UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Escola Superior de Educação e Comunicação

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE ESTRUTURA COMBINATÓRIA NO 1.º ANO DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Ana Cristina Nogueira Tendinha

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação de:

Professor Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro

2015

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Escola Superior de Educação e Comunicação

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE ESTRUTURA COMBINATÓRIA NO 1.º ANO DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Ana Cristina Nogueira Tendinha

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação de:

Professor Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro

2015

Resolução de Problemas Matemáticos de Estrutura Combinatória no 1º Ano do 1º Ciclo do Ensino

Declaração de autoria do trabalho

Declaro ser o autor deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Ana Cristina Nogueira Tendinha

Copyright
Ana Cristina Nogueira Tendinha

A Universidade do Algarve tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido, ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Aos meus adorados filhos,
para que se inspirem e percebam que as conquistas são o produto das batalhas travadas.

Agradecimentos

Sendo certo que a realização de qualquer trabalho pressupõe o contributo de um conjunto de pessoas e instituições, a realização deste estudo não foi uma exceção à regra pelo que iniciarei agradecendo a todos os que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização do mesmo, incentivando, apoiando e colaborando através das suas sugestões, críticas e comentários.

Ao meu orientador, professor doutor António Guerreiro, pelo seu apoio, orientação e disponibilidade ao longo deste percurso.

Aos meus alunos pela colaboração traduzida na sua participação interessada e nas suas esclarecedoras produções e intervenções.

Aos órgãos de direção e coordenação do meu agrupamento pela disponibilização de espaços e pela flexibilização pontual do meu horário de trabalho.

Ao professor Luciano Veia, por ter despertado em mim o "bichinho" da matemática e pela sua colaboração no esclarecimento de dúvidas ao longo dos últimos anos.

Ao meu marido, fonte constante de colaboração, compreensão e estímulo para a concretização deste trabalho e que, com o seu conforto e carinho, transformou momentos de angústia e desânimo em momentos de perseverança.

Aos meus filhos por terem compreendido as minhas "ausências" e pelos momentos que passaram sem o meu apoio.

Ao meu netinho que nasceu durante este percurso e que tornou a minha vida ainda mais feliz.

Aos meus pais, em especial à minha mãe, pelo carinho, apoio, encorajamento e ajuda prestados nos momentos em que tanto precisei.

Por último, mas não por isso menos importante, à minha amiga Sylvie pelas leituras, revisões e sugestões atentas e por preocupar-se comigo.

A todos vocês…os meus mais sinceros e profundos agradecimentos!

Resumo

O presente estudo, na área da matemática, pretendeu identificar e analisar as estratégias mobilizadas por alunos do 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico na resolução de problemas de combinatória.

Sendo que a resolução deste tipo de problemas implica o recurso ao raciocínio combinatório, definido por alguns autores como sendo uma capacidade inata ao ser humano, o mesmo pode ser desenvolvido desde cedo nas crianças se forem proporcionados contextos e procedimentos que envolvam este tipo de raciocínio. Para além disso é apontado como essencial para o desenvolvimento de processos de enumeração, formulação de conjeturas, de generalização e de sistematização. Nesse sentido, pretendi promover contextos didático-pedagógicos que investissem no desenvolvimento do raciocínio combinatório logo nos primeiros anos de escolaridade.

No âmbito do estudo utilizou-se uma metodologia de características qualitativas na variante de estudo de caso em que a recolha de dados se baseou na observação participante, em entrevistas e na análise documental. Durante o estudo concluiu-se que as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de estrutura combinatória passam por representar o raciocínio seguido através de símbolos iconográficos (desenhos, esquemas de linhas e setas, cores), de tabelas ou da escrita. Concluiu-se ainda que os desempenhos da maioria dos alunos refletiu um desenvolvimento progressivo de capacidades no que concerne ao raciocínio combinatório, traduzidas nos seguintes aspetos: i) apropriação de alguns princípios e propriedades subjacentes ao raciocínio combinatório; ii) aperfeiçoamento, diversificação e generalização das estratégias utilizadas; iii) utilização de alguma terminologia associada; iv) maior correção das resoluções; e v) maior rapidez de execução.

Palavras-chave: aprendizagem matemática; estratégias de ensino; raciocínio combinatório; resolução de problemas; 1.º ciclo do ensino básico.

Abstract

This study, in mathematics, intended to identify and analyse the strategies mobilized by 1st year students, from the 1st cycle of the elementary school in solving combinatorial problems.

Since the resolution of such problems require the use of combinatorial reasoning, defined by some authors as an innate ability to humans, it can be developed if contexts and procedures involving this type of reasoning are provided. Furthermore it is identified as essential for the development of enumeration process, conjecture formulation, generalization and systematization. In this sense it was intended to promote educational and pedagogical contexts that invest in the development of logical thinking in the first years of schooling.

As part of the study it was used a methodology of qualitative characteristics in the case study variant in which data collection was based on participant observation, in interviews and on document analysis. Throughout the study it was concluded that the strategies used by the students to solve combinatorial structure problems represent the reasoning followed by iconographic symbols (drawings, line diagrams and arrows, colours), tables or writing. It was also concluded that the performance of most students reflected a progressive capacity development with regard to the combinatorial reasoning, translated in the following aspects: i) appropriation of some principles and properties underlying the combinatorial reasoning; ii) improvement, diversification and generalization of the strategies used; iii) use of any associated terminology; iv) greater correction of resolutions and v) greater speed of execution.

Keywords: mathematics learning; teaching strategies; combinatorial reasoning; problems solving; elementary school.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Quadro de Acrónimos

ATL	Atividades de Tempos Livres
DGIDC	Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular
EBI/JI	Escola Básica Integrada/Jardim de Infância
MEC	Ministério da Educação e Ciência
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico
1.º CEB	Primeiro Ciclo do Ensino Básico
PCK	Pedagogical Content Knowledge
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PEA	Projeto Educativo do Agrupamento
PTT	Projeto de Trabalho da Turma
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
RIVED	Rede Internacional Virtual de Educação

CAPÍTULO 1 – Introdução

No contexto atual de formação inicial de professores, à luz do Processo de Bolonha, o mestrado já se apresenta como condição para a atribuição da habilitação para a docência na educação básica e secundária valorizando-se "o conhecimento no domínio de ensino, assumindo que o desempenho da profissão docente exige o domínio do conteúdo científico, humanístico, tecnológico ou artístico das disciplinas da área curricular de docência" (Decreto-Lei n.º 43/2007, de 22 de Fevereiro). Por outro lado,

> dá-se especial ênfase à área das metodologias de investigação educacional, tendo em conta a necessidade que o desempenho dos educadores e professores seja cada vez menos o de um mero funcionário ou técnico e cada vez mais o de um profissional capaz de se adaptar às características e desafios das situações singulares em função das especificidades dos alunos e dos contextos escolares e sociais (Decreto-Lei n.º 43/2007, de 22 de Fevereiro).

Com o objetivo de me manter atualizada no que concerne à habilitação para a docência e por questões de valorização pessoal e profissional, considerei que deveria investir, mais uma vez, no reforço da minha formação apostando na melhoria do meu desempenho ao nível da preparação científica. Assim sendo candidatei-me ao curso de mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade do Algarve. A formação pré-Bolonha permitiu a solicitação de uma análise de currículo e um processo de equivalências do qual resultou um plano de estudos constituído por cinco unidades curriculares, quase todas no âmbito das didáticas (Decreto-Lei n.º 43/2007, de 22 de Fevereiro, art.º 11, ponto 2, alíneas a, b, c).

O regulamento do curso de mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Universidade do Algarve prevê a realização de um relatório final que deverá incluir a descrição do percurso formativo (no meu caso a experiência profissional em contexto escolar) do mestrando. Pretende-se ainda, que seja um documentos que reflita uma atitude investigativa e reflexiva conducente a uma prática educativa baseada em evidências que podem ser tidas em conta nos momentos de tomada de decisões.

É nesta perspetiva que surge este estudo na área da matemática que tem como objetivo perceber que estratégias utilizam os alunos do 1.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do ensino básico na resolução de problemas matemáticos de estrutura combinatória. A escolha do tema resultou de uma curiosidade pessoal e da necessidade de o compreender para saber como ensiná-lo eficazmente aos alunos. Para melhor alcançar este propósito comecei por investigar mais aprofundadamente os problemas associados à combinatória (ramo da matemática) perspetivando um cenário de intervenção pedagógica apoiado no conhecimento científico mas também no conhecimento pedagógico do conteúdo.

Neste sentido, a revisão da literatura constituiu uma oportunidade para aprofundamento do conhecimento científico, para o esclarecimento de dúvidas e para delinear estratégias promotoras de uma melhor articulação entre a teoria e a prática. Permitiu também constatar que há poucos estudos de autoria portuguesa sobre esta temática, o que poderá ser um indicador da relevância atribuída no contexto educacional. No decurso da revisão da literatura sobre o tema verifiquei, que problemas com esta estrutura implicam a mobilização de um tipo de raciocínio específico – o raciocínio combinatório – que permite a quantificação de conjuntos de elementos selecionados a partir de um ou de mais conjuntos.

No âmbito da combinatória surgem 4 tipos de problemas – produto cartesiano, permuta, arranjo e combinação - que se podem distinguir pela sua estrutura e processos de resolução. Enquanto os problemas de produto cartesiano implicam combinações entre elementos de dois conjuntos disjuntos e o resultado pode ser encontrado a partir de uma simples multiplicação (a x b), os problemas de permuta, arranjo e combinação implicam combinações a partir de um único conjunto e a sua resolução passa por formas muito mais complexas. Ainda que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorra no período das operações formais (entre os 12 e os 15 anos), há evidências da possibilidade do seu desenvolvimento durante os períodos pré-operatório e das operações concretas (entre os 2 e os 12 anos), desde que sejam criados contextos de aprendizagem adequados.

Em Portugal, o Programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, homologado em junho de 2013, não atribui especial destaque à combinatória ou ao raciocínio combinatório, enquadrando os problemas de combinatória em objetivos associados à multiplicação – "Efetuar multiplicações no sentido aditivo e combinatório" (MEC, 2013, p.8) – ou à resolução de problemas – "Resolver problemas até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório" (MEC, 2013, p.16). Ademais refere um outro objetivo que estabelece que os alunos devem ser capazes de "efetuar uma dada multiplicação fixando dois conjuntos disjuntos e contando o número de pares que se podem formar com um elemento de cada, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas" (*Idem*, *ibidem*, p.10), sugerindo alguma inclinação somente para os problemas de produto cartesiano que aparecem associados a situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.

Ainda que os manuais escolares incluam exemplos dos quatro tipos de problemas de combinatória, na sua generalidade, os documentos curriculares não contemplam orientações específicas para o ensino da combinatória nem apontam sugestões de atividades conducentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório associado. Neste panorama corre-se o risco de os professores não se aperceberem da importância deste raciocínio para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e que o abordem de forma superficial e pouco informada. Consciente desse risco, por experiência própria, considerei que este estudo poderia constituir uma oportunidade para conciliar o conhecimento transmitido pelos especialistas com o conhecimento empírico resultando disso, um trabalho mais informado, e por isso mais proveitoso e significativo para o processo de ensino e de aprendizagem.

Por tudo o que foi referido até aqui, alicerço a pertinência deste estudo nos seguintes aspetos: (i) importância da temática para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e para a compreensão de conceitos matemáticos; (ii) contributo que presta às aprendizagens com significado matemático; (iii) interesse pessoal em investir na melhoria do conhecimento científico e pedagógico com vista ao aperfeiçoamento das práticas; (iv) existência de poucos estudos portugueses sobre este tema; e (v) enquadramento pouco expressivo desta temática no programa de Matemática do Ensino Básico.

Para a apresentação deste relatório procedi a seguinte estruturação: No primeiro capítulo, destinado à introdução, defino a origem e as finalidades do estudo bem como a sua pertinência no campo da educação matemática. Apresento ainda as motivações pessoais para a escolha deste tema. O segundo capítulo é dedicado a um relato descritivo e reflexivo sobre a minha experiência profissional, na área da docência, relativamente ao percurso formativo e ao contributo prestado ao processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. No terceiro capítulo procedo ao enquadramento teórico suportando o meu estudo na literatura referente à combinatória, raciocínio combinatório e aos problemas de estrutura combinatória. No quarto capítulo é apresentada a metodologia de investigação no que concerne ao tipo de estudo, aos métodos adotados, aos instrumentos e procedimentos utilizados para a recolha e análise dos dados, assim como a uma breve descrição dos participantes e do contexto onde o estudo foi desenvolvido. No quinto capítulo apresento e descrevo o estudo empírico destacando os aspetos mais relevantes que permitirão responder à questão que me orientou ao longo de todo o trabalho investigativo. Finalmente, no sexto e último capítulo são apresentadas as conclusões mais importantes acerca do estudo e uma reflexão sobre o seu contributo para os alunos e para mim, enquanto professora e investigadora.

CAPÍTULO 2 – Desenvolvimento Profissional

Neste capítulo apresento o meu percurso formativo e experiência profissional na área da docência. Tentarei fazê-lo etapa a etapa de forma sucinta e esclarecedora, descrevendo o meu percurso ao nível da formação inicial, contínua e especializada; refletindo sobre o meu desempenho e desenvolvimento profissionais; descrevendo opções metodológicas, contextos de aprendizagem, processos e dinâmicas de trabalho. A par da descrição do percurso/desenvolvimento profissional, apresentarei uma breve reflexão sobre o contributo prestado ao processo de ensino e de aprendizagem e ao desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos.

Percurso Formativo e Experiência Profissional em Contexto Escolar

> A carreira profissional docente é um percurso relacional e contextualmente vivenciado e construído, em que a pessoa-professor se vai diacronicamente desenvolvendo, segundo um conjunto de etapas ou fases com características próprias, em espaços e tempos diferenciados e com necessidades específicas de formação (Gonçalves, 2009, p.23).

Talvez por ter nascido numa família de professores sempre quis ser professora! Sempre a considerei uma das profissões mais nobres e a que mais contribui para o progresso das sociedades e das nações. Para além do mais, no seio familiar, estive sempre rodeada daquilo que considero, terem sido bons exemplos destes profissionais e apercebia-me da responsabilidade, dedicação e sentido de missão que refletiam no seu desempenho, nos seus relatos e desabafos. Com prazer, observava constantemente testemunhos de admiração e reconhecimento de alguns dos seus ex-alunos. Eu gostava muito de lidar com crianças, sentia que tinha vocação para o ensino pelo que não foi difícil decidir!

Mas como ninguém nasce professor (isto pode ser discutível), foi necessário todo um percurso para aprender a sê-lo. Concorri a várias Escolas Superiores de Educação, colocando o curso de Professores do Ensino Primário, sempre em primeiro lugar. Entrei na primeira opção e a minha formação docente teve então início, na Escola Superior de Educação de Faro, no Curso de Professores do Ensino Primário (1989 – 1992). O currículo deste curso revestia-se de um caráter multidisciplinar, porém apresentando uma distribuição da carga horária mais incidente nas áreas da Língua Materna, Matemática e Estudo do Meio Físico e Social. Esta etapa formativa desenrolou-se num contexto muito teórico e científico, onde as didáticas e o conhecimento pedagógico dos conteúdos foram relegados para um plano secundário. Segundo Shulman (1986), os professores não têm somente que saber e compreender o conteúdo das disciplinas que lecionam, mas também, saber como ensinar este conteúdo eficazmente aos alunos. A este tipo de conhecimento exclusivo dos professores, Shulman (1986) dá o nome de Pedagogical Content Knowledge (PCK) – Conhecimento Pedagógico dos Conteúdos.

De acordo com este autor, os professores precisam de desenvolver o seu conhecimento e compreensão, mas também, "desenvolver a sua capacidade de transformar e representar estes conhecimentos para fins pedagógicos" (Shulman, 1986, p.6). Considerava portanto o PCK, como resultante da interação de dois tipos de conhecimento: o conhecimento pedagógico e o conhecimento científico. Assim sendo, a pedagogia teria que ser combinada com o conteúdo. Numa outra vertente, autores como Medina e Dominguez (1989), defendem

> a formação de professores como a preparação para a emancipação profissional do docente para realizar crítica, reflexiva e eficazmente um estilo de ensino que promova uma aprendizagem significativa nos alunos e consiga um pensamento-ação inovador, trabalhando em equipa com os colegas para desenvolver um projeto educativo comum (citado em Mira, Dinis, Massa & Rebelo, 2010, p.5)

Quando concluí o curso de Professores do Ensino Primário sentia-me muito aquém destas premissas. Tal como acho que acontece com todos os professores em início de carreira, fui acometida por muitas dúvidas e anseios: *Estarei preparada para ser professora?* ou *A formação que recebi será, só por si, suficiente?* Para além da ansiedade de assumir uma turma, sentia-me pouco segura quanto à forma mais correta de conduzir o processo de ensino aprendizagem. Como deveria transmitir determinados conteúdos e conceitos? Que tipo de estratégias e processos deveria mobilizar em cada momento? Como deveria colocá-las em prática? Estas e tantas outras questões implicaram uma atitude de reflexão e autocrítica constante que me tem mantido afastada de *águas estagnadas*.

Tal como Saraiva e Ponte (2003) referem, a mudança, mais do que imposta, advém da vontade que cada professor tem para mudar, isto é, para que a mesma ocorra terá que ser desejada. A mudança do professor, só ocorre se ele estiver disposto a mudar (Fullan, 1993; Hargreaves, 1998; Thompson, 1992 referidos em Saraiva & Ponte, 2003, p.4). Saraiva e Ponte (2003) defendem ainda uma nova perspetiva de professor como "alguém que pensa e age com intencionalidade, com conhecimento próprio e com capacidade para decidir e agir de acordo com as necessidades da sua situação concreta" (p.2).

Fazendo uma retrospetiva do meu desempenho profissional, reconheço que as mudanças decorreram de uma vontade, na grande maioria das vezes espontânea, outras vezes sugerida ou imposta, de adequar e melhorar desempenhos. Refletir sobre o que aprendi, o que faço e como faço, como transpor a teoria para a prática, sobre as necessidades dos alunos e de uma escola/sistema de ensino, em constante mudança, permite-me tomar decisões mais adequadas e eficazes. Ponte (2005) realça que "o professor que se quer desenvolver plenamente tem toda a vantagem em tirar partido das oportunidades de formação que correspondam às suas necessidades e objectivos" (p.6).

É com este objetivo que venho investindo regularmente na formação contínua, participando em Cursos e Ações de Formação, Encontros, Fóruns, Seminários. Considero que este tipo de formação tem sido uma ferramenta fundamental para a aquisição e aprofundamento de saberes, competências e dinâmicas de trabalho, que me permitem inovar e responder, de forma eficiente, aos desafios e às exigências de uma sociedade, de um sistema de ensino e de uma escola em constante transformação. Em 2003, a necessidade de complementar a formação inicial implicou a decisão de realizar a Licenciatura de Complemento de Formação Científica e Pedagógica para Professores do Primeiro Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) na Universidade Aberta, com especialização na área da Língua Portuguesa.

Apesar de não ter sido uma formação com vertente prática, permitiu o contacto com bibliografia associada a autores e seguidores de correntes pedagógicas e didáticas, nas várias áreas do currículo, com as quais me identifiquei imediatamente e quis conhecer mais pormenorizadamente. Autores como João Pedro da Ponte e Lurdes Serrazina, entre outros, defendiam dinâmicas de trabalho em sala de aula centradas nos alunos e num ensino exploratório onde os alunos aprendiam a aprender, aprendiam fazendo, explorando e manipulando materiais didáticos e eram convidados a refletir sobre a aprendizagem

(Ponte & Serrazina, 2006). Simultaneamente, a adoção de uma postura investigativa (pesquisas e leituras) direcionada para as diferentes áreas do currículo, tem integrado uma das estratégias mobilizadas para colmatar e suprimir lacunas, gerando, em simultâneo, oportunidades para contactar com outras experiências em ensino e para aprofundar conhecimentos ou torná-los mais consistentes.

A colaboração e participação na dinamização de projetos escolares ou outros, propostos pelo do Ministério da Educação, mais concretamente, pela Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), têm sido outra vertente do meu percurso de formação contínua. Experiências neste âmbito constituíram uma mais-valia ao nível do trabalho colaborativo. Entre os anos 2007 e 2009, após ter concluído um período de formação contínua na área de matemática, colaborei no projeto-piloto de implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico, integrando a equipa de professores experimentadores. Este projeto, realizado à escala nacional, foi dinamizado e desenvolvido sob a tutela do Ministério da Educação, mais concretamente pela DGIDC, e envolveu vários professores e respetivas turmas. No âmbito da implementação deste programa, investiu-se na formação de professores e na produção de materiais de apoio à sua aplicação.

Alguns dos aspetos mais positivos da minha participação neste projeto-piloto, foram poder trabalhar diretamente com as equipas responsáveis pela elaboração deste documento orientador e poder desenvolver-me profissionalmente num ambiente dinâmico, didático e colaborativo. Estas equipas incluíam, na qualidade de autores, investigadores em Educação como João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina, Hélia Sousa, Joana Brocado, entre outros, que nos possibilitaram o privilégio de aprender a ensinar matemática de uma forma mais reflexiva e consciente.

Colaborar na implementação deste Programa implicou a adoção de nova postura, enquanto professora, pois conduziu a novas dinâmicas de trabalho que se refletiram positivamente nas opções metodológicas, no trabalho com os alunos, na elaboração das planificações, na seleção de tarefas e no trabalho com os colegas. Esta experiência favoreceu um processo gradual de crescimento e maturação que conduziu a uma prática pedagógica antecedida de momentos de investigação, planeamento e reflexão.

Criei assim maior segurança na transmissão de conhecimentos e na realização de aulas mais dinâmicas onde os alunos puderam desenvolver competências e adquirir/aplicar conhecimentos num ambiente mais significativo e motivador. Esta e outras experiências, na área da formação contínua em matemática, conduziram a uma nova forma de lidar com a matemática na sala de aula, levando-me a assumir uma postura mais indagadora na identificação dos aspetos matemáticos envolvidos na aprendizagem dos alunos.

Pese embora a qualidade deste Programa, a sua aplicação foi muito curta e não permitiu concluir resultados da sua experimentação, dado ter sido revogado em 2012 e substituído por um novo programa a 17 de junho de 2013. Contudo, em 2012, o Relatório Pisa (OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico) apontava Portugal como um exemplo de evolução positiva, dado observar-se, pela primeira vez, uma melhoria significativa nos resultados dos alunos portugueses ao nível das competências matemáticas. O que significará isto? Idiossincrasias inexplicáveis de quem tem o poder de decisão e quer impor a sua vontade, só porque sim?

Ao longo da minha carreira, a cooperação com a Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve surge no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada da formação inicial. Foi com prazer que pude colaborar na tarefa de preparar futuros professores, ensinando e aprendendo, promovendo momentos onde puderam estabelecer relações entre a teoria e a prática, enfim, de ter contribuído para o início de um longo e contínuo caminho de aprendizagem e desenvolvimento profissional, decorrente da necessidade que todos os professores têm de se ir adaptando às constantes transformações sociais, tecnológicas, curriculares, legislativas, entre outras.

Para além de promover um ambiente de partilha, ajuda e encorajamento, dinamizei momentos destinados à reflexão, à planificação de atividades e à seleção de materiais e recursos. Parafraseando Gonçalves (2009), são estes momentos que permitem que o formando possa desenvolver o pensamento reflexivo sobre a sua prática, integrar teorias com situações experienciadas e construir um estilo pessoal de atuação, auxiliando-o a tomar decisões sobre a sua ação futura. É desta relação entre formadores e formandos que se minimizam lacunas graves de preparação científica, em relação a determinados conteúdos constantes dos programas do ensino básico, gerando uma ligação bem-sucedida e bem sustentada entre a matéria de ensino e os conhecimentos relevantes sobre os processos de aprendizagem (reforçando os conhecimentos didáticos do formando).

Ser professora cooperante, possibilitou-me um conjunto de experiências e interações bastante positivas na medida em que permitiu que partilhasse conhecimentos e experiências com os professores estagiários. Simultaneamente favoreceu uma evolução pessoal ao nível das práticas pedagógicas (reciclagem/atualização profissional).

Entre os anos de 2012 e 2013 aceitei participar num trabalho de natureza colaborativa, integrado no programa de doutoramento de um docente da Universidade do Algarve. Entendo que o trabalho colaborativo é algo que todos devemos valorizar, uma vez que permite promover dinâmicas de trabalho articuladas e enriquecedoras, desenvolvidas em ambientes de trabalho onde a colaboração passa pela mobilização/troca de saberes, pela planificação de atividades e pela reflexão conjunta.

De facto, colaborar com este programa, foi uma experiência gratificante para todos os docentes envolvidos onde os momentos de reflexão e esclarecimento de dúvidas foram uma constante. Em conjunto, refletiu-se sobre as experiências de aprendizagem, ultrapassaram-se inseguranças, esclareceram-se dúvidas e, acima de tudo, potencializaram-se competências e conhecimentos.

Aperceber-me da inegável importância das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para a plena inserção das novas gerações na sociedade atual, do lugar que ocupam no quotidiano dos alunos e, em simultâneo, a necessidade de possuir outras competências para um desempenho mais eficaz da minha profissão, levou-me a realizar o Curso de Operadora em Ambiente Windows. Considerei esta etapa fundamental para a aquisição de conhecimentos e competências, as quais tenho vindo regularmente a reciclar para me manter atualizada. Cada vez mais, congratulo-me por ter investido nesta formação pois tem permitido ultrapassar desafios e funções decorrentes do meu quotidiano, enquanto professora e cidadã.

Do meu currículo profissional consta também o desempenho das funções de Coordenadora de Ano (4 anos), Coordenadora dos Apoios Educativos (1 ano) e Coordenadora para a Articulação Curricular. No desempenho destas funções, desenvolvi um trabalho de articulação e mediação visando colaborar para um bom funcionamento das relações administrativas, pedagógicas e interpessoais entre os alunos, os colegas de trabalho, os Órgãos de Gestão, e destes com o Currículo e os recursos existentes na escola. Ainda neste âmbito, participei na elaboração e dinamização de projetos, debates e atividades em contexto escolar ou com a comunidade envolvente.

Não reservei qualquer parágrafo, nem capítulo, para referir os lugares ou as escolas onde lecionei para não me enredar numa narrativa que envolve pouco conteúdo. Nunca andei por muito longe nem por diversas escolas. Não tenho episódios de viagens penosas ou distantes, nem de turmas muito difíceis, dignos de serem relatados. Dos 23 anos de serviço, os últimos 20 foram distribuídos por 3 escolas da localidade onde resido. Posto isto, de um modo geral, posso afirmar que tenho sido uma pessoa com sorte.

