REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

ESTRATÉGIAS MATEMÁTICAS DOS ALUNOS EM PROBLEMAS DE VALOR OMISSO

Cátia Viegas

António Guerreiro

Luciano Veia

SUBMISSÃO: 20 de novembro de 2019

ACEITAÇÃO: 10 de dezembro de 2019

ESTRATÉGIAS MATEMÁTICAS DOS ALUNOS EM PROBLEMAS DE VALOR OMISSO

STUDENT MATHEMATICAL STRATEGIES IN MISSING VALUE PROBLEMS

Cátia Viegas, ESEC, Universidade do Algarve, Portugal, catiaviegas@live.com
António Guerreiro, ESEC, Universidade do Algarve, Portugal, aguerrei@ualg.pt
Luciano Veia, ESEC, Universidade do Algarve, Portugal, lveia@ualg.pt

RESUMO

Neste artigo reportamos um estudo com alunos de 10 e 11 anos, realizado numa escola do sul de Portugal, tendo como principal objetivo averiguar quais as estratégias por eles utilizadas na resolução de problemas de valor omisso, sem uma abordagem prévia a este domínio da matemática. Trata-se de um estudo qualitativo e interpretativo que decorreu em contexto escolar, em duas aulas organizadas seguindo uma abordagem de ensino exploratório. Os principais resultados revelaram que os alunos apresentavam competências na resolução de problemas de valor omisso que envolviam a proporcionalidade direta, sendo as estratégias predominantes razão unitária, fator de mudança e algoritmo do produto cruzado. Os resultados revelaram igualmente que o conhecimento acerca do algoritmo do produto cruzado surge como um fator condicionador da criatividade dos alunos quanto à conceção de estratégias alternativas.

Palavras-chave: Proporcionalidade direta; ensino exploratório; resolução de problemas; estratégias matemáticas.

ABSTRACT

In this paper we report a study with 10 and 11-year-old students, conducted at a school in southern Portugal, whose main objective was to investigate what strategies they used to solve problems of missing value, without a prior approach to this domain of mathematics. It is a qualitative and interpretative study carried out in a school context, in two sessions organized in accordance with an exploratory teaching approach. The main results revealed that the students involved in the study had the ability to solve problems of missing value that involved direct proportionality, the predominant strategies being unitary method, factor of change and cross product algorithm. The results also showed that the cross-product algorithm emerges as a factor that strongly influences students' creativity regarding the design of alternative strategies.

Key words: Direct proportionality; exploratory teaching; problem solving; mathematical strategies.

INTRODUÇÃO

A proporcionalidade direta consiste num tópico trabalhado com grande frequência no dia a dia dos alunos em diversas áreas, nomeadamente na Matemática, na Física, na Química, na Música, na Geografia e nas Artes entre outros, pelo que o conceito de proporcionalidade direta e a importância da sua aprendizagem têm sido alvo de diversos estudos ao longo do tempo (MENDUNI-BORTOLI & BARBOSA, 2017; NASUTION & LUKITO, 2015).

Na abordagem de situações de proporcionalidade direta, conteúdo considerado por diversos autores como um dos tópicos matemáticos mais difíceis de ensinar (COSTA & PONTE, 2008; JOHNSON, 2010), são identificadas dificuldades sentidas pelos alunos, sendo os problemas de proporção particularmente difíceis para os alunos (SPINILLO, 1993). No entanto, outros autores referem estudos em que os alunos, de forma intuitiva e com base nas suas vivências, revelam competências de resolução de problemas, envolvendo a proporcionalidade direta, mesmo antes de trabalharem este conceito (SILVESTRE, 2012).

O presente estudo pretende verificar se alunos de 10 e 11 anos apresentam competências ao nível do raciocínio proporcional que lhes permita resolver de forma adequada problemas matemáticos, que envolvem a proporcionalidade direta, nomeadamente problemas de valor omisso, sem que este domínio tenha sido abordado anteriormente em contexto escolar.

PROPORCIONALIDADE DIRETA

O conceito de proporcionalidade direta encontra-se definido na literatura como sendo uma igualdade entre duas razões $a/b = c/d$, em que a e c são valores de uma variável e b e d de outra variável, em que as variáveis permanecem independentes e as transformações dentro ou entre variáveis mantêm relações proporcionais entre os seus valores numéricos (NASUTION & LUKITO, 2015; SILVESTRE & PONTE, 2009; 2012), implicando covariação de grandezas e invariância entre grandezas (PONTE, SILVESTRE, GARCIA & COSTA, 2010). Este tipo de julgamento implica que a criança domine as relações de primeira ordem estabelecidas entre as variáveis inerentes a cada uma das razões (a/b e c/d), e relações de segunda ordem através da comparação entre as duas razões (SPINILLO, 1993).

Lamon (2007) define raciocínio proporcional como a capacidade de a criança analisar esta relação entre grandezas, compreendendo a relação constante entre estas (invariância) e a noção de que ambas variam em conjunto (covariação). Para esta autora, o raciocínio proporcional pressupõe “a capacidade de discernir uma relação multiplicativa entre duas quantidades, bem como a capacidade de expandir o mesmo relacionamento a outros pares de quantidades” (p. 638).

Perante este tipo de raciocínio, os alunos têm de realizar uma profunda transição, ao nível do seu pensamento matemático, substituindo os números naturais (com os quais se relacionam mais precocemente) por números racionais e os conceitos aditivos (que são a base das relações de primeira ordem estabelecidas entre objetos contáveis) por conceitos multiplicativos (MCINTOSH, 2013). Necessitam assim de substituir o raciocínio aditivo e as noções de mudança absoluta pelo raciocínio multiplicativo e por noções de mudança relativa (BAXTER & JUNKER, 2001), processo este que é muito difícil, visto envolver uma estrutura mental mais complexa do que a implicada em processos de multiplicação e divisão simples.

São diversos os tipos de problemas que envolvem o raciocínio de proporcionalidade direta, assim como as estratégias utilizadas pelos alunos para os solucionarem. De acordo com Silvestre (2012), a seleção da estratégia a utilizar perante uma situação problema, depende da interpretação que o aluno faz desta, do seu conhecimento acerca dos números implicados e ainda das relações imediatas que consegue estabelecer entre eles. Post, Behr e Lesh (1988) e Heller, Post, Behr e Lesh (1990) apresentam três tipos de problemas para avaliar as competências de proporcionalidade: valor omisso, comparação numérica e previsão e comparação qualitativa.

