

**CLÁUDIA RAQUEL ANASTÁCIO PINHEIRO**

**COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NA  
APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NO 2.º CICLO  
DO ENSINO BÁSICO**



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

2024

**CLÁUDIA RAQUEL ANASTÁCIO PINHEIRO**

**COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NA  
APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NO 2.º CICLO  
DO ENSINO BÁSICO**

**Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e  
Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico**

**Trabalho efetuado sob a orientação de:  
Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro**



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

2024

**Comunicação matemática na aprendizagem da geometria no 2.º ciclo do ensino  
básico**

**Declaração de autoria do trabalho**

Declaro ser a autora deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

---

## Copyright

Cláudia Raquel Anastácio Pinheiro

A Universidade do Algarve tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito à autora e editora.

## **Agradecimentos**

A toda a minha família e, em especial, à minha Mãe.

Ao João André Cruz, meu companheiro e confidente.

Às colegas de curso que se tornaram minhas amigas.

Aos professores que marcaram o meu percurso escolar.

Aos professores doutores Marco Mendes e Nélida Filipe.

Ao meu orientador, professor doutor António Guerreiro.

Ao avô Silva e à avó Maria, eternos no meu coração.

## Resumo

O presente relatório de investigação trata, no âmbito do tema de geometria, o tópico de aprendizagem de figuras planas. Propõem-se tarefas de investigação que guiam para a resposta da seguinte questão geral: Como se desenvolve a comunicação matemática no ensino básico no contexto da aprendizagem da geometria?

De forma mais precisa, pretende-se caracterizar a comunicação matemática oral em três dimensões: (i) Qual a estrutura da comunicação matemática aluno-aluno?, (ii) Qual a estrutura da comunicação matemática aluno-professor? e (iii) Qual a estrutura da comunicação matemática professor-aluno?

Tendo em consideração a questão geral e os propósitos investigativos utilizou-se uma metodologia qualitativa que abrangeu procedimentos metodológicos próximos dos da investigação-ação. A investigação sucedeu-se num paradigma do tipo interpretativo, em que os instrumentos de recolha de dados foram: a observação direta, as gravações áudio e a análise documental das produções dos alunos.

A investigação realizou-se numa turma do 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, com 21 alunos, com idades compreendidas entre os 11 e os 13 anos, de uma escola localizada na cidade de Loulé, no ano letivo 2023/2024. As duas aulas, de 100 minutos cada, apoiaram-se no ensino exploratório da matemática, contemplando quatro fases designadas como: apresentação da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas.

A análise dos resultados obtidos revela que a maioria dos alunos possuíam, à partida, o conhecimento das designações geométricas, mas não estavam, de facto, seguros em aplicá-las aos polígonos. Ademais, verificaram-se associações incorretas dos conceitos que a interação e o debate em sala de aula permitiram colmatar. As discussões conceberam um ambiente colaborativo que facilitou a construção de novos conhecimentos e a consolidação de outros já existentes. O modo como a professora geriu as intervenções promoveu o desenvolvimento de competências de comunicação pelos alunos.

**Palavras-chave:** 2.º ciclo do ensino básico; Aprendizagem; Comunicação matemática; Geometria.

## Abstract

The present research report addresses, within the scope of Geometry, the topic of learning plane figures. Research tasks are proposed to guide the response to the following general question: How is mathematical communication developed in elementary education in the context of learning geometry?

More precisely, the aim is to characterize oral mathematical communication in three dimensions: (i) What is the structure of student-student mathematical communication? (ii) What is the structure of student-teacher mathematical communication? and (iii) What is the structure of teacher-student mathematical communication?

Considering the general question and the investigative purposes, a qualitative methodology was used, encompassing methodological procedures close to those of action research. The study followed an interpretative paradigm, where the data collection instruments were: direct observation, audio recordings and document analysis of the students' productions.

The study was conducted in a 6th grade class of the 2nd cycle of elementary education, with 21 students, aged between 11 and 13 years, from a school located in the city of Loulé, in the 2023/2024 school year. The two classes, each lasting 100 minutes, were based on the exploratory maths teaching, comprising four phases designated as: task presentation, task execution, task discussion, and systematization of mathematical learning.

The analysis of the results obtained reveals that most of the students initially possessed knowledge of geometric designations but were not actually confident in applying them to polygons. Furthermore, incorrect associations of concepts were observed, which classroom interaction and debate allowed to address. The discussions fostered a collaborative environment that facilitated the construction of new knowledge and the consolidation of existing ones. The way the teacher managed interventions promoted the development of communication skills among the students.

**Keywords:** 2nd cycle of basic education; Learning; Mathematical communication; Geometry.

## Índice

Agradecimentos .....	iv
Resumo .....	v
Abstract .....	vi
Índice .....	vii
Índice de figuras .....	viii
Índice de tabelas .....	viii
Introdução .....	1
Comunicação matemática no ensino básico .....	1
As figuras planas no ensino básico .....	3
Capítulo I – Enquadramento teórico .....	5
Comunicação matemática como interação social .....	5
Modelos de comunicação na aula de matemática .....	9
Padrões de interação na aula de matemática .....	14
Comunicação oral na aula de matemática .....	17
Capítulo II – Enquadramento metodológico .....	21
Natureza do design e questões de investigação .....	21
Participantes e contexto educativo .....	22
Ensino exploratório da matemática .....	22
Intervenção educativa na aula de matemática .....	26
Instrumentos de recolha e análise de dados .....	28
Ética do estudo .....	28
Capítulo III – Análise dos resultados .....	29
Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno .....	29
Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor .....	39
Iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno .....	45
Capítulo IV – Discussão dos resultados .....	65
Comunicação matemática oral na sala de aula .....	65
Considerações finais .....	68
Referências bibliográficas .....	70
Índice de apêndices .....	75

## Índice de figuras

Figura 1.1. – Classificação de questões (Ulleberg & Solem, 2018) .....	13
Figura 3.1. – Sombreamento da parte sobreposta dos quadrados .....	30
Figura 3.2. – Reprodução do octógono .....	31
Figura 3.3. – Representação dos quadrados no papel ponteadado .....	32
Figura 3.4. – Sobreposição hexagonal de dois triângulos .....	33
Figura 3.5. – Sobreposição hexagonal de dois triângulos .....	34
Figura 3.6. – Quadrados desenhados em proporções distintas .....	35
Figura 3.7. – Distinção entre polígonos regulares e irregulares .....	38
Figura 3.8. – Reprodução do pentágono .....	39
Figura 3.9. – Quadrados transpostos para o papel ponteadado .....	40
Figura 3.10. – Representação dos quadrados no papel ponteadado .....	41
Figura 3.11. – Sombreamento da parte sobreposta dos quadrados .....	42
Figura 3.12. – Representação do pentágono .....	45
Figura 3.13. – Representação do pentágono .....	48
Figura 3.14. – Representação do quadrado encontrado .....	54
Figura 3.15. – Triângulo sombreado a representar a quarta parte do triângulo de baixo	63

## Índice de tabelas

Tabela 2.1. – Organização das fases das aulas .....	27
---	----

## **Introdução**

O presente relatório de investigação foi realizado no âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, integrada no plano de estudos do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve. O estudo empírico efetuou-se numa turma do 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, no ano letivo de 2023/2024, numa escola na cidade de Loulé. O seu tema consiste na comunicação matemática no ensino básico no contexto da aprendizagem da geometria, particularmente no tópico das figuras planas.

### **Comunicação matemática no ensino básico**

O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (ME/DGE, 2017) veio definir as competências que um jovem deverá possuir aquando do término do ensino obrigatório. Pretende-se que seja um cidadão “livre, autónomo, responsável e consciente de si próprio e do mundo que o rodeia”, (...) “capaz de lidar com a mudança e com a incerteza num mundo em rápida transformação” (...) e “capaz de pensar crítica e autonomamente, criativo, com competência de trabalho colaborativo e com capacidade de comunicação” (p. 15), entre outras proficiências.

São, igualmente, neste documento, definidos os valores que deverá apresentar: responsabilidade e integridade; excelência e exigência; curiosidade, reflexão e inovação; cidadania e participação; e liberdade. Além do mais, são elucidadas as áreas de competências que deve possuir desenvolvidas: linguagens e textos; informação e comunicação; raciocínio e resolução de problemas; pensamento crítico e pensamento criativo; relacionamento interpessoal; desenvolvimento pessoal e autonomia; bem-estar, saúde e ambiente; sensibilidade estética e artística; saber científico, técnico e tecnológico; e consciência e domínio do corpo.

As Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática (ME/DGE, 2021) são um documento de orientação curricular que procura fomentar o desenvolvimento das competências definidas pelo PASEO. Designadamente, veio determinar os conteúdos de aprendizagem fundamentais de forma organizada e articulada verticalmente, especificando as ações necessárias para a aprendizagem e o conhecimento associado a uma área curricular e a um ano de escolaridade. De entre os temas matemáticos, são consideradas as capacidades

matemáticas, nomeadamente a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, as conexões matemáticas, as representações matemáticas e o pensamento computacional.

A comunicação matemática apresenta-se como instrumento basilar para o professor regular o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, permitindo-lhe promover uma participação ativa e, possivelmente, controlar comportamentos disruptivos. A comunicação matemática, explícita ou subtil, possibilita a manutenção do controlo em sala de aula e o diagnosticar do progresso e das dificuldades dos alunos (Ponte et al., 2007).

Segundo Serrazina (2018), não é facto recente que os documentos curriculares advogam que, entre as capacidades a serem desenvolvidas, se inclui a comunicação matemática, não sendo esta compreendida somente como sendo um conteúdo de aprendizagem, mas como sendo uma orientação metodológica. O desenvolvimento desta é uma aprendizagem basilar, integrando-se não apenas como uma finalidade educacional, mas também no âmbito dos conteúdos, objetivos e práticas.

Sendo que a comunicação matemática se encontra explicitamente listada em todos os anos de escolaridade e nas capacidades matemáticas, torna-se pertinente que, num processo de planificação, se antecipem momentos em que os alunos possam expressar raciocínios e reagir aos dos seus colegas, oferecendo um ambiente propício ao desenvolvimento desta competência fundamental (Serrazina, 2018).

Ponte et al. (2007) ressaltam, neste âmbito, que “a comunicação que ocorre na sala de aula de Matemática marca de forma decisiva a natureza do processo de ensino-aprendizagem desta disciplina” (p. 2) e a qualidade desta encontra-se diretamente influenciada pelo modo como o professor a regula e a diligencia.

Por um lado, se se considera a matemática como um conjunto de verdades objetivas, entende-se a comunicação como a simples transmissão de mensagens entre indivíduos. Por outro lado, se for encarada como uma construção cultural partilhada pelos seus participantes e as aulas como processos de interação social entre o professor e os alunos, novos significados e compreensões emergem através de processos individuais e interações sociais (Ponte et al., 2007).

A aprendizagem torna-se assim um processo, não só de interação, como de reflexão, em que o professor não transmite somente conhecimento matemático, mas organiza, também, tarefas diversas e fora da rotina em prol da promoção de estratégias de resolução de problemas e do incentivo à partilha de ideias. Estas práticas de sala de aula implicam negociar conceitos e construir novos conhecimentos (Ponte et al., 2007).

### **As figuras planas no ensino básico**

No que concerne ao tópico de figuras planas, inserido no tema de geometria e medida, é trabalhado ao longo de toda a escolaridade. Designadamente, no que diz respeito ao 1.º ciclo do ensino básico, logo no 1.º ano de escolaridade, trabalham-se os conteúdos de polígonos elementares, o círculo e outras figuras; no 2.º ano introduzem-se os polígonos; no 3.º ano abordam-se as figuras planas; e no 4.º ano lecionam-se os quadriláteros, as retas paralelas e retas perpendiculares e o círculo e a circunferência.

No 2.º ciclo do ensino básico, no 5.º ano de escolaridade, trabalham-se as retas, semirretas e segmentos de reta, a posição relativa de retas, a amplitude de um ângulo, a construção de ângulos e triângulos, a classificação e os critérios de congruência de triângulos, a equivalência de figuras planas e a área do paralelogramo e do triângulo. Em seguida, no 6.º ano, abordam-se os polígonos côncavos e convexos, os polígonos regulares e irregulares, o perímetro e área do círculo, os ângulos suplementares e complementares e a soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo.

No 3.º ciclo do ensino básico, mais precisamente, no 7.º ano de escolaridade, introduzem-se os ângulos internos e externos de um polígono convexo, a soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, os ângulos alternos internos e ângulos verticalmente opostos, as propriedades das diagonais de um quadrilátero, a classificação hierárquica dos quadriláteros e as áreas do trapézio, losango e papagaio. Posteriormente, no 8.º ano, leciona-se o teorema de Pitágoras, juntamente à área de polígonos regulares. No ano seguinte, no 9.º ano, alarga-se o estudo deste tópico.

Em termos de estruturação, o documento inclui esta introdução, quatro capítulos, considerações finais e referências bibliográficas, com respetivos apêndices. O primeiro capítulo traduz o enquadramento teórico, tendo como foco principal diversas perspetivas sobre a comunicação matemática em sala de aula; o segundo capítulo descreve os

procedimentos metodológicos e a intervenção educativa em sala de aula; o terceiro capítulo apresenta os resultados; o quarto capítulo sintetiza as principais ideias decorrentes da investigação devidamente contextualizadas com a fundamentação teórica; as considerações finais realçam as ilações referentes à pesquisa e abordam as dificuldades e perspectivas futuras no âmbito desta investigação.

## Capítulo I – Enquadramento teórico

Neste capítulo apresenta-se o enquadramento teórico da investigação com base numa revisão da literatura, tendo em consideração o propósito da investigação, sobre a comunicação matemática entre os alunos e entre estes e o professor.

### Comunicação matemática como interação social

A matemática estabelece um universo particular: não só proporciona uma forma de ver o mundo, como também convida a pensar sobre ele de forma específica. Esse universo matemático é construído através da comunicação e do estabelecimento de convenções e entendimentos partilhados em diferentes contextos. O tipo de conhecimento matemático que os alunos adquirem depende das características das situações de comunicação nas quais estão imersos (Godino & Llinares, 2000).

Tal como declaram Guerreiro e Martins (2018), “a comunicação na sala de aula é uma componente presente no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, pela sua natureza intrínseca de interação entre os alunos e entre estes e o professor” (p. 49). Esta ocorre por meio de várias formas como palavras, gestos, expressões faciais e contactos visuais, desempenhando um papel fundamental na compreensão mútua. Não obstante, torna-se relevante interrogar se a sua contribuição é enfatizada na construção e avaliação do conhecimento partilhado socialmente (Araujo & Borralho, 2018).

Alrø e Skovsmose (2006) salientam que “normalmente a comunicação em sala de aula é caracterizada por uma relação desigual entre professor e alunos” (p. 27), reproduzindo o padrão de comunicação *sanduíche*: qualquer coisa dita pelo aluno é complementada por algo que o professor diz. Efetivamente, alguns alunos têm uma habilidade notável de antecipar o que o professor está a pensar e uma maneira refinada de compreender as suas ideias. No entanto, de acordo com os autores, isso não garante, necessariamente, que tenham aprendido algo significativamente.

Todavia, não se deve subestimar a relevância das interações entre os alunos. Tipicamente, interações menos formais são cruciais para estimular a descoberta, a crítica e a construção de sinopses pessoais dos significados. Este processo comunicativo pode ser guiado por diferentes perspetivas teóricas que impactam a relação entre o professor e os alunos, bem como no modo como se ensina e se aprende (Martinho & Ponte, 2005).

A presente investigação foca-se, precisamente, na perspetiva comunicativa de interação social, em que “a sociedade é concebida como um processo de interação tecido pela comunicação, a qual tem a função de criar e manter consensos e entendimentos entre os indivíduos, sendo vista como um processo de partilha de significados” (Guerreiro et al., 2015, p. 282).

Menezes et al. (2014) adiantam que a comunicação como interação social “tem a função de criar e manter o consenso e o entendimento entre os indivíduos, através da interpretação do outro, numa ação de complementaridade e de reconhecimento mútuo” (p. 137). Ainda de acordo com estes autores,

os estudos em educação matemática têm focado as interações entre o professor e os alunos na sala de aula, o conhecimento matemático socialmente construído e a capacidade de alunos e professores a entenderem, refletirem e negociarem significados e estabelecerem conexões matemáticas (p. 139).

“Promover discussões levando os alunos a construir conhecimento matemático significa ser capaz de entrelaçar muitos fios de pensamento que cada um dos participantes vai tecendo” (Guerreiro et al., 2015, p. 291). Neste sentido, torna-se crucial que o professor não só tenha conhecimentos sólidos, mas que possua, também, capacidade de entender como os alunos aprendem e como facilitar esse processo. A interação social assume um papel primordial na prática pedagógica.

O reconhecimento, pelo professor, das ideias matemáticas individuais e únicas dos alunos, mesmo que não sejam perfeitas, promove um questionamento significativo em sala de aula. O questionamento reflete-se nos padrões de interação que se baseiam em normas sociais e sociomatemáticas, assim como em processos de negociação de significados, os quais emergem de conexões entre as ideias matemáticas discutidas e os conhecimentos dos alunos (Guerreiro, 2014).

Num estudo realizado por Guerreiro e Martins (2018) existiu uma estreita relação entre a avaliação e a comunicação, destacando a discussão, o diálogo, o questionamento, os registos escritos, a interação e a partilha de ideias. Em evidência, ficou, também, que as práticas comunicativas que se estabelecem são fortemente influenciadas pelo discurso do

professor, alicerçado nas ideias e conteúdos considerados relevantes, ressaltando um menosprezo do raciocínio matemático e uma subvalorização do conhecimento adquirido.

A interação social é dependente de tarefas desafiadoras, materiais com capacidade para representar conceitos matemáticos e para impulsionar o pensamento, assim como da utilização da linguagem quer natural, quer matemática. São diversas as formas de comunicação por parte do professor durante uma aula, destacando-se: explicar, questionar, ouvir e responder (Menezes et al., 2014).

À medida que os alunos adquirem competências de comunicação e conhecimento matemático, é natural que desenvolvam a sua linguagem matemática. Ao trocarem experiências em grupo, comunicarem as suas descobertas e dúvidas, ouvirem, lerem e analisarem as ideias dos outros, internalizam os conceitos e os significados, relacionando-as com as suas próprias ideias (Cândido, 2001).

Como tal, “o nível ou o grau de compreensão de um conceito ou ideia está intimamente relacionada à comunicação eficiente desse conceito ou ideia. A compreensão é acentuada pela comunicação, do mesmo modo que a comunicação é realçada pela compreensão” (Cândido, 2001, p. 16).

Na interface entre a linguagem corrente e a linguagem matemática, assim como entre diferentes orientações presentes numa aula de matemática, é onde o professor intervém para lidar com conflitos na utilização das linguagens, na comunicação e na construção de conceitos matemáticos. Além das ambiguidades nas formas de representação e comunicação, é relevante considerar as particularidades específicas que dependem da noção matemática envolvida. Posto isto, o professor desempenha um papel crucial ao ajudar os alunos a ultrapassar essas complexidades, facilitando a compreensão e a integração entre linguagens e conceitos matemáticos (Santos, 2005).

De acordo com Santos (2005) “a comunicação pode ser entendida, com diferentes autores que se têm ocupado dela, como todas as formas de discursos, linguagens utilizadas por professores e alunos para representar, informar, falar, argumentar, negociar significados” (p. 117). A negociação de significados é vista como o “modo como alunos e professores expõem uns aos outros a maneira de ver/entender conceitos e processos matemáticos procurando aproximar-se do que o currículo e a escola reconhecem como válido” (p. 117). A negociação dos conceitos matemáticos decorre do confronto do “significado social e

matemático de uma mesma palavra, frase, expressão ou símbolo ou entre a expressão linguística de um conceito e a sua representação matemática” (Guerreiro, 2011, p. 74) e a negociação de processos matemáticos resulta do confronto entre processos matemáticos e sociais.

No decorrer da interação social na sala de aula encontra-se intrínseca a negociação de significados, sendo esta a construção interativa da intersubjetividade. Os objetivos discursivos em sala de aula possuem múltiplos significados, sendo comum que o professor procure construir significados diferentes daqueles que inicialmente foram concebidos pelos alunos. Assim, os participantes necessitam de negociar significados para alcançar uma compreensão partilhada, isto é, uma compreensão que é aceite por todos os membros da comunidade de aprendizagem (Godino e Llinares, 2000).

O fato de que uma ideia matemática pode admitir diferentes formas de expressão e uma expressão pode representar diferentes ideias e contextos matemáticos implica desafios interessantes a serem enfrentados pelo professor, pois se trata de uma compreensão que nos obriga a sair da cómoda posição de atribuir a cada símbolo ou expressão matemática um significado único e, reciprocamente, a cada ideia uma única forma de representação (Santos, 2005, p. 123).

Nesta visão, o significado matemático não é considerado existente independentemente dos indivíduos e das suas interações, é sim, visto como algo gerado no curso da interação social. Ainda que as compreensões individuais dos professores e dos alunos contribuam para a geração dos significados matemáticos característicos de uma determinada comunidade de aprendizagem, talvez não seja possível atribuir a autoria de um significado a um indivíduo específico. Os significados são trabalhados através de negociações nas quais o grupo chega a um consenso sobre certas convenções na interpretação de determinadas situações (Godino & Llinares, 2000).

No processo de negociação significados, os alunos empregam habilidades matemáticas e linguísticas derivadas da construção de frases e da necessidade de apresentar argumentos claros aos colegas. No confronto dos argumentos, têm a oportunidade de participar na negociação da resolução da tarefa, abandonando as suas posições iniciais para entender

os argumentos dos colegas e, em simultâneo, explicar os seus pontos de vista (Alrø & Skovsmose, 2006).

Deste modo, o diálogo baseia-se no princípio de igualdade, sendo necessário distinguir este conceito do conceito de uniformidade. Promover a igualdade não implica negar as diferenças, pelo contrário, significa saber lidar com essa diversidade enquanto se promove a igualdade a partir de um diálogo construtivo que se estabelece entre o professor e os alunos (Alrø & Skovsmose, 2006).

### **Modelos de comunicação na aula de matemática**

Brendefur e Frykholm (2000) propõem uma classificação das práticas de comunicação matemática dos professores em quatro modelos: unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva. Segundo os mesmos autores, é possível que diferentes modelos ocorram ao longo de uma mesma aula, com um mesmo professor e alunos.

Na comunicação unidirecional, o professor lidera a apresentação dos conceitos e os métodos de resolução de exercícios, pelo que os alunos têm um papel passivo e o seu objetivo passa por reproduzir o que foi transmitido. O papel docente é o de controlar as discussões, colocando perguntas fechadas e limitando as oportunidades de comunicação das ideias e estratégias matemáticas dos alunos (Guerreiro, 2013).

Na comunicação contributiva, os alunos participam mais ativamente no discurso, contribuindo com simples intervenções que demonstram os conhecimentos matemáticos adquiridos. O professor desempenha o papel de avaliador e validador constante das contribuições discentes. Neste contexto “o diálogo entre os alunos e entre estes e o professor tem um sentido de partilha de conhecimentos das estratégias de resolução sem um significativo aprofundamento do conhecimento matemático” (Guerreiro, 2013, p. 33).

Na comunicação reflexiva, os alunos e o professor consideram o discurso um tema de reflexão e partilha de conhecimento matemático. Os alunos transmitem as suas estratégias e ideias com os outros e justificam ou refutam as conjeturas apresentadas pelos colegas, enquanto o professor incentiva a participação dos alunos no discurso (Guerreiro, 2013).

Na comunicação instrutiva, é dada ênfase à dimensão metacognitiva e à integração das ideias dos alunos. O professor valoriza e visa incorporar no seu discurso as dificuldades

verbalizadas, promovendo processos de comunicação que ocorrem durante a reflexão sobre a sua ação. Além disto, encoraja-os a refletir, tendo por base o propósito instrutivo de motivá-los a partilhar as suas estratégias e ideias, ainda que possam estar confusas ou, até mesmo, incorretas (Guerreiro, 2013).

Ponte et al. (2007) validam, por sua vez, diversos níveis de comunicação: i) instrumento de regulação do professor: o discurso docente funciona como instrumento de regulação, constituindo-se como prática social na qual se utiliza a linguagem em prol de comunicar com objetivos cognitivos e sociais; ii) meio de promover a capacidade de comunicação dos alunos: quando se comunica matematicamente, partilham-se significados, lembram-se conceitos anteriores e constroem-se novos, aprofundando conhecimentos; e iii) meio de promover os significados matemáticos: os significados surgem das conexões entre as ideias discutidas em contexto de sala de aula e os conhecimentos prévios discentes, sendo papel do professor empregar estratégias, entre as quais, o incentivo à identificação de padrões e generalizações nos resultados obtidos.