Assim, fazendo uma resenha do meu percurso docente, para além de conhecimentos e alguma experiência adquirida ao longo da formação inicial e dos momentos de prática pedagógica supervisionada, fui apoiando o meu desempenho em hábitos de investigação e pesquisa, nas vantagens de ter crescido numa família de professores, no trabalho colaborativo, na frequência/participação em ações/encontros de informação ou formação, em formação complementar e em projetos para os quais fui sendo convidada ou fiz questão de participar. Todas estas experiências têm contribuído para um contínuo processo de formação que teve um início, mas que o culminar se mantém *sine data*.

A par de tudo o que para trás referi, não posso deixar de realçar os momentos destinados à reflexão acerca das práticas profissionais. Momentos que ocorrem individualmente ou em grupos de trabalho, onde se questionam conceções, conhecimentos e opções, analisam resultados, procuram-se soluções, enfim momentos que enriquecem o trabalho docente e se refletem positivamente nos progressos e resultados dos alunos. Como refere Nóvoa (1992), a formação não se constrói por acumulação de cursos ou de técnicas, mas sim através de um trabalho de reflexão crítica sobre as práticas e sobre a construção de uma identidade pessoal e profissional.

Quando reflito sobre o meu percurso traço-o como um percurso formativo em que a reconstrução de saberes e capacidades não resultaram somente de atos solitários e de caminhos percorridos isoladamente mas, essencialmente, de uma rede de interações e de experiências que fui estabelecendo com os outros. Foi um desenvolvimento compartilhado, onde o crescimento profissional e pessoal resulta de atos conjuntos numa escola em constante mudança.

Os momentos de planificação e organização das atividades letivas constituem uma ferramenta essencial para um funcionamento eficaz do processo de ensino e de aprendizagem. Tendo presente a Organização Curricular e os Programas para o 1.º CEB, em estreita articulação com o Projeto Educativo do Agrupamento (PEA) e o Projeto de Trabalho da Turma (PTT), tentei articular diretrizes e objetivos adequando-os à realidade da comunidade escolar envolvida. Mais uma vez, este é um trabalho realizado em equipa/grupos de trabalho. Tentando relacionar o que se ensina (documentos nacionais e generalistas) com o que os alunos aprendem e a forma como aprendem, pondera-se a forma mais pertinente de os adequar, fazem-se opções metodológicas e selecionam-se atividades, estratégias, materiais e instrumentos de avaliação.

Em paralelo, investi na pesquisa, na leitura, na reflexão acerca das práticas, enfim no aprofundamento de conhecimentos e conceitos por forma a permitir um trabalho de maior qualidade e rigor junto dos alunos, zelando para que nada seja feito ao acaso ou fique esquecido. Estes momentos refletem-se positivamente nas atividades letivas e enriquecem o processo de ensino e de aprendizagem, proporcionando aos alunos pedagogias diferenciadas e inclusivas, facilitadoras da superação de dificuldades, de mais momentos de apoio individualizado e de uma melhor gestão do currículo e dos recursos.

Ainda que a atual equipa do Ministério de Educação aponte para outro tipo de trabalho, sempre que possível, opto por metodologias que proporcionem momentos de aprendizagens construídas/descobertas pelos alunos. Acredito nas potencialidades de um trabalho que os leve a aprender a aprender, um trabalho que permita aprendizagens significativas e por isso, o desenvolvimento mais eficaz de capacidades e competências conducentes a uma maior autonomia intelectual dos alunos.

Neste seguimento, empenho-me em fomentar ambientes e experiências de aprendizagem que estimulem a utilização do pensamento recursivo, o estabelecimento de relações entre os conteúdos e conhecimentos, o uso a comunicação de procedimentos, descobertas e resultados, o raciocínio e a sua capacidade crítica. Conforme afirma Meirieu (1998), se o papel do professor é fazer com que nasça o desejo de aprender, a sua tarefa é criar o enigma ou, mais exatamente, fazer do saber um enigma: comentá-lo ou mostrálo suficientemente para que se vislumbre o seu interesse e a sua riqueza, mas calar-se a tempo para suscitar a vontade de desvendá-lo.

Parafraseando Freire (1996), ensinar não se pode resumir a uma mera transmissão de conhecimentos, ensinar deve implicar, da parte do professor, uma abertura para a curiosidade dos alunos. O professor deve assumir-se como mediador/orientador das aprendizagens, levando o aluno a querer saber mais. É um processo de aprendizagem conjunta, um desafio que tem como meta a formação de cidadãos críticos, autónomos, conscientes dos seus direitos e deveres e, por isso, capazes de transformar a sociedade.

Revendo-me nestes princípios e refletindo sobre a relação pedagógica com os meus alunos, considero que esta retrata a proximidade e cumplicidade existentes entre professor e alunos. Para além da relação pedagógica, existe uma relação afetiva de confiança mútua, de amizade, que se vai construindo e fortalecendo ao longo dos anos de convívio e que considero fundamental para o seu sucesso educativo. Ao papel de professora junta-se o papel de psicóloga, socióloga, enfermeira, segunda mãe, e tantos outros que vão surgindo, decorrentes da necessidade de acompanhar estas crianças que passam cada vez mais tempo na escola, aos cuidados dos professores e de outros elementos da comunidade educativa.

Lecionar a mesma turma, em regime de monodocência, durante os quatro anos de escolaridade, que constituem o 1.º CEB, torna-se assim, uma condição facilitadora e poderosa para a construção de um conhecimento profundo e abrangente das características e especificidades de cada aluno. Este tipo de conhecimento é essencial para a adequação de decisões pedagógicas e interpessoais, para o desenvolvimento de sentimentos de confiança e de laços de amizade.

Em simultâneo, em estreita articulação entre as regras sociais e a necessidade de as cumprir, promovo o respeito pelos outros e por si mesmos, o trabalho de equipa e o espírito de turma, realçando a necessidade do desenvolvimento destas competências para um verdadeiro exercício da cidadania. A dinamização de estratégias conducentes ao envolvimento e colaboração dos Encarregados de Educação e das entidades promotoras das atividades de tempos livres (ATL), no processo de ensino e de aprendizagem, tem permitido a criação de estruturas mais eficazes de apoio ao processo de aprendizagem e uma melhor articulação entre a escola e as famílias.

Em retrospetiva, considero que tenho investido parte significativa da minha vida profissional, muitas vezes da pessoal, na atualização de conhecimentos, em atividades de pesquisa, na recolha de informação, na troca de experiências e na planificação de aulas, visando sempre um trabalho informado, consciente, estruturado e proveitoso, assente em dinâmicas centradas nos alunos. Procuro em particular, um sentimento de segurança relativamente ao conhecimento profissional, científico, pedagógico e didático que, apesar de me exigir grande espírito de sacrifício, subtrações ao tempo em família e de descanso, faz-me sentir melhor professora, comprometida com uma constante e inacabada reconstrução de saberes e competências que viabilizam dinâmicas e decisões mais conscientes e eficazes.

Graças a Deus (permitam-me uma alusão às minhas crenças), não me lembro de momentos desagradáveis relacionados com o meu desempenho docente. Contudo, há momentos de desabafos e preocupações decorrentes de decisões ministeriais, das condições de trabalho, de atitudes desprendidas e irresponsáveis de alguns alunos e encarregados de educação. Tem sido difícil impedir que questões como estas e outras interfiram no meu trabalho diário e no prazer que tenho em desempenhá-lo. Saliento pela negativa, o ataque sistemático e injusto que tem sido disferido à classe docente tornando--a mais frágil e descredibilizando-a aos olhos da opinião pública.

Não contesto a necessidade de se proceder a reformas nos planos, nos programas e nas orientações curriculares, ou a necessidade de proceder a ações conducentes à mudança do pensamento e da atitude dos vários atores educativos. Também reconheço a importância de repensar metodologias de ensino e dinâmicas de trabalho em contexto escolar. Mas, tal como sublinham Gonzalez e Escudero, citados por Pacheco (1995), “uma reforma educativa envolve uma inter-relação entre uma realidade subjetiva (a das pessoas) e uma realidade objectiva (a do contexto organizacional) ” (p. 39).

Sob a anterior perspetiva, as reformas educativas, as mudanças nos programas e nos desenhos curriculares, devem revelar-se oportunas e adequadas à realidade das escolas e dos alunos. Lamentavelmente, as que temos vindo a observar nos últimos tempos parecem resultar de políticas, ideologias e opções geradas por questões economicistas, onde a qualidade de ensino, a organização das escolas, a realidade dos alunos e dos professores nem sempre são tidas em conta.

Tenho encarado esta realidade com um sentimento de desconfiança e preocupação pois constato com frequência, o impacto negativo na qualidade do processo de ensino e de aprendizagem. Como tal, há momentos em que sinto necessidade de adotar uma atitude mais questionadora e interventiva, muitas vezes confundida com teimosia ou com *resistência à mudança*.

Outro aspeto, que lamento, prende-se com a crescente anulação das dinâmicas do 1.º CEB. A constituição de Agrupamentos e Mega Agrupamentos de Escolas por vezes implica que as decisões sejam tomadas à distância, de forma generalista e por isso, nem sempre adequadas às especificidades do 1.º CEB ou de cada escola que integra o agrupamento. Julgo que a realização de uma análise sobre o impacto da constituição de agrupamentos e mega agrupamentos de escolas nas dinâmicas do 1.º CEB seria um estudo muito interessante e pertinente a fazer.

Pela negativa, ainda refiro a burocracia exagerada que nos obriga ao preenchimento de documentação, à participação em reuniões (por vezes ocas de conteúdo), à leitura e interpretação de legislação (tantas vezes ortodoxa e confusa), que é publicada em catadupa. Este tempo acaba invariavelmente por ser subtraído à preparação de aulas e ao investimento em momentos de pesquisa e reflexão.

Basicamente, associo os meus momentos de desilusão e desânimo à inconstância e às mudanças sucessivas, por vezes infundadas, associadas ao Sistema Educativo. Porém, a partir do momento em que entro na minha sala de aula e olho para os meus alunos, consigo relegar esses problemas para outro plano, um plano que me leva para outros lugares e para outra vertente da minha cidadania, onde contesto e reclamo pelos meus direitos, pelos direitos da Escola e dos alunos, pelo direito a um Sistema Educativo de qualidade para todos os que nele intervêm. Ainda não me desmotivei nem perdi o gosto pelo que faço. Continuo a acreditar que amar o trabalho que fazemos é fundamental para atingir o objetivo primordial do professor: o sucesso dos seus alunos a nível intelectual e socio afetivo.

CAPÍTULO 3 – Raciocínio Combinatório no Ensino da Matemática.

Neste capítulo apresento o trabalho de investigação realizado no âmbito da resolução de problemas de raciocínio combinatório onde pretendi aprofundar conhecimentos de modo a perceber objetivamente: (i) em que consiste este tipo de raciocínio, (ii) de que forma se manifesta nos alunos e (iii) como pode ser explorado em contextos de ensino e de aprendizagem.

Como a investigação vai debruçar-se sobre o desempenho dos alunos na resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório, para mim faz sentido começar por salientar a importância das tarefas matemáticas, nomeadamente as que envolvem a resolução de problemas, no processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com a literatura consultada e alguma experiência profissional pareceu-me pertinente descrever exemplos de ambientes e contextos de aprendizagem favoráveis ao desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas durante a realização deste tipo de tarefa. Faço ainda, a título de exemplo, uma breve comparação entre o cenário português e o cenário brasileiro no que concerne à abordagem dos programas escolares acerca do raciocínio combinatório.

Resolução de Problemas

De acordo com Vale (2011), para aprender Matemática, os alunos precisam de ser minimamente capazes de compreender conceitos matemáticos, compreender estratégias, procedimentos e utilizá-los, em simultâneo, para resolver uma diversidade de problemas, simples ou complexos, rotineiros ou não. Não se pretende preparar os estudantes para serem matemáticos, mas aprender a ser como um matemático – envolver-se com o conhecimento matemático noutra perspetiva, participar no processo de invenção e descoberta, refinamento dos métodos e das formas de representação, colaborar, duvidar, criticar e ser persistente a resolver problemas (Kapur, 2009 referido em Vale, 2011).

Dentro desta perspetiva situa-se Ponte (2007) quando sugere um ensino e aprendizagem exploratório em que o professor promova condições para que o aluno descubra e construa o seu próprio conhecimento. Neste âmbito surgem as tarefas matemáticas como fator determinante na prática docente. Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) referem que um dos principais mecanismos para promover uma compreensão conceptual da matemática é a utilização de tarefas matemáticas desafiantes que promovam o pensamento, o raciocínio e a resolução de problemas. As discussões geradas a partir destas tarefas proporcionam aos alunos oportunidades para partilhar e clarificar ideias, desenvolver argumentos convincentes sobre o porquê do funcionamento das coisas, desenvolver uma linguagem para exprimir ideias matemáticas e aprender a partir de outras perspetivas.

Doyle (1988) e Vale (2011) defendem que tarefas desafiadoras utilizadas em sala de aula podem ser consideradas como o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos durante o processo de ensino e de aprendizagem da matemática. A partir delas, os alunos devem ser incentivados a encontrar respostas originais e soluções criativas (ver figura 3. 1).

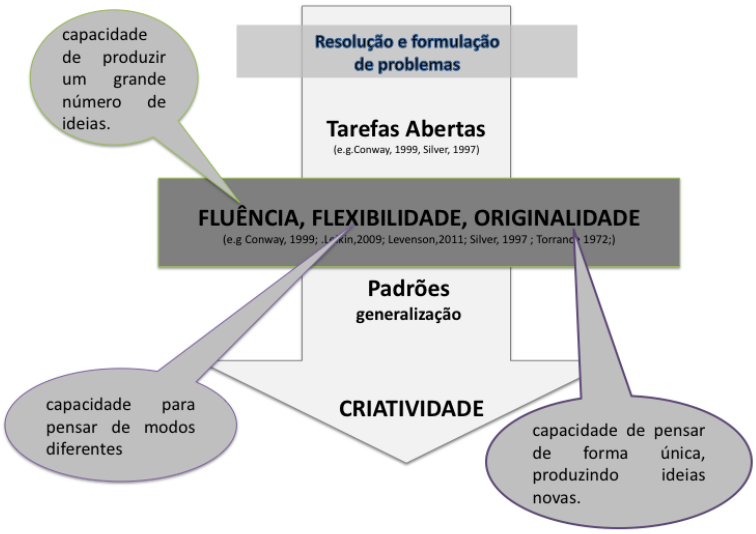


Figura 3.1- Da resolução de problemas à criatividade (Vale & Pimentel,2012)

A seleção e construção das tarefas deve contemplar as suas potencialidades no que concerne à compreensão conceptual da matemática, ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e ao interesse e curiosidade que lhes pode suscitar (Chapman, 2013).

Autores como Aizikovitsh-Udi, Clarke e Kunze (2013, referidos por Veia, Brocado & Ponte, 2014) defendem que na construção de tarefas se devem respeitar características tais como a utilização de situações do quotidiano dos alunos, informações, informação necessária e relevante adequada ao contexto, proporcionar abordagens de vários tipos de raciocínio, serem apresentadas com simplicidade e integrarem alguma forma de avaliação. Uma tarefa matemática pode surgir sob a forma de um problema, um exercício, uma investigação ou um projeto.

Muitos investigadores têm canalizado os seus estudos para a resolução de problemas tal é a sua relevância para a aprendizagem da matemática. A importância dada aos problemas no ensino da Matemática não é recente sendo que o relevo dado a este tipo de tarefa já remonta à Antiguidade. Contudo, são os trabalhos de George Pólya que realçam as suas potencialidades educativas. Para Pólya (2003/1967), a resolução de problemas representa a arte da descoberta, referindo que um aluno se encontra perante um problema matemático quando investiga "conscientemente uma certa ação apropriada que lhe permita encontrar um caminho ou transpor um obstáculo para alcançar um objetivo não atingível de maneira imediata" (Pólya,2003, p. VII). Segundo o mesmo autor, a resolução de um problema passa por quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano, avaliar/ verificar / refletir sobre o trabalho realizado.

Para Kantowski (1977), "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão à qual não pode dar resposta ou uma situação que é incapaz de resolver recorrendo aos conhecimentos imediatamente disponíveis" (p.163). Neste sentido, Ponte (1992) salienta que a necessidade, o interesse e a predisposição dos alunos para procurar a solução são os pré-requisitos para que uma determinada tarefa se considere um problema.

De acordo com Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1983, referido em Magina, 2005), a compreensão de um conceito, por mais simples que seja, não surge de um tipo de situação simples. Da mesma forma, uma situação simples envolve sempre mais do que um conceito. Para Vergnaud, a formação de conceitos está intimamente relacionada com a resolução de problemas, uma vez que é nesta situação, que os alunos atribuem significados aos conceitos, identificam as suas propriedades invariantes e constroem o conhecimento das representações simbólicas que podem utilizar para operar com eles (Barreto & Borba, 2011b).

Deste modo, é necessário que os alunos se envolvam em situações diversas de resolução de problemas para que possam refletir, estabelecer relações e, assim, construírem novos conceitos e aprendizagens. Vale (2011), referindo Leikin (2009), salienta que os problemas — a sua formulação e resolução — são a essência da matemática. Para estes autores, a inovação e a criatividade desempenham um papel importante na resolução de problemas sendo atributos que os alunos podem desenvolver, desde que sejam sujeitos a contextos e oportunidades de aprendizagem adequados.

A resolução de problemas e a heurística deverão ser então um ponto de partida do processo de ensino e de aprendizagem da matemática e não um ponto de chegada sustentado no domínio de algoritmos e técnicas. Dada a sua importância, a resolução de problemas surge como uma atividade central do currículo da Matemática (NCTM, 1991) por promover contextos conducentes à aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como ao desenvolvimento de capacidades de raciocínio e de comunicação matemática. Em Portugal, as mudanças nas políticas educativas têm originado mudanças nas finalidades e nos objetivos do ensino da matemática. Estas mudanças têm-se refletido nas competências associadas à resolução de problemas.

Atualmente, a resolução de problemas ocupa um lugar de destaque nas orientações curriculares de todos os níveis de ensino, desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico ao Ensino Superior. O desenvolvimento das capacidades ao nível da resolução de problemas é, não somente, um objetivo a atingir no contexto das diferentes disciplinas, mas também um conteúdo de aprendizagem de extrema relevância no ensino da matemática.

O Programa de Matemática homologado em 2007 para o ensino básico referia a resolução de problemas como uma atividade poderosa para a consolidação, ampliação e aprofundamento do conhecimento matemático. Os alunos deveriam desenvolver competências que lhes permitissem ser capazes de desenvolver estratégias diversificadas de resolução de problemas, sustentadas na capacidade de identificação de dados, das condicionantes e dos objetivos do problema, a identificação de problemas com informação irrelevante ou dados insuficientes ou sem solução, avaliação da razoabilidade dos resultados (ME, 2007).

Mais recentemente, a homologação e implementação das Metas Curriculares (MEC, 2012) e, posteriormente, do Programa de Matemática (MEC, 2013) para o Ensino

Básico traduzem um pensamento educativo e uma perspetiva pedagógica e didática que contraria a tradição construtivista refletida nas políticas educativas das últimas décadas. Na verdade, segundo o parecer dos autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, o programa homologado em 2013 “não contempla, ou menoriza fortemente, as capacidades matemáticas que o atual programa considera fundamental desenvolver nos alunos para uma aprendizagem com compreensão — a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, e, igualmente, o cálculo mental e a capacidade de lidar com as representações e conexões matemáticas” (Ponte et al., 2013, p.1).

Como pode ler-se na página eletrónica do MEC, o programa de 2013, inserido na Estratégia Global de Desenvolvimento do Currículo Nacional, visa, segundo o gabinete do Ministro da Educação e Ciência, assegurar uma educação de qualidade e alcançar melhores resultados escolares. A sua concretização passa pelo estabelecimento de parâmetros que definem de forma precisa as metas de aprendizagem para cada ciclo, o seu desenvolvimento e progressão por ano de escolaridade, para cada área de conteúdo, disciplina e área disciplinar. A sua implementação surge sustentada em resultados de investigações realizadas, à escala nacional e internacional, sobre padrões de eficácia no desenvolvimento curricular que recomendam este tipo de abordagem.

No Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) em vigor podemos ler o seguinte:

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais.
> Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente. Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados (MEC, 2013, p.5).

Basicamente, enquanto o programa de 2007 pretendia que os alunos gradualmente fossem explorando, compreendendo e aprendendo até chegarem aos conceitos e procedimentos matemáticos, o programa de 2013 pretende que os alunos dominem e memorizem técnicas e definições, começando por aprendê-las e só depois, compreendê-las. Temos assim alunos e professores confrontados a meio do percurso (ciclo de ensino) com duas filosofias de ensino diferentes, onde a segunda implementa alterações propiciadoras de instabilidade relativamente ao trabalho dos professores e às aprendizagens dos alunos desenvolvidas à luz da primeira, em anos anteriores.

De qualquer forma, penso que será unânime a importância da criação de ambientes de sala de aula que encorajem e apoiem os alunos na resolução de problemas. Segundo Veia (1996), tal ambiente alavancará a partilha de raciocínios e abordagens entre colegas e professores, o que tornará o processo de resolução de problemas tão valioso como as soluções dos problemas.

Entre os vários tipos de problema multiplicativos que se podem apresentar aos alunos surgem os problemas de estrutura combinatória sobre os quais debrucei este estudo. Este tipo de problemas implicam o recurso ao raciocínio combinatório associado a um ramo da matemática denominado Análise Combinatória, que estuda agrupamentos de objetos a partir de critérios dados.

Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório

> Com a formação das operações combinatórias o indivíduo ganha uma poderosa ferramenta do pensamento que o possibilita ir além do presente concreto (real) e ingressar no domínio do abstrato e do possível (Silva, 2010, p.28).

A combinatória é conhecida como a *arte de contar* e, ainda que tenha tido a sua origem nos jogos de azar, tais como o lançamento de dados ou jogos de cartas, os conhecimentos relacionados com este ramo da matemática foram evoluindo tornando-a essencial para outros ramos quer da matemática, quer das outras ciências (Pessoa, 2009).

Generalizando o que referem muitos dos autores que consultei, a combinatória implica a contagem das diferentes formas como um conjunto de objetos pode aparecer organizado ou associado, ou a contagem dos diferentes agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um ou de mais conjuntos. Ainda que as contagens possam ser feitas uma a uma, podem contudo ser agilizadas com o recurso a diversificadas estratégias ou fórmulas que posteriormente passarei e identificar.

Segundo Pessoa (2009), “na combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades através de uma ação sistemática, seja pelo uso de uma fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender a requisitos como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem” (p. 72). No domínio da combinatória surgem os problemas de produto cartesiano, arranjo, permuta e combinação, cuja resolução implica o recurso ao raciocínio combinatório. Mas o que é o raciocínio combinatório?

Ao longo da revisão da literatura pude constatar que, ainda que o raciocínio combinatório seja referenciado e explorado por inúmeros autores, nenhum deles o definiu conceptualmente. Todavia, é sistematicamente referido como uma forma de pensar inata ao ser humano, que pode ser desenvolvida desde que sejam proporcionados contextos e procedimentos que envolvam este tipo de raciocínio.

Estes contextos e procedimentos estão associados com “o raciocínio hipotético-dedutivo (característica do pensamento formal) que opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias “ (Inhelder & Piaget, 1955 citados por Navarro-Pelayo, Bataner & Godino, 1996, p.1), ou seja, que nos permite encontrar a realidade (o possível) dentro do contexto das hipóteses através do método da combinatória (Inhelder & Piaget, 1955 referido por Pessoa, 2009). Segundo Navarro-Pelayo, Bataner e Godino (1996), o indivíduo socorre-se deste método de forma espontânea ou intencional quando, para resolver um problema, isola todas as variáveis de uma determinada situação e determina todas as possíveis combinações dessas variáveis.

Segundo Pessoa e Silva (2013) “o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos ou de outras áreas do conhecimento” (p. 90). Assim sendo, pode afirmar-se que sendo um raciocínio que nos permite esgotar todas as possibilidades deferentes de uma combinação de variáveis, pode ser útil não só para a matemática, mas também para outras áreas como a biologia, a química, entre outras, ou mesmo, para muitas situações simples do nosso quotidiano como a elaboração de ementas, equipas desportivas, grupos de trabalho ou na decisão de acessórios e peças de vestuário a usar.

Para Inhelder e Piaget (1958, referidos por Silva & Spinillo, 2011), o raciocínio combinatório está associado ao pensamento lógico-matemático e desempenha um papel importante no desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (1991) salienta sua importância na compreensão de conceitos matemáticos. De acordo com Pessoa e Borba (2009), sendo considerado um domínio específico da matemática, o raciocínio combinatório pode ser definido como um sistema operacional, permitindo a quantificação de conjuntos ou de subconjuntos de objetos ou de situações selecionados a partir de um conjunto dado.

Merayo et al (1991), referidos por Pessoa e Borba (2009), expõem que, numa primeira aprendizagem matemática, a criança conta os elementos de diferentes conjuntos, ou seja, ela enumera elementos para determinar quantos são. Todavia, Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) defendem que, no âmbito da combinatória, é necessário superar a simples ideia de enumeração de elementos de um conjunto para, tendo como base o raciocínio multiplicativo, passar à contagem de grupos de objetos.

Isto significa que os alunos poderão saber quantos elementos ou quantos acontecimentos são possíveis numa determinada situação sem terem que recorrer obrigatoriamente à contagem um a um. Problemas com esta estrutura tornam-se motivadores para os alunos por serem fáceis de compreender. São problemas interessantes e desafiadores pois, o facto de não conterem a solução no enunciado, implica que os alunos tenham que definir um plano de ação ou estratégias para encontrarem a solução.

Lima e Borba (2010), Borba (2010), Barreto e Borba (2011a) advertem para necessidade da construção do raciocínio combinatório que promova o desenvolvimento de uma maneira sistemática para a organização de dados e escolha de conjuntos ou subconjuntos em diversas situações no dia-a-dia dos alunos. Para estas autoras a aquisição deste tipo de competências constitui um instrumento importante na formação da cidadania.

Ainda que o raciocínio combinatório somente se observe em estágios avançados de desenvolvimento cognitivo, por volta dos 15 anos, em que o indivíduo já é capaz de aplicar o raciocínio lógico e distinguir entre o real e o possível (Borba, 2010), a conceção de alguns princípios de raciocínio combinatório podem iniciar-se antes do ensino escolar, observando-se evidências de conhecimentos intuitivos desde a educação infantil, como destacam Matias, Santos e Pessoa (2011). Estas investigadoras afirmam que, já na Educação Pré-escolar, as crianças possuem um raciocínio combinatório que pode ser melhor desenvolvido se forem estimulados em ambiente escolar e extraescolar, quando se propõem situações-problema que envolvam regras de um jogo, escolha de adereços, formações de pares, combinações de sumos e sandes (combinatória e probabilidades).