Nos problemas de valor omisso ou problemas de incógnita são apresentados três valores numéricos e é pedido que os alunos descubram o quarto valor (SILVESTRE & PONTE, 2012; SPINILLO, 1993). Nos problemas de comparação são apresentados dois ou mais pares de valores numéricos e pede-se aos alunos que os comparem (SILVESTRE & PONTE, 2012).

Para estes tipos de problemas, Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993) evidenciam a utilização, por parte dos alunos, de cinco estratégias, nomeadamente, a razão unitária, fator de mudança ou fator escalar (HART, 1983, referido por SILVESTRE & PONTE, 2009), comparação das razões, algoritmo do produto cruzado, interpretação gráfica (POST, BEHR & LESH, 1988).

Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993) afirmam que a estratégia que os alunos utilizam, desde os primeiros níveis de escolaridade, e por isso, de caráter intuitivo, consiste na razão unitária. Esta estratégia está presente nas resoluções dos alunos em problemas de divisão e de multiplicação mediante o cálculo de razões unitárias e no cálculo de múltiplos de razões unitárias. É uma estratégia que é caracterizada pela descoberta da relação multiplicativa entre medidas, sendo a razão unitária descoberta através da divisão. Os resultados obtidos através de um estudo realizado por Cramer, Post e Currier (1993), em que comparavam as estratégias utilizadas por dois grupos de alunos (7.º e 8.º anos), demonstraram que, na ausência do conhecimento da estratégia do algoritmo do produto cruzado, os alunos recorreram maioritariamente à estratégia razão unitária para resolver problemas de valor omisso e de comparação.

No que respeita à estratégia fator de mudança ou fator escalar esta está presente no leque de estratégias apresentadas pelos alunos, surgindo de forma condicionada a aspetos numéricos dos problemas. Inerente a esta estratégia está o pensamento de quantas vezes mais, implicando também a descoberta da relação multiplicativa de medidas (CRAMER, POST & CURRIER, 1993). Os resultados obtidos, através de um estudo realizado por Artut e Pelen (2015), contrastam com os obtidos mediante o referido estudo realizado por Cramer, Post e Currier (1993), demonstrando que, perante problemas de valor omisso, alunos do 6.º ano recorrem com maior frequência à estratégia fator de mudança (22,2%) comparativamente à estratégia da razão unitária (12,88%).

Quanto à estratégia de comparação de razões esta surge relacionada com problemas de comparação, através da qual os alunos comparam razões unitárias mediante duas divisões. Esta mesma estratégia é descrita por Karplus, Pulos e Stage (1983), para este tipo de problemas, sendo designada como comparação de razões entre grandezas.

O algoritmo do produto cruzado, frequentemente conhecido como regra de três simples, é uma estratégia que, segundo Menduni-Bortoli e Barbosa (2017), é ensinada pelos professores de forma prioritária ao abordar a proporcionalidade direta, estratégia esta que apesar de ser muito eficaz, consiste num "processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas" (SILVESTRE & PONTE, 2009, p. 3). Sustentando esta opinião, Cramer, Post e Currier (1993) afirmam que ser capaz de aplicar operações mecânicas em situações de proporcionalidade, não implica obrigatoriamente que os alunos compreendem as bases subjacentes ao pensamento proporcional, sendo que a capacidade para compreender claramente a proporcionalidade, consiste num marco de grande importância no desenvolvimento mental dos alunos.

Stanley, McGowan & Hull (2003) referem que, quando os professores apresentam problemas de proporcionalidade direta a alunos, que os resolvem com base no algoritmo do produto cruzado, apesar de o aplicarem corretamente, um significativo número dos alunos não é capaz de interpretar as suas respostas, porque as unidades de medida não foram tidas em consideração durante o processo de resolução, dado que, para Menduni-Bortoli e Barbosa (2017), recorrendo a esta estratégia desprezam-se as relações existentes entre as grandezas implicadas. No estudo, anteriormente referido, desenvolvido por Cramer, Post e Currier (1993), constatou-se que, mediante problemas de valor omisso, no grupo de alunos que haviam abordado a estratégia do algoritmo do produto cruzado, esta estratégia foi utilizada com maior frequência face às estratégias de razão unitária, fator de mudança e comparação de frações.

Silvestre e Ponte (2012) acrescentam ainda que os alunos aprendem primeiramente a resolver as situações problemáticas que implicam a utilização de igualdades entre razões com duas variáveis (como no caso do algoritmo do produto cruzado), recorrendo posteriormente à função linear, não estabelecendo qualquer relação entre essas duas representações, o que revela falta de compreensão sobre os procedimentos por estes adotados.

Relativamente à estratégia da interpretação gráfica, esta consiste na análise de gráficos para identificar "razões equivalentes ou para identificar a parte omissa em problemas de proporcionalidade direta" (POST, BEHR & LESH, 1988).

Para além das referidas estratégias, Silvestre (2012) acrescenta ainda que, nalguns casos de problemas de comparação, os alunos necessitam de realizar uma análise qualitativa acerca dos dados. Nasution, Amin e Lukito (2014) referem também a importância da utilização de modelos para a resolução de problemas que envolvem proporcionalidade, uma vez que lhes permite visualizar de forma concreta o seu pensamento e a construção do sentido de proporcionalidade.

Perante situações problemáticas que envolvem o raciocínio proporcional, são diversas as dificuldades reveladas pelos alunos. Spinillo (1993) aponta duas possíveis razões para explicar as dificuldades sentidas pelos alunos face a resolução de problemas de proporcionalidade: a incapacidade em estabelecer relações de segunda-ordem e a dificuldade em estabelecer relações iniciais de primeira-ordem. Costa e Ponte (2008) afirmam também que as principais dificuldades incidem na capacidade dos alunos em interpretar os enunciados, de forma a distinguir situações que envolvem proporcionalidade direta das que não a implicam, e na aquisição de forma mecânica de algoritmos sem que os compreendam, aplicando-os em situações desadequadas

Cramer, Post e Currier (1993) acrescentam ainda a dificuldade em compreender a relação multiplicativa que existe entre as quantidades que representam a situação. Nasution, Amin, Lukito, Abels e Dolk (2014) corroboram com esta opinião, ao referirem que, para resolver problemas de proporcionalidade direta, os alunos têm de dominar a relação existente entre uma unidade e as outras unidades. Apontam a necessidade de compreender esta relação como uma possível causa da dificuldade dos alunos em lidarem com este tipo de problemas, pelo que consideram ser imprescindível um ensino formal acerca desse tema.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

DESIGN DE INVESTIGAÇÃO E INTERVENÇÃO EDUCATIVA

O presente estudo objetivou verificar quais as estratégias utilizadas por alunos do 5.º ano na resolução de problemas de valor omisso, sem que tenha sido realizada, em contexto escolar, qualquer abordagem à proporcionalidade direta.

