \leq 1 & \text{para todas as equações} \\ < 1 & \text{pelo menos para 1 equação} \end{cases} \quad (4.54)$$

Note-se que estas condições são suficientes e não necessárias, significando que em alguns casos, elas podem ser violadas, e no entanto haver convergência. Este critério está estreitamente relacionado com as regras enunciadas na subsecção 4.1.1. Por exemplo, a presença de um coeficiente  $b$  negativo na equação (4.6) implica que  $\frac{\sum_i |a_i|}{|a_P|} < 1$ . Se  $\sum_i |a_i| = |a_P|$  em todas as equações, então a condição  $\frac{\sum_i |a_i|}{|a_P|} < 1$  deve ser satisfeita à custa das fronteiras. Por exemplo, a condição de Dirichlet numa fronteira  $i$  implica que o coeficiente  $a_i$  nessa fronteira seja nulo e, portanto,  $\sum_i |a_i| < |a_P|$  ou  $\frac{\sum_i |a_i|}{|a_P|} < 1$ .

Considera-se como critério de convergência que o somatório do valor absoluto dos resíduos de todos os nós do domínio seja inferior a um certo valor  $\vartheta$ , para todas as variáveis dependentes,

$$\sum |R_\phi| \leq \vartheta R_{\phi, norm} \quad (4.55)$$

em que  $R_{\phi, norm}$  é o resíduo de normalização. Os valores de  $R_{\phi, norm}$ , usados para normalizar os resíduos são: o caudal à entrada para a equação da continuidade, ou o momento à entrada para as equações de conservação do momento. O resíduo em cada nó é calculado através da expressão:

$$R_\phi = \phi_P^n - \phi_P^{n-1} \quad (4.56)$$

em que  $n$  designa a iteração em curso.

### 4.6.2 Relaxação

A não linearidade das equações, e o facto de os termos temporais serem, por vezes, totalmente desprezados em escoamentos estacionários, exige, em geral, o uso de parâmetros de relaxação para as variáveis dependentes. Por exemplo, a relaxação da variável  $\phi_P$  da equação (4.6) é feita mediante a expressão:

$$\phi_P^n = \alpha_P \frac{\sum_i a_i \phi_i^{n-1} + c}{(a_P - b)} + (1 - \alpha_P) \phi_P^{n-1} \quad (4.57)$$

em que  $\alpha_\phi$  é o parâmetro de relaxação da variável  $\phi$ . Note-se que  $\phi_P^n$  é o mesmo da expressão (4.56). O tipo de método usado para resolver o sistema de equações lineares discretizadas pode também exigir algum tipo de relaxação. No presente modelo, as equações resolvidas e o método de resolução empregue requerem subrelaxação. Por vezes para se atingir a convergência é necessário aumentar gradualmente os coeficientes de subrelaxação de determinadas variáveis. Isto acontece frequentemente com as equações de transporte de  $k$  e  $\epsilon$ , quando se usam esquemas dispersivos como DC, Quick, Upwind II, etc, para discretizar os termos advectivos das mesmas. De entre o grande número de funções que podem ser usadas, no presente modelo foi escolhida a seguinte:

$$\alpha_\phi = \alpha_{\phi 0} (1 - e^{n:\gamma}) \quad (4.58)$$

em que  $n_i$  é o número de iterações e  $\gamma$  é um parâmetro que controla a velocidade com que  $\alpha_\phi$  tende para  $\alpha_{\phi 0}$  e é dado por:

$$\gamma = \ln \left( \frac{1}{1 - \gamma_0 / \alpha_{\phi 0}} \right) \quad (4.59)$$

A escolha da função 4.59 obedece a argumentos puramente empíricos. Note-se que  $\gamma_0$  é o parâmetro que permite definir  $\gamma$  e é o único que precisa de ser escolhido convenientemente. O presente modelo prevê também a possibilidade de criar um ficheiro de inicialização só com o esquema Upwind I para a advecção. Este esquema, produz uma solução pouco precisa mas sem oscilações. Esta é outra razão pela qual se escolheu a forma (refeq:4.37) de Hayase et al. (1992) para incorporar os esquemas advectivos.

A equação de correcção da pressão do algoritmo SIMPLE tem tendência a divergir, devido em parte ao carácter semi implícito do algoritmo SIMPLE, que tende a sobrevalorizar essa correcção. Por este motivo, utiliza-se um factor de sub-relaxação nessa correcção.

## 4.7 Integração temporal

Existem muitos esquemas numéricos de integração temporal. O método *Leap-Frog* por exemplo é de segundo grau de precisão espacial e temporal, mas devido à sua natureza *Leap-Frog*,  $\phi_j^{n+1}$  não depende de  $\phi_j^n$  (neste caso,  $n$  refere-se ao passo no tempo). Em consequência desenvolvem-se simultaneamente duas soluções independentes no tempo. Felizmente, este defeito pode ser controlado com o uso de filtros temporais (ver por exemplo Robert, 1966, e Asselin, 1972).

No entanto, a maior dificuldade, deste e muitos outros esquemas, prende-se com o facto da a estabilidade numérica estar condicionada pelo refinamento da malha. No caso do presente modelo, este aspecto é crítico, porque a integração temporal condiciona o nível de refinamento local e vice-versa. Os esquemas de integração temporal mais conhecidos para a integração de equações diferenciais em derivadas parciais são: a) totalmente explícito (*FE-Fully explicit*), b) Crank-Nicolson (CN) e c) totalmente implícito (*FI-Fully implicit*). Embora em alguma literatura o CN seja descrito como incondicionalmente estável do ponto de vista matemático, Patankar (1980) mostra, de maneira muito simples, que o mesmo pode gerar soluções fisicamente incorrectas. Destes 3 esquemas, só o FI é incondicionalmente estável, tendo a desvantagem de ser de primeiro grau de precisão. O método de refinamento local, para ser mais robusto e prático, requer o uso de um esquema incondicionalmente estável. O FI será um dos 2 esquemas adoptados no modelo. O segundo esquema adoptado é o (*FTLI -Fully Three Level Implicit*) (Fletcher, 1997), que é incondicionalmente estável, e tem 2º grau de precisão.

### 4.7.1 Esquema FI

A equação de transporte de um escalar (3.3) é integrada numericamente do seguinte modo:

$$\int_{\Delta S} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dSdt = \int_{\Delta S} \int_t^{t+\Delta t} \left( -\frac{\partial(\rho U_i \phi)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{\phi,t} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \right) dSdt \quad (4.60)$$

em que  $\Delta S = \Delta x \Delta z$ . A integração dos termos advectivos e difusivos já foi efectuada na secção 4.1. Então, de acordo com a equação (4.6), depois de integrar o membro esquerdo da equação anterior, obtém-se:

$$[(\rho\phi_P)^{n+1} - (\rho\phi_P)^n] \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} = \sum_i a_i \phi_i^{n+1} + c - (a_P - b) \phi_P^{n+1} \quad (4.61)$$

Note-se que, na equação anterior, em  $\phi_P$  e  $\phi_i$ , usa-se o índice superior  $n + 1$ , correspondente ao tempo  $t + \Delta t$ , excepto no termo  $(\rho\phi_P)^n$  do membro esquerdo. Isto significa que a incógnita  $\phi_P^{n+1}$  (no passo de tempo  $t + \Delta t$ ) é determinada com os valores incógnitos dos vizinhos  $\phi_i^{n+1}$ , sendo necessário resolver um sistema  $N$  de equações ( $N$ -número total de pontos). Deste facto deriva o adjectivo implícito. No outro caso extremo, o explícito, a equação (4.61) tem o seguinte aspecto:

$$[(\rho\phi_P)^{n+1} - (\rho\phi_P)^n] \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta t} = \sum_i a_i \phi_i^n + c - (a_P - b) \phi_P^n \quad (4.62)$$

em que agora todos os termos, exceptuando  $(\rho\phi_P)^{n+1}$ , têm  $\phi$  com coeficientes superiores  $n$ , referentes ao instante  $t$ . Isto significa que  $\phi_P^{n+1}$  é calculado com os valores conhecidos de  $\phi_i^n$ . Por outras palavras, a incógnita  $\phi_P^{n+1}$  é calculada directamente com os valores conhecidos  $\phi_i^n$ , daí o nome de esquema totalmente explícito.

Voltando ao esquema FI, reagrupando os termos na equação (4.62), obtém-se uma equação idêntica a (4.6), i.e,

$$(a_P - b') \phi_P^{n+1} = \sum_i a_i \phi_i^{n+1} + c' \quad (4.63)$$

com a diferença que agora  $c$  e  $b$  na equação (4.63) são substituídos por  $c'$  e  $b'$ , dados por:

$$c' = c + a_P^n \phi_P^n \quad b' = b - a_P^n \quad \text{com} \quad a_P^n = \frac{\rho \Delta x \Delta z}{\Delta t} \quad (4.64)$$

#### 4.7.2 Esquema FTLI

O esquema FTLI (Fletcher, 1997) consiste na representação da derivada  $\partial(\rho\phi)/\partial t$ , com o esquema Upwind II (diferenças finitas regressivas de segunda ordem). Assim,

$$\left( \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P \approx \left( \frac{3}{2} (\rho\phi)_P^{n+1} - 2(\rho\phi)_P^n + \frac{1}{2} (\rho\phi)_P^{n-1} \right) / \Delta t \quad (4.65)$$

As expressões equivalentes a (4.64) são, neste caso:

$$c' = c + a_P^n \left( 2\phi_P^n - \frac{1}{2}\phi_P^{n-1} \right) \quad b' = b - \frac{3}{2}a_P^n \quad \text{com} \quad a_P^n = \frac{\rho \Delta x \Delta z}{\Delta t} \quad (4.66)$$

## 4.8 Refinamento local de malhas

No presente modelo foi implementado um método de refinamento local desenvolvido por Coelho et al. (1991). O método, inicialmente concebido para esquemas de discretização da derivada advectiva de 2 pontos<sup>6</sup>, foi estendido a esquemas de 3 pontos, que são mais precisos. O refinamento local é usado nas zonas onde o comportamento das variáveis dependentes tende a gerar erros numéricos elevados, não sendo necessário estender o refinamento dessas zonas a todo o domínio.

No método de Coelho et al. (1991) o domínio computacional é discretizado usando uma malha inicial (ou malha base) cartesiana. O refinamento é feito dividindo simetricamente os VC's em ambas as direcções, obtendo-se 4 novos VC's menores. Para obter o nível de refinamento desejado, basta repetir este procedimento sucessivamente, mas com a condição de manter a razão de refinamento constante e

<sup>6</sup>O número de pontos refere-se à quantidade de nós de cálculo necessários para calcular o valor de  $\phi$  na face de um VC.

igual a 2. Este método torna impraticável o uso de vectores bidimensionais para identificar os VC's. Por este motivo, a identificação é feita por um único índice, sendo toda a informação armazenada em vectores unidimensionais. Para o tratamento das interfaces, no caso das derivadas advectivas de 2 pontos, o autor definiu 3 pontos auxiliares (ver figura 4.5); 2 no lado menos refinado da interface (S1 e S2) e 1 no lado mais refinado (N).

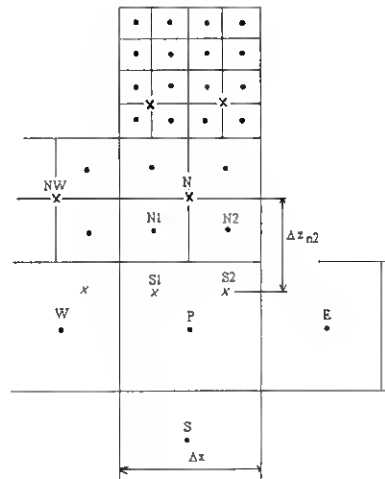


Figura 4.5: VC do nó P, situado no lado menos refinado da malha (Coelho et al., 1991).

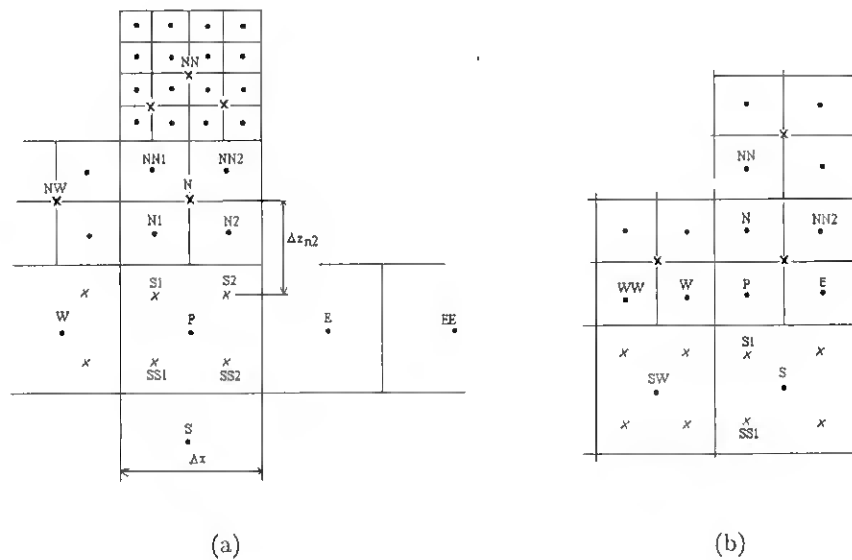


Figura 4.6: VC do nó P, situado: a) no lado menos refinado da malha, b) no lado mais refinado da malha. Método de refinamento de (Coelho et al., 1991) modificado.

Em todas as figuras, os nós de cálculo estão representados com pontos, e os nós auxiliares com cruzeiros. Para modificar o método de 2 pontos, foi necessário incorporar mais 3 pontos auxiliares SS1, SS2 e NN (ver figura 4.6a). Todos estes pontos auxiliares são numerados e armazenados sequencialmente em memória, depois do número de nós de cálculo (igual ao número de VC's). Assim, o número total

de pontos será igual à soma dos nós de cálculo, mais os pontos auxiliares. A ordem de armazenamento é a seguinte (ver figura 4.6a): 1) nós de cálculo, 2) nós do tipo N, 3) nós do tipo NN, 4) nós do tipo S1, 5) nós do tipo SS1. Depois, são definidos 4 vectores onde são registados os vizinhos norte, sul, este e oeste de todos os nós da malha, incluindo os pontos auxiliares, e mais um vector onde são registados os vizinhos dos nós do tipo NN (serão denominados  $n'$ ,  $s'$ ,  $e'$  e  $w'$ ). A seguir, é definido mais um vector, para indicar a que volume de controlo pertencem os nós de cálculo de VC's gerados pelo refinamento de VC's da malha base, por exemplo (ver figura 4.6a): o nó de cálculo N1 pertence ao VC N. No mesmo vector é armazenada, sequencialmente, a informação sobre a que VC's pertencem os pontos auxiliares que estão do lado menos refinado (S1, S2, SS1 e SS2). Um último vector é definido para indicar a posição de S1, S2, SS1 e SS2, necessária para determinar, por interpolação bilinear, os valores das variáveis nos mesmos.

A estrutura dos vectores pode ser exemplificada pelas interfaces esquematizadas na figura 4.6b. A fim de resolver as equações de transporte no nó P, é necessário saber que os pontos auxiliares S1 e SS1 pertencem ao VC associado ao ponto S, e que S1 e SS1, estão localizados nos quadrantes superior e inferior esquerdo, respectivamente. Estas duas informações retiram-se dos dois vectores definidos para este fim. É preciso também saber que o nó P, situado no lado mais refinado da interface, tem o nó N como vizinho norte, o nó S1 como vizinho sul, o nó E como vizinho este, e o nó W como vizinho oeste. Esta informação é retirada do vector onde estão guardados os vizinhos norte, sul, este e oeste de todos os nós. Para podermos usar esquemas de 3 pontos é preciso saber que o nó P da figura 4.6a tem como vizinhos  $n'$ ,  $s'$ ,  $e'$  e  $w'$ , os pontos NN, SS1, EE e WW, respectivamente. Esta informação está registada no vector criado para este fim.

Os valores de uma variável arbitrária  $\phi$  nos nós auxiliares, são calculados por interpolação bilinear, usando os seu 4 vizinhos  $n$ ,  $s$ ,  $e$ , e  $w$ . Por exemplo, na figura 4.6a, o valor de  $\phi$  no ponto auxiliar N é determinado usando os nós vizinhos N1, N2, NN1 e NN2. A denominação dos vizinhos dos nós auxiliares não tem qualquer correlação com a localização física de norte sul, este e oeste. De modo análogo, na mesma figura 4.6a o valor de  $\phi$  em S1 é determinado usando os valores de  $\phi$  em W, P, NW e N. Junto da fronteira, os VC's são dispostos de modo tal que a face coincide com a mesma. O nó fictício fora da fronteira é identificado com um número negativo. No presente modelo, essa identificação é feita como se descreve a seguir. Os vizinhos do tipo  $n$ ,  $s$ ,  $e$  e  $w$ , fora das fronteiras exteriores do domínio físico, representam-se com o índice (-1) e as fronteiras físicas localizadas no interior. Para os vizinhos fora das fronteiras do tipo  $n'$ ,  $s'$ ,  $e'$ , e  $w'$ , o modo de representação é idêntico, mas com o índices (-3) para fronteiras exteriores, e (-4) para as fronteiras físicas interiores.

Todos os vectores são gerados automaticamente, sendo necessário fornecer no início as coordenadas da malha base e o nível de refinamento desejado em cada VC dessa malha. A ideia inicial de Coelho et al., (1991), também aqui utilizada, de armazenar as variáveis dependentes e os restantes dados em vectores unidimensionais tem as seguintes vantagens: a) permite um número arbitrário de níveis de refinamento nas regiões escolhidas sendo possível, por isso, resolver as equações simultaneamente para todo o domínio, independentemente do nível de refinamento, ao contrário do que acontece, por exemplo, com os métodos de sobreposição de malhas; b) Permite economizar memória, especialmente nos casos em que há obstáculos no interior do domínio físico, pois não haverá posições de memória desperdiçadas. Uma vantagem importante tem a ver com o facto de que os pontos auxiliares deste método são equidistante e portanto a degradação dos esquemas é atenuada. É claro que o processo de interpolação das variáveis nos nós auxiliares introduz incertezas, mas este aspecto é amplamente compensado pela economia de tempo de CPU.

### 4.8.1 Tratamento das interfaces

#### Discretização da equação diferencial de transporte de um escalar

Para VC's em contacto com interfaces com o mesmo nível de refinamento, a discretização da equação de transporte de um escalar segue a metodologia descrita em 4.1. Coelho et al. (1991) desenvolveram o método que a seguir se descreve. Para exemplificar, serão usadas as interfaces esquematizadas nas figuras 4.6a-b, mas o tratamento é idêntico para qualquer interface, dado que a razão de refinamento é sempre constante e igual a 2. No tratamento destas interfaces é preciso garantir que as quantidades a serem conservadas se conservem, tanto num conjunto arbitrário de VC's, como em todo o domínio físico. Para conseguir isto tem que se ter em conta que, se uma interface for dividida, os fluxos que passam através dela também têm de ser divididos, calculando-os do mesmo modo. Seguindo o raciocínio anterior, para a interface representada na figura 4.6a, a equação discretizada para o VC centrado em P pode ser escrita na seguinte forma:

$$(a_P - b)\phi_P = \sum_{i=1}^3 a_i\phi_i + a_{N1}(\phi_{N1} - \phi_{S1}) + a_{N2}(\phi_{N2} - \phi_{S2}) + c \quad (4.67)$$

em que o somatório inclui apenas as contribuições dos vizinhos sul, este e oeste, tal como o somatório que intervém no cálculo de  $a_P$ . Deste modo, o problema do tratamento de interfaces com diferentes níveis de refinamento foi resumido ao tratamento dos termos segundo e terceiro do membro direito da equação (4.67). Se  $\phi_P$  for subtraído e adicionado aos termos entre parêntesis da equação anterior, obtém-se:

$$(a_P - b)\phi_P = \sum_{i=1}^5 a_i\phi_i + a_{N1}(\phi_P - \phi_{S1}) + a_{N2}(\phi_P - \phi_{S2}) + c \quad (4.68)$$

em que o somatório inclui agora as contribuições dos nós  $S$ ,  $E$ ,  $W$ ,  $N1$  e  $N2$ , tal como o somatório que intervém no cálculo de  $a_P$ . Os termos entre parêntesis são tratados explicitamente, i.e., são incluídos no termo fonte  $c$ . Deste modo, a equação discretizada final tem uma forma similar à da equação discretizada (4.6). Tomando em conta que a implementação dos esquemas de 3 pontos é feita explicitamente usando upwind I como esquema base (ver secção 4.4.1), o coeficiente  $a_{N2}$  vem dado pela expressão:

$$a_{N2} = D_{n2} + \|\ -C_{n2}, 0\| \quad (4.69)$$

em que

$$D_{n2} = \left( \frac{\Gamma_\phi}{\Delta z} \right)_{n2} \frac{\Delta x}{2} \quad (4.70)$$

$$C_{n2} = (\rho W)_{n2} \frac{\Delta x}{2} \quad (4.71)$$

O coeficiente  $a_{N1}$  é calculado de modo análogo.

Uma metodologia semelhante é usada na discretização da equação de transporte para um VC, que está localizado no lado mais refinado da interface, como se esquematiza na figura 4.6b, onde o nó P ocupa a posição correspondente à do nó N1 da figura 4.6a. Neste caso, a equação discretizada para o VC centrado em P é dada por:

$$(a_P - b)\phi_P = \sum_{i=1}^3 a_i\phi_i + a_S(\phi_{S1} - \phi_P) + c \quad (4.72)$$

em que o somatório inclui os vizinhos E,W e N. Se  $\phi_S$  for subtraído e adicionado ao termos entre parêntesis do segundo membro, a equação anterior pode ser escrita na forma:

$$(a_P - b)\phi_P = \sum_{i=1}^4 a_i\phi_i + a_S(\phi_{S1} - \phi_S) + c \quad (4.73)$$

em que o somatório engloba agora também o vizinho S. O segundo termo do membro direito da equação anterior, é tratado explicitamente. Assim, de modo análogo ao caso anteriormente analisado, a equação (4.73) fica também com um aspecto similar ao da equação geral de transporte de um escalar (4.6). O método de incorporação dos esquemas de 3 pontos descrito em 4.4.1 não sofre modificações importantes. O mesmo raciocínio usado na equação (4.68), mas estendido também à direcção  $z$ , permite escrever o termo  $c$  na forma:

$$\begin{aligned} c = & - (a\phi_{N1} + (b-1)\phi_{S1} + c\phi_{SS1})\|C_{n1}\| + (a\phi_{S1} + (b-1)\phi_{N1} + c\phi_{NN1})\| - C_{n1}\| \\ & - (a\phi_{N2} + (b-1)\phi_{S2} + c\phi_{SS2})\|C_{n2}\| + (a\phi_{S2} + (b-1)\phi_{N2} + c\phi_{NN2})\| - C_{n2}\| \\ & + (a\phi_P + (b-1)\phi_S + c\phi_{SS})\|C_s\| - (a\phi_S + (b-1)\phi_P + c\phi_N)\| - C_s\| \\ & - (a\phi_E + (b-1)\phi_P + c\phi_W)\|C_e\| + (a\phi_P + (b-1)\phi_E + c\phi_{EE})\| - C_e\| \\ & + (a\phi_P + (b-1)\phi_W + c\phi_{WW})\|C_e\| - (a\phi_W + (b-1)\phi_P + c\phi_E)\| - C_e\| \end{aligned} \quad (4.74)$$

O método de Gauss-Seidel linha a linha, modificado por Coelho et al. (1991) para ser usado em malhas refinadas localmente, consiste em aumentar o número de varrimentos sempre que uma interface entre regiões com diferentes níveis de refinamento é encontrada, de modo a manter os sistemas de equações a resolver com uma matriz de coeficientes tridiagonal, possibilitando a aplicação do TDMA de Thomas. Este método não sofre nenhuma modificação quando são incorporados esquemas advectivos de três pontos.

#### 4.8.2 Critérios para o refinamento local

Para obter o máximo rendimento das vantagens que o refinamento pode oferecer é fundamental refinar a malha localmente, com maior ou menor nível, em dependência da sensibilidade da solução ao refinamento, i.e., é necessário de algum modo delimitar as zonas onde se prevê a ocorrência de erros numéricos e gradientes elevados. Para definir a estratégia de refinamento, foram usados 2 critérios: a) Estudo do comportamento da difusão associada à malha (ver De Vahl David e Mallison, 1972) (ver secção 4.5.3), b) estudo do comportamento dos erros numéricos, usando a técnica de extrapolação de Richardson. O refinamento local é feito de modo a serem satisfeitos simultaneamente, na medida do possível, os dois critérios.

#### Técnica de extrapolação de Richardson

A técnica de extrapolação de Richardson proposta por Caruso et al. (1985) permite, de maneira simples e eficiente, estimar os erros da solução numérica, e determinar a sua distribuição no domínio de cálculo. Este método baseia-se na expansão em série de Taylor do erro de solução  $\varepsilon_h$ , definido como a diferença entre a solução exacta e a solução numérica  $\phi_h$  calculada com uma malha de espaçamento  $h$ . Para os esquemas de 1º grau, a correspondente expansão em série de Taylor é dada por:

$$\varepsilon_h = \phi - \phi_h = a_1h + a_2h^2 + \dots \quad (4.75)$$

A solução numérica obtida com uma malha de espaçamento  $2h$  possui um erro,  $\varepsilon_{2h}$ , cuja expansão em série de Taylor é:

$$\varepsilon_{2h} = \phi - \phi_{2h} = a_12h + a_24h^2 + \dots \quad (4.76)$$

A subtracção das equações (4.75) e (4.76) dá:

$$\phi_h - \phi_{2h} = a_1 h + a_2 3h^2 + \dots \approx \varepsilon_h \quad (4.77)$$

Como os primeiros termos das equações (4.75) e (4.76) são idênticos, então as diferenças entre as soluções obtidas com as malhas de espaçamentos  $h$  e  $2h$ , constitui uma boa estimativa do erro de solução da malha mais fina com espaçamento  $h$ . Os valores de  $\phi_{2h}$ , necessários para fazer a subtracção, são obtidos por interpolação bilinear dos valores de  $\phi_h$  no centro de cada um dos 4 VC's da malha mais fina, que conformam um VC da malha mais grossa.

Um raciocínio análogo pode ser feito para os esquemas de grau superior de precisão, podendo-se facilmente demonstrar que:

$$\phi_h - \phi_{2h} = a_2 3h^2 + \dots \approx \varepsilon_h \quad (4.78)$$

O método de Richardson, apesar de ser aproximado, permite monitorizar a sensibilidade das diferentes zonas do domínio numérico ao refinamento da malha. Estabelecendo um critério de referência, como a normalização com o erro máximo obtido com a extrapolação mais grosseira, pode-se estudar o comportamento dos erros em dependência do nível de refinamento.

## 4.9 Coordenadas generalizadas ortogonais

### 4.9.1 Geração de malhas com coordenadas generalizadas ortogonais

Os escoamentos sobre superfícies complexas, tais como montanhas e vales, têm fronteiras computacionais que não coincidem com as fronteiras do domínio físico. Com o uso dos métodos de diferenças finitas, a imposição das condições de fronteira requerem métodos de interpolação complicados que, normalmente, degradam a precisão da solução numérica. Uma solução para este problema pode ser uma transformação de coordenadas do domínio físico  $(x, z)$  para um computacional uniforme e rectangular, em coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$ . O domínio computacional é obtido mediante a deformação do domínio físico. O domínio em coordenadas  $(\xi, \eta)$  é construído de modo tal que as linhas acompanham as fronteiras. Uma descrição detalhada sobre a geração de malhas pode ser encontrada em Fletcher (1997) e em Eça et al. (1999). Para gerar a malha  $(x, z)$ , devem ser impostos alguns constrangimentos:

- As linhas da malha da mesma família não se podem cruzar.
- A distribuição dos pontos da malha física gerada nestas linhas, deve ser o mais suave possível, evitando singularidades.

De entre as várias técnicas de geração de malhas foi escolhida, para ser implementada no presente código, a técnica do gerador elíptico, pela forma em que as equações geradoras são dadas. Este facto é conveniente para aplicar o método de refinamento local à geração de malhas em coordenadas generalizadas.

Para gerar uma malha, é necessário primeiramente definir um domínio computacional uniforme e rectangular  $(\xi, \eta)$ . A seguir, resolvem-se determinadas equações diferenciais (com  $x$  e  $z$  como variáveis dependentes), usando as condições de fronteira do domínio físico (por exemplo, coordenadas  $(x, z)$ ). Deste modo obtêm-se todos os pontos  $(x, z)$  do domínio físico. Por outras palavras, a cada nó  $(\xi, \eta)$  corresponde um  $(x, z)$  calculado. Uma vez conhecidos todos os  $(x, z)$ , podem-se calcular todos os parâmetros necessários para a resolução das equações do escoamento em estudo. Antes de descrever o gerador elíptico serão introduzidos, muito sucintamente, alguns conceitos necessários para a compreensão do método. A transformação de coordenadas é feita através da matriz Jacobiana. Por

exemplo, as primeiras derivadas das componentes  $U$  e  $W$  da velocidade, em função de  $x$  e  $z$ , são transformadas do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} U_x & U_z \\ W_x & W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\xi & U_\eta \\ W_\xi & W_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_z \\ \eta_x & \eta_z \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

onde a matriz Jacobiana é definida por:

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_z \\ \eta_x & \eta_z \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

e a matriz inversa de  $J$  ( $J^{-1}$ ) é dada por:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

O determinante da matriz Jacobiana denomina-se Jacobiano ( $|J|$ ), e pode ser geometricamente interpretado como o quociente entre a área do VC no domínio computacional e a correspondente área no domínio físico.  $|J|$  é dado por

$$|J| = \frac{1}{|J^{-1}|} = \frac{1}{(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)} \quad (4.82)$$

e as métricas relacionadas com os parâmetros de transformação (derivadas em  $(x, y)$ ) dadas por,

$$\xi_x = +|J|z_\eta \quad \xi_z = -|J|x_\eta \quad \eta_x = -|J|z_\xi \quad \eta_z = +|J|x_\xi \quad (4.83)$$

Para estudar as coordenadas generalizadas, e definir as suas características, i.e., se são conformes, ortogonais, etc, é conveniente introduzir o tensor das métricas  $g_{ij}$ , dado por:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (4.84)$$

O determinante da matriz de  $g_{ij}$ , i.e.,  $|g|$ , está relacionado com o Jacobiano, pela expressão,

$$|g|^{1/2} = |J^{-1}| = \frac{1}{J} = x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi \quad (4.85)$$

e permite relacionar a área de um VC no domínio físico com a área de um VC no domínio computacional através da expressão:

$$\Delta S_{fis}^{VC} \cong |g|^{1/2} \Delta S_{comp}^{VC} \cong |g|^{1/2} \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.86)$$

A distorção local num VC é quantificada pelo ângulo  $\theta$  formado entre  $\xi$  e  $\eta$ , cujo coseno é dado pela expressão:

$$\cos \theta = \frac{g_{12}}{(g_{11}g_{22})^{1/2}} \quad (4.87)$$

Embora o uso de coordenadas generalizadas permita tratar, teoricamente, qualquer geometria, sabe-se que a solução numérica se degrada com o aumento da distorção da malha. Para manter a precisão, a malha deverá ser ortogonal ou quase ortogonal. De acordo com (4.87), para que a malha seja ortogonal ( $\theta = 90^\circ$ ), tem de se cumprir a condição:

$$g_{12} = x_\xi z_\eta + z_\xi z_\eta = 0 \quad (4.88)$$

ou de modo geral,  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

Nesse caso, a matriz do tensor das métricas (4.84) contém só os termos diagonais e o determinante  $|g|^{1/2}$  (4.85) é dado por:

$$|g|^{1/2} = x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi = \sqrt{g_{11}g_{22}} = h_\xi h_\eta \quad (4.89)$$

em que

$$h_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + z_\xi^2} \quad h_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + z_\eta^2} \quad (4.90)$$

e são denominados factores de escala. A partir da condição de ortogonalidade (4.88), e da expressão (4.89), pode-se deduzir o seguinte sistema de equações diferenciais elípticas:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( f \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( f \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4.92)$$

onde  $f$  é denominada função de distorção e é dada por:

$$f = \frac{h_\eta}{h_\xi} \quad (4.93)$$

O sistema composto por (4.91) e (4.92) denomina-se gerador elíptico de coordenadas generalizadas ortogonais. Este sistema de equações de Laplace é resolvido com as mesmas técnicas descritas no capítulo anterior para as equações diferenciais de transporte e conservação. Note-se que os termos entre parêntesis podem ser tratados como termos difusivos, em que os coeficientes de difusão são dados por  $f$  ou  $1/f$ . Se  $f = 1$ , a malha denomina-se conforme. Como geralmente  $f$  não é conhecida, o sistema de equações é não linear, e por isso tem que ser resolvido iterativamente. As equações são acopladas através de  $f$ , que é recalculada com a equação (4.93) depois de cada iteração (Eça et al, 1999). Como  $f$  é calculada com (4.93), é preciso sempre conhecer as coordenadas dos nós nas fronteiras. Isto levanta alguns problemas, que serão abordados com mais detalhe na secção dedicada aos testes e validação.

Dos trabalhos de diferentes autores, e das conclusões do presente estudo, fazem-se as seguintes recomendações gerais, para a geração de malhas ortogonais:

1. Para começar o processo iterativo de resolução do sistema (4.91), (4.92), é conveniente inicializar o cálculo com uma malha que não seja demasiado distorcida. Isto acelerará consideravelmente a convergência. No presente código, prevêm-se duas formas de inicializar: a) em geometrias simples as coordenadas  $(x, z)$  iniciais são distribuídas em linhas verticais ( $x = \text{const.}$ ), com espaçamentos determinados pela geometria da fronteira mais irregular, b) nos caso mais complexos usa-se a equação da recta normal, para gerar malhas de inicialização quase ortogonais.
2. Se for possível, deve-se concentrar o maior número de pontos nas zonas onde ocorram gradientes elevados.
3. O uso de coordenadas generalizadas num domínio multidimensional introduz termos adicionais no erro de truncatura, se a malha for não ortogonal. Esse erros são tipicamente proporcionais a  $\cos\theta$  (Thompson et al., 1985a), e está mais ou menos aceite que são toleráveis se  $\theta < 45^\circ$ . Na maioria dos casos, a quase ortogonalidade é geralmente suficiente, para não degradar a precisão da solução.

4. Por conveniência física e computacional, no presente modelo as equações de transporte e conservação são expressas na forma conservativa. Nesse caso, Thompson et al. (1985a) e Thompson et al. (1985b) recomendam que os parâmetros de transformação ( $z_\xi$ , etc.) sejam calculados sempre numericamente, e não analiticamente, caso haja essa possibilidade.
5. O coeficiente de expansão da malha física,  $r_x$ , deverá estar na vizinhança de 1 ( $r_x = 1 + O(\Delta x)$ ), particularmente se as equações em causa contêm segundas derivadas como, por exemplo,  $x_{\xi\xi}$ . Se  $r_x$  for muito diferente de 1, os erros associados ao uso de coordenadas generalizadas tornar-se-ão significativos. Por outras palavras, a malha do domínio físico, não deverá expandir-se bruscamente.
6. Uma vez obtida numericamente a distribuição dos pontos  $(x, z)$ , calculam-se os parâmetros de transformação  $(x_\xi, z_\eta)$ , etc, usando um determinado esquema. Neste ponto é importante referir, que é conveniente usar nas equações de transporte e conservação, se possível, o mesmo tipo de esquema empregue para calcular os parâmetros de transformação.
7. A geometria do domínio ou a topologia da malha, podem implicar que as linhas de fronteira não sejam ortogonais. Nos cantos do domínio onde as linhas não são perpendiculares, o sistema de equações elípticas (4.91),(4.92), não é aplicável. Nesse caso Eça et al. (1999) mostra que é suficiente impor a condição de Dirichlet, não sendo necessário resolver nenhuma equação diferencial. Esta singularidade não representa nenhuma dificuldade, bastando calcular iterativamente  $f$  tal como é definida pela equação (4.93).

#### 4.9.2 Estrutura das equações diferenciais de transporte e conservação em coordenadas generalizadas

A metodologia para obter os diferentes tipos de equações diferenciais no novo sistema de coordenadas pode ser encontrada, por exemplo, em Fletcher (1997). Assume-se, para simplificar, que o domínio físico é estacionário, i.e.,  $\xi = \xi(x, z)$  e  $\eta = \eta(x, z)$ . Para o caso não estacionário ver Thompson et al. (1985a) e Thompson et al.(1985b).

##### Equação da continuidade

A equação da continuidade na forma anelástica toma o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho_r U^c}{|J|} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho_r W^c}{|J|} \right) = 0 \quad (4.94)$$

em que  $U^c$  e  $W^c$  são as velocidade contravariantes dadas por:

$$\begin{cases} U^c = U\xi_x + W\xi_z \\ W^c = U\eta_x + W\eta_z \end{cases} \quad (4.95)$$

Para mais comodidade, serão introduzidas as velocidades contravariantes Jacobianas, que serão representadas do mesmo modo,  $U^c$  e  $W^c$ , dadas por:

$$\begin{cases} U^c = \frac{U^c}{|J|} \\ W^c = \frac{W^c}{|J|} \end{cases} \quad (4.96)$$

Então (4.94) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial(\rho_r U^c)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho_r W^c)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.97)$$

É interessante constatar que o aspecto de (4.97) é muito similar ao da equação (2.35) em coordenadas cartesianas.

### Equação diferencial de transporte de um escalar

A equação diferencial geral de transporte de um escalar dada pela expressão (3.3), adquire, depois de transformada, o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{(\rho_r \phi)}{|J|} \right) + \frac{\partial(\rho_r U_j^c \phi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( |J| g_{ij} \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + S_\phi \quad (4.98)$$

Se a malha é quase ortogonal então, de acordo com a expressão (3.56), os termos difusivos da equação só conterão termos  $g_{ij}$  que cumpram a condição  $i = j$  e por isso a equação terá um aspecto muito similar a sua análoga em coordenadas cartesianas. Isto é muito conveniente dos pontos de vista computacional e físico. É de salientar que os termos associados à não ortogonalidade são também fluxos difusivos, pelo que, se não forem desprezáveis, introduzem falsa difusão numérica, com os efeitos adversos que daí advêm. Como já se verificou anteriormente, todas as equações de transporte e conservação podem ser escritas na forma de (3.3). Isto significa que a ortogonalidade é benéfica para todas as equações.

### 4.9.3 Método numérico de solução das equações de conservação e de transporte em coordenadas generalizadas

#### Discretização das equações diferenciais de transporte e conservação

A discretização no novo domínio é feita de maneira muito similar ao caso cartesiano exposto na secção 4.4. Como todas as equações de transporte e conservação podem ser escritas na forma de (3.3), então todas podem ser discretizadas de modo similar para uma malha não desfasada. A metodologia de discretização no caso das coordenadas  $(\xi, \eta)$  é similar à feita com a malha cartesiana não desfasada. Como a malha no domínio computacional  $(\xi, \eta)$  é ortogonal, a malha cartesiana não desfasada mostrada na figura 4.1 pode ser usada para a discretização em  $(\xi, \eta)$  de todas as equações. A integração e discretização dos termos advectivos e difusivos processa-se de modo similar. Nos termos advectivos das equações de transporte e conservação, os fluxos advectivos são agora determinados com as velocidades contravariantes Jacobianas (4.96), portanto a expressão análoga de (4.2) será a do fluxo advectivo contravariante (tomando como exemplo a face este),

$$C_e^c = (\rho_r U^c \Delta \eta)_e \quad (4.99)$$

Do mesmo modo, os coeficientes de difusão da face este são dados por:

$$D_e = \left( \frac{\Gamma_\phi g_{22} |J|}{\delta \xi} \right)_e \Delta \eta \quad (4.100)$$

e de modo análogo para os restantes termos.

A equação discretizada que se obtém em coordenadas  $(\xi, \eta)$  é idêntica a (4.6) e os coeficientes são determinados da mesma forma, modificando-se só a forma de calcular os fluxos advectivos e difusivos. A metodologia para a incorporação dos diferentes esquemas de discretização dos termos advectivos descrita na secção 4.4.1, também não sofre nenhuma modificação.

### Algoritmo SIMPLE de solução

O algoritmo SIMPLE também não sofre modificações essenciais. A equação de correcção da pressão, continua a ter o mesmo aspecto, mas os coeficientes  $a_i$  e o parâmetro  $c'$  sofrem algumas modificações. Com as coordenadas  $(\xi, \eta)$  o coeficiente  $a_E$ , tomando como exemplo o nó este na figura 4.1, é dado por:

$$a_E = (g_{22}\rho_r\Delta\eta d)_e \quad (4.101)$$

em que

$$d_e = \left( \frac{\Delta\eta}{a_P} \right)_e \quad (4.102)$$

O coeficiente  $a_P$  é dado por uma expressão da forma (4.6), com  $p'$  no lugar de  $\phi_P$ , e  $c'$  no lugar de  $c$ , dado por:

$$c' = [(C_w^*)^c - (C_e^*)^c + (C_s^*)^c - (C_n^*)^c] + c'' \quad (4.103)$$

O termo entre parêntesis quadrados é a equação da continuidade discretizada em termos de  $(U^*)^c, (W^*)^c$ . O asterisco no interior dos parêntesis, identifica os fluxos e velocidades não corrigidos, e o índice exterior indica tratar-se dos fluxos e velocidades contravariantes Jacobianas. O termo  $c''$  em (4.103), está associado à não ortogonalidade, sendo dado por:

$$c'' = \left( \frac{\rho\Delta\xi\Delta\eta g_{12}}{a_P} \right)_n - \left( \frac{\rho\Delta\xi\Delta\eta g_{12}}{a_P} \right)_s + \left( \frac{\rho\Delta\xi\Delta\eta g_{12}}{a_P} \right)_e + \left( \frac{\rho\Delta\xi\Delta\eta g_{12}}{a_P} \right)_w \quad (4.104)$$

Como se pode constatar, a equação de correcção da pressão pode complicar-se bastante, se a malha for significativamente não ortogonal. A expressão da correcção da velocidade do algoritmo SIMPLE é dada no caso cartesiano por:

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \quad (4.105)$$

onde

$$d_e = \frac{\Delta z_e}{a_e} \quad (4.106)$$

e  $a_e$  é o coeficiente da face este na malha desfasada. Em coordenadas generalizadas, a equação de correcção da velocidade horizontal tem a forma:

$$(u'_e)^c = d_e (p'_P - p'_E) + \left[ \left( \frac{\rho\Delta\xi g_{12}}{a_P} \right)_e (p'_{ne} - p'_{se}) \right] \quad (4.107)$$

em que  $d_e$  é dada por (4.102). O termo entre parêntesis rectos está associado à não ortogonalidade e pode ser desprezado se a distorção da malha não exceder os  $45^\circ$ , ou seja, se o ângulo  $\theta$  entre as faces dum VC estiver no intervalo  $45^\circ < \theta < 135^\circ$  (Peric, 1990). No presente modelo considera-se que o critério de Peric (1990) é demasiado permissivo, admitindo-se ângulos de distorção só até aos  $10^\circ$ .

## 4.10 Condições de fronteira

A malha de cálculo gerada pelo presente código está estruturada de modo tal que as fronteiras coincidam com as faces dos VC's adjacentes às mesmas. Este procedimento garante conservatividade e facilita a incorporação dos fluxos nas fronteiras. Mas o motivo mais importante para a estruturação da malha desta forma, como já foi antes referido, prende-se com uma exigência do método de refinamento local incorporado no presente modelo. Os fluxos advectivos e difusivos nas fronteiras são especificados através dos coeficientes  $a$  e  $b$  do termo fonte da equação (4.6). Nas fronteiras laterais, se o escoamento

for neutro impõe-se a condição de gradiente nulo das variáveis, para o qual as fronteiras devem estar o suficientemente afastadas para evitar retornos do escoamento (*inflow*). Se o escoamento for estratificado usam-se esponjas (camada de absorção com *Rayleigh damping*), ou métodos que resolvem a equação de onda (ex: Orlanski, 1976, e Raymond e Kuo, 1984), de modo a atenuar a reflexão das ondas gravíticas. A componente normal da velocidade é estimada iterativamente fazendo um balanço mássico entre a entrada e a saída, garantindo a conservação global da massa.

As condições de fronteira mais frequentes são: fluxo prescrito (do tipo von Neumann), valor da variável prescrito (do tipo Dirichlet) e fixação da variável nos nós adjacentes às fronteiras ou no interior do domínio.

#### 4.10.1 Imposição de um valor fixo de $\phi_P$

Para fixar a variável  $\phi$  num nó arbitrário  $P$ , introduz-se um termo fonte linear "falso" na equação discretizada, e atribui-se um valor arbitrário aos coeficientes  $b$  e  $c$  da expressão (4.6), suficientemente grande (ex:  $\Lambda = 10^{30}$ ), para que os restantes termos da equação discretizada passem a ser desprezáveis:

$$S_{fix} = b\phi_{fix} + c \quad \text{com } b = -\Lambda \quad \text{e } c = \Lambda \quad (4.108)$$

#### 4.10.2 Prescrição do fluxo de $\phi$ numa fronteira

Suponha-se que na fronteira de entrada, a que chamaremos de "oeste" ( $w$ ), são conhecidos os fluxos difusivo e advectivo da variável  $\phi$  (ver figura 4.4b). Como a fronteira coincide com a face  $wb$  do VC adjacente a ela, então será indexada com  $wb$ :

$$F_{wb} = (\rho_r U \phi)_{wb} - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{wb} \quad (4.109)$$

Como o fluxo total através da face  $wb$  é conhecido, pode ser incorporado explicitamente na equação (4.6) igualando os coeficientes  $b$  e  $c$  às expressões:

$$b = 0 \quad \text{e} \quad c = F_{wb} \Delta x \Delta z \quad (4.110)$$

Como já foi explicado, o coeficiente  $a_W$  da equação (4.6) reflecte o efeito combinado da difusão e da advecção depois da integração. Se este efeito é incorporado explicitamente através do coeficiente  $c$ , então, para não haver sobre-determinação é necessário fazer  $a_W = 0$ .

#### 4.10.3 Prescrição de $\phi$ numa fronteira

Tome-se como exemplo a mesma fronteira  $wb$ . Se  $\phi_{wb}$  é conhecido, então, tomando em conta que o esquema de discretização base para a implementação de outros esquemas (ver subsecção 4.4.1) é o Upwind I, então

$$b = -a_{Wb} \quad c = a_{Wb} \phi_{wb} \quad \text{com} \quad a_{Wb} = D_{wb} + \|C_{wb}, 0\| \quad (4.111)$$

em que  $D_{wb}$  e  $C_{wb}$  são dados por:

$$D_{wb} = \left( \frac{\Gamma}{\epsilon \Delta x} \right)_{wb} \Delta z \quad \text{com} \quad C_{wb} = (\rho_r U \Delta z)_{wb} \quad (4.112)$$

Se não for usado nenhum método de extrapolação nas fronteiras,  $\epsilon = 0.5$  porque só se entra em consideração com metade do VC, no caso contrário,  $\epsilon = 1$ .

#### 4.10.4 Condições de fronteiras anti-reflexão

Num escoamento estavelmente estratificado podem-se gerar ondas gravíticas que se propagam em todas as direcções. Para simular o que acontece num domínio hipoteticamente infinito, é necessário tornar as fronteiras não reflectoras, evitando assim que a reflexão das ondas desvirtuem a solução numérica. Na literatura encontram-se essencialmente 3 tipos de condições:

1. Esponja ou camada absorvente.
2. Métodos que resolvem a equação de onda.
3. Método de Klemp e Durran (1983) e Bougeault (1983) (KDB) para a fronteira superior.

##### Esponja ou camada absorvente

A esponja ou camada absorvente, é uma das formas mais simples e eficaz de absorver as ondas, podendo ser usada em todas as fronteiras sem distinção. Pode ser implementada na forma de Rayleigh, como foi feito no conhecido modelo de Clark (1977), ou através de uma viscosidade artificial que foi investigada detalhadamente por Klemp e Lilly (1978). Estas duas formulações são equivalentes, mas a esponja de Rayleigh é mais simples de implementar e controlar do que a viscosidade artificial.

No presente modelo, a esponja de Rayleigh é aplicada às velocidades  $(U, W)$ , à correcção de pressão  $p'$ , e a todos os escalares sempre e quando seja possível definir um estado de referência. Nos escoamentos turbulentos, a inicialização dos cálculos é feita tentando usar, para esse efeito, perfis que podem servir de referência para aplicar a esponja de Rayleigh. Isto é importante, por exemplo, para os escalares associados à turbulência tais como  $k$ ,  $\varepsilon$  e  $\mu_t$ .

##### Métodos que resolvem a equação de onda

Este método está baseado essencialmente na solução da equação de onda. Orlanski (1976) propôs usar a equação de onda unidimensional na forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (4.113)$$

em que  $n$  é a direcção normal à fronteira e  $c$  é a velocidade de fase (positiva para fora do domínio). A derivada temporal é calculada com o esquema *Leap Frog* e a espacial com diferenças centradas. Por isso Orlanski (1976) sugere que o valor de  $c$  seja restringido pela condição de Courant  $0 \leq c\Delta t/\Delta x \leq 1$ . Este método possui a deficiência de produzir oscilações em escoamentos multidimensionais depois de sucessivos passos de tempo. Por este motivo, decidiu-se adoptar o método de Raymond e Kuo (1984), com as modificações propostas por Miranda e James (1992). Miranda e James (1992) usam este método com sucesso no seu modelo NH3D. O mesmo resolve a equação de onda multidimensional dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (4.114)$$

e calcula as componentes de  $\vec{c}$  no caso bidimensional na forma:

$$\begin{cases} c_x = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \\ c_z = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \end{cases} \quad (4.115)$$

Neste caso a componente do vector  $\vec{c}$ , normal à fronteira ( $c_{\perp}$ ), está sujeita à condição de Courant,  $0 \leq c\Delta t/\Delta x \leq 1$  enquanto que a outra componente ( $c_{\parallel}$ ), fica sujeita à condição  $c_{\parallel} \leq \Delta x/\Delta t$ . Note-se que as componentes deste vector não são as componentes da velocidade de fase aparente (no referencial vento  $U_r$ ). Os métodos usados na discretização das derivadas presentes nas equações anteriores e as modificações do esquema original Raymond e Kuo (1984), encontram-se expostas com detalhe em Miranda e James (1992).

No presente modelo (FLEX), o método de refinamento local fica muito restringido com as condições de estabilidade do método de Raymond e Kuo (1984), e, por isso, em FLEX prevê-se, opcionalmente, o cálculo da derivada temporal com o esquema implícito de três níveis FTLL (ver secção 4.7), e as derivadas espaciais com o esquema Upwind II. A estabilidade incondicional foi sempre conseguida, mas como não foi feita uma análise formal da estabilidade numérica, por exemplo com o método de von Neumann ou com a abordagem da equação modificada, estes resultados não serão comentados.

Por outro lado, a combinação da esponja de Rayleigh com o método de Raymond e Kuo (1984), nas fronteiras laterais, levanta alguns problemas. Quando o escoamento é neutro, a esponja de Rayleigh não é necessária e o problema não se coloca, porque a única condição a respeitar consiste no afastamento da fronteira de saída o suficiente para que os gradientes sejam nulos. Isto garante, por exemplo, que  $\partial U/\partial x = 0$ , mas não pressupõe que  $U$  não varie no tempo. Mas no caso neutro, o estado de referência não é relevante e, à saída, a velocidade normal pode ser corrigida fazendo um balanço mássico entre a entrada e a saída.

Se o escoamento é estratificado, o estado de referência é importante e, por isso, o quadro complica-se um pouco. Para uma correcta simulação, a fronteira de saída tem que estar suficientemente afastada de modo a satisfazer, em 1º lugar, as condições do escoamento neutro (gradiente nulo) para evitar *inflows*. No entanto, como já foi antes referido, isto não garante que na camada de absorção  $U = f(z)$ . Para as ondas não se reflectirem nessa fronteira, se além do método de Raymond e Kuo (1984) se quiser usar uma esponja de Rayleigh (o que muitas vezes é aconselhável) então, é preciso definir um estado de referência a partir do qual as perturbações das variáveis serão absorvidas. Se na camada de absorção  $U = f(z, t)$ , então é necessário, em cada passo de tempo, recalculer um estado de referência com homogeneidade horizontal. Isto é feito, calculando o valor médio da velocidade  $U$  em cada camada vertical da malha. Só depois de determinar  $U_r = f(z)$  se pode aplicar a esponja de Rayleigh.

### Método de Klemp e Durran (1983) e Bougeault (1983) (KDB)

É tentador, do ponto de vista computacional, desenvolver um método eficaz para tornar a fronteira superior não reflectiva, sem recorrer às esponjas de absorção, que têm um elevado custo de cálculo. A não aplicabilidade das condições anti-radiação que resolvem a equação de onda já foi acima comentada. A teoria linear das ondas internas (ver por exemplo Gill, 1982), permite relacionar a velocidade  $w'$  e  $p'$  (e também os seus gradientes) na fronteira superior. Para um sistema de equações linearizado com estratificação estável constante, e velocidade horizontal constante,  $w'$  e  $p'$  são proporcionais e estão em fase no domínio dos números de onda (representado com o  $\tilde{\cdot}$ ):

$$\tilde{p}' = \frac{\sqrt{N^2 - k^2 U_r^2}}{\sqrt{k^2 + l^2}} \rho_r \tilde{w}' \quad (4.116)$$

KDB estudaram o caso bidimensional ( $l = 0$ ) e hidrostático ( $|k|U_r \ll N$ ), i.e

$$\tilde{p}' = \frac{N}{|k|} \rho_r \tilde{w}' \quad (4.117)$$

A equação anterior pode ser usada para diagnosticar a  $p'$  a partir de  $w'$ , se ela for obtida aplicando a transformada de Fourier só na direcção  $x$  (direcção normal à fronteira superior). Se o escoamento

se eleva ( $\tilde{w}' > 0$ ), então produzirá um desvio positivo de  $p'$  e viceversa. É este pormenor que permite separar os modos em dependência do sinal de propagação.

No presente modelo tentou-se implementar este método de diferentes formas e em diferentes casos. Fizeram-se testes em escoamentos periódicos nas fronteiras laterais e neste caso funcionou melhor. No entanto, em escoamentos mais realistas não se teve o sucesso esperado. Para a fronteira superior, o uso da esponja de Rayleigh foi incontornável.

#### 4.10.5 Equação de correcção da pressão

Para a equação de correcção da pressão podem aplicar-se dois tipos de condições fronteira: a) Dada a pressão, a velocidade normal à fronteira é desconhecida; b) O caso inverso. No caso a), o valor de  $p'$  na fronteira será nulo. No caso b) o valor da velocidade na fronteira não precisa de correcção (ver equação 4.105) e, portanto, o gradiente de  $p'$  será nulo. Esta condição é imposta igualando a zero o coeficiente da equação de  $p'$  na fronteira.

Na maioria dos casos, a condição de fronteira da equação de  $p'$  é do tipo de von Neumann, mais concretamente, de fluxo nulo. As pressões  $p'$  nas faces dos VC's adjacentes às fronteiras, necessárias para a correcção das velocidades nos nós, são calculadas por extrapolação polinomial. A ordem do polinómio a escolher depende do tipo de escoamento e do nível de refinamento da malha. Os diferentes casos de teste estudados mostram que o polinómio de 3º grau produz os melhores resultados. O uso de polinómios de ordem superior não permitiu obter melhorias significativas. Os polinómios de 1º, 2º e 3º graus na forma de Newton, obtidos para extrapolar o valor de  $p'$  numa face coincidente com uma fronteira, têm nós equidistantes e são dados por (tome-se como exemplo o caso II da figura 4.2b):

$$\begin{cases} p'(x_{wb}) \approx +\frac{3}{2}p'(x_P) - \frac{1}{2}p'(x_E) \\ p'(x_{wb}) \approx +\frac{15}{8}p'(x_P) - \frac{5}{4}p'(x_E) + \frac{3}{8}p'(x_{EE}) \\ p'(x_{wb}) \approx +\frac{35}{16}p'(x_P) - \frac{35}{16}p'(x_E) + \frac{21}{16}p'(x_{EE}) - \frac{5}{16}p'(x_{EEE}) \end{cases} \quad (4.118)$$

Por outro lado, a existência de fluxo nulo de  $p'$  normal a uma dada fronteira (componente normal do gradiente) não implica que a componente tangencial do gradiente de  $p'$  seja nula. Se houver necessidade disso, então é necessário impor um valor nulo de  $p'$  com o procedimento acima explicado para fixar variáveis (ver 4.10.1). Veja-se, no exemplo dado a seguir, como o problema da pressão é delicado.

Como o modelo desenvolvido neste trabalho é em 2D (por agora), a força de Coriolis não pode ser incluída. Por isso só poderão ser estudados escoamentos de mesoscala onde a rotação seja desprezável, i.e, o número de Rossby  $R_o = \frac{U}{fL} = 10 \gg 1$ .

A eliminação do efeito de Coriolis coloca uma questão importante. No topo da CL, onde normalmente a divergência da tensão de corte ( $\tau$ ) se anula ( $\partial\tau/\partial z = 0$ ), porque  $\tau = const$  ou varia linearmente com  $z$ , a força de Coriolis é determinante, pois ela deve contrabalançar a gradiente de pressão. Se a força de Coriolis é desprezada (ver secção 4.10.5), então há que garantir que no topo da CL o gradiente de pressão é compensado por outra força. Para permitir a geração de ondas gravíticas, usam-se, no presente modelo, perfis de velocidade tais que, para  $z > h$ ,  $U_r(z) \simeq const$  e, portanto, ( $\partial\tau/\partial z = 0$ ).

No caso neutro, por exemplo na equação de  $U$ ,  $-\partial p/\partial x$  é compensado com o termo advectivo  $U\partial U/\partial x$ . Como  $-\partial p/\partial x \neq 0$ , não é necessário impor um valor nulo de  $p'$ , sendo suficiente igualar o coeficiente da fronteira superior a zero.

No entanto, o problema complica-se ligeiramente no caso estratificado. Se o escoamento gera ondas gravíticas que se propagam verticalmente, estas não podem ser reflectidas na fronteira superior para não desvirtuar a solução numérica. Estas devem ser deixadas sair livremente ou então têm que ser absorvidas.

Devido à natureza incompressível das equações de Navier-Stokes, modificadas pela forma anelástica da equação da continuidade usada no presente modelo, obtém-se com o algoritmo SIMPLE a equação das correcções de pressão:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = S_{p'} \quad (4.119)$$

(4.119) é uma equação de Poisson que é resolvida na grande maioria dos casos com condições de fronteira de von Neumann. Portanto, a solução desta equação diferencial é relativa, i.e, tanto  $p'$  como  $p' + c^p$  satisfazem (4.119). Este facto não apresenta dificuldades para a dinâmica do problema, porque nas equações das velocidades só se necessita do gradiente da pressão e não do seu valor absoluto. Mas se o valor de  $p'$  for necessário para calcular, por exemplo, os arrastos ondulatorio e aerodinâmico, o valor da constante  $c^p$  tem que ser calculado. É importante referir que é prática comum fixar um valor de referência de  $p'$  no domínio de cálculo, para evitar que  $p'$  se afaste de valores meteorológicos. No presente modelo, isto é feito aproveitando o facto de que a massa total de ar seco se conserva em cada passo de tempo, portanto

$$M^{ar}(t) = \int_S \rho dS = M_r^{ar} + M'(t) = \int_S \rho_r dS + \int_S \rho' dS = const. \quad (4.120)$$

Usando a expressão (2.71) obtém-se a seguinte expressão para  $c^p$ :

$$c^p = \frac{M^{ar}(t) - M_r^{ar} + \int_S (\rho_r \theta' / \theta_r - p' / \bar{c}^2)}{\int_S \frac{dS}{\bar{c}^2}} \quad (4.121)$$

No caso neutro, em que  $\rho' = 0$ ,  $c^p$  pode ser calculado com a expressão:

$$c^p = \frac{\rho_r R^{ar} T - \int_S p' dS}{\int_S dS} \quad (4.122)$$

## 4.11 Tratamento do modelo $k - \varepsilon$ nas fronteiras

### 4.11.1 Modificação do modelo $k - \varepsilon$ junto da superfície

O comportamento dos escoamentos na CLA muda consideravelmente nas proximidades da superfície, caracterizando-se essencialmente pela diminuição do número de Reynolds e pela existência de gradientes acentuados das variáveis dependentes. O modelo ( $k - \varepsilon$ ) só é aplicável a escoamentos com números de Reynolds elevados e, portanto, não deve ser usado directamente nessa zona.

#### Modelo $k - \varepsilon$ para números de Reynolds baixos

Para os escoamentos de microscala, em zonas muito próximas da superfície podem ser aplicados os denominados modelos  $k - \varepsilon$  para números de Reynolds baixos. Na actualidade existe na literatura um número considerável deste tipo de modelos. Patel et al. (1985) fazem um estudo do comportamento de diferentes modelos. De um modo geral estes modelos incorporam o efeito da viscosidade molecular

na tensão de corte e no comprimento de mistura turbulento, mediante um factor de amortecimento da viscosidade turbulenta,  $f_\mu$ . Assim, a expressão (3.18) é dada agora por:

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.123)$$

As equações do modelo original não sofrem grandes modificações. A equação de transporte de  $\varepsilon$  (3.23) toma a forma:

$$\frac{\partial(\rho_r \tilde{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_r U_j \tilde{\varepsilon})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + (f_1 C_{\varepsilon 1} S_k - f_2 C_{\varepsilon 2} \rho_r \tilde{\varepsilon}) \frac{1}{\tau_\varepsilon} + E \quad (4.124)$$

em que  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - D$ ,  $f_1$  e  $f_2$ , são funções de modificação das constantes  $C_{\varepsilon 1}$  e  $C_{\varepsilon 2}$  junto da parede. A função  $D$  é um factor assintótico de aproximação de  $\varepsilon$  ao valor da parede ( $\tilde{\varepsilon} \sim 2\nu k/l_n^2$ ,  $k \propto l_n^2$ ), de modo a satisfazer a condição ( $\tilde{\varepsilon} = 0$ ) na mesma.  $E$  tem um papel similar a  $D$ . As funções  $D$  e  $E$  são usadas só em alguns modelos.  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_\mu$  são funções das seguintes grandezas adimensionais:

$$R_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad \text{e} \quad R_{z_n} = \frac{\sqrt{k} z_n}{\nu} \quad (4.125)$$

$$z_n^+ = \frac{z_n u_*}{\nu} \quad (4.126)$$

em que  $z_n$  é a distância normal à superfície. No caso do uso de coordenadas generalizadas,  $z_n$  é dado pela expressão:

$$z_n = \int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \quad (4.127)$$

Note-se que estas três grandezas podem ser interpretadas como sendo números de Reynolds locais de diferentes tipos.

De todos os modelos testados por Patel et al. (1985), decidiu-se implementar o de Lam e Bremhorst (1981) (LB81 daqui em diante), pela sua simplicidade e excelente comportamento, quando comparado com os perfis experimentais de  $k$  e  $\varepsilon$ , no artigo dos mesmos autores. Na tabela a seguir, mostram-se as funções deste modelo. É geralmente nos escoamentos de engenharia que são maiores os requisitos de

Tabela 4.8: Coeficientes para o modelo  $k - \varepsilon$  para números de Reynolds baixos de Lam e Bremhorst (1981).

Modelo	$f_\mu$	$f_1$	$f_2$	$D$	$E$
LB81	$\left(1 - e^{-0.0165 z_n^+}\right)^2 (1 + 20.5/R_T)$	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - e^{-R_T^2}$	0	0

precisão no cálculo das dimensões das zonas de separação, da transição de regimes, e particularmente dos processos de difusão térmica junto da parede. Os cálculos com estes modelos requerem grandes meios computacionais, principalmente em 3D.

### Modificação de Chen e Patel (1987) do modelo $k - \varepsilon$ para a superfície

Se os processos nas zonas muito próximas da parede não forem de importância primordial, é desejável acoplar o modelo  $k - \varepsilon$ , só aplicável a escoamentos com números de Reynolds elevados, à zona de números de Reynolds mais baixos. Este acoplamento pode ser feito usando a modificação de Chen e Patel (1987) do modelo  $k - \varepsilon$  para a superfície. Esta modificação é uma espécie de combinação do tratamento da superfície dos modelos para números de Reynolds baixos e do tratamento bicamada

clássico das funções de parede. Chen e Patel (1987) propõem calcular a viscosidade turbulenta, como é feito no caso do modelo para números de Reynolds baixos (expressão (4.123)), mas agora a função  $f_\mu$  é dada pela fórmula de Wolfshtein (1969)

$$f_\mu = \frac{1 - e^{-0.016R_{zn}}}{1 - e^{-0.263R_{zn}}} \quad (4.128)$$

em que  $R_{zn}$  é dado pela expressão (4.125). Junto da parede, a dissipação de  $k$  ( $\varepsilon$ ) é imposta mediante a lei dos  $-5/3$ , i.e.,

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{4/3} k^{3/2}}{l_\varepsilon} \quad (4.129)$$

onde o comprimento de mistura de Prandtl ( $\kappa z_n$ ) foi substituído por um comprimento de dissipação  $l_\varepsilon$  que, por sua vez, é função do número de Reynolds turbulento,  $R_{zn}$ :

$$l_\varepsilon = \kappa z_n (1 - e^{-0.263R_{zn}}) \quad (4.130)$$

O detalhe mais importante deste modelo consiste em definir a fronteira entre as duas camadas: a interna, que inclui a subcamada viscosa e parte da subcamada de transição, e a externa, que inclui parte da subcamada de transição e a subcamada turbulenta. A subcamada de transição é ignorada, considerando-se, tal como no caso das funções de parede, que as subcamadas viscosa e turbulenta coincidem, algures numa zona intermédia da subcamada de transição. Chen e Patel (1987) definem esta condição da seguinte forma: se  $f_\mu < 0.99$ , o nó de cálculo encontra-se na subcamada interna e se  $f_\mu \geq 0.99$ , na subcamada externa. Na subcamada interna só é resolvida a equação de transporte de  $k$ ,  $\varepsilon$  é calculado algebricamente como mostrado acima. As constantes de Launder e Spalding (1972) (3.26) do modelo ( $k - \varepsilon$ ) *standard*, não sofrem nenhuma modificação.

Nalgumas zonas, onde o escoamento tenha um comportamento bastante homogéneo horizontalmente, como acontece frequentemente nas superfícies livres, decidiu-se impor, no presente código, a condição de equilíbrio ( $S_k = D$ , ver equação (3.29)), que, em combinação com a equação de  $\mu_t$  (3.18), permite calcular a geração de  $k$  pela tensão de corte para ser usada na equação de  $k$ , i.e.,

$$S_k = \frac{C_\mu (\rho_r k)^2}{\mu_t} \quad (4.131)$$

A equação anterior também permite determinar o fluxo da velocidade  $U$  normal à referida fronteira (topo), para ser imposto como condição de fronteira de von Neumann

$$\tau_U = \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{S_k \mu_t} \quad (4.132)$$

## Funções de parede

A modificação de Chen e Patel (1987), por ser um modelo de aplicação directa junto da superfície, é de mais fácil implementação do que as funções de parede, especialmente no caso da orografia ser não homogénea. Além de que as funções funcionarem muito bem na maioria dos casos, elas são de grande utilidade nos escoamentos atmosféricos porque o tamanho do domínio de cálculo e a rugosidade das superfícies não permitem usar malhas com grandes resoluções.

As funções de parede são bastante conhecidas. A sua aplicação abrange todo tipo de escoamentos das mais diferentes escalas, mas a maioria dos autores só refere a sua aplicação. Não se conseguiu encontrar na literatura referência às modificações que as funções de parede sofrem no caso do escoamento ser atmosférico e estratificado, e quando se usam coordenadas generalizadas. Por isso decidiu-se

desenvolver um pouco o problema da combinação das funções de parede com a teoria da similaridade de Monin-Obukhov.

Aplicando condições de Couette 1D<sup>7</sup> às equações de CL da velocidade e da energia, verifica-se que a tensão de corte  $\tau$  e o fluxo de calor  $q$  se mantêm quase constantes em toda a extensão transversal da camada, i.e.,  $\tau = \tau_w \approx cte$  e  $\tau = \tau_w \approx cte$  ( $w$  refere-se à parede).

Usando a hipótese do comprimento de mistura de Prandtl,

$$\mu_t = \rho_r u_* \kappa l_m \quad (4.133)$$

tem-se que

$$\tau = \rho_r \kappa^2 z_n^2 \left[ \frac{\partial U}{\partial z} \right]^2 \quad (4.134)$$

Integrando esta equação (considerando  $\tau \approx cte$ ) obtém-se a seguinte expressão para a velocidade horizontal:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E z_n^+) \quad (4.135)$$

em que  $U^+$  é uma velocidade adimensional, dada por:

$$U^+ = \frac{U}{u_*} \quad (4.136)$$

Na subcamada viscosa é válida a Lei de Newton  $\tau_w = \mu(dU/dz)$ , a qual, depois de integrada e considerando novamente a tensão de corte constante, permite obter

$$U^+ = z_n^+ = \frac{\rho_r u_* z_n}{\mu} \quad (4.137)$$

Como já foi referido, o parâmetro  $z_n^+$  pode ser interpretado como um número de Reynolds local e é usado para delimitar as subcamadas da CL,

subcamada viscosa	$0 < z_n^+ < 5$	(4.138)
subcamada de transição	$5 \leq z_n^+ < 30$	
subcamada inercial	$30 \leq z_n^+ < 400$	

A constante de integração  $E$  é determinada assumindo que a CL é composta só pelas subcamadas inercial (turbulência completamente desenvolvida) e viscosa. Considera-se nesse caso que estas duas subcamadas coincidem algures na subcamada de transição. Igualando (4.135) e (4.137) obtém-se:

$$E = \frac{e^{\kappa z_n^+}}{z_n^+} \quad (4.139)$$

Segundo Jayatilaka (1966),  $E$  depende da rugosidade e da tensão de corte. Para uma superfície impermeável e lisa, este autor calculou  $E=9.763$ . Usando a expressão anterior (4.139) pode ser calculado o valor de  $z_{n_c}^+$  para o qual as subcamadas viscosa e inercial contactam,  $z_{n_c}^+ = 10.9$ . Embora usualmente  $z_{n_c}^+$  seja de um valor ligeiramente superior ( $z_{n_c}^+ = 11.63$ ),  $z_{n_c}^+ = 10.9$  será o valor adoptado para os escoamentos de microscala.

Assim, de acordo com este modelo de duas camadas

subcamada viscosa	$0 < z_n^+ < 10.9$	(4.140)
subcamada inercial	$10.9 \leq z_n^+ < 400$	

<sup>7</sup>Escoamento estacionário, em que  $\partial U/\partial x \approx 0$ ,  $W = 0$  e  $\tau_w / (\partial p/\partial x) \gg z$ .

O tratamento das grandezas turbulentas  $k$  e  $\varepsilon$  é feito sob as mesmas condições que a velocidade. A aproximação usada neste caso é válida só para a subcamada inercial, onde se considera que a turbulência está completamente desenvolvida ( $z_n^+ > 30$ ). Considera-se que nesta zona a difusão e o transporte médio e turbulento de  $k$  são desprezáveis, existindo um equilíbrio entre a produção e a dissipação de  $k$ . Neste caso a equação de transporte de  $k$  numa CL de corte do tipo Couette 1D reduz-se a:

$$S + B = C_D \rho_r \varepsilon \quad (4.141)$$

Desprezando o efeito da flutuação  $B$  na produção ou consumo de  $k$  tem-se que

$$-\overline{u'w'} \frac{\partial U}{\partial z} = \varepsilon \quad (4.142)$$

Modelando o termo  $-\overline{u'w'}$  com a hipótese de Boussinesq, e usando as expressões (3.18) e (3.13), chega-se a:

$$\tau_i = \rho_r C_\mu^{1/2} k \quad (4.143)$$

em que o índice  $i$  se refere à palavra inercial. Se for usada  $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho_r}$  como escala da velocidade, então a expressão anterior toma a forma:

$$u_* = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (4.144)$$

A expressão 4.144 é muito mais conveniente para calcular  $u_*$  e  $\tau_w$ . Por exemplo, num ponto de estagnação,  $u_* = 0$ , e de acordo com a hipótese de Prandtl,  $\mu_t = 0$ . Na realidade, nas zonas de estagnação  $\mu_t$  atinge frequentemente valores máximos.

Na subcamada inercial,  $\varepsilon$  é calculado usando o comprimento de mistura na Lei dos  $-5/3$  (ver (4.129)):

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa z} \quad (4.145)$$

Se se assume que existe quase equilíbrio entre a produção de  $k$  e a sua dissipação na equação (2.20) ( $S = D$ ) então, em escoamentos com estratificação, usando a hipótese de Boussinesq (3.13) para a camada limite unidimensional, a equação (2.20) toma a forma:

$$S / \rho_r = \underbrace{\nu_t \left( \frac{\partial U_t}{\partial z_n} \right)^2}_S - \underbrace{\frac{g}{\theta_s} \frac{\nu_t}{\sigma_\theta^t} \left( \frac{\partial \theta_r}{\partial z_n} \right)}_B = \varepsilon = D / \rho_r \quad (4.146)$$

em que o índice  $t$  refere-se à direcção tangencial e  $n$  à normal. Usando as expressões (2.37), (2.43), (2.54) e (2.55), e considerando que  $\sigma_\theta^t = 1$ , obtém-se:

$$\varepsilon = u_*^3 \left( \frac{\phi U}{\kappa z} - \frac{1}{\kappa L_{m0}} \right) \quad (4.147)$$

É esta a expressão que se deve usar para  $\varepsilon$  no caso estratificado junto da superfície. Esta expressão não é muito compatível com as funções de parede pelas razões já antes expostas (fluxo vertical de velocidade quase constante). Se se usam as funções de parede, ela pode ser usada para impor  $\varepsilon$ , tal como faz Duynkerke (1988) na CLT plana. No caso com orografia, os cálculos permitiram concluir que as funções de parede funcionam melhor.

É conveniente obter uma expressão que torne explícita a dependência da tensão de corte, da expressão de  $U$  obtida para CL quando ( $z_n^+ > 10.9$ ) (4.135), e da energia cinética turbulenta, de forma a poder relacionar  $U$ ,  $u_*$  e  $k$ . De acordo com as considerações acima feitas na subcamada inercial

$$\tau_w = \mu_t \frac{\partial U_t}{\partial z_n} \quad (4.148)$$

em que a viscosidade  $\mu_t$  de acordo com (3.18) e 4.144) é dada por:

$$\mu_t = \rho_r \kappa \left( C_\mu^{1/4} k^{1/2} \right) \quad (4.149)$$

Note-se que na equação (4.148), para generalizar o uso das funções de parede, a derivada é a da velocidade tangencial ( $U_t$ ), em função de  $z_n$  (direcção normal à parede). Integrando a velocidade e considerando  $k$  e  $\tau_w$  constantes, tem-se que:

$$\tau_w = \frac{\rho_r \kappa C_\mu^{3/4} k^{1/2} U_t}{\ln(Ez_n^+)} \quad (4.150)$$

O procedimento para a obtenção de expressões análogas a (4.150) para outro tipo de fluxos é semelhante ao que foi exposto para  $\tau_w$ . Refira-se que (4.150) é válida para  $z_n^+ \geq 10.9$ . Se  $z_n^+ < 10.9$ , usa-se a expressão da tensão de corte molecular. A expressão (4.150) só é aplicável aos nós adjacentes às fronteiras. Na parede, de acordo com a condição de não escorregamento,  $U_w = 0$ . A grandeza  $\mu_{t,w}$  representa a viscosidade turbulenta. O índice  $w$  refere-se às funções de parede.

No caso dos escoamento atmosféricos, o número de Reynolds local ( $z_n^+$ ) toma valores gigantescos e, além disso, junto da superfície não é normalmente possível refinar muito a malha de cálculo. Em rigor, as funções de parede foram deduzidas para valores de ( $z_n^+ \leq 400$ ) mas elas funcionam bastante bem em escoamento atmosféricos, onde  $z_n^+$  pode chegar a ser bastante maior. A única modificação essencial a fazer é substituir na expressão da viscosidade (2.202) (e das difusividades),  $\ln Ez_n^+$  por  $\ln z_n/z_0$  proveniente do perfil logarítmico típico das atmosferas neutras,

$$(U = u_*/\kappa \ln(z_n/z_0)) \quad (4.151)$$

em que  $z_0$  é a rugosidade.

Levanta-se uma questão sobre a qual nada foi encontrado na literatura. Se as funções de parede são deduzidas para condições de tensão de corte constante, podem ser usadas em escoamentos estratificados? Para responder à esta questão, muito importante para este trabalho, é necessário estabelecer a relação entre a estratificação e o fluxo de quantidade de movimento. De acordo com a teoria da similaridade de Monin e Obukhov (1954), referida na secção 2.3, a derivada adimensional da velocidade é dada por:

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U_\tau}{\partial z} = \phi_U \left( \frac{z}{L_{mo}} \right) \quad (4.152)$$

onde  $\phi_U$  é uma função de estabilidade, determinada experimentalmente, e  $L_{mo}$  é o comprimento de Monin e Obukhov. De acordo com Businger (1971), para  $0 \leq z/L_{mo} \leq 1$ ,

$$\phi_U = 1 + \beta z/L_{mo} \quad (4.153)$$

Como no caso neutro ( $L_{mo} = \infty$ ) a integração da equação (4.152) dá o perfil logarítmico correspondente à tensão:

$$\tau_w = \rho_r u_*^2 \simeq cte \quad (4.154)$$

então, se  $L_{mo}$  tem um valor tal que a estabilidade é elevada tem-se

$$\tau = \rho_r u_*^2 + \rho_r u_*^2 \beta \frac{z}{L_{mo}} \quad (4.155)$$

e portanto, a tensão não será constante. Pode-se concluir que neste caso as funções de parede, podem ser aplicadas a escoamentos atmosféricos se o primeiro nível da malha ( $z_P$ ) cumpre a condição:

$$\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \gg \beta \frac{z}{L_{mo}} \quad (4.156)$$

ou de outra forma:

$$z_P \ll \frac{L_{mo}}{\beta} - z_0 \quad (4.157)$$

Para valores típicos de  $L_{mo} = 100$  m,  $z_0 = 0.1$  m e  $\beta = 5$ ,  $z_P \approx 20$  m, que representa um valor pouco restritivo em termos de refinamento da malha junto da superfície.

## 4.12 Filtragem

Os esquemas de integração temporal adoptados no presente modelo são: o Upwind I regressivo ou totalmente implícito (FI) (ver secção 4.7), ou o esquema FTLI (Esquema totalmente implícito de 3 níveis). Os mesmos são incondicionalmente estáveis, e como usam a solução do termo  $t$  para determinar implicitamente a solução no instante  $t + \Delta t$ , o conhecido problema do esquema *Leap Frog*, da existência de duas soluções independentes, nos instantes  $t - \Delta t$  e  $t + \Delta t$ , não existe. Os dois esquemas de integração temporal não produzem grandes oscilações. O defeito essencial de FI é ser muito difusivo. Nesse caso a filtragem temporal é absolutamente desnecessária.

O modelo tem implementado o filtro espacial de quarta ordem de Durran e Klemp (1983). O objectivo do uso da filtragem espacial é impedir a amplificação numérica das ondas com comprimento de onda de 2 passos da malha ( $2h$ ).

## Capítulo 5

# Validação da componente numérica no modelo

### 5.1 Escoamento numa cavidade quadrada com uma parede móvel

#### 5.1.1 Precisão numérica.

O escoamento 2D numa cavidade quadrada com a parede superior móvel será utilizado como caso de teste neste capítulo. O número de Reynolds é calculado com base na dimensão da cavidade,  $L$ :

$$Re = \frac{\rho L U_0}{\mu} \quad (5.1)$$

Este escoamento é muito usado para validação, porque se mantém laminar até  $Re \approx 3000$ , e porque as linhas de corrente são sempre bastante oblíquas relativamente às malhas empregues na simulação numérica, mesmo que estas sejam muito grosseiras. Na figura 5.1 são mostradas as linhas de corrente para  $Re = 1000$ . Como se pode observar, existem nos cantos inferiores zonas de recirculação, o que torna o escoamento bastante complexo. Nas fronteiras laterais e inferior, as componentes da velocidade são nulas, enquanto que na fronteira superior, devido à condição de não escorregamento, o escoamento se move com a velocidade da parede superior,  $U_0$ . Portanto, nas quatro fronteiras usa-se a condição fronteira de Dirichlet. A pressão nas faces coincidentes com as fronteiras é obtida por extrapolação, com os polinómios (4.118). Como critério de convergência, impõe-se a condição de que o somatório do valor absoluto dos resíduos normalizados de todos os nós do domínio seja inferior a  $10^{-6}$ , para todas as variáveis dependentes. No caso das velocidades, o somatório dos resíduos foi normalizado por  $\rho U_0^2 L$ , e no caso da equação da continuidade por  $\rho U_0 L$ . Para mais detalhes sobre as condições fronteira, ver a secção 4.10.

Na impossibilidade de se obter uma solução analítica para este problema, os resultados de Ghia et al. (1982), calculados com um método multi-malhas, serão considerados como valores de referência. Estes resultados, considerados na literatura como sendo independentes do refinamento, foram obtidos com uma malha uniforme de  $(160 \times 160)$  nós, usando o esquema Híbrido, e coincidem quase plenamente com os perfis de Ghia et al. (1982). Esta comparação já foi feita por vários autores (ver por exemplo Hayase et al., 1992), e por isso será aqui omitida. Refira-se que, para comparação, são usados os resultados numéricos obtidos com uma malha duas vezes mais fina de  $(320 \times 320)$  nós.

Para validar os métodos referidos na secção 4.5, foram escolhidos 5 números de Reynolds:  $Re = 400$ ,  $Re = 500$ ,  $Re = 1000$ ,  $Re = 1500$  e  $Re = 2000$ . Para cada número de Reynolds, foi obtida a solução numérica com uma malha de  $(320 \times 320)$  nós, usando o esquema Híbrido (4.14). Com uma malha com

este nível de refinamento, verificou-se que, para todos os números de Reynolds, o esquema Híbrido se comportava como diferenças centradas (DC) (2ª ordem de precisão).

Na literatura, a validação de modelos usando este caso teste é feita por comparação local, geralmente dos perfis das linhas centrais do domínio  $x = 0.5$  m e  $y = 0.5$  m. Dada a forma das linhas de corrente da figura 5.1, é de esperar que o escoamento evidencie um comportamento bastante complexo junto das fronteiras, facto que deve ser tomado em conta no momento da validação do código. Por este motivo, na avaliação do desempenho do modelo, para além da comparação local de perfis, decidiu-se usar o valor do erro relativo médio. A validação, mediante o uso do erro relativo médio, é melhor do que a validação através da comparação com perfis locais, porque abrange as discrepâncias de todo o domínio. Este critério é complementado com o erro relativo máximo.

Para calcular erro relativo médio, usa-se uma solução interpolada a partir da solução obtida com a malha de  $(320 \times 320)$  nós, de modo que a localização dos nós obtidos seja idêntica à da malha, com menos resolução, usada para os testes. Esta última, foi escolhida de forma tal que se pudessem captar as características fundamentais do escoamento, para um dado número de Reynolds, com a malha o mais grosseira possível. A malha seleccionada é a de  $(20 \times 20)$  nós.

Na presente secção pretende-se, usando malhas não desfasadas:

1. Verificar a sensibilidade dos diferentes esquemas de discretização aos métodos de extrapolação expostos na subsecção 4.5.1,
  - (a) Método de extrapolação recorrendo às 1ª e 2ª derivadas (ver expressões 4.41).
  - (b) Método de extrapolação recorrendo directamente aos polinómios na forma de Newton (ver expressões 4.38).
2. Verificar a sensibilidade do esquema New à combinação de várias expressões para o cálculo da variável  $\phi$  nas faces de VC's adjacentes às fronteiras (caso sem extrapolação do nó P da figura 4.2b).
  - (a) Uso do esquema New em combinação com a expressão (4.34), no caso em que  $C_{cur} = 1/6$ .
  - (b) Uso do esquema New em combinação com a expressão (4.34), no caso em que  $C_{cur} = 1/8$  (interpolação quadrática do método Quick na fronteira).
3. Estudar o efeito das modificações no tratamento conservativo dos termos advectivos para o cálculo das velocidades dos nós e dos fluxos nas faces do VC (ver subsecção 4.5.4). Quando há extrapolação nas fronteiras, estas modificações são feitas com o mesmo método de extrapolação escolhido em 1.
4. Estudar o efeito da combinação da modificação referida no item anterior com o cálculo do gradiente de pressão nas equações das velocidades. Dito de outra forma, propõe-se calcular  $p_e - p_w$  com a expressão (4.53), em vez de usar interpolação linear (4.48). Tal como no ponto anterior, quando há extrapolação nas fronteiras, estas modificações são feitas com o mesmo método de extrapolação.
5. Estudar o impacto da extrapolação na difusão e na advecção, separadamente, i.e.,
  - (a) Método de extrapolação do ponto 1(a) aplicado só à advecção.
  - (b) Método de extrapolação do ponto 1(a) aplicado só à difusão.

A justificação para o uso de malhas não desfasadas pode ser encontrada na subsecção 4.5.1. Serão estudados os seguintes esquemas de discretização das derivadas advectivas: Híbrido, Upwind II, Quick, Fromm's e New. Os esquemas Upwind I e Diferenças Centradas (DC) de 1ª ordem não serão usados, porque eles já fazem parte do esquema Híbrido que, como é sabido, combina o melhor de ambos.

Sem extrapolação nas fronteiras, serão analisados os esquemas Híbrido, Upwind II, Quick, Fromm's, New e Smart. Em todos os cálculos, as segundas derivadas da difusão são calculadas com DC de 2ª ordem. As combinações possíveis das diferentes modificações propostas na secção 4.5 são muitas. Por isso, só serão apresentados os resultados mais relevantes, e os imprescindíveis para a compreensão do problema. Depois de muitos testes, decidiu-se que o estudo deveria ser levado a cabo, fundamentalmente, com os esquemas Quick e New. Estes são, em geral, os mais precisos e sensíveis às modificações propostas. Na tabela 5.1 mostram-se as combinações escolhidas para estes dois esquemas. O método de resolução base tem as seguintes características: não tem extrapolação nas fronteiras (ponto 1), as velocidades e os fluxos são corrigidos como propõe o algoritmo SIMPLE, e o gradiente de pressão nas equações da velocidade é calculado com interpolação linear (4.48). Esta configuração corresponde a usar o algoritmo SIMPLE *standard*, sem extrapolação nas fronteiras. Uma vez mais lembra-se que as faces dos VC's adjacentes às fronteiras coincidem com as mesmas e que a malha é não desfasada.

Tabela 5.1: Configuração dos esquemas advectivos enunciados nos pontos 1, 2, 3, 4 e 5, com base nas modificações propostas na secção 4.5.

Denominação	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Ponto 4	Ponto 5
Quick1,New1	não	não	não	não	não
New2	não	sim (a)	não	não	não
Quick2,New3	sim (a)	não	não	não	não
Quick3,New4	sim (b)	não	não	não	não
Quick4,New5	sim (a)	não	sim (a)	sim	não
Quick5,New6	sim (b)	não	sim (b)	sim	não
Quick6,New7	sim (a)	não	sim (a)	não	não
Quick7	sim (a)	não	não	não	sim (a)
Quick8	sim (a)	não	não	não	sim (b)

Na figura 5.2a,b estão representados os gráficos dos erros relativos médios de  $U$  e  $V$ , obtidos com diferentes esquemas de discretização da 1ª derivada advectiva. O pior de todos os esquemas é, sem dúvida, o Upwind II, sendo neste caso pior do que o esquema Híbrido. Isto acontece porque, à medida que  $Re$  aumenta, a dispersividade de Upwind II se torna dominante, enquanto que o esquema Híbrido tem o "filtro" Upwind I, que evita esse efeito. O Smart comporta-se melhor do que o Upwind II e o Híbrido, mas bastante pior do que todos os outros esquemas. Tomando em conta que se trata de um ECAR, o resultado é um pouco inesperado. O Smart, tal como outros esquemas ECAR, devido ao uso das condições de monotonicidade (4.42), é eficaz para eliminar as oscilações de origem numérica, garantindo sempre a obtenção de soluções fisicamente realistas. No entanto, de acordo com a análise antes feita sobre a combinação de esquemas, não é difícil concluir que, nas faces de um VC, a combinação do esquema Upwind I com o esquema Quick não é benéfica. Tomando como exemplo o nó  $P$  da figura 4.3a, se  $\phi_e$  for calculado com Quick (ver tabela 4.1), e  $\phi_w$  com Upwind I (equação (4.15)), então, para  $C_e > 0$ ,  $C_w > 0$ :

$$\phi'_P = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \approx \left( \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \right)_P = \frac{(\frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{4}\phi_W) - (\phi_W)}{\Delta x} \cong \frac{3}{4}\phi'_P - \frac{3}{8}\phi''_P \Delta x + \dots \quad (5.2)$$

Como se pode constatar, o esquema resultante não é sequer de 1ª ordem. Isto é crítico se se tomar em consideração que a combinação dos esquemas Upwind I e Quick é uma das opções mais prováveis do Smart (ver formulação do esquema na subsecção 4.5.2).

Da análise dos restantes perfis pode-se concluir que os melhores esquemas são o Quick1, o New1 e o New2, para  $U$ , e o Fromm's e New1 para  $V$ . O New2 não faz justiça à análise feita em na secção 4.5, sobretudo para  $V$ . O esquema Fromm's não mostrou, nalguns casos, grande sensibilidade às modificações propostas e, na maioria das situações, piorou bastante o seu comportamento. As causas destas divergências serão posteriormente abordadas. Por este motivo, daqui em diante a análise do mesmo será omitida.

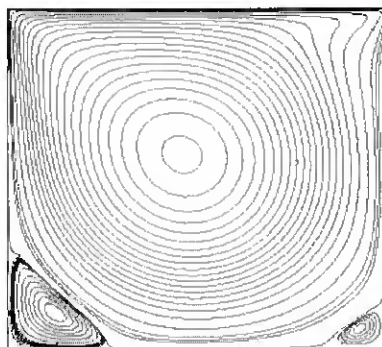
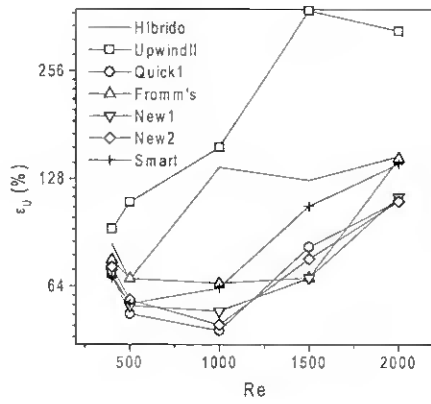


Figura 5.1: Linhas de corrente para  $Re = 1000$ .

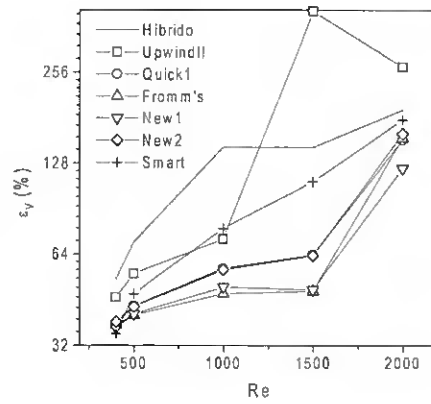
Nas figuras 5.2c,d mostram-se gráficos análogos aos da figura 5.2a,b, mas usando só o esquema Quick, com as diferentes implementações propostas na tabela 5.1. Nas figuras pode-se ver que, tanto para  $U$  como para  $V$ , de um modo geral, é o programa Quick4 que produz melhores resultados. O Quick5, que é muito similar ao Quick4 (usa a opção 1(b) em vez de 1(a)), destaca-se pontualmente em  $Re = 1000$  para  $V$ . Eliminando o uso de Quick nos gradientes de pressão (i.e., usando Quick6 em vez de Quick4), o erro aumenta ligeiramente, o que indica que esta modificação, usada em Quick4, é benéfica. Só o uso da extrapolação, em particular a directa, reduz consideravelmente os erros em  $V$ . É interessante constatar que a extrapolação directa funciona ligeiramente melhor do que a extrapolação com derivadas, quando é a única modificação utilizada. Quando se introduzem as modificações dos pontos (3) e (4), a extrapolação polinomial com derivadas dá resultados bastante melhores do que a extrapolação directa. Como se verá, isto só acontece com o esquema Quick. A justificação para esta harmonia entre o Quick e a extrapolação com derivadas (e não com a extrapolação directa), possivelmente, está relacionada com natureza interpolativa de ambos métodos.

Nas figuras 5.2e,f, estão ilustrados os gráficos obtidos com as modificações 5(a) e 5(b). A modificação 5(a) (Quick7) corresponde ao uso da extrapolação com derivadas, aplicada só às derivadas advectivas. A modificação 5(b) (Quick8) corresponde ao uso da extrapolação com derivadas, aplicada só aos termos difusivos. A análise feita na secção 4.5, onde se demonstrava que a degradação nas fronteiras da derivadas da difusão era dominante nos caso I e II da figura 4.2, fica corroborada com estes resultados. De facto, tanto para  $U$  como para  $V$ , a aplicação da extrapolação tem mais impacto no caso 5(b).

