

Índice

1	Introdução	1
2	Alguns Resultados Clássicos	5
2.1	Preliminares	5
2.2	Centros Notáveis do Triângulo	13
2.2.1	Baricentro	21
2.2.2	Incentro	23
2.2.3	Ortocentro	27
2.2.4	Circuncentro	30
2.3	Outros Resultados	34
3	Recta de Euler	39
3.1	Recta de Euler	39
3.2	Classificação das curvas de segunda ordem	41
3.2.1	Transformação dos coeficientes da equação da curva de segunda ordem quando se muda de referencial cartesiano	42
3.2.2	Invariantes das curvas de segunda ordem	44
3.2.3	Centro das curvas de segunda ordem	46
3.2.4	Simplificação das curvas de segunda ordem com recurso à rotação dos eixos coordenados	47
3.2.5	Classificação das curvas centrais ($D \neq 0$)	47
3.2.6	Classificação das curvas não centrais ($D = 0$)	50
3.3	Cónicas relacionadas com a recta de Euler	54
3.3.1	Caso Elíptico	59
3.3.2	Caso Hiperbólico	63
3.3.3	Caso degenerado	66
3.4	Outros resultados	68
4	Outros centros do triângulo	72
4.1	Coordenadas trilineares	72
4.2	Centros do triângulo	74

4.3	Algumas rectas notáveis	92
4.3.1	Recta de Euler	92
4.3.2	Recta de Nagel	94
4.3.3	Recta de Soddy	94

Capítulo 1

Introdução

A maioria dos autores são consensuais em afirmar que a geometria nasceu no antigo Egipto. De acordo com o historiador grego Heródoto (séc. V a.C.), esta surgiu da necessidade de efectuar medições da terra devido às inundações periódicas do rio Nilo, mas é certo que muitas outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, da Babilónia à China, passando pelas civilizações Hindu. A palavra "geometria" é um vocábulo que deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo = terra*, *metrein = medir*).

Em tempos recuados, a geometria era uma ciência empírica, uma colecção de regras práticas para obter resultados aproximados. Os primeiros géometras foram os matemáticos gregos Thales, Pitágoras e Euclides. Os métodos analíticos foram introduzidos pelo filósofo francês René Descartes apenas no século XVII.

Desde sempre, algumas figuras geométricas como os rectângulos (de ouro), os pentagramas, os círculos entre outras, cativaram a atenção de muitas mentes brilhantes. Os triângulos, em particular, constituem um dos objectos básicos da geometria já que qualquer polígono com mais de três lados é formado por um conjunto de triângulos, ao traçar todas as suas diagonais a partir de um vértice; a resolução de muitos problemas da geometria elementar passa pela comparação de dois ou mais triângulos e a demonstração de certas propriedades fundamentais é feita considerando triângulos adequados.

A geometria do triângulo é de uma riqueza surpreendente e tem apaixonado, durante séculos, matemáticos e entusiastas. Uma notável propriedade dos triângulos é que neles é possível encontrar diversos tipos de centros. De facto, os gregos antigos encontraram quatro deles: incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro. A colinearidade dos centros do triângulo despertou o interesse dos géometras desde que, em 1765, Euler provou que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares; a recta que contém estes pontos

foi, mais tarde, chamada recta de Euler. Um quinto centro, encontrado muito mais tarde, é o ponto de Fermat. Depois disso, centros agora conhecidos como o centro da circunferência dos nove pontos, o ponto Symmedian, o ponto de Gergonne, e o ponto de Feuerbach, para nomear apenas alguns, foram adicionados à literatura. Durante a década de 80 no século XX, observou-se que estes pontos especiais compartilham algumas propriedades gerais que permitiram formalizar a definição de centro do triângulo.

A geometria dinâmica, cujas raízes podem já ser encontradas nos gregos antigos e em outros matemáticos, como por exemplo em Clairault no século XVIII, baseia-se na ideia de movimentar elementos de figuras para ilustrar propriedades geométricas e demonstrar teoremas. A tecnologia dos computadores, na década de oitenta do século XX, possibilitou o desenvolvimento de programas como o Cabri-géomètre, em França e o Geometer's Sketchpad, nos Estados Unidos da América, que permitem a manipulação por computador de objectos geométricos, com impacto e sucesso no ensino da Geometria elementar e na investigação de propriedades geométricas.

Desta forma, o interesse pela geometria do triângulo reacendeu-se nos últimos anos, com a possibilidade da utilização de software informático. Clark Kimberling, Professor de Matemática na University of Evansville é um dos maiores entusiastas da geometria do triângulo. No seu livro [12] para além de serem referidos mais de 400 centros do triângulo é possível encontrar muitas e interessantes propriedades dos mesmos. A lista de centros do triângulo tem aumentado consideravelmente. A mesma está acessível na internet (veja, por exemplo, [13]) e contempla actualmente mais de 3000 centros do triângulo.

Também Paul Yiu, Professor de Matemática na Florida Atlantic University, tem contribuído substancialmente na investigação no domínio da geometria do triângulo. Os seus textos, [24], [25], [26] e [27], são de consulta quase obrigatória para aqueles que desejam iniciar e/ou aprofundar o estudo dos triângulos e das suas propriedades. Paul Yiu é ainda o editor da revista científica on-line Forum Geometricorum que, desde 2001, publica alguns dos mais recentes resultados na área da geometria.

Como foi referido, embora o estudo dos triângulos se tenha iniciado há vários milénios, existem ainda variadíssimas questões em aberto. De facto, em [15], Michael Longuet-Higgins, afirma "In mathematics, it occasionally happens that a subject thought to be completely worked out yields a surprising new result, indicating some possibly deeper relationships still to be discovered. Such may have occurred with the geometry of the triangle in the Euclidean plane - a subject inaugurated by Greek geometers, given new life by Euler and other celebrated mathematicians in the eighteenth and nineteenth centuries...".