DESIGN DE INVESTIGAÇÃO

Optou-se por uma metodologia de caráter qualitativo em contexto escolar, considerando as características que lhe são inerentes, das quais se destacam a fonte de dados que consiste no ambiente natural ser de caráter descritivo recorrendo a citações “com base nos dados para ilustrar e substanciar” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p.48) os resultados, o interesse do investigador no processo e não nos resultados ou produtos e a análise indutiva dos dados recolhidos, em que os dados não são recolhidos com “o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p.50), sendo as conclusões construídas à medida que os dados recolhidos vão sendo analisados e agrupados. A recolha dos dados foi realizada em contexto natural de sala de aula, durante o decorrer de duas aulas de matemática, através da aplicação de cinco problemas de valor omisso, com um grupo de vinte e três alunos, organizados em grupos de três ou quatro alunos. As produções dos alunos foram devidamente registadas, através da fotografia e gravação áudio, que permitiram a transcrição detalhada de alguns momentos de intervenção dos alunos. A análise dos dados recolhidos foi realizada de um modo interpretativo permitindo o agrupamento e categorização das estratégias de resolução dos alunos.

PARTICIPANTES

Este estudo envolveu a participação de uma turma do 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico de uma Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos, localizada na cidade de Faro, sul de Portugal, composta por um total de vinte e três alunos, dos quais dez do sexo feminino e treze do

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

sexo masculino. Integrado no grupo de alunos encontravam-se dois alunos referenciados como tendo necessidades educativas específicas, cinco alunos repetentes e um aluno de nacionalidade cabo-verdiana em fase de aquisição do português-europeu. Os alunos trabalharam em cinco grupos de quatro alunos e um grupo de três alunos (designados Grupo A a Grupo F, em que os alunos assumem nomes fictícios).

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Os cinco problemas de valor omisso selecionados para a recolha dos dados foram problemas de proporcionalidade simples. Após a seleção dos problemas, com o objetivo de averiguar se os enunciados se encontravam adequados à faixa etária em questão, a professora/investigadora (primeira autora deste artigo) aplicou previamente as situações problemáticas selecionadas a um grupo de quatro alunos pertencentes à mesma faixa etária dos alunos, a frequentar a mesma escola (seguindo as orientações dos segundo e terceiro autores). Os problemas implicavam a utilização de diferentes grandezas, valores numéricos e contextos. Os problemas apresentados aos alunos neste estudo foram:

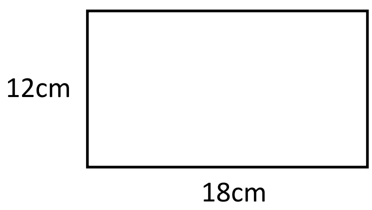
Problema 1. Uma turma precisa de 5 folhas para alimentar 2 lagartas por dia. De quantas folhas irá precisar por dia para alimentar 12 lagartas? (Adaptado de STEIN, ENGLE, SMITH & HUGHES, 2008)

Problema 2. O carrinho do irmão mais novo do Miguel dá 3 voltas à pista em 57 segundos. Sabendo que o carrinho anda sempre à mesma velocidade, quanto tempo demora a dar 12 voltas à pista?

Problema 3. Um automóvel que se descoloca sempre à mesma velocidade percorre 210 Km em 3 horas. Que distância percorre em 2 horas? (Adaptado de SILVESTRE & PONTE, 2012)

Problema 4. O Duarte quer comprar um telemóvel cujo preço é 112 €. No catálogo de promoções do mês seguinte, o telemóvel aparece com 25 % de desconto. Qual será o preço do telemóvel com desconto?

Problema 5. A Mariana quis ampliar uma fotografia onde estava com o seu cão. Se quiser ampliar a fotografia de modo a que o comprimento seja igual a 45cm, qual será a largura?



A ordem pela qual os problemas foram organizados e apresentados aos alunos seguiu uma lógica de complexidade, tendo sido apresentados três problemas de valor omisso semelhantes, variando apenas as grandezas implicadas (problemas 1 a 3). O problema 4 considerou-se ter um nível de complexidade superior às anteriores por envolver a utilização de números racionais sob a forma de percentagem e não apenas números naturais, assim como o problema 5 que, por implicar números decimais (na razão), também foi considerada ter um grau de dificuldade superior aos restantes.

INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA

Tendo como objetivo facilitar a comunicação na sala de aula, a intervenção educativa seguiu o modelo apresentado por Stein et al. (2008), contemplando cinco práticas: antecipação, monitorização do trabalho autónomo dos alunos durante a fase de exploração dos problemas, seleção de resoluções a apresentar durante a fase de discussão, sequenciação das resoluções selecionadas e discussão coletiva com o objetivo de ajudar os alunos a realizar conexões matemáticas entre as diferentes ideias e respostas fornecidas.

De entre as práticas referidas por Stein et al. (2008), a antecipação, que consiste na previsão de quais as estratégias de resolução que poderão surgir através da atividade dos alunos, permitiu à professora/investigadora selecionar algumas das estratégias mais recorrentemente utilizadas pelos alunos perante a resolução de problemas de proporcionalidade direta: razão unitária, fator de mudança, comparação de frações, algoritmo do produto cruzado e interpretação gráfica.

A organização da aula seguiu o modelo de ensino exploratório (CANAVARRO, 2011). Na resolução de cada problema seguiu-se o mesmo procedimento: uma fase de apresentação do problema, seguida da fase de trabalho autónomo dos alunos e um período de discussão coletiva. Para introduzir cada um dos problemas, a professora/investigadora realizou uma leitura conjunta do enunciado com todo o grupo de alunos esclarecendo potenciais dúvidas acerca do seu conteúdo de modo a dissipar possíveis dificuldades relacionadas com a compreensão do enunciado. Na fase de trabalho autónomo, os alunos trabalharam colaborativamente em grupos de três ou quatro elementos. Durante esta fase, a professora/investigadora acompanhou o trabalho dos alunos, não intervindo nas estratégias que estes estavam a utilizar de modo a validá-las ou refutá-las. O seu apoio baseou-se no esclarecimento de possíveis dúvidas relativamente à interpretação dos enunciados. O momento de apresentação e discussão coletiva foi devidamente planeado, uma vez que era esperado que surgissem diferentes estratégias de resoluções por parte dos alunos. Durante esta fase pretendeu-se igualmente atender aos erros presentes nas resoluções, encarando o erro como uma estratégia didática. No final de cada momento de discussão coletiva, procurou-se estabelecer pontes, conexões entre as diferentes estratégias de resolução apresentadas, através da análise, comparação e confronto de ideias, no sentido de promover o desenvolvimento coletivo de ideias e conceitos matemáticos por parte dos alunos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise e discussão dos dados relativos às resoluções matemáticas dos alunos estruturam-se nas estratégias razão unitária, fator mudança, algoritmo do produto cruzado, em adições sucessivas e cálculo de uma parte da unidade.