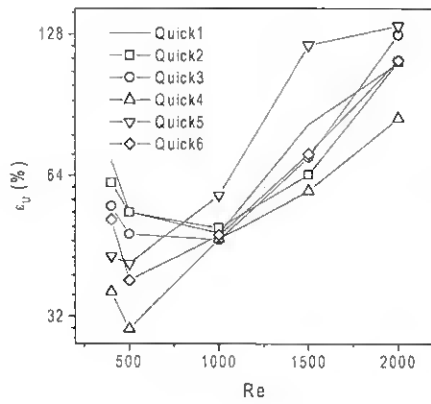
Nas figuras 5.3a,b mostram-se gráficos com as várias combinações do esquema New. Pelo comportamento de New2 pode-se concluir que a sua combinação com o esquema Quick ( $C_{cur} = 1/8$ ) produz piores resultados, ao contrário do que se esperava, particularmente no caso de  $V$ . Outro detalhe notável é o péssimo desempenho do New com as modificações (3) e (4) (New5 e New6), particularmente New6. Em contraste o esquema New7, que combina o cálculo dos gradientes com (4.49) (ponto



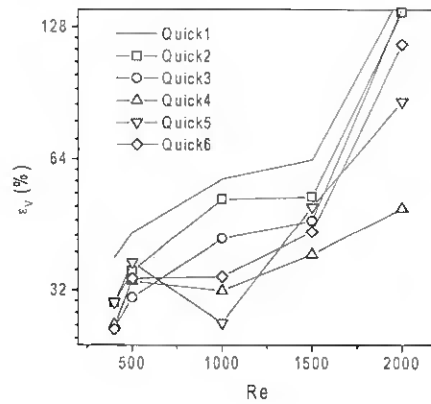
(a)



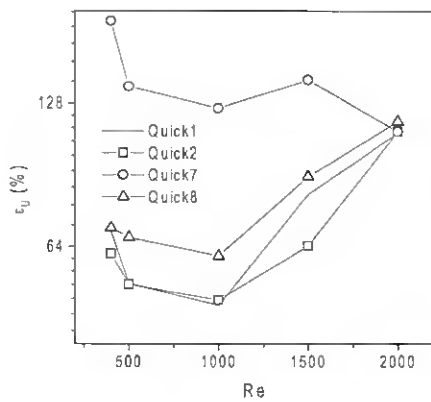
(b)



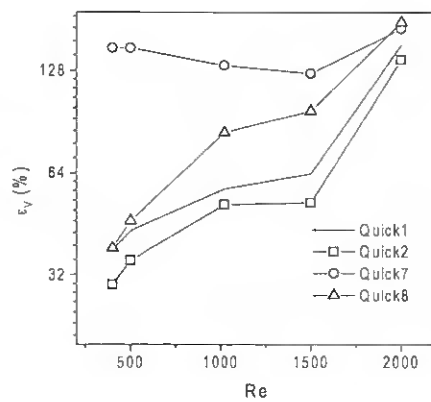
(c)



(d)

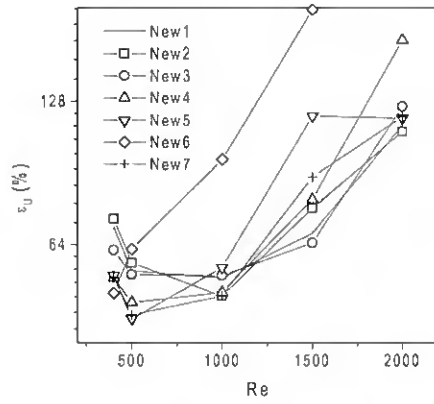


(e)

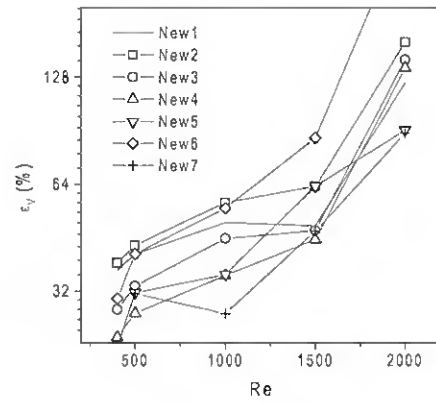


(f)

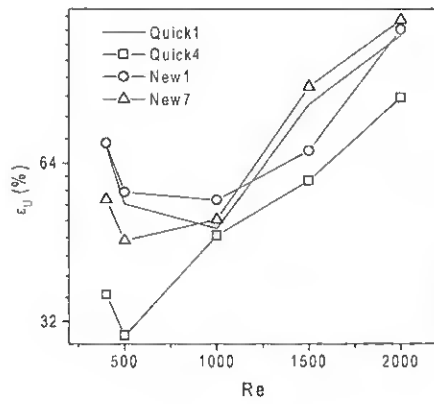
Figura 5.2: Representação gráfica dos erros relativos médios, em função do número de Reynolds para uma malha de  $(20 \times 20)$  nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1.



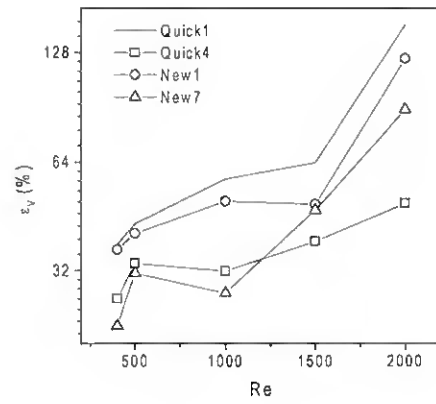
(a)



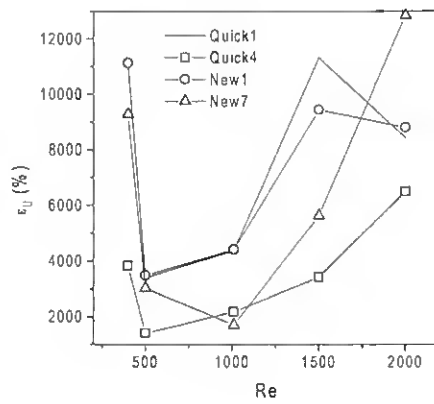
(b)



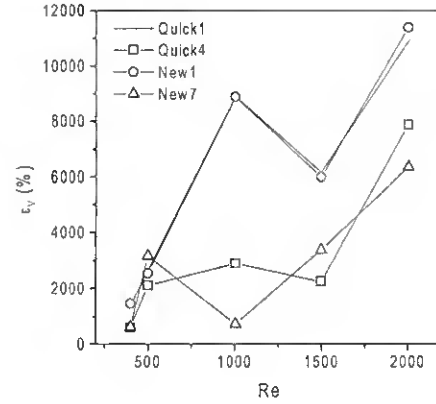
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.3: Figuras a), b), c) e d): Erros relativos médios, em função do número de Reynolds para uma malha de (20x20) nós. Figuras e) e f): Erros relativos máximos em função de  $Re$ .

1) e a extrapolação com derivadas (ponto 1(a)), permitiu obter resultados notáveis relativamente a New1 (configuração base).

Nas figuras 5.3c,d estão representados os melhores gráficos de New e Quick (Quick4, New7) e os gráficos dos modelos com a configuração base (Quick1 e New1). Os esquemas New1 e Quick1 tem um comportamento bastante similar. Quick1 é superior a New1 para  $U$ , New1 é superior a Quick1 para  $V$ . De facto, na configuração base acima descrita, New1 constitui uma boa alternativa ao Quick1. Já o mesmo não se pode dizer quando as modificações são implementadas. Aqui Quick4 é claramente superior a New7, e sobretudo bastante menos sensível ao aumento do número de Reynolds. Note-se que, para  $Re > 1000$ , New7 degrada-se consideravelmente. Uma possível justificação para este comportamento pode residir na forma como cada esquema determina  $\phi$  nas faces do VC. Enquanto Quick usa interpolação quadrática directa, o esquema New calcula  $\phi$  nas faces, com a expressão obtida no processo de decomposição da derivada (ver expressões (4.26) e (4.27)). A expressão obtida para New, de acordo com a tabela 4.1 e para  $C_e > 0$ , é (ver figura 4.3a):

$$\phi_e = \frac{1}{3}\phi_E + \frac{5}{6}\phi_P - \frac{1}{6} \quad (5.3)$$

Esta última expressão não corresponde a nenhum esquema de interpolação. Se o New for usado só para discretizar a derivada advectiva das equações das velocidades (New1), então, como já foi antes verificado, o seu desempenho é muito similar ao do Quick1.

Este raciocínio feito para o New, pode também ser aplicado ao esquema Fromm's que, como foi citado na secção 4.5, é obtido mediante a média aritmética entre o esquema DC (esquema de Lax-Wendroff) e o esquema Upwind II. Os esquemas DC e Upwind II são de interpolação e extrapolação linear, respectivamente, mas o esquema resultante, Fromm's, já não é um esquema com as mesmas características.

Para concluir com a análise dos erros relativos, nas figuras 5.3e,f são apresentados os gráficos dos erros relativos máximos, em função do número de Reynolds, para as mesmas configurações das figuras 5.3c,d. Comparando estas 4 figuras pode-se constatar que o comportamento dos erros relativos máximos é bastante semelhante ao dos erros relativos médios, já apresentados, tanto para  $U$  como para  $V$ , em particular nos casos Quick4 e New7. Este resultado é bastante animador porque representa um forte indício de que o efeito benéfico das modificações usadas nestas configurações se poderá estender a todo o domínio.

Para comparar localmente o desempenho das diferentes configurações foram escolhidos 3 perfis de  $U(y)$  e 2 perfis de  $V(x)$ . Estes são apresentados nas figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7. A análise feita sobre os erros relativos pode ser estendida a estes perfis, que corroboram inequivocamente as conclusões já apresentadas.

Nas figuras 5.4a-e são claras as divergências dos esquemas Upwind II e Híbrido com a solução  $(320 \times 320)$  nós. Os restantes esquemas têm um comportamento semelhante, exceptuando o Híbrido e, parcialmente, o Smart, os quais na secção  $x = 0.975$  m (figura 5.4c) sobressaem por se aproximarem razoavelmente do perfil da malha de  $(320 \times 320)$  nós. Do comportamento oscilatório dos outros perfis pode-se concluir que o gradiente elevado  $\partial U/\partial y$  nessa fronteira revela o carácter dispersivo dos outros esquemas. Sendo os esquemas Híbrido e Smart esquemas compostos, transformam-se, nestes casos, em Upwind I. Este é um bom exemplo de quanto a difusividade de um esquema pode ser benéfica. Este caso serve para explicar porque geralmente se dá muito mais atenção ao problema dos termos da advecção do que aos da difusão, quando se discute a precisão de um dado esquema. O esquema Quick, apesar de ser de 2ª ordem nessa fronteira, provoca mais oscilações por ser mais dispersivo.

Nas figuras 5.5a-e estão representados os perfis obtidos com as diferentes configurações do Quick. Está bem patente que os perfis de Quick4 e Quick6 são notavelmente melhores do que os restantes.

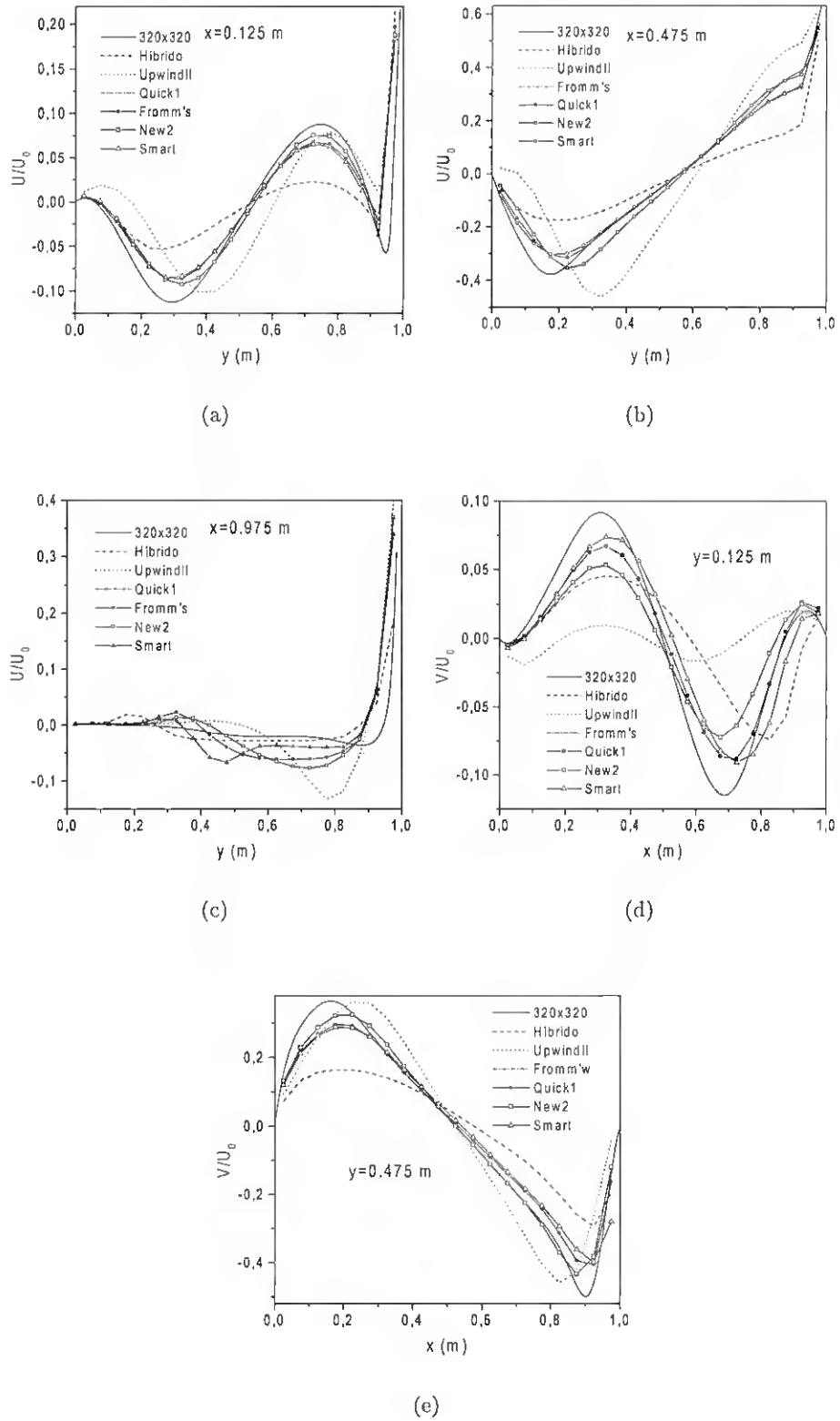


Figura 5.4: Perfis de velocidade normalizados com a velocidade  $U_0$ . Com exceção da solução obtida com a malha de  $(320 \times 320)$  nós, as outras foram obtidas com uma malha de  $(20 \times 20)$  nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1.

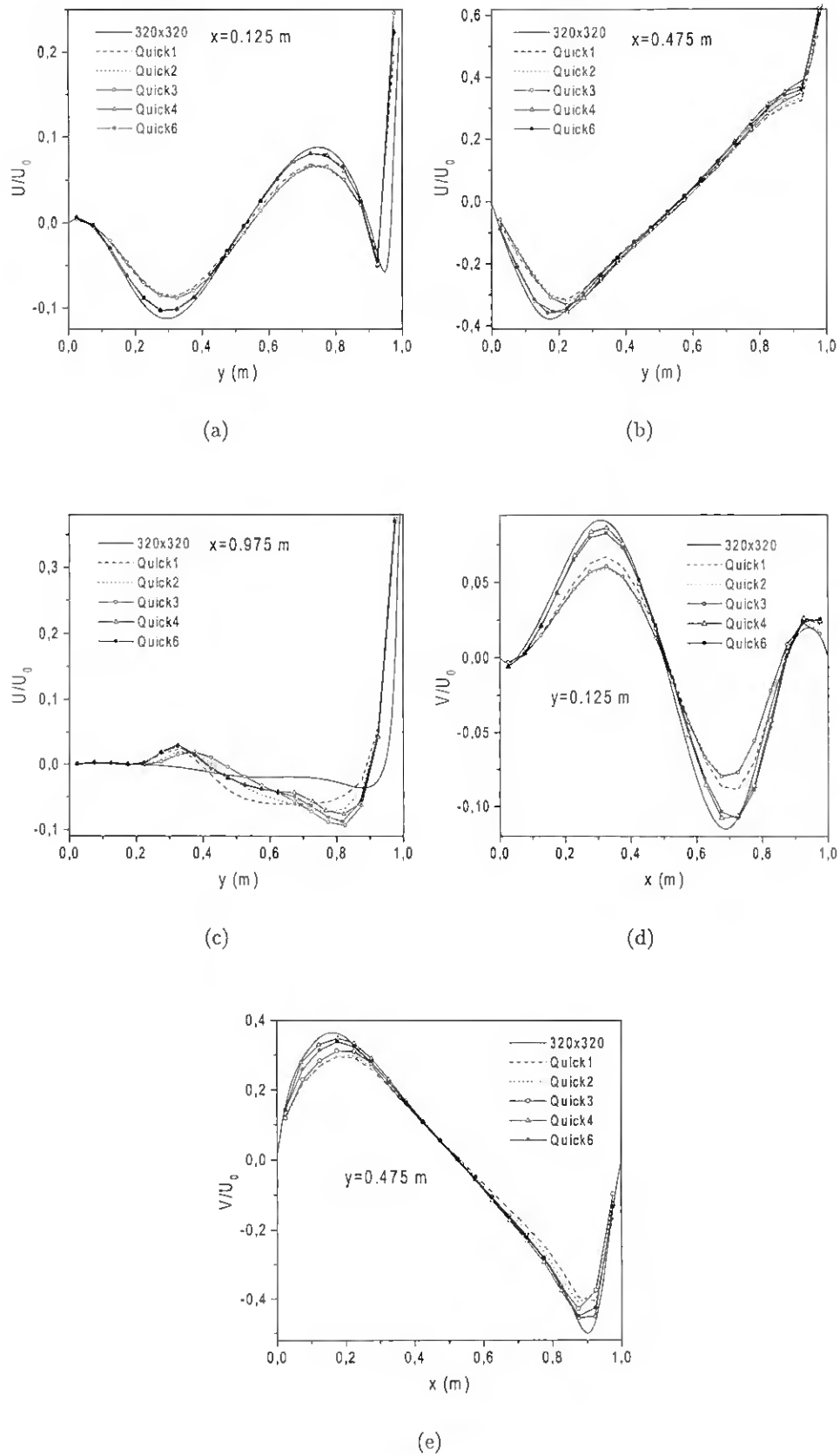


Figura 5.5: Perfis de velocidade normalizados com a velocidade  $U_0$ . Com exceção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1.

Tomando em conta que os perfis foram obtidos com uma malha bastante grosseira de  $(20 \times 20)$  nós, Quick4 e Quick6 têm desempenhos notáveis, especialmente em  $x = 0.125m$  e  $y = 0.125m$ . Exactamente o mesmo pode ser dito dos perfis da figura 5.6a-e, análogos aos do Quick, mas obtidos com o esquema New.

Analisando a figura 5.7a-e pode-se concluir que New7 teve um desempenho ligeiramente melhor do que Quick4. Isto não contradiz o que foi antes referido, porque apesar de o esquema Quick ter um desempenho global melhor, as figuras 5.3d,e,f, mostram que, no caso  $Re = 1000$ , New7 foi melhor do que Quick4. Na figura 5.3c, os erros relativos médios de Quick4 e New7, para  $Re = 1000$ , são bastante próximos.

## Conclusões

- A melhor configuração para o Quick é Quick4. Esta usa: a) a extrapolação com derivadas nas fronteiras, b) as modificações no tratamento conservativo dos termos advectivos para o cálculo das velocidades dos nós e dos fluxos nas faces do VC (ponto 3), e c) o método de cálculo de  $\nabla p'$  (ponto 4) (usando o próprio Quick). O Quick4 tem um desempenho notável e constitui uma modificação importante do presente modelo.
- Foi deduzido o esquema New, e adaptado para ser utilizado na forma conservativa, tal como os outros esquemas. O mesmo, apesar de não ser tão eficiente como o Quick4, permite bons resultados, nalguns casos melhores do que este último, como é o caso do New7 para  $Re=1000$ , explicado a seguir.
- A melhor configuração para o New é New7. Esta usa: a) a extrapolação com derivadas nas fronteiras, e b) as modificações no tratamento conservativo dos termo advectivos para o cálculo das velocidades dos nós e dos fluxos nas faces do VC. O New7, ao contrário de Quick4, não usa o método de cálculo de  $\nabla p'$  (Ponto 3).
- Chegou-se à conclusão, mediante o estudo da importância relativa dos termos advectivos e difusivos das equações de conservação e transporte (ponto 4), que não é vantajoso usar esquemas muito precisos para a derivada advectiva, se a precisão das derivadas dos termos difusivos não for elevada e, sobretudo, se o problema das fronteiras não for resolvido convenientemente. Estas conclusões são válidas no contexto da malha não desfasada.
- Com a configuração base, New e Quick (Quick1 e New1) têm um desempenho muito similar. Sendo o New, um esquema formalmente de 3ª ordem, pode-se concluir que a degradação das derivadas da difusão nas fronteiras tem um papel dominante.
- Na prática<sup>1</sup>, a combinação de New com a expressão do Quick para calcular  $\phi$  na face de um VC adjacente à fronteira (configuração New2) não melhora o desempenho do esquema. Na maioria dos casos, a combinação de esquemas advectivos produz esquemas de precisão inferior ao dos esquemas intervenientes (ver conclusão a seguir).
- Os esquemas compostos tais como o Híbrido e o Smart (ECAR) têm um desempenho inferior aos esquemas de 3 pontos (Quick, New e Fromm's). Isto deve-se à degradação da precisão resultante da combinação de diferentes esquemas advectivos, por exemplo Quick e Upwind I (ver expressão (5.3)).

---

<sup>1</sup>Na secção 4.5 foi feito um estudo onde esta combinação resultava ser benéfica.

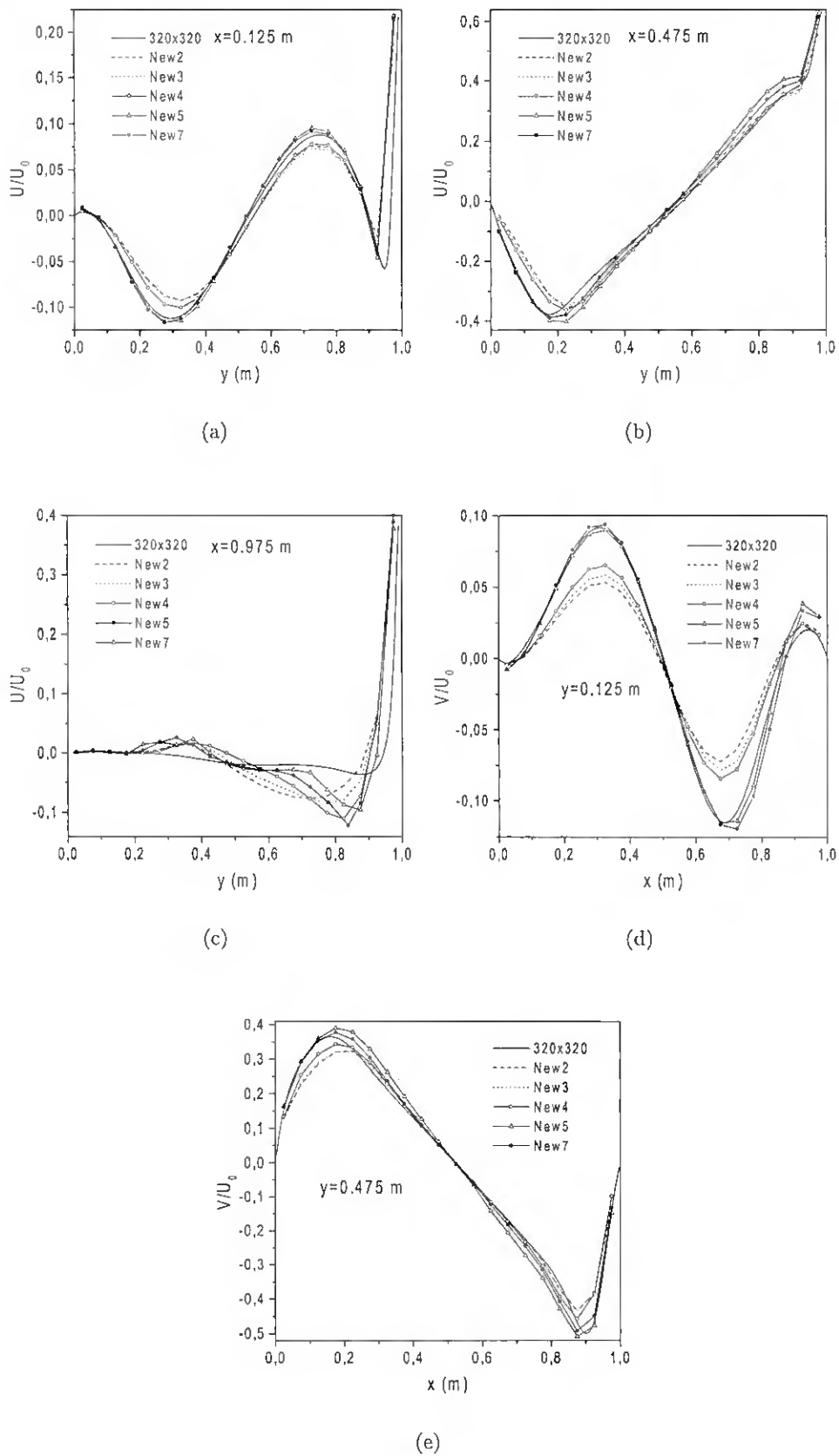


Figura 5.6: Perfis de velocidade normalizados com a velocidade  $U_0$ . Com exceção da solução obtida com a malha de (320x320) nós, as outras foram obtidas com uma malha de (20x20) nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1.

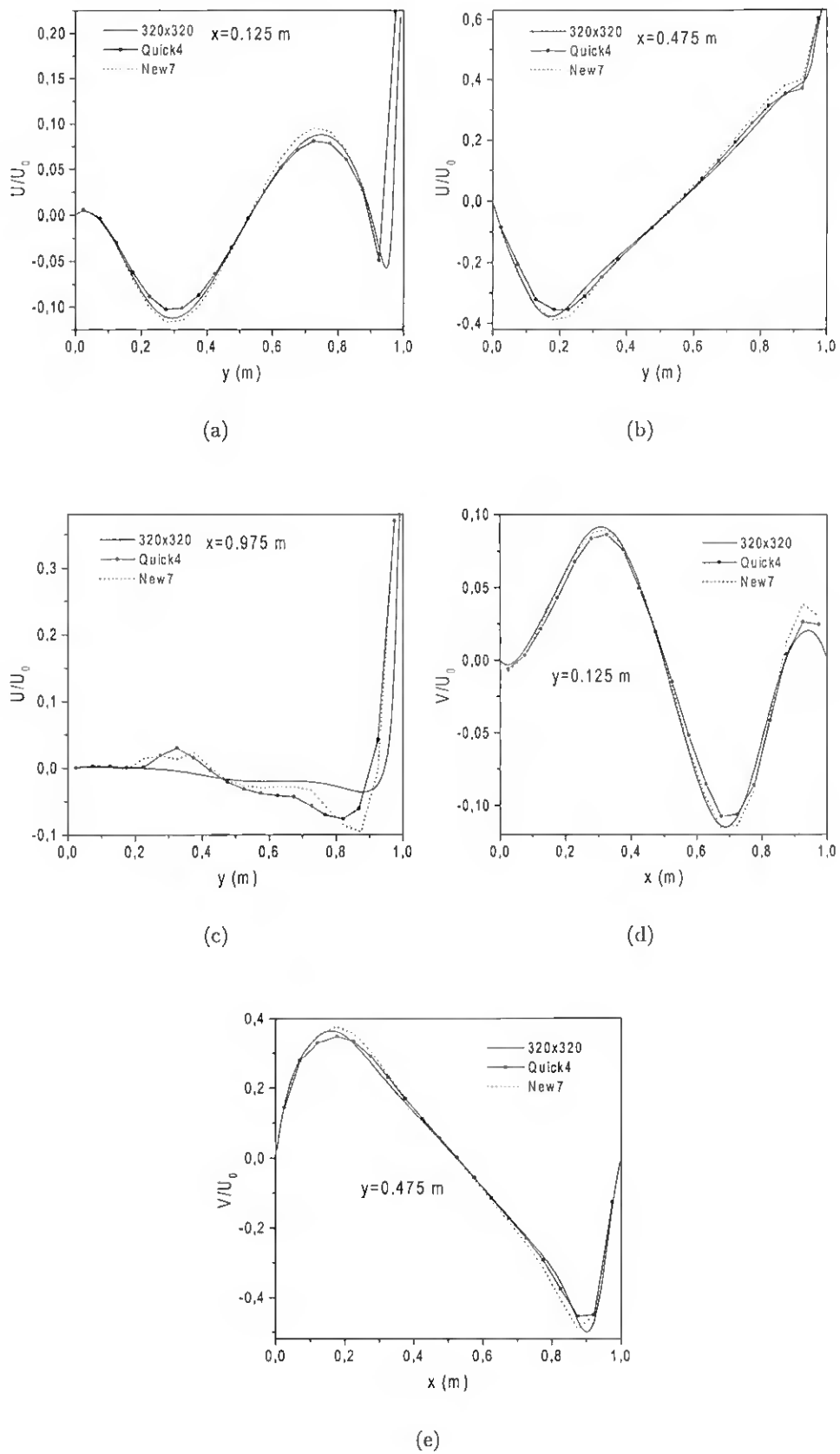


Figura 5.7: Perfis de velocidade normalizados com a velocidade  $U_0$ . Com exceção da solução obtida com a malha de  $(320 \times 320)$  nós, as outras foram obtidas com uma malha de  $(20 \times 20)$  nós. As configurações dos diferentes esquemas estão descritas na tabela 5.1.

Para finalizar, refira-se que foram realizados testes com as configurações Quick1, Quick2, Quick4, New1, New3 e New7, e não se verificou nenhuma alteração notável da taxa de convergência. Durante os testes, foram usados os mesmos parâmetros de sub-relaxação para todos os casos (ver secção 4.6),  $\alpha_U = \alpha_V = 0.7$  e  $\alpha_p = 0.3$ . Também foi aplicada a sub-relaxação temporal (ver secção 4.7) e os resultados foram similares.

### 5.1.2 Método de refinamento local para esquemas de 3 pontos.

No presente modelo foi implementado um método de refinamento local desenvolvido inicialmente por Coelho et al. (1991). O método, inicialmente concebido para esquemas de discretização da derivada advectiva de 2 pontos, foi estendido a esquemas de 3 pontos.

O caso teste escolhido é o mesmo da secção anterior. Neste caso, os cálculos serão feitos para  $Re = 1000$ . A validação do método será feita através da comparação entre os perfis calculados com o refinamento local e os perfis produzidos para malha de  $(320 \times 320)$  nós, utilizados na secção anterior. O esquema escolhido para testar o método de refinamento modificado é o Quick, com a configuração base referida na secção anterior (Quick1). O objectivo desta secção é validar a modificação do método de refinamento local, não sendo conveniente introduzir outras modificações.

Para obter o máximo rendimento das vantagens que o refinamento pode oferecer é fundamental refinar a malha localmente, com maior ou menor nível, dependendo da sensibilidade da solução ao refinamento, i.e., é necessário delimitar as zonas onde se prevê a ocorrência de erros numéricos e gradientes elevados. Na secção 4.8.2 foram escolhidos 2 critérios para definir a estratégia de refinamento: a) estudo do comportamento da difusão associada à malha, e b) estudo do comportamento dos erros numéricos, usando a técnica de extrapolação de Richardson.

O refinamento local é feito de modo a serem satisfeitos, simultaneamente e na medida do possível, os dois critérios. Para este caso de teste, no entanto, decidiu-se usar só a técnica de Richardson, porque se verificou que os valores da falsa difusão relativa eram demasiado elevados. Como não foi possível encontrar uma explicação para este comportamento, o método foi posto de parte.

Por outro lado, a técnica de extrapolação de Richardson permitiu estimar os erros da solução numérica e determinar a sua distribuição no domínio de cálculo. Esta técnica, apesar de ser aproximada, permite monitorizar a sensibilidade das diferentes zonas do domínio numérico ao refinamento da malha. Estabelecendo um critério de referência, como a normalização pelo erro máximo obtido com a extrapolação mais grosseira, pode-se estudar o comportamento dos erros em função do nível de refinamento.

Para esquemas de 2ª ordem, a expressão (4.78) permite estimar o erro de uma malha com espaçamento  $h$ . Para refinar a malha (figura 5.9) foram usadas 3 malhas de  $(20 \times 20)$ ,  $(40 \times 40)$ ,  $(80 \times 80)$  e  $(160 \times 160)$  nós. Com o conjunto  $[(20 \times 20), (40 \times 40)]$  estima-se o erro da solução da malha de  $(40 \times 40)$  nós,  $\varepsilon_{40}$ . Analogamente, com o conjunto  $[(40 \times 40), (80 \times 80)]$  estima-se o erro da solução da malha de  $(80 \times 80)$  nós,  $\varepsilon_{80}$ , e assim sucessivamente.

Nas figuras 5.8 ilustram-se os contornos dos erros  $\varepsilon_{40}$  e  $\varepsilon_{80}$ , estimados com a referida técnica. Estes erros foram normalizados pelo erro máximo de  $U$ ,  $\varepsilon_{40,max}^U$ . Nas figuras pode-se verificar que a tendência do comportamento dos erros pode ser prevista com malhas relativamente grosseiras, não sendo necessário aplicar a técnica até o maior nível de refinamento local que se pretende atingir. Até porque, em muitos casos, isto é impraticável. O presente modelo dispõe de um módulo, ainda bastante rudimentar, que faz uma geração semi-automática da malha com refinamento local. A malha resultante é apresentada na figura 5.9.

Para estudar a taxa de convergência do método de refinamento local foi elaborada uma tabela onde é apresentado o número de iterações correspondentes a cada tipo de malha. A malha base de

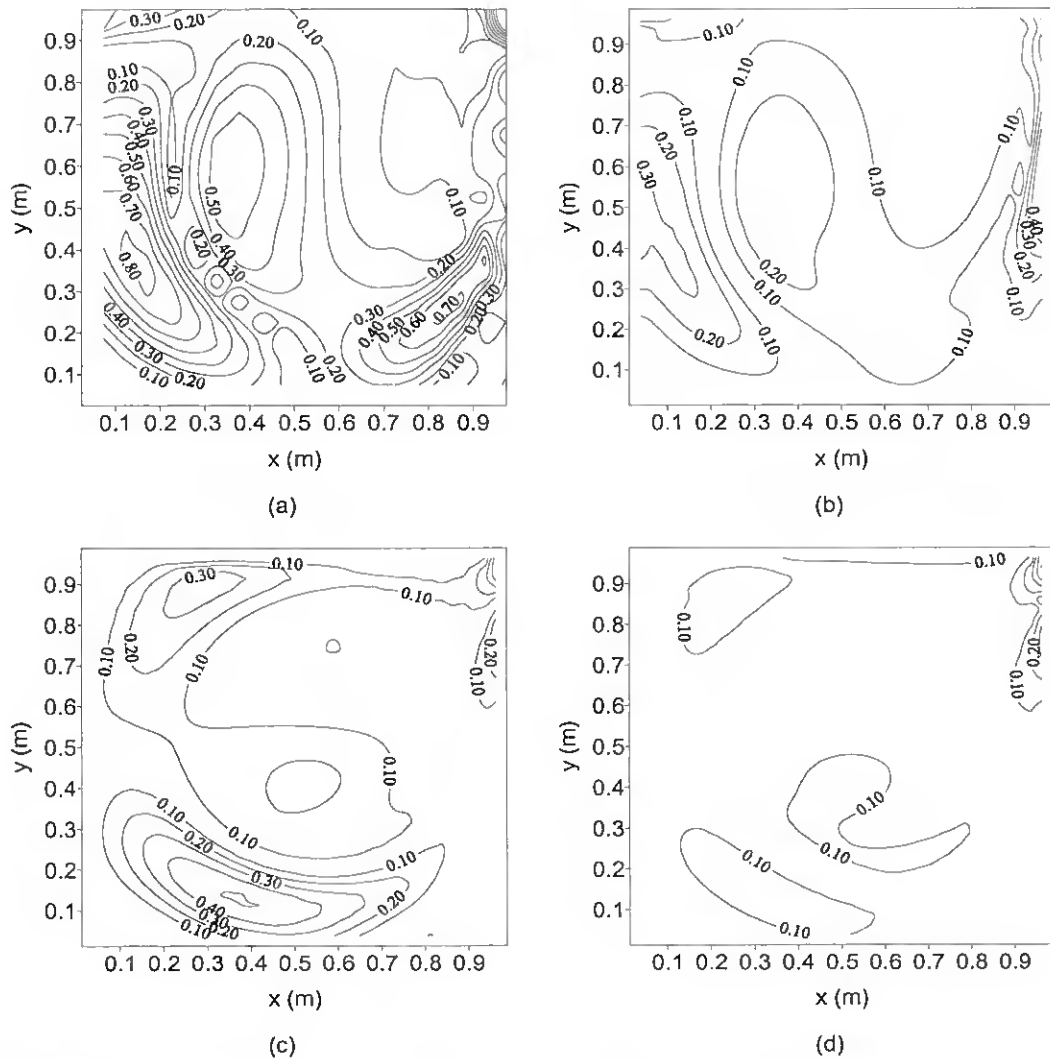


Figura 5.8: Erros estimados com a técnica de extrapolação de Richardson. (a) Erro  $\epsilon_{40}^U$ , b) erro  $\epsilon_{80}^U$ , (c) erro  $\epsilon_{40}^V$ , b) erro  $\epsilon_{80}^V$ . Os erros estão normalizados com o erro máximo,  $\epsilon_{40,max}^U$ .

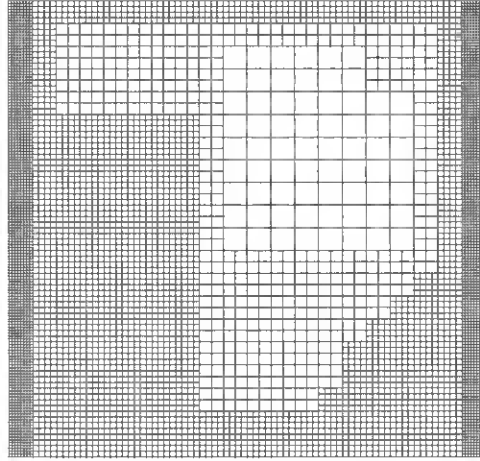


Figura 5.9: Malha base de  $(20 \times 20)$  nós com 3 níveis de refinamento local, usada para o cálculo do escoamento da cavidade com  $Re = 1000$ . A malha tem 6016 nós de cálculo e 1911 nós auxiliares.

$(20 \times 20)$  nós com 3 níveis de refinamento (6016 nós da cálculo), corresponde à malha da figura 5.9. As malhas com 1 e 2 níveis de refinamento (malha base de  $(20 \times 20)$  nós) também correspondem à malha da figura 5.9, só que são retirados 2 e 1 nível, respectivamente. O mesmo acontece com a malha de 4 níveis, para malha base de  $(20 \times 20)$  nós, onde foi acrescentado mais um nível no canto inferior esquerdo. Para melhor compreensão, os dados da tabela 5.2 foram representados na figura 5.10. Serão comparados os esquemas Híbrido e Quick de 2 e 3 pontos, respectivamente.

Antes de continuar, convém referir que a taxa de convergência da solução revela grande sensibilidade aos parâmetros de sub-relaxação. Este facto condiciona de alguma maneira a análise feita a seguir, que apesar de ser importante é incompleta, pois carece de um estudo pormenorizado do comportamento da taxa de convergência, em função dos diferentes parâmetros de relaxação. Este estudo é consideravelmente extenso, e não será apresentado porque só foi realizado parcialmente. Para os cálculos, foram usados os mesmos parâmetros de sub-relaxação em todos os casos (ver secção 4.6),  $\alpha_U = \alpha_V = 0.6$  e  $\alpha_p = 0.4$ . Estes parâmetros foram escolhidos usando como critério dominante a menor mudança possível no processo de convergência, quando se passa de uma malha sem refinamento para uma com refinamento local, ou quando se passa de um nível de refinamento para outro.

Na figura 5.10a pode-se ver que a taxa de convergência se degrada quando se usa o esquema Híbrido. Apesar disso, é sempre conveniente comparar todos os esquemas nas mesmas condições. No mesmo gráfico, pode-se ver que com o uso do Quick a taxa de convergência se degrada ligeiramente em relação ao Híbrido. Também se pode constatar que o esquema Quick se degrada menos que o Híbrido, em relação aos gráficos das malhas sem refinamento. Tanto para o Híbrido como para o Quick, as diferenças são grandes, aproximadamente 50% para o Híbrido, e 30% para o Quick. No entanto, note-se que, na malha da figura 5.9, o maior nível de refinamento, estendido a todo o domínio, corresponde a uma malha de 21600 nós. Isto equivale a uma economia de 76% dos nós de cálculo, o que é notável. É importante verificar se esta economia de nós de cálculo se traduz numa poupança de tempo de CPU.

Na tabela 5.3 são dados os tempos de cálculo, total  $t_{total}$  e por iteração  $t_{iter}$ , obtidos para malhas com e sem refinamento local, usando o esquema Quick. Na figura 5.10b está representado o gráfico dos tempos de cálculo em função do número de nós. Verifica-se que o tempo de cálculo aumenta quando se usa o refinamento de 3 pontos, com um comportamento muito similar na evolução do número de iterações (figura 5.10a). No entanto, uma malha de 25600 nós, demora 593.2 s para convergir, enquanto que uma malha com 8016 nós permite obter o mesmo resultado num tempo de 122.9 s. Isto

representa uma economia de 71% de tempo de cálculo (CPU).

Os tempos de CPU e a taxa de convergência dos métodos de refinamento de 2 e 3 pontos são muito semelhantes. A ligeira degradação que se verifica com o método de 3 pontos Quick é amplamente compensada com o tempo de CPU economizado, e com o aumento da precisão dos resultados obtidos.

Tabela 5.2: Número de iterações dos esquemas Híbrido e Quick obtidos para malhas com e sem refinamento local. A malha base de 20x20 com 3 níveis de refinamento (6016 nós), está representada na figura 5.9.

malha base	$N_{ref}$	$N_{calc}$	$N_{Hib}^{aux}$	$N_{Quick}^{aux}$	$N_{iter}^{Quick}$	$N_{iter}^{Hibr}$
16x16	0	156	0	0	143	661
20x20	0	400	0	0	160	222
32x32	0	1024	0	0	237	231
40x40	0	1600	0	0	290	257
80x80	0	6400	0	0	556	451
96x96	0	9216	0	0	671	581
16x16	1	556	84	120	302	295
20x20	1	1396	113	209	381	034
20x20	2	4096	543	2081	563	511
20x20	3	6015	993	1911	685	650
20x20	4	10864	1461	2901	826	811

Tabela 5.3: Tempos de cálculo: total ( $t_{total}$ ) e por iteração ( $t_{iter}$ ), obtidos para malhas com e sem refinamento local. Os cálculos foram feitos com o esquema Quick. O presente modelo foi corrido num PC com um processador Pentium III de 1 GHz.

malha base	$N_{ref}$	$N_{calc}$	$N_{iter}$	$t_{total}(s)$	$t_{iter}(s)$
16x18	0	156	160	1,1	0,007
20x20	0	400	237	3,3	4,014
32x32	0	1024	290	6,6	0,023
40x40	0	1600	556	12,0	0,130
96x96	0	9216	671	133,5	0,106
160x120	0	25600	1021	591,2	0,581
16x16	1	556	302	3,0	0,011
20x20	1	1396	581	9,2	0,084
20x20	2	4096	593	85,2	0,157
20x20	3	6016	685	172,1	0,251
20x20	4	10864	826	323,6	0,791

Com a malha 5.9 foram obtidos os perfis apresentados nas figuras (5.11) e (5.12). As secções onde os perfis foram obtidos estão indicadas nos gráficos. Todos os gráficos demonstram claramente a superioridade do esquema de 3 pontos (Quick). Na secção  $y = 0.969m$  os dois métodos têm um bom desempenho. É de esperar que isto aconteça, porque nessa zona os números de Peclet em  $x$  são muito elevados e, como já foi antes referido, o esquema Híbrido se comporta melhor nesses casos.

## Conclusões

- A técnica de extrapolação de Richardson para esquemas de 2ª ordem permitiu, de maneira simples e eficiente, estimar os erros numéricos e determinar a sua distribuição no domínio de cálculo, requerendo, para isto, um esforço computacional mínimo. A mesma constitui uma componente fundamental para definir a estratégia de refinamento.
- O método de refinamento local de 3 pontos permite obter melhores resultados que o 2 pontos. Apesar da degradação da taxa de convergência verificada com o esquema Quick, em relação ao uso de malhas sem refinamento local, a economia de tempo de CPU e o aumento da precisão das soluções obtidas fazem do método de 3 pontos uma ferramenta bastante útil.

## 5.2 Geração de malhas e refinamento local em coordenadas ortogonais generalizadas

### 5.2.1 Validação e teste do método de geração de malhas ortogonais generalizadas

A secção 4.9 foi dedicada à geração de malhas usando o método do gerador elíptico de coordenadas generalizadas ortogonais, composto pelas equações (4.91) e (4.92). Este sistema de equações de Laplace é resolvido com as técnicas descritas no capítulo anterior, para as equações diferenciais de balanço. Se  $f = 1$ , a malha denomina-se conforme. Como geralmente  $f$  não é conhecido, o sistema de equações tem que ser resolvido iterativamente. As equações são acopladas através de  $f$ , que é recalculado com a equação (4.93), depois de cada iteração. Para esse efeito, é preciso sempre conhecer as coordenadas dos nós nas fronteiras. Se os nós nas fronteiras forem fixos, então a condição de fronteira a usar é a de Dirichlet, e o próprio gerador se encarrega de garantir a perpendicularidade das coordenadas nas fronteiras. No caso contrário, considera-se que os nós das fronteiras são móveis, sendo necessário determinar as coordenadas dos mesmos. Para isto é imprescindível impor a condição (4.88), para garantir a ortogonalidade. Nesse caso, usa-se a condição fronteira de von Neumann. Se o domínio for acentuatadamente assimétrico, é mais aconselhável tornar os nós móveis em determinadas fronteiras, e usar a condição de fronteira de Neumann. Quando o domínio é aproximadamente simétrico em relação a uma das coordenadas, Eça et al. (1999) concluem que a opção mais aconselhável é a de fixar os nós nas fronteiras e usar a condição de Dirichlet.

A ortogonalidade das malhas geradas é avaliada pelo valor médio do desvio da ortogonalidade (ver equação (4.87)), que pode ser calculado por:

$$\overline{\Delta\theta} = \frac{\Delta\theta}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( 90 - \arccos \left( \frac{g_{12}}{(g_{11}g_{22})^{1/2}} \right) \right)_i \quad (5.4)$$

Na figuras 5.13 e 5.14 são mostradas 8 malhas geradas com o gerador elíptico (4.91), (4.92). Na fronteira inferior é usada uma montanha em forma de sino (ou montanha de Agnesi),

$$h = \frac{HL^2}{x^2 + L^2} \quad (5.5)$$

em que  $H$  e  $L$  representam a altura máxima e a semi-largura da montanha, respectivamente. O domínio tem uma largura  $L_d = 3L$ , e uma altura  $H_d = 2H$ . A altura máxima da montanha é  $H = 0.45h_d$ . Na tabela 5.4 são apresentados os valores médio e máximo do desvio da ortogonalidade para as diferentes malhas apresentadas nas figuras 5.13 e 5.14.

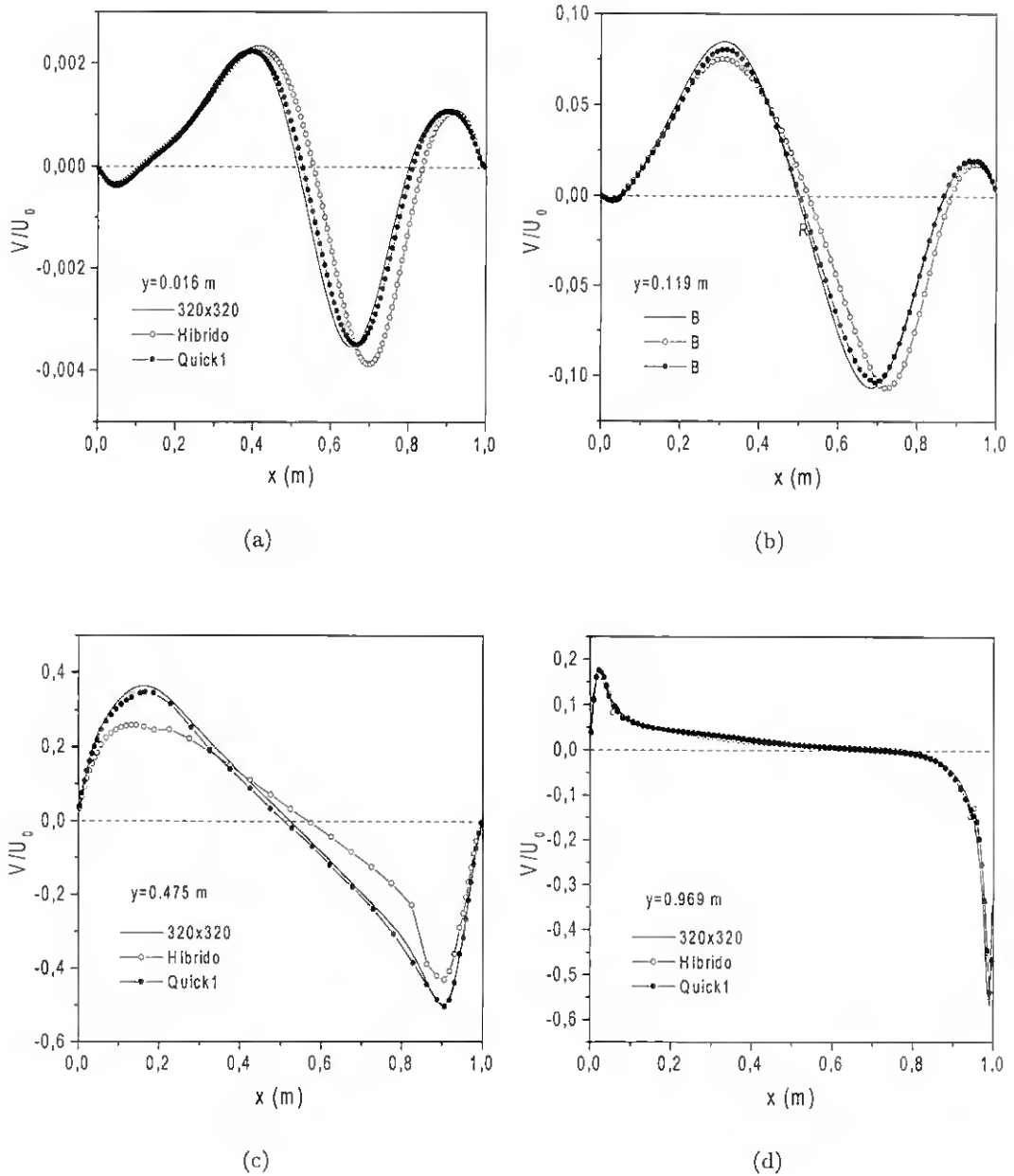


Figura 5.12: Perfis da velocidade  $V(x)$  em diferentes secções de  $y$ . a)  $y = 0.016$  m, b)  $y = 0.119$  m, c)  $y = 0.475$  m e d)  $y = 0.963$  m. Os perfis foram obtidos com a malha da figura 5.9 e foram normalizados com  $U_0$ .

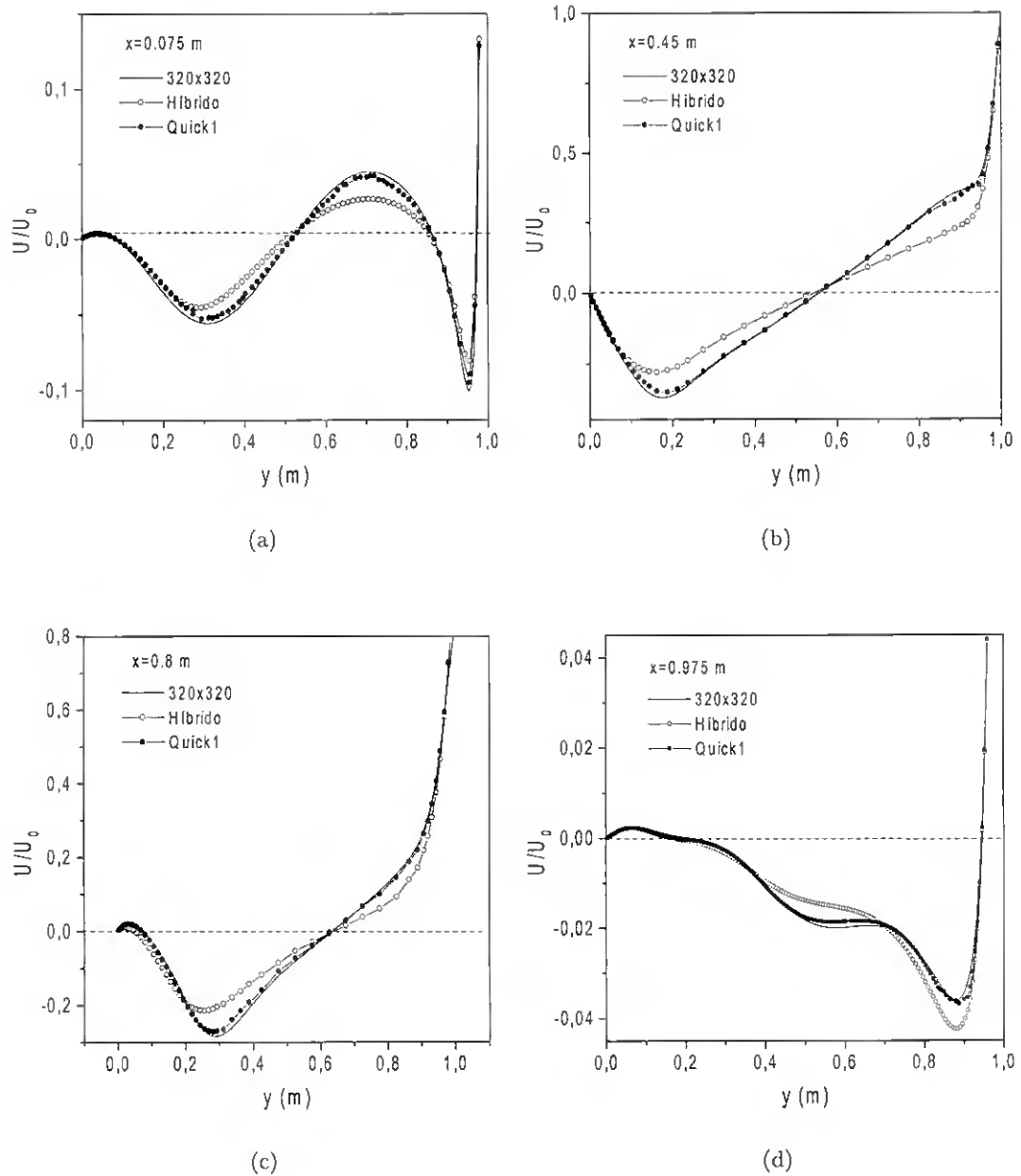


Figura 5.11: Perfis da velocidade  $U(y)$  em diferentes secções de  $x$ . a)  $x = 0.075$  m, b)  $x = 0.45$  m, c)  $x = 0.8$  m e d)  $x = 0.95$  m. Os perfis foram obtidos com a malha da figura 5.9 e foram normalizados com  $U_0$ .

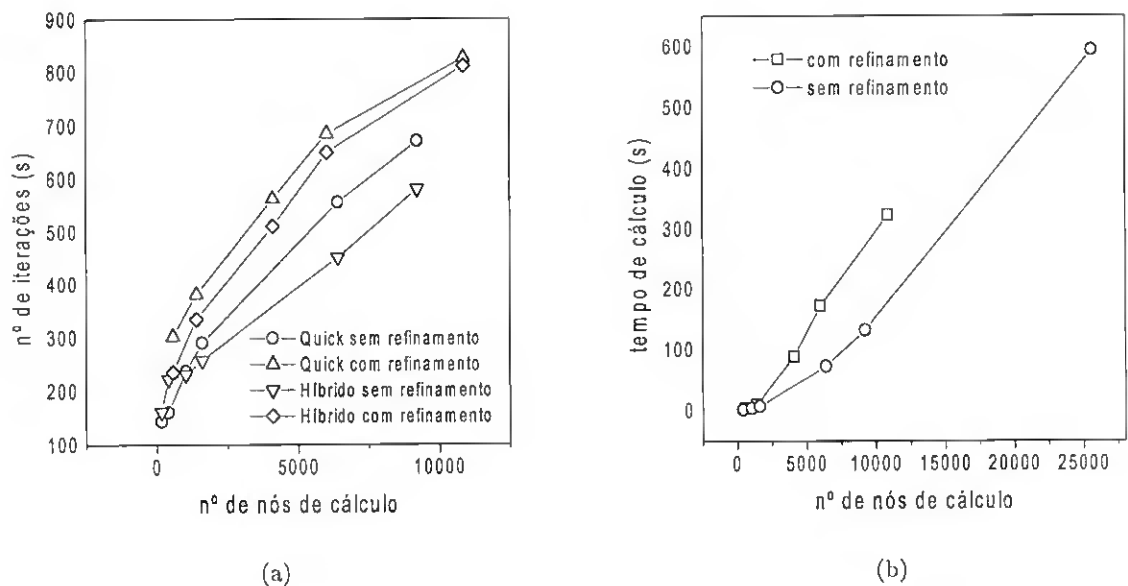


Figura 5.10: Gráficos de: a) número de iterações (ver tabela 5.2), b) tempo de CPU (ver tabela 5.3). O número de iterações e o tempo de CPU são valores de convergência do modelo FLEX.

Tabela 5.4: Valores médio e máximo do desvio da ortogonalidade para os diferentes casos mostrados nas figuras 5.13 e 5.14.

Figura	Nós móveis	$\Delta\theta$ [°]	$(\Delta\theta)_{max}$ [°]
5.13a	Norte e oeste	0.2	1.4
5.13b	Nenhum	0.3	9.5
5.13c	Norte	0.4	70.1
5.13d	Oeste	0.5	1.7
5.14a	Norte e oeste	0.6	1.6
5.14b	Nenhum	1.4	48.5
5.14c	Norte	0.6	32.1
5.14d	Oeste	0.7	1.6

Na figura 5.13b pode-se verificar que, embora todos os nós nas fronteiras tenham sido fixados com a condição de Dirichlet, a ortogonalidade é conseguida por via do deslocamento dos nós na linha de simetria. Nesse caso, o valor médio do desvio da ortogonalidade vale  $\overline{\Delta\theta} = 0.32^\circ$ , e o valor máximo é de  $(\Delta\theta)_{max} = 9.5^\circ$ . Estes valores estão em nítido contraste com o caso análogo, assimétrico, mostrado na figura 5.14b, com  $\overline{\Delta\theta} = 1.4^\circ$  e  $(\Delta\theta)_{max} = 48.5^\circ$ . Portanto, quanto mais simétrico é o domínio, mais facilidade tem o sistema elíptico em se aproximar da ortogonalidade.

Por outro lado, em clara contradição com os as conclusões de Eça et al. (1999), no caso simétrico, a mobilidade dos nós em duas fronteiras (ver figura 5.13a) produz melhores resultados do que o caso em que todos os nós estão fixos (ver figura 5.13b). Como era de esperar, no caso assimétrico é a variante dos nós das fronteiras norte e oeste móveis que produz os melhores resultados, em termos de desvios e de distribuição uniforme da concentração de nós no domínio.

A escolha das fronteiras cujos nós serão móveis nem sempre é óbvia, e requer a realização de alguns testes. O espaçamento da malha física pode ser controlado especificando a distribuição dos pontos nas fronteiras, ou então atribuindo a  $f$  um valor ou função. Se  $f$  é conhecido, então aplica-se a condição de von Neumann nas fronteiras para garantir a ortogonalidade. Neste caso, a especificação dos nós  $(x, z)$  nas fronteiras torna o problema sobre-determinado, não havendo garantias de que a condição de ortogonalidade seja satisfeita.

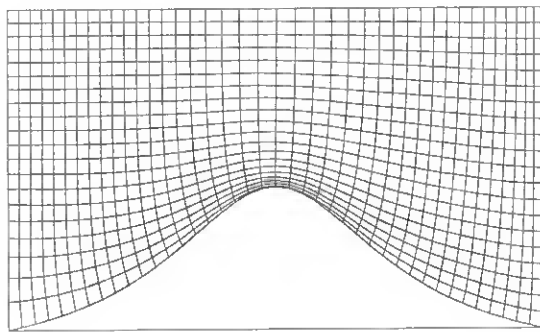
## Conclusões

- O gerador elíptico composto pelas equações (4.91) e (4.92) pode ser resolvido com o mesmo método de resolução das equações do presente modelo (ver secção 4.6).
- Em domínios simétricos, ao contrário do que Eça et al. (1999) concluem, a mobilidade simultânea dos nós em duas fronteiras produz melhores resultados do que o caso em que todos os nós estão fixos. No caso assimétrico, os resultados estão em plena concordância com os de Eça et al. (1999), i.e, a variante dos nós móveis nas fronteiras norte e oeste produz os melhores resultados, em termos tanto de desvios da ortogonalidade e como de distribuição uniforme da concentração de nós no domínio.

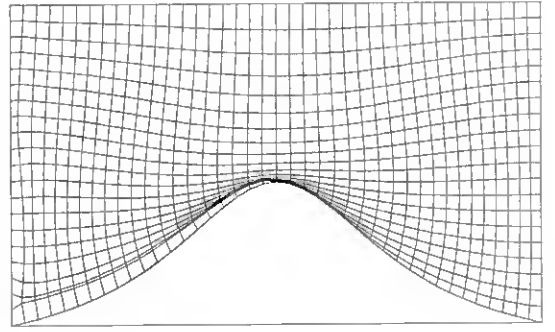
### 5.2.2 Geração de malhas ortogonais generalizadas refinadas localmente.

Tendo em conta que as equações do gerador elíptico (4.91), (4.92), são resolvidas do mesmo modo que o resto das equações, é lógico que todas as deduções feitas para o refinamento local em malhas cartesianas (ver subsecção 4.9.3), sejam aplicáveis ao presente método de geração de malhas. Resolver o sistema elíptico é equivalente a obter dois campos escalares: as coordenadas físicas  $(x, y)$ . Portanto, se uma malha base cartesiana (neste caso é o domínio computacional,  $(\xi, \eta)$ ), for refinada localmente, a solução do sistema elíptico produzirá uma malha curvilínea em coordenadas generalizadas, também refinada localmente.

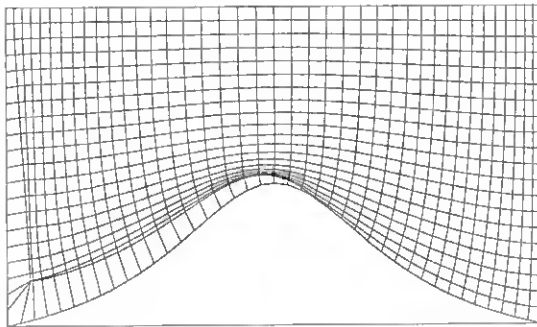
Na figura 5.15 mostra-se uma malha para exemplificar o que foi dito. A malha gerada sem refinamento local tem 12800 nós, e os valores médio e máximo do desvio da ortogonalidade são:  $\overline{\Delta\theta} = 0.3^\circ$  e  $(\Delta\theta)_{max} = 2.1^\circ$ , respectivamente. A malha da figura 5.15 tem 3413 nós, e os valores médio e máximo do desvio da ortogonalidade são:  $\overline{\Delta\theta} = 0.6^\circ$  e  $(\Delta\theta)_{max} = 2.2^\circ$ . Pode-se constatar que, embora o valor de  $\overline{\Delta\theta}$  seja o dobro no caso do refinamento local, ele é tão baixo que pode é perfeitamente aceitável. O valor mais importante é o de  $(\Delta\theta)_{max} = 2.2^\circ$ , que se mantém praticamente constante. Conclui-se que o refinamento local pode ser aplicado com sucesso na geração de malhas ortogonais generalizadas refinadas localmente.



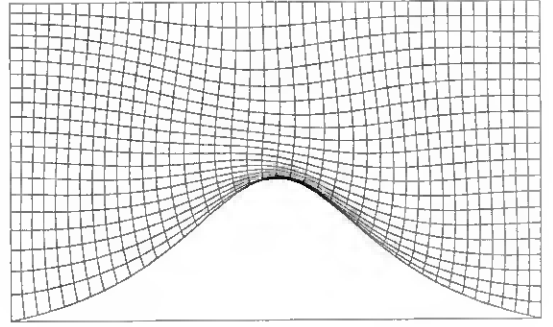
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.13: Malhas curvilíneas ortogonais num domínio simétrico: a) com os nós móveis nas fronteiras norte e oeste, b) com todos os nós fixos, c) com os nós móveis só na fronteira norte, d) com os nós móveis só na fronteira oeste.

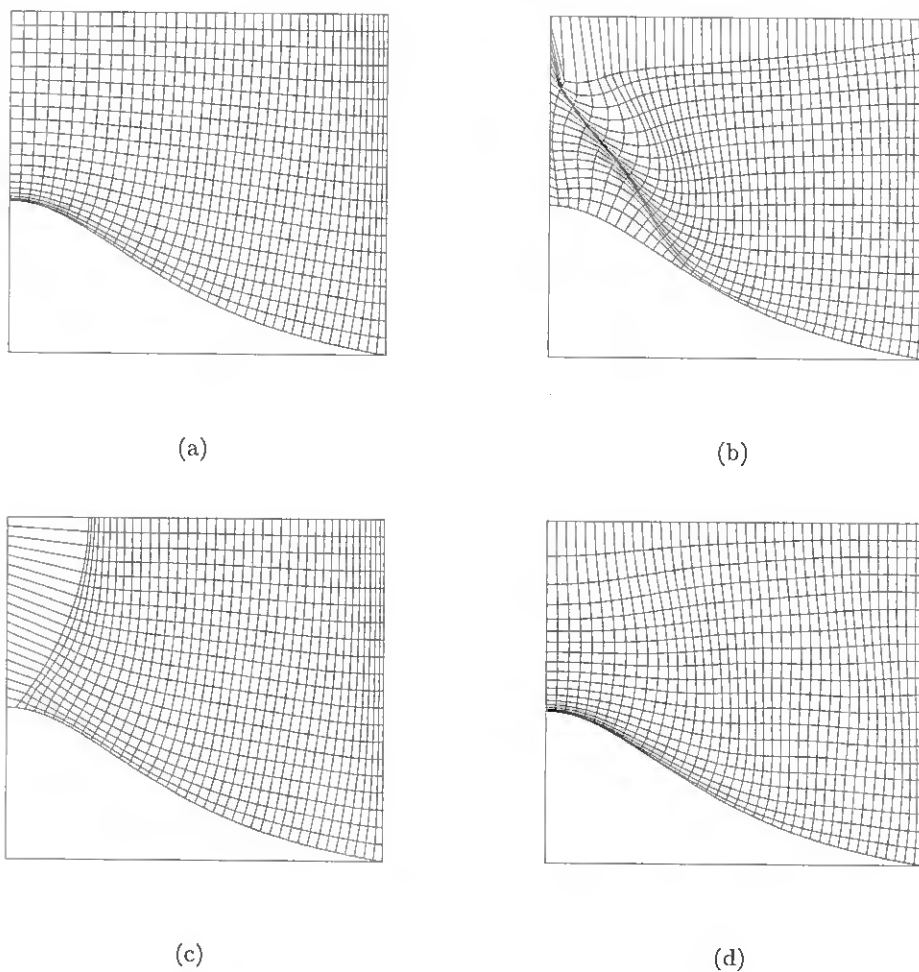


Figura 5.14: Malhas curvilíneas ortogonais num domínio assimétrico: a) com os nós móveis nas fronteiras norte e oeste, b) com todos os nós fixos, c) com os nós móveis só na fronteira norte, d) com os nós móveis só na fronteira oeste.

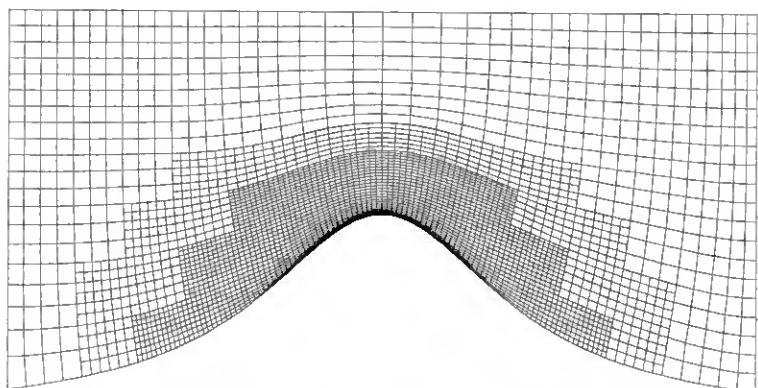


Figura 5.15: Malha em coordenadas ortogonais generalizadas com refinamento local.

## Capítulo 6

# Escoamentos de microscala em camadas limites turbulentas bidimensionais

Em geral, os escoamentos de CL de microscala são muito influenciados pelos efeitos das superfícies rugosas, estando geralmente confinados a uma camada delimitada pelos mesmos. Neste contexto, deixa de fazer sentido a expressão (2.89) que define a espessura da camada interna. Os casos estudados a seguir já foram investigados por outros autores e, embora os resultados obtidos por alguns deles sejam ligeiramente diferentes, este capítulo deve ser considerado como sendo essencialmente de validação. As semelhanças entre estes escoamentos e os escoamentos atmosféricos residem fundamentalmente na forma das diferentes orografias e na existência de uma CL turbulenta, que pode ser simulada com alguns métodos mais ou menos similares aos usados para estes escoamentos. As funções da parede são um bom exemplo disto.

Antes de analisar os casos escolhidos, três aspectos devem ser realçados: 1) Nestes casos serão usadas as modificações da forma clássica de implementar o algoritmo SIMPLE e as condições de fronteira testadas no capítulo anterior. É de esperar que as mesmas melhorem o desempenho do modelo. 2) Em muitos modelos, para tomar em conta a complexidade da topografia, só é feita a transformação da coordenada vertical. Embora existam critérios para a aplicabilidade deste tipo de transformação (ver subsecção 4.6.2), em escoamentos não lineares sobre orografia abrupta os erros da difusão numérica dos termos advectivos e os erros da difusão associada à distorção da malha interagem, sendo por isso difíceis de discriminar. Para contornar esta dificuldade, no presente modelo são usadas coordenadas curvilíneas generalizadas ortogonais. As equações são manipuladas de modo a incorporar os termos difusivos de maneira mais eficaz, e menos propensa à degradação da taxa de convergência, que se verifica quando estes termos não são discretizados convenientemente. O modelo permite isolar os termos associados à não ortogonalidade da malha em todas as equações e à heterogeneidade da turbulência nas equações de movimento. 3) O método de refinamento local modificado, para o uso de esquemas de 3 pontos e para o uso de coordenadas generalizadas ortogonais, abre novas possibilidades para simulações mais precisas.

## 6.1 Estudo da resposta da camada limite turbulenta a uma descontinuidade do fluxo de calor superficial

Nesta secção é feita a validação do modelo numérico, por comparação com o trabalho experimental de Antonia et al. (1977), no qual é feito um estudo da resposta da CL a uma descontinuidade do fluxo de calor superficial. A escolha deste caso deve-se à sua similaridade com os escoamentos atmosféricos. Escoamentos atmosféricos comparáveis ocorrem em situações de advecção de ar marítimo sobre uma superfície continental mais quente, como é frequente no Verão, durante o dia. A camada limite térmica interna que se desenvolve neste tipo de escoamentos tem um comportamento similar ao da camada que se desenvolve nos escoamentos de microescala. Em ambos casos se pode assumir que a perturbação da temperatura média na zona aquecida é auto-preservada, i.e., é do tipo

$$T - T_1 = -\frac{\theta_0}{\kappa_0} \Phi\left(\frac{z}{l_0}\right) \quad (6.1)$$

em que  $\theta_0$  e  $l_0$  representam as escalas de temperatura e comprimento respectivamente, e  $T_1$  é a temperatura ambiente. Note-se que no caso da CLA a equação anterior é similar à expressão (2.49), quando  $L_{mo} \rightarrow \infty$ .

Antonia et al. (1977) estudaram nesta experiência o desenvolvimento da camada limite térmica ao longo de um túnel de vento (ver figura 6.1), medindo os campos de temperatura e velocidade.

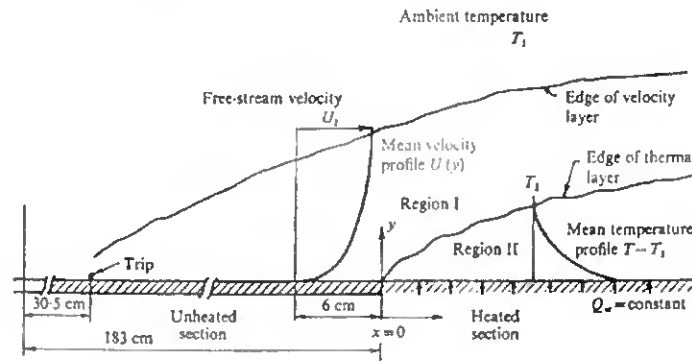


Figura 6.1: Diagrama esquemático da experiência de Antonia et al. (1977).

A parede inferior (lisa e impermeável) do túnel, de 4.9 m de comprimento, por 0.38 m de largura e 0.23 m de altura, foi aquecida quase uniformemente a partir de uma distância de 2 metros no início do canal e ao longo de 2.4 m, com um fluxo de calor médio de  $Q_w = 0.23$  m K/s. O tecto do canal era ajustável de modo a poder obter-se um gradiente nulo de pressão. A temperatura ambiente foi mantida constante nos 26°C. No início da zona aquecida ( $x = 0$  m), a camada limite de gradiente nulo de pressão estava completamente desenvolvida. Em  $x = 0$ , a velocidade medida do escoamento desenvolvido foi de  $U_1 = 9.45$  m/s, a espessura da camada limite de velocidade (definida como a distância à parede em que  $U = 0.995U_1$ ) foi de  $\delta_0 = 0.045$  m, e o número de Reynolds foi estimado em  $Re_{\theta_0} = U_1\theta_0/\nu = 3070$ , em que  $\theta_0$  é a espessura da camada limite de velocidade (para  $x = 0$ ). O valor da velocidade de fricção  $u_* = (\tau_w/\rho)^{0.5}$ , calculado a partir do coeficiente de fricção ( $c_f = \tau_w/(0.5U_1^2)$ ) à entrada da zona aquecida foi de  $u_* = 0.38$  m/s. O fluxo de calor é suficientemente pequeno para poder ser desprezado o efeito da variação da densidade no escoamento (caso neutro).

Os dados experimentais extraídos de Antónia et al. (1977), para serem comparados com os resultados da modelação numérica são: os perfis da temperatura média local  $T$ , em várias secções da zona

aquecida, e as distribuições, ao longo da zona aquecida, da diferença de temperatura entre a parede e o meio ambiente ( $T_w - T_1$ ), da profundidade da camada limite térmica  $\delta_T$ , do número de Stanton ( $St$ ), e do coeficiente de fricção ( $c_f$ ). A grandeza  $\delta_T$  é definida como a altura  $z$  na qual se cumpre a condição:  $T - T_1 = 0.01(T_w - T_1)$ . Os perfis da temperatura média local  $T$  são apresentados adimensionalmente, usando as escalas de temperatura e comprimento  $\theta_* = Q_w/u_*$  e  $\nu/u_*$  ( $u_*$ ,  $\theta_*$  - velocidade e temperatura de fricção respectivamente).  $\delta_T$  é normalizado com  $\delta_0$ . Os perfis experimentais são mostrados nas figuras 6.5 e 6.6.

Os valores de  $T_w$  são obtidos por Antonia et al. (1977) por extrapolação dos perfis lineares de temperatura média junto da parede. Estes valores coincidem razoavelmente com os valores medidos directamente na parede. A distribuição do fluxo de calor cinemático  $Q_w(x, 0)$  é obtida pelos autores mediante o cálculo dos declives dos referidos perfis de temperatura média. A função  $Q_w(x)$  é aproximadamente constante.

O número de Stanton ( $St$ ) é proporcional ao quociente [capacidade de transferência térmica do sistema]/[capacidade térmica do fluido], i.e.,

$$St = \frac{h}{\rho c_p U_1} \quad (6.2)$$

em que  $h$  e  $c_p$  representam o coeficiente de transferência de calor e o calor específico à pressão constante, respectivamente. Como o calor é dado em unidades termométricas (m K/s) (fluxo cinemático), então o numerador e o denominador da expressão anterior têm que ser divididos por  $\rho c_p$ , e depois multiplicados por  $T_w - T_1$ . Assim, obtém-se:

$$St = \frac{Q_w}{U_1(T_w - T_1)} \quad (6.3)$$

Para comparar os valores numéricos de  $St$  com os dados experimentais, o valor simulado de  $Q_w$  é determinado pela expressão:

$$Q_w = \frac{d[(T_w - T_1)\delta_H]}{dx} \quad (6.4)$$

em que  $\delta_H$  representa a espessura de entalpia, dada por:

$$\delta_H = \int_0^\infty \frac{U}{U_1} \left( \frac{T - T_1}{T_w - T_1} \right) \quad (6.5)$$

O coeficiente de fricção  $c_f$  é dado por:

$$c_f = \frac{\tau_w}{0.5U_1^2} \quad (6.6)$$

em que  $\tau_w$  é a tensão de corte na parede. Os autores determinaram a distribuição  $c_f(x)$  a partir dos perfis medidos da velocidade média. Note-se que o factor  $\varphi = St/(0.5c_f)$  deve ser aproximadamente igual a 1.

Como já foi referido na subsecção 4.11.1, para a CL turbulenta bidimensional com gradiente de pressão nulo em  $x$ , o escoamento está em equilíbrio e portanto devem ser válidas as funções da parede. Os dados experimentais de Antonia et al. (1977) confirmam parcialmente este facto. Segundo estes autores, as funções da temperatura que melhor se ajustam aos dados experimentais são (ver subsecção 4.11.1):

$$\frac{(T_w - T)}{\theta_\tau} = \sigma_{T,l} z^+ \quad \text{zona linear (subcamada viscosa)} \quad (6.7)$$

$$\frac{(T_w - T)}{\theta_\tau} = \frac{\sigma_{T,t}}{\kappa_T} \ln z^+ + C_T \quad \text{zona logarítmica} \quad (6.8)$$

em que  $\sigma_{T,l}$  e  $\sigma_{T,t}$  representam os números de Prandtl laminar e turbulento para T, respectivamente, e  $\kappa_T$  é a constante de von Karman. Neste caso, de acordo com os dados experimentais, a subcamada viscosa está delimitada pelo valor  $z^+ = 8$ . Para  $z^+ < 8$ , fazendo  $\sigma_{T,l} = 0.73$  na expressão (6.7), obtém-se um bom ajuste dos perfis experimentais de  $T$  ao longo de toda a zona aquecida. Para  $z^+ > 8$ , só a partir de  $x/\delta_0 > 18.4$  os perfis de  $T$  têm um comportamento logarítmico que se ajusta razoavelmente à expressão (6.8) fazendo  $\sigma_{T,t} = 1.0$ ,  $\kappa_T = 0.41$  e  $C_T = 2$ . Estes resultados confirmam o que já foi acima referido, i.e., que a perturbação da temperatura média na zona aquecida é auto-preservada.

É geralmente em escoamentos de microescala com processos de difusão térmica junto da parede, como é o caso em estudo, que são maiores os requisitos de precisão junto das superfícies com trocas térmicas. Neste caso, para a modelação da turbulência foram usados dois modelos: o modelo  $k - \varepsilon$  de Lam e Bremhorst (1981)(LB81) para números de Reynolds baixos (ver secção 4.11.1), e o modelo  $k - \varepsilon$  com a modificação de Chen e Patel (1987) (CP87), para o tratamento da parede (ver secção 4.11.1). As funções de parede foram excluídas porque elas são menos adequadas a este caso, em que é preciso ter uma precisão elevada junto da parede. Como o modelo das funções da parede é de duas camadas, ele não prevê a transição desde as zonas com números de Reynolds elevados para as de números de Reynolds mais baixos, de um modo contínuo, sendo, por isso, menos preciso junto da superfície neste tipo de escoamentos. Apesar disto, as funções da parede permitem obter resultados bastante satisfatórios (ver por exemplo Coelho et al., 1992).

O cálculo preciso dos gradientes elevados junto da parede, usando os modelos para números de Reynolds baixos, necessita de pelo menos 50 pontos para  $z^+ < 50$  (Patel et al., 1985)). Na direcção longitudinal ( $x$ ), para obter uma boa resolução na subcamada viscosa ( $z^+ < 5$ ), segundo as sugestões dos mesmos autores,  $\Delta x$  não deve ser maior do que  $25\nu/u_\tau$ , i.e., 5 vezes a espessura da subcamada viscosa. No presente caso o domínio computacional tem um comprimento de 2.4 m, começando no início da zona aquecida ( $x = 0$ ), e uma altura de 0.25 m, pelo que cumprir tais requisitos é bastante difícil. Por exemplo,  $z^+ = 50$  equivale a  $z \approx 0.0025$ , e este valor dividido por 50 dá  $\Delta z \approx 5 \times 10^{-5}$ . Como já foi referido, a espessura da camada limite de velocidade é de  $\delta_0 = 0.045$  m, valor que equivale a  $z^+ \approx 1120$  ou  $1/5$  da altura do domínio de cálculo (0.23m). A espessura da subcamada viscosa é de  $z_i = 0.00025$  ( $z^+ = 5$ ) e portanto,  $\Delta x$  deve ser  $\Delta x \approx 5z_i \approx 0.00125$  m. Só na subcamada viscosa, que ocupa  $1/1000$  da altura do domínio de cálculo, seriam necessários 96000 nós de cálculo. Este é, portanto, um bom caso para aplicar o refinamento local. Refira-se que, embora as condições de Patel et al. (1985) para obter uma boa resolução não sejam cumpridas com rigor, por serem demasiado restritivas, o modelo  $k - \varepsilon$  para números de Reynolds baixos de LB81, permitiu obter bons resultados, como se verá.

O modelo CP87 é uma espécie de híbrido do tratamento da superfície dos modelos para números de Reynolds baixos e do tratamento bicamada clássico das funções da parede. O modelo CP87 calcula a viscosidade turbulenta como os modelos para números de Reynolds baixos, i.e., recorrendo a uma função contínua. Por outro lado, o modelo CP87 não resolve a equação de transporte de  $\varepsilon$  na subcamada interna, pelo que CP87 é uma alternativa menos custosa computacionalmente do que LB81. Em comparação, o presente modelo dispõe de duas ferramentas importantes: a) o método de refinamento local de 3 pontos que permite incorporar esquemas mais precisos, e b) a configuração Quick4, que se encontra detalhadamente explicada na secção 5.1.1

Neste caso de teste há quatro tipo de fronteiras: entrada (ocste), saída (este), superfície (sul) e superfície livre (norte). A seguir é dada uma explicação breve sobre as condições usadas em cada fronteira. Para mais detalhe ver a secção 4.10.

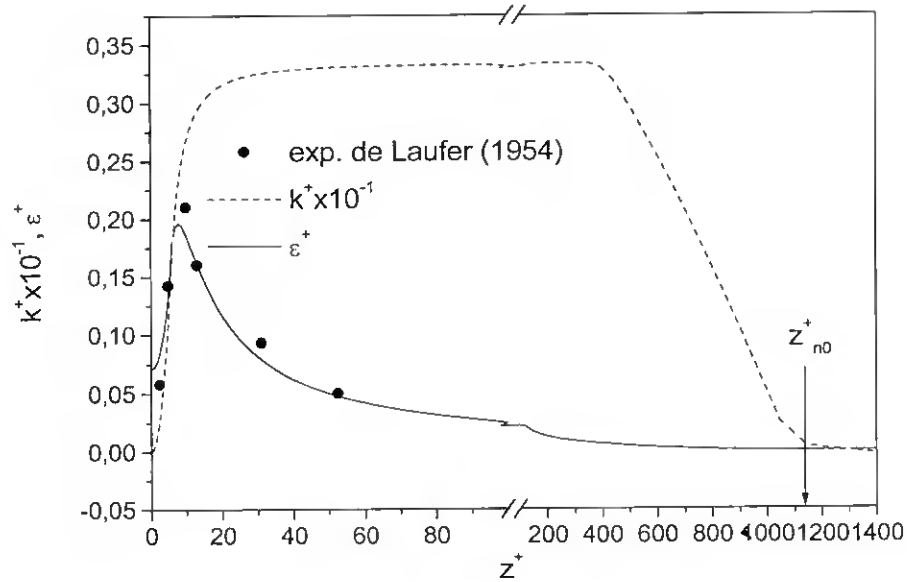


Figura 6.2: Perfis adimensionais da energia cinética turbulenta ( $k^+$ ) e da dissipação ( $\varepsilon^+$ ) em função da altura adimensional ( $z^+$ ), determinados com o modelo semi-analítico de Hwang e Liou (1991) ( $k^+ = k/u_*^2$  e  $\varepsilon^+ = \mu\varepsilon / (\rho u_*^4)$ ). A seta indica a espessura adimensional da camada limite de velocidade.

### Entrada (fronteira oeste)

Como não se dispõe de dados experimentais dos perfis de  $k$  e  $\varepsilon$  à entrada do domínio, foi necessário defini-los. Para isto foi usado o modelo semi-analítico de Hwang e Liou (1991), descrito detalhadamente no anexo I. Na figura 6.2 mostram-se os perfis adimensionais de  $k$  e  $\varepsilon$  ( $k^+$  e  $\varepsilon^+$ ), em função de  $z^+$ , calculados com este modelo semi-analítico. O perfil de  $\varepsilon^+$  é comparado com os dados experimentais de Laufer (1954), revelando uma boa concordância. Na figura 6.3b, mostra-se o perfil de  $\mu_t$  adimensional ( $\mu_t^+$ ) calculado com LB81. O perfil de  $\mu_t^+$  calculado com CP87 é praticamente idêntico ao calculado com LB81. A velocidade  $U$  à entrada foi definida com base no modelo das funções da parede (ver subsecção 4.11.1) para  $0 < z^+ < 0.15z_0^+$ :

$$\begin{aligned}
 U &= u_* z^+ & 0 < z^+ < 10.9 \\
 U &= \frac{u_*}{\kappa} \ln(Ez^+) & 10.9 \leq z^+ < 0.15z_0^+ \\
 U &= u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \ln(Ez^+) + 0.4594 \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{\delta_0}\right) \right) \right] & 0.15z_0^+ \leq z^+ < z_0^+ \\
 U &= U_1 & z^+ \geq z_0^+
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

em que  $z_0^+ = \rho u_* \delta_0 / \mu$ . Para  $0.15z_0^+ \leq z^+ < z_0^+$  à função logarítmica é adicionada uma função do tipo  $\cos(z^+)$  para garantir a suavidade do perfil. O perfil de  $U$  é apresentado na figura 6.3a. À entrada considera-se que o escoamento é parabólico, pelo que  $W = 0$ .

### Saída (fronteira este)

À saída, a componente normal da velocidade é estimada através de um balanço de massa entre a entrada e a saída, garantindo a conservação global da massa. Nesta fronteira, como nos restantes casos, é imposta, para todas as variáveis, a condição de gradiente nulo.

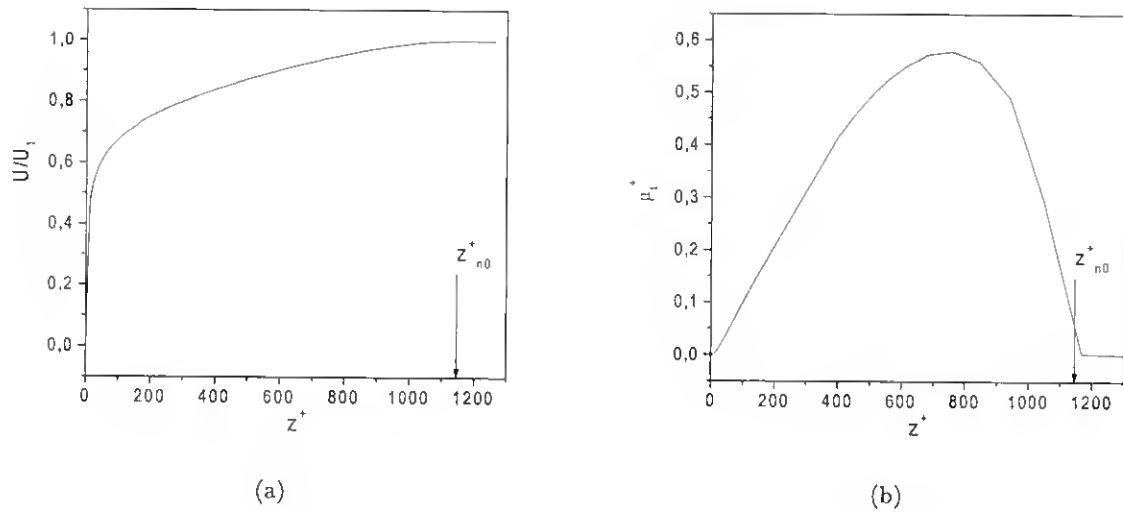


Figura 6.3: Perfis adimensionais da componente horizontal da velocidade média e da viscosidade turbulenta ( $z^+$ ) ( $\mu_t^+ = \mu_t / (\rho \kappa u_* \delta_0)$ ), em função da altura adimensional ( $z^+$ ). O perfil de  $\mu_t^+$  corresponde ao modelo LB81.

### Superfície livre (fronteira superior)

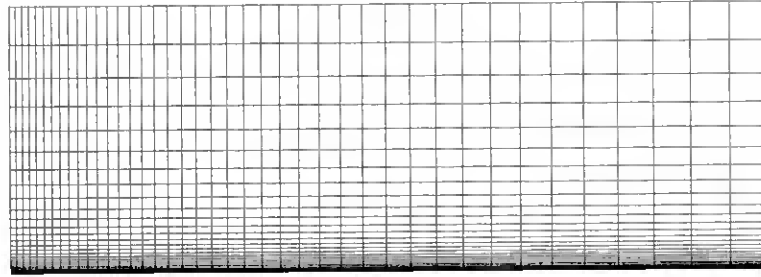
Na fronteira norte, devem anular-se todos os gradientes na direcção  $z$  ( $a_i = 0$  para todas as variáveis), pois nela o escoamento turbulento deve estar completamente desenvolvido.

### Superfície

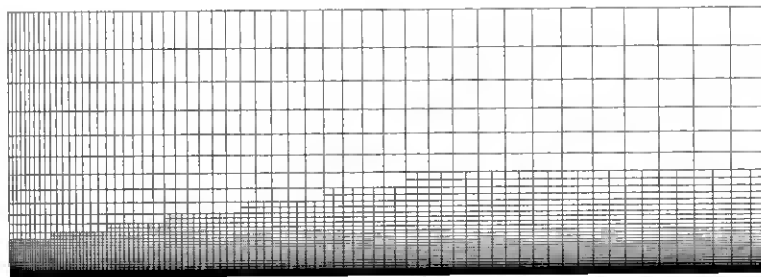
Na superfície a velocidade é nula, devido à condição de não escorregamento, e é imposta mediante a condição de fronteira do tipo Dirichlet. Como nesta fronteira a velocidade é conhecida, então na equação da correcção de pressão ( $p'$ ) basta anular o coeficiente da equação discretizada ( $a_S = 0$ ). Junto da parede, a energia cinética turbulenta anula-se, sendo incorporada de modo análogo à velocidade. A incorporação da condição fronteira de  $\varepsilon$  depende do tipo de modelo de turbulência. Como já foi antes referido, o modelo CP87 calcula  $\varepsilon$  algebricamente para  $f_\mu < 0.99$ , sendo por isso o seu valor fixado junto da parede. Por outro lado, o modelo LB81 usa a condição de fluxo nulo de  $\varepsilon$  através da parede, i.e.,  $\partial\varepsilon/\partial z = 0$ . Na parede, o fluxo de calor é dado e portanto tem de ser imposto com a condição de fronteira do tipo von Neumann. Note-se que a condição de von Neumann implica um tratamento explícito na parede. O valor de  $T_w$  numérico, para ser comparado com os dados experimentais, é obtido por extrapolação polinomial, usando os valores da temperatura dos 4 nós de cálculo mais próximos da parede (usam-se polinómios análogos aos da expressão (4.118)).

Como já foi antes referido, nos escoamentos atmosféricos o termo  $\Phi$  dado pela expressão (2.8) é desprezável, mas, nos escoamentos de microescala como é o caso, o mesmo não deve ser desprezado. Testes realizados provam que ele deve ser tomado em conta na previsão da temperatura da parede e na sua vizinhança, pois é a zona onde a viscosidade molecular desempenha um papel mais relevante. O termo  $\Phi$  é modelado de maneira análoga ao termo de geração de  $k$  ( $S_k$ ) (3.20). A discretização de  $\Phi$  e  $S_k$  é idêntica, bastando substituir a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  pela viscosidade molecular  $\mu$  (ver expressão (2.7)).