Embuída deste espírito, no âmbito do trabalho científico do meu Estágio

Pedagógico, comecei a estudar algumas propriedades da recta de Euler. Todo esse trabalho despertou em mim um maior interesse pela geometria e em particular pela geometria do triângulo. Foi nesse sentido que, após terminar o curso, continuei a minha pesquisa sobre este assunto e, no momento de escolher o tema da dissertação, optei pela geometria do triângulo.

Como professora do ensino básico e secundário preocupa-me o facto de os alunos demonstrarem cada vez menos conhecimento dos conceitos geométricos elementares. Mesmo conhecendo certas definições ou os enunciados de alguns teoremas - como, por exemplo, o de Pitágoras - os alunos apresentam muitas dificuldades em aplicá-los na resolução de problemas.

Considero que o ensino de geometria pode contribuir para a formação do aluno, favorecendo um tipo particular de pensamento - buscando novas situações, sendo sensível aos seus impactos visuais e interrogando sobre eles. Ela permite o desenvolvimento da "arte da especulação," traduzida na questão "o que aconteceria se...", que expressa o estilo hipotético-dedutivo do pensamento geométrico.

O ensino da geometria, além de possuir um vasto campo de aplicação prática, permite igualmente ao educando construir conhecimentos teóricos. Estes conhecimentos teóricos, compostos por definições, temas e teoremas, possibilitam um amplo desenvolvimento intelectual do educando, ou seja, um grande desenvolvimento da sua interpretação e do seu raciocínio teórico e prático.

Preocupados com os rumos do ensino da geometria, pesquisadores em todo o mundo têm concedido destaque ao tema "o que" ensinar de geometria e "como" fazê-lo. Nesta busca em resgatar a qualidade do ensino da geometria, quero ressaltar a necessidade de cultivar e desenvolver não apenas o pensamento sequencial, preponderante na álgebra, mas também o pensamento visual, dominante na geometria, já que ambos são essenciais aos problemas matemáticos.

A tese encontra-se estruturada da seguinte forma:

O capítulo 1 divide-se em três partes. Na primeira parte, podemos encontrar os resultados da geometria do triângulo mais conhecidos e as respectivas demonstrações. Aqui podemos encontrar, por exemplo, o teorema de Pitágoras e de Thales, a lei dos senos e dos cossenos e a fórmula de Herão. Na segunda parte, faz-se o estudo dos quatro centros do triângulo mais conhecidos (baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro). E, por último, são apresentados, na terceira secção, outros resultados, como por exemplo a definição de triângulo órtico, triângulo medial e circunferência dos nove pontos. Neste capítulo, são apresentadas demonstrações completas e pormenorizadas da grande maioria dos teoremas, e muitas sugestões para outras.

Um dos resultados mais curiosos da geometria elementar é o facto de,

para qualquer triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro estarem sempre alinhados (recta de Euler). É, portanto, com este teorema e respectiva demonstração que se inicia o capítulo 2. Na secção 2 é apresentada a classificação das curvas de segunda ordem. Na terceira secção do capítulo 2 é considerado o problema da construção de um triângulo quando são conhecidos dois dos seus vértices e a recta de Euler. Os resultados apresentados nesta secção são originais e fazem parte do artigo [22].

No capítulo 3 são apresentados alguns resultados avançados da geometria do triângulo, em particular, são introduzidos os vinte e cinco primeiros centros do triângulo, que são enumerados por X_1 até X_{25} , e algumas rectas notáveis. O nosso principal objectivo é mostrar a diversidade dos mesmos e, por isso, a exposição das propriedades e resultados deste capítulo é feita de maneira similar à utilizada por Kimberling no seu livro [12]. Como o autor refere, estas propriedades podem ser verificadas com recurso a software informático, como por exemplo o Geometer's Sketchpad. É necessário ainda assinalar que os resultados do Capítulo 3 estão formulados na linguagem das coordenadas trilineares que constitui uma das principais ferramentas no estudo dos triângulos.

Este sistema de coordenadas foi introduzido por Plücker em 1835 sendo, em conjunto com as coordenadas baricêntricas, um dos sistemas homogéneos de coordenadas que os estudiosos da geometria do triângulo mais utilizam. Sobre as coordenadas trilineares e baricentricas recomenda-se a consulta dos livros [4], [7], [12] e [26].

Capítulo 2

Alguns Resultados Clássicos

2.1 Preliminares

Neste capítulo pretendemos enunciar algumas das mais referidas e conhecidas propriedades dos triângulos que, como se sabe, são polígonos com três lados. Mas, antes é necessário estabelecer e/ou recordar certos conceitos e notações que envolvem os triângulos.

É comum considerar os vértices do triângulo no sentido anti-horário como se mostra na figura 2.1.

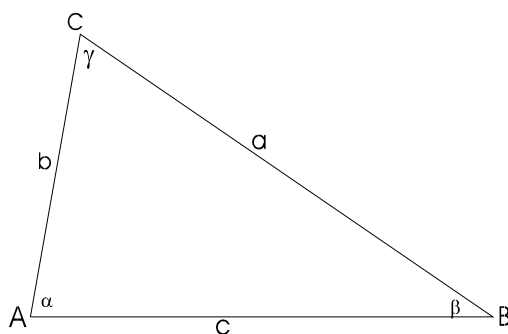


Figura 2.1:

Os ângulos internos do triângulo serão simbolizados com as letras α , β e γ . Os lados opostos aos vértices são denotados pela respectiva minúscula: a , b e c . É necessário assinalar que estes símbolos podem também indicar os comprimentos dos lados, dependendo do contexto.

Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos.

No que diz respeito ao comprimento dos lados, um triângulo diz-se: *equilátero* se tem todos os lados iguais, *isósceles* se possui dois lados iguais ou *escaleno* quando tem os três lados diferentes.

Quanto à amplitude dos ângulos, o triângulo pode ser *acutângulo* no caso de ter todos os ângulos internos agudos, *obtusângulo* se tem um ângulo interno obtuso ou *rectângulo* se um dos seus ângulos internos for recto. Neste último caso, o lado maior do triângulo (que se opõe ao ângulo recto) é a *hipotenusa* e os dois menores chamam-se *catetos*.