RAZÃO UNITÁRIA

A estratégia razão unitária foi utilizada para a resolução dos problemas 1, 2 e 3, num total de oito vezes, tendo sido o Problema 3 o que mobilizou a utilização desta estratégia com maior frequência (4 em 5 situações). Este resultado era o esperado, uma vez que Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993) afirmam que esta estratégia, por ser de caráter intuitivo, é utilizada pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade. Este resultado é ainda reforçado pelos resultados do estudo, realizado por Cramer, Post e Currier (1993), que demonstrou que, perante problemas de valor omisso e de comparação, alunos do 7.º ano que não tinham abordado a estratégia do algoritmo cruzado, utilizavam

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

predominantemente a estratégia da razão unitária. As representações utilizadas pelos grupos de alunos para a aplicação desta estratégia foram bastante diversificadas. Os alunos do Grupo E apresentaram a seguinte resolução para o Problema 1:

Cada duas lagartas comiam 5 folhas 12:2 = 6

6 pares de 2 lagartas comiam 30 folhas 5 x 6 = 30

R.: Para alimentar 12 lagartas é preciso 30 folhas

E explicaram o seu raciocínio ao grupo turma, durante a fase de apresentação e discussão das produções dos alunos:

Vasco: Nós descobrimos que cada duas lagartas comiam cinco folhas. Então fizemos doze a dividir por dois que deu seis.

Professora: Seis quê?

Vasco: Cada seis pares de duas lagartas…

Professora: Descobriram que há seis pares de lagartas.

Vasco: …sim. Se um par come cinco folhas, seis pares comem trinta folhas.

Mediante a resolução apresentada, verifica-se que os alunos não procederam da forma descrita na literatura para determinar a relação unitária entre uma lagarta e a quantidade de folhas que esta comia por dia. Considera-se que tal aconteceu uma vez que os alunos tentaram evitar a realização de uma operação de divisão onde iriam obter um número decimal (se duas lagartas comem cinco folhas, uma lagarta comeria duas folhas e meia). Assim, optaram por abordar o problema não considerando cada lagarta individualmente, mas sim agrupando-as a pares, pelo que determinaram primeiramente o número de pares de lagartas que se pode formar com 12 lagartas. Em seguida, multiplicaram a quantidade de folhas que cada par de lagarta comia pelo total de pares de lagartas existentes. Através do discurso do aluno representante do grupo verificou-se que os alunos compreenderam o procedimento inerente ao seu raciocínio para a resolução do problema.

Outro exemplo onde foi utilizada a estratégia da razão unitária está presente na resolução do Problema 2 pelo Grupo C:

Tempo que demora a dar uma volta: 57:3=19

Quanto tempo demora a dar 12 voltas? 19x12=328 segundos.

(...)

R.: Demora 228 segundos.

Aquando da apresentação e discussão das resoluções ao grupo turma, os alunos clarificaram a sua resolução e detetaram a incorreção do cálculo do produto:

André: Eu fiz cinquenta e sete a dividir por três e deu-me dezanove.

Professora: Para saberes o quê?

André: Quanto tempo demora uma volta.

Professora: Então obtiveste dezanove quê?

André: Dezanove segundos ... Depois fiz dezanove vezes doze e deu trezentos e vinte e oito segundos.

Turma: Está errado. A conta está malfeita.

Professora: Vamos então fazer a operação em conjunto.

(...)

Turma: Deu 228 segundos.

De acordo com a resolução apresentada, constata-se que o procedimento dos alunos partiu da descoberta do tempo que o carro demoraria a completar uma volta à pista, determinando a relação unitária como descrito na literatura. Apesar da utilização adequada da estratégia, verifica-se na operação de multiplicação que os alunos cometeram um erro de cálculo, descrito por Spnillo, Soares, Moro e Lautert (2016) como sendo um erro procedimental. Segundo os mesmos autores, esse tipo de erros não se relaciona diretamente com a falta de compreensão por parte do aluno em relação ao conceito matemático implicado no problema, mas sim à aplicação das regras algorítmicas. O mesmo tipo de registro foi observado para a resolução do Problema 3 pelo Grupo D (ver Figura 1.):

Figura 1. Razão unitária – Registro do Grupo D para o Problema 3

Fonte: Dados dos autores.

No âmbito da apresentação e discussão das resoluções em grupo turma, os alunos apresentaram a sua estratégia:

Mário: Primeiro fizemos o 210 a dividir por 3.

Professora: Para quê?

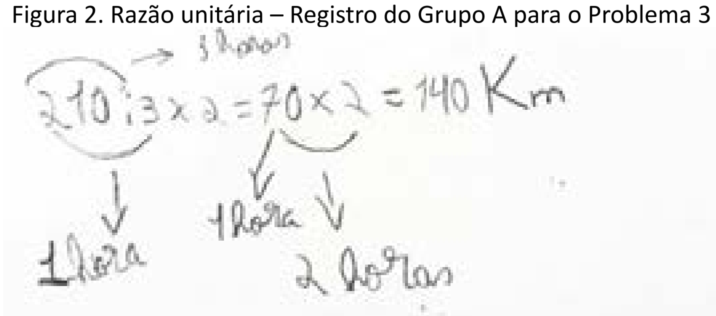
Mário: Para saber quanto é que o automóvel se deslocava numa hora, que dá setenta. E depois como é para ver quanto ele percorre em duas horas, fizemos vezes dois, que dá cento e quarenta que é igual a duas horas.

Professora: Cento e quarenta quê? O que é que falta?

Tomás: Cento e quarenta quilómetros, professora.