Nesta simulação foram usadas as malhas apresentadas na figura 6.4. Como foi demonstrado na secção 4.9, não é, em geral, conveniente usar coeficientes de expansão da malha de cálculo, mas, neste



(a)



(b)

Figura 6.4: a) Malha de cálculo base de (50x30) nós, com  $\Delta x_{min} = 0.01$  m e  $\Delta z_{min} = 0.0004$  m,  $r_x = 1.048572$ ,  $r_z = 1.168112$ , b) Malha da alínea anterior com 2 níveis de refinamento local, 4650 nós de cálculo, e 342 nós auxiliares. De acordo com os critérios de Patel et al.(1985),  $\Delta x_{min}^{Patel} = 0.0015$  e  $\Delta z_{min}^{Patel} = 0.00005$ . Na representação, a malha foi exagerada verticalmente, 2.5 vezes. O domínio de cálculo tem (2.4x0.23) m.

caso, o seu uso foi incontornável. A única maneira de atenuar a degradação da precisão pelo uso de malhas expandidas consiste em limitar o valor dos coeficientes de expansão. Neste caso os cálculos mostraram que para expansões inferiores a 10 % a precisão não era muito afectada. No caso da expansão vertical, esse valor foi ligeiramente excedido ( $\epsilon_z = 1.168112$ ). Note-se que  $\Delta x_{min} = 8\Delta x_{min}^{Patel}$  e  $\Delta z_{min} = 8\Delta z_{min}^{Patel}$  porque o 2º nível divide a face de um VC em 4 faces (16 nós por VC da malha base). Como as faces dos VC's coincidem com as fronteiras, o primeiro nível de cálculo está a uma altura  $z = \Delta z_{min}^{Patel}/2$ . O 2º nível de refinamento só abrange os primeiros 3 níveis.

Para a construção destas malhas foram usados os critérios para o refinamento local expostos na subsecção 4.8.2, e exemplificados no escoamento da cavidade quadrada com uma parede móvel (ver subsecção 5.1.2).

### 6.1.1 Discussão de resultados e conclusões

Os resultados obtidos com a malha da figura 6.4b são apresentados nas figuras 6.5 e 6.6. Os perfis calculados com uma malha para qual o refinamento se estende a todo o domínio diferem pouco dos obtidos com a malha da figura 6.4a, pelo que se decidiu não os apresentar.

Observando as figuras 6.5 e 6.6, verifica-se que o modelo de CP89 permite obter, de um modo geral, melhores perfis em todas as secções da zona aquecida do que o modelo LB81. Este último, sendo um modelo para números de Reynolds baixos, tem grandes exigências em termos de precisão para poder produzir bons resultados. Como já foi referido, estas exigências não foram cumpridas com

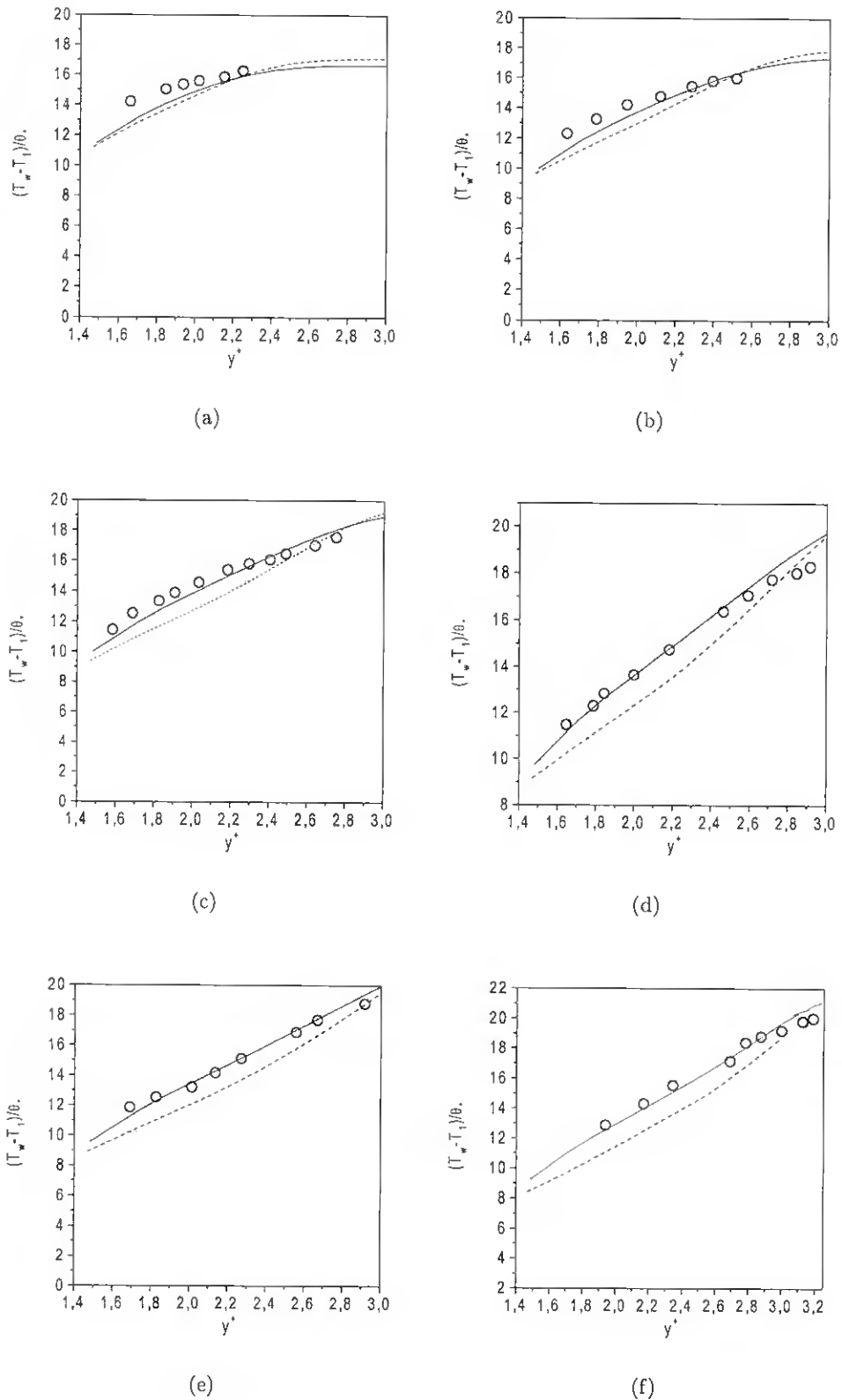


Figura 6.5: Perfis verticais da temperatura média, normalizados com a escala de temperatura  $\theta_*$ . Os perfis correspondem as seguintes secções: a)  $x/\delta_0 = 2.3$ , b)  $x/\delta_0 = 5.7$ , c)  $x/\delta_0 = 11.4$ , d)  $x/\delta_0 = 18.9$ , e)  $x/\delta_0 = 25.7$ , f)  $x/\delta_0 = 42.9$ . Os símbolos correspondem as dados experimentais de Antonia et al. (1977). (---) corresponde à simulação com LB81 e (—) corresponde à simulação com Chen e Patel (1987).

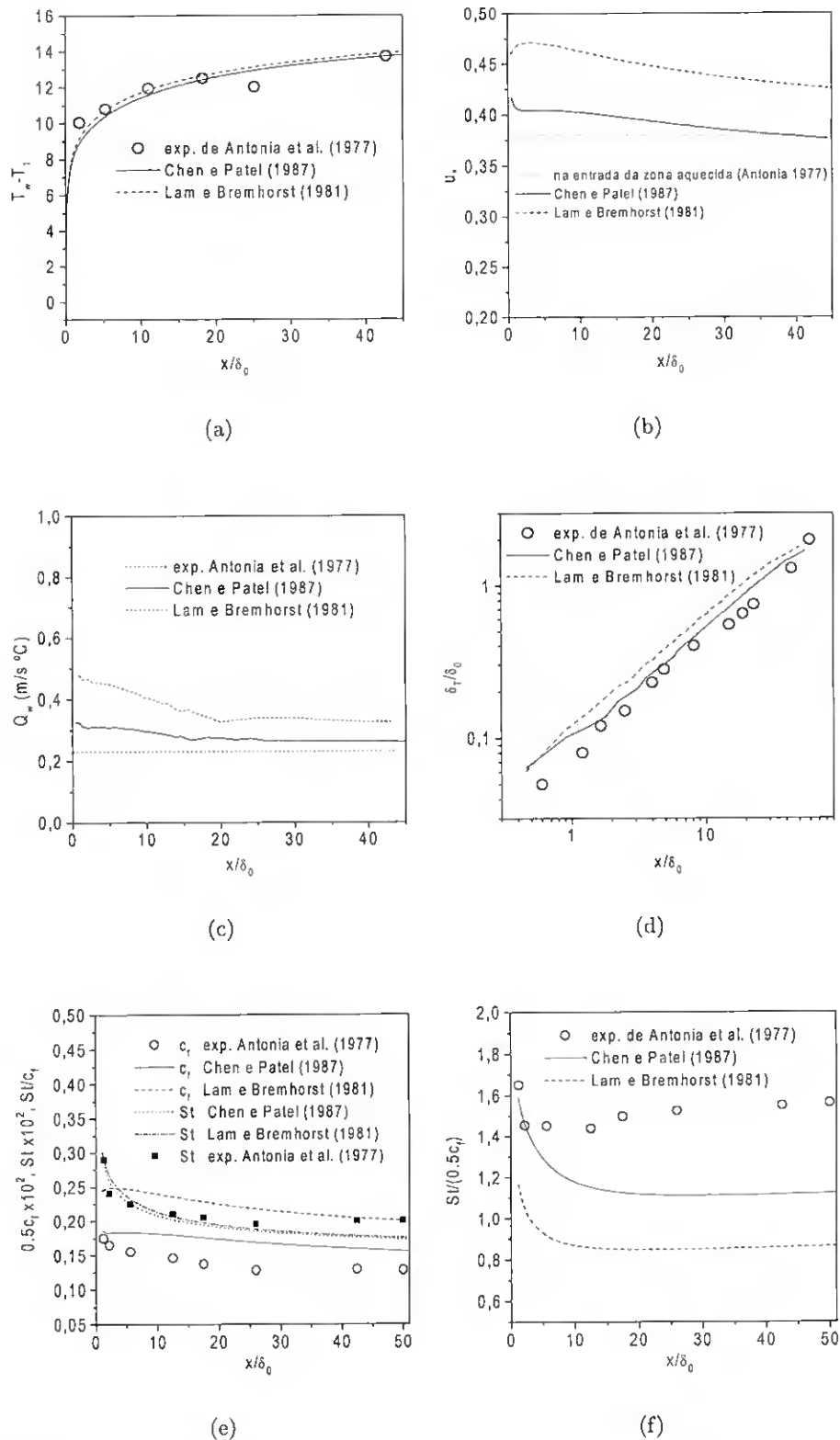


Figura 6.6: Variação ao longo da zona aquecida de: a)  $T_w - T_1$ , b)  $u_*$ , c)  $Q_w$ , d)  $\delta_T/\delta_0$ , e)  $St$  e  $0.5c_f$ , e f) quociente  $St/(0.5c_f)$ . O símbolo (o) corresponde aos dados experimentais de Antonia et al. (1977), e (\*) à simulação de Coelho et al. (1992).

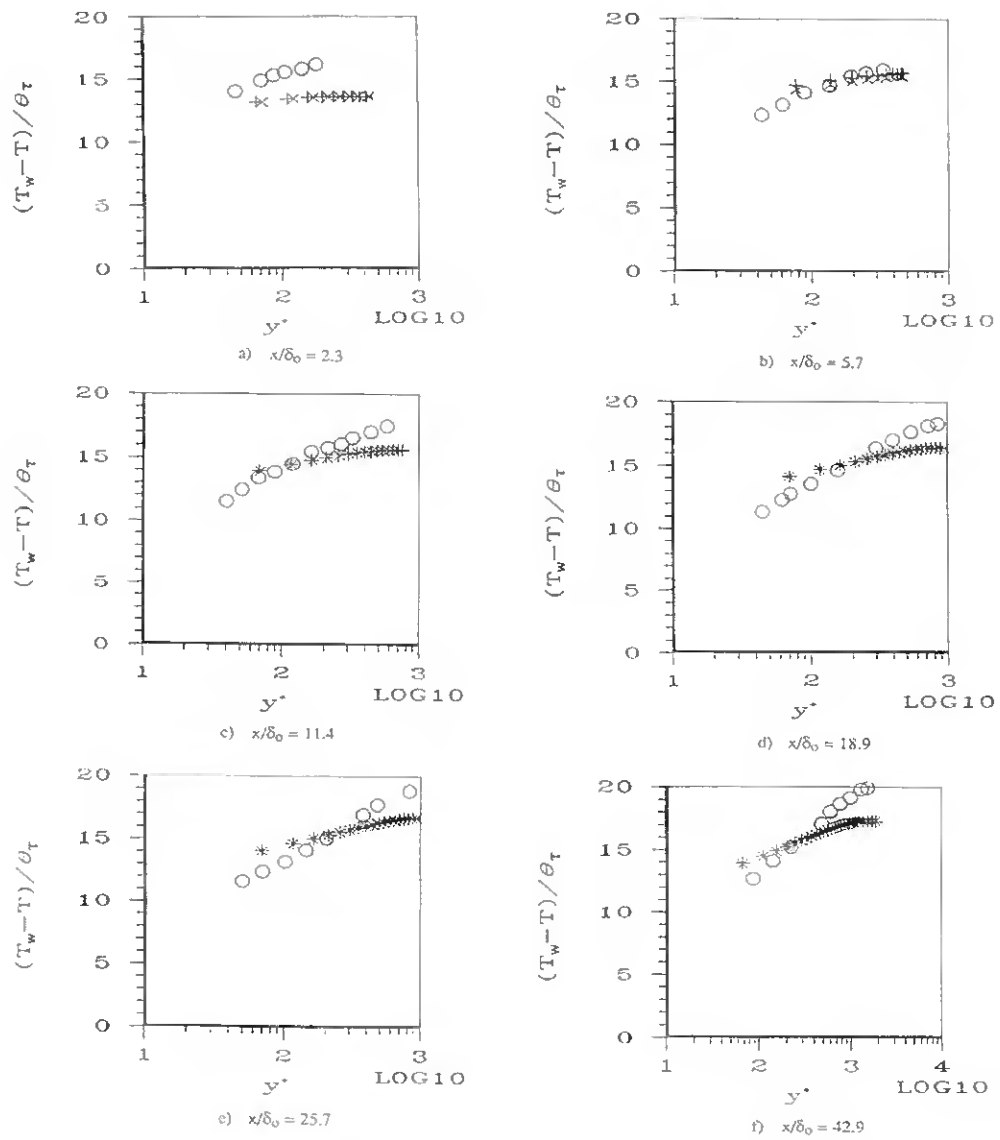


Figura 6.7: Resultados de Coelho et al. (1992) para serem comparados com os da figura 6.5. Neste caso  $\theta_\tau$  representa  $\theta_*$ .

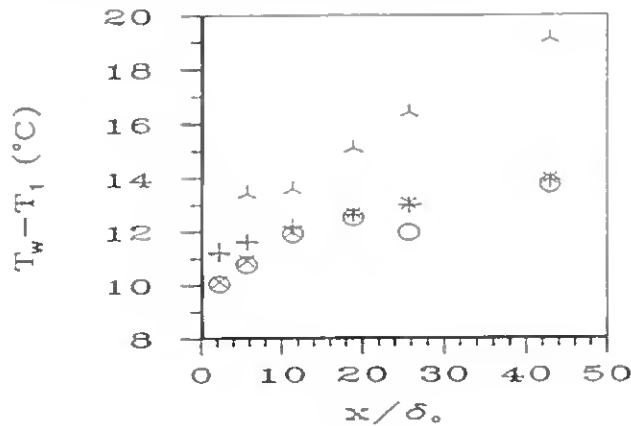


Figura 6.8: Resultados de Coelho et al. (1992) para serem comparados com os da figura 6.6a. Os símbolos (x) representam os resultados obtidos pelos autores com uma malha de 2373 nós, e 2 níveis de refinamento local. (o) corresponde aos dados experimentais de Antonia et al. (1977). (lambda) corresponde a uma simulação de Coelho et al. (1992) com uma malha base grosseira e sem refinamento.

rigor. Portanto, este tipo de modelo só é vantajoso em domínios extremamente pequenos onde seja possível satisfazer grandes exigências de refinamento.

A equação de transporte de  $\epsilon^+$  é bastante difícil de modelar e está sujeita a mais simplificações do que a equação de transporte de  $k$ . Olhando para os perfis de  $k^+$  e  $\epsilon^+$  na figura 6.3, pode constatar-se que o comportamento de  $\epsilon^+$  é mais complexo que o de  $k^+$  na vizinhança da superfície. De facto a obtenção de bons resultados com a resolução da equação de  $\epsilon^+$  é mais difícil. É precisamente aqui que reside a chave do sucesso de CP87, pois o mesmo não resolve a equação de  $\epsilon$  para  $f_m < 0.99$ , mas impõe um perfil calculado com relações empíricas bastante realistas.

Na figura 6.6a pode-se constatar que os dois modelos produzem resultados satisfatórios junto da parede, sendo neste caso LB81 ligeiramente superior a CP87. O valor de  $Q_w$ , calculado com CP87, usando a expressão 6.4, é aproximadamente 20% superior ao valor experimental. Antonia et al. (1977) obtiveram um resultado similar usando a mesma expressão. As maiores divergências verificam-se nos perfis de  $St/(0.5c_f)$  na figura 6.6f, porque o coeficiente de fricção (e portanto a tensão de corte junto da parede  $\tau_w$ ) previsto por ambos modelos é demasiado elevado. No entanto, é interessante notar que  $St/(0.5c_f)$  deve ter um valor próximo de 1 (Antonia et al., 1977), facto que é corroborado com os resultados de ambos modelos.

Como já foi referido, este caso teste já foi tratado anteriormente por Coelho et al. (1992) com o modelo  $k - \epsilon$  standard usando as funções da parede e o esquema híbrido para discretizar os termos advectivos. Nas figuras 6.7 e 6.8 são mostrados os resultados obtidos por estes autores. Verifica-se que os perfis de  $(T - T_w)/\theta_*$  são mais baixos que os experimentais, e tendem muito depressa para um valor constante. Aqueles autores justificaram este comportamento com os baixos valores de  $u_*$  e com os elevados valores da difusividade térmica por eles obtidos. De facto, na figura 6.6b pode ver-se que as velocidades de fricção obtidas com CP87 estão muito mais próximas do valor de  $u_*$  medido à entrada, do que as suas análogas obtidos com LB81. Os gráficos mostrados na figura 6.5 são totalmente coerentes com os perfis de  $u_*$ , pois os perfis de  $((T - T_w)/\theta_*)$  obtidos com CP87 coincidem bastante bem com os experimentais, enquanto que os seus análogos, calculados com LB81, subestimam estes

últimos.

O número de nós da malha com refinamento local aqui usada (figura 6.4) tem quase o dobro dos nós da malha usada por Coelho et al. (1992). Como os modelos de turbulência usados neste caso pouco ou nada diferem na região externa do  $k - \varepsilon$  *standard* usado por Coelho et al. (1992), chega-se à conclusão de que o problema estava associado à resolução da malha e à precisão dos esquemas advectivos, e não ao facto da difusividade térmica ser sobrestimada. Note-se que nos cálculos aqui efectuados, em ambos modelos, os coeficientes de Prandtl tomam os valores de  $\sigma_T=0.5$  e  $\sigma_T^t = 0.5$ ; portanto, o valor da difusividade térmica não deve ser inferior ao usado por Coelho et al. (1992). Os resultados apresentados na figura 6.5 corroboram esta conclusão.

É importante referir que há bastantes diferenças entre a simulação de Coelho et al. (1992) e a presente. Estas diferenças têm a ver, em particular, com o tipo de modelo usado para a vizinhança da superfície, onde aqueles autores usaram as leis de parede e no presente trabalho foram usados os modelos LB81 e CP87. Veja-se que, em Coelho et al. (1992) a temperatura da parede,  $T_w$ , e a velocidade de fricção,  $u_*$ , são calculadas recorrendo às leis logarítmicas da parede, e o valor de  $Q_w$ , necessário para determinar  $\theta_* = Q_w/u_*$ , é tomado constante e igual ao valor experimental. Nesta simulação todos estes valores são calculados com o modelo tal como foi explicado nesta secção.

Para finalizar, deve-se salientar que o uso do método de refinamento local modificado permitiu uma grande economia de tempo de CPU. Os estudos comparativos a esse respeito foram omitidos, pois no capítulo anterior já foi provada a eficácia do referido método.

## 6.2 Escoamento sobre uma colina isolada.

Neste caso teste são realizadas as simulações do escoamento sobre uma colina montada num túnel de água, estudada experimentalmente por Almeida et al. (1992). Este é um escoamento típico de CL de microscala, onde os efeitos da parede têm um papel dominante nas suas características.

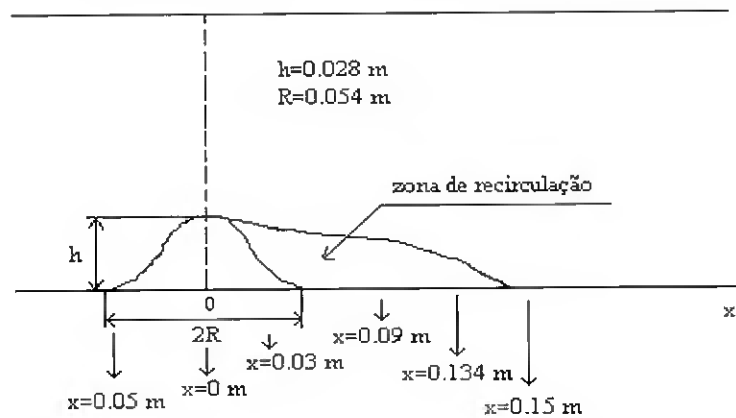


Figura 6.9: Escoamento de microscala sobre uma montanha 2D (adaptado de Almeida et al., 1992).

Este caso tem sido objecto de vários estudos numéricos e por isso é bastante apropriado para a validação de FLEX. Em Castro (1997) (C97), são apresentados os resultados de excelentes simulações deste escoamento. O objectivo desta secção não é fazer um estudo tão detalhado como o de C97, mas sim comparar alguns perfis escolhidos, com os resultados deste autor, para validar FLEX e discutir alguns pontos sobre o desempenho do modelo  $k - \varepsilon$ .

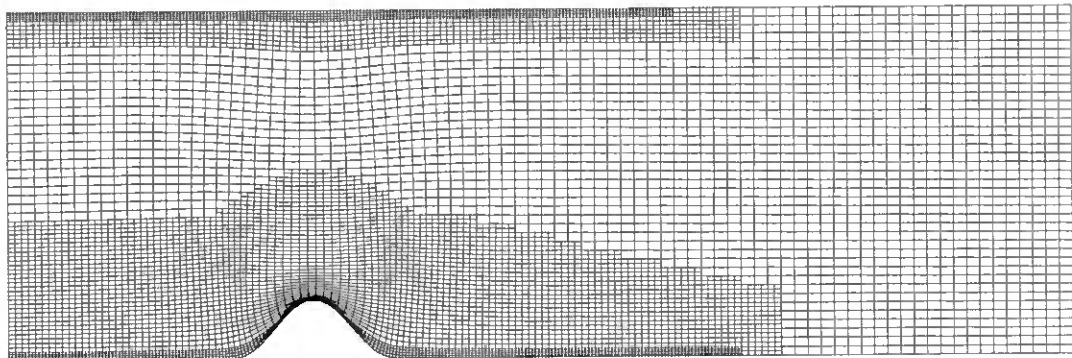


Figura 6.10: Malha base de 80x40 nós com 2 níveis de refinamento local. A malha tem 7751 nós de cálculo, 2174 nós auxiliares, um desvio médio da ortogonalidade de  $0.23^\circ$  e um desvio máximo de  $3.44^\circ$ . O domínio de cálculo tem  $(0.7 \times 0.17)$  m e começa em  $x_0 = -0.2$  m. O primeiro nó de cálculo, no canto inferior esquerdo está a uma distância da superfície de  $z_P = 0.53124$  mm.

A configuração básica do modelo de C97 é bastante similar à do presente modelo (FLEX), pois usa: o algoritmo SIMPLE (secção 4.3), o método de Rhie et al. (1983) para malhas não desfasadas, e as correcções do modelo  $k - \varepsilon$  *standard* (ver subsecção 3.5.2), para tomar em conta a anisotropia em escoamentos de microscala. Outro motivo importante para usar os resultados de C97 tem a ver com a boa fiabilidade dos mesmos, por terem sido sujeitos a uma análise pormenorizada por parte do autor

que, além de os validar com bons dados experimentais, também os comparou com as simulações feitas pelos conceituados autores Rodi e Bonin (1995).

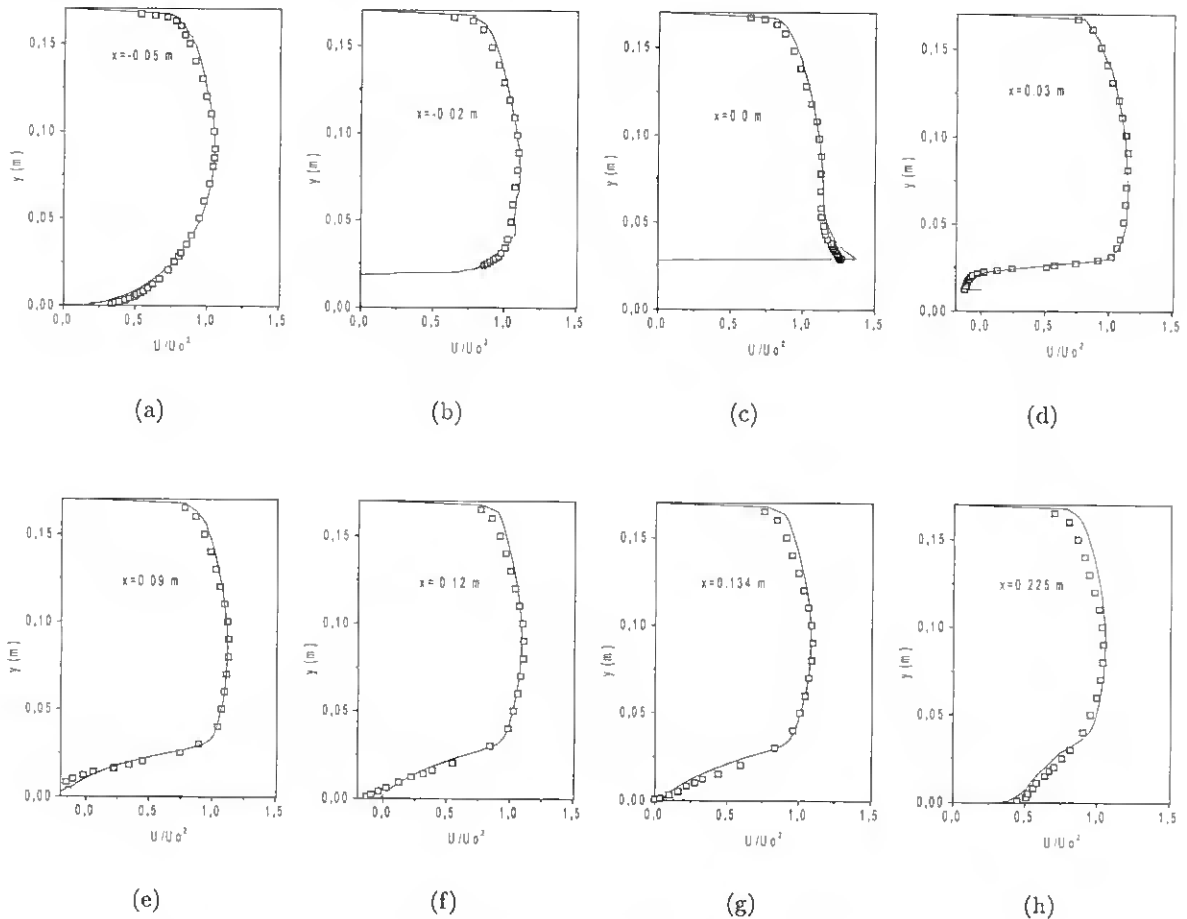


Figura 6.11: Perfis verticais da componente de velocidade  $U$  normalizados com  $U_0$ . As seções estão indicadas nas figuras. Os símbolos representam os dados experimentais de Almeida et al. (1992), e a linha contínua, os resultados do presente modelo.

Uma particularidade importante do modelo de C97 é que usa um esquema Upwind de 4ª ordem muito preciso para os termos advectivos (só para malhas uniformes). No entanto, o autor não faz referência à forma como incorpora este esquema nas fronteiras. As diferenças essenciais entre o C97 e o FLEX residem em: a) no tratamento especial para incorporar os termos difusivos, b) no uso de coordenadas generalizadas ortogonais, e c) no método de refinamento local adaptado para usar esquemas de 3 pontos e coordenadas generalizadas.

Como se pode ver na figura 6.9, o obstáculo tem uma altura  $h = 0.028$  m e comprimento de  $2R = 0.108$  m. Na ausência de obstáculos, o escoamento no canal é completamente desenvolvido. Os dados experimentais foram obtidos para um número de Reynolds de  $Re = U_0 h / \nu = 6 \times 10^4$  em que  $U_0 = 2.147$  m/s é a velocidade média central do túnel. Foram medidos: o campo médio de velocidade ( $U, W$ ) e as tensões de Reynolds ( $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  e  $\overline{u'w'}$ ). As medições foram realizadas utilizando anemometria laser. A intensidade da turbulência do escoamento não perturbado foi de 3%. A turbulência é anisotrópica, com os valores das variâncias horizontais igual a cerca de duas vezes os valores das variâncias transversais

e verticais. Para estes dados experimentais, os valores do coeficiente e velocidade de fricção são  $c_f = 0.0027$  e  $u_* = 0.079$  respectivamente. Os valores de  $U$ ,  $W$ ,  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  e  $\overline{u'w'}$  são dados em 14 perfis verticais. Este é um escoamento com separação, i.e., tem uma região de gradiente de pressão desfavorável que faz este fenómeno possível.

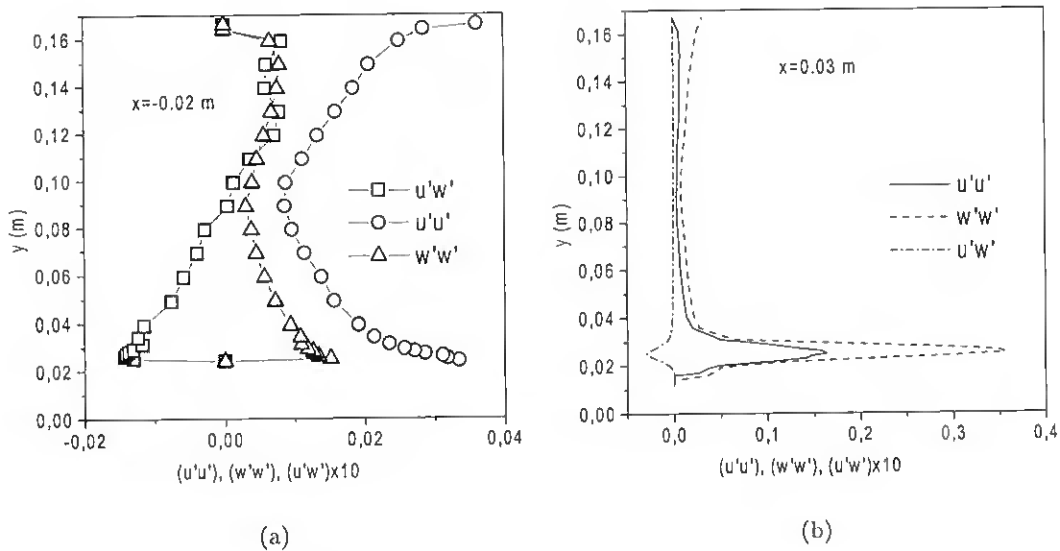


Figura 6.12: Perfis experimentais de Almeida et al.(1992): a)  $x = -0.2$ , b)  $x = 0.03$  m.

Para a simulação deste escoamento foi usado o modelo  $k - \varepsilon$  *standard*, com as funções da parede para conectar as subcamadas externa e interna da turbulência (secção 5.2). Seguindo as sugestões de C97, por se tratar de uma curvatura convexa, a correção de  $C_\mu$ , para incluir o efeito da curvatura das linhas de corrente, não foi activada neste caso. Ele usou o argumento de Bradshaw (1973) segundo o qual o mecanismo desta modificação não favorece o processo estabilizador das taxas de deformação em superfícies convexas, porque ele está associado ao aparecimento de vortices longitudinais. Este mecanismo é o que origina o aumento da turbulência em superfícies côncavas, e a sua utilização em superfícies convexas tornaria maior a intensidade da turbulência. Por este motivo a  $C_\mu$  foi atribuído um valor máximo constante de 0.09 (é um valor típico). A modificação associada à resposta preferencial da dissipação às tensões normais esteve sempre activada. Estas modificações encontram-se bem estudadas (Leschziner and Rodi, 1981, C97, etc), e por isso não foi realizado nenhum estudo sobre o seu desempenho.

O domínio de cálculo de  $(0.7 \times 0.17)$  m (ver figura 6.9) foi definido a partir de  $x_0 = -200$  mm até  $x_{max} = 500$  mm. A fronteira norte coincide com a parede superior do túnel, situada a uma altura  $H = 0.17$  m.

Para a construção das malhas de cálculo foram usados os critérios para o refinamento local expostos na subsecção 4.8.2, e exemplificados no escoamento da cavidade quadrada com uma parede móvel (ver subsecção 5.1.2). A malha está representada na figura 6.10. Refira-se que a malha não tem expansão em nenhuma das duas direcções, fazendo-se uso do refinamento local.

Na fronteira de entrada são impostos os resultados experimentais disponíveis para  $U$ ,  $W$  e  $k$ , correspondentes ao escoamento completamente desenvolvido no túnel, sem a presença de obstáculos. O perfil de  $\varepsilon$  é determinado de duas formas: a) com o perfil experimental de  $\overline{u'w'}$  através da expressão de  $\mu_t$  do modelo CP87:

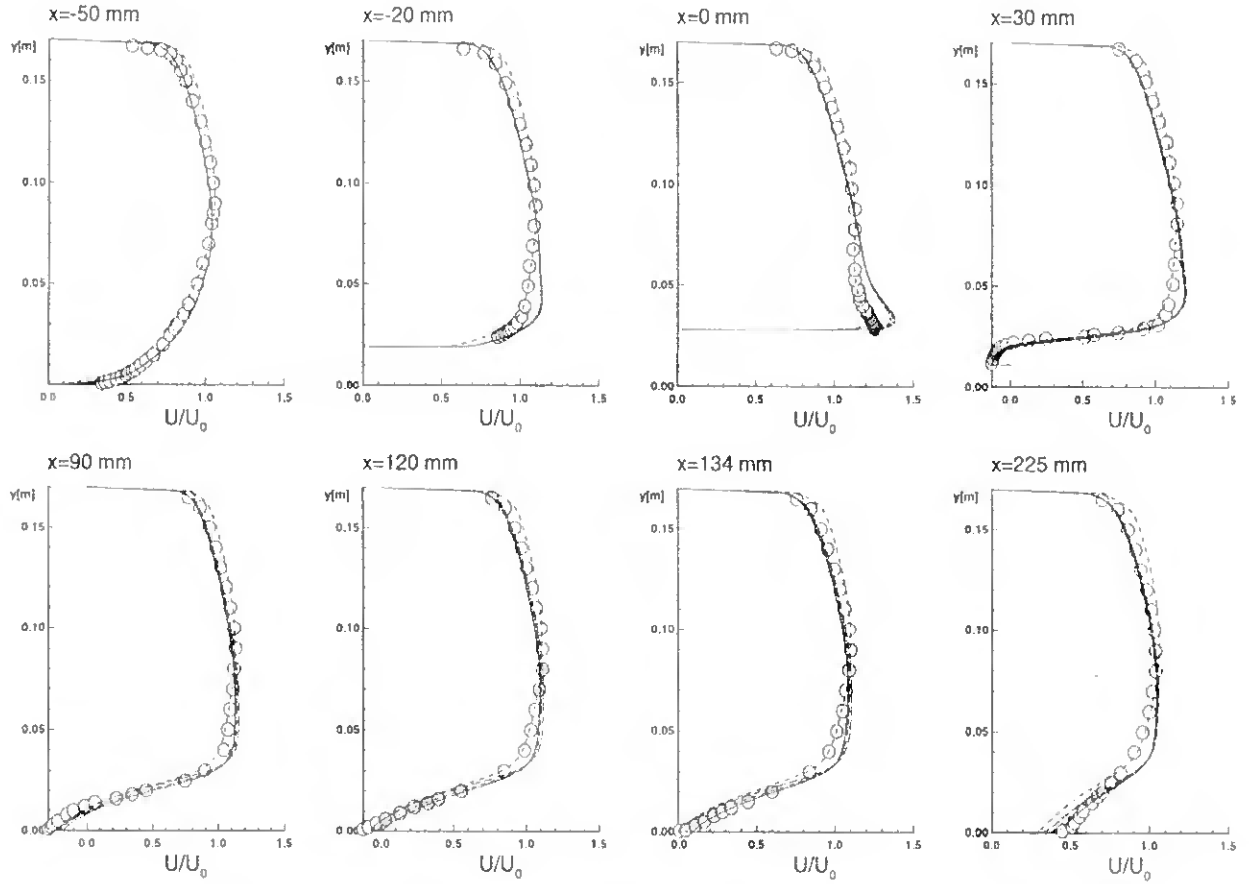


Figura 6.13: Como na figura 6.11, mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). A malha usada pelo autor para o domínio de (600x170) mm ( $x_0 = -100$  m), é de (320x150)(48000 nós), e a simbologia usada é:  $z_p = 0.125$  mm (—),  $z_p = 0.075$  mm (- . -),  $z_p = 0.05$  mm (- -), em que  $z_p$  é a distância vertical do 1º nó da malha (canto inferior esquerdo) à superfície. Os traços descontínuos (- -) correspondem à solução obtida com ( $x_0 = -400$  m) e  $z_p = 0.125$  mm.

$$\varepsilon = \frac{f_\mu c_\mu k^2}{-\overline{u'w'}} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.10)$$

e b) mediante a expressão para  $\varepsilon$  definida por CP87 (ver subsecção 4.9.2)

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{4/3} k^{3/2}}{l_\varepsilon} \quad (6.11)$$

A expressão (6.11) deu melhor resultado do que (6.10). Para usar esta última, o perfil experimental de  $\overline{u'w'}$  foi interpolado com um polinómio de Newton. O perfil de  $U$  à entrada é ajustado com uma função logarítmica, e a derivada ( $\partial U/\partial z$ ), necessária em (6.11), é determinada analiticamente. A ausência de  $\overline{v'^2}$  nas medições de Almeida et al. (1992) obriga a calcular os perfis de  $k$ . Este autor sugere calcular  $k$  como  $k = \overline{u'^2} + 2\overline{w'^2}$ . De acordo com esta sugestão, são calculados todos os perfis usados para comparação.

A pressão em todas as fronteiras (lembrar que as fronteiras coincidem com as faces dos volumes de controlo) é obtida por extrapolação polinomial como explicado na subsecção 4.10.5.

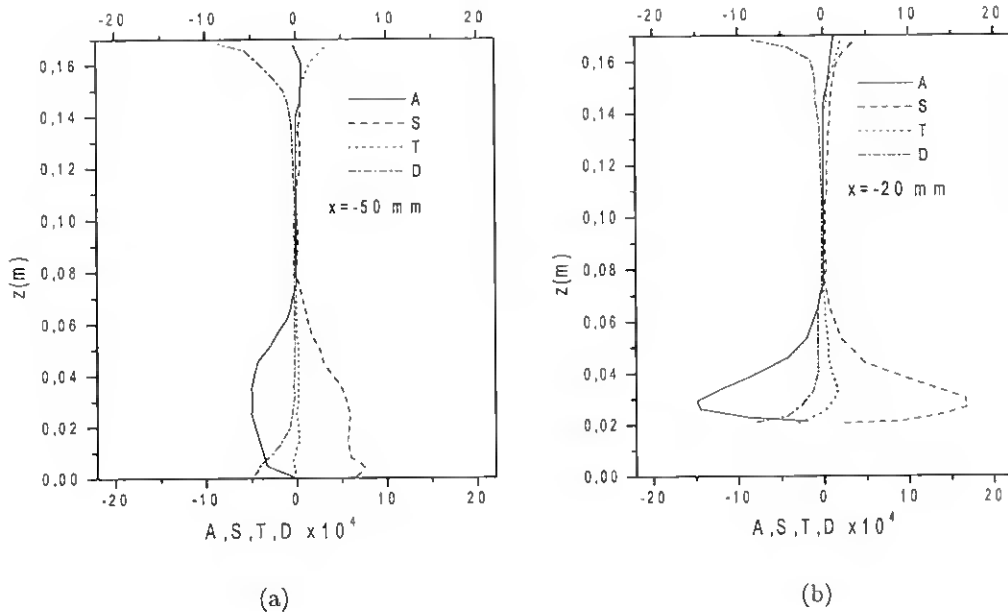


Figura 6.14: Termos de: transporte advectivo pelo escoamento médio ( $A$ ), produção ( $S$ ), transporte advectivo pela turbulência ( $T$ ) e dissipação ( $D$ ), da equação de transporte de  $k$  (2.20). Os termos estão adimensionalizados com o fluxo de  $k$  à entrada do domínio de cálculo situada neste caso em  $x_0 = 0.2$  m. Foi usado FLEX .

Na secção de saída são impostos gradientes nulos na direcção do escoamento para todas as variáveis de cálculo. À saída, a velocidade  $U$  é corrigida de modo a garantir a conservação global da massa.

Para comparar os resultados da simulação numérica, escolheram-se os perfis de  $U$  e  $W$ , e do campo turbulento do escoamento, a energia cinética turbulenta  $k$ . Normalmente, o comportamento de  $k$  é um bom indicador para o comportamento de  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{u'^2}$  e  $\overline{w'^2}$ . É pouco provável acontecer que  $k$  tenha grandes discrepâncias com os dados experimentais e que para estas outras grandezas turbulentas não se verifique a mesma coisa.

### 6.2.1 Discussão de resultados e conclusões

Os resultados obtidos com o presente modelo, usando a malha da figura 6.10, apresentam-se nas figuras 6.11, 6.15 e 6.17. Os resultados das simulações de C97 mostram-se nas figuras 6.13, 6.16, e 6.18.

Na malha 6.10, o primeiro nó de cálculo, no canto inferior esquerdo está a uma distância da superfície de  $z_p = 0.53124$  mm. O valor de  $z_p$  mantém-se mais ou menos constante longitudinalmente, exceptuando a zona em que a altura da montanha excede a semi-largura. Aqui, à medida que se está mais próximo de  $x = 0$ ,  $z_p$  diminui lentamente até atingir um valor bastante pequeno no próprio cume ( $x = 0$ ). Em rigor, o valor de  $z_p$  não deve ser comparado com o de C97, porque a malha 6.10 não tem nenhuma transformação na direcção  $x$ . O valor que deve ser usado é o de  $z_n$  calculado com a expressão (4.127). Neste caso a diferença entre  $z_p$  e  $z_n$  junto da superfície não é significativa e por isso admite-se esta aproximação. Das malhas usadas por C97, a que mais se aproxima desta é a de  $x_0 = -0.1$  m, com o domínio de  $(0.6 \times 0.17)$  m e  $z_p = 0.125$  mm. Nas figuras 6.13, 6.16 e 6.18, os perfis obtidos com esta malha estão representados com (—), e é com eles que os resultados do presente modelo devem ser comparados.

Na figura 6.11 apresentam-se os perfis verticais da componente horizontal da velocidade,  $U$ , obtidos

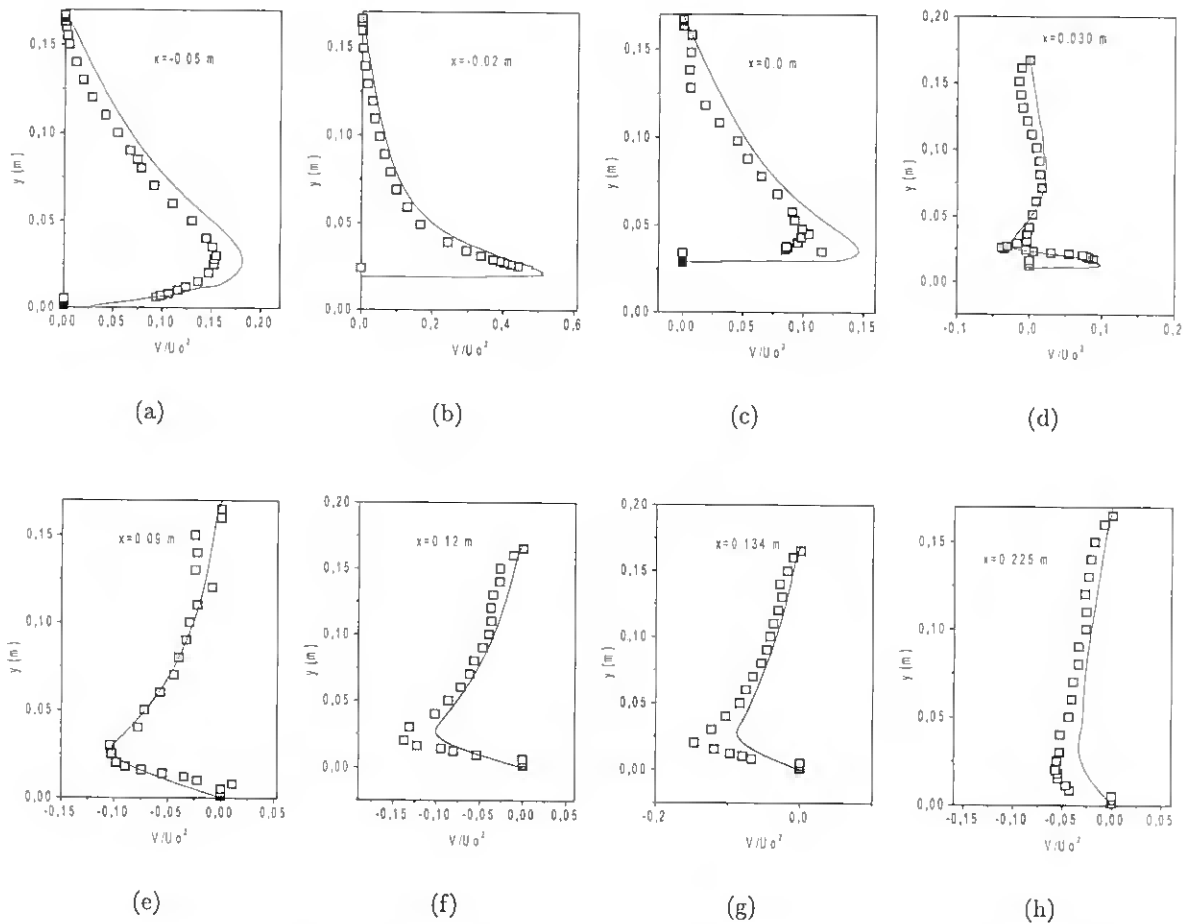


Figura 6.15: Como na figura 6.11, mas os perfis são da componente de velocidade  $V$  normalizada com  $U_0$ .

com o presente modelo, e na figura 6.13 os análogos obtidos por C97. A concordância dos resultados é notória. As simulações de C97 sobrestimam  $U$  em todas as secções para  $z < 0.04$  m e, pela conservação da massa, subestimam  $U$  para  $z > 0.04$  m. O mesmo autor também verifica que para  $x = 0.0$  m o máximo de  $U$  é muito sobrestimado. Na presente simulação pode-se constatar que estes efeitos também estão presentes, mas de forma menos significativa. Em  $x = 0.1$  m o máximo de  $U$  obtido com o presente modelo, está ligeiramente mais próximo do valor experimental, do que o dos referidos autores. Os pontos de recolamento são: experimental  $x_r^{exp} = 135.0$  mm, o de C97  $x_r = 120.1$  mm, e o do presente modelo  $x_r = 122.8$  mm. Os  $x_r$  calculados com o presente modelo e com C97M são muito próximos.

Na figura 6.15 apresentam-se os resultados da velocidade média  $W$ . Pode-se constatar que, em geral, a concordância entre os resultados numéricos e experimentais é pior que a obtida com a velocidade  $U$ .

C97 fez diversas simulações afastando a fronteira de entrada (a montante). Para obter os gráficos ilustrados nas figuras 6.13, 6.16 e 6.18, este autor usa dois domínios diferentes, um com  $x_0 = -0.1$  m e o outro com  $x_0 = -0.4$  m. Ele chega à conclusão que o efeito da aproximação desta fronteira se reflectia por uma sobrestimação dos perfis experimentais a montante, e por uma subestimação a jusante. Ele verificou também (ver figura 6.16) que o afastamento desta fronteira, até  $x_0 = -0.4$  m, produzia melhor concordância com os dados experimentais a montante, e piores resultados a jusante

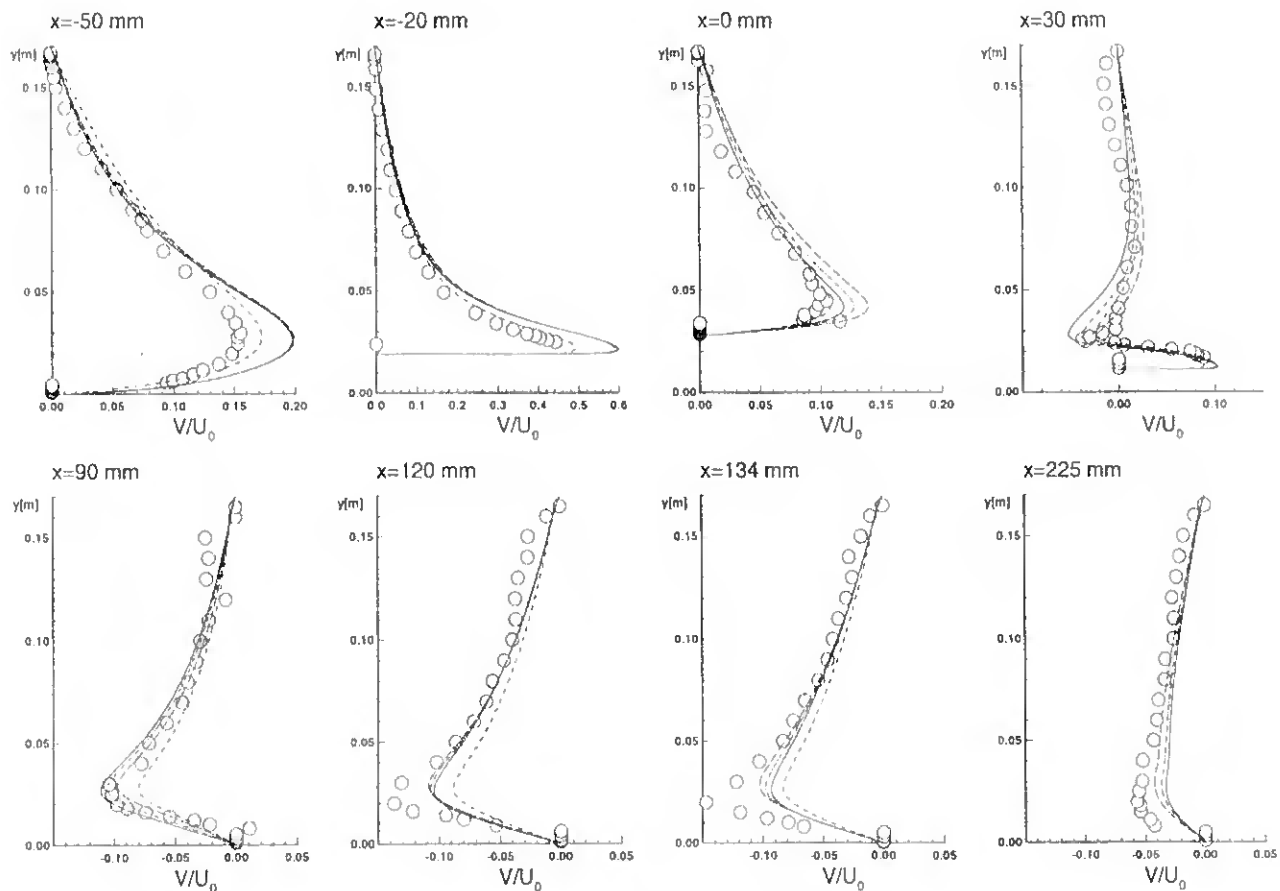


Figura 6.16: Como na figura 6.15, mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). As características da malha usada por C97 estão descritas na figura 6.13.

de  $x = 0$ , pois os máximos de  $W$  eram ainda menores que os obtidos com  $x_0 = -0.1$  m. Por estas razões, para a presente simulação, decidiu-se tomar o valor,  $x_0 = -0.2$  m. Por isso, apesar dos perfis da figura da figura 6.15 evidenciarem o efeito acima referido, este revela-se de modo ligeiramente menos acentuado, que no caso em que  $x_0 = -0.1$  m.

No final da zona de recirculação ( $x \approx 120$  mm), a recuperação de  $W$  fica muito aquém do esperado, pois todos os máximos (negativos) numéricos, subestimam os valores experimentais.

Sobre os perfis simulados de  $k$  (ver figura 6.17) pode-se dizer que são muito similares aos obtidos por C97 (ver figura 6.18). Os máximos experimentais de  $k$  que ocorrem perto da superfície a montante do obstáculo ( $-50 < x < 0$ ) mm, atingindo um valor quase constante. Aqui, os perfis numéricos sobrestimam os máximos experimentais de  $k$ , fundamentalmente nas secções  $x = -0.02$  m e  $x = -0.0$  m. Refira-se que nestas secções os máximos obtidos por C97 são mais elevados que os obtidos com o presente modelo.

C97, realizando um estudo detalhado do comportamento dos termos da equação de transporte de  $k$ , verifica que: a montante do obstáculo não existe um equilíbrio entre a produção e a dissipação de  $k$  e que o transporte advectivo é muito elevado. Com estes factos C97 justifica a previsão pobre que este modelo de turbulência faz do campo turbulento, particularmente junto da superfície. A análise de C97 é complementada, de modo qualitativo, como mostrado a seguir.

Nos perfis experimentais de Almeida et al. (1992), na secção  $x = -0.02$  m, verificam-se as seguintes

tendências no intervalo  $0 < z < 0.05$  m (ver figura 6.12):

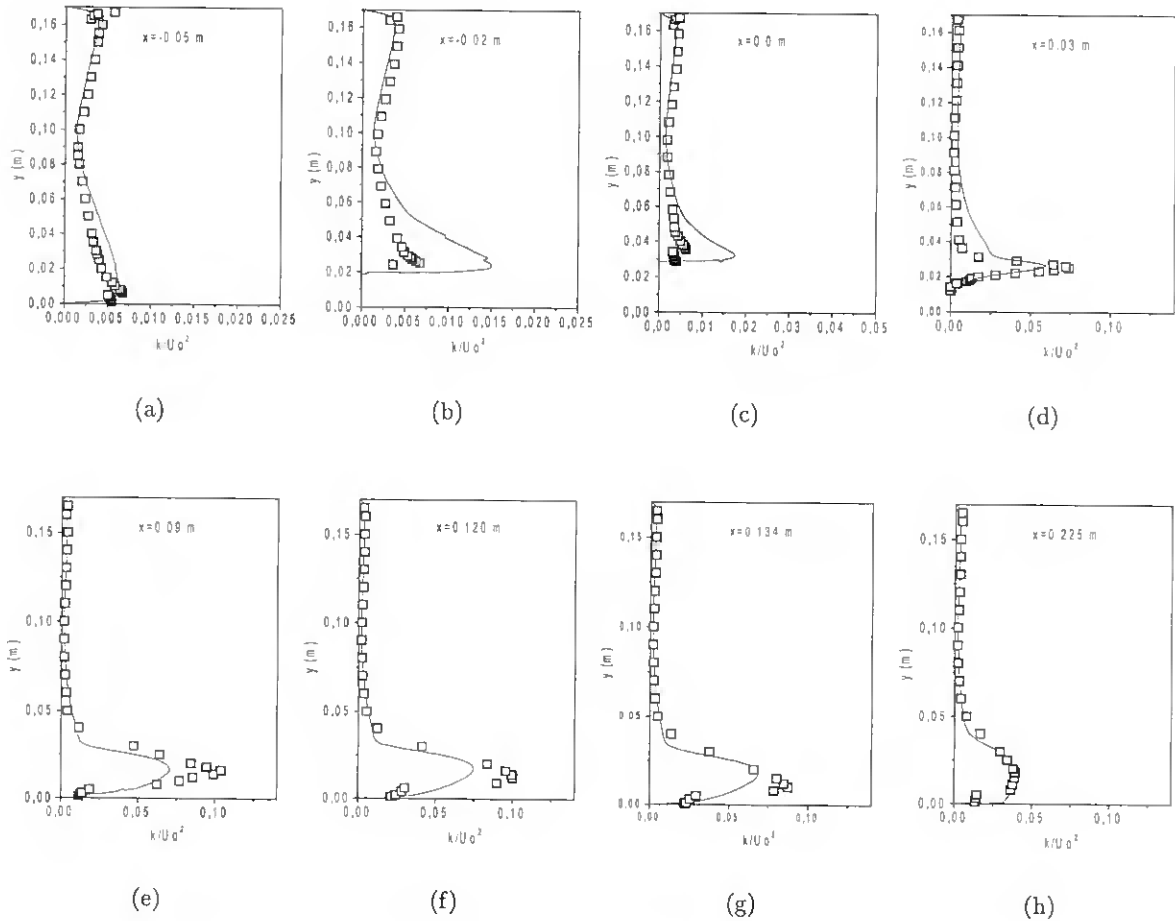


Figura 6.17: Perfis verticais da energia cinética turbulenta normalizada com  $U_0^2$ . As secções estão indicadas nas figuras. Os símbolos representam os dados experimentais de Almeida et al.(1992), e a linha contínua, os resultados com o presente modelo (FLEX) .

1.  $\overline{u'^2}$  e  $\overline{w'^2}$  nesse intervalo são maiores junto à superfície
2.  $\overline{u'^2} \approx 2\overline{w'^2}$
3.  $\overline{u'w'}$  é negativo, e o módulo do seu valor é aproximadamente igual a  $\overline{w'^2}$
4.  $(\frac{\partial U}{\partial z}) > 0$
5.  $(\frac{\partial W}{\partial z}) < 0$
6.  $(\frac{\partial U}{\partial x}) > 0$  porque a tendência de  $U$  é aumentar em direcção a  $x = 0.0$  m
7.  $(\frac{\partial W}{\partial x}) < 0$  pela razão análoga à anterior
8. Um cálculo grosseiro permitiu deduzir que na altura onde ocorre o máximo experimental de  $k$  ( $z \approx 0.025$  m),  $(\frac{\partial U}{\partial z}) \ll (\frac{\partial W}{\partial x})$

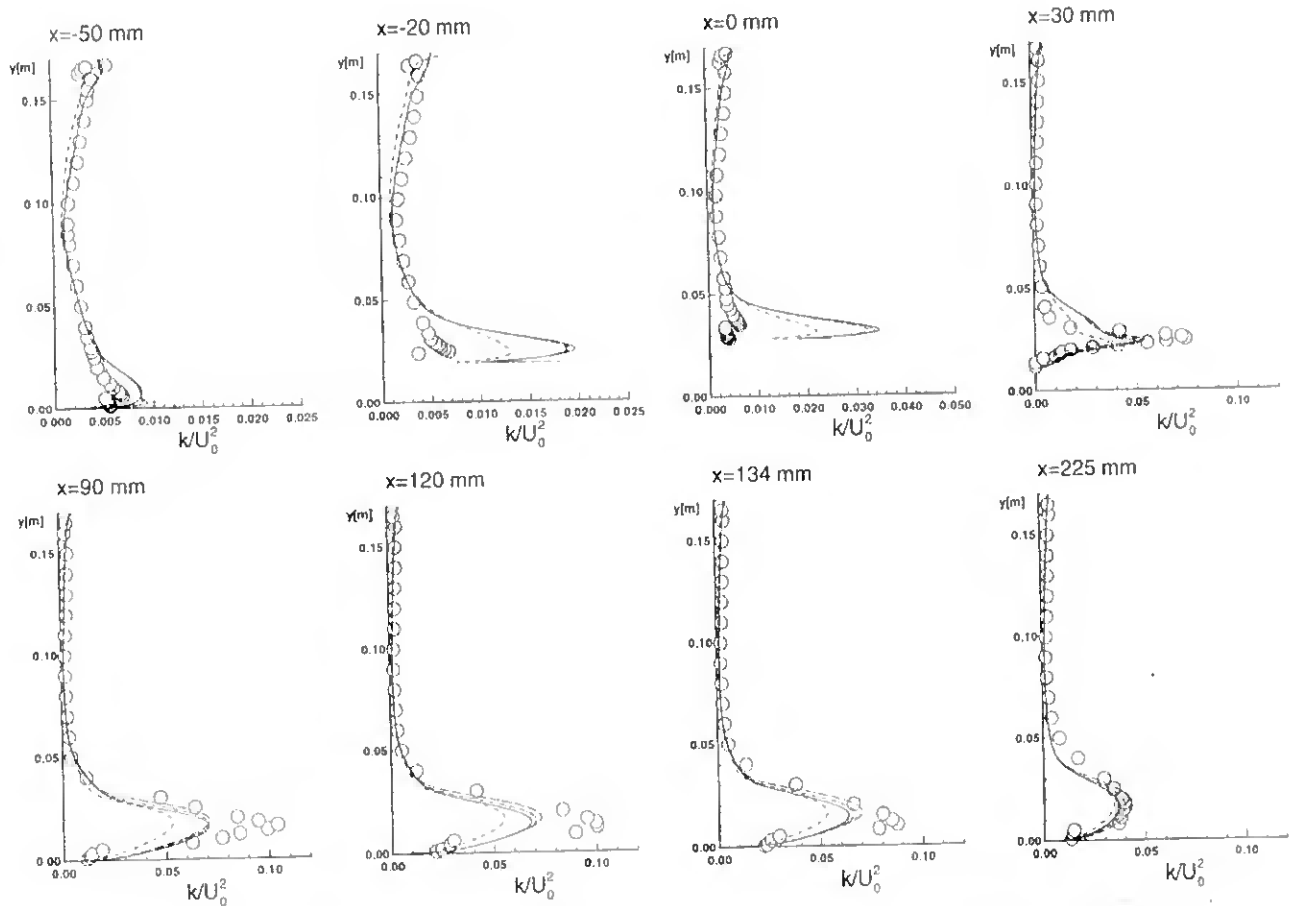


Figura 6.18: Como na figura 6.17 mas os perfis correspondem às simulações de C97 (retirado de Castro, 1997). As características da malha usada por C97 estão descritas na figura 6.13.

O termo de produção  $S$  da equação (2.20) pode ser escrito na forma:

$$S^{exact} = -2\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = \underbrace{-\overline{u'^2} \frac{\partial U}{\partial x}}_I - \underbrace{\overline{u'w'}}_{II} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \underbrace{\overline{w'^2} \frac{\partial W}{\partial z}}_{III} \quad (6.12)$$

$S^{exact}$  depois de modelado com a forma geral dos (MVT), é dado por:

$$S^{MVT} = 2\nu_t \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6.13)$$

Da análise feita sobre o comportamento das várias grandezas, verifica-se que só o termo III em (6.12) é sempre positivo quando  $z < 0.05$ . Já o mesmo não se pode dizer dos termos I e II que são negativos. Isto contraria a hipótese de MVT segundo a qual, como se pode ver em (6.13), os termos I, II e II depois de modelados são sempre positivos. Portanto o  $S^{MVT}$  não consegue descrever o comportamento real de  $S$  dado por  $S^{exact}$ . Este defeito é intrínseco aos MVT, por usarem a hipótese de Boussinesq. Esta hipótese considera que as tensões de Reynolds estão alinhadas com o tensor de deformação, sendo essa a origem da positividade de  $S^{MVT}$ . É-se da opinião que esta é a primeira causa dos valores excessivos de  $k$ , verificados no perfil  $x = -0.02$  m perto da superfície.

Na figura 6.14 são mostrados os perfis dos termos da equação de  $k$  (2.20) obtidos com FLEX. Refira-se que estes perfis verticais são muito similares aos obtidos por C97. Na secção  $x = -0.02$  m, o que mais chama a atenção é que a produção de  $k$  ( $S$ ), e o transporte advectivo pelo escoamento médio ( $A$ ), são os termos dominantes, e que ( $S > |A|$ ). Portanto, o termo dominante é  $S$ , e tem um máximo exactamente à mesma altura que o perfil de  $k$ . Note-se que o modelo não consegue produzir dissipação ( $D$  ou  $\rho_r \varepsilon$ ) suficiente para acompanhar os elevados valores de ( $S$ ). Esta é a segunda causa encontrada para o comportamento de  $k$ .

Teoricamente, um aumento de  $S$  deveria ser acompanhado de um incremento na geração de  $\varepsilon$ , i.e.,  $D$  deveria ser maior. A equação de  $\varepsilon$  não consegue prever isto. De acordo com os pontos 1), 2) e 3), as tensões normais não são muito dominantes, talvez por isso a modificação associada à resposta preferencial da dissipação às tensões normais não tenha corrigido este defeito. Considera-se que esta análise é válida no intervalo ( $-50 < x < 0$ ) mm.

Em concordância com o que foi referido no início desta subsecção, quando a modificação de  $C_\mu$  foi activada, as discrepâncias dos perfis de  $k$  nesta região aumentaram. Por isso a mesma não foi usada.

Em toda a zona de recirculação ( $30 < x < 134$ ) mm, os máximos numéricos subestimam os experimentais. Isto deve-se essencialmente à bem conhecida incapacidade do modelo  $k - \varepsilon$  em prever correctamente  $\varepsilon$  nas zonas de recirculação, pois sobrestima o seu valor.

Segundo os dados de Almeida et al. (1992), na secção  $x = 0.03$  m, verificam-se as seguintes tendências em  $z < 0.05$  m:

1.  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  e  $|\overline{u'w'}|$  têm um máximo em  $z = 0.025$  m
2.  $\overline{w'^2}_{max} \approx 2\overline{u'^2}_{max}$
3.  $\overline{u'w'}$  é negativa,  $|\overline{u'w'}|$  tem um comportamento similar a  $\overline{u'^2}$ , e  $|\overline{u'w'}_{max}| \approx \overline{u'^2}_{max}/3$
4.  $W$  tem um mínimo em  $z = 0.025$
5.  $(\frac{\partial U}{\partial z}) > 0$
6.  $(\frac{\partial W}{\partial z}) \approx 0$  em  $z = 0.025$  porque  $W$  tem um mínimo nesse ponto.
7.  $(\frac{\partial U}{\partial x}) < 0$
8.  $(\frac{\partial W}{\partial x}) > 0$

Deste modo, na equação (6.14) os termos I e II são positivos e o termo III é desprezável. Portanto  $S^{exact}$  não tem termos negativos. Então a discordância entre  $S^{exact}$  e  $S^{MVT}$  assenta essencialmente em  $\nu_t = c_\mu k^2/\varepsilon$ , e, mais concretamente, em  $\varepsilon$ , que por ser muito elevado (contrariamente ao que se verificou para  $x < 0$ ), torna  $S^{MVT}$  mais pequena.

Depois da zona de recirculação,  $x > 134$  mm, a componente turbulenta experimental do escoamento, tende a desenvolver-se completamente. O mesmo se verifica com os resultados numéricos de  $k$ . O escoamento simulado, depois de recuperar da zona de recirculação, tende a ser quase parabólico, mostrando uma boa concordância com os resultados experimentais. O gráfico da secção  $x = 225$  mm confirma bem este facto. O modelo  $k - \varepsilon$  funciona particularmente bem nesta zona, porque em camadas limite parabólicas dos escoamentos de microscala, os processos anisotrópicos não são significativos.

Apesar das discrepâncias verificadas, pode-se dizer que, na zona de recirculação ( $30 < x < 135$ ) mm e na zona desenvolvida ( $x > 135$ ) mm, o presente modelo consegue descrever razoavelmente o comportamento da energia cinética turbulenta.

Para finalizar, chama-se a atenção para o facto de que todos os resultados aqui apresentados foram obtidos com a malha da figura 6.10 que tem 7771 nós, valor bastante inferior aos 48000 nós da malha de C97. Portanto o uso do método de refinamento local adaptado para esquemas de 3 pontos e coordenadas generalizadas ortogonais, permitiu uma economia significativa de nós de cálculo, e de tempo de CPU.

Uma malha com esse nível de refinamento foi suficiente para obter resultados similares aos de C97, talvez porque o uso de coordenadas curvilíneas quase-ortogonais quase não gera difusão numérica associada à não ortogonalidade. Apesar de Peric (1990) argumentar que, se o ângulo  $\theta$  entre as faces dum VC estiver no intervalo  $45^\circ < \theta < 135^\circ$ , a distorção não produz efeitos demasiado adversos, é difícil avaliar com rigor, num escoamento tão complexo, se isso é verdade.

Na malha aqui usada (figura 6.10) o nível de refinamento junto da superfície foi 3 vezes menor que o usado na malha de C97. Esta autor não refere de que forma foram incorporadas as funções da parede no seu modelo, sendo por isso difícil encontrar uma razão sustentada para a obtenção de resultados similares com menos refinamento junto da superfície. O posterior refinamento da malha aqui usada, não produziu melhorias significativas nos resultados. Portanto, as divergências verificadas a este nível podem ser atribuídas ao modelo de turbulência. As insuficiências dos MVT, apontadas aqui e na subsecção 3.5.1, podem ser atenuadas com as modificações nela expostas, mas nunca totalmente corrigidas.

### 6.3 escoamento sobre uma duna de areia

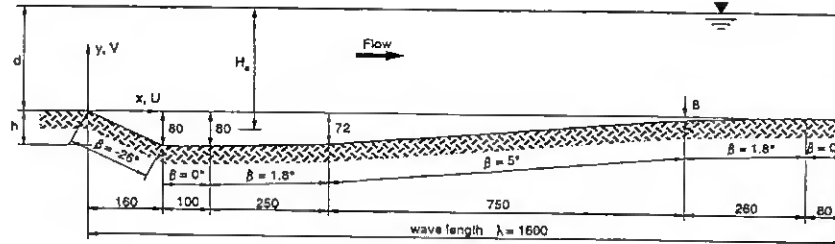


Figura 6.19: Perfil da duna de Mierlo e de Ruiter (1988).  $\beta$  é o declive local da duna.

Nesta secção, o modelo numérico é validado por comparação com os dados experimentais de Mierlo e de Ruiter (1988), obtidos no Laboratório Hidráulico de Delft na Holanda. A experiência foi realizada com o escoamento periódico sobre 33 dunas idênticas de betão, com fundo arenoso. O diâmetro médio dos grãos de areia é  $D = 1.6$  mm; o comprimento de cada duna  $\lambda = 1.6$  m; a altura das dunas  $h = 0.08$  m; a altura da água  $h_a = 0.292$  m; a velocidade máxima à entrada  $U_0 = 0.633$  m/s; a viscosidade cinemática  $\nu = 1 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s; o número de Reynolds  $Re = (U_0 h_a) / \nu = 174640$ ; a velocidade de fricção à entrada  $u_* = 0.04$  m/s e o coeficiente de fricção  $c_f = 0.005$ . A temperatura foi mantida constante no valor  $T = 18$  °C.

Como referência de simulação foi adoptado o trabalho de Yoon e Patel (1996). Os dados desta experiência foram cordialmente disponibilizados por José Manuel Jacob, já por ele processados.

Para comparar os resultados foram escolhidos os perfis verticais de  $U$  e da energia cinética turbulenta  $k$ . Como já foi antes referido o comportamento de  $k$  é, geralmente, um bom indicador do comportamento das restantes grandezas turbulentas.

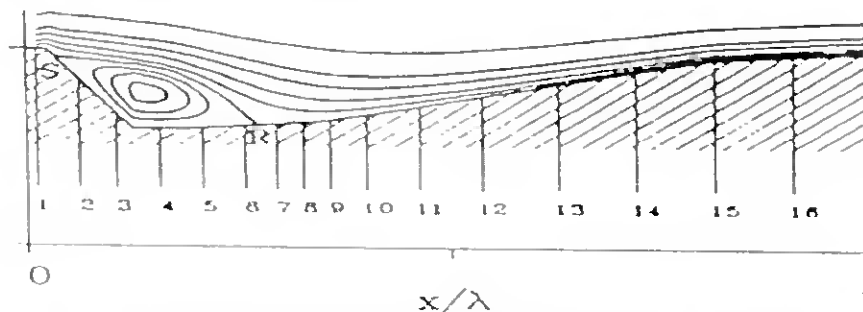


Figura 6.20: Secções de corte da duna de Mierlo e Ruiter (1988). Os perfis escolhidos são o 3 ( $x = 0.13$  m), o 8 ( $x = 0.48$  m) e o 15 ( $x = 1.27$  m).

Este caso teste foi simulado com o modelo CP87 também usado no caso de Antonia et al. (1977). A correcção de  $C_\mu$ , para incluir o efeito da curvatura das linhas de corrente foi activada neste caso (ver subsecção 3.5.2), por se tratar de uma orografia côncava, onde o aumento de velocidade na direcção do centro da curvatura tem um efeito desestabilizador. A modificação associada à resposta preferencial da dissipação às tensões normais não foi activada porque produzia previsões que subestimavam sistematicamente as grandezas turbulentas em todas as secções. Isto não deveria acontecer porque quando as tensões de corte turbulentas predominam, a modificação desactiva-se (ver subsecção 3.5.2). No futuro, será necessário fazer um estudo pormenorizado sobre este questão.

Relativamente ao caso anterior, as modificações mais importantes das condições de fronteira são: a) o escoamento tem condições de fronteira cíclicas, b) os gradientes verticais das restantes variáveis

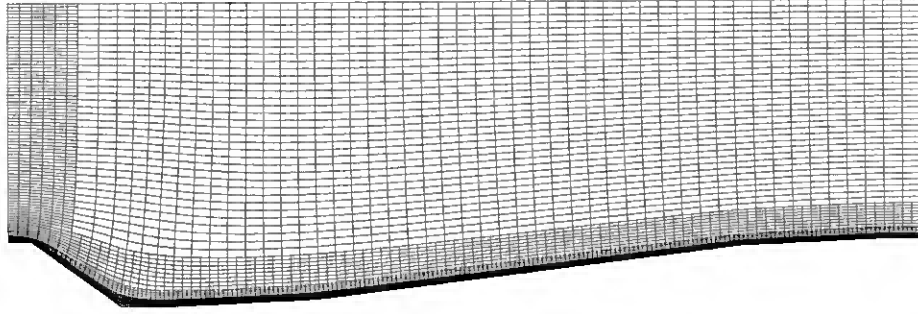


Figura 6.21: Malha de cálculo base de 50x40 nós com 3 níveis de refinamento. Possui 6606 nós de cálculo, 2287 nós auxiliares, um desvio médio da ortogonalidade de 0.39° e um desvio máximo de 3.9°.

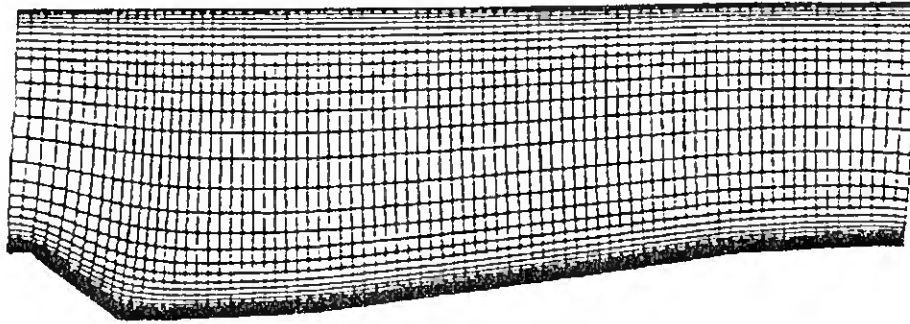


Figura 6.22: Malha de cálculo usada por Yoon e Patel (1996). Esta tem (82x69) nós (5658 nós) e é não ortogonal.

devem ser nulos. À entrada, o procedimento foi idêntico ao do escoamento anterior, os perfis experimentais foram impostos e  $\varepsilon$  foi calculada com a expressão (6.11). O único pormenor diferente do caso anterior, relativamente a condição da fronteira inferior, tem a ver com a incorporação de  $\varepsilon$  junto à parede. Yoon e Patel (1996) simulam com sucesso esta duna com o modelo  $k - \omega$ . Estes autores, na vizinhança da superfície rugosa (areia), recorrem às expressões de Wilcox (1993):

$$\omega = \frac{u_*^2 S_R}{\nu} \quad (6.14)$$

em que  $\beta^* = 0.09$ ,  $S_R$  é a rugosidade associada aos grãos de areia, e  $\omega$  pode ser interpretada como uma frequência característica, ou o inverso da escala de tempo característica da turbulência, e é dada por:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k} \quad (6.15)$$

Para  $S_R$ , Wilcox propôs as seguintes expressões:

$$\begin{cases} S_R = (50/k_s^+)^2 & k_s^+ < 25 \\ S_R = 100/k_s^+ & 25 \leq k_s^+ < 400 \end{cases} \quad (6.16)$$

$k_s$  representa a rugosidade equivalente dos grãos de areia e pode tomar o valor do diâmetro médio dos mesmos. De modo análogo à grandeza  $z^+$ , Wilcox (1993) define o valor adimensional de  $k_s$  como:

$$k_s^+ = \frac{u_* k_s}{\nu} \quad (6.17)$$

Para evitar que  $\omega \rightarrow \infty$  quando  $k_s \rightarrow 0$  (superfície sem rugosidade), Wilcox (1993) sugere, para  $k_s^+ < 5$ , fixar  $\omega$  em  $k_s^+ = 5$ .

Como neste caso a simulação é feita com o modelo  $k - \varepsilon$  CP87, e tomando em conta os bons resultados obtidos por Yoon e Patel (1996) com as expressões de Wilcox (1993), decidiu-se adaptar as mesmas para poder prescrever  $\varepsilon$  junto à superfície. Usando (6.14), (6.15), (6.16) e (6.17), obtém-se:

$$\begin{cases} \varepsilon = \beta^* \nu k \left(\frac{50}{k_s}\right)^2 & k_s^+ < 25 \\ \varepsilon = \beta^* u_* k \left(\frac{100}{k_s}\right) & 25 \leq k_s^+ < 400 \end{cases} \quad (6.18)$$

Vários testes demonstraram que esta adaptação não dava bons resultados, e a razão encontrada foi a incongruência entre os valores calculados com (6.16) e (4.145). Esta última, é a expressão de CP87 para definir  $\varepsilon$  junto à superfície.

Decidiu-se então usar as expressões do modelo CP87, impondo um limite máximo para  $\varepsilon$ , tal como faz Wilcox, que neste caso corresponde a  $\varepsilon(z = k_s)$  calculada com (4.145).

Tal como Yoon e Patel (1996), para validar o presente modelo foram escolhidas as secções 3, 8 e 15 (ver figura 6.20) porque elas representam as três zonas fundamentais deste escoamento. A zona delimitada pelas estações 2-6, e representada pela estação 3, é onde o escoamento está completamente separado. Na zona delimitada pelas estações 7-9, e representada pela estação 8, o escoamento recupera da separação. E finalmente na zona delimitada pelas secções 10-16 (estação 15), o escoamento está completamente desenvolvido.

### 6.3.1 Discussão de resultados e conclusões

Os resultados obtidos com o presente modelo, usando a malha da figura 6.21, apresentam-se na figura 6.23, e os seus análogos obtidos por Yoon e Patel (1996) (YP) encontram-se na figura 6.24. A malha usada por YP é apresentada na figura 6.22. Esta malha tem (82×69) nós (5658 nós), utiliza uma expansão vertical bidireccional e, segundo os autores, é não ortogonal. A malha de FLEX (ver figura 6.21) tem 6606 nós, e pode ser considerada quase ortogonal, porque tem valores dos desvios médio e máximo da ortogonalidade bastante aceitáveis.

Para a velocidade  $U$  as divergências entre os perfis experimentais, os de YP e os presentes são muito poucas. No entanto o pior perfil de YP é o 8, e em contraste o de FLEX é o 15. Estes dois perfis que estão em zonas diferentes do escoamento evidenciam um déficit na metade inferior do domínio, que pela conservação da massa, se transforma num excesso a partir de uma dada altura na metade superior. O perfil de FLEX na zona de recirculação (secção 8) tem um comportamento ligeiramente melhor que o de YP. O contrário se verifica nos perfis da secção 15 onde o resultado de YP é melhor do que o de FLEX.

Na superfície livre, segundo YP, as discordâncias de  $U$  devem-se à ausência na simulação de um mecanismo que amortecesse as perturbações da velocidade  $W$ . Talvez se pudesse ter activado uma esponja difusiva para desgastar estas perturbações, tal como nos escoamentos com propagação vertical de ondas. Note-se que tanto os perfis de YP como os de FLEX produzem um máximo nessa fronteira, nas secções 3 e 15. Isto não se verifica nos dados experimentais, onde os máximos acontecem bastante mais afastados desta fronteira. Note-se que os máximos de FLEX são inferiores aos de YP o que evidencia uma ligeira melhoria. Isto pode parecer um paradoxo, porque a malha de YP (figura 6.22) é bastante mais refinada verticalmente nessa zona, do que a malha de FLEX (figura 6.21). No entanto, neste caso talvez a própria falta de refinamento (sem ser um acto premeditado) da malha de FLEX nessa zona tenha actuado como uma espécie de esponja difusiva, que neste caso teve um efeito

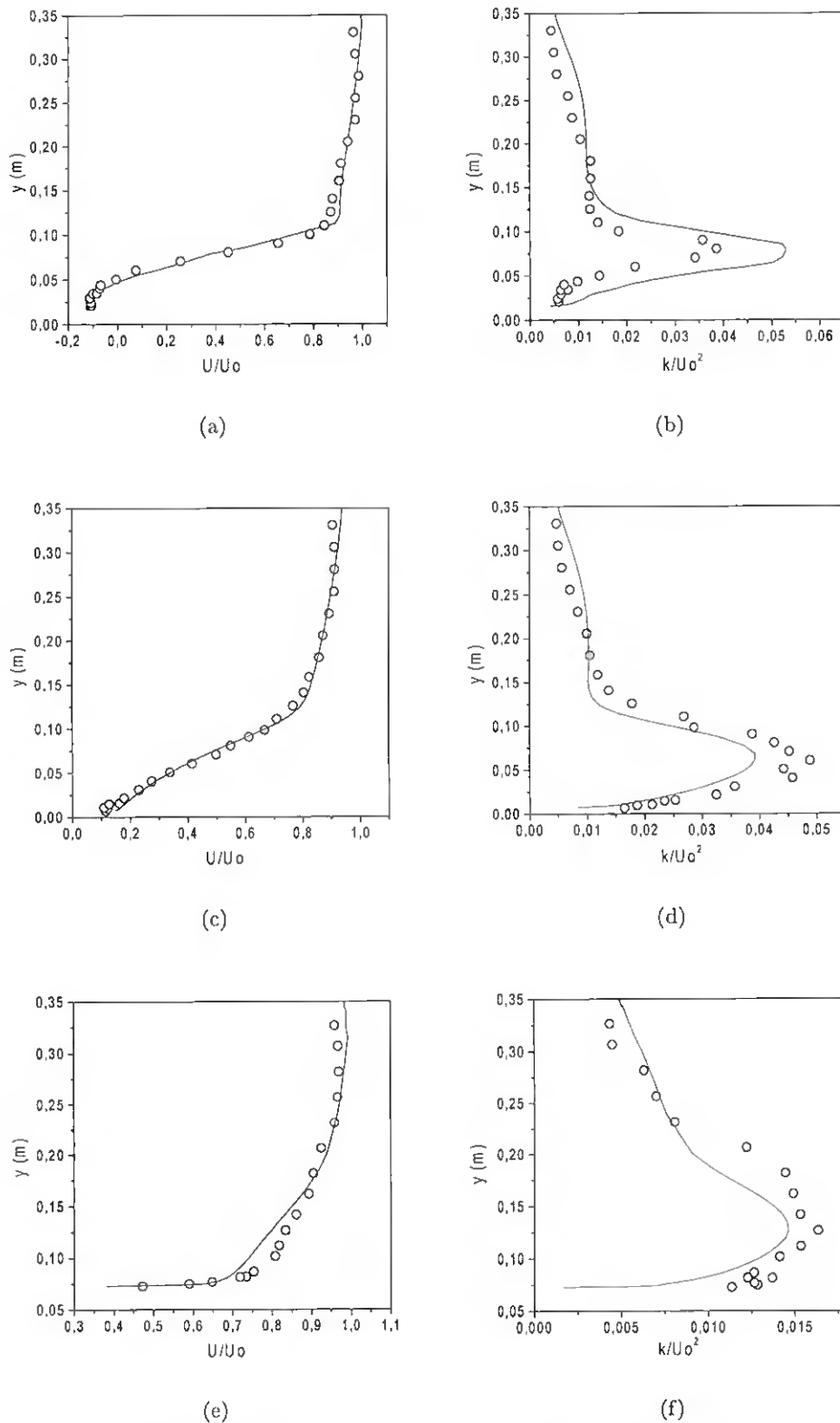
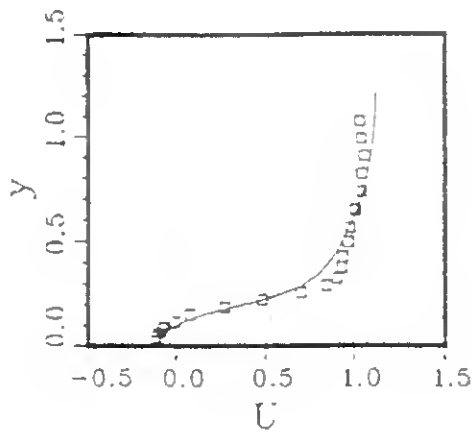
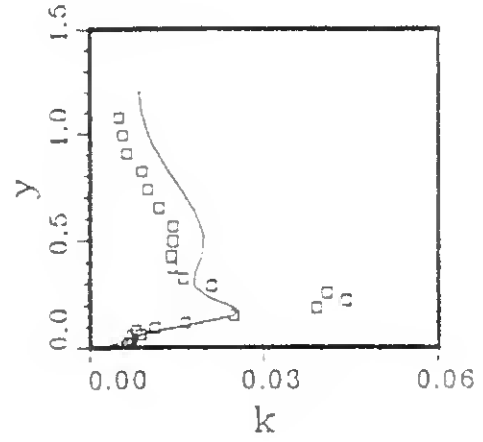


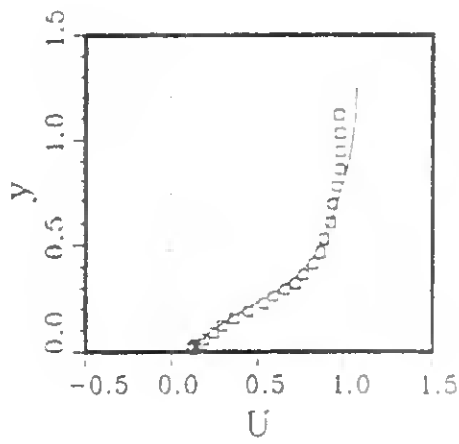
Figura 6.23: Perfis verticais da velocidade  $U$  e da energia cinética turbulenta  $k$ .  $U$  e  $k$  foram normalizadas com  $U_0$  e  $U_0^2$ , respectivamente. As secções são: a) e b) (secção 3), c) e d) (secção 8), e e) e f) (secção 15) (ver figura 6.20). (o) - dados experimentais de Mierlo e Ruiter (1988), (—) resultados do presente modelo.



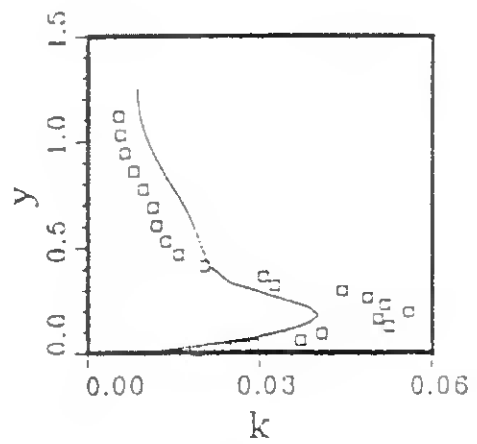
(a)



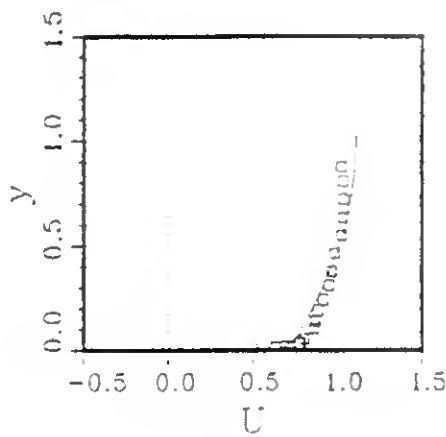
(b)



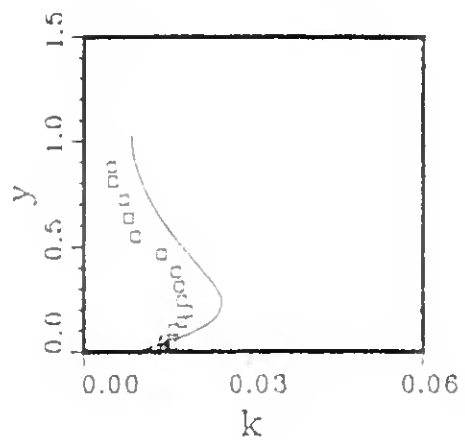
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.24: Como na figura 6.23 mas os resultados numéricos são os de Yoon e Patel (1996).  $y$  está normalizado com  $d = 0.292$  m.

benéfico. No exemplo da cavidade na subsecção 5.1.1 viu-se que o esquema Upwind I, apesar de ser muito difusivo, poderia ser benéfico em determinadas condições.

Sobre os perfis numéricos de  $k$  várias coisas chamam a atenção. A primeira é a diferença significativa existente entre YP e FLEX na secção 8. O comportamento típico do modelo  $k - \varepsilon$  é o verificado por YP nessa secção 8, onde é normal haver um défice  $k$  na zona de recirculação devido a excessiva produção de  $\varepsilon$  pelo modelo. No entanto o máximo do perfil de FLEX é notavelmente maior que o experimental. Isto deve-se ao efeito da modificação de  $C_\mu$  a qual, como já foi explicado na subsecção anterior, faz aumentar os níveis de turbulência (Leschziner and Rodi, 1981).

Como já foi antes referido, quando o escoamento entra na zona de escoamento desenvolvido, depois do processo de recuperação da zona de recirculação, deixa de ser elíptico e passa a ser quase parabólico. O modelo  $k - \varepsilon$  funciona particularmente bem nesta zona, produzindo resultados que geralmente subestimam ligeiramente os experimentais. Por isso, chama-se a atenção para o facto de o perfil de  $k$  de YP sobrestimar o correspondente perfil experimental, de modo algo significativo. O perfil de YP sobrestima o experimental em todo o domínio enquanto que o perfil de FLEX, apesar de sobrestimar ligeiramente o experimental na metade inferior do domínio, e o subestimar na metade superior, tem um comportamento francamente melhor.

Na zona de recuperação, os perfis de  $k$  e  $U$  de FLEX e YP têm comportamentos similares, destacando-se no entanto que FLEX evidencia uma melhor concordância com os dados experimentais do que YP.

Sabe-se que neste tipo de escoamentos o modelo  $k - \omega$  costuma ter melhor desempenho do que o modelo  $k - \varepsilon$ . Até onde lhe foi possível saber ao autor desta tese, não se conhece a razão desta diferença de comportamento. Fazendo fé na superioridade do modelo  $k - \omega$ , então as ligeiras melhorias verificadas com CP87 só podem ser atribuídas: a) a um maior nível de refinamento da malha na zona de recirculação, na zona central, e na entrada do domínio, b) a um maior grau de ortogonalidade da malha usada por FLEX, o que como se sabe reduz os erros de difusão associados à não ortogonalidade, e c) à correcção de  $C_\mu$  explicada em 3.5.2.

## Capítulo 7

# Escoamentos orográficos estavelmente estratificados de subcamada externa

### 7.1 Introdução

Neste capítulo serão feitas várias simulações de diferentes tipos de escoamento atmosférico de mesoscala. Estes cálculos têm como objectivos: a) validar o modelo, e b) estudar algumas características deste tipo de escoamentos. Todos os casos são estavelmente estratificados e de subcamada externa. Esta última foi definida na secção (2.6) como a subcamada onde o escoamento é invíscido e irrotacional, sendo afectado só pela perturbação da pressão e pela flutuação. A fronteira inferior da mesma é a subcamada intermédia, de profundidade  $h_m > h_i$ , onde o escoamento é considerado invíscido, mas rotacional. Partindo do princípio de que a escala horizontal da orografia pode ser tomada como a escala da profundidade da subcamada externa, para poder ser considerado um escoamento de subcamada externa tem que se verificar que  $h/L \ll 1$  ou  $h_m/L \ll 1$ . Como já foi referido na secção 2.4, isto acontece quando a escala horizontal da orografia é muito grande, ou a atmosfera é acentuadamente estável. Se a atmosfera é muito estável, então  $L$  não precisa de ser muito elevado para se cumprir a condição necessária para que o efeito da gravidade seja importante, i.e., ( $L \sim L_B = U/N$ ).

Os casos que serão analisados mais a frente referem-se a escoamentos onde a rotação pode ser desprezada porque o número de Rossby é sempre muito maior do que 1 ( $R_o = U/(fL) \gg 1$ ).

Antes de passar ao estudo dos casos, será feita uma breve revisão deste tipo de escoamentos onde são introduzidos conceitos importantes para a compreensão dos resultados. Esta descrição encontra-se fundamentalmente nos trabalhos de Smith (1979, 1980), Gill (1982), Holton (1992) e Baines (1995).