Os triângulos têm sido estudados desde os primórdios da Matemática por alguns dos mais conhecidos matemáticos. Talvez o mais referido seja Pitágoras¹ que dá nome ao famoso teorema, que relaciona o comprimento dos catetos com o da hipotenusa.

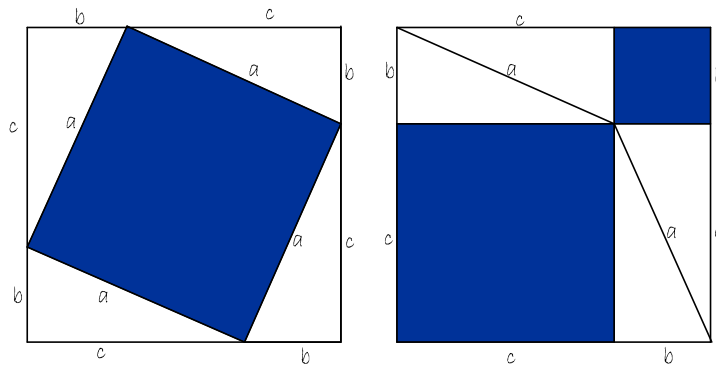
Teorema 1 (teorema de Pitágoras). *Se o triângulo ABC for um triângulo rectângulo de hipotenusa [BC], então*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração: Conhecem-se bastantes demonstrações do teorema de Pitágoras, como por exemplo as que podemos encontrar em [1], [2], [14] e [25], mas presume-se que a seguinte tenha sido a que Piágoras apresentou. Considera-se um triângulo rectângulo cujos catetos medem, numa dada unidade, b e c , e a hipotenusa mede a .

A demonstração é puramente geométrica e apoia-se nas duas figuras seguintes:

¹Pitágoras, o fundador da escola pitagórica, nasceu em Samos pelos anos 571-70 a.C. Em 532-31 foi para a Itália, na Magna Grécia, e fundou em Crotona, colônia grega, uma associação científico-ético-política, que foi o centro de irradiação da escola e encontrou partidários entre os gregos da Itália meridional e da Sicília. Pitágoras aspirava - e também conseguiu - a fazer com que a educação ética da escola se ampliasse e se tornasse reforma política; isto, porém, levantou oposições contra ele e foi constrangido a deixar Crotona, mudando-se para Metaponto, aí morrendo provavelmente em 497-96 a.C. Talvez a obra mais famosa de Pitágoras seja seu teorema, relacionando os lados de um triângulo rectângulo. Sabe-se agora que, antes de Pitágoras, este teorema já era conhecido. Os Egípcios conheciam a relação no caso particular do triângulo cujos lados fossem respectivamente 3, 4 e 5, de tal modo que $3^2+4^2=5^2$. Pitágoras assegurou que a relação é verdadeira para todos os triângulos rectângulos possíveis.



Cada figura é um quadrado de lado $b + c$.

A primeira foi subdividida em quatro triângulos iguais ao inicial e um quadrado de lado igual à hipotenusa a . A segunda figura também contém quatro triângulos iguais ao inicial.

Ora, se temos dois quadrados iguais e ambos contêm quatro triângulos iguais ao inicial, então as regiões sombreadas que restam num quadrado e noutro têm que ter a mesma área. Conclui-se então que

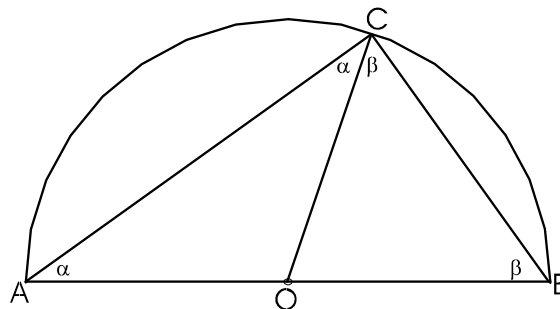
$$a^2 = b^2 + c^2.$$



Teorema 2 (teorema de Thales²). *Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto.*

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC inscrito numa semicircunferência, de centro O e raio R , como se mostra na figura seguinte:

²Thales de Mileto (624 a.C - 546 a.C.) nasceu e morreu na cidade de Mileto. Filósofo grego, conhecido pelas suas teorias cosmológicas baseadas na hipótese de ser a água o constituinte de toda a matéria existente no universo. Não há escritos sobre a vida de Thales, sendo, portanto, difícil o conhecimento de sua obra. O historiador grego Heródoto fala sobre os trabalhos de Thales no campo da Geometria, que ele aprendeu com os egípcios, creditando-lhe a demonstração de cinco teoremas. Thales foi mestre de um grupo de seguidores de suas idéias, chamado "Escola Jâniá" e foi o primeiro homem da História a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas. Como disse Aristóteles (outro matemático grego), "para Thales a questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos".



Como $\overline{OB} = \overline{OC} = R$, então $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \beta$ e como $\overline{OA} = \overline{OC} = R$ então $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \alpha$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° ,

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

ou seja,

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$



O teorema que se segue pode ser considerado como uma generalização do teorema de Pitágoras.

Teorema 3 (lei dos cossenos). *Em qualquer triângulo ABC são válidas as fórmulas:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

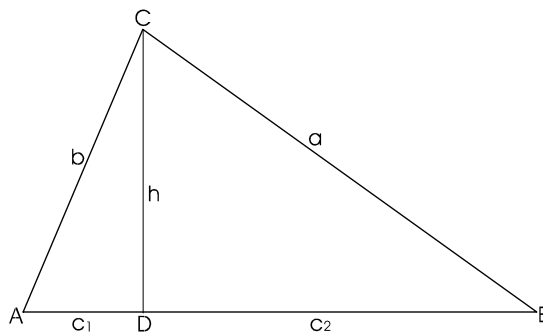
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

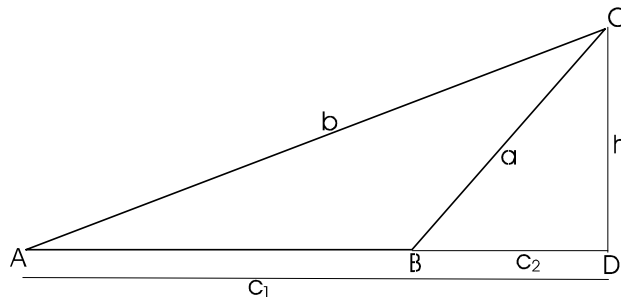
Demonstração: Sem perda de generalidade, seja D o ponto da recta AB tal que $CD \perp AB$ (o segmento $[CD]$ diz-se a altura do triângulo ABC relativamente ao vértice C , (veja a definição 3), e faça-se $h = \overline{CD}$.