Drageset (2014) sugere três diferentes categorias ordenadas que descrevem e analisam as ações do professor em sala de aula: redirecionamento, progresso e focalização. Na categoria de redirecionamento distinguem-se subcategorias como deixar de lado, assessoria a uma estratégia e correção de uma questão. Na categoria de progresso encontram-se as ações de demonstração e de simplificação, detalhes de progresso fechados (em que o professor avança o processo de solução) e iniciativas de progresso abertas (em que faz questões para as quais existem variadas respostas). Na categoria de focalização, em que o professor solicita a contribuição dos alunos no esclarecimento de detalhes importantes, na aplicação do conhecimento para resolver uma tarefa semelhante e na avaliação da contribuição do outro, verificam-se subcategorias como: pedidos de contribuição, esclarecimento de detalhes, justificação, aplicação de problemas semelhantes, solicitação da avaliação de outros alunos, efetuação de anotações e de avisos e, ainda, recapitulação.

Em prol de entender e contribuir para o aprimoramento da estrutura proposta, Gustafsson (2024) descreveu as discussões de sala de aula conduzidas por professores num estudo de intervenção. Através dos resultados obtidos incrementou o quadro analítico do referido autor com duas ações docentes na categoria de progresso: explicação (em que o professor suporta o pensamento dos alunos) e encorajamento (em que fortalece as ideias dos alunos

modo a incentivá-los a continuar a comunicar). Para além disto, adicionou, três ações docentes na categoria de focalização: acrescentar, conectar e desafiar as ideias dos alunos.

O processo de ensino e de aprendizagem pode, efetivamente, ser avaliado com uma alta adequação interacional, na medida em que as intervenções e a gestão das interações pelo professor permitem identificar, estimular e/ou alertar sobre questões como: (i) reconhecer os significados pessoais parciais que os alunos expressam nas intervenções e/ou resoluções, (ii) estimular as relações entre os conceitos matemáticos que demonstram, (iii) alertar sobre o surgimento de possíveis conflitos epistêmicos e/ou cognitivos, (iv) dissolver dúvidas ou conflitos, (v) reproduzir espaços de discussão dialógica e colaborativa, (vi) promover o desenvolvimento de habilidades argumentativas e comunicativas e (vii) fomentar a autonomia e o progresso contínuo na aprendizagem (Verón & Giacomone, 2024).

Surge assim a responsabilidade docente de garantir um ambiente onde haja respeito mútuo e confiança, permitindo que os alunos se sintam à vontade para argumentar e discutir as ideias uns dos outros. O professor desempenha um papel primordial na orientação e estruturação das discussões em sala de aula, principalmente, a partir das questões que coloca (Martinho & Ponte, 2005).

É crucial que o professor e os alunos expressem e partilhem os seus pensamentos, esclarecendo ideias através de questões e analogias num diálogo equitativo entre ambas as partes. Além disso, é parte do papel docente empregar estratégias deliberadas e específicas para facilitar a negociação de significados, tais como incentivar os alunos a procurar esquemas e generalizações nos resultados (Ponte et al., 2007).

Alrø e Skovsmose (2006) definem ações presentes tanto na interação entre os alunos, quanto na interação entre os alunos e o professor, sendo estas: estabelecer contacto (sintonizar os alunos e o professor para iniciar a cooperação), perceber (descobrir algo do qual nada se tem conhecimento ou consciência anteriormente), reconhecer (analisar perspectivas para que possam ser reconhecidas), posicionar-se (instituir uma plataforma de conhecimento partilhado pressupondo uma sensibilidade para reagir a outras ideias), pensar alto (expressar pensamentos e sentimentos), reformular (reiterar o que foi dito com palavras distintas ou num tom de voz desigual), desafiar (procurar conduzir para outra

direção ou questionar conhecimentos instituídos) e avaliar (não só por terceiros, como pelo próprio indivíduo).

Carvalho (2005) menciona as quatro tipologias de co-elaboração que ocorrem quando indivíduos trabalham na procura de resolver uma tarefa, considerados por Gilly, Fraisse e Roux (1998), sendo estas, designadamente: co-elaboração por consentimento, co-elaboração por co-construção, co-elaboração por confronto com desacordo e co-elaboração por confrontos contraditórios.

Na co-elaboração por consentimento a concordância que concerne à resposta do colega é verdadeira, consistindo num acordo cognitivo em que aceitar os argumentos opera como um reforço positivo que controla a resposta sugerida por um aceite pelos dois. Na co-elaboração por co-construção não ocorre uma manifestação de desacordos entre os alunos que resolvem a tarefa, não obstante, esta condição não exclui a possibilidade de intervenções de um aluno perturbarem o outro ou desencadarem uma ideia impossível na ausência dessa dinâmica.

Na co-elaboração por confronto com desacordo um aluno propõe uma ideia que não é aceite pelo outro que expressa o seu desacordo sem, no entanto, argumentar ou propor algo diferente, pelo que pode vir a optar por trabalhar de forma individual ou pode tentar justificar a sua perspetiva repetindo a sua ideia inicial ou expressando-a de outro modo. Na co-elaboração por confrontos contraditórios averigua-se uma oposição de respostas, que pode resultar num impasse, em que os alunos mantêm as suas posições iniciais e entram numa fase de trabalho individual para resolver as suas ideias separadamente; ou na busca por um acordo, em que tentam chegar a um consenso baseado nas ideias iniciais de ambos, o que pode envolver a experimentação de cada uma das hipóteses de resolução ou a colaboração para desenvolver uma nova ideia.

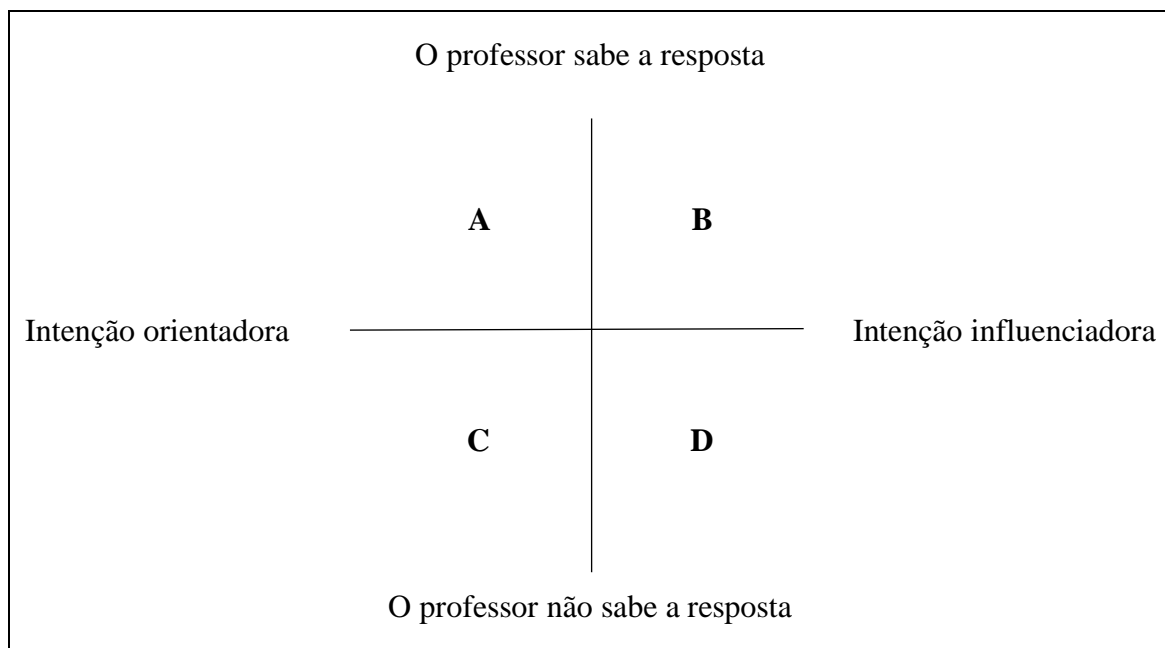
As questões desempenham um papel crucial nas interações entre alunos e os professores em sala de aula, sendo fundamentais para uma aprendizagem ativa. Facilitam o diálogo, criando um ambiente de colaboração em que os alunos se sentem mais motivados e valorizados. Além disso fornecem ao professor *feedback* sobre o nível de compreensão dos conhecimentos dos alunos, permitindo-lhe ajustar as suas estratégias pedagógicas.

Mason (2000) reconhece categorias de questões: de verificação, de focalização e de inquirição. No que alude às questões de verificação, o autor destaca que testam o

conhecimento dos alunos, resultando em respostas curtas e imediatas que confirmam o entendimento dos conteúdos e auxiliam na regulação do comportamento em sala de aula. Relativamente às questões de focalização, refere que direcionam a atenção dos alunos para aspetos concretos que o professor pretende enfatizar, podendo alterar o foco ou o tema de interação. Finalmente, as questões de inquirição são vistas como propiciadoras da busca de conhecimento pelos alunos, assim como da exploração de conexões matemáticas. Na realidade, o professor visa compreender o pensamento dos alunos e estimular para novas descobertas.

Por sua vez, Ulleberg e Solem (2018) desenvolveram um modelo em que resultou no cruzamento de quatro áreas que representam diferentes tipos de questões, tomando como referência dois eixos: um eixo vertical, existindo uma variação entre o professor sabe a resposta e o professor não sabe a resposta, e um eixo horizontal, existindo uma variação entre intenção orientadora e intenção influenciadora (ver Figura 1.1).

Figura 1.1. – Classificação de questões (Ulleberg & Solem, 2018).



Na área A o professor já conhece as respostas às questões que coloca, fazendo-o com a intenção de verificar se os alunos compreenderam e/ou memorizaram a resposta correta. Estas possuem, geralmente, baixas expectativas cognitivas, residindo o foco numa compreensão básica. Exemplos destas questões são: “Qual é a resposta para a tarefa?”, “Qual é a fórmula?” e “Para que utilizamos isto?” (Ulleberg & Solem, 2018, p. 7).

Na área B, as questões visam estimular e desafiar o raciocínio dos alunos em direções concretas, conduzindo-os a descobrir aspetos fundamentais no âmbito do tema a trabalhar. O professor busca que façam conexões, identifiquem padrões, aprendam a argumentar e a justificar as suas respostas. Exemplos de questões nesta área são: “Essa regra aplica-se a todos os números da grelha? Porquê? Porque não?”; “Porque é que números pares e ímpares produzem resultados tão diferentes?” e “Que razões consegues dar para isto?” (Ulleberg & Solem, 2018, p. 7).

Na área C, o professor possui uma postura de desconhecimento, visando compreender o pensamento e as estratégias dos alunos. Não possui a resposta correta, mas está interessado na forma como os alunos conectam as suas ideias e as argumentam. Exemplos de questões incluem: “Como resolveste este problema?”, “Podes explicar como encontraste a resposta?”, “Porque fizeste dessa forma?”, “Alguém fez diferente?” e “Como justificas que isso está certo?” (Ulleberg & Solem, 2018, p. 8).

Na área D, o professor desafia os alunos a pensar amplamente e encoraja-os a explorar uma tarefa sem direcionamento específico. Incentiva à exploração autónoma, pelo que as reflexões dos alunos podem conduzir para “troços” inesperados. Incluem-se os seguintes exemplos: “E se escolheres estratégias diferentes?”, “Que outras soluções/estratégias podes encontrar?” e “E se escolheres uma das ideias do teu grupo e explorá-las ainda mais?” (Ulleberg & Solem, 2018, p. 9).

As autoras destacam, ainda, que as questões variam dependendo do contexto de sala de aula, da turma, dos conhecimentos dos alunos, da relação entre o professor e os alunos individualmente e, ainda, das diferenças entre os elementos que compõem uma turma.

### **Padrões de interação na aula de matemática**

Sob a perspetiva de Guerreiro (2014),

os significados matemáticos não existem só por si, mas são gerados durante o processo de comunicação e interação social, caracterizado pelos padrões de interação existentes entre os alunos e entre estes e o professor, justificados no questionamento e nas rotinas de ação, caracterizadas por normas sociais e sociomatemáticas na sala de aula (p. 238).

Os padrões sucedem-se em casos em que os alunos se deparam com uma dificuldade na resolução de uma tarefa ou na explicação das estratégias utilizadas; e o professor, como resposta, os auxilia na resolução ou na própria exposição do raciocínio subjacente, designando-se por: funil, focalização, extração e discussão (Menezes, 2004).

Os padrões de funil e de focalização manifestam-se pela formulação de uma série de questões direcionadas. No caso do funil, o propósito passa por orientar os processos de tomada de decisão dos alunos, direcionando-os para uma solução pré-determinada. Em extensão, Godino e Llinares (2000) acrescentam que se divide em quatro etapas: na primeira, o professor propõe um problema desafiante; na segunda, os alunos não o conseguem resolver; na terceira, o professor sugere questões mais simples, relacionadas com o problema original, cuja solução direciona para a resolução do mesmo; não obstante, na quarta, os alunos não são desafiados intelectualmente de forma significativa para resolver as questões mais simples, dado que estas não requerem uma atividade mental mais profunda.

No caso da focalização, existe um incentivo e uma integração das diferentes perspetivas e contribuições dos alunos, devidamente validadas pelo professor. Esta desenvolve-se ao longo de cinco etapas: na primeira, o professor apresenta um problema com um nível de dificuldade apropriado; na segunda, ao invés de resolver o problema diretamente, formula uma série de questões com o objetivo de direcionar a atenção dos alunos para um aspeto concreto do problema, que apesar de ser importante, não é totalmente compreendido por eles; na terceira, o professor concede a oportunidade aos alunos de o resolver, enquanto cria condições para que reflitam sobre o seu raciocínio e expliquem as suas ideias; na quarta, ao longo deste processo, oferece oportunidades para que os colegas percebam o aspeto específico do problema que está a ser trabalhado; posteriormente, na quinta, o foco na exploração de um tópico específico permite uma compreensão mais profunda e uma aprendizagem mais significativa (Godino & Llinares, 2000).

Os padrões de extração e discussão valorizam a participação e interação dos alunos que contribuem com as suas experiências e perspetivas próprias. Concretamente no padrão de extração, os conhecimentos constroem-se a partir da troca de ideias entre os alunos e o professor, que faz a sua avaliação. Distinguem-se, neste, três fases: na primeira, o professor apresenta uma tarefa ambígua e os alunos oferecem respostas e soluções que este avalia antecipadamente. Nesta fase, existe um incentivo à análise e descobertas

diversas e espontâneas de acordo com as suas competências; na segunda, o professor levanta breves questões e recolhe conhecimentos. Esta fase reflete pequenos passos no raciocínio; na terceira e última fase, o professor e os alunos refletem e avaliam os resultados obtidos (Godino & Llinares, 2000).

No caso do padrão de discussão, efetua-se um debate sobre os conhecimentos construídos e acerca do próprio conhecimento matemático. Neste distinguem-se seis fases: na primeira, os alunos trabalham em pequenos grupos para resolver o problema proposto; na segunda, o professor solicita que um aluno apresente a solução encontrada pelo seu grupo; na terceira, este aluno explica a solução para o problema; na quarta, o professor contribui através de questões, observações, reformulações ou julgamentos adicionais, visando alcançar uma explicação ou solução conjunta que seja válida; na quinta, o professor questiona os alunos sobre outras formas de resolver o mesmo problema; e, por fim, na sexta, o ciclo recomeça dando continuidade ao processo de discussão e resolução de problemas (Godino & Llinares, 2000).

De facto, os padrões de interação em sala de aula são fundamentais para estabelecer uma comunicação eficaz entre o professor e os alunos. Estes incluem não apenas a forma como os professores fazem questões e encorajam a participação dos alunos, mas também como os próprios alunos respondem e interagem com o professor. Alrø e Skovsmose (2006) propõem dois padrões nesta tipologia designados *adivinhandando o que o professor tem em mente* e *os alunos assumem o comando*.

No padrão *adivinhandando o que o professor tem em mente* os alunos demonstram disposição em explorar o assunto, mostrando um interesse genuíno motivado pelo conteúdo. Duas formas de comunicação coabitam neste padrão: na primeira, o professor já organizou o tema e possui um determinado parecer do que pretende fazer; enquanto na segunda, os alunos apenas querem clarificar do que se trata a aula. Assim, a comunicação direta do professor confronta-se com uma comunicação inquisitiva e circular dos alunos (Alrø & Skovsmose, 2006).

No padrão *os alunos assumem o comando* estes adotam o papel de professor autoritário, sendo que não apenas argumentam e explicam o seu ponto de vista, mas também dão ordens. Esse comportamento de assunção do controlo pode ser interpretado como uma reação à falta de liderança docente, indicando que quando o professor não toma decisões,

os alunos sentem a necessidade de fazê-lo. A existência desse padrão pode, assim, ser vista como um exemplo de uma dinâmica de grupo que entra em vigor quando uma autoridade oficial está ausente (Alrø & Skovsmose, 2006).

Os dois padrões de comunicação dos alunos supramencionados são interpretados como tentativas de se acercarem da intenção da tarefa, o que mostra que alguma aprendizagem pode ser entendida como ação. De facto, “para que uma atividade seja classificada com uma ação, é preciso que haja certa intencionalidade por trás dela. Um segundo requisito para que uma pessoa possa realizar uma ação é que a pessoa não esteja numa situação sem alternativas” (Alrø & Skovsmose, 2006, p. 47).

Assim, “a aprendizagem matemática supõe a construção progressiva de um quadro de significados através do qual o aluno realiza uma apropriação pessoal do conhecimento matemático estabelecido dinamicamente na tensão entre novos conteúdos e conhecimentos anteriores” (Martinho & Ponte, 2005, p. 2).

A construção de significados matemáticos ocorre em etapas, com os alunos expressando as suas ideias oralmente ou por escrito, sob a orientação do professor. Para isso, é essencial que os alunos se sintam à vontade para participar ativamente e possuam competências para autorregular a sua intervenção (Ponte et al., 2007).

### **Comunicação oral na aula de matemática**

A comunicação matemática assume três vertentes da linguagem: escrita, oral e pictórica. Cada uma possui o seu conjunto de símbolos codificados, que se relacionam de acordo com certas regras comuns a uma determinada comunidade que a emprega (Raúl, Dosil & Cápiro, 2017).

Na matemática, enquanto ciência precisa e fundamentada em lógica, é necessária uma comunicação eficaz. Efetivamente, é crucial a sua apropriação para o desenvolvimento de um entendimento significativo dos conceitos, teoremas, regras, relações e procedimentos, o que inclui o desenvolvimento das suas competências de expressão com clareza e precisão (Raúl, Dosil & Cápiro, 2017).

De acordo com Ponte et al. (2007),

é ao escrever e falar sobre a Matemática, usando a linguagem não só para expressar os seus pensamentos, mas também para partilhar significados, para compreender os argumentos dos outros alunos e do professor, que os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática (pp. 7-8).

A comunicação oral é uma ferramenta acessível que todos os alunos podem utilizar. É simples, rápida e direta, permitindo revisões quase de forma instantânea e reinícios aquando do percebimento de uma inadequação. Deste modo favorece a perceção das diferenças, a convivência entre os alunos e o exercício de se ouvirem uns aos outros em contexto de trabalho colaborativo (Cândido, 2001). A expressão oral permite que os alunos reflitam sobre os processos pelos quais relacionam os conhecimentos novos e antigos, construindo significados e redes conceptuais associadas a cada área do conhecimento (Ruiz & Pachano, 2002).

Na investigação, conduzida pelos autores Budiono et al. (2020), sobre as competências dos alunos para comunicar matemática oralmente foram considerados os seguintes critérios: organização de pensamentos sobre ideias matemáticas através da comunicação oral; comunicação de ideias matemáticas de forma clara e coerente com outros (professores e alunos); análise e avaliação de pensamentos sobre as estratégias e/ou ideias matemáticas entre os alunos; e utilização de linguagem matemática apropriada na expressão de ideias matemáticas.

Na investigação conduzida por Raúl, Dosil e Cápiro (2017) considerou-se, entre diversos outros, os seguintes indicadores: domínio de conceitos matemáticos e relações a serem comunicadas; fundamentos das ideias; lógica na exposição de ideias; precisão no uso do vocabulário; precisão no uso da terminologia e simbologia; manifestação de avaliações críticas durante a apresentação de ideias; adequação das respostas ao conteúdo das questões dos interlocutores; e expressão não-verbal em apoio ao que é expresso.

De facto, a linguagem oral, complementada pela linguagem corporal, é essencial para o progresso do ensino e da aprendizagem, oferecendo um suporte crucial para o pensamento. Ao utilizá-la, juntamente à linguagem escrita, dá-se oportunidade aos alunos de examinar e aprimorar a sua compreensão, o que propicia o estabelecimento de conexões e o esclarecimento de conceitos matemáticos (Ponte et al., 2007).

No contexto educativo, a relação entre a linguagem e o pensamento é intrinsecamente complexa, abarcando aspectos fundamentais do ensino e da aprendizagem. O estudo do discurso engloba a análise do sistema de comunicação, uma vez que é essencial para a realização das principais finalidades educativas (Ruiz & Pachano, 2002).

Knuth e Peressini (2001) enfatizam a importância de uma comunicação mais dialógica em sala de aula. Através desta, os alunos desenvolvem uma compreensão mais profunda, utilizando não só as suas ideias, como as dos colegas e dos professores como ferramentas de pensamento. Isto encontra-se alinhado com a essência do ensino que procura promover uma melhor compreensão matemática através de abordagens pedagógicas motivadoras.

Nas discussões que ocorrem em sala de aula, o discurso passa por um processo de afunilamento, seguido de um processo de ampliação. O professor começa por solicitar e discutir muitas ideias, para, depois, focar a atenção em algumas concretas, desencadeando uma nova solicitação e discussão de mais contribuições. Conduzir todo o processo comunicativo é uma prática desafiadora para os professores (Sherin, 2002).

Na condução de uma discussão, o professor desempenha um conjunto de ações que se classificam em três categorias: elicitar, apoiar e ampliar (Cengiz, Kline & Grant, 2011). As ações de elicitação envolvem convidar os alunos a partilhar as suas estratégias, solicitando-lhes que explicitem como chegaram até à resolução. As ações de apoio permitem-lhe fornecer o suporte necessário aos alunos, podendo incluir o recordar do objetivo, a sugestão de interpretações dos raciocínios, a repetição de argumentos para enfatizar pontos mais importantes, o reforço do pensamento dos alunos e a introdução de diferentes contextos para valorizar a compreensão dos mesmos. Por fim, as ações de ampliação conduzem os alunos a avaliar argumentos, explicar raciocínios, comparar estratégias, aplicar as mesmas a novas situações-problema e apresentar novos argumentos para enriquecer a discussão.

Menezes et al. (2015) ressaltam, por sua vez, ações do professor destinadas a garantir o sucesso das discussões em sala de aula, como são exemplos: a promoção da qualidade matemática das apresentações e a regulação das interações que se estabelecem, o que inclui solicitar aos alunos explicações claras das suas resoluções e justificações para os resultados obtidos, e as formas de representação empregues, para além de discutir também a sua eficácia. Os autores destacam, ainda, a imprescindibilidade de promover o respeito

e o interesse pelos diferentes trabalhos apresentados, gerindo as relações entre os alunos. Com base nos objetivos, o professor deve facilitar a audição e a discussão reservando o final para os grupos com maiores progressos na generalização e/ou resolução da tarefa.

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) esclarecem a natureza das ações do professor durante a condução de uma discussão: convidar, apoiar/guiar, informar/sugerir e desafiar. Com as ações de convidar, introduz os alunos na discussão, convidando-os a participar ativamente na interação e a partilhar as suas estratégias. Com as ações de apoiar/guiar, promove a continuidade da sua participação, fornecendo orientação e suporte para que possam expressar suas ideias de forma mais clara e coerente. As ações de informar/sugerir, permitem-lhe apresentar informações relevantes, argumentos ou validar respostas dos alunos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio e da compreensão. Com as ações de desafiar incentiva os alunos a introduzir representações, interpretar e estabelecer conexões, raciocinar, argumentar e avaliar, estimulando o pensamento crítico.

Em epilogue, a comunicação matemática configura-se como sendo uma interação social essencial para a construção coletiva dos conhecimentos. Neste contexto, envolvem-se o professor e os alunos num processo dinâmico de validação e negociação de conceitos e processos matemáticos. Modelos de comunicação e padrões de interação e a ênfase na comunicação oral consistem, inquestionavelmente, em fatores que contribuem para um ambiente de aprendizagem mais colaborativo e eficaz.

## **Capítulo II – Enquadramento metodológico**

Neste capítulo é apresentada a metodologia de investigação. Abordam-se a natureza do design e questões de investigação, os participantes e contexto educativo, a intervenção educativa, os instrumentos de recolha e análise de dados e a ética do estudo.

### **Natureza do design e questões de investigação**

O estudo tem como objetivo compreender de que modo tarefas de investigação em geometria impulsionam o desenvolvimento da comunicação matemática com alunos do 2.º ciclo do ensino básico, caracterizando-se por uma metodologia de cariz qualitativo.

Numa investigação qualitativa existe uma estreita conexão entre o modelo teórico, as estratégias de pesquisa, os métodos de recolha e a análise de dados, a avaliação e a apresentação dos resultados. A investigação é conduzida dentro do contexto e envolve um processo de interação ativa entre o investigador e os participantes. Mais precisamente, o investigador direciona-se pela persuasão científica, que permite definir e descrever a natureza da realidade, e pela persuasão epistemológica, que possibilita determinar e dirigir a ação no sentido de a compreender (Aires, 2015).