Os alunos do Grupo A apresentaram um registro similar para o Problema 3 (ver Figura 2.):

Figura 2. Razão unitária – Registro do Grupo A para o Problema 3



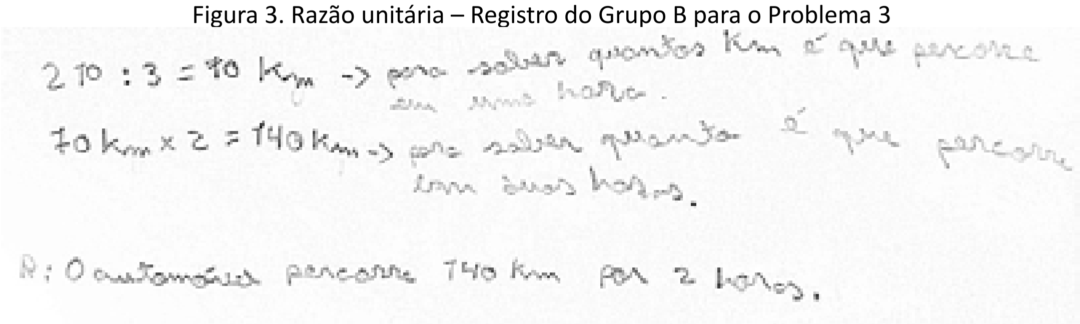
Fonte: Dados dos autores.

As duas resoluções são equivalentes no que respeita à ordem e organização das operações realizadas, no entanto constata-se que no registro da figura 2., os alunos identificaram cada um dos valores apresentados, o que demonstra uma compreensão detalhada do problema matemático. Quanto à resolução anterior, os alunos omitiram todas as grandezas implicadas, nomeadamente no resultado. Foi possível verificar que

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM FOCO

os alunos haviam compreendido todo o procedimento que tinham realizado, através da explicação oral acerca da sua estratégia de resolução. O registro considerado mais completo e organizado para a estratégia razão unitária está presente na figura 3.

Figura 3. Razão unitária – Registro do Grupo B para o Problema 3


210 : 3 = 70 km -> para saber quantos km é que percorre em uma hora.

70 km x 2 = 140 km -> para saber quanto é que percorre em duas horas.

R: O automóvel percorre 140 km por 2 horas.

Fonte: Dados dos autores.

A estratégia apresentada na figura 3. revela que os alunos compreenderam claramente o procedimento que estavam a efetuar. Para o registro, utilizaram de forma simples e correta as operações matemáticas implicadas, explicando de forma descritiva a razão pela qual realizaram cada uma das operações.

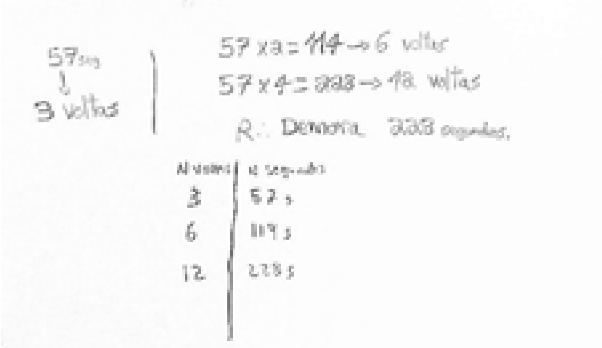
Analisando todas as respostas obtidas através da utilização da estratégia razão unitária, verificou-se que em sete de oito utilizações, esta conduziu à obtenção de uma resposta correta. Estes resultados estão em conformidade com os obtidos por Bem-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto e Miller (1998) que afirmam que esta estratégia resulta frequentemente em respostas corretas.

Atendendo aos resultados apresentados para esta estratégia pode-se afirmar que alunos do 5.º ano utilizam intuitivamente, frequentemente e de forma maioritariamente correta, a estratégia razão unitária ainda que as suas representações variem do ponto de vista de complexidade e clareza matemática.

FATOR DE MUDANÇA

A estratégia fator de mudança foi utilizada num total de cinco vezes tendo sido mobilizada quase exclusivamente pelos alunos para a resolução do Problema 2 (4 utilizações em 5 oportunidades). Os alunos que conceberam o registro presente na figura 4., não estabeleceram à priori a relação multiplicativa existente entre o número de voltas, como referido na literatura, tendo realizado um cálculo intermédio.

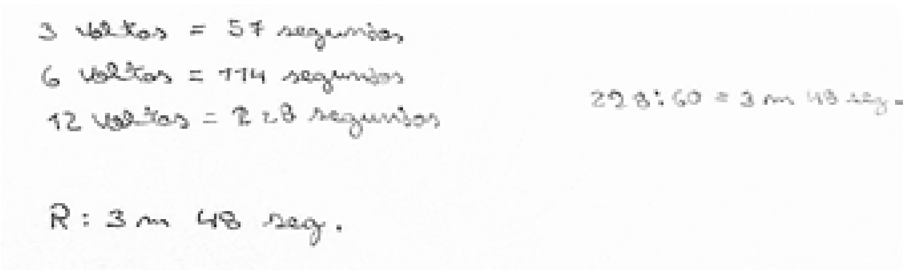
Figura 4. Fator de mudança – Registro do Grupo D para o Problema 2



Fonte: Dados dos autores.

Ao analisar o registro dos alunos observa-se que estes utilizaram duas formas de organização do raciocínio, nomeadamente operações numéricas e uma tabela. Neste caso, os alunos realizaram um passo intermédio entre o número inicial de voltas percorridas (3 voltas) e o número final de voltas percorridas (12 voltas), realizando duas duplicações sucessivas. O mesmo tipo de procedimento foi utilizado por outro grupo para o mesmo problema (ver Figura 5.).

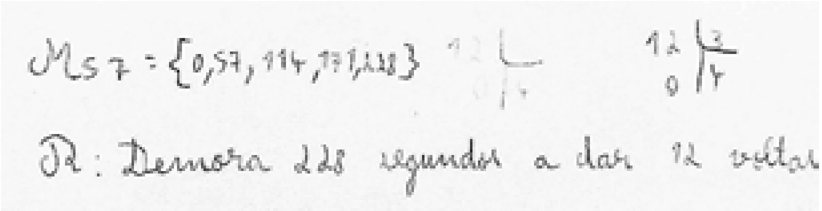
Figura 5. Fator de mudança – Registro do Grupo B para o Problema 2



Fonte: Dados dos autores.

Destaca-se a resolução presente na figura 5., pelo facto dos alunos, que conceberam este registro, fornecerem uma resposta mais detalhada uma vez que apresentaram o resultado em minutos e segundos. Os alunos do Grupo E apresentaram a seguinte resolução para o Problema 2 (ver Figura 6.):

Figura 6. Fator de mudança – Registro do Grupo E para o Problema 2



Fonte: Dados dos autores.

