



UNIVERSIDADE DO ALGARVE
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA

Distribuição de Cargas Elétricas em Superfícies Condutoras de Geometria Simples

Carla Isabel Martins Mendes Valentim

Projeto para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica e Eletrónica – Ramo de
Sistemas de Energia e Controlo

Trabalho efetuado sob a orientação de:

Professor Doutor José Manuel Guerreiro Gonçalves

2013

Declaração de autoria de trabalho

Declaro ser a autora deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Carla Isabel Martins Mendes Valentim

Copyright

A Universidade do Algarve tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS E DEDICATÓRIA

Gostaria de dedicar este trabalho a todos os alunos do curso de engenharia elétrica e eletrônica e aos docentes do departamento de engenharia eletrotécnica do instituto superior de engenharia, em especial ao meu orientador Dr. José Gonçalves, o meu mais profundo agradecimento pelo apoio e paciência prestados, porque sem ele este trabalho não seria possível.

Agradeço também à minha família e amigos, pelo apoio moral prestado e paciência pela minha ausência.

RESUMO

É interessante conhecer a forma como as cargas elétricas se distribuem num elemento condutor.

Como atualmente, pouco tem sido estudado acerca do comportamento da concentração das cargas elétricas em sólidos geométricos, o presente trabalho consiste em investigar e efetuar um estudo da distribuição de cargas elétricas em superfícies condutoras de geometria simples, recorrendo à análise matemática, a conhecimentos de eletromagnetismo e à utilização do método dos momentos, ou método dos potenciais constantes, para resolver informaticamente o problema, uma vez que a análise do método dos campos elétricos nulos no interior dos condutores se torna ainda mais complexo.

Foi apresentada uma nova formulação matemática, para alguns casos particulares da aplicação do método dos momentos, no estudo dos condutores cilíndricos e linhas condutoras.

Foi estudada a distribuição de cargas elétricas em sólidos de geometria simples. Foram efetuados cálculos e deduções, determinando os valores das grandezas elétricas em esferas, calotes, superfícies circulares, cilindros, cones e elipsoides. No final, foram apresentados quadros comparativos de algumas aplicações práticas, e tiradas conclusões para algumas das figuras mais interessantes estudadas.

Pretende-se que o presente trabalho sirva de base a futuros estudos mais aprofundados sobre distribuição de cargas elétricas em superfícies condutoras de geometria simples.

Palavras-chave:

Carga elétrica; potencial elétrico; energia elétrica; capacidade elétrica; densidade superficial de carga; esfera; cilindro.

ABSTRACT

It is interesting to know how electric charges are distributed in a conducting element.

As currently, little has been studied about the behavior of the concentration of electrical charges on geometric solids, this work is to carry out a study to investigate the distribution of electrical charges on conducting surfaces of simple geometry, using the mathematical analysis, the knowledge of electromagnetism and the use of the moment method, or constant potential method, by computer to solve the problem, since the analysis of the void electrical fields within conductors becomes even more complex.

Was presented a new mathematical formulation, for some particular cases of application of the moment method, in the study of cylindrical conductors and conductive lines.

It was studied the distribution of electric charges in simple geometry solids. Calculations and deductions were made, determining the values of electrical parameters in spheres, caps, circular surfaces, cylinders, cones and ellipsoids. At the end, were presented comparative tables for some practical applications, and draw conclusions for some of the leading figures.

It is intended that this study will serve as a basis for further investigation into the electrical charge distributions in conductive surfaces with simple geometry.

Keywords:

Electric charge; electric potential; electric energy; electric capacity; superficial charge density ; sphere; cylinder.

ÍNDICE DE MATÉRIAS

FORMULÁRIO	9
1. INTRODUÇÃO	13
2. MÉTODO DOS MOMENTOS	15
2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	16
2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO.....	17
3. DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM CILINDROS CONDUTORES.....	29
3.1 CILINDRO CONDUTOR DE COMPRIMENTO IGUAL AO DIÂMETRO.....	29
3.2 CILINDRO CONDUTOR COM ESFERA INSCRITA.....	48
3.3 CILINDRO CONDUTOR COM ESFERA CIRCUNSCRITA.....	56
3.4 CILINDRO CONDUTOR COMPRIDO	59
3.5 CILINDRO CONDUTOR CURTO	64
4. DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM ESFERAS CONDUTORAS.....	67
4.1 ESFERA CONDUTORA	67
4.2 INFLUÊNCIA ENTRE DUAS ESFERAS CONDUTORAS.....	73
4.3 CAPACIDADES ENTRE ESFERAS CONDUTORAS	80
4.4 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA	88
4.4.1 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi/3$	90
4.4.2 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi/2$	93
4.4.3 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = 2\pi/3$	96
4.4.4 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi$ (ESFERA COMPLETA)	99
4.5 SUPERFÍCIE CIRCULAR CONDUTORA	102

ÍNDICE

4.6	ELIPSOIDE	107
5.	DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM CONES CONDUTORES	111
5.1	CONE CONDUTOR COM $h/a = 3$	114
5.2	CONE CONDUTOR COM $h/a = 1$	117
5.3	CONE CONDUTOR COM $h/a = 0,5$	119
5.4	OBSERVAÇÕES SOBRE OS CONES CONDUTORES.....	121
6.	ESTUDO COMPARATIVO E APLICAÇÕES PRÁTICAS.....	123
6.1	COMPARAÇÕES ENTRE ALGUNS SÓLIDOS.....	123
6.2	ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS.....	125
7.	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	127
8.	BIBLIOGRAFIA.....	129
A.	COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS.....	131
	COORDENADAS CILÍNDRICAS ($\rho; \varphi; z$).....	131
	COORDENADAS ESFÉRICAS ($r; \theta; \varphi$).....	133
B.	PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE.....	135
	PERÍMETRO DA ELIPSE	135
	SUPERFÍCIE DO ELIPSOIDE.....	138
	VOLUME DO ELIPSOIDE.....	141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fio condutor, de raio r e comprimento L , com o potencial constante. _____	18
Figura 2.2 – Divisão do condutor em N segmentos e evolução qualitativa da densidade linear de carga λ . _____	21
Figura 2.3 – Divisão do condutor em N segmentos e evolução qualitativa da densidade superficial de carga σ . _____	21
Figura 2.4 – Exemplo: gráfico de λ (ou $\sigma = \lambda/(2\pi r)$) em função de y , para $L = 1\text{ m}$. _____	26
Figura 2.5 – Representação gráfica de uma linha aérea (equação da catenária), considerando vão unitário ($-1 \leq yk \leq 1$). Analogia com a distribuição de cargas num cilindro de comprimento finito. _	27
Figura 3.1 – Cilindro condutor de diâmetro igual ao comprimento e círculo inscrito no cilindro $R/h = 1$. _____	30
Figura 3.2 – Distribuição discreta de cargas elétricas num cilindro de material condutor σk , e pontos $ci; di$ para o cálculo do potencial constante. _____	31
Figura 3.3 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante (cilindro de diâmetro igual ao comprimento). _____	33
Figura 3.4 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , no cilindro em que $h/R = 1$. _	39
Figura 3.5 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' . Aproximação linear. _____	40
Figura 3.6 – Grelha de pontos para determinação dos potenciais no plano xy , do 1º quadrante do cilindro, a partir dos dados da Tabela 3.3. _____	42
Figura 3.7 – Mapa de linhas equipotenciais para σ' (ou $\tau' = cte.$) no 1º quadrante do plano xy do cilindro ($h/R = 1$). _____	44
Figura 3.8 – Mapa de linhas equipotenciais do cilindro condutor mais uma zona de ar (1º quadrante do plano xy – ver Figura 3.2). _____	45
Figura 3.9 – Cilindro condutor com esfera inscrita (1º quadrante do plano xy). _____	49
Figura 3.10 – Relação entre x ou y e θ . _____	50
Figura 3.11 – Superfícies laterais e circulares do cilindro, em função de θ . _____	50
Figura 3.12 – Mapa de linhas equipotenciais, em Volts, para a esfera inscrita no cilindro condutor de $R/h = 1$, para valor médio de $\sigma_1 = 5,30516\text{ nC/m}^2$. _____	55
Figura 3.13 – Mapa de linhas equipotenciais, em Volts, para o cilindro de diâmetro igual ao comprimento, inscrito na esfera condutora. _____	58
Figura 3.14 – Cilindro condutor comprido, com relação $L/D = h/R = 2$. _____	59
Figura 3.15 – Cilindro condutor comprido ($h > R$). _____	62
Figura 3.16 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante, no 1º quadrante do plano xy do cilindro comprido ($h/R = 2$). _____	63
Figura 3.17 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante, no 1º quadrante do plano xy do cilindro curto ($h/R = 1/2$). _____	64

Figura 4.1 – Determinação da distância d numa esfera condutora de raio R , em coordenadas esféricas.	67
Figura 4.2 – Determinação de uma superfície elemental dS , em coordenadas esféricas.	69
Figura 4.3 – a) Influência entre duas esferas próximas e carregadas simetricamente; b) Pontos de cálculo do potencial considerado constante, para a determinação de σ_k ($k = 0 \dots N - 1$).	73
Figura 4.4 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 20 m$ entre esferas $R = 0,1 m$.	76
Figura 4.5 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 1 m$ entre esferas $R = 0,1 m$.	76
Figura 4.6 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 0,25 m$ entre esferas $R = 0,1 m$.	77
Figura 4.7 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 0,21 m$ entre esferas $R = 0,1 m$.	77
Figura 4.8 – Gráficos dos valores dos potenciais, para distâncias entre esferas de: a) $d = 20 m$; b) $d = 1 m$; c) $d = 0,25 m$; d) $d = 0,21 m$.	79
Figura 4.9 – Duas esferas condutoras: potenciais nos pontos A e B .	80
Figura 4.10 – Duas esferas condutoras com potenciais em relação ao ponto P .	82
Figura 4.11 – Gráfico representativo de VP , em pu, para diversos valores de d .	84
Figura 4.12 – Duas esferas condutoras carregadas simetricamente e muito afastadas.	85
Figura 4.13 – Capacidades entre duas esferas muito afastadas.	86
Figura 4.14 – Calote esférica condutora (coordenadas esféricas).	88
Figura 4.15 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.	90
Figura 4.16 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica Va da calote condutora de $\theta_2 = \pi/3$.	91
Figura 4.17 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular Vb da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.	91
Figura 4.18 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.	92
Figura 4.19 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.	93
Figura 4.20 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica Va da calote condutora de $\theta_2 = \pi/2$.	94
Figura 4.21 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular Vb da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.	94
Figura 4.22 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.	95
Figura 4.23 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.	96
Figura 4.24 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica Va da calote condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.	97

Figura 4.25 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular Vb da calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.	98
Figura 4.26 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.	98
Figura 4.27 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi$ (esfera completa).	99
Figura 4.28 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica Va da calote condutora de $\theta_2 = \pi$ (esfera completa) mais uma zona de ar.	101
Figura 4.29 – Superfície circular condutora.	102
Figura 4.30 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação $\tau'k$ em função dos pontos ($k + 0,5$), na superfície circular.	104
Figura 4.31 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' variável (representação de metade da chapa circular).	105
Figura 4.32 – Potencial na vizinhança da chapa circular condutora, segundo o eixo y (metade da chapa circular).	106
Figura 4.33 – Arco de elipse AB .	107
Figura 4.34 – Variação da densidade superficial de carga, segundo o arco AB (Figura 4.33), em elipsoides para diversos valores de $k = b/a$: $k = 1$ (esfera); $k = 0,5$ (elipsoide); $k \approx 0$ (fio retilíneo de comprimento finito).	108
Figura 5.1 – Cone condutor, em que $h/a = 3$.	111
Figura 5.2 – Cone condutor com $h/a = 3$.	114
Figura 5.3 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral Va do cone condutor com $h/a = 3$.	115
Figura 5.4 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular Vb do cone condutor com $h/a = 3$.	115
Figura 5.5 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de Va e de Vb , do cone condutor com $h/a = 3$.	116
Figura 5.6 – Cone condutor com $h/a = 1$.	117
Figura 5.7 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral Va do cone condutor com $h/a = 1$.	117
Figura 5.8 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular Vb do cone condutor com $h/a = 1$.	118
Figura 5.9 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de Va e de Vb , do cone condutor com $h/a = 1$.	118
Figura 5.10 – Cone condutor com $h/a = 0,5$.	119
Figura 5.11 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral Va do cone condutor com $h/a = 0,5$.	120
Figura 5.12 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular Vb do cone condutor com $h/a = 0,5$.	120

ÍNDICE

Figura 5.13 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de V_a e de V_b , do cone condutor com $h/a = 0,5$.	120
Figura 5.14 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V dos três tipos de cones condutores, com: a) $h/a = 3$; b) $h/a = 1$; c) $h/a = 0,5$.	121
Figura 6.1 – Cilindro de raio R e de comprimento L .	125
Figura A.1 – Representação das coordenadas cilíndricas.	131
Figura A.2 – Representação das coordenadas esféricas.	133
Figura B.1 – Elipse.	135
Figura B.2 – Ponto P na elipse.	136
Figura B.3 – Método de obtenção da elipse a partir de duas circunferências.	138
Figura B.4 – Arco de elipse AB .	142
Figura B.5 – Arco de elipse AB .	144

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Algumas grandezas e unidades SI. _____	9
Tabela 2 – Algumas constantes elétricas. _____	10
Tabela 3 – Formulário de grandezas. _____	11
Tabela 3.1 – Valores discretos da superfície lateral si, m , em pu. _____	38
Tabela 3.2 – Valores discretos da superfície circular si, n , em pu. _____	38
Tabela 3.3 – Resultados discretos da relação τ' , em função de $m = 0,1, \dots, 9$ e de $n = 10,11, \dots, 19$. __	39
Tabela 3.4 – Valores do potencial Vi . _____	43
Tabela 4.1 – Quadro comparativo do potencial, capacidade e energia de uma esfera, com a distância entre duas esferas. _____	87
Tabela 4.2 – Resultados discretos da relação $\tau'k$ em função de ρ (ver Figura 4.29). _____	103
Tabela 6.1 – Tabela comparativa de algumas grandezas. _____	123
Tabela 6.2 – Tabela comparativa de algumas grandezas. _____	124

ÍNDICE

FORMULÁRIO

GRANDEZA		UNIDADE	
Nome	Símbolo	Nome	Símbolo
Altura	H, h	<i>Metro</i>	m
Capacidade elétrica	C	<i>Farad</i>	F
Carga elétrica	Q	<i>Coulomb</i>	C
Comprimento	L, l	<i>Metro</i>	m
Densidade de corrente elétrica	J	<i>Ampère por metro quadrado</i>	A/m²
Densidade de energia elétrica	w	<i>Joule por metro cúbico</i>	J/m³
Densidade linear de carga elétrica	λ	<i>Coulomb por metro</i>	C/m
Densidade superficial de carga elétrica	σ	<i>Coulomb por metro quadrado</i>	C/m²
Densidade superficial de carga elétrica considerando o potencial do condutor unitário	σ'	<i>Por unidade</i>	pu
Densidade volumica de carga elétrica	ρ	<i>Coulomb por metro cúbico</i>	C/m³
Diâmetro	D	<i>Metro</i>	m
Diferença de potencial	U, V_{AB}	<i>Volt</i>	V
Distância	d	<i>Metro</i>	m
Energia	W	<i>Joule</i>	J
Flecha	f	<i>Metro</i>	m
Força	F	<i>Newton</i>	N
Intensidade da corrente elétrica	I	<i>Ampère</i>	A
Intensidade do campo elétrico	E	<i>Volt por metro</i>	V/m
Permeabilidade elétrica do meio	ϵ	<i>Farad por metro</i>	F/m
Potência	P	<i>Watt</i>	W
Potencial / tensão elétrica	V	<i>Volt</i>	V
Quantidade de eletricidade / carga elétrica	Q	<i>Coulomb</i>	C
Raio	R, r	<i>Metro</i>	m
Relação de proporcionalidade entre σ' e ϵ_0	τ'	<i>Por unidade</i>	pu
Resistência de um eletrodo de terra	R_t	<i>Ohm</i>	Ω
Resistência elétrica do condutor	R_C	<i>Ohm</i>	Ω
Superfície	S	<i>Metro quadrado</i>	m²
Troços / segmentos	$\Delta x, \Delta y$	<i>Metro</i>	m
Valor médio aproximado da tensão de ruptura	E_{med}	<i>Quilovolt por centímetro</i>	kV/cm
Volume	Vol	<i>Metro cúbico</i>	m³

Tabela 1 – Algumas grandezas e unidades SI.

CAPÍTULO 0 – FORMULÁRIO

Nome	Símbolo	Valor
Permeabilidade elétrica do vazio	ϵ_0	$8,842 \times 10^{-12}$ F/m

Tabela 2 – Algumas constantes elétricas.

NOME	EXPRESSÃO	UNIDADE	
		Nome	Símbolo
Ângulo sólido elementar	$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$	<i>Esterradiano</i>	Ω
Capacidade elétrica	$C = \frac{Q}{U} = 4 \pi \epsilon_0 R$	<i>Farad</i>	F
Densidade de corrente elétrica	$J = \frac{I}{S}$	<i>Ampère por metro quadrado</i>	A/m²
Densidade de energia elétrica	$w = \frac{W}{Vol} = \frac{1}{2} D E$	<i>Joule por metro cúbico</i>	J/m³
Densidade linear de carga elétrica	$\lambda = \frac{Q}{L}$	<i>Coulomb por metro</i>	C/m
Densidade superficial de carga elétrica	$\sigma = \frac{Q}{S}$	<i>Coulomb por metro quadrado</i>	C/m²
Densidade volúmica de carga elétrica	$\rho = \frac{Q}{Vol}$	<i>Coulomb por metro cúbico</i>	C/m³
Diâmetro	$D = 2 r$	<i>Metro</i>	m
Diferença de potencial entre A e B	$V_A - V_B = V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$	<i>Volt</i>	V
Diferença de potencial entre A e B (campo uniforme)	$V_{AB} = E d_{AB}$	<i>Volt</i>	V
Equação de Poisson	$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$		
Energia elétrica / eletrostática	$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q U$	<i>Joule</i>	J
Intensidade de campo elétrico	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = -grad V = -\nabla V$ $E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$	<i>Volt</i>	V
Lei de Ohm	$J = \sigma E \rightarrow V = R I$	<i>Volt</i>	V
Perímetro da circunferência	$P = 2 \pi r$	<i>Metro</i>	m
Potencial elétrico	$V = \int \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon r} dl$	<i>Volt</i>	V
Potencial eletrostático	$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$	<i>Volt</i>	V
Potencial num ponto	$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$	<i>Volt</i>	V

CAPÍTULO 0 – FORMULÁRIO

Quantidade de eletricidade / carga elétrica	$Q = C U = 2 \frac{W}{U}$	<i>Coulomb</i>	C
Relação de proporcionalidade entre σ' e ϵ_0	$\tau' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$	<i>Por unidade</i>	pu
Superfície da base do cilindro	$S_{ccil} = \pi r^2$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície da circunferência	$S_{circ} = \pi r^2$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície da esfera	$S_{esf} = 4 \pi r^2$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície do elipsoide	$S_{elipsoide} = 2 \int_0^a 2 \pi y ds$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície do triângulo	$S_{triang} = \frac{1}{2} b h$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície lateral do cilindro	$S_{Lcil} = 2 \pi r L$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Superfície total do cilindro	$S_{cil} = 6 \pi r^2$	<i>Metro quadrado</i>	m²
Valor médio aproximado da tensão de disrupção	$E_{med} \cong \left \frac{\Delta V}{\Delta d} \right $	<i>Quilovolt por centímetro</i>	kV/cm
Volume do cilindro	$Vol_{cil} = \pi r^2 L$	<i>Metro cúbico</i>	m³
Volume da esfera	$Vol_{esf} = \frac{4}{3} \pi r^3$	<i>Metro cúbico</i>	m³

Tabela 3 – Formulário de grandezas.

1. INTRODUÇÃO

É interessante conhecer a forma como as cargas elétricas se distribuem num elemento condutor.

Atualmente existem inúmeros estudos sobre a distribuição das cargas elétricas nos condutores, no entanto, pouco tem sido estudado acerca do comportamento da concentração dessas cargas em sólidos geométricos.

Pretende-se, com o presente trabalho, efetuar um estudo da distribuição de cargas elétricas em superfícies condutoras de geometria simples, recorrendo à análise matemática, a conhecimentos de eletromagnetismo e à utilização do método dos momentos, ou dos potenciais constantes, para resolver informaticamente o problema, uma vez que a análise do método dos campos elétricos nulos no interior dos condutores se torna ainda mais complexo.

Será efetuada uma revisão acerca do método dos momentos e sua aplicação segundo diferentes autores, e onde, no final, será também apresentada uma nova formulação matemática para alguns casos particulares da aplicação deste método, no estudo dos condutores cilíndricos e das linhas condutoras.

Em seguida serão efetuadas análises de alguns sólidos geométricos, começando pelo cilindro condutor, que será estudado, em mais pormenor, o caso do cilindro de comprimento igual ao diâmetro, com esfera inscrita, e com esfera circunscrita, apenas de modo comparativo. Neste sentido serão efetuados cálculos e deduções, concluindo graficamente o cálculo dos valores das grandezas elétricas inerentes, como as energias e as capacidades dos cilindros condutores. Ainda neste âmbito, mas com uma abordagem menos intensiva, serão estudados alguns casos para os cilindros condutores comprido e curto.

Posteriormente será abordada a esfera condutora, onde será analisada isoladamente e sob a influência de outra esfera idêntica de carga simétrica. Serão efetuados cálculos e deduções, determinando os valores das grandezas elétricas inerentes. Estudar-se-ão as

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

capacidades entre duas esferas condutoras, apresentando-se graficamente os valores das variações da densidade superficial de carga.

Será estudada a distribuição de cargas elétricas nas calotes esféricas condutoras, admitindo, embora erradamente, que a sua distribuição nas superfícies (esférica e circular) são uniformes, e verificar, nesse sentido, o comportamento do potencial no seu interior, que na realidade deveria ser constante. Também será estudada uma superfície circular condutora de espessura infinitesimal, que constitui a base da própria calote esférica e ainda a distribuição de cargas num elipsoide.

Será também estudado o cone de material condutor, onde será feita uma abordagem similar aos outros cones condutores de dimensões diferentes. Serão determinadas as grandezas elétricas e apresentados gráficos comparativos, concluindo-se o estudo entre os diversos tipos de cones.

Finalmente, será efetuado um estudo comparativo das grandezas elétricas presentes em alguns dos sólidos geométricos estudados e retiradas conclusões. Também serão abordados alguns exemplos de aplicação prática relativos à distribuição de cargas elétricas em materiais condutores, e abordado um exemplo para os elétrodos de terra.

Nos anexos A e B, encontra-se uma breve abordagem acerca de coordenadas cilíndricas e esféricas e são apresentados a determinação do perímetro, superfície, área e volume do elipsoide para recurso no estudo no presente trabalho.

2. MÉTODO DOS MOMENTOS

Atualmente são utilizados métodos analíticos e/ou numéricos na resolução de problemas nas áreas da engenharia ou das ciências aplicadas, mas são os analíticos os mais utilizados na resolução de equações algébricas. Como, nestas áreas, os problemas são reais e não lineares, a sua resolução é muitas vezes complexa, surgindo situações em que se torna quase impossível obter uma solução analítica. É o caso das equações diferenciais, em que se torna difícil encontrar um problema que possa ser resolvido analiticamente sem se imporem condições de simplificação.

Perante este problema, surgiu então a necessidade de se recorrer a modelos informáticos para se obterem resoluções rápidas e eficientes. O método dos momentos¹ é um desses modelos informáticos, que converte equações integrais complexas em sistemas de equações lineares simples. Este método utiliza uma técnica conhecida por método dos resíduos ponderados, que estabelece um conjunto de funções de base com um ou mais parâmetros variáveis. Os resíduos são basicamente dados pela diferença entre a solução de base e a solução real. E os parâmetros variáveis são determinados de forma a se obter a melhor aproximação das funções de base, de modo a minimizar os resíduos.

A situação ideal será a de determinar a função de base para a qual os resíduos se anulam. Existem inúmeras funções de base que podem ser aplicadas ao mesmo problema, o que obriga a uma escolha criteriosa de uma função do género da função desconhecida f . Algumas regras na escolha das funções de base podem ser encontradas em livros como os de Harrington [1], mas é de salientar que os conjuntos de funções de base f_n devem ser linearmente independentes.

Com o objetivo de simplificar o programa computacional, recorre-se às funções de teste ou funções de peso w_m , conhecidas, cujos elementos devem ser linearmente independentes para que as N equações também o sejam. As funções de teste devem ser

¹ Método dos momentos – termo utilizado pela primeira vez por Harrington [1].

semelhantes às funções de base, mas quando estas são iguais ($w_m = f_m$) designa-se por método de Galerkin².

2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Segundo Casimiro, Lopes e Emídio [2], passemos agora a um pequeno resumo do modelo matemático do método dos momentos exposto no ponto anterior.

Uma equação não homogénea com a função f desconhecida, pode ser traduzida numa série de funções f_1, f_2, \dots, f_n conhecidas, designadas por funções de base ou funções de expansão, com α_n constantes [2].

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2.1)$$

Para obter uma solução exata, o segundo termo da equação terá de ser dado por um somatório com infinitos elementos. Se o número de elementos for finito, obter-se-á uma solução aproximada [2].

Linearizando a expressão (2.1) [2], obtém-se uma função conhecida g (método das diferenças finitas de Lagrange³), cujas incógnitas serão os escalares α_n , dados por:

$$L(f) = \sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (2.2)$$

Se se considerar a solução aproximada, com N funções de base, a resolução da equação não seria possível por haver mais incógnitas N do que equações [2].

² A substituição de Galerkin, bem como o método de Galerkin, é um procedimento numérico para a solução aproximada de equações diferenciais parciais e problemas variacionais [5].

³ Método das diferenças finitas de Lagrange – é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas [5].

De modo a determinar α_n , é efetuado o produto escalar entre cada função de teste ou de peso w_m conhecida e a função g (da expressão (2.2)). E aplicando as propriedades comutativa e distributiva, virá (2.3) [2]:

$$\langle g, w_m \rangle = \sum_n \alpha_n \langle L(f_n), w_m \rangle \Rightarrow \sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle, \quad (2.3)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Desenvolvendo o somatório com as funções de teste que se possui, pode-se escrever a expressão (2.3) sob a forma matricial (2.4) [2]

$$[l_{m,n}] [\alpha_n] = [g_m] \Leftrightarrow [\alpha_n] = [l_{m,n}]^{-1} [g_m] \quad (2.4)$$

Sendo $m = n$, se a matriz l for não singular, então a sua inversa existe. Então virá, segundo Casimiro, Lopes e Emídio [2]:

$$f = [f_n] [\alpha_n] = [f_n] [l_{m,n}]^{-1} [g_m] \quad (2.5)$$

com $[f_n] = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots]$. Solução esta que pode ser aproximada ou exata, dependendo da escolha dos valores de f_n e de w_m [2].

2.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO

Como já referido, o método dos momentos tem a vantagem de ser um modelo de fácil implementação, utilizado na resolução de equações integrais, diferenciais ou integro-diferenciais. A título de exemplo, ir-se-á aplicar o método dos momentos na resolução da equação de Poisson⁴, cuja solução integral aplicada às cargas distribuídas em volume, que também pode ser dada pela derivada da Lei de Coulomb, resulta na expressão, segundo Sadiku [3]:

$$V_P = \int_{Vol} \frac{dQ}{4 \pi \epsilon r} = \int_{Vol} \frac{\rho}{4 \pi \epsilon r} dVol \quad (2.6)$$

⁴ Equação de Poisson – é uma equação de derivadas parciais definida por $\nabla^2 \cdot \varphi = f$ e descreve o potencial elétrico em eletrostática por $\Delta u = f(x)$ [5].

em que:

- V_p – Potencial elétrico num ponto à superfície lateral do fio condutor $[V]$;
- Q – Carga elétrica total $[C]$;
- ρ – Densidade volúmica de carga elétrica $[C/m^3]$;
- ε – Permeabilidade elétrica do meio $[F/m]$;
- r – Distância ao ponto $[m]$;
- Vol – Volume da região das cargas elétricas $[m^3]$.

Pela expressão (2.6), desde que se conheça o valor da distribuição da carga, podem-se determinar os valores do potencial, da intensidade do campo elétrico e da carga total. No entanto, se não se souber o valor da distribuição da carga, já não será possível a determinação pela fórmula da expressão (2.6) [3], apesar de se poder saber o valor do potencial por intermédio de voltímetros eletrostáticos.

No cálculo da distribuição de cargas elétricas, um dos problemas mais comuns é o da distribuição de carga num fio condutor com potencial fixo. O método dos momentos pode ser utilizado para resolver este tipo de problemas, mas também pode resolver outros problemas simples, como a distribuição de cargas em superfícies, como por exemplo, em placas retangulares ou circulares [3].

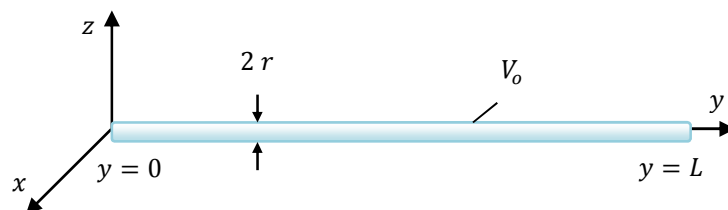


Figura 2.1 – Fio condutor, de raio r e comprimento L , com o potencial constante.

Da Figura 2.1, considerando um fio condutor de pequeno diâmetro e de raio r , comprimento L ($L \gg r$) e de potencial V_0 , pretende-se determinar a densidade linear de carga λ , em $[C/m]$, ou a densidade superficial de carga σ , em $[C/m^2]$, ao longo do condutor. Recorde-se que, uma vez determinado λ , ou σ , os valores das variáveis dependentes podem ser facilmente encontradas [3].

Partindo da expressão (2.6), e aplicando-a a este caso concreto, em qualquer ponto do condutor tem-se que [3]:

$$V_o = \int_0^L \frac{\lambda}{4 \pi \varepsilon_o r} dl \quad \text{ou} \quad V_o = \int_{S_L} \frac{\sigma}{2 \varepsilon_o} dS_L \quad (2.7)$$

em que:

$$\lambda = 2 \pi r \sigma \quad (2.8)$$

Aplicando a primeira expressão de (2.7) a um determinado ponto y_k , virá [3]:

$$V_o = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_o} \int_0^L \frac{\lambda(y)}{|y_k - y|} dy \quad (2.9)$$

sendo:

- V_o – Potencial elétrico no fio condutor [V];
- λ – Densidade linear de carga [C/m];
- σ – Densidade superficial de carga elétrica [C/m²];
- ε_o – Permeabilidade elétrica do vazio: $\varepsilon_o \cong 8,842 \cdot 10^{-12}$ [F/m];
- r – Distância ao ponto [m];
- k – Ponto onde se pretende calcular a grandeza no fio condutor [m];
- L – Comprimento do fio condutor ($0 \leq y_k \leq L$, $k \in \mathbb{N}$) [m];
- S_L – Superfície lateral do fio condutor [m²].

Recorda-se que uma integração consta essencialmente em encontrar uma área dentro de uma função contínua. Portanto, se Δy for pequeno, a integração de uma função $f(y)$, para $0 < y < L$, sendo N o número de parcelas, será dada pela série [3]:

$$\int_0^L f(y) dy \simeq f(y_1) \Delta y + f(y_2) \Delta y + \dots + f(y_N) \Delta y = \sum_{k=1}^N f(y_k) \Delta y \quad (2.10)$$

onde, neste caso, o condutor de comprimento L foi dividido em N unidades de comprimento Δy , sendo portanto (em termos de densidade linear de carga):

$$4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\lambda_1 \Delta y}{|y_k - y_1|} + \frac{\lambda_2 \Delta y}{|y_k - y_2|} + \dots + \frac{\lambda_N \Delta y}{|y_k - y_N|} \quad (2.11)$$

ou (em termos de densidade superficial de carga):

$$4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\sigma_1 \Delta S_L}{|y_k - y_1|} + \frac{\sigma_2 \Delta S_L}{|y_k - y_2|} + \dots + \frac{\sigma_N \Delta S_L}{|y_k - y_N|} \quad (2.12)$$

em que:

$$\Delta y = \frac{L}{N} \quad (2.13)$$

e

$$\Delta S_L = 2 \pi r \Delta y \quad \text{ou} \quad dS_L = 2 \pi r dy \quad (2.14)$$

Na expressão (2.11), não se conhecem os elementos da densidade linear de carga λ_k (ou da densidade superficial de carga σ_k), no segmento constante y_k , ficando $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ (ou $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$) constantes desconhecidas. Como a equação suporta todos os pontos do condutor, obtêm-se N equações idênticas relacionando-as com os respectivos pontos em $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_N$ desse condutor. Assim obtêm-se [3]:

$$N \text{ termos} \left\{ \begin{array}{l} 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\lambda_1 \Delta y}{|y_1 - y_1|} + \frac{\lambda_2 \Delta y}{|y_1 - y_2|} + \dots + \frac{\lambda_N \Delta y}{|y_1 - y_N|} \\ 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\lambda_1 \Delta y}{|y_2 - y_1|} + \frac{\lambda_2 \Delta y}{|y_2 - y_2|} + \dots + \frac{\lambda_N \Delta y}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots \\ 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\lambda_1 \Delta y}{|y_N - y_1|} + \frac{\lambda_2 \Delta y}{|y_N - y_2|} + \dots + \frac{\lambda_N \Delta y}{|y_N - y_N|} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

ou

$$N \text{ termos} \left\{ \begin{array}{l} 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\sigma_1 \Delta S_L}{|y_1 - y_1|} + \frac{\sigma_2 \Delta S_L}{|y_1 - y_2|} + \dots + \frac{\sigma_N \Delta S_L}{|y_1 - y_N|} \\ 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\sigma_1 \Delta S_L}{|y_2 - y_1|} + \frac{\sigma_2 \Delta S_L}{|y_2 - y_2|} + \dots + \frac{\sigma_N \Delta S_L}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots \\ 4 \pi \varepsilon_o V_o \cong \frac{\sigma_1 \Delta S_L}{|y_N - y_1|} + \frac{\sigma_2 \Delta S_L}{|y_N - y_2|} + \dots + \frac{\sigma_N \Delta S_L}{|y_N - y_N|} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

CAPÍTULO 2 – MÉTODO DOS MOMENTOS

Relacionando os membros da expressão (2.9) com a expressão (2.15) ou (2.16) nos pontos coincidentes, é similar ao conceito de se calcular momentos em mecânica, por isso esta técnica é chamada de “método dos momentos” [3].

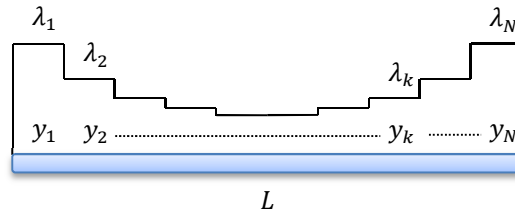


Figura 2.2 – Divisão do condutor em N segmentos e evolução qualitativa da densidade linear de carga λ .

ou

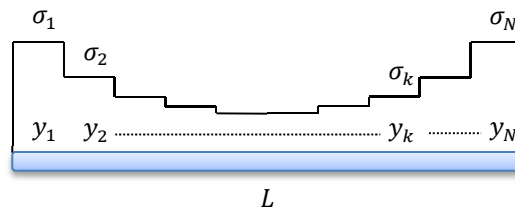


Figura 2.3 – Divisão do condutor em N segmentos e evolução qualitativa da densidade superficial de carga σ .

Como, por observação da Figura 2.2 e da Figura 2.3, os pontos intermédios de y_1, y_2, \dots, y_N , estão localizados nos centros de cada segmento. Assim, as expressões (2.15) e (2.16) podem então ser representadas pela matriz [3]:

$$[V_i] = [s'_{i,k}] [\lambda_k] \quad \text{ou} \quad [V_i] = [s_{i,k}] [\sigma_k] \quad (2.17)$$

com:

$$[V_i] = [V_0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

em que V_0 é considerado constante no interior do condutor e de valor igual a 1 pu, $i = 0; 1 \dots; M$, $k = 0; 1; \dots; N$, sendo a matriz quadrada, logo $M = N$.

Sendo a matriz quadrada $[s'_{i,k}]$, para cargas lineares, ou $[s_{i,k}]$, para cargas distribuídas em superfícies, dada por [3]:

$$[s'_{i,k}] = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_o} \begin{bmatrix} s'_{0,0} & s'_{0,1} & \cdots & s'_{0,N} \\ s'_{1,0} & s'_{1,1} & \cdots & s'_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots \\ s'_{M,0} & s'_{M,1} & \cdots & s'_{M,N} \end{bmatrix}, \text{ em que } s'_{i,k} = \frac{\Delta y}{|y_i - y_k|}, i \neq k \quad (2.19)$$

ou

$$[s_{i,k}] = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_o} \begin{bmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & \cdots & s_{0,N} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & \cdots & s_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{M,0} & s_{M,1} & \cdots & s_{M,N} \end{bmatrix}, \text{ em que } s_{i,k} = \frac{\Delta S_L}{|y_i - y_k|}, i \neq k \quad (2.20)$$

e

$$[\lambda_k] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\sigma_k] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Os elementos da matriz das expressões (2.19) ou (2.20) são desconhecidos, pelo que podem ser determinados por qualquer uma das equações matriciais de (2.17), utilizando a regra de Cramer⁵, a técnica de eliminação de Gauss⁶ ou a matriz inversa. Assim, utilizando a matriz inversa, resultará [3]:

$$[\lambda_k] = 4 \pi \varepsilon_o [s'_{i,k}]^{-1} [V_i] \quad (2.22)$$

ou

$$[\sigma_k] = 4 \pi \varepsilon_o [s_{i,k}]^{-1} [V_i] \quad (2.23)$$

em que a expressão (2.22) é utilizada para cargas linearmente distribuídas, e a expressão (2.23) é utilizada para cargas distribuídas em superfícies.

⁵ Regra de Cramer – é um teorema em álgebra linear, que dá a solução de um sistema de equações lineares em termos de determinantes [5].

⁶ Técnica de eliminação de Gauss – em álgebra linear, é um algoritmo que visa transformar uma matriz arbitrária numa matriz em escada de linhas, através de operações elementares, nomeadamente trocas de linhas e adições de múltiplos de certas linhas a outras linhas [5].