Há a distinguir essencialmente dois casos:

i) se α e β forem ambos ângulos agudos, o ponto D está entre A e B ;



ii) se α for um ângulo agudo e β for obtuso, o ponto B está entre A e D .



Em ambos os casos, os catetos do triângulo ADC são h e c_1 , e os do triângulo BDC são h e c_2 , sendo

$$\begin{aligned}c_1 &= b \cos \alpha, \\c_2 &= a \cos \beta.\end{aligned}$$

No primeiro caso, c_1 e c_2 são positivos; no segundo, $c_1 > 0$ e $c_2 < 0$. Em qualquer caso,

$$c = c_1 + c_2.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras a cada um dos triângulos rectângulos BDC e ADC , obtemos

$$\begin{aligned}a^2 &= h^2 + c_2^2, \\b^2 &= h^2 + c_1^2.\end{aligned}$$

E, daqui

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c_2^2 - c_1^2 = \\&= b^2 + (c - c_1)^2 - c_1^2 = \\&= b^2 + c^2 - 2cc_1 = \\&= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.\end{aligned}$$

■

Teorema 4 (lei dos senos). *Seja R o raio da circunferência circuncunscrita ao triângulo ABC , então*

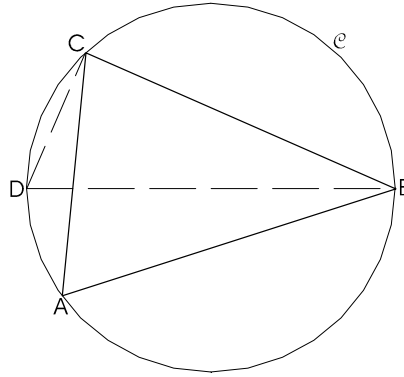
$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma,$$

isto é,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, basta provar a primeira igualdade.

Sejam \mathcal{C} a circunferência circunscrita ao triângulo ABC e D o ponto de \mathcal{C} diametralmente oposto a B .



i) Se for $D = C$, o ângulo BAC está inscrito numa semicircunferência, e portanto $\alpha = 90^\circ$ (veja teorema 2) e $\sin \alpha = 1$. Logo a igualdade é verdadeira neste caso.

ii) Se for $D \neq C$, então os ângulos BAC e BDC ou são iguais ou são suplementares. Em qualquer caso

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BDC}).$$

Mas, o triângulo DBC é rectângulo de hipotenusa $[DB]$ e, portanto,

$$\sin \alpha = \sin(\widehat{BDC}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}} = \frac{a}{2R}.$$

■

De seguida, serão formulados alguns resultados sobre a área do triângulo.

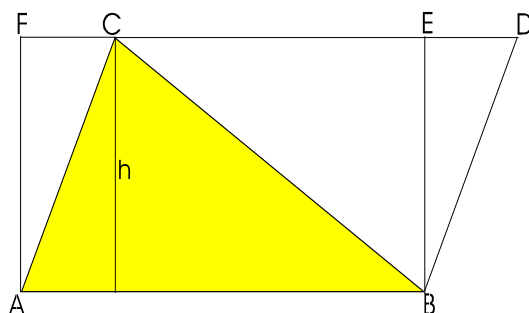
Teorema 5 *A área de um triângulo ABC de base c e altura h é dada pela fórmula*

$$A_{\Delta} = \frac{c \times h}{2}. \quad (2.1)$$

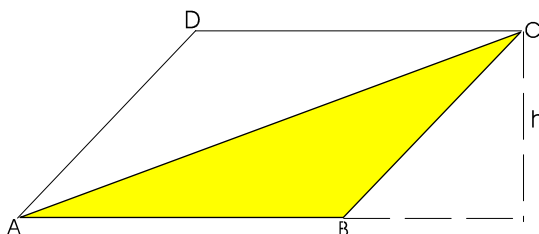
Demonstração: Temos que considerar três casos:

i) No caso do triângulo ABC ser rectângulo, é evidente que a sua área é metade da área do rectângulo com a mesma base e a mesma altura.

ii) No caso do triângulo ABC ser acutângulo, construímos o triângulo ABC , com base $[AB]$ e altura h . Traçamos uma recta paralela ao segmento $[AB]$ que passa pelo ponto C e uma recta paralela ao segmento $[AC]$ que passa pelo ponto B e dessa forma construímos um paralelogramo $ABCD$ cuja área igual à área do rectângulo $ABEF$, logo é o dobro da área do triângulo ABC .



iii) No caso do triângulo ABC ser obtusângulo procedemos da mesma forma que para o triângulo acutângulo. E, como se mostra na figura seguinte, obtemos também um paralelogramo $ABCD$ cuja área é o dobro da área do triângulo ABC .



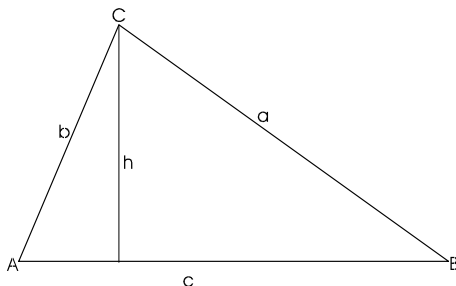
■

Uma demonstração alternativa deste teorema poderá ser consultada em [14].

Teorema 6 *A área de um triângulo, dados dois lados e o ângulo compreendido entre eles, é dada por*

$$A_{\Delta} = \frac{bc \sin \alpha}{2}. \quad (2.2)$$

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC de base c e altura h .