É conveniente começar por introduzir alguns conceitos fundamentais no caso mais simples de uma orografia periódica sinusoidal

$$h = h_0 \sin kx \quad (7.1)$$

em que  $k$  é o número de onda da orografia. Se um escoamento com velocidade média horizontal  $U_r = \text{const.} > 0$  for forçado a passar por esta orografia (ver figura 7.1), um observador no referencial  $U_r$  verá a orografia afastar-se com velocidade  $-U_r$  e o movimento produzido terá uma frequência

$$\omega = -U_r k \quad (7.2)$$

Note-se que, como o escoamento é estacionário, a sua frequência intrínseca  $\omega_i$  é nula. Assim, no referencial escolhido, a orografia (7.1) é dada por:

$$h = h_0 \sin (kx - \omega t) \quad (7.3)$$

A componente de velocidade vertical na superfície é determinada pelo movimento do fluido que acompanha a ondulação da orografia mantendo a velocidade horizontal constante, i.e.,

$$w' = U_r \frac{\partial h}{\partial x} = \text{Re} \left( w_0 e^{i(kx - \omega t)} \right) \quad \text{em } z = 0 \quad (7.4)$$

em que

$$w_0 = U_r k h_0 \quad (7.5)$$

A solução geral de (2.84) tem a forma

$$w' = \text{Re} \left[ w_0 e^{i\phi} \right] \quad (7.6)$$

em que  $w_0$  é a amplitude de  $w'$  e  $\phi = kx + mz - \omega t$  é a fase que, neste caso, se considerou linearmente dependente de  $x$ ,  $z$  e  $t$ . O número de onda horizontal  $k$  é sempre real porque a solução é sinusoidal em  $x$ . O número de onda vertical  $m$  pode ser real ou complexo.  $m_r$  descreve um comportamento sinusoidal em  $z$  e a parte complexa  $m_i$  descreve o decaimento ou crescimento em  $z$ , dependendo do sinal. Quando  $m$  é real o número de onda resultante pode ser tomado como um vector  $(k, m)$  perpendicular às linhas de fase constante.

Quando (7.6) é substituída em (2.84) obtém-se a seguinte relação de dispersão:

$$m^2 = (N/U_r)^2 - k^2 \quad (7.7)$$

que pode ser escrita como:

$$\omega^2 m^2 = k^2 (N^2 - \omega^2) \quad (7.8)$$

ou

$$\omega = -U_r k = -N \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (7.9)$$

onde  $k/(k^2 + m^2)^{1/2} = \cos \alpha$ .  $\alpha$  é o ângulo que as linhas de fase constante fazem com a vertical. Se  $m = 0$  então  $\cos \alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ), e as linhas de fase constante são verticais. Nesse caso, um escoamento com velocidade constante  $U_r$  que oscila verticalmente com frequência  $N$  descreverá uma onda com comprimento  $\lambda = 2\pi U_r / N$ . Se  $k \ll m$  então  $\lambda_z \ll \lambda_x$  e, portanto, o escoamento pode ser considerado hidrostático. De acordo com (7.7),  $m \cong N/U_r$ , de onde se obtém o comprimento de onda

$$\lambda = 2\pi U_r / N, \quad (7.10)$$

designado por comprimento de onda hidrostático. As linhas de fase constante estarão próximas da horizontalidade e o escoamento será quase periódico na vertical, com número de onda  $m$ . Deste modo, (7.7) determina a estrutura vertical do escoamento em função de  $k$ ,  $N$  e  $U_r$ .

De acordo com (7.7), se  $|U_r k| < N$ ,  $m^2$  é real ( $m^2 > 0$ ), e a solução geral de (7.6) toma a forma:

$$w' = w_0 \cos(kx + m_r z - \omega t) \quad (7.11)$$

A combinação das equações linearizadas (2.72), (2.73), (2.74) e (2.75) permite, usando (7.11), obter as seguintes relações de dispersão

$$p' = -\frac{\omega m \rho_r}{k^2} w' \quad (7.12)$$

$$\rho' = \frac{N^2 \rho_r}{\omega g} w_0 \sin(kx + m_r z - \omega t) = -i \frac{N^2 \rho_r}{\omega g} w' \quad (7.13)$$

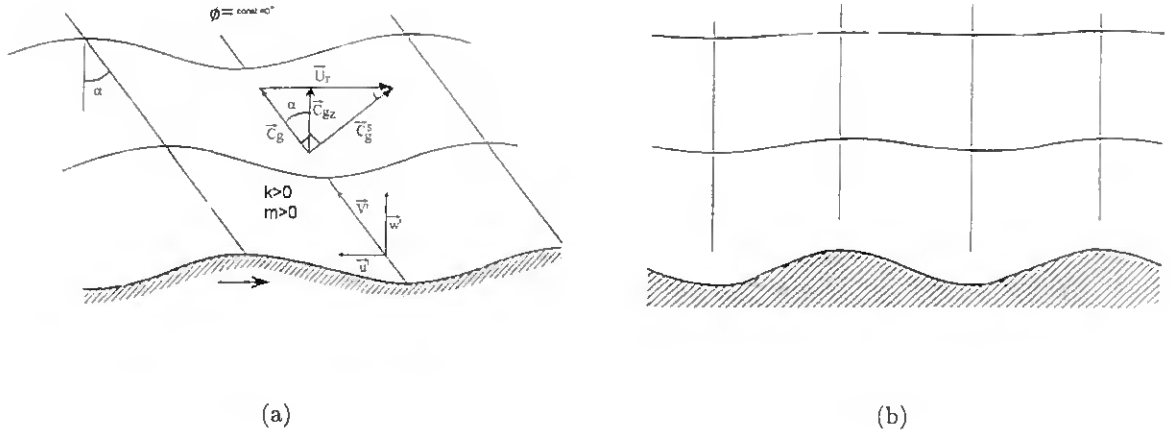


Figura 7.1: Deslocamento das linhas isopícnicas produzidas por um escoamento com estratificação e velocidade uniformes sobre uma orografia sinusoidal de pequena amplitude: a) topografia com um comprimento de onda grande,  $k < N/U_r$ , b) o caso contrário de a).

Para  $u'$  e  $w'$  podem ser obtidas relações análogas. Note-se que  $\rho'$  está desfasado  $90^\circ$  em relação a  $p'$ . De facto, as zonas de maior pressão correspondem às de menor densidade e viceversa. Na figura 7.1 vê-se que as linhas de densidade constante estão em fase com a orografia. As relações (7.12) e (7.13), conjuntamente com (7.9), implicam que:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{m^2}{k^2 + m^2} g \rho' \quad (7.14)$$

Se a condição de equilíbrio hidrostático se verificar ( $m \gg k$ ), a relação (7.14) transforma-se em (2.68), i.e, a perturbação de densidade também está em equilíbrio com o gradiente vertical da perturbação de pressão.

As componentes da velocidade de fase são dadas por (ver equação (7.9)):

$$c_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{N}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (7.15)$$

$$c_z = \frac{\omega}{m} = -\frac{Nk}{m(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (7.16)$$

Lembra-se que a velocidade de fase não é um vector e o seu módulo não pode ser determinado como  $(c_x^2 + c_z^2)^{1/2}$ , mas sim como  $\omega/(k^2 + m^2)^{1/2}$ .

A velocidade de grupo é definida como o gradiente de  $\omega$  no domínio dos números de onda, i.e:

$$\vec{c}_g = \nabla \omega = (c_{gx} \vec{e}_x, c_{gz} \vec{e}_z) = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \vec{e}_x, \frac{\partial \omega}{\partial m} \vec{e}_z \right) \quad (7.17)$$

e determina a direcção de propagação da energia das ondas. Derivando (7.9) chega-se às expressões

$$c_{gx} = -\frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} = c_x \frac{m^2}{(k^2 + m^2)} = c_x \sin^2 \alpha \quad (7.18)$$

$$c_{gz} = \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} = -c_z \frac{m^2}{(k^2 + m^2)} = -c_z \sin^2 \alpha \quad (7.19)$$

que tornam claro o facto de as ondas gravíticas internas serem dispersivas, pois as componentes de  $\vec{c}_g$  dependem de  $k$  e  $m$ . Note-se que  $c_z$  e  $c_{gz}$  têm sinais contrários (ver figura 7.1), e que, portanto, para haver propagação da energia das ondas na vertical, i.e.,  $c_{gz} > 0$ , a velocidade de fase vertical deverá ser negativa,  $c_z < 0$ . Como neste caso  $k > 0$ , de acordo com (7.16)  $m$  tem que cumprir a condição  $m > 0$ . Portanto  $c_x$  e  $c_{gx}$  têm o mesmo sinal mas  $c_z$  e  $c_{gz}$  têm sinais opostos. Como  $\vec{\kappa} = (k, m)$  é perpendicular às linhas  $\phi = \text{const.}$ , então  $(\vec{c}_g)$  é paralelo às mesmas. Note-se que no caso hidrostático  $|c_x| \approx |c_{gx}|$  e  $|c_z| \approx |c_{gz}|$ .

A análise anterior foi feita no referencial  $U_r$ . No referencial fixo da superfície da montanha a velocidade de grupo é dada por

$$\vec{c}_g^s = \vec{U}_r + \vec{c}_g \quad (7.20)$$

em que  $\vec{c}_g^s$  é perpendicular a  $\vec{c}_g$  (ver figura 7.1). Substituindo (7.18) e (7.19) em (7.20) obtém-se no referencial superfície:

$$c_{gx}^s = c_x \sin^2 \alpha + U_r = c_{gx} + U_r \quad (7.21)$$

$$c_{gz}^s = c_{gz} \quad (7.22)$$

Como se trata de um sistema dinâmico conservativo (invíscido e irrotacional) e linear a equipartição da energia é feita entre as componente cinética e potencial. Para a onda plana (7.11) a energia total pode ser determinada mediante a energia cinética total. O vector perturbação da velocidade  $\vec{V}' = (\vec{u}', \vec{w}')$  é paralelo às linhas  $\phi = \text{const.}$  (ver figura 7.1) e o seu módulo é  $|\vec{V}'| = w_0 / \cos \alpha$ . Portanto, a energia total é dada por:

$$E = \frac{\rho_r}{2} \left( \frac{w_0}{\cos \alpha} \right)^2 \quad (7.23)$$

De acordo com a equação de conservação da energia obtida com o sistema linearizado acima referido (ver Gill, 1982, página 139), o vector fluxo de densidade de energia é dado por

$$\vec{F}' = (p' u' \vec{e}_x, p' w' \vec{e}_z) \quad (7.24)$$

e o fluxo total de energia,

$$F_z'(z)^t = \int_{-\infty}^{+\infty} p' w' dx \quad (7.25)$$

Dividindo (7.28) por  $U_r$ , e substituindo  $p'$  pela forma linearizada do teorema de Bernoulli (Gill, 1982)

$$p' = -\rho_r U_r u' \quad (7.26)$$

obtém-se:

$$\frac{F_z'(z)^t}{U_r} = \rho_r(z) \int_{-\infty}^{+\infty} u' w' dx = M(z)^t \quad (7.27)$$

Portanto, o fluxo total de energia dividido por  $U_r$  é igual ao fluxo vertical total de quantidade de movimento.

Como a orografia é periódica, os fluxos  $F_z'(z)$  e  $M(z)$  também o são. Os valores médios dos mesmos calculados sobre uma grande extensão horizontal, devem ser aproximadamente iguais aos valores médios para um comprimento de onda. Assim, os fluxos  $F_z'(z)^t$  e  $M(z)^t$  podem ser dados por (daqui em diante o índice  $t$  será omitido):

$$F_z'(z) = \overline{p' w'} \quad (7.28)$$

$$\frac{F_z'(z)}{U_r} = \frac{\overline{p' w'}}{U_r} = \rho_r(z) \overline{u' w'} = M(z) \quad (7.29)$$

Como a energia se propaga na direcção da velocidade de grupo, é válido dizer que o vector fluxo de densidade de energia é dado por:

$$\vec{F}^{\uparrow} = E\vec{c}_g \quad (7.30)$$

e, assim, o fluxo vertical de densidade de energia pode ser expresso por:

$$\vec{F}_z^{\uparrow} = E\vec{c}_{gz} \quad (7.31)$$

A combinação e manipulação de (7.23), (7.8), (7.9), (7.19), permite obter a seguinte expressão para o fluxo vertical.

$$\vec{F}_z^{\uparrow} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_r \omega m w_0^2}{k^2} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_r U_r m w_0^2}{k} = \frac{1}{2} k \rho_r h_0^2 U^2 (N^2 - \underbrace{U^2 k^2}_{\omega^2})^{1/2} \vec{e}_z \quad (7.32)$$

em que o sinal (-) vem da velocidade  $c_{gz}$ . Tomando em conta (7.29), o fluxo vertical de momento é dado por:

$$M(z) = \rho_r \overline{u'w'} = \frac{1}{2} k \rho_r h_0^2 U^2 ((N/U_r)^2 - k^2)^{1/2} = \frac{1}{2} k \rho_r U_r h_0^2 (N^2 - \omega^2)^{1/2} \quad (7.33)$$

No limite hidrostático

$$M(z) = \rho_r \overline{u'w'} = \frac{1}{2} k \rho_r U_r N h_0^2 \quad (7.34)$$

Se o efeito da rotação for incluído, a equação anterior toma a forma:

$$M(z) = \rho_r \overline{u'w'} = \frac{1}{2} \rho_r h_0^2 [(\omega^2 - f^2)(N^2 - \omega^2)]^{1/2} \quad (7.35)$$

que mostra claramente que o fluxo vertical de quantidade de movimento tende para zero nos dois extremos da escala de frequências para a qual é permitida a propagação vertical das ondas gravítico-inerciais, a saber, a frequência  $N$ , associada às oscilações gravíticas livres, e a frequência  $f$ , associada às oscilações livres inerciais. Portanto esta função deve ter um máximo.

Associado à perturbação ondulatória da superfície existe um arrasto, que tem origem no desfaseamento do campo de flutuações de pressão relativamente à montanha e que se traduz no facto de a pressão ser maior a montante do que a jusante da mesma. De acordo com a relação (7.12) a perturbação da pressão  $p'$  é positiva a montante das cristas ( $w' > 0$ ) e negativa a jusante ( $w' < 0$ ), existindo uma força total de arrasto normal à crista da montanha. Esta é calculada por intermédio da expressão:

$$D_w = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x, 0) \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (7.36)$$

Substituindo (7.4) e (7.26) em (7.36), e dividindo por  $U_r$ , chega-se a:

$$D_w = -\rho_r(0) \int_{-\infty}^{+\infty} u'w'(0) dx = M(0) \quad (7.37)$$

Assim, chega-se a conclusão que no caso linear e invíscido, o fluxo de quantidade de movimento  $M(0)$  e o arrasto na superfície são iguais. Noutras palavras, o arrasto é igual à taxa de transferência de momento vertical pelas ondas. De modo análogo a (7.29), a expressão (7.37) pode ser escrita na forma:

$$D_w = -\rho_r(0) \overline{u'w'}(0) = M(0) \quad (7.38)$$

De acordo com o teorema de Eliassen e Palm (1961), num escoamento linear, estacionário, não dissipativo e sem níveis críticos ( $U_r \neq 0$ ), o fluxo vertical ondulatorio de quantidade de movimento é constante. Assim, de acordo com (7.27) deve-se verificar que:

$$\frac{\partial M(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\rho_r(z) \overline{w'w'}) \Rightarrow M(z) = \text{const.} \quad (7.39)$$

Resumindo, quando  $|U_r k| < N$ , i.e., quando as ondas se podem propagar livremente na vertical, a densidade de energia é a mesma em todos os níveis. Esta é fornecida continuamente desde a superfície e propaga-se verticalmente sem dissipação até ser absorvida nalguma região remota. Este mecanismo não é contemplado nos modelos analíticos. O que se impõe quando  $z \rightarrow \infty$  é uma condição de radiação da energia.

Quando  $m^2 < 0$ , então  $m = im_i$  e a solução (7.6) descreve ondas verticais evanescentes:

$$w' = w_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{-m_i z} \quad (7.40)$$

A relação de dispersão de  $p'$  análoga a (7.12) neste caso é:

$$p' = -i\omega m_i k^{-2} \rho_r w' e^{-m_i z} \quad (7.41)$$

(7.41) mostra que  $p'$  está desfasada de  $90^\circ$  de  $w'$  e portanto que está em fase com a orografia dada pela expressão (7.1). Neste caso, a força de arrasto e o fluxo vertical de densidade de quantidade de movimento são nulos,  $F'_z = 0$ . Como  $m$  é imaginário, as linhas de fase constante não têm componente real, e por isso são verticais, como é mostrado na figura 7.1 (b).

Até agora foi analisado o caso  $\ell(z) = \text{const.}$  (ver expressão 2.86). Na realidade, a atmosfera não é verticalmente uniforme. A variação das propriedades com a altura,  $z$ , de um escoamento estável, pode ser estudada com a técnica de Lighthill (1965) que permite descrever a trajectória de propagação de energia. A técnica assume que o declive local desta trajectória é dado por:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c_{gz}^s}{c_{gx}^s} \quad (7.42)$$

em que  $c_{gx}^s$  e  $c_{gz}^s$  são dadas pelas expressões (7.21) e (7.22), respectivamente. Para um dado número de onda  $k$ , se forem conhecidas as funções  $U_r(z)$  e  $N(z)$ , (7.42) pode ser integrada para determinar  $z(x)$ . Usando as expressões (7.9) (7.18) e (7.19), (7.42) pode ser escrita na forma:

$$\frac{dz}{dx} = \left[ \left( \frac{N}{U_r k} \right)^2 - 1 \right] \quad (7.43)$$

Da expressão anterior pode-se concluir que à medida que o escoamento se vai tornando menos hidrostático, se verifica que  $dz/dx \rightarrow 0$ , indicando que o vector velocidade de grupo em relação à terra se tende a tornar horizontal. A função  $z(x)$ , que se obtém da integração de (7.43), descreve este comportamento.

Esta técnica é válida nas mesmas condições que a conhecida aproximação WKB<sup>1</sup>, a qual exige que  $\ell(z) = N/U_r$  varie pouco numa distância da ordem  $1/\ell(z)$ . Como esta aproximação não pressupõe reflexão das ondas, a equação (2.84) pode ser resolvida dividindo a altura total do domínio em intervalos com  $\ell_i = \text{const.}$  que cumpram a condição acima enunciada. Em cada intervalo usa-se a solução analítica da equação de (2.84) (para o caso hidrostático), (7.11), com o termo  $mz$  substituído por  $\int \ell(z) dz$ . A amplitude  $w_0$  varia de modo tal que o fluxo vertical de energia total (7.32) é independente

<sup>1</sup>Também denominada aproximação de Liouville-Green (Gill, 1982)

de  $z$ . Deste modo, a solução em  $z$  fica completamente definida. As ondas a jusante da montanha (*lee waves*) não podem ser estudadas com esta técnica porque há reflexão e fenômenos de interferência que a aproximação WKB não consegue descrever. Esta questão será abordada posteriormente, com mais detalhe.

Tal como o escoamento sobre uma orografia periódica sinusoidal pode ser representado por uma harmónica de Fourier, o escoamento sobre uma orografia isolada pode ser representado como a soma das contribuições de várias harmónicas de Fourier. Portanto, uma orografia isolada pode ser representada como:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(k) e^{ikx} dk \quad (7.44)$$

em que  $\tilde{h}(k)$  representa a transformada de Fourier de  $h(x)$ .

Como, neste caso, o fluxo de densidade de energia não é periódico, para calcular o arrasto ondulatório é necessário considerar as contribuições dos fluxos totais (valor médio de um comprimento de onda) de todas as harmónicas capazes de produzir arrasto. Com base neste raciocínio, para calcular  $D_w$  há que integrar, no espaço do número de onda  $k$ , desde 0 até  $N/U_r$ . Se  $k > N/U_r$  então, de acordo com (7.7) não há propagação de ondas ( $m$  é um número complexo) e, pelo teorema de Eliassen e Palm (1961), essas harmónicas não contribuem para  $D_w$ . Tomando em conta que a contribuição de uma harmónica é dada por (7.33), fazendo a transformada inversa para uma montanha simétrica obtém-se (ver equação 7.37):

$$D_w = \pi \left[ \rho_r U_r^2 \int_0^{N/U_r} \tilde{h}(k)^2 ((N/U_r)^2 - k^2)^{1/2} k dk \right]_{z=0} \quad (7.45)$$

No caso em que a rotação não é desprezável, recorre-se a (7.35), e obtém-se:

$$D_w = \pi \left[ \rho_r U_r^2 \int_0^{N/U_r} \tilde{h}(k)^2 \left( [k^2 - (f/U_r)^2] [(N/U_r)^2 - k^2] \right)^{1/2} dk \right]_{z=0} \quad (7.46)$$

Em todos os casos teste deste capítulo será usada como orografia isolada uma montanha em forma de sino (montanha de Agnesi) cujo perfil é descrito pela expressão (5.5):

$$h(x) = \frac{HL^2}{x^2 + L^2} \quad (7.47)$$

em que  $H$  é a altura máxima e  $L$  a semi-largura. A função  $h(x)$ , por ser real e par, possui uma transformada de Fourier também real e par,

$$\tilde{h}(k) = HL e^{-kL} \quad (7.48)$$

e constitui um bom caso para validar modelos teóricos. A zona do espectro  $k_d \in [0, \sim 1/L]$  contém cerca de 87% da potência total. Por isso, o número de onda característico desta orografia,  $k_d \sim 1/L$ , pode ser considerado como o número de onda dominante da mesma.

No caso da montanha simétrica de Agnesi (7.47), a substituição de (7.48) em (7.45) leva ao resultado:

$$D_w = \pi (HL)^2 \left[ \rho_r U_r \int_0^{\ell} e^{-2kL} (\ell^2 - k^2)^{1/2} k dk \right]_{z=0} \quad (7.49)$$

O arrasto ondulatório é um bom critério para a validação de simulações numéricas, mas não fornece informação explícita sobre a estrutura espacial do escoamento. Para esse efeito, recorrer-se-á à distribuição das linhas de corrente.

Para obter os campos de  $u'(x, z)$  e  $w'(x, z)$ , a partir de uma função  $\delta$  (deslocamento da linha de corrente) analítica, usa-se a equação da continuidade linearizada (2.72), escrita na forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho_r u')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_r w')}{\partial z} = 0. \quad (7.50)$$

e a expressão

$$w' = U_r \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (7.51)$$

Combinando as mesmas obtém-se:

$$u' = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial(\rho_r U_r \delta)}{\partial z} \quad (7.52)$$

A perturbação  $w'$  é calculada com (7.51).

Além de  $u'(x, z)$ ,  $w'(x, z)$  e  $\psi(x, z)$ , o arrasto ondulatório  $D_w$ , e o fluxo total vertical de quantidade de movimento  $M(z)$  são as duas grandezas escolhidas para validar o modelo. O arrasto ondulatório analítico é calculado pela expressão (7.49). O arrasto ondulatório  $D_w$  numérico é calculado com a expressão (7.36), utilizando (4.121) para o cálculo da constante  $c^p$ . Como o domínio não é infinito, para preservar a simetria das contribuições a montante e jusante do obstáculo, os limites esquerdo e direito de integração em (7.36) serão tomados iguais em módulo.

O fluxo numérico  $M(z)$  é obtido usando (7.27). Como  $M(z)$  é uma grandeza de segunda ordem, é apropriada para testar a precisão dos esquemas de discretização. Existe, no entanto, o problema do domínio não ser cartesiano, o que não é desejável porque implica que as linhas  $z = \text{const}$  se "enterrem" na montanha. Uma solução possível consiste em colocar o 1º nível de cálculo acima da altura  $H$ . Outra solução seria realizar o cálculo do integral de  $M(z)$  (7.27), não nos níveis  $z = \text{const}$ , mas nos níveis  $\eta = \text{const}$  do domínio computacional.

O passo de integração temporal é escolhido com a seguinte expressão aproximada:

$$\Delta t \approx \min \left[ \frac{t_L}{n_t}, \frac{t_N}{n_t} \right] \quad (7.53)$$

em que  $t_L = L/U_r$  e  $t_N = 1/N$  são o tempo de advecção e o período de flutuação, respectivamente, e  $n_t$  é um parâmetro arbitrário que depende do regime do escoamento.

## 7.2 Escoamento hidrostático uniforme linear numa atmosfera isotérmica

O primeiro caso deste capítulo consiste num escoamento linear numa atmosfera isotérmica. Os resultados da simulação com o presente modelo (FLEX) serão comparados com a solução analítica existente para este caso (Smith, 1980). Apesar de FLEX ser não hidrostático e não linear, deve conseguir simular casos lineares, em que  $Fr_H^{-1} = \hat{H} \ll 1$  e  $\hat{L} = Fr_L^{-1} \gg 1$ , produzindo uma solução estacionária e precisa que permita validar o seu desempenho nessas condições de linearidade extrema.

Por conveniência, escolheu-se um escoamento isotérmico,  $T_r = 240\text{K}$ , sobre uma montanha de Agnesi com  $H = 1$  m e  $L = 10000$  m, com velocidade média constante e horizontal  $U_r = 20$  m/s.

Usando as expressões (2.50), (2.89), (2.94), (2.24), (2.25), (2.96), e a expressão de Zilitinkevich (1989) para o cálculo da profundidade da CL, podem ser calculadas as seguintes relações:

1.  $H/L = 1/10000 = 10^{-4} \ll 1$
2.  $h/L = 244/10000 = 2.44 \times 10^{-2} \ll 1$

3.  $h_i/L_{mo} = 188/107 = 1.8$
4.  $h/h_m = 244/185 = 1.3$
5.  $\hat{H} = NH/U_r = 0.020944 \times 1/20 \approx 0.001$
6.  $\hat{L} = NL/U_r = 0.020944 \times 10000/20 \approx 10$
7.  $Re = U_r H/\nu = 20 \times 1/1 \times 10^{-6} = 20 \times 10^6$

Para estes cálculos foi atribuído um valor típico à frequência de Coriolis,  $f = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , correspondente a uma latitude de  $\phi = 44^\circ\text{N}$ , e ao número crítico de Richardson de fluxo o valor  $Ri_c^f = 0.2$ . A velocidade de fricção  $u_*$ , obtida de acordo com o método exposto na secção (8.1) é  $u_* = 0.13 \text{ m/s}$ , o que constitui um valor típico. De (1) e (6) pode-se deduzir que o escoamento é linear, de (2) que é de camada limite externa, de (3) que os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte estão confinados à subcamada interna (na camada externa domina claramente a estratificação), de (4) que toda a subcamada externa está por cima da camada limite, de (5) que o escoamento é hidrostático, e de (7) que este é claramente turbulento. Mas esta turbulência está confinada à subcamada interna, acentuadamente linear, não devendo afectar a componente invíscida e irrotacional do escoamento. O problema da turbulência na camada limite será abordado mais tarde.

A integração da expressão (7.49) para o cálculo de  $D_w$  dá o seguinte resultado:

$$D_{wh} = \frac{\pi}{4} \rho_r(0) N U_r H^2 \quad (7.54)$$

em que o índice  $h$  se refere ao facto de se tratar do caso hidrostático.

Como  $U_r$  e  $T_r$  são constantes, e é usada a aproximação de Boussinesq (2.31), então usando as equações da hidrostática (2.67) e de estado de um gás ideal, o parâmetro de Scorer dado por (2.86), toma a forma:

$$\ell^2(z) = \frac{N^2}{U_r^2} - \frac{1}{4} S_r^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial S_r}{\partial z} = \frac{g^2}{c_p T_r^2} - \frac{1}{4} \frac{g^2}{(RT_r)^2} \quad (7.55)$$

Da expressão (2.77) deduz-se que se  $T_r = \text{const.}$ , então  $N^2 = g/(T_r c_p) = \text{const.}$ . Para  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ ,  $c_p = 1004,67 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $T = 240 \text{ K}$ , obtém-se que  $N = 0.02 \text{ s}^{-1}$ . Assim, o estado de referência é determinado pelas expressões (3.5), (3.6) e (3.7). Como este caso é hidrostático, a equação (2.84) toma a forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}'}{\partial z^2} + \ell^2(z) \hat{w}' = 0 \quad (7.56)$$

Usando (2.85) e (7.51), a expressão (7.56) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + \ell^2(z) \delta = 0 \quad (7.57)$$

tendo por solução

$$\delta(x, z) = \left( \frac{\rho_0}{\rho_r(z)} \right)^{1/2} \text{Re} \left[ \int_0^\infty \hat{h}(k) e^{i(\ell^2 - k^2)^{1/2} z} e^{ikx} dk \right] \quad (7.58)$$

Para obter (7.58) foram usadas as seguintes condições: na fronteira superior é usada a condição de transporte de toda a energia na vertical (condição de radiação) quando  $z \rightarrow \infty$ , nas fronteiras laterais as flutuações reduzem-se a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ , e na superfície foi usada a condição de linearidade:

$$\delta(x, h(x)) = z \quad (7.59)$$

Substituindo a transformada de Fourier (7.48) da orografia (7.47) na equação anterior tem-se:

$$\delta(x, z) = \underbrace{\left(\frac{\rho_0}{\rho_r(z)}\right)^{1/2}}_x HL \operatorname{Re} \left[ e^{ilz} \int_0^\infty e^{k(-L+ix)} dk \right] = \chi \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{ilz}}{(-L+ix)} \int_0^\infty e^{k(-L+ix)} dk \right] \quad (7.60)$$

Resolvendo o integral impróprio (7.60) tem-se:

$$\delta(x, z) = \chi \operatorname{Re} \left[ \frac{-e^{ilz}}{-L+ix} \right] \quad (7.61)$$

Tomando a parte real de (7.61), chega-se à solução na forma final:

$$\delta(x, z) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_r(z)}\right)^{1/2} HL \frac{L \cos \ell z - x \sin \ell z}{x^2 + L^2} \quad (7.62)$$

Para a construção do domínio de cálculo foram tomados em conta os trabalhos de Klemp e Lilly (1978) e de Durran e Klemp (1983). Na subsecção 4.10.4 é feita uma descrição das recomendações de Klemp e Lilly (1978) sobre as características das esponjas de absorção. Durran e Klemp (1983) fazem testes de sensibilidade à variação da altura em que começa a camada de absorção. Tomando em conta estes estudos, foi definida uma altura vertical do domínio de  $3\lambda_z$ . A camada de absorção no topo ocupa  $1.5\lambda_z$ .

Como o escoamento é claramente hidrostático, como mostra a expressão (7.7), a propagação das ondas é essencialmente vertical. Por isso, o domínio pode ser simétrico e as fronteiras laterais não precisam de estar muito afastadas. Na horizontal o domínio tem  $16L$  e a montanha está centrada em  $X_0 = 8L$ . A malha tem (120x100) nós o que corresponde a uma resolução de (1333.3(3),180) m, i.e., uma média de 8 pontos para resolver o comprimento de onda horizontal dominante  $\sim L$ , e 34 pontos por cada  $\lambda_z$ . Esta resolução é mais que suficiente para resolver a estrutura vertical das ondas e para ter o número requerido de pontos na camada de absorção vertical. Note-se que o 1º nível de cálculo está mais ou menos a 90 m da superfície, i.e., dentro da subcamada interna ( $h_i = 190$  m).

Nas fronteiras laterais é usada a esponja de absorção e o método de Raymond e Kuo (1984) com as modificações propostas por Miranda e James (1992), baseado na solução da equação de onda (ver subsecção 4.10.4). As esponjas laterais têm uma espessura de  $2L$ . O passo de tempo escolhido para a integração numérica vale  $\Delta t = 20$  s, sendo usado o esquema FTLLI, explicado na secção 4.7. Na fronteira superior, todos os gradientes das variáveis dependentes foram anulados, e na superfície foi usada a condição de livre escorregamento (ver a secção 4.10).

É importante salientar que nos escoamentos atmosféricos nos quais há geração de ondas gravíticas, na equação (2.71) o termo  $\frac{v'_r}{c_s^2}$  geralmente é desprezado (Stull, 1988, Holton, 1992). No entanto, neste e nos próximos casos teste acentuadamente lineares, verificou-se que na equação (2.71) os dois termos do membro direito eram da mesma ordem de grandeza, ( $|\rho_r \frac{\theta'_r}{\rho_r} \approx \frac{v'_r}{c_s^2}$ ). Portanto  $\frac{v'_r}{c_s^2}$  não foi desprezado.

A explicação para este efeito assenta no tipo de aproximação anelástica utilizada. No capítulo 3 viu-se que se o papel da pressão no processo geração e equilíbrio de  $p'$  for desprezado (termo II de (2.80)), de acordo com (2.83), a divergência do campo das flutuações da velocidade só está associada à subida (descida) adiabática da parcela de ar. Se não se despreza esse termo II, então a expressão (2.83) toma a forma:

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = \frac{g}{c_s^2} w' - \underbrace{\frac{U_r}{\rho_r c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial x}}_{II} \quad (7.63)$$

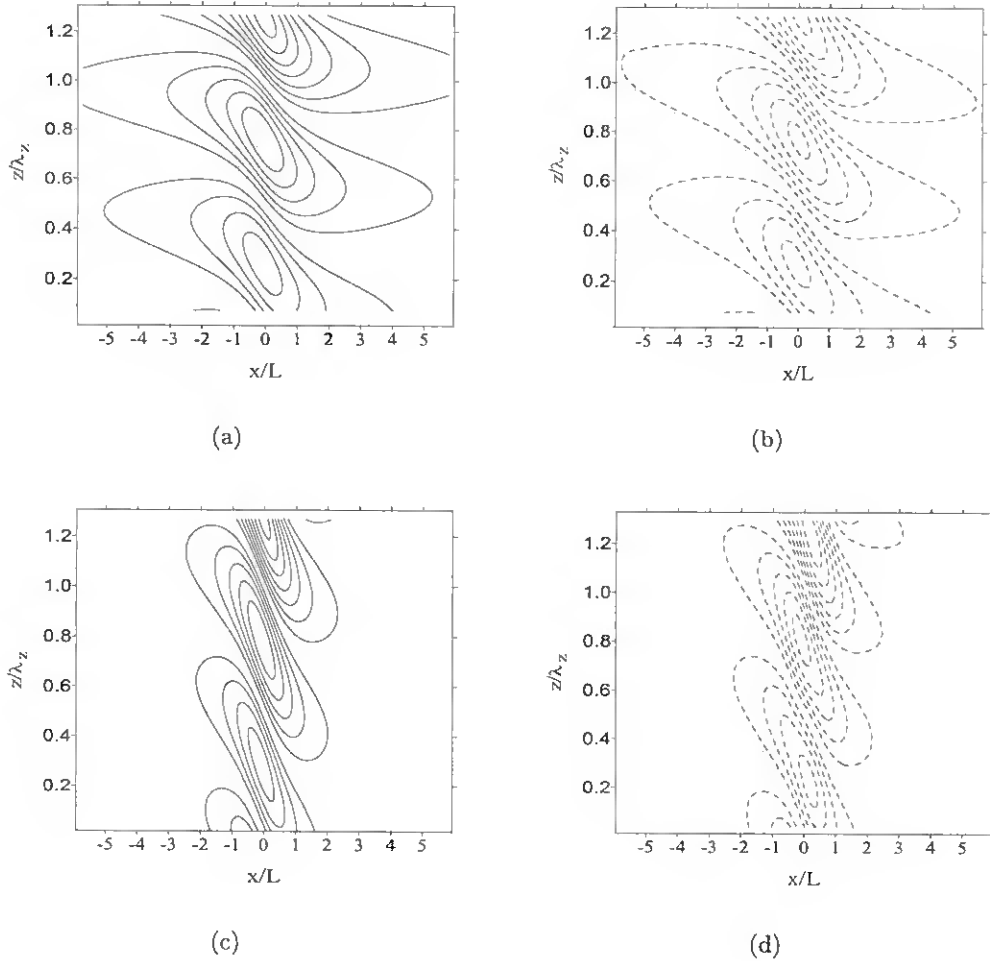


Figura 7.2: Campos das isolinhas de  $u'$  e  $w'$ . Nas figuras a) e b) estão representadas as isolinhas de  $u'$  e nas figuras c) e d) as isolinhas de  $(w')$ . (—) solução analítica obtida com o modelo linear de Queney (1948), (---) solução numérica obtida com FLEX. Os campos de  $u'$  e  $w'$  foram amplificados 1000 vezes.

Neste caso acentuadamente linear, o desvio de  $p'$  do estado de equilíbrio hidrostático, deve compensar, mediante o termo II, o excesso de divergência do campo de  $(u', w')$ . Em concordância com este raciocínio, nas simulações verificou-se que se  $p'/c_s^2$  era desprezado, o campo de velocidades divergia consideravelmente, o que se reflectia num aumento significativo de  $M(z)$  com  $z$ . Quando a não linearidade aumenta, este problema desaparece, pois a predominância de  $\theta'$  sobre  $p'$  é o fenómeno dominante na geração de  $\rho'$ .

Como evidenciam as figuras 7.2, 7.4 e 7.5, os resultados numéricos e analíticos são bastante próximos. Neste, e em todos os casos analisados a seguir, os resultados não foram tratados com nenhum tipo de filtro ou método de suavização de curvas. Na mesma figura, chama-se a atenção para a boa coincidência dos campos de velocidade, particularmente  $w'$ . Na figura 7.3 são mostrados os campos de  $u'$  e  $w'$  obtidos por Durran e Klemp (1983) para um escoamento praticamente idêntico ao presente, mas usando um modelo compressível, com um esquema de 4º grau para integrar os termos advectivos.

Apesar de FLEX usar uma aproximação anelástica, a semelhança dos campos obtidos com ambos

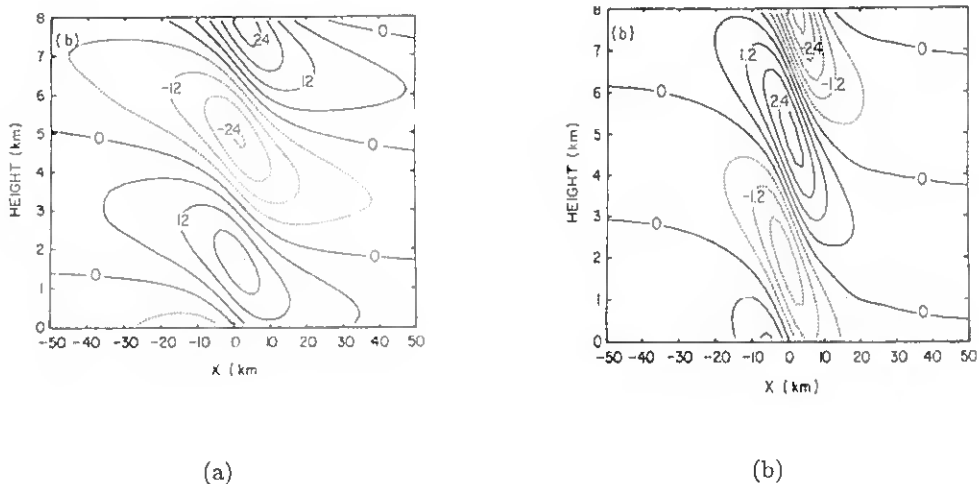


Figura 7.3: Como na figura 7.2 mas os de campos  $u'$  e  $w'$  correspondem à solução de Durran e Klemp (1983).

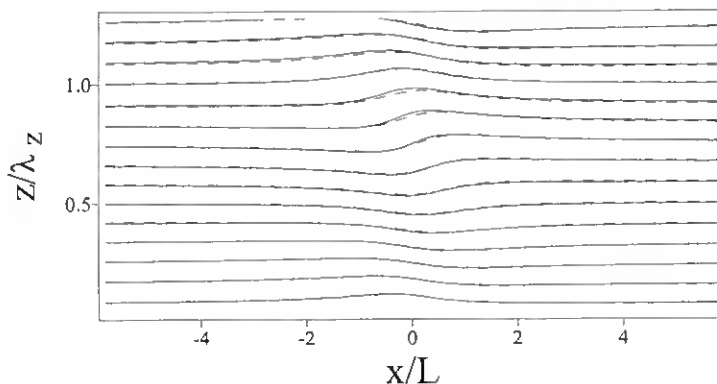


Figura 7.4: Linhas de corrente. A linha contínua corresponde à solução analítica linear e a linha descontínua, à solução obtida com FLEX. Os deslocamentos verticais das linhas de corrente  $\delta(x, z)$  foram amplificados 250 vezes.

modelos é notável. Isto significa que a aproximação anelástica de Lipps e Helmer (1982), apesar de se basear em equações aproximadas da continuidade e da quantidade de movimento, é bastante precisa.

Neste caso acentuadamente linear e invíscido, a condição  $M(z) = \text{const.}$  é um bom teste, não só à precisão, por ser uma grandeza de segunda ordem, mas também à eficácia das condições de fronteira. Na figura 7.4 constata-se que estes requisitos são cumpridos. Na figura 7.5a é evidente que o teorema de Eliassen e Palm (1961) se cumpre, pois  $M(z)$  praticamente não tem divergência vertical. A diferença entre os momentos lineares, numérico e linear é de, aproximadamente, 6%. Um aumento da precisão da malha de cálculo não produziu melhorias notáveis. Portanto, este erro pode ser tomado como o limite de precisão do presente modelo para no cálculo de  $M(z)$ . Uma precisão similar foi obtida por Durran e Klemp (1983).

Na figura 7.5b apresenta-se a evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. A inicialização do modelo é feita de modo abrupto. Apesar disso, as oscilações associadas ao processo de estabilização são pequenas. Para obter um resultado completamente estacionário, os cálculos foram feitos até  $U_T t/L = 100$ , embora a quase-estacionariedade seja atingida a partir de  $U_T t/L = 60$ .

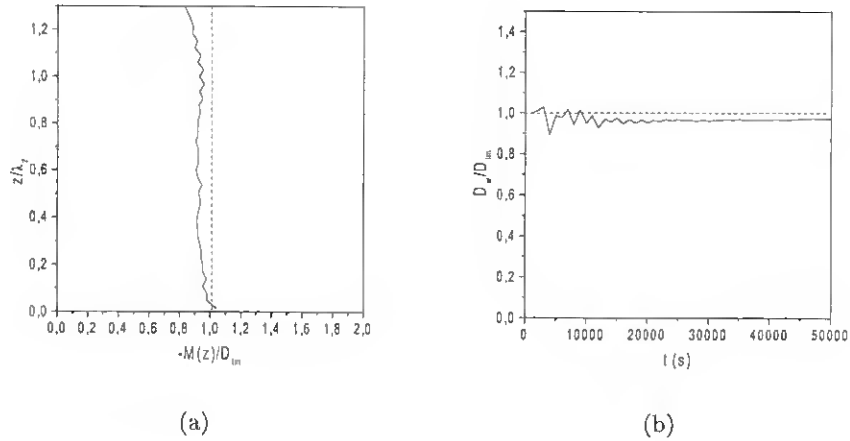


Figura 7.5: (a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para  $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear.

### 7.3 Escoamento hidrostático não linear uniforme.

É objectivo desta secção estudar o desempenho do modelo num caso hidrostático não linear. Para esse efeito, a solução numérica será comparada com a solução analítica do modelo não linear de Long (1953).

As características do escoamento são:  $H = 500$  m,  $U_r = const. = 10$  m/s,  $N = const. = 0.010472$  s<sup>-1</sup>. Refira-se que o escoamento não é isotérmico. De modo análogo ao caso estudado na secção 7.2, para caracterizar o escoamento são calculadas as seguintes grandezas:

1.  $H/L = 500/10000 = 0.05 \ll 1$
2.  $h/L = 209/10000 = 0.021 \ll 1$
3.  $h_i/L_{m0} = 200/130 = 1.54$
4.  $221h/h_m = 209/221 = 0.95$
5.  $\hat{H} = NH/U_r = 0.010472 \times 500/10 \approx 0.5$
6.  $\hat{L} = NL/U_r = 0.010472 \times 10000/10 \approx 10$

Para estes cálculos, os valores de  $f$  e  $Ri_c^f$  são os mesmos do caso anterior. A velocidade de fricção  $u_*$ , obtida de acordo com o método exposto na secção (8.1) é  $u_* = 0.244$  m/s. Este é um caso em que se mostra que, quando há estratificação, é parâmetro  $\hat{H}$  que deve ser usado para determinar a linearidade, pois apesar de  $H/L \ll 1$ ,  $\hat{H}$  é de ordem 1 e, portanto, o escoamento é não linear. De (2) pode-se deduzir que o escoamento é de camada limite externa, de (3) que os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte estão confinados à subcamada interna, de (4) que praticamente toda a subcamada externa está por cima da camada limite, e de (5) que o escoamento é hidrostático. Refira-se que neste caso não se usa nenhum tipo de parametrização para a turbulência.

A malha de cálculo, a espessura das esponjas e as condições de fronteira numéricas são idênticas às do caso anterior, pois o escoamento é hidrostático e  $\lambda_z$  tem o mesmo valor (6000 m). A única diferença

consiste em que o domínio horizontal passou de  $16L$  para  $18L$ . Portanto, a resolução horizontal da malha diminuiu ligeiramente passando de 1333.3(3) m para 1500 m.

Como o escoamento é não linear, a expressão de  $D_{wh}$  obtida para o caso hidrostático linear (7.54) não é válida, sendo os valores numéricos calculados superiores à previsão linear. Miles e Hupert (1969) introduziram uma correcção de  $D_{wh}$  para contemplar o efeito da não linearidade

$$D_{wh}^c = \left[ 1 + 0.4375 \left( \frac{NH}{U_r} \right)^2 \right] D_{wh} \quad (7.64)$$

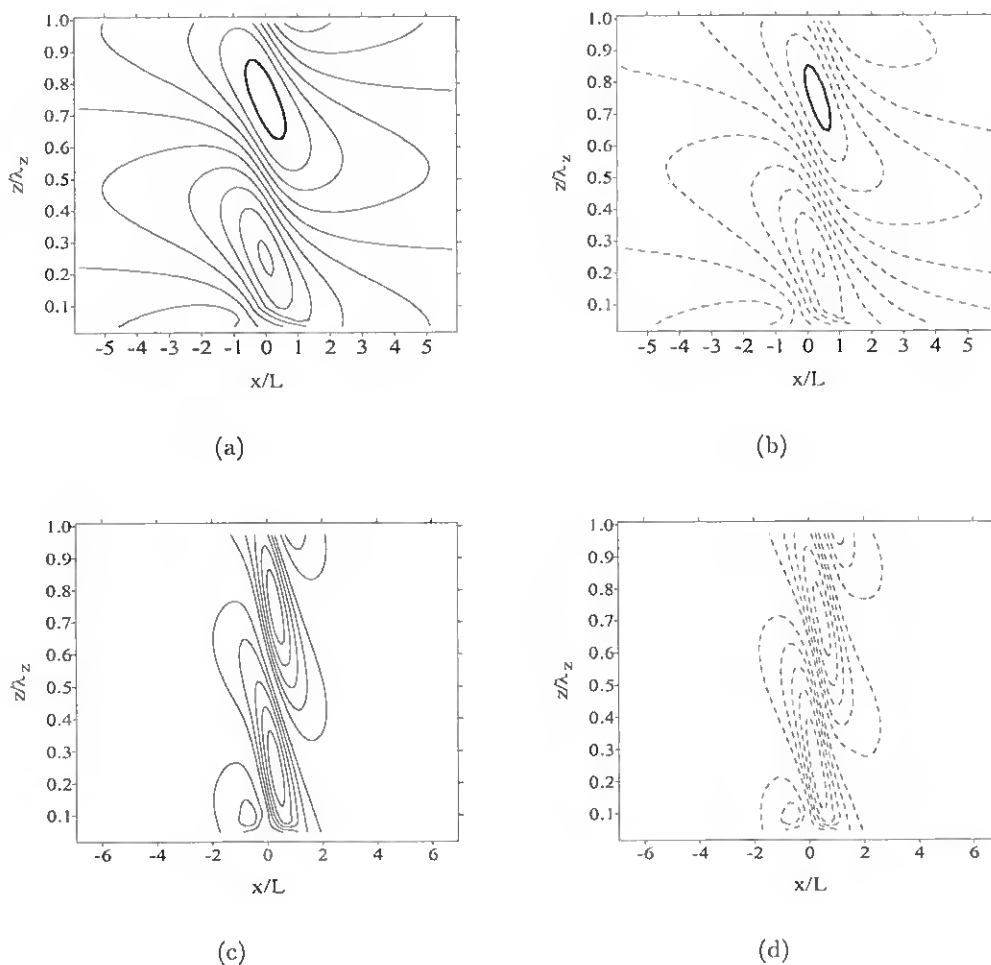


Figura 7.6: Campos das isolinhas das velocidade  $u'$  e  $w'$ . Nas figuras a) e b) estão representadas as isolinhas de  $u'$  e nas figuras c) e d) as isolinhas de  $w'$ . A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)), e a linha (---) à solução obtida com FLEX. A isolinha mais grossa corresponde à primeira maior perturbação de  $u'$ .

As soluções não lineares de Long (1953) são obtidas para escoamentos 2D, invíscidos, estacionários e de Boussinesq. A equação de Long para o caso hidrostático é:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + \left( \frac{N}{U_r} \right)^2 \delta = 0 \quad (7.65)$$

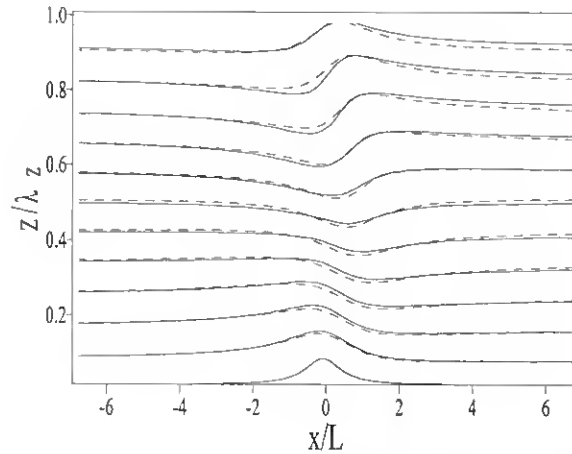


Figura 7.7: Linhas de corrente. A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)), e a linha (---) à solução do modelo.

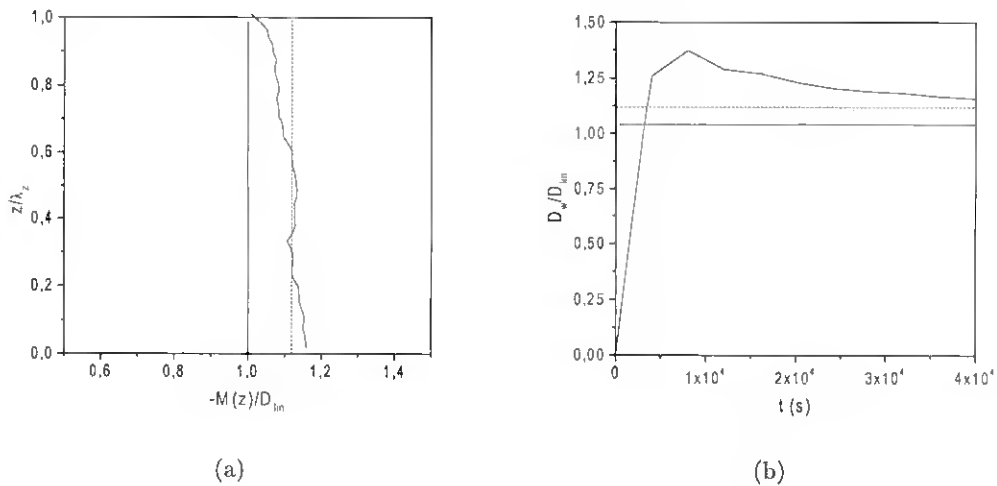


Figura 7.8: (a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para  $U_r t/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão de Miles e Huppert (1969) (7.64) e esta representado com (· · ·) em ambos gráficos.

A propriedade mais importante de (7.65) é que, apesar de ser obtida sem recorrer à nenhuma assunção de linearidade, ela é linear. Note-se que esta equação tem o mesmo aspecto que 7.57 se se considerar que o parâmetro de Scorer é igual a  $\ell^2(z) = (N/U_r)^2$ . Portanto, a solução de (7.65) pode ser da forma (7.62). Note-se que, de acordo com a equação (2.86), para que  $\ell^2(z) = (N/U_r)^2$  tem que ser usada a hipótese de Boussinesq mais restritiva (2.30), i.e.,  $\rho_r = const$ . Apesar da densidade ser constante, como  $N = const$ , o estado de referência pode ser determinado pelas expressões (3.5), (3.6) e (3.7). Se  $\rho_r = const$  então, de acordo com (2.79),  $N = g/c_s \approx 0.0105$  o que indica que, neste caso,  $N$  não pode ser escolhido arbitrariamente.

Como o escoamento é não linear, a solução (7.62) não pode ser aplicada com a condição de fronteira linear (7.59). Long contornou esta dificuldade usando primeiro a solução linear (7.62) e depois resolvendo (7.59) para  $h(x)$ . O perfil resultante da operação de substituir (7.62) em (7.59) é similar a

$h(x)$  mas tem uma altura máxima de  $H_\delta = 432$  m, e o cume está deslocado ligeiramente para jusante da orografia  $h(x)$  (ver figura 7.7).

Refira-se que a solução linear (7.62) foi obtida usando a condição de radiação na fronteira superior do escoamento. Em rigor, esta só é válida no caso linear, onde o teorema de Eliassen e Palm (1961) é aplicável (ver secção 7.1). No caso não linear, não é garantido que toda a energia seja produzida pelo trabalho feito pelas forças de pressão na superfície e que toda ela seja transferida desde a superfície até uma dada altitude. Apesar disso, a solução (7.62) é usada para este caso não linear, significando que a condição de radiação também o foi. Contudo, no caso especial da equação de Long (1953), o efeito resultante de todas as interações não lineares é nulo (Smith, 1977).

Nas figuras 7.6 apresentam-se os campos das flutuações de velocidade. As ondas internas estão ligeiramente mais circunscritas na solução numérica e o campo de  $u'$  evidencia um ligeiro alongamento na vertical. Contudo, apesar destas ligeiras diferenças, pode-se dizer que a similaridade entre os campos previsto e teórico é elevada. O comportamento das linhas de corrente apresentadas na figura 7.7 corrobora este facto. Uma das propriedades do modelo não linear de Long (1953) consiste em que as maiores perturbações negativas de  $u'$  sobre a orografia ocorrem a altitudes  $z = (n + 3/4)\lambda$ . Nas figuras 7.6a,b a isolinha correspondente à primeira maior perturbação negativa de  $u'$  foi realçada. Pode-se constatar que ambas isolinhas estão a uma altura de  $z = 3/4\lambda$ .

Na figura 7.8a pode-se constatar que  $M(z)$  tem pouca divergência vertical e que o seu valor, quase constante, está bastante próximo do do arrasto linear corrigido pela expressão de Miles e Huppert (1969) (7.64). Como o perfil de  $M(z)$  é quase constante confirma-se o teorema de Eliassen and Palm (1961) e a hipótese de Smith (1977) que permitiu à aplicação da condição de radiação no caso não linear. Na zona superior do domínio nota-se alguma divergência de  $M(z)$ , devida ao efeito da esponja de Rayleigh.

Na figura 7.8b apresenta-se a evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear corrigido com a expressão de Miles e Huppert (1969). Quando a solução numérica atinge a estacionariedade, no tempo adimensional  $U_\tau t/L = 40$  e para um passo de tempo de  $\Delta t = 20$ , o arrasto previsto está muito próximo do valor teórico.

## 7.4 Escoamento uniforme, não hidrostático e não linear

O objectivo desta secção é estudar o desempenho do modelo num caso não hidrostático não linear. Tal como no caso da secção anterior a solução numérica será comparada com a solução analítica do modelo não linear de Long (1953).

As características do escoamento são:  $H = 500$  m,  $L = 2000$  m  $U_\tau = const = 10$  m/s. Como se trata de um escoamento de Long, tal como no caso anterior  $\rho_\tau = const$ . o que, de acordo com (2.79), dá um valor de  $N = const = 0.010472$  1/s<sup>2</sup>. Assim,  $\lambda_z = 6000$  m. De modo análogo ao caso estudado na secção 7.2, para caracterizar o escoamento são calculadas as seguintes grandezas:

1.  $H/L = 500/2000 = 0.25 \ll 1$
2.  $h/L = 209/10000 = 0.021 \ll 1$
3.  $h_i/L_{mo} = 65/130 = 0.5$
4.  $h/h_m = 209/200 = 1.05$
5.  $\hat{H} = NH/U_\tau = 0.010472 \times 500/10 \approx 0.5$
6.  $\hat{L} = NL/U_\tau = 0.010472 \times 10000/10 \approx 2$

Para estes cálculos, os valores de  $f$  e  $Ri_c^f$  são os mesmos do primeiro caso teste. A velocidade de fricção  $u_*$ , obtida de acordo com o método exposto na secção (8.1) é  $u_* = 0.244$  m/s. Tanto (1) como (5) mostram que o escoamento é não linear. De (2) pode-se deduzir que o escoamento é de camada limite externa, de (3) que os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte não estão confinados à subcamada interna, de (4) que toda a subcamada externa está por cima da camada limite, e de (5) que o escoamento é não hidrostático. Refira-se que, neste caso tal como nos 2 anteriores, não se usa nenhum tipo de parametrização para a turbulência.

A equação de Long (1953) para escoamentos não hidrostáticos tem o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + \left(\frac{N}{U_r}\right)^2 \delta = 0 \quad (7.66)$$

A solução desta equação é obtida usando as mesmas condições de fronteira enunciadas na secção anterior, para o caso hidrostático não linear, e tem o seguinte aspecto:

$$\delta(x, z) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_r(z)}\right)^{1/2} \text{Re} \left[ \underbrace{\int_0^\ell \hat{h}(k) e^{i(\ell^2 - k^2)^{1/2} z} e^{ikx} dk}_I + \underbrace{\int_\ell^\infty \hat{h}(k) e^{-(k^2 - \ell^2)^{1/2} z} e^{ikx} dk}_{II} \right] \quad (7.67)$$

Note-se que o termo I corresponde à solução (7.58) do caso hidrostático ( $N/U_r \gg k$ ), trocando o limite superior de integração  $\ell$  por  $\infty$ . Como, neste caso,  $k$  é muito pequeno, a sua contribuição no intervalo  $[\ell, \infty]$  é desprezável, sendo uma boa aproximação trocar  $\ell$  por  $\infty$ . Como se viu na secção 7.2, isto facilita o cálculo do integral impróprio (7.60). O integral II representa a componente não hidrostática do escoamento. No caso extremo em que ( $N/U_r \ll k$ ), o integral I é desprezável e a integração de II dá a solução correspondente a um escoamento irrotacional (potencial) (Smith, 1979).

O caso estudado nesta secção é não hidrostático e não se situa em nenhum dos dois extremos acima referidos. Assim, a contribuição dos integrais I e II deve ser tomada em conta.

Substituindo a equação da transformada de Fourier (7.48) da orografia (7.47) na equação anterior, e tomando em conta que é usada a aproximação de Boussinesq (2.30), obtém-se:

$$\delta(x, z) = HL \text{Re} \left[ \int_0^\ell e^{-kL} e^{(ikx + (\ell^2 - k^2)^{1/2} z)} dk + \int_\ell^\infty e^{-kL} e^{(ikx - (k^2 - \ell^2)^{1/2} z)} dk \right] \quad (7.68)$$

O integral impróprio da expressão anterior pode ser eliminado usando a substituição:

$$\int_\ell^\infty f(k) dk = \int_{1/\ell}^0 f\left(\frac{1}{k}\right) k^{-2} dk \quad (7.69)$$

O integral (7.68) é resolvido numericamente usando o método da quadratura de Gauss-Legendre (Press et al., 1986), evitando a necessidade de uma resolução muito elevada em todo o domínio de  $k$ .

As condições de fronteira impostas, e a estratégia usada para definir o domínio de cálculo, são idênticas às do escoamento estudado na secção 7.2. A altura vertical do domínio é de  $3\lambda_z$  e a camada de absorção no topo ocupa  $1.5\lambda_z$ .

Como o escoamento é não hidrostático, as expressões (7.7) e (7.22) mostram que o vector velocidade de grupo está inclinado para jusante da montanha (ver figura 7.1). Por isso, é conveniente definir um domínio mais extenso a jusante. Assim, o domínio tem  $28L$  de comprimento horizontal e a montanha está centrada em  $X_0 = 10L$ . A malha tem (155x100) nós o que dá uma resolução de (361,180) m, i.e., uma média de 5.5 pontos para resolver o comprimento de onda horizontal dominante  $\sim L$ , e 34

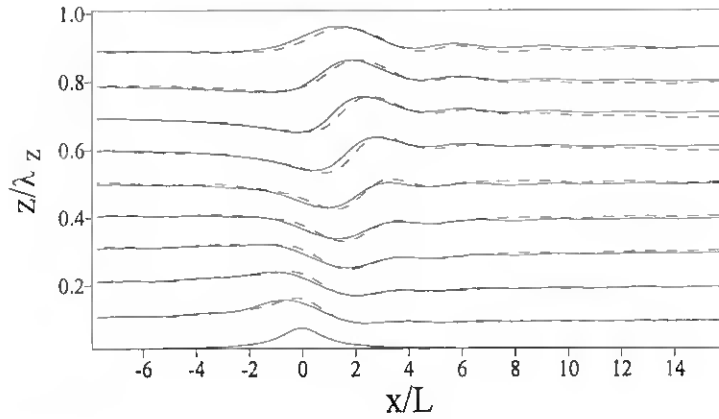


Figura 7.9: Linhas de corrente. A linha (—) corresponde à solução analítica (modelo não linear de Long (1953)) e a linha (---) à solução obtida com FLEX.

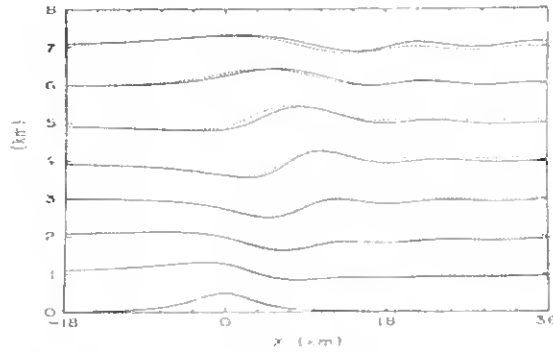


Figura 7.10: Como na figura 7.9 mas as linhas de corrente correspondem à solução de Durran e Klemp (1983).

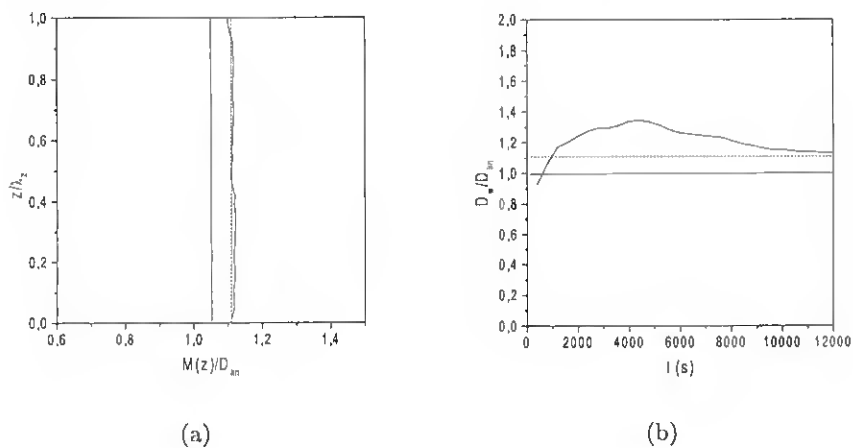


Figura 7.11: (a) Fluxo normalizado com o arrasto linear (expressão 7.45) para  $U_{rt}/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado com o arrasto linear calculado com a expressão (7.49). O arrasto linear é corrigido com a expressão de Miles e Huppert (1969) (7.64) e está representado por (····) em ambos os gráficos.

pontos por cada  $\lambda_z$ . Note-se que o 1º nível de cálculo está a cerca de 90 m da superfície, i.e., fora da subcamada interna ( $h_i = 65$  m), mas dentro da região de influência de  $L_{mo} = 130$  m. Na superfície, é usada a condição de livre escorregamento, i.e., não há tensão de corte associada ao efeito da superfície. Como não se usa nenhuma parametrização dos possíveis efeitos de subescala, o facto de a altura do 1º nível do domínio, ser inferior a  $L_{mo} = 130$  m, pouco influencia os resultados.

As linhas de corrente obtidas com os modelos numérico e analítico apresentam-se na figura 7.9. A solução numérica atinge a estacionariedade no tempo adimensional  $U_r t/L = 60$ , para um passo de tempo de integração de  $\Delta t = 10$  s. Nos níveis superiores, a divergência entre as duas soluções é maior mas, apesar disso, pode-se dizer que globalmente os resultados são bastante coincidentes. Provavelmente, uma maior resolução da malha de cálculo daria melhores resultados, mas constata-se que a solução numérica capta o essencial da física do escoamento. Vê-se com clareza que a propagação da energia está confinada à zona a jusante da montanha, onde se verifica também que há uma componente evanescente do trem de ondas. Na figura 7.10 mostram-se as linhas de corrente obtidas com o modelo de DK83. Como se pode constatar, a semelhança entre os resultados obtidos com os modelos FLEX e DK83 é notável.

Na figura 7.11 apresentam-se o perfil do fluxo de momento e a evolução temporal do arrasto, normalizados pelo arrasto linear. A solução numérica atinge a estacionariedade no tempo adimensional  $U_r t/L = 40$ , com  $\Delta t = 20$  s). A coincidência entre os resultados previsto e teórico é notável, tanto para o fluxo de quantidade de movimento  $M(z)$  como para arrasto ondulatório  $D_w$ , quando  $U_r t/L = 40$ .

## 7.5 Rebentação de ondas num escoamento homogéneo moderadamente hidrostático

Clark e Peltier (1977, CP77) e Peltier e Clark (1979, CP79) fizeram um estudo de referência, sobre a evolução e a estabilidade das ondas gravíticas em escoamentos não lineares. Estes autores chegaram à conclusão que, para valores de  $\hat{H}$  superiores a um valor crítico, os escoamentos se tornam dinamicamente instáveis. Isto acontece a partir do momento em que surgem linhas de corrente com inclinação superior à vertical, i.e., quando as ondas começam a rebentar. CP77 e PC79 associam a evolução do arrasto ondulatório para valores elevados à existência de níveis críticos induzidos pela rebentação das ondas.

Na presente secção é feita a simulação de um escoamento homogéneo ( $U_r = const.$  e  $N = const.$ ) moderadamente hidrostático, para verificar a capacidade de FLEX de descrever o processo de rebentação de ondas gravíticas.

Tal como no caso da secção anterior, a solução numérica será comparada com a solução analítica do modelo não linear de Long (1953). A teoria de Long permite prever as altitudes onde se iniciam as instabilidades que antecedem a rebentação das ondas. Se o escoamento é localmente superadiabático, verifica-se que  $\partial\delta(x, z)/\partial z > 1$ , o que corresponde à condição de instabilidade que dá origem ao referido nível crítico. Derivando (7.62) e igualando a 1 para  $x = 0$ , verifica-se que a condição anterior se cumpre se  $\ell_{in} H_d = (2n + 3/2)\pi$ , i.e., se  $z = (3/4 + n)\lambda_z$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Se  $n = 0$ , a maior perturbação negativa de  $u'$  fica posicionada em  $z = 3/4\lambda_z$ .

Tal como nos outros casos, a orografia é uma montanha de Agnesi com  $H = 500$  m,  $L = 3000$ ,  $U_r = const = 4$  m/s. Como o modelo teórico escolhido é o de Long então, tal como no caso anterior, toma-se  $\rho_r = const.$ , o que de acordo com (2.79) dá um valor de  $N = const = 0.010472$  s<sup>-1</sup>. Com estes parâmetros, obtém-se  $\lambda_z = 2400$  m.

As condições de fronteira impostas, e a estratégia usada para definir o domínio de cálculo, são idênticas às do escoamento estudado na secção 7.4. O domínio tem as seguintes dimensões [ $16L, 3\lambda_z$ ].

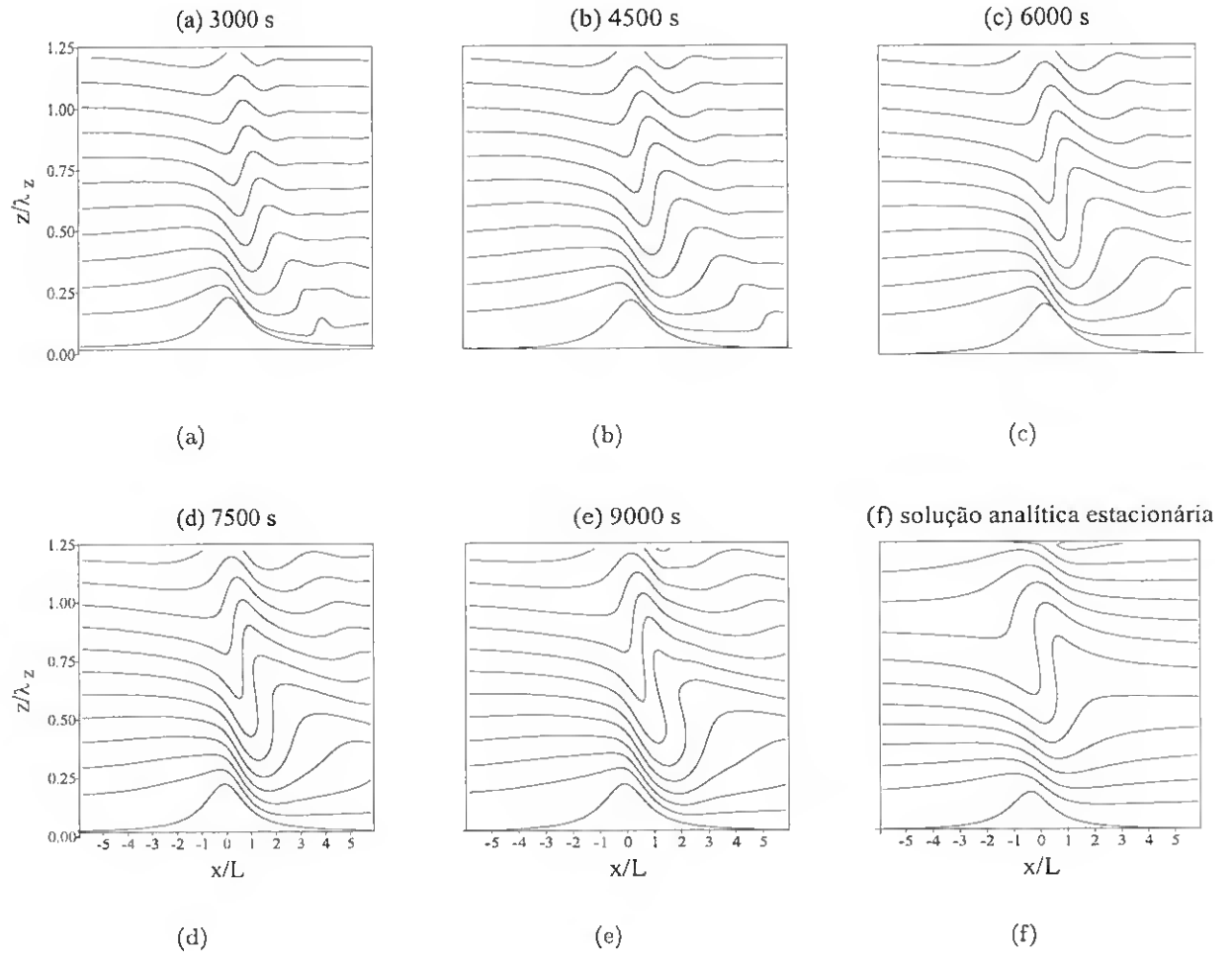


Figura 7.12: Evolução temporal das linhas de corrente obtidas por simulação numérica. O escoamento é homogêneo. A solução f) é estacionária e corresponde ao modelo analítico de Long (1953).

A montanha está centrada em  $x_0 = 8L$ . A malha do domínio computacional é uniforme e tem  $[120,100]$  nós, o que equivale a uma resolução de  $[400,72]$  m. As camadas de absorção têm as seguintes espessuras: camada superior  $1.5\lambda_z$ , camadas laterais  $2L$ .

Tal como na secção 7.2, para caracterizar o escoamento foram calculadas as seguintes grandezas:

1.  $H/L = 500/3000 = 0.16(6) < 1$
2.  $h/L = 88/3000 = 0.03 \ll 1$
3.  $h_i/L_{mo} = 70/55 = 1.3$
4.  $h/h_m = 88/90 \approx 1$
5.  $\hat{H} = NH/U_\tau = 0.010472 \times 500/4 = 1.2$
6.  $\hat{L} = NL/U_\tau = 0.010472 \times 3000/4 = 7.5$

Para estes cálculos, os valores de  $f$  e  $Ri_c^f$  são os mesmos do primeiro caso teste. A velocidade de fricção  $u_*$ , obtida de acordo com o método exposto na secção (8.1) é  $u_* = 0.103$  m/s. Tanto (1) como (5) mostram que o escoamento é não linear. Note-se que  $\hat{H} = 1.2$  excede claramente o valor crítico para a rebentação das ondas, calculado por Miles e Hupert (1969), usando o modelo de Long no caso de uma montanha de Agnesi,  $\hat{H} = 0.85$ . De (2) pode-se deduzir que o escoamento é de camada limite externa, de (3) que os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte estão confinados à subcamada interna, de (4) que toda a subcamada externa está acima da camada limite e de (5) que o escoamento é moderadamente hidrostático. Neste caso, usa-se o esquema de Lilly (1962) para a parametrização da turbulência.

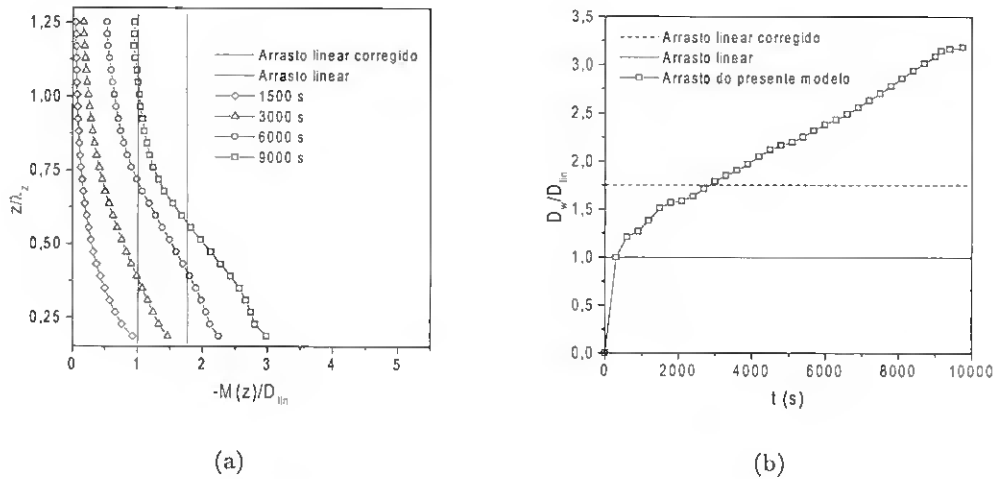


Figura 7.13: (a) Fluxo de quantidade de movimento, normalizado pelo arrasto linear (expressão (7.49)), para diferentes tempos: 1500s ( $U_r t/L = 2$ ), 3000s ( $U_r t/L = 4$ ), 6000s ( $U_r t/L = 8$ ), 9000s ( $U_r t/L = 12$ ), b) Evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido pela expressão (7.64) de Miles e Hupert (1969).

Nas figuras 7.12a-c mostra-se a evolução temporal das linhas de corrente obtidas por simulação numérica, usando o presente código. Aproximadamente aos 6000 s as linhas de corrente atingem a máxima verticalidade, dando-se início ao processo de rebentação das ondas, sendo o efeito da estratificação imposto pelo estado de referência localmente anulado, pela inversão das isentrópicas. Tal como prevê o modelo estacionário de Long (1953), cuja solução analítica se apresenta na figura 7.12f, as linhas de corrente atingem a verticalidade, acima do máximo topográfico, em  $z = 3/4\lambda_z$ . Note-se que, neste caso, a condição de fronteira não linear de Long, já anteriormente empregue na secção 7.4, produz uma topografia efectiva não linear com  $H \approx 400m$ , ligeiramente deslocada para a esquerda, e com um perfil muito similar ao da montanha original (ver figura 7.12f).

Combinando as expressões (7.19) e (7.9), a velocidade de grupo vertical, no caso hidrostático, pode ser escrita na forma:

$$c_{gz} = -\frac{\omega}{m} \quad (7.70)$$

em que, de acordo com (2.88) e (7.2)  $m = \ell^{1/2} = (U_r/N)$  e  $|\omega| = U_r k$ . O tempo que o pacote com o número de onda dominante  $k_d = 2\pi/L$  leva para percorrer a distância entre a superfície e o 1º nível

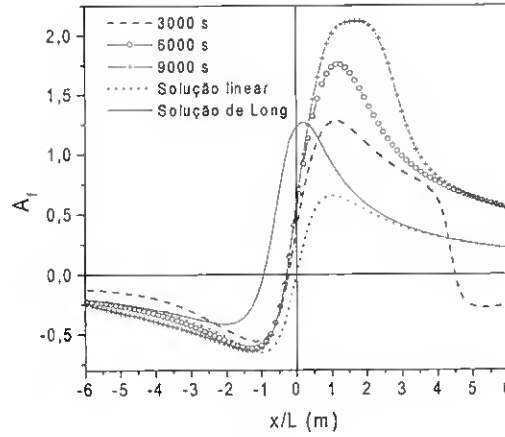


Figura 7.14: Evolução temporal do factor de amplificação do vento tangencial.

crítico  $z = 3/4\lambda_z$  pode ser estimado usando a expressão:

$$t_{cr}^{teo} = \frac{3}{4} \frac{\lambda_z}{|c_{gz}|} = \frac{3}{4} \frac{\lambda_z m}{|\omega|} = \frac{3L}{4U_r} \quad (7.71)$$

Usando os parâmetros deste caso, obtém-se  $t_{cr}^{teo} = 563$  s, que corresponde ao tempo necessário para as linhas de corrente atingirem a máxima verticalidade. Neste caso, tal como foi constatado por PC79, o valor numérico deste tempo  $t_{cr}^{num}$ , é muito superior a  $t_{cr}^{teo}$ , o que sugere que a não linearidade provoca uma dilatação da escala de tempo do escoamento.

Na figura 7.14 mostra-se a evolução temporal do factor de amplificação da perturbação do vento tangencial:

$$A_f = \frac{U_t - U_r}{U_r} \quad (7.72)$$

O factor de amplificação do modelo de Long foi obtido por extrapolação dos valores, calculados linearmente, de  $u'$  e  $w'$ , até à linha de corrente correspondente à topografia efectiva  $H \approx 400m$ . O factor de amplificação da solução linear é obtido por intermédio da expressão:

$$A_f = u'/U_r \quad (7.73)$$

Note-se que a utilização da condição de fronteira não linear no modelo de Long dá como resultado um aumento notável de  $A_f$  a jusante, e um ligeiro deslocamento do máximo de  $A_f$  para montante da orografia. O comportamento dos perfis de  $A_f$ , ilustrado na figura 7.14, é totalmente coerente com a evolução temporal do arrasto mostrado em 7.13b. Para  $t=9000$  s, o vento tangencial chega a ser mais de 2 vezes superior a  $U_r$ . Constata-se assim a capacidade do presente modelo numérico de prever os ventos severos a jusante da orografia.

O aumento significativo do arrasto (até  $\sim 300\%$  do valor linear) verificado na figura 7.13b é explicado por Davis e Peltier (1976 e 1977) e CP77 da seguinte forma. No nível crítico local, o número de Richardson de gradiente é tal que  $Ri^g < 0.25$ , produzindo-se uma instabilidade hidrodinâmica (de Kelvin-Helmoltz, ou convectiva se for  $Ri^g < 0$ ). Quando  $\partial\delta(x, z)/\partial z$  excede um valor crítico as ondas gravíticas não lineares sofrem uma amplificação, em resultado de um mecanismo de reflexão múltipla, ou de ressonância, entre a superfície e o nível crítico. Este processo é o que produz um aumento, ao longo do tempo, do arrasto ondulatório e da intensidade do vento no declive a jusante da montanha.

Na figura 7.13a mostram-se os perfis verticais do fluxo de quantidade de movimento  $M(z)$  em diferentes instantes de tempo. Nessa figura, constata-se que a divergência dos perfis de  $M(z)$  se acentua com o decorrer do tempo, acompanhando a evolução temporal do arrasto, mostrada na figura 7.13b. Constata-se que, acima do nível crítico, em  $z \approx 3/4\lambda_z$ , o fluxo tende a recuperar a constância.

## 7.6 Reflexão parcial

### 7.6.1 Enquadramento

De acordo com a análise feita na secção 7.1, a técnica de Lighthill (1965) permite descrever a trajectória de propagação da energia se não existirem variações bruscas de  $\ell(z)$ . De acordo com a expressão (7.43), se o escoamento é hidrostático, e se há uma variação "suave" de  $\ell(z)$ , a velocidade de grupo será sempre quase vertical e, portanto, não existirá reflexão. No entanto, se houver uma variação brusca em  $z$  das propriedades da atmosfera ( $U_r$  ou  $N$ ), podem ocorrer fenómenos de reflexão. Por exemplo, uma descontinuidade brusca do perfil de estabilidade da forma

$$N = \begin{cases} N_{in} & 0 < z < H_d \\ N_{sup} & z > H_d \end{cases} \quad (7.74)$$

considerando  $U_r = const.$ , pode dar lugar a uma reflexão parcial das ondas na descontinuidade  $H_d$ , as quais, após nova reflexão na superfície, podem reforçar ou debilitar as ondas originais. Este tipo de reflexão é chamada parcial, porque em  $H_d$  uma parte da energia se refracta e outra se reflecte.

Assumindo que: a) para  $z > H_d$  as ondas que se refractam se podem propagar livremente, b) que estas têm a forma (7.11), c) que as flutuações de pressão e velocidade são contínuas em  $H_d$ , d) que se  $z < H_d$  a solução de 7.56 contém duas componentes, uma que se propaga para cima e outra para baixo, e e) que o número de onda  $k$  é o mesmo para todo o domínio vertical, Gill (1982) obtém a seguinte expressão para o fluxo vertical total de energia

$$F'_z = \frac{\rho_r U_r w_0^2 m_{sup} / 2k}{1 + \underbrace{[(m_{sup}^2 / m_{inf}^2 - 1) \sin^2 m_{in} H_d]}_{\Omega}} \quad (7.75)$$

Sobre esta expressão (7.75) podem ser feitas as seguintes considerações:

- Tal como a expressão (7.32), para o caso  $N = const.$ , (7.75) não depende de  $z$ .
- O fluxo depende, não só de  $m_{in}$ , mas também de  $m_{sup}$ , i.e., das características da camada que está mais afastada da superfície. Refira-se que (7.75) é obtida para o caso estacionário, em que o processo de interacção entre as ondas já está bem estabelecido.
- O numerador corresponde à expressão (7.32), obtida no caso em que o perfil vertical de estabilidade é homogéneo.
- Se  $\sin^2 m_{in} H_d = 0$ , i.e.,  $H_d = n\pi U_r / N_{in}$  ou  $H_d = \frac{n}{2} \lambda_z$  ( $n = 0, 1, 2..$ ), o denominador toma o valor  $\Omega = 1$ . Isto implica que a relação entre o fluxo vertical resultante  $F'_z$  e o da camada seja dada por:

$$\mathfrak{R} = \frac{F'_z}{(F'_z)_{in}} = \frac{N_{sup}}{N_{in}} = \frac{1}{\sigma_d} \quad (7.76)$$

em que  $\sigma_d = N_{in} / N_{sup}$ . Considera-se que o fluxo de referência é o fluxo produzido na camada inferior pela passagem do escoamento com velocidade e estabilidade  $U_r$  e  $N$ , respectivamente.

Portanto, o comprimento de onda hidrostático  $\lambda_z$  é calculado com  $N_{in}$ . Por exemplo, se  $\sigma_d = 2$ ,  $\mathfrak{R} = 1/2$ . Ocorre, portanto, uma reflexão parcial destrutiva. Nestes casos, decidiu-se atribuir à reflexão parcial o adjetivo "destrutiva", porque metade de  $(F'_z)_{in}$  não passou para a camada superior. Se a camada mais estratificada for a superior, i.e.,  $\sigma_d = 1/2$ , então  $\mathfrak{R} = 2$  e a reflexão parcial é construtiva.

e) Se  $\sin^2 m_{in} H_d = 1$ , i.e.,  $H_d = (n + 1/2)\pi U_r / N_{in}$  ou  $H_d = (n/2 + 1/4)\lambda_z$  então

$$F'_z = \left( \frac{m_{in}}{m_{sup}} \right)^2 \frac{\rho_r U_r w_0^2 m_{sup}}{2k} = \left( \frac{N_{in}}{N_{sup}} \right)^2 \frac{\rho_r U_r w_0^2 m_{sup}}{2k} \quad (7.77)$$

e

$$\mathfrak{R} = \frac{F'_z}{(F'_z)_{in}} = \sigma_d \quad (7.78)$$

Na situação exemplificada no ponto anterior, com  $\sigma_d = 2$ , obtém-se agora o efeito contrário, i.e.,  $\mathfrak{R} = 2$ , sendo o fluxo que sai da descontinuidade,  $(F'_z)_{sup}$ , duas vezes maior do  $(F'_z)_{in}$ . Portanto, usando um termo análogo ao do ponto anterior, verifica-se uma reflexão parcial construtiva. Se, pelo contrário,  $\sigma_d = 1/2$ , o efeito da reflexão inverte-se e  $\mathfrak{R} = 0.5$ . A situação extrema em que  $N_{sup} = 0$  corresponde ao caso com ressonância  $(F'_z)_{sup} = \infty$ , em que a onda resultante aumenta de amplitude ilimitadamente, não existindo portanto solução estacionária. Note-se que o aumento do fluxo vertical de energia, devido à reflexão parcial, não deve ser associado à ressonância, mas antes como um mecanismo de aumento da impedância (Klemp e Lilly, 1975) (KL75 daqui em diante). A impedância é a condição de continuidade de  $p'$  e  $w'$  em  $H_d$  já antes referida, que é utilizada para obter (7.75), e é dada por:

$$Z = \frac{p'}{\rho_0 w'} \quad (7.79)$$

Como as camadas inferior e superior são homogêneas, o factor de amplificação ou redução ( $\mathfrak{R}$ ) do fluxo vertical total é constante. Sendo assim, ele não faz parte do integral (7.49) usado para o calculo de o arrasto ondulatorio  $D_w$ . Portanto, só é necessário multiplicar o valor de  $D_{lin}$ , calculado com os parâmetros da camada inferior, por  $\mathfrak{R}$ .

## 7.6.2 Estudo numérico da reflexão parcial

### Caso em que a camada inferior é a mais estratificada

O objectivo desta secção é estudar vários casos de escoamento hidrostático de subcamada externa, com perfil de referência de velocidade uniforme e igual a  $U_r = 20$  m/s, e com um perfil de estabilidade de duas camadas dado pela expressão:

$$N = \begin{cases} N_{in} & 0 < z < H_d \\ N_{sup} & z > H_d \end{cases} \quad (7.80)$$

em que  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} > 1$ .

As diferentes experiências numéricas levadas a cabo nesta secção estão expostas na tabela 7.1. Em todos os casos,  $N_{in} > N_{sup}$ . Embora os parâmetros do escoamento variem, pode-se mostrar que todos os escoamentos são de subcamada externa.

A orografia consiste numa montanha de Agnesi na qual  $L = const. = 10000$  m e  $H$  varia em de caso para caso. A estabilidade da camada inferior é constante para todos os casos e igual a  $N_{in} = 0.020944$

Tabela 7.1: Experiências numéricas para o estudo da reflexão parcial, no caso em que  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} > 1$ . Os parâmetros gerais dos escoamentos são:  $U_r = 20$  m/s,  $N_{in} = 0.020944$  s<sup>-1</sup>,  $L = 10000$  m,  $\hat{L}_{in} \approx 10$ ,  $\lambda_{z,in} = 6000$  m.  $\Re$  corresponde ao arrasto calculado com o modelo linear, normalizado por  $D_{lin}$  (arrasto da camada inferior).  $(D_w/D_{lin})_{max}$  é o arrasto numérico normalizado por  $D_{lin}$ . O caso 17 não está exposto na tabela porque é idêntico ao caso 4, mas com  $L = 7500$  m e  $\hat{L}_{in} = 7.5$ . Para todos os casos,  $N_{in}/U_r = 1.05 \times 10^{-3}$  rad/m e  $k_d = 6.28 \times 10^{-4}$  rad/m.

Caso	$H$ [m]	$H_d$	$\hat{H}_{in}$	$\sigma_d$	$\Re$	$N_{sup}/U$	$\ell_{in}^2 - \ell_{sup}^2$	$(\pi/2H_d)^2$
1	1	$\lambda_{z,in}/2$	0.001	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
2	400	$\lambda_{z,in}/2$	0.42	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
3	500	$\lambda_{z,in}/2$	0.52	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
4	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
5	700	$\lambda_{z,in}/2$	0.73	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
6	1	$\lambda_{z,in}/2$	0.001	4	0.25	$2.62 \times 10^{-4}$	$8.22 \times 10^{-6}$	$2.74 \times 10^{-7}$
7	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.63	4	0.25	$2.62 \times 10^{-4}$	$8.22 \times 10^{-6}$	$2.74 \times 10^{-7}$
8	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.63	3	0.33	$3.49 \times 10^{-4}$	$7.31 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
9	1	$\lambda_{z,in}/4$	0.001	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-6}$
10	500	$\lambda_{z,in}/4$	0.52	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-6}$
11	600	$\lambda_{z,in}/4$	0.62	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-6}$
12	1	$\lambda_{z,in}/4$	0.001	4	4.00	$2.62 \times 10^{-4}$	$8.22 \times 10^{-6}$	$1.10 \times 10^{-6}$
13	600	$\lambda_{z,in}/4$	0.62	4	4.00	$2.62 \times 10^{-4}$	$8.22 \times 10^{-6}$	$1.10 \times 10^{-6}$
14	600	$3\lambda_{z,in}/4$	0.62	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$1.22 \times 10^{-7}$
15	600	$\lambda_{z,in}$	0.62	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$6.85 \times 10^{-8}$
16	600	$3\lambda_{z,in}/2$	0.62	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$3.05 \times 10^{-8}$
16a	600	$2\lambda_{z,in}$	0.62	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$3.05 \times 10^{-8}$
16b	600	$5\lambda_{z,in}/2$	0.62	2	0.50	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$3.05 \times 10^{-8}$
16c	600	$5\lambda_{z,in}/4$	0.62	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$4.39 \times 10^{-8}$
16d	600	$7\lambda_{z,in}/4$	0.62	2	2.00	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.24 \times 10^{-8}$
17a	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1.5	0.66	$6.98 \times 10^{-4}$	$3.66 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
17b	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1.75	0.57	$5.98 \times 10^{-4}$	$4.70 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
17c	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1.4	0.71	$7.48 \times 10^{-4}$	$3.13 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
18	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1.25	0.80	$8.38 \times 10^{-4}$	$3.95 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
19	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1.1	0.91	$9.52 \times 10^{-4}$	$2.08 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
20	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.62	1	1.00	$1.05 \times 10^{-3}$	0	0
21	600	$\lambda_{z,in}/3$	0.62	2	1.14	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$6.17 \times 10^{-7}$
22	600	$\lambda_{z,in}/6$	0.62	2	1.14	$5.24 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$	$2.47 \times 10^{-6}$

$s^{-1}$ . Os parâmetros do escoamento são calculados tomando esta camada como referência, obtendo-se  $\hat{L}_{in} = 10$  (escoamento hidrostático),  $\lambda_{z,in} = 6000$  m.  $\Re$  corresponde ao arrasto calculado com o modelo linear, normalizado pelo arrasto correspondente aos parâmetros da camada inferior,  $D_{lin}$ , usando a expressão (7.49).

A estratégia utilizada para a definição das condições de fronteira, das dimensões das camadas de absorção nas fronteiras e do domínio de cálculo, é a referida na secção 7.3. Para todos os casos mostrados na tabela 7.1, o domínio usado tem  $5\lambda_z$  de extensão vertical e  $20a$  de extensão horizontal. A camada de absorção no topo tem uma espessura de  $2\lambda_z$ , e as esponjas laterais de  $2L$ . Como se está a espera de obter ressonância a jusante, a montanha está colocada em  $x_0 = 10a$ , de modo que a fronteira de saída esteja mais afastada do centro da montanha ( $x = 0$  m) do que a fronteira de entrada. Para aumentar a precisão foi decidido usar, neste caso, o método de refinamento local com 3 pontos. Quando há geração de ondas é preciso tomar em conta que podem aparecer problemas nas interfaces com diferentes níveis de refinamento, se estas forem colocadas nas proximidades de zonas sensíveis, como é o caso da descontinuidade em  $H_d$ . No presente caso, para excluir possíveis efeitos adversos associados à existência de interfaces com diferentes níveis de refinamento, o método só é usado na esponja de absorção superior, de modo a aumentar a eficácia da mesma. A resolução fora das esponjas, usada em todos os casos, é de  $[1600,200]$  m. Para a integração numérica, o passo de tempo escolhido foi de  $\Delta t = 10$  s e foi usado o esquema FTLLI, explicado na secção 4.7. Para parametrizar os efeitos de subescala, é usado o modelo de 1ª ordem de Lilly (1962), exposto na subsecção 3.5.4. Este fecho só é activado quando  $H > 500$  m.

O estado de referência pode ser calculado usando as expressões (3.5), (3.6) e (3.7). No entanto, é preciso tomar em conta que, na descontinuidade, o valor de  $N$  muda. Refira-se que esse facto não provoca uma mudança brusca no perfil de  $\theta_r$  e, portanto, dos restantes perfis derivados.