Deve-se prestar atenção na análise dos elementos diagonais (termos próprios) da matriz $[s'_{i,k}]$, ou $[s_{i,k}]$, nas expressões (2.15) ou (2.16), e nas expressões (2.19) ou (2.20), pois, sempre que o condutor estiver carregado, a densidade superficial de carga σ corresponde à área do condutor. Portanto, no centro de cada segmento, a tensão é determinada por [3]:

$$V_{centro} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\lambda}{2 \pi r \sqrt{r^2 + y^2}} dy = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_o} \ln \left[\frac{\frac{\Delta y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{\Delta y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 + r^2}} \right] \quad (2.24)$$

ou

$$V_{centro} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{r \sigma}{\sqrt{r^2 + y^2}} d\varphi dy = \frac{r \sigma}{2 \epsilon_o} \ln \left[\frac{\frac{\Delta y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{\Delta y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 + r^2}} \right] \quad (2.25)$$

Considerando que $\Delta y \gg r$, virá [3]:

$$V_{centro} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_o} \ln \left(\frac{\Delta y}{r} \right) \quad (2.26)$$

ou

$$V_{centro} = \frac{r \sigma}{\epsilon_o} \ln \left(\frac{\Delta y}{r} \right) \quad (2.27)$$

Logo, os termos próprios ($i = k$) serão dados por [3]:

$$A_{i,k} = 2 \ln \left(\frac{\Delta y}{r} \right) \quad (2.28)$$

ou

$$A'_{i,k} = 4 \pi r \ln \left(\frac{\Delta y}{r} \right) \quad (2.29)$$

Substituindo na expressão (2.17) resulta em [3]:

$$\begin{bmatrix} 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) & \frac{\Delta y}{|y_1 - y_2|} & \cdots & \frac{\Delta y}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta y}{|y_2 - y_1|} & 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) & \cdots & \frac{\Delta y}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta y}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta y}{|y_N - y_2|} & \cdots & 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = 4 \pi \varepsilon_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ou

$$2 \pi r \begin{bmatrix} 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) & \frac{\Delta y}{|y_1 - y_2|} & \cdots & \frac{\Delta y}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta y}{|y_2 - y_1|} & 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) & \cdots & \frac{\Delta y}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta y}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta y}{|y_N - y_2|} & \cdots & 2 \ln\left(\frac{\Delta y}{r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} = 4 \pi \varepsilon_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ficando as expressões (2.30) e (2.31), num modelo simples, para serem resolvidos informaticamente num programa ou rotina matemática.

No entanto, Robert [4] determinou a seguinte expressão para determinar a densidade de carga elétrica num condutor retilíneo finito, dado por:

$$4 \pi \varepsilon_o V_o = \sum_{k=1}^N \lambda_k \ln \left| \frac{2(i-k) + 1 + \sqrt{\left(\frac{2r}{\Delta y}\right)^2 + [2(i-k) + 1]^2}}{2(i-k) - 1 + \sqrt{\left(\frac{2r}{\Delta y}\right)^2 + [2(i-k) - 1]^2}} \right| \quad (2.32)$$

em que:

- ε_o – Permeabilidade elétrica do vácuo: $\varepsilon_o \cong 8,8542 \cdot 10^{-12} [F/m]$;
- V_o – Potencial elétrico no condutor [V];
- λ_k – Densidade linear de carga referente ao segmento de índice $k [C/m]$;
- k – Número de partes que a superfície é dividida: $k = 1, 2, \dots, N$;
- N – Número de pontos;
- i – Número de iterações do somatório: $i = 1, 2, \dots, N$;

- r – Distância ao ponto [m];
- Δy – Comprimento de cada segmento da divisão do condutor [m].

Para um exemplo prático, considere-se agora $V_0 = 1 V$, $L = 1 m$, $r = 1 mm$ e $N = 10$ ($\Delta y = L/N$); com estes dados, e comparando as expressões (2.22) e (2.23) com as expressões (2.30) e (2.31), podem ser facilmente calculados os valores desconhecidos de λ_k (ou de σ_k), utilizando um software matemático [3].

Também, considerando distribuições lineares de carga λ , em função do comprimento l (ou distribuições superficiais de carga σ , em função da superfície lateral S_L), é possível determinar a carga total no condutor através das expressões [3]:

$$Q = \int_0^L \lambda dl \quad \text{ou} \quad Q = \int_0^{S_L} \sigma dS_L \quad (2.33)$$

cujas formas discretas, para uma divisão em N partes iguais, serão dadas por:

$$Q = \sum_{k=1}^N \lambda_k \Delta y \quad \text{ou} \quad Q = \sum_{k=1}^N \sigma_k \Delta S_L \quad (2.34)$$

Neste caso, com os parâmetros arbitrados, o valor da carga total resultaria em:

$$Q = 8,536 pC \quad (2.35)$$

A intensidade do campo elétrico E , em [V/m], em qualquer ponto também pode ser facilmente calculado através da expressão [3]:

$$\vec{E} = \int \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 d^2} \hat{d} \quad (2.36)$$

que pode ser escrita na forma discreta por:

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k \Delta y \vec{d}}{4 \pi \epsilon_0 d^3} \quad (2.37)$$

em que:

- \vec{E} – Vetor intensidade do campo elétrico [V/m].
- λ – Densidade linear de carga elétrica [C/m];

CAPÍTULO 2 – MÉTODO DOS MOMENTOS

- ε_0 – Permeabilidade elétrica do vácuo: $\varepsilon_0 \cong 8,842 \cdot 10^{-12} [F/m]$;
- d – Distância entre a carga e o ponto onde se pretende calcular a intensidade do campo elétrico [m];
- \hat{d} – Versor da distância entre a carga e o ponto onde se pretende calcular a intensidade do campo elétrico (módulo unitário);
- \vec{d} – Vetor da distância entre a carga e o ponto onde se pretende calcular a intensidade do campo elétrico [m];
- Δy – Comprimento dos segmentos da divisão do condutor [m].

Onde, em coordenadas retangulares, ter-se-á [3]:

$$\vec{d} = |\vec{d}| = (x - x_k) \hat{d}_x + (y - y_k) \hat{d}_y + (z - z_k) \hat{d}_z \quad (2.38)$$

em que (x_k, y_k, z_k) é a posição do ponto da carga, e (x, y, z) é o ponto de origem ou ponto onde se pretende calcular a intensidade do campo elétrico.

De acordo com a expressão (2.30) e com os dados anteriormente apresentados, a representação gráfica da densidade linear de carga λ (ou equivalente superficial de carga σ), em função da distância y , dada por segmentos, pode ser traduzida pela Figura 2.4 [3].

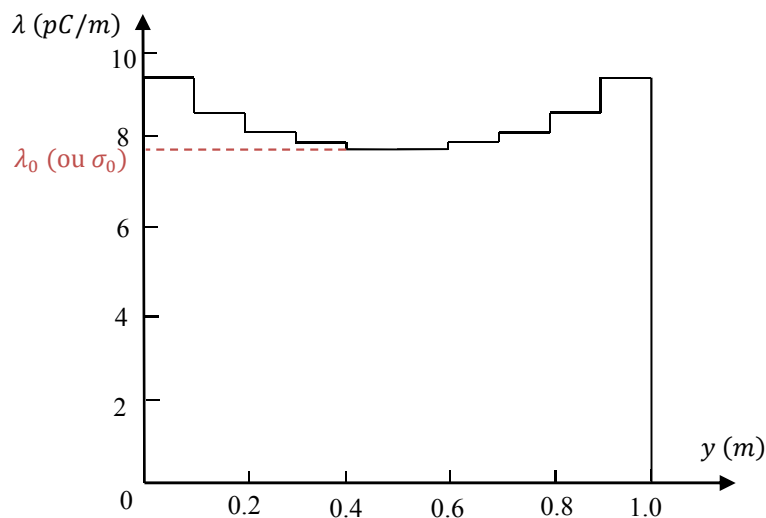


Figura 2.4 – Exemplo: gráfico de λ (ou $\sigma = \lambda/(2 \pi r)$) em função de y , para $L = 1 m$.

Da Figura 2.4, considerou-se $N = 10$ *pontos* para obter a distribuição da carga λ . Um valor pequeno de segmentos N resulta numa solução menos precisa, e um valor grande de segmentos N resulta numa solução mais precisa. No entanto, se N for demasiado grande, poderão surgir problemas computacionais ao inverter a matriz quadrada $[s'_{i,k}]$ (expressão (2.19)) ou $[s_{i,k}]$ (expressão (2.20)), pois a capacidade computacional pode limitar a exatidão do cálculo numérico [3].

Até aqui foi explicado o método dos momentos e demonstradas as expressões utilizadas por vários autores. No entanto, observando as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4, facilmente se chega à conclusão que estas apresentam uma distribuição hiperbólica idêntica à equação da catenária de uma linha fixada a apoios nivelados (cálculo mecânico das linhas).

Nesse caso particular, a distribuição de cargas, lineares ou superficiais, pode ser aproximada a uma função hiperbólica do tipo:

$$\cosh (y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{y^0}{0!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \quad (2.39)$$

em que $\cosh (0) = 1$, cuja representação gráfica é dada pela Figura 2.5:

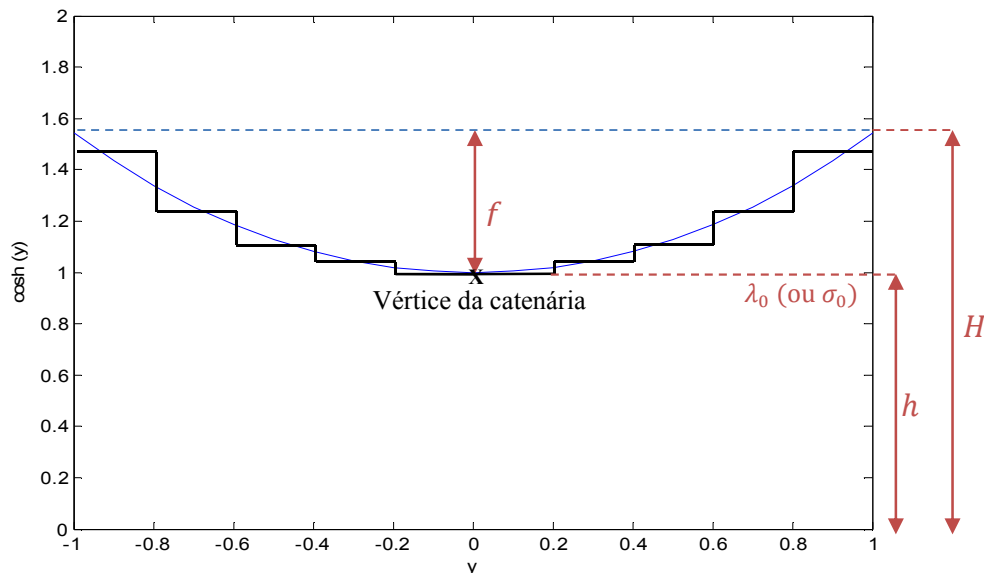


Figura 2.5 – Representação gráfica de uma linha aérea (equação da catenária), considerando vão unitário ($-1 \leq y_k \leq 1$). Analogia com a distribuição de cargas num cilindro de comprimento finito.

Da Figura 2.5, ter-se-á:

- H – Altura do apoio em relação a uma referência [m];
- h – Altura do vértice da catenária em relação à mesma referência [m];
- f – Flecha [m].

Ainda da Figura 2.5, verifica-se que, para um condutor cilíndrico retilíneo, a distribuição de cargas elétricas é aproximadamente igual à equação da catenária de uma linha fixa entre dois apoios nivelados, que traduz a equação das ordenadas dessa mesma catenária.

Tal como a expressão (2.39), e considerando apenas o estudo da densidade superficial de carga σ , verifica-se que as diversas variações da distribuição de carga nalgumas configurações geométricas de formas diferentes, obtidas por cálculos de simulação computacional, em relação a um eixo de simetria, segue aproximadamente uma lei dada por:

$$\sigma = \sigma_0 \cosh(k_2 y^{k_3}) \quad (2.40)$$

em que σ_0 e k_2 são parâmetros reais e positivos (σ_0 – densidade superficial de carga a meio do condutor cilíndrico e k_2 – parâmetro de dimensões iguais a [m^{-k_3}]), e k_3 é um número natural (adimensional), sendo todos obtidos a partir das condições fronteira.

Um outro método, provavelmente mais correto, embora mais exaustivo, consiste em determinar o polinómio que se ajusta aos diferentes valores obtidos por métodos computacionais, utilizando o método das diferenças finitas (Newton ou Lagrange).

3. DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM CILINDROS CONDUTORES

Neste capítulo estudar-se-á a distribuição de cargas em cilindros condutores. Como se sabe, o condutor elétrico é um cilindro muito comprido e se se considerar que esse mesmo condutor pode ser representado por vários cilindros pequenos, poder-se-ão calcular as distribuições de cargas no condutor, utilizando o somatório das suas partes, como sugerido no método dos momentos, estudado no capítulo 2.

Será efetuado um estudo sobre os cilindros de relação comprimento igual ao diâmetro, e por estes serem os que têm mais interesse do ponto de vista de posição intermédia entre o cilindro comprido (fio cilíndrico) e o cilindro curto (chapa circular), irá ser feita uma abordagem mais aprofundada.

Será também feita uma breve abordagem sobre cálculo de potenciais em cilindros compridos (com uma relação de comprimento de pelo menos o dobro do seu diâmetro) e de cilindros curtos (em que o seu comprimento é de aproximadamente metade do diâmetro).

3.1 CILINDRO CONDUTOR DE COMPRIMENTO IGUAL AO DIÂMETRO

Neste subcapítulo estudar-se-á a aplicação do método dos momentos a um condutor cilíndrico. Se se considerar apenas a distribuição de carga em cada intervalo do condutor, ter-se-á um cilindro relativamente curto, com diâmetro igual ao seu comprimento, ou seja, cuja relação diâmetro-comprimento D/L ou $R/h = 1$ (ver Figura 3.1).

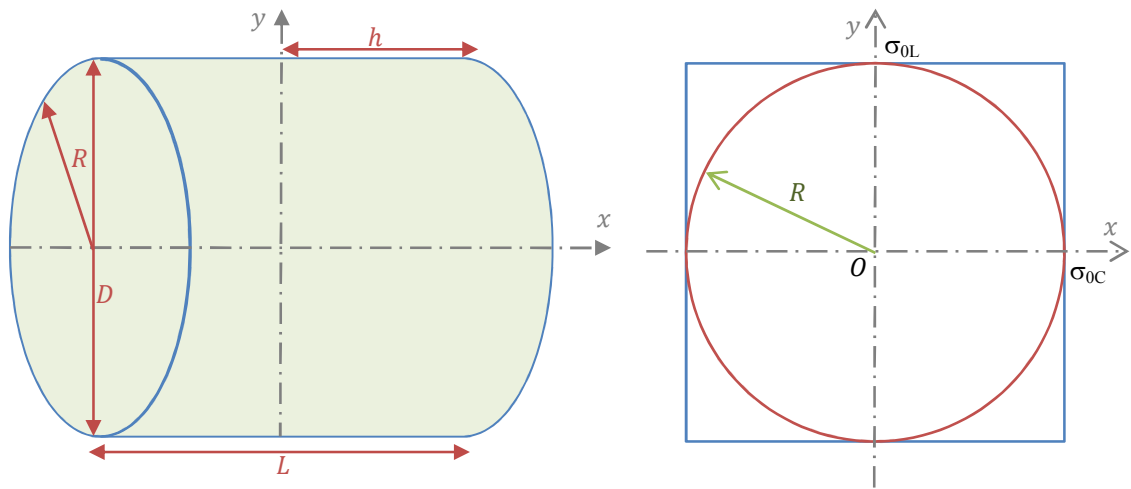


Figura 3.1 – Cilindro condutor de diâmetro igual ao comprimento e círculo inscrito no cilindro ($R/h = 1$).

Da Figura 3.1, σ_{0L} e σ_{0C} , representam a densidade superficial de carga nos centros da superfície lateral e da superfície circular, respetivamente.

Sabe-se que o volume do cilindro é dado por:

$$Vol_{cil} = \pi R^2 L = 2 \pi R^2 h \quad (3.1)$$

Considerando que $k_1 = R/h = 1$ e raio unitário $R = 1$ pu, o volume do cilindro será então:

$$Vol_{cil} = 2 \pi R^2 \frac{R}{k_1} = \frac{2 \pi R^3}{k_1} = 2 \pi \quad (3.2)$$

Assim, considerando um volume constante de $Vol_{cil} = 2 \pi$, para valores da constante k_1 compreendidos entre 0 e ∞ ($0 < k_1 < \infty$), para diversas relações das dimensões dos cilindros, os valores do raio R e de metade do comprimento $h = L/2$, estão relacionados com o volume constante e igual a 2π , em que:

$$R = \sqrt[3]{k_1} \quad (3.3)$$

e que:

$$h = \frac{1}{\sqrt[3]{k_1^2}} \quad (3.4)$$

Considerando as densidades superficiais de carga σ diferentes nas metades da superfície lateral e das superfícies dos topos (circular) do cilindro condutor, a sua distribuição, em segmentos, poderá ser indicada de acordo com a Figura 3.2, em que $i = 0 \dots 19$ (pontos).

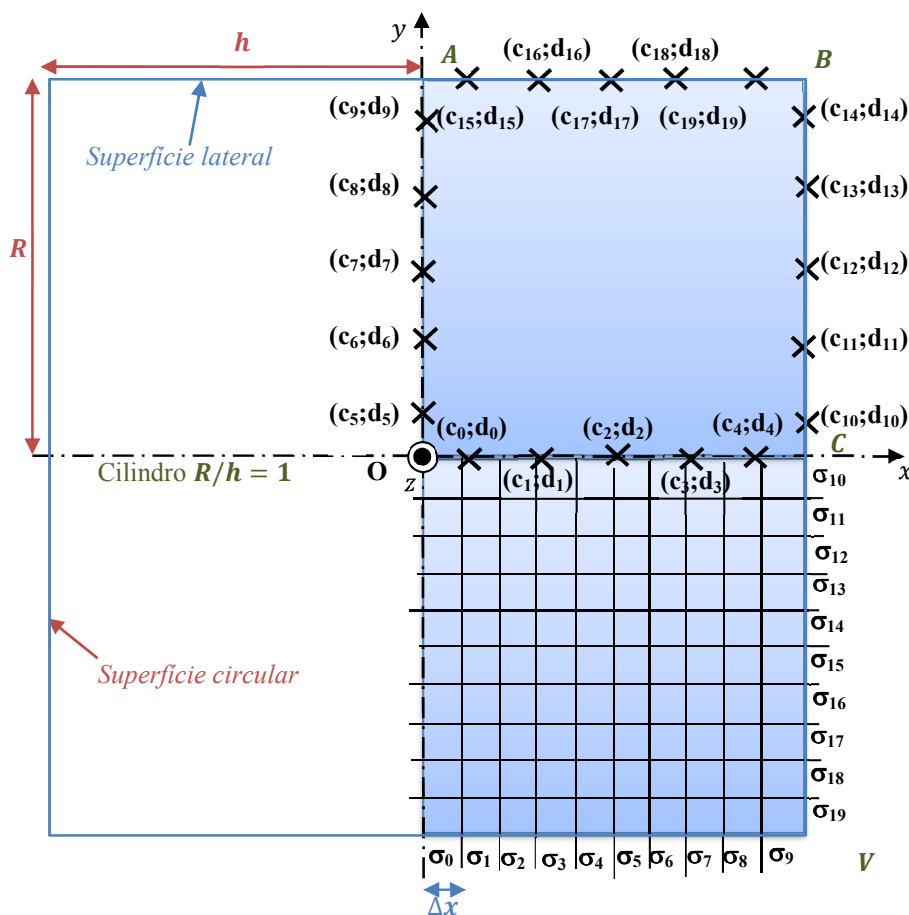


Figura 3.2 – Distribuição discreta de cargas elétricas num cilindro de material condutor σ_k , e pontos $(c_i; d_i)$ para o cálculo do potencial constante.

A Figura 3.2 representa um cilindro de material condutor, em que dada a própria simetria da figura, se pode concluir que a distribuição de cargas elétricas é sempre simétrica em relação a qualquer dos eixos x ou y , ou mesmo z .

Da Figura 3.2, dividiu-se, por exemplo, a superfície lateral em 10 partes, iguais duas a duas, de que resultaram apenas dez valores discretos da densidade superficial de carga ($\sigma'_0; \sigma'_1; \dots; \sigma'_9$).

Dividiu-se também cada superfície circular em 10 partes iguais, de que resultaram apenas dez valores discretos da densidade superficial de carga ($\sigma'_{10}; \sigma'_{11}; \dots; \sigma'_{19}$).

Também da Figura 3.2, constata-se que, nos vértices, as densidades superficiais de carga são iguais, porque, pela lei de Coulomb⁷, essas cargas tendem a afastarem-se umas das outras, de modo a satisfazer o princípio da energia mínima no condutor.

Uma vez determinados os valores de $\sigma'_0 \dots \sigma'_{19}$ que irá conduzir a um potencial aproximadamente constante, considerando a relação $\tau' = \sigma'/\varepsilon_0$ também constante e unitária (em que σ' é a densidade superficial de carga em C/m^2 , e $\varepsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} F/m$ a permissividade elétrica do vácuo), e considerando uma grelha de pontos, suficientemente próximos uns dos outros ($c_u; d_v$), em que, a título de exemplo: $u = 0 \dots U$ e $v = 0 \dots V$, com $U = V = 20$ pontos, em coordenadas cilíndricas, o potencial $V_{u,v}$ em todos os pontos da grelha será:

$$V_{u,v} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_S \frac{dQ}{r_{u,v}} = \frac{\tau'}{4 \pi} \int_S \frac{dS}{r_{u,v}} \quad (3.5)$$

em que $r_{u,v}$ representa a distância entre a carga elementar dQ e cada ponto de coordenadas ($c_u; d_v$), sendo a superfície $S = S_L + 2 S_R$ (em que S_L é a superfície lateral do cilindro e S_R a superfície de cada topo).

Assim, considerando τ' constante, o potencial $V_{u,v}$, no ponto ($c_u; d_v$), será dado por:

$$V_{u,v} = \frac{\tau'}{4 \pi} \left[\int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(x - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dx + \right. \\ \left. + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(y - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dy + \right. \\ \left. + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(y + c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dy \right] \quad (3.6)$$

⁷ Lei de Coulomb – é uma lei da Física que descreve a interação eletrostática entre partículas eletricamente carregadas. Estabelece que o módulo da força entre duas cargas elétricas puntiformes (q_1 e q_2) é diretamente proporcional ao produto dos valores absolutos (módulos) das duas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles [5].

Utilizando a expressão (3.6) e considerando $R = h = 1$ pu, para uma grelha de 20x20 pontos: $u = 0 \dots 20$, $v = 0 \dots 20$, $c_u = u/20$ e $d_v = v/20$, foi construído o mapa de linhas equipotenciais da Figura 3.3, referente ao 1º quadrante, no plano xy , do cilindro representado pela superfície $OABC$ da Figura 3.2.

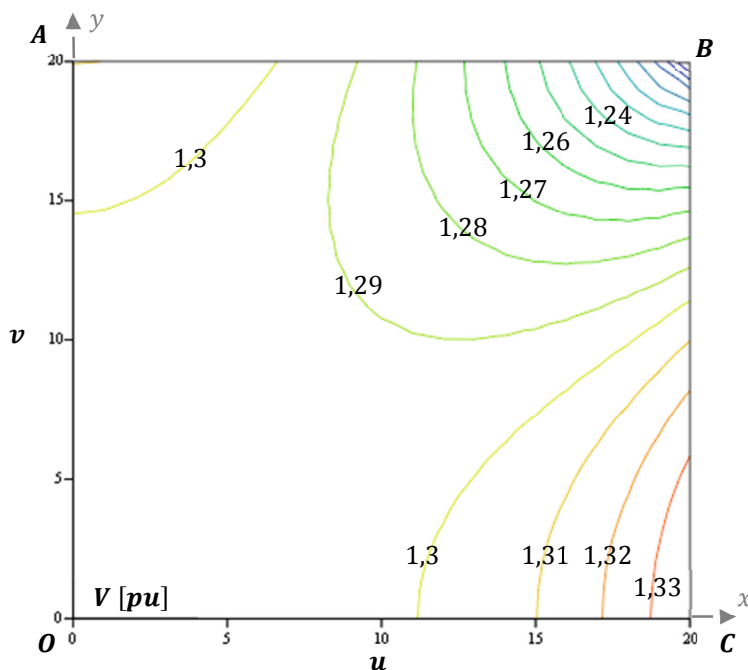


Figura 3.3 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante (cilindro de diâmetro igual ao comprimento).

Observando a Figura 3.3, verifica-se que, para a densidade superficial de carga τ' constante, o potencial no interior do condutor cilíndrico não é constante como seria de esperar, pelo que contraria a lei de Gauss, ou seja, que no interior dos condutores o potencial é constante.

Da Figura 3.3, verifica-se também que na vizinhança do vértice B , ou seja, ao longo do perímetro da interseção das superfícies cilíndrica e circular, o potencial V é mais reduzido, o que implica que τ' deve assumir valores mais elevados nessa zona.

Também da Figura 3.3, constata-se que o potencial assume os valores mais elevados na vizinhança dos vértices A e C , ainda que o potencial no vértice A seja ligeiramente inferior ao do vértice C . Isto significa que, na realidade, a densidade superficial de carga

é inferior no centro da superfície circular dos topos, e superior no centro da superfície lateral ou curva do cilindro condutor, que são as zonas onde a densidade superficial de carga τ' tem os valores mais reduzidos do que nas arestas.

O potencial V sofre uma grande variação na zona do topo do cilindro condutor, se se considerar a partir da origem O (ver Figura 3.2), até à linha de separação entre a superfície lateral e a superfície do topo. Assim, os valores do potencial reduzem-se na zona do perímetro circular e aumentam no centro da circunferência.

Em relação à distribuição de potencial, verifica-se que o erro máximo no interior do cilindro condutor é cerca de:

$$\delta = \frac{1,33 - 1,19}{1,33} 100 \approx 10,5 \% \quad (3.7)$$

Conclui-se portanto que, para que o potencial V seja constante no interior do cilindro condutor, será necessário que a distribuição de cargas seja maior na vizinhança do vértice B e menor na vizinhança do vértice C , sendo a densidade superficial de carga elétrica maior na zona A do que na zona C .

Para modificar a distribuição de cargas de modo a que a intensidade do campo elétrico (em V/m) no interior do condutor seja nula, ir-se-ão apresentar valores discretos de densidades superficiais de carga nos potenciais dos pontos de coordenadas (c_i, d_i) , com $i = 0 \dots 19$. Foram definidos então, os parâmetros relativos às integrações parciais para obtenção dos potenciais eletrostáticos no interior do condutor cilíndrico:

- **Para as superfícies laterais ou curvas do cilindro condutor:**

Da Figura 3.2, cada segmento Δx da superfície lateral, será igual a $\Delta x = h/K$ ($K = 10$ pontos), sendo $h = 1$ pu e $a_m = m \Delta x$ e $a_K = 1$ ($m = 0; 1; \dots; K$), pelo que virá:

$$a_m = [0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1] \quad (3.8)$$

- **Para as superfícies circulares ou topos do cilindro condutor:**

Da Figura 3.2, cada segmento Δy da superfície circular, será igual a $\Delta y = \frac{R}{N-K}$ ($N = 20$ pontos), sendo $R = 1$ pu e $b_n = (n - K) \Delta y$ e $b_N = 1$ ($n = K; K + 1; \dots; N$), pelo que virá:

$$b_n = [0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1] \quad (3.9)$$

Foi considerada uma grelha de pontos, distribuída estrategicamente de acordo com a Figura 3.2, suficientemente próximos uns dos outros ($c_i; d_i$), correspondendo às posições nos eixos x e y , respetivamente. Os vetores c_i e d_i terão tantos termos quanto o número de partes que as superfícies lateral e circular foram divididas ($i = k$). Portanto serão vetores do género, segundo o eixo x :

$$c_i = [0,1h; 0,3h; 0,5h; 0,7h; 0,9h; 0; 0; 0; 0; 0; 0,1h; 0,3h; 0,5h; 0,7h; 0,9h; h; h; h; h; h] \quad (3.10)$$

e, segundo o eixo y :

$$d_i = [0; 0; 0; 0; 0; 0,1R; 0,3R; 0,5R; 0,7R; 0,9R; R; R; R; R; R; 0,1R; 0,3R; 0,5R; 0,7R; 0,9R] \quad (3.11)$$

em que $h = R = 1$ pu (ver Figura 3.2).

Assim, da Figura 3.2, o potencial no ponto ($c_i; d_i$), em coordenadas cilíndricas, será então, dado por:

$$V_i = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\int_{S_0} \frac{dQ_0}{r_{i,0}} + \dots + \int_{S_{K-1}} \frac{dQ_{K-1}}{r_{i,K-1}} + \int_{S_K} \frac{dQ_K}{r_{i,K}} + \dots + \int_{S_{N-1}} \frac{dQ_{N-1}}{r_{i,N-1}} \right) \quad (3.12)$$

em que $\varepsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} F/m$ é a permitividade elétrica do vácuo, $r_{i,0}, r_{i,1}, \dots, r_{i,K-1}, r_{i,K}, \dots, r_{i,N-1}$ são, respetivamente, as distâncias das cargas elementares $dQ_0, dQ_1, \dots, dQ_{K-1}, dQ_K, \dots, dQ_{N-1}$ aos pontos ($c_i; d_i$), e $S_0, S_1, \dots, S_{K-1}, S_K, \dots, S_{N-1}$ as partes da superfície em que se consideram os valores discretos relativos às densidades superficiais de carga $\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{K-1}, \tau'_K, \dots, \tau'_{N-1}$, com $m = 0 \dots K, n = K \dots N$ e $i = 0, \dots, K - 1, K, \dots, N - 1$.

Assim o potencial V_i , pela expressão (3.12), virá:

$$\begin{aligned}
 V_i = & \int_{-a_1}^{-a_0} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{R \tau'_0}{4\pi}}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \dots + \\
 & + \int_{-a_K}^{-a_{K-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{R \tau'_{K-1}}{4\pi}}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \dots + \\
 & + \int_{a_0}^{a_1} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{R \tau'_0}{4\pi}}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \dots + \\
 & + \int_{a_{K-1}}^{a_K} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{R \tau'_{K-1}}{4\pi}}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \dots + \\
 & + \int_{b_K}^{b_{K+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{y \tau'_K}{4\pi}}{\sqrt{(R - c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy + \dots + \\
 & + \int_{b_{N-1}}^{b_N} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{y \tau'_{N-1}}{4\pi}}{\sqrt{(R - c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy + \dots + \\
 & + \int_{b_K}^{b_{K+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{y \tau'_K}{4\pi}}{\sqrt{(R + c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy + \dots + \\
 & + \int_{b_{N-1}}^{b_N} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{y \tau'_{N-1}}{4\pi}}{\sqrt{(R + c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ou seja:

$$V_i = s_{i,0} \tau'_0 + s_{i,1} \tau'_1 + \dots + s_{i,K-1} \tau'_{K-1} + s_{i,K} \tau'_K + s_{i,K+1} \tau'_{K+1} + \dots + s_{i,N-1} \tau'_{N-1} \tag{3.14}$$

Assim, deduziram-se as seguintes expressões para a superfície lateral $s_{i,m}$:

$$s_{i,m} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-a_{m+1}}^{-a_m} \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \right. \\ \left. + \int_{a_m}^{a_{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(x - c_i)^2 - 2 R d_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx \right) \quad (3.15)$$

e para a superfície circular $s_{i,n}$:

$$s_{i,n} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(R - c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy + \right. \\ \left. + \int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(R + c_i)^2 - 2 y d_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy \right) \quad (3.16)$$

originando a matriz quadrada ($M = N$), ou seja:

$$s_{i,k} = \begin{bmatrix} s_{0,0} & \cdots & s_{0,k} & \cdots & s_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i,0} & \cdots & s_{i,k} & \cdots & s_{i,N-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{M-1,0} & \cdots & s_{M-1,k} & \cdots & s_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Da expressão (2.17), $[A]$ corresponde à matriz conhecida $[s]$, e $[B]$ ao valor do potencial $[V]$ que é constante e unitário. Considerando que no interior do condutor, em equilíbrio eletrostático, o potencial é constante (lei de Gauss) e atribuindo $[V] = [1]$ pu, podem-se calcular os valores discretos relativos de $[\tau'_k]$ a partir da expressão (3.14), em que $k = 0, 1, \dots, K - 1, K, \dots, N - 1$, ou seja:

$$[V_i] = [s_{i,k}] [\tau'_k] \Leftrightarrow [\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1} [V_i] \Leftrightarrow [\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1} [1] \quad (3.18)$$

Através das expressões (3.15) e (3.16), calcularam-se os valores discretos das superfícies, em pu, indicados nas Tabela 3.1 e Tabela 3.2.

CAPÍTULO 3 – DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM CILINDROS CONDUTORES

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0993	0,0984	0,0966	0,0941	0,091	0,0875	0,0838	0,08	0,0763	0,0726
1	0,0957	0,095	0,0937	0,0918	0,0894	0,0866	0,0834	0,0801	0,0766	0,0732
2	0,0894	0,0891	0,0885	0,0875	0,0862	0,0844	0,0822	0,0797	0,0769	0,074
3	0,0819	0,0819	0,0818	0,0817	0,0813	0,0807	0,0797	0,0783	0,0765	0,0744
4	0,0744	0,0745	0,0747	0,075	0,0754	0,0756	0,0756	0,0753	0,0747	0,0737
5	0,1001	0,0991	0,0972	0,0945	0,0913	0,0877	0,0839	0,08	0,0762	0,0725
6	0,1022	0,101	0,0987	0,0956	0,092	0,088	0,0839	0,0799	0,0759	0,0721
7	0,107	0,1052	0,102	0,0979	0,0932	0,0885	0,0839	0,0794	0,0752	0,0713
8	0,1168	0,1131	0,1072	0,1006	0,0943	0,0884	0,0831	0,0782	0,0738	0,0698
9	0,1407	0,1254	0,1118	0,1014	0,0932	0,0864	0,0807	0,0758	0,0714	0,0675
10	0,1492	0,1408	0,1131	0,1006	0,0917	0,0848	0,0791	0,0742	0,07	0,0662
11	0,1047	0,109	0,1278	0,125	0,1005	0,09	0,0826	0,0768	0,0719	0,0678
12	0,0876	0,089	0,0921	0,0984	0,1186	0,117	0,0933	0,0835	0,0767	0,0714
13	0,0763	0,077	0,0785	0,0809	0,0849	0,0919	0,1128	0,1116	0,0884	0,079
14	0,0679	0,0683	0,0692	0,0706	0,0726	0,0756	0,08	0,0874	0,1086	0,1077
15	0,0707	0,0709	0,0712	0,0717	0,0722	0,0727	0,0731	0,0734	0,0733	0,0728
16	0,0703	0,0705	0,0709	0,0715	0,0722	0,0729	0,0735	0,074	0,0741	0,0738
17	0,0695	0,0698	0,0703	0,0711	0,0721	0,0732	0,0743	0,0753	0,0759	0,0759
18	0,068	0,0684	0,069	0,07	0,0714	0,0732	0,0752	0,0775	0,0794	0,0804
19	0,0658	0,0661	0,0669	0,068	0,0696	0,0719	0,0749	0,0792	0,0851	0,0919

Tabela 3.1 – Valores discretos da superfície lateral $s_{i,m}$, em pu.

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	0,005	0,015	0,0244	0,0332	0,0413	0,0484	0,0547	0,0601	0,0649	0,069
1	0,0055	0,0162	0,0262	0,0353	0,0433	0,0503	0,0563	0,0615	0,0659	0,0697
2	0,0066	0,0193	0,0305	0,04	0,0478	0,0542	0,0595	0,0639	0,0677	0,071
3	0,0096	0,0266	0,0391	0,0479	0,0543	0,0592	0,0632	0,0666	0,0695	0,0721
4	0,022	0,045	0,0528	0,0571	0,0603	0,0631	0,0656	0,0679	0,0701	0,0721
5	0,005	0,0147	0,0241	0,0329	0,0409	0,048	0,0544	0,0599	0,0647	0,0688
6	0,0048	0,0142	0,0233	0,0319	0,0399	0,0471	0,0535	0,0592	0,0641	0,0684
7	0,0045	0,0133	0,022	0,0302	0,038	0,0452	0,0518	0,0577	0,0628	0,0674
8	0,0041	0,0122	0,0203	0,0281	0,0355	0,0426	0,0493	0,0553	0,0608	0,0657
9	0,0037	0,0111	0,0185	0,0257	0,0328	0,0396	0,0461	0,0523	0,058	0,0633
10	0,0035	0,0106	0,0176	0,0246	0,0314	0,0381	0,0446	0,0507	0,0565	0,0619
11	0,0036	0,0107	0,0178	0,0249	0,0319	0,0387	0,0454	0,0518	0,0578	0,0633
12	0,0036	0,0109	0,0181	0,0254	0,0327	0,0399	0,047	0,054	0,0605	0,0664
13	0,0037	0,011	0,0184	0,0259	0,0336	0,0414	0,0494	0,0575	0,0654	0,0724
14	0,0037	0,011	0,0184	0,026	0,034	0,0423	0,0513	0,0614	0,0732	0,0862
15	0,0331	0,0653	0,0585	0,0597	0,0616	0,0637	0,0657	0,0678	0,0697	0,0716
16	0,0097	0,0308	0,066	0,0809	0,0687	0,0677	0,0684	0,0696	0,0711	0,0726
17	0,0062	0,019	0,033	0,0498	0,081	0,0915	0,0771	0,0748	0,0746	0,0752
18	0,0048	0,0144	0,0244	0,035	0,0471	0,0622	0,0915	0,0999	0,0841	0,081
19	0,0039	0,0118	0,0199	0,0282	0,037	0,0465	0,0575	0,0715	0,0997	0,1067

Tabela 3.2 – Valores discretos da superfície circular $s_{i,n}$, em pu.