Começemos por observar que a altura do triângulo ABC relativamente à base $[AB]$ é

$$h = b \sin \alpha.$$

Substituindo h em (2.1) obtemos

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{bc \sin \alpha}{2}. \quad (2.3)$$

■

De seguida, apresentamos a conhecida fórmula de Herão³ que permite efectuar o cálculo da área de um triângulo ABC a partir do comprimento dos lados.

Teorema 7 (fórmula de Herão). *Seja $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ o semiperímetro do triângulo ABC .*

Então

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demonstração: A demonstração que se segue poderá ser encontrada no livro [1], mas outras demonstrações poderão ser consultadas em [25], [26] ou [27].

Começemos por observar que, de acordo com (2.3), a área do triângulo ABC é dada por

$$A_{\Delta} = \frac{bc \sin \alpha}{2},$$

ou seja

$$A_{\Delta} = \frac{bc\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{2}. \quad (2.4)$$

Segundo a lei dos cossenos (teorema 3),

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

³Herão foi inventor, géometra e escritor, possivelmente nascido em Alexandria, no Egipto. Os historiadores não sabem em que altura viveu exactamente (existem 3 teorias: 250 a.C, 150 a.C. ou 60 a.C.). Foi essencialmente um autor de muitos livros de Física e Matemática, especialmente na geometria, da antiga Grécia. São conhecidas 18 obras com sua assinatura, podendo ser também considerado um matemático em função da autoria da fórmula de Herão para cálculo da área de um triângulo, demonstrada em "A Métrica", obra encontrada (1896), e um engenheiro, seguidor das idéias de Ctesibius.

expressão que, substituída em (2.4) dá

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta} &= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 - (b - c)^2) ((b + c)^2 - a^2)} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)} = \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \times \frac{b + c - a}{2} \times \frac{a + c - b}{2} \times \frac{a + b - c}{2}} = \\
 &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 8 *A área do triângulo ABC, conhecidos os três lados e o raio da circunferência circunscrita é dada por*

$$A_{\Delta} = \frac{abc}{4R}. \quad (2.5)$$

Demonstração: A partir da lei dos senos (teorema 4) resulta que

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

e, substituindo em (2.2), obtemos (2.5). ■

2.2 Centros Notáveis do Triângulo

Os segmentos que unem cada vértice de um triângulo aos pontos do lado oposto são referidos como **cevianas**, em homenagem ao italiano Giovanni Ceva⁴, que em 1678 estabeleceu uma condição necessária e suficiente em termos de proporções de segmentos de recta, para que três rectas que passem por três vértices de um triângulo sejam concorrentes:

Teorema 9 (teorema de Ceva). *Seja ABC um triângulo e P, Q e R três pontos, respectivamente sobre os lados [AB], [BC] e [AC], (veja a figura*

⁴Giovanni Ceva (1647-1734), irmão de Tommaso, nasceu em Milão e faleceu em Mantua. Foi educado num colégio de Jesuítas em Milão. Fez publicar na obra *De lineis rectis* (1678), o teorema agora designado de Ceva e considerado dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX.

2.2). As cevianas $[CP]$, $[AQ]$ e $[BR]$ do triângulo ABC concorrem num ponto se e só se

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1. \quad (2.6)$$

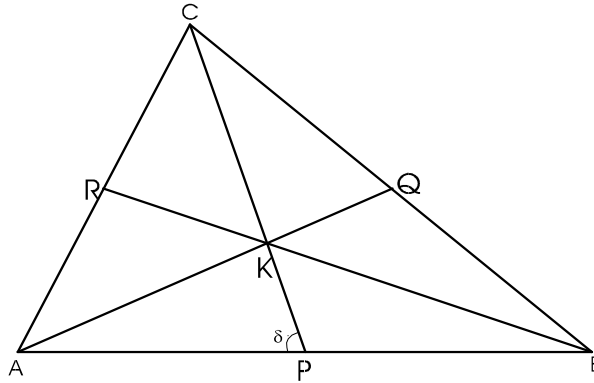


Figura ~2.2:

De seguida, será exposta a demonstração apresentada do livro [1]. Contudo, demonstrações alternativas poderão ser consultadas nos livros [5], [9], [16], [18] ou [25]. Para além disso, em [25] podemos encontrar uma versão trigonométrica do teorema de Ceva e a sua demonstração.

Demonstração: Se as cevianas concorrem em K os triângulos AKP e PKB têm a mesma altura relativamente ao vértice K , e são iguais as alturas dos triângulos ACP e PCB relativamente à base $[AB]$.

Aplicando o teorema 6, temos

$$A_{\Delta[AKP]} = \frac{1}{2} \overline{AP} \overline{PK} \sin \delta$$

e

$$A_{\Delta[PKB]} = \frac{1}{2} \overline{PB} \overline{PK} \sin (180^\circ - \delta) = \frac{1}{2} \overline{PB} \overline{PK} \sin \delta.$$

Logo

$$\frac{A_{\Delta[AKP]}}{A_{\Delta[PKB]}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}},$$

e analogamente,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{A_{\Delta[ACP]}}{A_{\Delta[PCB]}}.$$

Então

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{A_{\Delta[ACP]}}{A_{\Delta[PCB]}} = \frac{A_{\Delta[AKP]}}{A_{\Delta[PKB]}} = \frac{A_{\Delta[ACP]} - A_{\Delta[AKP]}}{A_{\Delta[PCB]} - A_{\Delta[PKB]}} = \frac{A_{\Delta[AKC]}}{A_{\Delta[BKC]}}, \quad (2.7)$$

e análogamente,

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{A_{\Delta[BKA]}}{A_{\Delta[AKC]}}, \quad \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{A_{\Delta[BKC]}}{A_{\Delta[BKA]}}. \quad (2.8)$$

Finalmente,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{A_{\Delta[AKC]}}{A_{\Delta[BKC]}} \frac{A_{\Delta[BKA]}}{A_{\Delta[AKC]}} \frac{A_{\Delta[BKC]}}{A_{\Delta[BKA]}} = 1$$

Recíprocamente, suponhamos que tem lugar (2.6) e vamos verificar que as cevianas são concorrentes.