Os mecanismos explicados no ponto c) e d) da secção anterior baseiam-se num modelo analítico linear. Portanto, é de esperar que FLEX consiga reproduzir estes resultados teóricos. Na tabela 7.1 estão expostos os parâmetros das diferentes experiências que serão levadas a cabo nesta secção. Para validar FLEX, por comparação com resultados analíticos do modelo de Long (1953), escolheram-se os casos 1, 9 e 10 dessa tabela. Os casos 1 e 9 são accentuadamente lineares e o caso 10 é bastante não linear. De acordo com a teoria linear, o caso 1 deve evidenciar o fenómeno de reflexão parcial destrutiva ( $\Re = 0.5$ ), e os casos 9 e 10, reflexão construtiva.

Este casos são hidrostáticos e, portanto, a equação de Long corresponde a (7.65). Como a montanha de Agnesi (7.47) pode ser reescrita na forma

$$h(x) = \frac{HL}{L - ix}, \quad (7.81)$$

a solução da equação (7.65), dada por (7.61), pode ser escrita na forma

$$\delta(x, z) = \text{Re} \left[ h(x) \frac{-e^{ilz}}{-L + ix} \right] \quad (7.82)$$

em que foi usada a aproximação de Boussinesq (2.30). Para o caso em que existe uma descontinuidade no perfil de  $N$  e  $\sigma_d > 1$ , a solução de (7.65) para o caso d) é:

$$\delta(x, z) = \begin{cases} \text{Re} \{ h(x)(1 - \sigma_d) \cos(\ell_{in} H_d) + \sigma_d e^{i\ell_{in} z} \} & 0 < z < H_d \\ \text{Re} \{ h(x) \sigma_d e^{i\sigma_d^{-1} \ell_{in} (z - H_d)} \} & z > H_d \end{cases} \quad (7.83)$$

Refira-se que quando a montanha é finita a condição de fronteira na superfície deve ser modificada como explicado na secção anterior.

Na figura 7.15 pode-se constatar que os perfis do fluxo vertical de quantidade de movimento  $M(z)$  e do arrasto ondulatorio normalizado  $D_w$  previstos por FLEX são muito próximos dos valores teóricos mostrados na tabela 7.1 para o caso 1. Quando a solução atinge a estacionariedade ( $U_r t/L \approx 40$ ), o arrasto numérico sobrestima ligeiramente (8%) o valor teórico.

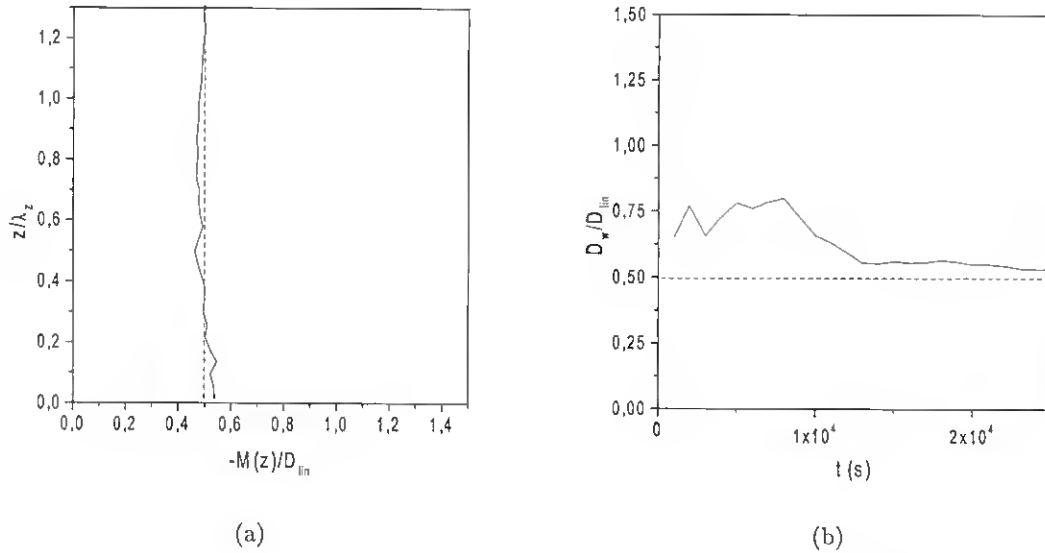


Figura 7.15: (a) Fluxo, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49) para  $U_r t/L = 40$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. Corresponde ao caso 1 da tabela 7.1.

Na figura 7.16 apresentam-se as linhas de corrente calculadas com a solução (7.83) para o caso 9. As perturbações de  $\delta(x, z)$  foram amplificadas 200 vezes. Como se pode ver nesta figura, a coincidência entre os resultados numéricos e analíticos é bastante boa. O bom desempenho de FLEX também pode ser constatado nas figuras 7.17a-b, onde são mostrados os perfis do fluxo vertical de quantidade de movimento,  $M(z)$ , e do arrasto normalizado,  $D_w/D_{lin} = 1.95$ . Para um caso idêntico ao caso 9, Durran (1986) (D86 daqui em diante), utilizando um modelo compressível, obteve um arrasto normalizado de  $D_w/D_{lin} = 1.5$ , portanto bastante mais afastado do valor teórico ( $\mathfrak{R} = 2$ ) que o resultado obtido com FLEX.

Na figura 7.18 mostram-se as linhas de corrente calculadas com a solução (7.83) para o caso 10, aplicando a condição de fronteira (7.59) para uma montanha finita, como explicado na secção 7.4. Como  $\hat{H} \approx 0.5$  o escoamento é não linear, mas não há rebentação das ondas, porque  $\hat{H}$  é bastante inferior ao valor da altura adimensional em que ocorre a rebentação das ondas ( $\hat{H} = 0.85$ ). As perturbações  $\delta(x, z)$  não estão amplificadas. Na tabela 7.1 pode-se ver que o escoamento é claramente hidrostático nas duas camadas. Na figura, verifica-se que, embora as soluções sejam fisicamente realistas, elas evidenciam um afastamento considerável da solução teórica, particularmente no centro e na parte superior do domínio. Portanto, fazendo fé nos bons resultados anteriormente obtidos com FLEX, pode-se concluir que no caso não linear com uma descontinuidade no perfil da estabilidade, a solução do modelo não linear de Long (1953), embora capte aspectos essenciais da física do escoamento, não descreve cabalmente o seu comportamento. Nas figuras 7.19a-b apresentam-se os perfis do fluxo vertical de quantidade de movimento,  $M(z)$ , e do arrasto normalizado,  $D_w/D_{lin} = 1.5$ . Para um caso similar, com uma montanha de  $H = 600$  m em vez de 500 m, D86 obteve um arrasto normalizado de  $D_w/D_{lin} = 1$ , portanto bastante mais afastado do valor teórico ( $\mathfrak{R} = 2$ ) que o resultado obtido com

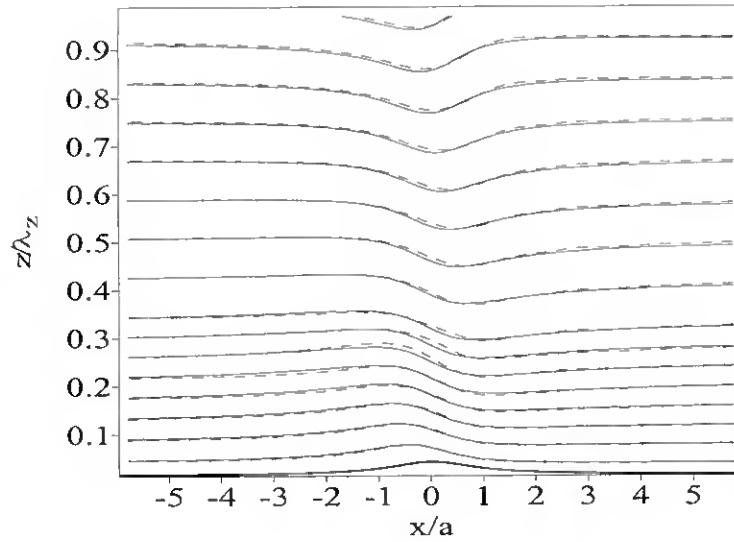


Figura 7.16: Linhas de corrente. As linhas (—) e (---) correspondem às soluções analíticas linear (equação (7.83) e numérica (para  $U_r t/L = 100$ ), respectivamente. As perturbações foram amplificadas 200 vezes.

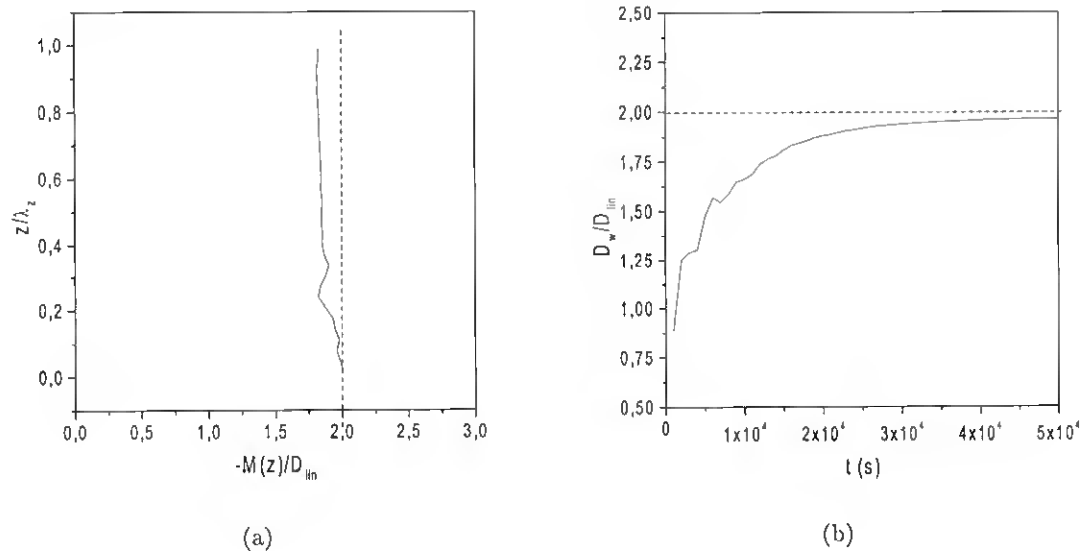


Figura 7.17: (a) Fluxo, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49), para  $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear.

FLEX. Apesar de bastante afastado deste valor, o perfil de  $M(z)$  é quase constante, o que confirma, mais uma vez o teorema de Eliassen e Palm (1961) e a hipótese de Smith (1977), sobre a condição de radiação, referida na secção 7.4.

O mecanismo de amplificação por ressonância explicado em c) foi utilizado por KL75 com um modelo de 3 camadas, com estabilidade constante em cada uma delas, para justificar o fenómeno dos ventos severos a jusante das montanhas, encontrados na tempestade de 11 de Janeiro de 1972, em Boulder, Colorado (USA). Sendo um mecanismo baseado em resultados da teoria linear, não contempla os processos altamente não lineares dos escoamentos sobre orografia. D86 demonstra que na encosta

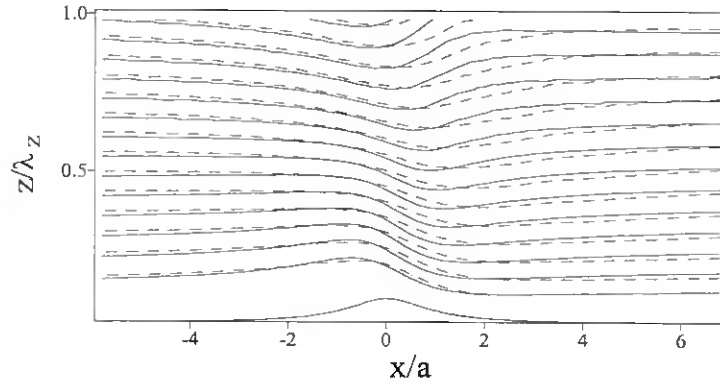


Figura 7.18: Linhas de corrente (linha contínua: solução analítica não linear (equação (7.83), linha descontínua: modelo.)

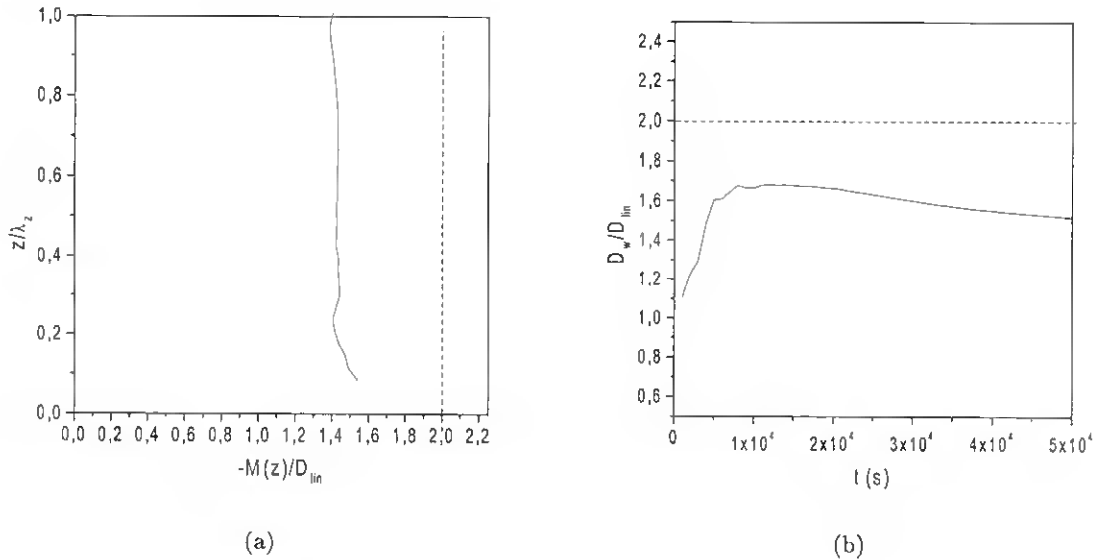


Figura 7.19: (a) Fluxo vertical de quantidade de movimento, normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.49), para  $U_r t/L = 100$ , b) evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969).

a jusante de uma montanha podem ser gerados ventos severos sem a existência de níveis críticos induzidos pela rebentação das ondas, ou impostos no perfil de  $U_r(z)$ . Como método alternativo, D86 usa perfis de estabilidade descontínuos com os quais simula com sucesso a tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado.

Para validar FLEX com o resultado numérico de outro modelo, mostram-se, na figura 7.20, duas simulações obtidas para  $U_r t/L = 20$  com FLEX e com o modelo de D86 para o caso 4, em que a descontinuidade é colocada em  $H_d = \lambda_z/2$ ,  $\sigma_d = 2$  e  $H = 600$  m. A similaridade entre as duas figuras é notável. Tomando como referência o modelo de D86, pode-se concluir que FLEX consegue simular com sucesso escoamentos acentuadamente não lineares.

Na simulação do caso 4, vários aspectos chamam a atenção. A jusante da montanha ocorre uma espécie de salto hidráulico que gera ondas muito similares às ondas de reflexão total ou *lee waves*

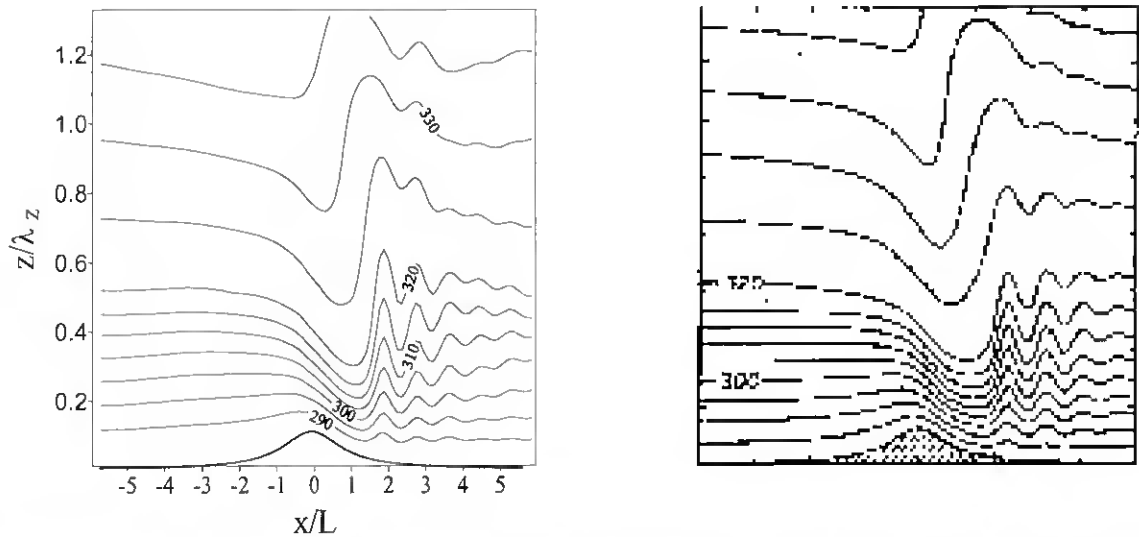


Figura 7.20: Linhas isentrópicas do escoamento correspondente ao caso 4 da tabela 7.1. a) FLEX, b) Modelo de D86. O intervalo de temperatura é de  $5^\circ$  e  $U_{rt}/L = 20$ .

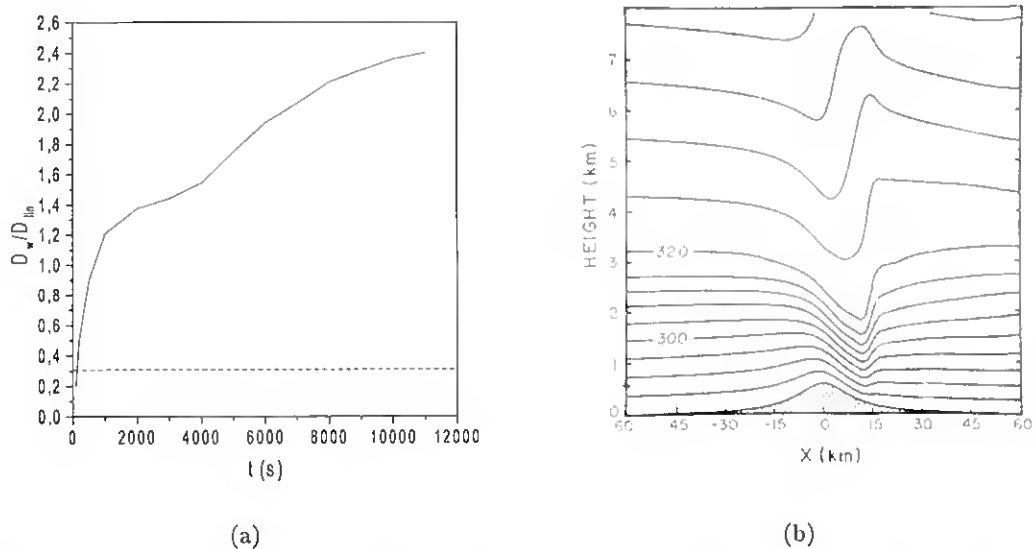


Figura 7.21: a) Evolução temporal do arrasto, normalizado pelo arrasto linear ( $D_{lin}$ ), do caso 4 ( $U_{rt}/L = 20$ ) em que  $D_{lin}$ , corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969) está representado com (—) e b) campo das isentrópicas do caso 4 obtidas por D86 com um modelo hidrostático.

(ORT daqui em diante). Pelo comportamento das isentrópicas, vê-se que, apesar da reflexão não ser total, uma grande parte da energia é canalizada horizontalmente. Portanto, no caso particular em que  $\sigma_d = 2$  e  $H_d = \lambda_z/2$ , a não linearidade aumenta consideravelmente a capacidade reflectora de  $H_d$ , de modo que ocorre uma reflexão quase total. Por isso, serão denominadas ondas de ressonância parcial (ORP, daqui em diante). Este comportamento exige o aparecimento de uma componente não hidrostática do escoamento. Observando a tabela 7.1 verifica-se que, apesar de se verificar a condição de Scorer (1949) para a existência de  $n$  ondas ORT,

$$\ell_{in}^2 - \ell_{sup}^2 > ((2n - 1) \frac{\pi}{2} H_d)^2 \quad (7.84)$$

o escoamento é claramente hidrostático, pois  $k_d < \ell_{in}$ . Nos casos aqui analisados  $n = 1$ . De acordo com a teoria linear, neste caso, a reflexão só pode ser parcial e portanto este efeito é puramente não linear.

Outro aspecto que chama a atenção é o grande impacto da não linearidade no arrasto ondulatório. De facto, a única diferença entre os casos 4 e 1 reside na altura da montanha.  $H = 1$  m e  $H = 600$  m para os casos 1 e 4 respectivamente, portanto o caso 4 é acentuadamente não linear. Na simulação do caso 1 viu-se que o arrasto normalizado numérico era muito próximo do teórico ( $\mathfrak{R} = 1/\sigma_d = 0.5$ ). A figura 7.21a mostra que no caso 4  $D_w/D_{lin} \approx 2$ , i.e., 4 vezes maior que o valor previsto pela teoria (para  $U_{rt}/L = 20$ ). Também é interessante notar que o comprimento das ondas produzidas a jusante é aproximadamente  $\lambda_\ell \approx L$ .

O estudo que será feito a seguir pode se considerado como uma continuação do trabalho de D86. Como fundamento teórico, D86 usa a analogia com a teoria hidráulica de Long (1953), mediante a qual explica como a não linearidade está associada à geração das ORP. No referido artigo, o autor faz uma simulação onde coloca  $H_d$  em diferentes altitudes, como é feito na figura 7.23, mas os valores de  $H_d$  escolhidos por ele não são múltiplos de  $\lambda_z/4$ . Também faz simulações análogas para o caso em que  $H$  varia. O autor não faz nenhuma menção à importância da colocação de  $H_d$  para poderem ser geradas as ORP, nem de como a amplitude e o comprimento de onda das mesmas dependem das características do escoamento. Também não são feitos estudos sobre a variação de  $\sigma_d$ . O estudo que será realizado a seguir pretende verificar em que condições os ventos severos associados à reflexão parcial geram ORP a jusante, e quais são as características fundamentais das mesmas. Note-se que, na tabela 7.1, quando  $\hat{H} \approx 0.6$ , o escoamento é moderadamente não linear, porque as perturbações são da mesma ordem de grandeza dos valores do estado de referência, mas nunca excedem os mesmos.

Para testar a hipótese de que a não linearidade gera uma componente não hidrostática seria necessário fazer uma simulação com um modelo hidrostático. Não foi possível fazer essa experiência com FLEX porque este ainda não foi adaptado para esse efeito. Por isso recorreu-se à simulação do caso 4 feita por D86 com um modelo hidrostático, apresentada na figura 7.21 b. Da comparação entre esta última e a sua análoga mostrada na figura 7.20b fica claro que as ondas geradas a jusante são não hidrostáticas pois são filtradas pelo modelo hidrostático numérico de D86.

Nas figuras 7.22-7.28 estão representados os campos das isentrópicas correspondentes aos casos especificados na tabela 7.1. Os casos foram agrupados de modo a tentar isolar o efeito dos diferentes parâmetros dos escoamentos.

Na figura 7.22 mostram-se os campos das isentrópicas para o caso em que só varia a altura  $H$  da montanha,  $\sigma_d = 2$  e  $H_d = \lambda_z/2$ . Constata-se que: a) só a partir de  $\hat{H} \approx 0.5$  é que as ORP se revelam com clareza, b) a distância a jusante da montanha onde começam a formar-se estas ondas aumenta com  $\hat{H}$ , c) também a amplitude das mesmas aumenta com  $\hat{H}$ , d) quanto maior é amplitude das ondas mais severos são os ventos a jusante da montanha, e) o comprimento das ondas produzidas a jusante é aproximadamente  $\lambda_\ell \approx L$ , e f) para  $\hat{H} \approx 0.7$  as isentrópicas são verticais em  $z \approx 3\lambda_z/4$ .

Na figura 7.28a mostra-se a evolução temporal do arrasto ondulatório dos casos apresentados na figura 7.22. É evidente que o aumento da não linearidade tem um efeito dramático na evolução do arrasto, aumentando este drasticamente e evidenciando um comportamento altamente não estacionário. Quando  $H \geq 600$  m a parametrização da turbulência com o esquema de 1ª ordem de Lilly (1962) é activada. Na figura constata-se que quando se geram ORP o perfil de  $D_w$  tem a seguinte estrutura: atinge um máximo, a seguir um mínimo e depois cresce novamente tendendo para um valor elevado de arrasto, similar ao estado que se verifica quando há rebentação das ondas. A parametrização da turbulência não deve permitir que o processo de geração de ORP se repita continuamente pois isto é fisicamente irrealista. A evolução de  $D_w$  nos casos marcadamente não lineares deve depender fortemente do tipo de esquema de parametrização dos efeitos de subescala, pelo que este problema requer

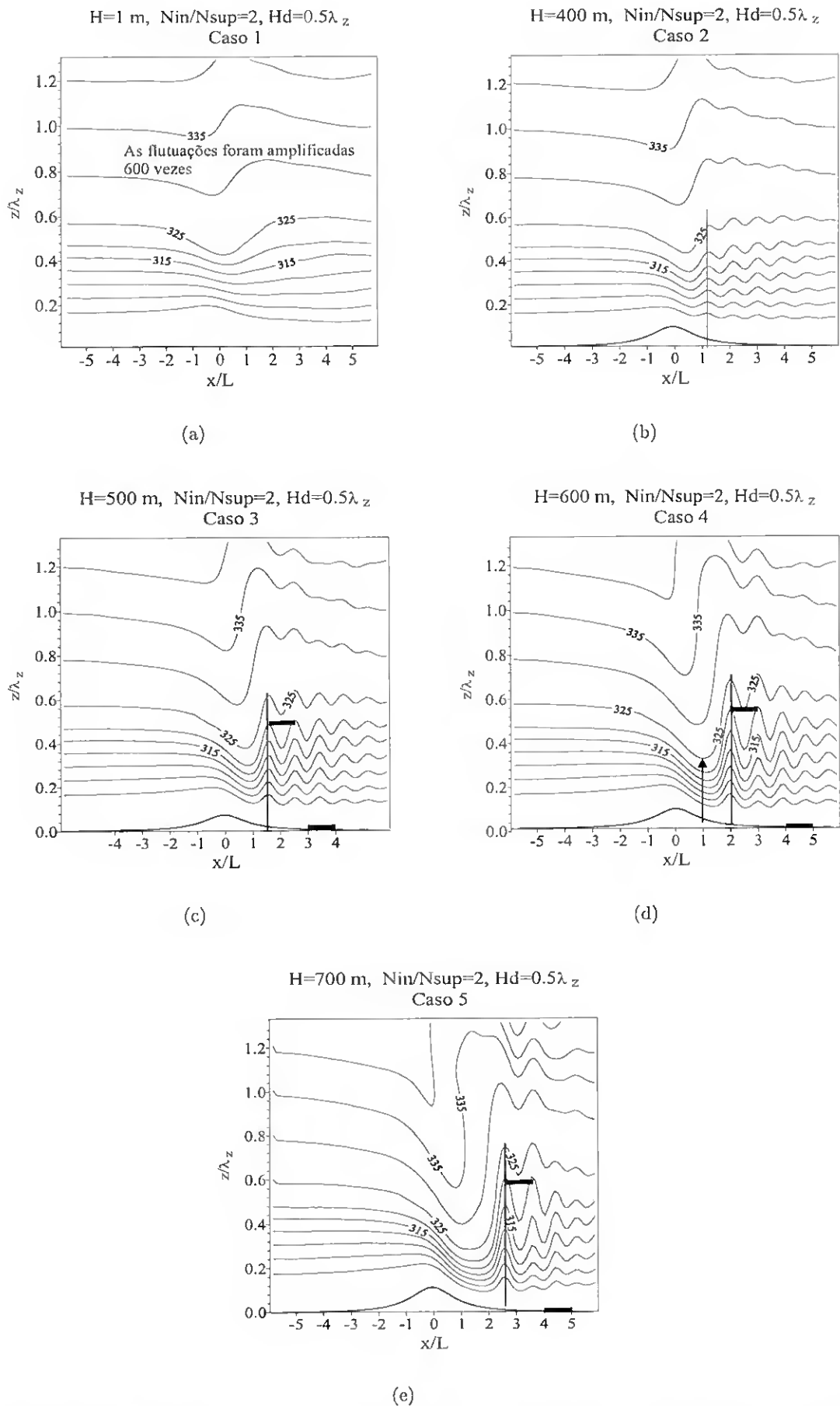


Figura 7.22: Linhas isentrópicas dos escoamentos especificados na tabela 7.1 para  $U_r t/L = 30$ . Neste caso só varia  $H$ .  $H_d = \lambda_z/2$  e  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ . O traço curto mais espesso horizontal representa o comprimento de onda aproximado das ondas a jusante.

um estudo mais aprofundado. Este assunto não faz parte dos objectivos deste trabalho, ficando como uma sugestão para trabalho futuro.

A figura 7.25 mostra a evolução temporal do campo das isentrópicas do caso 4. Comparando esta evolução com a do arrasto, apresentada na figura 7.28a, constata-se que o máximo arrasto ( $U_\tau t/L = 30$ ) não corresponde ao caso em que se obtêm as maiores amplitudes das ORP ( $U_\tau t/L \approx 50$ ), mas sim ao caso em que a deflexão da isentrópica coincidente com  $H_d = \lambda_z/2$  no instante  $U_\tau t/L = 30$ , é máxima. Isto faz sentido porque as ORP não produzem arrastos elevados, já que a energia das ondas se propaga predominantemente na horizontal. Por outro lado, os ventos severos a jusante das montanhas estão associados a arrastos elevados. Portanto, o instante em que o arrasto é máximo corresponde ao instante em se dá início ao processo de reajuste dos ventos de intensidade máxima ao meio circundante pouco perturbado. Na figura 7.25 também se observa que, com o decorrer do tempo, a amplitude das ORP tende a diminuir, enquanto as perturbações se tendem deslocar para jusante.

Na figura 7.31a apresenta-se a evolução temporal dos fluxos de momento  $M(z)$  para o caso 4. Os perfis de  $M(z)$  correspondem aos campos da figura 7.25. É de esperar que quando  $D_w/D_{lin}$  se aproxima do seu valor mínimo, no intervalo de  $U_\tau t/L$  [50,60] ou  $t \in [25000, 30000]$  s, o fluxo  $M(z)$  deve tender para zero na descontinuidade  $H_d \approx 0.5\lambda_z$  onde se geram as ORP. De facto quando  $U_\tau t/L = 60$ , figura 7.31a, constata-se que  $M(z)$  exhibe este comportamento. Neste caso, com o aumento de  $z$  a divergência de  $M(z)$  é significativa. As causas deste comportamento serão analisadas mais a frente. Por outro lado, quando o escoamento começa a recuperar das ORP, repõem-se as condições para uma melhor propagação vertical da energia, portanto a divergência de  $M(z)$  é muito menor, como mostra o perfil para  $U_\tau t/L = 100$ . Este comportamento está em plena concordância com a evolução de  $D_w/D_{lin}$ .

Os campos da figura 7.22 são obtidos variando  $H$  só quando  $H_d = \lambda_z/2$  e  $\sigma_d = 2$ . Para verificar se um aumento significativo da não linearidade numa situação radicalmente diferente pode gerar ORP, na figura 7.26 são mostrados os campos das isentrópicas obtidos para  $H_d = \lambda_z/4$  e  $\sigma_d = 4$ , com  $H = 1$  m e  $H = 600$  m. As flutuações dos deslocamentos isentrópicos foram amplificadas 600 vezes para  $H = 1$  m. Apesar da diferença entre os dois casos ser bastante significativa, não se verifica a geração de ORP.

Para estudar a dependência do aparecimento destas ondas em função de  $H_d$ , apresentam-se na figura 7.23 os campos das isentrópicas, mantendo constantes as restantes variáveis. Verifica-se que: a) as ORP só se geram quando  $H_d = \lambda_z/2$  não se tendo detectado que a sua geração obedeça a algum padrão de periodicidade vertical, b) para  $H_d > \lambda_z/2$ , se a não linearidade é considerável ( $\hat{H} \approx 0.6$ ), verifica-se a tendência para as isentrópicas se comportarem como se  $H_d$  não existisse (por exemplo, para  $H = 600$  m,  $H_d > 5\lambda_z/4$  e  $\sigma_d = 2$ , o campo das isentrópicas é muito similar ao obtido no mesmo caso mas com  $\sigma_d = 1$  mostrado na figura seguinte) e c) a medida de  $H_d$  se afasta de  $\lambda_z/2$  em direcção à superfície, as condições para a produção de ORP desaparecem bastante abruptamente (por exemplo para  $H_d = 3\lambda_z/4$ , já não se geram ORP). Note-se que, apesar de  $\hat{H} = 0.62$  ser um valor não tão próximo do valor de Miles e Huppert (1969) para o início da rebentação das ondas ( $\hat{H} = 0.85$ ), as isentrópicas são quase verticais em  $z \approx 3\lambda_z/4$ .

A análise do arrasto ondulatório nas figuras 7.28b-c corrobora o facto de que  $H_d = \lambda_z/2$  é um valor crítico na geração de ORP, pois é só para esse valor que o arrasto tem o comportamento típico dos casos em que se geram ORP. Quando  $H_d = \infty$  o arrasto normalizado é muito próximo do valor corrigido com a expressão (7.64), de Miles e Hupert (1969). Quando  $H_d < \lambda_z/2$  o arrasto atinge rapidamente a estacionariedade. Considerando  $H_d = \lambda_z/n$ , o arrasto numérico aproxima-se dos valores previstos pela teoria quando  $n$  é par. Nos casos  $1.25\lambda_z > H_d > 0.5\lambda_z$  chama-se a atenção para o valor extremamente baixo que o arrasto atinge no caso em que  $H_d = \lambda_z$ . Por outro lado, quando  $H_d = 0.75\lambda_z$  o comportamento do arrasto é radicalmente oposto. Embora praticamente não se gerem ORP,  $D_w/D_{lin}$  aumenta significativamente com o tempo, chegando a tomar valores 2.5 vezes maior

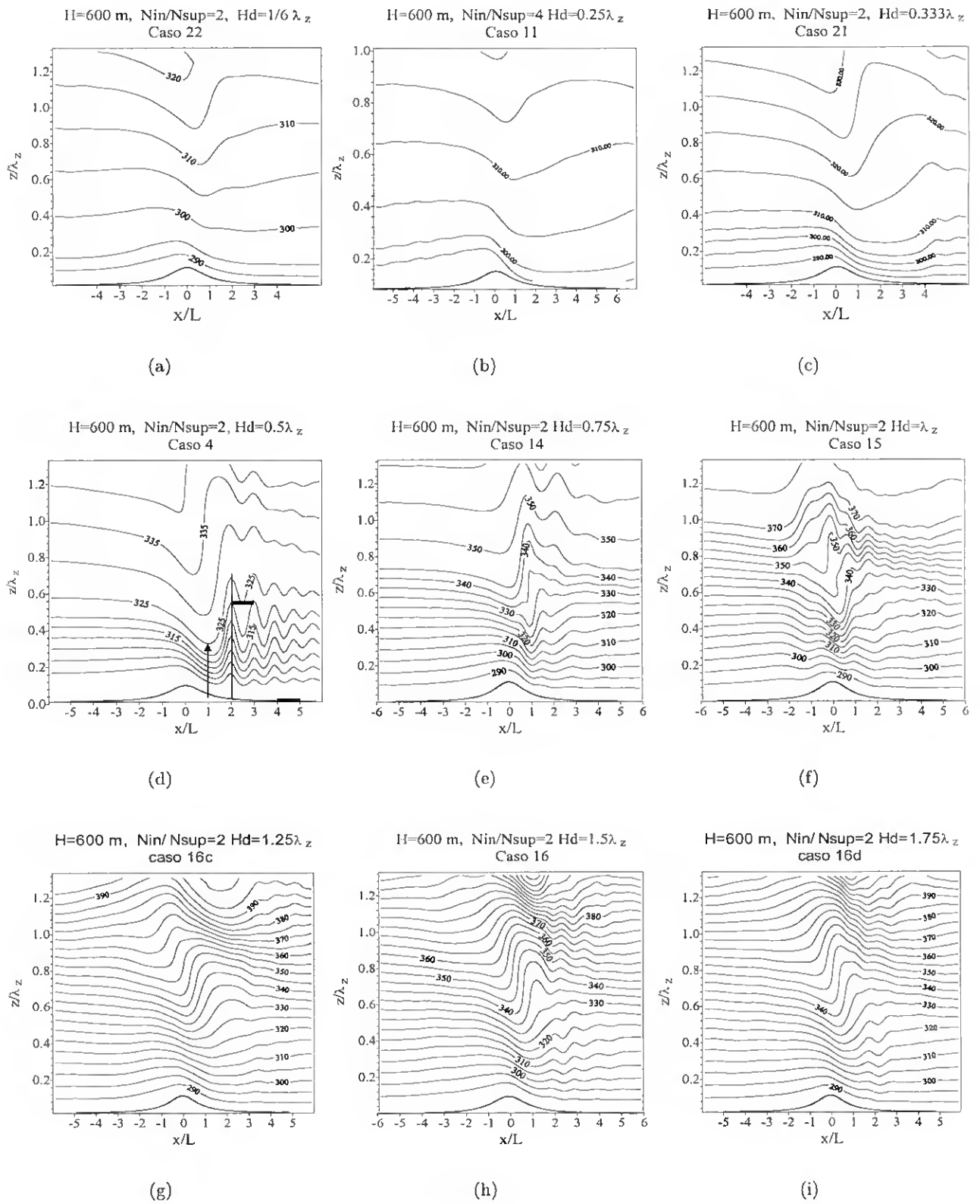


Figura 7.23: Como na figura 7.22 mas neste caso só varia  $H_d$ .  $H = 600$  m e  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ .

que o valor previsto pela teoria. Este é um resultado importante que será estudado posteriormente com mais detalhe. Quando  $H_d > 1.25\lambda_z$  confirma-se o que já tinha sido antes referido: o efeito de  $H_d$  é pouco significativo pois o comportamento dos arrastos se aproxima do caso em que  $H_d = \infty$ . Destes resultados emerge uma conclusão importante: só os ventos produzidos quando  $H_d \approx \lambda_z/2$  estão "sintonizados" para gerar ORP.

De modo análogo às comparações anteriores, apresentam-se na figura 7.24 os campos das isentrópicas, mas desta vez só variando a estratificação da camada superior,  $N_{sup}$ . Da análise das figuras pode-se concluir que: a) só a partir de  $\sigma_d \approx 1.4$  é que as ORP estão completamente desenvolvidas, b) a amplitude das ORP aumenta significativamente com  $\sigma_d$  (por exemplo, quando  $\sigma_d$  passa de 2 para 4 a amplitude das ondas duplica), c) a distância a jusante da montanha a que se começam a formar estas ondas aumenta com  $\sigma_d$ , d) tal como no caso em que só variava  $H$ , quanto maior é a amplitude das ondas geradas maior é o arrasto.

Na figura 7.28d apresentam-se os perfis da evolução temporal dos arrastos, para os casos ilustrados na figura 7.24. Para  $\sigma_d < 1.4$ ,  $D_w/D_{lin}$  oscila ligeiramente, mas não se verifica nenhum aumento significativo do mesmo. Só a partir de  $\sigma_d \approx 1.4$  é que  $D_w/D_{lin}$  evolui para um estado de arrasto elevado, que depois decresce para  $\sigma_d > 1.4$ . Como se verá mais a frente, a existência de  $H_d$  estimula, em níveis bastante afastados dele, o processo de inclinação das isentrópicas que antecede à rebentação das ondas. De modo análogo ao caso em que aumentava a não linearidade  $\hat{H}$ , constata-se que o máximo de  $D_w/D_{lin}$  aumenta e ocorre mais tarde, à medida de  $\sigma_d$  aumenta.

Para investigar se o facto do comprimento de onda das ORP ser proporcional a  $L$  ( $\lambda_\ell \approx L$ ) é um fenómeno pontual ou não, na apresentam-se figura 7.27 os campos das isentrópicas dos casos 4 e 17. A única diferença entre eles consiste em que, no caso 17,  $L = 7500$  m e, no caso 4,  $L = 10000$  m. Como se pode ver na tabela 7.1, os restantes parâmetros mantêm-se constantes:  $\sigma_d = 2$  e  $H_d = \lambda/2$ . A semelhança entre os gráficos é significativa, verificando-se também aqui que  $\lambda_\ell \approx L$ .

A descrição acima feita coloca as seguintes questões:

- a) Porque razão, quando se geram ORP, o comprimento de onda das mesmas é  $\lambda_\ell \approx L$
- b) Porque razão a amplitude das ondas aumenta com a não linearidade, i.e., com  $\hat{H}$ ?
- c) Porque razão a amplitude das ondas aumenta com  $\sigma_d$ ?
- d) Porque razão a geração das ORP só ocorre quando  $H_d \approx \lambda_z/2$ ?
- e) Porque razão as ORP começam a ser importantes só a partir de  $\sigma_d \geq 1.4$ ?
- f) Porque não existe um padrão de periodicidade vertical, como prevê a teoria linear da ressonância parcial, ou como se verifica nos escoamentos com níveis críticos?
- g) Porquê, à medida que  $H_d$  se afasta de  $H_d = \lambda_z/2$  ( $H_d > \lambda_z/2$ ), se verifica a tendência das isentrópicas de se comportarem como se  $H_d$  não existisse?
- h) Porque razão a distância a jusante da montanha onde começam a formar-se estas ondas aumenta com  $\sigma_d$ ?
- i) Porque atinge  $D_w/D_{lin}$  valores muito superiores em comparação com os restantes casos quando  $H_d = 0.75$ ?

A resposta à questão a) pode ser fundamentada de modo simples. Na tabela 7.1 verifica-se, em todos os casos, que  $\ell_{in} > k_d > \ell_{sup}$ . Como a atmosfera é de duas camadas e o número de onda

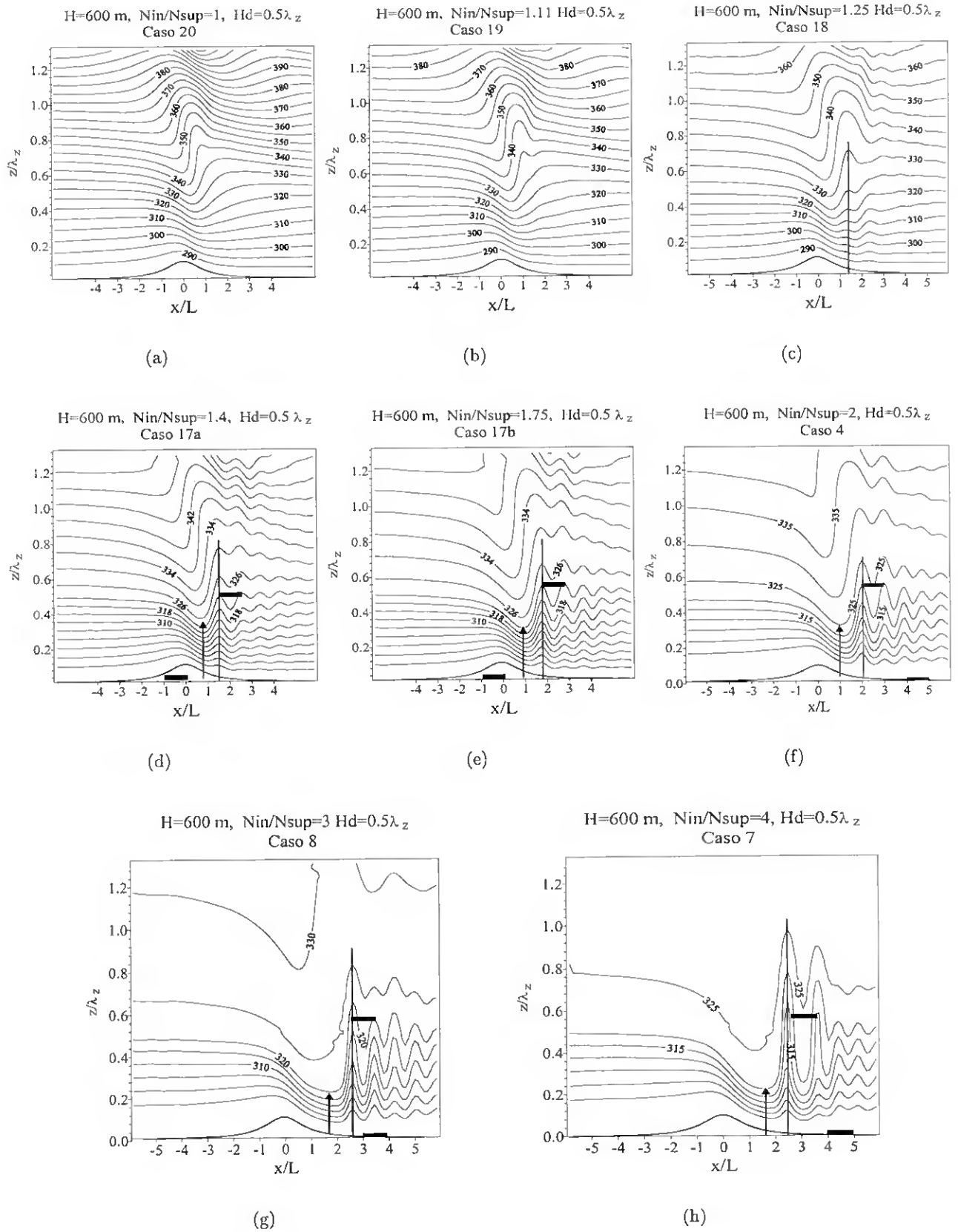


Figura 7.24: Como na figura 7.22 mas só varia  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup}$ .  $H = 600$  m e  $H_d = \lambda_z/2$ . O traço vertical comprido mostra a posição do primeiro cume das ORP e a seta define o valor teórico de  $x/L$  em que a deflexão é mínima. O traço horizontal grosso é usado para estimar o comprimento de onda das ORP.

dominante é  $k_\ell \approx k_d = 2\pi/L$ , é de esperar que  $k_\ell \approx k_d$  e portanto  $\lambda_\ell \approx L$ . Refira-se que a condição  $\ell_{in} > k_d > \ell_{sup}$  é equivalente à condição de Scorer (1949) (7.84) para a existência de ondas ORT numa atmosfera de 2 camadas de estabilidade. A mesma se verifica para todos os casos da tabela 7.1, exceptuando o 19.

Note-se que a condição de Scorer é menos restritiva que a condição verificada numericamente para a geração das ORP. De acordo com (7.84) tem-se que:

$$\sigma_d > \left( \sqrt{1 - \frac{1}{16c_z^2}} \right)^{-1} \quad (7.85)$$

em que  $c_z = H_d/\lambda_z$ . Para  $c_z = 0.5$ , de acordo com (7.85),  $\sigma_d > 1.15$ , mas, para existirem ORP, viu-se que  $\sigma_d$  tinha que ser  $\sigma_d \geq 1.4$ . Refira-se também que (7.84) implica que a velocidade de fase das ORP seja igual a:

$$c_{orp} \approx \frac{H_d}{\pi/2} (N_{in}^2 - N_{sup}^2)^{1/2} \quad (7.86)$$

e como  $\lambda_\ell \approx L$ , a frequência é dada por:

$$\omega_{orp} \approx \frac{4H_d}{L} (N_{in}^2 - N_{sup}^2)^{1/2} \quad (7.87)$$

Para tentar responder às restantes questões com algum fundamento, achou-se apropriado fazer um breve resumo sobre os estudos mais importantes realizados sobre os mecanismos de geração de ventos severos a jusante das montanhas.

Como já foi referido, D86 usa a teoria hidráulica de Long (1953) para escoamentos de água de pequena profundidade, para explicar porque a não linearidade é capaz de despoletar o processo de geração das ORP. D86 verifica que existe uma grande semelhança entre o comportamento dos escoamentos onde se geram ORP e os escoamentos hidráulicos sobre obstáculos. Por exemplo, na figura 7.22 vê-se claramente que para  $H = 1$  m, de acordo com a teoria hidráulica, o escoamento é supercrítico. O termo supercrítico é usado quando a advecção domina sobre o gradiente de pressão horizontal associado a variação da profundidade do escoamento, i.e.,

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( g \frac{\partial D}{\partial x} \right)^{-1} > 1 \quad (7.88)$$

Quando  $H$  aumenta para 400 m, observa-se que as isentrópicas se inclinam de modo a criar condições para o salto hidráulico, e a partir de  $H = 500$  m o mesmo aparece, revelando-se na forma de ORP. Segundo a teoria hidráulica, quando um escoamento subcrítico a montante do obstáculo atinge uma aceleração e um decréscimo da sua profundidade suficientes no topo da montanha, este, em vez de desacelerar, torna-se supercrítico e continua a acelerar no declive a jusante. Deste modo, a desaceleração que era de esperar no caso do escoamento ser subcrítico, é interrompida por este processo. Nestas condições a mudança de espessura do escoamento nessa zona não é suficiente para desenvolver um gradiente horizontal de pressão que compense a advecção horizontal, e ocorre o salto hidráulico.

As duas deficiências fundamentais no uso da analogia da teoria hidráulica são: a) o modelo hidráulico não toma em conta a propagação de energia vertical verificada na atmosfera, e b) nesta última não existe nada similar à superfície livre dos escoamentos hidráulicos. No entanto, D86 assume que o mecanismo do salto hidráulico é análogo ao do caso da atmosfera de 2 camadas, se se considerar que a interface entre as duas camadas com estabilidades diferentes ( $z_{H_d} = H_d - \delta(x, z)$ ) se comporta

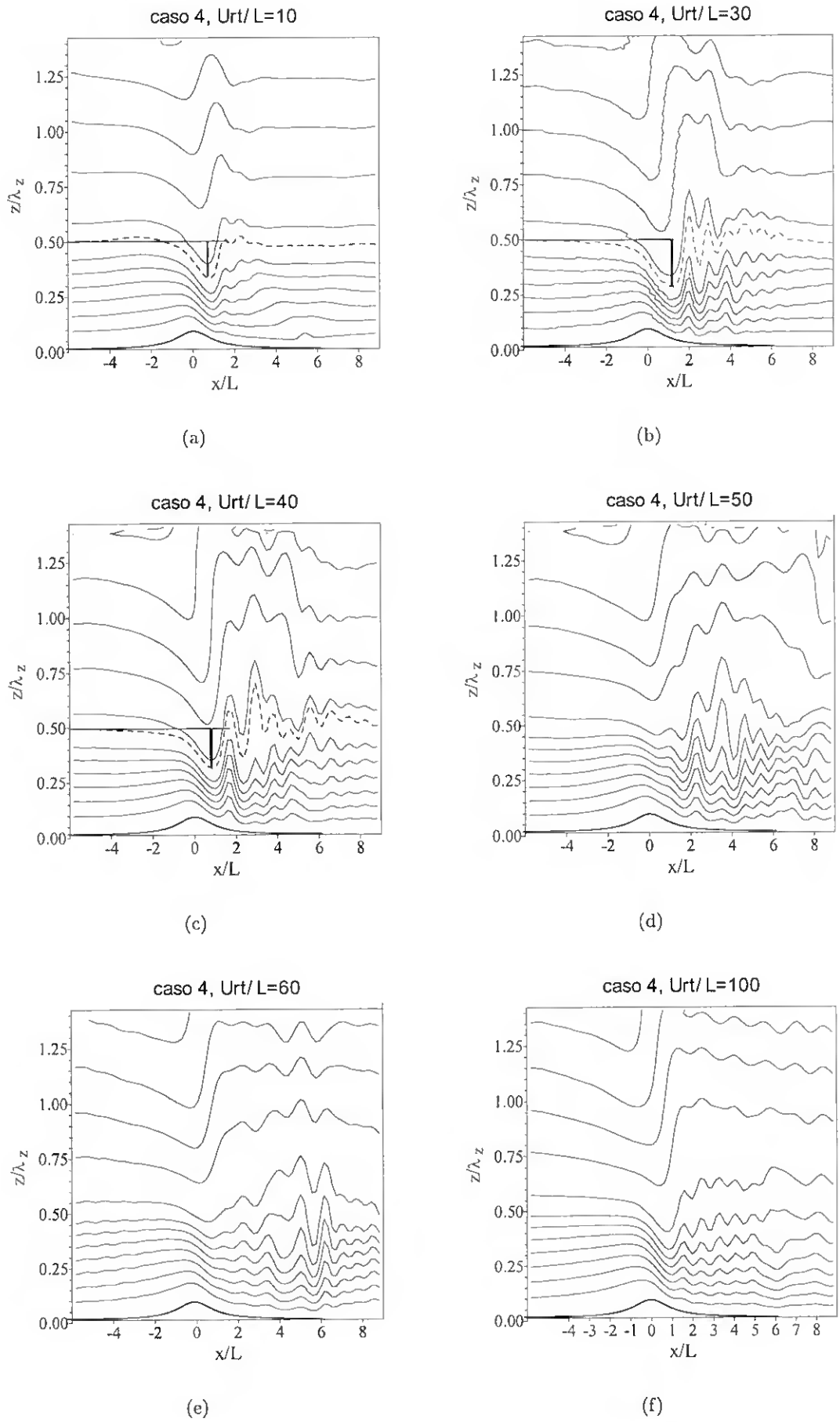


Figura 7.25: Evolução temporal do campo das isentrópicas do caso 4 especificado na tabela 7.1.

de maneira análoga à superfície livre do escoamento hidráulico, em que neste caso  $\delta$  toma-se como sendo a deflexão vertical medida a partir de  $H_d$ .

O papel das ondas gravíticas superficiais é, neste caso, suplantado pelas ondas gravíticas internas que se propagam verticalmente. Portanto, de modo análogo às ondas superficiais, as ondas gravíticas fazem aumentar a energia potencial das parcelas de ar quando estas sobem pela encosta da montanha. O resultado mais importante desta analogia é que permite considerar o efeito da não linearidade na geração de ORP. Usando a analogia do modelo hidráulico, D86 obteve a seguinte expressão para a perturbação de pressão associada ao deslocamento de  $z_{H_d}$ ,

$$p^* = \text{sgn}(\delta) \left[ N_{in}^2 \delta^2 - \frac{\delta^2}{2} (N_{in}^2 - N_{sup}^2) \right] \quad (7.89)$$

A expressão anterior implica que um decréscimo da estabilidade na camada superior reduz a intensidade da perturbação de pressão associada ao deslocamento  $\delta$ , em relação à perturbação produzida numa atmosfera com  $N_{in} = N = \text{const}$ . Esta expressão também corrobora o que já tinha sido referido, que o aumento da não linearidade (ou seja de  $\delta$ ), reduz a capacidade do escoamento de produzir, a jusante, um gradiente de pressão suficiente para compensar a advecção, fazendo com que o escoamento se torne supercrítico.

Portanto, D86 responde qualitativamente as questões b) e c), i.e., prova a importância do papel do crescimento da não linearidade (i.e do aumento de  $\hat{H}$ ) e de  $\sigma_d$  no aumento da amplitude das ORP.

Sobre a importância da colocação da interface  $H_d$  foi encontrado o artigo de Leutbecher (2001). LR1 compara os perfis dos arrastos em função da altura de colocação de  $H_d$  produzidos por escoamentos hidrostáticos sobre orografias simétricas em 2D e 3D. Esta comparação é feita numa primeira fase usando a teoria linear. LR1 verifica que devido ao facto de o escoamento em 3D ser sempre dispersivo (mesmo sendo hidrostático), o padrão vertical de  $D_w$  não evidencia a mesma estrutura de ressonância do caso 2D. Em 3D LR1 verifica que as oscilações decaem com a altura e os máximos e mínimos estão deslocados ligeiramente para baixo em relação ao caso 2D. LR1 valida os resultados analíticos por ele obtidos em 3D com simulações feitas com a versão não hidrostática do modelo de mesoscala MM5 (Grell et al., 1994), Dudhia, 1993). Estas simulações consistem num conjunto de experiências numéricas para escoamentos lineares e não lineares que incluem casos onde se prevê a rebentação das ondas.

A diferença mais notável entre o presente trabalho e o de LR1 assenta no facto de que LR1 estuda só caso  $\sigma_d < 1$  em quanto que aqui estudam-se os dois casos, dando particular relevo à situação em que  $\sigma_d > 1$ . Portanto no trabalho de LR1 não consta nenhum estudo sobre influência da não linearidade na geração de ORP e sobre a importância da localização de  $H_d$  para a verificação deste fenómeno. LR1 não fez cálculos para o caso 2D e também não fala da interacção entre níveis do tipo  $H_d$  e  $H_c$ . Por último em LR1 não é feita uma aplicação a um caso real complexos onde todos estes fenómenos possam ser estudado em conjunto e por separado.

O uso de uma descontinuidade  $H_d$  no perfil da estabilidade é uma das 3 formas conhecidas de gerar ventos severos a jusante das montanhas. Uma dessas formas é descrita pela teoria de KL75, já foi parcialmente exposta no início desta secção, e não será mais abordada porque, como já foi referido, só é aplicável a escoamentos lineares. Resta analisar o fenómeno de produção de ventos severos e arrastos ondulatórios elevados associados ao nível crítico induzido pela rebentação das ondas gravíticas. Na secção 7.5 foi estudado um escoamento deste género.

O modelo matemático de Peltier e Clark (1983) (PC83), baseado nos trabalhos numéricos de CP77 e PC79, permite descrever este fenómeno. A assunção física fundamental deste modelo reside em que quando as ondas rebentam forma-se um cavidade ressonante entre a superfície e um nível crítico reflector, induzido pela rebentação que aparece quando  $Ri^f < 1/4$  (ver secção 7.6). Os resultados de

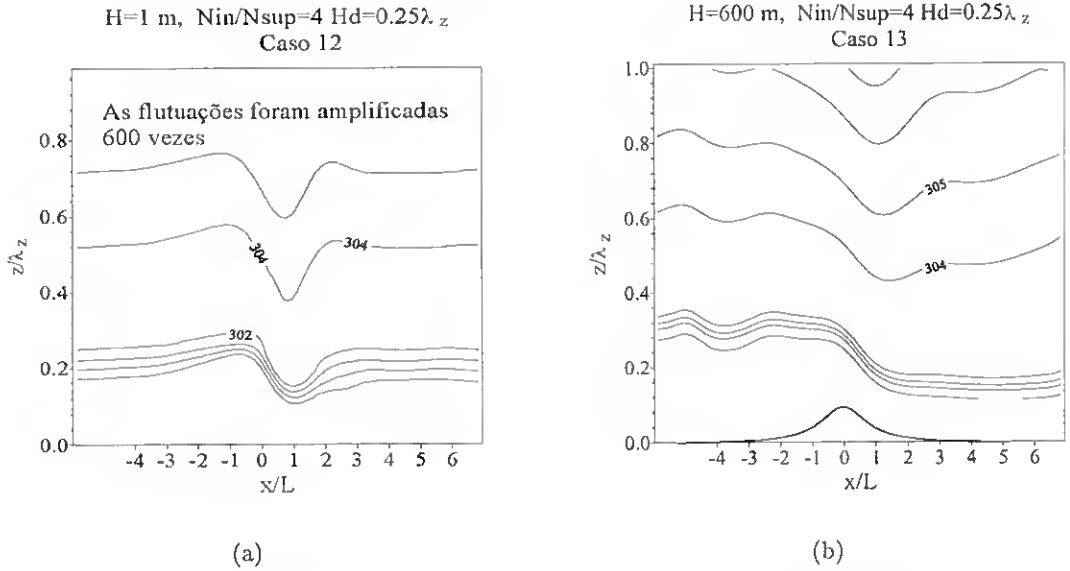


Figura 7.26: Como na figura 7.22 mas mantendo constante  $H_d = \lambda_z/4$  e  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 4$ .  $H$  toma dois valores  $H = 1 \text{ m}$  e  $H = 600 \text{ m}$ .

PC83 implicam que, se este nível crítico estiver posicionado em  $(1/4 + n/2)\lambda_z$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), produz-se um acréscimo dos ventos a jusante do obstáculo associado à amplificação das ondas. Clark e Peltier (1984) (CP84) realizaram várias experiências numéricas em que um nível crítico definido através de  $U_r(z)$  era posicionado em diferentes altitudes. Estes autores concluíram que os resultados suportavam a sua teoria da cavidade ressonante. No entanto, eles não fizeram simulações para  $H_c < 3\lambda_z/4$  e não registaram nenhuma amplificação quando  $z = 5/4\lambda_z$  ( $n = 2$ ).

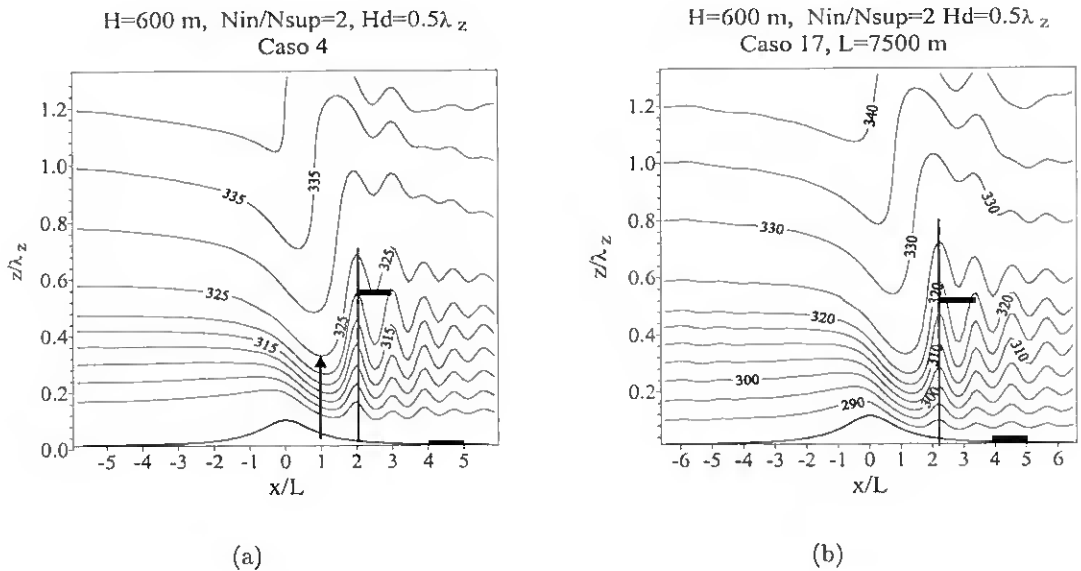


Figura 7.27: Como na figura 7.22, mas mantendo constante  $H = 600 \text{ m}$ ,  $H_d = \lambda_z/2$  e  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ .  $L$  toma dois valores  $L = 10000 \text{ m}$  e  $L = 7500 \text{ m}$ .

Outro modelo matemático importante é o de Smith (1985) (S85). O mesmo usa o mesmo princípio físico do processo de amplificação associado à rebentação das ondas: a região onde se verifica este fenómeno transforma-se numa fronteira reflectora que confina a energia entre ela e a superfície. S85 simula esta fronteira definindo uma linha de corrente divisória hipotética que separa o escoamento turbulento do laminar a partir da zona de rebentação, onde assume que o escoamento turbulento está bem desenvolvido. A fronteira superior do modelo de S85 está colocada no topo desta região turbulenta, onde se considera que as perturbações da pressão  $p'$  são desprezáveis e a velocidade  $U_r$  é constante. Note-se que a condição  $p'/p_r \approx 0$  equivale a ter um nível crítico similar ao do modelo de PC83. Se não existe nível crítico, a condição  $p'/p_r \approx 0$  não faz sentido. Por outro lado os resultados de S85 sugerem que a amplificação das ondas ocorre em todo o intervalo de  $H_c$  definido por  $[(1/4 + n), (3/4 + n)]\lambda_z$ , quando a montanha é suficientemente grande<sup>2</sup> para que o deslocamento  $\delta$  atinja o ponto de transição  $\partial\hat{h}(x)/\partial\delta = 0$  para um novo regime no qual  $\delta$  continua a aumentar a jusante da montanha. Este é um processo de transição não linear, análogo ao explicado pelo modelo hidráulico em que o escoamento passava de subcrítico para supercrítico. A teoria de S85 põe em causa a hipótese da cavidade de ressonância de PC83 porque prevê a existência (em 2D) de um nível crítico  $H_c = (1 + 1/4)\lambda_z$ . Este último não é encontrado nas simulações de CP84 (em 2D).

O modelo de S85 não consegue prever o que acontece quando  $\hat{H} > \hat{H}_c$ . Além disso, como este está baseado na equação de Long (1953) que é estacionária, não consegue prever o que acontece depois de se atingir o regime de ventos severos associados a elevados arrastos ondulatorios. Apesar de algumas diferenças, este modelo pode-se considerado como uma extensão do modelo matemático de PC83 ao caso não linear (DK83).

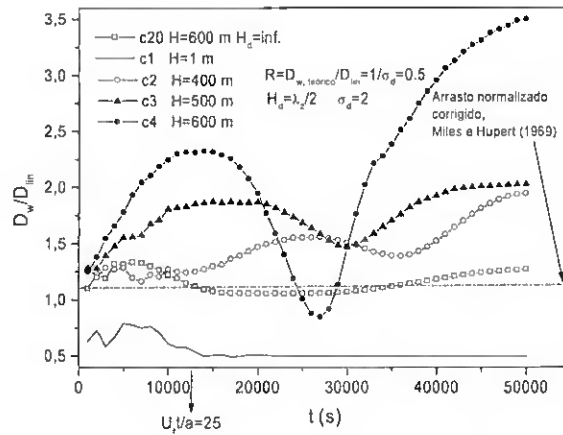
Ambos os modelos pressupõem a existência de uma zona onde as linhas de corrente se inclinam abruptamente, de modo a gerar ventos severos a jusante da montanha. A diferença fundamental entre eles reside no facto de DK83 resolverem as equações lineares não estacionárias com uma condição de não escorregamento linear na superfície (i.e., como uma fronteira horizontal que reflecte as ondas produzindo um desfaseamento de  $180^\circ$ ), enquanto que o modelo de S85 está baseado na resolução da equação de Long (1953) para escoamentos não lineares em função da deflexão da linha de corrente divisória, antes referida.

Tomando como fundamento teórico estes dois modelos e os resultados numéricos de CP77, PC79, CP84 e outros, Durran e Klemp (1987)(DK87) e BP88 realizaram experiências numéricas variando a altura da montanha (i.e a linearidade) e a de um nível crítico  $H_c$  que definiram mediante um perfil linear de  $U_r$  que tendia para zero quando  $z \rightarrow H_c$  e permanecia nulo ( $U_r = 0$ ) para  $z > H_c$ . DK87 obteve resultados consistentes com a teoria proposta por S85 mas divergentes do mecanismo de amplificação linear de PC83. Por exemplo, para  $H_c \approx 3\lambda_z/4$  e  $H_c \approx 5\lambda/4$  DK87 observam o mecanismo de amplificação que está em plena concordância com ambas teorias. Já BP88 observou um processo de amplificação pouco significativo em  $H_c = 3\lambda_z/4$ , tendo verificado, por outro lado, um grande aumento do arrasto quando  $H_c = 0.55\lambda_z$  (para  $\hat{H} = 0.5$ ), que é o valor previsto por S85.

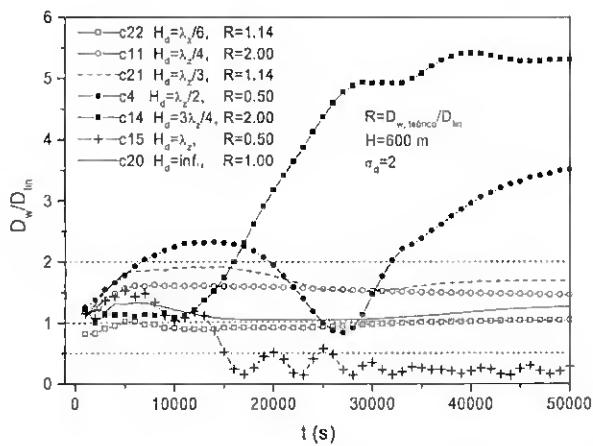
Se  $H_c$  está no intervalo  $[3\lambda/4, 5\lambda/4]$  os arrastos obtidos por DK87 são baixos, tal como previsto pelas duas teorias. No entanto, para  $H_c < 3\lambda/4$ , mais concretamente para  $H_c \approx \lambda/2$ , DK87 e BP88 obtêm valores elevados de arrasto que a teoria de PC83 não prevê.

Os resultados de DK87 e BP88, fundamentalmente os de BP88, são muito similares aos verificados nesta secção para atmosferas de 2 camadas de estabilidade, no que respeita à colocação de  $H_c$  em  $H_c = \lambda_z/2$ . À primeira vista, este resultado poderia sugerir uma possível analogia entre o comportamento da deflexão das linhas de corrente do modelo de S85 e a deflexão análoga associada à descontinuidade  $H_d(\delta(x, z))$ . No entanto, esta analogia não parece fazer muito sentido. Como se pode apreciar nas

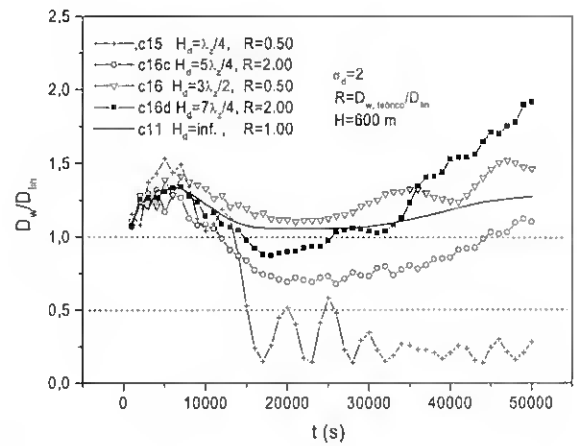
<sup>2</sup>Aqui suficientemente grande refere-se ao facto de se atingir um valor crítico de  $\hat{H}$ .



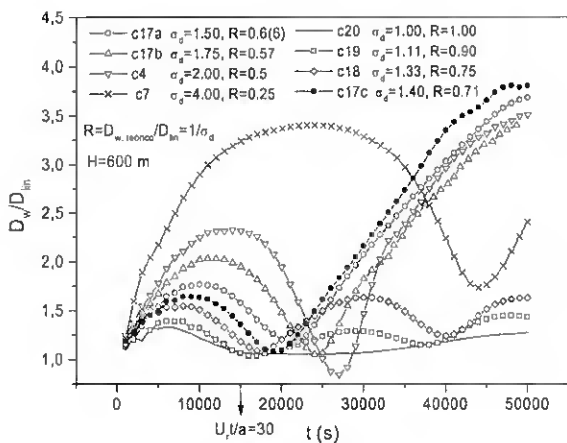
(a)



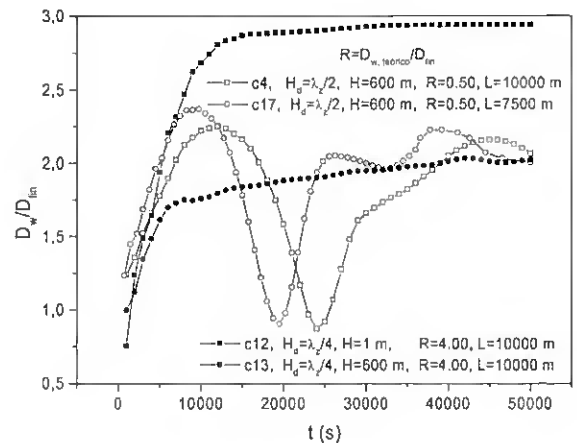
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 7.28: Evolução temporal do arrasto numérico, normalizado por  $D_{in}$ , para os casos especificados na tabela 7.1.

figuras 7.22a-e, o campo das isentrópicas em altitudes  $z > z_{H_d} = H_d - \delta_{H_d}$  em nada se assemelha ao comportamento que se verifica na região por cima de um nível crítico. Por outro lado, se  $\hat{H} = 0.62$ , valor correspondente ao caso 4, a teoria de S85 prevê que  $H_c$  deve estar colocado em  $H_c = 1.23\lambda_z \approx 5/4\lambda_z$  para se verificar a transição para o regime de arrasto elevado. Como se pode constatar na figura 7.28c, quando  $H_d = 5/4\lambda_z$ , longe de se observar amplificação, verifica-se uma diminuição significativa de  $D_w/D_{lin}$  em relação ao valor linear.

Refira-se que tanto o modelo hidráulico de Long (1953) como o de S85 são estacionários. Nas experiências numéricas verificou-se, pelo contrário, que as ORP são claramente não estacionárias.

Como já foi anteriormente referido, a analogia de D86, baseada no modelo hidráulico de Long (1953), põe em evidência o papel de  $\sigma_d$  e da não linearidade no aumento de amplitude das ORP. Para tentar explicar os pontos d) e e) achou-se mais apropriado usar o modelo não linear de Long (1953) (L53 daqui em diante) pelas seguintes razões: a) como já foi exemplificado, L53 consegue descrever a física do processo de amplificação das ondas numa atmosfera de duas camadas de estabilidade e b) L53 é a base do modelo não linear S85 que, segundo DK87 e BP88, consegue descrever de forma mais abrangente o fenómeno de geração de ventos severos nos casos em que existem níveis críticos, mesmo que eles não obedeçam à teoria da cavidade ressonante de CP83. Portanto, é de esperar que estas vantagens sejam válidas também no caso de existência de uma descontinuidade no perfil de  $N$ .

Nesta secção foi obtida a solução (7.83) da equação não linear de L53 (7.65) para uma atmosfera de 2 camadas de  $N$ . Depois de tomada a parte real, (7.83) toma a forma:

$$\delta(x, z) = \begin{cases} \delta(x, z) = h(x) \left( \cos[\ell_{in}z] - \frac{x\sigma_d}{a} \sin[\ell_{in}z] \right) & 0 < z < H_d \\ \delta(x, z) = h(x)\sigma_d \left( \cos[\ell_{in}(z - H_d)/\sigma_d] - \frac{x\sigma_d}{a} \sin[\ell_{in}(z - H_d)/\sigma_d] \right) & z > H_d \end{cases} \quad (7.90)$$

em que  $h(x)$  é dada por (7.47).

A condição mais propícia para obter os ventos mais severos capazes de despoletar a geração de ORP deve corresponder a um máximo da função  $|\delta(x, z)|$ . Esta conclusão tem como base o comportamento do modelo de Long, exemplificado por exemplo em S85, e a analogia do modelo hidráulico de Long para explicar os ventos severos. Como já foi referido, o salto hidráulico tem mais probabilidade de acontecer quando no topo da montanha o escoamento tem a maior energia cinética e a menor espessura possíveis, i.e., quando este é acentuadamente subcrítico. Tal como em D86, a analogia pode ser extendida à análise do processo de geração de ORP.

Derivando 7.90, com  $x = 0$ , e fazendo  $z = c\lambda_z$ , quando  $z < H_d$ , obtém-se

$$\sin(\ell_{in}c\lambda_z) = 0 \quad (7.91)$$

i.e.,

$$\ell_{in}c\lambda_z = n\pi \quad \Rightarrow \quad c = n/2 \quad (7.92)$$

com  $n = 1, 2, \dots$ . Isto significa que o máximo de  $|\delta(x, z)|$  para  $z < H_d$  se obtém quando  $H_d = c\lambda_z = n\lambda_z/2$ , tendo-se encontrado, deste modo muito simples, uma resposta à questão d).

Este resultado, no entanto, sugere que as ORP podem existir para diferentes valores de  $H_d$  em dependência de  $n$ . Isto contradiz o que foi verificado nas experiências numéricas; quando  $H_d > 1.25\lambda_z$  o efeito de  $H_d$  é pouco significativo, sendo muito similar ao caso em que  $H_d = \infty$ . Para melhor verificar o facto de não existir periodicidade vertical das ORP, na figura 7.29 mostram-se os campos das isentrópicas dos casos 20 e 4 num domínio vertical de  $3\lambda_z$ . No caso 20 (figura 7.29a) em que  $\sigma_d = 1$ , confirmam-se os resultados de CP84 onde só se detectam zonas com tendência de inversão das isentrópicas em  $0.75\lambda_z, 1.75\lambda_z, 2.75\lambda_z$ , etc...

Na figura 7.29b o campo das isentrópicas mostra que não existe nenhum padrão periódico das ORP. Se as ORP se geram por um processo de reajuste dos ventos severos às condições circundantes a jusante

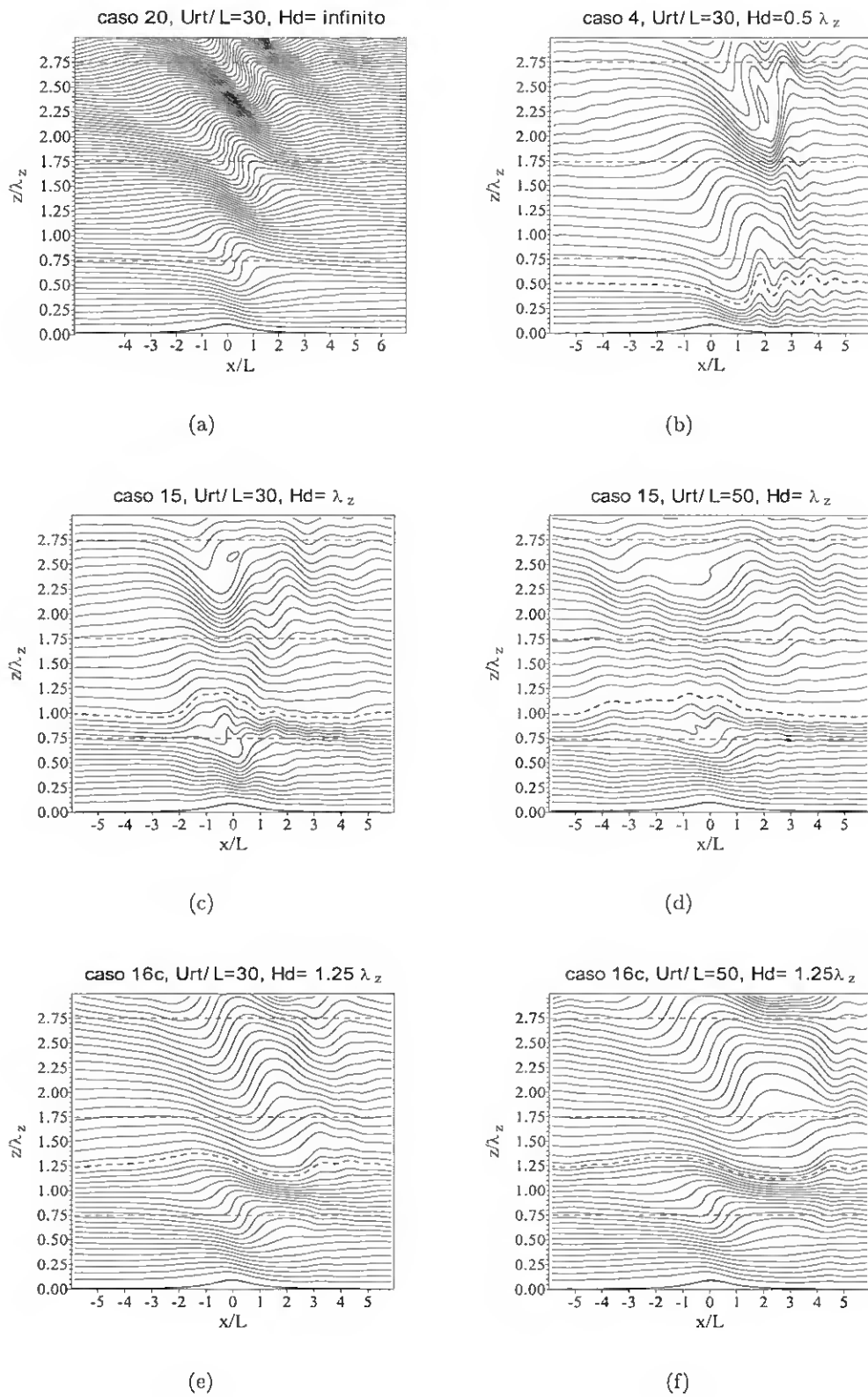


Figura 7.29: Campos das linhas isentrópicas de: a) caso 20 ( $U_r t/L = 30$ ), b) caso 4 ( $U_r t/L = 30$ ), c) caso 15 ( $U_r t/L = 30$ ), d) caso 15 ( $U_r t/L = 50$ ), e) caso 16c ( $U_r t/L = 30$ ) e f) caso 16c ( $U_r t/L = 50$ ). O domínio apresentado tem um comprimento vertical de  $3\lambda_z$ .

da montanha, então quando  $H_d$  se afasta da zona em que a montanha mais afecta o escoamento em termos de deflexão das linhas de corrente, é de esperar que a intensidade dos ventos diminua, perdendo a capacidade de gerar ORP. Tomando em conta esta hipótese e o facto de que  $H_d \approx \lambda_z/2$  ser uma posição crítica para a geração de ORP, se  $H_d > \lambda_z/2$  não devem existir condições propícias para a geração destas ondas.

Quando os ventos severos são gerados por variações bruscas no perfil de  $N$  não se verifica um padrão similar ao dos escoamentos em que estes ventos são gerados por níveis críticos. Por exemplo, nas simulações de CP84, os níveis críticos de  $U_r$ , onde se verifica a amplificação das ondas, podem estar bastantes afastados da montanha (e.g,  $H_c \approx 5\lambda/4$  e  $H_c \approx 7\lambda/4$ ) e, mesmo assim, produzir ventos severos e arrastos elevados. Quando se usa a descontinuidade  $H_d$  isto não se verifica. As ORP são um fenómeno associado essencialmente ao transporte horizontal da energia, portanto a analogia entre a rebentação das ondas quando existem níveis críticos impostos ou induzidos, e a colocação óptima da interface  $H_d$  para a geração de ORP, não deve ser feita. Esta é uma possível resposta para a questão f).

Para tentar responder às questões e) e h), a expressão (7.90) é derivada em função de  $x$  e  $z$ , com  $x > 0$  e  $z = c\lambda_z$ , com o objectivo de determinar quais valores teóricos de  $c = H_d/\lambda$  e  $\sigma_d$  para os quais se obtêm as deflexões máximas a jusante. Depois de derivar, igualar a zero cada uma das derivadas parciais, e as combinar convenientemente, chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{1}{(x\sigma_d/L)^2 + 1} + \left[ \frac{dh(x)}{dx} \frac{L\delta(x, c\lambda_z)}{\sigma_d} \right]^2 = 1 \quad (7.93)$$

A expressão (7.93) é resolvida de 2 formas:

- 1) Fixa-se um valor de  $c = H_d/\lambda_z = 0.5$ , de acordo com a condição (7.92), na qual  $n$  é tomado igual a 1, usando como justificação a resposta à questão f). Com estas condições, é feito um varrimento em  $x$  e são determinados os valores de  $\sigma_d$  correspondentes aos mínimos de  $\delta$ , com  $c$  previamente definido. A cada valor de  $x$  e  $c$  corresponde um  $\sigma_d$  que satisfaz a equação (7.93). A seguir, a mesma operação é repetida com diferentes valores de  $c$ .
- 2) Executa-se o mesmo procedimento do ponto 1, mas em cada varrimento em  $x$  os valores a fixar são os de  $\sigma_d$ . A solução de (7.93) dá os valores de  $c$ .

Na figura 7.32 apresentam-se os gráficos correspondentes aos pontos 1) e 2), acima enunciados. Na figura 7.32a encontram-se os perfis longitudinais de  $\sigma_d$ , para diferentes valores de  $c$ . Note-se que os perfis para  $c = 0.5$ ,  $c = 1$ ,  $c = 1.5$ , etc, coincidem. O mesmo se pode dizer para  $c = 0.25$ ,  $c = 0.75$ ,  $c = 1.25$ , etc. Para  $c = 0.5$ ,  $c = 1$ ,  $c = 1.5$ , etc., o perfil de  $\sigma_d$  é quase constante e aproximadamente igual a 1.4. Portanto, até uma distância de  $x/L = 0.8$  na interface  $H_d = n\lambda_z/2$ , o valor de  $\sigma_d$  é quase constante. Como já foi referido, neste caso só interessa o valor o nível  $H_d$  para  $n = 1$ . É curioso verificar que, para valores bastante próximos de  $c = 0.5$ , como são  $c = 0.4$  e  $c = 0.6$ , o comportamento de  $\sigma_d$  muda notavelmente. Por exemplo, para  $c = 0.4$  ao longo da descontinuidade os valores máximos das deflexões correspondem a valores de  $\sigma_d$  que aumentam com  $x/L$ . Como na interface  $\sigma_d = const.$  então em  $c = 0.4$  não estão criadas as condições óptimas para o aparecimento de ORP. O mesmo raciocínio pode ser feito para  $c = 0.6$ . No caso em que  $c = 0.25$ ,  $c = 0.75$  as condições para geração de ORP não são nada favoráveis, pois  $\sigma_d > 1$  só a a partir de  $x/L > 0.6$ . De acordo com esta análise, baseada no modelo de L53 para atmosferas com duas camadas de estabilidade,  $\sigma_d \approx 1.4$  pode ser considerado como o valor a partir do qual de inicia a geração de ORP para  $H_d = n\lambda_z/2$ . Deste modo fica respondida a questão e).

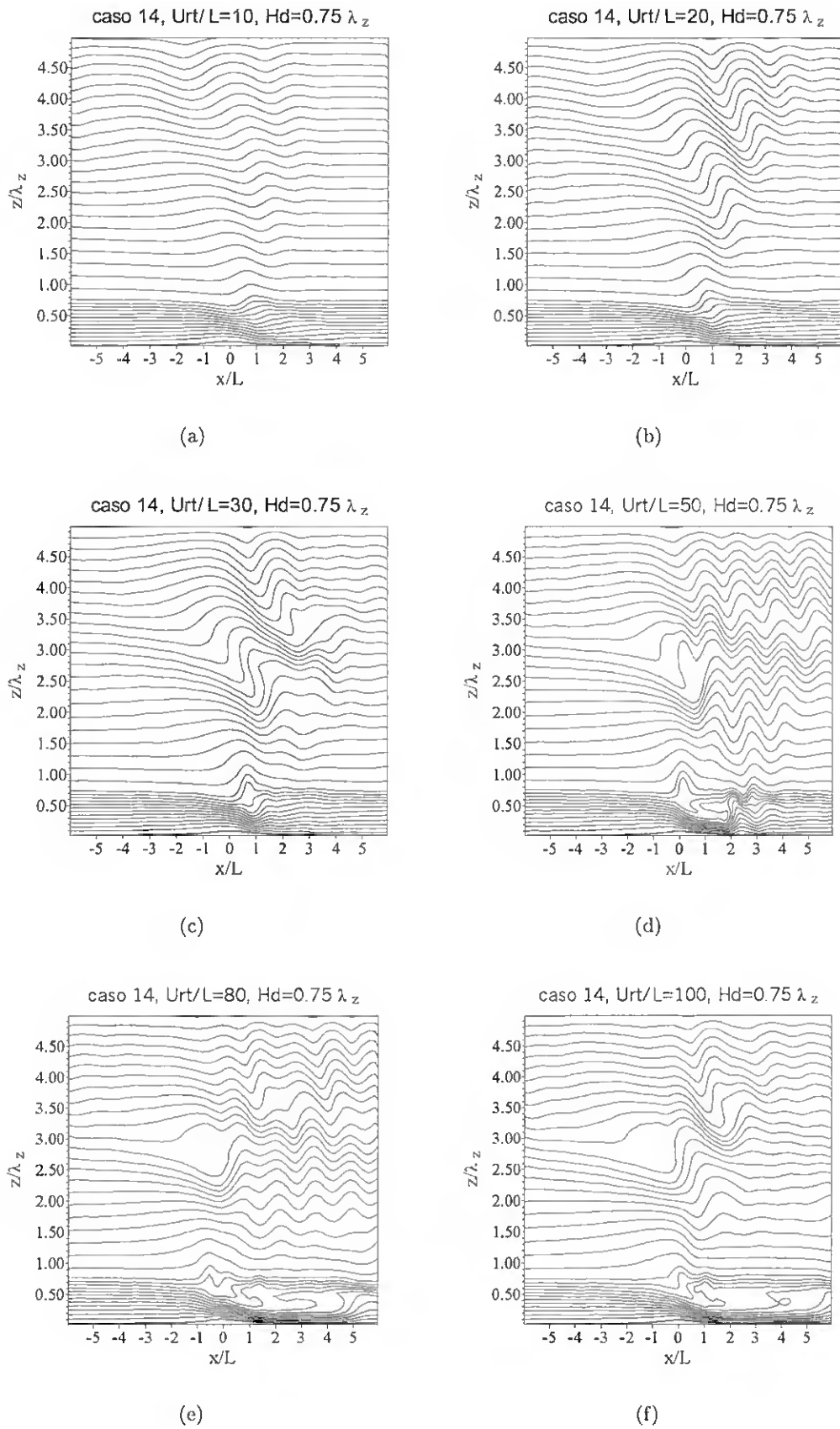


Figura 7.30: Campos das linhas isentrópicas do caso 14 para: a)  $U_r t/L = 10$ , b)  $U_r t/L = 20$ , c)  $U_r t/L = 30$ , d)  $U_r t/L = 50$ , e)  $U_r t/L = 80$ , f)  $U_r t/L = 100$ . O domínio apresentado tem um comprimento vertical de  $5\lambda_z$ .

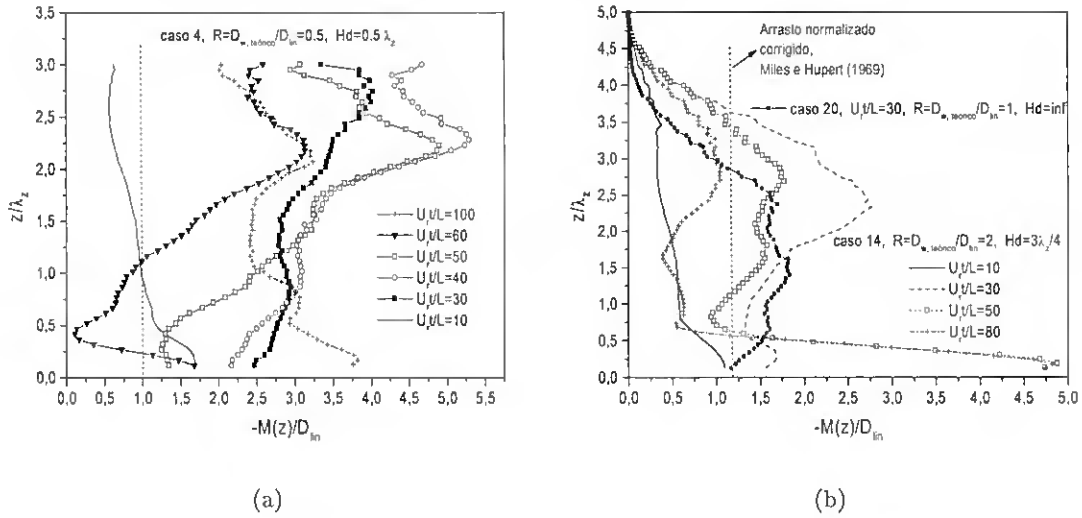


Figura 7.31: Fluxo normalizado com o arrasto linear para os casos especificados na tabela 7.1, a) caso 4, b) caso 14.

Na figura 7.29b mostram-se os perfis de  $c$  para diferentes valores de  $\sigma_d$ . Neles, constata-se que quando maior é  $\sigma_d$  maior é a distância a jusante na qual  $c = 0.5$ , valor para o qual se verificam as deflexões máximas. Na figura 7.24 estão assinalados com uma seta os valores de  $(x/L)_{max}$  para nos quais a deflexão é máxima. Embora estes não coincidam com os seus análogos teóricos, a proporcionalidade entre a distância a jusante  $(x/L)_{max}$  e  $\sigma_d$  é patente. É de salientar também que, na figura 7.28d, onde se apresentam os perfis da evolução temporal dos arrastos dos casos ilustrados na figura 7.24, se verificou que o máximo de  $D_w/D_{lin}$  era maior e se atrasava ligeiramente no tempo à medida de  $\sigma_d$  aumentava a partir de 1.4. Note-se que estes máximos do arrasto coincidem com a localização dos máximos das deflexões indicados com as setas compridas na figura 7.24. Deste modo fica respondida a questão h).

Por outro lado, o facto de  $H_d = 0.5\lambda_z$ , neste caso não linear, acentua em determinados níveis o processo de inclinação das isentrópicas que dá origem à rebentação das ondas. A figura 7.29b ilustra bem este facto. Portanto, a existência de  $H_d$  nessas zonas diminui o valor crítico de  $\hat{H}$  em que se dá este fenómeno. O valor crítico de Miles e Hupert (1969) é  $\hat{H} = 0.85$  e neste caso  $\hat{H} = 0.62$ . Aparentemente  $H_d$  reforça a capacidade reflectora em alguns níveis críticos auto induzidos, sendo esta a causa da grande divergência que  $M(z)$  experimenta no caso 4, mostrado na figura 7.31a, quando  $U\tau/L = 60$ .

Neste caso, as referidas zonas estão limitadas a valores muito próximos de  $H_d = 0.5\lambda_z$  e  $H_d = 0.75\lambda_z$ . Isto pode ser confirmado através do comportamento dos perfis dos arrastos da figura 7.28c. No caso 4 ( $H_d = 0.5\lambda_z$ ) há geração de ORP na vizinhança de  $H_d$  e a uma altitude bastante grande de  $H_d$ , aproximadamente em  $z \approx 2.75\lambda_z$  verifica-se a rebentação das ondas.  $2.75\lambda_z$  é o valor previsto por PC83 para a rebentação das ondas quando  $n = 5$ . É curioso constatar que em  $z = 1.75\lambda_z$  ( $n = 3$ ) desaparece o nível crítico previsto por PC84. O mesmo se verifica nos campos mostrados nas figuras 7.29c-f, para  $H_d = \lambda_z$  e  $H_d = 1.25\lambda_z$ , respectivamente, e na figura 7.30, para  $H_d = 0.75\lambda_z$ . Anteriormente, viu-se que quando  $H_d = 0.75\lambda_z$  não se produzem ORP. A forma do perfil de  $D_w/D_{lin}$  na figura 7.28c corrobora bem este facto. Portanto o desaparecimento do nível crítico  $H_c = 1.75\lambda_z$  não está associado à geração de ORP mas, em geral, à existência de  $H_d$ .