Detetam-se, igualmente, procedimentos similares aos da investigação-ação, dado que se diligencia um maior e melhor entendimento sobre os contextos educativos em relação ao tema. Durante o estudo, a observação é de carácter participativo dado que o investigador atua como principal ferramenta de observação.

Esta metodologia encontra-se aliada a um paradigma do tipo interpretativo, valorizando a explicação holística das situações, relevando a natureza complexa e intrinsecamente humana da realidade, o papel primordial que nessa atividade desempenha e o papel de intersubjetividade derivado das interações sociais (Martinho, 2007).

O estudo tem por base a seguinte questão geral de investigação: Como se desenvolve a comunicação matemática no ensino básico no contexto da aprendizagem da geometria?

Neste contexto, pretende-se caracterizar a comunicação matemática oral em três dimensões: (i) Qual a estrutura da comunicação matemática aluno-aluno?, (ii) Qual a estrutura da comunicação matemática aluno-professor? e (iii) Qual a estrutura da comunicação matemática professor-aluno?

## **Participantes e contexto educativo**

A presente investigação decorreu no ano letivo de 2023/2024, na escola sede do Agrupamento de Escolas Engenheiro Duarte Pacheco, na cidade de Loulé, com 21 alunos, 9 do sexo masculino e 12 do sexo feminino, com idades entre os 11 e os 13 anos.

O grupo caracteriza-se como equilibrado em termos dos níveis de conhecimento: a maioria revela progressos significativos nas aprendizagens, um domínio favorável dos conhecimentos e empenho nas tarefas. Não obstante, existem três alunos sinalizados para a aplicação de medidas universais de suporte à aprendizagem quando necessário. Em termos de participação, o grupo é razoável, sendo, por vezes, necessário incitar a uma maior interação. Finalmente, relativamente ao comportamento, apresenta atitudes, por norma, adequadas, como respeito pelos colegas e pelos adultos e responsabilidade no cumprimento dos deveres.

## **Ensino exploratório da matemática**

A comunicação matemática é crucial em todas as etapas do processo de ensino, desde o planeamento até a execução das tarefas (Raúl, Dosil & Cápiro, 2017).

Serrazina (2018) defende que

a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório, onde os alunos resolvem problemas ou outras tarefas matemáticas, de modo autónomo, individualmente, em pequenos grupos ou a pares e, posteriormente, partilham no momento de discussão coletiva dos resultados (p. 13).

Propiciar a comunicação durante as aulas de matemática pode alterar o modo como os conceitos são aprendidos. Os alunos são incentivados a explicar, questionar, ouvir e responder uns aos outros, o que os pode conduzir a uma compreensão mais ampla e significativa. A comunicação desenvolvida a partir de tarefas investigativas “pode possibilitar a aprendizagem dos alunos de uma forma criativa e crítica aos conteúdos explorados nas aulas de matemática” (Machado et al., 2020, pp. 56531).

O ensino exploratório da matemática segue uma abordagem na qual a comunicação se baseia em discussões e negociações, permitindo aos alunos produzir e consolidar as suas aprendizagens. Assim sendo, a comunicação não consiste somente numa forma de expressar ideias, mas envolve também a negociação de significados no processo de construção dos conhecimentos (Guerreiro et al., 2015).

Neste modelo, o professor dedica bastante tempo a ouvir os alunos em prol de estabelecer um diálogo, o que lhe permite compreender as ideias matemáticas, assim como detetar possíveis erros e dificuldades. Visto que nem sempre os alunos se manifestam de forma espontânea, de acordo com os autores, colocar-lhes questões com diferentes propósitos é uma estratégia discursiva que pode ser utilizada para promover interações comunicativas (Menezes et al., 2014).

Menezes et al. (2015) sugerem quatro fases para estruturar uma aula no presente modelo, sendo estas: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas. Este modelo é proposto por Stein et al. (2008), na planificação das práticas letivas, através das seguintes ações: antecipar, monitorizar, seleccionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos.

Na prática de antecipação o professor considera as possíveis formas pelas quais os seus alunos poderão abordar a tarefa, as dificuldades que poderão surgir e como superá-las, para além de pensar em como orientá-los. Durante a etapa de monitorização, acompanha de perto o trabalho autónomo, observando as estratégias de resolução dos alunos, os conceitos e representações que estão a aplicar, assim como as dificuldades encontradas. Na etapa seguinte, selecciona estratégias a discutir, evitando repetições e garantindo a abordagem de ideias essenciais. Na prática de sequenciamento, organiza as intervenções dos alunos em relação às estratégias de resolução escolhidas de modo a alcançar os objetivos. Por fim, no estabelecimento de conexões, inicia a apresentação e a justificação das estratégias seleccionadas, incentivando os alunos a relacionarem os seus raciocínios e argumentarem sobre os dos colegas (Stein et al. 2008).

As tarefas propostas pelo professor desempenham um papel fundamental na construção do conhecimento pelos alunos, auxiliando-os no desenvolvimento de competências de formulação de conceitos, argumentação e reflexão sobre a matemática, individualmente

e em grupo. As ações docentes encontram-se ligadas às estratégias de ensino adotadas, aos seus objetivos e decisões pedagógicas tomadas (Araujo & Borralho, 2018).

Ponte (2014) alude para o facto do NCTM (1991/1994) evidenciar que o professor deve propor tarefas baseadas “em Matemática correta e significativa” (...), “no conhecimento das compreensões, interesses e experiências dos alunos” (...) e “no conhecimento das diversas maneiras como diferentes alunos aprendem matemática” (p. 17). Estas deverão, entre outros fatores, “estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas” (...), “exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático” (...) e “promover a comunicação acerca da matemática” (p. 17).

Na fase de introdução da tarefa, o professor apresenta a atividade a realizar aos alunos, expondo o que se espera deles e fornecendo-lhes orientações de como proceder (Menezes et al., 2015). Guerreiro et al. (2015) acrescentam que “os professores são levados a dar explicações instrucionais e também a colocar questões de verificação para despistar possíveis dificuldades dos alunos, sobretudo relacionadas com a compreensão da tarefa” (p. 288).

Na fase de realização da tarefa, os alunos envolvem-se na sua resolução, geralmente em pequenos grupos, partilhando ideias e processos de resolução (Guerreiro et al., 2015). O professor assume o papel de observador e de ouvinte atento de modo a monitorizar os progressos dos seus alunos, podendo colocar, até, questões que direcionem a discussão ou fazer comentários em prol de incentivar o diálogo e a reflexão acerca da tarefa. A aplicação destas estratégias possibilita-lhe manter o desafio cognitivo da tarefa, enquanto incentiva a autonomia dos alunos e os prepara para a discussão que se segue (Menezes et al., 2015).

Na fase de discussão da tarefa, conforme Guerreiro et al. (2015), o professor organiza as apresentações dos trabalhos realizados pelos grupos para serem apresentados e discutidos em grande grupo. É fundamental que os oiça de modo globalizante e, como resposta, formule perguntas que os conduzam a justificar as suas ideias, assim como a estabelecer conexões entre estratégias de resolução apresentadas.

Nesta fase, Menezes et al. (2015) ressaltam algumas ações do professor destinadas a garantir o sucesso, como são exemplos a promoção da qualidade matemática das apresentações dos alunos e a regulação das interações que se estabelecem entre eles, o

que inclui solicitar-lhes explicações claras das suas resoluções e justificações para os resultados obtidos e as formas de representação empregues, para além de discutir também a eficácia das mesmas.

Estes autores destacam, ainda, a imprescindibilidade de, na procura de aprendizagens significativas, promover o respeito e o interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados, gerindo as relações entre os alunos. Acrescentam, ainda, que com base nos objetivos, o professor deverá facilitar a audição e a discussão evitando repetições e reservando o final para os grupos que apresentaram maiores progressos na generalização e/ou resolução da tarefa.

Amos (2007) sugere questões promotoras do pensamento dos alunos que foram utilizadas nesta fase de discussão, entre as quais: “Como chegaste à tua resposta?”, “Consegues explicar o teu pensamento ou estratégia?”, “Porque é que essa é a resposta correta?” e “Podes partilhar outra forma de resolver este problema?”. Para além disto, recomenda, também, incitações à comunicação por parte do professor, tais como: “Prova-o”, “Explica o teu pensamento” e “Encontra a estratégia mais eficiente”.

Durante discussões em sala de aula, onde se pressupõe uma igualdade de papéis, professor e alunos partilham ideias, enfatizando a argumentação para defender ideias, desenvolver exemplos, confirmar relações matemáticas, apresentar conjeturas e estratégias para resolução de problemas e explorar abordagens diferentes (Ponte et al., 2007).

A planificação da discussão é fundamental em toda a preparação da aula de matemática. Os professores podem valer-se do planeamento para antecipar possíveis contribuições dos alunos e preparar respostas adequadas, além de decidir como estruturar as apresentações de modo a promover os objetivos da aula. Ao estender o tempo dedicado à tomada de decisões, as cinco práticas por si desenvolvidas possibilitam que os professores se sintam mais bem preparados para as discussões (Stein et al., 2008).

Como referido, estas práticas incluem: antecipar as respostas dos alunos perante tarefas cognitivamente desafiadoras; monitorizar as suas respostas durante a fase exploratória; selecionar determinados alunos para apresentar as suas respostas durante a fase de discussão e de resumo; e, por fim, auxiliar a turma a estabelecer conexões entre as respostas dos diferentes alunos e entre as respostas destes e as ideias-chave (Stein et al., 2008).

A fase de sistematização das aprendizagens matemáticas é considerada por Guerreiro et al. (2015) “essencial para a construção do conhecimento matemático” (p. 288). Nesta, o professor desempenha um papel mais ativo na comunicação, procurando formalizar conceitos matemáticos que surgiram na exploração da tarefa, principalmente na discussão em grupo e fornecendo instruções no sentido de solidificar os processos de negociação de significados. A avaliação da construção de conhecimentos pelos alunos é realizada através de questões de verificação e de uma escuta atenta e global.

Como Guerreiro et al., (2015) referem,

Neste processo de naturalização da Matemática, o professor é quem traz (é quem pode trazer) para dentro da sala de aula a essência da Matemática e dos seus processos de produção. É também alguém que traz (e pode trazer) a vida exterior para a aula de Matemática e que gere tudo isso, conjugando um conhecimento milenar com a experiência presente de cada aluno (p. 292).

Lamonato e Passos (2012) evidenciam que “as atividades exploratório-investigativas são caracterizadas pela diversidade de ideias e estratégias” (p. 3). Ainda que a atividade não progrida diretamente para uma investigação mais formal, o objetivo não é encontrar uma resposta específica esperada por quem desenvolveu a tarefa. Ao invés disso, procura-se que os participantes explorem diferentes possibilidades. De acordo com estas autoras, é fundamental estar atento à intencionalidade da ação pedagógica em dois sentidos: relativamente aos conteúdos de aprendizagem e à dinâmica que se pretende que os alunos desenvolvam.

### **Intervenção educativa na aula de matemática**

As tarefas propostas surgiram de uma adaptação ao artigo *Solutions to the What's the Overlap? Problem*, divulgado na revista *Teaching Children Mathematics* por Carla Tayeh, em 2006.

Inserem-se, nas AE de Matemática (ME/DGE, 2021), no tema de geometria e medida, mais concretamente, no tópico de figuras planas, subtópico de polígonos regulares e

irregulares, tendo como intenção pedagógica capacitar os alunos para “resolver problemas que envolvam polígonos regulares e irregulares” (p. 32).

A sua implementação está distribuída em duas aulas de 100 minutos, planejadas no modelo de ensino exploratório da matemática. Encontram-se estruturadas em quatro fases diferentes: apresentação da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas (Menezes et al., 2015), onde se inclui a avaliação para as aprendizagens. No que concerne à organização dos alunos, foram divididos em grupos de três elementos, de modo equilibrar os níveis de conhecimento.

Na primeira tarefa propôs-se o desafio de descobrir quais as formas geométricas que se conseguem obter com a sobreposição de dois quadrados de igual dimensão (ver Apêndice 1). Na segunda tarefa propôs-se descobrir quais as formas geométricas que se conseguem obter com a sobreposição de dois triângulos também de igual dimensão (ver Apêndice 2). Trabalhou-se com diferentes triângulos, sendo que, das opções existentes, selecionaram-se os equiláteros, os isósceles retângulos e os escalenos obtusângulos. Concretamente, foram distribuídos três triângulos equiláteros, dois isósceles retângulos e dois escalenos obtusângulos.

Relativamente à gestão do tempo, organizaram-se as fases das aulas conforme ilustrado na tabela 2.1.

Tabela 2.1. – Organização das fases das aulas

<b>Tarefas</b>	<b>Fases</b>	<b>Duração</b>
Sobreposição de dois quadrados	Apresentação da tarefa	10 minutos
	Realização da tarefa	40 minutos
	Discussão da tarefa	40 minutos
	Sistematização das aprendizagens matemáticas	10 minutos
Sobreposição de dois triângulos	Apresentação da tarefa	10 minutos
	Realização da tarefa	30 minutos
	Discussão da tarefa	40 minutos
	Sistematização das aprendizagens matemáticas	20 minutos

## **Instrumentos de recolha e análise de dados**

A presente investigação adotou uma metodologia qualitativa, dando ênfase aos princípios da investigação-ação. Utilizaram-se como técnicas de recolha de dados a observação direta, com registos em áudio, e a análise das produções dos participantes. Importa, ainda, mencionar que foram instalados gravadores áudio de modo a registar as interações entre os alunos e entre os mesmos e a professora investigadora, as quais foram analisadas de forma meticulosa, em formato tabelar (ver Apêndices 3 e 4) e, as mais relevantes, transcritas (ver Apêndice 5).

Na análise de dados optou-se por definir categorias, resultantes da revisão teórica, em três dimensões relacionadas com as interações comunicativas: (i) iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno, (ii) iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor e (iii) iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno. Neste contexto, “o conceito de iniciativa é referido como a ação que inicia a interação” (Carvalho & Guerreiro, 2021, p. 49).

Na dimensão comunicativa aluno-aluno, as categorias de análise são: (i) co-elaboração por consentimento, (ii) co-elaboração por co-construção, (iii) co-elaboração por confronto com desacordo e (iv) co-elaboração por confrontos contraditórios. Na dimensão comunicativa aluno-professor, as categorias de análise são: (i) informação-informação, o aluno solicita informação complementar ao professor e este fornece diretamente a informação desejada; (ii) informação-questionamento, o aluno solicita informação complementar ao professor e este realiza outras questões relacionadas com o tema; e (iii) validação, o aluno busca a validação das suas descobertas pelo professor. Por fim, na dimensão comunicativa professor-aluno, as categorias de análise são: (i) comunicação contributiva, (ii) comunicação reflexiva e (iii) comunicação instrutiva.

## **Ética do estudo**

Em acordo com os princípios éticos de responsabilidade social, informou-se o professor cooperante, assim como os alunos participantes e respetivos encarregados de educação, dos propósitos da presente intervenção educativa (ver Apêndice 6). No sentido da preservação da sua identidade e integridade, o anonimato é assegurado pela atribuição de nomes fictícios aos participantes.

### Capítulo III – Análise dos resultados

Neste capítulo apresenta-se a análise dos dados tendo como organização as três dimensões consideradas nas interações de comunicação oral em sala de aula, as interações entre os alunos e entre estes e o professor, nas direções aluno-professor e professor-aluno.

#### **Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno**

As interações comunicativas orais verificadas nesta dimensão de investigação ocorrem na fase de realização da tarefa. Na sua análise toma-se como referência as quatro tipologias de co-elaboração de Gilly, Fraisse e Roux (1998), referidas por Carvalho (2005): (i) co-elaboração por consentimento, (ii) co-elaboração por co-construção, (iii) co-elaboração por confronto com desacordo e (iv) co-elaboração por confrontos contraditórios.

**Co-elaboração por consentimento.** Os alunos co-elaboram com consentimento entre eles negociando conceitos e processos e generalizando resultados.

Negociando conceitos:

Bárbara: – Vou pintar esta parte aqui.

Santiago: – É melhor pintares por dentro.

Bárbara: – Sim, é esta parte aqui.

Santiago: – Esta parte?

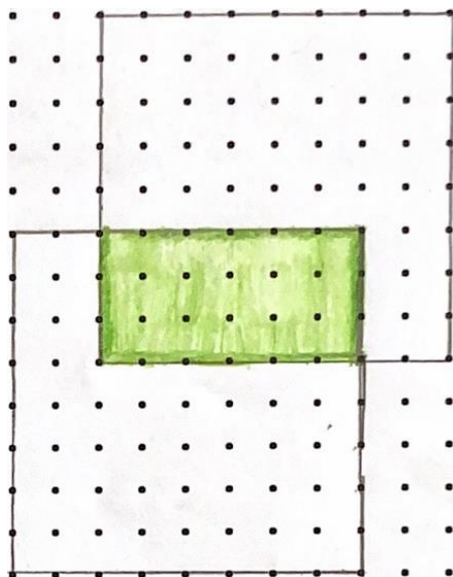
Esperança: – Ah, pois!

Santiago: – Esta é a parte comum dos dois quadrados juntos.

Esperança: – É a sua sobreposição.

A aluna Bárbara começa por expressar a parte que vai pintar e o aluno Santiago alerta-a para pintar em outro local. Bárbara concorda e Santiago questiona a sua decisão. A aluna Esperança está de acordo com os colegas e Santiago menciona qual é, para si, a parte em comum. Esperança elucida com a designação de sobreposição em relação ao conceito apresentado (ver Figura 3.1).

Figura 3.1. – Sombreamento da parte sobreposta dos quadrados.



Neste episódio os alunos co-elaboram na clarificação da parte das duas figuras a sombrar, existindo uma negociação do conceito de sobreposição de dois polígonos.

Negociando conceitos:

Santiago: – Então, mas o triângulo é equilátero ou escaleno?

Bárbara: – Equilátero.

Santiago: – É que eu não sei qual é que tem todos os lados iguais, se é o equilátero ou escaleno.

Bárbara: – O equiláteros tem todos os lados iguais. Os escaleno não têm nenhum lado igual.

O aluno Santiago coloca uma questão aos colegas e a aluna Bárbara responde. Santiago justifica o porquê da sua dúvida em relação à associação das denominações às características dos triângulos, pelo que Bárbara lhe oferece um esclarecimento adicional.

Neste episódio os alunos co-elaboram acerca da associação das designações à classificação dos triângulos em relação à medida dos lados.

Negociando processos:

Gonçalo: – Faz de oito [polígono de oito lados – octógono].

Mateus: – Este fica, assim, na metade. Fazemos assim: daqui até aqui, e depois descemos!

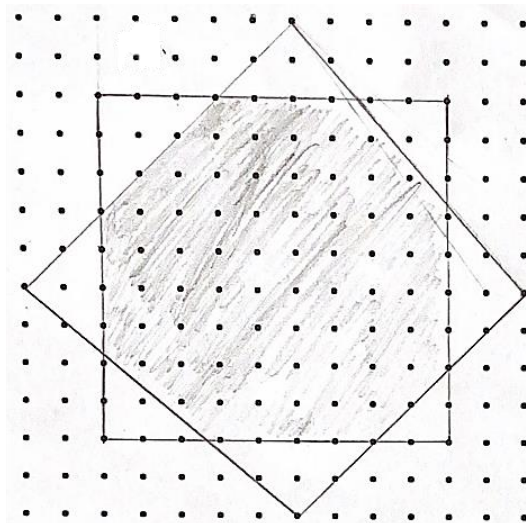
Gonçalo: – Sim, pode ser.

Mateus: – E descemos quantos?

Gonçalo: – Tem de ser sete para fazer um quadrado.

O aluno Gonçalo faz uma sugestão ao aluno Mateus que, por sua vez, não a discute, mas adiciona-lhe nova informação. Gonçalo concorda e, em seguida, Mateus questiona-o acerca de quantos pontos deve descer para traçar um lado do polígono. Gonçalo dá a sua opinião e o colega, ainda que não responda, coloca em prática esta decisão (ver Figura 3.2).

Figura 3.2. – Reprodução do octógono.



Neste episódio os alunos co-elaboram na tentativa de registo do octógono, em resultado da sobreposição dos dois quadrados.

Negociando processos:

Madalena: – Este vai ser aqui, este vai ser aqui, e aqui é o meio.

Constança: – Não, tem de ser mais pequeno.

Salvador: – Fazes aqui este com seis.

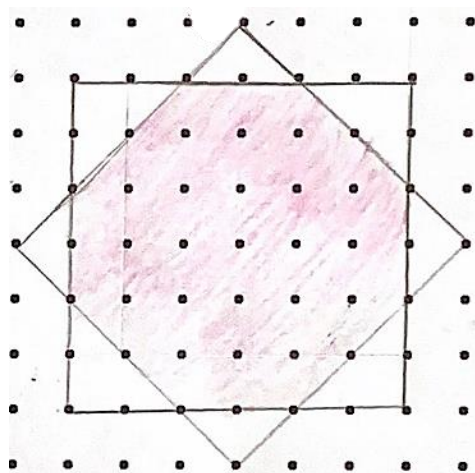
Madalena: – Começo aqui, certo?

Salvador: – Até podes começar daqui.

Constança: – Sim, assim dá uma margem.

A aluna Madalena define onde se vão posicionar as figuras no papel pontead. A aluna Constança refere que considera necessário desenhar as figuras com uma dimensão reduzida e o aluno Salvador propõe o comprimento dos lados. Madalena procura a validação do colega e este dá-lhe uma nova indicação de onde iniciar a transposição. Constança aprova-a (ver Figura 3.3).

Figura 3.3. – Representação dos quadrados no papel pontead.



Neste episódio os alunos co-elaboram na transposição de dois quadrados sobrepostos, estabelecendo uma negociação de processos matemáticos.

Generalizando:

Gabriel: – Será que existe mesmo um com sete [polígono com sete lados]?

Benedita: – Assim tem seis.

Gabriel: – Eu acho que isto é capaz de ser um bocado impossível.

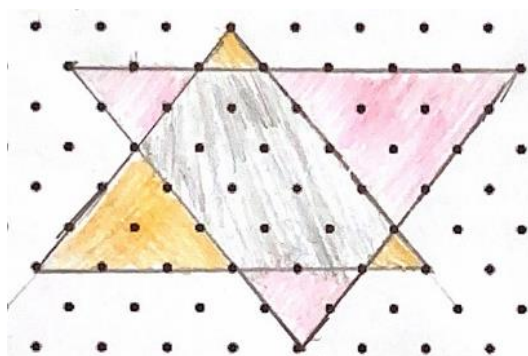
Benedita (referindo-se a outro grupo): – Bárbara, vocês já encontraram com sete?

Bárbara: – Não.

Benedita: – Então olhem, não sei, é capaz mesmo de ser.

O aluno Gabriel questiona o grupo sobre a possibilidade ou impossibilidade de construção de um polígono com sete lados, a partir de dois triângulos. A aluna Benedita analisa a figura com maior número de lados encontrada até ao momento. Gabriel adiciona que considera impossível encontrar um heptágono. Benedita questiona Barbara, colega de outro grupo, se já terão encontrado este polígono. A colega responde-lhe que não, pelo que Benedita acaba por ir ao encontro da perspectiva de Gabriel (ver Figura 3.4).

Figura 3.4. – Sobreposição hexagonal de dois triângulos.



Neste episódio os alunos tentam esgotar as possibilidades de construção de polígonos com a sobreposição de dois triângulos, atendendo ao seu número de lados. Solicitam co-elaboração entre pares na descoberta de novas soluções, extravasando mesmo o seu grupo de trabalho em busca da generalização dos resultados.

**Co-elaboração por co-construção.** Os alunos co-elaboram por co-construção generalizando numa partilha de conhecimentos matemáticos.

Generalizando:

Mateus: – Seis.

Martim: – Porquê?

Gonçalo: – Porque se tu vires assim cada um só tem três partes.

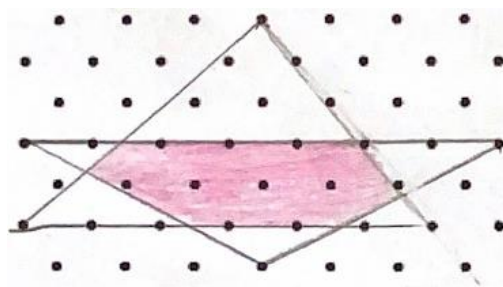
Martim: – Não estou a perceber porque é que o máximo é seis.

Mateus: – Só podemos fazer com seis lados porque são três mais três. Por isso não dá para fazer sete ou oito.

Gonçalo: – Se fosse quatro mais quatro, eram oito.

O aluno Mateus refere que o polígono com maior número de lados que é possível encontrar é o hexágono. O aluno Martim questiona a justificação para a sua afirmação e o aluno Gonçalo justifica a opinião do colega. Martim refere não compreender, pelo que, desta vez, Mateus retorna a explicar ao colega o porquê da sua ideia. Gonçalo acresce ao discurso uma nova informação (ver Figura 3.5).

Figura 3.5. – Sobreposição hexagonal de dois triângulos.