O desenvolvimento do raciocínio combinatório, logo nos anos iniciais de escolaridade, para além de despertar a curiosidade do aluno para o tema, permite o desenvolvimento de competências ao nível da generalização de situações matemáticas, bem como a aprendizagem de diversos conceitos matemáticos, ou de outras áreas do conhecimento, que poderão ser úteis aos alunos ao longo da vida.

Navarro-Pelayo, Bataner & Godino, (1996) salientam que este tipo de raciocínio desempenha um papel importante para o êxito dos principais objetivos curriculares na medida em que os problemas de combinatória estão associados ao desenvolvimento de processos de enumeração, formulação de conjeturas, de generalização. Para além disso promovem o pensamento sistemático. Segundo English (2005), estas competências são essenciais ao processo de aprendizagem dos alunos em todos os níveis de ensino.

Neste sentido, o desenvolvimento precoce deste tipo de raciocínio funcionará como uma mais-valia para a futura compreensão e aprendizagem de conceitos e fórmulas uma vez que, segundo Vergnaud (1986, referido por Borba, 2010), certos conceitos desenvolvem-se durante um período de tempo maior que outros pelo que deverão ser trabalhados ao longo de todo o percurso escolar dos alunos. Pereira, Gago e Guerreiro (2010) referem que

> a estruturação do pensamento matemático dos alunos deve realizar-se preferencialmente a partir de diversas atividades que resultam do entendimento da Matemática como a ciência dos padrões. Nesse sentido, o trabalho matemático começa por um olhar de identificação, seguindo-se-lhe uma estratégia de estruturação da realidade com vista à criação de padrões abstratos representativos da realidade (p. 3).

Com base neste paradigma, estes autores realizaram uma experiência em contexto de sala de aula, onde aplicaram um conjunto de tarefas, no âmbito do pensamento combinatório. Finalizada a experiência concluíram que:

a sucessão de tarefas eventualmente promotoras do pensamento combinatório revelou um acréscimo significativo no sentido matemático da organização e apresentação de dados. Os alunos foram progressivamente estruturando e justificando as soluções apresentadas numa perspetiva de padrão organizacional das combinações de cores, sabores ou localização de elementos” (Pereira, Gago & Guerreiro, 2010, p.6).

Por sua vez, a Comissão de Normas para a Matemática Escolar realça a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório salientando que a exploração do mesmo deve fazer parte do currículo uma vez que, a partir dele os alunos desenvolvem o pensamento sistemático, a capacidade para enumerar, identificar procedimentos e processos, bem como, estabelecer conjeturas e generalizações (English, 2005).

Contudo, o atual Programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Básico apenas contempla, integrados no domínio Números e Operações, os seguintes conteúdos e objetivos de ensino (tabela 3.1):

Conteúdos	**Objetivos**
Multiplicação	Efetuar multiplicações no sentido aditivo e combinatório. Efetuar uma dada multiplicação fixando dois conjuntos disjuntos e contando o número de pares que se podem formar com um elemento de cada, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.
Resolução de problemas	Resolver problemas até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.

Tabela 3. 1- Conteúdos e objetivos de Aprendizagem

Poder-se-á, eventualmente, concluir a partir da observação da tabela acima, que o raciocínio combinatório somente aparece associado a uma lógica de problemas de estrutura multiplicativa, abrangendo apenas problemas do tipo produto cartesiano e não referindo explicitamente situações associadas a outros grupos de problemas de combinatória como os de permuta, arranjo e combinação que mais à frente passarei a definir e exemplificar. Todavia é possível encontrar alguns exemplos destes tipos de problemas nos manuais direcionados para o 3.º e 4.º anos de escolaridade.

Apesar da reconhecida importância para o desenvolvimento de competências matemáticas, a combinatória é um conteúdo pouco considerado nas orientações curriculares e nos programas portugueses ao nível do 1.ºciclo do ensino básico.

Consequentemente, observa-se algum desconhecimento científico e didático por parte dos professores, o que leva a que possa ser pouco ou mal explorado junto dos alunos.

Noutros países, como por exemplo no Brasil, o cenário é um pouco diferente pois existem inúmeros trabalhos de investigação, alguns financiados pelo estado, canalizados para a pesquisa sobre o tema e para experiências de ensino no âmbito da combinatória e do raciocínio combinatório. Paralelamente ou consequentemente o ensino da combinatória tem lugar de destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) onde aparece incluído no bloco programático Tratamento da Informação, fazendo parte da lista de blocos programáticos a lecionar, com o objetivo de "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (PCN Brasil, 1997, p. 40).

Os autores deste documento acreditam que este tipo de problemas tem um papel relevante na criação de oportunidades onde os alunos, a partir do currículo da Matemática, possam interagir com situações associadas ao seu quotidiano. Salientam contudo, que não se pretende que os alunos aprendam definições e fórmulas. Pretende-se sim, que desenvolvam formas de raciocínio e procedimentos, num ambiente onde interajam com seus pares de forma cooperativa, trabalhando em conjunto na procura de soluções para problemas propostos.

De salientar o investimento na produção de materiais multimédia de apoio à aprendizagem como por exemplo os disponibilizados pela Rede Internacional Virtual de Educação - RIVED, com vista a fomentar contextos de aprendizagem mais apelativos onde se promove o desenvolvimento do raciocínio combinatório com recurso às novas tecnologias. Ainda assim, numa análise sobre estudos recentes acerca do raciocínio combinatório, as autoras Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) concluem que estes estudos indicam

> a necessidade de maior investimento na formação de professores quanto ao ensino e a aprendizagem de conceitos combinatórios, de modo a possibilitar que conhecimentos intuitivos de alunos sejam identificados e explorados no ensino formal da Análise Combinatória e não apenas a exploração de fórmulas (p.11).

As mesmas autoras referem que os manuais e outros recursos didáticos devem ampliar os tipos de problemas abordados tendo o cuidado que os mesmos envolvam situações significativas. Paralelamente salientam que é necessário que os professores recebam orientações que permitam uma melhor exploração das situações propostas nos manuais didáticos. Autores como Moro e Soares (2006), Amaro (2001) e Pessoa e Borba, (2009) apontam dificuldades apresentadas pelos alunos no que concerne ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. Nesher (1988, referido por Nunes & Bryant, 1997) defende que o problema de estrutura combinatória mais difícil para as crianças é o de produto cartesiano.

As dificuldades prendem-se com o facto de estes problemas envolverem dois conjuntos básicos que darão origem a um terceiro conjunto formado pela combinação de cada elemento de um dos conjuntos básicos com cada elemento do outro conjunto (Pessoa & Borba, 2008), ou seja, um esquema de correspondência um para muitos e não o esquema mais comum de correspondência um para um. Também porque, na maioria das vezes, este tipo de associação não está explícito nos enunciados orais ou escritos cabendo aos alunos descobrir que, para cada elemento do conjunto básico há uma série de transformações que se prendem com a quantidade de elementos do outro conjunto básico.

Conforme referem Silva e Spinillo (2011), as dificuldades observam-se nos diferentes níveis e modalidades de ensino e prendem-se com o facto de os alunos não conseguirem identificar todas as possibilidades enumerando todas as combinações possíveis a realizar na correspondência *um para muitos*. Identificaram-se ainda dificuldades no estabelecimento de procedimentos sistemáticos para a formação de combinações (n x n), na justificação de respostas, na utilização de representações adequadas e no reconhecimento da importância, ou não, da ordem de elementos na formação dos conjuntos (Costa, 2003 referido por Pessoa & Borba, 2009).

Muito embora se possam apontar dificuldades na resolução de problemas de estrutura combinatória, estudos realizados por Carraher, Carraher e Schliemann (1988) referem a possibilidade dos alunos conseguirem resolver, recorrendo a métodos informais, ainda que não dominem conceitos e procedimentos escolares. Na verdade, segundo os mesmos autores, muitas pesquisas realizadas demonstram que as crianças e os adolescentes recorrem a este tipo de métodos, aplicando estratégias de resolução corretas que nem sempre são valorizadas e aproveitados pela escola.

Também English (2005) e Mekhmandarov (2000) demonstraram, a partir de estudos realizados sobre produto cartesiano, que as crianças são capazes de representar e analisar os produtos de dois conjuntos mobilizando estratégias de resolução eficazes que envolvem a correspondência um para muitos. Segundo Mekhmandarov (2000), a eficácia destas estratégias sustentou-se no facto de terem sido capazes de compreender aquilo que o investigador identificou como sendo alguns dos princípios básicos do raciocínio combinatório: (i) que uma combinação é formada por um e apenas um elemento pertencente a cada um dos conjuntos básicos, (ii), que cada combinação é um elemento do novo conjunto produto, (iii) que todos os elementos que compõem os conjuntos básicos podem aparecer em várias combinações e (iv) que cada combinação só pode aparecer uma única vez no conjunto produto.

A combinatória permite-nos a quantificação de conjuntos de elementos selecionados a partir de um ou de mais conjuntos, entendendo-se o raciocínio combinatório, como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da simples enumeração de elementos de um conjunto. Nos problemas que envolvem o raciocínio combinatório contam-se grupos de possibilidades através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmulas, seja pelo desenvolvimento de outras estratégias que atendam aos requisitos deste tipo de problemas (constituição de agrupamentos ou determinação de possibilidades), até serem esgotadas todas as combinações possíveis.

Com base em classificações elaboradas por Nunes & Bryant, (1997) e Vergnaud (1991), Pessoa e Borba (2008) subdividem os problemas que envolvem o Raciocínio Combinatório em problemas de produto cartesiano, permuta, arranjo e combinação. Os problemas do tipo produto cartesiano podem ser resolvidos a partir do princípio multiplicativo, enquanto os problemas do tipo permuta, arranjo e combinação assentam em resoluções mais complexas.

Ainda que estudos desenvolvidos por autores como Silva (2010) possam considerar que os problemas de produto cartesiano sejam os mais simples de compreender e resolver, um estudo realizado por Pessoa e Santos (2012), identificou os problemas de combinação como sendo os de mais fácil resolução para as crianças, seguidos dos problemas de produto cartesiano, permuta e arranjo.

Relativamente aos problemas de permuta e arranjo, as últimas autoras salientam que os mesmos exigem que o trabalho realizado, ao nível do tratamento de dados, seja muito organizado. Por esta razão recomendam que os professores devem investir num trabalho regular, ao nível da estruturação do pensamento e do registo de dados, que permita que os alunos desenvolvam estratégias que assegurem o registo de todas as possibilidades de combinação. Penso que, neste contexto, áreas da Matemática como a Organização e Tratamento de Dados podem ser uma mais-valia, uma vez que podem auxiliar os alunos no que concerne à organização dos dados.

A tabela seguinte define cada um dos tipos de problema de combinatória, exemplifica possíveis enunciados para explorar com os alunos e apresenta uma fórmula de resolução (tabela 3. 2):

Produto Cartesiano	
Definição	Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os seus elementos são combinados para formar um novo conjunto. A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. **A ordem dos elementos não é importante uma vez que não gera novas possibilidades.**
Exemplos	a) Na nossa escola vai haver uma festa de Carnaval. Para se mascararem, os alunos podem escolher 3 modelos de chapéus e 2 modelos de óculos. De quantas maneiras se podem mascarar, usando um chapéu e uns óculos de cada vez?
	b) Na festa de aniversário da Carolina os convidados podem escolher gelados de 3 sabores (morango, chocolate ou nata), com 3 coberturas (caramelo, chantilly ou m&m) servidos em 2 tipos de base (cone ou copo). De quantas formas diferentes poderão os convidados escolher o seu gelado sendo que só podem usar um sabor, uma cobertura e uma base da cada vez?
Fórmula	n *x* m ou n *x* m *x* p No caso do problema a aplica-se da seguinte forma: 3 *x* 2 = 6 No caso do problema b aplica-se da seguinte forma: 3 x 3 *x* 2 = 18
Permuta	
Definição	O que caracteriza estes problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar a permuta. **A ordem é importante uma vez que gera novas possibilidades**.
Exemplos	a) Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderemos formar usando as letras da palavra ROMA?
	b) Na sua sala, a Ana tem três molduras com as fotografias dos seus filhos: Mara, Tomás e Júlia. De quantas formas diferentes as poderá ela arrumar de modo a que elas fiquem lado a lado?

Fórmula	$P_n = n!$ No caso do problema a aplica-se da seguinte forma: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 No caso do problema b aplica-se da seguinte forma: 3 x 2 x 1 = 6
Arranjo	
Definição	O que caracteriza estes problemas é que de um conjunto maior são organizados, subconjuntos somente com alguns dos elementos do conjunto maior. **A ordem dos elementos é importante pois gera novas possibilidades.**
Exemplos	a) Na nossa turma, a final da "Batalha da Leitura" vai ser disputada por três alunos: Ana, Rodrigo e Inês. De quantas maneiras diferentes poderemos encontrar o 1ºe o 2º lugar?
	b) Para delegado(a) da turma da Mariana candidataram-se 3 pessoas (Jéssica, Carolina e Pedro). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos (as), o delegado(a) e o Subdelegado(a)?
Fórmula	$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ No caso do problema a aplica-se da seguinte forma: $\frac{3\ x\ 2}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$
Combinação	
Definição	O que caracteriza estes problemas é que de um conjunto maior são organizados, subconjuntos somente com alguns elementos do conjunto maior. **A ordem dos elementos não é importante pois não gera novas possibilidades.**
Exemplos	a) Quatro amigos, o João, o Mauro, o Diogo e o Daniel foram acampar e montaram as suas tendas, em círculo, junto a um rio. Depois, fizeram um caminho a ligar cada uma das tendas às outras. Quantos caminhos diferentes tiveram que fazer?
	b) Três amigos encontraram-se à entrada de um parque e apertaram-se com um aperto de mão. Quantos apertos de mão se deram?
Fórmula	$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,.(n-p)!}$ No caso do problema a aplica-se da seguinte forma: $\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}{(2 \text{ x } 1) \text{ x } (2 \text{ x } 1)} = \frac{24}{2 \text{ x } 2} = \frac{24}{4} = 6$

Tabela 3.2- Tipologia dos problemas de estrutura combinatória

Como é óbvio, estas definições, fórmulas e algoritmos complexos, aplicam-se a alunos mais velhos e não a crianças no início da escolaridade. Contudo, a aquisição destes processos mais sofisticados de resolução de problemas, deve ser preparada desde tenra idade. Maher e Yankelewitz (2010) realçam a necessidade de convidar os alunos a usarem representações diversas para expressarem suas ideias e formas de raciocínio, uma vez que as representações dão sentido aos problemas e são uma ferramenta potente para comunicar raciocínios e formas de pensar. Estas autoras salientam ainda que, a partir das representações, os alunos "podem encontrar padrões, serem sistemáticos, abstraírem e generalizarem resultados" (p.18).

Ainda que não encontrem uma resposta ou solução imediata (algoritmos, regras ou fórmulas) para resolverem problemas de combinatória, os alunos devem ser incentivados a tentar encontrar uma heurística informal (diferentes formas de representação que poderão passar por fazer desenhos, códigos de cores, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, ou outras que surjam). Vergnaud (1991) destaca o papel das representações simbólicas na aprendizagem de conceitos afirmando que estas têm a vantagem de ajudar na resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta exige várias etapas (Azevedo, 2013).

Contudo, é importante salientar que, ainda que inicialmente possam explorar livremente várias possibilidades, posteriormente devem ser orientados para esquemas mais elaborados e organizados para tratamento da informação e registo das várias combinações.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, os *esquemas* são o cerne do conhecimento matemático. Para este autor, a aprendizagem de conceitos faz-se com o recurso à resolução de problemas a partir do reconhecimento de relações e propriedades que se mantêm constantes – invariáveis. O reconhecimento das invariáveis é crucial para chegarem à generalização do esquema (Azevedo, 2013).

Para que tudo isto seja possível, os professores devem investir na promoção de condições propícias fomentando, conforme sugerem Vale e Pimentel (2012),

> ambientes de aprendizagem onde sejam dadas oportunidades aos alunos para resolverem problemas de matemática utilizando estratégias de resolução diversificadas e para formular os seus próprios problemas a partir de situações que lhes sejam apresentadas, seja em contextos matemáticos ou não matemáticos, pode envolvê-los em explorações matematicamente ricas, aumentar a sua motivação e encorajá-los a investigar, tomar decisões, generalizar, procurar padrões e conexões, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas (p. 348).

Resumindo, (i) o raciocínio combinatório é uma ferramenta importante ao nível das competências matemáticas, (ii) a generalidade dos alunos revela dificuldades associadas ao raciocínio combinatório e (iii) este tipo de raciocínio pode ser desenvolvido pelas crianças desde muito cedo, desde que sejam promovidos contextos de aprendizagem favoráveis. Justifico assim a pertinência da experiência de aprendizagem desenvolvida com os alunos.

CAPÍTULO 4 – Metodologia da Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas gerais desta investigação no que concerne à sua tipologia, natureza e abordagem, aos seus participantes, aos instrumentos de recolha de dados e aos processos usados na respetiva análise de conteúdo.

Opções Metodológicas

> Iniciar a observação com interesse pedagógico e científico implica a organização de um projeto de observação, pois nenhum projeto de investigação, ou de atividade geral, poderá realizar-se sem o conhecimento da realidade a que se refere" (Estrela, 1992, p. 27).

A temática do presente estudo em educação matemática enquadra-se na área da Combinatória sendo, na sua essência, um estudo sobre o raciocínio combinatório. O objeto em análise são as estratégias utilizadas pelos alunos de uma turma do 1ºano de escolaridade do 1.º ciclo do ensino básico quando desafiados a resolver problemas matemáticos de estrutura combinatória - produto cartesiano, arranjo, permuta e combinação. É um estudo interpretativo continuado, desenvolvido em contexto de sala de aula com o objetivo de aprendizagem.

Relativamente aos procedimentos este estudo enquadra o estudo de caso, numa abordagem qualitativa de natureza interpretativa e descritiva, onde assumirei o papel de observadora participante que pretende identificar, compreender e descrever eventos associados a uma turma em particular, neste caso, a turma que leciono.

Tal como Ponte (1994) refere, um estudo de caso é

> uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse." (p. 2).

Para Guba & Lincoln (referido por Coutinho & Chaves, 2002), o objetivo de um estudo de caso é relatar os factos tal como sucederam, descrever situações ou factos, proporcionar conhecimento acerca do fenómeno estudado e comprovar ou contrastar efeitos e relações presentes no caso. Ainda que autores como Fidel (1992, referido por Coutinho & Chaves, 2002) defendam que num estudo de caso o objetivo seja compreender o evento em estudo e ao mesmo tempo, desenvolver teorias mais genéricas a respeito do fenómeno observado, não é minha intenção fazer generalizações.

O meu objetivo, tal como defendido por Merriam (1988) e Yin (1989), será tentar descrever e interpretar uma situação concreta e única com o objetivo de a conhecer de forma mais detalhada e profunda. A investigação assentará numa observação participante dada a minha presença continuada na sala de aula, participando no quotidiano da turma enquanto professora titular.

Este estatuto permite-me recolher dados num contexto de proximidade e confiança com os alunos (Bogdan & Biklen, 1994) uma vez que a minha presença não interfere nem altera o normal funcionamento das aulas no que concerne às suas postura e às interações. Stenhouse (1981) caracteriza este tipo de observador como sendo, entre outras coisas, alguém que se envolve, partilhando hábitos e costumes, no contexto que está a observar, mas que também, e por isso, deve manter um distanciamento relativamente a esse mesmo contexto.

Contudo, por mais que esteja consciente da necessidade deste distanciamento, a interpretação que farei dos dados carregará sempre uma conotação subjetiva resultante das minhas vivências e valores. No entanto, apesar deste risco, Yin (1989) e Merriam, (1988), destacam as excelentes oportunidades que este papel pode proporcionar na recolha de dados. Para estes autores, a oportunidade de estar inserido no contexto, de poder explorar, sugerir e interagir com os alunos de acordo com o que vai observando, possibilita uma recolha de dados mais detalhada.

Pretendo assumir o papel de observadora participante, num contexto natural e familiar aos alunos por forma a conseguir descrever, interpretar e explicar (Yin, 1989) as estratégias que utilizam para resolver problemas de estrutura combinatória. A dicotomia envolvimento/distanciamento só poderá ser colmatada a partir de momentos de reflexão e análise crítica face ao que observa.

Incontornavelmente, tal como apontado por Ponte (1994), acabarei por investigar as minhas práticas porque neste estudo, para além de observadora participante, sou professora titular da turma onde o mesmo se desenrola. Fundamento assim, a opção por uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, centrada nos alunos e na descrição/interpretação/explicitação da diversidade de processos que estes utilizam para resolver problemas de estrutura combinatória.

Com o objetivo de iniciar a recolha de dados comecei por pedir autorização à Direção da Escola (anexo 1) para a realização do estudo. A autorização foi concedida com a indicação que a Coordenadora de Estabelecimento iria assegurar a logística necessária (espaço e horário). Posteriormente, pedi aos encarregados de educação autorização (anexo 2) para realizar o estudo com os seus educandos informando-os que o mesmo implicaria gravações das aulas em áudio e vídeo, como forma de recolha de dados. Para além disso asseverei-lhes o anonimato dos alunos e o uso das imagens exclusivamente para a investigação. Saliente-se que os encarregados de educação já haviam tomado conhecimento deste estudo numa reunião realizada no início do ano letivo pelo que concordaram com a realização do mesmo concedendo, por escrito, autorização para a realização das gravações.

Recolha de Dados

Sendo um estudo centrado nas perspetivas e nos desempenhos dos participantes é essencial compreender e interpretar o significado dado às ações. Para Bogdan e Biklen (1994) os dados são de extrema importância para ilustrar e sustentar resultados escritos, ricos em pormenores descritivos e incluem transcrições de entrevistas, produções dos alunos e notas de campo.

Assim sendo, a recolha de dados visou a recolha de informação com o objetivo de captar “o sentido dos atos e acontecimentos observados” (Guerreiro, 2011, p. 121) e concretizou-se partir de três fontes distintas - observação das aulas de matemática, entrevistas aos alunos e análise documental (produções dos alunos) uma vez que, tal como defendido por Merriam (1988), a utilização conjunta de fontes de recolha de dados assegura uma maior fiabilidade da informação recolhida.

A observação das aulas baseou-se no trabalho realizado ao longo de seis aulas em que os alunos se dedicaram à resolução de problemas matemáticos de estrutura combinatórias do tipo produto cartesiano, arranjo, permuta e combinação. As aulas segmentaram-se em três momentos distintos (o primeiro e o terceiro numa vertente mais didática que o segundo), divididos por 2 dias da semana, conforme se circunstancia na tabela 4.1.

Calendarização	Momentos da Aula	Cenário da Intervenção
5^{as} feira (entre as 11:00 e as 12:00)	Apresentação do problema	Despertar a atenção e o interesse dos alunos para a tarefa e explicar o que se pretende que façam.
	Trabalho autónomo	Os alunos organizam livremente o seu trabalho testando estratégias e fazendo escolhas relativamente às formas de representação dos resultados (resolução do problema). A professora circula pelos pares de trabalho prestando apoio no esclarecimento de questões e de dúvidas. Paralelamente vai colocando questões com o objetivo de aferir e estimular raciocínios. Simultaneamente vai selecionando as resoluções mais interessantes do ponto de vista do objetivo da pesquisa, das entrevistas, da promoção da discussão coletiva e da realização das aprendizagens previstas.
6^{as} feira (entre as 14:15 e as 14:55)	Entrevistas aos alunos	Entrevista a alguns pares de trabalho selecionados tendo em conta critérios associados ao grau de consecução da tarefa e as estratégias de resolução utilizadas.
6^{as} feira (entre as 15:00 e as 16:00)	Discussão e Sistematização	Momento dedicado às interações comunicativas entre os alunos sob orientação da professora; destinado às explicitações e argumentações, institucionalização de ideias e aprendizagens significativas.

Tabela 4.1 – Breve descrição dos diferentes momentos da aula

Normalmente não costumo utilizar o protocolo descrito optando por segmentar as aulas de Matemática de natureza exploratória em quatro momentos distintos: (1) apresentação da tarefa; (2) resolução da tarefa; (3) apresentação das produções dos alunos e (4) discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens. No caso deste estudo, em conjunto com o professor orientador do mesmo, optámos por experimentar a estrutura referida na tabela anterior (tabela 4.1), realizando as entrevistas após o trabalho autónomo e, só depois, proceder à apresentação coletiva das produções dos alunos e à discussão/sistematização das aprendizagens. Com esta opção pretendeu-se evitar que os alunos se influenciassem, *a priori*, relativamente às estratégias a utilizar e, *a posteriori*, na explicitação das estratégias utilizadas. Saliente-se contudo que, durante a fase de trabalho autónomo, não se excluiu o questionamento quando o mesmo se considerou oportuno e pertinente.

A escolha dos dias da semana (proximidade) teve como intenção aproximar os momentos destinados à resolução da tarefa e à entrevista para que não se observasse um hiato temporal prejudicial à recolha dos dados, ou seja, teve como intenção assegurar que os alunos ainda se recordavam de questões relacionados com os seus desempenhos e opções. Esta calendarização relacionou-se ainda com requisitos funcionais (horários da turma e atividades da escola) e de logística (espaços e equipamentos). Ainda que pudesse ter recorrido a materiais mais facilitadores, tais como jogos, ou às tecnologias de informação (software educativo), decidi-me pelos tradicionais papel e lápis por forma a não proporcionar focos de distração.

A opção pelo trabalho a pares ou em grupos de três prendeu-se com a intenção de fomentar a troca de informações e de ideias, entre os alunos, e por pensar que este contexto é potenciador de maiores probabilidades de sucesso na resolução dos problemas. A constituição dos pares/grupos no que concerne à composição não foi fixa proporcionando a hipótese dos alunos trabalharem com colegas diferentes de uma tarefa para outra.

A este propósito Silva (2014), mencionando autores como Mayo (2007), Martinho e Ponte (2005), Moreira e Fonseca (2009) e Ponte et al. (2007), refere que o trabalho colaborativo potencia o sucesso dos alunos, reduz desigualdades e proporciona a discussão e a partilha de estratégias e ideias. Estes autores defendem que num contexto de trabalho a pares ou em grupo fomentam-se condições mais adequadas à reflexão, à compreensão e clarificação de significados, permitindo que os alunos possam resolver tarefas mais exigentes que, individualmente, teriam mais dificuldades ou talvez nem conseguissem resolver. Mayo (2007) realça que este tipo de estratégia de trabalho permite um maior número de interações entre os alunos das quais poderão resultar ideias e estratégias mais criativas que contribuem para o desenvolvimento progressivo do conhecimento e da comunicação matemática.

As produções dos alunos constituíram uma excelente base para perceber o grau de interpretação dos enunciados dos problemas e proceder à identificação e caracterização das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos mesmos. Para a interpretação destas produções, foram valorizadas as características das estratégias mobilizadas e a identificação de evidências do raciocínio combinatório.