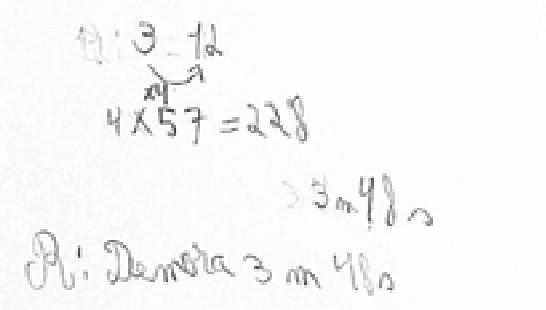
Durante a apresentação e discussão das resoluções no grupo turma, os alunos explicitaram a estratégia utilizada:

> Samuel: Como três voltas eram cinquenta e sete segundos, eu optei por fazer doze a dividir por três.
>
> Professora: Para saber o quê?
>
> Samuel: Que o tempo vai também ser quatro vezes mais. Depois fiz o cinquenta e sete vezes um, vezes dois que deu centro e catorze, vezes três que deu cento e setenta e um e vezes quatro que deu duzentos e vinte e oito.
>
> Professora: Porque é que ele só fez até ao cento e vinte e oito?
>
> Tomás: Ele contou quatro vezes.
>
> Professora: Porquê?
>
> Tomás: Porque três vezes quatro dá doze.

Para o registro da estratégia utilizada, o grupo de alunos determinou primeiramente a relação multiplicativa existente entre o número de voltas, assim como descrito por Cramer, Post e Currier (1993). Seguindo o raciocínio apresentado pelos autores de quantas vezes mais, verifica-se que os alunos compreenderam que, se o número de voltas era quatro vezes maior, o tempo que iria demorar a completar as doze voltas também seria quatro vezes maior. Para determinar o tempo que o carro demoraria a completar as doze voltas, os alunos recorreram aos múltiplos do número cinquenta e quatro, mobilizando um tipo de representação matemática com que estavam familiarizados através dos conteúdos no âmbito dos múltiplos e divisores abordados ao longo do 5.º ano.

O mesmo se verificou no registro utilizado pelo Grupo A (ver Figura 7.), para a resolução do mesmo problema, tendo, no entanto, o grupo em questão recorrido exclusivamente a duas operações matemáticas. Este registro é aquele que mais se aproxima do descrito na literatura para esta estratégia.

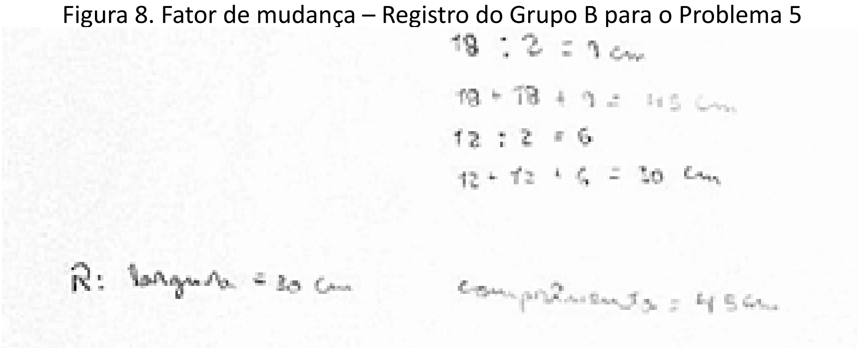
Figura 7. Fator de mudança – Registro do Grupo A para o Problema 2



Fonte: Dados dos autores.

A estratégia fator de mudança foi também utilizada para a resolução do Problema 5, como se pode observar na figura 8.

Figura 8. Fator de mudança – Registro do Grupo B para o Problema 5



Fonte: Dados dos autores.

Para o problema em questão, a relação multiplicativa existente entre o comprimento inicial (18 cm) e o comprimento final (45 cm) da fotografia não era um número natural, correspondendo a uma ampliação de duas vezes e meia. Verificou-se assim, que os alunos primeiramente determinaram o fator de mudança através da realização da adição 18 + 18 + 9, para em seguida aplicarem este mesmo fator à medida correspondente à largura da fotografia 12 + 12 + 6.

Ao analisar todas as situações em que foi aplicada a estratégia fator de mudança, num total de cinco vezes, verificou-se que em quatro dessas situações se obteve uma resposta correta. Comparando a quantidade de vezes que esta estratégia foi utilizada (cinco vezes) em relação à estratégia razão unitária (8 vezes), verifica-se que os alunos optaram com mais frequência pela última. Estes resultados contrariam os obtidos por Post e Currier (1993) num estudo realizado com alunos do 6.º ano onde a estratégia fator de mudança foi utilizada com mais frequência do que a estratégia razão unitária.

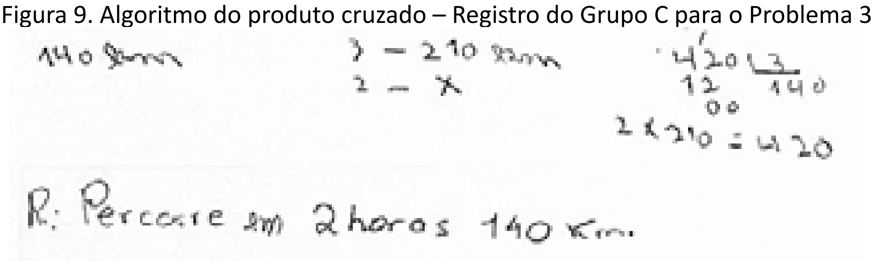
Considerando o desempenho dos alunos através da mobilização espontânea da estratégia fator de mudança, para resolver os diversos problemas matemáticos apresentados no âmbito do estudo, pode-se afirmar que esta está presente no leque de estratégias que alunos do 5.º ano possuem para resolver problemas de proporcionalidade direta, conduzindo a respostas corretas, assim como apresentado na literatura consultada.

Salienta-se ainda que a grande diversidade de representações e operações matemáticas inerentes a esta estratégia apresentada pelos alunos para o mesmo problema, revela que a mesma estratégia é utilizada por diversos alunos com níveis de conhecimento e abstração matemática variável.

ALGORITMO DO PRODUTO CRUZADO

A estratégia algoritmo do produto cruzado também conhecida como regra dos três simples, foi apenas utilizada pelo grupo C em três problemas diferentes (Problemas 1, 3 e 5). Uma vez que esta estratégia foi sempre apresentada com recurso ao mesmo tipo de registro, apresentar-se-á apenas um dos registros do Grupo C (ver Figura 9.):

Figura 9. Algoritmo do produto cruzado – Registro do Grupo C para o Problema 3



Fonte: Dados dos autores.