Seja K o ponto de intersecção de $[AQ]$ e $[CP]$ e W a intersecção de $[AC]$ com a recta BK . Uma vez que $[CP]$, $[AQ]$ e $[BW]$ concorrem em K , de acordo com a primeira parte da demonstração

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \frac{\overline{CW}}{\overline{WA}} = 1.$$

E, comparando com (2.6), obtemos

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{CW}}{\overline{WA}} \quad \text{ou seja} \quad \frac{\overline{CA} - \overline{RA}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{CA} - \overline{WA}}{\overline{WA}}.$$

de onde, desembaraçando denominadores, vem $\overline{RA} = \overline{WA}$, e portanto R e W coincidem. Isto mostra que $[CP]$, $[AQ]$ e $[BR]$ concorrem em K , e conclui a prova do teorema. \blacksquare

Em algumas ocasiões o teorema de Ceva é referido de acordo com formulações que generalizam ou diferem da formulação apresentada anteriormente. De facto, em [1], Paulo Ventura afirma que:

”O teorema de Ceva permanece válido para pontos P , Q e R que não pertençam necessariamente aos lados do triângulo ABC , mas sim às rectas AB , BC e AC que os prolongam (e então, em vez dos segmentos $[AQ]$, $[BR]$ e $[CP]$, consideraríamos as rectas correspondentes)”.

Do mesmo modo, o teorema que de seguida será demonstrado é referido por alguns autores (veja [17]) como teorema de Ceva.

Teorema 10 *Os lados de um triângulo estão divididos por cevianas concorrentes nos pontos P , Q e R , de acordo com a figura 2.2, se e só se existem as constantes Δ_a , Δ_b e Δ_c tais que*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\Delta_b}{\Delta_a}, \quad \frac{\overline{RC}}{\overline{AR}} = \frac{\Delta_a}{\Delta_c}, \quad \frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} = \frac{\Delta_c}{\Delta_b}. \quad (2.9)$$

Demonstração: Seja o triângulo ABC . Seja Δ_b a área do triângulo AKC , Δ_a a área do triângulo CKB e Δ_c a área do triângulo AKB , como indicado na figura 2.3.

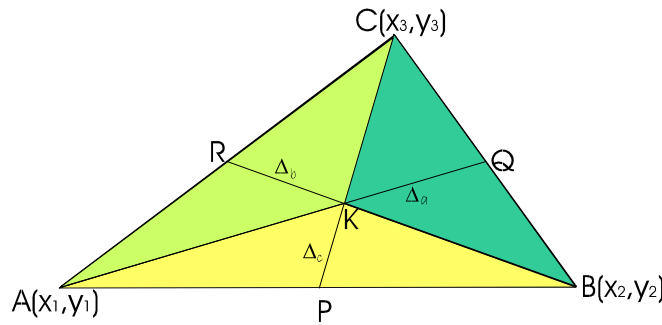


Figura ~ 2.3:

Então de (2.7) e (2.8) temos (2.9).

Reciprocamente, se temos (2.9) então, pelo teorema de Ceva, as cevianas são concorrentes. ■

De seguida, será formulado o teorema de Menelau⁵, que pode ser considerado uma espécie de dual do teorema de Ceva, pois fornece uma condição necessária e suficiente para que três pontos, um em cada lado de um triângulo sejam colineares, em termos de proporções de comprimento dos segmentos de recta convenientes.

Teorema 11 (teorema de Menelau). *Consideremos um triângulo ABC . Sejam X , Y e Z , respectivamente, pontos sobre as rectas AB , BC e CA , suportes dos lados do triângulo. É condição necessária e suficiente para que os pontos X , Y e Z sejam colineares que*

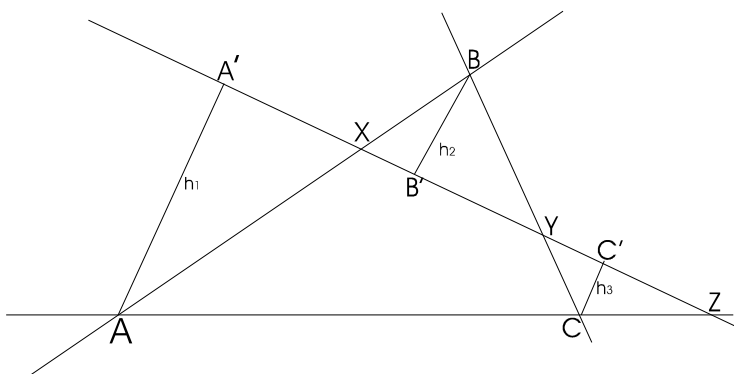
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1 \quad (2.10)$$

⁵Menelau de Alexandria foi um astrónomo que viveu no primeiro século D.C. Através de comentários de historiadores gregos e árabes sabemos que ele escreveu vários livros. O único livro que sobreviveu aos tempos foi o "Sphaerica". No terceiro volume deste, ele menciona o teorema que leva o seu nome.

Demonstração: Em primeiro lugar, será provado que se são colineares os pontos X , Y e Z , respectivamente sobre as rectas AB , BC e AC , então

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1$$

Sejam X , Y e Z pontos colineares, como ilustrado na figura seguinte:



Sejam ainda h_1 , h_2 e h_3 os comprimentos dos segmentos perpendiculares à recta XY traçados respectivamente de A , B e C e designemos os pés dessas perpendiculares, respectivamente, por A' , B' e C' .

Por semelhança de triângulos, por exemplo, entre os triângulos $AA'Z$ e $CC'Z$, podemos concluir que

$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{h_3}{h_1}$$

De modo análogo se concluiria respectivamente que, dada a semelhança entre os triângulos $AA'X$ e $BB'X$ e entre os triângulos $CC'Y$ e $BB'Y$,

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{h_2}{h_3}$$

Podemos assim concluir que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{h_1}{h_2} \frac{h_2}{h_3} \frac{h_3}{h_1} = 1$$

Reciprocamente, temos (2.10) com X , Y e Z pontos respectivamente sobre as rectas AB , BC e CA . Consideremos a recta YZ e X um ponto da recta AB satisfazendo a igualdade (2.10). Pretendemos provar que X pertence à recta YZ .