As entrevistas tentaram seguir os pilares do método clínico e tiveram como finalidades recolher informações relativamente ao significado dado pelos alunos ao trabalho realizado, neste caso, conseguir captar a perspetiva dos alunos relativamente às estratégias aplicadas (Merriem, 1988), à forma como pensaram e como agiram face às tarefas propostas (Guimarães, 2003). O momento da entrevista reveste-se de especial importância pois é à volta do significado que os sujeitos dão à ação que gira este estudo. Recorde-se que se pretende perceber que tipo de estratégias mobilizam os alunos para resolver problemas matemáticos de estrutura combinatória.

Optei pela entrevista não estruturada por considerar que este tipo de entrevista poderá ser o mais adequado à faixa etária dos alunos envolvidos. Tal com referem Costa et al. (2004), a entrevista não estruturada permite conversas mais informais e flexíveis, facilitadoras do aprofundamento de questões e da adaptação às características e reações dos entrevistados. Para além disso, este tipo de entrevista, pode conduzir ao esclarecimento de dúvidas dos alunos e à sistematização de aprendizagens pois, tal como refere Mekhmandarov (2000) "ao longo de uma entrevista a maioria das crianças são capazes (…) de realizar aprendizagens com alguma orientação" (p. 300).

As entrevistas, com uma duração média de 15 minutos, acompanharam a calendarização das aulas observadas e foram realizadas num gabinete situado num espaço recatado da escola. A escolha deste espaço visou assegurar um ambiente calmo e adequado onde não se observassem interrupções ou ruídos prejudiciais às gravações.

Quer as entrevistas quer os momentos das aulas destinados à sistematização/discussão tiveram como finalidade, tal como indicado por Yin (1989), dar resposta a questões do tipo "como" e porquê" relativamente à heurística (Merriam, 1988) mobilizada pelos alunos. Neste contexto foram colocadas questões abertas ("Porquê?", "Concordas?", "Explica?", "Podia ser feito de outra forma?") que desafiaram os alunos a investigar, a explicar a forma como resolveram os problemas, a discutir resultados e realizar conexões (Silva, 2014). Toda a informação recolhida foi sendo registada em áudio, vídeo, fotografia e por escrito (notas de campo) para garantir um registo fiel e completo dos acontecimentos.

Análise e Tratamento de Dados

Todo o trabalho realizado na análise dos dados foi fundamental para a caracterização das estratégias utilizadas pelos alunos em cada um dos problemas, para selecionar os alunos a entrevistar, para delinear o rumo a dar às entrevistas e, finalmente, para a produção de um texto interpretativo que dê resposta à questão que deu origem a este estudo. Conforme referem Bogdan e Biklen (1994), "a análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta de aspectos importantes do que deve ser apreendido e a decisão do que vai se transmitido aos outros” (p. 225).

A análise de dados foi ocorrendo paralelamente à sua recolha mas, a dado momento, foi necessário proceder a um processo mais organizado e metódico que se traduziu na seleção, agrupamento e categorização dos materiais recolhidos para poder proceder à respetiva exploração, comparação e interpretação. Por conseguinte, fui construindo um portefólio digital onde criei pastas para cada um dos problemas (aula). Por sua vez, cada pasta subdividiu-se em subpastas onde fui arquivando os originais das folhas de trabalho fornecidas aos alunos, registos fotográficos (produções dos alunos nas folhas de trabalho e no quadro) e registos áudio e vídeo (interações durante as aulas e entrevistas).

Posteriormente procedi a um trabalho de redução visando selecionar os dados mais significativos e relevantes para a compreensão e interpretação do objeto em estudo, enquanto procedia à eliminação dos que se traduziam em irrelevâncias ou repetições. Desta forma selecionaram-se os dados mais relevantes e esclarecedores do ponto de vista do tema em estudo. Relativamente aos registos áudio e vídeo foram feitos apontamentos escritos com o objetivo de facilitar a localização dos excertos úteis ao estudo. As transcrições desses excertos aconteceram quando constituíram intervenções pertinentes para a justificação, clarificação e enquadramento do processo de apresentação dos dados.

A utilização, ao longo do texto interpretativo destas transcrições, bem como de imagens das estratégias de resolução dos alunos, far-se-á acompanhar de informações relativas à sua “localização temporal e contextual na investigação” (Guerreiro, 2011, p. 128). Para uma melhor entendimento e estruturação do texto interpretativo, optámos por analisar e interpretar as estratégias associadas à resolução do problema de produto cartesiano separadamente das estratégias utilizadas nos problemas de permuta, arranjo e combinação. Esta opção, deve-se ao facto do primeiro apresentar uma estrutura diferente dos restantes pois, enquanto produto cartesiano envolve dois ou mais conjuntos disjuntos que dão origem a vários subconjuntos (conjunto produto); os restantes têm em comum, o facto de envolverem somente um conjunto inicial a partir do qual se formam vários subconjuntos.

Por conseguinte, a análise dos dados, será apresentada em dois momentos distintos: um primeiro momento destinado aos problemas de produto cartesiano e um segundo momento destinado aos problemas de permuta arranjo e combinação. No que concerne aos problemas de produto cartesiano a caracterização das estratégias de resolução apoiou-se nos princípios básicos que regem o raciocínio combinatório apontados por Mehkmandarov (2000).

Participantes

Caracterização da escola. A escola EBI/JI José Carlos da Maia (ou escola Nº7) foi inaugurada em 2010 e fica localizada na cidade de Olhão, junto à Urbanização Turolhão. Até ao ano de 2012 esteve integrada no Agrupamento de Escola José Carlos da Maia. Contudo, acabou por ser agregada ao Agrupamento Professor Paula Nogueira formando com esta, o Mega agrupamento de Escola Professor Paula Nogueira.

O edifício escolar moderno e amplo, composto por dois pisos com salas de aulas destinadas ao ensino pré-escolar e ao 1º ciclo do ensino básico, gabinetes de trabalho, sala de professores, polivalente, biblioteca, refeitório, cozinha, balneários, enfermaria, instalações sanitárias (três para pessoas com deficiência), arrecadações, sala de funcionários. No espaço exterior existem três zonas de recreio, todos eles descobertos, e uma portaria. Num dos espaços exteriores existe um parque infantil com equipamento para trepar e escorregar. O espaço em volta da escola é vedado (muro e barras de ferro) e o acesso ao edifício faz-se por três portões, dois deles com acesso para deficientes. O terceiro portão permite o acesso ao espaço onde funciona o 2.º e o 3.º ciclos favorecendo as atividades conjuntas e a articulação curricular.

O corpo docente desta escola é formado por 21 professores (titulares de turma, apoio educativo, educação especial, coordenadora da escola e bibliotecária) sendo que, para além destes elementos, contamos com a colaboração de oito assistentes operacionais. A escola é frequentada por cerca da 400 alunos e o número de alunos por turma varia entre os 20 e os 26 alunos. Estes alunos pertencem maioritariamente à zona de residência da escola. A comunidade escolar apresenta grande heterogeneidade relativamente ao estrato socioeconómico que está distribuído entre a classe baixa e as classes média e média alta. Ultimamente, devido à conjuntura económica dos pais (desemprego e baixa de salários), tem-se observado um agravamento da situação financeira das famílias.

Caracterização da turma. O presente estudo foi desenvolvido numa turma de 1.º ano do ensino básico constituída por 26 alunos com idades compreendidas entre os 6 e os 7 anos, quinze do sexo masculino e onze do sexo feminino. Na sua globalidade a turma apresenta resultados bastante satisfatórios no que concerne ao aproveitamento. Todavia, destacam-se 2 alunos com resultados muito fracos, fruto das problemáticas que apresentam ao nível cognitivo. Na sua globalidade, são alunos assíduos, pontuais, manifestam curiosidade e gosto pela escola e pelo processo de ensino e aprendizagem.

Os problemas mais significativos verificaram-se na aquisição e aplicação de regras sociais o que se traduziu em posturas e comportamentos pouco adequados e condicionadores de um bom ambiente de aprendizagem. Não era de todo um contexto favorável à implementação de determinadas estratégias de trabalho, nomeadamente o trabalho a pares ou em grupo, situação que condicionou o início deste estudo no que diz respeito ao trabalho de campo. Ao longo do 1.º período letivo, fruto de um trabalho conjunto entre professora, pais e alunos, os problemas comportamentais foram sendo ultrapassados permitindo iniciar o trabalho de campo que se desenvolveu entre os meses de fevereiro e maio.

No início do ano letivo os pais responderam a um inquérito que visou a recolha de dados para a realização da caracterização da turma. Com base neste inquérito foi possível perceber, entre outras coisas, que a maioria dos alunos é proveniente de famílias pertencentes à classe média; que as habilitações literárias dos pais se situam essencialmente aos níveis do 3.º ciclo ou do ensino secundário e que, ainda que o maior número de pais se encontre a trabalhar, há um número significativo de pais desempregados. Durante o ano verifiquei que o acompanhamento académico prestado aos educandos foi satisfatório mas, infelizmente, houve casos de crianças que não usufruíram de qualquer acompanhamento deste tipo. Talvez as que mais necessitavam de ajuda.

CAPÍTULO 5 – Estudo Empírico

Neste capítulo descrevo a intervenção pedagógica que permitiu observar e interpretar as estratégias utilizadas pelos alunos e em simultâneo, promover contextos de aprendizagem conducentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. A análise e interpretação dos dados sustenta-se em estudos sobre raciocínio combinatório, realizados por Mekhmandarov (2000) e por Pessoa (2009).

Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica envolveu seis tarefas que implicaram a resolução de quatro tipos de problemas de estrutura combinatória – produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Em pares ou em pequenos grupos (três elementos) os alunos resolveram seis problemas distribuídos da seguinte forma: dois de produto cartesiano, um de permuta, dois de arranjo e um de combinação.

A elaboração dos enunciados dos problemas foi feita a partir da adaptação de problemas encontrados em manuais escolares e ao longo da revisão da literatura existente sobre o tema em estudo. A adaptação dos problemas teve em conta aspetos como a faixa etária e o ano de escolaridade dos alunos, não tendo sido descurada a importância da ligação às suas vivências e quotidiano. Apesar de prever que possa funcionar como mecanismo facilitador do estabelecimento das combinações a serem feitas pelos alunos, optei por apresentar o enunciado do problema acompanhado de uma representação gráfica dos elementos de cada conjunto. Esta opção prende-se com os aspetos acima referidos e com o facto de os alunos estarem a ser confrontados, pela primeira vez, com este tipo de problemas. Neste seguimento, acautelou-se que as situações apresentadas não envolvessem um número elevado de possibilidades de combinação.

Na tabela abaixo (tabela 5.1) apresento os problemas propostos aos alunos, localizando-os cronologicamente ao longo da etapa de trabalho de campo (entre os meses de fevereiro e maio).

Data de realização do problema	Tipologia do problema	Enunciado do problema
Tarefa 1a) 19/02/2015 e 20//02/2015	Produto Cartesiano	**Festa de Carnaval** Na nossa escola vai haver uma festa de Carnaval. Para se mascararem, os alunos podem escolher 3 modelos de chapéus e 2 modelos de óculos. De quantas maneiras se podem mascarar, usando um chapéu e uns óculos de cada vez?
Tarefa 1b) 26/02/2015 e 27/02/2015	Produto Cartesiano (extensão)	**Festa de Carnaval** E se desta vez, além de poderem escolher 3 modelos de chapéus e 2 modelos de óculos, puderem escolher ainda 2 modelos de sapatos. De quantas maneiras se podem mascarar, usando agora um chapéu, uns óculos e um modelo de sapatos de cada vez?
Tarefa 2 12/03/2015 e 13/03/2015	Permuta	**As Fotografias da Ana** Na sua sala, a Ana tem três molduras com as fotografias dos seus filhos: Mara, Tomás e Júlia. De quantas formas diferentes as poderá ela arrumar de modo a que elas fiquem lado a lado?
Tarefa 3a) 23/04/2015 e 24/04/2015	Arranjo	**Batalha de Livros** Na nossa turma, a final da "Batalha da Leitura" vai ser disputada por três alunos: Ana, Rodrigo e Inês. De quantas maneiras diferentes poderemos encontrar o 1ºe o 2º lugar?
Tarefa 3b) 29/04/2015 e 30/04/2015	Arranjo (extensão)	**Batalha de Livros** A turma da sala ao lado também participou na "Batalha de Livros". A final vai ser disputada por quatro alunos: o Filipe, a Celina, o Júlio e a Paula. De quantas maneiras diferentes podemos encontrar o 1ºe o 2º lugar?
Tarefa 4) 21/05/2015 e 22/05/2015	Combinação	**Vamos Acampar** Quatro amigos, o João, o Mauro, o Diogo e o Daniel foram acampar e montaram as suas tendas, em círculo, junto a um rio. Depois, fizeram um caminho a ligar cada uma das tendas às outras. Quantos caminhos diferentes tiveram que fazer?

Tabela 5.1 – Calendarização e características das tarefas

Para os problemas de produto cartesiano e arranjo, foram propostas duas situações cuja diferença (do primeiro para o segundo problema) residiu no aumento do grau de dificuldade alavancado pelo número de conjuntos ou de elementos (variáveis) dos conjuntos envolvidos. Desta forma pretende-se verificar se, na passagem de uma situação mais fácil para uma situação mais difícil, os alunos são capazes de refletir sobre o que fizeram, transferindo, para uma nova situação, procedimentos e conhecimentos adquiridos anteriormente. Basicamente, pretendi aferir capacidades, no que concerne à generalização de ideias e procedimentos.

Um a um, os problemas foram sendo apresentados numa folha de registo que continha o enunciado e um espaço destinado à resolução. Tendo em conta a idade e o facto de os alunos estarem a iniciar aprendizagens no que concerne à capacidade leitora, houve necessidade de auxiliá-los na leitura e interpretação dos primeiros problemas apresentados. Gradualmente, esta realidade foi dando lugar a uma leitura mais autónoma, em que eram os alunos a fazer a leitura e a interpretação do enunciado escrito, colocando em seguida, as suas dúvidas.

Numa dinâmica de trabalho em grupo ou a pares, os alunos resolveram os problemas da maneira que consideram adequada, uma vez que a solução podia ser encontrada de diversas forma. Com base na análise do enunciado, na discussão entre parceiros e na tentativa e erro, foram construindo as suas próprias resoluções com vista à formação de todas as combinações possíveis. Durante a resolução dos problemas e, posteriormente, através das entrevistas e dos momentos destinados à discussão e sistematização coletiva, fui solicitando que os alunos justificassem e explicassem as suas opções e estratégias.

Estratégias dos Alunos e Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

De seguida, descrevo como foi desenvolvido o trabalho na turma, dando especial enfoque à exploração dos momentos e das interações que permitiram identificar e interpretar a situação de diagnóstico e descrever a experiência de ensino. Assim sendo procedo à identificação e interpretação das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas matemáticos de estrutura combinatória: produto cartesiano, permuta, arranjo e combinação. Tendo em conta a origem das variáveis dos quatro tipos de problemas combinatórios optei por tratar os problemas de produto cartesiano separadamente dos problemas de permuta, arranjo e combinação.

Produto Cartesiano

FESTA DE CARNAVAL!

Na nossa escola vai haver uma festa de Carnaval. Para se mascararem os alunos podem escolher 3 modelos de chapéus e 2 modelos de óculos.

De quantas maneiras diferentes se podem mascarar, usando uns chapéus e uns óculos de cada vez?

Figura 5. 1 Enunciado do problema do tipo produto cartesiano

Os problemas de produto cartesiano podem envolver dois ou mais conjuntos básicos cujos elementos se combinam entre si para formar subconjuntos. Este problema envolvia dois conjuntos básicos (conjunto dos chapéus e conjunto dos óculos) e os alunos teriam que combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro conjunto para formar, neste caso, seis combinações (subconjuntos) diferentes.

Os alunos foram organizados em grupo de três elementos, constituídos de acordo com os lugares que ocupavam na sala, e iniciei a aula explicando à turma que iriam resolver um problema matemático, que cada grupo o poderia resolver da maneira que achasse melhor e que posteriormente me deveriam explicar como fizeram, justificando a estratégia adotada. De seguida distribui a folha de trabalho pelos vários grupos e iniciámos o processo de leitura e interpretação do enunciado do problema por forma a despertar o interesse dos alunos e levá-los a apropriarem-se dos objetivos da mesma:

> Professora: - Então, o que é que sabemos?
> Guilherme: - Há três modelos de chapéus e 2 de óculos!
> Professora: - E para que servem esses três modelos de chapéus e os dois modelos de óculos?
> Alunos: - Vai haver uma festa de Carnaval...temos que nos mascarar … há três chapéus...e dois óculos.
> Professora: - Pronto isso é o que já sabemos. Agora…O que queremos saber?
> Rodrigo: - Quantos podemos fazer com esse chapéus e os óculos … Como é que nos podemos mascarar.
> Professora: - Queremos saber de quantas maneiras diferentes nos podemos mascarar com os chapéus e os óculos. Mas há uma condição! Qual é?
> Diogo: - Uma de cada vez.
> Professora: - O que é que queres dizer com isso Diogo?
> Diogo S: - Só podemos usar uma coisa de cada vez.
> Professora. Concordam? Só podemos usar uma coisa de cada vez?
> Alguns alunos: Não! Podemos usar duas!
> Professora: Quais são?
> Inês: Os chapéus.
> Professora: Podemos usar dois chapéus de cada vez?
> Rodrigo e Guilherme: Não, temos que usar um chapéu e uns óculos
> (…)
> Professora: Agora já descobrimos o que já sabemos e já descobrimos o que queremos saber…falta saber como é que vão fazer. Como é que vão descobrir de quantas formas diferentes se podem mascarar?
>
> [18/02/2015_ apresentação da tarefa_ tarefa 1a)]

Os alunos foram incentivados a representarem as suas ideias e raciocínios sem que lhes fosse dado qualquer exemplo de combinação a representar ou de estratégia a aplicar. «Isto é como se fosse um desafio…Cada grupo vai pensar para tentar acertar», «Como é que pode ser? (…) Vá lá, mostrem-me de quantas maneiras diferentes se conseguem mascarar». Uma das minhas preocupações foi a de não fornecer qualquer pista de modo a não influenciar os alunos relativamente aos processos a utilizar.

Num período de tempo predefinido (45 minutos), os alunos organizaram o seu trabalho representando na folha do problema a estratégia que consideraram mais adequada. Enquanto isso, fui circulando pelos grupos de trabalho prestando apoio no esclarecimento de questões e de dúvidas. Paralelamente fui colocando questões com o objetivo de aferir e estimular raciocínios: «Como é que fizeram?»; «O que descobriram?»; «O que é que isto quer dizer?»; «Formaram todas as combinações possíveis?»; «Será que só existem estas maneiras de se mascararem?»; «Poderiam ter feito de outra maneira?»; «Este chapéu só pode ser usado com estes óculos?».

Saliente-se, para um melhor enquadramento terminológico, que os alunos utilizaram os termos *maneiras* e *forma* como sinónimos do termo *combinações*. A observação, durante o tempo destinado ao trabalho autónomo, permitiu verificar que todos recorreram a representações iconográficas, baseadas em símbolos não convencionais ou desenhos, para comunicarem a forma como pensaram.

Assim sendo, pode dizer-se que para estes alunos, os esquemas de linhas e os desenhos serviram "para interpretar e dar sentido à situação problemática" (Canavarro & Pinto, 2012, p.67) pois foi através destes esquemas que representaram as relações existentes, fazendo corresponder os elementos de cada conjunto inicial entre si, para formar pares (conjunto produto). Neste caso, os alunos que recorreram aos esquemas de linhas, foram melhor sucedidos do que aqueles que recorreram aos desenhos. Penso que por detrás desta situação está o facto de os desenhos levarem mais tempo a realizar e de exigirem mais atenção e maior organização no que concerne à representação de todas as combinações possíveis. A aptidão para desenhar com base nos elementos modelo também pode ter condicionado a tomada de decisão. Após análise das produções dos alunos destaca-se o seguinte:

a) Ainda que nem todos os grupos tenham sido bem-sucedidos, todos adotaram um plano/estratégia para encontrar todas as combinações possíveis;

b) Nenhum dos grupos recorreu à adição ou à subtração dos números envolvidos o que talvez queira dizer que os alunos perceberam que a estratégia de resolução não passava por *fazer contas*;

c) Na sua grande maioria, os grupos de trabalho optaram por representar as combinações (subconjuntos ou conjuntos produto), estabelecendo ligações (esquemas de linhas) de cores diferentes entre os elementos do conjunto dos chapéus e os elementos do conjunto dos óculos para formarem outros conjuntos compostos por um chapéu e uns óculos;

d) Parte significativa dos alunos manifestou dificuldade em compreender que a ordem dos elementos não gerava novas possibilidades;

e) A maioria compreendeu que cada subconjunto deve incluir um elemento de cada um dos conjuntos básicos;

f) Que um subconjunto não pode ser formado por dois elementos do mesmo conjunto inicial;

g) Ainda que alguns grupos tenham tentado seguir um padrão heurístico, não se observou uma utilização sistemática e exaustiva desse padrão. Os alunos não foram capazes de fixar um chapéu, combiná-lo de todas as formas possíveis com os óculos, e só depois passar para o outro chapéu;

h) Uma parte significativa dos grupos teve dificuldade em explicitar oralmente o raciocínio seguido.

As estratégias encontradas pelos alunos passaram por representar as relações entre os elementos dos dois conjuntos (combinações) recorrendo a linhas de ligação ou a desenhos:

Figura 5. 2 - Estratégia dos alunos Tomás G., Gustavo e Mª Rita

Este grupo (figura 5.2) optou por representar a partir de um esquema de linhas de união. A resposta apresentada foi que era possível formar 4 pares diferentes, o que não corresponde ao resultado correto. A estratégia utilizada não se consubstanciou numa representação adequada pois não se verifica o esgotamento de todas as combinações possíveis que, no caso deste problema, eram seis pares diferentes.

O padrão observado foi o de formarem pares fixos, não tendo percebido que cada chapéu podia originar dois pares, ou seja, depois de formarem um par acharam que já não o podiam separar:

Professora: - Como é que podes usar o chapéu vermelho?
Gustavo: - É só aqui com este (aponta para os óculos das flores).
Gustavo: - E este aqui com este (desliza o dedo ligando o chapéu de bobo aos óculos das estrelas).
Professora: - Só os podem usar assim?
Tomás: - Sim!

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa 1a)]

Apesar de terem revelado uma aplicação confusa da estratégia adotada, há evidências de terem aflorado uma ação combinatória quando ligam um dos elementos do conjunto dos chapéus (chapéu azul) a um par de óculos (flores) e depois a outro (estrelas). Neste caso, podem ter percebido que podiam formar pares (correspondência um para muitos). Aparentemente também consideram que a ordem dos elementos originava pares distintos. Contudo, também se pode colocar a hipótese de estarem a estabelecer ligações de forma aleatória, trabalhando cada um para o seu lado e por isso, repetindo combinações:

Gustavo: - Eu já pus este com este!
Tomás: - Mas eu também já tinha posto esse!

Com o intuito de pretender aferir acerca do "como" e do "porquê" associados às estratégias utilizadas e às dificuldades manifestadas, optei por selecionar este grupo para a entrevista. Esta opção também decorreu da intenção de intervir pedagogicamente e a entrevista podia proporcionar um momento de orientação propício à aprendizagem:

Professora: - Então e também podemos combinar ao contrário?
Tomás G.: - Não.
Professora: - É que ligaram o chapéu das bolinhas com os óculos das estrelas e depois os óculos das estrelas com o chapéu das bolinhas. São duas combinações diferentes? Concordam com isto?
Tomás G.: - Eu não…isso foi ela!
Mª Rita: - Eu concordo!
Professora: - Concordas? Então imagina lá que pões o chapéu das bolinhas na cabeça e os óculos das estrelas na cara ou os óculos das estrelas

na cara e o chapéu das bolinhas na cabeça. São maneiras de te mascarares diferentes?

Gustavo: Ah…é a mesma coisa…é só uma maneira.

[20/02/2015_ entrevista_ tarefa1a)]

Apesar de terem assinalado uma combinação entre dois chapéus, rapidamente a identificaram como uma solução incorreta:

Professora: - Podem usar dois chapéus ao mesmo tempo?

Tomás: Ah, Ah…pois não, está mal. Foi o Gustavo!

Professora: - Como é que tínhamos que usar?

Gustavo: - (aborrecido) Era um chapéu com uns óculos… (riscando a combinação).

[20/02/2015_ entrevista_ tarefa1a)]

Um outro grupo (figura 5.3) optou por desenhar caras, com chapéu e óculos, obedecendo a um esquema que iniciaram com alguma organização que depois abandonaram.

Figura 5.3 - Estratégia dos alunos Mara, Diogo Sousa e Diogo da Branca

Ainda que tenham apresentado combinações em excesso, evidenciaram perceber que cada par não podia incluir elementos do mesmo conjunto, e que cada par teria que incluir um elemento de cada um dos conjuntos básicos:

Professora: - Como é que pensaram?

Diogo: - Cada máscara é com um chapéu e uns óculos?

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa1a)]

A estratégia utilizada aponta para o surgimento da correspondência um para muitos, ou seja, demonstra que os alunos perceberam que cada chapéu pode ser combinado com mais do que um par de óculos:

Professora: - E este chapéu só pode ser usado com estes óculos?
Mara: - Não, também pode ser usado com estes.
Professora: - Então cada chapéu pode ser usado de quantas maneiras?
Alunos: - Com estes óculos e com estes óculos…de duas.

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa1a)]

Julguei que estes alunos estavam seguros na estratégia que estavam a seguir contudo, após análise do trabalho final, percebi que não tinham conseguido chegar ao resultado correto. O erro residiu no facto de não terem percebido que a ordem dos elementos (chapéu /óculos ou óculos/chapéu) não era importante pois não gerava novas possibilidades. Assim sendo excederam os resultados repetindo combinações.

No momento destinado à discussão coletiva, estes alunos foram confrontados com as suas estratégias de resolução de problemas:

Professora: - Vocês já tinham usado o chapéu das bolinhas?
Alunos: - Sim.
Professora: - Quantas vezes?
Alunos: - Duas.
Professora: - E como é que o usaram?
Diogo S.: - Com os óculos das flores e com os óculos das estrelas.
Professora: - Então e este (apontando para uma repetição chapéu com bolinhas/óculos com flores)? …Ainda não tinham usado os das bolinhas (chapéu) com os das flores (óculos)?
(os alunos não respondem)
Professora: - É diferente? É uma combinação diferente?
Alunos: - Sim.