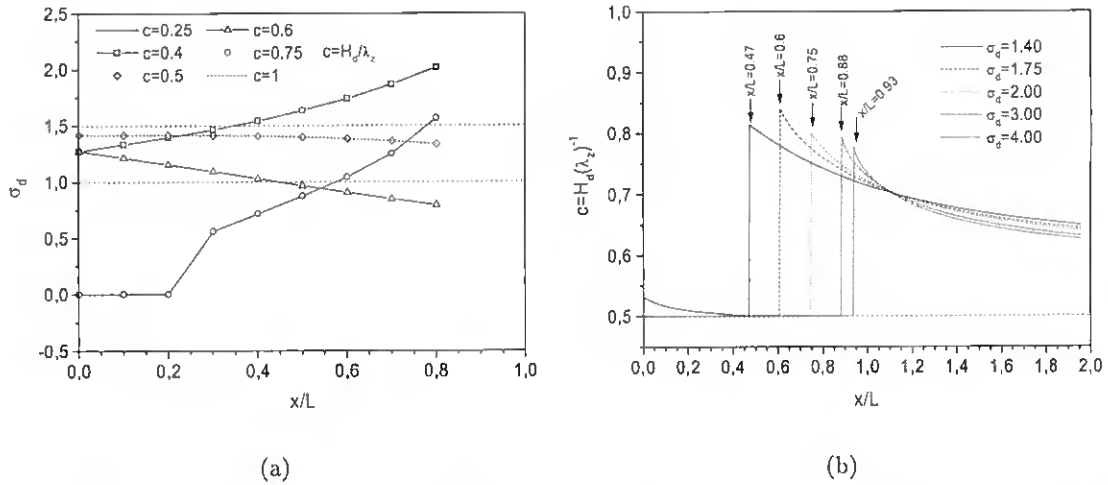


Figura 7.32: Perfis longitudinais: a) de  $\sigma_d$  para diferentes valores de  $c$  (ponto 1), e b) de  $c$  para diferentes valores de  $\sigma_d$  (ponto 2).

Por outro lado, quando  $H_d = \lambda_z$  ou  $H_d = 1.25\lambda_z$  constata-se (figura 7.28c) que, apesar da não linearidade, o valor estacionário do arrasto normalizado é aproximadamente metade do valor previsto pela teoria (0.5 e 2 respectivamente). Os campos das isentrópicas mostrados nas figuras 7.29c-d estão em concordância com esta evolução do arrasto. Chama-se a atenção para a diferença tão marcada de comportamentos do arrasto para  $H_d = 0.75\lambda_z$  e  $H_d = \lambda_z$ , sendo níveis tão próximos. Para este fenómeno não se encontrou nenhuma explicação.

O caso 14 é o mais notável, porque quando  $H_d = 0.75$ ,  $D_w/D_{lin}$  atinge valores muito elevados em comparação com os restantes casos (questão f). Nesta posição o aumento de  $D_w/D_{lin}$  é aproximadamente 2.5 vezes maior do que o valor previsto pela teoria linear,  $D_{w,teor}/D_{lin} = 2$ . Note-se que este valor teórico já é elevado.  $H_d = 0.75\lambda_z$  é a primeira altitude (em 2D) onde se verifica a rebentação das ondas gravíticas e a auto indução de um nível crítico, de acordo com CP84. Esta é provavelmente a causa fundamental do aumento significativo do arrasto. Mas porque?

Num escoamento hidrostático, quando há uma descontinuidade num nível onde pode acontecer a rebentação das ondas quando  $\hat{H}$  atinge um dado valor crítico, prevêem-se 2 fenómenos: a amplificação da deflexão das linhas de corrente por reflexão parcial<sup>3</sup> descrita pelas expressões (7.90), e a verticalidade das linhas de corrente (isentrópicas, neste caso) que antecede à rebentação das ondas, e que é descrita pela solução da equação de Long dada por (7.62). A equação (7.90) mostra que, devido a reflexão parcial, a onda aumenta de amplitude em  $H_d$  por um factor de  $\sigma_d$ . Note-se que se  $\sigma_d = 1$ , as soluções (7.90) e (7.62) são idênticas. De acordo com estas soluções se  $z > H_d$ , em  $x = 0$  m, a amplitude da deflexão do nível crítico dever ser igual a  $\sigma_d H = 2H$ . Se  $z < H_d$  é de esperar que  $H_c$  se comporte como uma superfície reflectora.

Na figura 7.30 mostram-se os campos das isentrópicas deste caso, em diferentes instantes, podendo-se constatar que a evolução dos mesmos no tempo é bastante complexa. Para excluir qualquer efeito da fronteira superior o domínio vertical passou de  $5\lambda_z$  para  $6\lambda_z$  e a esponja superior passou a ocupar  $2.5\lambda_z$  em vez de  $2\lambda_z$ . Verificou-se que os resultados obtidos com esta malha pouco diferiam dos anteriores. Quando  $U_{rt}/L = 10$  constata-se que o escoamento é supercrítico junto de  $H_d = 0.75\lambda_z$  mas a elevação das linhas isentrópicas não acontece, como é comum, em  $x = 0$  m, mas sim em  $x \approx L$ .

<sup>3</sup>Embora em  $H_d = 0.75\lambda_z$  não se gerem ORP, há amplificação das ondas por reflexão parcial.

A evolução posterior do escoamento mostra que  $H_d$  se comporta como um nível crítico reflector tanto para  $z < H_d$  como para  $z > H_d$ . Se  $z < H_d$  as isentrópicas evoluem quase como se não existisse a descontinuidade de  $N$ . Ver, por exemplo, a figura 7.12c, na secção 7.5. O comportamento do fluxo  $M(z)$ , ilustrado na figura 7.31b, também corrobora este facto, pois a divergência é significativa quando  $z < H_d$ , por exemplo, em  $U_\tau t/L = 50$ . Compare-se este perfil de  $M(z)$  com o da figura 7.13a, por exemplo, quando  $t = 9000$  s.

O arrasto tão elevado que se verifica neste caso poderá estar relacionado com o facto de que a coincidência de  $H_c$  e  $H_d$  reforçar a reflectividade do nível crítico e, portanto, a capacidade da cavidade ressonante, entre  $H_c$  e a superfície, amplificando os ventos severos a jusante. É este o mecanismo que permite a ocorrência de arrastos tão elevados. Esta foi a única explicação que se encontrou para dar uma resposta a esta questão tão complexa.

Como o nível crítico é simultaneamente uma descontinuidade de  $N$ , com o decorrer do tempo  $H_c$  vai-se deformando debaixo da influência da variação brusca de  $N$ . A pequena elevação das isentrópicas que aparece no instante  $U_\tau t/L = 10$  para  $x = L$  m, cresce significativamente e desloca-se em direcção ao centro da montanha, como se pode ver na figura 7.30d, correspondente ao tempo  $U_\tau t/L = 50$ . Esta elevação em  $U_\tau t/L = 20$  está centrada em  $x = 0$  m e tem uma altura aproximada de  $0.2\lambda_z = 2H$ . É curioso verificar que quando existem níveis do tipo  $H_d$ , a inclinação das isentrópicas nas zonas críticas acontece a jusante e não ligeiramente a montante da montanha, como prevê o modelo de Long.

Como  $H_c$  reflecte as ondas, esta elevação, que em  $U_\tau t/L = 50$  já atinge uma altura de  $\sim 3H$ , faz o papel de uma orografia que propicia a geração de ORP a jusante. Estas ORP ficam parcialmente confinadas entre  $H_c = 0.75\lambda_z$  e  $H_c = 3.75\lambda_z$  e são forçadas pela elevação e pelos níveis críticos  $H_c = 2.75\lambda_z$  e  $H_c = 3.75\lambda_z$ . A instabilidade convectiva que se gera em  $H_c = 3.75\lambda_z$  obriga as isentrópicas deste nível a convergir em  $H_c = 2.75\lambda_z$ . Este processo, aliado à influência da elevação, gera um padrão de ORP muito bem definido. Note-se que o comprimento de onda destas ORP é aproximadamente igual ao comprimento de onda hidrostático da camada superior  $\lambda_{z,sup} = 2\pi U_\tau / N_{sup} \approx 12600$  m (ver figura 7.30d para  $U_\tau t/L = 50$ ). O comportamento do fluxo  $-M(z)/D_{lin}$ , ilustrado na figura 7.31b para  $U_\tau t/L = 80$ , evidencia um grande afastamento do valor teórico ( $-M(z)/D_{lin} = 2$ ), sendo muito inferior. Isto mostra que a propagação da energia é predominantemente horizontal.

É importante salientar que toda esta análise tem sido feita com  $\lambda_{in} = 6000$  m portanto pode-se colocar a questão se estes resultados que indicam que  $H_d = \lambda_{in}/2$  é uma localização crítica para a geração de ORP mantêm-se válidos para outros valores de  $\lambda_{in}$ . Para isso será estudado mais 1 caso: caso 22a,  $\lambda_{in} = 3000$  m,  $N_{in} = 0.042$  1/s,  $N_{sup} = 0.021$  1/s,  $H = 600$  m,  $L = 10000$  m,  $\hat{H}_{in} = 1.2$ . Nas figuras 7.33a,b mostram-se o campo das isentrópicas em  $U_\tau t/L = 30$  e a evolução temporal do arrasto deste último caso. As isentrópicas evidenciam o comportamento típico de um escoamento onde se geram ORP. Para comparação pode-se tomar como exemplo o campo das isentrópicas do caso 4 mostrado na figura 7.20. As isentrópicas da figura 7.33a têm uma inclinação bastante mais pronunciada que as do caso 4 acima do topo da montanha porque neste caso a altura adimensional  $\hat{H}_{in} = 1.2$ . Também a evolução temporal do arrasto é típica dos escoamentos onde se geram ORP. De facto este perfil é muito similar aos mostrados na figura 7.28d. Nos casos 4 e 22a  $H_d$  está posicionada a uma altura de  $5H$  e  $2.5H$  respectivamente o que constitui uma diferença significativa. No entanto como  $H_d = \lambda_z/2$  também no caso 22a tem lugar a geração de ORP. Este aspecto requer um estudo mais detalhado que será parcialmente feito na secção 7.8 dedicada à tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado.

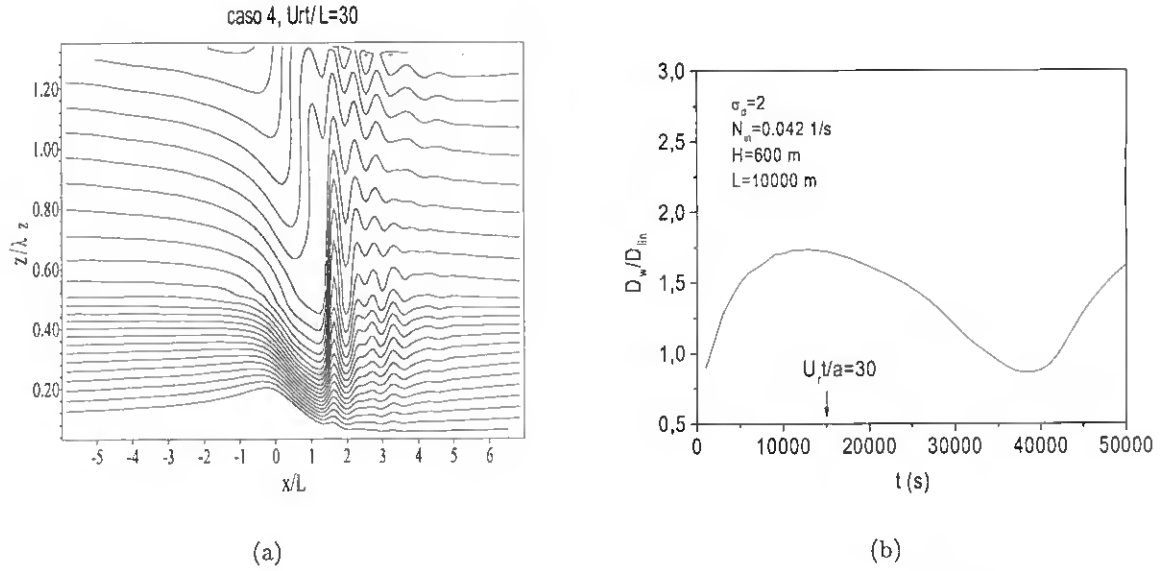


Figura 7.33: a) Campo das linhas isentrópicas e b) evolução temporal do arrasto ondulatório normalizado com o arrasto linear.

### Caso em que a camada superior é a mais estratificada

Nesta subsecção também serão estudados vários casos de escoamentos hidrostáticos de subcamada externa, com perfil de referência de velocidade uniforme e igual a  $U_r = 10$  m/s, e com um perfil de estabilidade de duas camadas dado pela expressão 7.80, mas, ao contrário da subsecção anterior, com  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} < 1$ .

Tabela 7.2: Experiências numéricas para o estudo da reflexão parcial no caso em que  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} < 1$ . Os parâmetros gerais dos escoamentos são:  $U_r = 10$  m/s,  $N_{in} = 0.010472$  s<sup>-1</sup>,  $L = 10000$  m,  $\hat{L}_{in} \approx 10$ ,  $\lambda_{z,in} = 6000$  m.  $N_{in}/U_r = 1.05 \times 10^{-3}$  m<sup>-1</sup> e  $k_d = 6.28 \times 10^{-4}$  rad/m.

Caso	$H$ [m]	$H_d$	$\hat{H}_{in}$	$\sigma_d$	$\mathfrak{R}$	$N_{sup}/U_r$	$\ell_{in}^2 - \ell_{sup}^2$	$(\pi/2H_d)^2$
23	600	$\lambda_{z,in}/2$	0.63	0.5	2.0	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
24	600	$\lambda_{z,in}/4$	0.63	0.5	0.5	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-6}$
25	1	$\lambda_{z,in}/4$	0.001	0.5	0.5	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$1.10 \times 10^{-6}$
26	1	$\lambda_{z,in}/2$	0.001	0.5	2.0	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$2.74 \times 10^{-7}$
27	600	$3\lambda_{z,in}/4$	0.63	0.5	0.5	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$1.21 \times 10^{-7}$
28	600	$\lambda_{z,in}$	0.63	0.5	2.0	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-6}$	$6.85 \times 10^{-8}$
29	1	$3\lambda_{z,in}/4$	0.001	0.5	0.5	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-7}$	$1.21 \times 10^{-7}$
30	1	$\lambda_{z,in}$	0.001	0.5	2.0	$2.09 \times 10^{-3}$	$-8.22 \times 10^{-6}$	$6.85 \times 10^{-8}$

As diferentes experiências numéricas que serão levadas a cabo nesta secção estão expostas na tabela 7.2. Exceptuando a velocidade que, neste caso, é  $U_r = 10$  m/s, e  $N_{in} = 0.010472$  s<sup>-1</sup>, os restantes parâmetros mantiveram-se idênticos aos da subsecção anterior. Também o tipo de orografia, as condições de fronteira, os critérios de construção da malha de cálculo e a forma de parametrizar as subescalas turbulentas, foram mantidos inalterados.

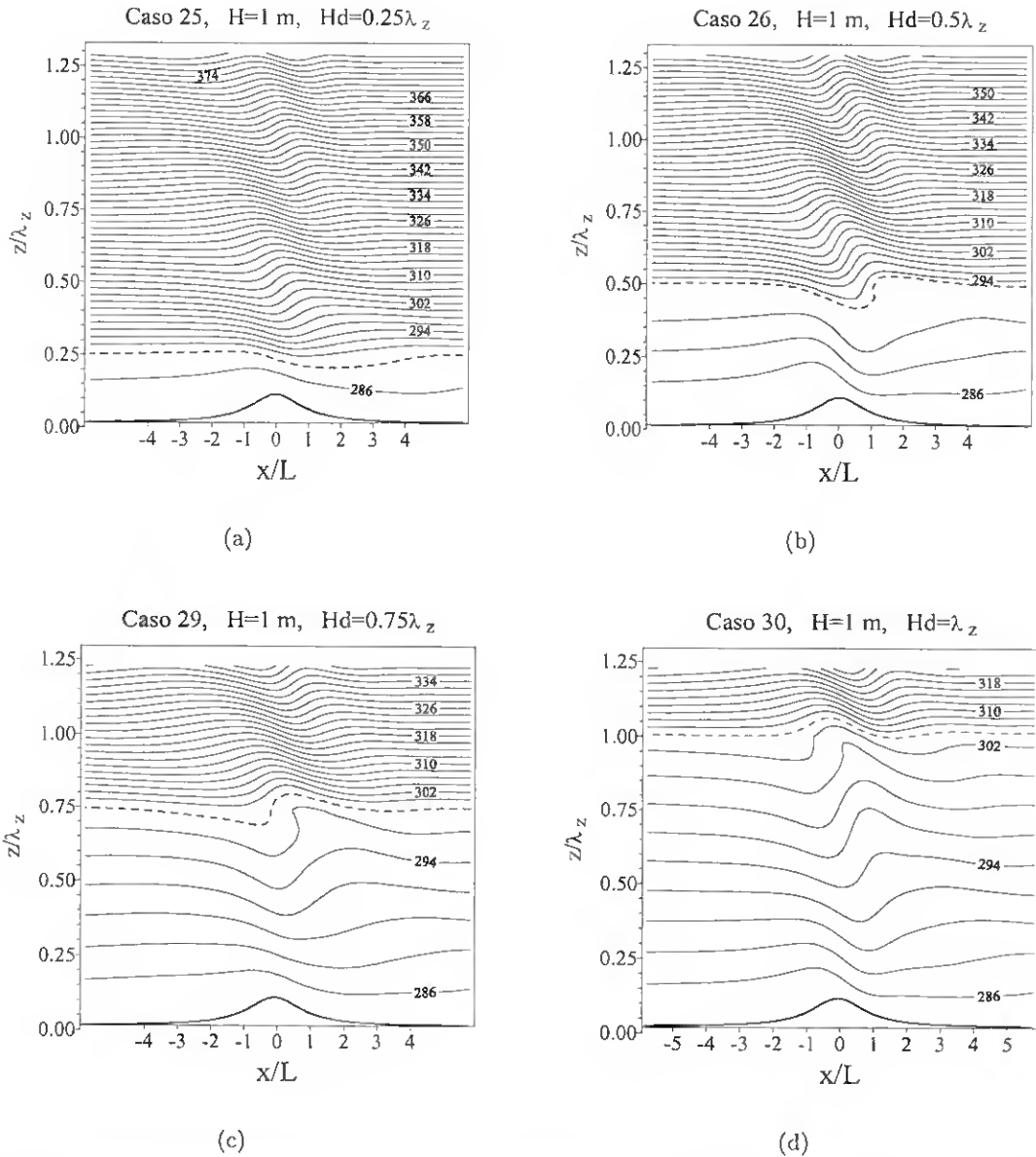


Figura 7.34: Campos das isentrópicas dos escoamentos especificados na tabela 7.2 para  $U_{rt}/L = 20$ . Em todos os casos  $L = 10000$  m e  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ ,  $H = 1$  m (caso acentuadamente linear), só varia  $H_d$ . Para facilitar a comparação com o caso não linear, as flutuações  $\theta'$  foram amplificadas 600 vezes.

Pelo número reduzido de casos especificados na tabela 7.2, compreende-se que este estudo é menos abrangente do que o anterior. De acordo com a teoria linear, a presença de uma camada superior mais estável pode aumentar a fluxo vertical de momento. No entanto, dado efeito da não linearidade, quando  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} < 1$  é de esperar que não se verifiquem ventos severos nem ORP a jusante da montanha. Teoricamente, de acordo com (7.84) não existem, neste caso, condições para a existência de ORP (ver tabela 7.2). Note-se que  $k_d < \ell_{in}$  e  $k_d < \ell_{sup}$ . É muito improvável que a não linearidade consiga produzir um efeito não hidrostático que torne possível a existência de ORP.

Na figura 7.34 mostram-se os gráficos com os campos das linhas isentrópicas para os casos lineares, e na 7.35 para os casos não lineares (ver tabela 7.2). Na figura 7.36 apresentam-se as evoluções

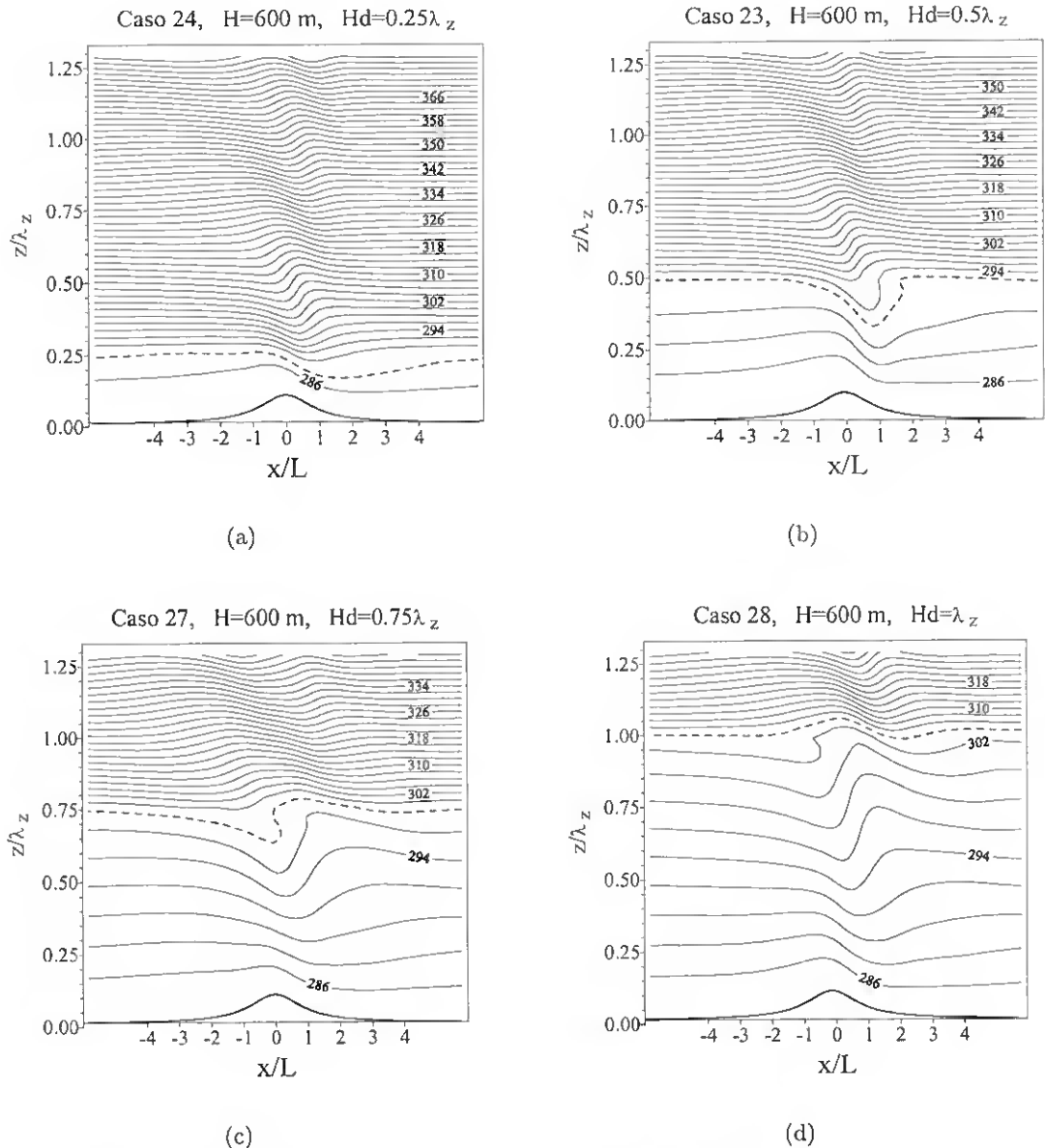


Figura 7.35: Como na figura 7.29 para para o caso não linear com  $H = 600$  m.

temporais de todos os casos da referida tabela. Nesta figuras pode-se constatar que:

- Em nenhum caso se geram ORP, mesmo nos não lineares. Os perfis de  $D_w/D_{lin}$  corroboram bem esta afirmação porque não evidenciam o comportamento típico das situações em que existem ORP.
- Há uma grande semelhança entre as isentrópicas dos casos lineares amplificadas 600 vezes e as obtidas para os casos não lineares, particularmente para os casos com  $H_d = \lambda_{z,in}/4$  e  $H_d = 3\lambda_{z,in}/4$  em que a reflexão parcial é destrutiva.
- Perto da estacionariedade, no caso  $H = 1$  m, os arrastos aproximam-se bastante dos valores teóricos para  $H_d = \lambda_{z,in}/4$  e  $H_d = 3\lambda_{z,in}/4$  onde a reflexão parcial é destrutiva. O mesmo não se pode dizer nos casos com  $H_d = \lambda_{z,in}/2$  e  $H_d = \lambda_{z,in}$  que subestimam os valores analíticos lineares 20% e 25% respectivamente, o que não é muito bom. Não se encontrou na literatura uma simulação similar em 2D para poder tirar conclusões mais definitivas sobre este comportamento. Em LR1 são feitas simulações deste género mas em 3D.

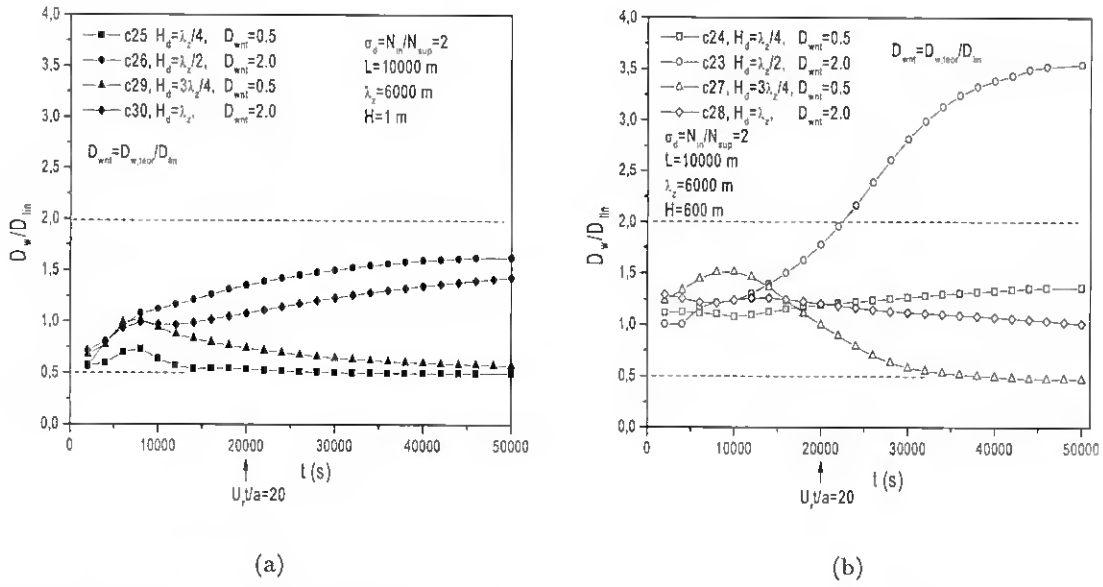


Figura 7.36: Evolução temporal do arrasto numérico normalizado com  $D_{lin}$  para os casos especificados na tabela 7.2.

- c) No caso não linear para  $H_d \leq \lambda_{z,in}/2$  a evolução temporal do arrasto mostra que o efeito predominante da não linearidade é a amplificação dos fenômenos verificados nos casos lineares. A similaridade dos campos das isentrópicas com os campos lineares análogos é significativa e corrobora a afirmação anterior. Se  $H_d = \lambda_z/4$  verifica-se uma amplificação do arrasto de 175% em relação ao valor linear o que é notável. A comparação das linhas isentrópicas nas figuras com  $H_d = \lambda_z/4$  permite constatar que no caso não linear a deflexão da isentrópica mais próxima de  $H_d$ ,  $\theta_r = 290$  K, é significativa se comparada com a isentrópica análoga do caso linear. Se  $H_d = \lambda_z/2$  a não linearidade produz uma amplificação do arrasto de 75% em relação ao valor linear, o que confirma que mesmo para  $\sigma_d < 1$   $H_d = \lambda_z/2$  continua a ser uma posição importante, tal como se comprovou com o modelo L53. É precisamente no campo das isentrópicas obtido com  $H_d = \lambda_z/2$  onde se verifica a maior deflexão em  $H_d$  relativamente ao caso linear análogo.
- d) Para  $H_d > \lambda_{z,in}/2$ , concretamente  $H_d = 3\lambda_{z,in}/4$  e  $H_d = \lambda_{z,in}$  os perfis de  $D_w/D_{lin}$  subestimam os seus análogos lineares que correspondem à reflexão parcial construtiva ( $D_w/D_{lin} = 2$ ). Chama a atenção o comportamento radicalmente oposto de  $D_w/D_{lin}$  quando  $H_d = 3\lambda_{z,in}/4$  relativamente à situação com  $\sigma_d > 1$  em que  $D_w/D_{lin}$  sobrestimava significativamente o valor linear. Portanto neste caso não linear com  $\sigma_d < 1$  a coincidência de  $H_d$  com  $H_d = 3\lambda_{z,in}/4$  não produz nenhum efeito importante associado à não linearidade.

Para concluir refira-se que este último estudo foi orientado no sentido de verificar se nos casos não lineares com  $\sigma_d < 1$  era possível a existência de ORP. Como sugestão de trabalho futuro seria interessante fazer o mesmo estudo de LR1 ( $\sigma_d < 1$ ) em casos não lineares 2D no sentido de verificar se existe periodicidade vertical do arrasto em função da localização de  $H_d$ . O estudo numérico de LR1 foi feito em 3D mas também não foi investigada numericamente esta última questão pois as experiências numéricas deste autor limitam-se ao intervalo de  $H_d$  [ $\lambda/2, \lambda$ ].

## 7.7 Simulação de ondas de reflexão total a jusante da orografia

Até agora, só se têm sido estudados os casos hidrostáticos com  $U_r = \text{const.}$  e  $\ell = \text{const.}$  em cada camada estratificada onde, do ponto de vista linear, só é possível a existência de reflexão parcial. Nesta secção, será simulado um caso moderadamente linear e não hidrostático, concebido para ser possível a existência de ORT usando um perfil mais realista de  $U_r$ .

### 7.7.1 Enquadramento

No caso de um escoamento não hidrostático, com duas camadas de estabilidade, já foi referido que a condição necessária para a existência de ORT é (7.84). Neste sistema de 2 camadas, o número  $k$  de uma onda ORT tem de satisfazer a condição  $\ell_{in} > k > \ell_{sup}$ . No início deste capítulo foi referido que a propagação das ondas gravíticas só era possível, para um dado comprimento de onda  $k$  e  $U_r = \text{const.}$ , quando  $U_r k < N$ . Esta condição pressupõe que a energia não pode escapar verticalmente. De facto uma análise da expressão (7.43) e da figura 7.1 permite verificar que, à medida que o escoamento se torna não hidrostático, a velocidade de grupo relativamente ao referencial Terra tende a ficar horizontal. É isto que acontece na camada superior que actua como um reflector. Na camada inferior, a energia pode propagar-se verticalmente mas reflecte-se repetidamente sem perda de amplitude na interface  $H_d$  e na superfície.

Nesta secção, a solução numérica das ondas ORT será validada com o modelo analítico de Scorer (1949) e Sawyer (1962)(SS60), o qual encontra-se descrito com pormenor no Anexo II.

### 7.7.2 Simulação numérica e discussão de resultados.

Como já foi referido, a solução numérica será validada com o modelo analítico SS60. Para facilitar a validação do modelo, os perfis de referência foram escolhidos de modo a existir só um número de onda dominante, para o qual se verifica a condição fundamental de existência de ORT. Estes perfis estão mostrados na figura 7.37. A atmosfera escolhida é de duas camadas com  $N$  dado por (7.74),  $\sigma_d = N_{in}/N_{sup} = 2$ , e com a descontinuidade de  $N$  na posição  $H_d = \lambda_z/2$ . As definições introduzidas na secção dedicada à reflexão parcial em atmosferas de 2 camadas são as mesmas. O perfil idealizado de  $U_r$  é o seguinte:

$$U_r(z) = \begin{cases} 0.0005z + U_s & 0 < z \leq 0.5H_d \\ U_r(0.5H_d) [1 + \tanh(z/H_d - 0.5)] & z > 0.5H_d \end{cases} \quad (7.94)$$

em que  $U_s$  é a velocidade junto da superfície. Note-se que para  $z > (H_d = \lambda/2)$ ,  $(\ell^2 - k_d^2) < 0$  e, portanto, é de esperar que as ondas sejam predominantemente evanescentes na vertical. Lembra-se que a grandeza  $k_d = 2\pi/L$  representa o número de onda dominante. Na figura 7.37 pode-se constatar o que já foi antes referido: que uma descontinuidade no perfil de  $N$  não implica o mesmo no perfil de  $\theta$ .

Tal como nos restantes casos, a orografia consiste numa montanha de Agnesi com  $H = 250$  m e  $L = 2000$  m. Os parâmetros do escoamento são  $N_{in} = 0.010472s^{-1}$ ,  $\sigma_d = 2$ ,  $U_s = 10m/s$ ,  $\lambda_z = 6000$  m.

As condições de fronteira impostas e a estratégia usada para definir o domínio de cálculo, são idênticas às do escoamento estudado na secção 7.4. Como se espera que as ondas sejam evanescentes a baixa altitude, o domínio vertical não precisa de ser muito extenso. Por outro lado, como as ORT se propagam horizontalmente a jusante da orografia, quase sem perdas, a dimensão horizontal do domínio é bastante elevada relativamente aos casos de escoamentos hidrostáticos com propagação vertical da

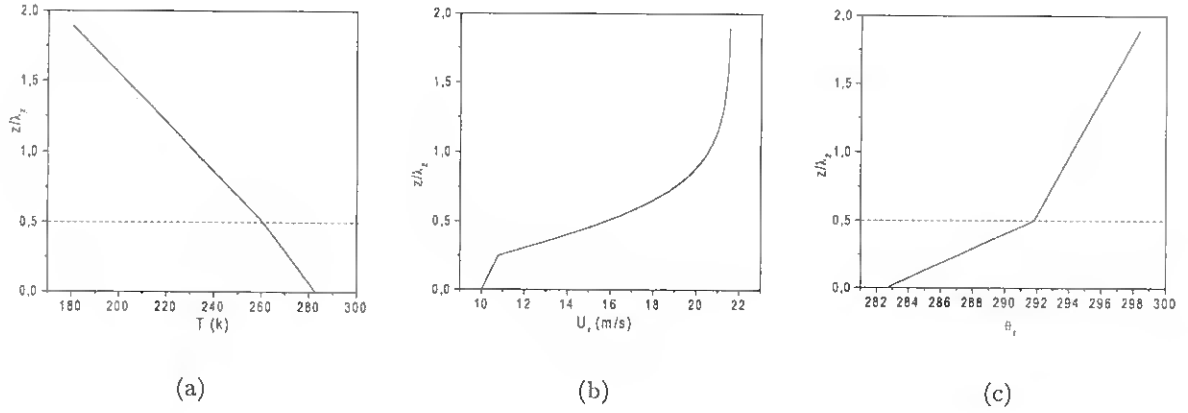


Figura 7.37: Perfis de referência (a) da temperatura, b) da componente horizontal do vento, e (c) da temperatura potencial, em função da altitude.

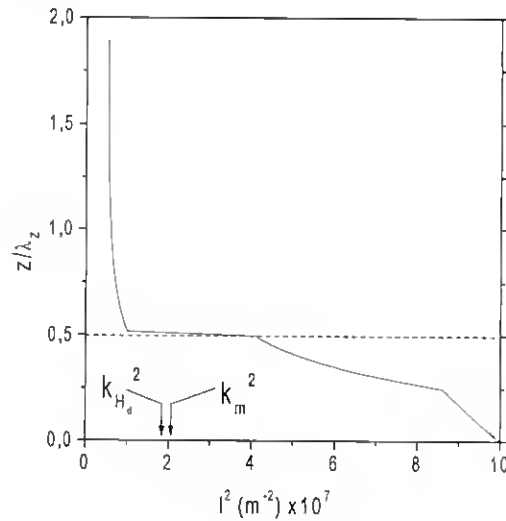


Figura 7.38: Perfis do parâmetro de Scorer  $\ell^2$  e da diferença  $\ell^2 - k_d^2$  em função da altitude.

energia das ondas. As dimensões do domínio são  $[30L, 2\lambda_z]$  e a montanha esta centrada em  $x_0 = 10L$ . A camada de absorção no topo, que neste caso não precisa de ser muito espessa, ocupa  $0.8\lambda_z$  e as camadas laterais têm uma espessura de  $2L$  cada uma. A malha tem  $[160,120]$  nós o que corresponde a uma resolução de  $[375,100]$  m (5.3 nós por  $L$  e 50 nós por cada  $\lambda_z$ ). O intervalo de integração no tempo é  $\Delta t = 10s$  e o esquema de integração usado é o FTLLI. Não é usada nenhuma parametrização para a turbulência.

Tal como foi feito nas secções anteriores foram calculadas as seguintes grandezas para caracterizar o escoamento:

1.  $H/L = 250/2000 = 0.13 < 1$
2.  $h/L = 209/2000 = 0.03 \ll 1$
3.  $h_i/L_{mo} = 65/130 = 0.5$

4.  $h/h_m = 209/200 = 1.05$
5.  $\hat{H} = N_{in}H/U_s = 0.010472 \times 250/10 \approx 0.25$
6.  $\hat{L} = N_{in}L/U_s = 0.010472 \times 2000/10 \approx 2$

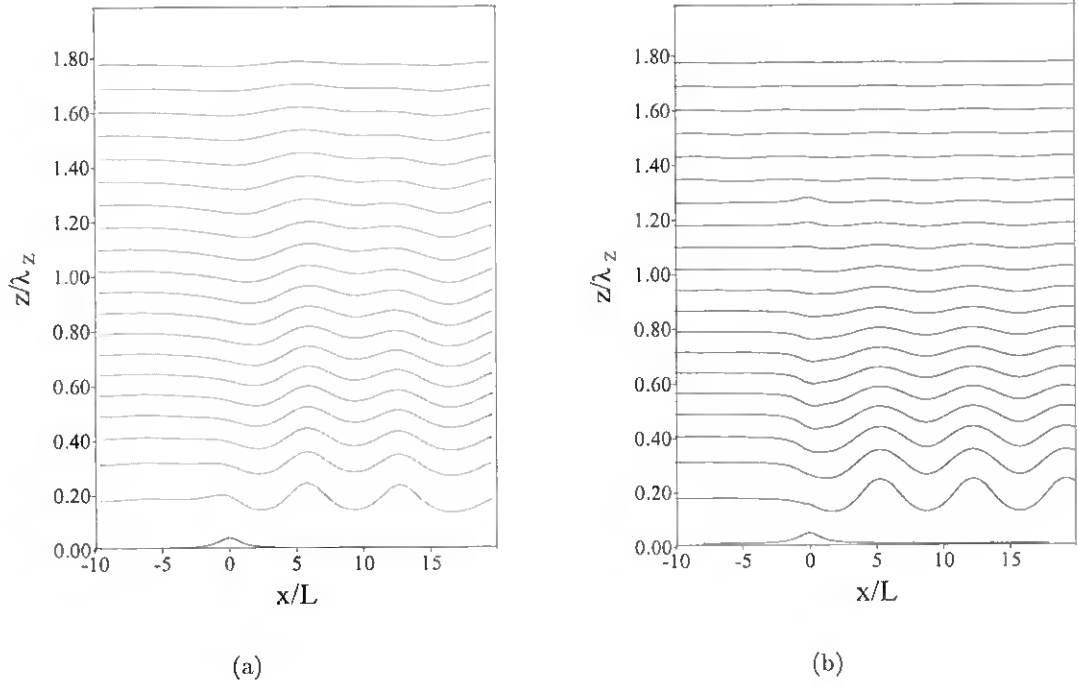


Figura 7.39: Linhas de corrente a) presente modelo , b) solução do modelo analítico de Scorer (1949) e Sawyer (1960).

Para estes cálculos, os valores de  $f$  e  $Ri_c^f$  são os mesmos do primeiro caso teste. A velocidade de fricção  $u_*$ , obtida de acordo com o método exposto na secção (8.1) é  $u_* = 0.244$  m/s. Tanto (1) como (5) mostram que o escoamento é moderadamente linear. De (2) pode-se deduzir que o escoamento é de camada limite externa, de (3) que os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte não estão confinados à subcamada interna. Note-se que o 1º nível de cálculo está a uma distância sempre inferior a  $h_i$ . Como  $h/h_m = 1.05$  (ponto (4)), a subcamada externa está acima da subcamada intermédia. Do ponto (5) pode-se inferir que o escoamento é moderadamente hidrostático. Neste caso não se usa nenhum esquema para a parametrização da turbulência.

Na figura 7.38 apresenta-se o perfil do parâmetro de Scorer  $\ell^2$ . Na descontinuidade  $z = H_d = \lambda_{z,in}/2$  o parâmetro  $\ell^2$  sofre uma variação brusca, criando as condições para a existência de ORT. Quando  $z = H_d$ ,  $\ell_{H_d} = 4.25 \times 10^{-4}$  m<sup>-1</sup>, portanto as ORT devem ocorrer para um número de onda  $k_m > \ell_{H_d}$ . De facto para este perfil de  $\ell^2(z)$ , o modelo SS60 prevê um valor próprio do número de onda  $k_m \approx 4.5 \times 10^{-4}$  m<sup>-1</sup> que é ligeiramente maior do que  $\ell_{H_d}$ . O comprimento de onda associado a  $k_m$  é  $\lambda_m^{SS60} = 13963$  m. O comprimento de onda obtido com FLEX é  $\lambda_m^{FLEX} \approx 14350$  m, sendo 3% maior que  $\lambda_m^{SS60}$ .

Na figura 7.39 apresentam-se as linhas de corrente obtidas com FLEX e com o modelo teórico SS60. A similaridade entra as duas figuras é notável, particularmente para  $z < \lambda_{z,in}$ . Como a solução

do modelo SS60 aqui implementado é aproximada, quando  $z$  é muito elevado ou pequeno (junto do obstáculo) a qualidade dos resultados piora ligeiramente.

Para ilustra melhor a diferença entre as amplitudes previstas por ambos os modelos, na figura 7.40b mostram-se os perfis das amplitudes dos deslocamentos das linhas de corrente na secção  $x/L = 12.5$ . Constata-se que o perfil numérico subestima em aproximadamente 10% o analítico. Muito provavelmente, uma resolução maior melhoraria este desempenho do FLEX. Na figura 7.40a apresenta-se o perfil da amplitude complexa normalizada, em função da altitude, para o modo ( $k_m \approx 4.5 \times 10^{-4} m^{-1}$ ). A similaridade entre as duas figuras fala por si.

Como as ondas de propagam predominantemente na horizontal, o transporte vertical de quantidade de movimento deve tender para zero, quando  $z \rightarrow H_d$ . É precisamente este comportamento que se verifica na figura 7.41a. Quando  $z \approx H_d$  o valor de  $M(z)/D_{lin}$  é 5 vezes menor do que o teórico. Este comportamento está em plena concordância com o do arrasto, exposto na figura 7.41b. Quando  $U_{rt}/L \rightarrow 90$   $D_w/D_{lin}$  tende para um valor mínimo. O arrasto normalizado pelo valor linear atinge um valor mínimo de 0.84 para  $U_{rt}/L = 90$  (18000s), aumentando ligeiramente a partir desse valor. É interessante verificar a semelhança entre o perfil do arrasto da figura 7.41b e o seu análogo obtido para o caso 4, mostrado na figura 7.28d. Esta semelhança prova que as ORP têm origem num fenómeno de reflexão.

Da análise destes resultados pode-se concluir que FLEX consegue simular bem escoamentos onde se produzem ORT. É de salientar que o modelo SS60 é uma excelente alternativa a outros modelos mais complicados para o cálculo analítico das ORT.

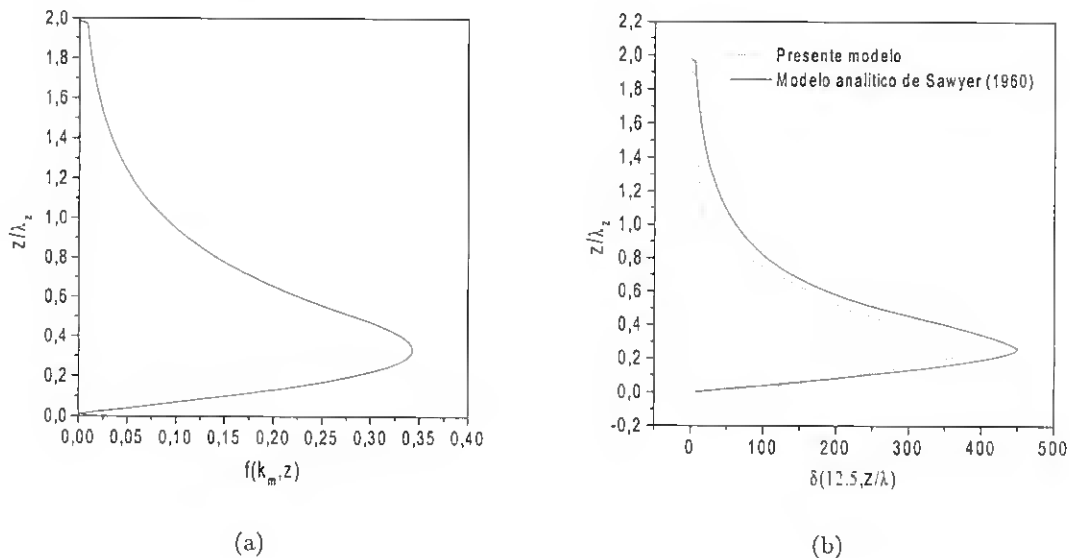


Figura 7.40: (a) Perfil do valor normalizado da amplitude complexa, em função da altitude, para o modo  $k_m \approx 4.5 \times 10^{-4} m^{-1}$  (modelo analítico de Sawyer, 1960). (b) Deslocamentos das linhas de corrente em  $x/L = 12.5$ , calculados com o modelo analítico de Sawyer (1960) e com o presente modelo.

## 7.8 Tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado.

A tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado tornou-se um caso de estudo clássico, uma vez que se trata de uma grande tempestade de vento que foi directamente observada no local com

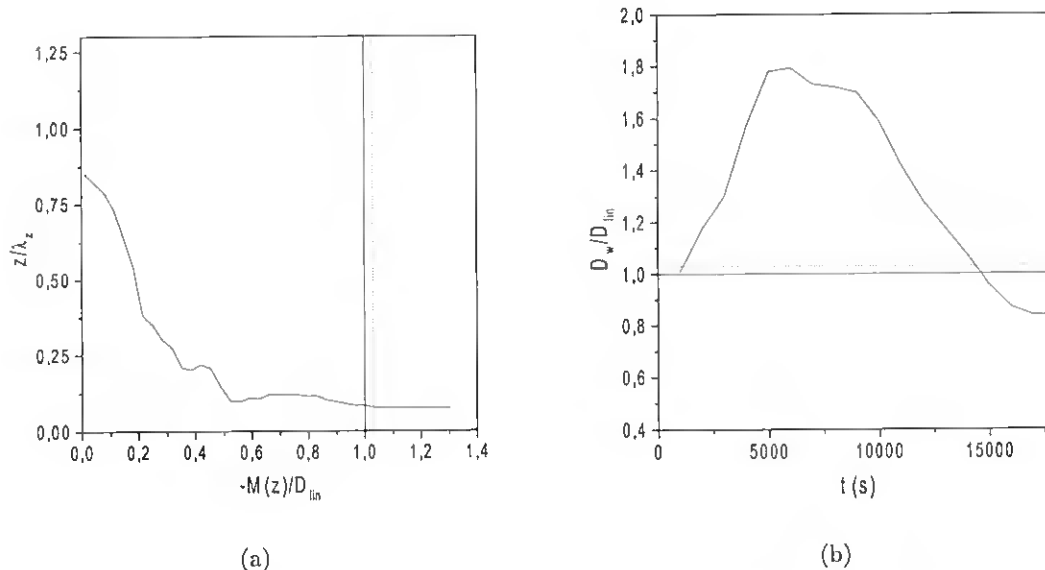


Figura 7.41: (a) Fluxo normalizado pelo arrasto linear (expressão 7.45) para  $U_r t/L = 90$ , b) evolução temporal do arrasto normalizado pelo arrasto linear. O arrasto linear é corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert (1969).

diferentes meios, incluindo aviões instrumentados. As características da tempestade são detalhadamente descritas em diferentes trabalhos realizados por Lilly e seus colaboradores (Lilly e Zipser, 1972, Lilly e Kennedy, 1973, Klemp e Lilly, 1975, 1978, Lilly, 1978), e ainda em Smith (1977) e D86. Muitas simulações numéricas têm sido realizadas por diferentes autores mas, tratando-se de um escoamento tão complexo, constitui sempre um bom caso de estudo de escoamentos com perfis não homogêneos de  $U_r(z)$  e  $N(z)$ .

O artigo mais recente encontrado na literatura sobre esta tempestade é o de Doyle et al. (2000). Este trabalho, no âmbito da experiência MAP, faz um estudo inter-comparativo das simulações de 11 modelos numéricos não hidrostáticos, como o objectivo de estudar a dinâmica da rebentação das ondas gravíticas geradas em orografia de mesoscala. A similaridade entre os resultados dos 11 modelos aplicados ao caso 2D, permitiu a estes autores concluir que, apesar da não linearidade associada ao processo de rebentação das ondas, as estruturas não estacionárias associadas ao processo de rebentação são bastante bem previstas pela maioria dos modelos numéricos. Este artigo é uma reconfirmação das conclusões de PC79. Por isso os resultados destes últimos autores serão tomados como referência para a validação de FLEX.

D86 apresenta um estudo mais detalhado da origem da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder, Colorado, concluindo que o mecanismo não linear de amplificação associado à presença de variações bruscas no perfil da estabilidade joga um papel importante no processo de evolução para estados de arrasto elevado. Nesta secção o estudo de D86 será aprofundado e serão analisados alguns fenómenos à luz dos resultados obtidos na secção 7.6.

As condições iniciais são horizontalmente homogêneas e serão usadas nestas simulações como perfis de referência. Estes foram obtidos por radiossondagem às 1200 UTC em 11 de Janeiro de 1972 em Boulder e, depois de serem alisados e ligeiramente ajustados na troposfera, tomam o aspecto dos perfis apresentados na figura 7.42. Refira-se que estes perfis são os mesmos empregues por PC79 na sua simulação deste mesmo caso. O modelo usado por PC79 é bastante similar a FLEX, pois é anelástico

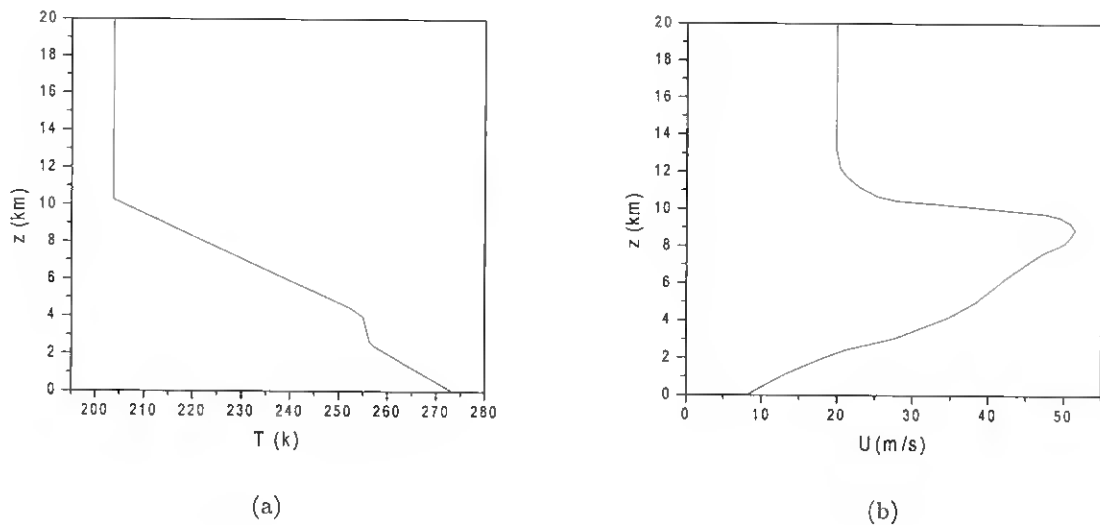


Figura 7.42: Perfis verticais a) de vento horizontal e b) de temperatura usados para simular a tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder.

e usa uma transformada da coordenada vertical  $z$  muito similar à das coordenadas generalizadas.

### 7.8.1 Simulação numérica e discussão de resultados.

Os parâmetros usados na simulação são os seguintes: na superfície a velocidade é igual a  $U_s = 8 \text{ m/s}$  e  $N_s = 0.01066 \text{ s}^{-1}$ ,  $H = 2000 \text{ m}$  e  $L = 10000 \text{ m}$ . A resolução da malha de cálculo e o intervalo de integração escolhidos são similares aos de PC79. O domínio tem  $[150, 29] \text{ km}$ . A malha tem  $[300, 84]$  nós, o que dá uma resolução de  $[500, 341] \text{ m}$ . O passo de tempo para a integração é  $\Delta t = 4 \text{ s}$ . Tal como em PC79 e D86, usa-se o fecho de Lilly (1962) para parametrizar os efeitos de subescala.

Nas figuras 7.43 e 7.44 apresentam-se as evoluções temporais dos campos das linhas isentrópicas obtidos com FLEX e PC79 respectivamente. A similaridade entre as duas figuras é significativa. Nestas figuras pode-se constatar que o 1º nível crítico determinado numericamente ocorre na altura aproximada de  $z \approx 11 \text{ km}$ , i.e., perto da tropopausa. A instabilidade convectiva que se desenvolve neste nível aumenta continuamente com o tempo, revelando-se na forma de uma grande deflexão acima do topo da montanha com aproximadamente 6 km de profundidade (ver figura 7.43f). Na figura 7.45 mostra-se o campo observado das linhas isentrópicas desta tempestade onde se pode ver que a maior deflexão tem aproximadamente 6 km de profundidade. De facto, as divergências entre as simulações numéricas com FLEX e PC79 e o campo observado são bastante poucas, e muito provavelmente podem estar associadas às diferenças existentes entre as orografias empregue na simulação e a real. Como já foi antes referido os perfis de referência de PC79 são ligeiramente diferentes dos observados. Doyle et al. (2000) usam os perfis originais com os 11 modelos testados. Da comparação destes resultados com os de FLEX e PC79 chegou-se à conclusão que, na troposfera, o uso dos perfis originais praticamente não introduz nenhuma modificação nos resultados relativamente aos obtidos com os perfis de PC79. Note-se que a isentrópica correspondente à maior deflexão na figura 7.43f atinge o seu máximo a jusante da montanha subindo depois quase até à tropopausa. É natural que uma deflexão desta magnitude esteja associada a ventos fortíssimos a jusante da orografia. Como se pode observar acima da troposfera o escoamento é bastante complexo, sendo necessário realizar um estudo das causas de tal comportamento. Por outro lado, a jusante da montanha aparecem umas ondas com um comprimento

de onda próximo da semi largura  $L$ . Estas ondas a jusante são muito similares às ORP mas é preciso verificar esta hipótese.

Na figura 7.46a-b apresenta-se a evolução temporal do arrasto numérico calculado com FLEX e PC79. Em ambas as figuras vê-se que  $D_w$  evolui para valores elevados com o decorrer do tempo. Esta tendência de amplificação de  $D_w$  não poderá manter-se indefinidamente, devendo notar-se que esse comportamento resulta, em parte, de se tratar de simulações invíscidas com uma condição fronteira de livre escorregamento. Uma análise das figuras 7.46 mostra que, apesar da boa comparação entre os campos de escoamento, existem diferenças significativas na evolução temporal do arrasto ondulatório. Como o arrasto ondulatório é uma grandeza de segunda ordem é de esperar que exista amplificação de pequenas diferenças entre as duas simulações. Por outro lado, a evolução do arrasto em regimes fortemente não lineares depende da inicialização do modelo (feita de modo abrupto em FLEX) e da dissipação associada aos esquemas numéricos. Infelizmente, no artigo de Doyle et al. (2000) não é apresentada nenhuma comparação das evoluções temporais de  $D_w$  previstas pelos 11 modelos numéricos não hidrostáticos utilizados, pelo que é difícil chegar a conclusões sobre qual dos modelos melhor captura este fenómeno.

Para calcular o perfil de  $N(z)$  a partir de  $T_r(z)$  (ver figura 7.42) foi usada a expressão (2.77). Uma vez determinado  $N(z)$ , o estado de referência é calculado mediante integração numérica (ver secção 3.3). Note-se que se deve ter bastante cuidado no cálculo de derivadas em ordem a  $z$ , necessárias para determinar  $N(z)$  e  $\ell(z)$ . Os perfis de  $N(z)$ ,  $\ell^2$  e  $\ell^2 - k_d^2$  são apresentados na figura 7.47. Como se pode verificar, o escoamento é acentuadamente não homogéneo possuindo variações bastante bruscas de  $N(z)$  em dois níveis:  $z \approx 4.5$  km e  $z \approx 10.4$  km. Pelo comportamento do perfil de  $\ell^2 - k_d^2$  pode concluir-se que o fenómeno de reflexão total (ORT) não tem predominância. Já o mesmo não se pode dizer de fenómenos de reflexão parcial, associados a variações bruscas de  $\ell(z)$ , e de rebentação das ondas. Da análise dos campos das isentrópicas apresentadas na figura 7.43 pode concluir-se da existência de pelo menos um nível crítico e que muito provavelmente as ondas observadas a jusante da orografia são do tipo ORP. Para verificar a existência destes fenómenos com algum rigor e estudar por separado a sua influência na ocorrência de arrastos elevados e ventos severos a jusante é preciso fazer uma análise do perfil de  $\ell(z)$ .

Anteriormente viu-se que em escoamentos homogéneos era fácil determinar teoricamente os níveis  $H_d$  (descontinuidade no perfil de  $N$ ) e  $H_c$  (nível crítico). No entanto, essa determinação é complexa em casos com perfis de  $U_r$  e  $N$  não homogéneos, como é o presente. Para escoamentos acentuadamente hidrostáticos, PC79 usam a aproximação WKB para generalizar o resultado previsto pela teoria de Long (1953) para determinar  $H_c$  nos casos homogéneos em  $U_r$  e  $N$ :

$$\int_0^{H_c} \ell(z') dz' = (2n + 3/2\pi) \quad \text{com} \quad (n = 0, 1, 2) \quad (7.95)$$

A expressão 7.95 constitui uma boa forma de estimar  $H_c$  mesmo em casos fortemente não lineares. No entanto, como 7.95 está baseada na aproximação WKB não deve ser usada para estimar a localização de um nível do tipo  $H_d$  pois este implica uma variação brusca de  $\ell(z)$  na distância  $\Delta z \sim 1/\ell(z)$ . No presente caso o valor de  $H_{dn}$  é tomado como o zero da função

$$\delta_{H_{dn}} = \ell(z)z - (n\pi) \quad \text{com} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.96)$$

O  $H_d$  calculado para  $n = 1$  corresponde a  $H_{d1} = \lambda_z/2$ , localização que foi considerada crítica para a geração de ORP (ver secção 7.6). Daqui em diante considerar-se-á que os níveis  $H_{d1}$  ou  $H'_{d1}$  se referem exclusivamente a  $H_{d1} = H'_{d1} = \lambda_z/2$ .

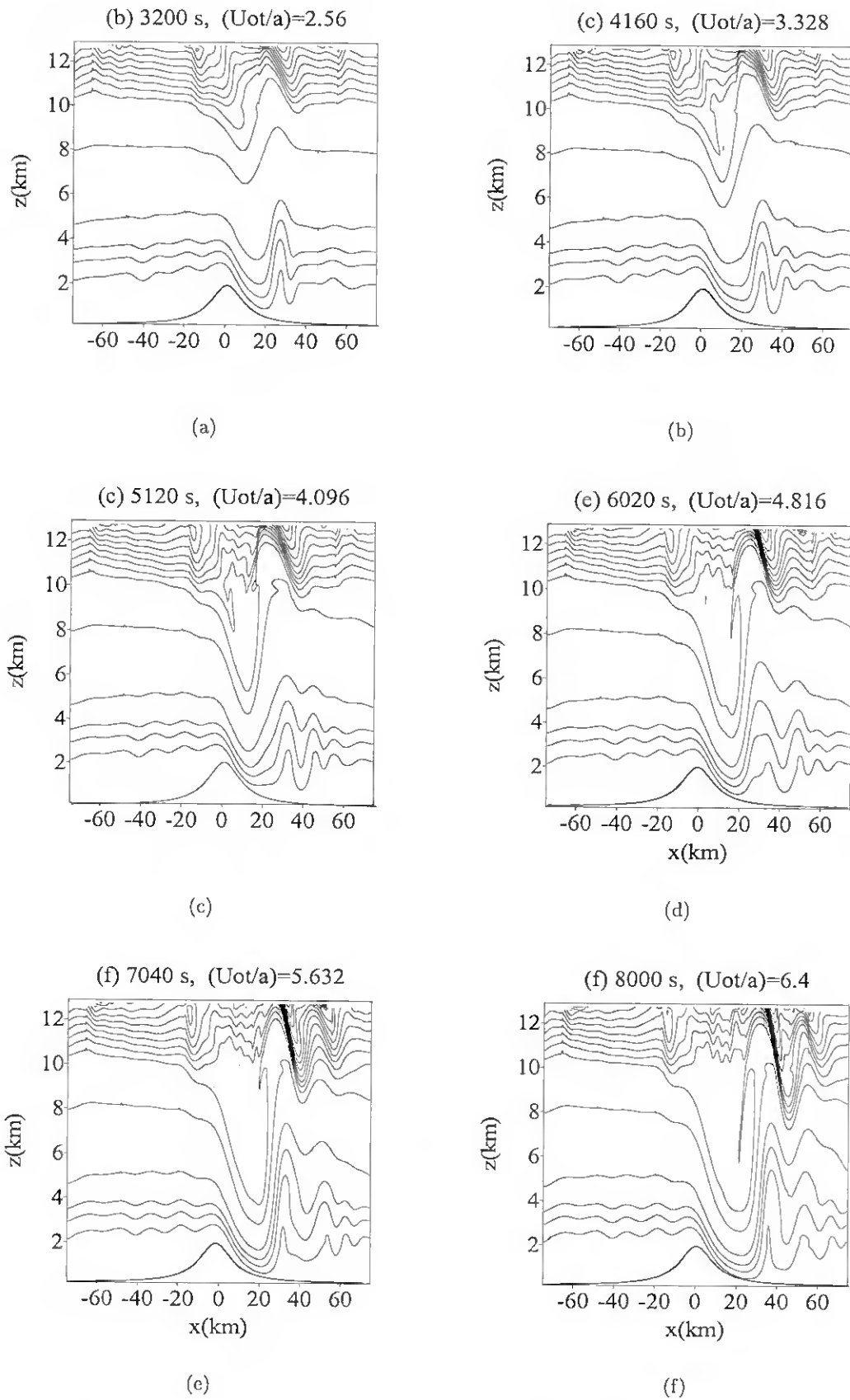


Figura 7.43: Campo das linhas isentrópicas. Simulação com FLEX da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado. Em cada figura esta indicado o instante correspondente ao campo representado.  $H = 2000$  m e  $L = 10000$  m.

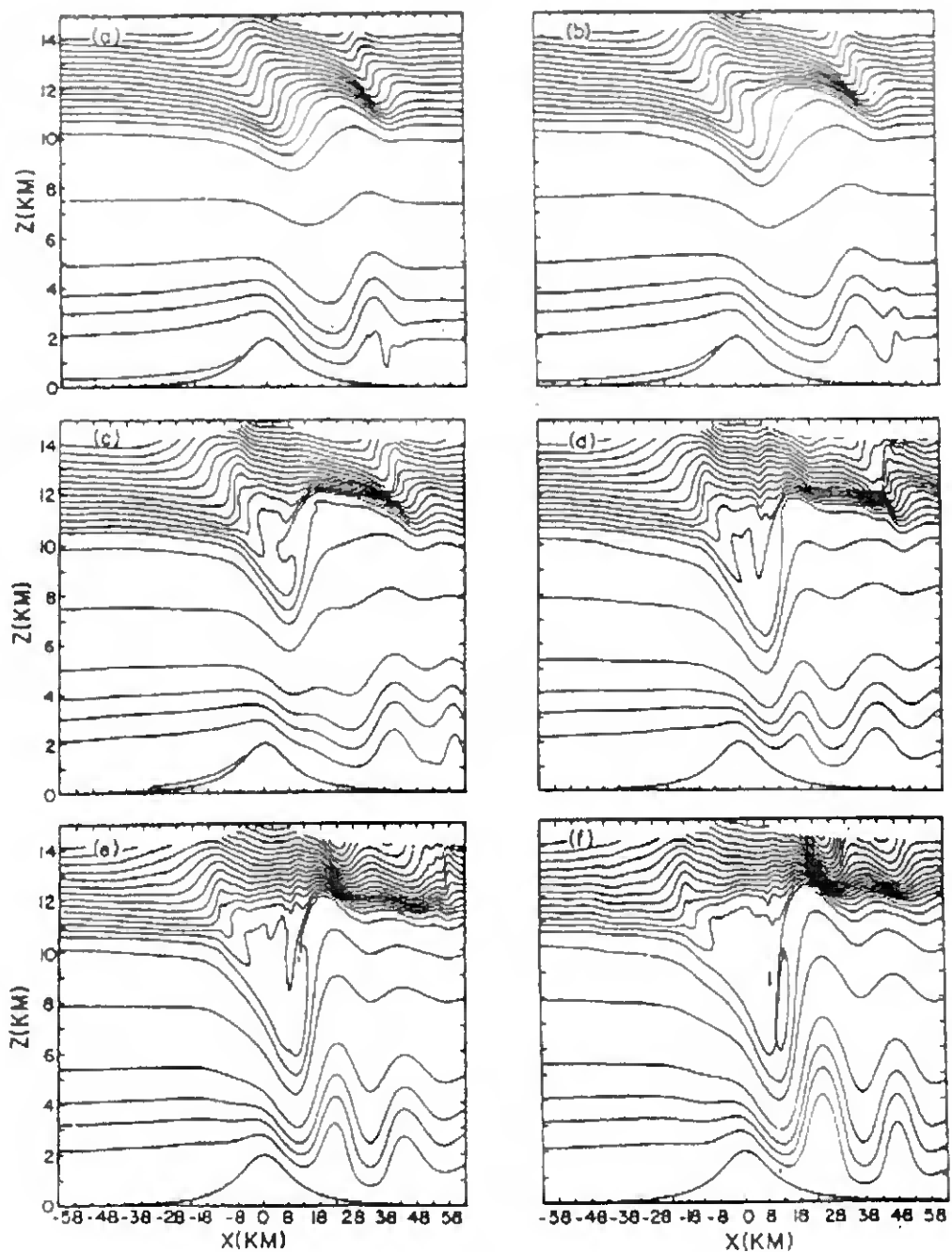


Figura 7.44: Campo das linhas isentrópicas. Simulação de PC79 da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder. Os instantes correspondente às figuras representadas são: a) 1600 s, b) 2240 s, c) 2880 s, d) 3520 s, e) 4160 s e f) 4800 s (retirado de PC79).

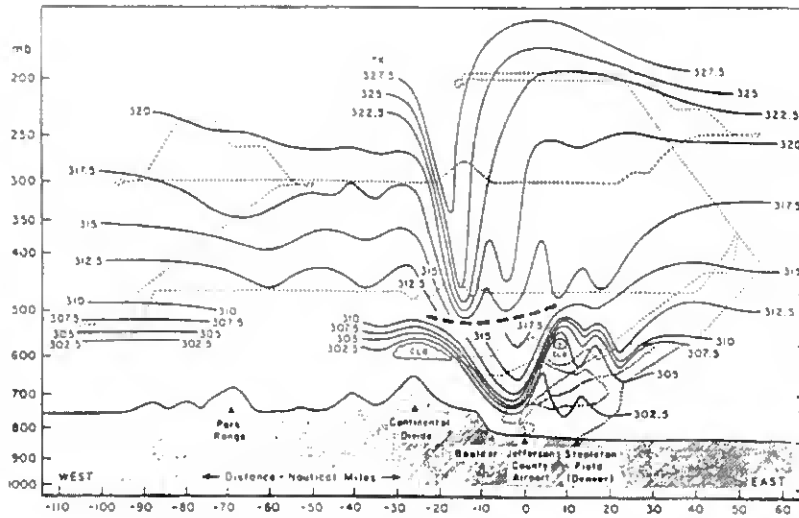


Figura 7.45: Campo das linhas isentrópicas da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado (Lilly, 1978).

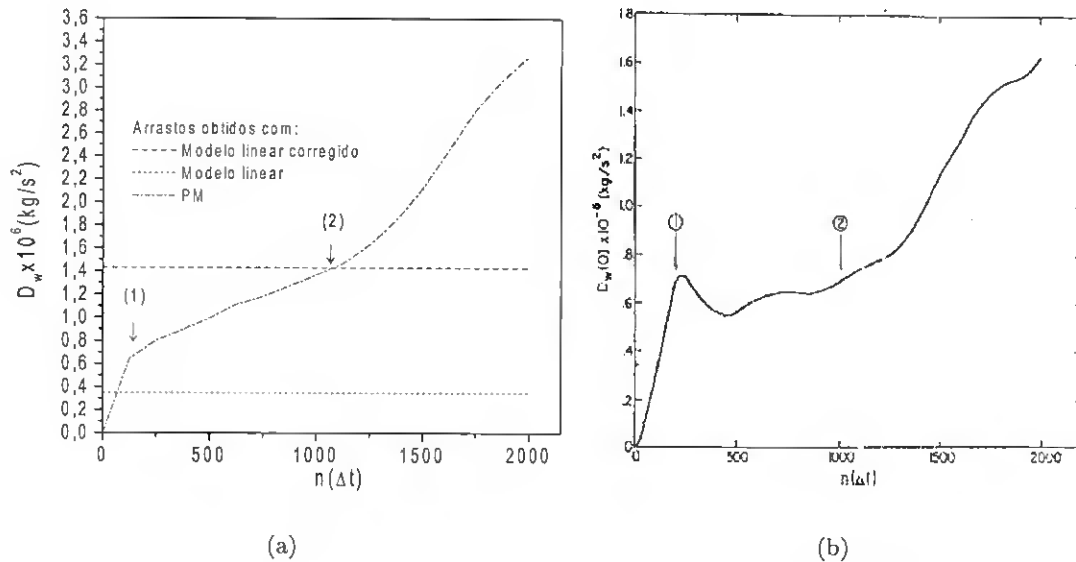


Figura 7.46: Evolução temporal do arrasto. (a) FLEX, (b) Simulação de PC79. A seta (2) na figura (a) indica o tempo em que é atingida a inclinação crítica na estratosfera inferior (4000 s). Na simulação de Peltier e Clark (1979) este tempo é assinalado com o número (2) e é de aproximadamente 4000 s ( $\Delta t = 4s$ ). O arrasto representado com a linha descontínua foi corrigido com a expressão (7.64) de Miles e Huppert(1969).

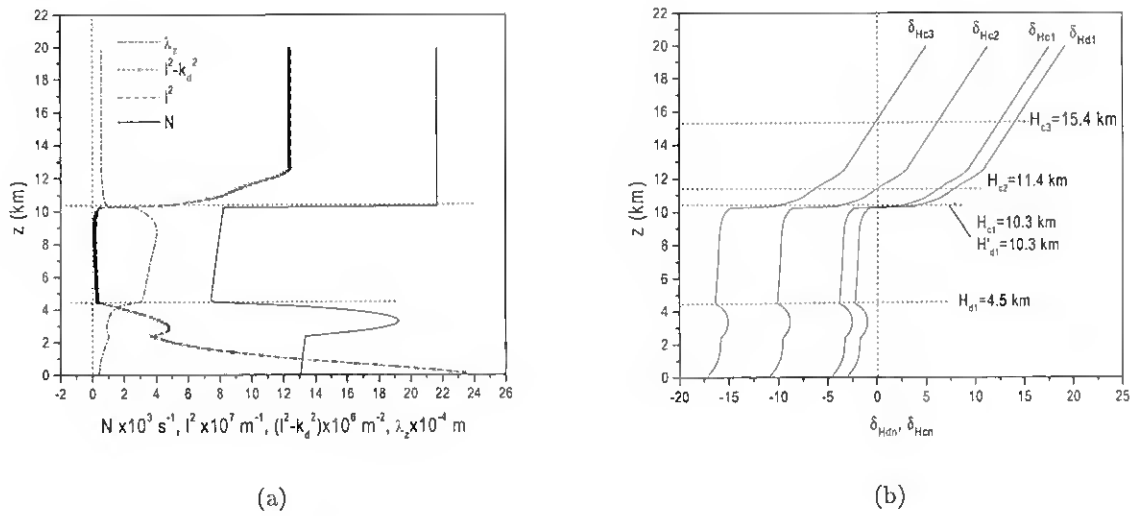


Figura 7.47: Perfis verticais (a) da estabilidade  $N$ , do número de Scorer  $\ell^2$ , da diferença  $\ell^2 - k_d^2$  e do comprimento de onda vertical  $\lambda_z$ , determinados com os perfis de PC79; (b) funções  $\delta_{H_{dn}}$  e  $\delta_{H_{en}}$  dadas pelas equações 7.96 e 7.97 respectivamente.

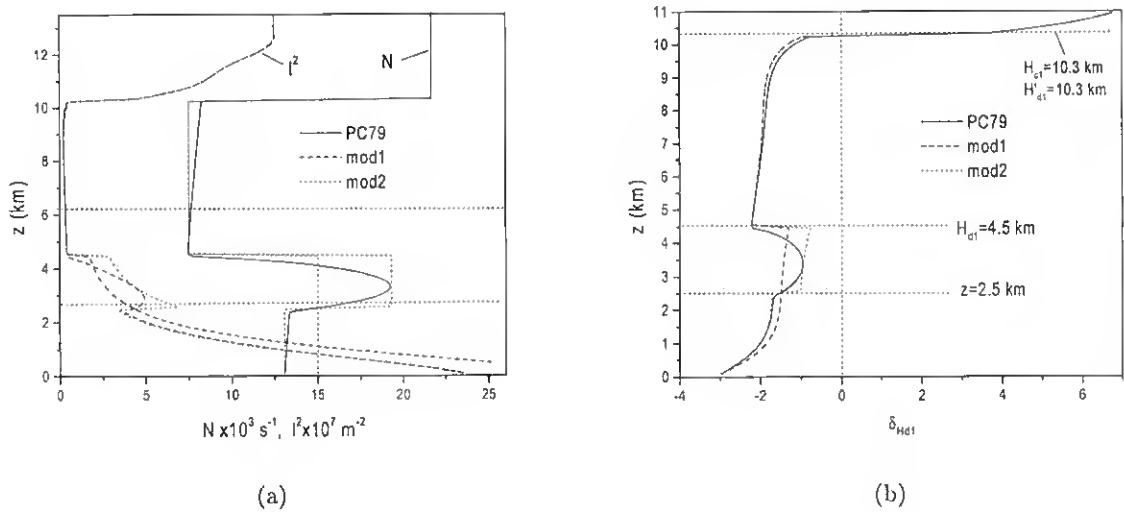


Figura 7.48: Perfis verticais (a) da estabilidade  $N$  e do número de Scorer  $\ell^2$  obtidas com os perfis PC79 e com as duas modificações introduzidas aos mesmos; mod1 e mod2; (b) da função  $\delta_{H_{dn}}$  obtida com mod1 e mod2.

No presente caso, por coerência, os níveis críticos  $H_{cn}$  são determinados de modo similar a  $H_{dn}$ , i.e., como o zero da função

$$\delta_{H_{cn}} = \ell(z)z - (2n + 3/2\pi) \quad \text{com} \quad (n = 0, 1, 2) \quad (7.97)$$

A validade das expressões (7.96) e (7.97) é discutível. Poderia argumentar-se, por exemplo, que, em lugar de se tomar o valor local  $\ell(z)$ , seria preferível tomar o seu valor médio calculado desde 0 até  $z$ , mas nesse caso as descontinuidades ou variações bruscas de  $\ell(z)$  poderiam não ser contempladas. Apesar de (7.96) e (7.97) serem estimativas um pouco grosseiras para a localização de  $H_d$  e  $H_c$  elas são fisicamente realistas e captam todas as variações importantes de  $\ell(z)$ , particularmente as mudanças bruscas.

Na figura 7.47 estão mostrados os perfis de  $\delta_{H_{d1}}$ ,  $\delta_{H_{c1}}$ ,  $\delta_{H_{c2}}$  e  $\delta_{H_{c3}}$  obtidos com as expressões (7.96) e (7.97) respectivamente. O perfil de  $\delta_{H_d}$  mostra que, em rigor, só existe uma altitude na qual esta função possui um zero que é 10.3 km e que coincide com o  $H_{c1}$ . Esta variação brusca designou-se como  $H'_{d1}$  para a diferenciar da variação brusca de  $\ell(z)$  observada em  $H_{d1} = 4.5$  km (também para  $n = 1$ ). Aos 10.3 km existe uma grande variação de  $\ell(z)$  que corresponde ao caso em que  $\sigma_d < 1$ . Na secção 7.6 já se viu que neste tipo de escoamento, mesmo sendo fortemente não linear, a coincidência de  $H_d$  e  $H_c$  não produzia nenhum efeito significativo para além de uma ligeira amplificação de  $D_w$  em relação ao caso linear, com tendência para se atenuar com o decorrer do tempo.

O perfil de  $\delta_{H_{d1}}$  não possui nenhum zero na variação brusca de  $\ell(z)$  em  $z = 4.5$  km, no entanto está bastante próximo de zero. É importante verificar se esta proximidade constitui uma condição suficiente para a geração de ORP e se o seu contributo é importante para o aumento de  $D_w$ .

Como se pode constatar na figura 7.47b, os perfis de  $\delta_{H_{c1}}$ ,  $\delta_{H_{c2}}$  e  $\delta_{H_{c3}}$  possuem zeros em  $H_{c1} = 10.3$  km,  $H_{c1} = 11.4$  km e  $H_{c1} = 15.4$  km. É de realçar que os níveis críticos  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  estão muito próximos. Esta pode ser uma causa importante para a grande deflexão das isentrópicas que se verifica acima do topo da montanha.

O estudo que será feito a seguir pretende verificar qual é o contributo de  $H_{cn}$  e  $H_{d1}$  para a ocorrência de regimes de arrasto elevado e ventos severos a jusante da orografia. Será estudada qual é a influência que a proximidade entre os níveis  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  tem nos fenómenos anteriormente mencionados e qual é o efeito da mobilidade e da intensidade da variação brusca de  $\ell(z)$  em  $H_{d1}$ .

Para realizar o referido estudo não é conveniente usar o perfil  $\ell(z)$  calculado a partir dos perfis de PC79 porque, devido à sua complexidade, é mais difícil de manipular. Neste caso será definido um perfil de  $\ell(z)$  idealizado, em que se tenta manter as características qualitativas fundamentais do perfil observado. Para o efeito procede-se a duas modificações do perfil de  $N(z)$ , apresentadas na figura 7.48a juntamente com os perfis correspondentes de  $\ell(z)$ , mantendo-se inalterado o perfil de  $U_r(z)$  usado por PC79. O perfil modificado 1 (mod1) tem 3 camadas com  $N = \text{const}$  em cada uma delas e o perfil modificado 2 (mod2) tem 4 camadas do mesmo tipo. Na primeira camada de mod1 (junto da superfície)  $N_1 = 0.015s^{-1}$  foi definida de modo a que o arrasto calculado fosse muito similar ao seu análogo determinado com os perfis de PC79. Por coincidência este valor é muito próximo do valor médio de  $N$  calculado para o intervalo  $z$  [0,4.5] km. Assim, os valores de  $N$  nas 3 camadas de mod1 são:  $N_1 = 0.015s^{-1}$  [0,4.5] km,  $N_2 = 0.0075s^{-1}$  [4.5,10.3] km e  $N_3 = 0.0217s^{-1}$  [10.3,29] km. Os valores análogos para mod2 são:  $N_1 = 0.0131s^{-1}$  [0,2.5] km,  $N_2 = 0.0193s^{-1}$  [2.5,4.5] km,  $N_3 = 0.0075s^{-1}$  [4.5,10.3] e  $N_4 = 0.0217s^{-1}$  [10.3,29] km. Na figura 7.48b mostram-se, a título de exemplo, os perfis de  $\delta_{H_{d1}}$  obtidos com os perfis PC79, mod1 e mod2. Neste caso, os gráficos só são mostrados até à tropopausa porque as modificações só afectam a troposfera.

Na figura 7.49a mostram-se as evoluções temporais dos arrastos  $D_w$  obtidos com os perfis PC79, mod1 e mod2. Como se pode constatar, as evoluções de mod1 e PC79 são quase idênticas, enquanto que o perfil obtido com mod2 apresenta valores superiores para o arrasto. Na figura 7.49b está

representado o campo das isentrópicas obtido com mod1 para o instante  $t = 8000$  s. A comparação desta figura com a sua análoga obtida com os perfis de PC79 (ver figura 7.43f) permite concluir que estas são muito similares e que, portanto, os perfis PC79 e mod1 podem ser considerados equivalentes.

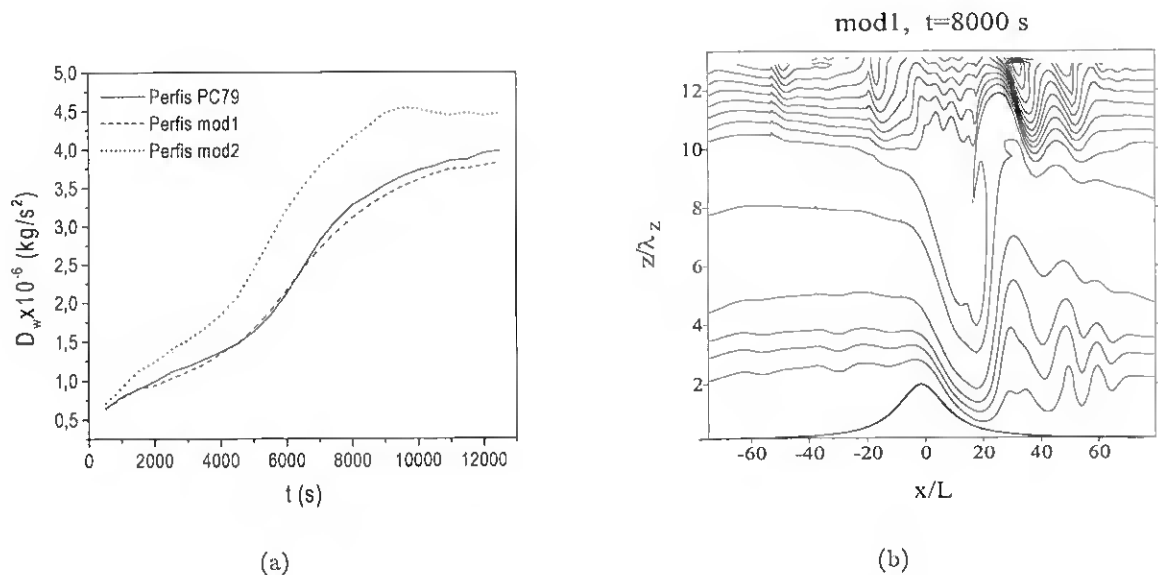


Figura 7.49: (a) Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis PC79, mod1 e mod2; (b) campo das linhas isentrópicas obtido com mod1.

Na sequência da idealização do perfil de estabilidade, mostram-se na figura 7.50a os perfis mod1 modificados de forma a poder estudar em separado a influência de  $H_{cn}$  e  $H_{d1}$  no arrasto  $D_w$ . O perfil mod1 de  $\delta_{H_{d1}}$  foi manipulado de modo a excluir o nível crítico  $H_{c1}$ . Neste caso, procedeu-se a uma manipulação do perfil da velocidade  $U_r(z)$  na troposfera, conforme mostrado na figura 7.50b. Neste caso particular, a exclusão do nível  $H_{c1}$  implicou a eliminação dos restantes níveis críticos. Para obter o perfil de  $\delta_{H_{c1}}$ , eliminando a variação brusca que acontece em  $H_{d1} = 4.5$  km, o perfil mod1 de  $N$  na troposfera foi tomado constante e igual ao valor médio calculado com os valores das duas primeiras camadas. O valor determinado foi  $N = 0.011\text{s}^{-1}$  no intervalo  $[0, 10.33]$  km. Neste caso, o perfil mod1 de  $U_r(z)$  não foi alterado.

Nas figura 7.51a,b apresentam-se os campos das isentrópicas obtidos com os perfis ilustrados na figura 7.50a. Como se pode constatar, a rebentação das ondas verifica-se claramente no caso sem  $H_{d1}$  mas a deflexão é significativamente menor. Também as ondas a jusante da montanha têm pouca relevância. No caso em que foi excluído  $H_{c1}$ , estas ondas evidenciam uma deflexão e amplitude notáveis mas decaem imediatamente a seguir à primeira grande oscilação. Uma análise destes dois comportamentos e do caso misto (caso com perfil mod1 mostrado na figura 7.49b) permite concluir que os processos de rebentação associados aos níveis críticos induzidos e os de geração de ondas ORP interagem. De facto, tanto a deflexão das isentrópicas por baixo do nível crítico que marca o início da tropopausa, como a amplitude e persistência das ondas a jusante da orografia, mostradas na figura 7.49b), são significativamente maiores em relação aos casos em que estes fenómenos se verificam por separado. Esta observação não é nova pois vai ao encontro do que foi verificado na secção 7.6, por exemplo no caso 4, em que a presença de uma descontinuidade do tipo  $H_d = \lambda_z/2$  acentua a inclinação e a deflexão das isentrópicas no nível  $H_c = 3\lambda_z/4$ , que é onde teoricamente se prevê a rebentação das ondas.

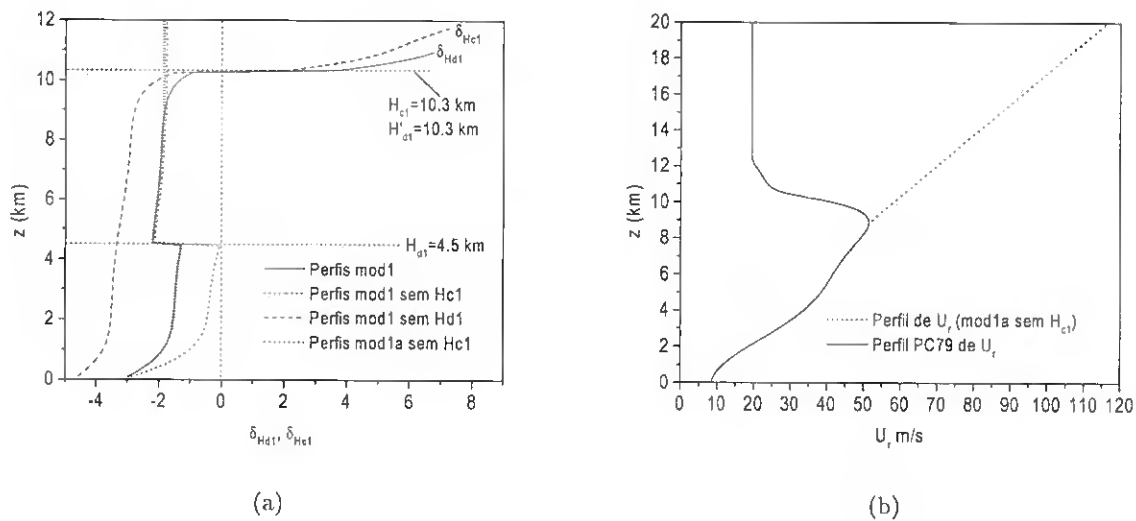


Figura 7.50: Perfis verticais (a) das funções  $\delta_{H_{d1}}$  e  $\delta_{H_{c1}}$  correspondentes às diferentes modificações do perfis mod1, (b) do perfil de referência de PC79  $U_r$  modificado para obter (mod1a sem  $H_{d1}$ ).

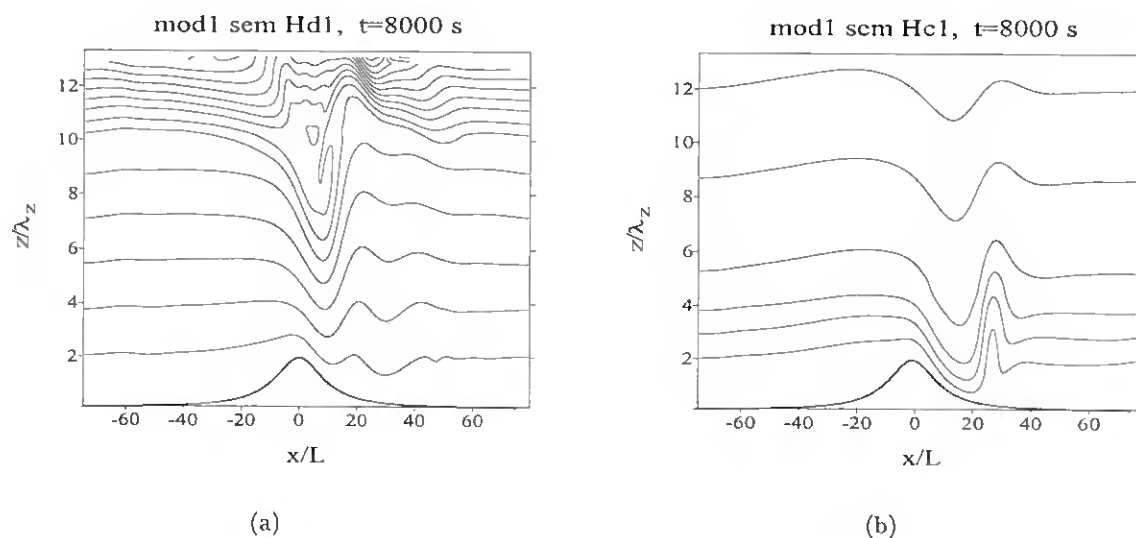


Figura 7.51: Campo das linhas isentrópicas obtidos com: (a) (mod1 sem  $H_{d1}$ ) e (b) (mod1 sem  $H_{c1}$ ).

A evolução do arrasto para o dois casos cujos perfis se apresentam na figura 7.50a, pode ser observada na figura 7.52. De facto, os arrastos obtidos com (mod1 sem  $H_{d1}$ ) e (mod1 sem  $H_{c1}$ ) sobrestimam consideravelmente o seu análogo linear. No entanto, a soma destes arrastos subestima o perfil de  $D_w$  obtido com os perfis mod1. Este resultado corrobora claramente a afirmação acima proferida sobre o processo de interacção dos níveis  $H_{d1}$  e  $H_{cn}$ .

Como já foi antes referido, a denominação  $H_{d1}$  não é muito correcta porque o perfil  $\delta_{H_{d1}}$  não possui nenhum zero no intervalo de  $z$  [0,10.3] km. Aqui coloca-se a questão de saber se as ondas a jusante que se observam no caso (mod1 sem  $H_{c1}$ ) decaem rapidamente devido ao facto de  $H_{d1}$  não ser exactamente zero ou devido à ausência do nível crítico  $H_{c1}$  (ou como já foi referido, dos níveis críticos  $H_{cn}$ ). Para

investigar esta questão o perfil (mod1 sem  $H_{c1}$ ) é modificado aumentando a estabilidade no intervalo de  $z$  [0,4.5] km de  $N_1 = 0.015s^{-1}$  para  $N_1 = 0.025s^{-1}$ . O novo perfil obtido (mod1a sem  $H_{c1}$ ) está mostrado na figura 7.50a.

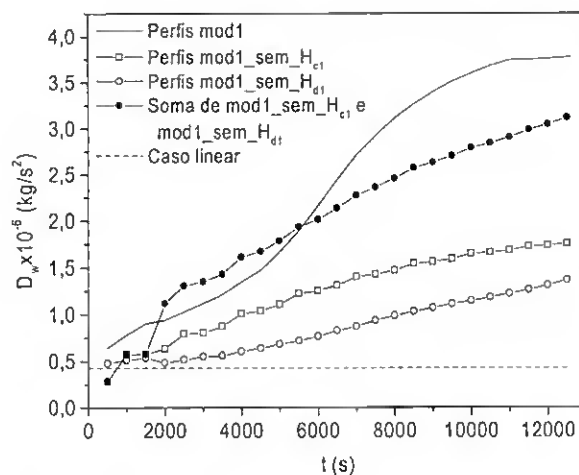


Figura 7.52: Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis mod1 e as suas modificações (mod1 sem  $H_{d1}$ ) e (mod1 sem  $H_{c1}$ ).

A evolução do arrasto e o campo das isentrópicas para este caso apresentam-se nas figuras 7.53a,b. O arrasto obtido (mod1a sem  $H_{c1}$ ) sobrestima amplamente o seu análogo obtido com (mod1a sem  $H_{c1}$ ). Como era de esperar a amplitude das ondas é bastante grande em comparação com (mod1 sem  $H_{cn}$ ) mas a estrutura geral do campo das isentrópicas continua a ser a mesma; uma deflexão muito acentuada no declive a jusante seguida de uma onda de grande amplitude que decai imediatamente a seguir. Pode-se concluir então que as ondulações que se observam a seguir à 1ª grande ondulação a jusante no campo das isentrópicas de mod1 (ver figura 7.49b) estão associadas à existência dos níveis críticos  $H_{cn}$ . De facto, na figura 7.49a, correspondente ao perfil (mod1 sem  $H_{d1}$ ) vêm-se pequenas ondulações a jusante.