Durante a apresentação e discussão das resoluções no grupo turma, os alunos explicitaram a utilização da regra dos três simples:

> Artur: Nós aplicamos a regra dos três simples. Fizemos três para duzentos e dez quilómetros.
>
> Artur: Três menos duzentos e dez?
>
> Professora: Não, tens de explicar o que fizeste.
>
> Artur: Não é menos! Então nós fizemos dois vezes duzentos e dez, igual a quatrocentos e vinte. Depois dividi por três. Já está!
>
> Professora: Explica então aos teus colegas o que é que fizeste.
>
> Artur: Isto é a regra dos três simples. Se em três horas percorreu duzentos e dez quilómetros, em duas horas quanto tempo é que percorreu? Então pomos um x. Depois faço dois vezes duzentos e dez e divido por três!

Ao verificar a utilização desta estratégia, a professora solicitou que os alunos que a utilizaram explicassem à turma como haviam procedido, constatando-se que apenas um dos elementos do grupo conhecia a estratégia, elaborando autonomamente a resolução do problema. Mediante a explicação fornecida pelo aluno, observou-se que o aluno não compreendia as relações multiplicativas e de divisão inerentes ao problema, realizando apenas uma descrição memorizada sobre o procedimento implicado. Este resultado é corroborado por Stanley, McGowan & Hull (2003) ao afirmar que grande parte dos alunos que utiliza a estratégia do algoritmo do produto cruzado não é capaz de interpretar as respostas que obtém.

Em síntese, do ponto de vista da investigação, constata-se que a estratégia algoritmo do produto cruzado, assim como descrito na literatura, não surge de forma intuitiva no raciocínio dos alunos, dependendo do ensino formal dos processos matemáticos nela implicados. Desta forma pode-se afirmar que esta estratégia não faz parte do repertório de estratégias intuitivas dos alunos para a resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade direta, e ainda que, uma vez utilizada, os alunos não têm a capacidade de explicar a natureza das relações matemáticas nela implicadas.

OUTRAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS

Ao categorizar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, perante os problemas propostos, constatou-se que algumas destas não consistiam em nenhuma das estratégias referidas na literatura abordada. Ao analisá-las foi possível agrupá-las em duas categorias: estratégia de adições sucessivas e estratégia do cálculo de uma parte da unidade. Ambas as estratégias foram consideradas válidas, no sentido que permitiram a obtenção da resposta correta, assim como explicadas adequadamente pelos alunos à turma.

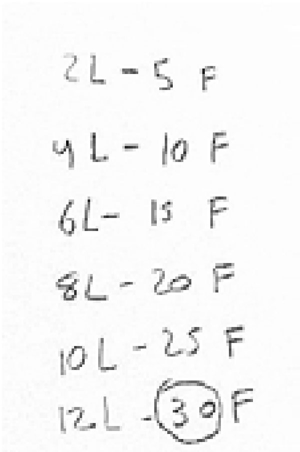
Adições sucessivas. Para o Problema 1, verificou-se que os Grupos A e B utilizaram uma estratégia de adições sucessivas para obter a resposta. Na figura 10. é apresentado o registro realizado pelo Grupo B para resolver o Problema 1, recorrendo a uma estratégia de adições sucessivas até alcançarem o número de lagartas pretendido, utilizando um esquema visual com recurso a desenhos:

Figura 10. Adições sucessivas – Registro do Grupo A para o Problema 1

Fonte: Dados dos autores.

Esta mesma estratégia foi observada no registro do Grupo B, sendo, no entanto, a representação utilizada mais formal do que a anterior (ver Figura 11.):

Figura 11. Adições sucessivas – Registro do Grupo B para o Problema 1


2L - 5 F
4L - 10 F
6L - 15 F
8L - 20 F
10L - 25 F
12L - 30 F

Fonte: Dados dos autores.

Considera-se que a utilização desta estratégia, por implicar apenas operações de adição é instintiva por parte dos alunos, uma vez que desde cedo são desafiados a realizar cálculos de adição. Silvestre (2012) reforça esta ideia ao referir que, para a resolução de problemas de valor omisso, os alunos utilizam espontaneamente procedimentos apenas aditivos ou aditivos conjugados com multiplicativos associados a tabelas simples.

Cálculo de uma parte da unidade. Perante 0 Problema 4, que implicava percentagens, todos os grupos, à exceção do que utilizou a estratégia do algoritmo do produto cruzado e de um grupo que não apresentou resposta, resolveram corretamente a situação problemática recorrendo ao cálculo da parte da unidade, ou seja, 25 % de 112 euros, subtraindo em seguida o valor obtido (28 €) ao valor inicial (112 €). Esta estratégia terá sido utilizada pelos alunos de forma frequente e correta pelo facto deste conteúdo ter sido abordado e explorado previamente em contexto de sala de aula por consistir num tópico a trabalhar no âmbito do 5.º ano ao nível da resolução de problemas com a utilização de números racionais não negativos.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos através da presente investigação permitem inferir que alunos a frequentar o 5.º ano, apresentam competências ao nível do raciocínio proporcional que lhes permite resolver de forma adequada problemas de valor omisso, envolvendo proporcionalidade direta, sem que este domínio tenha sido abordado anteriormente em contexto escolar.

Analisando de forma global as resoluções apresentadas pelos alunos, assim como as suas explicações orais perante os cinco problemas que lhes foram propostos, no âmbito do presente estudo, pode-se observar que, para o grupo de alunos em questão, estão presentes, no seu leque de estratégias intuitivas, duas das estratégias predominantes, referidas ao longo da literatura abordada, nomeadamente razão unitária e fator de mudança. Para além destas, alguns alunos demonstraram ter a capacidade de resolver os mesmos problemas matemáticos mobilizando outras formas de raciocínio, recorrendo a conhecimentos matemáticos previamente explorados, aplicando-os de forma adequada ao contexto dos problemas em questão. Atendendo a estes resultados, no âmbito deste estudo, pode-se afirmar que alunos do 5.º ano apresentam de forma consistente estratégias intuitivas de resolução matemática que lhes permitem resolver, de forma eficaz, problemas simples que implicam a mobilização do conceito de proporcionalidade direta.

Considerando o ensino exploratório, adotado pela professora nas duas aulas de recolha de dados, constatou-se que este tipo de estratégia de ensino é uma mais-valia para todos os alunos envolvidos, uma vez que todas as etapas, pelas quais decorre o ensino exploratório, permitem uma partilha constante de informação entre os alunos e entre estes e o professor, o que permite que este último contacte com informação dificilmente acessível, implicada nos processos mentais das resoluções matemáticas dos alunos, o que lhe permite compreender as ideias e conceitos inerentes às estratégias e dificuldades dos mesmos. Os momentos de trabalho autónomo dos alunos em grupo e de discussão coletiva contribuíram, assim como esperado e pretendido pela professora/investigadora, para a construção coletiva dos conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos, ajudando para o enriquecimento matemático coletivo através da partilha e análise da produção dos mesmos.