Cujos resultados discretos da relação τ' entre a distribuição da densidade carga elétrica σ'_k ($k = 0 \dots 19$) e ε_0 , pela expressão (3.18), ter-se-á:

m	τ'_0	0,654944	n
	τ'_1	0,657987	
	τ'_2	0,666375	
	τ'_3	0,676164	
	τ'_4	0,69561	
	τ'_5	0,718576	
	τ'_6	0,761868	
	τ'_7	0,807913	
	τ'_8	1,032785	
	τ'_9	1,369757	
	τ'_{10}	0,492316	
	τ'_{11}	0,49502	
	τ'_{12}	0,505528	
	τ'_{13}	0,516147	
	τ'_{14}	0,539548	
	τ'_{15}	0,565185	
	τ'_{16}	0,612206	
	τ'_{17}	0,666637	
	τ'_{18}	0,923676	
	τ'_{19}	1,259302	

Tabela 3.3 – Resultados discretos da relação τ' , em função de $m = 0, 1, \dots, 9$ e de $n = 10, 11, \dots, 19$.

Pela Figura 3.2, constata-se que as densidades superficiais de carga calculadas, correspondem na realidade ao centro do intervalo definido por cada segmento Δx (que corresponde de τ'_0 a τ'_9) e Δy (que corresponde de τ'_{10} a τ'_{19}), como se pode observar na Figura 3.4.

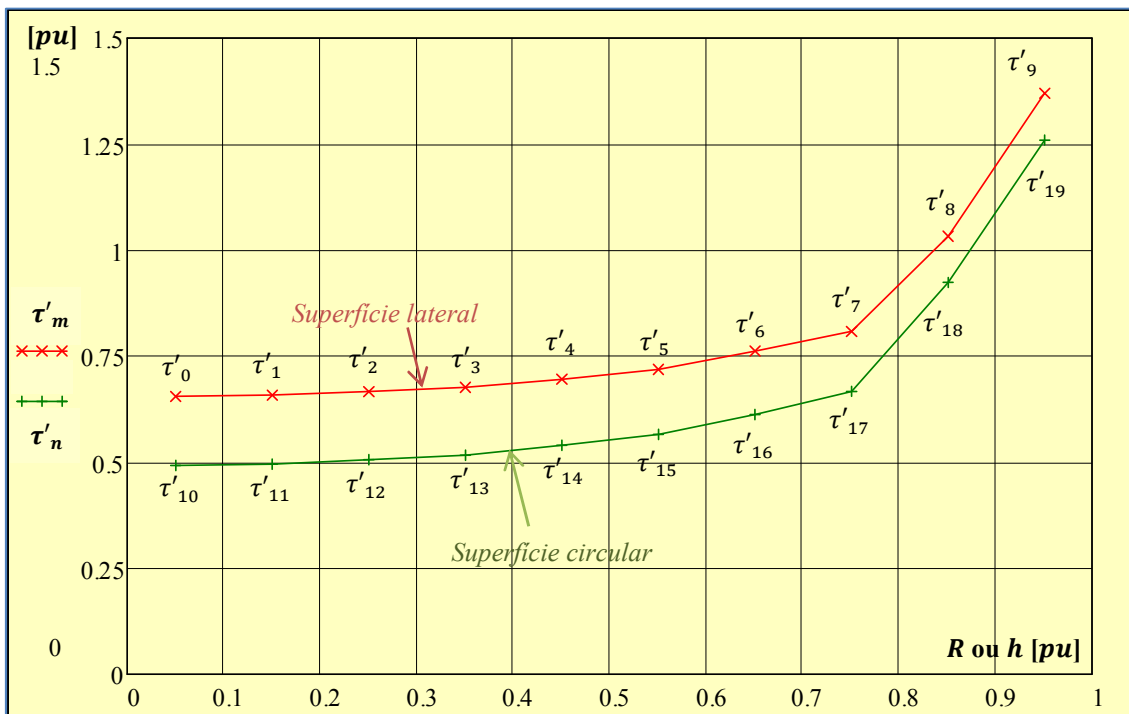


Figura 3.4 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , no cilindro em que $h/R = 1$.

De modo a completar o gráfico, extrapolaram-se os pontos para determinar os valores nas extremidades do gráfico. Designaram-se esses pontos por τ''_0 e τ''_{10} (no centro do cilindro condutor – O), e τ''_9 e τ''_{19} (no vértice do cilindro condutor – B), todos calculados por recurso à extrapolação linear (ver Figura 3.2). Assim, no centro do cilindro condutor, ter-se-á:

$$\tau''_0 = \frac{3\tau'_0 - \tau'_1}{2} = 0,65342 \text{ pu} \quad (3.19)$$

e

$$\tau''_9 = \frac{3\tau'_9 - \tau'_8}{2} = 1,53824 \text{ pu} \quad (3.20)$$

e no vértice do cilindro condutor:

$$\tau''_{10} = \frac{3\tau'_{10} - \tau'_{11}}{2} = 0,49096 \text{ pu} \quad (3.21)$$

e

$$\tau''_{19} = \frac{3\tau'_{19} - \tau'_{18}}{2} = 1,4271 \text{ pu} \quad (3.22)$$

Completando a Figura 3.4, obter-se-á a Figura 3.5.

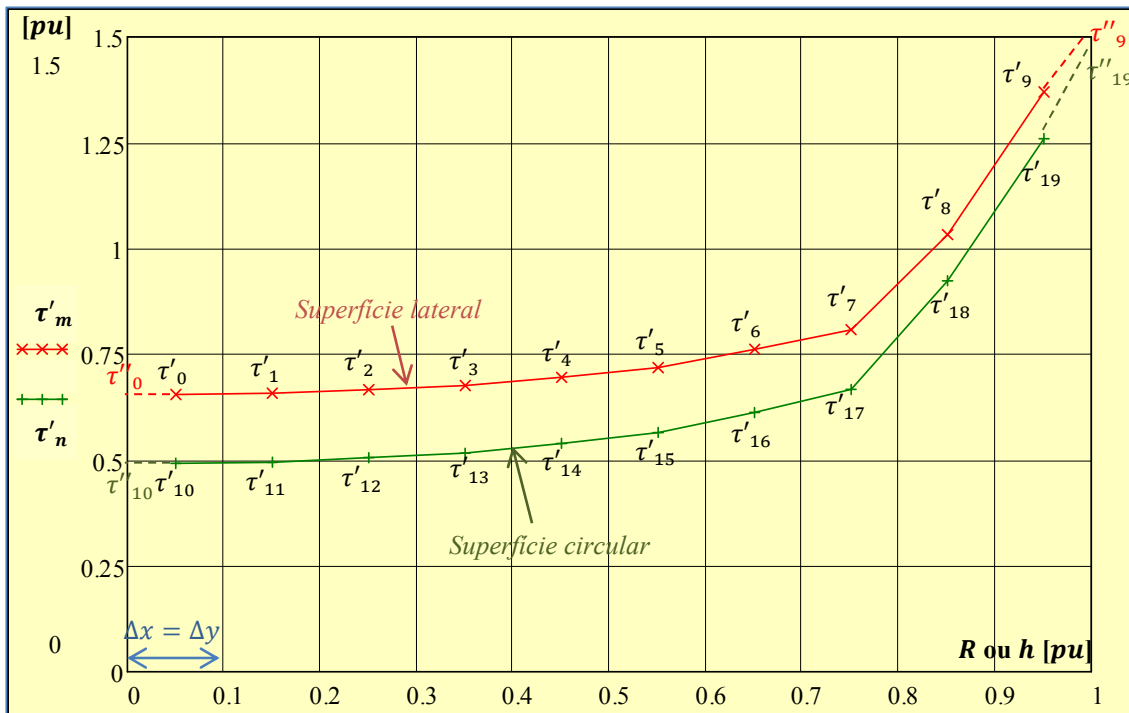


Figura 3.5 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' . Aproximação linear.

Observando a Figura 3.2, facilmente se constata que no vértice B os valores de τ''_9 e τ''_{19} têm de ser iguais. Recordar-se que os pontos dos gráficos apresentados anteriormente correspondem ao centro do intervalo, ao que, para determinar o valor no vértice, foi calculada uma aproximação pelo método das áreas.

No segmento mais próximo do vértice B (ver Figura 3.2), a superfície lateral do cilindro condutor é dada por:

$$S''_{Lcil} = 2 \pi R \frac{\Delta x}{2} \quad (3.23)$$

Sabendo que cada segmento tem espessura Δx ou Δy (e que neste caso são iguais a 0,1 pu), então:

$$S''_{Lcil} = 2 \pi 1 \frac{0,1}{2} = 0,1 \pi \quad (3.24)$$

Do mesmo modo, o segmento mais próximo do vértice B (ver Figura 3.2), correspondente à superfície circular do cilindro condutor, é dada por:

$$S''_{Ccil} = \pi \left[R^2 - \left(R - \frac{\Delta y}{2} \right)^2 \right] = \pi \left[1^2 - \left(1 - \frac{0,1}{2} \right)^2 \right] = 0,0975 \pi \quad (3.25)$$

Então, o valor aproximado que culmina com os dois pontos de τ''_9 e τ''_{19} , será dado por:

$$\begin{aligned} \tau''_{9cil} = \tau''_{19cil} &= \frac{\tau''_9 S''_{Lcil} + \tau''_{19} S''_{Ccil}}{S''_{Lcil} + S''_{Ccil}} = \\ &= \frac{1,53824 \cdot 0,1 \pi + 1,4271 \cdot 0,0975 \pi}{0,1 \pi + 0,0975 \pi} = 1,4834 \text{ pu} \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo o valor para o qual as duas curvas convergem.

A partir dos valores discretos da distribuição da densidade carga elétrica representados na Figura 3.5 e na Tabela 3.3, foram calculados os valores dos potenciais distribuídos em pontos aleatórios, segundo a Figura 3.6 que representa a superfície correspondente ao 1º quadrante do cilindro condutor, no plano xy .

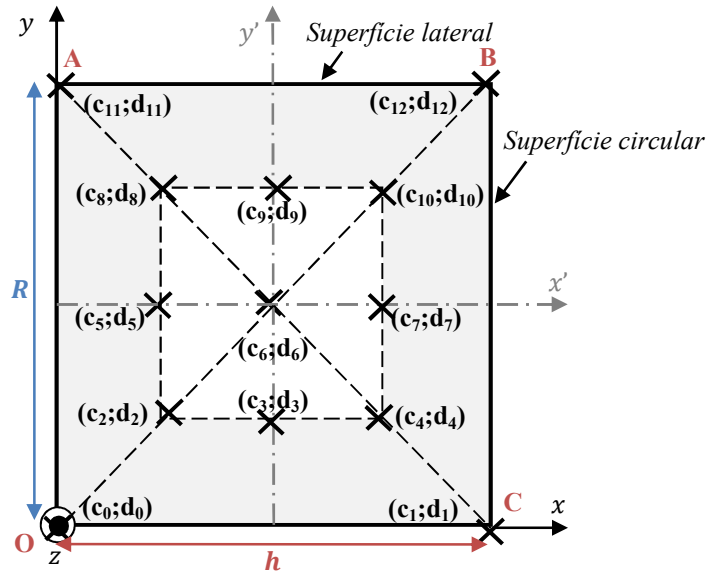


Figura 3.6 – Grelha de pontos para determinação dos potenciais no plano xy , do 1º quadrante do cilindro, a partir dos dados da Tabela 3.3.

Da Figura 3.6, dos pontos $(c_i; d_i)$, com $i = 0 \dots 12$, $K = 10$ e $N = 19$, e dos valores da Tabela 3.3, os potenciais foram determinados através da expressão:

$$\begin{aligned}
 V_i = \frac{1}{4\pi} & \left[\sum_{m=0}^{K-1} \left(\int_{-a_{m+1}}^{-a_m} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_m R}{\sqrt{(x-c_i)^2 - 2Rd_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{a_m}^{a_{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_m R}{\sqrt{(x-c_i)^2 - 2Rd_i \cos \varphi + R^2 + d_i^2}} d\varphi dx \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=K}^N \left(\int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_n y}{\sqrt{(R-c_i)^2 - 2yd_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_n y}{\sqrt{(R+c_i)^2 - 2yd_i \cos \varphi + y^2 + d_i^2}} d\varphi dy \right) \right] \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Recorrendo à expressão (3.27), obtiveram-se os valores da Tabela 3.4.

Coordenadas dos pontos ($R = h = 1$ pu)	Valores do potencial obtido (pu)	Erro (%)
$(c_0, d_0) = (0, 0)$	1	0
$(c_1, d_1) = (h, 0)$	1	0
$(c_2, d_2) = (h/4, R/4)$	1	0
$(c_3, d_3) = (h/2, R/4)$	1	0
$(c_4, d_4) = (3h/4, R/4)$	1	0
$(c_5, d_5) = (h/4, R/2)$	1	0
$(c_6, d_6) = (h/2, R/2)$	1	0
$(c_7, d_7) = (3h/4, R/2)$	1	0
$(c_8, d_8) = (h/4, 3R/4)$	1	0
$(c_9, d_9) = (h/2, 3R/4)$	1	0
$(c_{10}, d_{10}) = (3h/4, 3R/4)$	1	0
$(c_{11}, d_{11}) = (0, R)$	1	0
$(c_{12}, d_{12}) = (h, R)$	0,969	3,2

Tabela 3.4 – Valores do potencial V_i .

Da Tabela 3.4 confirma-se o considerado inicialmente, em que $V_i = [1]$ pu, exceto na vizinhança do vértice B da Figura 3.6.

Assim, por observação da Tabela 3.4 e da Figura 3.5, constata-se apenas um pequeno erro na vizinhança do vértice B em que, segundo os cálculos, o potencial é ligeiramente inferior a 1, decrescendo aproximadamente 3%. Este facto deve-se à variação exponencial acentuada das funções da densidade superficial de carga $\tau' = f(x)$ e de $\tau' = g(y)$ na vizinhança do ponto B , o que conduz à deslocação do centro de gravidade das densidades de carga no sentido dos eixos x_0^+ e y_0^+ .

É possível construir um novo mapa de linhas equipotenciais, também com os valores das densidades de carga indicados na Figura 3.5 (τ'_k , $k = 0 \dots 19$), utilizando a expressão (3.28), em que agora se considera uma grelha de pontos (c_u ; d_v), $u = 0 \dots 20$ e $v = 0 \dots 20$, virá:

$$V_{u,v} = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{m=0}^{K-1} \left(\int_{-a_{m+1}}^{-a_m} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_m R}{\sqrt{(x - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dx + \int_{a_m}^{a_{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_m R}{\sqrt{(x - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dx \right) + \sum_{n=K}^N \left(\int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_n y}{\sqrt{(R - c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy + \int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\tau'_n y}{\sqrt{(R + c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy \right) \right] \quad (3.28)$$

Assim, da expressão (3.28), gerou-se o gráfico representado na Figura 3.7.

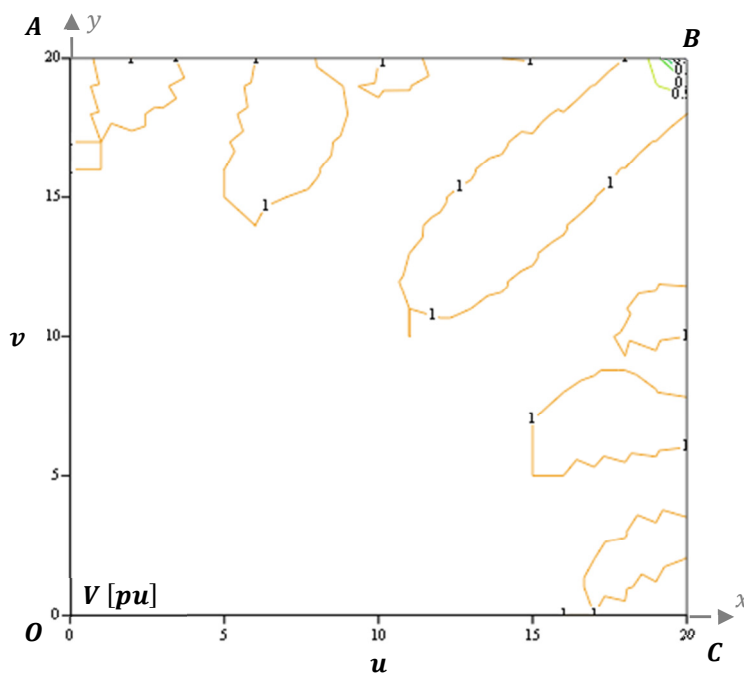


Figura 3.7 – Mapa de linhas equipotenciais para σ' (ou $\tau' = cte.$) no 1º quadrante do plano xy do cilindro ($h/R = 1$).

Pode-se observar na Figura 3.7 que o potencial no vértice *B* é ligeiramente inferior a 1, facto que se deve à distribuição de cargas, nessa extremidade, ser de facto ainda superior.

A título de interesse, apresenta-se a Figura 3.8 que representa o mapa de linhas equipotenciais do 1º quadrante do cilindro condutor, em que os pontos de cálculo dos potenciais extravasa o próprio cilindro e inclui a zona de ar. Matematicamente, os valores de c_u e d_v virão duplicados na expressão (3.28), mas considera-se, como é natural, apenas as cargas no interior do condutor. Da Figura 3.8, verifica-se que, a partir de uma razoável distância do cilindro, as superfícies equipotenciais são semelhantes às originadas por uma esfera de dimensões análogas.

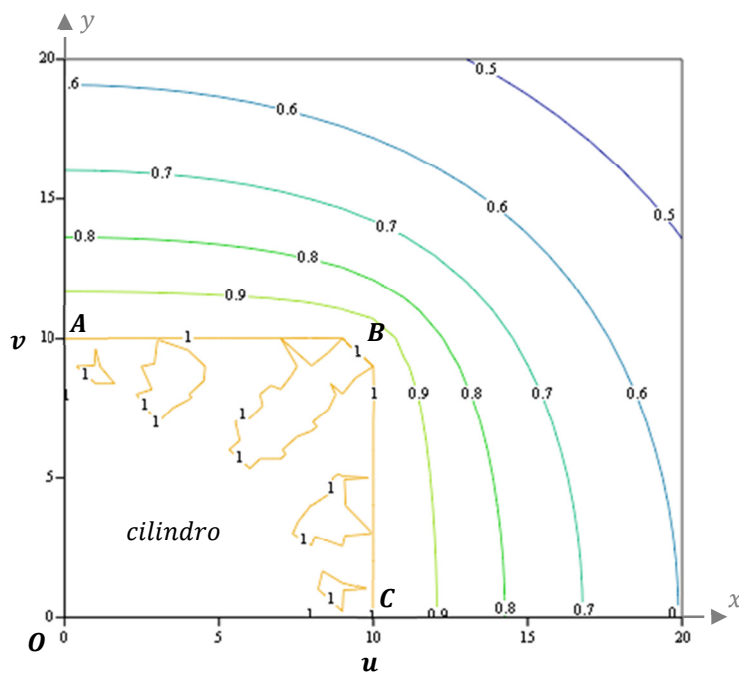


Figura 3.8 – Mapa de linhas equipotenciais do cilindro condutor mais uma zona de ar (1º quadrante do plano *xy* – ver Figura 3.2).

Sabendo que, em módulo, a intensidade do campo elétrico é dada por:

$$E \cong - \left| \frac{\Delta V}{\Delta l} \right| \quad (3.29)$$

em $[V/m]$, em que ΔV corresponde à variação de potencial e Δl corresponde à variação de comprimento. Assim, o vetor intensidade do campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -grad V \quad (3.30)$$

Observando atentamente a Figura 3.8, verifica-se que o campo elétrico na vizinhança do vértice A é maior do que no vértice C , pois, pela Figura 3.4, $\tau'_0 > \tau'_{10}$.

Por outro lado, embora os campos elétricos na vizinhança do vértice B sejam perpendiculares segundo os eixos x (superfície lateral cilíndrica) e y (superfície circular), o campo elétrico é superior aos das vizinhanças dos vértices de A e C , pois verifica-se pela Figura 3.4 que $\tau'_0 < \tau'_9$ e que $\tau'_{10} < \tau'_{19}$. Recorda-se que, no vértice B , as densidades superficiais de carga devem ser iguais na fronteira entre as duas superfícies (lateral e circular), devido ao equilíbrio eletrostático (forças de Coulomb).

Também se pode observar na Figura 3.8, e é importante referir, que para maiores distâncias no ar do cilindro condutor carregado, se verifica que as linhas equipotenciais formam circunferências, tal como no caso de uma esfera condutora eletrizada.

A carga elétrica na superfície lateral do cilindro condutor é dividida em troços de igual comprimento $\Delta x = h/10 = 0,1 m$. Para $K = 10$ e $h = 1 m$, a carga elétrica, em pu, é dada por:

$$Q'_{Lcil} = 4 \pi R \Delta x \sum_{m=0}^{K-1} \tau'_m = 4 \pi \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 8,041961 = 10,105848 \text{ pu} \quad (3.31)$$

em que $\sum \tau'_m = 8,041961$ pu, de acordo com a Tabela 3.3.

Como $\tau' = \sigma'/\epsilon_0$, então a carga elétrica na superfície lateral do cilindro condutor tem o valor:

$$Q_{Lcil} = Q'_{Lcil} \epsilon_0 = 89,356 \text{ pC} \quad (3.32)$$

em que a variação da superfície lateral corresponde a:

$$\Delta S_{Lcil} = 2 \pi R \Delta x = 2 \pi \cdot 1 \cdot 0,1 = 0,62832 \text{ m}^2 \quad (3.33)$$

Também a carga elétrica nas duas superfícies circulares do cilindro condutor dividida em troços de igual comprimento $\Delta y = R/10 = 0,1 \text{ m}$. Para $N = 20$ pontos e $R_n = \Delta y (n - K) = [0; 0,1; \dots; 1]$, ($n = K \dots N - 1$). A carga elétrica, em pu, é dada por:

$$\begin{aligned} Q'_{ccil} &= 2 \pi \sum_{n=K}^{N-1} \tau'_n [(R_n + \Delta y)^2 - R_n^2] = \\ &= 2 \pi 6,5756 \sum_{n=10}^{19} [(n - 10 + 0,1)^2 - (n - 10)^2] = 4,824134 \text{ pu} \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que $\sum \tau'_n = 6,5756 \text{ pu}$, de acordo com a Tabela 3.3.

Como $\tau' = \sigma'/\epsilon_0$, então a carga elétrica na superfície circular do cilindro condutor, para $V = 1 \text{ pu}$, tem o valor:

$$Q_{ccil} = Q'_{ccil} \epsilon_0 = 42,655 \text{ pC} \quad (3.35)$$

Logo, a carga elétrica total do cilindro condutor, em pu, será:

$$Q'_{cil} = Q'_{Lcil} + Q'_{ccil} = 10,105848 + 4,824134 = 14,9333 \text{ pu} \quad (3.36)$$

ou ainda, em Coulomb, virá:

$$Q_{cil} = Q_{Lcil} + Q_{ccil} = 132,011 \text{ pC} \quad (3.37)$$

que corresponde a um valor médio da densidade superficial de carga de:

$$\sigma_{med} = \frac{Q_{cil}}{S_{cil}} = \frac{132,011 \cdot 10^{-12}}{6 \pi R^2} = 7 \text{ pC/m}^2 \quad (3.38)$$

A razão entre a carga elétrica da superfície circular e a carga elétrica total do cilindro condutor será:

$$\frac{Q'_{ccil}}{Q'_{cil}} = \frac{4,824134}{14,9333} = 0,323 \quad (3.39)$$

A energia eletrostática, em pu, do cilindro condutor eletricamente carregado é calculada por:

$$W'_{cil} = \frac{1}{2} Q'_{cil} V = \frac{1}{2} \cdot 14,93 \cdot 1 = 7,465 \text{ pu} \quad (3.40)$$

A capacidade elétrica, em pu, do cilindro condutor isolado, é calculada por:

$$C'_{cil} = \frac{Q'_{cil}}{V} = \frac{14,93}{1} = 14,93 \text{ pu} \quad (3.41)$$

Considerando, finalmente, um cilindro em que $h = R = 0,1 \text{ m}$, com a carga real à superfície igual a $Q = Q_T = 10^{-9} \text{ C}$, dado que se partiu do potencial constante e igual a $V = 1 \text{ pu}$, para se obter o resultado $Q_{cil} = 132,011 \text{ pC}$, então o potencial no interior do cilindro virá dado por:

$$V_{cil} = \frac{\frac{Q_T}{R}}{\frac{Q'_{cil}}{R'}} V = \frac{10^{-9} \cdot 1}{0,1 \cdot 132,011 \cdot 10^{-12}} 1 = 75,75 \text{ V} \quad (3.42)$$

sendo a energia eletrostática do cilindro, dada por:

$$W_{cil} = \frac{1}{2} Q_T V_{cil} = \frac{1}{2} 10^{-9} \cdot 75,75 = 37,88 \text{ nJ} \quad (3.43)$$

e a capacidade real do cilindro isolado igual a:

$$C_{cil} = \frac{Q_T}{V_{cil}} = \frac{10^{-9}}{75,75} = 13,2 \text{ pF} \quad (3.44)$$

3.2 CILINDRO CONDUTOR COM ESFERA INSCRITA

Considerando um cilindro condutor de comprimento igual ao diâmetro, com uma esfera de raio R no seu interior, o 1º quadrante é indicado na Figura 3.9.

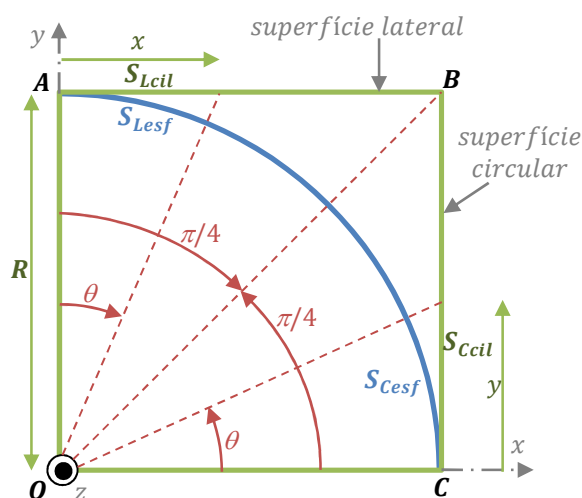


Figura 3.9 – Cilindro condutor com esfera inscrita (1º quadrante do plano xy).

em que:

- S_{Lcil} – Superfície lateral do cilindro condutor de abertura θ (sentido retrógrado);
- S_{Lesf} – Superfície lateral da esfera condutora de abertura θ (sentido retrógrado);
- S_{Ccil} – Superfície circular do cilindro condutor de abertura θ (sentido direto);
- S_{Cesf} – Superfície do lado direito da esfera condutora de abertura θ (sentido direto).

Da Figura 3.9, considerando $M = 50$ pontos e raio $R = 1$ m, $i = 0 \dots M$, para:

$$\theta_i = \frac{\pi}{4} \frac{i}{M} \quad (3.45)$$

e

$$x_i = y_i = R \tan \theta_i \quad (3.46)$$

a relação entre x ou y , e θ , pode ser representada pelo gráfico da Figura 3.10.

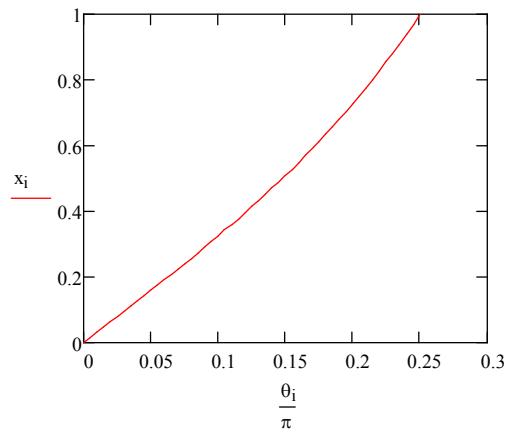


Figura 3.10 – Relação entre x ou y e θ .

Para determinar as superfícies do cilindro condutor de relação $L/D = h/R = 1$, e da esfera inscrita de raio R , pela Figura 3.9, obtêm-se as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{Lcil} = 2 \pi R x = 2 \pi R^2 \tan \theta \\ S_{Lesf} = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta R^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 2 \pi R^2 \sin \theta \\ S_{Ccil} = \pi y^2 = \pi R^2 \tan^2 \theta \\ S_{Cesf} = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2 \pi R^2 (1 - \cos \theta) \end{array} \right. \quad (3.47)$$

A Figura 3.11, representa as variações das superfícies indicadas na expressão (3.47), em função de θ , para $0 \leq \theta \leq \pi/4$:

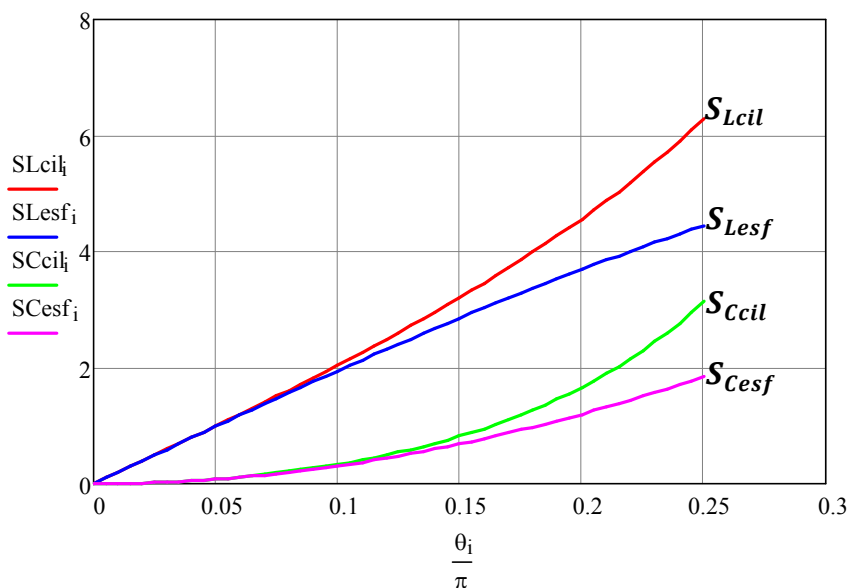


Figura 3.11 – Superfícies laterais e circulares do cilindro, em função de θ .

Pela Figura 3.11, constata-se que os valores das superfícies laterais são bastante mais elevadas que os valores das superfícies circulares. Por sua vez, também esses valores serão superiores para o cilindro e ligeiramente inferiores para a esfera. O que significa que as superfícies do cilindro são maiores que as da esfera, para o mesmo raio, como era de esperar.

Se se considerarem valores de x ou y , compreendidos entre $0 \leq x \leq R$, considerando o raio unitário $R = 1$ pu, substituindo na expressão (3.47), as superfícies laterais e dos topos do cilindro e da esfera condutora, em pu, resultam em:

$$\left[\begin{array}{l} S'_{Lcil} = 2 \pi \text{ pu} \\ S'_{Lesf} = \pi \sqrt{2} \text{ pu} \\ S'_{Ccil} = \pi \text{ pu} \\ S'_{Cesf} = \pi (2 - \sqrt{2}) \text{ pu} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Pode-se concluir que a superfície total do cilindro condutor S'_{cil} , para as condições atrás descritas, é dada por:

$$S'_{cil} = 2 (S'_{Lcil} + S'_{Ccil}) = 2 (2 \pi + \pi) = 6 \pi \text{ pu} \quad (3.49)$$

e a superfície total da esfera condutora S'_{esf} , para as mesmas condições, é dada por:

$$S'_{esf} = 2 (S'_{Lesf} + S'_{Cesf}) = 2 [\pi \sqrt{2} + \pi (2 - \sqrt{2})] = 4 \pi \text{ pu} \quad (3.50)$$

Verifica-se que a relação entre as superfícies lateral e circular na esfera condutora tem o valor:

$$\frac{S'_{Cesf}}{S'_{Lesf} + S'_{Cesf}} = \frac{\pi (2 - \sqrt{2})}{\pi \sqrt{2} + \pi (2 - \sqrt{2})} = 0,29289 \quad (3.51)$$

Do resultado da expressão (3.39), em que $Q'_{Ccil}/Q'_{cil} = 0,323$, e do resultado da expressão (3.51), determinou-se o erro entre os dois métodos utilizados, ou seja:

$$\delta' = \frac{0,323 - 0,29289}{0,29289} 100 = 10,8 \% \quad (3.52)$$

Da Figura 3.9, considerando a esfera condutora de raio $R = 1$ pu e o fator densidade superficial de carga $\sigma'_{esf} = 1$ pu, a carga elétrica na esfera, em pu, é dada por:

$$Q'_{esf} = \sigma'_{esf} S'_{esf} = 4 \pi \text{ pu} \quad (3.53)$$

em que $S'_{esf} = 4 \pi R^2 = 4 \pi$ pu.

Uma vez que o cilindro encontra-se circunscrito à esfera, a carga neste será a mesma:

$$Q'_{cil} = Q'_{esf} = Q' = 4 \pi \text{ pu} \quad (3.54)$$

Então a carga correspondente ao ângulo sólido, centrado no centro da esfera condutora, respeitante a cada círculo do cilindro, será igual a:

$$Q'_{ccil} = 2 \pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = 2 \pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,5858 \pi \text{ pu} \quad (3.55)$$

e a carga correspondente ao ângulo sólido, respeitante a cada metade da parte lateral do cilindro, será dada por:

$$Q'_{Lcil} = 2 \pi \cos \frac{\pi}{4} = \pi \sqrt{2} = 1,4142 \pi \text{ pu} \quad (3.56)$$

Considerando o cilindro circunscrito à esfera, os valores médios das densidades superficiais de carga σ' , em pu, de cada uma das superfícies do cilindro, serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{Lcil} = \frac{Q'_{Lcil}}{S'_{Lcil}} = \frac{1,4142 \pi}{2 \pi} = 0,7071 \text{ pu} \\ \sigma'_{ccil} = \frac{Q'_{ccil}}{S'_{ccil}} = \frac{0,5858 \pi}{\pi} = 0,5858 \text{ pu} \\ \sigma'_{cil} = \frac{Q'_{cil}}{S'_{cil}} = \frac{4 \pi}{6 \pi} = 0,6667 \text{ pu} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Para o caso da esfera condutora isolada, ir-se-ão calcular as energias elétricas presentes.

Considerando que, em valor real, a carga elétrica tem o valor de $Q = 10^{-9}$ C, para o raio da esfera condutora de $R = 0,1$ m, o potencial na esfera condutora terá o valor de:

$$V_{esf} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 90 \text{ V} \quad (3.58)$$

a energia elétrica:

$$W_{esf} = \frac{Q^2}{8 \pi \varepsilon_0 R} = \frac{Q V_{esf}}{2} = \frac{10^{-9} \cdot 90}{2} = 45 \text{ nJ} \quad (3.59)$$

a capacidade da esfera condutora isolada:

$$C_{esf} = 4 \pi \varepsilon_0 R = \frac{Q}{V_{esf}} = \frac{10^{-9}}{90} = 11,111 \text{ pF} \quad (3.60)$$

e a densidade superficial de carga, será:

$$\sigma_{esf} = \frac{Q}{S_{esf}} = \frac{10^{-9}}{0,1257} = 7,9578 \text{ nC/m}^2 \quad (3.61)$$

em que a superfície da esfera tem o valor de:

$$S_{esf} = 4 \pi R^2 = 4 \pi 0,1^2 = 0,1257 \text{ m}^2 \quad (3.62)$$

Os resultados das expressões (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61), coincidem com os resultados determinados no subcapítulo 4.1 pelas expressões (4.13), (4.24), (4.28) e (4.14), respetivamente.

Para o caso da esfera inscrita no cilindro condutor, o valor médio da densidade superficial de carga, para a mesma carga elétrica, será:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{S_{cil}} = \frac{10^{-9}}{0,1885} = 5,30516 \text{ nC/m}^2 \quad (3.63)$$

em que a superfície do cilindro condutor tem o valor de:

$$S_{cil} = 6 \pi R^2 = 6 \pi 0,1^2 = 0,1885 \text{ m}^2 \quad (3.64)$$

A razão entre a carga elétrica da esfera condutora e a carga elétrica total do cilindro da expressão (3.37), será:

$$\frac{Q}{Q_{cil}} = \frac{10^{-9}}{132,011 \cdot 10^{-12}} = 7,575 \quad (3.65)$$

Recorrendo à expressão (3.28) para cálculo do potencial no cilindro condutor com esfera inscrita, para uma grelha de 20×20 pontos, com $u = 0 \dots 20$, $v = 0 \dots 20$, das divisões das superfícies lateral:

$$c_u = \frac{h u}{20} \quad (3.66)$$

e circular:

$$d_v = \frac{R v}{20} \quad (3.67)$$

resulta:

$$V_{u,v} = \frac{\sigma_1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(x - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dx + \right. \\ \left. + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(R - c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy + \right. \\ \left. + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sqrt{(R + c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy \right) \quad (3.68)$$

com $R = 0,1 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$, $\varepsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ e $\sigma_1 = 5,30516 \text{ nC/m}^2$.

A representação do mapa de linhas equipotenciais para a esfera inscrita no cilindro condutor de relação $R/h = 1$, relativamente ao 1º quadrante do plano xy , é dada pela Figura 3.12.

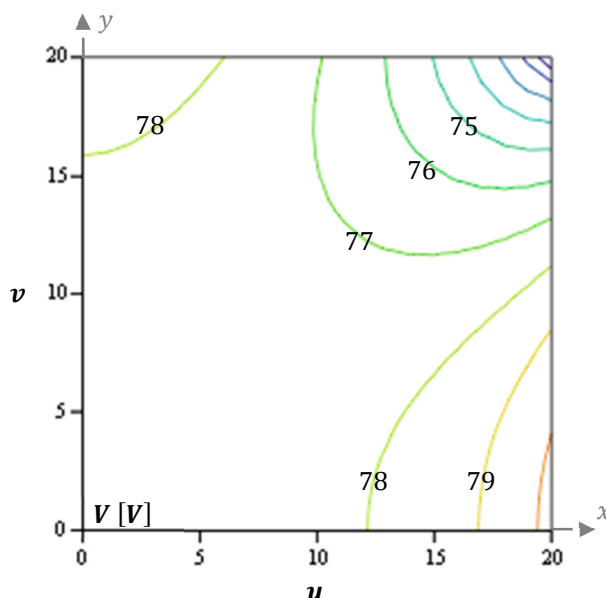


Figura 3.12 – Mapa de linhas equipotenciais, em Volts, para a esfera inscrita no cilindro condutor de $R/h = 1$, para valor médio de $\sigma_1 = 5,30516 \text{ nC/m}^2$.