[20/02/2015_ discussão_ tarefa1a)]

Nesta altura considerei importante e pertinente solicitar a participação do grande grupo no sentido de identificarem o raciocínio seguido pelos seus colegas e os possíveis erros de compreensão:

Professora: - Eles usaram o chapéu das bolinhas quantas vezes?
Alguns alunos: - Quatro.
Professora: - Se só havia dois óculos expliquem lá como é que fizeram quatro combinações?
(…)
Professora: - Oh meninos como é que acham que eles fizeram?
Gui: - Só podem ter feito igual!
Professora: - O que é que fizeram igual?
Rodrigo S.: - (adiantando-se na resposta) Os dois óculos iguais…Ser duas vezes os óculos das flores com o chapéu das bolinhas e duas vezes os óculos das estrelas com o chapéu das bolinhas.

Professora: - Explica lá melhor.
Rodrigo S.: - Eles repetiram.
Professora: - Acham que o Rodrigo tem razão? Eles repetiram?
Alunos: - Sim!
Professora: - Pôr na cabeça o chapéu das bolinhas e na cara os óculos das flores é diferente de pôr na cara os óculos das flores e na cabeça o chapéu das bolinhas?
Alunos: - Não, é a mesma coisa.

[20/02/2015_ discussão_ tarefa1a)]

Figura 5. 4 - Estratégia dos alunos Lara, Lucas e Rodrigo B

Esta estratégia (Figura 5. 4) revela que alunos perceberam que cada elemento do conjunto inicial pode aparecer em mais do que um par. Realizaram a correspondência um para muitos de forma sistemática, recorrendo a linhas de ligação de cores diferentes para esgotarem todas as combinações possíveis:

Professora:- Já arranjaram uma forma de descobrir? Estão a usar o quê?
Alunos: - Linhas!
Lucas: - Agora vamos usar as cores.
Professora: - Então expliquem-me lá o que é que isto quer dizer? Cada cor…
Alunos: - …é uma forma diferente
Professora: - É uma forma diferente de se mascararem. Então quantas formas diferentes descobriram?
Lara: (Contando e assinalando com o dedo indicador) - Uma…duas (…) são seis diferentes.
Professora: - Serão as únicas…não haverá mais maneira nenhuma? Pensem lá!

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa1a)]

Os alunos voltaram a contar assinalando com X cada par encontrado «Sim, são só seis e não há mais nenhuma». Mais tarde, para reforçar o resultado encontrado, chamam-me para mostrar uma representação dos pares encontrados com base na adição sucessiva:

«Vês, também fizemos assim… são só seis!». [19/02/2015_ trabalho autónomo _ aula observada 1]

A estratégia (figura 5. 5) de raciocínio seguinte foi representada a partir de um esquema de linhas onde se pode perceber a aplicação da correspondência um para muitos:

Figura 5. 5 - Estratégia dos alunos Gui, Inês e Ricardo

Os alunos explicaram o raciocínio seguido da seguinte forma:

Professora: - Descobriram quantas formas diferentes para se mascararem?
Gui: - Eu fiz o azul, ele fez o vermelho e ela o rosa (apontando para os colegas e referindo-se às cores das linhas que cada um usou para representar as diferentes combinações)
Ricardo: - Um chapéu com uns óculos!
Professora: - E cada um de vocês encontrou quantas combinações diferentes?
Gui: - Duas, cada um encontrou duas…Eu duas, ele duas e ela outras duas!
Professora: - E ao todo quantas são?
Alunos: - Seis.

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa1a)]

Posteriormente, por forma a perceberem que poderiam ter-se socorrido de outras estratégias para estabelecer as relações existentes entre os chapéus e os óculos, desafiei os alunos pensarem noutras formas de resolverem o problema:

Professora: - Vocês ligaram com linhas…esta foi a vossa estratégia. Mas agora pensem lá…não haveria outra estratégia?
(…)
Gui: - Eu fazia contas!
Professora: - Contas? Então explica lá como é que fazias essas contas?
Gui: - Fazíamos um chapéu mais uns óculos!
Professora: - Um chapéu mais uns óculos…

Gui: - …sim, é igual a um chapéu e uns óculos…desenhávamos uma cara…
Professora: - Então façam lá isso.

[19/02/2015_ trabalho autónomo _ tarefa1a)]

Neste caso os alunos tentaram conciliar os desenhos com os símbolos matemáticos para representar aquilo que o colega de grupo considerou como sendo uma *igualdade*.

Como se pode concluir a partir da análise da segunda estratégia utilizada por este grupo, a mesma não foi bem-sucedida, revelando alguma desorientação ao longo de uma representação que acabou por ficar incompleta e pouco fiel às características (cor e forma) dos elementos modelo.

Discussão/Sistematização. No momento reservado à discussão e sistematização fui convidando alguns grupos a vir ao quadro para partilharem as suas resoluções pretendendo com isto, que o seu contributo (apresentação e explicação das suas resoluções e procedimentos) orientasse as aprendizagens matemáticas previstas. Neste contexto fomentei a reflexão conjunta alavancada no questionamento, na descrição de procedimentos e na apresentação, ainda que muito rudimentar, de argumentos e razões, tendo como base algumas as produções dos grupos de trabalho.

Pretendi com isto promover a negociação de conceitos matemáticos e o desenvolvimento da comunicação matemática, fatores essenciais à institucionalização de ideias e às aprendizagens significativas. Assim sendo, dando enfoque aos princípios básicos do raciocínio combinatório descritos por Mekhmandarov (2000) passo a descrever algumas das interações comunicativas observadas.

Construindo a perceção que uma combinação é formada por um e apenas um elemento pertencente a cada um dos conjuntos básicos:

Lara: - Mas eles ligaram os chapéus das flores com o chapéu das bolinhas! Isso não tem sentido.
Professora: - Não tem sentido porquê, Lara?
Lara: - Porque as pessoas não vão usar um chapéu e outro chapéu assim (pondo as duas mãos na cabeça).

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

(…)
Inês: - Temos que usar um chapéu e uns óculos de cada vez

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Construindo a perceção que cada combinação é um elemento do novo conjunto produto:

Professora: - Então eles ligaram o chapéu vermelho…
Daniel.: - …aos óculos das flores.
Professora: - Então podem usar o chapéu vermelho com os óculos das flores. E já não se pode usar mais o chapéu vermelho?
Alunos: (Abanam a cabeça mostrando que sim).
Professora: - Como?
Lara: - Hã…(refletindo) com os outros óculos.

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Gustavo F: - O chapéu das bolinha com os óculos das flores…é uma (combinação)….depois…
Lucas D.: - …e o chapéu das bolas com os óculos das estrelas…duas…

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Gustavo S.: - A terceira …esta aqui com o das flores
Professora: - Diz lá …não é este aqui para aqui…explica!
Gustavo S.: - Agora o chapéu das três cores vai para a estrela.
Eliana: - …e com o das flores.
Professora: - Já são…
Alunos: - 4

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Professora: - Afinal quantas combinações diferentes podiam ter feito?
Alguns alunos (em uníssono): - Seis!
Professora: - Cada chapéu dá para fazer quantas?
Rodrigo: - Duas
Professora: - Então explica lá.
Rodrigo: - Duas com cada chapéu. Duas, mais duas, mais duas…são seis.

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Construindo a perceção que todos os elementos que compõem os conjuntos básicos podem aparecer em várias combinações:

Rodrigo B.: - O chapéu das flores está com os óculos das flores e o chapéu das três cores também está como os óculos das flores.
Professora: - E não podia? Vem cá (quadro). O que é que tu queres dizer?
Rodrigo B: (aproxima-se do quadro) - Este já estava com este.
Professora: - E não pode estar?
(…)
Professora: - O chapéu das flores está com os óculos das flores…e não podia estar de mais maneira nenhuma?
Alguns alunos (em uníssono): - Podia!

Gui: - Sim, podia estar com os das estrelas.
Professora: - E era uma combinação diferente?
Gui: - Sim!

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Construindo a perceção que cada combinação só pode aparecer uma única vez no conjunto produto:

Rodrigo S.: Os dois óculos iguais…Ser duas vezes os óculos das flores com o chapéu das bolinhas e duas vezes os óculos das estrelas com o chapéu das bolinhas.
Professora: - Explica lá melhor.
Rodrigo S.: - Eles repetiram.

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Ainda que a maioria dos grupos tenha apresentado um resultado correto, nem todos foram capazes de representar o raciocínio seguido de forma organizada ou de explicitar o raciocínio implícito na estratégia adotada. Contudo foi possível identificar casos onde os alunos explicitaram o raciocínio seguido com grande à-vontade e onde a estratégia adotada denotava organização e a tendência para recorrer a uma forma sistemática de organizar o pensamento:

Professora: - As linhas que eles usaram para ligar têm uma coisa diferente. O que é que estas linhas têm de especial?
Inês: - …(interpretando o trabalho dos colegas) Cores!
Lucas: - (explicando) Nós usámos as cores. Cada cor é uma.
Professora: - Reparem cada chapéu tem duas cores e cada cor é uma combinação. Então cada chapéu dá para quantas combinações?
Inês: - Duas!
Professora: - Quais são? Explica lá Inês.
Inês: - A linha azul é o vermelho com os das flores, a linha verde é o vermelho com o das estrelas, a linha rosa é o das cores com o das estrelas, … (explicando corretamente as seis combinações até ao fim).
(…)

Professora: - Tiveram alguma ordem para unir os chapéus ou fizeram à toa?
Lucas D.: - Primeiro fizemos com uns óculos e depois fizemos com outros óculos… depois com o outro chapéu
Professora: - Foram fazendo um chapéu de cada vez?
Lucas D.: - Sim.
Professora: - E quantas combinações diferentes encontraram?
Eliana. - Seis!

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Se numa primeira fase da discussão pretendi o confronto de ideias e a validação, ou não, de estratégias, no segundo momento pretendi conduzir os alunos à descoberta de outras estratégias. A sistematização de conhecimentos foi ocorrendo ao longo das interações culminando num momento que se destinou a verificar se tinha havido mudanças na postura dos alunos face à resolução do problema explorado: «Se tornassem a fazer este problema outra vez faziam da mesma maneira?». (Entretanto tinha ampliado todos os elementos dos conjuntos e tinha-os colado no quadro por forma a permitir que toda a turma os visualizasse bem):

Professora: - Alguém fazia diferente?
Tomás N.: - Eu ia ligar primeiro este chapéu com os óculos e depois é que ia para outro chapéu (representa no quadro setas, relacionando um chapéu de cada vez aos dois modelos de óculos) (figura 5. 6).

Figura 5.6 - Estratégia do Tomás N.

(…)
Daniel: (Surpreendido) - Oooh!
Professora: - O que é que ele fez diferente? (aguardei que observassem e refletissem) Ele fez tudo por uma…
Tomás G.: - …ordem. Fez todos os chapéus com uns óculos e depois com os outros óculos.
Professora: - Temos que usar uma estratégia ordenada…seguir uma estratégia organizada.

[20/02/2015_ discussão _ tarefa1a)]

Seguidamente fui explorando com os alunos outras estratégias (Figura 5. 7) possíveis na resolução deste tipo de problemas. Através desta exploração, e recorrendo a novos exemplos, pretendi que se fossem apoderando de formas mais estruturadas de representar raciocínios e ideias.

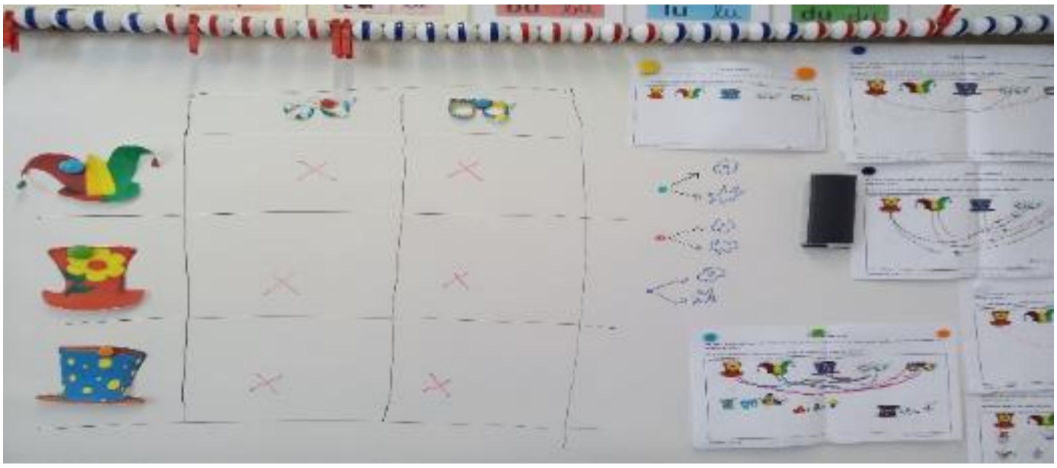


Figura 5. 7 - Outras estratégias de resolução para produto cartesiano

No final desta aula os alunos evidenciaram ter interiorizado que a resolução do problema podia passar pelo recurso a outras estratégias: «Podemos usar setas», «Eu vou usar códigos de cores, uma cor para cada chapéu», «Podemos pôr uma bolinha com uma seta e no fim da seta punha uma flor (aludindo aos efeitos decorativos dos óculos)», «Podemos usar códigos com flores», «…com desenhos», «Podemos usar uma tabela».

Por outro lado aparentemente ficou claro que deveriam estabelecer relações entre os elementos de cada conjunto seguindo uma ordem e isolando um de cada vez: «Primeiro fazia um chapéu com os óculos das flores e depois com os óculos das estrelas». Saliente-se que foi explorada a relação nos dois sentidos, de forma a perceberem que quer combinassem os chapéus com os óculos, quer combinassem os óculos com os chapéus, o resultado seria sempre seis combinações. Neste contexto considerei importante levá-los a descobrir que cada chapéu gerava duas combinações diferentes mas cada par de óculos gerava três. Objetivando aprendizagens com significado, esta situação foi provada a partir da sua concretização no quadro, com recurso à manipulação dos modelos de chapéus e óculos ampliados.

Também se aflorou o cálculo multiplicativo (figura 5. 8) decorrente da adição sucessiva das combinações associadas aos elementos dos dois conjuntos (chapéus e óculos): «Cada chapéu dá para duas combinações então são duas, mais duas, mais duas…», «São seis», respondeu um dos alunos que já antes tinha comunicado o raciocínio desta forma. Promovi em seguida a construção da possibilidade de podermos dizer o mesmo de outra forma: «Se são duas, mais duas, mais duas…são quantas vezes duas?».

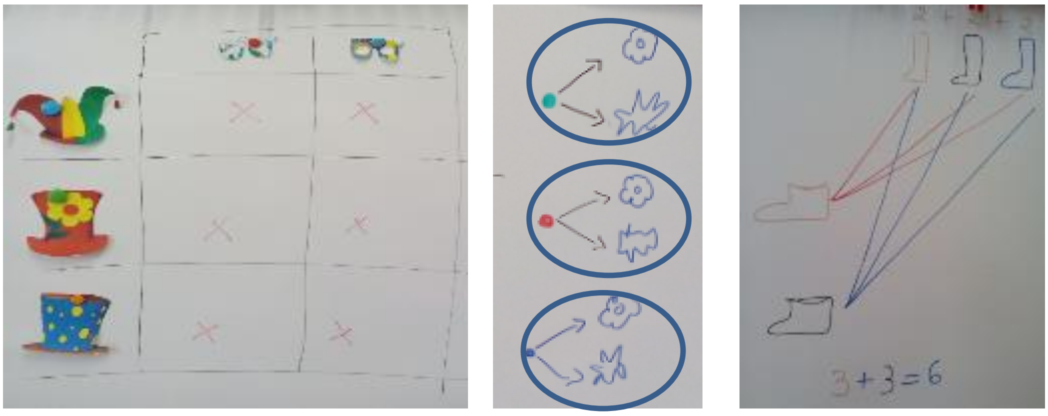


Figura 5. 8 – Sentido aditivo e multiplicativo

Produto Cartesiano (extensão). A extensão do problema de produto cartesiano (figura 5. 9) prendeu-se com a intenção de avaliar as noções adquiridas a partir das situações associadas à resolução do problema anterior (interações professora/ alunos e alunos/alunos).

FESTA DE CARNAVAL!

E se desta vez, além de poderem escolher 3 modelos de chapéus e 2 modelos de óculos, puderem escolher ainda 2 modelos de sapatos.

De quantas maneiras se podem mascarar, usando agora um chapéu, uns óculos e um modelo de sapatos de cada vez?

Figura 5. 9 - Enunciado da extensão do problema de produto cartesiano

Desta vez os alunos tinham que combinar elementos a partir de 3 conjuntos básicos e a intenção era verificar se tinha havido alguma evolução nas aprendizagens, nomeadamente no que concerne às estratégias utilizadas, à comunicação matemática, à capacidade de organização das apresentações. Também tinha uma leve esperança que alguns alunos pudessem evidenciar sinais de aproximação à sistematização, ou seja, que revelassem capacidade de organização no que concerne à representação dos elementos do conjunto produto.

A folha do problema foi distribuída pelos alunos que desta vez estavam a trabalhar a pares [Sofia: «Desta vez temos três chapéus, dois óculos e 2 sapatos»]. Confirmei o que a aluna disse e acrescentei que deveriam representar todas as combinações diferentes possíveis e que para tal deveriam tentar ser organizados: «Devem encontrar uma estratégia que vos ajude a não esquecer nenhuma combinação». Seguidamente sugeri que recordassem alguns aspetos do trabalho realizado na aula do problema anterior: «Porquê que alguns alunos não conseguiram descobrir a resposta certa?», «Vocês ficaram a conhecer outras estratégias» ou «Agora já sabem mais coisas!».

A maioria dos pares de trabalho voltou a usar os esquemas de linhas e os desenhos para representar simbolicamente o raciocínio seguido, denotando uma possível opção por não sair da *zona de conforto* ou apostando numa estratégia que foi validada como correta na resolução do problema anterior. Ainda que não se tenha verificado em todos os alunos da mesma maneira, observou-se um aperfeiçoamento do desempenho dos alunos no que concerne às técnicas utilizadas nos esquemas de linhas tendo sido esta a única estratégia que produziu resultados corretos, com todas as combinações possíveis a serem representadas. A maioria recorreu a cores distintas para representar as várias combinações:

> Ana Rita: - Consegui contar porque vi as cores a sair daqui (figura 5. 10).
> Tomás N. – Fizemos uma cor para cada combinação.
>
> [27/02/2015_ entrevistas_ tarefa1b)

Figura 5. 10 - Estratégia da Ana Rita e da Mª Rita - Produto cartesiano (extensão)

Na aula anterior, mais concretamente no momento que foi destinado à discussão/sistematização de conhecimentos, exploraram-se exemplos de outras estratégias de resolução. Com base nesses exemplos houve grupos que decidiram resolver o problema com recurso a uma tabela. Contudo, esta opção acabou por ser abandonada uma vez que não conseguiram estruturar, relacionar e quantificar eficazmente as variáveis envolvidas (figura 5. 11).

Figura 5. 11- Estratégias tabela de dupla entrada - Produto cartesiano (extensão)

As estratégias de resolução com recurso a desenhos também não produziram resultados corretos. Ainda que alguns pares tenham chegado ao resultado correto (esquemas de linhas coloridas), de um modo geral manifestaram muitas dificuldades face a este problema, não tendo conseguido esgotar todas as possibilidades possíveis. Os alunos interpretaram corretamente os objetivos implícitos no enunciado mas não foram capazes de mobilizar uma estratégia bem-sucedida para chegar ao resultado correto. Muitos deles classificaram-no utilizando expressões como «muito difícil», «mais difícil do que o outro». Nesta altura do trabalho autónomo considerei pertinente e necessário fazer uma pausa para confirmar aquilo que eu já havia previsto: o aumento de variáveis e o consequente aumento do grau de dificuldade do problema tenderia a comprometer o desempenho dos alunos:

Professora: Por que é que estão a achar mais difícil?
Lucas: - Tem mais e assim nós não conseguimos…eu acho que é mais difícil porque tem mais.
Professora: (realçando a terminologia associada) - São mais coisas para combinar, não é?
Tomás N.: - São mais duas coisas para contar e para responder.

[26/02/2015_ trabalho autónomo_ tarefa1b]

Diogo: - Porque tem mais dois pares de sapatos.

[27/02/2015_ entrevista_ tarefa1b]

A maioria da turma considerou a extensão do problema mais difícil no entanto houve pares de trabalho que o consideraram mais fácil:

Sofia: - É mais fácil porque dá para ligar (esquema de linhas).
Professora:- Desta vez já sabias o que tinhas que fazer (aludindo à experiência da aula anterior) …é por isso?
Sofia: - Sim.
(…)
Professora: - Aqueles meninos que estão a achar mais fácil será que é porque já fizeram uma tarefa parecida a semana passada? É porque

fizeram (reportando-me ao problema anterior) e já sabem mais ou menos o que é que hão-de fazer agora?

Alguns alunos (uníssono): - Sim!

Professora: - Mas mesmo assim…aqueles meninos que estão a achar mais fácil ainda não conseguiram encontrar…parece que ainda não conseguiram resolver!?

[26/02/2015_ trabalho autónomo_ tarefa1b]

Este diálogo reflete que os alunos estavam a tentar resolver o problema com recurso a uma estratégia já conhecida e validada, achando com isso a tarefa mais fácil, relevando o facto de não estarem a ser bem-sucedidos na representação do raciocínio.

Após algum tempo, constatando que a maioria dos pares continuava a manifestar dificuldades e não havendo expectativas que chegassem a soluções corretas, optei por fornecer-lhes materiais manipuláveis (anexo 3) representativos de todos os elementos dos três conjuntos. Com isto pretendi facilitar a concretização das combinações, ou seja, levar os alunos a uma representação significativa das várias combinações possíveis, uma representação que os conduzisse ao desenvolvimento da “natureza prática do conceito” (Silva & Spinillo, 2011, p.7) de combinatória.

A partir do momento que puderam manipular as figuras com os vários elementos envolvidos, mostraram maior à-vontade na representação das várias combinações pois agora podiam fazê-las e visualizá-las individualmente. A título de exemplo consideremos os desempenhos do Rodrigo e da Inês (estes alunos acharam o problema fácil) que foram experimentando estratégias sem conseguir sistematizar o raciocínio seguido, só conseguido ter sucesso quando utilizaram os materiais manipuláveis (figura 5. 12).

Figura 5. 12- Estratégias do Rodrigo e da Inês - Produto cartesiano (extensão)

Repare-se que quando os alunos passaram a usufruir do apoio dos materiais manipuláveis, conseguiram estruturar o seu raciocínio e demonstrá-lo de uma forma organizada e sistematizada, levando a crer que conseguiram generalizar noções trabalhadas a partir do problema anterior. Esta situação levou-me a questionar a escolha que fiz para a extensão deste problema.

Com base na reação dos alunos, no seu desempenho e nas suas produções concluí que a extensão do problema deveria ter-se resumido ao aumento do número de elementos dos dois conjuntos básicos e não ao aumento dos conjuntos envolvidos. O facto de haver mais um conjunto (sapatos) para relacionar confundiu o raciocínio dos alunos ao nível dedutivo, comprometendo aprendizagens talvez já realizadas, nomeadamente no que concerne à relação um para muitos e à identificação das invariantes. Para além disso, penso que os alunos, influenciados pelo aspeto visual, interpretaram o problema à semelhança do anterior, considerando, logo à partida, que o resultado seria o mesmo:

> Professora: - Acham que são seis? (aguardando que os alunos reflitam) Então, na semana passada tínhamos três chapéus e dois óculos e encontrámos seis combinações. Esta semana temos mais dois pares de sapatos…será que são na mesma seis combinações?
> Alunos: (dando respostas distintas) – Seis…oito…onze…sete…doze!
>
> [26/02/2015_ trabalho autónomo_ tarefa1b]

> Professora: - O que é que vos está falhar? Será que só podem usar este chapéu com estes óculos e estes sapatos? Pensem lá.
> Gonçalo: - Não, com estes também.
>
> [26/02/2015_ trabalho autónomo_ tarefa1b]

Entre os pares que repetiram a estratégia (esquema de linhas) utilizada no problema anterior, houve um que refletiu um desempenho bastante satisfatório aos níveis da estruturação dos processos e do raciocínio, tendo sido capaz de explicitá-los com bastante clareza e correção:

> Professora: - Foi mais fácil fazer a outra tarefa ou esta?
> Tomás G. e Diogo S: - A outra.
> Professora: - Esta parece um bocadinho mais confusa não é? Que estratégia é que vocês utilizaram para não ficar tão confuso…para poderem distinguir as combinações?
> Tomás: - Cores
> Professora: - Quantas combinações descobriram
> Tomás G. e Diogo S: - Doze
> Professora: - Quando começaram a unir como é que fizeram?
> Diogo S.: - Fizemos um chapéu de cada vez.
> Professora: - E por que é que fizeram um chapéu de cada vez?
> Diogo: - Assim não me esquecia de nenhuma.

[27/02/2015_ entrevista_ tarefa1b]

Esta explicação reflete o processo utilizado na folha de trabalho (figura 5. 13) e demonstra que estes alunos recorreram a uma forma sistemática para representar o raciocínio seguido, estabelecendo as combinações a partir de um chapéu de cada vez e utilizando uma cor distinta para cada chapéu, o que indica uma forma já organizada de resolução. Contudo este desempenho não se verificou na maioria dos alunos, talvez devido ao aumento do grau de dificuldade do problema.

Figura 5. 13- Estratégia do Diogo e do Tomás - Produto cartesiano (extensão)

De destacar o papel dos materiais manipuláveis como facilitadores da representação, permitindo que alguns dos pares que não tinham obtido sucesso por via dos desenhos e dos esquemas de linhas, conseguissem agora esgotar todas as hipóteses possíveis. Ainda com o recurso a materiais manipuláveis (ampliados) representei as diferentes combinações entre os chapéus, os óculos e os sapatos, a partir do chamado “esquema em árvore” de modo a ilustrar uma nova estratégia de resolução (figura 5. 14).