De (2.10) resulta que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}} \frac{\overline{ZA}}{\overline{CZ}} = \frac{h_3}{h_2} \frac{h_1}{h_3} = \frac{h_1}{h_2}$$

o que, conjugado com o facto de os ângulos de vértices A' e B' serem rectos permite afirmar que os triângulos $AA'X$ e $BB'X$ são semelhantes. Atendendo a que os pontos A , X e B são colineares e as rectas suporte de h_1 e h_2 são paralelas, terão de também ser paralelos os segmentos de recta $A'X$ e $B'X$ o que só pode ocorrer se X for colinear com A' e B' e, como estes pontos pertencem à recta YZ , resulta que X também lhe pertence. ■

Outras demonstrações do teorema de Menelau podem ser consultadas, por exemplo, nos livros [9], [16] e [25].

O nosso próximo objectivo é determinar as coordenadas dos centros notáveis do triângulo. Para tal, precisamos alguns resultados auxiliares.

Proposição 1 *Sejam P_1 e P_2 os pontos com coordenadas cartesianas*

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2),$$

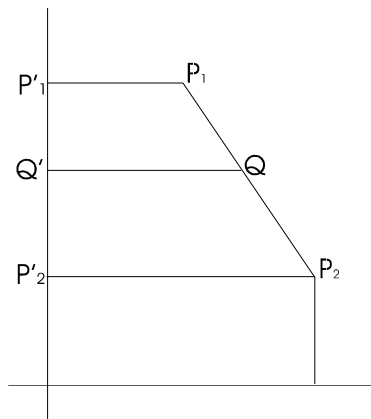
então as coordenadas do ponto $Q \in [P_1P_2]$, tal que

$$\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{QP_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

são

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Demonstração: Observemos a figura



Visto que os pontos P'_1 , P'_2 e Q' têm as mesmas ordenadas que os pontos P_1 , P_2 e Q , respectivamente, então temos

$$\overline{P'_1 Q'} = |y_1 - y|$$

e

$$\overline{Q' P'_2} = |y - y_2|.$$

Consequentemente

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Tendo em conta que Q' está entre P'_1 e P'_2 , então $y_1 - y$ e $y - y_2$ têm o mesmo sinal, logo podemos escrever

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

De onde

$$(y_1 - y) \lambda_2 = \lambda_1 (y - y_2),$$

ou seja,

$$y_1 \lambda_2 + \lambda_1 y_2 = \lambda_1 y + y \lambda_2,$$

logo

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (2.11)$$

Se o segmento de recta $[P_1 P_2]$ for paralelo ao eixo Ox , então

$$y_1 = y_2 = y.$$

O mesmo resultado é obtido da fórmula (2.11), que continua válida para qualquer localização de P_1 e P_2 .

A abcissa do ponto Q é encontrada de forma análoga e para esta obtemos a fórmula:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (2.12)$$

■

Lema 1 *Seja o triângulo ABC , cujos vértices têm coordenadas*

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2) \quad e \quad C(x_3, y_3),$$

e sejam P , Q e R os pontos de divisão dos lados opostos, como se mostra na figura 2.3. Então os segmentos $[AQ]$, $[BR]$ e $[CP]$ (ou seja, as cevianas) têm um ponto em comum (x', y') , de coordenadas

$$x' = \frac{\Delta_a x_1 + \Delta_b x_2 + \Delta_c x_3}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}, \quad y' = \frac{\Delta_a y_1 + \Delta_b y_2 + \Delta_c y_3}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}$$

Demonstração: As coordenadas do ponto Q são

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_b x_2 + \Delta_c x_3}{\Delta_b + \Delta_c}, \\y &= \frac{\Delta_b y_2 + \Delta_c y_3}{\Delta_b + \Delta_c}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dividindo o segmento $[AQ]$ na razão $\Delta_a : (\Delta_b + \Delta_c)$, as coordenadas do ponto de divisão são $W(x', y')$, onde

$$\frac{y - y'}{y' - y_1} = \frac{\Delta_a}{\Delta_b + \Delta_c},$$

ou seja,

$$\Delta_a (y' - y_1) = (\Delta_b + \Delta_c) (y - y'),$$

logo

$$\Delta_a y' + \Delta_b y' + \Delta_c y' = \Delta_a y_1 + \Delta_b y + \Delta_c y.$$

Simplificando, temos

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\Delta_a y_1 + \Delta_b y + \Delta_c y}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}, \\y' &= \frac{\Delta_a y_1 + (\Delta_b + \Delta_c) y}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c},\end{aligned}$$

Utilizando (2.13), obtemos

$$y' = \frac{\Delta_a y_1 + (\Delta_b + \Delta_c) \left(\frac{\Delta_b y_2 + \Delta_c y_3}{\Delta_b + \Delta_c} \right)}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c},$$

ou seja,

$$y' = \frac{\Delta_a y_1 + \Delta_b y_2 + \Delta_c y_3}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}.\tag{2.14}$$

E, de forma análoga

$$x' = \frac{\Delta_a x_1 + \Delta_b x_2 + \Delta_c x_3}{\Delta_a + \Delta_b + \Delta_c}.\tag{2.15}$$

Se o segmento $[BR]$ for dividido na razão $\Delta_b : (\Delta_a + \Delta_c)$ ficamos com

$$\frac{y - y'}{y' - y_2} = \frac{\Delta_b}{\Delta_a + \Delta_c},$$

onde

$$y = \frac{\Delta_a y_1 + \Delta_c y_3}{\Delta_a + \Delta_c}.$$

de onde, efectuando cálculos semelhantes aos anteriores, obtemos as mesmas coordenadas do ponto de divisão.

E, análogamente, estas mesmas coordenadas serão obtidas se dividirmos o segmento $[CP]$ na razão $(\Delta_a + \Delta_b) : \Delta_c$.