Utilizando médias geométricas da distribuição do potencial pelo volume do cilindro, o valor médio aproximado do potencial pode ser dado por:

$$V_{med} = \prod_{u=0}^{20} \prod_{v=0}^{20} V_{u,v}^{\frac{1}{21^2}} = 77,427369 \text{ V} \quad (3.69)$$

No entanto, na expressão (3.69) considerou-se uma distribuição igual em toda a superfície, cometendo-se um pequeno erro. Na realidade, como se pode observar na Figura 3.12, rodando o cilindro em torno do eixo x , as grelhas mais afastadas geram maiores volumes, logo, considerando esta situação, a equação praticamente exata será:

$$V_{med} = \prod_{u=0}^{20} \prod_{v=0}^{20} (V_{u,v}^{2u+1})^{\frac{1}{21^3}} = 77,287239 \text{ V} \quad (3.70)$$

O erro cometido entre a expressão (3.69) e (3.70) será pequeno e com o valor de:

$$\delta = \frac{77,427369 - 77,287239}{77,427369} 100 = 0,181 \% \quad (3.71)$$

Visto o erro entre a expressão mais aproximada e a geral ser mínima, poder-se-ia utilizar a expressão geral, mas como se pretende ser mais rigoroso, utilizar-se-á o valor da expressão (3.70).

Finalmente, da expressão (3.42), considerada exata, então o erro obtido será de

$$\delta = \frac{77,287239 - 75,75}{77,287239} 100 = 1,99 \% \quad (3.72)$$

Dos resultados das expressões (3.42) e (3.70) conclui-se que, para um cilindro de relação $h/R = 1$, pode-se considerar um valor de densidade superficial de carga constante, pois o erro cometido é de cerca de 2 %.

3.3 CILINDRO CONDUTOR COM ESFERA CIRCUNSCRITA

Para o caso da esfera circunscrita ao cilindro condutor de comprimento igual ao diâmetro, ir-se-ão calcular as energias elétricas presentes.

Mantendo o valor do raio do cilindro condutor a $R = 0,1 \text{ m}$, o raio da esfera será $R' = R \sqrt{2} = 0,1 \sqrt{2} \text{ m}$. A densidade superficial de carga da esfera condutora circunscrita ao cilindro terá agora o valor:

$$\sigma_2 = \sigma_{esf} \sigma'_{cil} = 7,9578 \cdot 10^{-9} \cdot 0,6667 = 5,3054 \text{ nC/m}^2 \quad (3.73)$$

a energia elétrica, será:

$$W_2 = \frac{Q^2}{8 \pi \epsilon_0 R'} = \frac{(10^{-9})^2}{8 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1 \sqrt{2}} = 31,8196 \text{ nJ} \quad (3.74)$$

a capacidade da esfera condutora circunscrita, virá:

$$C_2 = \frac{Q^2}{2 W_2} = \frac{(10^{-9})^2}{2 \cdot 31,8196 \cdot 10^{-9}} = 15,7136 \text{ pF} \quad (3.75)$$

e o potencial, será:

$$V_2 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R'} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1 \sqrt{2}} = 63,639 \text{ V} \quad (3.76)$$

Donde se conclui que o cilindro, de volume compreendido entre o da esfera inscrita e o da esfera circunscrita, para a mesma carga elétrica, tem um potencial também compreendido entre os potenciais das duas esferas, ou seja:

$$V_2 < V_{med} < V_{esf} \Leftrightarrow 63,639 < 77,287239 < 90 V \quad (3.77)$$

e ainda:

$$\sigma_{Lcil} = \sigma'_{Lcil} \sigma_{esf} = 0,7071 \cdot 7,9578 \cdot 10^{-9} = 5,62696 \cdot 10^{-9} C/m^2 \quad (3.78)$$

e

$$\sigma_{Ccil} = \sigma'_{Ccil} \sigma_{esf} = 0,5858 \cdot 7,9578 \cdot 10^{-9} = 4,66168 \cdot 10^{-9} C/m^2 \quad (3.79)$$

Sendo σ_{Lcil} e σ_{Ccil} , os valores médios da densidade superficial de carga na superfície lateral e nas superfícies cilíndricas, respetivamente.

Recorrendo à expressão (3.28) para cálculo do potencial na esfera condutora com cilindro inscrito, para as mesmas condições utilizadas nas expressões (3.66), (3.67) e (3.68):

$$\begin{aligned} V_{u,v} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} & \left(\int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{Lcil} R}{\sqrt{(x - c_u)^2 - 2 R d_v \cos \varphi + R^2 + d_v^2}} d\varphi dx + \right. \\ & + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{Ccil} y}{\sqrt{(R - c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy + \\ & \left. + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{Ccil} y}{\sqrt{(R + c_u)^2 - 2 y d_v \cos \varphi + y^2 + d_v^2}} d\varphi dy \right) \quad (3.80) \end{aligned}$$

com $R = 0,1 m$, $h = 0,1 m$, $\varepsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} F/m$, $\sigma_{Lcil} = 5,62696 \cdot 10^{-9} C/m^2$ e $\sigma_{Ccil} = 4,66168 \cdot 10^{-9} C/m^2$.

A representação do mapa de linhas equipotenciais para a esfera inscrita no cilindro condutor de relação $R/h = 1$, relativamente ao 1º quadrante do plano xy , é dada pela Figura 3.13:

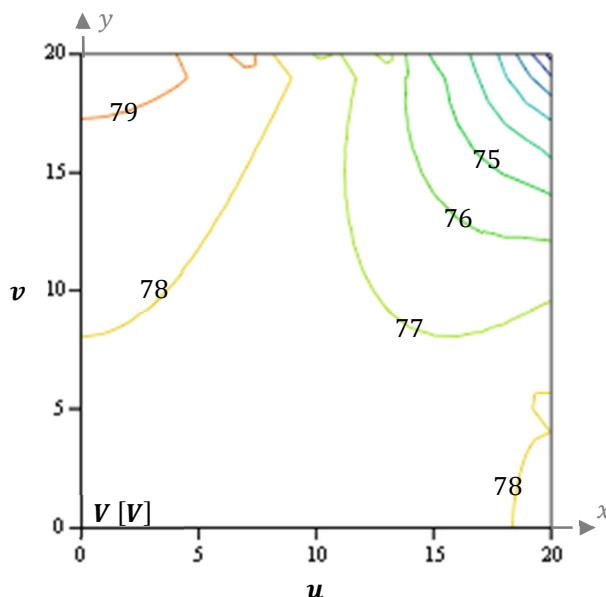


Figura 3.13 – Mapa de linhas equipotenciais, em Volts, para o cilindro de diâmetro igual ao comprimento, inscrito na esfera condutora.

Utilizando médias geométricas da distribuição do potencial pelo volume do cilindro condutor, o valor médio aproximado do potencial pode ser dado por:

$$V_{med} = \prod_{i=0}^{20} \prod_{k=0}^{20} V_{u,v} \frac{1}{21^2} = 77,285625 \text{ V} \quad (3.81)$$

No entanto, a expressão (3.81) considerou uma distribuição igual em toda a superfície, cometendo um pequeno erro. Na realidade, como se pode observar nas expressões (3.15) e (3.16), a distribuição na superfície lateral do cilindro condutor é superior às restantes, logo, considerando esta situação, a equação praticamente exata será:

$$V_{med} = \prod_{i=0}^{20} \prod_{k=0}^{20} (V_{u,v}^{2u+1}) \frac{1}{21^3} = 76,814678 \text{ V} \quad (3.82)$$

O erro cometido entre as expressões (3.81) e (3.82) será mínimo e com valor:

$$\delta = \frac{77,285625 - 76,814678}{77,285625} 100 = 0,61\% \quad (3.83)$$

Visto o erro entre a expressão mais aproximada e a geral ser mínima, poder-se-ia utilizar a expressão geral, mas como se pretende ser mais rigoroso, utilizar-se-á o valor mais aproximado. Mais uma vez, este resultado é aproximado ao obtido na expressão (3.42).

3.4 CILINDRO CONDUTOR COMPRIDO

Considerando um cilindro condutor da Figura 3.14, cujo comprimento é o dobro do seu diâmetro, ou seja, com relação $L/D = h/R = 2$, com densidade superficial de carga σ constante e quatro pontos P_0, P_1, P_2 e P_3 , calcularam-se as distâncias, em coordenadas cilíndricas, entre o ponto P_0 e os restantes.

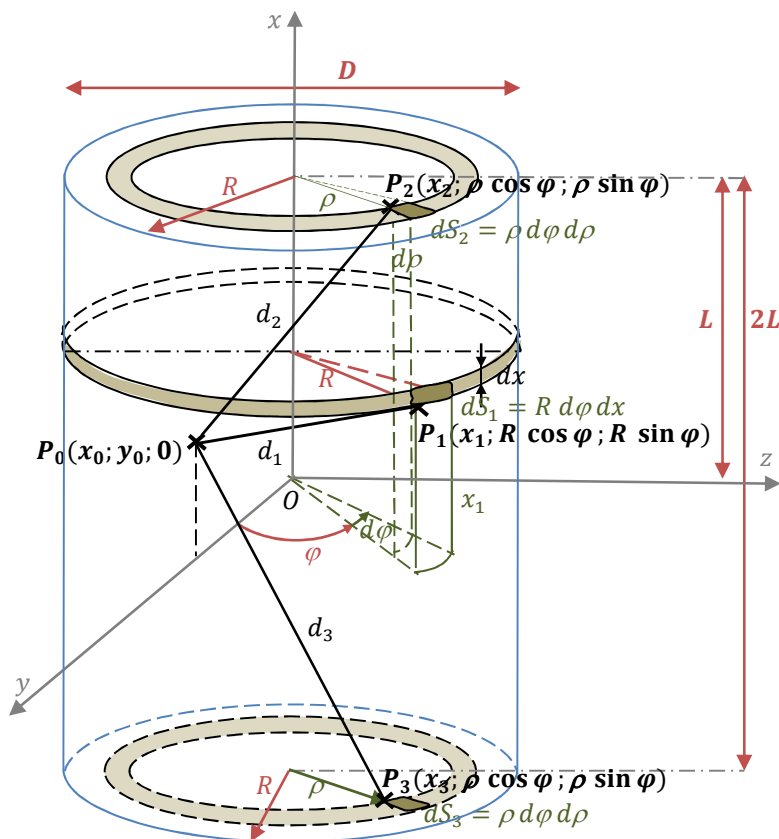


Figura 3.14 – Cilindro condutor comprido, com relação $L/D = h/R = 2$.

As distâncias entre o ponto $P_0 (x_0; y_0; 0)$ e os outros três pontos (P_1, P_2 e P_3) serão dadas por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (R \cos \varphi - y_0)^2 + R^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 - 2 R y_0 \cos \varphi + R^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

por:

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (\rho \cos \varphi - y_0)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (3.85)$$

e por:

$$\begin{aligned} d_3 &= \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (\rho \cos \varphi - y_0)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{(x_3 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Considerando o ponto P_0 , localizado nos casos seguintes, as distâncias seriam agora simplificadas por:

- $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 0, P_0 (x_0; 0; 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + R^2} \\ d_2 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + \rho^2} \\ d_3 = \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + \rho^2} \end{array} \right. \quad (3.87)$$

- $x_0 = 0$ e $y_0 \neq 0, P_0 (0; y_0; 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \sqrt{x_1^2 - 2 R y_0 \cos \varphi + R^2 + y_0^2} \\ d_2 = \sqrt{x_2^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2} \\ d_3 = \sqrt{x_3^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2} \end{array} \right. \quad (3.88)$$

- $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, $P_0 (0; 0; 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \sqrt{x_1^2 + R^2} \\ d_2 = \sqrt{x_2^2 + \rho^2} \\ d_3 = \sqrt{x_3^2 + \rho^2} \end{array} \right. \quad (3.89)$$

Pelas expressões (3.84), (3.85) e (3.86), o potencial no ponto $P_0 (x_0; y_0; 0)$ em relação aos restantes pontos P_1 , P_2 e P_3 , será dado pelas expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} dV_{01} = \frac{\sigma dS_1}{4 \pi \varepsilon_0 d_1} = \frac{\sigma R d\varphi dx}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 - 2 R y_0 \cos \varphi + R^2 + y_0^2}} \\ dV_{02} = \frac{\sigma dS_2}{4 \pi \varepsilon_0 d_2} = \frac{\sigma \rho d\varphi d\rho}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{(x_2 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2}} \\ dV_{03} = \frac{\sigma dS_3}{4 \pi \varepsilon_0 d_3} = \frac{\sigma \rho d\varphi d\rho}{4 \pi \varepsilon_0 \sqrt{(x_3 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2}} \end{array} \right. \quad (3.90)$$

Por observação da Figura 3.14 e integrando, os potenciais nos pontos P_1 , P_2 e P_3 para um cilindro condutor comprido, e admitindo que $\sigma = \text{constante}$, ter-se-á:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{01} = \frac{\sigma R}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 - 2 R y_0 \cos \varphi + R^2 + y_0^2}} d\varphi dx \\ V_{02} = \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2}} d\varphi d\rho \\ V_{03} = \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{(x_3 - x_0)^2 - 2 \rho y_0 \cos \varphi + \rho^2 + y_0^2}} d\varphi d\rho \end{array} \right. \quad (3.91)$$

Considerando agora, da Figura 3.15, com densidade superficial de carga σ constante:

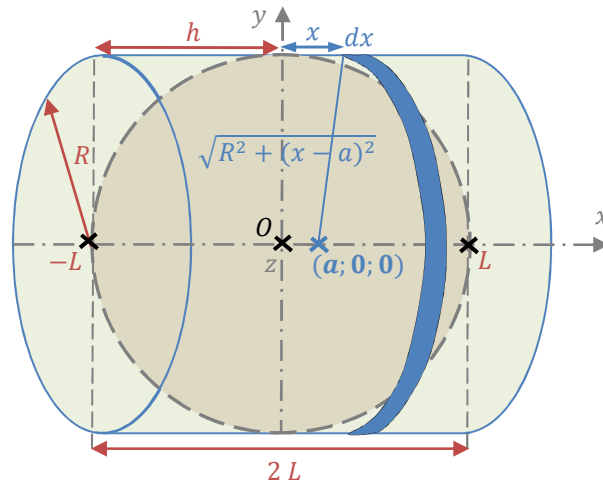


Figura 3.15 – Cilindro condutor comprido ($h > R$).

Pela Figura 3.15, o potencial elementar originado apenas pela superfície cilíndrica de espessura dx , no ponto de coordenadas $(a; 0; 0)$, será então dado por:

$$dV_a = \frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x-a)^2}} = \frac{\sigma 2 \pi R dx}{4 \pi \epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x-a)^2}} = \frac{\sigma R dx}{2 \epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x-a)^2}} \quad (3.92)$$

sendo o potencial no ponto $(a; 0; 0)$ igual a:

$$V_a = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{R^2 + (x-a)^2}} = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{R^2 + (L-a)^2} + L-a}{\sqrt{R^2 + (L+a)^2} - L-a} \right) \quad (3.93)$$

Se se considerar o ponto na origem, então $a = 0$, logo:

$$V_a = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0} \ln \left(\frac{R^2 + 2 L^2 + 2 L \sqrt{R^2 + L^2}}{R^2} \right) \quad (3.94)$$

Considerando também que $L \gg R$, então $\sqrt{R^2 + L^2} \cong \sqrt{L^2} = L$ e $R^2 + 2 L^2 \cong 2 L^2$.

Logo o potencial será dado por:

$$V_a = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0} \ln \left(\frac{2 L}{R} \right) \quad (3.95)$$

Pela lei de Gauss, a intensidade do campo elétrico à superfície do cilindro condutor, resultará em:

$$E_R = \frac{\sigma 2 \pi R L}{2 \pi \varepsilon_0 R L} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3.96)$$

Por outro lado, utilizando a expressão (3.6), utilizada no cilindro condutor de comprimento igual ao diâmetro, e considerando $R = 1$ pu, $h = 2$ pu, para 20 pontos: $u = 0 \dots 20$, $v = 0 \dots 20$, $c_u = 2 u/20$ e $d_v = v/20$, foi construído o mapa de linhas equipotenciais da Figura 3.16, referente ao 1º quadrante do plano xy , do cilindro representado na Figura 3.15.

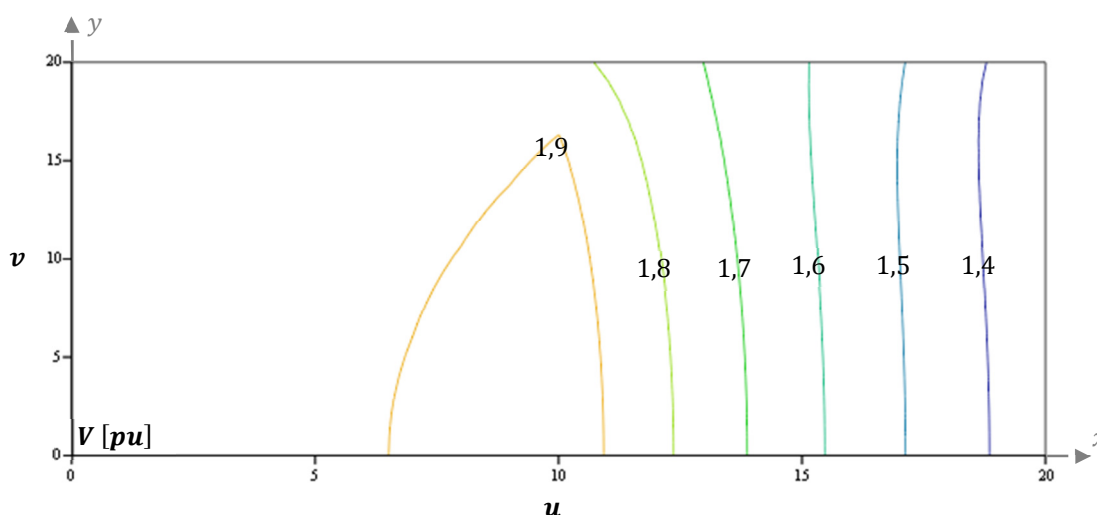


Figura 3.16 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante, no 1º quadrante do plano xy do cilindro comprido ($h/R = 2$).

Observando a Figura 3.16, verifica-se que o potencial é mais elevado no centro do cilindro condutor comprido e decresce acentuadamente nos topos. O que significa que as cargas elétricas estão mais concentradas na zona dos topos (ou das superfícies circulares).

Em relação à distribuição de potencial, considerando erradamente $\sigma = constante$, verifica-se que o erro máximo no interior do cilindro condutor é cerca de:

$$\delta = \frac{1,9 - 1,4}{1,9} 100 \approx 26,3 \% \quad (3.97)$$

3.5 CILINDRO CONDUTOR CURTO

Considerando agora um cilindro condutor curto, ou seja, com relação $L/D = h/R = 1/2$, utilizando novamente a expressão (3.6) do cilindro condutor de comprimento igual ao diâmetro, e considerando $R = 1$ pu, $h = 0,5$ pu, para 20 pontos: $u = 0 \dots 20$, $v = 0 \dots 20$, $c_u = u/20$ e $d_v = 2v/20$, foi construído o mapa de linhas equipotenciais da Figura 3.17, referente ao 1º quadrante do plano xy .

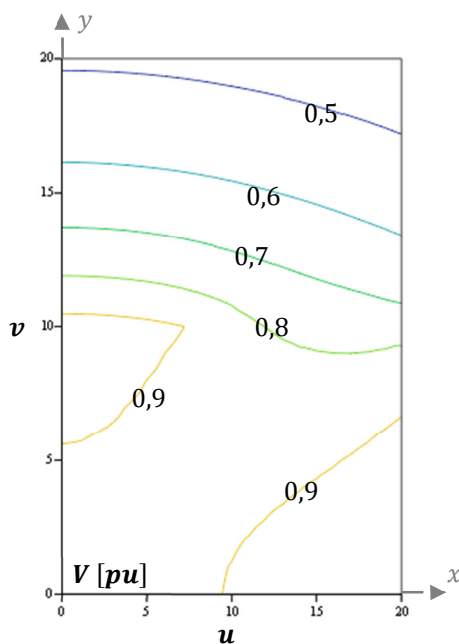


Figura 3.17 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' constante, no 1º quadrante do plano xy do cilindro curto ($h/R = 1/2$).

Observando a Figura 3.17, verifica-se agora que o potencial é mais elevado no centro do cilindro condutor curto e decresce na superfície lateral ou cilíndrica, o que significa que as cargas elétricas estão agora mais concentradas na periferia do cilindro, ou seja, na zona da superfície lateral.

Embora não seja verdade, considerando a densidade superficial de carga σ constante, pela Figura 3.17, observa-se que os potenciais são menores na superfície lateral que na superfície circular.

Para tornar o potencial constante (lei de Gauss), a distribuição de carga já não pode ser constante, ou seja, a diferença de potencial entre dois pontos a e b , por exemplo, seria dado agora pela expressão (3.98):

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{R} \quad (3.98)$$

Ainda da Figura 3.17, verifica-se que, em termos de distribuição de potencial, no interior da superfície do 1º quadrante no plano xy , o erro máximo é cerca de:

$$\delta = \frac{0,9 - 0,5}{0,9} 100 \approx 44,4 \% \quad (3.99)$$

4. DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM ESFERAS CONDUTORAS

Neste capítulo estudar-se-ão a distribuição de carga e outras grandezas elétricas presentes numa esfera isolada. Serão também estudados os potenciais e as capacidades entre as duas esferas carregadas simetricamente, próximas ou afastadas.

De seguida será estudada a distribuição de cargas elétricas em calotes esféricas condutoras, sendo abordadas algumas geometrias diferentes.

Posteriormente, será estudado o caso de uma superfície circular condutora, em forma de chapa, onde também serão analisadas as distribuições de carga.

E finalmente, será feita uma breve abordagem da distribuição de cargas no elipsoide.

4.1 ESFERA CONDUTORA

Para se determinar a distância d , entre dois pontos de uma esfera condutora de raio R , representada na Figura 4.1, consideraram-se as seguintes variáveis presentes (ver Anexo A).

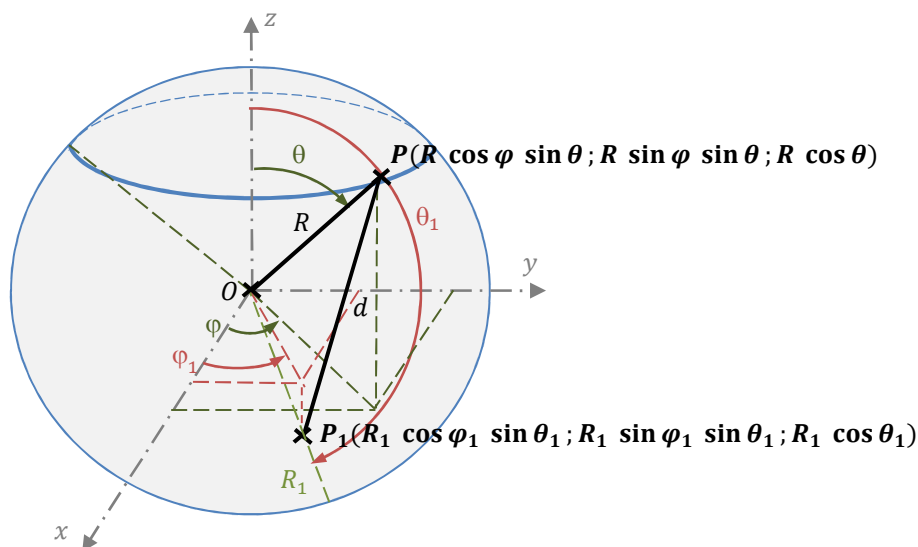


Figura 4.1 – Determinação da distância d numa esfera condutora de raio R , em coordenadas esféricas.

Observando a Figura 4.1, a distância d entre os dois pontos P (ponto pertencente à superfície da esfera) e P_1 (ponto qualquer interior ou exterior à esfera), será dada por:

$$d = \sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta - R_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta - R_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1)^2 + (R \cos \theta - R_1 \cos \theta_1)^2} \quad (4.1)$$

Simplificando, virá:

$$d = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2 R R_1 [\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos (\varphi - \varphi_1)]} \quad (4.2)$$

Considerando os casos seguintes, a distância d será dada por:

- Para $\varphi_1 = \pi/2$ (plano yz):

$$d = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2 R R_1 (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi)} \quad (4.3)$$

Se $R_1 = R$, resulta:

$$d = \sqrt{2 R^2 (1 - \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi)} \quad (4.4)$$

- Para $\varphi_1 = \pi/2$ e $\theta_1 = \pi/2$ (eixo y):

$$d = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2 R R_1 \sin \theta \sin \varphi} \quad (4.5)$$

Se $R_1 = R$, resulta:

$$d = \sqrt{2 R^2 (1 - \sin \theta \sin \varphi)} \quad (4.6)$$

- Para $\varphi = \pi/2$, $\varphi_1 = \pi/2$ e $\theta_1 = 0$ (eixo z):

$$d = \sqrt{(R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - R_1)^2} = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2 R R_1 \cos \theta} \quad (4.7)$$

Se $R_1 = R$, resulta:

$$d = \sqrt{2 R^2 (1 - \cos \theta)} \quad (4.8)$$

Considerando agora o ponto $P_1(0; 0; c)$ da Figura 4.2, para a determinação da superfície elementar dS , em coordenadas esféricas (ver Anexo A), da esfera condutora:

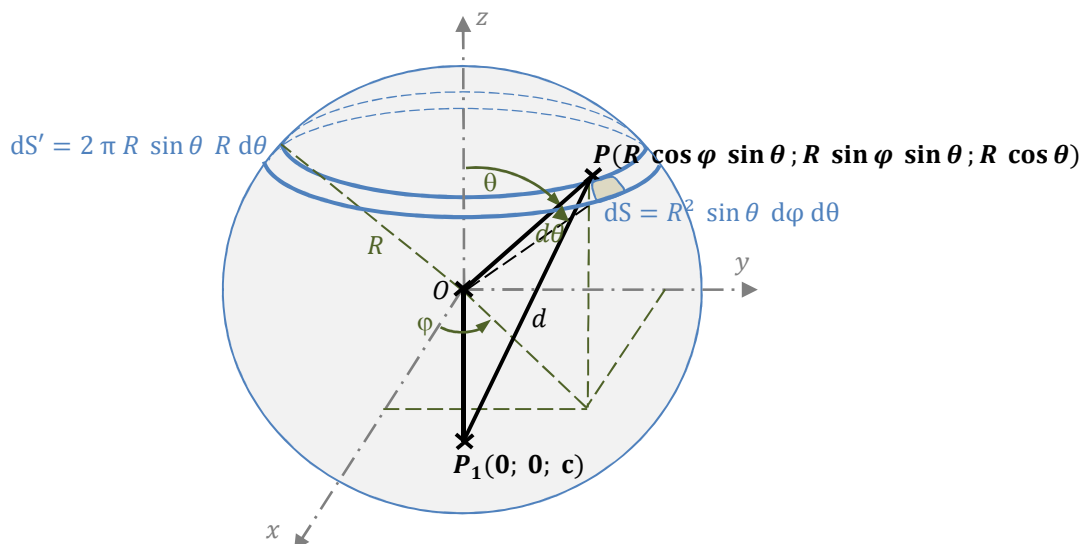


Figura 4.2 – Determinação de uma superfície elementar dS , em coordenadas esféricas.

a área da esfera condutora, pela Figura 4.2, será dada por:

$$S_{esf} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4 \pi R^2 \quad (4.9)$$

Ainda da Figura 4.2, dS' representa também a área elementar de um segmento esférico de arco elementar $R \, d\theta$.

Considerando a densidade superficial de carga σ constante, o potencial no ponto O da esfera condutora da Figura 4.2, será dado por:

$$V_O = \frac{\sigma}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{2 \pi R^2 \sin \theta}{R} \, d\theta = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad (4.10)$$

Como $\sigma = Q/S_{esf}$, sendo S_{esf} a superfície da esfera, o potencial no ponto O , será agora dado por:

$$V_O = \frac{Q R}{S_{esf} \epsilon_0} \quad (4.11)$$

Com a área da esfera condutora dada pela expressão (4.9), o potencial no centro da esfera condutora será:

$$V_o = \frac{Q R}{4 \pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R} \quad (4.12)$$

Também da Figura 4.2, considerando o ar como meio circundante da esfera condutora, de raio $R = 0,1 \text{ m}$ e de carga $Q = 10^{-9} \text{ C}$, uniformemente distribuída à superfície, o potencial no seu centro, pela expressão (4.12), será dado por:

$$V_o = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 90 \text{ V} \quad (4.13)$$

com densidade superficial de carga constante, dada por:

$$\sigma = \frac{Q}{S_{esf}} = \frac{Q}{4 \pi R^2} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 0,1^2} = 7,958 \text{ nC/m}^2 \quad (4.14)$$

Para comprovar os resultados anteriores, a partir de noções de cargas e de potenciais elementares; da Figura 4.2, dS representa a área elementar, em coordenadas esféricas, e dS' a área elementar de um segmento elementar esférico. Assim, o potencial V_c , no ponto $P_1 (0; 0; c)$, será determinado por:

$$dV_c = \frac{dQ}{4 \pi \varepsilon_0 d} \quad (4.15)$$

em que d representa a distância entre o ponto $P_1 (0; 0; c)$ e a carga na superfície elementar dS . Ainda da Figura 4.2, como $dQ = \sigma dS$, logo:

$$dV_c = \frac{\sigma dS}{4 \pi \varepsilon_0 d} \quad (4.16)$$

e por sua vez, sendo $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, então:

$$dV_c = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{4 \pi \varepsilon_0 d} \quad (4.17)$$

Integrando (4.17), virá:

$$V_c = \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta}{d} d\theta d\varphi \quad (4.18)$$

Também da Figura 4.2, a distância d , entre o ponto $P(R \cos \varphi \sin \theta; R \sin \varphi \sin \theta; R \cos \theta)$ e o ponto $P_1(0; 0; c)$, é dada por:

$$d = \sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta)^2 + (R \cos \theta - c)^2} = \sqrt{R^2 + c^2 - 2 R c \cos \theta} \quad (4.19)$$

Substituindo na expressão (4.18), resultará:

$$V_c = \frac{\sigma R^2}{4 \pi \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + c^2 - 2 R c \cos \theta}} d\theta d\varphi \quad (4.20)$$

Como $\sigma = Q/S_{esf} = Q/(4\pi R^2)$, o potencial num ponto da esfera condutora será:

$$V_c = \frac{Q}{16 \pi^2 \varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + c^2 - 2 R c \cos \theta}} d\theta d\varphi \quad (4.21)$$

Resolvendo a expressão (4.21), virá:

$$V_c = \frac{Q}{16 \pi^2 \varepsilon_0} \frac{2 \pi (\sqrt{R^2 + c^2 + 2 R c} - \sqrt{R^2 + c^2 - 2 R c})}{R c} = \frac{Q (|R + c| - |R - c|)}{8 \pi \varepsilon_0 R c} \quad (4.22)$$

então:

$$V_c = \begin{cases} \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R}, & \text{para } c < R \\ \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 c}, & \text{para } c \geq R \end{cases} \quad (4.23)$$

o que comprova a lei de Gauss⁸, considerando R constante e c variável.

Considerando o ar como meio circundante da esfera condutora, de raio $R = 0,1 \text{ m}$ e de carga $Q = 10^{-9} \text{ C}$, uniformemente distribuída à superfície, a energia eletrostática dessa esfera, em todo o espaço, será:

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8 \pi \varepsilon_0 R} = \frac{(10^{-9})^2}{8 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 45 \text{ nJ} \quad (4.24)$$

⁸ Lei de Gauss – é a lei que estabelece a relação entre o fluxo elétrico que passa através de uma superfície fechada e a quantidade de carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície [5].

Da expressão (4.23), para valores de $c < R$, verifica-se que E é nulo, e para valores de $c > R$, dado que a distribuição das linhas de força do campo elétrico são radiais fora esfera, a intensidade do campo num ponto, distanciado de c da origem da esfera condutora, em módulo, será dada por:

$$|E_c| = \left| -\frac{dV_c}{dc} \right| = \begin{cases} 0, \text{ para } c < R \\ \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 c^2}, \text{ para } c \geq R \end{cases} \quad (4.25)$$

sendo:

$$|E_c| = \left| -\frac{dV_c}{dc} \right|_{(c=R)} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R^2} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1^2} = 900 \text{ V/m} \quad (4.26)$$

o que volta a confirmar a lei de Gauss.

Assim, dado que o potencial no infinito é considerado nulo ($V_\infty = 0$), e que, para o ponto $c = R$, o potencial, pela expressão (4.23), será:

$$V_R = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R} = \frac{10^{-9}}{4 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 90 \text{ V} \quad (4.27)$$

Então, a capacidade elétrica da esfera isolada, virá igual a:

$$C = 4 \pi \varepsilon_0 R \equiv \frac{Q}{V_R - V_\infty} = \frac{Q}{V_R} = \frac{10^{-9}}{90} = 11,111 \text{ pF} \quad (4.28)$$

Também o volume da esfera condutora, virá dado por:

$$Vol_{esf} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 0,1^3 = 4,189 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (4.29)$$

a superfície da esfera, por:

$$S_{esf} = 4 \pi R^2 = 4 \pi 0,1^2 = 125,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (4.30)$$

e a densidade superficial de carga da esfera, por:

$$\sigma_{esf} = \frac{Q}{S_{esf}} = \frac{10^{-9}}{125,7 \cdot 10^{-3}} = 7,958 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 \quad (4.31)$$

4.2 INFLUÊNCIA ENTRE DUAS ESFERAS CONDUTORAS

Considerando duas esferas condutoras idênticas (ver coordenadas esféricas no Anexo A), representadas na Figura 4.3, próximas uma da outra a uma distância d , de raios R , carregadas simetricamente, neste subcapítulo estudar-se-á como se distribuem as cargas nas esferas quando estas estiverem eletricamente carregadas.

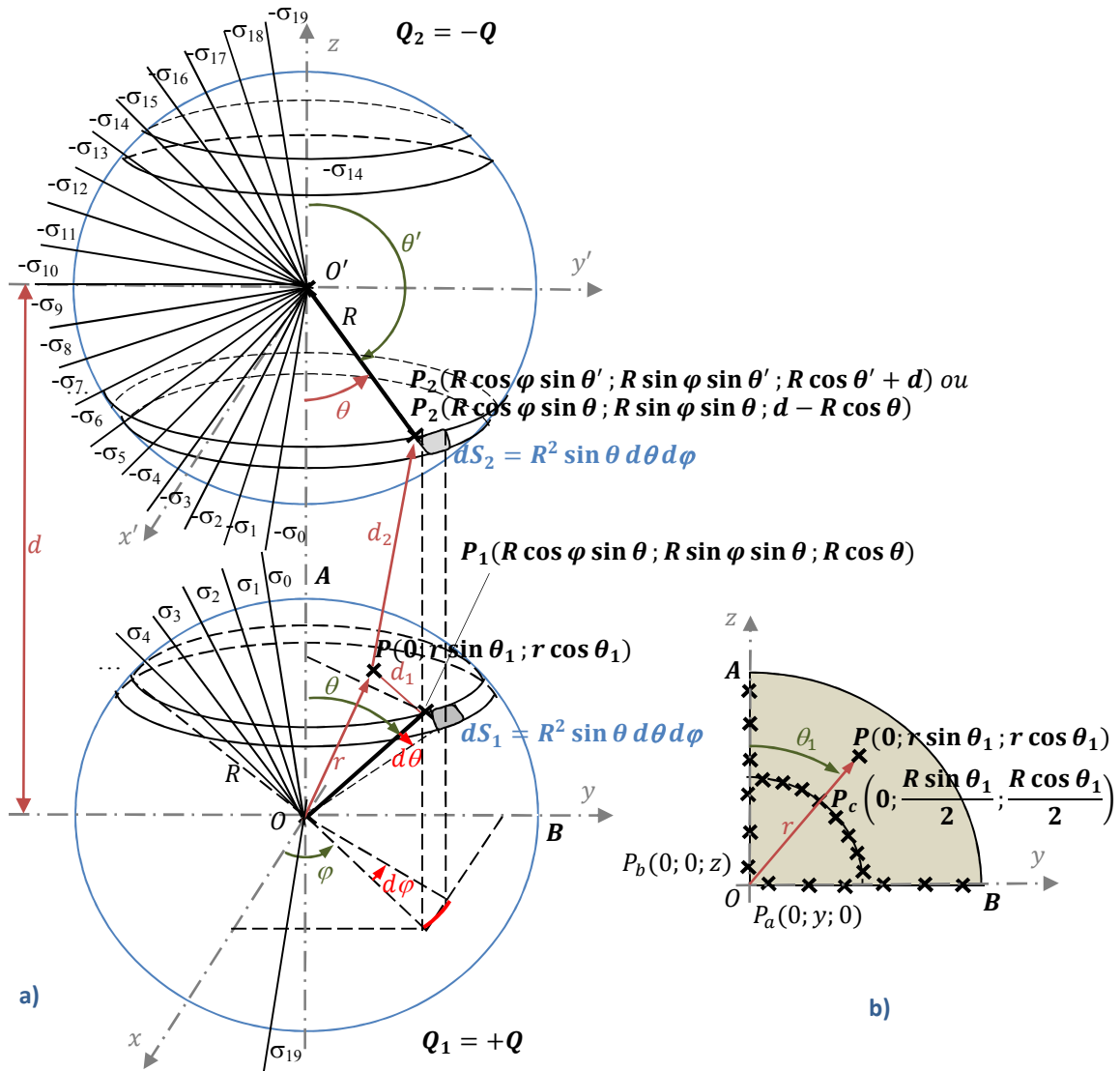


Figura 4.3 – a) Influência entre duas esferas próximas e carregadas simetricamente; b) Pontos de cálculo do potencial considerado constante, para a determinação de σ_k ($k = 0 \dots N - 1$).

Sendo N o número de pontos de cálculo do potencial, analisando as variáveis presentes na Figura 4.3, retira-se que:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= |P - P_1| = \\
 &= \sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta - r \sin \theta_1)^2 + (R \cos \theta - r \cos \theta_1)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi)} \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 d_2 &= |P - P_2| = \\
 &= \sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta - r \sin \theta_1)^2 + (d + R \cos \theta - r \cos \theta_1)^2} = \\
 &= \sqrt{R^2 + r^2 + d^2 - 2 d (R \cos \theta + r \cos \theta_1) + 2 R r (\cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi)} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Assim, de acordo com as expressões (2.28) e (2.29), serão determinadas as densidades superficiais de carga σ .