Neste episódio os alunos co-elaboram, através de hipóteses, na tentativa de encontrar o polígono com maior número de lados possível na sobreposição de dois triângulos, após concluírem que na sobreposição de dois quadrados se consegue obter um octógono. Procuram, neste processo de co-construção, generalizar os resultados.

Generalizando:

Diana: – Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Mas porque é que este fica maior? Eu não percebo!

Vicente: – Porque é de lado... na diagonal. Acho que fica sempre maior.

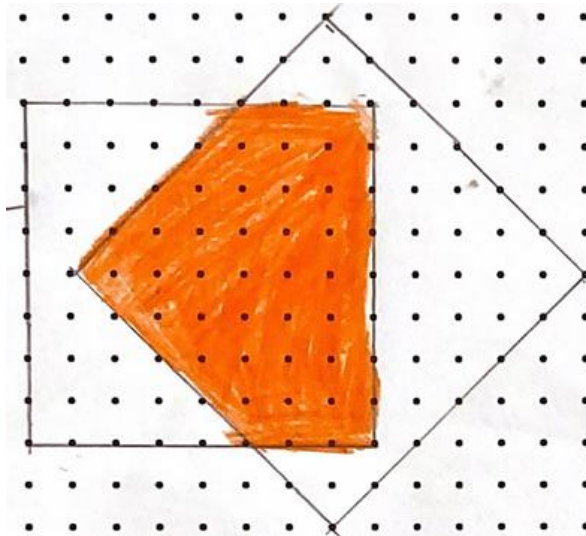
Francisco: – É maior ou parece maior? Hum... cá me parece que é mesmo maior.

Vicente: – Na diagonal a distância é sempre maior.

Francisco: – É verdade, é verdade.

A aluna Diana questiona o seu grupo sobre a justificação para a dimensão entre os pontos em comprimento ser menor do que na diagonal. O aluno Vicente apresenta a sua ideia e o aluno Francisco coloca em causa a opinião do colega, porém, rapidamente conclui que este tem razão. Vicente retorna a afirmar a sua conceção e Francisco mostra-se de acordo com o colega (ver Figura 3.6).

Figura 3.6. – Quadrados desenhados em proporções distintas.



Neste episódio os alunos co-elaboram a propósito do registo das figuras em papel pontado, generalizando, através de um processo de co-construção, que a diagonal de um quadrado é sempre maior do que qualquer um dos lados.

Generalizando:

Vitória: – Resumindo... com dois lados não temos nenhum polígono. É impossível.

Mafalda: – Pois é.

Vitória: – Já com três lados é um triângulo, com quatro é um quadrilátero, com cinco é um pentágono, com seis é um hexágono, com sete é um heptágono, com oito é um octógono, com nove... não sei.

Lourenço: – É um eneágono.

Vitória: – Então e o polígono com dez lados?

Lourenço: – É um decágono.

Mafalda: – Não. Com doze lados é que é decágono [incorreto, com doze lados é dodecágono]. Com dez também não sei.

A aluna Vitória faz um resumo dos conhecimentos construídos até ao momento, com o qual a aluna Mafalda concorda. Vitória acrescenta novas informações ao seu diálogo, levantando, ainda, uma dúvida ao grupo. O aluno Lourenço esclarece-a diretamente e Vitória volta a fazer uma nova questão à qual o colega retorna a responder. Mafalda corrige, incorretamente, a conceção do colega, levantando uma nova questão à qual ninguém responde.

Neste episódio os alunos co-elaboram por co-construção partilhando conhecimentos sobre a designação dos polígonos de acordo com o número de lados que apresentam.

**Co-elaboração por confronto com desacordo.** Os alunos co-elaboram por confronto com desacordo entre eles negociando processos.

Negociando processos:

Madalena: – Então daqui faz-se seis. Como este é oito, este é seis.

Salvador: – Doze?

Madalena: – Não, seis. Daqui temos de fazer seis.

Constança: – Não!

Salvador: – Daqui fazemos quatro e daqui fazemos seis.

Madalena: – Então faz-se oito, quatro e seis.

A aluna Madalena indica ao grupo a medida de cada lado do polígono a transpor para o papel pontado. O aluno Salvador intervém sugerindo uma ideia diferente da colega, que, por sua vez, a contesta, preservando a sua opinião. A aluna Constança discorda de Madalena e, em seguida, Salvador faz uma nova proposta ao grupo. Esta acaba por ser aceite por Madalena.

Neste episódio os alunos co-elaboram a propósito do registo das figuras em papel pontado, contrapondo diferentes processos de construção. Não obstante, o polígono não chega a ser concretizado no papel pontado.

Negociando processos:

Diana: – Eu queria que fizéssemos um heptágono ou então um octógono.

Francisco: – Pode ser um octógono.

Vicente: – Não dá para fazer com sete e não dá para fazer com oito.

Francisco: – Dá, Vicente.

Vicente: – Não dá!

Diana: – Tudo é possível se tu tentares.

Vicente: – Então qual é a tua ideia Francisco?

Francisco: – A minha ideia é fazer coisas aleatórias.

A aluna Diana expressa ao grupo o desejo de encontrar um heptágono ou um octógono, entre os quais, o aluno Francisco opta por um. O aluno Vicente discorda dos colegas referindo que não é possível, não justificando a sua opinião. Francisco insiste que é possível e, em resposta, Vicente retorna a expor a sua opinião. Diana, concordando com Vicente, defende que, desde que se tente, é possível encontrar qualquer polígono. Vicente questiona Francisco sobre a sua estratégia e o colega responde que pretende realizar movimentos aleatórios com as figuras.

Neste episódio os alunos co-elaboram contrapondo diversas estratégias de manipulação dos triângulos com vista à descoberta de polígonos com sete e oito lados. Equacionam processos incomuns, como estratégias aleatórias, em prol de gerar polígonos com um maior número de lados.

**Co-elaboração por confrontos contraditórios.** Os alunos co-elaboram por confrontos contraditórios entre eles negociando conceitos.

Negociando conceitos:

Salvador: – Este retângulo é irregular.

Madalena: – Não, é regular!

Salvador: – Esse é irregular porque os lados não são todos iguais.

O aluno Salvador afirma que o retângulo é irregular, no entanto, a aluna Madalena discorda. Salvador procura justificar a razão por detrás da sua opinião. A colega não

responde. O aluno não expande a sua justificação com a indicação que o único retângulo regular é o quadrado (ver Figura 3.7).

Figura 3.7. – Distinção entre polígonos regulares e irregulares.



Neste episódio os alunos co-elaboram confrontando-se na classificação de um retângulo, entre polígono regular e irregular, e clarificando o conceito de regular.

Negociando conceitos:

Salvador: – Um, dois, três, quatro, cinco. É um pentágono.

Constança: – Não, não é...

Salvador: – É sim! É um pentágono!

Madalena: – Não é.

Constança: – Parece mais um diamante com uma pérola em cima.

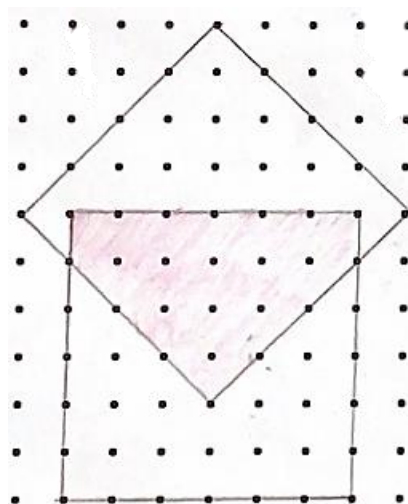
Salvador: – Sim, mas é um pentágono!

Constança: – Ok. Então faz lá esse pentágono.

O aluno Salvador contabiliza os lados do polígono e classifica-o como pentágono. A aluna Constança discorda do colega que, em seguida, retorna a afirmar a sua convicção. A aluna

Madalena nega, também, a premissa do colega. Constança justifica o porquê de não considerar o polígono um pentágono. Salvador afirma que esta observação não invalida a sua classificação como sendo um pentágono. Constança acaba por indicar ao colega que o transponha para o papel ponteadado (ver Figura 3.8).

Figura 3.8. – Reprodução do pentágono.



Neste episódio os alunos co-elaboram confrontando-se na classificação de polígonos, tendo subjacente a noção incorreta de que um pentágono é, obrigatoriamente, regular em contraditório com o número de lados que classifica o polígono.

Recapitulando, nas interações orais ocorridas entre os alunos verificaram-se situações de acordo e de desacordo sobre conceitos e processos matemáticos e sobre princípios de generalização dos resultados.

### **Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor**

As interações comunicativas orais detetadas nesta dimensão de investigação surgem, à semelhança da anterior, na fase de realização da tarefa. Tem-se, em conta, na sua análise, as categorias de questões de verificação, focalização e inquirição (Mason, 2000) e os propósitos de comunicação: (i) informação-informação, o aluno solicita informação complementar ao professor e este fornece diretamente a informação desejada; (ii) informação-questionamento, o aluno solicita informação complementar ao professor e este realiza outras questões relacionadas com o tema; e (iii) validação, o aluno busca a validação das suas descobertas pelo professor.

**Informação-informação.** O aluno requer informação e o professor fornece-a.

A propósito do registo no papel ponteadado:

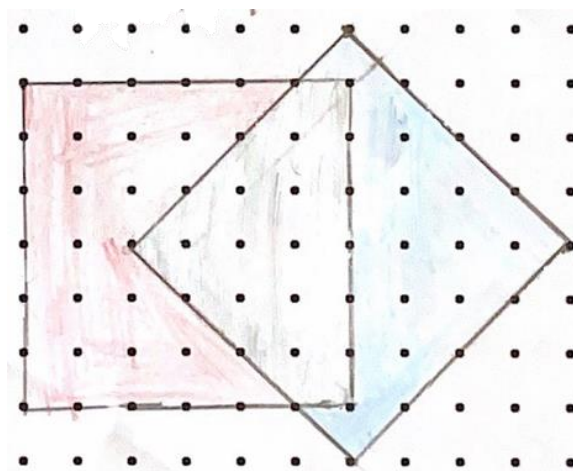
Benedita: – Professora, temos uma dúvida...

Salvador: – É que o quadrado fica maior assim na diagonal.

Professora: – É verdade, em comprimento a medida é sempre mais curta que na diagonal.

A aluna Benedita solicita o auxílio da professora após se deparar com uma dúvida. O aluno Salvador intervém clarificando a necessidade de obtenção de uma justificação para o facto encontrado. A professora responde à questão colocada (ver Figura 3.9).

Figura 3.9. – Quadrados transpostos para o papel ponteadado.



Neste episódio os alunos solicitam informação complementar sobre o comprimento da diagonal do quadrado no registo em papel ponteadado. A professora fornece, diretamente, a informação desejada.

A propósito do registo no papel ponteadado:

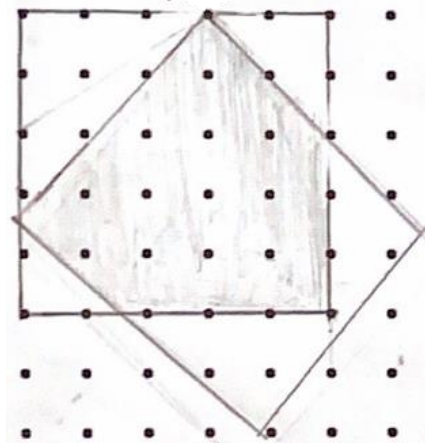
Alice: – Professora, isto é, um quadrado ou um losango? É que aqui ficou um quadrado, mas aqui ficou um losango.

Professora: – Ficou porque fizeram estas partes mais achatadas, então ficou um losango [o que não corresponde efetivamente à realidade].

Alice: – Ah, então é um quadrilátero losango.

A aluna Alice solicita informação complementar e a professora responde concedendo-lhe uma justificação. Alice demonstra compreensão sobre o esclarecimento (ver Figura 3.10).

Figura 3.10. – Representação dos quadrados no papel pontado.



Neste episódio os alunos solicitam informação complementar sobre a classificação do polígono transposto para o papel pontado. A professora fornece, diretamente, a informação desejada.

**Informação-questionamento.** O aluno solicita informação ao professor que, como resposta, faz-lhe questões relacionadas.

Negociando conceitos:

Gabriel: – Professora, veja aqui uma coisa connosco. Temos esta posição assim, como é que nós sabemos o que temos de pintar?

Professora: – Então, qual é a parte sobreposta?

Gabriel: – A parte sobreposta são os cantos dos quadrados.

Professora: – Será? Benedita, nesta figura consegues identificar a sobreposição?

Benedita: – Penso que seja a parte do meio.

Gabriel: – Ah! Eu estava mesmo a pensar que era a parte de fora...

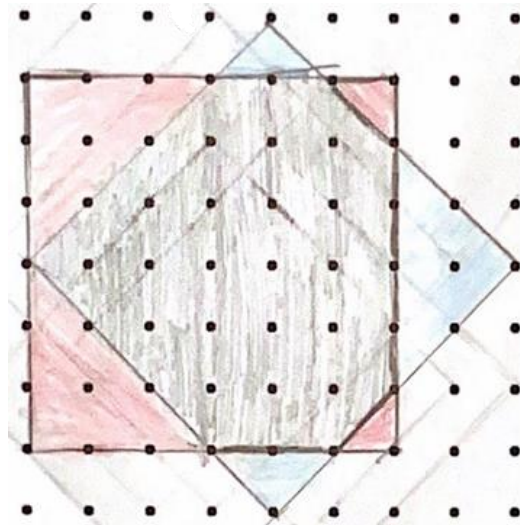
Professora: – No fundo a parte que tem de ser pintada é a interseção das duas figuras. Falámos desse conceito numa das aulas passadas. Lembram-se?

Gabriel: – Sim, lembro-me.

Professora: – Então, é exatamente a mesma coisa.

O aluno Gabriel solicita informação à professora. Em resposta, esta coloca-lhe uma questão de verificação à qual o aluno responde incorretamente. Dado isto, a professora solicita à aluna Benedita que identifique a parte sobreposta, com uma pergunta de focalização. Benedita fornece a resposta correta com a qual Gabriel refere concordar. A professora realiza uma questão de verificação e conclui aludindo para a similaridade entre dois conceitos matemáticos (ver Figura 3.11).

Figura 3.11. – Sombreamento da parte sobreposta dos quadrados.



Neste episódio os alunos solicitam informação complementar acerca do conceito de sobreposição. A professora, como resposta, realiza outras questões relacionadas com o tema.

Negociando conceitos:

Alice: – Professora, isto é um triângulo equilátero retângulo? É, não é?

Professora: – Será que é retângulo? Se é equilátero pode ter um ângulo de  $90^\circ$ ?

Alice: – Acho que não.

Professora: – Pois não. Neste caso temos os  $180^\circ$  distribuídos pelos três ângulos.

Um triângulo equilátero tem todos os lados e todos os ângulos iguais.

Alice: – Então é acutângulo!

Professora: – Sim, todos os ângulos são agudos.

A aluna Alice solicita informação complementar à professora. Em resposta, esta coloca-lhe duas questões: na primeira, coloca em causa a classificação, e na segunda, faz uma questão de focalização. Alice responde corretamente e a professora acresce-lhe novas informações. Alice demonstra compreensão sobre a explicação e mostra-se capaz de classificar o polígono. A professora valida a sua resposta.

Neste episódio os alunos solicitam informação complementar acerca da classificação do triângulo transposto para o papel pontado. A professora, como resposta, realiza outras questões relacionadas com o tema.

**Validação.** O aluno procura a aprovação da suas descobertas pelo professor.

Negociando processos:

Mateus: – Professora, fizemos o nosso hexágono!

Professora: – Este polígono não me parece bem um quadrado... parece-me mais um paralelogramo.

Gonçalo: – Sim, mas nós medimos e todos os lados tiveram quatro centímetros e meio.

Professora: – Não é só terem quatro centímetros e meio. Os lados do polígono têm de ser perpendiculares. Esta linha, ao invés de estar aqui, deveria estar aqui. Estão a entender o que estou a tentar explicar?

Mateus: – Então também esta deveria estar aqui...

Professora: – Exatamente!

O aluno Mateus procura a validação da descoberta de um novo polígono pela professora e esta faz uma observação sobre o facto de uma das figuras não estar corretamente transposta para o papel pontado. O aluno Gonçalo procura refutar esta intervenção, justificando a adequação do procedimento adotado. Dada a situação, a professora procede a uma explicação para o facto por si enunciado. Mateus demonstra compreendê-la, acrescentando uma nova informação que a professora, seguidamente, valida.

Neste episódio os alunos buscam a validação da descoberta de um novo polígono. A professora, identificando uma incorreção no seu raciocínio, procura deixar evidentes as condições necessárias para que um polígono se classifique como quadrado.

Negociando processos:

Mateus: – Professora, fizemos outro!

Professora: – Boa! E como se classifica esse polígono?

Mateus: – Então... é um triângulo.

Professora: – Será mesmo um triângulo? Quantos lados tem?

Gonçalo: – Ah, tem quatro.

Professora: – Tem mesmo quatro? Um, dois, três, quatro, cinco.

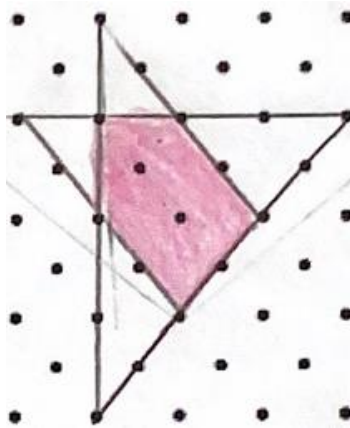
Mateus: – É um pentágono!

Professora: – Exato. É um pentágono.

O aluno Mateus procura a validação da descoberta de um novo polígono pela professora e esta coloca-lhe uma questão de verificação à qual responde incorretamente. Como tal, a professora retorna a colocar duas questões: uma de verificação e uma de focalização, às quais o aluno Gonçalo responde, também, incorretamente. A professora questiona, de novo, com uma pergunta de focalização, mas, em simultâneo, contabiliza os lados do polígono e Mateus alcança a resposta correta, pelo que a professora a valida (ver Figura 3.12).

Neste episódio os alunos buscam a validação da descoberta de um novo polígono. A professora, promovendo uma maior interação, realiza outras questões relacionadas com o tema.

Figura 3.12. – Representação do pentágono.



Negociando processos:

Francisco: – Acho que encontrámos um pentágono, professora: um, dois, três, quatro, cinco.

Professora: – E se colocarem esta pontinha para fora?

Francisco: – Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

Diana: – Passa a ser um hexágono.

Professora: – Isso mesmo.

O aluno Francisco procura a validação da descoberta de um novo polígono pela professora. Esta faz uma questão de inquirição, indicando uma estratégia para a transformação de um polígono, noutra. Francisco contabiliza o número de lados que o polígono passa a possuir e a aluna Diana classifica-o. A professora valida o raciocínio.

Neste episódio os alunos buscam a validação da descoberta de um novo polígono. A professora, em prol de propiciar novas descobertas, realiza outra questão relacionada com o tema.

### **Iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno**

As interações verbais nesta dimensão de investigação surgem ao longo das diversas fases da aula: (i) apresentação da tarefa, (ii) realização da tarefa, (iii) discussão da tarefa e (iv) síntese das aprendizagens matemáticas. Utiliza-se (na ausência do modelo unidirecional)

como base de análise os três modelos de comunicação (i) contributiva, (ii) reflexiva e (iii) instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000). Tem-se em consideração, igualmente, os padrões de interação funil, focalização, extração e discussão (Menezes, 2004) e, ainda, as categorias de questões de verificação, focalização e inquirição (Mason, 2000).

**Apresentação da tarefa.** Na fase de apresentação da tarefa, os modelos de comunicação que se destacam são os de comunicação contributiva e reflexiva aliados ao padrão de interação de focalização.

**Comunicação contributiva.** Os alunos participam na discussão, fazendo intervenções que mostram o conhecimento adquirido, enquanto o professor as valida.

Negociando conceitos:

Professora: – E que polígonos são esses que temos em cima da mesa?

Alunos (em simultâneo): – Quadrados.

Professora: – Porque é que se classificam como quadrados?

Tomás: – Têm quatro lados iguais [e quatro ângulos iguais].

Professora: – Conhecem algum polígono com quatro lados que não sejam todos iguais?

Alice: – Por exemplo o retângulo [não quadrado].

A professora coloca uma questão de verificação à qual os alunos respondem corretamente. Em seguida, realiza uma questão de focalização à qual o aluno Tomás responde, parcialmente, corretamente. A professora retorna a fazer uma questão, neste caso, de inquirição, à qual a aluna Alice responde.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a classificação dos quadrados ainda que com intervenções simples. Deteta-se, igualmente, o padrão de interação de focalização.

**Comunicação reflexiva.** Incentivados pelo professor, os alunos partilham as suas ideias e estratégias e ouvem e discutem as dos colegas.

Negociando conceitos:

Professora: – Relativamente a esta figura, que também têm na ficha de trabalho, logo na primeira página, o que conseguem observar?

Bárbara: – Três quadrados, uns sobrepostos em cima dos outros.

Professora: – Salvador, queres acrescentar alguma coisa?

Salvador: – Vejo três quadrados e um triângulo.

Professora: – E o triângulo resulta do quê?

Gabriel: – Da parte que une os quadrados.

Bárbara: – Que é a parte da sobreposição dos quadrados.

Professora: – Vem por favor mostrar, ao quadro, o que estás a tentar explicar.

Bárbara: – Temos aqui este quadrado e este maior que faz a sobreposição. Este está desnivelado, ou seja, não está exatamente na mesma linha que o outro, criando um triângulo.

A professora realiza uma questão de inquirição à qual a aluna Bárbara responde. Posteriormente, a professora questiona o aluno Salvador se deseja acrescentar alguma informação. Após a resposta do aluno, retorna a colocar uma questão de focalização, à qual os alunos Gabriel e Bárbara respondem. Por fim, a professora solicita a Bárbara que faça uma demonstração e a aluna cumpre este requisito.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação reflexiva sendo que os alunos, incentivados pela professora, partilham as suas ideias sobre o que se pode observar na referida figura. Constatam-se o padrão de interação de focalização.

**Realização da tarefa.** Na fase de realização da tarefa, o modelo que se destaca é o de comunicação contributiva aliado ao padrão de interação de focalização.

**Comunicação contributiva.** Os alunos participam na discussão, fazendo intervenções que mostram o conhecimento adquirido, enquanto o professor as valida.

Negociando processos:

Professora: – Mexam lá nas figuras assim.

Lourenço: – Ok.

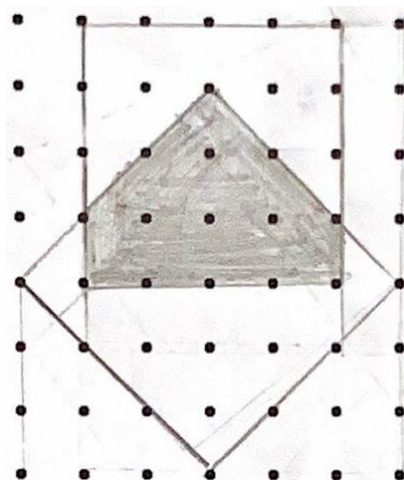
Professora: – Mexam de formas diferentes, sem medo...

Professora: – Stop! Que polígono temos aqui?

Vitória: – Um, dois, três, quatro, cinco. É um pentágono!

A professora sugere aos alunos uma estratégia de obtenção de polígonos através de movimentos de sobreposição diversos. Faz, ainda, uma questão de verificação à qual a aluna Vitória responde corretamente (ver Figura 3.13).

Figura 3.13. – Representação do pentágono.



Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre uma estratégia de obtenção de polígonos ainda que com intervenções simples. Confere-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – Há quadriláteros diferentes entre si, não há?

Francisco: – Sim.

Professora: – Então, há quadriláteros...

Vicente: – Definidos e indefinidos?

Francisco: – Não! Regulares e irregulares.

Professora: – Isso mesmo. E qual a diferença entre eles?

Diana: – Os regulares têm todos os lados iguais.

Professora: – Muito bem!

A professora efetua uma questão de verificação à qual o aluno Francisco responde. Buscando compreender o nível de conhecimento, a professora solicita aos alunos que completem a frase por si iniciada. Os alunos Vicente e Francisco debatem ideias, chegando à resposta correta. Após a sua validação pela professora, esta faz uma questão de focalização à qual a aluna Diana concede a resposta correta. A professora, mais uma vez, valida-a.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre os quadriláteros regulares e irregulares ainda que com de intervenções simples. Deteta-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – Já pensaram que tipo de triângulos têm aí?

Mateus: – Agudos.

Gonçalo: – E um obtuso.

Professora: – Exatamente. Então se tem um ângulo obtuso como se classifica?

Mateus: – Obtusângulo.

Professora: – E em termos dos lados, são iguais, são diferentes?

Mateus: – Dois iguais e um diferente.

Professora: – Será que dois são iguais?

Gonçalo: – Não! São todos diferentes.

Mateus: – Sim... são todos diferentes.

Professora: – Então e como se classifica?

Mateus: – É escaleno.