Esta questão é importante porque sugere que as ORP como foram estudadas na secção 4 só podem existir se forem potenciadas pela presença de zonas onde a não linearidade está próxima de possibilitar a rebentação das ondas. Por exemplo, no caso 4 (ver figura 7.29b) não se espera a rebentação das ondas pois  $H_{in} = 0.62$  mas, como o escoamento era bastante não linear, a inclinação das isentrópicas em determinadas zonas favoráveis para a rebentação ( $H_c$ ) acentuava-se significativamente. Como no caso 4 as camadas delimitadas por  $H_d$  eram homogêneas, não foi possível distinguir este efeito. O resultado desta experiência permite inferir que a presença das zonas onde a não linearidade está próxima de possibilitar a rebentação das ondas parece ser muito importante para a geração de ORP.

Considerando que a presença dos níveis críticos  $H_{cn}$  tem um papel fundamental na geração de ORP, convém verificar se a proximidade dos mesmos tem influência na magnitude da deflexão das isentrópicas sobre a encosta a jusante da orografia. Como já foi referido, os níveis críticos  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$  estão muito próximos. O nível  $H_{c3}$  também está próximo, mas não tanto. Para "desconcentrar" estes níveis, o perfil (mod1 sem  $H_{d1}$ ) foi modificado tomando um valor constante de  $N = 0.014s^{-1}$  em todo o domínio vertical. O perfil obtido foi designado de (mod1a sem  $H_{d1}$ ) e é apresentado na figura 7.54a.

Na figura 7.54b mostram-se as evoluções temporais dos arrastos de mod1, (mod1 sem  $H_{d1}$ ) e (mod1a sem  $H_{d1}$ ). Como se pode constatar, o perfil do arrasto determinado com (mod1a sem  $H_{d1}$ ) subestima consideravelmente o seu análogo calculado com (mod1 sem  $H_{d1}$ ). Portanto, a concentração dos níveis

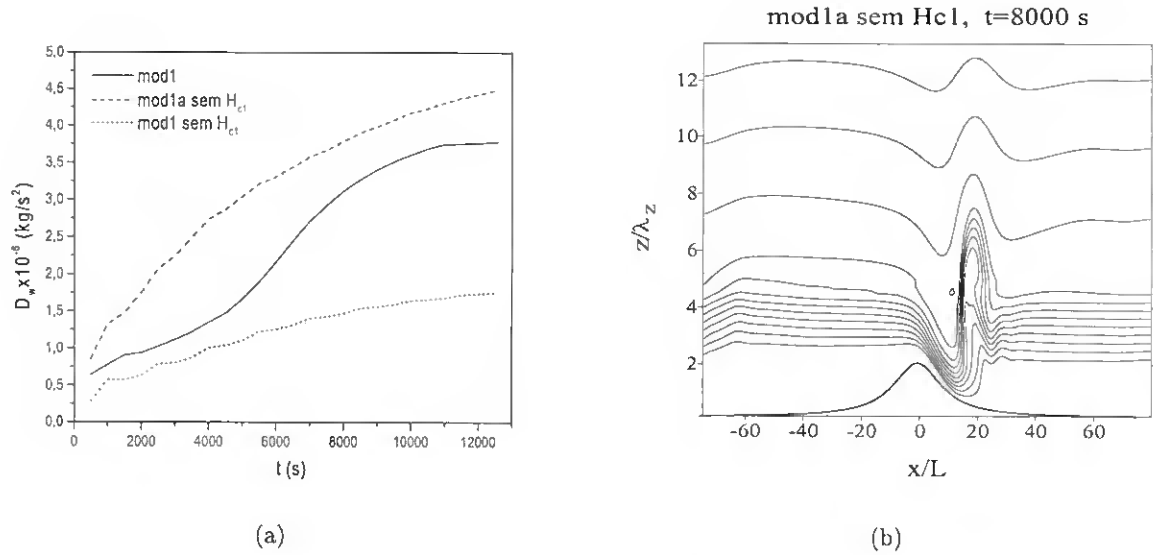


Figura 7.53: (a) Evolução temporal do arrasto obtido com os perfis mod1, (mod1 sem  $H_{c1}$ ) e (mod1a sem  $H_{c1}$ ); (b) campo das isentrópicas obtido com (mod1a sem  $H_{c1}$ ).

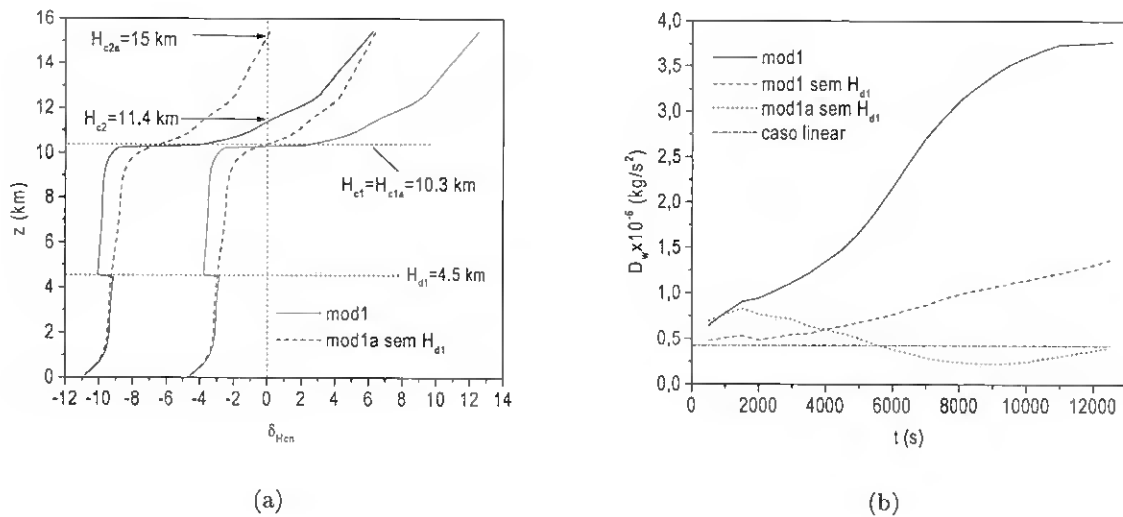


Figura 7.54: (a) Perfis verticais das funções  $\delta_{H_{cn}}$  correspondentes a mod1 e à modificação (mod1a sem  $H_{d1}$ ); (b) evolução temporal do arrasto de mod1 e das modificações (mod1 sem  $H_{d1}$ ) e (mod1a sem  $H_{d1}$ ).

$H_{cn}$  joga um papel importante no comportamento de  $D_w$ . Na figura 7.55a apresenta-se o campo das isentrópicas obtido com (mod1a sem  $H_{d1}$ ). A diferença mais notável em relação a campo análogo correspondente a (mod1 sem  $H_{d1}$ ), mostrado na figura 7.51a, consiste numa significativa redução da magnitude das maiores deflexões das linhas de corrente. Este facto traduz-se numa redução da intensidade do vento a jusante da montanha e num menor arrasto ondulatorio.

Por outro lado, as pequenas ondulações a jusante da orografia observadas na figura 7.51a também estão presentes na figura 7.55a. Na figura 7.55b o mesmo campo é representado numa extensão vertical

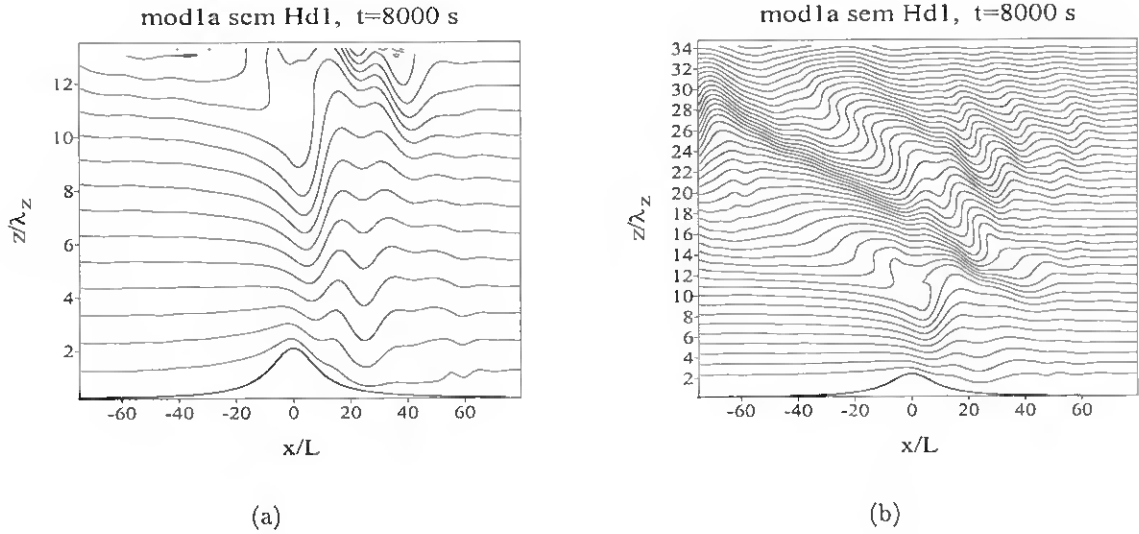


Figura 7.55: Campo das linhas isentrópicas obtidos com a modificação (mod1a sem  $H_{d1}$ ) representado em dois domínios com alturas diferentes: (a) 13 km, (b) 35 km (neste caso o domínio de cálculo tem uma altitude de 35 km e não 29 km como nos restantes casos).

maior. Aparentemente, a variação da concentração dos níveis  $H_{cn}$  não teve um papel relevante no estabelecimento destas ondulações. Assim, pode-se dizer que basta a presença dos níveis  $H_{cn}$  para gerar uma componente não hidrostática do escoamento a qual, em interacção com a grande deflexão das isentrópicas a jusante, associada à presença de  $H_{d1}$ , produz as ORP. De facto, no caso 4 da secção 7.6 os níveis críticos eram igualmente espaçados e mesmo assim produziam-se ORP.

Para determinar a sensibilidade do escoamento à altura de colocação de  $H_d = \lambda/2$  foram feitos mais dois conjuntos de simulações nos quais a descontinuidade  $H_{d1}$  é colocada em diferentes altitudes. O primeiro conjunto é feito com perfis do tipo mod1 e o segundo com perfis (mod1 sem  $H_{c1}$ ). A evolução no tempo dos arrastos obtidos para estes dois conjuntos são apresentados nas figuras 7.56a,b.

Na secção 7.6 verificou-se que no caso não linear quando  $H_{d1}$  se afastava de  $\lambda_z/2$  ( $z > \lambda_z/2$ ) não ocorriam ORP. Também se afirmou que quando  $H_d$  se afastava da zona de influência da montanha não existiam condições para a existência de ORP verificando-se a não existência de periodicidade vertical. Mas como as camadas delimitadas por  $H_d$  eram homogéneas não era muito fácil arranjar casos para verificar o que acontecia quando a própria descontinuidade  $H_d = \lambda_z/2$  se aproximava ou afastava da montanha. No caso (mod1 sem  $H_{cn}$ ) os valores do arrasto são máximos para a altura aproximada de  $H_{d1} \approx \lambda_z/2 \approx 7.5$  km. Portanto, existe uma zona óptima  $H_{d1}^{op}$  para a localização de  $H_{d1}$  que origina os ventos severos mais fortes e maiores arrastos. Se as características do escoamento são tais que  $H_d = \lambda_z/2$  fica posicionado muito próximo da altura da montanha podem não existir condições para a geração de ORP. Se  $H_{d1} > H_{d1}^{op}$  a influência da montanha na deflexão das linhas de corrente diminui e por consequência os ventos a jusante também.

O comportamento do arrasto para o caso mod1 mostrado na figura 7.54a é muito semelhante ao obtido com os perfis (mod1 sem  $H_{cn}$ ) exceptuando o caso  $H_{d1} = 8.5$  km em que se verifica uma diminuição muito brusca do arrasto. Uma possível explicação para este comportamento é dada a seguir. Aos 10.3 km encontra-se a descontinuidade  $H'_{d1}$  com  $\sigma_d < 1$  que, simultaneamente, corresponde ao nível crítico  $H_{c1}$ . Como já foi anteriormente explicado, esta coincidência de  $H'_{d1}$  e  $H_{c1}$  com  $\sigma_d < 1$  produz um arrasto muito baixo (ver figura 7.36b, caso 27). Relativamente perto de  $H_{c1}$  está  $H_{d1} = 7.5$

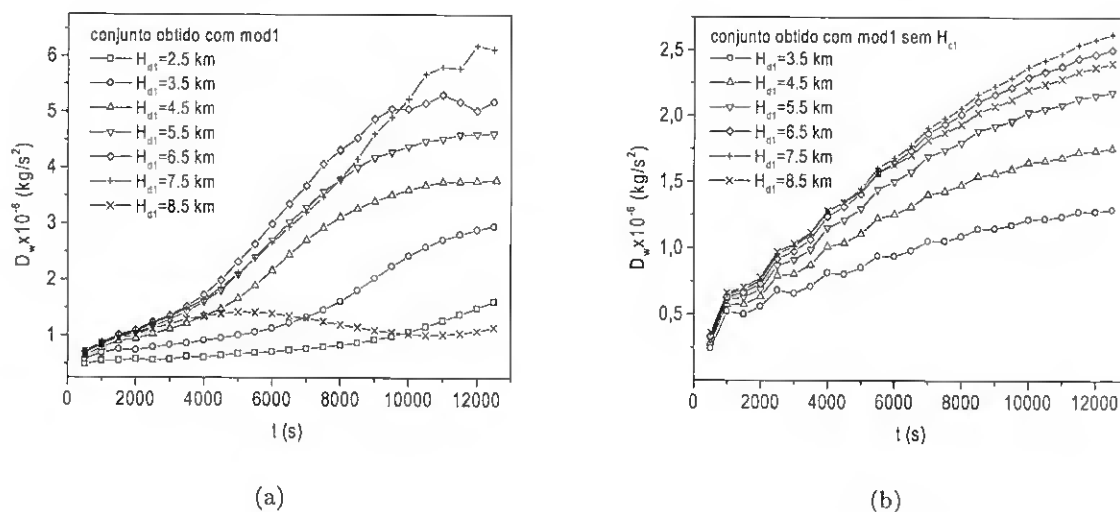


Figura 7.56: Evolução temporal do arrasto obtido para dois conjuntos de simulações: (a) variação de  $H_{d1}$  em perfis do tipo mod1, e (b) variação de  $H_{d1}$  em perfis do tipo (mod1 sem  $H_{c1}$ ).

km com  $\sigma_d > 1$  que como já se viu na figura 7.56b produz um arrasto bastante elevado. O que se sugere aqui é existe cancelamento entre ambos os efeitos, produzindo-se um arrasto muito baixo.

## 7.9 Discussão

Neste capítulo foram realizadas várias simulações de diferentes tipos de escoamento atmosférico de mesoscala. Todos os casos são estavelmente estratificados e de subcamada externa. Os resultados apresentados nas secções 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6 permitem concluir que FLEX consegue descrever cabalmente escoamentos hidrostáticos e não hidrostáticos uniformes acentuadamente lineares a não lineares. Na secção 7.6 analisou-se o caso de não linearidade de extrema de rebentação das ondas com a consequente indução de níveis críticos, ventos severos a jusante da orografia e de estados de arrasto elevados a eles associados. Na secção 7.7 foram estudados com detalhe escoamentos hidrostáticos, no caso em que existe uma descontinuidade  $H_d$  no perfil de estabilidade  $N$ . Quando a camada mais estável é a inferior viu-se que em determinadas condições, muito restritas no que se refere à não linearidade e à altura de colocação de  $H_d$ , a ressonância parcial dá origem a ondas a jusante da orografia que foram denominadas (ORP) (Ondas de Ressonância Parcial). As características destas ondas foram estudadas com bastante pormenor recorrendo ao modelo teórico não linear de Long (1953). Concluiu-se também que as ORP só podem existir se a não linearidade for suficiente para que as isentrópicas apresentem inclinações importantes nas zonas onde teoricamente se prevê a rebentação das ondas (níveis críticos  $H_c$ ). Viu-se também que os níveis  $H_d$  e  $H_c$  potenciam os seus efeitos mutuamente, gerando estados de arrasto muito mais elevados do que os que ocorrem nos casos em que só existe  $H_c$  ou  $H_d$ . O estudo da tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado (secção 7.8) permitiu confirmar, num escoamento real, o que foi dito na secção dedicada às ORP. Sempre que foi possível, as soluções numéricas foram comparadas com as analíticas. Aqui convém dar especial ênfase à secção 7.5, em que foram apresentados os resultados da simulação numérica de um escoamento concebido para a existência de ondas de reflexão total (ORT). A coincidência entre os resultados teóricos e o numérico é notável.

## Capítulo 8

# Outros escoamentos atmosféricos de camada limite

Neste capítulo serão feitas várias simulações de diferentes tipos de escoamentos atmosféricos de mesoscala essencialmente sobre colinas onde dominam os efeitos das tensões turbulentas ( $L \approx 10^{-1} - 10^2$  m), e sobre montanhas pequenas e médias ( $L \approx 10^4 - 10^5$  m), onde as ondas gravíticas podem ser importantes. Estes escoamentos correspondem aos do tipo b) e c) enunciados na secção 2.1 do capítulo 2. Note-se que os escoamentos do tipo c) foram estudados no capítulo 6 mas só foram tratados casos em que os efeitos fundamentais estavam confinados à subcamada externa.

Neste capítulo visam-se dois objectivos: primeiro, o estudo de escoamentos de camada limite ( $h/L \sim O(1)$ ) i.e, escoamentos nos quais os efeitos das subcamadas interna e intermédia são importantes; segundo, verificar em que medida alguns fenómenos em escoamentos de camada externa são afectados pela inclusão dos efeitos de camada limite.

### 8.1 Enquadramento

#### 8.1.1 Análise de alguns resultados teóricos e modificações propostas

Na secção 2.6 notou-se que o modo de estimar  $h_m$  (espessura da subcamada intermédia) tem grande importância na implementação dos diferentes modelos analíticos. No seu estudo comparativo para definir a melhor forma de calcular  $h_m$  (ver secção 2.1) Weng (1997) (W97) usa duas expressões do perfil de  $U_r(z)$ . Uma delas corresponde ao conhecido perfil logarítmico de Monin-Obukhov (2.48). No entanto, para que o modelo teórico possa prever a propagação de ondas gravíticas, a velocidade não pode aumentar indefinidamente com  $z$ , como acontece com o perfil logarítmico. Para solucionar esta questão, BW96 definem  $h_m$  como  $h_m = \min(h_m, h)$ . Se  $h_m > h$ , toda a camada externa encontra-se totalmente por cima da camada limite. A solução adoptada por Weng (1989) para contornar o problema, consiste em definir um perfil de  $U_r(z)$  que faça com que  $Fr_L^{-1}$  não aumente monotonamente. No presente trabalho o perfil de velocidade clássico de Monin-Obukhov, dado pela expressão (2.48), é substituído pelo perfil proposto por Weng (1989) (W89):

$$U_r(z) = \frac{1}{2} \left( g_1(z) + g_2(z) + U_0 - \sqrt{(g_1(z) + g_2(z) - U_0)^2 + c_0^2} \right) \quad (8.1)$$

onde  $g_1(z)$  é dado pela expressão (2.48) e  $g_2(z)$  por:

$$g_2(z) = u_* \left( c_2 + c_2 \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) + c_3 \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right)^\gamma \right) \quad (8.2)$$

As constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são definidas do seguinte modo:

$$c_3 = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{c_0^2}{4U_0^2} \frac{\beta z_0}{\kappa L_{mo}} + \frac{c_0^2 u_*}{2U_0^3 \kappa^2} \left( 1 + \frac{\beta z_0}{L_{mo}} \right)^2 \right] \quad (8.3)$$

$$c_2 = \frac{c_0^2}{4U_0^2 \kappa} \left( 1 + \frac{\beta z_0}{L_{mo}} \right) - \gamma c_3 \quad (8.4)$$

$$c_1 = \frac{c_0^2}{4U_0^2 u_*} - c_3 \quad (8.5)$$

onde  $c_0$  e  $\gamma$  são constantes empíricas que permitem ajustar o perfil de da velocidade.  $U(z)$  permite obter um perfil logarítmico que faz uma transição suave e contínua para o valor  $U_0$  quando  $z \rightarrow \infty$ . Deste modo o número de Froude  $Fr_H$  não aumenta monotonamente com  $z$ , como acontece com o perfil clássico, e portanto é mais improvável a evanescência das ondas gravíticas. Outra vantagem do uso desta expressão consiste em que a 2ª derivada pode ser calculada analiticamente sendo por isso possível um cálculo mais preciso de  $h_m$ .

Os valores de  $h_m(L_{mo})$ , calculados por W97 com (8.1) quando usa o perfil de  $U(z)$  (8.1), não diferem muito dos calculados com (2.48) quando  $L_{mo}$  é muito elevado ( $\sim 1000$ ) ou muito pequeno. No entanto, no intervalo de  $L_{mo}$  [100,500] verifica-se um salto brusco dos valores de  $h_m$ . Sendo esta grandeza de grande importância nos modelos analíticos, uma variação deste género não é conveniente.

No presente trabalho chegou-se à conclusão que este comportamento se devia ao facto de que W97 fixava  $u_*$  e  $z_0$ , e fazia depender  $h_m$  só de  $L_{mo}$ . De acordo com a teoria da similaridade de Monin-Obukhov este procedimento não é coerente, pois no caso estável a mesma postula que a altura da camada limite  $h$  depende da velocidade de fricção  $u_*$ ,  $L_{mo}$ , e de  $f$ . De facto Nieuwstadt (1984, 1985) chega à conclusão que:

$$h = 3^{1/4} \sqrt{\kappa Ri_c^f} \sqrt{\frac{u_* L_{mo}}{|f|}} \quad (8.6)$$

Esta expressão coincide exactamente com a equação de Zilitinkevich (1989) para  $h$ , se se fizer  $c_z = 3^{1/4} (\kappa Ri_c^f)^{0.5}$ .  $Ri_c^f$  é o número crítico de Richardson de fluxo. Note-se que, de acordo com (8.6), quando maior é a estabilidade menor é a espessura da camada limite. Isto confirma o que foi dito na secção 2.6: se a escala horizontal da orografia é muito grande, ou a atmosfera é acentuadamente estável ( $L_{mo}$  é pequeno e positivo), então:  $h/h_e \sim h/L \ll 1$ , e portanto, o escoamento pode ser considerado de camada externa. Sendo  $h_m$  a fronteira superior da subcamada intermédia,  $h$  e  $h_m$  devem ser relativamente próximos.

Das expressões para  $h$  (8.6), para  $N_\infty$  (2.50), e para  $U(z)$ , (2.48) (caso com estratificação estável) obtém-se:

$$u_* = \kappa U_0 / \ln \left( \frac{\varphi u_* + z_0}{z_0} \right) + \beta \chi \quad (8.7)$$

onde

$$\chi = c_z \left( \frac{\kappa N_\infty}{|f| \sqrt{\beta}} \right)^{1/2} \quad (8.8)$$

e

$$\varphi = c_z \frac{\sqrt{\beta}}{|f| \kappa N_\infty} \quad (8.9)$$

Conhecendo  $L_{mo}$  (ou  $N_\infty$ ),  $f$  e  $z_0$  pode-se determinar  $u_*$  calculando o zero da equação (8.7). Deste modo, o perfil de  $U(z)$  será consistente com todos os parâmetros do escoamento, e  $U(z) \rightarrow U_0$  quando  $z \rightarrow h$  (ou  $z \rightarrow h_m$ ). Para o caso neutro, o procedimento é análogo, podendo a profundidade da CL,  $h$ , ser estimada com a expressão de Garratt (1992):

$$h = 0.2u_*/f \quad (8.10)$$

No caso estável, é importante referir que se se determinar  $u_*$  com a expressão (8.7), os valores de  $h_m$  calculados com os dois perfis alternativos perfis de  $U$ , (2.48)(perfil clássico) e (8.1) de W97, são muito próximos. Isto contraria claramente os resultados de W97. Poder-se-ia argumentar que fixar o valor de  $z_0$  não faz sentido em muitos casos. Por exemplo para simular a experiência de COOP94, W97 usa  $z_0 = 0.05$  m em todos os casos. Na realidade  $z_0$  varia durante as experiências muito longas (vários meses no caso de COOP94), pelo que fixar  $z_0$  parece um pouco forçado. No entanto se  $u_*$  é calculado com o método acima exposto, mesmo que  $z_0 = cte$ , o perfil de  $U_r$  será muito mais realista do que o obtido fixando ambos parâmetros.

Até agora neste trabalho só se tem feito referência ao arrasto ondulatorio. De modo geral o arrasto associado à pressão pode ser dado pela expressão (Eimes, 1987):

$$D_{tot} = \underbrace{- \int \rho_r u'_r w'_r dx}_I - \underbrace{\int \rho_r \overline{u' w'} dx}_{II} + \underbrace{\int \int \rho_r f v dx dz}_{III} + \underbrace{\int \int \int \rho_r \frac{\partial f}{\partial y} v dx dy dz}_{IV} \quad (8.11)$$

onde  $u'_r$ ,  $w'_r$  representam os desvios de um estado de referência em equilíbrio hidrostático,  $\rho_r \overline{u' w'}$  é a tensão de corte turbulenta de Reynolds. Os termos I e II provêm da advecção vertical, i.e, são os fluxos verticais de momento ondulatorio e turbulento. A advecção horizontal foi desprezada porque assume-se que os efeitos da montanha no escoamento se extinguem quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Os termos III e IV estão associados ao efeito da rotação pelo que não serão incluídos nos cálculos. Assim, o termo I inclui os arrastos associados à perturbação da pressão, i.e, o arrasto aerodinâmico ou de forma ( $D_f$ ) e o ondulatorio ( $D_w$ ).

No capítulo 6 foram deduzidas as expressões do arrasto ondulatorio (7.45) e (7.46) para uma montanha assimétrica com e sem rotação em que o parâmetro de Scorer era considerado constante. Para o caso mais geral, o parâmetro de Scorer,  $\ell$ , tem que ser calculado em  $z = 0$  através da expressão (2.86), e a assimetria da orografia tem que ser incluída substituindo  $\hat{h}(k)^2$  por  $\hat{h}(k)\hat{h}(-k)$ . Deste modo, o integral (7.45) é dado por:

$$D_w = \pi \left[ \rho_r U_r^2 \int_0^{k_m} \hat{h}(k)\hat{h}(-k)(k_m^2 - k^2)^{1/2} k dk \right]_{z=0} \quad (8.12)$$

que pode ser resolvido aplicando o teorema da convolução.

Por outro lado, Belcher et al. (1993) (BNH), usando uma abordagem similar a HLR, determinaram teoricamente o arrasto aerodinâmico,  $D_f$ , para o caso neutro, e Belcher e Wood (1996) (BW96) introduziram o efeito da estratificação no cálculo desta grandeza. A expressão deduzida por BW96 para o cálculo analítico de  $D_f$  tem o seguinte aspecto:

$$D_f = 4\pi \left[ \rho_r u_*^2 \left[ \frac{U_r(h_m)}{U_r(h_i)} \right]^4 \int_{k_m}^{\infty} \hat{h}(k)\hat{h}(-k) [k^2 - k_m^2] dk \right]_{z=0} \quad (8.13)$$

onde  $\ell$  foi substituído por  $k_m = N(h_m)/U_r(h_m)$ . Note-se que para melhor interpretação  $k^2 - k_m^2$  pode ser substituído por  $k^2(1 - Fr_L^{-2})$  (neste caso  $Fr_L = U_r(h_m)k/N(h_m)$ ). BW96 também deduziram uma expressão para  $D_w$  e demonstram que ela é equivalente à expressão obtida com a análise invíscida, i.e, à equação (8.12).

BW96 fazem um estudo analítico e numérico pormenorizado de  $D_f$  e  $D_w$  e consideram que os mecanismos de produção de  $D_f$  e  $\Delta S$  (acréscimo relativo de velocidade) estão claramente interrelacionados porque ambos estão associados às tensões de corte do escoamento. Portanto, a existência de  $D_f$  só é possível se existirem tensões de corte turbulentas. De acordo com 8.13, só podem produzir  $D_f$  os números de onda que cumpram a condição  $Fr_L < 1$ .

BW96 chegam à conclusão que tanto  $D_w$  como  $D_f$  são produzidos por componentes imaginárias de  $\tilde{p}'(k)$ , estando por isso desfasadas relativamente às componentes equivalentes da orografia,  $\tilde{h}(k)$ . No entanto, a produção de  $D_w$  está associada às perturbações de pressão invíscidas e só é possível quando  $Fr_L < 1$ . Por outras palavras,  $D_f$  está associado aos comprimentos de onda mais pequenos da orografia e  $D_w$  aos maiores. De facto, a condição para que  $D_w$  seja pequeno ( $\tilde{h}(k) \rightarrow 0$ ), significa que a área debaixo do perfil  $h(x) \rightarrow 0$ . A contribuição principal para  $D_f$  é proporcional ao quadrado do declive da montanha (BW96). Portanto, o declive da montanha tem uma importância crítica tanto para  $D_w$  como para  $D_f$ . Outra conclusão importante de BW96 é que, no caso linear, os efeitos dominantes da turbulência estão confinados à subcamada interna e que, portanto, os resultados obtidos com a análise invíscida para o estudo das ondas gravíticas são bastante relevantes. A teoria de BW96 é aplicável a um vasto leque de casos de interesse prático mas, sendo linear, está limitada a escoamentos lineares e a escoamentos nos quais a estratificação não desempenhe um papel importante na subcamada interna, i.e, ( $h_i/L_{mo} \ll 1$ ).

Como os arrastos  $D_w$  e  $D_f$  estão associados a comprimentos de onda diferentes é importante conseguir separar a contribuição de cada um deles para o termo I da equação (8.11). Até onde foi possível saber, não existe um método de separação dos arrastos contidos em  $D_{wf}$ . No presente trabalho é desenvolvido um método simples de separação de  $D_w$  e  $D_f$  que usa como premissas fundamentais as conclusões de BW96, nomeadamente: a) se  $k > k_m$  produz-se  $D_f$  e no caso contrário  $D_w$ , b) a componente  $\tilde{p}'(k)$  tem que estar em fase com a componente do declive da orografia  $\widetilde{\frac{\partial h}{\partial x}}(k)$ . Tomando em conta que num escoamento turbulento estavelmente estratificado do tipo aqui estudado, o arrasto  $D_{wf}$  é dado pela expressão,

$$D_{wf} = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x, 0) \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (8.14)$$

então, se forem obtidos os espectros dos perfis de  $p'(x, 0)$  e  $\frac{\partial h}{\partial x}$ , é possível fazer a separação dos arrastos acima referidos. O método usado para fazer esta decomposição consiste essencialmente na construção de um filtro passa-baixo para a extracção da componente ondulatoria.

Os passos do procedimento são:

- 1 Usando FFT determinam-se os espectros de  $p'(x, 0)$  e  $\frac{\partial h}{\partial x}$ , i.e,  $\tilde{p}'(k)$  e  $\widetilde{\frac{\partial h}{\partial x}}(k)$ .
- 2 Divide-se o espectro de  $\tilde{p}'(k)$  em duas partes de modo a para obter  $\tilde{p}'_w(k)$  para  $k < k_m$  e  $\tilde{p}'_f(k)$  para  $k > k_m$ .
- 3 Fazem-se as transformadas inversas de  $\tilde{p}'_w(k)$  e  $\tilde{p}'_f(k)$  para obter  $p'_w(x)$  e  $p'_f(x)$
- 4 Substituindo os perfis de  $p'_w(x)$  e  $p'_f(x)$  na expressão (8.14), calculam-se os arrastos  $D_w$  e  $D_f$ .

Este método tem alguns pontos fracos. Em primeiro lugar, o método baseia-se no princípio da sobreposição, só válido no caso linear. Em segundo lugar, a construção do filtro obriga a cuidados

numéricos no sentido de evitar o fenómeno de Gibbs (oscilações espúrias resultantes da introdução de descontinuidades no espectro), o que obriga a uma transição suave entre as duas janelas espectrais, i.e., à transferência de energia entre as duas zonas do espectro. Estes procedimentos introduzem incertezas significativas no cálculo de  $p'_w(x)$  e  $p'_f(x)$ , pelo que o método só será usado para fins qualitativos. Para simplificar o texto, daqui em diante o método será denominado MSA (Método de Separação dos Arrastos).

Para validar este método recorreu-se ao modelo analítico linear de BW96. Na figura 8.1a apresentam-se os perfis dos arrastos ondulatorio ( $D_w$ ) e aerodinâmico ( $D_f$ ) em função de  $L/L_{mo}$ , obtidos com o modelo de BW96. As setas compridas indicam os valores de  $D_w$  e  $D_f$  para  $L/L_{mo} = 1$  e  $L/L_{mo} = 2$ . Na figura 8.1b mostram-se as evoluções temporais de  $D_w$  e  $D_f$  obtidas com FLEX no caso de uma montanha de Agnesi com  $H = 50$  m e  $L = 400$  m. Este escoamento corresponde ao caso 9 ( $L/L_{mo} = 2$ ) da tabela 8.1. Na mesma, pode-se verificar que o escoamento é linear, o que é conveniente para poder comparar os resultados com os de BW96. Os valores estacionários dos arrastos estão expostos na figura. Como se pode constatar os valores de  $D_w$  obtidos com ambos modelos são bastante próximos (diferem cerca de 10 %). Já o mesmo não se pode dizer de  $D_f$  que é duas vezes menor que o seu análogo teórico. Foram realizadas diversas outras experiências (não apresentadas) para diferentes valores de  $L/L_{mo}$ , tendo-se verificado um comportamento similar, i.e., bons resultados para  $D_w$  e subavaliação por um factor de 2 de  $D_f$ . Considerando as limitações inerentes tanto ao modelo teórico de BW96 como ao método de separação de arrastos aqui utilizado, é notável a existência de uma concordância qualitativa do caso da estimativa de  $D_f$  e de uma boa concordância quantitativa na estimativa de  $D_w$ .

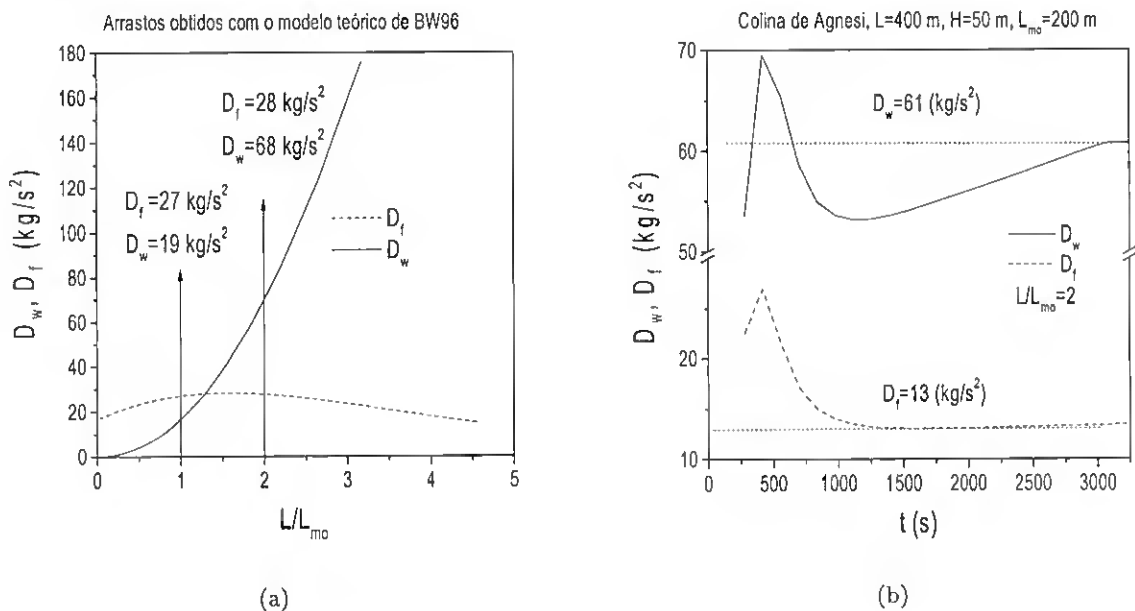


Figura 8.1: a) Perfis dos arrastos ondulatorio ( $D_w$ ) e aerodinâmico ( $D_f$ ) em função de  $L/L_{mo}$  obtidos com o modelo analítico linear de BW96; b) Evolução temporal de  $D_w$  e  $D_f$  obtida com FLEX para  $L_{mo} = 200$  m. A orografia consiste numa colina de Agnesi com  $L = 400$  m e  $H = 50$  m.

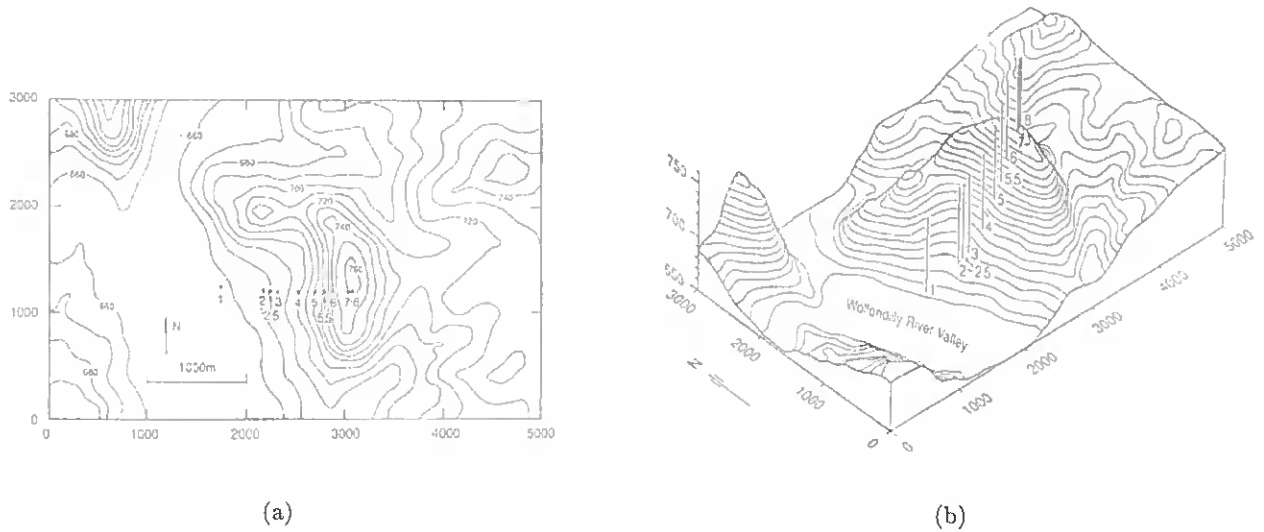


Figura 8.2: a) Mapa topográfico e b) perspectiva da colina de Cooper. Os pontos indicam a localização dos postes de medição. O intervalo entre as curvas de nível é de 5 m.

## 8.2 Escoamento sobre o monte de Cooper

Na Primavera de 1984 e no Verão de 1985 Coopin et al.(1994) fizeram um estudo experimental de diferentes tipos de escoamento sobre o monte de Cooper. Este monte situa-se no noroeste de Nova Gales do Sul, numa região denominada *Goulburn*. A orografia do monte é quase bidimensional e esta localizada longitudinalmente no eixo norte-sul, como se pode constatar na vista de cima mostrada figura 8.2a. Na figura 8.2b pode-se ver a perspectiva do monte.

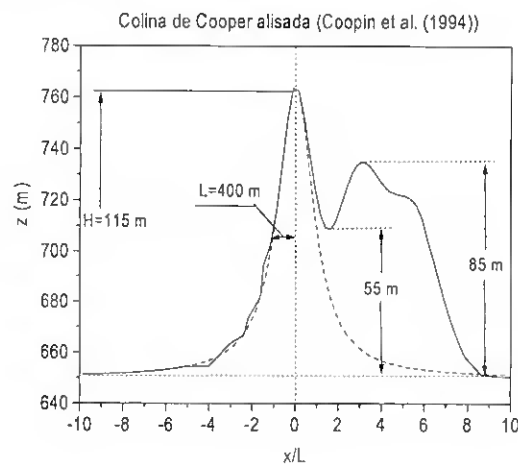


Figura 8.3: Secção transversal da colina de Cooper ajustada e alisada.

Devido a forma do vale do rio *Wollondilly* os ventos predominantes sobre o monte vêm de oeste. A colina está situada num campo relvado. Como a experiência decorreu em estações diferentes a altura da relva mudou, implicando uma variação de  $z_0$ . A extensão efectiva da colina na direcção norte-sul é delimitada pela linha de contorno dos 740 m e é de aproximadamente 1000 m, i.e, aproximadamente 2.5

vezes a semi-largura da colina. Por isso, para fins de modelação numérica e teórica pode-se considerar que a orografia é quase bidimensional.

Tabela 8.1: Parâmetros para caracterizar os diferentes tipos de escoamento.  $N$  representa o valor de estratificação na subcamada externa. Os casos 1-6 e 8 têm as dimensões características da orografia de Cooper,  $H = 115$  m e  $L = 400$  m. Os casos 7 e 9 têm as seguintes dimensões características: caso 7)  $H = 500$  m e  $L = 3000$  m, e caso 9)  $H = 50$  m e  $L = 400$  m. Em todo os casos, exceptuando o 7,  $U_r(h) = 6$  m/s. No caso 7  $U_r(h) = 4$  m/s. Em todos os casos  $z_0 = 0.05$  m.

caso	$L_{mo}$ (m)	$N$ (s <sup>-1</sup> )	$Fr_H^{-1}$	$Fr_L^{-1}$	$h_i$ (m)	$h_m$ (m)	$h$ (m)	$u_*$ (m/s)	$h/L$	$h_i/L_{mo}$
1	$\infty$	0.00000	0.000	0.000	21	142	464	0.262	1.160	0.000
2	400	0.00267	0.050	0.180	20	125	306	0.191	0.765	0.050
3	167	0.00578	0.110	0.390	19	107	188	0.173	0.470	0.114
4	118	0.00781	0.210	0.720	18	97	154	0.165	0.385	0.153
5	24	0.02860	0.550	1.900	14	36	60	0.123	0.150	0.583
6	4	0.11020	2.110	7.350	4	8	19	0.079	0.048	1.000
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	56	0.01050	1.300	7.850	70	101	85	0.106	0.210	1.250
8	54	0.01500	0.290	1.000	17	111	97	0.144	0.243	0.315
9	200	0.00500	0.04	0.331	19	111	208	0.177	0.520	0.095

Nos postes de medição indicados na figura 8.2a foram colocados anemómetros de diferentes tipos. O poste de referência deveria ser o 1, mas devido à proximidade de uma estrada e às limitações de comprimento dos cabos de transmissão dos sinais dos anemómetros, COOP94 toma o poste 3 como o de referência. Este facto é tomado em conta nos cálculos.

Na figura 8.3 mostra-se a secção de corte central da colina. O perfil foi alisado e ajustado com uma montanha de Agnesi a montante e com dois perfis Gaussianos convenientemente combinados, a jusante, seguindo o procedimento de COOP94. Para os cálculos que se seguem, as dimensões  $H = 115$  m e  $L = 400$  m serão tomadas como as escalas características da orografia de Cooper.

A primeira parte desta secção é dedicada ao estudo do método de cálculo de  $u_*$  exposto na secção anterior. Na figura 8.4b comparam-se os perfis analíticos de  $\Delta S$  em função de  $1/L_{mo}$  com os valores experimentais de COOP94 medidos em  $z = 2$  m. Em todos os casos, para calcular  $h_m$  é usada a expressão (2.94), por ser a mais adequada por incluir o efeito da estratificação na determinação deste parâmetro. Os parâmetros usados para o cálculo destes perfis são os seguintes:  $U_0 = 6$  m/s e  $z_0 = 0.05$  m. Os dois perfis analíticos foram obtidos com o modelo de HLR, com a modificação de HRB para a estratificação, e com as expressões (8.1) e (2.101), empregues por W97. O perfil descontínuo (HLR-HRB-W97) corresponde ao caso em que a velocidade de fricção é fixa ( $u_* = 0.2$  m/s), i.e., independente de  $L_{mo}$ , enquanto que o contínuo (HLR-HRB-W97M), recorre à expressão (8.7) para calcular  $u_*$  em função de  $L_{mo}$ .

O perfil de  $u_*$  obtido a metodologia acima descrita ilustra-se na figura 8.4a. Como se pode constatar,  $u_*$  está longe de ser constante pois diminui significativamente com o aumento da estabilidade. Quando a estabilidade aumenta,  $u_*$  também o faz, porque o perfil de  $U_r(z)$  tem que acompanhar o crescimento de  $\partial U_r / \partial z$  que se dá quando a CL se estreita ( $h_m$  diminui). É de salientar que, embora  $z_0$  mude na experiência de COOP94, ele será sempre tomado como constante e igual a  $z_0 = 0.05$  m (recomendação de COOP94).

O intervalo de  $L_{mo}$  escolhido para a validação destes modelos analíticos é  $[24, \infty]$  m porque, de acordo com as características desta orografia, o intervalo de  $L_{mo}$   $[24, \infty]$  representa aproximadamente

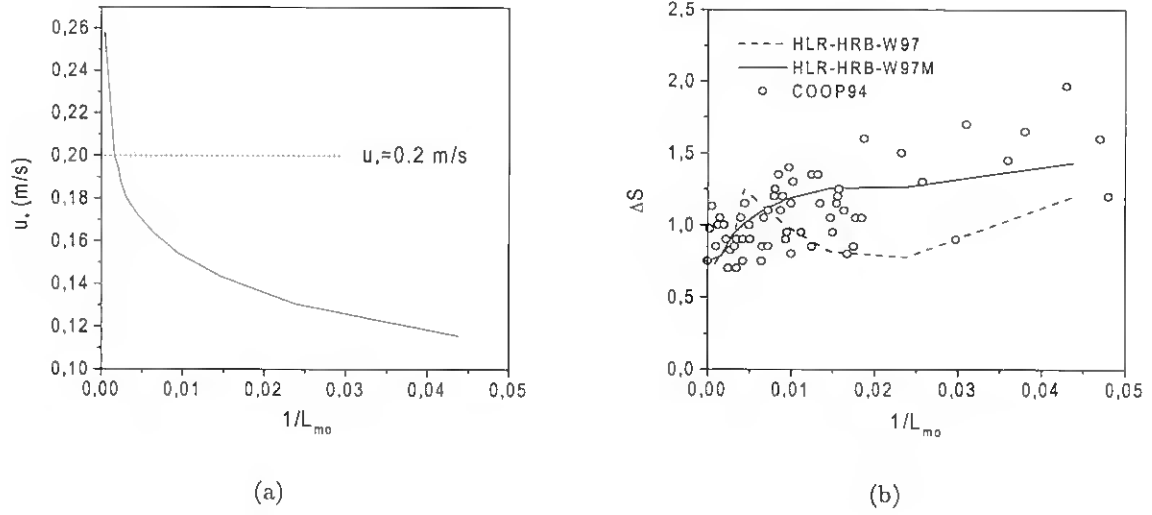


Figura 8.4: Perfis em função da estabilidade. a) Velocidade de fricção  $u_*$  determinada com a expressão 8.7, b) acréscimo relativo de velocidade ( $\Delta S$ ) calculado com o modelo HLR-HRB-W97.

a zona de validade da teoria linear de HLR e HRB. É importante lembrar que a modificação de HRB é válida para  $Fr_L^{-1} \in [0, 10]$  (limite hidrostático), e  $Fr_H^{-1} \in [0, 1]$ . Na secção 2.6 esta modificação é explicada com mais detalhes. Como se pode constatar na figura 8.4b, o perfil (HLR-HRB-W97M) ajusta-se melhor aos dados experimentais do que (HLR-HRB-W97). Chama a atenção no comportamento de  $\Delta S$  calculado com (HLR-HRB-W97). Daqui em diante quando se faça referência a HLR, HLR-HRB ou a HLR-HRB-W97 quer dizer que o método de cálculo de  $\Delta S$  inclui o referido método de cálculo de  $u_*$ . De facto  $\Delta S$  aumenta com a estabilidade, mas isto não acontece de modo uniforme pois verifica-se um aumento brusco para  $1/L_{m0} < 0.015 \text{ m}^{-1}$  e depois um abrandamento notável da taxa de aumento. Para tentar entender este comportamento é conveniente escrever a equação (2.101) na forma:

$$\tilde{w}'(k, z) = - \underbrace{\frac{U^2(h_m)}{U(h_i)}}_{Ki} \underbrace{\tilde{p}'_s}_{Dy} \underbrace{\left[ 1 + \frac{1 - \ln z/h_i}{\ln h_i/z_0} - \left( 2 + \frac{1}{\ln h_i/z_0} \right) \frac{K_0(2\sqrt{(ikzL/h_i)})}{K_0 2\sqrt{(ikz_0L/h_i)}} \right]}_{Sh} \quad (8.15)$$

onde os termos  $Ki$ ,  $Dy$  e  $Sh$  caracterizam as contribuições cinemática, dinâmica e de corte. A perturbação da pressão dinâmica  $\tilde{p}'_s$  é calculada a partir do escoamento na região externa, e é normalizada com  $U_r^2(h_m)$ . A equação anterior mostra que a estratificação pode afectar a perturbação de velocidade cinemática e dinamicamente. Afecta  $u'$  cinematicamente, através do termo  $Ki$  que depende do perfil de  $U(z)$ , que por sua vez, como se sabe, varia com  $L_{m0}$ . Afecta  $u'$  dinamicamente, através da perturbação da pressão dinâmica  $\tilde{p}'_s$  que constitui a força motriz e que é afectada pela estratificação, como demonstra HRB. Por sua vez, o termo associado ao efeito de corte também afecta  $u'$ .

Nas figuras 8.5a,b,c mostram-se os perfis da parte real dos termos  $Ki$ ,  $Dy$  e  $Sh$  em função de  $1/L_{m0}$  para uma montanha de Agnesi com  $L = 400 \text{ m}$  e  $H = 115 \text{ m}$ . Como se pode constatar, a contribuição de  $Sh$  é quase constante para as duas alturas usadas. Já o mesmo não se pode dizer para os perfis de  $Dy$  e  $Ki$  que exibem comportamentos opostos. Uma análise dos perfis de  $Ki$  e  $Dy$  para  $z = 2 \text{ m}$  responde à questão antes colocada sobre o comportamento do perfil de  $\Delta S$ . A partir de

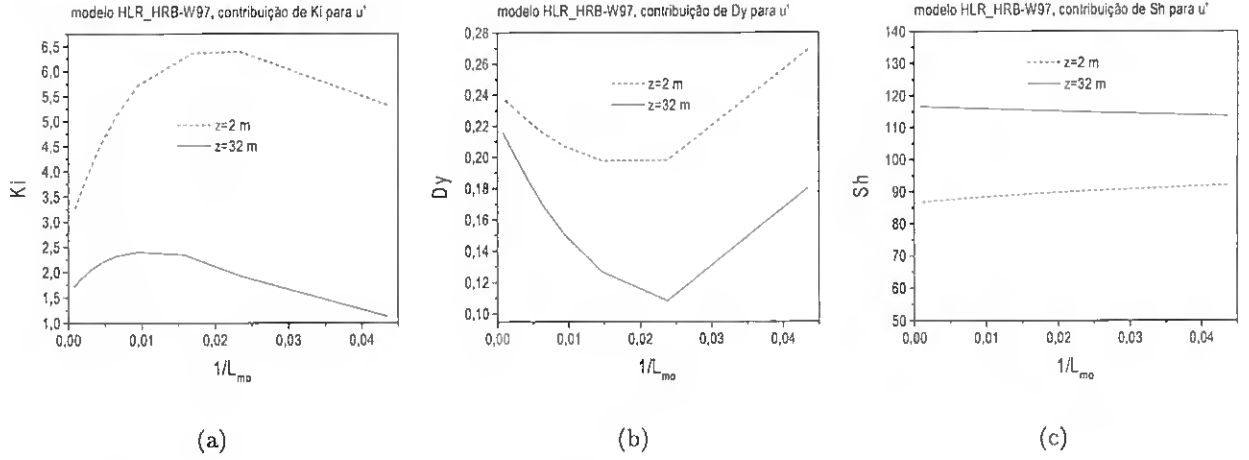


Figura 8.5: Parte real dos termos  $Ki$ ,  $Dy$  e  $Sh$  da perturbação  $\tilde{u}'(k)$  dada pela expressão (8.15).

$1/L_{mo} = 0.02$  1/m a contribuição de  $Dy$  diminui notavelmente.

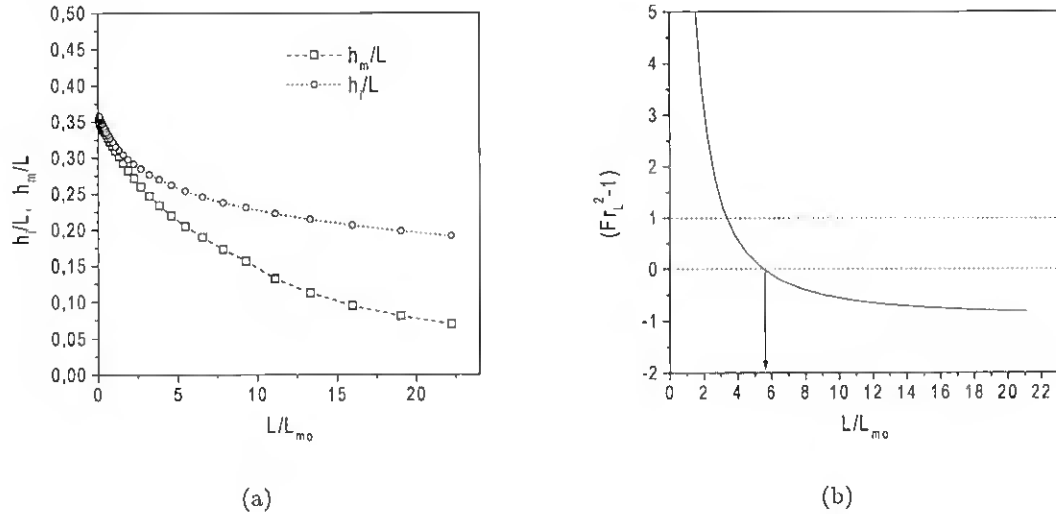


Figura 8.6: a) Perfil de  $h_i$  e  $h_m$  em função de  $L/L_{mo}$ , e b) perfil de  $(Fr_L^{-2} - 1)$  em função de  $L/L_{mo}$ .

Para saber porque isto acontece, são apresentados na figura 8.6a os perfis de  $h_i(L/L_{mo})$  e  $h_m(L/L_{mo})$ , calculados com (2.89) e (2.94), respectivamente, usando o perfil de  $U_r(z)$  (8.1). Todos os perfis foram normalizados com a largura da orografia  $L$ . Na figura pode-se constatar que  $h_m$  diminui muito mais acentuadamente do que  $h_i$  com o aumento da estabilidade. É por este motivo que  $Ki$  atinge um máximo e depois diminui.

Refira-se que  $Ki$  é sempre real, e  $Sh$  é sempre imaginário. O comportamento de  $Dy$  é mais complexo.  $Dy$  pode ser escrito em função do número de Froude horizontal  $Fr_L$  (ver expressões 2.100 e 2.99):

$$\tilde{p}'_s = \tilde{h}E(k) = \tilde{h}Me^{-Mz} \quad (8.16)$$

onde

$$M = \begin{cases} \sqrt{1 - Fr_L^{-2}} & Fr_L > 1 \\ -i [sgn(k)] \sqrt{Fr_L^{-2} - 1} & Fr_L < 1 \end{cases} \quad (8.17)$$

e  $Fr_L = U(h_m)k/N(h_m)$ . Se  $Fr_L > 1$   $M$  é real e portanto  $\tilde{p}'_s$  também o será.  $Fr_L < 1$   $M$  é imaginário mas o produto  $Me^{-Mz}$  em (8.16) é real, e portanto  $\tilde{p}'_s$  também o será. Assim, no caso simétrico  $Dy$ , tal como  $Ki$  é sempre real. Por isso os perfis de  $Ki$ ,  $Dy$  e  $Sh$  apresentados nas figuras 8.5a-c são da parte real das contribuições.

Na figura 8.6b está ilustrado o perfil de  $(Fr_L^{-2} - 1)$  em função de  $L/L_{mo}$ . Veja-se que  $Fr_L^{-2} - 1 = 0$  para  $L/L_{mo} = 5.7$ , com  $L = 400$  m, obtendo-se  $1/L_{mo} = 0.014$  que é mais ou menos o valor a partir do qual  $Ki$  deixa de diminuir.

Todo este raciocínio foi feito com uma orografia simétrica. No caso assimétrico a transformada da orografia tem sempre uma componente imaginária. Portanto,  $Dy$  terá componente imaginária e quando é multiplicado por  $Sh$  (que também tem componente imaginária) sofre um desfasamento que terá impacto no acréscimo de velocidade  $\Delta S$ . Este é um mecanismo análogo ao da produção de arrasto aerodinâmico (BW96).

A seguir serão apresentadas um série de simulações feitas com o modelo  $k - \varepsilon$  com o objectivo de validar FLEX com os dados experimentais de COOP94. Esta experiência é ideal para validar FLEX porque a orografia é aproximadamente bidimensional e porque os dados experimentais incluem casos neutros, moderada e acentuadamente estratificados.

Para o caso neutro as condições de fronteira são as seguintes. No topo os gradientes verticais de todas as variáveis são anulados. Não é imposta homogeneidade horizontal e, portanto, o gradiente de pressão horizontal no topo do domínio não precisa de ser nulo. É suficiente por isso anular o gradiente vertical da correcção de pressão  $p'$  e não a própria correcção. Na superfície são usadas as condições de parede. A secção de saída é colocada suficientemente longe para poder impor a condição de gradiente horizontal nulo para todas as variáveis. À saída, a velocidade  $U$  é corrigida de modo a garantir a conservação global da massa. No caso estavelmente estratificado é necessário usar esponjas nas fronteiras laterais e no topo do domínio. Na secção 4.10 fornecem-se mais detalhes sobre as condições de fronteira.

A fronteira de entrada deve estar suficientemente afastada para evitar a influência directa da orografia. Os perfis verticais da componente,  $U_r$ , da energia cinética turbulenta,  $k$ , e da dissipação,  $\varepsilon$ , são impostos à entrada do domínio. Para o perfil de  $U_r$  usa-se a expressão (8.1). Considera-se que à entrada  $W_r = 0$ . Os perfis verticais de  $k$  e  $\varepsilon$  têm a seguinte forma (adaptada de Wyngaard, 1985):

$$k(z) = C_\mu^{-1/2} u_*^2 (1 - z/h)^2 \quad \text{para } z < 0.99h \quad \text{e} \quad k(z) = k(0.99h) \quad \text{para } z \geq h \quad (8.18)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa} (1 - z/h)^2 \quad \text{para } z < 0.95h \quad \text{e} \quad \varepsilon(z) = \varepsilon(0.95h) \quad \text{para } z \geq 0.95h \quad (8.19)$$

A viscosidade dinâmica turbulenta é calculada mediante a expressão (3.18). No caso estavelmente estratificado, considera-se que o estado de referência está em equilíbrio hidrostático e que é horizontalmente homogéneo. Esta questão é discutida na secção 4.10. Novamente  $U_r$  é dado por (8.1) e as grandezas  $T_r$ ,  $\rho_r$  e  $P_r$  são determinadas com as expressões (3.6), (3.7) e (3.8), respectivamente. Para incluir os efeitos de superfície,  $\theta_r$  varia segundo a expressão (2.49) obtida com a teoria da similaridade de Monin-Obukhov.

Nas esponjas laterais de absorção de Rayleigh, as flutuações das variáveis turbulentas também são "desgastadas" até aos perfis de um escoamento turbulento parabólico, que neste caso correspondem aos perfis definidos para a entrada do domínio. Para este procedimento ser aceitável as fronteiras devem estar suficientemente afastadas.

A malha de cálculo foi definida de modo a satisfazer os requisitos de precisão e convergência e as condições de fronteira anti-reflexão. Para definir as dimensões das esponjas foram tomadas em conta as sugestões de Klemp e Lilly (1978) e de Durran e Klemp (1983). Para mais detalhes ver a secção 4.10.

Na figura 8.7 mostra-se a malha usada nas simulações da colina de Cooper usando FLEX. O domínio físico tem 16200 m na direcção  $x$  e 1200 m em  $y$ . A coordenada correspondente ao ponto mais alto da colina está situada em  $x_0 = 7200$  m. A malha base tem  $(180 \times 140)$  nós e possui três níveis de refinamento, de modo a obter-se resolução suficiente junto da superfície (0.15 m). Cada uma das esponjas laterais tem uma espessura de  $\delta_e = 3L$ , e a esponja superior  $\delta_e = L$ . Esta malha foi usada em todas as simulações cujos resultados serão apresentados a seguir. Teria sido possível melhorar alguns dos resultados se a malha tivesse sido otimizada para cada caso em particular, o que não foi possível dado o grande número de casos considerados.

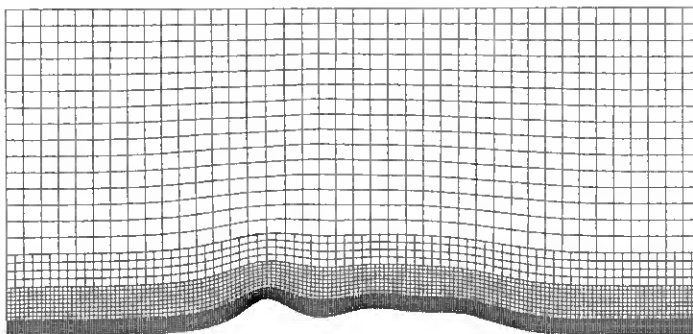


Figura 8.7: Caracterização da malha usada para as simulações de escoamentos sobre a colina de Cooper.

Os artigos de Hyun et al. (1998) e W97 foram os únicos encontrados na literatura com simulações da experiência de COOP94. Hyun et al. (1998) só fez simulações do caso neutro, apresentando unicamente o perfil horizontal de  $\Delta S$  para  $z = 2$  m. W97 simulou os casos neutro e estratificado com um modelo linear denominado MSFD-STAB desenvolvido por W97 com base no modelo MSFD de Beljaars et al. (1997). Este autor concentrou o seu estudo no comportamento de  $\Delta S$  no topo da orografia em função da estratificação ( $1/L_{mo}$ ). Os perfis experimentais de COOP94 usados por W97 foram: o da figura (8.4) para  $z = 2$  m, e os seus análogos para  $z = 8$  m e  $z = 16$  m. Foi com eles que W97 validou o modelo MSFD-STAB e outras modificações já antes expostas. Como se pode constatar na figura (8.4), estes dados evidenciam uma elevada dispersão. Por este motivo, no presente trabalho estes perfis só foram usados para validar o método exposto na secção 8.1 para o cálculo de  $u_*$ . W97 obteve ainda o perfil vertical de  $\Delta S$  no topo da orografia ( $x = 0$  m) para  $L_{mo} = 24$  m e  $L_{mo} = 118$  m. Os restantes dados experimentais de COOP94 não foram utilizados por este autor. Provavelmente isto deve-se ao facto de o modelo MSFD-STAB ser linear e por conseguinte não ser adequado para validar escoamentos acentuadamente não lineares, como é o caso de  $L_{mo} = 4$  m (ver tabela 8.1).

Na tabela 8.1 são dados diferentes parâmetros que caracterizam os vários escoamentos. Os casos 1-6 correspondem à orografia de Cooper. Os resultados das simulações destes escoamentos são apresentados a seguir. Todos os perfis verticais apresentados correspondem ao ponto mais alto da

orografia ( $x/L = 0$ ). As variáveis são  $\Delta S(z)$ ,  $\Delta U(z)$ ,  $U(z)$  e  $U_r(z)$ . Note-se que a perturbação  $u'$  é dada por  $u' = \Delta U = U_8(z) - U_3(z)$  onde os índices numerados correspondem aos postes mostrados na figura 8.1. O poste 8 está colocado em  $x/L = 0$  e o poste 3, que define o perfil de referência ( $U_r(z) = U_3(z)$ ), está colocado a uma distância de  $2L$  de  $x/L = 0$  (ver figuras 8.1a e 8.2). A altura dos perfis verticais é definida pela altura dos postes (nunca ultrapassa os 29 m). Para cada variável, é apresentado um conjunto de 4 perfis que correspondem a: a) dados experimentais de COOP94, b) resultados da simulação com FLEX, c) resultados do modelo analítico de HLR-HRB (no caso neutro a correcção de HRB é irrelevante), e d) resultados do modelo analítico de HLR-HRB-W97.

Todos os perfis horizontais apresentados correspondem à distribuição de  $\Delta S$  na direcção  $x$ . Para  $z = 2$  m o conjunto de perfis  $\Delta S(x)$  é idêntico ao referido no parágrafo anterior para os perfis verticais. Para  $z = 16$  m,  $z = 32$  m e  $z = 64$  m não existem dados experimentais de  $\Delta S(x)$ . Note-se que as altitudes  $z = 32$  m, e fundamentalmente  $z = 64$  m, foram escolhidas para as simulações tendo em conta que os aerogeradores têm alturas próximas desses valores.

Na figura 8.8 apresentam-se os perfis verticais para o caso neutro (caso 1 da tabela 8.1,  $L_{mo} = \infty$ ). Como se pode constatar, os melhores resultados são obtidos com FLEX. Chama a atenção o facto de HLR ter um melhor desempenho que HLR-W97. W97 validou a sua modificação (termo  $Sh$  da equação 8.15) com os resultados da experiência levada a cabo no monte de Askervein (Taylor and Teunissen, 1985). O problema está em que os perfis experimentais escolhidos não têm medições em regiões tão próximas da superfície que permitam validar com maior certeza as modificações de W97. De qualquer modo, neste caso o modelo HLR é claramente superior a HLR-W97.

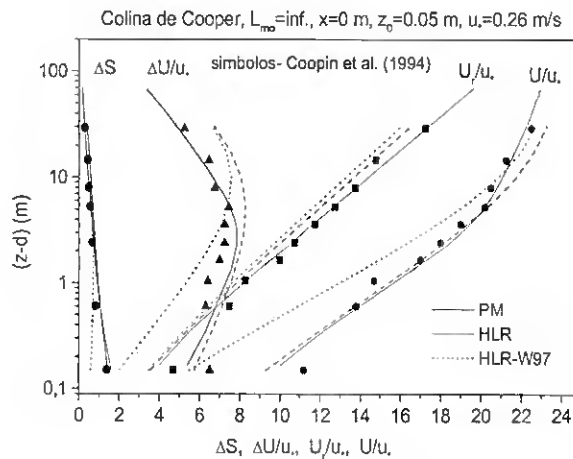


Figura 8.8: Perfis verticais em  $x = 0$  m de  $\Delta S$ ,  $\Delta U$ ,  $U$  e  $U_r$ , obtidos para  $L_{mo} = \infty$  (caso 1 da tabela 8.1) e normalizados com a velocidade de fricção  $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper.

Nas figuras 8.9a-d apresentam-se os perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$ , também para o caso neutro. Quando  $z = 32$  m ou  $z = 64$  m os perfis de HLR-HRB-W97 são omitidos porque coincidem totalmente com os do modelo HLR-HRB. Isto é verdade também para todos os casos estavelmente estratificados. Alguns autores argumentam que os modelos analíticos aqui usados não produzem bons resultados a jusante do topo da orografia (por exemplo Hyun et al., 1998). No entanto, como se pode constatar nas 8.9a-d, a coincidência dos perfis experimentais, numéricos e analíticos é notável.

Antes de continuar, é importante realçar vários aspectos sobre os parâmetros expostos na tabela 8.1. Os casos 1-4 correspondem a escoamentos onde  $h/L \sim O(1)$ , o que indica que não se trata de escoamentos de camada externa. Também se pode constatar que nestes mesmos casos, como  $h_i/L_{mo} < 1$ , os processos associados à geração de turbulência pelas tensões de corte não estão confinados à subcamada

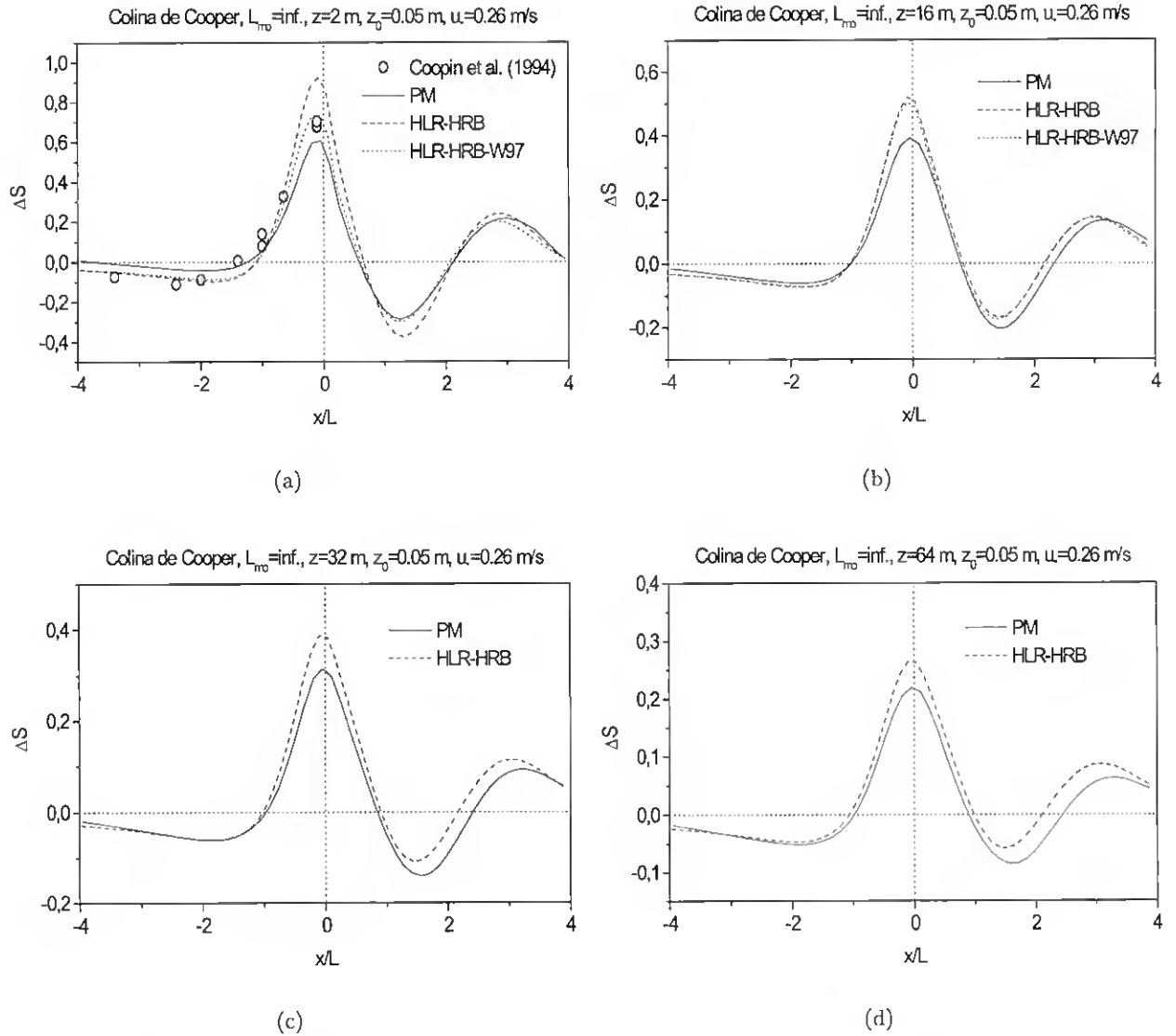


Figura 8.9: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o caso neutro (caso 1 da tabela 8.1): a)  $z = 2$  m, b)  $z = 16$  m, c)  $z = 32$  m e d)  $z = 64$  m.

interna pelo que na subcamada externa a estabilidade pode ter um papel importante nos processos turbulentos e ondulatórios. Por coincidência, o caso 5 define mais ou menos o limite de aplicabilidade do modelo HLR-HRB. Quando  $L_{mo} = 24$  m (caso 5),  $Fr_L^{-1} = 1.9$   $Fr_H^{-1} = 0.55$ . Embora  $Fr_L^{-1}$  esteja longe do limite hidrostático,  $Fr_H^{-1}$  apresenta valores característicos de escoamentos acentuadamente não lineares. Quando  $L_{mo} = 4$  m (caso 6) o escoamento é hidrostático, claramente não linear e, de acordo com a teoria de Long (1953), deve ocorrer o fenómeno de rebentação das ondas. O escoamento do caso 6 é de subcamada externa e o do caso 5 ( $L_{mo} = 4$  m) está muito próximo de o ser. Em todo o caso, estes dois últimos exemplos são significativamente não lineares, pelo que é de esperar que os modelos analíticos não produzam resultados satisfatórios.

Nas figuras 8.10-8.17 apresentam-se os resultados dos casos 2-6, i.e., com estratificação estável. De um modo geral, constata-se que os resultados obtidos quando há estabilidade não divergem mais dos

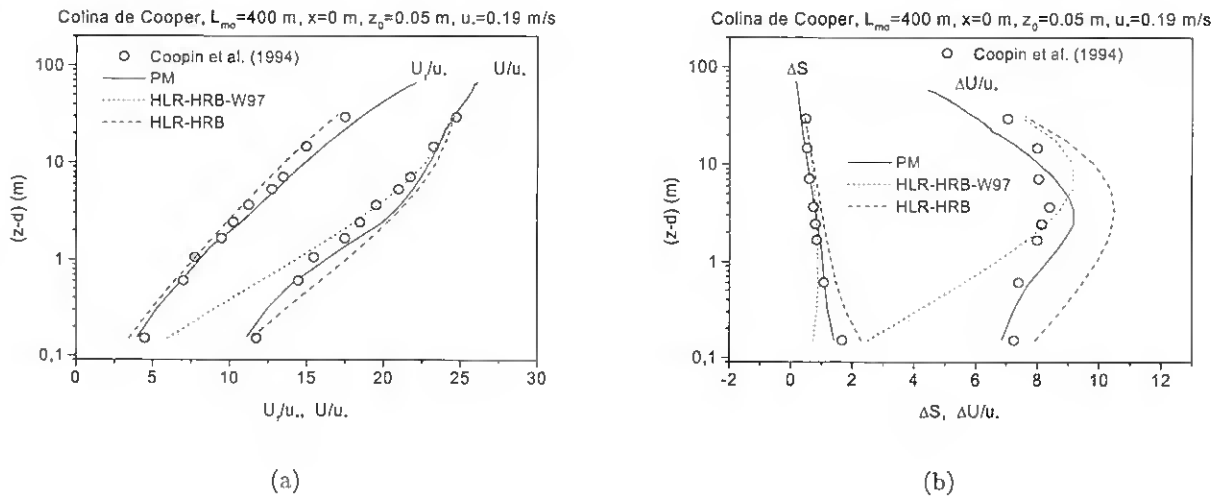


Figura 8.10: Perfis verticais no topo da orografia ( $x = 0$  m) para o escoamento com  $L_{mo} = 400$  m (caso 2 da tabela 8.1). a)  $U$  e  $U_r$ , b)  $\Delta S$  e  $\Delta U$ . Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção  $u_*$ .

resultados analíticos que os resultados análogos para os casos neutros. Por outro lado, a coincidência dos resultados numéricos com os experimentais é bastante boa mesmo para os casos com estabilidade elevada. Veja-se, por exemplo, os casos extremos 5 e 6 com  $L_{mo} = 24$  m e  $L_{mo} = 4$  m, respectivamente. Os perfis verticais numéricos do caso 5 (figura 8.15) evidenciam uma boa concordância com os dados experimentais. Já o mesmo não se pode dizer dos modelos analíticos cujo desempenho é, neste caso, bastante mau. Como já foi explicado nesta secção, o caso 6 ( $L_{mo} = 4$  m) é não estacionário, devido à ocorrência de instabilidade convectiva. COOP94 não fez medições da evolução temporal de  $\Delta S$  neste caso, de modo que não é possível fazer uma escolha fundamentada de um perfil numérico de  $\Delta S$  para comparar com o seu análogo experimental. Optou-se por representar os perfis correspondentes a vários instantes. Depositando alguma confiança nos resultados de FLEX, pode-se dizer que COOP94 mediu este perfil de  $\Delta S$  justamente no início de um processo de rebentação de ondas gravíticas.

Isto permite concluir que os modelos analíticos funcionam melhor em condições de fraca estabilidade. Tanto o modelo HLR como a a correcção de HRB para incluir o efeito da estabilidade não são eficazes nos casos estratificados.

Chama a atenção o facto de que os grandes desvios de  $U_r$  e  $\Delta U$  verificados entre perfis analíticos e os seus análogos experimentais não se reflectem significativamente nos perfis de  $\Delta S$ . Isto acontece porque  $\Delta S$  é uma quantidade relativa.

### 8.3 Escoamentos neutros e estáveis sobre orografias idealizadas

Nesta secção são apresentados os resultados obtidos com as simulações de escoamento sobre uma colina e um planalto de Agnesi cujas características são mostradas na figura 8.18a. Também foram estudados escoamentos sobre mais dois tipos de orografia: a) escarpa de Agnesi ascendente e b) escarpa de Agnesi descendente. As simulações são feitas para escoamentos com comprimentos de Monin-Obukhov de  $L_{mo} = 118$  m (caso 4) e  $L_{mo} = 54$  m (caso 8). O caso 4 foi escolhido porque ele ocupa um lugar mais ou menos intermédio no intervalo de validade da teoria de HLR e HRB, i.e., é linear e de subcamada interna mas não de modo acentuado. O caso 8 foi escolhido com o propósito de verificar se FLEX consegue captar a física explicada pela modificação de HRB para incluir a estratificação estável. Também são simulados escoamentos neutros. As altitudes escolhidas para os perfis horizontais de  $\Delta S$  são as mesmas que na secção anterior.

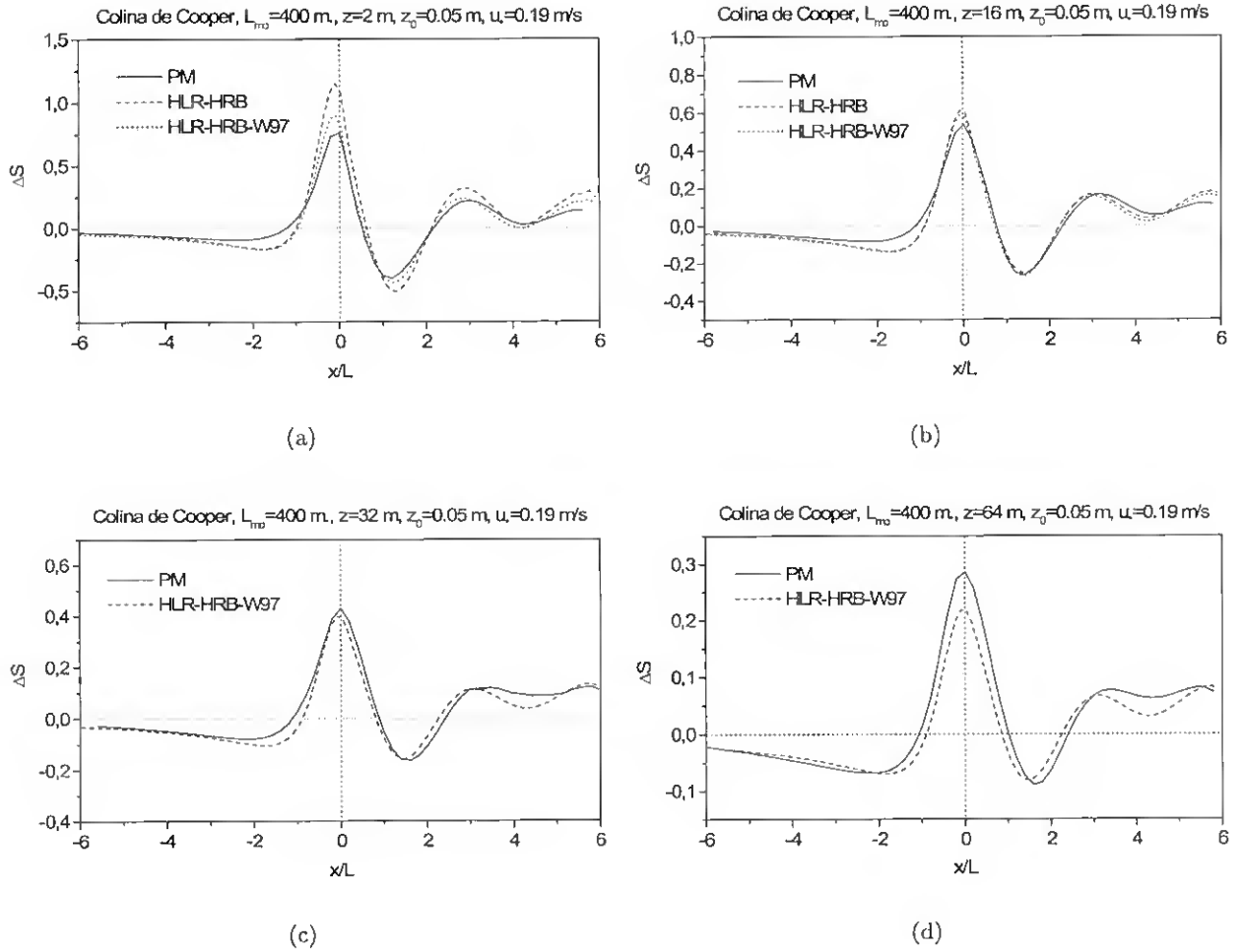


Figura 8.11: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o caso com  $L_{mo} = 400$  m (caso 2 da tabela 8.1). a)  $z = 2$  m, b)  $z = 16$  m, c)  $z = 32$  m e d)  $z = 64$  m.

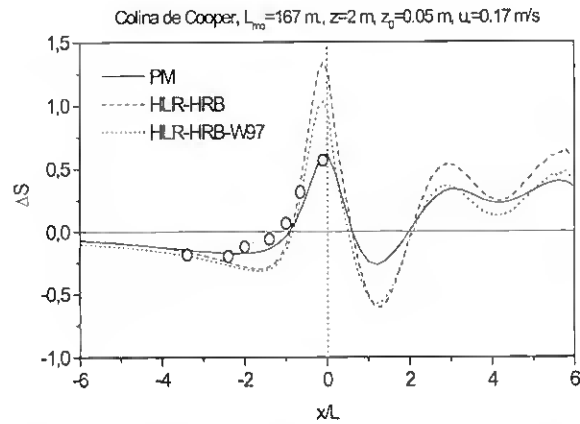


Figura 8.12: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para  $L_{mo} = 167$  m (caso 3 da tabela 8.1),  $z = 2$  m.

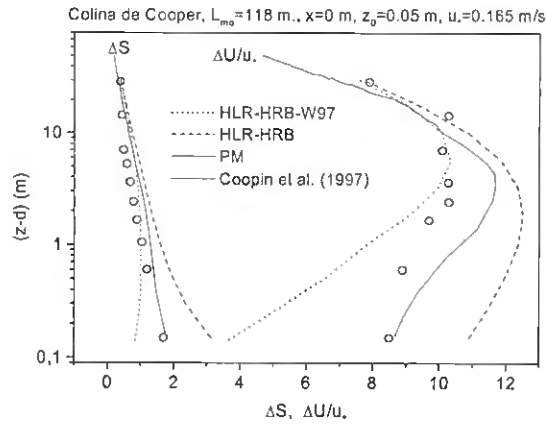


Figura 8.13: Perfis verticais ( $x = 0$  m) de  $\Delta S$ ,  $\Delta U$ ,  $U$  e  $U_r$ , obtidos para  $L_{mo} = 118$  m (caso 4 da tabela 8.1). Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção  $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper.

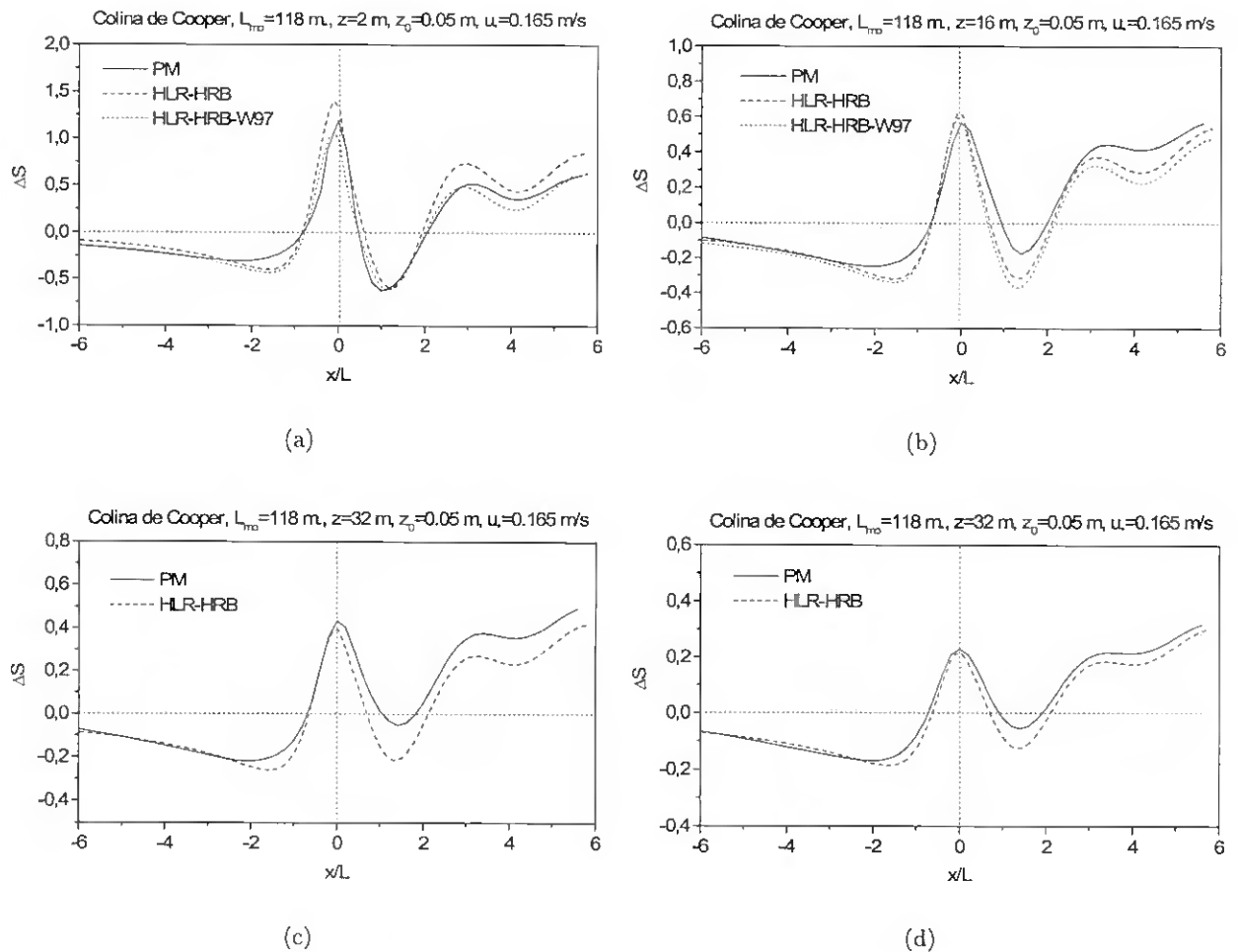


Figura 8.14: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o caso com  $L_{mo} = 118$  m (caso 4 da tabela 8.1). a)  $z = 2$  m, b)  $z = 16$  m, c)  $z = 32$  m e d)  $z = 64$  m. A orografia corresponde à colina de Cooper.

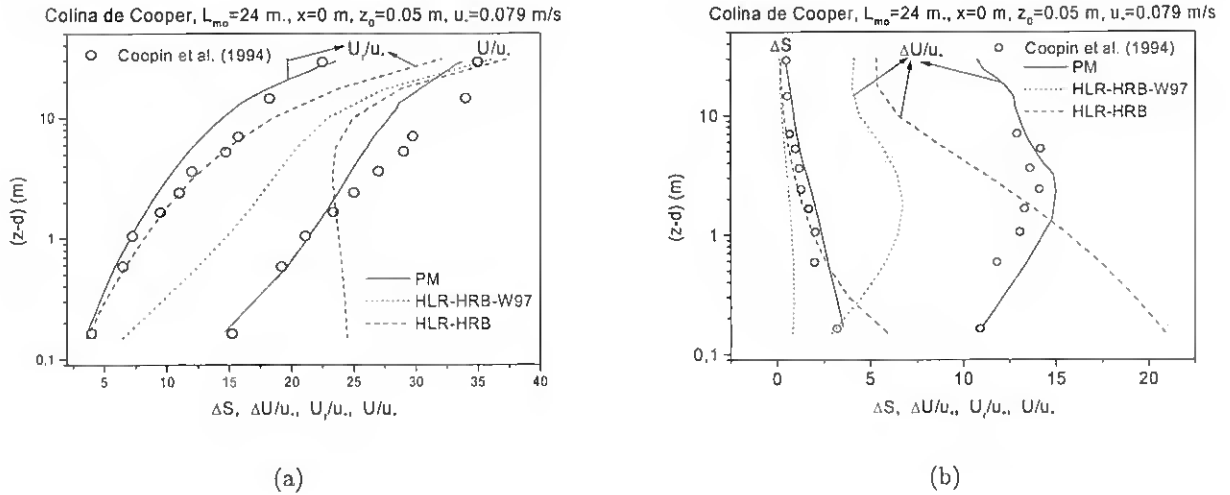


Figura 8.15: Perfis verticais em  $x = 0$  m para o escoamento com  $L_{mo} = 24$  m (caso 5). a)  $U$  e  $U_r$  b),  $\Delta S$  e  $\Delta U$ . Os perfis foram normalizados com a velocidade de fricção  $u_*$ . A orografia corresponde à colina de Cooper.

Na figura 8.19 estão ilustrados os perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o planalto de Agnesi. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 1 ( $L_{mo} = \infty$ ) da tabela 8.1. Nas figuras verifica-se uma boa coincidência entre os resultados numéricos obtidos com FLEX e os seus análogos analíticos. É interessante constatar que, no caso neutro, o perfil horizontal de  $\Delta S$  tem dois máximos e que eles estão localizados nos extremos da base superior do planalto. O máximo a montante de  $x = 0$  m é maior que o seu análogo a jusante.

O escoamento sobre o mesmo planalto com uma estabilidade moderada ( $N = 0.0078$  ( $s^{-1}$ )) possui também dois máximos, mas eles são consideravelmente maiores que os do caso neutro (ver figura 8.20). Ou seja, o efeito da estabilidade (moderada) é significativo. Curiosamente, a posição dos máximos está invertida em relação ao caso neutro. Agora, o "maior" máximo está a jusante. Esta inversão pode ser explicada com a teoria de HRB. Mais a frente, voltar-se-a a este ponto.

Na figura 8.21 apresentam-se os perfis horizontais de  $\Delta S$  obtidos a a partir da simulação de dois escoamentos neutros (caso 1); um sobre uma escarpa ascendente de Agnesi e o outro sobre uma escarpa descendente do mesmo tipo. Da análise das figuras pode-se concluir que o escoamento sobre a escarpa ascendente produz valores de  $\Delta S$  consideravelmente mais elevados que o seu análogo sobre a escarpa descendente. Verifica-se também que o máximo de  $\Delta S$  está ligeiramente deslocados para a esquerda no caso da escarpa ascendente e vice-versa para a escarpa descendente. Os perfis obtidos para o caso 4 ( $L_{mo} = 118$  m) correspondentes aos escoamentos sobre as referidas escarpas são mostrados na figura 8.22. Tal como no caso do planalto de Agnesi, neste caso a estratificação tem um efeito de inversão do comportamento de  $\Delta S$  verificado no caso neutro. Se neste último era a escarpa ascendente a que produzia maiores valores de  $\Delta S$ , no caso estratificado é na escarpa descendente que os valores de  $\Delta S$  são maiores. Por outro lado, a localização dos máximos neste caso não muda com a estabilidade.