Figura 5. 14 – Representação esquema de árvore fixando os chapéus

Já no final do momento destinado à discussão/sistematização de conhecimentos, um dos alunos (Gui) perguntou: «E se começássemos pelos sapatos?». Esta questão colocada pelo aluno era bastante pertinente e evidenciava a mobilização de uma situação associada ao momento de discussão/sistematização da aula anterior onde tinham sido validadas as ideias de que poderiam alcançar melhores resultados na organização das combinações se fixassem um dos elementos de cada vez e que tanto poderiam começar por um conjunto (chapéus) como pelo outro (óculos):

Professora: - Podíamos começar pelos sapatos?
Gui: - Sim
Professora: - Então em vez de fixarmos aqui (no quadro) os chapéus, vamos fixar os sapatos. Cá estão…sapatos pretos e sapatos das cores. O que é que fazias agora?
Gui: - Eu colocava os sapatos aos quadradinhos (pretos) com os óculos das estrelas.
Professora: - Com os óculos das estrelas. Okay…e mais?
Gui: - E com os sapatos às cores.
Professora: - Os sapatos aos quadradinhos com os óculos das estrelas e os sapatos às cores? Acham que ele está a arrumar as ideias?
Alunos: (reclamações mostrando desacordo).
Gui: (dando imediatamente conta do erro) - Não! Com os óculos das flores.
Professora: - Primeiro…olhem lá…primeiro deviam ligar os sapatos com os… Alunos: - Óculos!
Professora: - Só com aqueles (estrelas) ou com os outros também?
Gustavo F.: - Com todos.
Professora: - E a seguir?
Gui: - Ah…Agora os sapatos aos quadrados com os óculos das estrelas e o chapéu das bolinhas.
Professora: - Mais
Gui: - Agora com os óculos das flores podem ser os sapatos das cores…
Professora: - Mas com os sapatos aos quadrados…já fizeste as combinações todas?
Gui. – Ah sim pode ser com os óculos das flores e o chapéu das três cores.

[27/02/2015_ discussão_ tarefa1b]

Propositadamente fui introduzindo exemplos de estratégias de sistematização que auxiliassem os alunos na estruturação do pensamento e na identificação de todas as possibilidades de combinação, neste caso, entre os sapatos aos quadrados, os óculos e os chapéus (figura 5. 15):

Figura 5. 15 - Representação esquema com diagrama de setas.

Um dos alunos (Rodrigo S.), após ter verificado que das diferentes combinações entre estes elementos resultavam seis combinações, inferiu: «Com mais seis e é doze!». Este aluno, percebendo que um par de sapatos gerava seis combinações, imediatamente considerou que então o outro par também gerava seis. É possível reconhecer nesta forma de pensamento uma generalização, ou seja, uma manifestação do raciocínio lógico-dedutivo.

Ainda que a maioria dos alunos tenha manifestado dificuldades na resolução do problema, e não tenha chegado ao resultado correto, vivenciaram um contexto de aprendizagem propício à exploração do raciocínio combinatório e ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos. Se compararmos os desempenhos dos alunos é possível constatar alguns progressos relativamente aos observados no primeiro problema de produto cartesiano. A análise das suas produções e interações comunicativas permite perceber alguma evolução na aquisição e aplicação de conhecimentos, mais concretamente que cada combinação deve incluir um elemento de cada um dos conjuntos básicos; que cada combinação deve ser diferente das anteriores, portanto as repetidas não contam; que alterar a ordem dos elementos não gera novas combinações.

Permuta, Arranjo, e Combinação

A diferença dos problemas que envolvem a permuta, o arranjo e a combinação distinguem-se dos problemas anteriores (produto cartesiano) pelo facto das combinações (subconjuntos) terem a sua origem num único conjunto básico. Distinguem-se entre si por envolverem todos os elementos do conjunto básico (permuta) ou apenas alguns desses elementos (arranjo e combinação). Para além disso, no caso da permuta e do arranjo, a ordem dos elementos é importante na medida em que origina novos subconjuntos. Já no caso da combinação acontece o mesmo que já se tinha verificado no produto cartesiano onde a ordem dos elementos dos subconjuntos não é importante pois não origina novos subconjuntos.

Em seguida passo a identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas de estrutura combinatória do tipo permuta, arranjo e combinação e a descrevê-las tendo em conta os princípios de raciocínio acima referidos bem como alguns dos princípios básicos enunciados por Mekhmandarov (2000), nomeadamente que cada elemento do conjunto base pode fazer parte de vários subconjuntos, que cada subconjunto deve ser contabilizado para o resultado final (produto) e que cada subconjunto não pode aparecer repetido.

Permuta. Para a resolução do problema combinatório do tipo permuta os alunos têm que ser capazes de formar subconjuntos a partir de um só conjunto, respeitando os seguintes requisitos: (i) cada subconjunto tem que incluir todos os elementos do conjunto inicial, e (ii) a mudança na ordem dos elementos dá origem a novos subconjuntos. Para além disso têm que respeitar regras mais gerais, associados ao raciocínio combinatório, como compreender que cada combinação é um novo subconjunto que só pode ser contabilizado uma vez, isto é, para efeitos de contagem final são consideradas somente as combinações diferentes que consigam formar, no caso da permuta, usando todos os elementos do conjunto inicial.

O problema (figura 5. 16) proposto aos alunos desafiava-os a encontrar todas as possibilidades diferentes de arrumar, lado a lado, três fotografias de crianças. Para o tornar mais próximo das vivências dos alunos, atribui a cada criança o nome de alguns alunos da turma.

Figura 5. 16 - Enunciado do problema de permuta

A exploração do problema combinatório envolvendo permuta foi realizada numa dinâmica de trabalho a pares. Durante a apresentação da tarefa os alunos procederam à leitura do enunciado, seguida de uma exploração interpretativa conjunta para esclarecimento de dúvidas:

> Professora: - A Ana tem as fotografias dos filhos arrumadinhas assim (apontando para o enunciado) lado a lado. Mas será que elas só podem estar arrumadas por esta ordem?
> Vários alunos: (em uníssono) - Não
> Rodrigo S.: - Podia ser o Tomás, a Mara e a Júlia.
> Professora: - Então…de quantas maneiras diferentes as poderá ela arrumar na estante…têm que ficar lado a lado?
> (…)
> Rodrigo S.: - Não podemos repetir
> Professora: - Olha ouviram? Ele lembrou-se…Não podemos …
> Vários alunos: (em uníssono) - …repetir!
> Professora: - Não podemos repetir porquê?
> Ana Rita: - Assim fica mal!
> Bianca: - Assim fica mais um! Fica mais outro.
> Professora: - Vamos pensar um pouco…o que é que nos diz aqui (enunciado) que nos deixa perceber que não podemos repetir?
> Gonçalo: - Temos que fazer uma de cada vez
> Professora: - Pensem lá… aqui (enunciado) diz …de quantas formas…
> Alunos: - …diferentes
> Professora: - Pensem como vão fazer…como é que acham que podem fazer para descobrir. Pensem numa estratégia que vos ajude a fazer um bom trabalho.
>
> [12/03/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 2]

Neste conjunto de interações comunicativas é possível perceber a mobilização de ideias associadas à natureza da resolução dos problemas de estrutura combinatória. Evidências disso foi o facto de referirem que não se podem repetir maneiras de arrumar as fotografias porque todas têm que ser diferentes. Estas afirmações revelam algum desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos, associados ao conceito de combinatória, que os alunos transportaram das experiências anteriores.

Durante o tempo destinado ao trabalho autónomo fui circulando pelos pares de trabalho com o objetivo de pedir esclarecimentos acerca das estratégias que estavam a adotar:

> Professora: - Como é que estão a pensar fazer?
> Lucas T. e Inês: - Estamos a escrever os nomes.
> (…)
> Ana Rita e Lucas D.: - Vamos fazer desenhos com os nomes.
> (…)
> Rodrigo: - Eu gostava de fazer uma tabela.
>
> [12/03/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 2]

A maioria dos pares recorreu à escrita (lista de combinações) para representar a forma como pensaram explicando que «o desenho era mais demorado» ou que «não sabiam desenhar bem». Um dos pares começou por representar o raciocínio seguido através do desenho, mas abandonou esta opção, substituindo-a por uma tabela a partir da qual, apresentou uma resolução correta. Curiosamente nenhum recorreu aos esquemas de linhas talvez por terem percebido que essa estratégia não era eficaz para resolver este problema. De entre os trabalhos realizados pelos alunos, selecionei alguns para ilustrar a diversidade de estratégias e tentar interpretar o raciocínio dos alunos:

Figura 5. 17 - Estratégia do Rodrigo e Tomás N. - Permuta

Figura 5. 18 – Estratégia do Lucas T. e Inês - Permuta

Estes alunos (figura 5. 17 e figura 5. 18) conseguiram chegar ao resultado correto, esgotando todas as hipóteses possíveis de arrumar as três fotografias. Saliente-se que só representaram cinco combinações porque consideram que a sexta era a que já constava do enunciado:

> Inês: - Ó professora eu tenho uma dúvida…este também conta (apontando para a imagem do enunciado)?
> Professora: - O que é que vocês acham? É uma forma de arrumar?
> Inês: - Sim…então assim já temos duas!
>
> [12/03/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 2]

> Rodrigo S.: - Na tabela fizemos cinco combinações diferentes e com mais a de cima (enunciado) são seis.
>
> [13/03/2015_ discussão_ tarefa 2]

Apoiaram-se na escrita do nome associado a cada fotografia e foram trocando a ordem dos elementos, mostrando compreender que cada forma de arrumar todas as fotografias (elementos) representava uma possibilidade diferente. No caso da estratégia do Rodrigo e do Tomás N. (figura 5. 17) percebe-se uma aproximação a um procedimento sistemático quando fixam o mesmo nome em primeiro lugar por duas vezes mudando, à vez, a ordem dos outros dois nomes.

As estratégias abaixo (figuras 5. 19, 5. 20 e 5. 21) demonstram que estes alunos, tal como os anteriores, perceberam que tinha que usar sempre todos os elementos e que arrumar de maneira diferente implicava trocar os elementos de lugar. O par Gui/Júlia (figura 5. 19) extrapolaram as possibilidades enquanto os pares Tomás/ Gustavo (figura 5. 20) e Diogo/Mara (figura 5. 21) não as conseguiram esgotar:

Figura 5. 19 – Estratégia do Tomás G. e Gustavo - Permuta

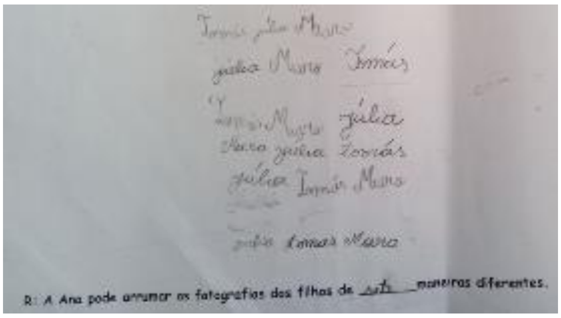


Figura 5. 20 – Estratégia do Gui e da Júlia - Permuta

No caso do Diogo e Mara (figura 5. 21), a estratégia passou por fazerem desenhos acompanhados de registos escritos esclarecedores da forma como pensaram. Na segunda e na terceira possibilidades, fixam um dos elementos do conjunto básico em primeiro lugar, trocando à vez, a ordem dos outros dois elementos. Apesar de revelarem a tentativa de alguma sistematização e organização do pensamento, não foi possível confirmar a generalização deste procedimento dado que os alunos não conseguiram esgotar todas as possibilidades.

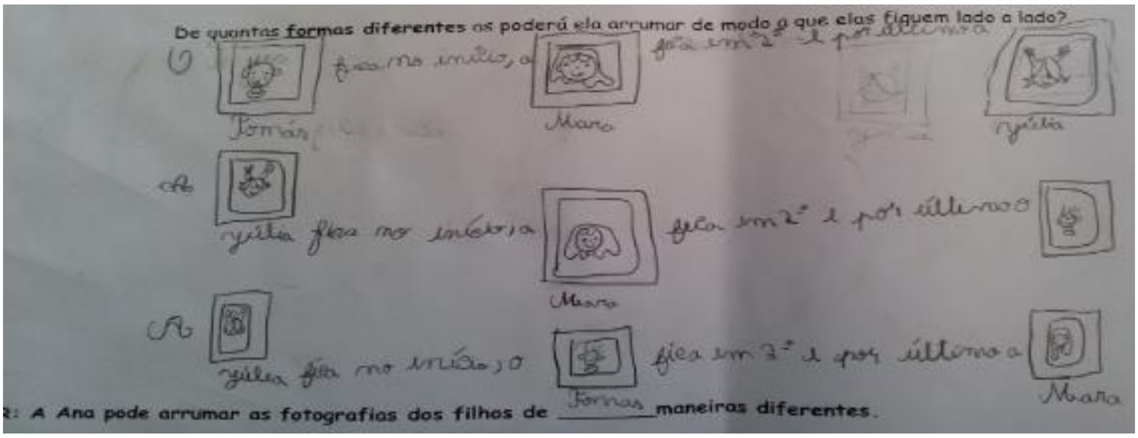


Figura 5. 21 – Estratégia do Diogo Sousa e Mara - Permuta

Partindo da análise das estratégias aplicadas e dos raciocínios explicitados pela generalidade dos alunos, nos vários momentos de exploração desta tarefa, pude concluir que, embora poucos tenham conseguido chegar à representação das seis possibilidades associadas à resolução correta do problema de permuta, vários conseguiram iniciar corretamente a representação do processo de resolução associado a este tipo de problemas.

Para além disso, sem que tal tivesse sido explicitado no enunciado, todos conseguiram intuir que neste caso, contrariamente ao observado nos problemas de produto cartesiano, cada subconjunto deveria incluir sempre todos os elementos do conjunto básico, e que a diferença residia na ordem em que eles eram colocados lado a lado:

Lucas: - Nós vamos fazer assim: Tomás, Mara e Júlia.
Professora: - E depois?
Lucas D.: - Depois, quando acabarmos de fazer tudo, vamos mostrar-te.
Professora: - E o que é fazer tudo?
Ana Rita: - Depois de fazermos todas as combinações
Professora: - E como é que vão fazer essas combinações?
Ana Rita: - Desenhos e palavras.
Professora: - Sim…mas o que é que estão a fazer ao Tomás, à Mara e à Júlia?
Lucas D.: - Estamos a combiná-los de formas diferentes…a arrumar…
(….)
Eliana: - Vamos fazer os nomes ao contrário
(…)
Sofia: - Vamos pôr o Tomás aqui e a Mara aqui (demonstrando fixar a Júlia no meio).
(…)
Daniel: - Estamos a trocá-los de lugar.

[12/03/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 2]

Mais uma vez, aproveitei os momentos destinados às entrevistas e a discussão conjunta para fomentar contextos propícios ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como à sistematização e generalização de ideias e processos:

Professora: - É só a Mara que pode ficar em primeiro lugar duas vezes?
Lucas T.: - Não.
Professora: - Então?
Inês: - Pode ser a Júlia, em primeiro lugar, duas vezes e o Tomás, duas vezes.

[13/03/2015_ entrevista_ tarefa 2]

Professora: - Outra coisa que vocês já aprenderam para trás (nas tarefas anteriores) é que devemos ser como?
Lucas D.: - Organizados!
Professora: - Então vamos lá ser organizados (recorrendo a uma tabela idêntica ao par Rodrigo/Tomás N. para organizar o primeira combinação).Podemos colocar em primeiro o Tomás e depois…
Gui: - … Mara…
Alguns alunos: - …e Júlia.
Professora: - Agora mostrem-me lá o que é ser organizado.
…
Professora: - Então a seguir quem é que eu ponho aqui (organizando a segunda combinação?

Daniel: - A Mara
Professora: - Ai é?
Maria Rita: - Não!
Diogo: - Pomos o Tomás à mesma!
Professora: - Diz…por que é que pomos o Tomás à mesma? É diferente?
Diogo: - Sim…porque agora trocamos a Mara com a Júlia!
Professora: - Então, se ainda há outra maneira diferente de pôr o Tomás em primeiro lugar, nós vamos fazer já para não esquecer!
Tomás G.: - Agora com a Mara (no primeira posição).
Professora: - Então, a seguir podemos pegar na Mara. Pomos a Mara em primeiro lugar…a seguir à Mara quem é que fica?
Alguns alunos (alternando entre um nome e outro): - Júlia! Tomás!
Professora (registando na tabela): - Pode ser o Tomás e depois a Júlia.
Lucas D.: - Agora a começar outra vez na Mara!
Alunos: - Depois a Júlia e o Tomás.
Rodrigo S.: - Agora vamos passar para a Júlia (referindo-se a realizar as diferentes combinações aparecendo a Júlia em primeiro lugar).

[13/03/2015_ discussão_ tarefa 2]

Arranjo. Na resolução do problema combinatório do tipo arranjo os alunos têm que ser capazes de formar subconjuntos a partir de um só conjunto, respeitando as seguintes requisitos: (i) cada subconjunto somente inclui alguns elementos do conjunto inicial, e (ii) a mudança na ordem dos elementos dá origem a novos subconjuntos. Para além disso têm que respeitar regras mais gerais, associados ao raciocínio combinatório, já anteriormente referidas. Neste caso, a diferença prende-se com o facto de os alunos só poderem usar alguns elementos do conjunto inicial.

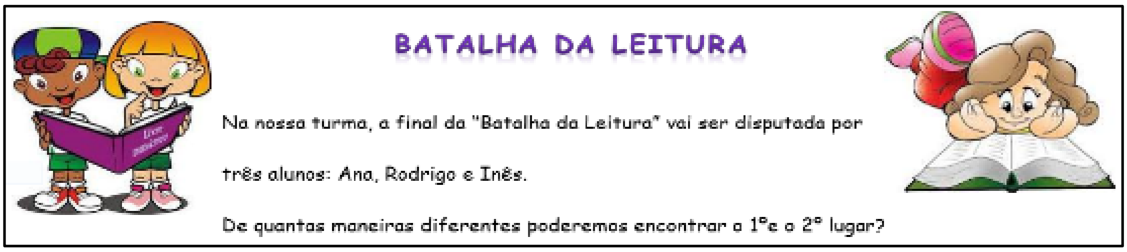


Figura 5. 22 – Enunciado do problema de Arranjo

O problema (figura 5. 22) propunha que os alunos encontrassem todas as possibilidades diferentes de colocar três crianças em primeiro e segundo lugar, ou seja, a partir de um conjunto de três elementos, fazer todos os subconjuntos diferentes de 2 elementos, sendo que o lugar em que ficam (ordem) origina novas possibilidades. Numa dinâmica de trabalho idêntica à implementada nas tarefas anteriores, os alunos foram desafiados a resolver mais um problema cuja resolução implicava a mobilização do raciocínio combinatório.

Na escola estava a decorrer um desafio literário intitulado *Batalha da Leitura*, pelo que me pareceu oportuno propor um problema cujo enunciado e resolução retratava uma situação real e próxima do quotidiano dos alunos. Como era expectável, alguns alunos começaram por disponibilizar ideias e raciocínios desenvolvidos na tarefa anterior (permuta) pensando que os subconjuntos deveriam incluir todos os elementos do conjunto inicial. Percebendo a necessidade de lhes prestar alguma orientação, alertei a turma para as condições impostas no enunciado do problema e avancei uma possibilidade de combinação:

> Professora: - Os três meninos que chegaram à final foram a Ana, o Rodrigo e a Inês…mas só há um primeiro e um segundo lugar….
> (…)
> Professora: - De quantas maneiras diferentes podemos encontrar o primeiro e o segundo lugar? (aguardando um pouco) Por exemplo…em primeiro lugar…
> Rodrigo: - …pode ficar o Rodrigo e em segundo, a Ana e a Inês!
> Professora: - Ou uma ou outra! Não podem ficar as duas em segundo lugar. Então, em primeiro lugar pode ficar o Rodrigo, e em segundo lugar a…?
> Tomás G.: - …a Inês!
> Professora: - É só essa…
> Lara: - A Ana e a Inês!
>
> [23/04/2015_ Apresentação da tarefa_ tarefa 3a)]

Face a isto, vários alunos tentaram avançar outras possibilidades mas impedi-os, sugerindo que não era ainda o momento para partilha de descobertas. Em seguida pedi-lhes que pensassem numa estratégia de resolução e que a representassem na folha do problema. Para a representação do raciocínio seguido e das soluções encontradas, surgiram estratégias mais estruturadas e eficientes, sendo possível constatar uma evolução, no que concerne à organização e à sistematização de ideias e processos.

As estratégias que surgiram tinham em comum o recurso à escrita. Quer através de listas, quer através de tabelas, a maioria dos grupos socorreu-se da escrita para registar todas as combinações encontradas. Também se observaram casos em que os alunos recorreram às iniciais dos nomes (figura 5. 23) e a círculos coloridos (figura 5. 24), representativos dos nomes dos elementos do conjunto:

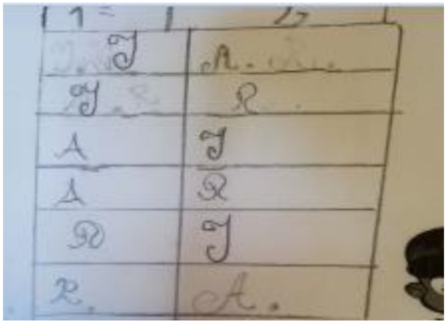


Figura 5. 23 - Estratégia do Tomás e Daniel - Arranjo

Figura 5. 24 - Estratégia da Maria Júlia e do Diogo - Arranjo

Ainda que não tenham sido bem-sucedidos, observou-se a intenção de recorrerem à simbologia como forma de tornarem o processo de resolução mais rápido.

Diogo B.: - Nós estamos a fazer uma tabela com bolinhas com cores…a Ana é amarela, o Rodrigo é azul e a Inês é verde.
Professora: - Mas não se esqueçam que têm que descobrir quem ficou em primeiro e que ficou em segundo!

[23/04/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 3a)]

O agrupamento abaixo (figura 5. 25) retrata uma estratégia de resolução onde se percebe que os alunos não consideraram as situações invariantes dos problemas de arranjo, mas sim, as do problema de permuta. Neste caso, influenciados pela resolução do problema de permuta, tentaram incluir nas combinações, todos os elementos do conjunto básico, distribuindo-os pelo primeiro e pelo segundo lugar, conforme solicitado no enunciado. Não perceberam que somente poderiam usar dois elementos de cada vez, contudo, a repetição de combinações já não ocorreu e demonstraram perceber que a ordem em que os colocavam gerava novas possibilidades de combinação.

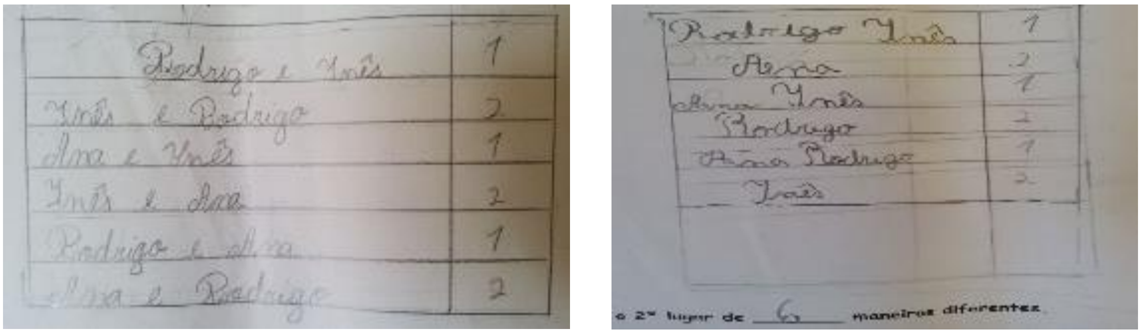


Figura 5. 25- Estratégias de alguns alunos - Arranjo

Ainda que representação de ideias e do raciocínio seguido revele incorreções e demonstre falta de organização e sistematização, todas evidenciam o recurso ao raciocínio combinatório:

Professora: - Quantas maneiras descobriram?
Gonçalo. – Seis.
Professora: - Como é que pensaram? O que representam estas combinações que têm aqui?
Inês: - Representam os lugares em que ficaram.
Professora: - O que representa isto? … Por exemplo… aqui, na segunda linha da tabela?
Inês: - A Inês e o Rodrigo.
Professora: - A Inês e o Rodrigo ficaram os dois no segundo lugar?
Inês: - Sim.
Professora: - Os dois, ao mesmo tempo, no segundo lugar? Então e quem ficou no primeiro lugar?
Gonçalo: - O Rodrigo e a Inês.
Professora: - Então quem foi o vencedor?
Gonçalo: - Acho que foi o Rodrigo!
Professora: - O Rodrigo ficou em primeiro lugar? Então e a Inês?
Gonçalo: - Ficou em segundo lugar.
Professora: - Acham que isto assim está bem representado?
Gonçalo: - Não.
Professora: - O que é que faziam para os dados ficarem bem representados.
Inês: - Tínhamos que pôr um de cada vez em cada lugar.

[24/04/2015_ entrevista_ tarefa 3a)]

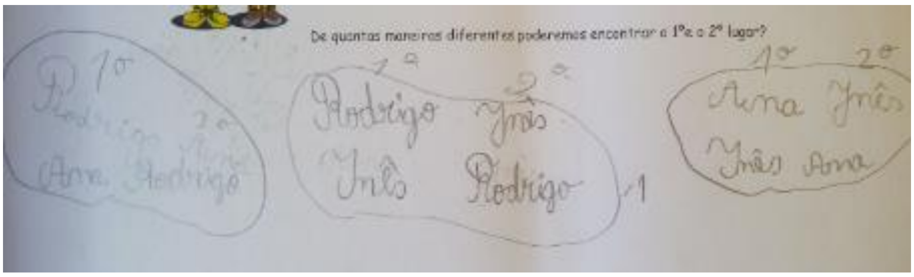


Figura 5. 26- Estratégia do Rodrigo e do Gustavo F. - Arranjo

Nesta resolução (figura 5. 26) pode observar-se que os alunos interpretaram corretamente as condições dos problemas de permuta. A estratégia utilizada demonstra que compreenderam aspetos invariantes deste tipo de problema, dado que só usaram alguns elementos do conjunto básico e consideraram que a ordem dos elementos é importante na formação dos novos subconjuntos:

> Professora: - Como é que pensaram?
> Rodrigo: - Fizemos assim … Rodrigo e Inês e depois fizemos, Inês Rodrigo.
> Professora: - Isso quer dizer o quê?
> Gustavo F.: - Fizemos ao contrário.
> Professora: - Mas fizeram ao contrário…não percebo! Mas afinal, quem ficou em primeiro lugar e em segundo? (…) Isso aqui não se vê!
> Gustavo: (escrevendo os numerais ordinais) - Pomos aqui, primeiro, e aqui, segundo.
> (…)
> Professora: - Então o que é que isso quer dizer? Expliquem-me lá.
> Rodrigo: - O Rodrigo pode ficar em primeiro e a Inês em segundo.
> Gustavo: - E aqui, a Inês pode ficar em primeiro e o Rodrigo em segundo.
> Professora: - São coisas diferentes?
> Alunos: - Sim
>
> [24/04/2015_ entrevista_ tarefa 3a)]

Arranjo (extensão). A extensão do problema de arranjo surge com o objetivo de aferir aprendizagens anteriores e consolidar conhecimentos no que concerne às características (invariantes) dos problemas de arranjo.