Considerando a influência entre as duas esferas (ver Figura 4.3), em primeiro lugar consideraram-se $N = 20$ pontos, igualmente distribuídos, em cada esfera condutora, em que $\theta_{2N} = \pi$ e $\theta_{2k} = \frac{k\pi}{N}$, $k = 0; 1; \dots; N - 1$. Os elementos da matriz $[s_{i,k}]$ (expressão (2.23)), serão dados por:

$$\begin{aligned}
 s_{i,k} &= \frac{R^2}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \frac{\sin \theta}{d_{1i}} d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \frac{\sin \theta}{d_{2i}} d\theta d\varphi \right] = \\
 &= \frac{R^2}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + r_i^2 - 2 R r_i (\cos \theta \cos \theta_{1i} + \sin \varphi \sin \theta \sin \theta_{1i})}} d\theta d\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2N-k}}^{\theta_{2N-k+1}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta - r_i \sin \theta_{1i})^2 + (d + R \cos \theta - r_i \cos \theta_{1i})^2}} d\theta d\varphi \right] \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

Considerando $M = N = 20$ pontos aleatórios no interior da esfera condutora de carga positiva $+Q$, mas escolhidos com algum critério (ver Figura 4.3-b), a fim de não se obterem valores negativos no parâmetro τ'_k , os ângulos e o raio, em relação a esses pontos, podem ser dados por:

$$\theta_2 = \frac{l \pi}{N} \quad (4.35)$$

com $l = 0 \dots N$, por:

$$\theta_1 = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 0; 0; 0; 0; 0; 0; \frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}; \frac{5\pi}{16}; \frac{7\pi}{16}; \frac{9\pi}{16}; \frac{11\pi}{16}; \frac{13\pi}{16}; \frac{15\pi}{16} \right] \quad (4.36)$$

e por:

$$r = \left[\frac{R}{12}; \frac{3R}{12}; \frac{5R}{12}; \frac{7R}{12}; \frac{9R}{12}; \frac{11R}{12}; \frac{R}{12}; \frac{3R}{12}; \frac{5R}{12}; \frac{7R}{12}; \frac{9R}{12}; \frac{11R}{12}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right] \quad (4.37)$$

Considerando o raio de cada esfera condutora $R = 0,1 \text{ m}$, às distâncias $d = [20; 1; 0,25; 0,21] \text{ m}$ entre os seus centros, de carga $Q = 10^{-9} \text{ C}$, e potencial constante e unitário: $[V_i] = V = 1 \text{ pu}$ na esfera carregada positivamente ($+Q$), e $-[V_i] \equiv -[V] = -1 \text{ pu}$ na esfera carregada negativamente ($-Q$). Utilizando as expressões (2.22) ou (2.23) do método dos momentos, virá:

$$[\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1} [V_i] \Leftrightarrow [\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1} [1] \quad (4.38)$$

considerando a relação $\tau'_k = \sigma'_k / \epsilon_0$ constante e unitária, em que σ'_k é a densidade superficial de carga fictícia, em $[C/m^2]$, e $\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ a permissividade elétrica do vácuo.

Recorrendo à expressão (4.38), obtiveram-se os resultados discretos da relação da densidade de carga τ' , representados nas Figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, para valores de distâncias $d = [20; 1; 0,25; 0,21] \text{ m}$, respetivamente.

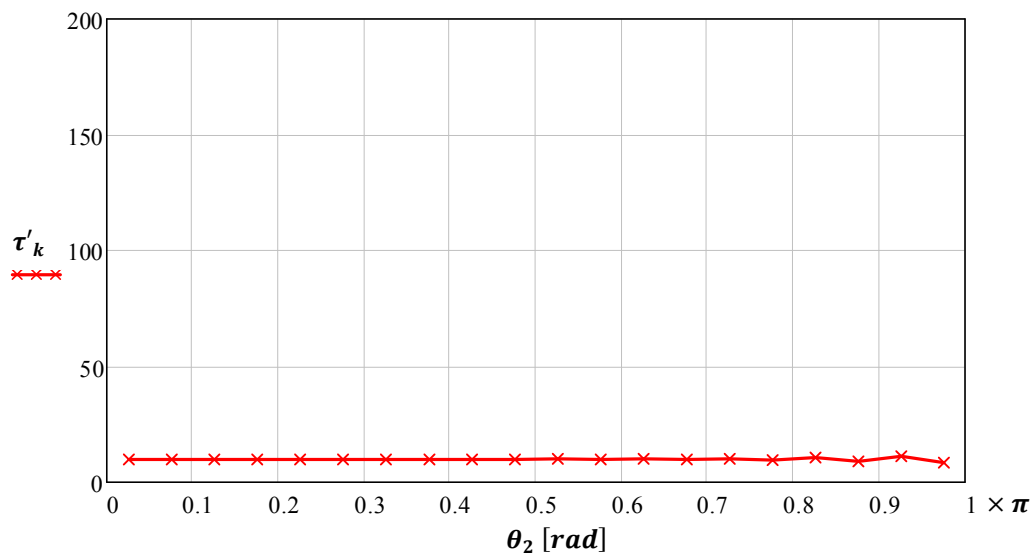


Figura 4.4 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 20$ m entre esferas ($R = 0,1$ m).

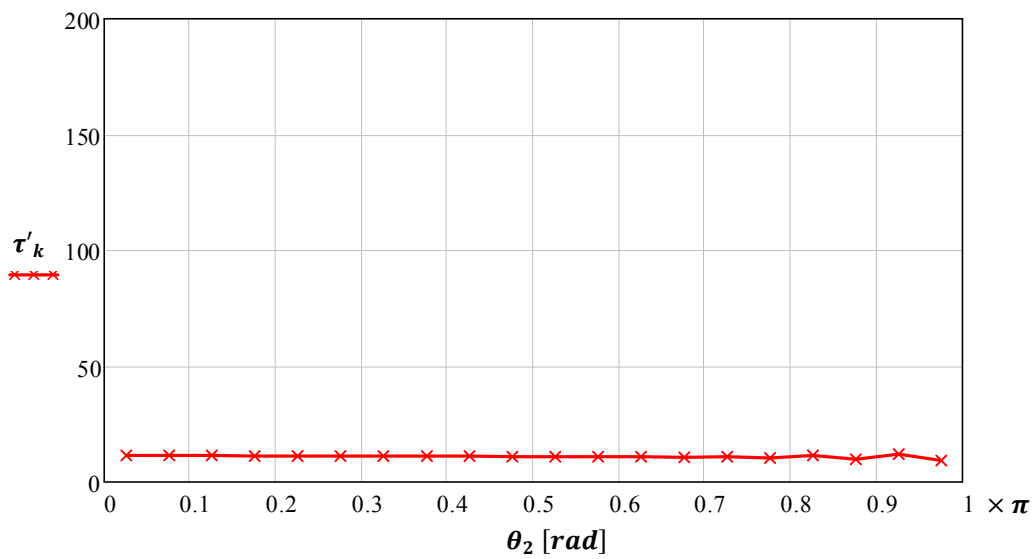


Figura 4.5 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 1$ m entre esferas ($R = 0,1$ m).

Como era de prever, não considerando os pontos discretos para valores de θ_2 próximos de π , resultante dos pontos de potencial constante não terem sido corretamente escolhidos, verifica-se que, para $d = 1\text{ m}$, face a $d = 20\text{ m}$, há variação da densidade superficial de carga na esfera e começa a decrescer na vizinhança da esfera oposta (carga simétrica) até à zona oposta.

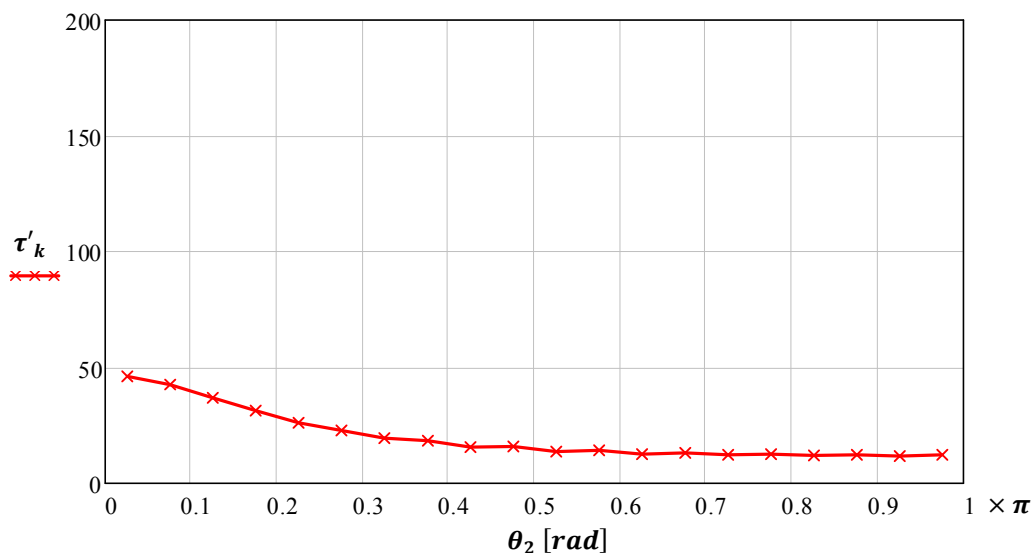


Figura 4.6 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 0,25\text{ m}$ entre esferas ($R = 0,1\text{ m}$).

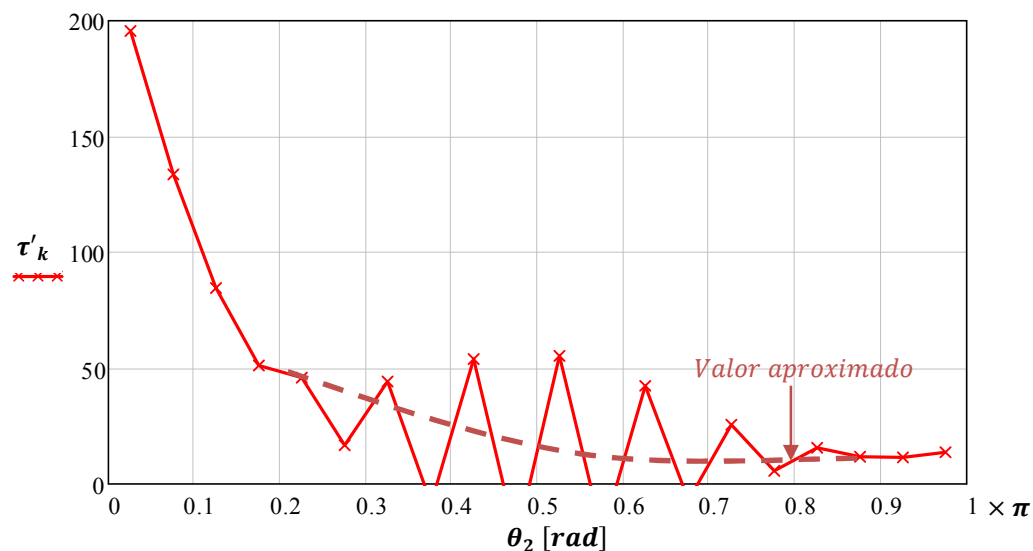


Figura 4.7 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ' , para uma distância de $d = 0,21\text{ m}$ entre esferas ($R = 0,1\text{ m}$).

Da Figura 4.6, esferas já bastante próximas, verifica-se, como era de esperar, uma concentração de cargas na vizinhança das duas esferas e uma densidade superficial de carga bastante inferior nas zonas opostas da esfera.

Na Figura 4.7, verifica-se que a distribuição de carga varia bruscamente e atinge alguns valores negativos, o que não corresponde propriamente à realidade. Então, pode-se linearizar o gráfico, através de valores médios, resultando na linearização apresentada a tracejado. Este facto deve-se, provavelmente, a uma escolha não muito criteriosa dos pontos à partida, onde se considerou o potencial constante e unitário, para a determinação de valores variáveis de τ'_k .

Observando agora as Figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, para valores de distâncias $d = [20; 1; 0,25; 0,21] m$, respetivamente, verifica-se que, quando as esferas condutoras estão muito próximas, a distribuição de cargas não é uniforme, estando as cargas mais concentradas na vizinhança da outra esfera, atingindo valores muito elevados (Figuras 4.6 e 4.7). Quando as duas esferas estão suficientemente afastadas, já não são influenciadas uma pela outra, comportando-se como se fossem esferas isoladas, logo, a sua distribuição de cargas aproxima-se a uma reta (Figuras 4.4 e 4.5).

O potencial na esfera condutora será dado por:

$$V_i = \frac{R^2}{4 \pi \epsilon_0} \sum_{k=0}^{19} \left[\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \frac{\sigma_k \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r_i^2 - 2 R r_i (\cos \theta \cos \theta_{1_i} + \sin \varphi \sin \theta \sin \theta_{1_i})}} d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2N-k}}^{\theta_{2N-k+1}} \frac{\sigma_k \sin \theta}{\sqrt{(R \cos \varphi \sin \theta)^2 + (R \sin \varphi \sin \theta - r_i \sin \theta_{1_i})^2 + (d + R \cos \theta - r_i \cos \theta_{1_i})^2}} d\theta d\varphi \right] \quad (4.39)$$

com $\sigma_k = K_1 \tau'_k / \epsilon_0$, em que:

$$K_1 = \frac{Q}{\sum_{k=0}^{19} \left[\tau'_k R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \sin \theta d\theta d\varphi \right]} \quad (4.40)$$

Recorrendo à expressão (4.39), obtiveram-se os gráficos representativos na Figura 4.8, para a distribuição do potencial:

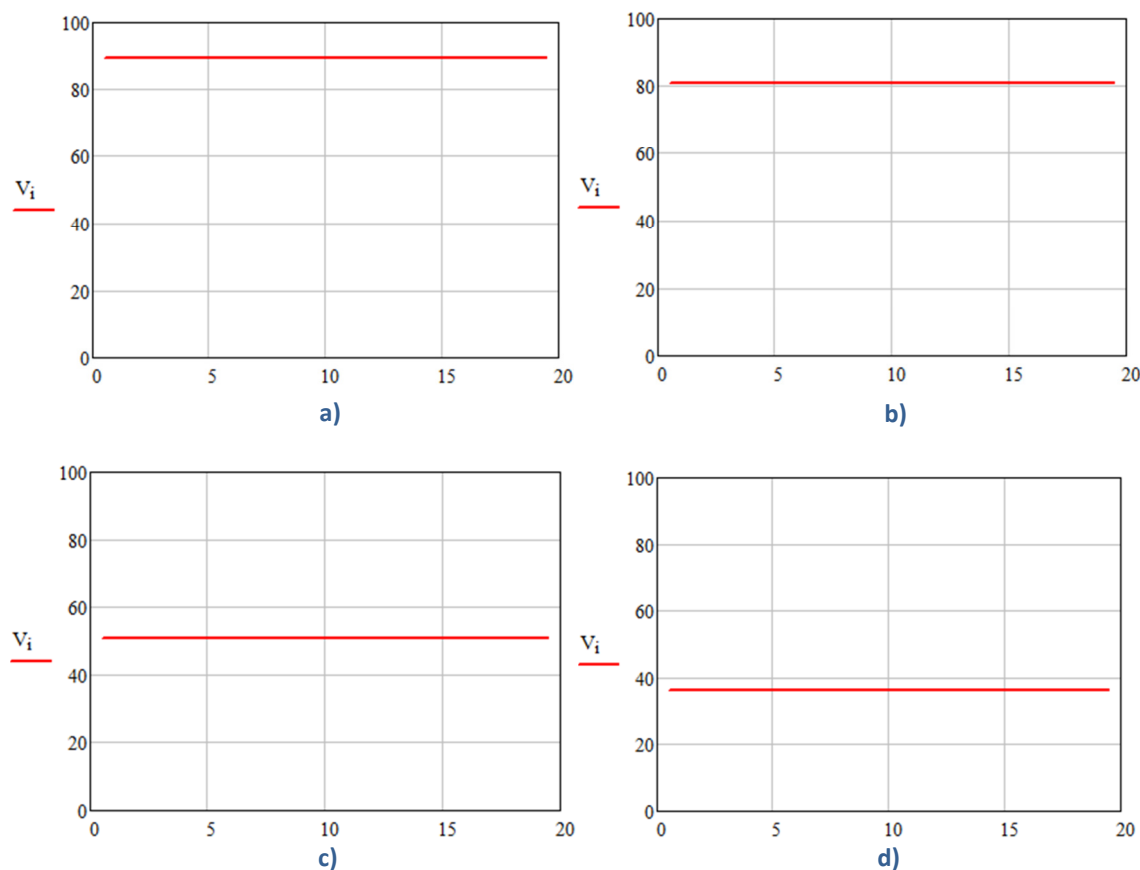


Figura 4.8 – Gráficos dos valores dos potenciais, para distâncias entre esferas de: a) $d = 20 \text{ m}$; b) $d = 1 \text{ m}$; c) $d = 0,25 \text{ m}$; d) $d = 0,21 \text{ m}$.

Pela Figura 4.8, verifica-se que, quanto mais próximas estiverem as duas esferas condutoras, menor é o valor do potencial. Pela Figura 4.8-a, verifica-se que o potencial na esfera é aproximadamente 90 V , o que vai de encontro ao calculado anteriormente para a esfera isolada, comprovando-se que, para distâncias muito elevadas, as esferas comportam-se como se fossem isoladas.

4.3 CAPACIDADES ENTRE ESFERAS CONDUTORAS

As capacidades entre esferas condutoras podem ser determinadas pelo método descrito no subcapítulo anterior, no entanto, apresenta-se seguidamente um outro método também aproximado, como se indica na Figura 4.9, em que se consideram duas esferas condutoras idênticas, de raio R , a uma distância d entre os seus centros.

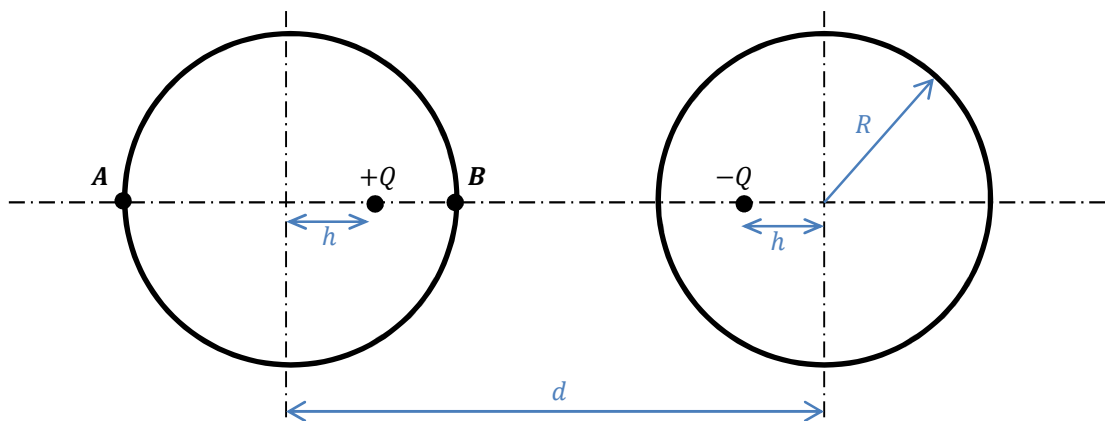


Figura 4.9 – Duas esferas condutoras: potenciais nos pontos A e B.

Da Figura 4.9, o potencial nos pontos A e B da esfera condutora, em relação às cargas $+Q$, da primeira esfera, e $-Q$, da segunda esfera, consideradas pontuais, pode ser traduzido pelas seguintes equações:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{d+R-h} \right) \quad (4.41)$$

e

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R-h} - \frac{1}{d-R-h} \right) \quad (4.42)$$

Igualando as expressões (4.41) e (4.42), virá:

$$\begin{aligned} V_A = V_B &\Leftrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{d+R-h} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R-h} - \frac{1}{d-R-h} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{R+h} - \frac{1}{d+R-h} = \frac{1}{R-h} - \frac{1}{d-R-h} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Resolvendo agora a expressão (4.43), em ordem à distância entre os centros das esferas d , recorrendo a manipulações matemáticas, resultam em várias soluções, ao que se escolheu a válida positiva, ou seja:

$$d = \frac{\sqrt{R} \sqrt{R^2 + R h - h^2} + h^{3/2}}{\sqrt{h}} \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{R (R^2 + R h - h^2)} + h^{3/2}}{\sqrt{h}} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{R h (R^2 + R h - h^2)} + h^2}{h} \quad (4.44)$$

Considerando o raio $R = 1$ pu, resultará:

$$d = \frac{h^2 + \sqrt{h (1 + h - h^2)}}{h} \quad (4.45)$$

Manipulando a expressão (4.43), em ordem à distância h do centro da esfera ao ponto da carga pontual $+Q$ ou $-Q$, para $R = 1$ pu, virá:

$$h (h^2 + h (R - 2 d) - R^2 - d^2) = R^3 \Leftrightarrow h (h^2 + h (1 - 2 d) - 1 - d^2) = 1 \quad (4.46)$$

onde, recorrendo a manipulações matemáticas, se obtiveram três soluções, sendo a válida positiva dada por:

$$h = \frac{2 d - 1}{3} + \frac{\frac{(d - 2)^2 e^{-j \frac{2\pi}{3}}}{9} + \left\{ \frac{d - 2}{6} \left[\sqrt{\frac{d (4 d^2 + 11 d + 16)}{3}} - \frac{2 d^2 + 19 d + 8}{9} \right] \right\}^{\frac{2}{3}} e^{-j \frac{2\pi}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{d - 2}{6} \left[\sqrt{\frac{d (4 d^2 + 11 d + 16)}{3}} - \frac{2 d^2 + 19 d + 8}{9} \right]}} \quad (4.47)$$

No entanto, o potencial num determinado ponto P da esfera condutora de raio R , em relação às cargas $+Q$, da primeira esfera, e $-Q$, da segunda esfera, pode ser representado pela Figura 4.10.

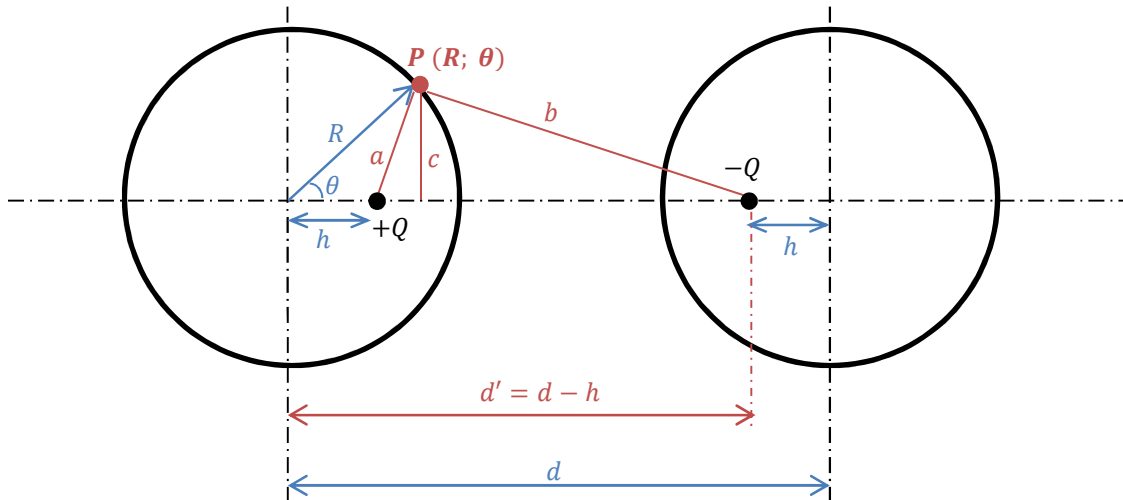


Figura 4.10 – Duas esferas condutoras com potenciais em relação ao ponto P.

Da Figura 4.10, o potencial no ponto P da esfera condutora de carga +Q, é dado pela equação:

$$V_P = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (4.48)$$

Também da Figura 4.10, como o raio R da esfera pode ser dado por:

$$R^2 = a^2 + h^2 + 2 a h \cos \theta \quad (4.49)$$

Ainda da Figura 4.10, a distância a, do ponto P à carga Q, optando-se pela solução positiva, será:

$$a = \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta} - h \cos \theta \quad (4.50)$$

Também da Figura 4.10, a distância b, do ponto P à carga -Q da segunda esfera, pode ser dada por:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(d' - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{d'^2 + R^2 \cos^2 \theta - 2 d' R \cos \theta + R^2 \sin^2 \theta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{R^2 + d'^2 - 2 d' R \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Logo, substituindo a (4.50) e b (4.51) na expressão (4.48), pode-se determinar o potencial no ponto P através da expressão:

$$V_P = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta} - h \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d'^2 - 2 d' R \cos \theta}} \right) \quad (4.52)$$

Sabendo que $\frac{Q}{4 \pi \epsilon_0}$ é um valor constante e igual a k , o potencial num ponto da esfera condutora pode ser representado por:

$$V_P = k \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta} - h \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d'^2 - 2 d' R \cos \theta}} \right) \quad (4.53)$$

Recorrendo agora à expressão (4.53), considerando os dados seguintes:

- Constante: $k = 1$;
- Raio das esferas condutoras: $R = 1$ pu;
- Distância do centro da esfera condutora à carga pontual $+Q$: $h =$ expressão (4.47);
- Ângulo θ do ponto P em relação ao eixo das abcissas: $0 \leq \theta \leq 2 \pi$;
- Distância do centro da primeira esfera condutora ao ponto $-Q$ da segunda esfera: $d = [2,1; 3; 5; 10; 20] m$.

Simplificando a expressão (4.53), com os dados anteriores, virá:

$$V_P = \frac{1}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \theta} - h \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 - 2 d \cos \theta}} \quad (4.54)$$

Simulando a expressão (4.54) num software matemático, obteve-se o gráfico da Figura 4.11, em que:

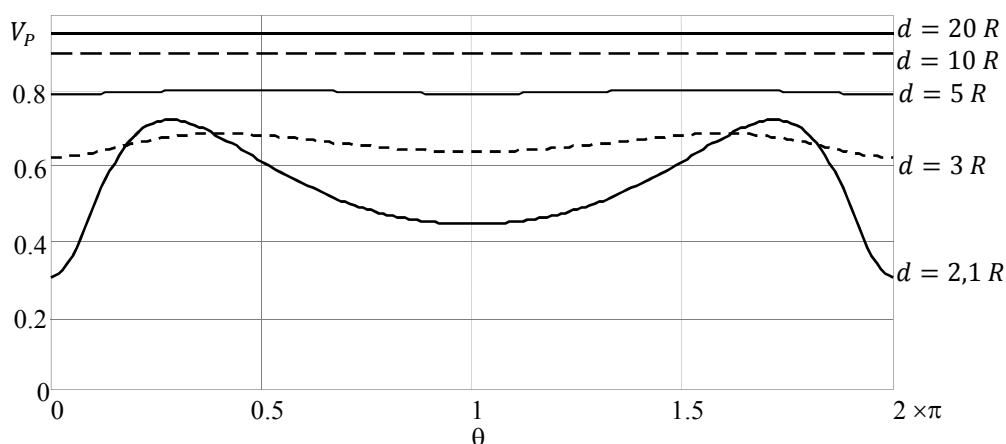


Figura 4.11 – Gráfico representativo de V_p , em pu, para diversos valores de d .

Como se pode observar pela Figura 4.11, quanto maior for a distância entre as duas esferas condutoras, mais constante será a distribuição do potencial na periferia da esfera de carga positiva, ou seja, no ponto $P(R; \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Na linha $d = 2,1R$, que corresponde à distância mais pequena entre as duas esferas, pode-se observar a forte influência exercida na primeira esfera pela segunda, que provoca nalguns pontos um potencial mais elevado do que noutros, devido ao facto de que não é suficiente considerarem-se apenas duas cargas pontuais $+Q$ e $-Q$, como se indica na Figura 4.10. Quanto mais afastadas estiverem as esferas, menores serão as influências dos campos elétricos e mais constante será a distribuição do potencial, pois haverá menos influência da segunda esfera sobre a primeira.

Também pela Figura 4.11, verifica-se que há mais variação de potencial, o que significa que existem influências de mais de um ponto na esfera.

Para esferas muito afastadas, um outro método de cálculo de capacidade entre esferas pode ser apresentado, considerando duas esferas condutoras, de raios R , eletricamente carregadas com cargas simétricas de valor $Q_1 = -Q_2 = Q = 10^{-9} C$ e afastadas a uma distância d , representadas na Figura 4.12, em que se considera $d \gg R$.

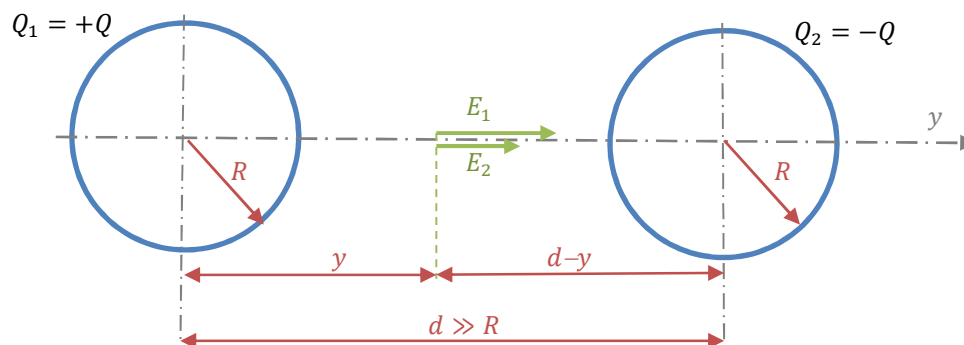


Figura 4.12 – Duas esferas condutoras carregadas simetricamente e muito afastadas.

Da Figura 4.12, como as cargas das esferas são simétricas, os seus potenciais também o são. Logo, a capacidade, considerando a diferença de potencial entre as duas esferas, será dada por:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (4.55)$$

em que U é a tensão entre as esferas, V_1 o potencial da esfera de carga $+Q$ e V_2 o potencial da esfera de carga $-Q$.

Considerando um ponto y entre as duas esferas (ver Figura 4.12), a capacidade será então dada por:

$$C = \frac{Q}{-\int_{d-R}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-y)^2} dy} = \frac{2\pi\epsilon_0 R(d-R)}{d-2R} \quad (4.56)$$

Também da Figura 4.12, considerando que a distância entre as duas esferas é muito grande em relação aos seus raios, $d \gg R$, então:

$$C = 2\pi\epsilon_0 R \quad (4.57)$$

Como a capacidade para uma esfera isolada é dada por $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R$, uma vez que a capacidade obtida pela expressão (4.57) é de metade desse valor, isso significa que se pode aproximar a um circuito com condensadores em série.

A Figura 4.13 faz uma representação, por analogia, do esquema equivalente de dois condensadores em série, com um ponto de ligação comum, o infinito:

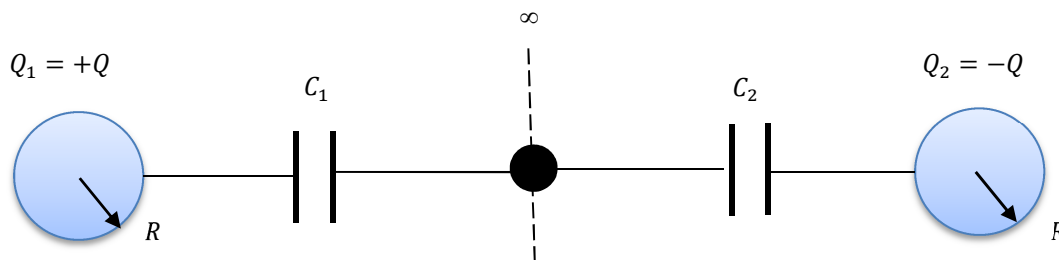


Figura 4.13 – Capacidades entre duas esferas muito afastadas.

Resolvendo o circuito da Figura 4.13, a capacidade equivalente será dada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.58)$$

Da Figura 4.13, como o ponto entre as esferas está à mesma distância para ambas as esferas, então, pode-se dizer que as capacidades são iguais: $C_1 = C_2 = C$, logo:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{2}{C} \Leftrightarrow C_{eq} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow C_{eq} = 2 \pi \varepsilon_0 R \quad (4.59)$$

Por sua vez, como a capacidade entre as duas esferas e o referencial ∞ são iguais, logo, também os seus potenciais serão iguais, mas simétricos. Deste modo, os potenciais nas esferas virão dados por:

$$V_1 - V_2 = 2 V_1 = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0 R} \quad (4.60)$$

Considerando o raio da esfera $R = 0,1 \text{ m}$ e substituindo na expressão (4.60), os potenciais nas esferas serão:

$$2 V_1 = \frac{10^{-9}}{2 \pi 8,842 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \Leftrightarrow V_1 = 90 \text{ V} \quad e \quad V_2 = -90 \text{ V} \quad (4.61)$$

e substituindo na (4.59), a capacidade equivalente será:

$$C = 2 \pi \varepsilon_0 R = 5,56 \text{ pF} \quad (4.62)$$

CAPÍTULO 4 – DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM ESFERAS CONDUTORAS

A energia elétrica será dada por:

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \quad (4.63)$$

Como as esferas são idênticas, logo a energia elétrica será também igual a:

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = 90,5 \text{ nJ} \quad (4.64)$$

Recorrendo agora às expressões (4.56) e (4.60), foi preenchida a Tabela 4.1, para comparação dos potenciais e capacidades numa esfera, com a variação da distância entre as duas esferas, considerando o raio $R = 0,1 \text{ m}$ e a carga $Q = 10^{-9} \text{ C}$.

Distância	Capacidade C [pF]	Potencial U [V]	Energia W [nJ]
$d = 20 \text{ m}$	5,5914	178,84	89,42
$d = 5 \text{ m}$	5,6792	176,08	88,04
$d = 1 \text{ m}$	6,2587	159,78	79,89
$d = 0,5 \text{ m}$	7,4177	134,82	67,41
$d = 0,25 \text{ m}$	16,6898	59,92	29,96
$d = 0,21 \text{ m}$	61,1958	16,34	8,17
$d = 0,20001 \text{ m}$	55 638,1	0,018	0,009

Tabela 4.1 – Quadro comparativo do potencial, capacidade e energia de uma esfera, com a distância entre duas esferas.

Observando a Tabela 4.1, constata-se que, quanto mais afastadas estão as duas esferas entre si, menor será o valor da capacidade entre as esferas e maior será o potencial de cada. O potencial é mais reduzido, quando as esferas estão mais próximas uma da outra, devido às esferas possuírem cargas iguais e simétricas, ao que, o potencial, tende a anular-se quando as esferas estão muito próximas, como se pode verificar na Tabela 4.1, para $d = 0,20001 \text{ m}$.

É de referir que os valores dos potenciais obtidos na Tabela 4.1, são coincidentes com os valores obtidos no estudo do subcapítulo 4.2 (influência entre duas esferas condutoras), na Figura 4.8.

4.4 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA

Considerando a calote esférica condutora da Figura 4.14, de relação diâmetro-comprimento unitária ($\frac{D}{L} = \frac{R}{h} = 1$):

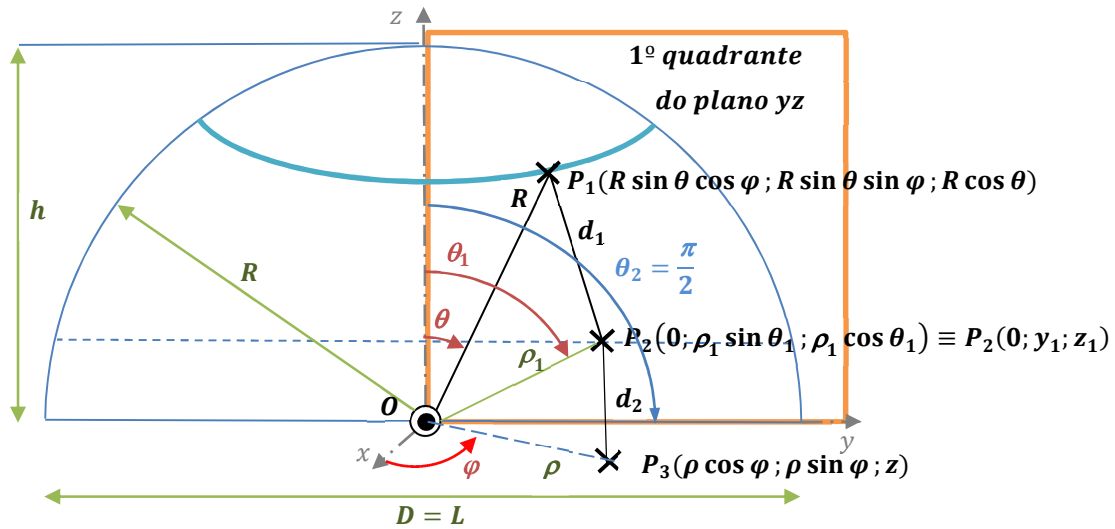


Figura 4.14 – Calote esférica condutora (coordenadas esféricas).

Da Figura 4.14, as distâncias entre os pontos P_1 e P_2 , e entre P_2 e P_3 , podem ser dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(R \sin \theta \cos \varphi)^2 + (R \sin \theta \sin \varphi - \rho_1 \sin \theta_1)^2 + (R \cos \theta - \rho_1 \cos \theta_1)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + \rho_1^2 - 2 R \rho_1 (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi)} \end{aligned} \quad (4.65)$$

e por:

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi - \rho_1 \sin \theta_1)^2 + (z - \rho_1 \cos \theta_1)^2} = \\ &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 + z^2 - 2 \rho_1 (\rho \sin \theta_1 \sin \varphi + z \cos \theta_1)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

ou

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(R \sin \theta \cos \varphi)^2 + (R \sin \theta \sin \varphi - y_1)^2 + (R \cos \theta - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2 R (y_1 \sin \theta \sin \varphi + z_1 \cos \theta)} = \\ &= \sqrt{R^2 + \rho_1^2 - 2 R (y_1 \sin \theta \sin \varphi + z_1 \cos \theta)} \end{aligned} \quad (4.67)$$

e

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{\rho^2 + y_1^2 - 2 \rho y_1 \sin \varphi + (z - z_1)^2} \end{aligned} \quad (4.68)$$

em que, da Figura 4.14, o ponto P_3 , que pode ser deslocado na posição vertical (segundo o eixo z), pertence ao plano paralelo a xy , que contém a base da calote esférica de altura variável h , sendo $0 < \theta_2 \leq \pi$ ($\theta_2 = \pi/2$ corresponde a uma calote em que $h = R$, e $\theta_2 = \pi$ corresponde a toda a esfera).