A professora coloca uma questão de inquirição à qual os alunos Mateus e Gonçalo respondem. A professora valida a resposta e coloca uma questão de focalização à qual

Mateus responde corretamente. Em seguida, volta a realizar uma questão de focalização à qual Mateus responde incorretamente. A professora faz uma nova questão de focalização, à qual Gonçalo concede a resposta correta. Mateus concorda e a professora faz uma nova questão de verificação. Mateus, desta vez, responde corretamente.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a classificação dos triângulos ainda que com intervenções simples. Constata-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – Já pensaram que tipo de triângulos são esses em termos dos lados?

(silêncio)

Professora: – Como é que são os lados? São todos iguais, são todos diferentes?

Constança: – Dois são diferentes.

Madalena: – Não! São todos diferentes.

Professora: – Então se são todos diferentes, como se classifica?

(silêncio)

Professora: – Quando são todos iguais o triângulo é equilátero, certo?

Alunos (em simultâneo): – Sim.

Salvador: – Então são escalenos.

Professora: – Muito bem. Agora pensem lá como se classifica em termos dos ângulos.

(silêncio)

Professora: – Será obtusângulo?

Madalena: – É.

Professora: – Então tem um ângulo obtuso?

Alunos (em simultâneo): – Sim.

A professora faz uma questão de inquirição. Não obtendo resposta, coloca uma questão de verificação, seguida de uma questão de focalização. As alunas Constança e Madalena respondem corretamente. A professora coloca uma questão de verificação e, como não obtém resposta, coloca uma questão de focalização. Os alunos respondem e Salvador adiciona ao discurso uma nova informação. A professora valida-a e solicita um outro conhecimento. Não alcançando uma resposta, efetua uma nova questão de focalização à qual Madalena responde corretamente. Por fim, faz uma questão de verificação à qual os alunos dão a resposta correta.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a classificação dos triângulos ainda que com intervenções simples. Confere-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – Que tipo de triângulo é que têm?

Benedita: – Para mim é um triângulo equilátero.

Professora: – Muito bem. E o que é que isso significa?

Gabriel: – Que tem todos os lados iguais.

Professora: – Então e em termos dos ângulos?

Gabriel: – Tem todos os ângulos iguais.

Professora: – Qual será a medida dos ângulos?

Gabriel: – São agudos.

Professora: – Sim, são agudos, mas em termos de amplitude?

Gabriel: – 45°?

Professora: – Quanto é a soma dos ângulos internos todos juntos?

Benedita: – 180°.

Gabriel: – Ah! É verdade. Todos juntos dão 180°.

A professora efetua uma questão de verificação à qual a aluna Benedita responde corretamente. A professora valida a resposta e coloca, consecutivamente, três questões de

focalização às quais o aluno Gabriel responde corretamente. À seguinte questão de focalização, Gabriel responde incorretamente, pelo que a professora faz uma questão de verificação. Benedita concede a resposta correta e Gabriel demonstra concordância.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a classificação dos triângulos ainda que com intervenções simples. Deteta-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – Já pensaram que tipo de figuras têm aí?

Alice: – Como assim?

Professora: – Como se classificam em termos dos lados?

Alice: – Isósceles.

Professora: – E em termos dos ângulos?

Alice: – Agudo, agudo, obtuso.

Professora: – Será?

Alice: – Ah, não, reto. Agudo, agudo, reto.

Professora: – Então se tem um ângulo reto como se classifica?

Alice: – Triângulo isósceles retângulo.

A professora coloca aos alunos uma questão de inquirição. A aluna Alice evidencia não compreender a questão, pelo que a professora faz uma questão de focalização. Alice responde corretamente e a professora efetua uma nova questão de focalização. Alice responde, desta vez, incorretamente. A professora faz uma questão que coloca em causa a veracidade da afirmação da aluna que se apercebe do erro, corrigindo-o. A professora adiciona uma questão de verificação e Alice retorna a responder corretamente.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a classificação dos triângulos ainda que com intervenções simples. Constata-se o padrão de interação de focalização, neste caso, no pensamento dos alunos.

**Discussão da tarefa.** Na fase de discussão da tarefa os modelos que se destacam são os de comunicação contributiva, reflexiva e instrutiva, associados aos vários padrões de interação.

**Comunicação contributiva.** Os alunos participam na discussão, fazendo intervenções que mostram o conhecimento adquirido, enquanto o professor as valida.

Negociando conceitos:

Professora: – Os ângulos retos têm quantos graus?

Gabriel: – Noventa.

Professora: – Haverá algum ângulo reto que não tenha noventa graus?

Gabriel: – Não, não há.

Professora: – De certeza?

Tomás: – Para ser ângulo reto tem mesmo de ter noventa graus.

Professora: – Então e se tiver oitenta e nove graus? Já não é reto?

Alunos (em simultâneo): – Não!

Tomás: – É obtuso.

Francisco: – Não! É agudo!

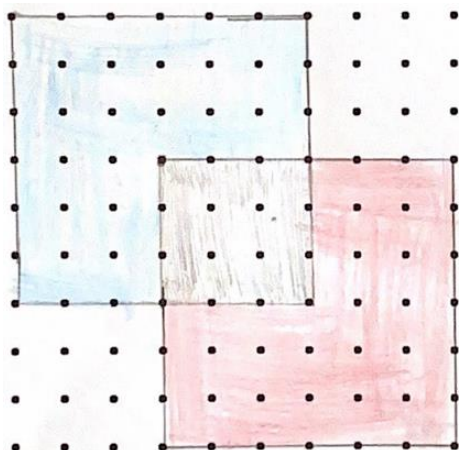
Professora: – E se tiver cento e oitenta graus, são “dois retos”?

Gabriel: – Cento e oitenta... não!

Francisco: – É raso.

A professora coloca duas questões de focalização às quais o aluno Gabriel responde corretamente. A professora retorna a questionar se Gabriel tem a certeza da sua afirmação e o aluno Tomás intervém defendendo a mesma perspetiva. A professora coloca duas questões de verificação consecutivas às quais os alunos respondem corretamente. Tomás refere, ainda, uma classificação e o aluno Francisco corrige-o. A professora retorna a colocar uma questão de verificação à qual Gabriel responde, negando. Por fim, Francisco acrescenta a sua designação de um ângulo de  $180^\circ$  (ver Figura 3.14).

Figura 3.14. – Representação do quadrado encontrado.



Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre os ângulos retos, ainda que com intervenções simples. Confere-se o padrão de interação de focalização.

Negociando processos:

Professora: – O que acharam comparando com a tarefa de ontem?

Gabriel: – Eu gostei.

Professora: – Achaste mais fácil ou mais difícil?

Gabriel: – Achei mais fácil a de ontem.

Professora: – Benedita, concordas?

Benedita: – Sim.

Professora: – Porquê?

Benedita: – Nesta não conseguimos mesmo fazer mais figuras diferentes.

A professora realiza uma questão de inquirição à qual Gabriel responde. Em seguida, a professora coloca-lhe uma questão de focalização à qual o aluno volta a responder. A professora retorna a colocar uma questão de inquirição a Benedita. A aluna Benedita menciona estar de acordo com Gabriel, justificando a sua opinião após a solicitação da professora.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre o grau de complexidade das tarefas ainda que com intervenções simples. Consta-se o padrão de interação de focalização, neste caso, no pensamento dos alunos.

**Comunicação reflexiva.** Incentivados pelo professor, os alunos partilham as suas ideias e estratégias e ouvem e discutem as dos colegas.

Negociando conceitos:

Professora: – E então, que triângulo é que vos calhou?

Francisco: – Equilátero, tem três lados iguais.

Professora: – E em termos dos ângulos?

Francisco: – São três ângulos agudos.

Professora: – Alguém sabe quanto mede cada um dos ângulos?

Francisco: –  $75^\circ$ ?

Professora: – Será  $75^\circ$ ?

Francisco: – Penso que sim, porque os  $90^\circ$  estão aqui. Tem de ser um pouco menos.

Gabriel: – A soma dos ângulos internos de um triângulo dá  $180^\circ$ .

Professora: – Sendo assim, qual é a amplitude de cada um?

Gabriel: – Tem de ser  $60^\circ$ .

A professora coloca uma questão de verificação, à qual o aluno Francisco responde corretamente. A professora retorna a colocar uma questão, desta vez, de focalização, à qual Francisco responde corretamente. Em seguida, faz uma nova questão de focalização à qual Francisco responde incorretamente. Dada a situação, a professora coloca em causa a veracidade da sua afirmação, pelo que Francisco defende a sua perspetiva. O aluno Gabriel intervém com nova informação que a professora utiliza para realizar uma nova questão de focalização. Gabriel fornece a resposta correta.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação reflexiva sendo que os alunos, incentivados pela professora, partilham as suas ideias sobre os lados e os ângulos do triângulo. Constata-se o padrão de interação de extração.

Negociando conceitos:

Professora: – Conhecem algum outro quadrilátero com quatro lados iguais, mas que não tem os ângulos retos?

Vitória: – O losango.

Professora: – Porquê?

Vitória: – Tem os quatro lados iguais, mas os ângulos não são retos.

Professora: – Será que a Vitória tem razão?

Gabriel: – Eu acho que tem razão, os ângulos não são retos.

Professora: – Então, se não são retos, são o quê?

Gabriel: – Obtusos?

Professora: – São todos obtusos? Os quatro?

Gabriel: – Não. Dois são agudos.

Professora: – E será que podiam ser todos obtusos?

Alunos (em simultâneo): – Não!

A professora realiza uma questão de inquirição. A aluna Vitória dá a resposta esperada e a professora solicita-lhe que a justifique. Vitória cumpre a solicitação e a professora questiona os restantes alunos se estão de acordo. O aluno Gabriel confirma a sua perspectiva partilhada com a colega. A professora coloca uma nova questão, neste caso, de verificação, à qual Gabriel dá uma resposta que não é considerada completamente correta. Como tal, a professora coloca duas questões de focalização consecutivas. Gabriel expressa a resposta correta e a esta retorna a colocar uma questão de inquirição à qual os alunos respondem corretamente.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação reflexiva sendo que os alunos, incentivados pela professora, partilham as suas ideias sobre a existência de um

quadrilátero com os lados iguais, porém, sem ângulos retos. Constata-se o padrão de interação de extração.

Negociando processos:

Professora: – Antes de começarmos a apresentação, digam-me só mais uma coisa, como é que pensaram para encontrar as figuras?

Alguns alunos (em simultâneo): – Foi ao calhas.

Professora: – Foi tudo ao calhas?

Vicente: – Não, tivemos criatividade!

Professora: – Toda a gente atirou uma figura para cima da outra a ver o que calhava?

Salvador: – Nós juntávamos as pontas com as pontas.

Professora: – Alguém tentou juntar pontas com lados?

Alguns alunos (em simultâneo): – Sim.

Professora: – E lados com lados?

Diana: – Sim.

A professora faz uma questão de inquirição à qual alguns alunos respondem. A professora questiona a sua resposta e o aluno Vicente nega e reformula-a. A professora volta a fazer uma questão de inquirição à qual o aluno Salvador responde. Coloca, em seguida, uma nova questão de focalização à qual alguns alunos respondem. Por fim, faz uma quarta questão de focalização à qual a aluna Diana responde.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação reflexiva sendo que os alunos, incentivados pela professora, partilham as suas estratégias para encontrar novos polígonos através da sobreposição das figuras. Constata-se o padrão de interação de focalização, neste caso, do pensamento dos alunos.

**Comunicação instrutiva.** O professor valoriza e integra no discurso as ideias dos alunos promovendo a partilha de ideias e a reflexão.

Negociando conceitos:

Professora: – Sabem de onde vem a palavra retângulo?

Tomás: – Vem de “reto” e “ângulo”.

Professora: – Exato. Então porque é que é retângulo?

Tomás: – Tem ângulos retos.

Professora: – Quantos?

Tomás: – Quatro.

A professora coloca uma questão de inquirição à qual o aluno Tomás concede a resposta correta. Depois de a validar, a professora faz uma questão de focalização à qual Tomás dá uma resposta correta, ainda que incompleta. A professora retorna a fazer uma questão mais focalizada à qual Tomás responde, mais uma vez, corretamente.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, integram as suas ideias sobre a proveniência da palavra “retângulo” no discurso. Confere-se o padrão de interação de focalização.

Negociando conceitos:

Professora: – E o quadrado? Também é um retângulo?

Tomás: – Não, o quadrado tem todos os lados iguais, então não pode ser um retângulo.

Professora: – Mas tem, ou não, os quatro ângulos retos?

Tomás: – Tem.

Professora: – Então é um retângulo, ou, não é?

Tomás: – Não.

Professora: – Porquê?

Tomás: – Porque não tem os lados diferentes. São todos iguais.

Professora: – Há alguém que pense de outra maneira?

Salvador: – O quadrado é um retângulo porque tem quatro ângulos retos. Não tem a ver com ser regular ou não.

Professora: – Então, no fundo, um quadrado é um retângulo regular. É isso?

Salvador: – Sim.

Professora: – Todos os outros concordam com o Salvador?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

A professora realiza uma questão de inquirição à qual o aluno Tomás responde. A professora retorna a fazer uma questão, neste caso, de focalização, à qual Tomás responde, mais uma vez, corretamente. Em seguida, a professora faz uma questão de verificação à qual Tomás responde incorretamente, pelo que lhe solicita justificação. A professora questiona se existem opiniões diferentes, consistindo em esta numa questão de inquirição. O aluno Salvador defende uma perspectiva oposta, fundamentando-a. A professora realiza uma nova questão de focalização à qual Salvador responde corretamente. Por fim, questiona os alunos se estão de acordo com o colega e estes, por sua vez, confirmam uma perspectiva partilhada.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, integram as suas ideias sobre a possibilidade de o quadrado ser, em simultâneo, um retângulo. Deteta-se o padrão de interação de discussão.

Negociando conceitos:

Professora: – Então e se a soma dos ângulos de um triângulo são  $180^\circ$ , qual é a soma dos ângulos de um quadrado?

Gabriel: – Se cada ângulo tem de ter  $90^\circ$  então os quatro têm  $360^\circ$ .

Professora: – Será que isto acontece com todos os quadriláteros?

Gabriel: – Alguns não têm ângulos retos.

Professora: – Sim, mas em termos da soma.

Gabriel: – Penso que sim.

A professora utiliza uma descoberta dos alunos para realizar uma questão de inquirição acerca de um novo assunto. O aluno Gabriel responde corretamente, fundamentando a sua ideia. A professora retorna a fazer uma questão de inquirição, no entanto, Gabriel não responde à questão colocada. Perante a situação, a professora intervém clarificando o seu objetivo. Gabriel compreende o intuito da pergunta e expressa a sua opinião.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, refletem sobre a soma dos ângulos internos de um quadrado. Deteta-se o padrão de interação de extração.

Negociando conceitos:

Professora: – É retângulo se tiver os quatro ângulos retos. É losango se tiver os quatro lados iguais. É quadrado se tiver uma coisa e a outra. Então, todos os quadrados são retângulos e todos os quadrados são losangos. Verdadeiro ou falso?

Gonçalo: – Verdadeiro. Podem ser todos quadrados, mas são diferentes.

Vitória: – Têm os lados todos iguais e os ângulos também.

Professora: – Uma figura que tem os quatro ângulos retos e os quatro lados iguais, é ao mesmo tempo um retângulo e um losango?

Salvador: – Acho que não. Um losango não tem os quatro ângulos retos.

Professora: – E não pode ter? Salvador, vai desenhar no quadro um losango com quatro ângulos retos.

Salvador: – Esta figura tem os quatro lados iguais, mas não tem ângulos retos.

Professora: – Então, como tem os quatro lados iguais é um losango. É isso?

Salvador: – Não, porque...

Professora: – Desenha lá um losango diferente desse.

Professora: – Esse também é losango?

Salvador: – É.

Professora: – Diana, que figura é que o Salvador desenhou?

Diana: – Um quadrilátero irregular.

Professora: – De facto, um quadrado é ao mesmo tempo um quadrado e um losango. Mas nem todos os retângulos são quadrados e nem todos os losangos são quadrados.

A professora realiza uma questão de inquirição de verdadeiro ou falso. O aluno Gonçalo dá uma resposta, seguida da resposta da aluna Vitória. Em seguida, a professora coloca uma segunda questão de inquirição à qual o aluno Salvador dá uma resposta correta. A professora atribui um desafio a Salvador. Após o aluno cumprir a solicitação, a professora coloca-lhe uma questão de verificação à qual responde, no entanto, não concede uma justificação. Posto isto, a professora coloca-lhe um novo desafio. Após Salvador o cumprir, retorna a colocar uma questão de verificação à qual responde corretamente. A professora questiona, ainda, a aluna Diana sobre a classificação do polígono desenhado. Após Diana fornecer a resposta correta, a professora faz uma síntese do conteúdo.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, refletem sobre a veracidade de todos os quadrados serem retângulos e losangos. Constata-se o padrão de interação de discussão.

Negociando processos:

Professora: – Então e em termos de processo, ontem foi mais difícil perceberem aquilo que era para fazer?

Francisco: – Sim, porque foi a primeira vez que fizemos.

Gonçalo: – Sim, para mim ontem foi mais difícil de perceber.

Professora: – Qual foi a diferença de ontem para hoje?

Mateus: – Não sabia muito bem porque era a primeira vez.

Professora: – Pois, como era a primeira vez estavam um bocadinho perdidos. E agora desta vez?

Tomás: – Eu hoje achei mais fácil porque só deu para fazer até ao hexágono. Se somarmos todos os lados dos triângulos, dá seis, então não dá para fazer figuras com mais lados. Ontem dava para fazer até ao octógono.

Professora: – Porque é que ontem dava para encontrar um octógono?

Diana: – Porque cada quadrado tinha quatro lados.

Professora: – Exatamente.

A professora faz uma questão de inquirição à qual os alunos Francisco e Gonçalo respondem. A professora retorna a colocar uma questão, desta vez, de focalização, à qual o aluno Mateus responde. A professora valida a sua resposta e coloca uma nova questão de inquirição à qual o aluno Tomás responde adicionando uma pergunta que a professora utiliza para colocar uma questão de verificação. A aluna Diana responde à sua questão e a professora valida-a.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, refletem sobre o grau de complexidade das tarefas. Deteta-se o padrão de interação de extração.

Negociando processos:

Professora: – Vou fazer-vos um desafio. Imaginem que aquela sobreposição está mesmo no ponto médio do lado. Qual acham que será a área do pequeno em relação ao grande?

Vitória: – Um quarto.

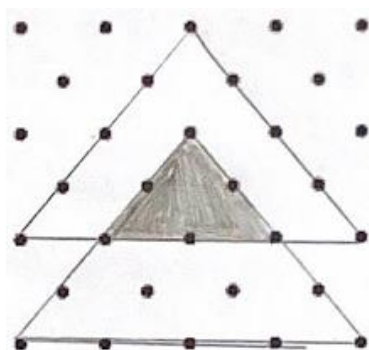
Professora: – Porquê?

Vitória: – Porque quatro vezes o pequeno dá o grande.

Professora: – Muito bem.

A professora faz um desafio aos alunos através de uma questão de inquirição. Vitória responde e a professora solicita a sua justificação. A aluna argumenta a sua afirmação adequadamente, pelo que a professora valida a sua resposta (ver Figura 3.15).

Figura 3.15. – Triângulo sombreado a representar a quarta parte do triângulo de baixo.



Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, refletem sobre área do triângulo pequeno em relação à do triângulo grande. Confere-se o padrão de interação de extração.

**Síntese das aprendizagens matemáticas.** Na fase de síntese das aprendizagens os modelos que se destacam são os de comunicação contributiva e instrutiva aliados ao padrão de interação de focalização.

**Comunicação contributiva.** Os alunos participam na discussão, fazendo intervenções que mostram o conhecimento adquirido, enquanto o professor as valida.

Negociando processos:

Professora: – O que descobriram hoje?

Diana: – Os polígonos.

Professora: – Sim, trabalhamos com polígonos.

Gabriel: – Aprendemos sobrepondo dois quadrados.

Professora: – Então, sobrepondo, neste caso, dois quadrados, conseguimos obter vários polígonos, não foi?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

A professora realiza uma questão de inquirição à qual a aluna Diana responde. A professora valida a resposta e o aluno Gabriel adiciona uma nova informação. Em seguida, a professora faz uma questão de verificação à qual os alunos respondem.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação contributiva sendo que os alunos participam no discurso sobre a tarefa realizada ainda que com intervenções simples. Constata-se o padrão de interação de focalização.

**Comunicação instrutiva.** O professor valoriza e integra no discurso as ideias dos alunos promovendo a partilha de ideias e a reflexão.

Negociando conceitos:

Professora: – O que é que vocês acham que é a Matemática?

Diana: – Contas.

Vicente: – Números.

Aurora: – Frações.

A professora realiza uma questão de inquirição à qual os alunos Diana, Vicente e Aurora respondem.

Neste episódio verifica-se o modelo de comunicação instrutiva sendo que os alunos, encorajados pela professora, refletem sobre em que consiste a Matemática.

## Capítulo IV – Discussão dos resultados

Neste capítulo discutem-se os resultados obtidos através do estudo. Perante a importância da comunicação para o desenvolvimento do raciocínio matemático, visa-se explorar como diversas configurações de interação contribuíram para a construção do conhecimento geométrico, tendo por base autores supracitados no decorrer do enquadramento teórico.

### Comunicação matemática oral na sala de aula

Os resultados da presente investigação revelaram que a comunicação matemática é, intrinsecamente, uma atividade social que enriquece o processo de aprendizagem. Indo ao encontro da perspectiva de Menezes et al. (2014), a comunicação como interação social demonstrou ter capacidade para criar e manter o consenso e a compreensão através da interpretação mútua, numa ação de complementaridade e de reconhecimento recíproco.

A interação aluno-aluno evidenciou ter na sua base a troca de diferentes perspetivas e estratégias, o que proporcionou um ambiente de aprendizagem colaborativo em que os alunos tiveram a oportunidade de aprender uns com os outros. Identificaram-se no discurso os tipos de co-elaboração identificados por Gilly, Fraise e Roux (1998) destacados por Carvalho (2005): co-elaboração por consentimento, por co-construção, por confronto com desacordo e por confrontos contraditórios, sendo que a mais comum foi a co-elaboração por consentimento.

A interação aluno-professor revelou-se fundamental para a construção do conhecimento. Não obstante, não se identificaram os padrões de interação *adivinhand o que o professor tem em mente e os alunos assumem o comando*, mencionados por Alrø e Skovsmose (2006) e, tendo por base a necessidade em recolher informação nesta dimensão de investigação, foi necessário criar padrões originais resultantes da análise do discurso: informação-informação, informação-questionamento e validação. Constatou-se que a clareza na comunicação da professora e a capacidade de responder às dúvidas dos alunos facilitaram a sua compreensão.

A interação professor-aluno foi eficaz dado que a professora atuou como mediadora do conhecimento, auxiliando os alunos a conectar conceitos e a desenvolver raciocínios mais elaborados. A efetuação de diversas questões (de verificação, focalização e inquirição) indicadas por Mason (2000), comprovaram facilitar a interação, criando um ambiente no

qual os alunos se demonstraram estimulados. Além do mais, ajudou na identificação de dificuldades e encorajou os alunos a refletirem sobre os seus próprios raciocínios. Como aludido por Brendefur e Frykholm (2000) verificaram-se vários modelos de comunicação, (contributiva, reflexiva e instrutiva) numa só aula, com uma mesma professora e alunos.

A comunicação oral emergiu como uma ferramenta essencial para a aprendizagem, tendo-se evidenciado, tal como referenciado por Cândido (2001), um instrumento acessível, rápido e direto. Verificou-se que os alunos mais participativos nas discussões foram capazes de articular os raciocínios de forma clara e desenvolver uma compreensão mais sólida dos conceitos. De facto, a prática regular de argumentação demonstrou auxiliá-los na organização das suas ideias, o que se refletiu num melhor desempenho progressivo.

Os padrões de interação emergiram, em concordância com Menezes (2004), em situações em que a professora procurou auxiliar os alunos na resolução de uma dificuldade ou na explicação de um raciocínio. Identificaram-se os vários padrões (de focalização, extração e discussão), à exceção do funil, sendo que a professora procurou incentivar e integrar, permanentemente, as perspetivas e contribuições dos alunos no discurso.

Ao longo dos processos de negociação de significados identificou-se, tal como destacado por Alrø e Skovsmose (2006), que os alunos utilizaram as suas capacidades matemáticas e linguísticas em prol do expor de argumentos explicitamente. Ao confrontarem os diferentes fundamentos, tiveram a oportunidade de participar na negociação de conceitos ou do próprio processo de resolução das tarefas, abandonando até, por vezes, as suas posições iniciais para compreender os argumentos dos colegas.

Reconheceram-se ações docentes nomeadas por Menezes et al. (2015) que facilitaram o sucesso das discussões, nomeadamente, a solicitação de esclarecimentos das resoluções e justificações para os resultados e a discussão da eficácia das representações matemáticas aplicadas pelos alunos. Constataram-se, igualmente, ações de gestão das interações pela professora que lhe possibilitaram, tal como defendido por Verón e Giacomone (2024), incentivar as conexões entre os conceitos matemáticos, esclarecer dúvidas ou conflitos, criar ambientes para discussões dialógicas e colaborativas, facilitar o desenvolvimento de competências argumentativas e comunicativas e, ainda, promover a autonomia e o avanço progressivo na aprendizagem.