Por último, na figura 8.23 mostram-se os perfis horizontais de  $\Delta S$  para o caso 8 ( $L_{mo} = 54$  m). A orografia é uma montanha de Agnesi com  $H = 115$  m e  $L = 400$  m. Este escoamento tem uma largura adimensional  $Fr_L^{-1} = 1$  pelo que, de acordo com HRB, no perfil horizontal de  $\Delta S$  deve começar a aparecer um segundo máximo a jusante da orografia. De facto é isso que se verifica claramente na figura 8.23. Em geral, a qualidade dos resultados numéricos obtidos com a orografia de Agnesi é superior à dos seus análogos obtidos com outras orografias, fundamentalmente no caso de orografia

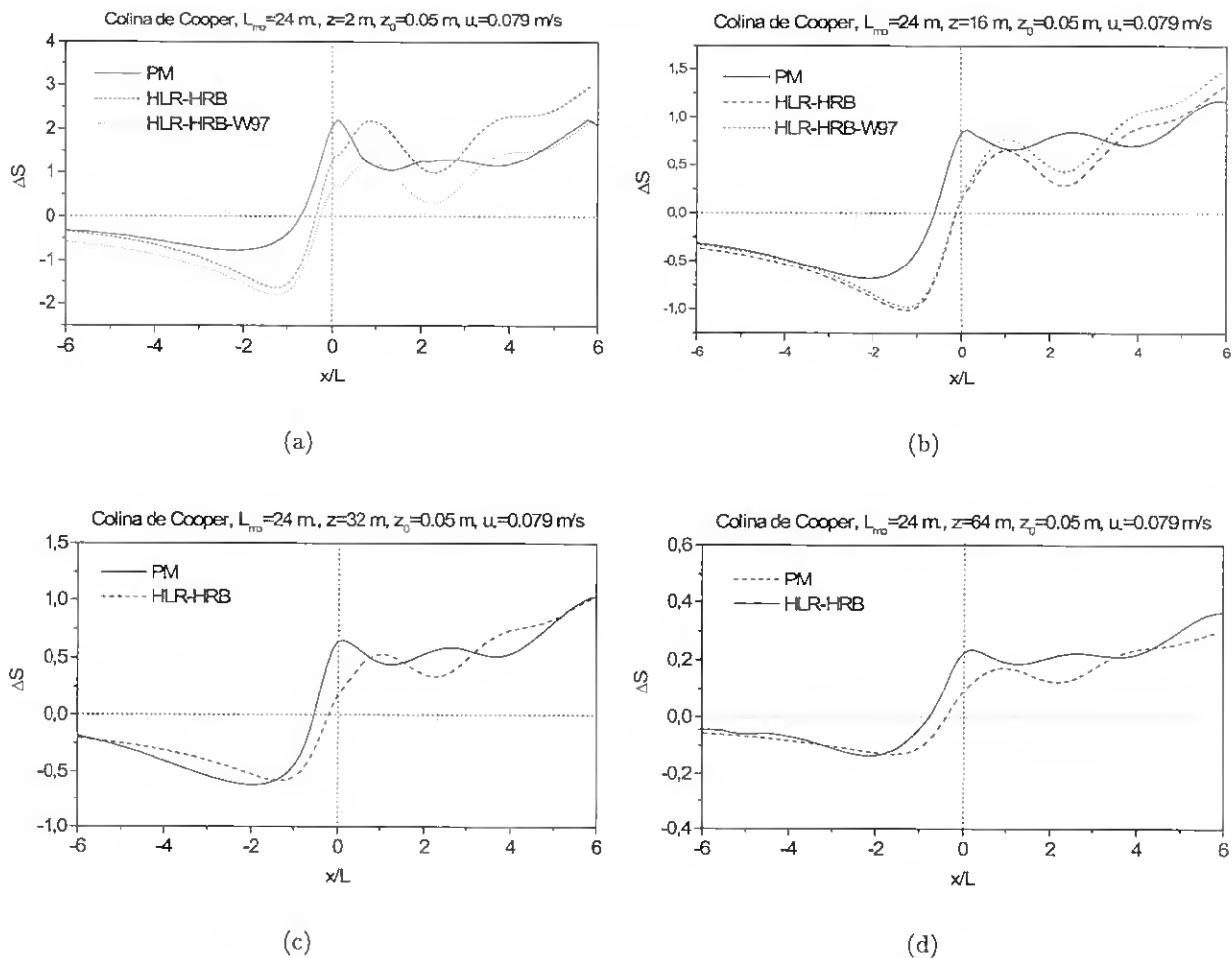


Figura 8.16: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o caso com  $L_{mo} = 24$  m (caso 5 da tabela 8.1). a)  $z = 2$  m, b)  $z = 16$  m, c)  $z = 32$  m e d)  $z = 64$  m. A orografia corresponde à colina de Cooper.

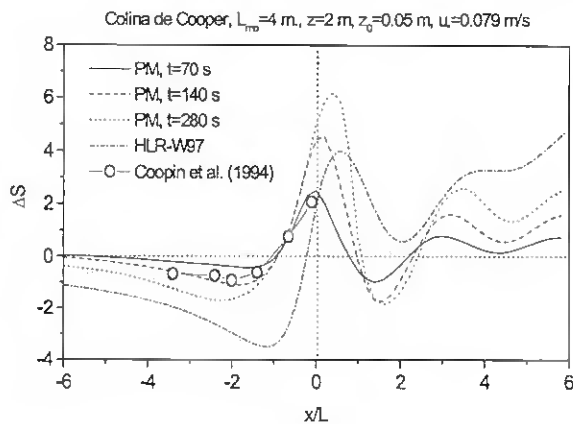


Figura 8.17: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o caso  $L_{mo} = 4$  m e  $z = 2$  m (caso 6 da tabela 8.1). A orografia corresponde à colina de Cooper.

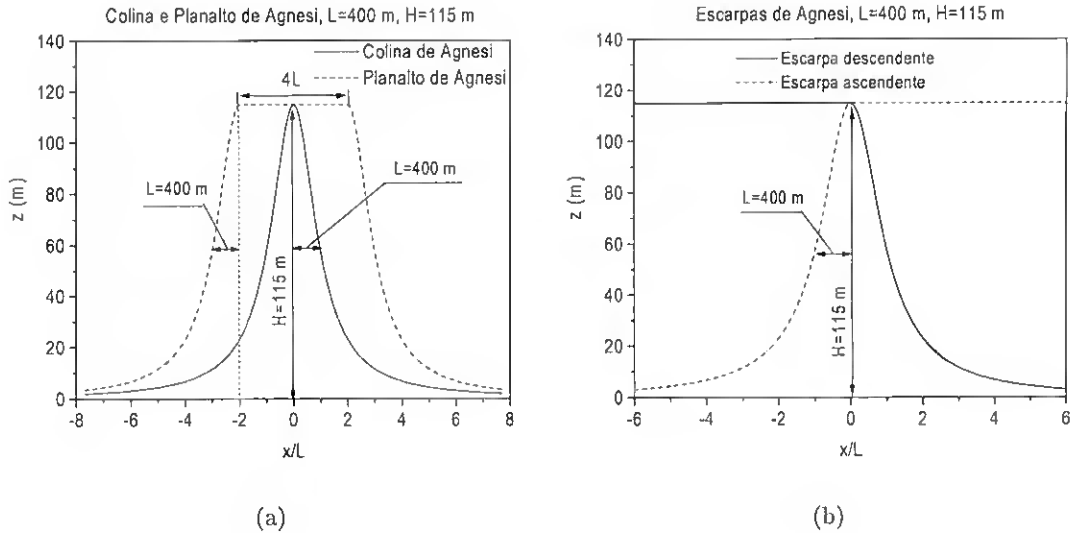


Figura 8.18: a) Colina e planalto de Agnesi, b) Escarpas de Agnesi ascendente e descendente.

assimétricas.

## 8.4 Assimetria e arrastos ondulatório e aerodinâmico

No capítulo 1 referiu-se que Miller e Durran (1991) (MD91) fizeram um estudo em escoamentos com  $h/L \ll 1$ , sobre a sensibilidade dos VSJO (Ventos Severos a Jusante da Orografia) à assimetria do perfil da montanha. Para fazer este estudo MD91 recorreram às três formas conhecidas de gerar VSJO: 1) mecanismo não linear associado à existência de uma descontinuidade  $H_d$  no perfil da estabilidade, 2) mecanismo de reflexão parcial linear (Klemp e Lilly, 1975, 1978), 3) mecanismo da cavidade de ressonância associado à presença de níveis críticos  $H_c$  impostos mediante o perfil de referência  $U_r(z)$ , e 3a) mecanismo associado aos níveis críticos auto induzidos pela rebentação das ondas gravíticas. Na secção 7.6 foi estudado um escoamento homogêneo onde se verificava este último fenómeno.

Os autores concluíram que a sensibilidade das VSJO ao perfil da montanha, está associada essencialmente aos efeitos de fricção com a superfície, e que o parâmetro mais importante do perfil da montanha é o declive a jusante e não a assimetria. Também verificaram que nos casos em que se geram VSJO associados a níveis críticos (impostos ou induzidos), o arrasto ondulatório nos escoamentos sem fricção, e a localização da zona de rompimento das ondas, são praticamente independentes da assimetria da montanha. Este último resultado é bastante inesperado, porque a amplitude e estrutura das ondas gravíticas que se propagam verticalmente, devem depender da altura e simetria da montanha (Lilly and Klemp, 1979). MD91 não estudaram a sensibilidade das VSJO no caso de se impor fricção em escoamentos com níveis críticos induzidos.

É pertinente colocar a seguinte questão: será que nos casos com níveis críticos induzidos, nos quais a fricção é também imposta, o arrasto ondulatório e a localização da zona de rompimento das ondas são independentes da assimetria da montanha? Como o arrasto ondulatório está associado às grandes escalas da orografia e, portanto, à porção invíscida do escoamento (subcamada externa), é de esperar que, para os escoamentos com  $h/L \ll 1$  e  $h_i/L_{mo} \ll 1$ , este resultado se mantenha válido. O estudo de MD91 foi feito em escoamentos com  $h/L \ll 1$  e  $H/L \ll 1$ . Seria interessante realizar o mesmo estudo destes autores em escoamentos sobre orografias similares mas com dimensões muito

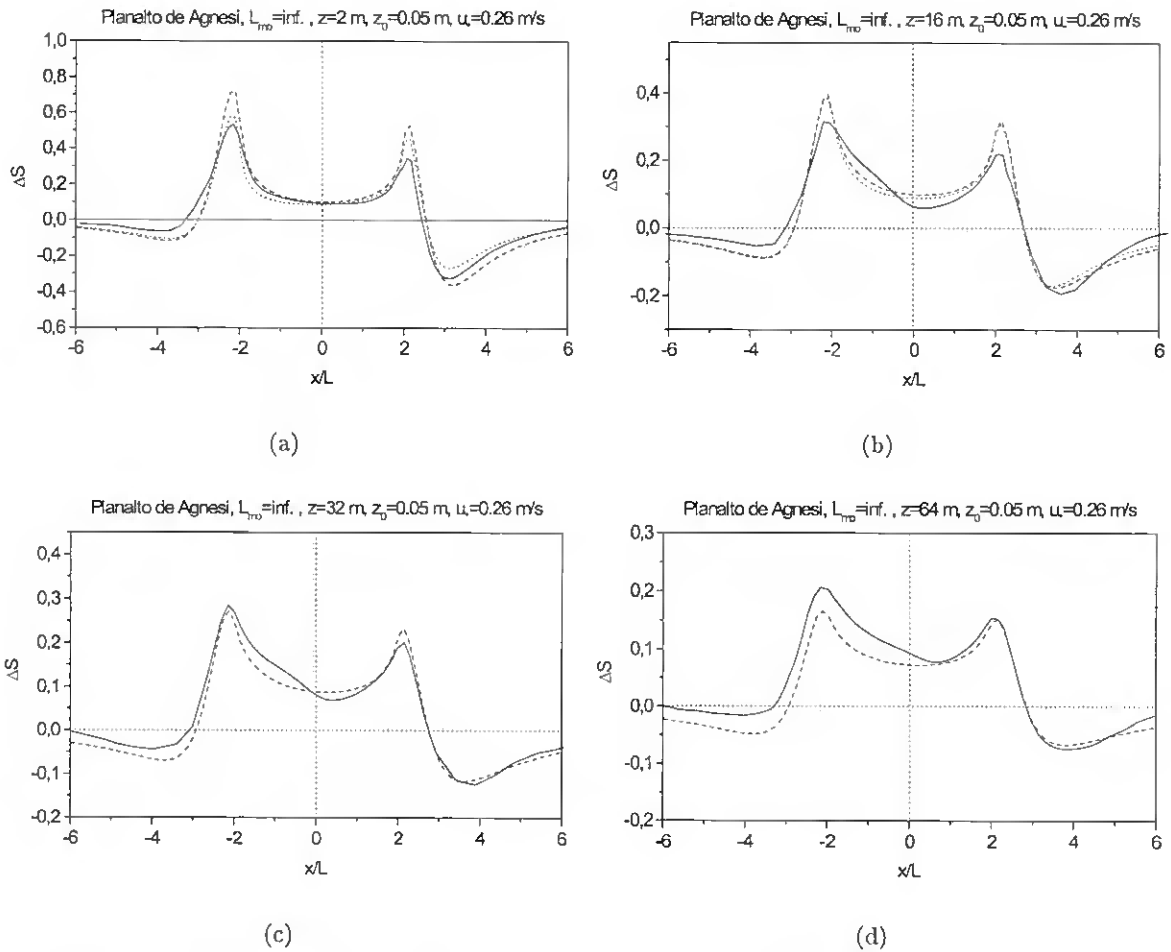


Figura 8.19: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para o planalto de Agnesi. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 1 ( $L_{mo} = \infty$ ) da tabela 8.1. A orografia está representadas na figura 8.18.

mais pequenas e declives mais pronunciados. Para parametrizar a turbulência, estes autores usaram o modelo de 1ª ordem de Lilly (1962). Portanto, também é importante conhecer que mudanças introduz nos resultados destes autores o uso do modelo  $k - \epsilon$ . Infelizmente, MD91 não apresentam perfis da evolução temporal de  $D_w$ . No entanto estes autores referem que a imposição da fricção na superfície em escoamentos onde existam os mecanismos 1) ou 3), provoca uma diminuição do arrasto  $D_w$ .

Nesta secção serão estudadas as evoluções dos arrastos produzidos por dois escoamentos; o primeiro corresponde ao caso 7 e o segundo ao caso 6 (ver tabela 8.1). Note-se que o caso 7 é idêntico ao escoamento de subcamada externa simulado no capítulo 6 para simular o processo de rebentação das ondas. Como já foi antes referido o escoamento do caso 6 ( $L_{mo}=4$  m) é hidrostático e acentuadamente não linear. Como  $Fr_H^{-1} > 0.85$  (Miles e Hupert, 1969) então deve ocorrer o mesmo fenómeno de rebentação das ondas que se verificou no caso 7, quando foi estudado no capítulo 6. Analisando detalhadamente os parâmetros dos casos 6 e 7 pode-se constatar que as suas grandezas adimensionais são muito semelhantes. Apesar das orografias destes casos terem dimensões características muito diferentes, estas grandezas adimensionais são muito similares porque a estabilidade do caso 6 é 10 vezes maior que a do caso 7. Portanto, no caso 6, mesmo com escalas muito pequenas, a força de flutuação faz-se sentir sempre.

Por outro lado, o caso 6 tem uma orografia com um declive de  $H/L = 0.29$ , e o caso 7 de

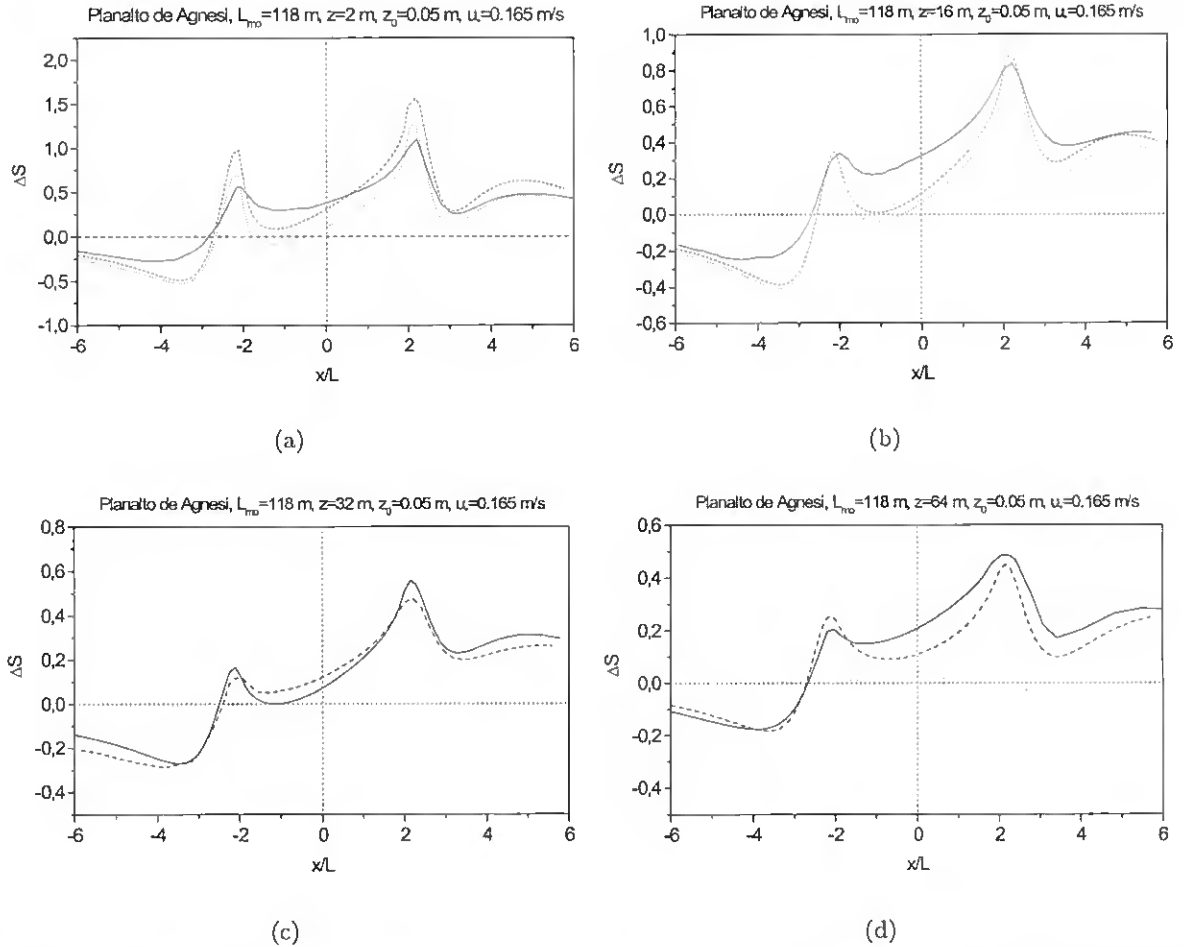


Figura 8.20: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para a colina e o planalto de Agnesi. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 4 ( $L_{mo} = 118$  m) da tabela 8.1.

$H/L = 0.17$ . Pretende-se verificar se as conclusões de Miller e Durran (1991) sobre o efeito da assimetria da orografia no arrasto e nos VSJO se mantêm válidas para o caso 6, quando se impõe a fricção na superfície (funções de parede) e se usa o modelo  $k - \epsilon$ .

Uma orografia assimétrica pode ser definida usando os perfis de Agnesi na forma:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{HL_e^2}{x^2 + L_e^2} & \text{para } x < 0 \\ \frac{HL_d^2}{x^2 + L_d^2} & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

onde os índices "e" e "d" se referem a esquerdo e direito, respectivamente. Se  $L_e = L_d$  obtém-se a montanha de Agnesi.

Na figura 8.24 apresentam-se os perfis de evolução temporal dos arrastos  $D_w$  e  $D_w$  para o caso 7 ( $L_{mo} = 56$  m) obtidos com três configurações diferentes. Estas são: (1) Fecho de Lilly (1962), sem refinamento da malha junto da superfície e com a condição de livre escorregamento, (2) fecho de Lilly (1962) e (3) fecho do modelo  $k - \epsilon$ . As configurações (2) e (3) têm refinamento junto da superfície, têm fricção, e usam os perfis de similaridade de Monin-Obukhov. Constatou-se que o arrasto ondulatorio é consideravelmente menor quando se usa o modelo  $k - \epsilon$ . Este resultado está em concordância com

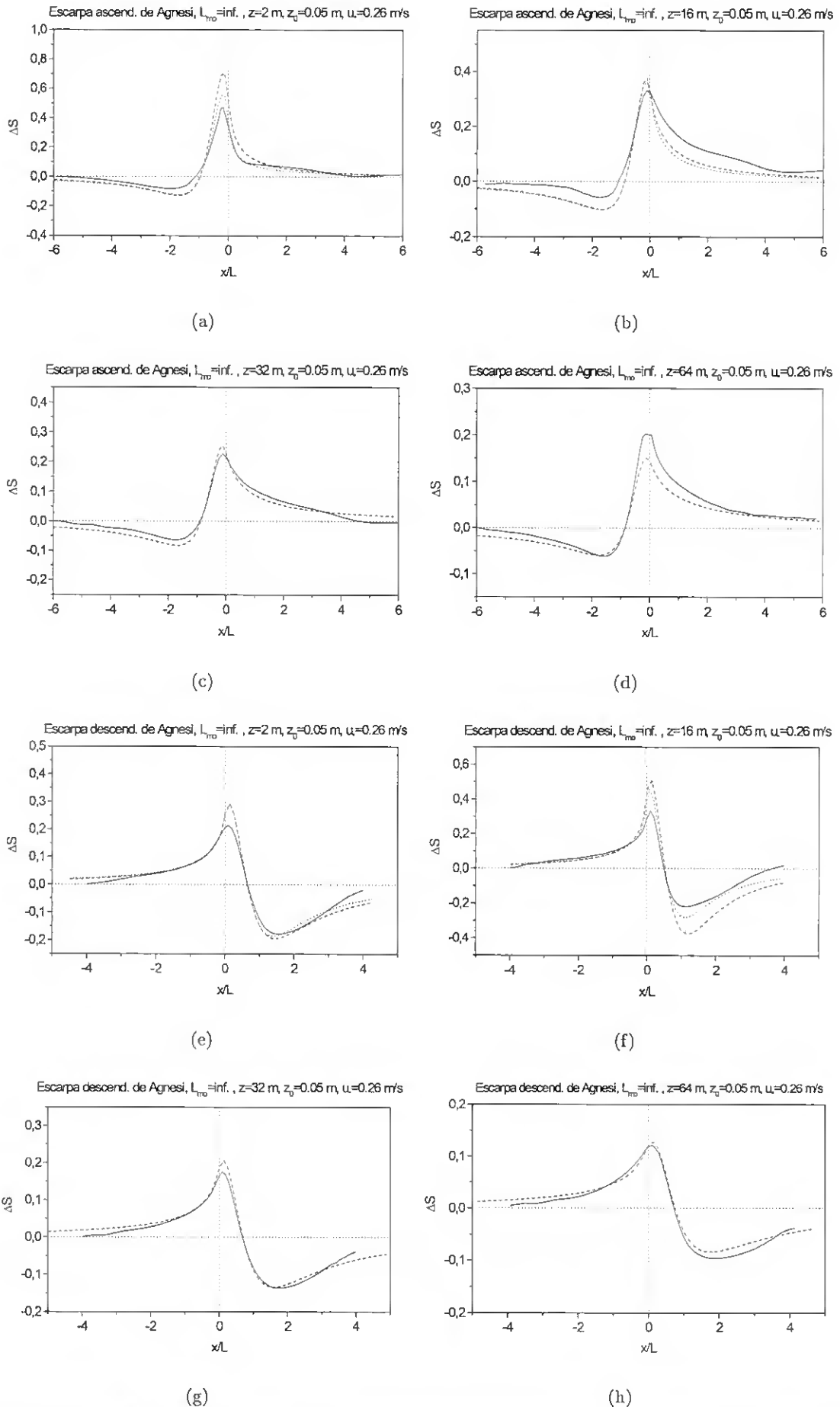


Figura 8.21: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para as escarpas de Agnesi representadas na figura 8.18. Os parâmetros deste escoamento são os do caso I ( $L_{mo} = \infty$ ) da tabela 8.1.

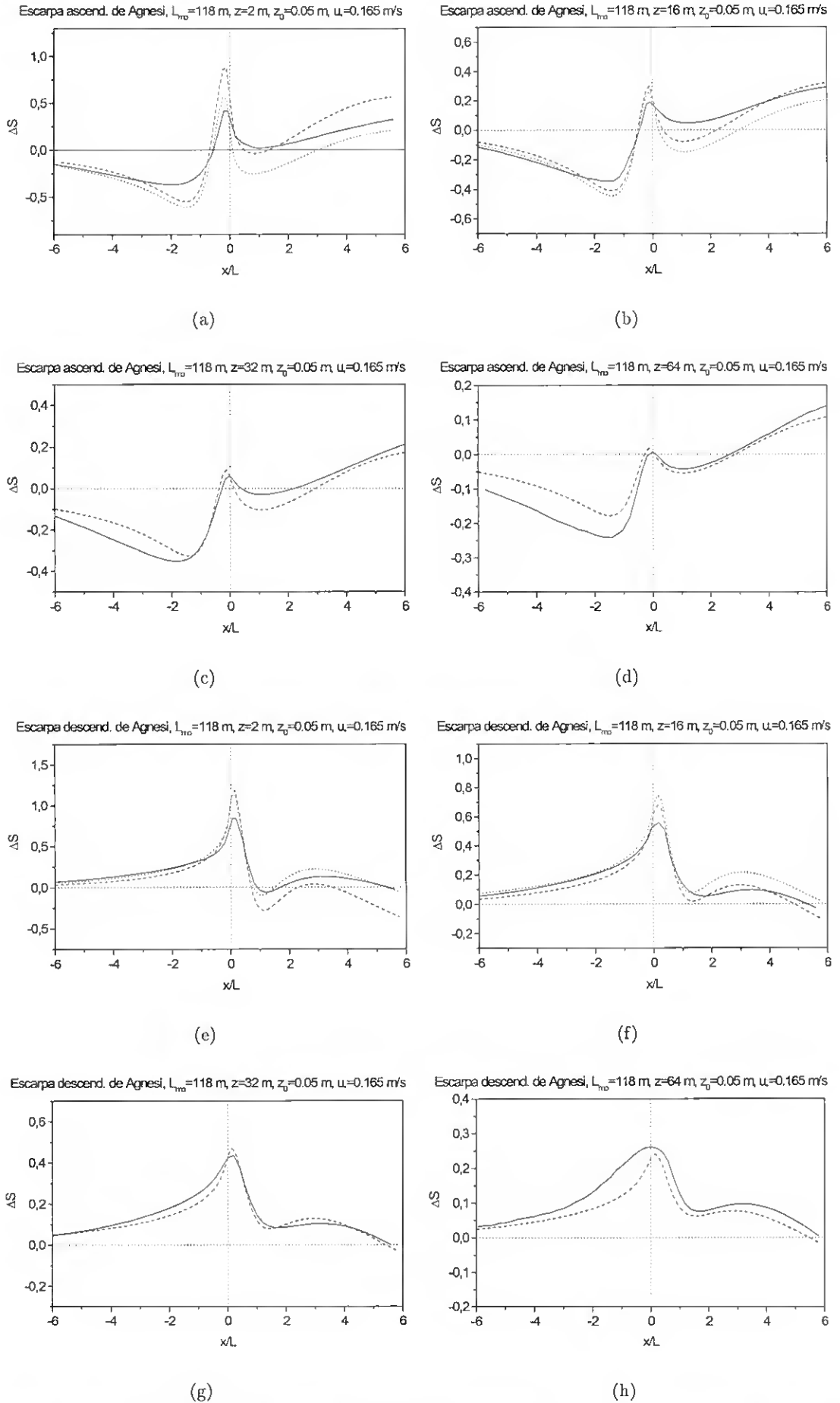


Figura 8.22: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para as escarpas de Agnesi representadas na figura 8.7. Os parâmetros deste escoamento são os do caso 4 ( $L_{mo} = 118$  m) da tabela 8.1.

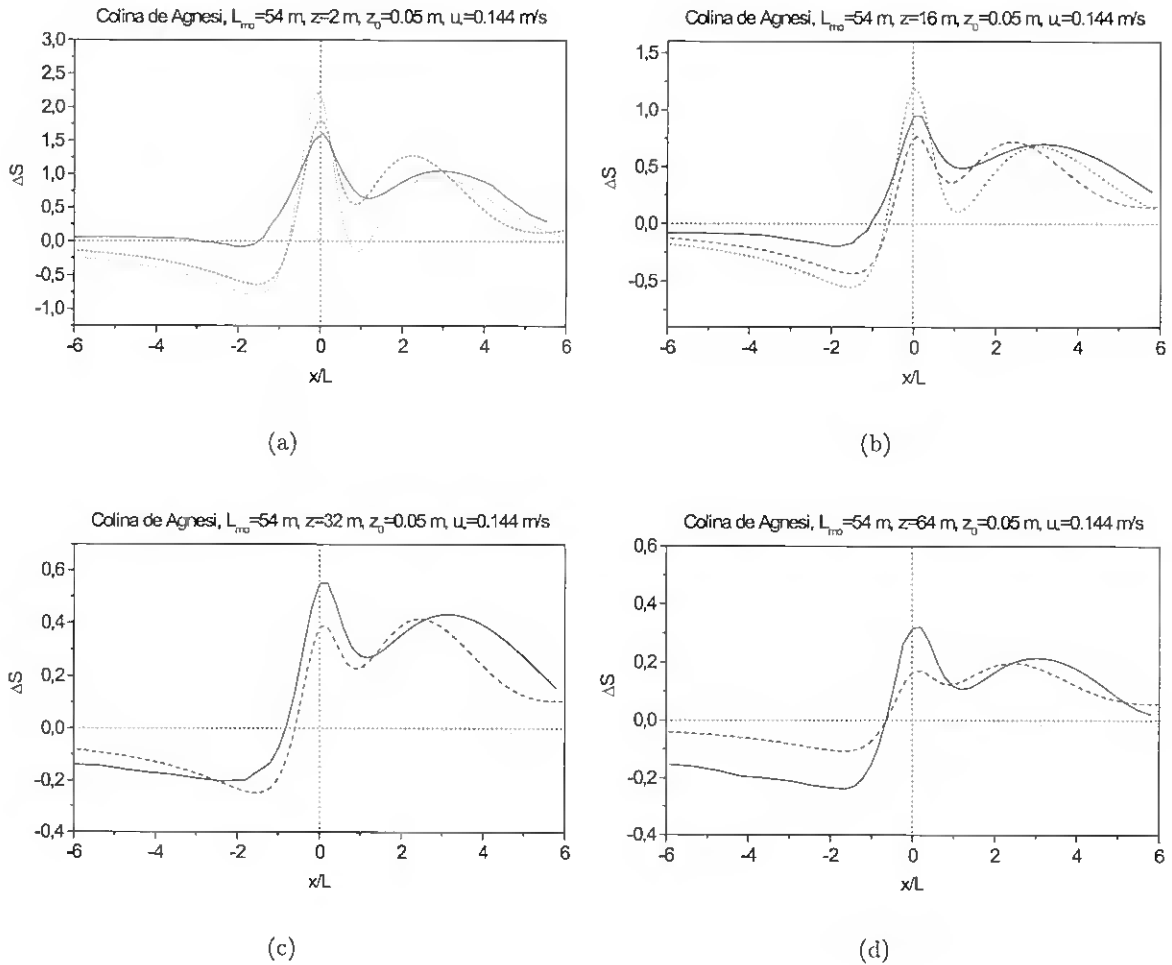


Figura 8.23: Perfis de  $\Delta S$  em função de  $x/L$  para uma colina de Agnesi ( $L_{mo} = 54m$ ). Os parâmetros deste escoamento são os do caso 8 da tabela 8.1.

o que foi concluído por MD91 para os mecanismos (1) e (3) acima explicados. Portanto, o uso do modelo  $k - \varepsilon$ , com fricção e refinamento junto à superfície, produz uma diminuição significativa do arrasto. Por outro lado, o uso do refinamento com qualquer um dos dois modelos de turbulência faz aumentar significativamente  $D_f$ . Isto faz sentido porque  $D_f$  está associado aos comprimentos de onda mais pequenos e, portanto, um maior refinamento possibilita uma maior resolução dos efeitos de comprimentos de onda pequenos associados à geração de  $D_f$ .

Na figura 8.26 apresentam-se os campos das linhas isentrópicas obtidas com o modelo  $k - \varepsilon$ , usando perfis de orografias calculados com a expressão (8.20). As figuras a) c) e e) correspondem ao caso 6 ( $l_{mo} = 4$  m) e as figuras b), d) e f) ao caso 7 ( $l_{mo} = 56$  m)(ver tabela 8.1). Como se pode ver, a semelhança entre os campos obtidos com os dois escoamentos simulados é notável. A altura da zona de rebentação e a forma das linhas de corrente nas mesmas são praticamente idênticas. Portanto, pode-se concluir que, embora se tenha usado um modelo de turbulência completamente diferente do empregue por BD91, um refinamento maior na superfície, e uma forma diferente de impor o atrito na mesma, as conclusões destes autores sobre a localização da zona de instabilidade convectiva, se mantêm também para o mecanismo de geração de VSJO, 3a).

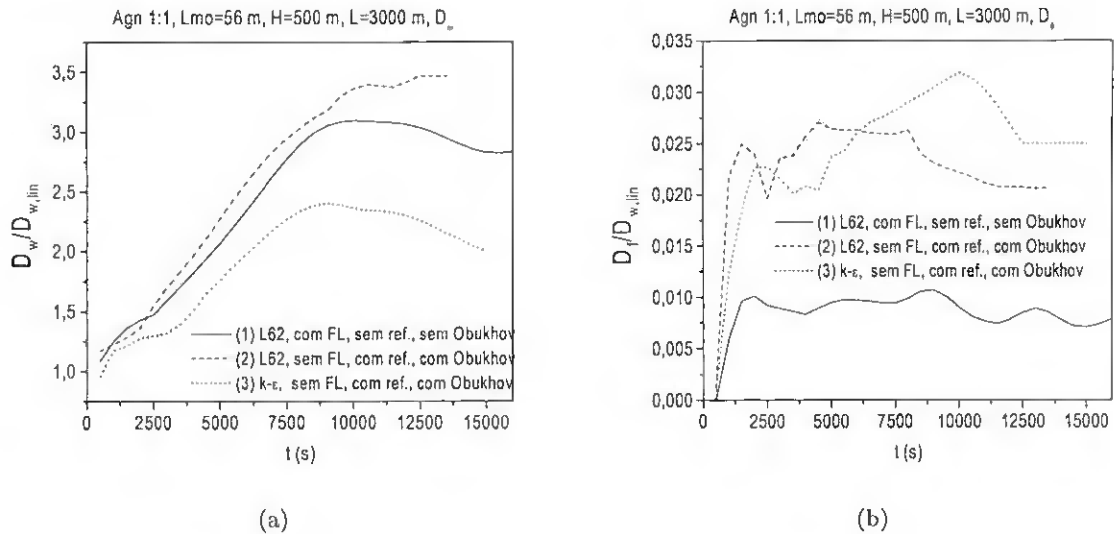


Figura 8.24: Evolução temporal dos arrastos, a) ondulatório ( $D_w$ ) e b) aerodinâmico. Os perfis foram obtidos com três configurações diferentes. Estas são: (1) Fecho de Lilly (1962), sem refinamento da malha junto da superfície e com a condição de livre escorregamento, 2) fecho de Lilly (1962) e 3) fecho do modelo  $k - \epsilon$ . As configurações 2) e 3) têm refinamento junto da superfície, fricção, e usam os perfis de similaridade de Monin-Obukhov.

Na figura 8.25 mostra-se uma inter-comparação dos perfis de evolução temporal do arrasto  $D_w$  obtidos para o caso 7, usando três orografias diferentes e o modelo  $k - \epsilon$ . Verifica-se que  $D_w$  e  $D_f$  são muito sensíveis à assimetria da orografia. Para os mecanismos 1) e 3) MD91 verificaram que o arrasto era pouco sensível à assimetria, fundamentalmente para o mecanismo 3). Segundo MD91 o mecanismo 1) revelava alguma sensibilidade. Por exemplo, para Agn1:4, Agn1:1 e Agn4:1, com o mecanismo 1) MD91 obtiveram os seguintes valores máximos de  $D_w/D_{w,lin}$ : 2.1, 3.1 e 3.9. Os valores análogos a estes obtidos para o caso 7 (mecanismo 3a) com FLEX são 1, 2.3 e 3.25. A evolução de  $D_f$  para o caso 7 mostra que existe uma espécie de balanço entre  $D_w$  e  $D_f$ . Isto faz sentido porque se determinadas componentes da perturbação, em fase com a declive da orografia, não produzem  $D_w$  então têm que produzir  $D_f$  e vice-versa. O mesmo se verifica para o caso 6 ( $L_{mo} = 4$  m).

O que mais chama a atenção é que, apesar da grande semelhança dos campos das isentrópicas dos casos 6 e 7, se verifica uma diferença significativa nos perfis dos arrastos. Por exemplo, na figura 8.25b (caso 6)  $D_w$  tem um comportamento completamente diferente do seu análogo do caso 7 porque os perfis de  $D_w$  para Agn1:1 e Agn1:4 invertem o seu comportamento de um caso para o outro. Por outro lado, é obvio que a configuração que produz maiores valores de  $D_w$  para ambos casos é Agn4:1. Também se pode concluir da comparação das figura 8.25c e d que o arrasto  $D_f$  é sempre maior no caso 6. Portanto mesmo que os parâmetros adimensionais do escoamento sejam muito similares, as escalas horizontal e vertical da orografia <sup>1</sup> são factores que fazem com os dois escoamentos tenham sensibilidades diferentes à assimetria da orografia. Quando uma orografia é assimétrica é preciso dispor de comprimentos de onda menores para a descrever correctamente. Por sua vez, isto implica um deslocamento da quantidade de energia do espectro para o lado dos números de onda maiores, implicando um aumento de  $D_f$  e, conseqüentemente, uma diminuição de  $D_w$ .

Uma coisa que BD91 não referem é que o intervalo de tempo em que começa a verificar-se a

<sup>1</sup>O declive  $H/L$  e a escalas horizontal e vertical das orografias são as diferenças fundamentais entre os casos 6 e 7

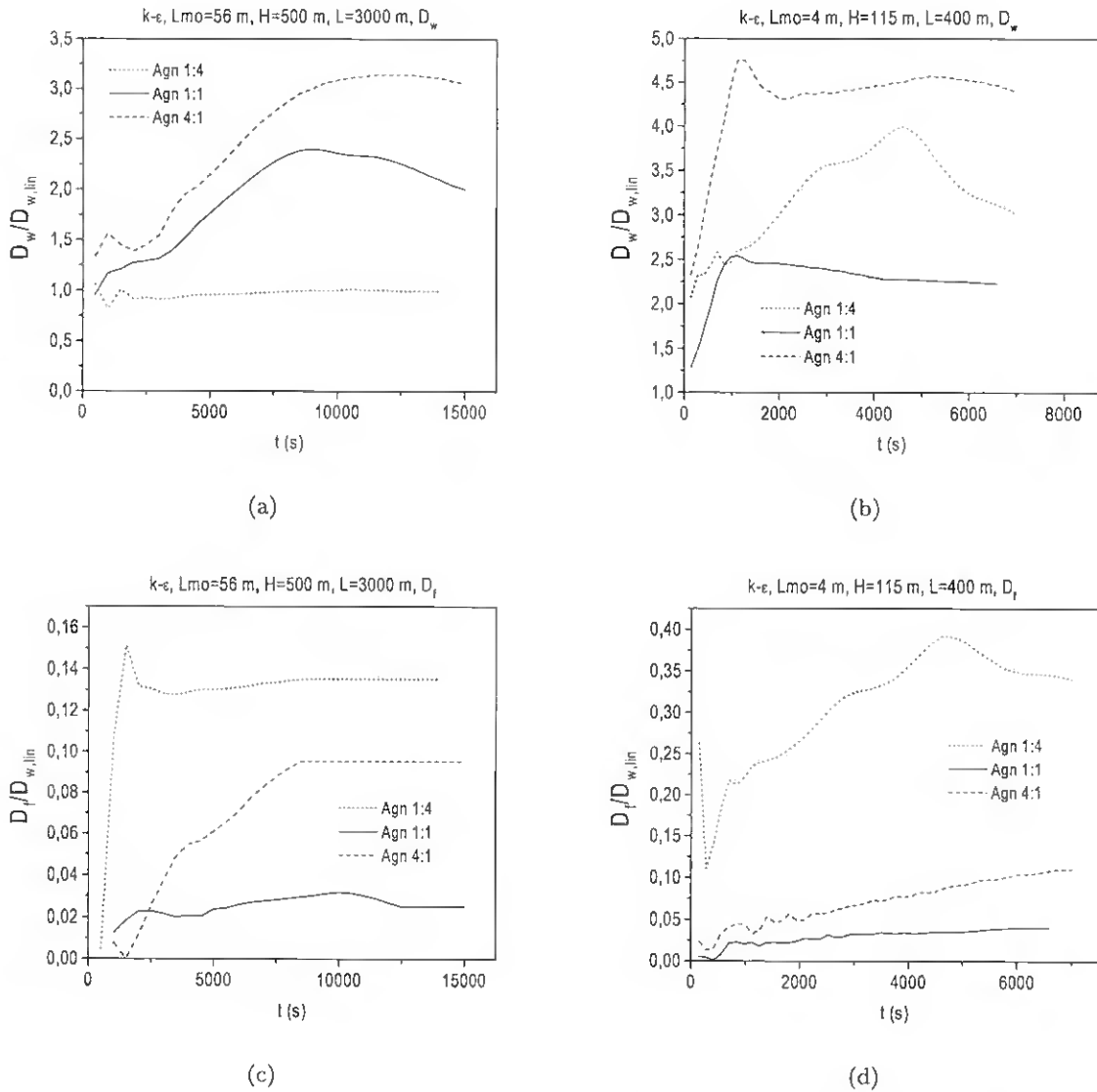


Figura 8.25: Comparação dos perfis de evolução temporal do arrasto  $D_w$  obtidos para o caso 7, usando três orografias com assimetrias diferentes e o modelo  $k-\epsilon$ . a) Arrasto ondulatório ( $D_w$ ) para o caso 7, b)  $D_w$  para o caso 6, c) arrasto aerodinâmico ( $D_f$ ) para o caso 7, e d)  $D_f$  para o caso 6. Agn1:4 significa que  $L_e/L_d = 1/4$ . As características dos diferentes casos estão expostas na tabela 8.1.

instabilidade convectiva é muito sensível à assimetria da orografia. Por exemplo, quando a orografia é Agn1:4, a instabilidade convectiva demora 3 vezes mais tempo a formar-se em relação ao tempo que demora a formar-se quando a orografia é Agn1:1. Este efeito é comum aos dois casos.

## 8.5 Conclusões

Do trabalho realizado neste capítulo podem se tirar as seguintes conclusões:

- O método desenvolvido para calcular  $u_*$  permitiu melhorar o desempenho do modelo HLR-HRB-W97



- FLEX consegue simular com bastante qualidade a maior parte dos escoamentos aqui estudados, inclusive aqueles acentuadamente estáveis.
- Os modelos HLR-HRB e HLR-HRB-W97 só funcionam bem quando a estabilidade é moderada.
- O modelo FLEX consegue captar toda a física da modificação de HRB para incorporar a estratificação no modelo teórico de HLR.
- O método de divisão do arrasto  $D_{wf}$ , permitiu, embora de modo qualitativo, estudar o efeito da assimetria nos arrastos e VSJO.
- Se os parâmetros adimensionais de dois escoamentos sobre orografias com escalas muito diferentes são similares, então as zonas de instabilidade convectiva que se produzem no processo de rebentação das ondas gravíticas têm localizações também muito similares. A forma das linhas isentrópicas também é muito semelhante em ambos casos.
- O intervalo de tempo em que começa a verificar-se a instabilidade convectiva, é muito sensível à assimetria da orografia e as suas escalas.
- Mesmo que os parâmetros adimensionais do escoamento sejam muito similares, os arrastos  $D_w$  e  $D_f$  são muito sensíveis às dimensões características da orografia.

## Capítulo 9

# Conclusões

Neste trabalho procedeu-se ao desenvolvimento e validação de um modelo numérico bidimensional, apropriado para o estudo de escoamentos atmosféricos neutros e estratificados, de diferentes escalas. Tradicionalmente, os escoamentos de mesoscala e de microscala são simulados com modelos diferentes, tanto em termos das aproximações físicas como das opções numéricas. Os escoamentos de microscala têm sido um problema central da modelação numérica em engenharia mecânica, enquanto que os escoamentos de escalas maiores são objecto de trabalho da meteorologia. Dado pretender-se um código capaz de tratar este largo espectro de problemas físicos, procurou estabelecer-se um compromisso em que se recorre a metodologias oriundas destas duas comunidades. Por outro lado, foi dada grande atenção ao desenvolvimento de esquemas numéricos suficientemente robustos e flexíveis e tentou-se fazer um grande número de testes de validação que cobrisse uma gama alargada de escalas e de problemas físicos.

No modelo desenvolvido (FLEX) foram implementadas um conjunto de características numéricas, entre as quais se salientam: o emprego de coordenadas generalizadas ortogonais, geradas por um método baseado na mobilidade dos nós nas fronteiras; o tratamento das equações do escoamento, para isolar os termos associados à não ortogonalidade; um novo método de refinamento local da malha, adaptado ao uso de coordenadas generalizadas e estendido a esquemas de 2ª e 3ª ordem de precisão para as derivadas advectivas; o uso de um novo método de extrapolação nas fronteiras, para atenuar a degradação dos esquemas de discretização; um novo tratamento dos termos advectivos no algoritmo de solução das equações discretizadas; e a combinação de funções de parede com as funções de Monin-Obukhov para o estudo de escoamentos atmosféricos não neutros.

O estudo de validação da componente numérica do modelo, efectuado com base em simulações clássicas do escoamento numa cavidade com parede móvel e em torno de obstáculos isolados, permitiu obter as seguintes conclusões:

- O melhor desempenho em termos de precisão é obtido com o esquema Quick com a seguinte configuração: a) a extrapolação com derivadas nas fronteiras (e não directamente com polinómios), b) as modificações no tratamento conservativo dos termos advectivos, para o cálculo das velocidades dos nós e dos fluxos nas faces do VC, e c) o método de cálculo de  $\nabla p$  (usando o esquema Quick). Esta configuração representa uma melhoria notável em relação ao tratamento standard das malhas não desfasadas.
- Foi deduzido um esquema advectivo de terceira ordem, designado por New, adaptado para ser utilizado na forma conservativa, tal como os restantes esquemas. O esquema NEW permite, em geral, obter bons resultados, podendo constituir uma alternativa ao QUICK. A melhor configuração tem as seguintes características: a) usa a extrapolação com derivadas nas fronteiras,

e b) usa as modificações no tratamento conservativo dos termo advectivos, para o cálculo das velocidades dos nós e dos fluxos nas faces do VC.

- Mediante o estudo da importância relativa dos termos advectivos e difusivos nas equações de conservação e transporte, verificou-se que não é vantajoso usar esquemas muito precisos para a derivada advectiva, se o problema da degradação da precisão das derivadas dos termos difusivos nas fronteiras não for resolvido. Estas conclusões são válidas no contexto da malha não desfasada.
- O método de refinamento local modificado para o uso de esquemas de 3 pontos (Quick, Fromm's, New) tem um desempenho consideravelmente melhor que o método de refinamento local original para esquemas de 2 pontos (DC, Híbrido, etc.). Apesar da degradação da taxa de convergência verificada com o esquema Quick, em relação ao uso de malhas sem refinamento local, a economia de tempo de CPU e o aumento da precisão das soluções obtidas fazem do método de 3 pontos uma ferramenta bastante útil.
- A técnica de extrapolação de Richardson para esquemas de 2ª ordem permitiu, de maneira simples e eficiente, estimar os erros numéricos, e determinar a sua distribuição no domínio de cálculo, requerendo, para isso, um esforço computacional mínimo. Esta técnica é fundamental para definir a estratégia de refinamento.
- No modelo FLEX, as equações em coordenadas generalizadas foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à não ortogonalidade, tomando estas um aspecto muito similar ao das equações no sistema cartesiano. Graças a este método, a penalização em tempo de CPU pelo uso da transformação de coordenadas é insignificante.
- A geração de malhas em coordenadas generalizadas ortogonais mediante o método de Eça et al. (1999), baseado na mobilidade dos nós nas fronteiras, permitiu obter desvios da ortogonalidade consideravelmente mais baixos que os obtidos quando os nós das fronteiras são fixos. Este resultado está em concordância com os de Eça et al. (1999) para domínios assimétricos. Se o domínio é simétrico, ao contrário do que Eça et al. (1999) concluem, a mobilidade simultânea dos nós em duas fronteiras produz melhores resultados do que o caso em que todos os nós estão fixos.

Pocedeu-se em seguida à validação das componentes numérica e física do modelo FLEX em escoamentos de microscala com camada limite turbulenta. O primeiro caso estudado consistiu na resposta da Camada Limite a uma descontinuidade do fluxo de calor superficial (experiência de Antonia et al., 1977). Por ser um escoamento de microscala com difusão térmica junto da parede, são maiores os requisitos de precisão junto da superfície. Das duas versões do modelo  $k - \epsilon$  usadas para parametrizar a turbulência, a de Chen e Patel (1987) permitiu obter melhores resultados que a de Lam e Bremhorst (1981), aplicável a números de Reynolds baixos. Para este resultado, contribuiu a utilização de refinamento local.

Os resultados das simulações de escoamentos de micro e mesoscala sobre orografia (por exemplo, a montanha Almeida et al., 1992, a duna de areia Mierlo e Ruiters, 1988, a colina de Coopin et al., 1994, etc.), permitiram concluir que a manipulação das equações de Navier-Stokes, com isolamento dos termos associados à compressibilidade e à heterogeneidade da turbulência, facilitou consideravelmente o tratamento dos termos difusivos, e permitiu, em muitos casos, economizar tempo de cálculo, graças à exclusão destes termos. Nalguns casos, o uso de coordenadas generalizadas possibilitou o estudo de escoamentos sobre orografia com grandes declives (por exemplo escarpas). Para além disto, a geração

de malhas refinadas localmente, em coordenadas generalizadas, permitiu aproveitar as vantagens do refinamento local em coordenadas cartesianas.

Foram realizadas várias simulações de diferentes tipos de escoamento atmosférico de mesoscala, lineares e não lineares, estavelmente estratificados e de subcamada externa. Os resultados destas simulações foram validados com modelos analíticos, lineares e não lineares, e outros com dados experimentais. Particular atenção foi dada ao caso não linear extremo de rebentação de ondas com a consequente indução de níveis críticos, ventos severos a jusante da orografia e estados de arrasto elevado. Os resultados obtidos mostraram-se em plena concordância com o modelo não linear de Long (1953) e com os resultados de modelos numéricos conceituados (por exemplo, o modelo de Clark, 1977). Os resultados permitem concluir que o modelo FLEX consegue descrever cabalmente escoamentos uniformes em  $U_r$  e  $N$ , hidrostáticos e não hidrostáticos.

Foram igualmente estudados escoamentos hidrostáticos nos casos em que existe uma descontinuidade no perfil de estabilidade. Este tipo de descontinuidade é uma das três formas conhecidas de gerar ventos severos no declive a jusante de montanhas. Quando a camada mais estável é a inferior verificou-se que, em determinadas condições, muito restritas no que se refere à não linearidade e à altura da descontinuidade ( $H_d$ ), a ressonância parcial dava origem a ondas a jusante da orografia, que foram denominadas ondas de ressonância parcial (ORP), por surgirem em escoamentos hidrostáticos. Realizaram-se simulações numéricas com o modelo FLEX, e estudos analíticos recorrendo ao modelo não linear de Long (1953). Para interpretar os resultados foi também usada uma analogia da teoria hidráulica de Long (1953) desenvolvida por Durran (1986). O estudo realizado permitiu determinar as características fundamentais das ORP:

- a) As ORP têm um comprimento de onda aproximadamente igual à semi-largura da orografia.
- b) A amplitude das ondas aumenta com a não linearidade, i.e., quando  $\hat{H}$  aumenta. Quando  $\hat{H}$  é maior que uma determinada altura crítica, observa-se que as isentrópicas se inclinam de modo a criar condições para iniciar um processo análogo ao salto hidráulico, que antecede as ORP.
- c) A amplitude das ondas cresce com o aumento do quociente entre as estratificações das subcamadas inferior e superior ( $\sigma_d = N_{in}/N_{in}$ ). Verifica-se que só a partir de  $\sigma_d \geq 1.4$  é que as ORP estão completamente desenvolvidas.
- d) A geração das ORP só ocorre quando  $H_d \approx \lambda_z/2$ .
- f) Não se encontrou um padrão de periodicidade vertical, previsto pela teoria linear da ressonância parcial, e verificado em escoamentos com níveis críticos.
- g) À medida que  $H_d$  se afasta de  $H_d = \lambda_z/2$  ( $H_d > \lambda_z/2$ ), verifica-se a tendência das isentrópicas para se comportarem como se não existisse descontinuidade na estabilidade. Se as ORP se geram por um processo de reajuste dos ventos severos às condições circundantes a jusante da montanha, então quando  $H_d$  se afasta da zona em que a montanha mais afecta o escoamento, em termos de deflexão das linhas de corrente, é de esperar que a intensidade dos ventos diminua, perdendo a capacidade de gerar ORP.
- h) A distância a jusante da montanha, onde começam a formar-se estas ondas, aumenta com  $\sigma_d$ .
- i)  $D_w/D_{in}$  toma valores muito superiores em relação aos restantes casos, quando  $H_d = 3/4\lambda_z$ .

Os resultados numéricos permitiram verificar que as ORP são claramente não estacionárias. O comportamento da evolução temporal típica dos escoamentos onde se geram ORP mostra que o máximo

arrasto não ocorre no instante onde se verificam as maiores amplitudes das ORP, mas sim no instante em que a deflexão da isentrópica, coincidente com o nível  $H_d = \lambda_z/2$ , é máxima. Isto faz sentido porque as ORT não produzem arrastos elevados, já que a energia das ondas se propaga predominantemente na horizontal. Por outro lado, os ventos severos estão associados a arrastos elevados. Portanto, o instante em que o arrasto é máximo corresponde ao instante em se dá início ao processo de reajuste dos ventos de intensidade máxima ao meio circundante pouco perturbado.

Concluiu-se também que a existência simultânea de descontinuidades na estabilidade e de níveis críticos pode potencializar os seus efeitos individuais, gerando estados de arrasto muito mais elevados do que os que ocorrem nos casos em que só existe um dos processos de ressonância. O arrasto tão elevado que se verifica no caso em que os níveis  $H_c$  e  $H_d$  coincidem está relacionado com o facto de que a coincidência de  $H_c$  e  $H_d$  reforçar a reflectividade do nível crítico e, portanto, a capacidade da cavidade ressonante, entre  $H_c$  e a superfície, amplificando os ventos severos a jusante.

Por outro lado, no caso em que a subcamada mais estratificada é a inferior nunca se verificou a geração de ORP, mesmo nos casos não lineares onde a teoria linear prevê a existência de máximos das deflexões no declive a jusante da orografia. É interessante constatar que, ao contrário do verificado no caso com  $\sigma_d = N_{in}/N_{in} > 1$ , o efeito predominante em muitos escoamentos não lineares deste tipo é a amplificação dos fenómenos verificados nos escoamentos análogos lineares.

Em casos em que se prevê a existência de ondas de reflexão total (ORT) verificou-se que os resultados numéricos e analíticos são muito próximos. Foi igualmente estudada a tempestade de 11 de Janeiro de 1972 em Boulder Colorado, tendo-se verificado que muitas das conclusões retiradas dos escoamento hidrostáticos idealizados para estudar às ORP se confirmavam neste escoamento real.

Por último foi realizado um estudo de escoamentos de mesoscala, de camada limite turbulenta, nos quais os efeitos das subcamadas interna e intermédia são importantes ( $h/L \sim O(1)$ ). Para este fim, foi usado o modelo analítico de Hunt et al. (1988a) (HLR), com a modificação de Hunt et al. (1988a) (HRB) para incluir o efeito da estabilidade. Além disso, foi incorporada a modificação de Weng (1997) (W97), do perfil de velocidade, e foi introduzido um novo método para o cálculo de  $u_*$ , a partir dos valores dos comprimentos de Monin-Obukhov ( $L_{mo}$ ) e da rugosidade ( $z_0$ ). O modelo FLEX foi validado com estas soluções analíticas e com os dados experimentais do escoamento sobre a colina de Cooper (Coopin et al., 1994). Para além disso, foram feitas simulações sobre um conjunto de obstáculos de diferentes geometrias. Em todos os casos, prestou-se especial atenção ao comportamento do acréscimo relativo de velocidade ( $\Delta S$ ), com a finalidade de explorar as potencialidades de FLEX para a o estudo de zonas com possibilidade de aproveitamento da energia eólica. As conclusões mais importantes retiradas da análise dos resultados obtidos são:

- O método desenvolvido para calcular  $u_*$  permitiu melhorar o desempenho dos modelos HLR-HRB-W97.
- FLEX consegue simular com bastante qualidade a maior parte dos escoamentos aqui estudados, inclusivé os acentuadamente estáveis. As simulações de escoamentos sobre orografia com declive e assimetria significativas constituíram um bom teste ao desempenho de FLEX.
- Os modelos HLR-HRB e HLR-HRB-W97 só funcionam bem quando a estabilidade é moderada.
- O modelo FLEX consegue captar o essencial da física da modificação de HRB para incorporar a estratificação no modelo teórico de HLR.

No âmbito deste estudo de escoamentos de mesoscala, foram estudados casos com níveis críticos induzidos, nos quais o atrito de superfície é imposto, para verificar se o arrasto ondulatório e a

localização da zona de rompimento das ondas são independentes da assimetria da montanha. Para parametrizar as subescalas é usado o modelo  $k - \varepsilon$ . O objectivo essencial deste estudo foi determinar em que medida o fenómeno de rebentação das ondas por níveis críticos auto induzidos em escoamentos de camada externa no limite inferior da mesoscala são afectados pela inclusão dos efeitos de camada limite. Miller e Durran (1989) fizeram estudos deste tipo em escoamentos de subcamada externa, mas não estudaram o caso em que existem níveis críticos auto induzidos com fricção e parametrização da turbulência. Para separar os dois tipos de arrasto de pressão, foi desenvolvido um filtro passa-baixo. Deste modo, foi possível estudar o comportamento da evolução temporal dos arrastos ondulatório e aerodinâmico. As principais conclusões a retirar deste estudo são:

- O método de separação dos arrastos de pressão permitiu, embora de modo qualitativo, estudar o efeito da assimetria nos arrastos e VSJO.
- Se os parâmetros adimensionais de dois escoamentos sobre orografias com escalas muito diferentes são similares, então as zonas de instabilidade convectiva que se produzem no processo de rebentação das ondas gravíticas têm localizações também muito similares. A forma das linhas isentrópicas também é muito semelhante em ambos casos.
- O intervalo de tempo em que começa a formar-se a instabilidade convectiva, é muito sensível à assimetria da orografia e as suas dimensões características.
- Mesmo que os parâmetros adimensionais do escoamento sejam muito similares, os arrastos são muito sensíveis às dimensões características da orografia.

Como sugestões de trabalho futuro propõem-se os seguintes tópicos:

- Transformação do presente modelo de 2D para 3D, incluindo o método de refinamento local de 3 pontos, e a sua extensão para o uso de coordenadas generalizadas em 3D. Este desenvolvimento permitirá um estudo mais realista dos escoamentos atmosféricos, particularmente dos casos não lineares turbulentos, e uma comparação entre as vantagens relativas do método de refinamento local e de métodos de aninhamento de malhas geralmente utilizados em modelos meteorológicos de mesoscala.
- Grande parte dos estudos feitos na presente tese em 2D podem ser realizados em 3D. Apresenta especial interesse a extensão a 3D do estudo da distribuição do acréscimo de velocidade em escoamentos estratificados na vizinhança de obstáculos, dada a sua grande importância em aplicações de energia eólica.
- O problema da periodicidade vertical das ondas de ressonância parcial (ORP) deve ser verificado com um maior número de simulações nos casos não lineares, incluindo escoamentos sobre orografia com escalas características mais pequenas e situações de escoamento tridimensional.
- No modelo desenvolvido, as equações de Navier-Stokes foram manipuladas de modo a isolar os termos associados à compressibilidade e à heterogeneidade da turbulência. Este procedimento possibilitou a simplificação do tratamento dos termos difusivos. No entanto, apesar desta simplificação estar baseada numa análise de escala, parece importante fazer um estudo minucioso para avaliar a importância dos diferentes termos, especialmente nos casos com elevada estratificação ou em escoamentos turbulentos sobre orografias muito íngremes, onde se espera que a viscosidade turbulenta tenha uma heterogeneidade elevada.

# Apêndice A

## Anexos

### A.1 Anexo I- Determinação dos perfis de $k$ e $\varepsilon$ da CLT com base no modelo de Hwang e Liou (1991).

A maioria das expressões utilizadas para calcular  $k$  e  $\varepsilon$  na CLTP (Camada Limite Turbulenta de Parede) são empíricas. O presente modelo semi-analítico determina as expressões de  $k$  para as diferentes subcamadas, integrando a equação diferencial de  $k$  para CLTP bidimensional. O perfil de  $\varepsilon$  obtém-se a partir das expressões de  $k$ , e da hipótese de viscosidade turbulenta para a CLTP. A seguir é dada uma descrição deste modelo e são determinados os perfis de  $k$  e  $\varepsilon$  para serem usados à entrada do domínio de cálculo do escoamento estudado na secção (6.1).

A equação de transporte de  $k$  para a CLTP bidimensional é:

$$\frac{d}{dy} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{dk}{dy} \right] - \overline{\rho u'v'} \left( \frac{du}{dy} \right) - \rho\varepsilon = 0 \quad (\text{A.1})$$

**Determinação do perfil de  $k$ .**

Na subcamada viscosa verifica-se que:

$$\mu_t \ll \mu \quad \text{e} \quad \overline{\rho u'v'} \left( \frac{du}{dy} \right) \approx 0 \quad (\text{A.2})$$

Para definir  $\varepsilon$  na subcamada viscosa, Hwang e Liou (1991) empregaram a expressão:

$$\varepsilon = 2\mu \left( \frac{dk^{1/2}}{dy} \right)^6 \quad (\text{A.3})$$

proposta por Chieng e Launder (1980).

Usando as condições (A.2), e substituindo (A.3) em (A.1) obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2k}{dy^2} - 2 \left( \frac{dk^{1/2}}{dy} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

Para generalizar o método, é conveniente trabalhar com variáveis adimensionais:

$$k^+ = \frac{C_\mu^{1/2} k}{u_\tau} \quad (\text{a}) \quad y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu} \quad (\text{b}) \quad \varepsilon^+ = \frac{\mu \varepsilon}{\rho u_\tau^4} \quad (\text{c}) \quad (\text{A.5})$$

A substituição de (A.5) em (A.4) dá como resultado a equação diferencial:

$$\frac{d^2 k^+}{dy^{+2}} - 2C_\mu^{3/2} \left( \frac{dk^+}{dy^+} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

cuja solução é:

$$k^+ = a_c C_\mu^{1/2} y^{+2} \quad (\text{A.7})$$

A constante  $a_c$  toma o valor de  $a_c = 0.345$  recomendado por Derksen e Azad (1981)[28].

Fora da subcamada viscosa Hwang e Liou (1991) definem a viscosidade turbulenta, usando a hipótese de comprimento de mistura de Prandtl

$$\mu_t = \rho \kappa y u_\tau \quad (\text{A.8})$$

e representam  $\varepsilon$  mediante a expressão de  $\mu_t$  do modelo de turbulência  $k - \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu \rho k^3}{\mu_t} \quad (\text{A.9})$$

Usando a hipótese de Boussinesq e substituindo as expressões (A.5), (A.8) e (A.9) em (A.1), tem-se que:

$$\frac{d}{dy^+} \left( y^+ \frac{dk^+}{dy^+} \right) - \frac{\sigma_k C_\mu^{1/2}}{\kappa^2 y^+} (1 - k^{+2}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

A integração da equação anterior dá:

$$k^+ = 3 \left( \frac{(a_\pm y^+)^{\pm h^+} - 1}{(a_\pm y^+)^{\pm h^+} + 1} \right)^2 - 2 \quad (\text{A.11})$$

Para a região com  $30 < y^+ < 230$ , em (A.11) usa-se  $a_+$  e  $+h^+$ , porque  $dk^+/dy^+ > 0$ . Esta região inclui a subcamada de transição ( $5 < y^+ < 90$ ) e a primeira metade da subcamada inercial. No centro da subcamada inercial, de acordo com a condição de equilíbrio,  $k^+ = 1$  ( $dk^+/dy^+ = 0$ ). Para a região com  $230 < y^+ < 400$ , em (A.11) usa-se  $a_-$  e  $-h^+$ , porque  $dk^+/dy^+ < 0$ .

Para o escoamento estudado na secção (6.1), a constante  $a_+$  foi determinada impondo o valor de  $k^+$  calculado com a expressão (A.7) para  $y^+ = 5$ , preservando assim a continuidade do perfil. A constante  $a_-$  é calculada com a condição de continuidade em  $y^+ = 400$ .

### Determinação do perfil de $\varepsilon$ .

Hwang e Liou (1991) determinaram o perfil de  $\varepsilon$ , combinando as expressões (A.5), (A.8) e (A.9), para obter:

$$\varepsilon^+ = \frac{k^{+2}}{\kappa y^+} \quad (\text{A.12})$$

Para determinar o perfil de  $\varepsilon$  na subcamada viscosa, os referidos autores utilizaram a expressão empírica

$$\varepsilon^+ = 2a_c + a_\varepsilon y^{+3} \quad (\text{A.13})$$

proposta por Patel et al.(1985), em que a constante  $a_c$  é calculada igualando as expressões (A.12) e (A.13) com  $y^+ = 7$ , em que  $k^+$  na expressão (A.12) é calculada com a equação (A.11). Neste caso  $a_\varepsilon = 9.1851 \times 10^{-4}$ . Os perfis experimentais determinados com este método, aproximam-se razoavelmente dos valores experimentais determinados por Laufer (1954).

## A.2 Anexo II- Método de Scorer (1949)-Sawyer(1960).

A equação (7.66) para um perfil de  $\ell$  arbitrário pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + \ell(z)^2 \delta = 0 \quad (\text{A.14})$$

em que o parâmetro de Scorer é dado pela expressão aproximada (2.88). Considerando o caso linear ( $U_r(z) \gg u'$ ), a função de corrente dada pela expressão (??) toma um aspecto mais simples

$$\psi(x, z) = \rho_r(z) U_r(z) \delta(x, z) \quad (\text{A.15})$$

Pode-se definir uma função  $\Psi(x, z)$

$$\Psi(x, z) = \left[ \frac{\rho_r(z)}{\rho_r(0)} \right]^{1/2} \frac{\psi(x, z)}{\rho_r(z) U_r(z)} = \left[ \frac{\rho_r(z)}{\rho_r(0)} \right]^{1/2} \delta(x, z) \quad (\text{A.16})$$

Então, o deslocamento das linhas de corrente pode ser dado por:

$$\delta(x, z) = \left[ \frac{\rho_r(0)}{\rho_r(z)} \right]^{1/2} \Psi(x, z) \quad (\text{A.17})$$

Representando  $\delta(x, z)$  com o integral de Fourier aplicado só em  $x$

$$\delta(x, z) = \left[ \frac{\rho_r(0)}{\rho_r(z)} \right]^{1/2} \text{Re} \left[ \int_0^\infty \tilde{\Psi}(k, z) e^{ikx} dk \right] \quad (\text{A.18})$$

e substituindo a função obtida em (A.14), obtém-se a seguinte equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(k, z)}{\partial z^2} + [\ell(z)^2 - k^2] \tilde{\Psi}(k, z) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Para resolver a equação (A.19), a atmosfera é dividida em  $N + 1$  níveis ( $0, 1, 2, \dots, N$ ) em cada um dos quais  $\ell$  é considerado constante. Para isto ser verdade, é necessário usar o mesmo princípio da aproximação WKB já antes referida, i.e., assume-se que as propriedades do meio variam pouco na distância  $1/\ell(z)$  em cada intervalo. Na hora de definir os perfis e o número de níveis  $N + 1$  este facto foi tomado em conta.

Neste caso a solução geral de A.19 é dada por:

$$\tilde{\Psi}(k, z) = A_n e^{-\mu_n z} + B_n e^{\mu_n z} \quad (\text{A.20})$$

em que  $\mu_n = (k^2 - \ell^2)^{1/2}$  e  $A_n$  e  $B_n$  são constantes. Note-se que tanto  $\mu_n$  como  $A_n$  e  $B_n$  podem ser complexos. As ondas ORT correspondem aos valores próprios de A.19, i.e., os valores de  $k$  para os quais  $\tilde{\Psi}(k, z)$  satisfaz as condições de fronteira superior e inferior (superfície). Para um dado valor próprio, que será denominado de  $k_m$ , requer-se que a amplitude na superfície (linear) seja nula, i.e.,

$$\tilde{\Psi}(k, 0) = 0 \quad (\text{A.21})$$

enquanto que, na fronteira superior, deve ser imposta a condição de decaimento da amplitude da onda com o aumento de  $z$

$$\tilde{\Psi}(k, z) = A_N e^{-\mu_N z} \quad B_N = 0 \quad (\text{A.22})$$

A solução é calculada recursivamente em cada nível, a partir do nível  $N$  até o nível 0, cumprindo a condição de continuidade de  $\tilde{\Psi}(k, z)$  e  $\partial\tilde{\Psi}(k, z)/\partial z$  em cada uma das interfaces entre dos níveis consecutivos. Isto é equivalente a usar a condição de igualdade das impedâncias (7.79) nas interfaces. Estas condições permitem definir as expressões para o cálculo recursivo de  $A_n$  e  $B_n$ :

$$A_n = \frac{1}{2\mu_n} \left[ \alpha_n A_{n+1} e^{(\beta_n z_n)} + \beta_n B_{n+1} e^{(\alpha_n z_n)} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$B_n = \frac{1}{2\mu_n} \left[ \beta_n A_{n+1} e^{(-\alpha_n z_n)} + \alpha_n B_{n+1} e^{(-\beta_n z_n)} \right] \quad (\text{A.24})$$

em que  $\alpha_n = \mu_n + \mu_{n+1}$  e  $\beta_n = \mu_n - \mu_{n+1}$ . Na última camada ( $n = N$ ) é conveniente tomar  $A_N = 1$ . Na superfície a condição de fronteira A.21 implica que  $A_0 + B_0 = 0$ . O número de onda  $k_m$  que satisfaz estas condições é um valor próprio do problema. O valor (ou os valores) de  $k_m$  são determinados fazendo um varrimento em  $k$  até encontrar os valores que satisfaçam as condições acima referidas. Para localizar estes valores foi usado o método da bissecção. Neste caso a atmosfera foi dividida em 60 níveis.

Uma vez conhecidos os valores de  $k_m$ , é necessário obter o campo de  $\delta(x, z)$ . Como a condição de fronteira na superfície é linear então, de acordo com (A.15), a função de corrente pode ser dada por:

$$\psi(x, 0) = \rho_r(0) U_r(0) h(x) \quad (\text{A.25})$$

No espaço  $(k, z)$  esta condição para a variável  $\Psi$  é:

$$\tilde{\Psi}(k, 0) = \rho_r(0) U_r(0) \tilde{h}(k) \quad (\text{A.26})$$

Para estender a solução a todas os valores de  $z_n$ , é preciso encontrar uma função  $f$  que satisfaça (A.19). Para esse efeito, a solução (A.20) é calculada recursivamente de cima para baixo, começando com  $A_N = 1$  e  $B_N = 0$ . A função  $\tilde{\Psi}(k, z)$  é determinada seleccionando os múltiplos lineares de  $f$  que satisfazem a condição de fronteira (A.26). Portanto,

$$\tilde{\Psi}(k, z) = C f(k, z) \quad (\text{A.27})$$

em que  $C$  é uma constante que tem que cumprir a condição

$$\tilde{\Psi}(k, 0) = \rho_r(0) U_r(0) \tilde{h}(k) = C f(k, 0) \quad (\text{A.28})$$

e, portanto,

$$\tilde{\Psi}(k, z) = \rho_r(0) U_r(0) \tilde{h}(k) \frac{f(k, z)}{f(k, 0)} \quad (\text{A.29})$$

Usando (A.17), (A.19) e (A.20) tem-se que:

$$\delta(x, z) = \left[ \frac{\rho_r(0)}{\rho_r(z)} \right]^{1/2} \frac{\rho_r(0) U_r(0)}{U_r(z)} \text{Re} \left[ \int_0^\infty \tilde{h}(k) e^{(ikx)} \frac{f(k, z)}{f(k, 0)} dk \right] \quad (\text{A.30})$$

O integrando na expressão anterior caracteriza-se pela presença de singularidades associadas ao facto de que para os pólos  $k_m$   $f(k, 0) = 0$ . Neste caso, o integral (A.30) calcula-se recorrendo ao teorema dos resíduos das funções de variável complexa. Embora este cálculo não apresente grande dificuldade,  $\Psi$  pode ser obtida de modo muito mais simples se for usada a solução aproximada de Scorer (1949). Apesar de Sawyer (1960) ter desenvolvido a solução numérica completa, considerou-se que a solução aproximada de Scorer (1949) tinha precisão suficiente para realizar a comparação com os resultados

do modelo numérico. Sawyer (1960) demonstrou que a aproximação de Scorer só era pouco precisa na vizinhança do obstáculo. No presente trabalho será usada esta aproximação segundo a qual, para uma montanha de Agnesi,  $\delta$  pode ser calculada mediante as expressões:

$$\delta(x, z) = HL \left[ \frac{\rho_r(0)}{\rho_r(z)} \right]^{1/2} \left[ \frac{\rho_r(0)U_r(0)}{U_r(z)} \right] \left[ \frac{f(k, z)}{f(k, 0)} \frac{L + ix}{L^2 + x^2} + i2\pi \sum_m \frac{f(k_m, z)}{f'(k_m, 0)} e^{(-k_m L + ik_m x)} \right] \quad (\text{A.31})$$

para  $x \geq 0$ , e

$$\delta(x, z) = HL \left[ \frac{\rho_r(0)}{\rho_r(z)} \right]^{1/2} \left[ \frac{\rho_r(0)U_r(0)}{U_r(z)} \right] \left[ \frac{f(0, z)}{f(0, 0)} \frac{L + ix}{L^2 + x^2} \right] \quad (\text{A.32})$$

para  $x < 0$ . A função  $f'(k_m, 0)$  representa a derivada de  $f$  em relação a  $k$ . A assimetria existente entre as soluções para  $x \geq 0$  e  $x < 0$  aparece devido ao facto de que as ORT só aparecerem a jusante da montanha.

# Referências

- [1] Almeida, G. P., D. F. G. Durão, and M. V. Heitor,. Wake flows behind two dimensional model hills. *Exp. Thermal and Fluid Science*, 7:87–, 1992.
- [2] Antonia R. A. and Danh H. Q. and Prabhu A. Response of a turbulent boundary layer to a step change in surface heat flux. *J. Atmos. Sci.*, 80(part I):153–177, 1977.
- [3] Arakawa, A.. Computational design for long term integration of the equation of motion: Two-dimensional incompressible flow. *J. Comp. Physics*, 1:119–143, 1966.
- [4] Asselin R. Frequency filter for time integration. *Mon. Wea. Rev.*, 100:487–490, 1972.
- [5] Bacmeister J. T. and Pierrehumbert R. T. On high-drag states of non-linear stratified flow over an obstacle. *J. Atmos. Sci.*, 45:63–80, 1988.
- [6] Baines P. G. *Topographic effects in stratified flows*. Cambridge University Press, 1 edition, Cambridge Monographs on Mechanics, London, 1995.
- [7] Belcher S. E. and Newley T. M. J. and Hunt J. C. R. The drag on an undulating surface induced by the flow of a turbulent boundary-layer. *J. Fluid. Mech.*, 249:557–596, Apr. 1993.
- [8] Belcher S. E. and Wood N. Form and Wave Drag due to Stably Stratified Flow over Low Ridges. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 122:863–902, 1996.
- [9] Beljaars A. C. M. and Walmsley J. L. and Taylor P. A. Modelling of turbulence over low hills and varying surface roughness. *Bound. Layer Meteorol.*, 41:203–215, 1987.
- [10] Bougeault P. A non-reflective upper boundary condition for limited-height hydrostatic models. *Mon. Wea. Rev.*, 111:420–429, 1983.
- [11] Bradley E. F. An experimental study of the profiles of wind speed, shearing stress and turbulence at the crest of a large hill. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 106:101–123, 1980.
- [12] Bradshaw P. Effects os streamwise curvature on turbulent flows. Technical Report 169, AGAR-Dograph, June 1973.
- [13] Businger J. A. et al. Flux Profile Relationships in the Atmospheric Surface Layer. *J. Atmos. Sci.*, 28:788–794, 1971.
- [14] Carruthers D. J. and Choularton T. W. Acid deposition in rain over fills. *Atmos. Environ.*, 18(9):1905–1908, 1984.
- [15] Caruso S. C. and Ferziger J.H. and Oliger J. Adaptative Grid Techniques for Elliptic Flow Problems. Report TF-23, Thermosc. Div., Standford University, June 1985.

- [16] Castro F. A. *Métodos numéricos para a simulação de escoamentos atmosféricos sobre topografia complexa*. Tese de Doutorado, Universidade do Porto, 1997.
- [17] Castro F. A. and Restivo A. and Palma J. M. L. M. Simulação numérica do escoamento em torno de perfis de asas. In *Simões et al.*, 1992.
- [18] Chen H. C. and Patel V. C. Practical near-wall turbulence models for complex flows including separation. In *AIAA 19th Fluid Dynamics and Lasers Conference*, June 8-10 1987.
- [19] Clark T. L. and Peltier W. R. On the evolution and stability of finite amplitude mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, 34:1715–1730, 1977.
- [20] Clark T. L. and Peltier W. R. Critical level reflection and the resonant growth of non-linear mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, 41:3122–3134, 1984.
- [21] Coelho P. J. and Pereira J. C. and Carvalho M. G. Calculation of laminar recirculating flows using a non-staggered grid refinement. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 12:535–557, 1991.
- [22] Coppin P. A and Bradley E. F. and Finnigan J. J. Measurements of flow over an elongated ridge and its thermal stability dependence: The mean field. *Bound-Lay, Meteorol.*, 69:173–199, 1994.
- [23] Cruette A. A. Experimental study of mountain lee-waves by means of satellite photograph and aircraft measurements. *Tellus*, 28:499–523, 1976.
- [24] Darwish M. S. A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 24:353–371, 1993.
- [25] De Vahl Davis G. and Mallison G. D. Evaluation of upwind and central difference approximations by study of recirculating flow. *Computers and fluids*, 4:108–125, 1972.
- [26] Derbyshire S. H. Observations, models and variability .2. Data analysis and averaging effects. *Bound-Lay. Meteorol.*, 75(1-2):1–24, Jul. 1995a.
- [27] Derbyshire S. H. Observations, models and variability .1. Modelling and measurements. *Bound-Lay. Meteorol.*, 74(1-2):19–54, Apr. 1995b.
- [28] Derksen R. W. and Azad R. S. Behavior of the turbulent energy equation at a fixed boundary. *AIAA Journal*, 19:238–250, 1981.
- [29] Detering H. W. and Etling D. Application of the E-e turbulence model to the atmospheric boundary-layer. *Bound-Lay. Meteorol.*, 33:113–133, 1985.
- [30] Drazin P. G. On the steady flow of a fluid of variable density past an obstacle. *Tellus*, 13:239–251, 1961.
- [31] Dudhia J. A non hydrostatical version of the Penn State-NCAR mesoscale model: Validation tests and simulation of an Atlantic Cyclone and Cold Front. *Mon Wea Rev*, 121:1493–1513, 1993.
- [32] Durran D. R. Another look at then downslope windstorm. Part I: On the development of analogue to supercritical flow in and infinitely deep continuously stratified fluid. *J. Atmos. Sci.*, 43:2527–2543, 1986.

- [33] Durran D. R. Improving the anelastic approximation. *J. Atmos. Sci.*, 46(11):1453–1461, Jun. 1989.
- [34] Durran D. R and Klemp J. B. A compressible model for simulation of moist mountain waves. *Monthly Weather review*, 111:2341–2361, 1983.
- [35] Durran D. R. and Klemp J. B. Another look at downslope winds. Part II: Non-linear amplification beneath wave-overtuning layers. *J. Meteorol.*, 44(3):3402–3412, 1987.
- [36] Duynkerke P. G. Application of k- $\epsilon$  turbulence model to the neutral and stable boundary layer. *J. Atm. Sci.*, 45(5):865–880, March 1988.
- [37] Eça L. *Handbook of grid generation*. Edited by Thompson Joe F., Soni B. and Weatherill N., CRC Press, 1200 pp., 1999.
- [38] Egan B. A. Transport and diffusion in complex terrain (review). *Bound-Lay Meteorol.*, 30(1-4):3–28, 1984.
- [39] Eimes S. Pressure Drag and Effective Roughness Length with neutral stratification. *Boundary-Layer Meteorol.*, 39:379–401, 1987.
- [40] Eliassen A. and Palm E. On the Transfer of Energy in Stationary Mountain Waves. *Geophysica Norvegica*, 22(12):1–23, 1961.
- [41] Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluids Dynamics*. Springer, Vol. 2, 493 pp, 1997.
- [42] Fromm E.A. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 3:176–189, 1968.
- [43] Garratt J. R. *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, 1992.
- [44] Gaskell P. H. and Lau A. K. C. Curvature Compensate Convective Transport: SMART, a New Boundedness Preserving Transport Algorithm. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 8:617–641, 1988.
- [45] Ghia U. and Guia K. N. and Shin C. T. High Re-Solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multi-grid method. *J. Comput. Phys.*, 48:387–411, 1982.
- [46] Gill A. E. *Atmosphere Ocean Dynamic*. Ed. Academic Press, International Geophysics Series, London, 1982.
- [47] Haltiner G. J. and Williams R. T. *Numerical Prediction and Dynamical Meteorology*. Wiley and Sons, 2nd ed., 1984.
- [48] Hanjalic K. Advanced turbulence closure models: a view o current status and future prospects. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 15:178–203, 1994.
- [49] Hayase T. Humphrey J. A. C. and Greif R. A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite iterative calculation procedure. *J. Comput. Phys.*, 98:108–118, 1992.

- [50] Holton, J. R.,. *An introduction to Dynamic Meteorology*. Ed. Academic Press, International Geophysics Series, London, 1992.
- [51] Hunt J. and Leibovich S. L. and Richards K. J. Turbulent Shear Flows Over Low Hills. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 29:16–26, 1988a.
- [52] Hunt J. and Richards K. J. and Brighton P. W. M. Stably Stratified Flow Over Low Hills. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 114:859–886, 1988b.
- [53] Hwang Y. H. and Liou T. M. Expression for  $k$  and  $\varepsilon$  near walls. *AIAA Journal*, pages 477–479, March 1991.
- [54] Hyun G. K. and Choung M. L. and Yoo J. N. Numerical prediction of the wind flow over real hilly terrain. *The 4th Fluids Engineering Conference, Pusan, Korea*, 1998.
- [55] Jackson P. S. and Hunt J. C. R. Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 101:929–955, 1975.
- [56] Jayatillaka C. L. V. The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer. Report TWF/R/2, Imperial College, MEch. Eng. Dept., Imperial College, June 1966.
- [57] Jones W. P. and Launder B. E. The prediction of laminarization with two equations model of turbulence. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15:301–321, 1972.
- [58] Klemp J. B. and Durran D. R. An upper boundary condition permitting internal gravity wave radiation in numerical mesoscale models. *Mon. Wea. Rev.*, 111:430–445, 1983.
- [59] Klemp J. B. and Lilly D. K. Dynamics of the wave-induced downslope winds. *J. Atmos. Sci.*, 32(2):320–339, 1975.
- [60] Klemp J. B. and Lilly D. K. Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, 35:78–107, 1978.
- [61] Kolmogorov A. N. Energy dissipation in locally isotropic turbulence. *Doklady AN SSSR*, 32(1):19–21, 1941.
- [62] Lam C. K. G. and Bremhorst K. A. Modified form of the  $k$ - $\varepsilon$  model for predicting wall turbulence. *J. of Fluids Engineering*, 103:456–460, 1981.
- [63] Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Report 1174, NACA, 1954.
- [64] Launder B. E. and Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [65] Leonard B. P. A stable and accurate convection modelling procedure based on quadratic interpolation. *Comp Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19:59–98, 1972.
- [66] Leschziner M. A. and Rodi W. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretisation schemes and turbulence-model variations. *J. Fluids Eng.*, 103:352–360, 1981.
- [67] Lighthill M. J. Group velocity. *J. Inst. Mat. Appl*, 1:1–28, 1965.
- [68] Lilly D. K. On the Numerical Simulation of Buoyant Convection. *Tellus*, XIV:148–156, 1962.

- [69] Lilly D. K. Severe downslope windstorm and aircraft turbulence induced by a mountain wave. *J. Atmos. Sci.*, 35(1):59–77, 1978.
- [70] Lilly D. K. and Kennedy P. J. Observations of a stationary mountain wave and its associated momentum flux and energy dissipation. *J. Atmos. Sci.*, 30:1135–1152, 1973.
- [71] Lilly D. K. and Kennedy P. J. An intercomparison of model-predicted wave breaking for the 11 January Boulder Windstorm. *Mon. Wea. Rev.*, 128:901–914, 2000.
- [72] Lilly D. K. and Klemp J. B. The effects of terrain shapes on non-linear hydrostatic mountain waves. *J. Fluid. Mech.*, 95:241–261, 1979.
- [73] Lilly D. K. and Zipser E. J. The front range windstorm of 11 January 1972 - a meteorological narrative. *Weatherwise*, 25:56–63, 1972.
- [74] Lipps F. B. and Hemler R. S. A scale analysis of deep moist convection and some related numerical calculations. *J. Atmos. Sci.*, 39(10):2192–2210, 1982.
- [75] Long R. R. Some aspects of the flow of stratified fluids I. a theoretical investigation. *Tellus*, 5:42–58, 1952.
- [76] Long R. R. Steady motion around a symmetrical obstacle along the axis of a rotating liquid. *J. Meteorol.*, 10(3):197–203, 1953.
- [77] Lyra G. Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre. *Z. Angew. Math. Mech.*, 23:1–28, 1943.
- [78] Mason P. J. and Thompson D. J. Large-eddy simulations of the neutral-static stability planetary boundary layer. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 113:413–443, 1987.
- [79] Mielro M. C. L. M. and Ruiter J. C. C. Turbulence measurements above artificial dunes. Report Q789, Delft Hydr. Lab., Delft, The Netherlands, 1988.
- [80] Miles J. W. Expression for  $k$  and  $\varepsilon$  near walls. *J. of Fluid Mech.*, 10:496–508, 1961.
- [81] Miles J. W. and Huppert H. E. Lee waves in a stratified flow. Part 3. Semi-elliptical obstacle. *J. Fluid Mech.*, 35:497–525, 1969.
- [82] Miller P. P. Durran D. R. On the sensitivity of downslope windstorm to the asymmetry of the mountain profile. *J. Atmos. Sci.*, 48(12):1457–1473, Jun. 1991.
- [83] Miranda P. M. A. *Gravity Waves and Wave Drag in Flow Past Three Dimensional Isolated Mountains*. Ph.D. Thesis, University of Reading, 1991.
- [84] Miranda P. M. A. and James I. N. Non-linear three dimensional effects on gravity wave drag: splitting flow and breaking waves. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 118:1057–1081, 1992.
- [85] Miranda P. M. A. and Valente M. A. Critical level resonance in three-dimensional flow past isolated mountains. *J. Atmos. Sci.*, 54(12):1574–1588, Jun. 1997.
- [86] Mitchell R. M. Cechet R. P. Turner P. J. and Esum C. C. Observation of wave and interpretation of wave clouds over Macquarie Island. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 116:741–752, 1990.

- [87] Monin A. S. and Obukhov A. M. Basic laws of turbulent mixing in the atmosphere near the ground. *Tr. Akad. Nauk., SSSR Geophys. Inst.*, 24(151):1963–1987, 1954.
- [88] Nieuwstadt F. T. M. The turbulent structure of the stable nocturnal boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 41:2202–2216, 1984.
- [89] Nieuwstadt F. T. M. A model for the stationary, stable boundary layer. In Clarendon Press Hunt, J.C.R., editor, *Proc. of IMA conference on turbulence and diffusion in the stable environment*, Cambridge, 1985.
- [90] Ogura Y. and Phillips N. A. Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atm. Sci.*, 19(340):173–179, 1962.
- [91] Orlanski J. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comp. Phys.*, 21(2):251–269, 1976.
- [92] Ozmidov R. V. Certain features of energy spectrum of oceanic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 161(4):828–, 1965.
- [93] Palmer T. N. and Owen J. A. A possible relationship between some severe winters in North America and enhanced convective activity over the Tropical West Pacific. *Monthly Weather Review*, 114(3):648–648, 1986.
- [94] Panofsky H. A. and Dutton J. A. *Atmospheric turbulence*. Wiley and Sons, 397 pp, 1984.
- [95] Patankar S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, Washington, D.C., 1980.
- [96] Patankar S. V. and Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
- [97] Patel V. C. and Rodi W. and Scheurer G. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review. *AIAA Journal*, 23:1308–1319, 1985.
- [98] Peltier W. R. and Clark T. L. The evolution and stability of finite-amplitude mountain waves: Part II Surface wave drag and severe downslope windstorms. *J. Atmos. Sci.*, 36:1498–1529, 1979.
- [99] Peltier W. R. and Clark T. L. Nonlinear mountain wave in two and three spatial dimensions. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 109:527–548, 1983.
- [100] Peric M. Analysis of pressure-velocity coupling on nonorthogonal grids. *Num. Heat Transfer*, 17(2):63–82, 1990.
- [101] Press H. P. and Flannery B. P. and Teukolski S. A. and Vetterling W. T. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1986.
- [102] Queney P. The problem of air flow over mountains: a summary of theoretical studies. *Bull. American Meteorol. Soc.*, 29:16–26, 1948.
- [103] Raithby G. D. and Stubley G. D. and Taylor P. A. The Askervein hill project: a finite control volume prediction of three-dimensional flows over the hill. *Boundary-Layer Meteorology*, 39:247–267, 1987.

- [104] Raymond W. H. and Kuo H. L. A radiation boundary condition for multi-dimensional flows. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 110:535–551, 1984.
- [105] Richardson L. F. *Weather prediction by numerical processes*. Cambridge University Press, 1922.
- [106] Roache P. J. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, Albuquerque, New Mexico, 1972.
- [107] Robert A. J. The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. *J. Met. Soc. Japan*, 44:237–245, 1966.
- [108] Rodi and Bonin. . In Editors: Rodi W. and Bonin J. C., editors, *ERCRAFT Workshop on data bases and testing of calculations methods for turbulent flows*, 1995.
- [109] Rodi W. Turbulence models and their applications in hydraulics. Report, IAHR, P.O. Box 177, 266 MH Delft, The Netherlands, 1980.
- [110] Sawyer J. S. Gravity waves in the atmosphere as a three-dimensional problem. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 88:412–425, 1962.
- [111] Scarborough J. B. *Numerical Mathematical Analysis*. Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958.
- [112] Scorer R. S. Theory of waves in the lee of mountains. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 75:41–56, 1949.
- [113] Shyy W. A study of finite-difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems. *J. Comput. Phys.*, 57(3):415–438, 1985.
- [114] Simões. III Encontro de Mecânica Computacional, volume 2. In Simões L. M. C., Oliveira L. A., Figueiredo I. N., Leal R. P., Tadeu A. B., and Lemos L. L., editors, *77th Fluid Dynamics Panel Meeting and Symposium on Progress and Challenges in CFD Methods and Algorithms*, Universidade de Coimbra, 1992.
- [115] Smith R. B. The Generation of Lee Waves by the Blue Ridge. *J. Atmos. Sci.*, 33(3):507–519, 1976.
- [116] Smith R. B. The steepening of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci.*, 34:1634–1654, 1977.
- [117] Smith R. B. The influence of mountains on the atmosphere. *Advances in Geophysics*, 21:87–230, 1979.
- [118] Smith R. B. Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain. *Tellus*, 32:348–364, 1980.
- [119] Smith R. B. On Severe Downslope Winds. *J. Atmos. Sci.*, 23:2597–2603, 1985.
- [120] Smith R. B. Further Development of a Theory of Lee Cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, 43(15):1582–1602, 1986.
- [121] Spalding D. B. A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Num. Methods*, 4:551, 1972.
- [122] Starr J. R. and Browning K. A. Doppler radar measurement of CAT. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 53(7):696–706, 1972.

- [123] Stull R. B. *An introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Press, Atmospheric Science Library, London, 1988.
- [124] Taylor P. A. and Mason P. J. and Bradley E. F. Boundary-layer flow over low hills. *Bound.-Lay. Meteorol.*, 39(1-2):107–132, Apr. 1987.
- [125] Taylor P. A. and Teunissen H. W. The Askervein Hill Project: Report on the Sept./Oct. 1983, Main Filed Experiment. Research Report MSRB-84-6, Meteorological Services Research, Branch Atmospheric Environment Service 4905 Dufferin Street, Downsview, Ontario, Canada M3H5T4, June 1985.
- [126] Teixeira J. P. C. C. Stable Schemes for Partial Differential Equations: The One-Dimensional Diffusion Equation. *J. Comp. Physics*, 153:403–417, 1999.
- [127] Thompson J. F. and Mastin C. W. Order of difference expressions in curvilinear coordinate systems. *J. Fluid. Eng-T ASME*, 107(2):241–250, 1985a.
- [128] Thompson J. F. and Warsi, Z. U. and Mastin C. W. *Numerical Grid Generation: Foundations and applications*. North Holland, 1985b.
- [129] Weng W. *Turbulent air flows and fluxes over low hills*. Ph.D Thesis, Cambridge, 1989.
- [130] Weng W. Stratified air-flow over one or two hills. *Bound-Lay Meteorol.*, 85:223–241, 1994.
- [131] Wilcox D. C. *Turbulence modelling of CDF*. DCW Industries, La Canada, California, 1993.
- [132] Wolfshtein M. The velocity and temperature distribution in one dimensional flow with turbulence Augmentation and pressure gradient. *J. Heat and Mass Transfer*, 12:301–318, 1969.
- [133] Wood N. and Mason P. J. The pressure force induced by neutral, turbulent flow over hills. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 119:1233–1267, 1993.
- [134] Wyngaard J. C. and Coté O. R. and Rao K. S. Modelling the atmospheric boundary layer. *Advances in Geophysics*, 18A:193–211, 1974.
- [135] Yih C. S. *Dynamics of Non-homogeneous Fluids*. Macmillan, 1995.
- [136] Yoon J. Y. and Patel V. C. and Ettema R. Numerical model of flow in ice-covered channel. *J. Hydraulic Eng-ASCE*, 122(1):19–26, Jan. 1996.
- [137] Zilitinkevich S. Velocity profiles, the resistance law and the dissipation rate of mean flow kinetic energy in a neutrally and stably stratified planetary boundary layer. *Q. J. of the Royal Meteorol. Soc.*, 46:367–389, 1989.