Da Figura 4.14, sendo P_2 um ponto do 1º quadrante do plano yz , pelas regras trigonométricas, retira-se que:

$$\rho_{1,i,k} = \sqrt{y_{1i}^2 + z_{1k}^2} \quad (4.69)$$

e, para $z_{1k} > 0$, o ângulo que o segmento $\overline{OP_2}$ faz com o eixo y , será dado por:

$$\theta_{1,i,k} = \tan^{-1} \left(\frac{y_{1i}}{z_{1k}} \right) \quad (4.70)$$

ou, para $z_{1k} = 0$, o ângulo $\theta_{1,i,k}$ será igual a:

$$\theta_{1,i,k} = \frac{\pi}{2} \quad (4.71)$$

Considerando o parâmetro τ' , relacionado com a densidade superficial de carga, os pontos segundo os eixos y e z : $i = 0 \dots M$ e $k = 0 \dots N$, com $M = N$, o raio da esfera condutora $R = 1$ pu e limitando graficamente o perímetro da calote, considerou-se que o potencial $V_{i,k}$ terá valores constantes no plano yz : $y_{1i}^2 + z_{1k}^2 \leq R^2$.

Perante estas condições, nos subcapítulos seguintes serão estudados os casos da calote esférica condutora de raio inferior à semiesfera, equivalente à semiesfera, superior à semiesfera e equivalente à esfera completa.

4.4.1 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi/3$

Considerando a Figura 4.14, elucidativa da calote esférica condutora de raio inferior à semiesfera, de $\theta_2 = \pi/3$, com relação $h = 0,5 R$:

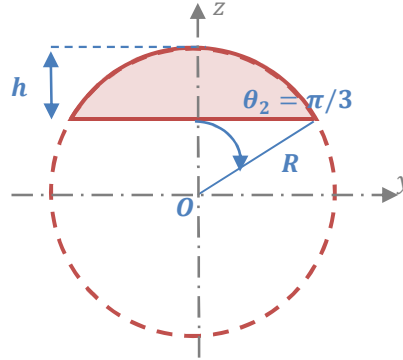


Figura 4.15 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.

Recorrendo à expressão (4.18) e a manipulações matemáticas de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais no plano yz, o potencial da superfície esférica da calote de condutora de $\theta_2 = \pi/3$, será dado por:

$$V_{a_{i,k}} = \frac{\tau' R^2}{4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + \rho_{1_{i,k}}^2 - 2 R (y_{1_i} \sin \theta \sin \varphi + z_{1_k} \cos \theta)}} d\theta d\varphi \quad (4.72)$$

e o potencial da superfície circular da calote de condutora, de $\theta_2 = \pi/3$, será dado por:

$$V_{b_{i,k}} = \frac{\tau'}{4 \pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin(\frac{\pi}{3})}{\sqrt{\rho^2 + \rho_{1_{i,k}}^2 - 2 \rho \rho_{1_{i,k}} \cos \varphi \cos \theta_{1_{i,k}}}} d\varphi d\rho \quad (4.73)$$

em que o potencial total $V_{i,k} = V_{a_{i,k}} + V_{b_{i,k}}$, com $\rho_{1_{i,k}} = \sqrt{y_{1_i}^2 + z_{1_k}^2}$, $z = 0,5$ pu, que corresponde à altura do corte da esfera no eixo z, e $\tau' = constante = 1$ pu.

Para $M = N = 100$ pontos, os pontos no plano yz serão dados por (ver Figura 4.14):

$$y_{1_i} = \frac{R i}{M} \quad (4.74)$$

e por:

$$z_{1k} = \frac{R k}{N} \quad (4.75)$$

Com os dados anteriores, foram construídos os mapas de linhas equipotenciais no plano yz , para o 1º quadrante da calote esférica condutora, representados nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18.

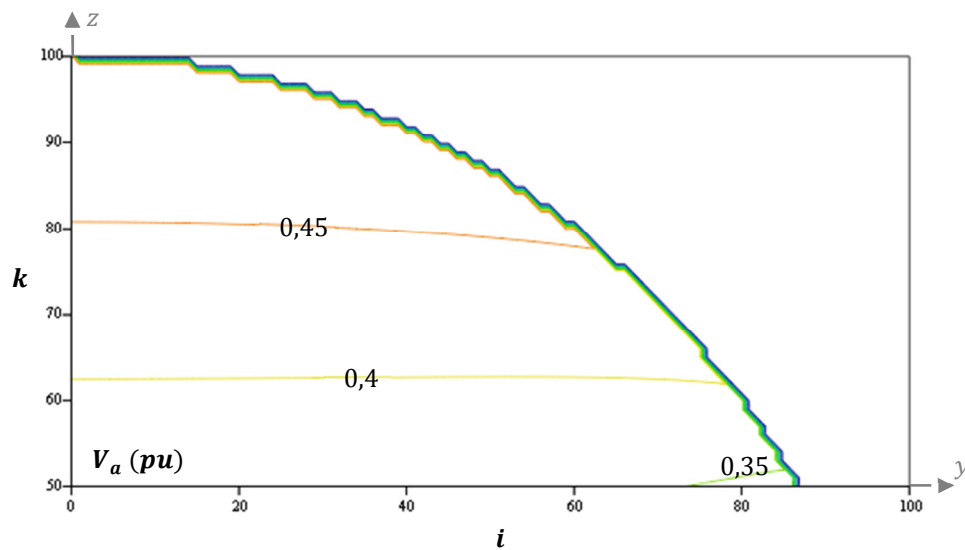


Figura 4.16 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica V_a da calote condutora de $\theta_2 = \pi/3$.

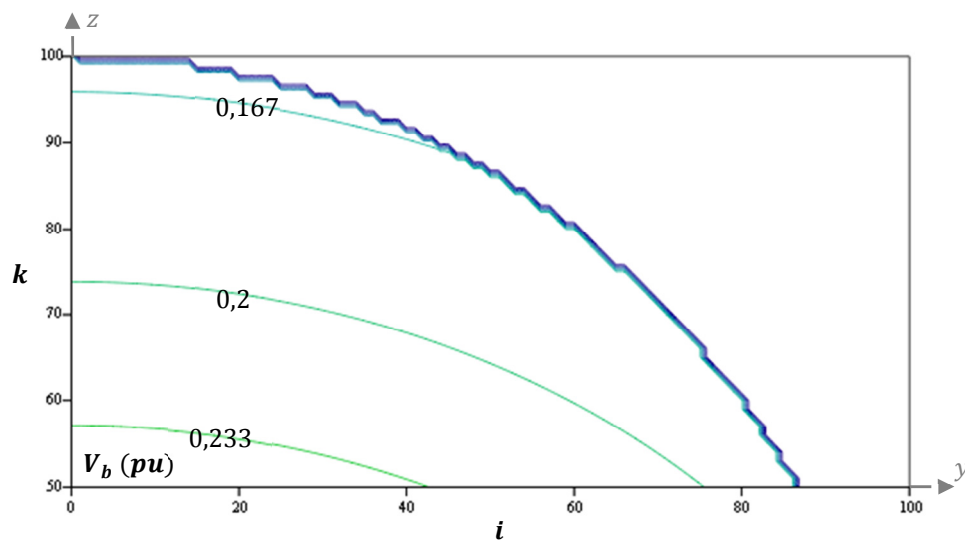


Figura 4.17 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular V_b da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.

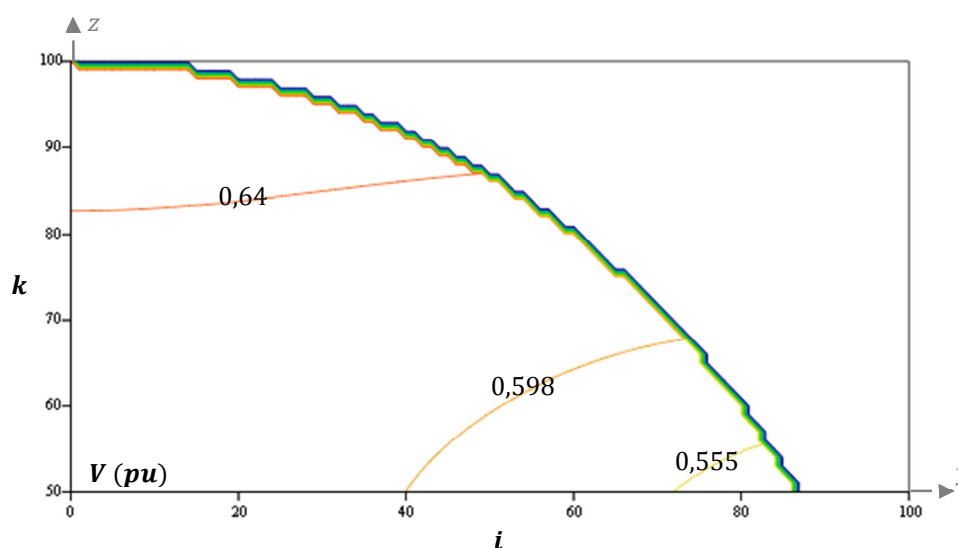


Figura 4.18 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/3$.

Comparando a Figura 4.16 com a Figura 4.17, constata-se que a distribuição do potencial (em pu) na superfície esférica é praticamente o dobro do potencial na superfície circular. Isto significa que, apesar de se ter considerado a densidade superficial de carga σ constante, na realidade esta varia e é inferior na superfície esférica e superior na superfície circular (concentrando-se nos extremos).

Ainda na Figura 4.16, verifica-se que o potencial aumenta no sentido da base para a extremidade superior da calote esférica condutora, o que significa que a densidade superficial de carga varia em sentido inverso ao longo da superfície esférica da calote.

Interpretando agora a Figura 4.18, pode-se verificar, como referido anteriormente, que o potencial é mais elevado no topo da superfície esférica, sendo a vizinhança do perímetro da superfície circular a que possui menos distribuição de potencial e, conseqüentemente, irá possuir a maior concentração de cargas.

Pode-se ainda referir que é na superfície circular que ocorre maior variação da distribuição de cargas.

4.4.2 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi/2$

Considerando a Figura 4.19, elucidativa da calote esférica condutora equivalente à semiesfera, de $\theta_2 = \pi/2$, com relação $h = R$:

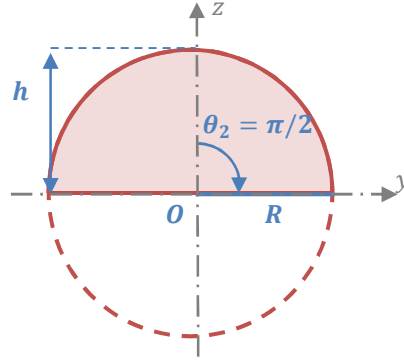


Figura 4.19 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.

Recorrendo às expressões (4.72) e (4.73) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais no plano yz , o potencial da superfície esférica da calote condutora de $\theta_2 = \pi/2$ será dado por:

$$V_{a_{i,k}} = \frac{\tau' R^2}{4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + \rho_{1_{i,k}}^2 - 2 R (y_{1_i} \sin \theta \sin \varphi + z_{1_k} \cos \theta)}} d\theta d\varphi \quad (4.76)$$

e o potencial da superfície circular da calote condutora de $\theta_2 = \pi/2$ será dado por:

$$V_{b_{i,k}} = \frac{\tau'}{4 \pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_{1_{i,k}}^2 - 2 \rho \rho_{1_{i,k}} \cos \varphi \cos \theta_{1_{i,k}}}} d\varphi d\rho \quad (4.77)$$

em que o potencial total $V_{i,k} = V_{a_{i,k}} + V_{b_{i,k}}$, com $\rho_{1_{i,k}} = \sqrt{y_{1_i}^2 + z_{1_k}^2}$, $z = 0$ pu, que corresponde à altura do corte da esfera no eixo z , e $\tau' = constante = 1$ pu.

Para $M = N = 100$ pontos, tal como se apresentam nas expressões (4.74) e (4.75), ter-se-á respetivamente: $y_{1_i} = \frac{R i}{M}$ e $z_{1_k} = \frac{R k}{N}$ (ver Figura 4.14).

Com os dados anteriores, foram construídos os mapas de linhas equipotenciais no plano yz , para o 1º quadrante da calote esférica condutora, representados nas Figuras 4.20, 4.21 e 4.22.

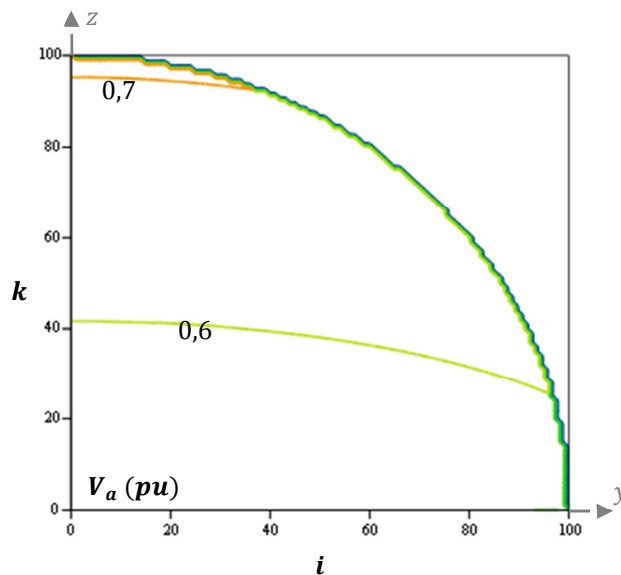


Figura 4.20 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica V_a da calote condutora de $\theta_2 = \pi/2$.

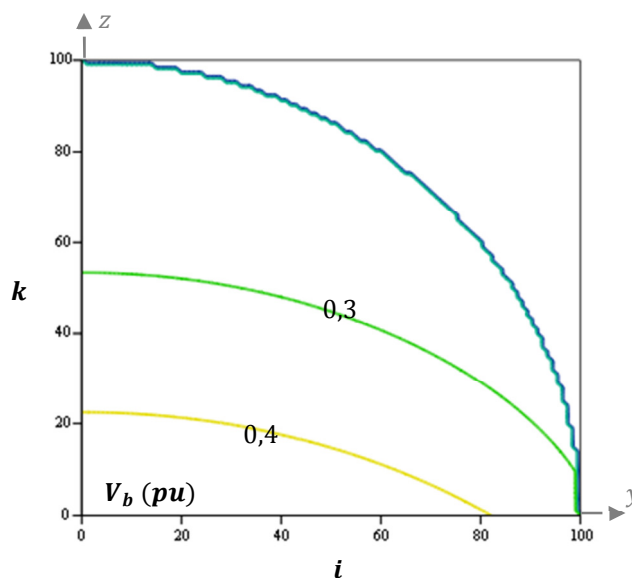


Figura 4.21 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular V_b da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.

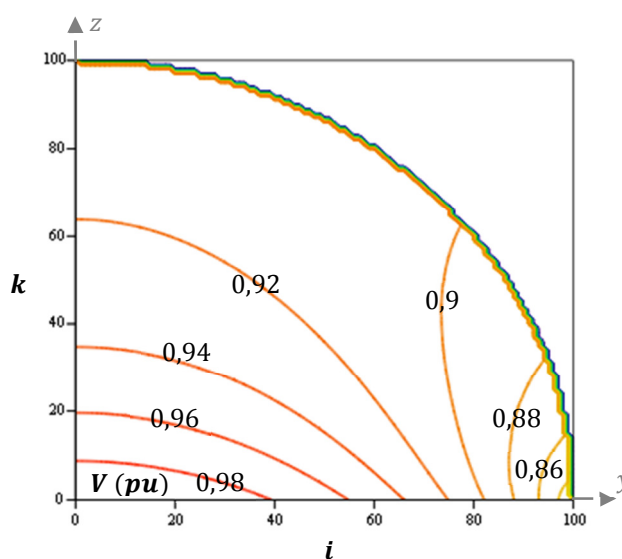


Figura 4.22 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$.

Comparando as Figuras 4.20 e 4.21 com as Figuras 4.16 e 4.17, para a calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi/2$, constata-se que a distribuição do potencial tem uma distribuição similar na superfície esférica, visto no caso anterior, a calote tinha uma relação $h/R = 0,5$, e agora corresponde a uma semiesfera completa. Comparando ainda os dois casos anteriores, verifica-se que, devido ao facto da superfície e do volume da calote esférica condutora para $\theta_2 = \pi/2$, ser bastante superior ao volume da calote para $\theta_2 = \pi/3$, também o potencial será bastante superior, o que é perfeitamente compreensível para a mesma concentração de carga em pu.

Interpretando a Figura 4.22, pode-se verificar que a distribuição do potencial tem o sentido decrescente desde o centro da base da calote para as extremidades, e ainda com valores inferiores na vizinhança do perímetro da superfície circular relativamente à vizinhança no topo da superfície esférica.

Pode-se ainda referir que é na superfície circular que ocorre maior variação da distribuição de cargas.

4.4.3 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = 2\pi/3$

Considerando a Figura 4.23, elucidativa da calote esférica condutora de raio superior à semiesfera, de $\theta_2 = 2\pi/3$, com relação $h = 1,5 R$, observa-se que esta se aproxima da configuração plena da esfera:

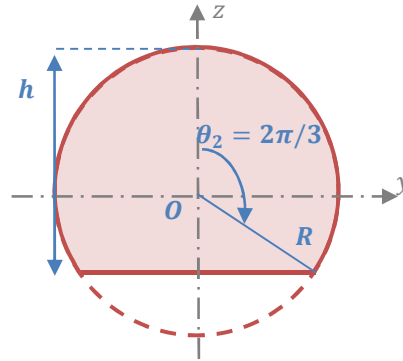


Figura 4.23 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.

Recorrendo às expressões (4.72) e (4.73) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais no plano yz , o potencial da superfície esférica da calote condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$ será dado por:

$$V_{a,i,k} = \frac{\tau' R^2}{4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + \rho_{1,i,k}^2 - 2 R (y_{1i} \sin \theta \sin \varphi + z_{1k} \cos \theta)}} d\theta d\varphi \quad (4.78)$$

e o potencial da superfície circular da calote condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$ será dado por:

$$V_{b,i,k} = \frac{\tau'}{4 \pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + y_{1i}^2 - 2 \rho y_{1i} \sin \varphi + (z - z_{1k})^2}} d\varphi d\rho \quad (4.79)$$

em que o potencial total $V_{i,k} = V_{a,i,k} + V_{b,i,k}$, com $\rho_{1,i,k} = \sqrt{y_{1i}^2 + z_{1k}^2}$, $z = -0,5$ pu, que corresponde à altura do corte da esfera no eixo z , e $\tau' = constante = 1$ pu.

Para $R = 1$ pu, $M = 100$ pontos ($i = 0 \dots M$) e $N = 150$ pontos ($k = 0 \dots N$), os valores de y_{1i} e de z_{1k} , no plano yz , serão dados por (ver Figura 4.14):

$$y_{1i} = \frac{R i}{M} \quad (4.80)$$

e por:

$$z_{1k} = \frac{1,5 R k}{N} - z \quad (4.81)$$

Com os dados anteriores, foram construídos os mapas de linhas equipotenciais no plano yz , para os 1º e 4º quadrantes da calote esférica condutora, representados nas Figuras 4.24, 4.25 e 4.26.

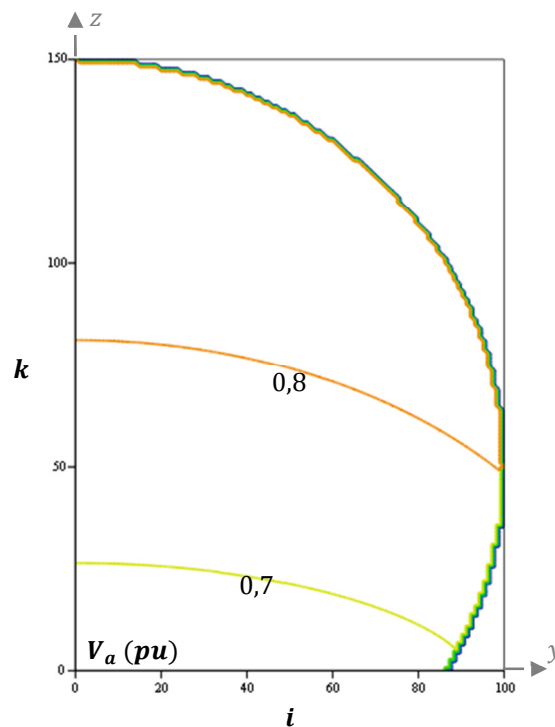


Figura 4.24 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica V_a da calote condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.

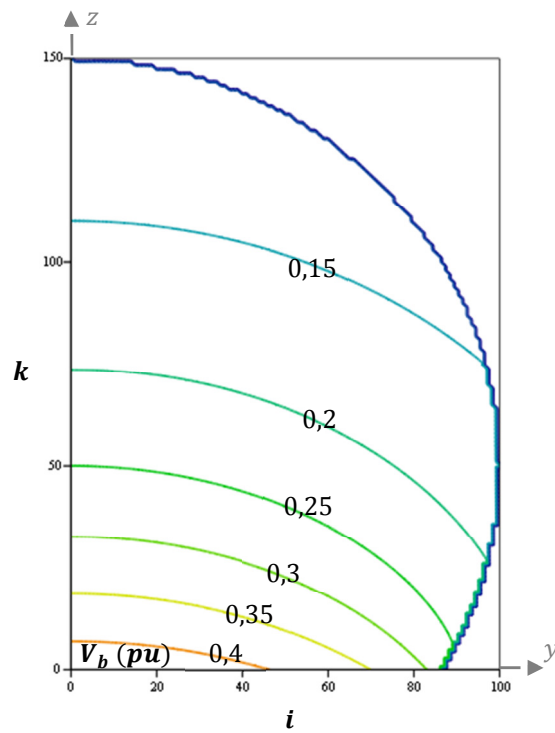


Figura 4.25 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície circular V_b da calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.

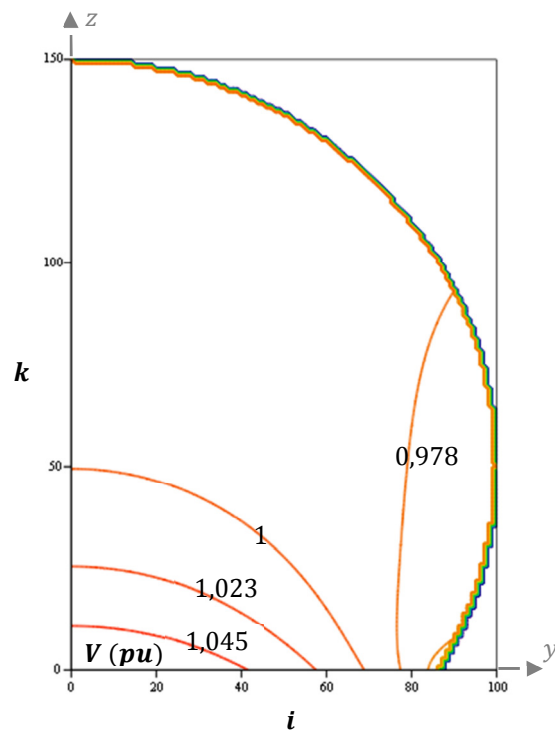


Figura 4.26 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V da calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$.

As Figuras 4.24, 4.25 e 4.26, apresentadas para a calote esférica condutora de $\theta_2 = 2\pi/3$, assemelham-se às Figuras 4.20, 4.21 e 4.22, apresentadas para a calote de $\theta_2 = \pi/2$, no sentido em que a distribuição do potencial faz-se da mesma forma.

Constata-se facilmente que esta calote esférica condutora possui uma superfície e um volume superiores aos dois casos de calotes estudadas anteriormente, logo, também é perfeitamente perceptível que o valor do potencial também seja superior para uma densidade superficial de carga considerada constante.

Pode-se verificar que o potencial mais elevado para a calote esférica de $\theta_2 = \pi/3$ foi da ordem dos 0,64 pu, para a calote de $\theta_2 = \pi/2$ foi da ordem dos 0,96 pu e para a calote de $\theta_2 = 2\pi/3$ foi da ordem dos 1,045 pu, confirmando o referido anteriormente.

Da Figura 4.26, verifica-se que praticamente o potencial é constante na semiesfera superior, ocorrendo variações na distribuição de cargas na superfície circular, devido à irregularidade cometida no sólido.

4.4.4 CALOTE ESFÉRICA CONDUTORA COM $\theta_2 = \pi$ (ESFERA COMPLETA)

Considerando a Figura 4.27, elucidativa da calote esférica condutora equivalente a uma esfera completa, de $\theta_2 = \pi$, com relação $h = 2R$:

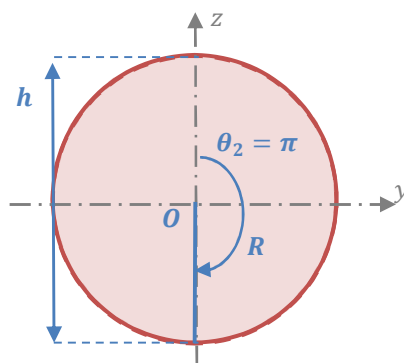


Figura 4.27 – Calote esférica condutora de $\theta_2 = \pi$ (esfera completa).

Recorrendo às expressões (4.72) e (4.73) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais no plano yz, o potencial da superfície esférica da calote condutora de $\theta_2 = \pi$ será dado por:

$$V_{a_{i,k}} = \frac{\tau' R^2}{4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{R^2 + \rho_{1_{i,k}}^2 - 2 R (y_{1_i} \sin \theta \sin \varphi + z_{1_k} \cos \theta)}} d\theta d\varphi \quad (4.82)$$

com $\rho_{1_{i,k}} = \sqrt{y_{1_i}^2 + z_{1_k}^2}$, $z = -1$ pu, que corresponde à altura do corte da esfera no eixo z, e $\tau' = \text{constante} = 1$ pu.

Para $R = 1$ pu, $M = 100$ pontos ($i = 0 \dots M$) e $N = 200$ pontos ($k = 0 \dots N$), os valores de y_{1_i} e de z_{1_k} , no plano yz, serão dados por (ver Figura 4.14):

$$y_{1_i} = \frac{R i}{M} \quad (4.83)$$

e por:

$$z_{1_k} = \frac{2 R k}{N} - z \quad (4.84)$$

Com os dados anteriores, foi construído o mapa de linhas equipotenciais no plano yz, para os 1º e 4º quadrantes da calote esférica condutora, representado na Figura 4.28.

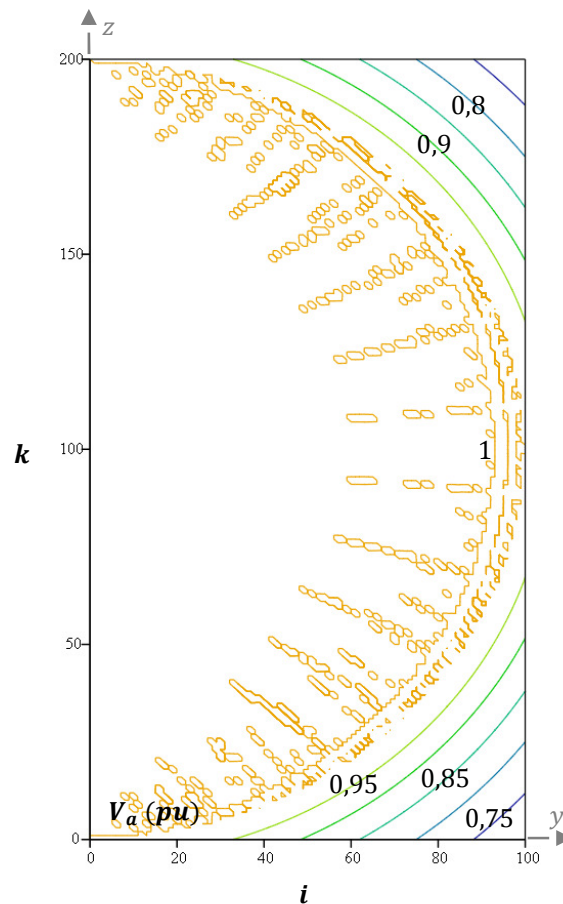


Figura 4.28 – Distribuição, em valores relativos, do potencial na superfície esférica V_a da calote condutora de $\theta_2 = \pi$ (esfera completa) mais uma zona de ar.

A Figura 4.28 que representa o mapa de linhas equipotenciais dos 1º e 4º quadrantes da calote esférica condutora equivalente à esfera completa, em que os pontos de cálculo dos potenciais extravasa a própria esfera e inclui a zona de ar. Verifica-se que, para $\theta_2 = \pi$ (a calote transforma-se em esfera), as linhas equipotenciais apresentam valores constantes em toda a região do interior do condutor, o que significa que as fórmulas apresentadas relativamente ao cálculo de V_a estão corretas, pois o seu resultado é igual ao obtido para a esfera condutora.

4.5 SUPERFÍCIE CIRCULAR CONDUTORA

A Figura 4.29, apresenta uma superfície circular condutora de raio R e de espessura muito pequena, assente no plano xy .

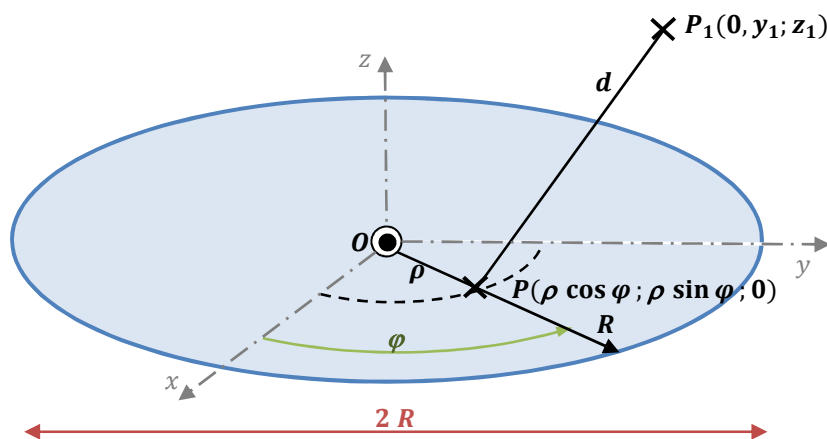


Figura 4.29 – Superfície circular condutora.

Pela Figura 4.29, obtém-se que a distância do ponto P ao ponto P_1 , que será dada por:

$$d = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - y_1)^2 + z_1^2} = \sqrt{\rho^2 - 2 \rho y_1 \sin \varphi + y_1^2 + z_1^2} \quad (4.85)$$

Logo, $s_{i,k}$ será dada por:

$$s_{i,k} = \frac{1}{4 \pi} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2 \rho y_{1i} \sin \varphi + y_{1i}^2 + z_{1k}^2}} d\varphi d\rho \quad (4.86)$$

Assim, utilizaram-se manipulações matemáticas para determinar as densidades superficiais de carga elétrica σ , considerando-se agora variáveis.

Em primeiro lugar, consideraram-se 10 pontos na superfície circular condutora, logo $M = 10$ pontos, $N = 10$ pontos, $i = 0 \dots 9$ e $k = 0 \dots 9$, em que os pontos que percorrem a superfície serão dados por (ver Figura 4.29):

$$a_k = \frac{R k}{N} \quad (4.87)$$

e os pontos no plano yz serão dados por:

$$y_{1i} = \frac{R}{2M} + \frac{Ri}{M} \quad (4.88)$$

e por:

$$z_{1k} = \frac{Rk}{N} \quad (4.89)$$

com raio unitário $R = 1$ e $z_0 = 0$.

Utilizando o método dos momentos, expressões (2.22) ou (2.23), e considerando o potencial $[V_i]$ constante e unitário, virá:

$$[\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1}[V_i] \Leftrightarrow [\tau'_k] = [s_{i,k}]^{-1}[1] \quad (4.90)$$

cujos resultados discretos da relação τ'_k , em pu, entre a distribuição da densidade carga elétrica σ'_k ($k = 0 \dots 9$) e ε_0 , pela expressão (4.90), foram:

τ'_0	1,2963
τ'_1	1,3097
τ'_2	1,3383
τ'_3	1,3847
τ'_4	1,4547
τ'_5	1,5591
τ'_6	1,7192
τ'_7	1,9918
τ'_8	2,4179
τ'_9	5,5287

Tabela 4.2 – Resultados discretos da relação τ'_k em função de ρ (ver Figura 4.29).

Constata-se que as densidades de carga calculadas correspondem, na realidade, ao centro de cada segmento definido, como se pode observar na Figura 4.30.

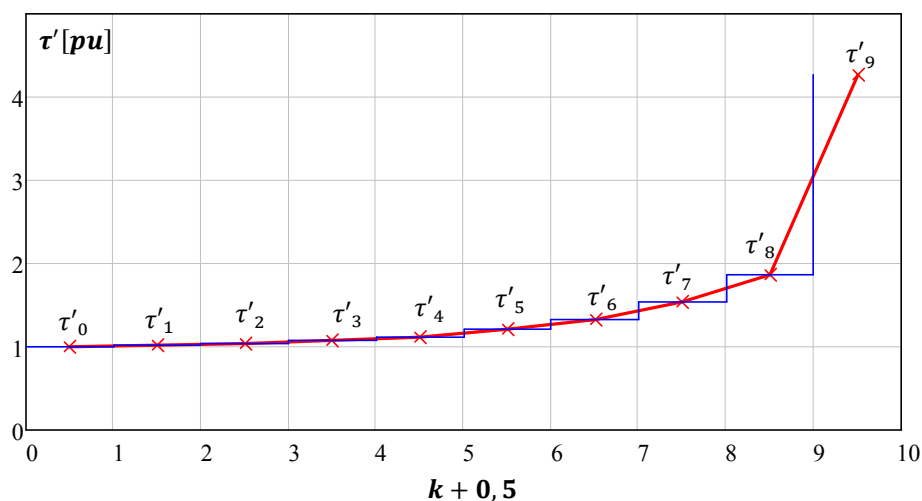


Figura 4.30 – Gráfico dos valores discretos da distribuição da relação τ'_k em função dos pontos $(k + 0,5)$, na superfície circular.

Da Figura 4.30, verifica-se que a distribuição superficial de carga aumenta acentuadamente para as extremidades da superfície circular.

O potencial na superfície condutora circular, será então:

$$V_{i,k} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^9 \left(\int_{b_n}^{b_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \tau'_n}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho y_i \sin \varphi + y_{1_i}^2 + z_{1_k}^2}} d\varphi d\rho \right) \quad (4.91)$$

Considerando novamente 10 pontos na superfície circular condutora: $M = 10$ pontos, $N = 10$ pontos, $i = 0 \dots 9$ e $k = 0 \dots 9$, em que os pontos que percorrem a superfície serão dados em intervalos iguais $[b_n; b_{n+1}]$, onde existem cargas que serão dados por:

$$b_n = \frac{R n}{M} \quad (4.92)$$

e os pontos no plano yz, em pu, serão também dados por:

$$y_{1_i} = \frac{2 i}{M} \quad (4.93)$$

e por:

$$z_{1k} = \frac{2k}{N} - 1 \quad (4.94)$$

Utilizando a expressão (4.91), e considerando o raio unitário $R = 1$ pu, foi construído o mapa de linhas equipotenciais da Figura 4.31, referente ao 1º quadrante do plano yz , da chapa circular condutora representada na Figura 4.29.

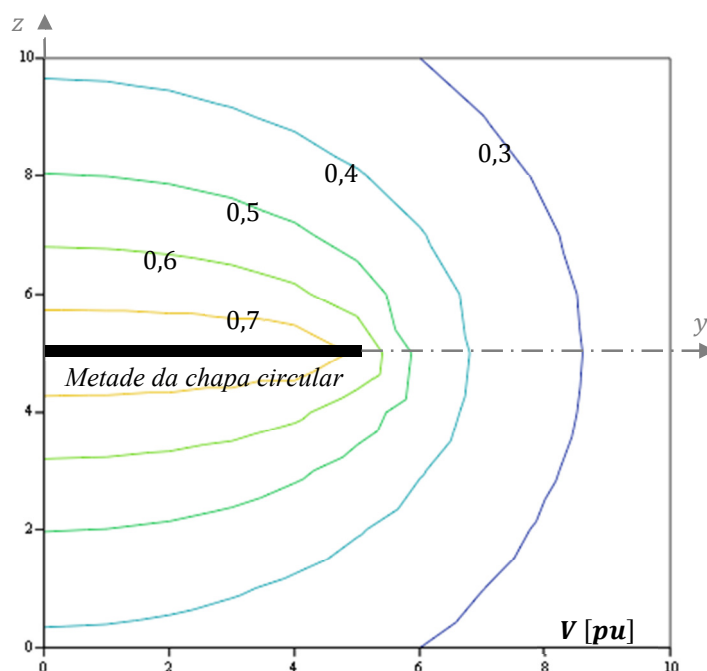


Figura 4.31 – Mapa de linhas equipotenciais para τ' variável (representação de metade da chapa circular).

Observando a Figura 4.31, verifica-se que o potencial é um pouco mais elevado no centro da chapa circular condutora e decresce para as extremidades do círculo, o que significa que as cargas elétricas estão ainda mais concentradas na periferia da chapa circular, que no seu interior.

A evolução do potencial na chapa circular condutora, segundo o eixo y , pode ser representado graficamente, como se indica na Figura 4.32.

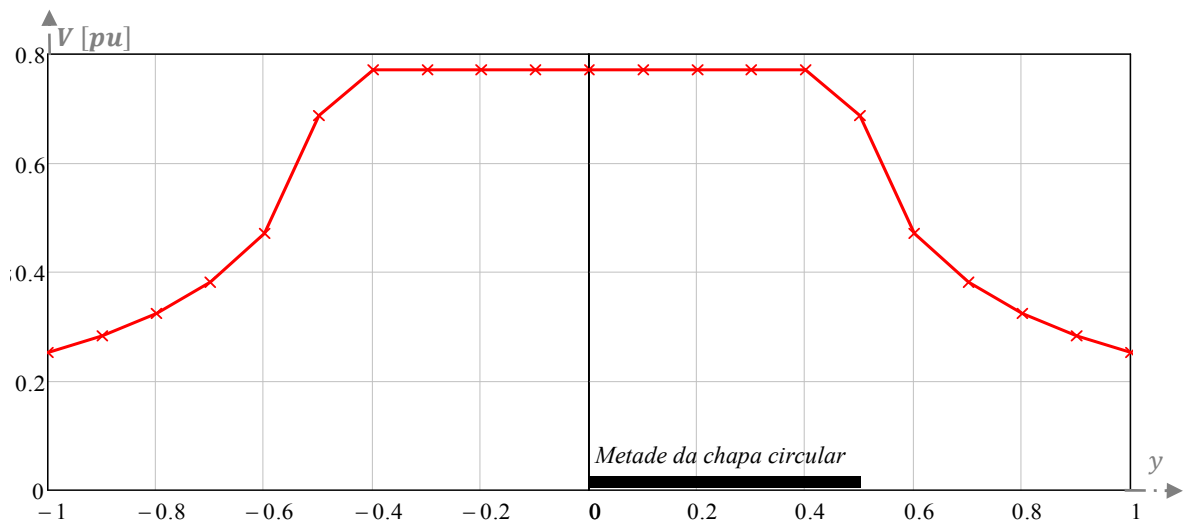


Figura 4.32 – Potencial na vizinhança da chapa circular condutora, segundo o eixo y (metade da chapa circular).