Em suma, a investigação reafirma a importância da comunicação matemática em sala de aula e sugere que a promoção de interações significativas entre alunos e professores pode conduzir a uma melhoria substancial na aprendizagem da geometria.

## Considerações finais

Nestas considerações finais será abordada a questão de investigação, destacando os dados resultantes do desempenho dos alunos, as limitações do estudo e sugestões de melhoria para investigações futuras neste âmbito.

Partiu-se da tarefa geométrica proposta por Carla Tayeh em 2006 designada *Solutions to the What's the Overlap? Problem*, divulgada na revista *Teaching Children Mathematics*. Aplicou-se, em aulas distintas, uma tarefa sobre os polígonos resultantes da sobreposição de dois quadrados e outra sobre os polígonos frustos da sobreposição de dois triângulos no 2.º ciclo do ensino básico, mais precisamente, numa turma do 6.º ano de escolaridade.

Estas tarefas evidenciaram-se adequadas à faixa etária, ainda que pudessem ser aplicadas com alunos de qualquer nível de escolaridade. Procurou-se que tivessem, entre si, uma ligação, propiciando uma evolução no desempenho dos alunos, assim como o estabelecimento de conexões entre diferentes conhecimentos. Assentou no modelo de ensino exploratório da matemática e buscou promover uma aprendizagem ativa e significativa.

Relativamente à postura da professora investigadora é relevante mencionar que procurou diligenciar, sempre que possível, o trabalho autónomo dos alunos. Tendo em conta a metodologia de observação participante, adotou uma posição mais de observação, ainda que, permanentemente, tenha mediado a aprendizagem e incentivado à interação.

Considerando a problemática na base da investigação desenvolvida, definiu-se como questão geral a seguinte: Como se desenvolve a comunicação matemática no ensino básico no contexto da aprendizagem da geometria? As dimensões da investigação foram, por sua vez: (i) iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno, (ii) iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor e (iii) iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno.

Em relação à participação oral, notou-se que alguns alunos se destacaram por serem mais ativos do que outros, indicando a necessidade de um trabalho continuado para estimular a participação da globalidade da turma. No que toca ao interesse e ao empenho, observou-se um envolvimento acrescido em ambas as tarefas, especialmente nas fases de realização e discussão das mesmas. No que relativa às competências atitudinais, a maioria dos alunos

apresentou um comportamento adequado, ainda que, em situações pontuais, tenha sido necessária uma certa gestão comportamental. Estas observações foram ao encontro da autoavaliação dos alunos sobre o seu desempenho ao longo das tarefas (ver Apêndice 7).

Confirmou-se que, no fundo, os alunos tinham conhecimento (resultado do seu percurso de escolarização) das designações geométricas, porém, não tinham a certeza de como as associar aos polígonos. Como tal, a interação permitiu que, à medida que se discutiam e argumentavam as ideias e interpretações dos alunos, estas conceções fossem exploradas e, conseqüentemente, colmatadas. Observou-se, também, que alguns alunos estabeleciam associações incorretas dos conceitos, pelo que a partilha e o debate permitiu que essas “falhas” fossem rapidamente identificadas, melhorando o entendimento geral dos alunos.

O diálogo e o debate demonstraram fomentar um ambiente colaborativo em que a troca de ideias facilitou a construção de novos conhecimentos e a consolidação de outros. A gestão das intervenções pela professora provou favorecer o desenvolvimento de competências comunicativas e argumentativas pelos alunos, sendo que estes foram, constantemente, incentivados a alargar as suas conceções e justificações.

As descobertas da presente investigação apresentam determinadas implicações práticas. Designadamente, sugerem que a formação docente contínua deve compreender um foco significativo no desenvolvimento de competências promotoras de uma comunicação eficaz em sala de aula. A aplicação de métodos de ensino promotores do diálogo pode melhorar, significativamente, os resultados dos alunos na aprendizagem da geometria.

Não obstante tudo o que já foi mencionado e, embora os resultados sejam promissores, o estudo possui algumas limitações que devem ser consideradas. A amostra utilizada pode não ser representativa de todas as realidades educativas, o que limita a sua generalização. Como sugestão, investigações futuras poderiam explorar diferentes contextos e níveis de ensino para verificar a consistência e coerência real dos resultados.

Para concluir, mediante a análise da observação participante e dos dados obtidos, foi possível constatar que se atingiram os objetivos estabelecidos para esta investigação, tendo-se verificado que a comunicação matemática consiste, indubitavelmente, numa mais-valia para a aprendizagem dos alunos, particularmente, no contexto de tarefas geométricas de natureza prática e investigativa.

## Referências bibliográficas

- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática* (1.ª ed.). A. Autêntica.
- Amos, S. M. (2007). Talking Mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 14 (2), 65-73. <https://doi.org/10.5951/TCM.14.2.0068>
- Araujo, A. F. & Borralho, A. M. (2018). Comunicação Matemática: uma contribuição nas práticas letivas. *VII EEMAT: Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro*, Rio de Janeiro, Brasil.
- Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3 (1), 125-153. [10.1023/A:1009947032694](https://doi.org/10.1023/A:1009947032694)
- Budiono, E., Permadi, H., Nabila, F. & Savitri, A. (2020). The student's oral mathematical communication skills in the application of peer assessment learning mode. *AIP Conference Proceedings, Malang, Indonésia*. <https://doi.org/10.1063/5.0000907>
- Cândido, P. T. (2001). Comunicações e interações sociais nas salas de Matemática. In K. S. Smole & M. I. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Artmed Editora.
- Carvalho, C. (2005). Comunicações e interações sociais nas salas de Matemática. In Nacarato, A. M. & Lopes, C. E. (Eds.), *Escritas e Leituras na Educação Matemática* (pp. 15-34). A. Autêntica.
- Carvalho, P., & Guerreiro, A. (2021). Intervenção precoce na infância: interações comunicativas entre uma educadora e duas crianças. *Indagatio Didactica*, Universidade de Aveiro, 13 (2) 43-62. <https://doi.org/10.34624/id.v13i2.25093>

- Cengiz, N., Kline, K. & Grant, T. J (2011). Extending students' mathematical thinking during whole group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14 (5), 355-374. 10.1007/s10857-011-9179-7
- Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions - a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 85 (2), 281–304. 10.1007/s10649-013-9515-1
- Godino, J. D. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, 12 (1), 70-92. 10.24844/EM1101.04
- Guerreiro, A. (2011). Imposição ou negociação de significados matemáticos. *Educação e Matemática*, 115, 73-75.
- Guerreiro, A. (2013). Comunicação matemática: O reconhecimento, pelos professores, da singularidade dos conhecimentos matemáticos dos alunos. *Da Investigação às práticas*, 3 (2), 31–52. <https://doi.org/10.25757/invep.v3i2.32>
- Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática na sala de aula: Conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 237-257). Lisboa: Instituto de Educação.
- Guerreiro, A. & Martins, C. (2018). Avaliação e comunicação: da e para a aprendizagem. *Educação e Matemática*, 1 (149), 49-52.
- Guerreiro, A., Ferreira, R. A., Menezes, L. & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspectiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké – Unicamp & Feuff*, 23 (44), 279-295. 10.20396/zet.v23i44.8646539
- Gustafsson, P. (2024). Exploring and developing a framework for analysing whole-class discussions in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 26 (1), 1-21. <https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2292263>

- Knuth, E. & Peressini, D. (2001). Unpacking the nature of discourse in Mathematics Classrooms. *Mathematics teaching in the Middle School*, 6 (5), 320-325. 10.5951/MTMS.6.5.0320
- Lamonato, M. & Passos, C. L. (2012). Argumentação, Comunicação e Negociação de significados em aulas de Matemática para crianças de 6 a 11 anos. *XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino*, Campinas, Brasil.
- Machado, B. E., Lacerda, A. G., Ferreira, R. S. & Rocha, A. A. (2020). A formulação de perguntas para a promoção da comunicação nas aulas de matemática. *Brazilian Journal of Development*, 6 (8), 56521-56534.
- Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Repositório da Universidade de Lisboa.
- Martinho, M. H. & Ponte, J. P. (2005). *Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática*. Repositório da Universidade do Minho.
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International journal of mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1), 97-111. 10.1080/002073900287426
- ME/DGE – Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais – 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico – Matemática*. Editorial do Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.
- ME/DGE – Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Editorial do Ministério da Educação/Direção Geral da Educação.
- Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Repositório da Universidade de Lisboa.

- Menezes, L., Ferreira, T. R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação.
- Menezes, L., Oliveira, H., & Canavarro, A. P. (2015). Inquiry-based mathematics teaching: The case of Célia. In U. Gellert, J. Gimenez Rodriguez, C. Hahn & S. Kafoussi (Eds.), *Educational paths to Mathematics* (pp. 305-321). Cham: Springer. 10.1007/978-3-319-15410-7\_20
- Santos, V. M. (2005). Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In A. M. Nacarato & C. E. Lopes (Eds.), *Escritas e Leituras na Educação Matemática* (pp. 117-126). A. Autêntica.
- Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L. & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20 (2), 39-74.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22 (2), 55-81.
- Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 13-30). Instituto de Educação.
- Raúl, C. L., Dosil, M. C. & Cápiro, C. R. (2017). Indicadores para evaluar la comunicación matemática en la formación de profesores. *Pedagogía Profesional*, 15 (4), 1-11.
- Ruiz, D. & Pachano, L. (2002). Los diálogos en las clases de matemática. *Educere, Investigación*, 6 (19), 316-323.
- Serrazina, L. (2018). Comunicação matemática e aprendizagens essenciais. *Educação e Matemática*, 1 (149), 13-16.

- Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (5), 205-233. [10.1023/A:1020134209073](https://doi.org/10.1023/A:1020134209073)
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 (4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Tayeh, C. (2006). Solutions to the What's the overlap? Problem. *Teaching Children Mathematics*, 13 (1), 42-44. <https://doi.org/10.5951.TCM.13.1.0042>
- Ulleberg, I. & Solem, I., H. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge*, 12 (1), 1-21. <https://doi.org/10.5617/adno.5607>
- Verón, M. A., & Giacomone, B. (2024). Gestión de las interacciones durante una lección sobre la diferencial: una competencia del profesor de matemáticas. In M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 301–310). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-34>

## Índice de apêndices

Apêndice 1 – Tarefa de sobreposição de dois quadrados .....	76
Apêndice 2 – Tarefa de sobreposição de dois triângulos .....	78
Apêndice 3 – Tabela-áudio da primeira tarefa .....	80
Apêndice 4 – Tabela-áudio da segunda tarefa .....	85
Apêndice 5 – Transcrição dos episódios .....	91
Apêndice 6 – Consentimento informado .....	121
Apêndice 7 – Grelha de autoavaliação do desempenho .....	122

# Apêndice 1 – Tarefa de sobreposição de dois quadrados



AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ENGENHEIRO DUARTE PACHECO

Departamento de Matemática e Ciências Experimentais

Matemática 6.º Ano

Instrumento de Recolha de Elementos de Informação para fins investigativos

TAREFA DE INVESTIGAÇÃO EM GRUPO			
TEMA		TÓPICO   SUBTÓPICO	
Geometria		Figuras planas   Polígonos regulares e irregulares	
Nome _____	N.º ____	Nome _____	N.º ____
Nome _____	N.º ____	Data _____	Turma 6.º ____

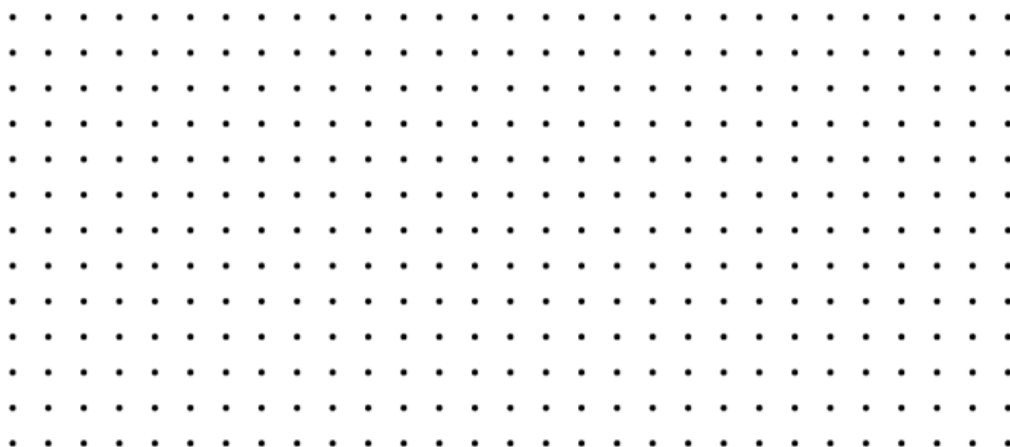
## Tarefa 1 – Sobreposição de quadrados

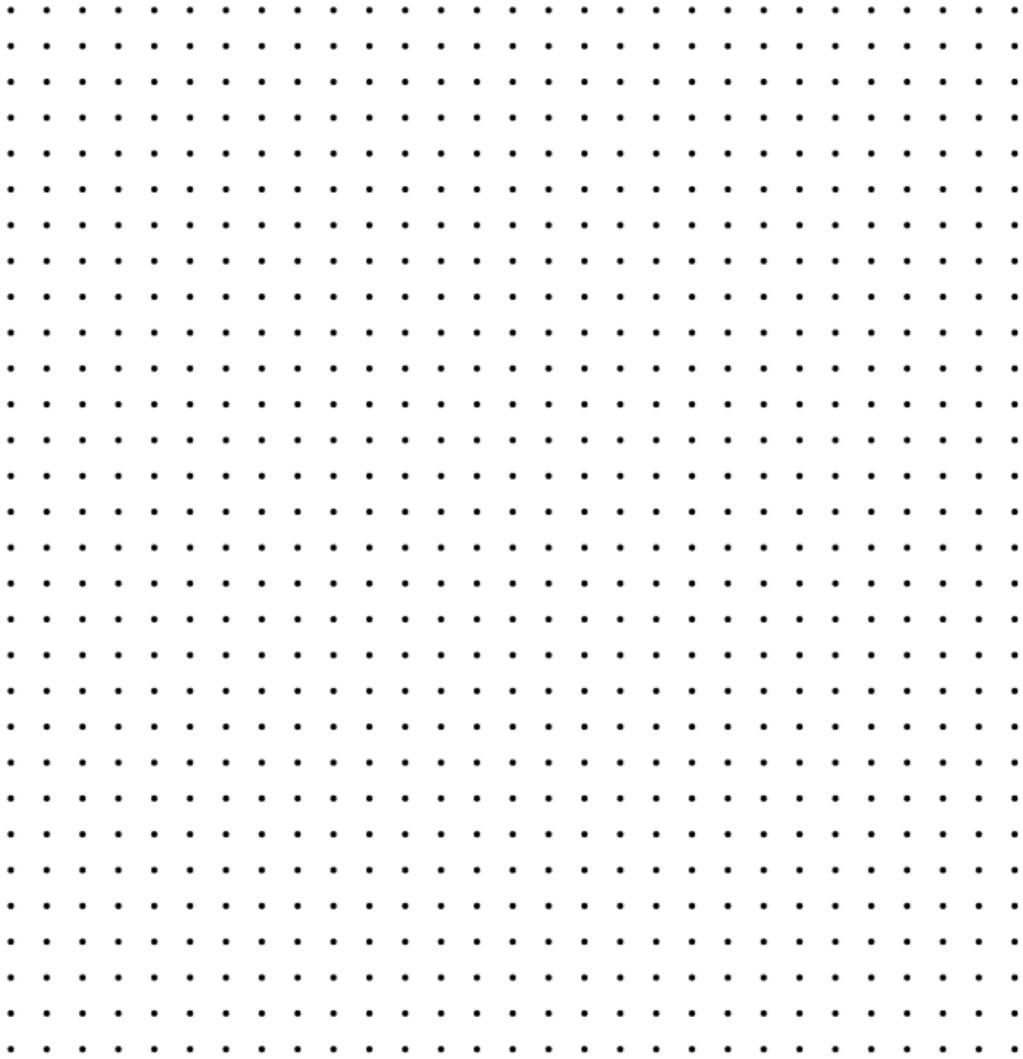


Porta da Harmonia (José de Almada Negreiros, 1957)

1. Que figuras se podem obter com a sobreposição de dois quadrados?

Descubram e representem-nas no ponteadado.





2. Como se classifica cada um dos polígonos representados?

---

---

---

---

---

---

Adaptado de Tayeh, C. (2006). Solutions to the What's the overlap? Problem. *Teaching Children Mathematics*, 13 (1), 42-44.

## Apêndice 2 – Tarefa de sobreposição de dois triângulos



AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ENGENHEIRO DUARTE PACHECO

Departamento de Matemática e Ciências Experimentais

Matemática 6.º Ano

Instrumento de Recolha de Elementos de Informação para fins investigativos

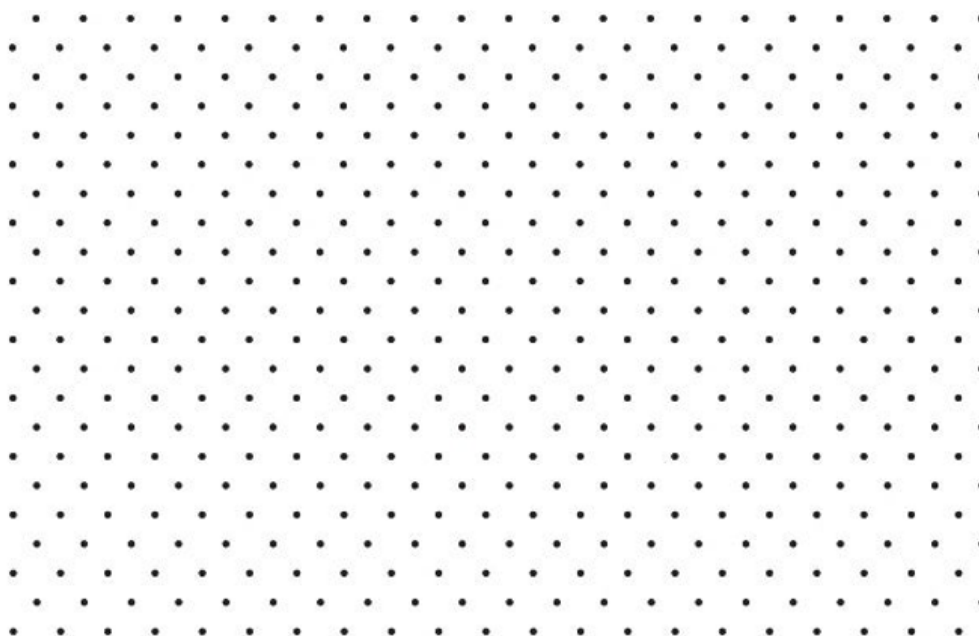
TAREFA DE INVESTIGAÇÃO EM GRUPO	
TEMA	TÓPICO   SUBTÓPICO
Geometria	Figuras planas   Polígonos regulares e irregulares
Nome _____ N.º ____	Nome _____ N.º ____
Nome _____ N.º ____	Data _____ Turma 6.º ____

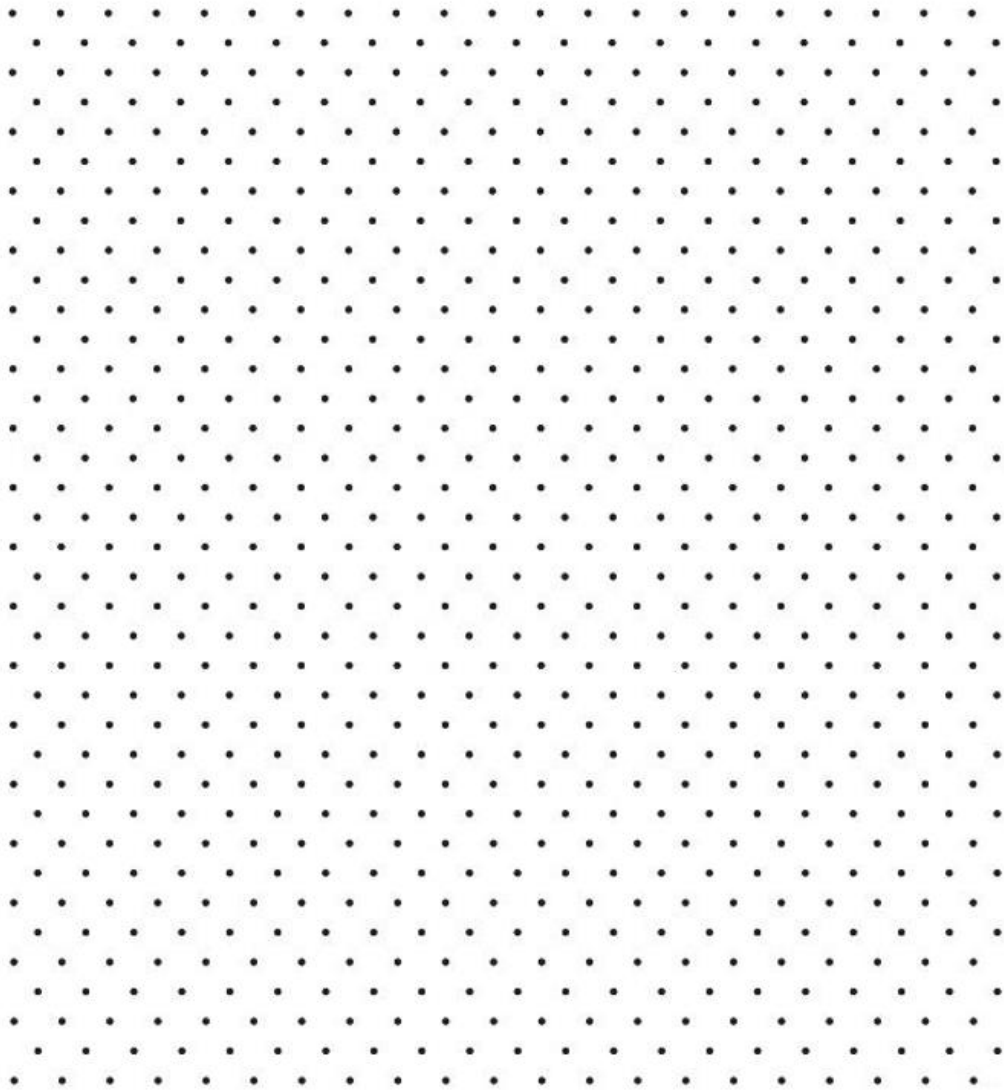
### Tarefa 2 – Sobreposição de triângulos

Utilizando, à semelhança da tarefa anterior, a técnica da sobreposição de figuras, propõe-se um novo desafio.

1. Que figuras se podem obter com a sobreposição de dois triângulos?

Descubram e representem-nas no ponteadado.





2. Como se classifica cada um dos polígonos representados?

---

---

---

---

---

---

Adaptado de Tayeh, C. (2006). Solutions to the What's the overlap? Problem. *Teaching Children Mathematics*, 13 (1), 42-44.

### Apêndice 3 – Tabela-áudio da primeira tarefa

Dimensões de investigação:

- (i) Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno.
- (ii) Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor.
- (iii) Iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno.