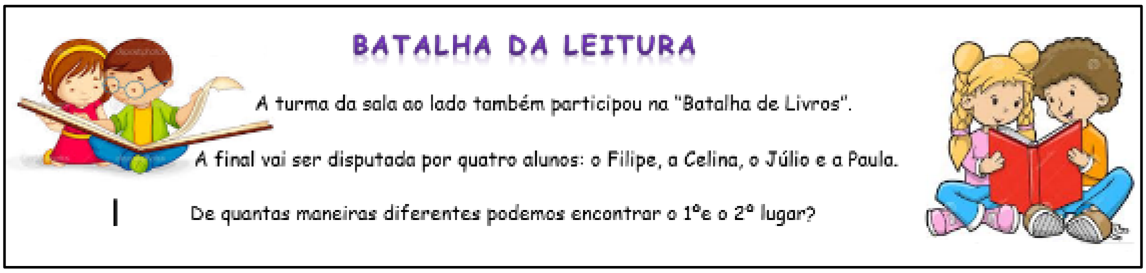


Figura 5. 27 – Enunciado da extensão do problema de Arranjo.

Ainda que enunciado do problema (figura 5. 27) não apresentasse diferenças significativas (contexto), a situação apresentada envolveu um conjunto básico com mais um elemento, o que implicou o aumento das possibilidades de combinação (12).

Depois da exploração do problema anterior, esperava que os alunos identificassem as situações invariantes e conseguissem encontrar formas eficazes de estabelecer relações combinatórias entre os elementos deste novo conjunto:

Diogo S.: Descobrir de quantas maneiras diferentes podemos encontrar o primeiro e o segundo lugar.
Tomás N.: - Desta vez também há o primeiro e o segundo lugar mas são quatro meninos!

[29/04/2015_ apresentação_ tarefa 3b)]

Durante a tempos destinado ao trabalho autónomo fui-me apercebendo que os alunos revelavam dinâmicas de trabalho mais objetivas no que concerne às decisões acerca das estratégias a utilizar. Todos tinham ideia do que iam fazer e demonstravam compreender o objetivo do enunciado do problema. As suas produções surgiam mais organizadas (identificação do primeiro e segundo lugar com recurso aos números ordinais) e revelavam uma tendência para simplificar o processo de resolução (iniciais dos nomes). O recurso ao desenho não foi opção para nenhum dos pares de trabalho.

Figura 5. 28 - Estratégia da Sofia e da Bianca

Figura 5. 29 Estratégia do Rodrigo S. e Gustavo F.

Nas resoluções anteriores (figuras 5. 28 e 5. 29), percebe-se que os alunos chegaram ao resultado correto a partir de uma estratégia eficaz e rápida. Fixando em primeiro lugar, um elemento do conjunto de cada vez, estabeleceram relações combinatórias, dois a dois, com os restantes elementos do conjunto básico. Depois repetiram o processo até esgotar todas as possibilidades de combinação, evidenciando que assumiram os aspetos invariantes da permuta (cada subconjunto inclui somente alguns elementos do conjunto básico; a ordem conta para a formação de novas possibilidades).

Na resolução da Sofia e da Bianca (figura 5. 28) verifica-se a evolução para a utilização das iniciais dos nomes, como forma de tornar o processo de resolução mais rápido. Já a resolução (figura 5. 29) dos alunos Rodrigo S. e Gustavo F., retoma uma estratégia já utilizada pelos mesmos, na resolução do problema anterior. Como foram bem-sucedidos consideram que a deveriam tornar a usar:

Rodrigo S.: - Vamos fazer pares como fizemos no outro dia (tarefa anterior).
Professora: - Então expliquem-me lá como é que vão fazer esses pares.
Rodrigo S.: - Eu pus Filipe e Júlio, e depois, primeiro e segundo lugar. E depois o Gustavo pôs, Filipe e Júlio…e depois vamos rodear.
Professora: - Então escutem lá…pôr o Filipe e o Júlio, e aqui, o Júlio e o Filipe…são pares diferentes?
Rodrigo S.: - Sim
Professora: - Porquê
Rodrigo S.: - Trocamos de lugar. Aqui este está em primeiro e aqui está em segundo.
Professora: - E vão fazer a mesma coisa com os outros?
Rodrigo S.: - Sim…até descobrirmos.
Professora: - Até descobrirem o quê?
Rodrigo S.: - Quantas maneiras.
Professora: - Quantas maneiras de quê?
Rodrigo S.: - De encontrar o primeiro e o segundo lugar.

[30/04/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 3b)]

A resolução do Rodrigo, do Lucas T. e da Maria Rita (figura 5. 30) evidencia clara perceção do significado do problema e das combinações a estabelecer, mas, a falta de organização e sistematização do processo realizado, acabou por implicar uma contagem incorreta dos subconjuntos encontrados.

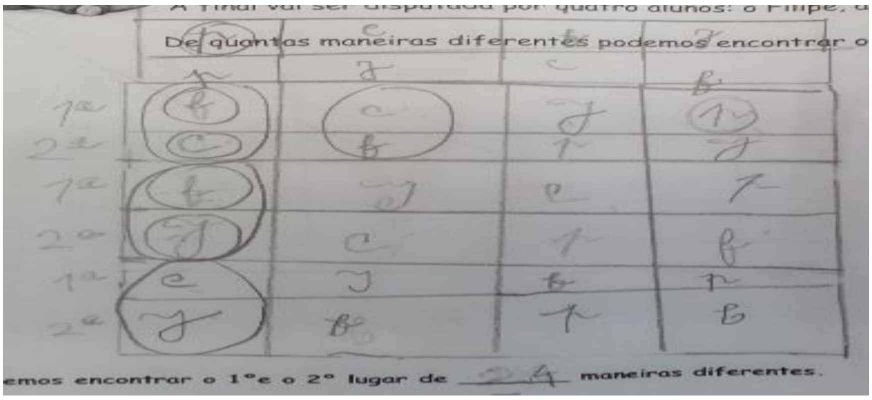


Figura 5. 30 - Estratégia do Rodrigo B., Lucas T. e Maria Rita - arranjo (extensão).

Maria Rita: Estamos a combinar o Filipe com a Celina.

Professora: - Isto então são os meninos que ficam em primeiro e em segundo lugar, certo?
Gonçalo: - O Filipe e a Celina. A Celina e o Filipe.
Professora: - Mas isto são pares iguais! Dão combinações diferentes?
Alunos: - Sim
Professora: - Diferentes porquê?
Lucas: - Aqui, em primeiro lugar, ficou o Filipe e depois (em segundo) ficou a Celina.
Professora. - E aqui não é igual.
Lucas: - Não
Professora: Porquê?
Lucas.- Porque em primeiro está a Celina!

[29/04/2015_ trabalho autónomo_ tarefa 3b)]

No cômputo geral, é possível verificar um processo gradual de evolução nos desempenhos dos alunos. Destaca-se o facto de todos mostrarem ter compreendido situações comuns aos problemas de arranjo tais como: que a mudança na ordem dos elementos gera novas possibilidades; que cada subconjunto incluí somente alguns dos elementos do conjunto básico (neste caso dois para ocuparem o primeiro e o segundo lugar alternadamente).

Ainda assim, embora tenham compreendido as relações combinatórias em ação, parte significativa dos alunos não foi capaz de desenvolver um processo de raciocínio conducente ao resultado correto. Na maioria das situações (figura 5. 31), as dificuldades estiveram associadas a falta de sistematização ao longo da resolução do problema, fator que implicou que não esgotassem todas as possibilidades de combinação ou, pelo contrário, que as ultrapassassem, por não terem a perceção que as estavam a repetir.

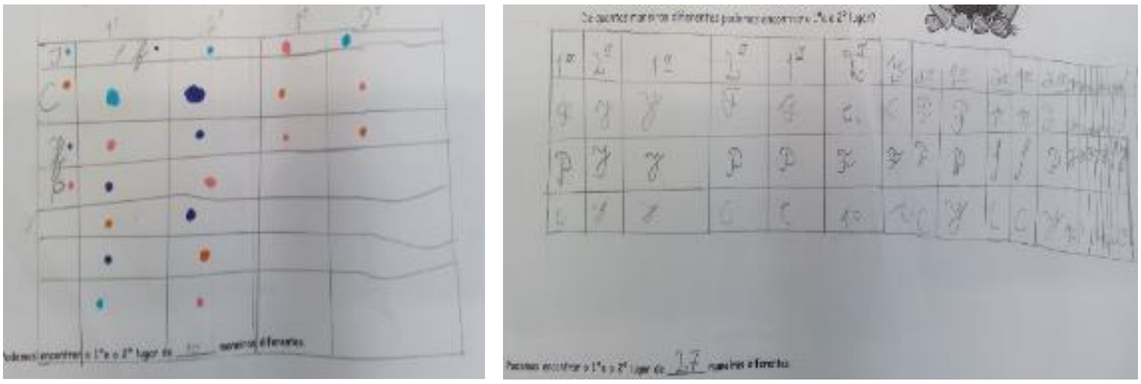


Figura 5. 31 – Estratégias com resultado incorreto.

No momento destinado à discussão e sistematização de ideias e conhecimentos dei prioridade a exploração de estratégias de representação dos processos de resolução, como forma de colmatar as dificuldades manifestadas pelos alunos. Neste seguimento, foram exploradas as estratégias produzidas pelos alunos objetivando a validação de umas e o aperfeiçoamento de outras (figura 5. 32). Aproveitei também este tempo para orientar os alunos para a descoberta de novas estratégias envolvendo representações mais organizadas e eficazes. Ainda que os alunos possam ter dificuldades em adotá-las no presente, preparou-se o caminho para desempenhos futuros mais sistematizados que permitam levá-los à generalização de ideias e processos.

Figura 5. 32 - Estratégia de resolução com recurso a tabela de dupla entrada

A sequência de imagens seguinte (figura 5. 33) demonstra como evoluiu a exploração da representação da relação combinatória (dois a dois) fixando cada um dos elementos do conjunto básico.

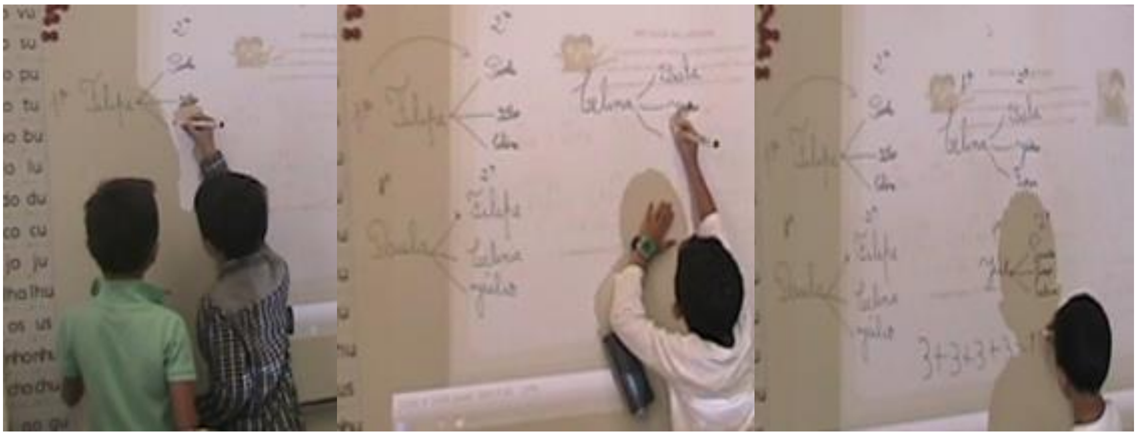


Figura 5. 33 - Sequência de aprendizagem

Os momentos coletivos de discussão e sistematização promoveram o desenvolvimento de melhores desempenhos ao nível da organização e da capacidade de generalização de ideias e processos:

Maria Júlia: - É sempre de três em três
Professora: - É sempre de três em três, diz a Maria Júlia… Qualquer problema destes que façam…é sempre de três em três?
Rodrigo S.: - Não! Pode ser de dois em dois, …de quatro em quatro, …de cinco em cinco.
Professora: - E se fossem cinco meninos…era de três em três também?
Alunos: - Nããão!
Rodrigo: - Era de quatro em quatro
Professora: - E se fossem cinco meninos…quantos grupos destes tínhamos que fazer?
Gui: - Cinco!
Professora: - E cada grupo dava quantas combinações?
Gui: - Quatro!
Professora: - Então, ao todo, seriam quantas combinações?
Rodrigo S.: - Dezasseis!
Professora: - Será…? Estás a pensar bem? Então, se fosse cinco meninos, quantos grupos destes teríamos que fazer
Tomás N.: - Cinco!
Professora: - Cinco grupos…e cada grupo teria quantas combinações?
Rodrigo: - Quatro!
Então, quantas eram ao todo?
(…)
Alguns alunos: - Vinte!
(…)
Professora: - Estão a ver…nós agora podemos utilizar esta estratégia para outros problemas parecidos com este…para outras situações…
(…)
Professora: - Então e se houvesse primeiro, segundo e terceiro lugar…podíamos fazer…! Será que íamos ter mais ou menos combinações?
Vários alunos: - Maaiiis!

[30/04/2015_ discussão_ tarefa 3b)]

Dadas as limitações de tempo e o facto de não querer confundir os alunos, propus este desafio para outra ocasião. Terminado do tempo destinado à discussão/sistematização, os alunos procederam ao registo de algumas estratégias no caderno diário. A finalidade dos registos foi a criação de suportes de consulta, em revisitações de situações matemáticas semelhantes (figura 5. 34).

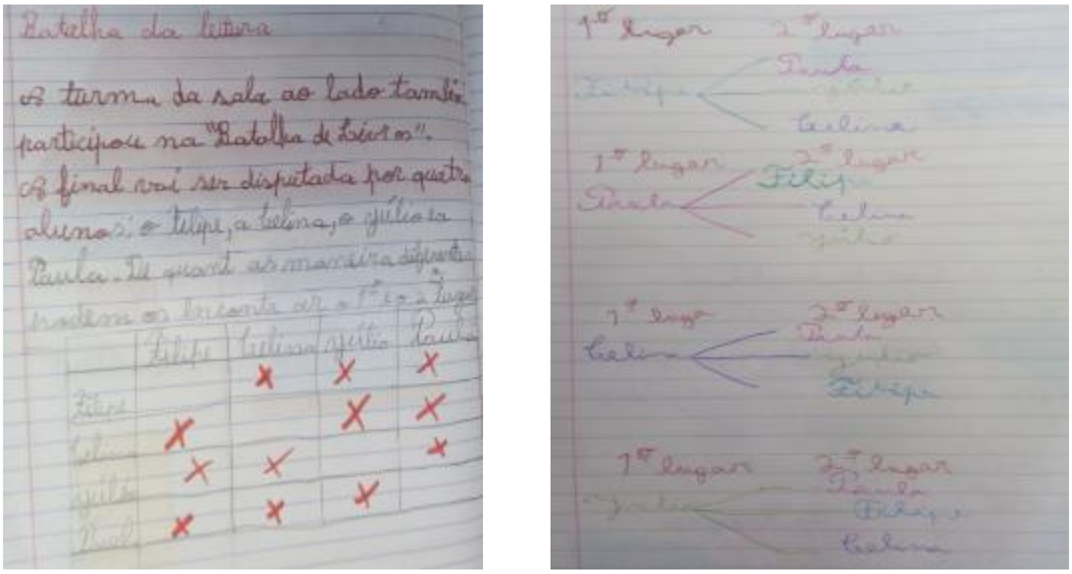
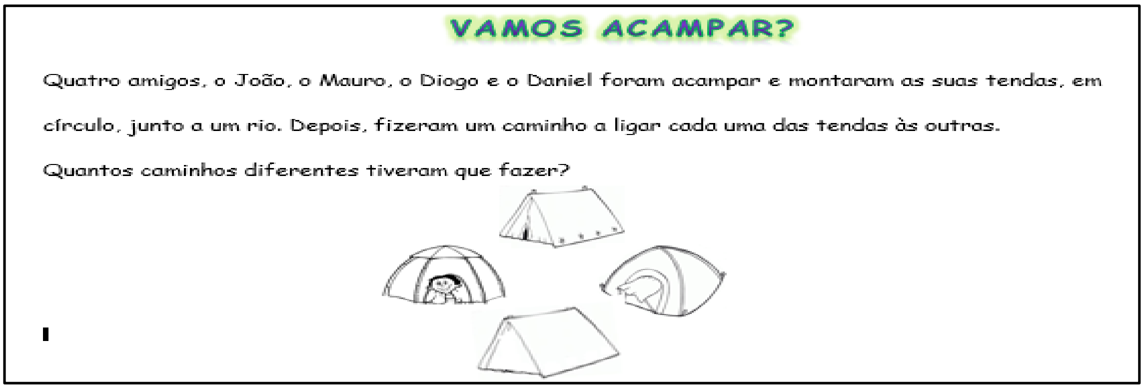


Figura 5. 34 – Registos nos cadernos dos alunos.

Combinação. Para a resolução deste problema do tipo combinação, os alunos teriam que ser capazes de formar subconjuntos a partir de um só conjunto, respeitando os seguintes requisitos: (i) cada subconjunto somente inclui alguns elementos do conjunto inicial, e (ii) a mudança na ordem dos elementos não dá origem a novos subconjuntos.



VAMOS ACAMPAR?

Quatro amigos, o João, o Mauro, o Diogo e o Daniel foram acampar e montaram as suas tendas, em círculo, junto a um rio. Depois, fizeram um caminho a ligar cada uma das tendas às outras.

Quantos caminhos diferentes tiveram que fazer?

Figura 5. 35 - Enunciado do problema de combinação

Assim sendo, os alunos teriam que estabelecer relações combinatórias entre os quatro elementos (tendas) do conjunto básico sendo que as mesmas implicavam subconjuntos de dois elementos (figura 5. 35). Para além disso, teriam que perceber que a ordem dos elementos dos subconjuntos não implicava novos subconjuntos, e que cada elemento do conjunto básico poderia fazer parte de vários subconjuntos. O tempo utilizado na apresentação do problema e no trabalho autónomo foi muito reduzido uma vez que os alunos revelaram um grande à-vontade na leitura e interpretação do enunciado, bem como na resolução do problema.

Enquanto decorria a distribuição das folhas de trabalho, contendo o enunciado, parte dos alunos fizeram a sua leitura e procederam imediatamente a resolução. Penso que tal se deveu ao desenvolvimento e aos progressos realizados ao nível das competências da leitura e da interpretação. Para além disso, presumo que a palavra "ligar" contida no enunciado, traduziu-se num elemento facilitador, induzindo-os imediatamente à estratégia a adotar, por sinal, uma estratégia já conhecida e utilizada anteriormente (problema dos chapéus e dos óculos). Todos os pares de trabalho recorreram a linhas para representar o raciocínio seguido sendo que mais de metade dos pares conseguiram chegar ao resultado correto.

Contudo, houve pares que não conseguiram ser bem-sucedidos. Um dos pares, querendo mobilizar outras estratégias de resolução (figura 5. 36), tentou representar o raciocínio seguido através de uma tabela onde assinalou "1º" e "2º", uma clara associação ao procedimento utilizado no problema resolvido anteriormente (Arranjo). Estes alunos apontaram como resultado, doze combinações, adicionando quatro parcelas de três, talvez assumindo que cada tenda originava quatro caminhos, não percebendo que estavam a contabilizar o mesmo caminho várias vezes, ou que um caminho não originava duas possibilidades distintas. Um outro par (figura 5. 37), sem ter representado todas as combinações (caminhos) possíveis, responde que o resultado são vinte e quatro caminhos, o que demonstra não ter compreendido o que era pedido no enunciado, e que a resposta dada foi aleatória, pois não se reflete na representação realizada.

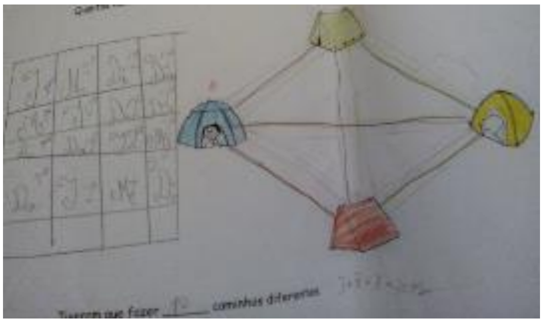


Figura 5. 36 – Estratégia do Ricardo e do Daniel – Combinação.

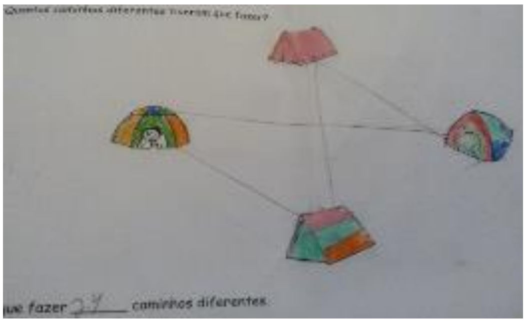


Figura 5. 37 – Estratégias do Gui e do Tomás G. – Combinação.

Nos casos seguintes os alunos consideraram que entre as duas tendas se podiam representar dois caminhos diferentes (Figura 5. 38) e que cada tenda representava três caminhos (figura 5. 39), o que significa que não prestaram atenção ao enunciado (referia um caminho) e não compreenderam, que a mudança da ordem dos elementos não importava.

Figura 5.38 - Estratégia da Maria Júlia e Diogo B. – Combinação

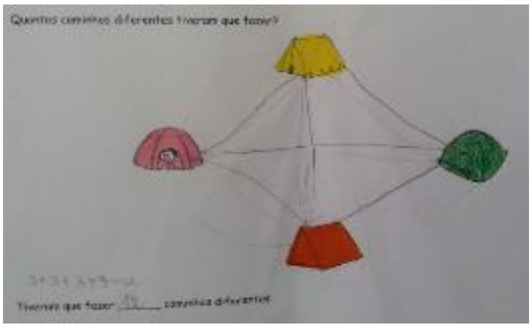


Figura 5. 39 - Estratégia da Maria Rita e Rodrigo B. – Combinação

Professora: - Expliquem lá como é que contaram doze caminhos.
Rodrigo B.: - Contamos três, mais três, mais três, mais três.
Professora: - Como é que foram esses três, mais três, mais três, mais três. Como é que pensaste?
Rodrigo B.: - Ligámos esta, a esta e a esta…
Professora: - … cada tenda às outras todas, foi?
(…)

Professora: - Vamos imaginar que estávamos na tenda amarela …Podíamos ir para a tenda rosa. Mas já não tinham feito um caminho da tenda rosa para a tenda amarela?
Maria Rita: - Sim
Professora: - E são caminhos diferentes?
Rodrigo: - Sim.
(…)
Professora: - Vocês vão da tenda amarela para a tenda rosa, por um caminho, e voltam para a tenda amarela, por outro?
Rodrigo B. e Maria Rita: - Sim.
Professora: - E porquê que tem que ser caminhos diferentes?... Por exemplo, (aludindo aos personagens do enunciado) acham que o João fez um caminho aqui para tenda do Mauro e o Mauro fez outro caminho para a tenda do João?... Precisavam de fazer dois caminhos diferentes, ou podiam ir e vir pelo mesmo caminho?
Rodrigo B.: Podiam ir e vir pelo mesmo caminho.
Professora: - Então pensem lá…se podiam ir e vir pelo mesmo caminho, acham que os meninos iam perder tempo a fazer dois caminhos diferentes? Era necessário?
Rodrigo B. e Maria Rita: - Não
Professora: - Bastava…
Rodrigo B.: - …um caminho!
(…)
Professora: - Portanto, o caminho que vai da tenda rosa para a tenda amarela é o mesmo…
Rodrigo B.: - …que vai da tenda amarela para a rosa!
Professora: - E sendo assim, mantêm os doze caminhos? Acham que são doze caminhos diferentes?
Maria Rita: - Não.
Professora: - Então? Contem lá os caminhos.
(…)
Professora: - Por exemplo aqui…vocês tinham contado (assinalando com o dedo o caminho entre as duas tendas) …um…dois. E agora só contam quantos?
Maria Rita: - Um.
Professora: - Um. Então, daqui para aqui, e daqui para aqui, vale…
Rodrigo B.: - …um.
Professora: - Este é só um, não é? Um! E aqui?
Rodrigo B.: - Dois.
Professora: - Mais um…são dois!
Maria Rita: - São seis! Seis caminhos!
Rodrigo B.: - …e três, e quatro, cinco, seis.
Professora: - Então afinal são quantos caminhos?
Maria Rita e Rodrigo B.: - Seis!

[22/05/2015_ entrevista_ tarefa 4]

Professora: Será que eles pensaram bem?
Alunos: - Não!
Rodrigo S.: - Eles pensaram que aquele caminho era um, mas se voltassem para trás, eram dois.

Professora: - Eles pensaram num caminho para lá e num caminho para cá (dramatizando a situação) …e é necessário um caminho para lá e um caminho para cá?

Alguns alunos. – Não!

Rodrigo S.: - São iguais!

(…)

Professora: - Então o que que isto quer dizer. Quer dizer…vamos imaginar que cada caminho é um segmento de reta! Que tal? Uníamos as tendas com segmentos de reta …está bem?

Rodrigo S.: - Então aquele é o AB!

Professora: - Aqui (tenda) é o ponto A e aqui (tenda) o ponto B. Então o segmento de reta AB não é o mesmo que o BA?

Alunos: - Sim!

Professora: - Então cada segmento conta quantas vezes, quantos caminhos?

Alunos: - Um!

Professora: - Então são quantos caminhos diferentes?

Alunos: Seis!

[22/05/2015_ discussão_ tarefa 4]

Os restantes pares resolveram corretamente o problema, identificando os seis caminhos possíveis. Também não evidenciaram dúvidas quanto ao facto de existir um único caminho entre duas tendas o que significa que consideraram que a ordem não implicava duas possibilidades distintas. Todos referiram ter percebido bem o enunciado e que o problema tinha sido fácil e rápido de resolver (figuras 5. 40 e 5. 41).

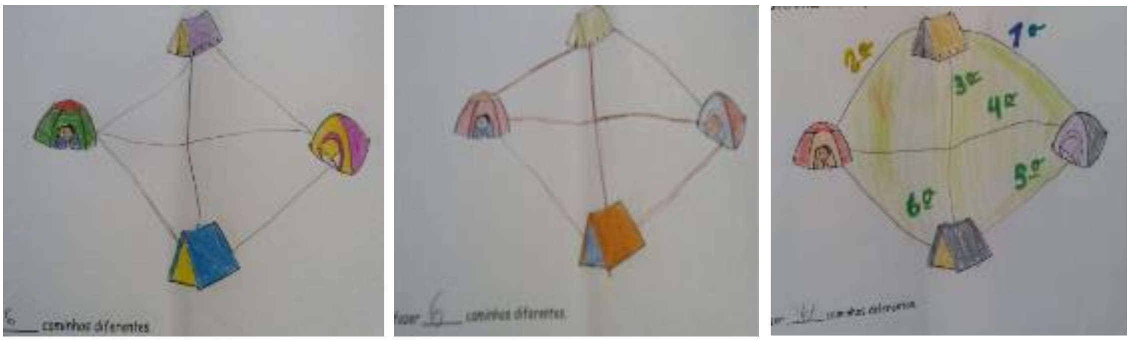


Figura 5. 40 - Exemplos de estratégias de resolução corretas – Combinação.