Donde, da Figura 4.32, se verifica novamente o decréscimo do potencial na extremidade chapa circular condutora, o que significa que na extremidade, a concentração de cargas é, na realidade, superior à obtida pela expressão (4.90). Fora da chapa circular, o potencial irá decrescer até ao infinito.

4.6 ELIPSOIDE

A Figura 4.33 (também apresentada no Anexo B, como Figura B.4), representa um elipsoide de semieixo maior a e de semieixo menor b .

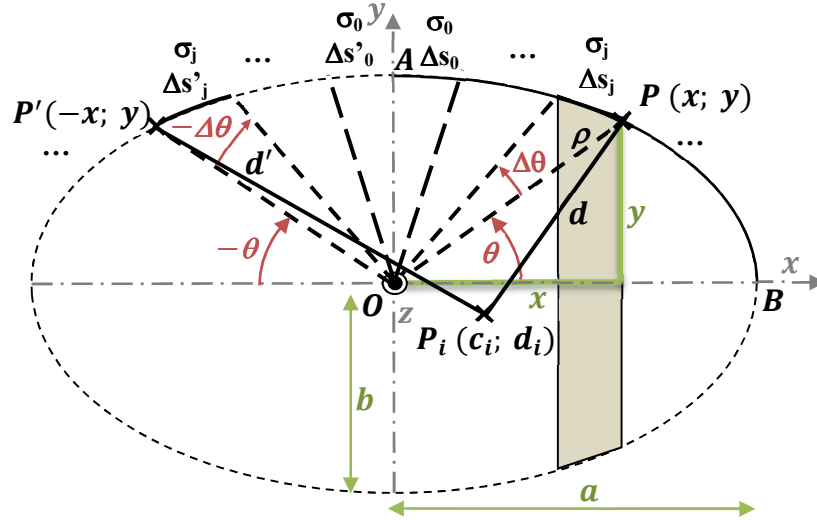


Figura 4.33 – Arco de elipse AB.

Da Figura 4.33, d representa a distância entre o segmento do arco Δs_j ($j = 0 \dots N$) e o ponto de coordenadas $P_i(c_i; d_i)$, em que $i = 0 \dots M$. O potencial no elipsoide, no mesmo ponto, é dado pela expressão (4.95) (também apresentada no Anexo B pela expressão (B.47)), para $k = b/a$ e $d_i = 0$.

$$V_{i,j} = \frac{\tau'k}{2 \varepsilon_0} \left[\int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} (e_1 x)^2}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 - 2 c_i x}} dx + \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} (e_1 x)^2}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + d_i^2 + 2 c_i x}} dx \right] = \tau'_j s_{i,j} \quad (4.95)$$

Desdobrando em série, para um ponto $P_i(x_i; y_i)$, o potencial, em pu, virá dado por (também apresentado no Anexo B pela expressão (B.50)):

$$V_i = \sum_{j=0}^{N-1} V_{i,j} = \sum_{j=0}^{N-1} \tau'_j s_{i,j} \quad (4.96)$$

em que N é o numero de iterações. Matricialmente, o potencial será dado por:

$$[V_i] = [s_{i,j}] [\tau'_j] \quad (4.97)$$

Como a matriz $[s_{i,j}]$ tem de ser quadrada para poder ser invertida, logo, o número de pontos tem de ser igual: $M = N$.

Por outro lado, dado que no interior dos condutores carregados eletrostaticamente (lei de Gauss), o potencial é constante, então pode-se concluir que: $V_0 = V_1 = \dots = V_i = \dots = V_{M-1} = constante$. Assim, os valores discretos das densidades de corrente podem ser determinados por:

$$[\tau'_j] = [s_{i,j}]^{-1} [V_i] \quad (4.98)$$

Por simplificação, dado que o potencial é constante no interior de um elipsoide condutor (campo elétrico nulo e $V = constante$), considera-se que $V = 1$ pu e $\frac{1}{2 \epsilon_0} = 1$ pu.

Recorrendo à expressão (4.98), para $i = 0 \dots M, j = 0 \dots N$, para 11 pontos: $M = N = 10$, o parâmetro da densidade superficial de carga τ'/τ'_0 será representado pelo gráfico da Figura 4.34.

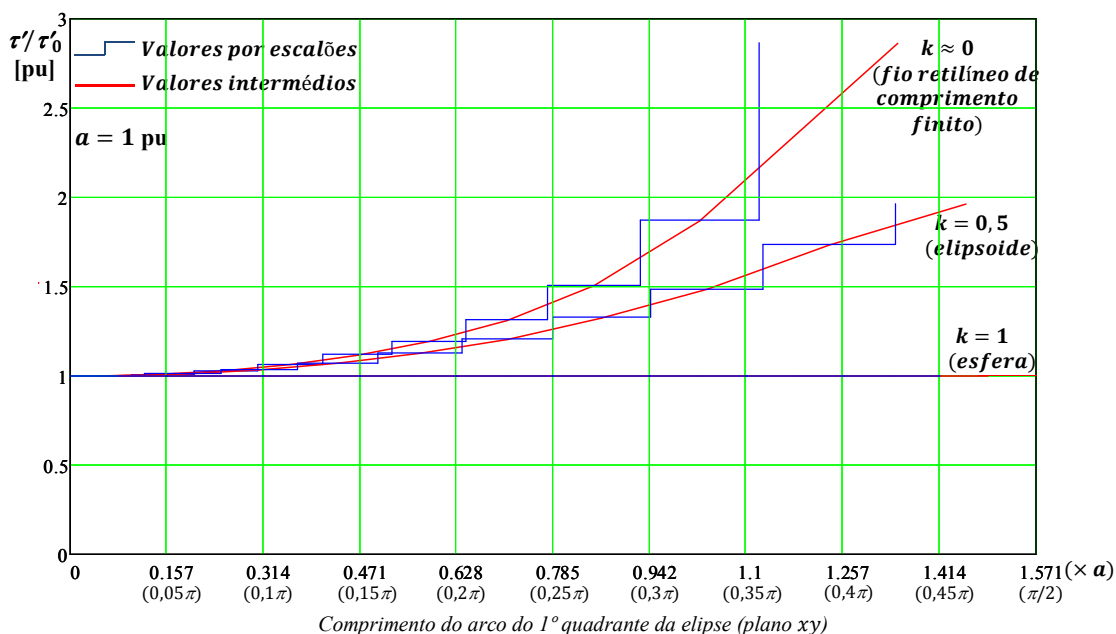


Figura 4.34 – Variação da densidade superficial de carga, segundo o arco AB (Figura 4.33), em elipsoides para diversos valores de $k = b/a$: $k = 1$ (esfera); $k = 0,5$ (elipsoide); $k \approx 0$ (fio retilíneo de comprimento finito).

Da Figura 4.34, verifica-se, como era de esperar, que para $k = 1$ (esfera), obtêm-se valores de τ'/τ'_0 sempre constantes.

A densidade superficial de carga cresce nas extremidades, exceto para valores muito pequenos de k , em que o elipsoide assemelha-se a um condutor cilíndrico retilíneo muito comprido e a sua densidade superficial de carga tende a ser uniforme em todo o comprimento, como também se começa a observar na Figura 4.34.

Como se pode observar, da Figura 4.34, se $k \cong 0$, então o elipsoide assemelha-se a um condutor cilíndrico muito comprido, ao que a distribuição de carga pode-se considerar constante, particularmente na zona central. A curvatura da densidade superficial de cargas para $k \cong 0$, com conseqüente maior concentração de cargas nas extremidades, descreve um comportamento do tipo hiperbólico, muito semelhante à distribuição de cargas analisadas no estudo do condutor retilíneo de comprimento finito (análogo ao estudo das catenárias para o método dos momentos no subcapítulo 2.2, Figura 2.5).

Quanto à obtenção de potenciais, energias e capacidades elétricas do elipsoide isolado, o seu estudo segue uma analogia idêntica à apresentada para as outras figuras geométricas indicadas neste trabalho. Assim, para um elipsoide (expressões (B.32) ou (B.35) do anexo B), de igual volume da esfera (expressão (4.29)):

$$Vol_{elipsoide} = Vol_{ovo} = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi k^2 a^3 \equiv Vol_{esf} = 4,189 \cdot 10^{-3} m^3 \quad (4.99)$$

Considerando o ar como meio circundante do elipsoide condutor, com semieixos de relação $k = \frac{b}{a} = 0,8$, e de carga $Q = 10^{-9} C$, uniformemente distribuída à superfície, da expressão (4.99), deduziram-se as expressões seguintes, para o semieixo maior:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 Vol_{ovo}}{4 \pi k^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4,189 \cdot 10^{-3}}{4 \pi \cdot 0,8^2}} = 116,04 \cdot 10^{-3} m \quad (4.100)$$

e para o semieixo menor:

$$b = k a = 0,8 \cdot 116,04 \cdot 10^{-3} = 92,83 \cdot 10^{-3} m \quad (4.101)$$

O perímetro de $\frac{1}{4}$ da elipse, correspondente ao arco AB (1º quadrante), é calculado recorrendo à expressão (B.9) do anexo B, donde:

$$S_{elipse} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^{0,116} \sqrt{1 + \frac{0,8^2 x^2}{(116,04 \cdot 10^{-3})^2 - x^2}} dx = 164,55 \text{ mm} \quad (4.102)$$

e a sua primeira excentricidade, utilizando a expressão (B.11) do anexo B:

$$e_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6 \quad (4.103)$$

Finalmente, a superfície do elipsoide em forma de ovo, recorrendo à expressão (B.13) do anexo B, virá:

$$S_{elipsoide} = 4 \pi k \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} e_1^2 dx = 126,74 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (4.104)$$

A relação entre a superfície do elipsoide (da expressão (4.104)) e a superfície da esfera (da expressão (4.30)), para volumes iguais ($k = 0,8$), será dada por:

$$k_s = \frac{S_{elipsoide}}{S_{esf}} = \frac{0,12674}{0,1257} = 1,0083 \quad (4.105)$$

donde se verifica que a superfície do elipsoide é ligeiramente superior à superfície da esfera, para o mesmo volume.

Finalmente, a densidade superficial de carga média, será dada por:

$$\sigma_{med} = \frac{Q}{S_{elipsoide}} = \frac{10^{-9}}{126,74 \cdot 10^{-3}} = 7,89 \text{ nC/m}^2 \quad (4.106)$$

O comprimento do arco AB (1º quadrante) do elipsoide, para $a = 1$ pu (semieixo maior) e $b = 0,8$ pu (semieixo menor), com $R = 0,9$ pu (expressão (B.18)) e $r = 0,1$ pu (expressão (B.19)), pode ser obtido pelas expressões (B.9), (B.36) ou (B.37), do anexo B, resultando:

$$s'_{elipse} = s'_{AB} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos(2\theta)} d\theta = 1,41808 \text{ pu} \quad (4.107)$$

Também da Figura 5.1, ter-se-á:

$$\frac{dz}{d\rho} = \left(h - \frac{h\rho}{a} \right)' = -\frac{h}{a} \quad (5.3)$$

sendo ds dado por:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} d\rho \quad (5.4)$$

logo, para $h = a\sqrt{3}$, virá:

$$ds = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} d\rho = 2 d\rho \quad (5.5)$$

Substituindo na expressão (5.1), a superfície elementar lateral do cone condutor vem agora dada por:

$$dS_L = 2 \rho d\varphi d\rho \quad (5.6)$$

Integrando, virá:

$$S_L = 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho d\varphi d\rho = 4\pi \int_0^a \rho d\rho = 2\pi a^2 \quad (5.7)$$

A expressão (5.7) verifica o teorema de Pappus-Guldinus⁹, que enuncia que a área gerada por uma linha em torno de um eixo é igual ao comprimento da linha a que passa pelo centro de gravidade do segmento $P''P'''(\sqrt{a^2 + h^2})$ vezes o centro de gravidade ao eixo z ($a/2$) vezes 2π (ver Figura 5.1).

Considerando agora o ponto $P_1(0; y_1; z_1)$, da Figura 5.1 e dada a simetria do cone em torno do eixo z , as distâncias entre os pontos P e P_1 , P_1 e P' , respectivamente d_1 e d_2 , podem ser dadas por:

$$d_1 = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - y_1)^2 + \left(h - \frac{h\rho}{a} - z_1 \right)^2} \quad (5.8)$$

⁹ Teoremas de Pappus-Guldinus – dois teoremas que exprimem, com recurso a conceitos da geometria como o de centroide, a relação que existe entre curvas e superfícies de revolução e entre superfícies e corpos de revolução [5].

ou por:

$$d_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^2 + 2\rho \left(\frac{h z_1}{a} - \frac{h^2}{a} - y_1 \sin \varphi\right)^2 + h^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2 h z_1} \quad (5.9)$$

e

$$d_2 = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - y_1)^2 + z_1^2} \quad (5.10)$$

ou

$$d_2 = \sqrt{\rho^2 + 2\rho y_1 \sin \varphi + y_1^2 + z_1^2} \quad (5.11)$$

Para $\tau' = \text{constante}$, e igual a 1 pu, o potencial no cone condutor é dado por:

$$V = \frac{\tau'}{4\pi} \int \frac{dS_L}{d} \quad (5.12)$$

Das expressões (5.6) e (5.12), substituindo, virá:

$$V = \frac{\tau'}{4\pi} \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{d_1} d\varphi d\rho + \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{d_2} d\varphi d\rho \right) \quad (5.13)$$

logo, o potencial $V_{a_i,k}$ (no ponto $(c_i; d_k)$) devido à distribuição de cargas na superfície lateral do cone condutor, será:

$$V_{a_i,k} = \frac{\tau'}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - y_{1i})^2 + \left(h - \frac{h\rho}{a} - z_{1k}\right)^2}} d\varphi d\rho \quad (5.14)$$

e o potencial $V_{b_i,k}$ (no ponto $(c_i; d_k)$) devido à distribuição de cargas na superfície circular do cone condutor, será:

$$V_{b_i,k} = \frac{\tau'}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho y_{1i} \sin \varphi + y_{1i}^2 + z_{1k}^2}} d\varphi d\rho \quad (5.15)$$

Em que $V_{i,k} = V_{a_i,k} + V_{b_i,k}$, com a seguinte distribuição dos pontos segundo o 1º quadrante do plano yz:

$$y_{1i} = \frac{a i}{M} \quad (5.16)$$

e

$$z_{1k} = \frac{h k}{N} \quad (5.17)$$

Considerando o fator da densidade superficial de carga τ' constante e igual a 1 pu, os pontos segundo os eixos dos y e z : $i = 0 \dots M$ e $k = 0 \dots N$, respectivamente, e o raio da base do cone condutor $a = 1$ pu. Para limitar graficamente a geratriz da Figura 5.1 ao 1º quadrante, considerou-se que o potencial $V_{i,k}$ terá valores nulos caso o termo:

$$\frac{h y_{1i}}{a} + z_{1k} - h > 0 \quad (5.18)$$

Perante estas condições, nos subcapítulos seguintes foram estudados os casos do cone condutor com relação altura superior ao raio da base (cone equilátero), com relação $h/a = \sqrt{3}$, $h/a = 1$ e $h/a = 0,5$.

5.1 CONE CONDUTOR COM $h/a = \sqrt{3}$

Considerando a Figura 5.2, elucidativa do cone condutor com relação altura superior ao raio da base, de $h = a\sqrt{3}$:

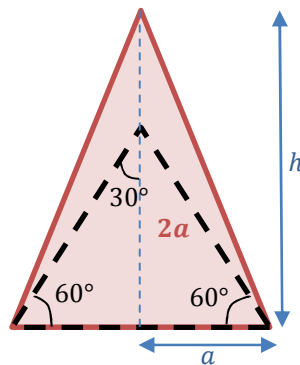


Figura 5.2 – Cone condutor com $h/a = \sqrt{3}$.

Recorrendo às expressões (5.14) e (5.15) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais relativamente ao 1º quadrante do plano yz (ver Figura 5.1), para $M = 100$ pontos e $N = 170$ pontos (devido à relação de $\sqrt{3}$), obtiveram-se as Figuras 5.3, 5.4 e 5.5.

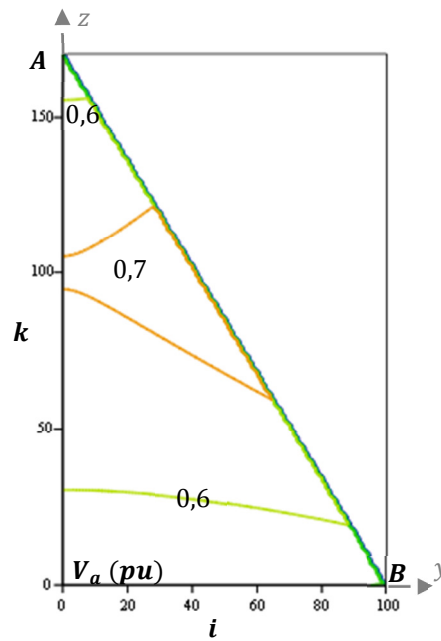


Figura 5.3 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral V_a do cone condutor com $h/a = \sqrt{3}$.

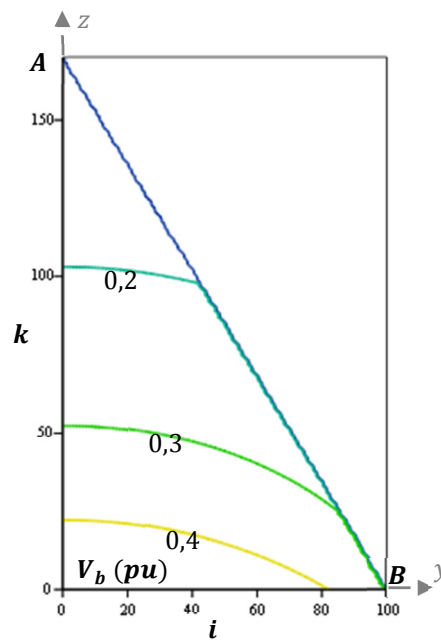


Figura 5.4 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular V_b do cone condutor com $h/a = \sqrt{3}$.

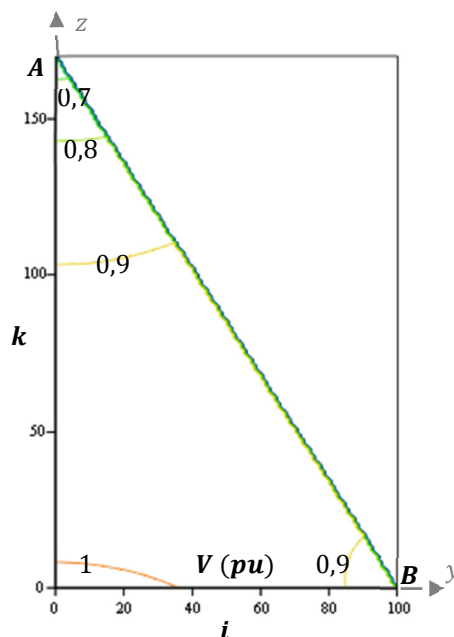


Figura 5.5 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de V_a e de V_b , do cone condutor com $h/a = \sqrt{3}$.

Pela Figura 5.3 observa-se que a distribuição do potencial (em pu) varia pouco no sentido do eixo para a geratriz e também no sentido da base para o vértice, embora nestas extremidades o potencial seja ligeiramente inferior.

Na Figura 5.4 pode-se observar a distribuição do potencial provocada pela superfície circular da base, e constata-se que o potencial vai diminuindo gradualmente no sentido da base do cone para a linha que limita as duas superfícies (lateral e circular), situação facilmente explicada por ser na linha que passa por B (ver Figura 5.4) que há maior concentração de cargas, logo o potencial calculado é menor. Apesar de se ter considerado a densidade superficial de carga σ' constante, na realidade esta varia e concentra-se mais na vizinhança do vértice da linha que separa a superfície lateral da superfície circular.

O potencial total do cone condutor, em valores pu, é dado pela Figura 5.5, onde se observa que o potencial é maior na vizinhança do centro da base e menor no seu vértice, o que contraria a realidade, pois, pela lei de Gauss, o potencial deve ser constante em todo o condutor.

Pode-se ainda referir que é na superfície lateral do cone condutor, que ocorre maior variação da distribuição do potencial.

5.2 CONE CONDUTOR COM $h/a = 1$

Considerando a Figura 5.6, elucidativa do cone condutor com relação altura igual ao raio da base, de $h = a$ (ou de relação geratriz por diâmetro $G/D = 2a/2a = 1$):

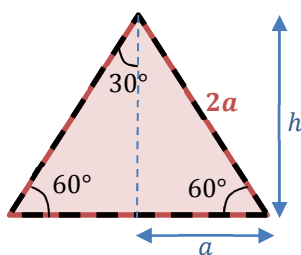


Figura 5.6 – Cone condutor com $h/a = 1$.

Recorrendo às expressões (5.14) e (5.15) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais relativamente ao 1º quadrante do plano yz , para $M = N = 100$ pontos obtiveram-se as Figuras 5.7, 5.8 e 5.9.

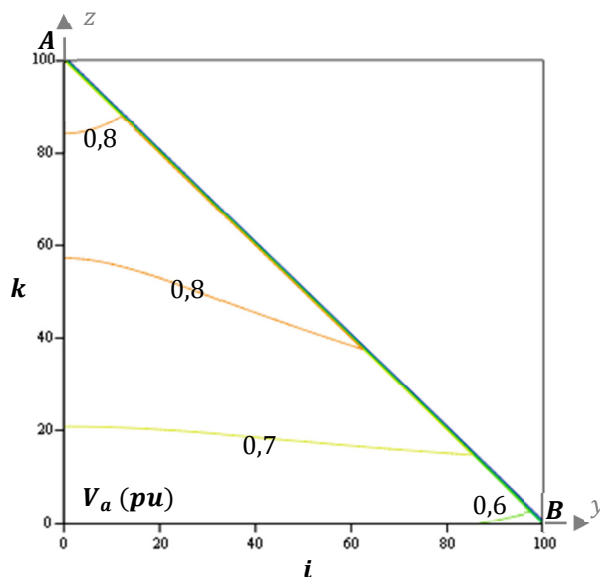


Figura 5.7 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral V_a do cone condutor com $h/a = 1$.

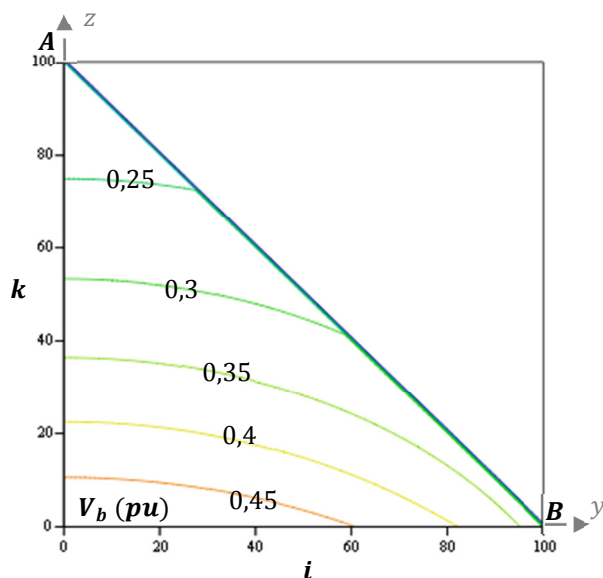


Figura 5.8 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular V_b do cone condutor com $h/a = 1$.

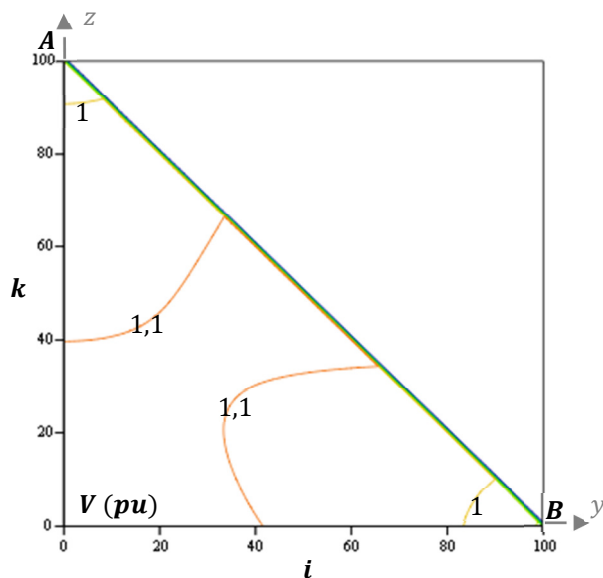


Figura 5.9 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de V_a e de V_b , do cone condutor com $h/a = 1$.

Pela Figura 5.7, cuja representação do cone condutor no plano yz apresenta uma forma de um triângulo equilátero, observa-se que a distribuição do potencial varia pouco no sentido do eixo para a geratriz mas tem maior variação no sentido da base para o vértice, sendo o potencial na zona do vértice mais elevado e decai ligeiramente na extremidade do vértice em si. Comparando com a Figura 5.3, também se observa que o valor do potencial é mais elevado quando a altura do cone diminuiu.

Na Figura 5.8 observa-se uma distribuição de potencial é semelhante à que ocorreu para o caso do cone condutor de relação $h/a = \sqrt{3}$, ou seja, que o potencial vai diminuindo gradualmente no sentido da base do cone para o seu vértice onde há maior concentração de cargas.

A distribuição de potencial total do cone condutor representado na Figura 5.9, é mais uniformemente distribuído em relação ao cone da Figura 5.5, e também possui valores de potenciais mais elevados. Apesar da sua distribuição mais uniforme, o potencial é ligeiramente mais reduzido nas extremidades do cone, ou seja, no vértice e na vizinhança do perímetro circular da base.

5.3 CONE CONDUTOR COM $h/a = 0,5$

Considerando a Figura 5.10, elucidativa do cone condutor com relação altura inferior ao raio da base, de $h = a/2$:

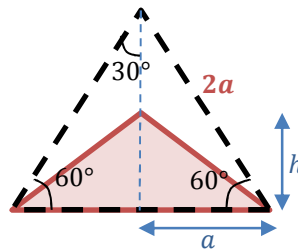


Figura 5.10 – Cone condutor com $h/a = 0,5$.

Recorrendo às expressões (5.14) e (5.15) de modo a construir o mapa de linhas equipotenciais relativamente ao 1º quadrante no plano yz , para $M = 100$ pontos e $N = 50$ pontos, obtiveram-se as Figuras 5.11, 5.12 e 5.13.

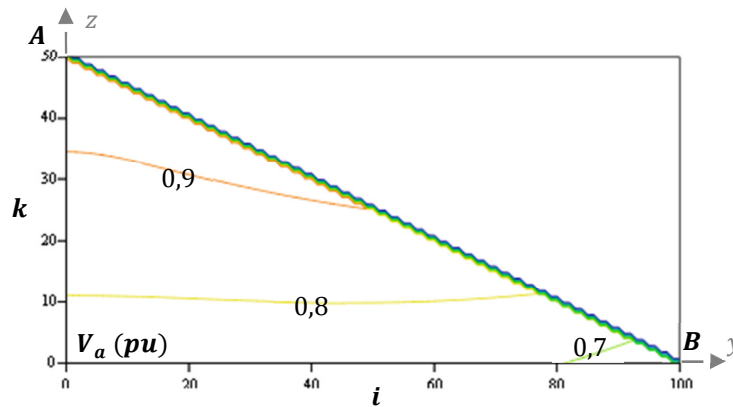


Figura 5.11 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície lateral V_a do cone condutor com $h/a = 0,5$.

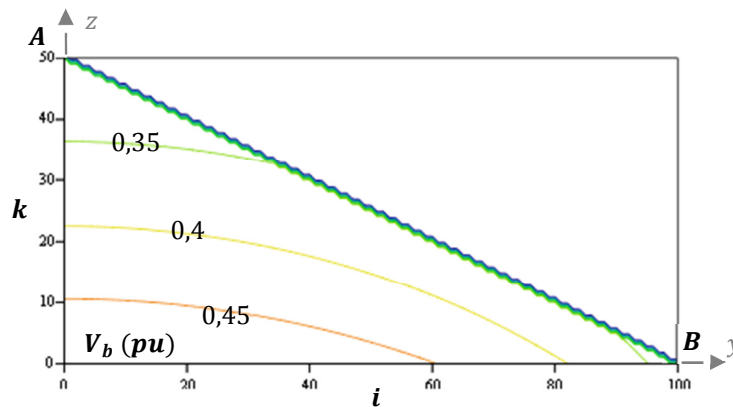


Figura 5.12 – Distribuição, em valores relativos, do potencial devido à superfície circular V_b do cone condutor com $h/a = 0,5$.

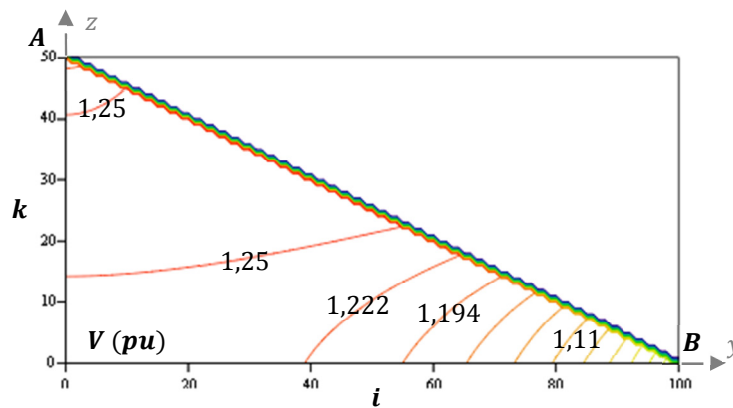


Figura 5.13 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V , devido à sobreposição de V_a e de V_b , do cone condutor com $h/a = 0,5$.

Pela Figura 5.11 observa-se que a distribuição do potencial varia acentuadamente no sentido da base para o vértice e com valores de potencial mais elevados em relação aos cones anteriores das Figuras 5.3 e 5.7. Também se verifica que a distribuição do potencial é menor na vizinhança do perímetro da superfície circular.

Na Figura 5.12 observa-se uma distribuição de potencial é semelhante às que ocorreram para os casos dos cones anteriores, ou seja, que o potencial vai diminuindo gradualmente no sentido da base do cone para o seu vértice, embora neste caso esta variação seja menos acentuada.

A distribuição de potencial total do cone condutor representado na Figura 5.13, diminui no sentido do eixo do cone para o perímetro da base, tendo uma distribuição diferente para o caso dos cones anteriores.

5.4 OBSERVAÇÕES SOBRE OS CONES CONDUTORES

A título de facilidade de comparação, considerando a Figura 5.14 que apresenta as distribuições de potencial total V para os cones condutores de relação $h/a = \sqrt{3}$ (da Figura 5.5), relação $h/a = 1$ (da Figura 5.9) e relação $h/a = 0,5$ (da Figura 5.13), respetivamente:

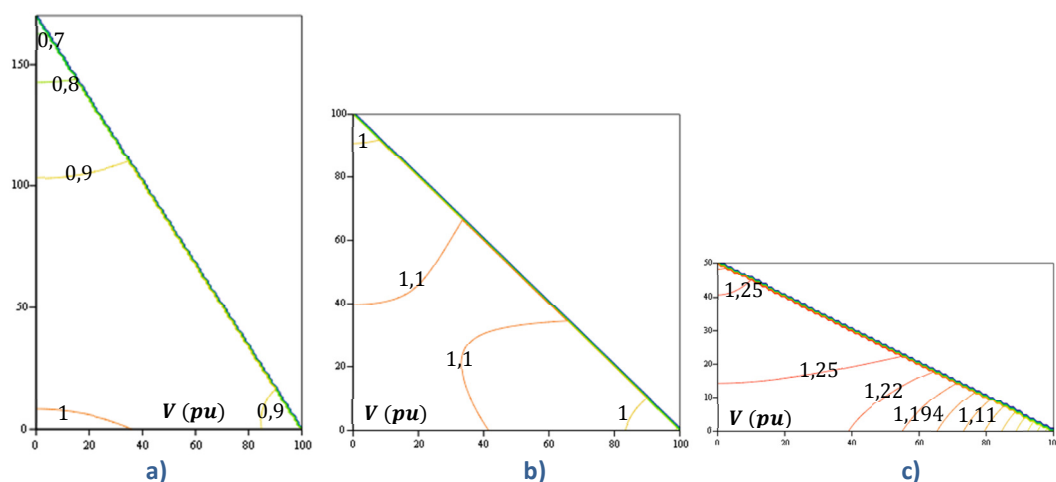


Figura 5.14 – Distribuição, em valores relativos, do potencial total V dos três tipos de cones condutores, com: a) $h/a = \sqrt{3}$; b) $h/a = 1$; c) $h/a = 0,5$.

Comparando os três tipos de cones condutores verifica-se que, mantendo o diâmetro da base e aumentando a altura do cone de valores desde metade do raio da base até $\sqrt{3}$, o potencial diminui ligeiramente com o aumento da altura do cone, isto porque, como o volume é maior, a densidade superficial de carga σ' também é mais elevada, conseqüentemente o potencial será mais reduzido.

Observando o caso do cone condutor de relação $h/a = 1$ (Figura 5.14-b), verifica-se que a distribuição de potencial é quase uniforme e de valor ligeiramente inferior nas extremidades (vértice e perímetro da base).

No caso do cone condutor de relação $h/a = \sqrt{3}$ (Figura 5.14-a), observa-se que o potencial varia mais acentuadamente que nos restantes cones. Devido ao seu volume ser maior, e conseqüentemente haver maior densidade superficial de carga σ' , as cargas elétricas irão se concentrar mais na vizinhança do vértice, o que implica que o potencial nessa zona seja bastante inferior, em cerca de 0,3 pu, em relação ao potencial na base. Ainda na Figura 5.14-a, é possível observar privilegiadamente que o potencial mais elevado se encontra no centro da base circular do cone, o que corresponde realisticamente a uma menor densidade de carga.

Observando agora o caso do cone condutor de relação $h/a = 0,5$ (Figura 5.14-c), verifica-se que este tem uma distribuição de potencial invertida em relação ao cone de relação $h/a = \sqrt{3}$ (Figura 5.14-a), uma vez que a maior concentração de cargas situa-se agora na vizinhança do perímetro da base em vez do vértice. Significa que o potencial é mais reduzido na zona do perímetro da base circular devido à existência de maior densidade superficial de carga σ' , o que realisticamente origina uma maior σ' na zona do perímetro da base.

Dado que em eletrostática o potencial é constante, partindo do princípio que a densidade de carga é uniforme, verifica-se erradamente que existem linhas de superfícies equipotenciais de valores diferentes (não constantes). Assim, nas zonas em que o potencial é maior, na sua vizinhança as densidades de carga devem ser menores.

6. ESTUDO COMPARATIVO E APLICAÇÕES PRÁTICAS

6.1 COMPARAÇÕES ENTRE ALGUNS SÓLIDOS

Considerando um cilindro em que $R = h = 0,1 \text{ m}$ e $Q = 10^{-9} \text{ C}$ (ver Figura 3.1), a Tabela 6.1 apresenta alguns resultados comparativos face ao cilindro, considerando uma esfera inscrita e uma esfera circunscrita.

	Esfera inscrita ($R = 0,1 \text{ m}$)	Cilindro ($R = 0,1 \text{ m}$ e $L = 2 R$)	Esfera circunscrita ($R' = R \sqrt{2}$)
Raio [m]	0,1	0,1	$0,1 \sqrt{2}$
Volume [m^3]	$\frac{4}{3} \pi R^3$	$2 \pi R^3$	$\frac{8 \sqrt{2}}{3} \pi R^3$
Relação de volumes	1	1,5	$2 \sqrt{2}$
Superfície [m^2]	$4 \pi R^2$	$6 \pi R^2$	$8 \pi R^2$
Relação de superfícies	1	1,5	2
Valor médio da densidade superficial de carga σ_{med} [C/m^2]	$7,9577 \cdot 10^{-9}$	$5,3051 \cdot 10^{-9}$	$3,9789 \cdot 10^{-9}$
Relação σ_{med}/ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$)	900	600	450
Potencial $V = \frac{\sigma_{med} R}{\epsilon_0} [\text{V}]$	90	75,75	63,639
Energia elétrica $W_{el} = \frac{1}{2} Q V [\text{J}]$	$45 \cdot 10^{-9}$	$37,876 \cdot 10^{-9}$	$31,8196 \cdot 10^{-9}$
Relação de potenciais ou de energias elétricas	1	0,842	0,7071
Capacidade isolada $C = \frac{Q}{V} [\text{F}]$	$11,111 \cdot 10^{-12}$	$13,201 \cdot 10^{-12}$	$15,713 \cdot 10^{-12}$
Relação de capacidades	1	1,188	$\sqrt{2}$

Tabela 6.1 – Tabela comparativa de algumas grandezas.

Considerando novamente $R = h = 0,1 \text{ m}$ e $Q = 10^{-9} \text{ C}$ (ver Figura 3.1), a Tabela 6.2 apresenta resultados comparativos face ao cilindro, considerando-se uma esfera de igual superfície (maior volume) e uma esfera de igual volume (maior superfície).