Data: 12 de março de 2024

Gravação: Áudio

Assunto: Sobreposição de dois quadrados

<b>Introdução da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
00.03.12	A professora questiona sobre qual será o objetivo da tarefa tendo por base os materiais disponibilizados.	3
00.03.40	A professora questiona como se designam os polígonos disponibilizados em papel celofane.	3
00.04.13	A professora questiona sobre o que se pode observar na figura <i>Porta da Harmonia</i> , de José de Almada Negreiros, contextualizando a tarefa.	3
00.06.11	A professora explicita os objetivos para a tarefa, assim como as suas etapas de concretização.	3
00.08.07	A professora apresenta um exemplo de sobreposição no quadro e reforça os objetivos para a tarefa.	3

<b>Realização da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
<b>Grupo 1</b>		
00.21.06	Os alunos encontram uma estratégia para facilitar a transposição de um polígono para o papel ponteadado.	1

00.21.59	A professora e os alunos discutem sobre a classificação do polígono encontrado.	2
00.31.32	Os alunos encontram uma nova estratégia para conceber outro polígono.	1
01.00.13	A professora e os alunos argumentam sobre a diferença entre um quadrado e um paralelogramo.	2
<b>Grupo 2</b>		
00.09.16	Os alunos discutem a área e a posição do polígono a transpor para o papel pontado.	1
00.14.28	Os alunos discutem se um retângulo consiste num polígono regular ou irregular.	1
00.23.08	Os alunos descobrem que o octógono poder ser dividido em oito triângulos.	1
00.25.46	A professora e os alunos conversam sobre o facto da distância na diagonal entre os pontos do papel pontado ser maior que a distância em comprimento.	2
00.35.42	Os alunos argumentam sobre o facto do polígono se classificar como pentágono ou não, devido à sua irregularidade.	1
00.29.26	A professora sugere movimentos de rotação com os quadrados.	3
00.43.52	Os alunos debatem sobre a definição de “hexágono”.	1
<b>Grupo 4</b>		
00.58.11	A professora sugere movimentos de rotação com os quadrados.	3
01.05.43	Os alunos discutem o conceito de sobreposição.	1
<b>Grupo 5</b>		
00.34.33	A professora sugere movimentos de rotação com os quadrados.	3
00.37.55	Os alunos sistematizam os seus conhecimentos sobre a classificação de polígonos consoante o número de lados.	1
<b>Grupo 6</b>		

00.11.38	A professora e os alunos argumentam sobre a diferença entre polígonos regulares e irregulares.	3
00.12.29	Os alunos conversam sobre o facto da distância na diagonal entre os pontos do papel pontado ser maior que a distância em linha reta.	1
00.43.13	A professora demonstra como transformar um pentágono num hexágono.	2
<b>Grupo 7</b>		
00.20.48	A professora desconstrói o significado de “sobreposição” remetendo para o conceito de “interceção”.	2
00.44.46	Os alunos discutem estratégias para facilitar a transposição de um polígono para o papel pontado.	1

<b>Discussão da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
01.18.48	A professora solicita aos grupos que selecionem duas das figuras encontradas e que as apresentem à turma.	3
01.19.37	Um grupo apresenta as suas figuras selecionadas: quadrado e triângulo.	1 2
01.20.38	A professora questiona se algum outro grupo encontrou um quadrado a partir de uma posição de sobreposição diferente.	3
01.22.01	A professora solicita a classificação do triângulo encontrado em termos dos lados e dos ângulos.	3
01.22.55	A professora questiona se outro grupo encontrou um triângulo com as mesmas características a partir de uma posição de sobreposição diferente.	3
01.23.48	Outro grupo apresenta as suas figuras selecionadas: octógono e hexágono.	1 2
01.23.56	A professora questiona a sobre a definição de “octógono”.	3

01.24.13	A professora questiona se algum grupo encontrou um octógono a partir de uma posição de sobreposição diferente.	3
01.26.12	A professora questiona a sobre a definição de “hexágono”.	3
01.26.15	A professora solicita a classificação do hexágono encontrado como polígono regular ou irregular.	3
01.26.29	A professora questiona se outro grupo encontrou um hexágono a partir de uma posição de sobreposição diferente.	3
01.27.17	Outro grupo apresenta as suas figuras selecionadas: retângulo e quadrilátero.	1 2
01.27.24	A professora questiona porque é que um retângulo se classifica como quadrilátero.	3
01.27.24	A professora questiona se todos os quadriláteros possuem quatro lados.	3
01.29.39	Outro grupo apresenta as suas figuras selecionadas: pentágono e heptágono.	1 2
01.30.15	A professora questiona se outro grupo encontrou um pentágono a partir de uma posição de sobreposição diferente e se estes são regulares ou irregulares.	3
01.31.18	A professora solicita a definição de “heptágono”.	3
01.32.06	A professora questiona sobre a diferença entre um heptágono e um octógono.	3
01.33.12	Outro grupo apresenta as suas figuras selecionadas: quadrilátero e retângulo.	1 2
01.33.25	A professora questiona se algum grupo encontrou o mesmo quadrilátero .	3
01.35.18	Outro grupo apresenta as suas figuras selecionadas: retângulo e pentágono.	1 2
01.35.56	A professora questiona se conhecem a origem do termo “retângulo”.	3
01.36.28	A professora questiona se um quadrado se considera um retângulo.	3

01.38.04	A professora questiona se conhecem algum quadrilátero com todos os lados iguais, porém, que não possua todos os ângulos retos.	3
01.39.06	A professora questiona sobre a classificação dos ângulos do losango.	3
01.39.45	A professora questiona se um quadrado é, em simultâneo, um retângulo e um losango.	3
01.41.10	A professora questiona se é possível construir um losango apenas com ângulos obtusos.	3
01.47.17	O último grupo apresenta as suas figuras seleccionadas: heptágono e quadrado.	1 2
01.47.23	A professora solicita que caracterizem os lados do heptágono.	3
01.48.05	A professora questiona sobre a amplitude dos ângulos do quadrado.	3
01.48.10	A professora questiona se todos os ângulos retos possuem uma amplitude de $90^\circ$ .	3
01.48.34	A professora questiona sobre a designação de um ângulo com uma amplitude de $180^\circ$ .	3

<b>Sistematização das aprendizagens matemáticas</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
01.49.00	A professora questiona qual a sua perspetiva sobre a tarefa realizada.	3
01.49.04	A professora questiona sobre quais as aprendizagens construídas, sintetizando-as.	3
01.49.20	A professora apresenta a próxima tarefa de investigação.	3

#### Apêndice 4 – Tabela-áudio da segunda tarefa

Dimensões de investigação:

- (i) Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao aluno.
- (ii) Iniciativa comunicativa do aluno direcionada ao professor.
- (iii) Iniciativa comunicativa do professor direcionada ao aluno.

Data: 13 de março de 2024

Gravação: Áudio

Assunto: Sobreposição de dois triângulos

<b>Introdução da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
00.02.34	A professora questiona sobre qual será o objetivo da nova tarefa tendo por base os materiais disponibilizados.	3
00.03.39	A professora explicita os objetivos para a nova tarefa, remetendo para a análise da classificação dos triângulos disponibilizados em termos dos lados e dos ângulos.	3

<b>Realização da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
<b>Grupo 1</b>		
00.09.05	A professora alude para a classificação dos triângulos em termos dos lados e dos ângulos.	3
00.25.16	Os alunos consideram que o polígono com maior número de lados possível a partir da sobreposição dos dois triângulos é o hexágono.	1
00.30.55	Os alunos deliberam as tarefas de cada um de modo a otimizar as transposições dos polígonos para o papel pontado.	1
<b>Grupo 2</b>		

00.08.00	A professora alude para a classificação dos triângulos em termos dos lados e dos ângulos.	3
00.14.59	A professora questiona se consideram o processo de sobreposição de triângulos mais complexo do que a sobreposição de quadrados.	3
00.15.23	Os alunos discutem acerca do comprimento dos lados na transposição do triângulo escaleno para o papel ponteadado.	1
<b>Grupo 3</b>		
00.10.46	A professora alude para a classificação dos triângulos em termos dos lados e dos ângulos.	3
00.18.39	A professora esclarece a dúvida em relação à classificação do polígono transposto para o papel ponteadado.	2
00.21.00	A professora e os alunos discutem a possibilidade de um triângulo equilátero possuir um ângulo reto.	2
<b>Grupo 4</b>		
00.19.56	Os alunos encontram uma estratégia para facilitar a transposição de um polígono para o papel ponteadado.	1
00.37.16	A professora e os alunos discutem a justificação para não se conseguir obter um heptágono com a sobreposição de dois triângulos.	3
00.42.53	Os alunos debatem sobre a diferença entre um triângulo equilátero e um triângulo escaleno.	1
<b>Grupo 5</b>		
00.13.46	Os alunos encontram uma estratégia para encontrar polígonos a partir da sobreposição dos triângulos.	1
00.30.36	Os alunos fazem a analogia entre o polígono encontrado e um morcego.	1
<b>Grupo 6</b>		
00.17.50	Os alunos encontram uma estratégia para encontrar polígonos a partir da sobreposição dos triângulos.	1

00.21.59	Os alunos discutem sobre a possibilidade de fazer um heptágono e um octógono com a sobreposição dos dois triângulos.	1
<b>Grupo 7</b>		
00.09.48	A professora alude para a classificação dos triângulos em termos dos lados e dos ângulos.	3
00.24.28	A professora auxilia os alunos na transposição de um polígono para o papel ponteadado.	3
00.27.04	Os alunos discutem sobre a possibilidade de fazer um polígono com sete lados.	1

<b>Discussão da tarefa</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
00.54.14	A professora solicita que deem a sua opinião acerca da nova tarefa (comparativamente à anterior).	3
00.55.05	A professora solicita a definição de “triângulo equilátero”.	3
00.55.53	A professora solicita que deem a sua opinião relativamente à compreensão dos procedimentos.	3
00.56.20	Um aluno remete para o facto de a figura com maior número de lados a criar a partir da sobreposição de dois triângulos ser um hexágono; bem como a figura com maior número de lados a criar a partir da sobreposição de dois quadrados ser um octógono.	1 2
00.56.49	A professora solicita que se expressem acerca do processo até encontrarem a todas as figuras a partir da sobreposição.	3
00.57.02	A professora questiona os grupos com triângulos irregulares sobre a dificuldade sentida relativamente à tarefa anterior (com polígonos regulares).	3

00.57.48	A professora questiona aos grupos com triângulos isósceles como se caracterizam estes em termos dos ângulos.	3
00.58.50	A professora questiona aos grupos quais foram as estratégias utilizadas para encontrar os polígonos.	3
01.24.13	A professora questiona se algum grupo encontrou um octógono a partir de uma posição de sobreposição diferente.	3
01.01.01	A professora dá indicação do início das apresentações de um dos polígonos encontrados pelos grupos.	3
01.01.07	Um grupo com triângulos escalenos apresenta a sua figura selecionada: quadrilátero.	1 2
01.01.32	A professora questiona se o outro grupo com triângulos iguais encontrou o mesmo quadrilátero, pelo mesmo processo.	3
01.02.24	Outro grupo com triângulos escalenos apresenta a sua figura selecionada: pentágono.	1 2
01.02.30	A professora questiona sobre a definição de “pentágono”.	3
01.02.40	A professora questiona se o outro grupo com triângulos iguais encontrou o mesmo pentágono, pelo mesmo processo.	3
01.02.54	A professora questiona se o outro grupo com triângulos diferentes encontrou o mesmo pentágono, pelo mesmo processo.	3
01.04.30	A professora questiona sobre a definição de “triângulo isósceles” e qual a sua classificação em termos dos ângulos.	3
01.04.45	A professora questiona o que significa possuir um “ângulo reto”.	3
01.05.06	Um grupo com triângulos isósceles apresenta a sua figura selecionada: pentágono.	1 2
01.06.04	Outro grupo com triângulos isósceles apresenta a sua figura selecionada: triângulo (isósceles).	1 2

01.06.30	A professora remete para as semelhanças entre o triângulo encontrado e os próprios triângulos em papel celofane utilizados para a sobreposição.	3
01.07.02	A professora questiona se têm conhecimento de qual a área da “parte pequena” em relação à “parte grande” caso a sobreposição for feita exatamente no ponto médio.	3
01.08.55	A professora questiona sobre a definição de “triângulo equilátero” e qual a sua classificação em termos dos ângulos.	3
01.09.42	A professora questiona se têm conhecimento da soma dos ângulos internos de um triângulo.	3
01.10.13	Um grupo com triângulos equiláteros apresenta a sua figura selecionada: hexágono.	1 2
01.10.40	A professora questiona se o outro grupo com triângulos escalenos encontrou o mesmo hexágono.	3
01.10.46	A professora questiona se o outro grupo com triângulos iguais encontrou o mesmo hexágono, pelo mesmo processo.	3
01.11.43	Outro grupo com triângulos equiláteros apresenta a sua figura selecionada: hexágono.	1 2
01.12.36	O último grupo, também com triângulos equiláteros, apresenta a sua figura selecionada: losango.	1 2
01.12.46	A professora questiona sobre a definição de “losango”.	3
01.13.38	A professora questiona se têm conhecimento da soma dos ângulos internos de um quadrilátero e se as regras se mantêm para todos eles.	3

<b>Sistematização das aprendizagens matemáticas</b>		
Tempo	Comentários	Dimensão(ões) de investigação
01.15.24	A professora solicita que comentem ambas as tarefas realizadas.	3

01.20.47	A professora conclui referindo que a matemática é “uma forma de olhar o mundo”.	3
----------	---	---

## Apêndice 5 – Transcrição dos episódios

### 1. Apresentação da tarefa

#### Tarefa 1

Professora: – Observando os materiais que têm à vossa frente, que tarefa é que acham que vamos fazer hoje?

Benedita: – Desenhos com figuras.

Francisco: – Talvez criar figuras.

Professora: – Boa!

Professora: – E que polígonos são esses que temos em cima da mesa?

Alunos (em simultâneo): – Quadrados.

Professora: – E que polígonos são esses que temos em cima da mesa?

Alunos (em simultâneo): – Quadrados.

Professora: – Porque é que se classificam como quadrados?

Tomás: – Têm quatro lados iguais [e quatro ângulos iguais].

Professora: – Conhecem algum polígono com quatro lados que não sejam todos iguais?

Alice: – Por exemplo o retângulo [não quadrado].

Professora: – Relativamente a esta figura, que também têm na ficha de trabalho, logo na primeira página, o que conseguem observar?

Bárbara: – Três quadrados, uns sobrepostos em cima dos outros.

Professora: – Salvador, queres acrescentar alguma coisa?

Salvador: – Vejo três quadrados e um triângulo.

Professora: – E o triângulo resulta do quê?

Gabriel: – Da parte que une os quadrados.

Bárbara: – Que é a parte da sobreposição dos quadrados.

Professora: – Vem por favor mostrar, ao quadro, o que estás a tentar explicar.

Bárbara: – Temos aqui este quadrado e este maior que faz a sobreposição. Este está desnivelado, ou seja, não está exatamente na mesma linha que o outro, criando um triângulo.

Professora: – Esta é uma obra de José de Almada Negreiros, um artista que utilizava muito a geometria na sua arte. É uma coisa exatamente deste género que vamos fazer hoje. Aí têm dois quadrados em papel celofane, um azul e um vermelho, e ao sobrepô-los obtém-se uma nova cor.

Alice: – Roxo!

Professora: – Sim, um castanho para o roxo. Então, o objetivo é que consigam encontrar o máximo de figuras possível com a sobreposição dos quadrados e que, depois, as transponham para o papel pontado da ficha. Não é preciso ser na dimensão real, façam-nas mais pequenas. No final da segunda página, vão classificar os polígonos que encontraram. Por fim, vamos fazer uma apresentação à turma.

Professora: – Todos a olhar para o quadro. Por exemplo, se encontrarmos este quadrado nesta posição, não passamos só o quadrado que encontrámos! Passamos, também, a posição das figuras que fazem a sobreposição.

Lourenço: – E pintamos o que está em comum.

Professora: – Sim. Pintam a parte da sobreposição.

## Tarefa 2

Professora: – Alguém sabe o que vamos fazer hoje?

Bárbara: – Ao invés de fazer a sobreposição de quadrados, vamos sobrepor dois triângulos.

Professora: – Muito bem. Ontem encontramos dois tipos de figuras, lembram-se?

Francisco: – Sim. Figuras regulares e irregulares.

Professora: – Então expliquem lá qual é a diferença.

Salvador: – As figuras regulares têm os lados todos iguais e as figuras irregulares têm os lados diferentes.

Professora: – Boa! Então, hoje, como vocês já perceberam, ao invés de quadrados, temos triângulos, aliás, vários tipos de triângulos. Cada grupo deve olhar para o tipo de triângulo que tem à frente, em termos de lados e de ângulos e então. Depois no final iremos discutir um bocadinho essas diferenças. Podem começar.

## 2. Realização da tarefa

Aluno-aluno

Tarefa 1

Gonçalo: – Faz de oito [polígono de oito lados – octógono].

Mateus: – Este fica, assim, na metade. Fazemos assim: daqui até aqui, e depois descemos!

Gonçalo: – Sim, pode ser.

Mateus: – E descemos quantos?

Gonçalo: – Tem de ser sete para fazer um quadrado.

Gonçalo: – Olha, fazemos este aqui maior até chegar a estas pontas. Fazemos o triângulo assim.

Mateus: – Ah! Já estou a perceber. Fica aqui no meio e depois vai até às pontas

Gonçalo: – Sim, é isso!

Madalena: – Este vai ser aqui, este vai ser aqui, e aqui é o meio.

Constança: – Não, tem de ser mais pequeno.

Salvador: – Fazes aqui este com seis.

Madalena: – Começo aqui, certo?

Salvador: – Até podes começar daqui.

Constança: – Sim, assim dá uma margem.

Salvador: – Este retângulo é irregular.

Madalena: – Não, é regular!

Salvador: – Esse é irregular porque os lados não são todos iguais.

Salvador: – Um, dois, três, quatro, cinco. É um pentágono.

Constança: – Não, não é...

Salvador: – É sim! É um pentágono!

Madalena: – Não é.

Constança: – Parece mais um diamante com uma pérola em cima.

Salvador: – Sim, mas é um pentágono!

Constança: – Ok. Então faz lá esse pentágono.

Alice: – Vamos fazer um hexágono.

Tomás: – Sim, um polígono de seis lados.

Aurora: – Sete!

Alice: – Seis lados.

Bárbara: – Vou pintar esta parte aqui.

Santiago: – É melhor pintares por dentro.

Bárbara: – Sim, é esta parte aqui.

Santiago: – Esta parte?

Esperança: – Ah, pois!

Santiago: – Esta é a parte comum dos dois quadrados juntos.

Esperança: – É a sua sobreposição.

Vitória: – Resumindo... com dois lados não temos nenhum polígono. É impossível.

Mafalda: – Pois é.

Vitória: – Já com três lados é um triângulo, com quatro é um quadrilátero, com cinco é um pentágono, com seis é um hexágono, com sete é um heptágono, com oito é um octógono, com nove... não sei.

Lourenço: – É um eneágono.

Vitória: – Então e o polígono com dez lados?

Lourenço: – É um decágono.

Mafalda: – Não. Com doze lados é que é decágono [incorreto, com doze lados é dodecágono]. Com dez também não sei.

Diana: – Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Mas porque é que este fica maior? Eu não percebo!

Vicente: – Porque é de lado... na diagonal. Acho que fica sempre maior.

Francisco: – É maior ou parece maior? Hum... cá me parece que é mesmo maior.

Vicente: – Na diagonal a distância é sempre maior.

Francisco: – É verdade, é verdade.

Gabriel: Já sei o que fiz mal. Acho que se eu começar do outro lado...

Benedita: Este tem de bater aqui. Fazes assim... e passas por dentro outra vez.

Gabriel: Ah... já entendi!

## Tarefa 2

Mateus: – Seis.

Martim: – Porquê?

Gonçalo: – Porque se tu vires assim cada um só tem três partes.

Martim: – Não estou a perceber porque é que o máximo é seis.

Mateus: – Só podemos fazer com seis lados porque são três mais três. Por isso não dá para fazer sete ou oito.

Gonçalo: – Se fosse quatro mais quatro, eram oito.

Gonçalo: – O Mateus põe a régua, eu faço a linha e o Martim pinta.

Martim: – Ok, eu pinto.

Gonçalo: – Mas é para pintares bem!

Martim: – Eu pinto muito feio.

Gonçalo: – Não faz mal. Tenta ter cuidado.

Madalena: – Então daqui faz-se seis. Como este é oito, este é seis.

Salvador: – Doze?

Madalena: – Não, seis. Daqui temos de fazer seis.

Constança: – Não!

Salvador: – Daqui fazemos quatro e daqui fazemos seis.

Madalena: – Então faz-se oito, quatro e seis.

Bárbara: – Já sei o que é que tu fazes: vais pegar na pontinha do outro triângulo e  
juntar aqui.

Santiago: – Mas já não tenho espaço... temos de apagar e fazer de novo.

Bárbara: – Sim, então é melhor mesmo fazermos aqui.

Santiago: – Depois se fizermos algum mais pequeno faz-se aqui.

Bárbara: – Ok.

Santiago: – Então, mas o triângulo é equilátero ou escaleno?

Bárbara: – Equilátero.

Santiago: – É que eu não sei qual é que tem todos os lados iguais, se é o equilátero  
ou escaleno.

Bárbara: – O equiláteros tem todos os lados iguais. Os escaleno não têm nenhum  
lado igual.

Mafalda: – Faz o triângulo.

Lourenço: – Não vale a pena, isto é complicado.

Vitória: – Faz como se fossem fatias de queijo.

Lourenço: – Ah! É verdade!

Vitória: – Bora lá fazer fatias de queijo.

Mafalda: – A mim parece-me um morcego! Virado para mim parece um morcego.

Lourenço: – Verdade. É um casa-morcego.

Mafalda: – Pois é.

Francisco: – Aqui dá seis, acho eu. Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Mas se deixarmos uma pontinha... Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

Vicente: – Dá seis.

Francisco: – Vou fazer outra coisa.

Diana: – Estamos a tentar encontrar um heptágono?

Vicente: – Sim.

Francisco: – Temos de deixar pontinhas.

Diana: – Eu queria que fizéssemos um heptágono ou então um octógono.

Francisco: – Pode ser um octógono.

Vicente: – Não dá para fazer com sete e não dá para fazer com oito.

Francisco: – Dá, Vicente.

Vicente: – Não dá!

Diana: – Tudo é possível se tu tentares.

Vicente: – Então qual é a tua ideia Francisco?

Francisco: – A minha ideia é fazer coisas aleatórias.

Gabriel: – Será que existe mesmo um com sete [polígono com sete lados]?

Benedita: – Assim tem seis.

Gabriel: – Eu acho que isto é capaz de ser um bocado impossível.

Benedita (referindo-se a outro grupo): – Bárbara, vocês já encontraram com sete?

Bárbara: – Não.

Benedita: – Então olhem, não sei, é capaz mesmo de ser.

Aluno-professor

Tarefa 1

Mateus: – Professora, fizemos outro!

Professora: – Boa! E como se classifica esse polígono?

Mateus: – Então... é um triângulo.

Professora: – Será mesmo um triângulo? Quantos lados tem?

Gonçalo: – Ah, tem quatro.

Professora: – Tem mesmo quatro? Um, dois, três, quatro, cinco.

Mateus: – É um pentágono!

Professora: – Exato. É um pentágono.

Mateus: – Professora, fizemos o nosso hexágono!

Professora: – Este polígono não me parece bem um quadrado... parece-me mais um paralelogramo.

Gonçalo: – Sim, mas nós medimos e todos os lados tiveram quatro centímetros e meio.

Professora: – Não é só terem quatro centímetros e meio. Os lados do polígono têm de ser perpendiculares. Esta linha, ao invés de estar aqui, deveria estar aqui. Estão a entender o que estou a tentar explicar?

Mateus: – Então também esta deveria estar aqui...

Professora: – Exatamente!

Benedita: – Professora, temos uma dúvida...

Salvador: – É que o quadrado fica maior assim na diagonal.

Professora: – É verdade, em comprimento a medida é sempre mais curta que na diagonal.

Francisco: – Acho que encontrámos um pentágono, professora: um, dois, três, quatro, cinco.

Professora: – E se colocarem esta pontinha para fora?

Francisco: – Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

Diana: – Passa a ser um hexágono.

Professora: – Isso mesmo.

Gabriel: – Professora, veja aqui uma coisa connosco. Temos esta posição assim, como é que nós sabemos o que temos de pintar?

Professora: – Então, qual é a parte sobreposta?

Gabriel: – A parte sobreposta são os cantos dos quadrados.

Professora: – Será? Benedita, nesta figura consegues identificar a sobreposição?

Benedita: – Penso que seja a parte do meio.

Gabriel: – Ah! Eu estava mesmo a pensar que era a parte de fora...

Professora: – No fundo a parte que tem de ser pintada é a interseção das duas figuras. Falámos desse conceito numa das aulas passadas. Lembram-se?

Gabriel: – Sim, lembro-me.

Professora: – Então, é exatamente a mesma coisa.

## Tarefa 2

Alice: – Professora, isto é, um quadrado ou um losango? É que aqui ficou um quadrado, mas aqui ficou um losango.

Professora: – Ficou porque fizeram estas partes mais achatadas, então ficou um losango [o que não corresponde efetivamente à realidade].

Alice: – Ah, então é um quadrilátero losango.

Alice: – Professora, isto é um triângulo equilátero retângulo? É, não é?

Professora: – Será que é retângulo? Se é equilátero pode ter um ângulo de  $90^\circ$ ?

Alice: – Acho que não.

Professora: – Pois não. Neste caso temos os  $180^\circ$  distribuídos pelos três ângulos.

Um triângulo equilátero tem todos os lados e todos os ângulos iguais.

Alice: – Então é acutângulo!

Professora: – Sim, todos os ângulos são agudos.

Professor-aluno

Tarefa 1

Professora: – Tentem lá rodar os quadrados.

Alice: – Era isso que eu ia fazer... Mas o Tomás tirou-mos.

Professora: – Ok. Que figura é que têm aí?

Alice: – Um triângulo...

Professora: – Observem a parte sobreposta. Ou seja, a parte de dentro.

Aurora: – Ah, um octógono!

Tomás: – Pois é. É um octógono.

Professora: – Se sobrepusermos assim, o que é que temos?

Bárbara: – Um octógono.

Santiago: – Exato.

Professora: – Temos tantas hipóteses... se posicionarmos mais para baixo ou mais para cima resultam logo outros polígonos.

Professora: – Mexam lá nas figuras assim.

Lourenço: – Ok.

Professora: – Mexam de formas diferentes, sem medo...

Professora: – Stop! Que polígono temos aqui?

Vitória: – Um, dois, três, quatro, cinco. É um pentágono!

Professora: – Há quadriláteros diferentes entre si, não há?

Francisco: – Sim.