A análise das produções dos alunos revelou que, face aos problemas propostos, se obteve um total de vinte e cinco respostas corretas em trinta e duas respostas recolhidas, sendo as restantes respostas incorretas. Estes resultados estão em concordância com os resultados obtidos, através de estudos realizados por Spinillo (1993) e Costa (2007), que também demonstraram que os alunos apresentam a capacidade de resolver problemas de proporcionalidade direta, não dependendo esta capacidade do ensino formal deste domínio matemático.

Ao confrontar os resultados obtidos, mediante a investigação em questão, com estudos homólogos, realizados por Costa e Ponte (2008), que afirmam que alunos a frequentar o 6.º ano apresentam muitas dificuldades em resolver problemas de proporcionalidade, considera-se que a descontinuidade dos resultados obtidos entre estes dois estudos poder-se-á dever à natureza dos problemas propostos, ou seja, o seu grau de complexidade. Vergnaud (1988, referido por COSTA & PONTE, 2008) refere este mesmo aspeto em relação ao diferente tipo de problemas que se podem propor aos alunos.

Esta evidência levanta uma primeira limitação da investigação em questão relacionada com a complexidade e variedade do tipo de problemas apresentados, que consistiam na sua grande maioria em problemas simples de valor omisso, o que poderá ter conduzido a um maior número de respostas corretas do que estudos semelhantes como os desenvolvidos por Costa e Ponte (2008) e Post, Behr e Lesh (1988). Neste sentido, os resultados obtidos na investigação em questão apenas podem ser considerados tendo em atenção a complexidade dos problemas de valor omisso utilizados não sendo extrapolados para todos os tipos de problemas que envolvem proporcionalidade direta referidos ao longo da literatura.

Uma segunda limitação da investigação surge ao comparar os resultados obtidos com a afirmação de Post, Behr e Lesh (1988), ao referirem que são poucos os alunos que entre o 5.º e 8.º anos demonstram dominar o raciocínio proporcional. Considera-se que esta discordância de resultados relaciona-se com a natureza de aula de ensino exploratório, que a professora/investigadora adotou, nomeadamente ao nível do contributo individual de cada participante face aos problemas apresentados, em que, o facto dos alunos terem trabalhado em grupo, não permitiu uma análise individual do desempenho de cada um, o que poderá ter uma influência direta nos resultados obtidos e nas observações realizadas, dado que é possível que muitos dos alunos, mesmo não tendo a capacidade de resolver os problemas, tenham obtido uma resposta correta pelo facto de um dos elementos do grupo conseguir resolver os problemas individualmente.

Atendendo a estas limitações, pode-se, no entanto, afirmar claramente que, em contexto de trabalho colaborativo, face a problemas simples de valor omisso, alunos do 5.º ano têm a capacidade de solucionar, de forma adequada e intuitiva, problemas que envolvem a proporcionalidade direta, apresentando de forma clara e coerente o seu raciocínio tanto ao nível do registro escrito como através da expressão oral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTUT, P. & PELEN, M., 6th Grade Students' Solution Strategies on Proportional Reasoning Problems. **Procedia Social and Behavioral Sciences**. 197, 113 – 119. 2015.

BAXTER, G. P. & JUNKER, B. A. **Case study in proportional reasoning**. Paper presented at the annual meeting of National Council of Mathematics for Measurement in Education Seattle, Washington. 2001.

BEM-CHAIM, D., FEY, J., FITZGERALD, W., BENEDETTO, C.& MILLER, J. Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. **Educational Studies in Mathematics**. 36, 247-273. 1998.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação** – uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora. 1994.

CANAVARRO, A. Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. **Educação e Matemática**. 115, 11-16. 2011.

COSTA, S. **O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico.** Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2007.

COSTA, S., & PONTE, J. O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**. (XVI) 2, 65-100. 2008.

CRAMER, K., POST, T., & CURRIER, S. Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In D. Owens (Ed.), **Research Ideas for the Classroom** (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company. 1993.

HELLER, P, POST, T, BEHR, M., & LESH, R. The effect of two context variables oil quantitative and numerical reasoning about rates. **Journal for Research in Mathematics Education**, 21 (5), 388-402. 1990.

JOHNSON, J. **Proportionality in middle-school mathematics textbooks**, Doctor of Philosophy, Department of Secondary Education College of Education, University of South Florid. 2010.

KARPLUS, R., PULOS, S. & STAGE, E. Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. **Educational Studies in Mathematics**. 14, 219-233. 1983.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age. 2007.

MCINTOSH, M. B. **Developing Proportional Reasoning in Middle School Students,** Master of Mathematics, College of Science, The University of Utah. 2013.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. & BARBOSA, J. A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema**. 31(59), 947-967. 2017.

NASUTION A., & LUKITO, A. Developing student's proportional reasoning through informal way. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**. (38)1, 77-101. 2015.

NASUTION, A., AMIN, S., LUKITO, A., ABELS, M.& DOLK, M. Educational design research: supporting fifth-grade students to learn about proportion. **Magister of Mahematics Education Department**. 43-50. 2015.

PONTE, J., SILVESTRE, G., GARCIA, C. & COSTA, S. O desenvolvimento de conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades: tarefas para o 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, materiais de apoio ao professor. **Projeto IMLNA**. Lisboa: Instituto de Educação. 2010.

POST, T. & CURRIER, K. Connecting research to teaching proportional reasoning. **Mathematics Teacher**. 86:404–407. 1993.

POST, T. R., BEHR, M. J., & LESH, R. Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), **The ideas of algebra, K-12** (pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 1988.

SILVESTRE, A. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade**. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). 2012.

SILVESTRE, A. & PONTE, J. Resolução de problemas de "valor omisso": análise das estratégias dos alunos. **Actas do XIXEIEM**, 1-14. 2009.

SILVESTRE, A. & PONTE, J. Missing value and comparison problems: what pupils know before the teaching of proportion. **PNA**, 6(3), 73-83. 2012.

SPINILLO, A. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, 2(9), 349-364. 1993.

SPINILLO, A., SOARES, M., MORO, M. & LAUTERT, S. Como professores e futuros professores interpretam erros de alunos ao resolverem problemas de estrutura multiplicativa? **Bolema**. 30(56), 1188-1206. 2016.

STANLEY, D., MCGOWAN, D. & HULL, S. Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. **Texas Mathematics Teacher,** 11(1), 9-11. 2003.

STEIN, M., ENGLE, R., SMITH, M. & HUGHES, E. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, 10(4), 313–340. 2008.