	Cilindro ($R = 0,1 \text{ m}$ e $L = 2 R$)	Esfera de igual superfície	Esfera de igual volume
Raio [m]	0,1	$R \sqrt{\frac{3}{2}}$	$R \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
Volume [m^3]	$2 \pi R^3$	$2 \sqrt{2} \pi R^3$	$2 \pi R^3$
Relação de volumes	1	$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225$	1
Superfície [m^2]	$6 \pi R^2$	$6 \pi R^2$	$8 \pi R^2$
Relação de superfícies	1,5	1,5	2
Valor médio da densidade superficial de carga σ_{med} [C/m^2]	$5,3051 \cdot 10^{-9}$	$5,3051 \cdot 10^{-9}$	$3,9789 \cdot 10^{-9}$
Relação σ_{med}/ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$)	600	600	450
Potencial $V = \frac{\sigma_{med} R}{\epsilon_0}$ [V]	75,751	75,751	63,6396
Energia elétrica $W_{el} = \frac{1}{2} Q V$ [J]	$37,876 \cdot 10^{-9}$	$37,876 \cdot 10^{-9}$	$31,820 \cdot 10^{-9}$
Relação de potenciais ou de energias elétricas	0,842	0,842	0,7071
Capacidade isolada $C = \frac{Q}{V}$ [F]	$13,201 \cdot 10^{-12}$	$13,201 \cdot 10^{-12}$	$15,713 \cdot 10^{-12}$
Relação de capacidades	1,188	1,188	$\sqrt{2}$

Tabela 6.2 – Tabela comparativa de algumas grandezas.

6.2 ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS

O caso das esferas condutoras com cargas elétricas simétricas, muito próximas uma da outra, têm, por exemplo, aplicação em alta tensão, na descarga esfera-esfera, em que, teoricamente, a intensidade do campo elétrico, ou disrupção elétrica E , em $[kV/cm]$, é aproximadamente igual, em módulo, ao gradiente:

$$E_{med} \cong \left| \frac{\Delta V}{\Delta d} \right| \quad (6.1)$$

em que:

- E_{med} – Valor médio aproximado da tensão de disrupção $[kV/cm]$;
- ΔV – Variação do potencial entre as duas esferas $[kV]$;
- Δd – Distância entre as duas esferas $[cm]$.

Outro exemplo, consiste em admitir, de um modo aproximado, um cilindro de comprimento L e de raio R , e que a densidade superficial de carga σ é constante. Assim, o potencial num ponto a do eixo x , será dado pela Figura 6.1 (ver Figura 3.15):

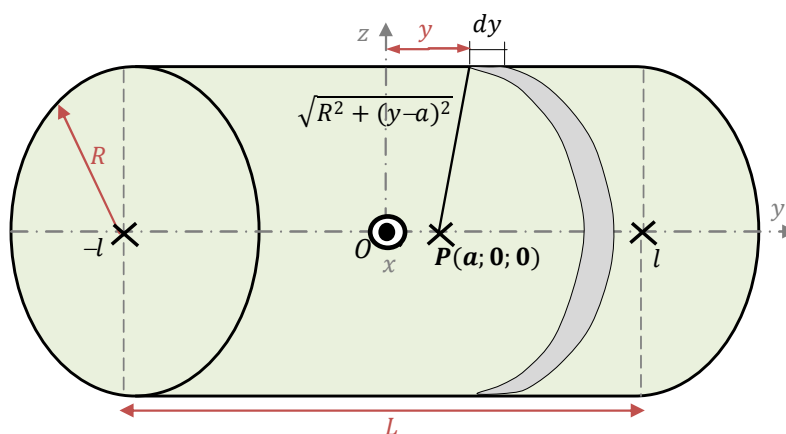


Figura 6.1 – Cilindro de raio R e de comprimento L .

Da Figura 6.1 e da Figura 3.15, o potencial elementar no ponto $P(a; 0; 0)$, para $a = 0$, é dado pela expressão (3.95), e a intensidade do campo elétrico pela expressão (3.96).

Assim, considerando a resistência de um elétrodo de terra, cilíndrico, enterrado na posição vertical, com $L \gg R$, esta pode ser dada, aproximadamente, por:

$$R_t = \frac{V_a}{I} \quad (6.2)$$

Sendo J a densidade superficial de corrente que pode atravessar a superfície lateral de um cilindro comprido, envolvido em material condutor, como por exemplo a terra, a intensidade de corrente elétrica I ao longo desse cilindro, será dada por $I = J S_L$. Da expressão (3.95), substituindo na expressão (6.2), virá:

$$R_t = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 J S_L} \ln\left(\frac{2l}{R}\right) \quad (6.3)$$

Como a densidade da corrente elétrica é dada por $J = E/\rho$, em que ρ representa a resistividade do meio circundante (por exemplo do terreno, em $[\Omega m]$), substituindo na expressão (6.3), virá:

$$R_t = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \frac{E}{\rho} S_L} \ln\left(\frac{2l}{R}\right) \quad (6.4)$$

Por sua vez, substituindo da expressão (3.96), sabendo que a superfície do cilindro é dada por $S_L = 2 \pi R L$ e, por sua vez, $L = 2l$, a resistência de um elétrodo de terra virá:

$$R_t = \frac{\rho \sigma R}{\varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 2 \pi R 2l} \ln\left(\frac{2l}{R}\right) = \frac{\rho}{4 \pi l} \ln\left(\frac{2l}{R}\right) \quad (6.5)$$

Assim, considerando o cilindro a funcionar como elétrodo de terra, com forma cilíndrica, enterrado na posição vertical, em que $L = 2l \gg R$, e sendo o diâmetro do cilindro $D = 2R$, a resistência de terra R_t , em $[\Omega]$, será aproximadamente dada por:

$$R_t \cong 0,16 \frac{\rho}{2l} \ln\left(\frac{2l}{R}\right) \cong 0,16 \frac{\rho}{L} \ln\left(\frac{L}{R}\right) \cong 0,16 \frac{\rho}{L} \ln\left(\frac{2L}{D}\right) \quad (6.6)$$

A expressão (6.5) apresenta uma das expressões utilizadas para o dimensionamento dos elétrodos de terra cilíndricos, particularmente em anel.

7. OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES

Para a realização do presente trabalho, recorreu-se a manuais, livros e software de resolução matemática, tendo sido utilizados o Matlab®, o Smath e o Mathcad®, como auxílio na resolução de problemas.

Como se pode verificar, o método dos momentos é um método numérico de extrema utilidade, pois transforma uma equação integro-diferencial num sistema de equações lineares.

Concluiu-se que a densidade superficial de carga num condutor retilíneo apresentava uma distribuição hiperbólica, aproximada à equação da catenária de uma linha fixada a apoios nivelados. Como as catenárias descrevem uma hipérbole, foi então formularizada uma expressão aproximada, utilizando cossenos hiperbólicos.

O presente trabalho focou-se principalmente no estudo da distribuição de cargas, conseqüentemente do potencial nas esferas, nas calotes, na superfície circular, no elipsoide, nos cilindros e nos cones. Analisando todas as figuras geométricas estudadas, concluiu-se que as densidades de carga tendem sempre a acumularem-se nas extremidades dos sólidos, havendo menos concentração nas zonas das superfícies interiores. Também se verificou que, quando existem arestas definidas, as cargas são mais concentradas nessas vizinhanças, cuja densidade superficial de carga é igual, em cada uma das superfícies elementares, junto às arestas que separam essas superfícies.

Em relação ao potencial, constatou-se, o que era de esperar, que tem uma distribuição uniforme (lei de Gauss) quando a distribuição de cargas é mais acentuada nas pontas (ou nas arestas). O facto de se ter a percepção que o potencial não é constante no sólido, ou seja, que não se distribui uniformemente, tem utilidade, na medida que a sua compensação, nalgumas regiões, é feita à custa do aumento da densidade superficial de carga nessa região.

Em relação à influência entre esferas condutoras de carga simétrica e eletricamente carregadas, concluiu-se que estas são fortemente influenciáveis quando estão muito próximas, e que se comportam como esferas isoladas quando estão bastante afastadas.

CAPÍTULO 7 – OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES

Foram apresentados graficamente o modo como as cargas se distribuem quando as esferas estão afastadas ou estão próximas e, portanto, mais influenciáveis.

O presente estudo é importante para ensaios de alta tensão com descargas ponta-ponta, ponta-plano, esfera-plano e esfera-esfera, em que, à partida, se tem uma ideia preliminar da distribuição das cargas nas figuras geométricas condutoras utilizadas nesses ensaios.

O presente trabalho, principalmente a nível académico, permite uma continuação futura para servir de base a estudos mais aprofundados de cada tema ou de cada sólido geométrico estudado, e ainda lançar bases essenciais para estudar distribuição de cargas noutra tipo de sólidos condutores com outro tipo de figuras geométricas. Poder-se-ão efetuar simulações com o programa FEMM (*Finite Element Method Magnetics*), que utiliza o método dos elementos finitos, de modo a observar com mais interesse o comportamento dos parâmetros eletrostáticos, e poder-se-ão também utilizar as expressões determinadas e os dados para obter as variáveis elétricas. Dada a dimensão do presente trabalho, e também ao fator tempo, não foi possível efetuar simulações com o programa FEMM, mas tal teria algum interesse prático, na medida em que permitiria observar mais parâmetros elétricos nos casos estudados.

Este trabalho revelou-se num estudo muito complexo e exigente, com um nível de dificuldade razoável, do ponto de vista que não me encontrava habituada à formalização matemática e do eletromagnetismo, por ter interrompido o contato com estes temas há mais de uma década. Assim, a parte da formulação foi a que me apresentou mais obstáculos, tendo sido ultrapassados, com o estudo e o passar do tempo.

8. BIBLIOGRAFIA

- [1] R. F. HARRINGTON, *Field Computation by Moment Methods*, New York: McMillan, 1968.
- [2] A. CASIMIRO, V. LOPES e F. EMÍDIO, “Método dos Momentos,” *Sapientia*, [Online]. Available: http://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/119/1/13_13.pdf. [Acedido em 29 Janeiro 2011].
- [3] M. N. O. SADIKU, *Elements of Electromagnetics, Second Edition ed.*, New York: Oxford University, 1995, pp. 721-733.
- [4] R. ROBERT, “Densidade de Carga Eléctrica num Condutor Rectilíneo Finito,” *Revista Brasileira do Ensino de Física*, 4 Dezembro 2003. [Online]. Available: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v25n4/a09v25n4.pdf>. [Acedido em 4 Fevereiro 2011].
- [5] “Wikipédia,” [Online]. Available: <http://pt.wikipedia.org>.
- [6] W. C. CHEW, J.-M. JIN, E. MICHIELSSEN e J. SONG, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, London: Artech House, 2001.
- [7] J. D. KRAUS, *Electromagnetics with Application*, McGraw-Hill, pp. 558-560.
- [8] B. OLMEDO, “Fundamentos de Electromagnetismo – Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo,” *Universidade de Granada*, 29 Setembro 2005. [Online]. Available: <http://www.ieee.org>. [Acedido em 18 Novembro 2010].
- [9] J. G. GONÇALVES, *Distribuição de Cargas Eléctricas em Calotes Esféricas*, Faro: Universidade do Algarve, 2007.
- [10] J. D. KRAUS, *Electromagnetics, Fourth Edition ed.*, McGraw-Hill, 1991, pp. 81-84.
- [11] R. ROBERT, “Densidade de Carga Eléctrica num Condutor Retilíneo Finito,” *Revista Brasileira do Ensino de Física*, Vol. 25, nº 4, 4 Dezembro 2003. [Online]. Available: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v25n4/a09v25n4.pdf>. [Acedido em 4 Fevereiro 2011].
- [12] L. Mediateca. [Online]. Available: <http://teses.mediateca.pt>. [Acedido em 2012].

CAPÍTULO 8 – BIBLIOGRAFIA

- [13] M. A. M. FERREIRA e I. AMARAL, *Matemática - Formulário*, Lisboa: Edições Sílabo, 1996.
- [14] C. CEIA, “Como Fazer uma Tese de Doutoramento ou uma Dissertação de Mestrado,” 2007. [Online]. Available: <http://www2.fcsh.unl.pt/docentes/cceia>. [Acedido em 2012].
- [15] D. F. GRIFFITHS, “An Introduction to Matlab,” University of Dundee, Stockholm, 2005.
- [16] J. G. GONÇALVES, “Coeficientes de Indução Mútua entre Espiras Circulares,” Universidade do Algarve, Faro, 2007.
- [17] J. G. GONÇALVES, *Roteiro de Electromagnetismo*, Faro: Universidade do Algarve, 2007.
- [18] “User’s Guide - Mathcad 15.0,” Parametric Technology Corporation, USA, 2010.
- [19] J. F. Konte, J. L. P. Teixeira e P. E. Alves, “Curso de MATLAB 5.1,” Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [20] B. G. Olmedo, “Fundamentos de Electromagnetismo - Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo,” Universidad de Granada, 2005.

ANEXOS

A. COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Neste anexo irá ser apresentada um breve resumo sobre coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas, segundo Sadiku [3], para utilização no presente trabalho.

COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ ; φ ; z)

Considerando o cilindro, a seguir representado apenas um quadrante:



Figura A.1 – Representação das coordenadas cilíndricas.

e considerando que os comprimentos e os ângulos variam entre os seguintes valores [3]:

$$\begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty \leq z < \infty \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

podem-se calcular ou converter de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas utilizando as seguintes relações:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z \quad (\text{A.2})$$

e de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas, utilizando as seguintes relações:

$$y = \rho \sin \varphi \quad x = \rho \cos \varphi \quad z = z \quad (\text{A.3})$$

em que:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_x = \cos \varphi a_\rho - \sin \varphi a_\varphi \\ a_y = \sin \varphi a_\rho + \cos \varphi a_\varphi \\ a_z = a_z \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_\rho = \cos \varphi a_x + \sin \varphi a_y \\ a_\varphi = -\sin \varphi a_x + \cos \varphi a_y \\ a_z = a_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ A_z = A_z \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Assim, em coordenadas cilíndricas, podem-se então apresentar as expressões que permitem determinar [3]:

- A distância entre dois pontos:

$$d^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 - 2 \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2 \quad (\text{A.5})$$

- O diferencial de deslocamento:

$$dl = d\rho a_\rho + \rho d\varphi a_\varphi + dz a_z \quad (\text{A.6})$$

- O diferencial de superfície:

$$dS = \rho d\varphi dz a_\rho + \rho d\varphi d\rho a_\varphi + \rho d\varphi d\rho a_z \quad (\text{A.7})$$

- O diferencial de volume:

$$dVol = \rho d\rho d\varphi dz \quad (\text{A.8})$$

COORDENADAS ESFÉRICAS ($r; \theta; \varphi$)

Considerando a esfera, a seguir representando apenas um octante:

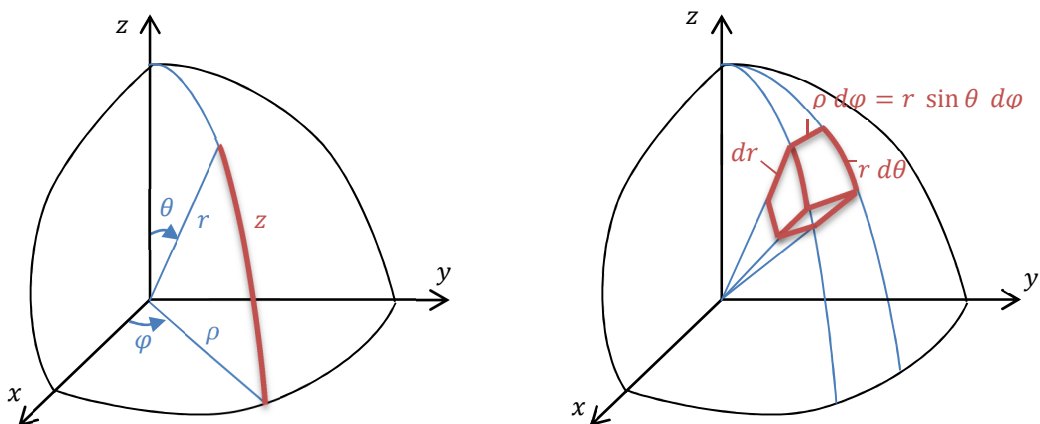


Figura A.2 – Representação das coordenadas esféricas.

e considerando que os comprimentos e ângulos variam entre os seguintes valores [3]:

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

podem-se calcular ou converter de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, utilizando as seguintes relações:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (\text{A.10})$$

e de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas, utilizando as seguintes relações:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A.11})$$

em que:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a_x = \sin \theta \cos \varphi a_r + \cos \theta \cos \varphi a_\theta - \sin \varphi a_\varphi \\ a_y = \sin \theta \sin \varphi a_r + \cos \theta \sin \varphi a_\theta + \cos \varphi a_\varphi \\ a_z = \cos \theta a_r - \sin \theta a_\theta \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} a_r = \sin \theta \cos \varphi a_x + \sin \theta \sin \varphi a_y + \cos \theta a_z \\ a_\theta = \cos \theta \cos \varphi a_x + \cos \theta \sin \varphi a_y - \sin \theta a_z \\ a_\varphi = -\sin \varphi a_x + \cos \varphi a_y \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} A_r = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta \\ A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta \\ A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

Assim, em coordenadas esféricas, podem-se então apresentar as expressões que permitem determinar [3]:

- A distância entre dois pontos:

$$d^2 = r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 - 2 r_1 r_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{A.13}$$

- O diferencial de deslocamento:

$$dl = dr a_r + r d\theta a_\theta + r \sin \theta d\varphi a_\varphi \tag{A.14}$$

- O diferencial de superfície:

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi a_r + r \sin \theta dr d\varphi a_\theta + r dr d\theta a_\varphi \tag{A.15}$$

- O diferencial de volume:

$$dVol = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \tag{A.16}$$

B. PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

A superfície do elipsoide é dada pela seguinte expressão:

$$S_{elipsoide} = 2 \int_0^a 2 \pi y ds \quad (B.1)$$

em que:

- a – Semieixo maior [m];
- y – Ordenada da função da elipse [m];
- ds – Comprimento elementar de um arco de elipse [m].

PERÍMETRO DA ELIPSE

Para determinar o comprimento elementar ds , foi necessário encontrar primeiro o perímetro da elipse.

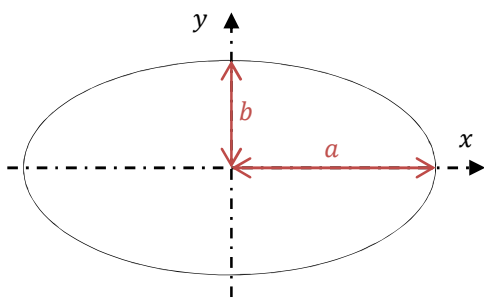


Figura B.1 – Elipse.

Como se sabe, o perímetro de uma elipse pode ser determinado pela expressão geral:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (B.2)$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

No entanto, o matemático indiano Ramanujan, determinou uma expressão que permite a aproximação muito exata do perímetro da elipse:

$$P_{elipse} = \pi \left[3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right] \quad (B.3)$$

em que a corresponde ao semieixo maior da elipse e b ao semieixo menor.

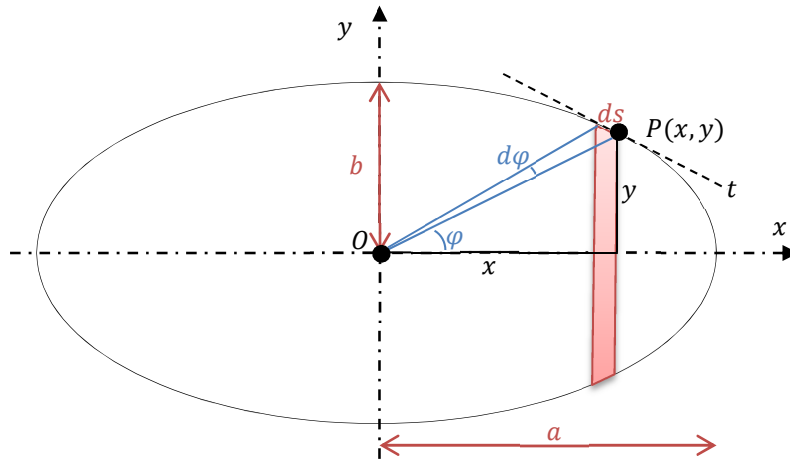


Figura B.2 – Ponto P na elipse.

Observando ao Figura B.2 e sabendo que t representa a tangente à elipse no ponto P , o comprimento elementar ds , do arco do 1º quadrante da elipse, pode ser deduzido pelo teorema de Pitágoras:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (B.4)$$

Dividindo ambos os membros por dx :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \Leftrightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (B.5)$$

Da expressão (B.2), encontraram-se y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow y = k \sqrt{a^2 - x^2} \quad (B.6)$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

Considerando $k = b/a$ constante, derivando a equação em ordem a x , vem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-kx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo estes valores na expressão (B.5):

$$ds = \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (\text{B.8})$$

Integrando a expressão (B.8), vem:

$$s_{elipse} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (\text{B.9})$$

Recorde-se que a equação da elipse (B.9), foi deduzida para apenas um quadrante, no entanto como os outros são simétricos, pode-se dizer que, simplificada:

$$s_{elipse} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2 (1 - k^2)}{a^2 - x^2}} dx \quad (\text{B.10})$$

Sabendo que a primeira excentricidade da elipse é dada por:

$$e_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{B.11})$$

logo, o perímetro da elipse será dado por:

$$s_{elipse} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - x^2 e_1^2}{a^2 - x^2}} dx \quad (\text{B.12})$$

SUPERFÍCIE DO ELIPSOIDE

Substituindo agora ds (B.8) e y (B.6) na expressão (B.1) (superfície do elipsoide):

$$S_{elipsoide} = 2 \int_0^a 2 \pi k \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \pi k \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} e_1^2 dx \quad (B.13)$$

Observando agora a Figura B.3:

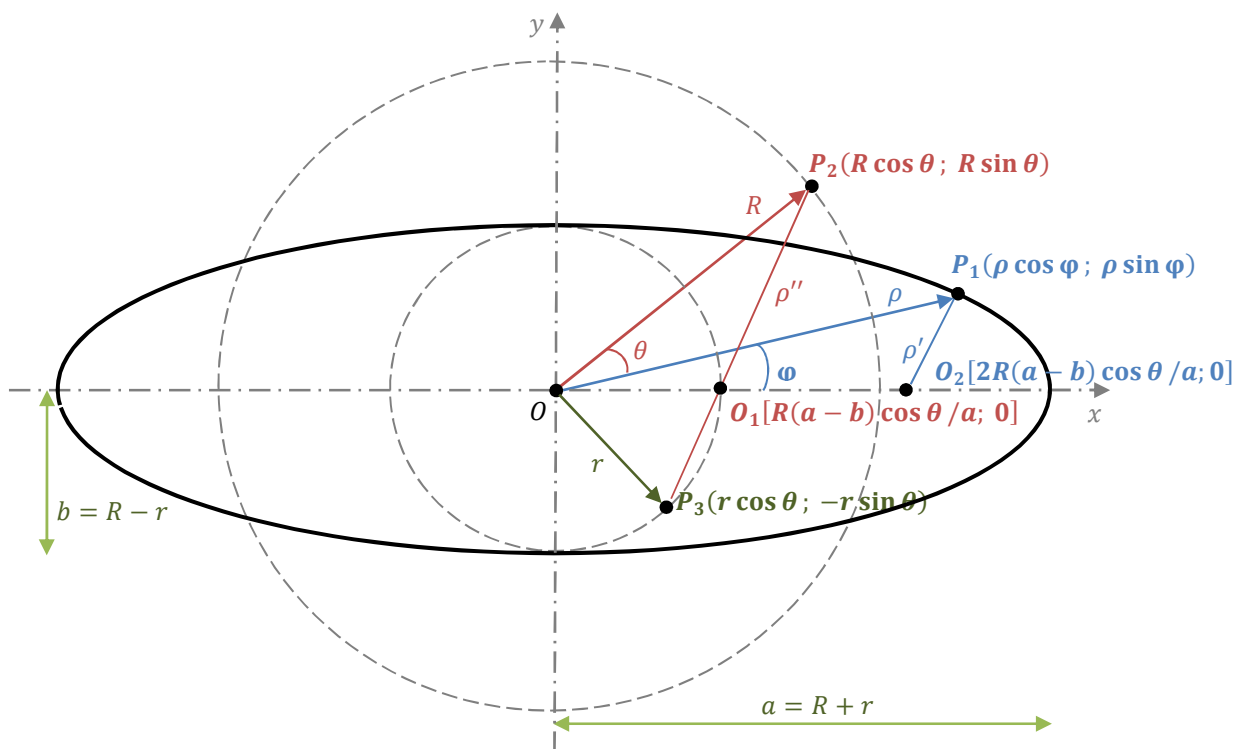


Figura B.3 – Método de obtenção da elipse a partir de duas circunferências.

Utilizando coordenadas polares, retirou-se o valor de x :

$$x = \rho \cos \varphi \quad (B.14)$$

Derivando, vem:

$$dx = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi \quad (B.15)$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

logo, substituindo na expressão (B.13), vem:

$$S_{elipsoide} = 4 \pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \rho^2 e_1^2 \cos^2 \varphi} (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi \quad (\text{B.16})$$

Observando novamente a Figura B.3, a distância entre a origem O e qualquer ponto da elipse é dada por:

$$\rho = \sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos (2 \theta)} \quad (\text{B.17})$$

onde, também por observação:

$$R = \frac{a + b}{2} \quad (\text{B.18})$$

e

$$r = \frac{a - b}{2} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo na expressão (B.17) e manipulando matematicamente esta última equação e substituindo os valores de e_1 e k determinados na expressão (B.11),vem:

$$\rho = a \sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{B.20})$$

Mais uma vez, também da Figura B.3, retira-se que:

$$\sin^2 \theta = \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} \quad (\text{B.21})$$

Substituindo na expressão (B.20), elevando ambos os membros ao quadrado e com $k = b/a$, resultará:

$$\rho^2 = a^2 - e_1^2 \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{k^2} \quad (\text{B.22})$$

A segunda excentricidade da elipse será dada por:

$$e_2 = \frac{e_1}{k} = \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} = \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} \quad (\text{B.23})$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO
ELIPSOIDE

logo:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{B.24})$$

Derivando, vem:

$$\rho' = \frac{-a e_2^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt[3]{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{B.25})$$

Substituindo agora na expressão (B.16):

$$S_{elipsoide} = 4 \pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 e_1^2 \cos^2 \varphi}{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} \frac{-a \sin \varphi (e_2^2 + 1)}{\sqrt[3]{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (\text{B.26})$$

Da expressão (B.23) também se retira que:

$$k^2 = \frac{1}{1 + e_2^2} \quad (\text{B.27})$$

logo:

$$S_{elipsoide} = 4 \pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 e_1^2 \cos^2 \varphi}{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} \frac{-a \sin \varphi}{k^2 \sqrt[3]{1 + e_2^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (\text{B.28})$$

No entanto, dx é um valor em módulo, então, simplificando, a superfície do elipsoide será agora:

$$S_{elipsoide} = 4 \pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{k^4} - 1 \right)}}{(1 + e_2^2 \sin^2 \varphi)^2} \sin \varphi d\varphi \quad (\text{B.29})$$

Sabendo que a superfície da esfera é $4 \pi r^2$, se se pretendesse calcular a superfície de uma esfera através da expressão (B.29), dir-se-ia que $a = b$, o que implica que $k = 1$ e $e_2 = 0$, logo, resolvendo, resulta:

$$S_{esfera} = 4 \pi a^2 \quad (\text{B.30})$$

em que a é o raio da própria esfera, o que comprova que a expressão (B.29) também será correta para determinação de elipsoides.

VOLUME DO ELIPSOIDE

Sabe-se que o volume da esfera é dado por:

$$Vol_{esf} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{B.31})$$

Das Figuras B.2 e B.3, considerando a superfície limitada pelo arco acima do eixo x do elipsoide, a rodar em torno do eixo x , assemelhando-se a um ovo, o volume será dado por:

$$Vol_{ovo} = \frac{4}{3} \pi a b^2 \quad (\text{B.32})$$

Considerando agora a superfície limitada pelo arco de um dos lados do eixo y do elipsoide, a rodar em torno do eixo y o elipsoide a rodar em torno do eixo y , assemelhando-se a um disco, o volume será dado por:

$$Vol_{disco} = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad (\text{B.33})$$

O centro de gravidade da superfície da elipse será dado pela expressão:

$$\int_0^a y dS = Y_{S_{elipse}} S_{elipse} \Leftrightarrow Y_{S_{elipse}} = \frac{\int_0^a y dS}{S_{elipse}} \Leftrightarrow Y_{S_{elipse}} = \frac{k^2 \int_0^a a^2 - x^2 dx}{\pi a b} \quad (\text{B.34})$$

em que $Y_{S_{elipse}}$ é o centro de gravidade da superfície, acima do eixo x , da elipse.

Logo, o volume do elipsoide será dado pela expressão (B.35):

$$Vol_{elipsoide} = 2 \pi Y_{S_{elipse}} \pi a b = 2 \pi k^2 \int_0^a a^2 - x^2 dx \quad (\text{B.35})$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

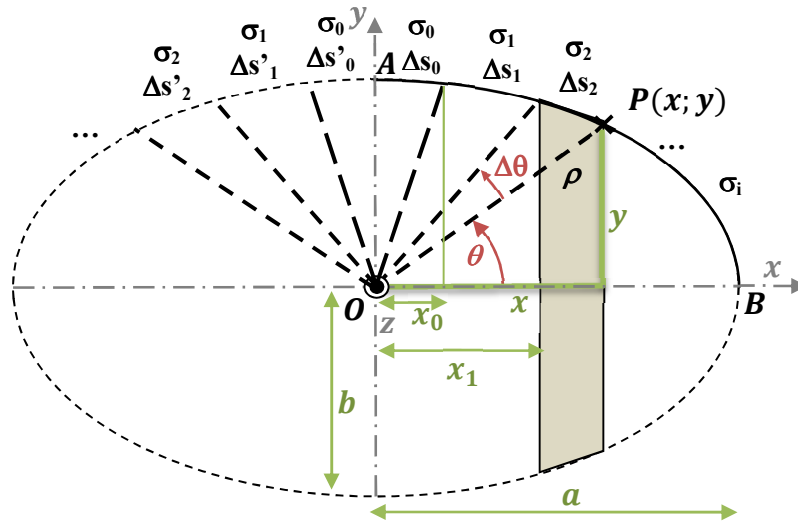


Figura B.4 – Arco de elipse AB.

Das Figuras B.3 e B.4, o arco de elipse AB será dado, a título de exemplo, por:

$$s_{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos(2\theta)} d\theta \quad (\text{B.36})$$

com os raios dos arcos dados pelas expressões $R = \frac{a+b}{2}$ (B.18) e $r = \frac{a-b}{2}$ (B.19).

Desenvolvendo $\sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos(2\theta)}$ em séries de potências, em relação à variável angular θ , ter-se-á:

$$s_{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 R r} \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2 R r} + \cos(2\theta)} d\theta \quad (\text{B.37})$$

Considerando N arcos de iguais comprimentos, entre A e B, para $j = 0; 1; 2; ; N - 1$:

$$s_j = \sum_{k=0}^j \Delta s_k = \frac{j s_{AB}}{N} \quad (\text{B.38})$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

Calculando o arco AB diretamente da expressão (B.36), e dividindo o arco AB em M arcos de igual comprimento ($\Delta s_0 = \Delta s_1 = \dots = \Delta s_n = \Delta s$ e $\Delta s'_0 = \Delta s'_1 = \dots = \Delta s'_n = \Delta s'$) de valor:

$$\Delta s = \frac{s_{AB}}{M} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos(2\theta)} d\theta}{M} \quad (\text{B.39})$$

e utilizando, por exemplo, o método de Newton-Raphson¹⁰, os valores dos arcos Δs , de iguais amplitudes, podem ser obtidos a partir de:

$$\theta_{i,j+1} = \theta_{i,j} - \frac{f(\theta_{i,j})}{f'(\theta_{i,j})} \quad (\text{B.40})$$

em que:

- $\theta_{i,j+1}$ – Valor final do arco Δs_0 do segmento de corda (arcos $\Delta s_0 + \Delta s_1$ – ver Figura B.4);
- $\theta_{i,j}$ – Valor inicial do arco Δs_0 (projeção do arco Δs_0 – ver Figura B.4), pode-se considerar $\theta_{0,0} = \pi/2$;
- i – Índice de iteração ($i = 0; 1; 2; \dots; M$), em que no ponto B , $\theta_{i,j+1} = 0$ – ver Figura B.4;
- j – Índice de iterações ($j = 0; 1; 2; \dots; N$). Valor aproximado obtido pelo método de Newton-Raphson, sendo mais exato para elevados valores de N ;
- M – Número de arcos de intervalos compreendidos entre A e B (1º quadrante – ver Figura B.4);
- N – Número de segmentos de arcos de intervalos compreendidos entre A e B (1º quadrante – ver Figura B.4).

¹⁰ Método de Newton (ou método de Newton-Raphson) – é um método iterativo que, em análise numérica, permite estimar as raízes de uma determinada função real, utilizando aproximações sucessivas de raízes (ou zeros). É considerado o melhor método, permitindo uma rápida convergência, em especial se a estimativa inicial estiver “suficientemente próxima” da raiz da função [5].

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

os arcos serão calculados pela expressão:

$$\Delta s_i = \int_{\theta_{i,j}}^{\theta_{i+1,j}} \sqrt{R^2 + r^2 + 2 R r \cos(2\theta)} d\theta \quad (\text{B.41})$$

Considerando agora o elipsoide da Figura B.5:

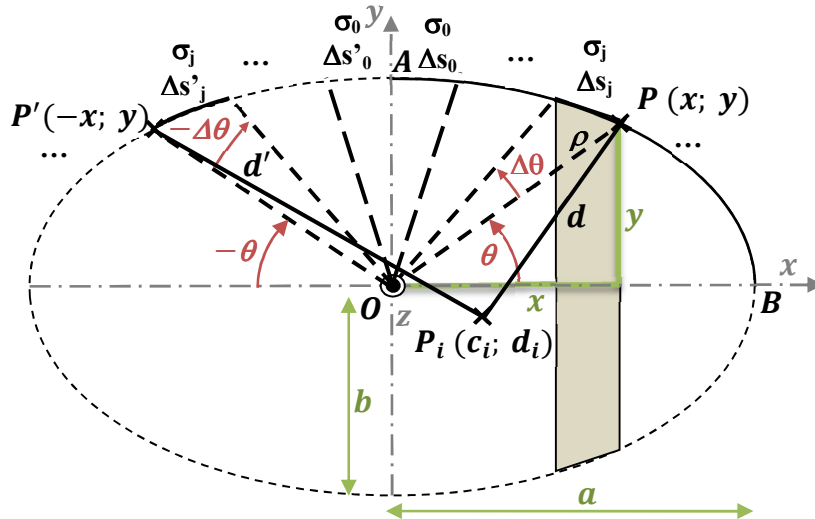


Figura B.5 – Arco de elipse AB.

o potencial elementar no elipsoide será dado por:

$$dV = \frac{dQ}{4 \pi \epsilon_0 d} \quad (\text{B.42})$$

em que Q corresponde à carga elétrica do condutor, em Coulomb [C]. Como a carga $dQ = \sigma dS$, o potencial elementar virá agora:

$$dV = \frac{\sigma dS}{4 \pi \epsilon_0 d} \quad (\text{B.43})$$

Da superfície do elipsoide $dS = 2 \pi y ds$ e da distância aos pontos $d = \sqrt{(x \pm c_i)^2 + (y \pm d_i)^2}$, (ver Figura B.5), substituindo na expressão (B.43), o potencial elementar no elipsoide virá agora:

$$dV = \frac{\sigma 2 \pi y ds}{4 \pi \epsilon_0 \sqrt{(x \pm c_i)^2 + (y - d_i)^2}} = \frac{\sigma y ds}{2 \epsilon_0 \sqrt{(x \pm c_i)^2 + (y - d_i)^2}} \quad (\text{B.44})$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO
ELIPSOIDE

em que os sinais \pm da expressão (B.44) serão positivos para as áreas elementares do lado esquerdo do elipsoide, para $c_i \leq 0$, e serão negativos para as áreas elementares do lado direito do elipsoide, para $c_i \geq 0$.

Das expressões $y = k \sqrt{a^2 - x^2}$ (B.6), $ds = \sqrt{1 + \frac{k^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$ (B.8) e $e_1 = \sqrt{1 - k^2}$ (B.11), com $k = b/a$, substituindo e resolvendo a expressão (B.44), resulta:

$$dV = \frac{\sigma k}{2 \varepsilon_0} \frac{\sqrt{a^2 - (e_1 x)^2} dx}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 + d_i^2 \pm 2 c_i x - 2 d_i k \sqrt{a^2 - x^2}}} \quad (\text{B.45})$$

Seja

$$d_i = a \sin \theta_{i,j} \quad (\text{B.46})$$

integrando em relação ao ponto $P_i (c_i; d_i)$, para $d_i = 0$ (eixo x), devido a todas as contribuições, de ambos os lados do elipsoide, e de qualquer eixo perpendicular a x (Figura B.5), o potencial será então dado por:

$$V_{i,j} = \frac{\sigma_j k}{2 \varepsilon_0} \left[\int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - (e_1 x)^2}}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 - 2 c_i x}} dx + \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - (e_1 x)^2}}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 + 2 c_i x}} dx \right] = \sigma_j S_{i,j} \quad (\text{B.47})$$

em que $i = 0 \dots M$ e $j = 0 \dots N$, são pontos de uma grelha para o cálculo das linhas equipotenciais, e:

$$S_{i,j} = \frac{k}{2 \varepsilon_0} \left[\int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - e_1^2 x^2}}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 - 2 c_i x}} dx + \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{\sqrt{a^2 - e_1^2 x^2}}{\sqrt{b^2 + (e_1 x)^2 + c_i^2 + 2 c_i x}} dx \right] \quad (\text{B.48})$$

Desdobrando a expressão (B.47), por exemplo, para $c_0 = 0$, virá:

$$V_0 = \sum_{j=0}^{N-1} V_{0,j} = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j S_{0,j} = \sigma_0 S_{0,0} + \sigma_1 S_{0,1} + \dots + \sigma_{N-1} S_{0,N-1} \quad (\text{B.49})$$

ANEXO B – PERÍMETRO E SUPERFÍCIE DA ELIPSE. ÁREA E VOLUME DO ELIPSOIDE

Do mesmo modo, para um ponto $P_i (x_i; y_i)$, o potencial virá dado por:

$$V_i = \sum_{j=0}^{N-1} V_{i,j} = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j s_{i,j} = \sigma_0 s_{i,0} + \sigma_1 s_{i,1} + \cdots + \sigma_{N-1} s_{i,N-1} \quad (\text{B.50})$$

em que σ_j correspondem aos valores da densidade superficial de carga.