Professora: – Então, há quadriláteros...

Vicente: – Definidos e indefinidos?

Francisco: – Não! Regulares e irregulares.

Professora: – Isso mesmo. E qual a diferença entre eles?

Diana: – Os regulares têm todos os lados iguais.

Professora: – Muito bem!

## Tarefa 2

Professora: – Já pensaram que tipo de triângulos têm aí?

Mateus: – Agudos.

Gonçalo: – E um obtuso.

Professora: – Exatamente. Então se tem um ângulo obtuso como se classifica?

Mateus: – Obtusângulo.

Professora: – E em termos dos lados, são iguais, são diferentes?

Mateus: – Dois iguais e um diferente.

Professora: – Será que dois são iguais?

Gonçalo: – Não! São todos diferentes.

Mateus: – Sim... são todos diferentes.

Professora: – Então e como se classifica?

Mateus: – É escaleno.

Professora: – Já pensaram que tipo de triângulos são esses em termos dos lados?

(silêncio)

Professora: – Como é que são os lados? São todos iguais, são todos diferentes?

Constança: – Dois são diferentes.

Madalena: – Não! São todos diferentes.

Professora: – Então se são todos diferentes, como se classifica?

(silêncio)

Professora: – Quando são todos iguais o triângulo é equilátero, certo?

Alunos (em simultâneo): – Sim.

Salvador: – Então são escalenos.

Professora: – Muito bem. Agora pensem lá como se classifica em termos dos ângulos.

(silêncio)

Professora: – Será obtusângulo?

Madalena: – É.

Professora: – Então tem um ângulo obtuso?

Alunos (em simultâneo): – Sim.

Professora: – É mais difícil esta tarefa?

Salvador: – Eu não acho.

Professora: – É igual?

Salvador: – A parte mais difícil é desenhar as figuras.

Professora: – Porque os lados são todos diferentes, não é?

Salvador: – Sim.

Professora: – Já pensaram que tipo de figuras têm aí?

Alice: – Como assim?

Professora: – Como se classificam em termos dos lados?

Alice: – Isósceles.

Professora: – E em termos dos ângulos?

Alice: – Agudo, agudo, obtuso.

Professora: – Será?

Alice: – Ah, não, reto. Agudo, agudo, reto.

Professora: – Então se tem um ângulo reto como se classifica?

Alice: – Triângulo isósceles retângulo.

Professora: – Então, encontraram um heptágono?

Santiago: – Não.

Professora: – Vamos pensar numa coisa. Quantos lados tem cada triângulo?

Alunos (em simultâneo): – Três.

Professora: – E os dois triângulos em conjunto?

Bárbara: – Tem seis.

Professora: – Então qual será a figura com mais lados que podemos encontrar?

Bárbara: – Hexágono.

Professora: – E ontem? Que figuras tínhamos?

Santiago: – Dois quadrados.

Professora: – Qual foi a figura com maior número de lados que encontramos?

Bárbara: – Octógono.

Professora: – Que tipo de triângulo é que têm?

Benedita: – Para mim é um triângulo equilátero.

Professora: – Muito bem. E o que é que isso significa?

Gabriel: – Que tem todos os lados iguais.

Professora: – Então e em termos dos ângulos?

Gabriel: – Tem todos os ângulos iguais.

Professora: – Qual será a medida dos ângulos?

Gabriel: – São agudos.

Professora: – Sim, são agudos, mas em termos de amplitude?

Gabriel: – 45°?

Professora: – Quanto é a soma dos ângulos internos todos juntos?

Benedita: – 180°.

Gabriel: – Ah! É verdade. Todos juntos dão 180°.

Professora: – Vamos pensar que este triângulo aqui é o amarelo. Qual é a posição em que desenhamos o cor-de-rosa?

Gabriel: – Assim, professora.

Benedita: – Ok. Então se o amarelo está aqui, o rosa será aqui.

### 3. Discussão da tarefa

#### Tarefa 1

Professora: – Vamos então iniciar a apresentação. Cada grupo vai apresentar duas das figuras que encontrou a partir da sobreposição dos dois quadrados.

Mateus: – A primeira figura que nós escolhemos encontramos colocando um dos quadrados em cima do outro, e assim formámos um novo quadrado.

Professora: – Alguém encontrou um quadrado através de outra posição?

Francisco: – Sim, assim!

Professora: – O que vocês fizeram foi exatamente o mesmo, só que mais para o lado.

Professora: – E agora, outra figura que tenham encontrado?

Gonçalo: – Um triângulo.

Professora: – Alguém sabe como se classifica aquele triângulo em termos dos lados?

Lourenço: – Escaleno.

Professora: – Será um triângulo escaleno?

Vitória: – Isósceles?

Professora: – Porquê isósceles? O que é um triângulo isósceles?

Salvador: – Tem apenas dois lados iguais.

Professora: – Então e em termos de ângulos, como se classifica aquele triângulo?

Mateus: – Três ângulos agudos.

Francisco: – Não, um deles é reto.

Professora: – E como é que se chama um triângulo que apresenta um ângulo reto?

Alice: – Retângulo.

Professora: – Mais alguém encontrou um triângulo isósceles retângulo?

Aurora: – Nós!

Professora: – Na mesma posição de sobreposição?

Tomás: – Não, nós metemos o quadrado vermelho em baixo, ao invés do azul.

Salvador: – Nós também encontrámos, mas colocámos o quadrado do lado oposto.

Salvador: – Encontrámos um octógono.

Professora: – E porque se classifica dessa forma?

Salvador: – Porque tem oito lados.

Professora: – Mostrem a posição de sobreposição. Alguém conseguiu encontrar o mesmo polígono, numa posição diferente?

Alunos (em simultâneo): – Não.

Professora: – E qual foi a segunda figura que escolheram?

Salvador: – Encontrámos também um hexágono.

Professora: – Porque se classifica como hexágono?

Salvador: – Porque tem seis lados.

Professora: – E será regular ou irregular?

Constança: – É irregular, não tem todos os lados iguais.

Vitória: – Encontrámos um retângulo, que é um quadrilátero.

Professora: – É um quadrilátero? Porquê?

Lourenço: – Tem quatro lados.

Professora: – Então mas todos os quadriláteros têm quatro lados?

Francisco: – Quadriláteros sim!

Professora: – De certeza?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

Professora: – E que mais encontraram?

Vitória: – Outro quadrilátero.

Professora: – Um quadrilátero que, nesse caso, que figura é?

Mafalda: – Um retângulo.

Professora: – Toda a gente concorda?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

Francisco: – Nós encontramos um pentágono irregular.

Professora: – Mais algum grupo encontrou um pentágono?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

Professora: – E os pentágonos são regulares ou irregulares?

Alunos (em simultâneo): – Irregulares.

Professora: – Ok. Então não encontramos nenhum pentágono com todos os lados iguais. Qual foi a outra figura que escolheram?

Francisco: – Fizemos um heptágono.

Professora: – O que é um heptágono? O que aí está representado é um heptágono?

Professora: – Francisco, ajuda o Vicente a fazer a representação no quadro.

Francisco: – Vou só buscar a ficha.

Professora: – E então, qual é a diferença entre o que tinham antes para o que têm agora?

Francisco: – Antes tinha oito lados.

Professora: – Sim, porque estava posicionado mais para baixo.

Esperança: – Fizemos um quadrilátero irregular.

Professora: – Mais algum grupo encontrou um quadrilátero assim?

Mateus: – Sim, mas não o desenhamos.

Professora: – Ok. Encontraram mas não o representaram.

Professora: – Qual é a outra figura?

Esperança: – Quadrilátero retangular.

Professora: – Porque é um retângulo, certo?

Santiago: – Sim.

Professora: – E porque é que é um retângulo? O que o diferencia de um quadrado?

Bárbara: – Porque o retângulo tem dois lados iguais, a pares, enquanto o quadrado tem todos os lados iguais.

Tomás: – Aqui temos um quadrilátero que é um retângulo composto por quatro lados.

Professora: – Caracterizem lá esse retângulo. Descrevam-no.

Tomás: – Tem dois lados iguais e outros lados diferentes.

Professora: – Dois mais pequenos e dois maiores, certo?

Tomás: – Sim.

Professora: – Sabem de onde vem a palavra retângulo?

Tomás: – Vem de “reto” e “ângulo”.

Professora: – Exato. Então porque é que é retângulo?

Tomás: – Tem ângulos retos.

Professora: – Quantos?

Tomás: – Quatro.

Professora: – E o quadrado? Também é um retângulo?

Tomás: – Não, o quadrado tem todos os lados iguais, então não pode ser um retângulo.

Professora: – Mas tem, ou não, os quatro ângulos retos?

Tomás: – Tem.

Professora: – Então é um retângulo, ou, não é?

Tomás: – Não.

Professora: – Porquê?

Tomás: – Porque não tem os lados diferentes. São todos iguais.

Professora: – Há alguém que pense de outra maneira?

Salvador: – O quadrado é um retângulo porque tem quatro ângulos retos. Não tem a ver com ser regular ou não.

Professora: – Então, no fundo, um quadrado é um retângulo regular. É isso?

Salvador: – Sim.

Professora: – Todos os outros concordam com o Salvador?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

Professora: – Conhecem algum outro quadrilátero com quatro lados iguais, mas que não tem os ângulos retos?

Vitória: – O losango.

Professora: – Porquê?

Vitória: – Tem os quatro lados iguais, mas os ângulos não são retos.

Professora: – Será que a Vitória tem razão?

Gabriel: – Eu acho que tem razão, os ângulos não são retos.

Professora: – Então, se não são retos, são o quê?

Gabriel: – Obtusos?

Professora: – São todos obtusos? Os quatro?

Gabriel: – Não. Dois são agudos.

Professora: – E será que podiam ser todos obtusos?

Alunos (em simultâneo): – Não!

Professora: – É retângulo se tiver os quatro ângulos retos. É losango se tiver os quatro lados iguais. É quadrado se tiver uma coisa e a outra. Então, todos os quadrados são retângulos e todos os quadrados são losangos. Verdadeiro ou falso?

Gonçalo: – Verdadeiro. Podem ser todos quadrados, mas são diferentes.

Vitória: – Têm os lados todos iguais e os ângulos também.

Professora: – Uma figura que tem os quatro ângulos retos e os quatro lados iguais, é ao mesmo tempo um retângulo e um losango?

Salvador: – Acho que não. Um losango não tem os quatro ângulos retos.

Professora: – E não pode ter? Salvador, vai desenhar no quadro um losango com quatro ângulos retos.

Salvador: – Esta figura tem os quatro lados iguais, mas não tem ângulos retos.

Professora: – Então, como tem os quatro lados iguais é um losango. É isso?

Salvador: – Não, porque...

Professora: – Desenha lá um losango diferente desse.

Professora: – Esse também é losango?

Salvador: – É.

Professora: – Diana, que figura é que o Salvador desenhou?

Diana: – Um quadrilátero irregular.

Professora: – De facto, um quadrado é ao mesmo tempo um quadrado e um losango. Mas nem todos os retângulos são quadrados e nem todos os losangos são quadrados.

Professora: – Vamos então continuar com a apresentação.

Lourenço: – Este é um pentágono irregular. Tem os lados todos diferentes.

Professora: – Mais algum grupo encontrou exatamente aquela figura?

Mateus: – Nós!

Diana: – Nós, encontramos! É esta.

Gabriel: – Esta figura é um heptágono. Tem sete lados.

Professora: – E como são os lados?

Gabriel: – É uma figura irregular.

Professora: – Sim. Porquê?

Gabriel: – Porque nem todos os lados são iguais.

Professora: É isso mesmo, são diferentes. E qual é a outra figura?

Gabriel: – Esta figura é um quadrado. Tem quatro lados e tem todos os ângulos retos.

Professora: – Os ângulos retos têm quantos graus?

Gabriel: – Noventa.

Professora: – Haverá algum ângulo reto que não tenha noventa graus?

Gabriel: – Não, não há.

Professora: – De certeza?

Tomás: – Para ser ângulo reto tem mesmo de ter noventa graus.

Professora: – Então e se tiver oitenta e nove graus? Já não é reto?

Alunos (em simultâneo): – Não!

Tomás: – É obtuso.

Francisco: – Não! É agudo!

Professora: – E se tiver cento e oitenta graus, são “dois retos”?

Gabriel: – Cento e oitenta... não!

Francisco: – É raso.

## Tarefa 2

Professora: – Gostava de saber o que acharam relativamente à tarefa de hoje. Se acharam mais difícil ou mais fácil que a de ontem.

Constança: – Acho que hoje foi um bocado mais difícil porque o nosso triângulo, que era escaleno, não permitia encontrar tantas figuras.

Professora: – Este grupo ficou então com o triângulo escaleno que era um bocadinho mais difícil de desenhar no papel por ter os lados todos diferentes.

Salvador: – Eu achei que foi praticamente igual, só foi um bocadinho mais difícil de desenhar porque os lados não eram todos iguais.

Professora: – E o vosso grupo, Gabriel?

Gabriel: – Nós tínhamos equiláteros.

Professora: – O que caracteriza um triângulo equilátero?

Gabriel: – Tem todos os lados iguais.

Professora: – E os ângulos também são todos iguais.

Professora: – O que acharam comparando com a tarefa de ontem?

Gabriel: – Eu gostei.

Professora: – Achaste mais fácil ou mais difícil?

Gabriel: – Achei mais fácil a de ontem.

Professora: – Benedita, concordas?

Benedita: – Sim.

Professora: – Porquê?

Benedita: – Nesta não conseguimos mesmo fazer mais figuras diferentes.

Professora: – Então e em termos de processo, ontem foi mais difícil perceberem aquilo que era para fazer?

Francisco: – Sim, porque foi a primeira vez que fizemos.

Gonçalo: – Sim, para mim ontem foi mais difícil de perceber.

Professora: – Qual foi a diferença de ontem para hoje?

Mateus: – Não sabia muito bem porque era a primeira vez.

Professora: – Pois, como era a primeira vez estavam um bocadinho perdidos. E agora desta vez?

Tomás: – Eu hoje achei mais fácil porque só deu para fazer até ao hexágono. Se somarmos todos os lados dos triângulos, dá seis, então não dá para fazer figuras com mais lados. Ontem dava para fazer até ao octógono.

Professora: – Porque é que ontem dava para encontrar um octógono?

Diana: – Porque cada quadrado tinha quatro lados.

Professora: – Exatamente.

Professora: – Então e como é que chegaram a estas figuras?

Santiago: – Hoje sobreposemos triângulos.

Professora: – E quem tinha triângulos que não eram regulares, o que é que achou?

Salvador: – Foi mais difícil para desenhar.

Professora: – Sim, tinha que se ter muito em conta o que se estava a observar, não é?

Mateus: – Sim, nem sempre podíamos fazer pelos pontos.

Professora: – É verdade, quem ficou com o triângulo equilátero sempre tinha uma tarefa mais fácil em termos da transposição.

Professora: – E o vosso grupo ficou com que triângulo?

Alice: – Isósceles.

Professora: – E porque se classifica como isósceles?

Diana: – Tem só dois lados iguais.

Professora: – E em termos de ângulos?

Tomás: – Tem um ângulo reto.

Professora: – E quando um triângulo tem um ângulo reto como se chama?

Diana: – Retângulo.

Professora: – Então é um triângulo isósceles retângulo.

Professora: – Quem mais tinha o triângulo isósceles?

Vitória: – Nós.

Professora: – Mesmo assim encontraram imensas opções! Quantas foram?

Vitória: – Treze.

Professora: – Portanto, mesmo sendo mais difícil conseguiram encontrar muitas opções.

Professora: – Antes de começarmos a apresentação, digam-me só mais uma coisa, como é que pensaram para encontrar as figuras?

Alguns alunos (em simultâneo): – Foi ao calhas.

Professora: – Foi tudo ao calhas?

Vicente: – Não, tivemos criatividade!

Professora: – Toda a gente atirou uma figura para cima da outra a ver o que calhava?

Salvador: – Nós juntávamos as pontas com as pontas.

Professora: – Alguém tentou juntar pontas com lados?

Alguns alunos (em simultâneo): – Sim.

Professora: – E lados com lados?

Diana: – Sim.

Professora: – E lados com lados?

Diana: – Sim.

Professora: – Ok, vamos iniciar a apresentação. Cada grupo apresenta uma das figuras que descobriu.

Mateus: – Nós escolhemos o quadrilátero irregular.

Professora: – Explica lá isso melhor.

Mateus: – É um quadrilátero, tem quatro lados, e é irregular, ou seja, tem os lados diferentes.

Professora: – Quem tinha os mesmos triângulos também encontrou esta figura?

Constança: – Sim.

Professora: – Exatamente da mesma maneira?

Salvador: – Igual.

Madalena: – Nós fizemos um pentágono regular.

Professora: – O que é um pentágono?

Madalena: – É uma figura com cinco lados.

Professora: – E porque é que é regular?

Madalena: –Tem os lados iguais.

Professora: – O grupo com o mesmo tipo de triângulo, também encontrou um pentágono?

Gonçalo: – Sim.

Professora: – Da mesma forma?

Gonçalo: – Sim.

Professora: – Então e quem não tinha este tipo de triângulo, encontrou um pentágono regular?

Bárbara: – Sim.

Professora: – Da mesma forma?

Bárbara: – Sim, mais ou menos parecido.

Professora: – Que triângulos vos calharam?

Vitória: – Nós tínhamos os triângulos isósceles, com dois lados iguais.

Professora: – E em termos dos ângulos?

Vitória: – Tem um ângulo reto.

Professora: – Quantos graus tem um ângulo reto?

Lourenço: –  $90^\circ$ .

Professora: – Muito bem. Que figura escolheram apresentar?

Vitória: – O pentágono irregular a que demos o nome “casa-do-Batman”.

Professora: – Vou fazer-vos um desafio. Imaginem que aquela sobreposição está mesmo no ponto médio do lado. Qual acham que será a área do pequeno em relação ao grande?

Vitória: – Um quarto.

Professora: – Porquê?

Vitória: – Porque quatro vezes o pequeno dá o grande.

Professora: – Muito bem.

Professora: – E então, que triângulo é que vos calhou?

Francisco: – Equilátero, tem três lados iguais.

Professora: – E em termos dos ângulos?

Francisco: – São três ângulos agudos.

Professora: – Alguém sabe quanto mede cada um dos ângulos?

Francisco: –  $75^\circ$ ?

Professora: – Será  $75^\circ$ ?

Francisco: – Penso que sim, porque os  $90^\circ$  estão aqui. Tem de ser um pouco menos.

Gabriel: – A soma dos ângulos internos de um triângulo dá  $180^\circ$ .

Professora: – Sendo assim, qual é a amplitude de cada um?

Gabriel: – Tem de ser  $60^\circ$ .

Professora: – Boa, então agora falem da vossa figura.

Francisco: – Fizemos um hexágono irregular.

Professora: – Porque acham que é irregular?

Francisco: – Porque não tem todos os lados com a mesma medida.

Professora: – E se encaixarem mesmo bem os triângulos?

Francisco: – Bem, bem... fica regular.

Professora: – E os outros grupos com o mesmo tipo de triângulo, também encontraram?

Alguns alunos (em simultâneo): – Sim.

Professora: – Mesmo igual?

Bárbara: – Não.

Professora: – Então venham lá mostrar o vosso.

Bárbara: – Encontrámos um hexágono.

Professora: – Conta lá os lados.

Bárbara: – Um, dois, três, quatro, cinco, seis.

Professora: – Muito bem. Esse hexágono é regular ou irregular?

Bárbara: – É irregular.

Professora: – Toda a gente percebe o porquê de este ser irregular?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

Gabriel: – Os nossos triângulos são triângulos equiláteros. Têm todos os lados iguais e cada ângulo tem  $60^\circ$ . Fizemos um losango, que é um quadrilátero.

Professora: – Lembra-se porque é que um losango é um quadrilátero?

Gabriel: – Tem quatro lados.

Professora: – Afinal o que caracteriza um losango?

Vitória: – Quatro ângulos diferentes.

Professora: – Então e se a soma dos ângulos de um triângulo são  $180^\circ$ , qual é a soma dos ângulos de um quadrado?

Gabriel: – Se cada ângulo tem de ter  $90^\circ$  então os quatro têm  $360^\circ$ .

Professora: – Será que isto acontece com todos os quadriláteros?

Gabriel: – Alguns não têm ângulos retos.

Professora: – Sim, mas em termos da soma.

Gabriel: – Penso que sim.

#### 4. Sistematização das aprendizagens matemáticas

##### Tarefa 1

Professora: – O que descobriram hoje?

Diana: – Os polígonos.

Professora: – Sim, trabalhámos com polígonos.

Gabriel: – Aprendemos sobrepondo dois quadrados.

Professora: – Então, sobrepondo, neste caso, dois quadrados, conseguimos obter vários polígonos, não foi?

Alunos (em simultâneo): – Sim!

##### Tarefa 2

Professor: – Quem quer comentar as tarefas que fizemos ontem e hoje?

Salvador: – Eu gostei, foi uma novidade para mim e gostava de fazer mais vezes.

Mateus: – Eu também gostei e gostava de fazer mais.

Diana: – Gostei e achei que foi uma atividade diferente das que costumamos fazer.

Professora: – O que é que esta tarefa tem de diferente?

Salvador: – Podemos desenhar e encontrar figuras que já lá existiam mas não sabíamos da existência delas.

Professora: – O que é que vocês acham que é a Matemática?

Diana: – Contas.

Vicente: – Números.

Aurora: – Frações.

Professora: – E se eu vos disser que a Matemática é uma forma de olhar o mundo?

Francisco: – Sim, por acaso... se pensarmos nas casas.

## **Apêndice 6 – Consentimento informado**

Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

Apresento-me como Professora Estagiária e informo que, ao abrigo da colaboração entre o Agrupamento de Escolas Engenheiro Duarte Pacheco e a Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, irei permanecer na sala do(a) seu/sua educando(a) nas aulas de Matemática e Ciências Naturais, às segundas, terças e quartas-feiras que intervalam os dias 6 de fevereiro e 15 de maio do corrente ano letivo, na presença do Professor Marco Mendes enquanto Docente Cooperante.

Ademais, acrescento que será realizado um estudo de investigação com base no tema *Comunicação Matemática na Aprendizagem da Geometria*, sendo que os produtos que do mesmo resultarem serão exclusivamente utilizados na realização do relatório de prática de ensino supervisionada. Em acordo com os princípios éticos da investigação, garante-se que não serão divulgados quaisquer nomes que possam identificar os alunos, que os registos fotográficos serão somente das suas produções e que as gravações serão apenas da sua voz (formato áudio).

Agradecida pela disponibilidade,

---

**Cláudia Pinheiro**

Aluna n.º 68160 da Universidade do Algarve

## Apêndice 7 – Grelha de autoavaliação do desempenho



AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ENGENHEIRO DUARTE PACHECO

Departamento de Matemática e Ciências Experimentais

Matemática 6.º Ano

Instrumento de Recolha de Elementos de Informação para fins investigativos

TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO EM GRUPO	
TEMA	TÓPICO   SUBTÓPICO
Geometria	Figuras planas   Polígonos regulares e irregulares
Nome _____ N.º _____ Turma 6.º _____ Data _____	

### A minha Autoavaliação

Pinta, relativamente a cada vertente de aprendizagem (conceptual, procedimental e atitudinal), o espaço que crês que melhor caracteriza o teu desempenho ao longo das tarefas.

		Hipótese de Progressão das Aprendizagens (HPA)			
		Insuficiente	Melhorável	Bom	Desejável
<b>Aprendizagem Conceptual</b>	<i>Polígonos regulares e irregulares</i>	Não consigo identificar quaisquer figuras a partir da sobreposição dos quadrados e dos triângulos.	Identifico figuras a partir da sobreposição dos quadrados e dos triângulos, ainda assim, não consigo classifica-las como polígonos.	Identifico figuras a partir da sobreposição dos quadrados e dos triângulos. Consigo classifica-las como polígonos, porém, não consigo distinguir os regulares dos irregulares.	Identifico figuras a partir da sobreposição dos quadrados e dos triângulos. Consigo classifica-las enquanto polígonos e distingo os regulares dos irregulares.
<b>Aprendizagem Procedimental</b>	<i>Manipulação dos materiais</i>	Utilizo o material para brincar.	Não brinco com o material, no entanto, não tenho cuidado com ele.	Não brinco com o material e tenho cuidado com ele.	Não brinco com o material e tenho cuidado com ele. Além disso, incentivo os meus colegas a fazer o mesmo.
<b>Aprendizagem Atitudinal</b>	<i>Interação com os colegas</i>	Recuso-me a contribuir no desenvolvimento das tarefas e a trabalhar colaborativamente, assim como a participar na discussão oral entre os grupos.	Contribuo no desenvolvimento das tarefas trabalhando colaborativamente, no entanto, não participo na discussão oral entre os grupos.	Contribuo no desenvolvimento das tarefas trabalhando colaborativamente, porém, apenas participo na discussão oral entre os grupos quando solicitado(a) pela professora.	Contribuo no desenvolvimento das tarefas trabalhando colaborativamente e demonstrando empenho. Participo, também, na discussão oral entre os grupos por iniciativa própria.