Figura 5. 41 – Sequência de aprendizagem – Combinação

Professora: - Haveria outra forma…outra estratégia para encontrarmos o resultado?
(…)
Rodrigo S.: - Podíamos usar uma tabela! Com a letra do nome dos meninos de cada tenda.
Professora: - Então faz lá.
(…)
Professora: - Olha, eu posso ajudar a fazer uma tabela maior?…É só para eles verem melhor.
Professora: - Quantas linhas fazemos?
Tomás N.: - Quatro
Professora: - Pronto…agora aqui pomos…
Rodrigo: - J,M,D de Daniel, e D… (mostrando-se indeciso devido à repetição da letra).
Maria Rita: - D1 e D2
Professora: - Se calhar é melhor escrevermos os nomes completos!
(…)
Professora: - E agora?
(Silêncio)
Professora: - Quem é que quer ajudar os colegas?
(Silêncio)

Neste momento criou-se um impasse porque, ao quererem escrever os nomes na mesma direção dos que já estavam na tabela, aperceberam-se de algo mas não conseguiram explicar. Assim, foi necessário prestar alguma orientação para que acabassem de organizar os elementos do conjunto básico na tabela:

Professora: - E se pusermos aqui mais em cima. Olhem … João, Mauro, …
Tomás N. - …O Daniel e o Diogo.
Professora: - E então agora fazíamos mais o quê? Podemos fazer um caminho da tenda do João para a tenda do João?
Alunos: - Não!
(…)
Professora: - Vocês têm aqui (assinalado com X na tabela) um caminho da tenda do João para a tenda do Mauro e aqui têm da tenda do Mauro para a do João. Pode ser?
Rodrigo: - Não
Professora: - Porquê?
Rodrigo: - Porque assim é a mesma coisa.
Professora: - Precisamos de fazer um caminho do Diogo para o João?
Alunos: - Não
Professora: - Porquê?
Alguns alunos: - Porque já fizemos.
(…)
Professora: - Afinal quantos caminhos diferentes podíamos fazer?
Alunos: - Seis!

[22/05/2015_ discussão_ tarefa 4]

Ao longo da etapa destinada à exploração dos problemas de permuta, arranjo e combinação, foi possível observar um desenvolvimento gradual do desempenho dos alunos. Ainda que tivessem manifestado alguma insegurança na identificação das situações invariáveis próprias de cada um destes problemas, evidenciaram ter compreendido alguns princípios básicos do raciocínio combinatório.

Ainda que a origem das variáveis (desta vez só um conjunto) não tenha implicado dificuldades, o mesmo não aconteceu relativamente à perceção de terem que incluir todas ou somente algumas, nas diferentes combinações a realizar, ou se a sua ordem importava ou não. De facto, relativamente a estes últimos aspetos, houve casos em que se observaram associações e transferências de procedimentos ao longo da resolução dos três tipos de problemas.

De um modo geral, os alunos demonstraram ter compreendido as relações combinatórias em ação, contudo, nem todos foram capazes de conduzir um processo de raciocínio que lhes permitisse esgotar todas as combinações possíveis. Neste caso os constrangimentos estiveram associados à falta de sistematização. Considero que os progressos mais significativos se traduziram em estratégias de resolução diversificadas e mais organizadas, numa maior segurança e à-vontade nos momentos de tomada de decisões e melhor compreensão de ideias e procedimentos. De salientar que um número significativo de alunos resolveu corretamente os problemas propostos evidenciando clara compreensão dos diferentes enunciados, estratégias de resolução eficazes e evoluções bastante satisfatórias, relativamente à capacidade de sistematização do raciocínio combinatório. A capacidade de generalização surgiu pontualmente e de forma muito incipiente mas preparou-se o caminho para melhores desempenhos futuros.

CAPÍTULO 6 – Conclusões

> A finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente (Ponte, 1998).

A prática docente exige um domínio pedagógico dos conteúdos, sustentado no conhecimento científico dos mesmos conteúdos. Portanto, para um pleno exercício da profissão, é fundamental um conhecimento aprofundado daquilo que se ensina, cabendo ao professor refletir acerca das suas práticas e decidir onde e como deve investir, com o objetivo de as melhorar. Levando em consideração estes aspetos, predispus-me à realização deste estudo, que se revelou uma mais-valia para o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos e para o investimento ao nível do desenvolvimento profissional.

A escolha do tema a investigar prendeu-se com aspetos da prática docente que pretendi melhorar e com motivações pessoais associadas a uma área de interesse. Enquadro assim esta experiência didática, a partir da qual pretendi compreender as estratégias utilizadas por alunos do 1.ºano do 1.º ciclo do ensino básico, na resolução de problemas matemáticos de estrutura combinatória.

A revisão da literatura constituiu uma etapa vital e estruturante do processo de investigação na medida que permitiu analisar e recolher informação teórica e empírica essencial ao enquadramento do tema e à realização deste estudo. Compreendi que o raciocínio combinatório traduz-se na capacidade de pensarmos em todas a combinações e variantes possíveis de um acontecimento, ou seja, permite-nos esgotar todas as possibilidades diferentes de uma combinação de variáveis. O seu desenvolvimento constitui uma mais-valia para a aprendizagem e compreensão de conteúdos escolares e para a gestão de inúmeras situações do nosso quotidiano.

A discussão gerada, à volta das potencialidades do raciocínio combinatório, permitiu-me perceber a sua importância para o desenvolvimento cognitivo e para a compreensão de conceitos matemáticos. Apesar de ter verificado que o raciocínio combinatório está associado ao período das operações formais (entre os 12 e os 15 anos), constatei a possibilidade do seu desenvolvimento, logo nos primeiros anos de escolaridade, bem como a pertinência disso para compreensão e aprendizagem futuras de conceitos e fórmulas mais complexos.

Ainda que os manuais escolares do 1.º ciclo do ensino básico incluam alguns exemplos de problemas matemáticos de estrutura combinatória, presumo que o conhecimento das características próprias do cada um destes não é do conhecimento da maioria dos professores. O mesmo acontece relativamente aos princípios básicos que regem o raciocínio combinatório. Não pretendo introduzir agora novas questões, até porque as mesmas não foram investigadas, contudo, as impressões decorrentes das práticas e do trabalho colaborativo, indicam a hipótese desta realidade, que refletia a minha situação antes da realização do presente estudo. Nesse sentido, talvez se justificasse a realização de um estudo que aferisse o entendimento dos professores do 1.º ciclo do ensino básico, sobre Combinatória, Raciocínio Combinatório e problemas matemáticos de estrutura combinatória.

Contextos de ensino e de aprendizagem que envolvam os alunos na resolução de problemas, mais concretamente, problemas de estrutura combinatória, tornam-se excelentes oportunidades para promover o desenvolvimento deste tipo de raciocínio. Para além disso, a heurística associada à resolução destes problemas, estimula o desenvolvimento das capacidades de sistematização e generalização relacionadas com o raciocínio lógico-dedutivo. Por conseguinte, a pretensão deste estudo ultrapassou a mera identificação da heurística associada à resolução dos problemas, tendo sempre subjacente a intenção de promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos.

A resolução de problemas de estrutura combinatória implica a capacidade para descobrir quantas combinações diferentes podem ser feitas com elementos de dois ou de mais conjuntos ou de quantas formas diferentes pode um grupo de objetos aparecer organizado ou associado. Existem quatro tipos de problemas de estrutura combinatória – produto cartesiano, permuta, arranjo e combinação – que se distinguem entre si pelas situações invariantes implícitas à natureza de cada um: enquanto os problemas de produto cartesiano podem envolver dois ou mais conjuntos básicos cujos elementos se combinam entre si para formar subconjuntos, os problemas de arranjo, permuta e combinação envolvem somente um conjunto básico, cujos elementos se combinam entre si para formar subconjuntos. A diferença entre os três últimos reside no facto da ordem dos elementos contar, ou não, para a formação de novos subconjuntos.

A fase empírica do estudo compreendeu uma intervenção em contexto de sala de aula, sustentada no desenvolvimento de uma unidade didática onde os alunos resolveram seis situações envolvendo os quatro tipos de problemas de estrutura combinatória, que suscitaram o interesse e a curiosidade dos alunos, fator que contribuiu decisivamente para o envolvimento dos alunos na sua resolução.

Relativamente aos problemas, envolvendo o produto cartesiano e o arranjo, propus dois problemas para cada um dos casos. A intenção foi a de aumentar o grau de dificuldade, aplicando uma situação de extensão. Esta intenção objetivou aferir aprendizagens anteriores e consolidar conhecimentos no que concerne às características (invariantes) dos problemas. Para além disso, pretendi observar se o desempenho dos alunos, na resolução do segundo problema, apresentava evidências da sistematização e generalização de ideias e processos.

Os resultados observados, a partir da extensão do problema de produto cartesiano, levaram-me a concluir que, deveria ter-me limitado ao aumento do número de variáveis. O facto de ter incluído também o aumento dos conjuntos básicos envolvidos, implicou um obstáculo à resolução do problema não permitindo que a grande maioria dos alunos conseguisse encontrar uma estratégia válida para representar o raciocínio seguido. Neste caso, a distribuição de materiais manipuláveis revelou-se essencial para a criação de condições conducentes à resolução do problema, permitindo que alguns alunos conseguissem representar o raciocínio seguido, a partir de representações mais sistematizadas.

A extensão do problema de arranjo consistiu no acrescento de um elemento que originou maior número de possibilidades. No cômputo geral foi possível verificar um processo gradual de evolução nos desempenhos dos alunos, destacando-se o facto de todos mostrarem ter compreendido situações de invariância associadas ao arranjo. Julgo que o esquema definido para a estruturação dos vários momentos da aula se mostrou adequado na medida que propiciou contextos de aprendizagem onde os alunos descobriram estratégias próprias de resolução, discutiram e explicitaram ideias e processos e justificaram resultados.

De facto, durante o tempo destinado ao trabalho autónomo, fui-me apercebendo que, gradualmente, os alunos revelavam dinâmicas de trabalho mais ativas e objetivas no que concerne às decisões acerca das estratégias a utilizar. As suas produções foram surgindo mais organizadas e evidenciaram alguma tendência para a simplificação do processo de resolução. Destaco o momento destinado às entrevistas pelo benefício acrescido que trouxe ao processo de ensino e de aprendizagem, porque permitiu a interpretação do raciocínio subjacente às produções dos alunos e, em simultâneo, a orientação de aprendizagens em contexto de ensino individualizado. Pese embora a importância das entrevistas para o desenvolvimento deste estudo, há que refletir acerca do seu impacto nos momentos de discussão, uma vez que os alunos que foram sujeitos a entrevista acabaram por revelar menor interesse ou então, munidos de saberes entretanto adquiridos, adiantaram respostas limitando um pouco a intervenção e o raciocínio dos restantes colegas.

Não obstante, confirmou-se a relevância dos momentos coletivos destinados à discussão e sistematização de conhecimentos e capacidades, dado terem contribuído significativamente para o desenvolvimento da comunicação matemática, bem como para a promoção de melhores desempenhos ao nível da organização e da capacidade de generalização de ideias e processos. Estes foram momentos destinados à validação, ou não, de estratégias, à reflexão conjunta e ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio e do pensamento matemático. Quer durante os momentos reservados às entrevistas, quer durante os reservados à discussão, penso ter conseguido que os alunos iniciassem um processo de desenvolvimento de estratégias mais sistematizadas de organização do pensamento e de capacidades de generalização.

Esta intervenção didática, centrada na resolução de problemas, pretendeu criar contextos de aprendizagem que conduzissem os alunos no levantamento de hipóteses e na tomada de decisões alavancadas na análise e na dedução. Contudo, tive sempre em perspetiva o facto dos alunos se encontrarem no período das operações concretas, como tal condicionados cognitivamente no que se refere antecipação de hipóteses. Verifiquei, de acordo com a terminologia utilizada por Canavarro e Pinto (2012), que as estratégias de raciocínio utilizadas pelos alunos para representar os seus raciocínios, se consubstanciaram em representações icónicas (desenhos), símbolos não convencionais (esquemas de linhas, tabelas e códigos de cores) e representações simbólicas convencionais (escrita).

Ao longo da resolução dos vários problemas apresentados observou-se uma evolução gradual das representações, na medida em que se foram tornando mais organizadas e sistematizadas. Foi possível observar situações onde os alunos foram fixando todas as variáveis (elementos do ou dos conjuntos) e procederam a todas as combinações possíveis, apresentando assim uma estratégia correta e bem estruturada de resolução. É evidente que isto não se observou, da mesma maneira, em todos os alunos nem se associou sempre a estratégias bem-sucedidas. Na verdade, foi possível identificar três grupos distintos no que concerne ao grau de consecução e correção das estratégias de resolução: (i) alunos com resoluções desorganizadas e incorretas; (ii) alunos com resoluções incompletas mas evidenciando um raciocínio sistematizado e (iii) alunos com resoluções corretas e sistematizadas.

Saliente-se que nem todos conseguiram utilizar estratégias válidas, contudo, todos tentaram resolver os problemas demonstrando evidências do raciocínio combinatório e progressos a este nível. As discussões geradas, a partir destas tarefas, proporcionaram aos alunos oportunidades de partilha e esclarecimento de ideias, fomentando a utilização de linguagem matemática e a aprendizagem a partir de perspetivas diferenciadas.

Concluiu-se ainda que os desempenhos da maioria dos alunos refletiu um desenvolvimento progressivo de capacidades no que concerne ao raciocínio combinatório, traduzidas nos seguintes aspetos: (i) apropriação de alguns princípios e propriedade subjacentes ao raciocínio combinatório; (ii) diversificação e aperfeiçoamento das estratégias utilizadas; (iii) utilização de alguma terminologia associada; (iv) maior correção das resoluções; e (v) maior rapidez de execução.

Face ao exposto, penso poder concluir que a criação de contextos adequados permitiu que alunos de seis e sete anos de idade mobilizassem estratégias próprias para resolver problemas matemáticos de estrutura combinatória. Os resultados alcançados permitiram a observação de uma evolução gradual na forma como foram representando, estruturando e justificando o raciocínio seguido.

Em suma, este estudo evidenciou a possibilidade do desenvolvimento do raciocínio combinatório por alunos de nível de escolaridade inicial, confirmando a pertinência da discussão acerca do papel da escola na criação de contextos e procedimentos envolvendo este tipo de raciocínio. Como tal, continuarei a realizar um trabalho sistemático, nesse sentido, por forma a dotar os alunos de competências que lhes permitam enfrentar a aprendizagem de conceitos mais complexos e abstratos associados à combinatória. A realização deste estudo permitiu um conjunto de experiências, reflexões, evidências e conclusões a ter em conta em futuros momentos de tomada de decisões. Os momentos destinados à análise e tratamento da informação recolhida (registos áudio e vídeo) revelaram-se extremamente significativos, uma vez que permitiram uma observação atenta e crítica acerca das minhas práticas, do modo como conduzi as aulas, geri as interações e os momentos de questionamento. Ao mesmo tempo constituiu um fator significativo de desenvolvimento profissional uma vez que, me dotou de uma maior intuição e conhecimento sobre a temática e suas possíveis abordagens em contexto de sala de aula.

Referências Bibliográficas

Azevedo, J. (2013). *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

Barreto, F. & Borba, R. (2011a). Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife* (pp.1-12). Recuperado de http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/artigos/876.pdf.

Barreto, F. & Borba, R. (2011b). O Papel das Representações Simbólicas no Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Educação de Jovens e Adultos. *Anais Ebrapem*. 1(1).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borba, R., Rocha, C., Martins, G. & Lima, R. (2009). O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. *Atas do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Paraná.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na educação básica. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador-BA: SBEM

Borba, R. & Lima R. (2010). O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio. *Atas do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. (X ENEM). Salvador-BA: SBEM

Canavarro, A. & Pinto, M. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante*, 12 (2), 55.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (1988) Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics. Teacher Education*, 16 (1), 1-6.

Costa, C., Rocha, G. & Acúrcio, M., (2004), *A Entrevista*. Documento não publicado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – Departamento de Educação, Lisboa. Recuperado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi1/entrevistat2.pdf

Coutinho, C. & Chaves, J., (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal, *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221-243.

Decreto Lei n.º 43/2007. (2007). Regime jurídico da habilitação profissional para a docência na educação pré-escolar e nos ensinos básico e secundário. *Diário da República* 1.ª Série. N.º 38 (07-02-22), 1320-1328.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psycologist*, 23, 167-180.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In Jones., A. (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.* Springer, New York, 121-141.

Estrela, A. (1994). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores*. Porto: Porto Editora.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa* (Coleção Leitura). São Paulo: Paz e Terra.

Gonçalves, J., (2009). Desenvolvimento profissional e carreira docente — Fases da carreira, currículo e supervisão, *Sísifo - Revista de Ciências da Educação,* 8, 23-36.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no Ensino-Aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.ºCiclo do Ensino Básico.* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Guimarães, H. (2003). Algumas dicotomias no ensino da Matemática. In M. Miguéns (Ed.) *O Ensino da Matemática, situação e perspectivas*. (pp. 89-100). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence*. London: Routledge and Kegan Paul.

Kantowski, M. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.

Magina, S. (2005) A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. *Atas do XVII Encontro Regional de Professores de Matemática*. Campinas: IMECC/UNICAMP.

Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Eds). (2010). *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms.Vol.47*. NewYork:Springer.

Martinho, M., & Ponte, J. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Ed.), *Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 103-123). Setúbal: Associação Portuguesa de Matemática.

Matias, P., Santos, M. e Pessoa, C. (2011). Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de Arranjo. *Atas da XIII Conferência InterAmericana de Educação Matemática.* Recife: CIAEM.

Mayo, R. (2007). Connections Between Communication and Math Abilities. *Summative Projects for MA Degree. Paper 4*. Recuperado de http://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1021&context=mathmidsummative

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

MEC. (2013). *Metas de aprendizagem. Ensino básico-1.º Ciclo/Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

MEC/SEF. (1997). *Parâmetros Nacionais Curriculares Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto - Secretaria de Educação Fundamental. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf.

Meirieu, P. (1998). *Aprender... sim, mas como?* Porto Alegre: Artes Médicas.

Mekhmandarov, I. (2000). Analysis and synthesis of the Cartesian product by kindergartenchildren. In T. Nakahara e M. Koyama (Orgs), *Proceedings of the 24th Annual Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education*., 3, (pp. 295-301). Hiroshima: PME.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey--Bass Publishers.

Mira, S., Dinis, R., Massa, S., e Rebelo, F. (2010). Aprender ensinando: investigação e desenvolvimento na docência. In C. Leite; A. Moreira; J. Pacheco; J. Morgado; A. Mouraz (Coords.), *Atas do IX Colóquio sobre Questões Curriculares / V Colóquio Luso-Brasileiro* (pp. 3637-3648). Porto: Centro de Investigação e Intervenção Educativas e Instituto de Educação – U. Minho

Moreira, S. A., & Fonseca, L. (2009). A comunicação e a resolução de problemas envolvendo padrões. *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática.* Vila Real: SPIEM- Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Morgado, A., Carvalho, J., Carvalho, P. & Fernandez, P. (1991). *Análise combinatória e probabilidade*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Moro, M. & Soares, M. (2006). Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Revista Educação Matemática Pesquisa*., 8 (1), 99-124.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. Recuperado de http://www.apm.pt/files/177852_C63_4dd79e809a3f1.pdf.

NCTM. (2007).Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa, APM.

Nóvoa, A. (1992). *Os Professores e a sua Formação.* Lisboa: Publicações Dom Quixote/Instituto de Inovação Educacional.

Nunes, T. & Bryant, P. (2001). *Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas*. São Paulo: Proem.

Pacheco, J. (1995). Análise curricular da avaliação. In Pacheco, J.; Zabalza, M. (Eds.). *A avaliação dos alunos dos ensinos básico e secundário*. Braga: Universidade do Minho – Instituto de Educação e Psicologia, 39-49.

Pereira, P., Gago, L. & Guerreiro, A. (2010). Primeiros passos no pensamento combinatório. Uma experiência na sala de aula do 1.ºano de escolaridade. *Educação e Matemática,* 106, 3-6.

Pessoa, C. & Borba, R. (2008). Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório?. *Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*., Recife: UFRPE.

Pessoa, C. (2009). *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2.ºano do ensino fundamental ao 3.ºano do ensino médio*. (Tese de Doutoramento). Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco.

Pessoa, C., Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Revista ZETETIK*, 17 (31), 105-150.

Pessoa, C., & Santos, L. (2012). Estudo de caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções? *Revista Eletrônica de Educação,* 6 (1), 358-382.

Pessoa, C. & Silva, M. (2013). A Aprendizagem da Combinatória por Alunos do 9ºano do Ensino Fundamental. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2 (3), 90-113.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, 2(2), 95-108.

Ponte, J. P. (2005). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 267-284). Lisboa: APM.

Ponte, J.. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., … Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20(2)*, 39-74.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2006). *Didáticas da Matemática no 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., … Oliveira, P., (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., … Oliveira, P., (2013). *Sobre o Programa de Matemática para o Ensino Básico recentemente homologado*. Retirado de http://www.apm.pt/files/205600_SobreProgrMatHomol (2013) -Autores_525438d8479a4.pdf.

Ponte, J. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática, *Quadrante*, (3), 3-18.

RIVED - Rede Interativa Virtual de Educação. (2015). *Objeto de Aprendizagem Combinação*. Recuperado em 16 junho, 2015 de http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf.

RIVED - Rede Interativa Virtual de Educação. (2015). *Objeto de Aprendizagem Permutação*. Recuperado em 16 junho, 2015 de http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/permutacao/permutacao.swf.

RIVED - Rede Interativa Virtual de Educação. (2015). *Objeto de Aprendizagem Arranjo.* Recuperado em 16 junho, 2015 de http://www.RIVED.mec.gov.br/site_objeto_ver.php?codobjeto=218.

Saraiva, M., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, 12(2), 25-52.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Silva, G. (2014). *Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.ºano do Ensino Básico* (Dissertação de Mestrado). Escola Superior de Educação de Viseu.

Silva, J. (2010). *O efeito da explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.

Silva, J., Spinillo, A. (2011). Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. *Atas da XIII Conferência InterAmericana de Educação Matemática.* Recife: CIAEM.

Taxa, F. (2001). *Problemas multiplicativos e processos de abstração em crianças na 3ª. série do ensino fundamental.* (Tese de Doutoramento). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Stenhouse, L. (1981). *The verification of descriptive case studies*. Recuperado em 30 agosto, 2015 de https://www.uea.ac.uk/documents/4059364/4994243/Stenhouse-1981- The+Verification+of+descriptive+Case+Studies.pdf/917bf638-316e-4fc8-b23f-d0a30b7a7e3d.

Vale, I. & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da matemática, (pp. 347-360)*. Portalegre: SPIEM.

Vale, I. (2011). *Tarefas Desafiantes e Criativas*. Recuperado em 20 maio, 2015 de http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/isabel.pdf.

Veia, L. (1996). *A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico. Três estudos de caso* (Dissertação de de Mestrado), Universidade de Lisboa.

Veia, L., Brocardo, J. & Ponte, J. P. (2014). Práticas de preparação de uma tarefa de organização e tratamento de dados com características investigativas. In J. Brocardo, A. M. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Orgs.) (2014). *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2014* (323-336). Sesimbra: SPIEM.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-171.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods.* Londres: Sage Publications.

Anexos

Índice de Anexos

ANEXO 1

Pedido de autorização à Diretora do Agrupamento

Exmª Sra.Diretora

do Agrupamento de Escolas

Professor Paula Nogueira – Olhão

Assunto: Pedido de autorização para a realização de trabalho de investigação.

Eu, Ana Cristina Nogueira Tendinha, professora do 1º ciclo do ensino básico, a lecionar numa das escolas do Agrupamento (EBI/JI – JCM – Olhão) do qual Vossa Excelência é diretora, estou a desenvolver um estudo acerca das estratégias mobilizadas pelos alunos de 1º ano na resolução de problemas que envolvam o raciocínio combinatório.

Este estudo surge no âmbito da realização de uma Tese de Mestrado em Ensino do 1º e 2º ciclos do ensino básico, na especialidade de Didática da Matemática, que me encontro a realizar na Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve.

Neste seguimento, solicito a Vossa Excelência, autorização para proceder, na turma da qual sou professora titular (1ºB), à observação e recolha de dados a partir de trabalhos realizados pelos alunos. A recolha de dados basear-se-á na gravação de pequenas entrevistas, em vídeo e áudio, para aferir estratégias e raciocínios mobilizados pelos alunos para resolver problemas de estrutura combinatória.

Comprometo-me desde já, a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que serão utilizados apenas no âmbito da referida investigação, por mim e pelo meu orientador, e para divulgação de resultados em encontros de natureza científica.

Mais informo que também procederei à solicitação das autorizações necessárias, junto de todos os encarregados de educação da turma.

Olhão, 10 de fevereiro de 2015.

A professora

(Ana Cristina Nogueira Tendinha)

ANEXO 2

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmº(ª) Sr(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito da realização do Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, na especialidade de Didática da Matemática, na Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, estou a desenvolver um estudo acerca das estratégias mobilizadas pelos alunos de 1º ano para resolver problemas que envolvam o raciocínio combinatório.

Neste seguimento, e tal como vos tinha informado anteriormente, necessito de proceder à observação e recolha de dados durante o 2º e 3º períodos.

A observação/recolha de dados incidirá nas produções dos alunos durante a realização de problemas e será feita a partir de gravações, em vídeo e áudio, de momentos das aulas e pequenas entrevistas, com o objetivo de registar estratégias, raciocínios, argumentos e justificações utilizados pelos alunos.

Para poder proceder este trabalho necessito da sua colaboração que passará por autorizar-me a proceder às referidas gravações junto do seu educando.

Comprometo-me desde já, a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos, que serão utilizados apenas no âmbito do referido estudo, por mim e pelo meu orientador, e para divulgação de resultados em encontros de natureza científica.

Solicito ainda, **que me devolva** apenas o destacável, até ao dia **12 de Fevereiro de 2015**, **caso não concorde** com a participação do seu educando na recolha dos dados acima mencionados.

Agradecendo desde já a atenção dispensada,

A professora da turma

____

(Ana Cristina Nogueira Tendinha)
Olhão 10 de Fevereiro de 2015.

Não autorizo que o meu/minha educando(a)________________________, da turma do 1ºB, participe na recolha de dados dirigida pela Profª Ana Cristina Tendinha, no âmbito do seu estudo de Mestrado.

Data: ___/___/____ O Encarregado de Educação: _________________

ANEXO 3