Logo os segmentos $[AQ]$, $[BR]$ e $[CP]$ (ou seja, as cevianas) têm em comum o ponto (x', y') . ■

De seguida serão enunciados alguns resultados que envolvem cevianas notáveis.

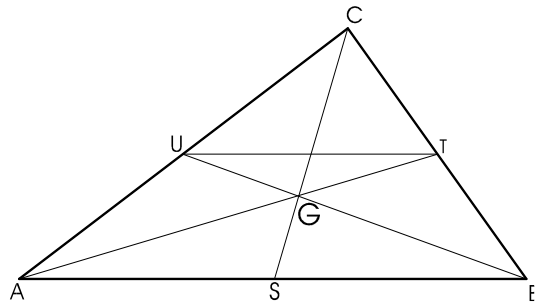
2.2.1 Baricentro

Definição 1 As *medianas* de um triângulo são as rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

No âmbito deste trabalho, em função do contexto, as medianas também serão referidas como o segmento de recta que une cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

Teorema 12 As três medianas concorrem no mesmo ponto, denominado *baricentro* ou *centro de gravidade*. A distância de cada vértice ao baricentro é igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respectiva mediana.

Demonstração: Sejam S , T e U os pontos médios dos lados do triângulo ABC e G o ponto de intersecção de $[AT]$ com $[BU]$.



Os triângulos ABC e UTC são semelhantes e, por isso, os lados $[AB]$ e $[UT]$ são paralelos. Portanto, os triângulo AGB e TGU são semelhantes, pois têm três ângulos iguais (os ângulos TGU e AGB são verticalmente

opostos e os ângulos BUT e UBA são ângulos de lados paralelos). A razão de semelhança é $r = 2$, já que $\overline{UT} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Daqui resulta que

$$\overline{GU} = \frac{1}{2}\overline{GB} \quad \text{e} \quad \overline{GT} = \frac{1}{2}\overline{GA}.$$

Da mesma maneira, se chamarmos H à intersecção de $[CS]$ com $[AT]$, temos que

$$\overline{HS} = \frac{1}{2}\overline{HC} \quad \text{e} \quad \overline{HT} = \frac{1}{2}\overline{HA}.$$

Vemos assim que G e H dividem o segmento $[AT]$ na mesma proporção $2 : 1$ e portanto $G = H$.

Concluimos que as três medianas do triângulo ABC são concorrentes em G . ■

Demonstrações alternativas deste teorema poderão ser consultadas em [8] e [25].

Proposição 2 *As coordenadas do baricentro de qualquer triângulo podem ser obtidas aplicando a fórmula*

$$G \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right),$$

onde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são respectivamente as coordenadas cartesianas dos vértices A , B e C .

Demonstração: Pela definição de mediana de um segmento de recta, podemos afirmar que

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{1}{1}, \quad \frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} = \frac{1}{1} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CU}}{\overline{UA}} = \frac{1}{1}.$$

Substituindo em (2.15) obtemos

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

e em (2.14)

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad \blacksquare$$

2.2.2 Incentro

Definição 2 A *bissectriz* de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que distam igualmente dos lados do ângulo.

Do mesmo modo que para o caso das medianas, em função do contexto, a bissectriz de um ângulo também será referida como a semi-recta que divide o ângulo em dois ângulos iguais.

Teorema 13 (teorema da bissectriz). Seja o triângulo ABC e P o ponto de intersecção da bissectriz do ângulo γ com o lado AB , então

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (2.16)$$

Demonstração: No triângulo ABC (figura 2.4), AQ , BR e CP são bissectrizes.

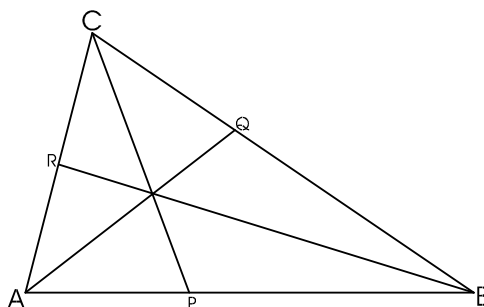


Figura ~ 2.4:

Seja $A_{\Delta[APC]}$ a área do triângulo APC , $A_{\Delta[PBC]}$ a área do triângulo PBC . Então temos

$$\frac{A_{\Delta[APC]}}{A_{\Delta[PBC]}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}.$$

Por outro lado,

$$\frac{A_{\Delta[APC]}}{A_{\Delta[PBC]}} = \frac{\overline{AC} \overline{CP} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\overline{BC} \overline{CP} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{A_{\Delta[APC]}}{A_{\Delta[PBC]}} = \frac{b}{a}.$$

Teorema 14 *As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem no mesmo ponto denominado **incentro**.*

Demonstração: Pelo teorema 13 temos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

e, do mesmo modo, obtemos

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b},$$

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}.$$

Portanto

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \quad \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{AP} \overline{BQ} \overline{CR}}{\overline{PB} \overline{QC} \overline{RA}} = \frac{\overline{AC} \overline{AB} \overline{BC}}{\overline{BC} \overline{AC} \overline{AB}} = 1.$$

Então, pelo teorema de Ceva, AQ , BR e CP são concorrentes. ■

Outra demonstração deste teorema pode ser consultada em [25].

Proposição 3 *O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.*

Demonstração: Seja \mathcal{C} a circunferência de centro I (incentro) e raio r dado pela distância de I ao lado AB . Como $r = \text{dist}(I, AB) = \text{dist}(I, BC) = \text{dist}(I, AC)$, há exactamente um ponto sobre cada um dos lados AB , BC e AC que pertence à circunferência \mathcal{C} , realizando a distância mínima r . Conclui-se que \mathcal{C} é tangente a AB , a BC e a AC . ■

Proposição 4 *Para determinarmos as coordenadas do incentro de qualquer triângulo podemos utilizar a fórmula*

$$I \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{p}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{p} \right),$$

onde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são respectivamente as coordenadas cartesianas dos vértices A , B e C e $p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo ABC

Demonstração: Seja o triângulo ABC , como indicado na figura 2.4.

Tendo em conta o teorema 10 e a demonstração do teorema 14 e substituindo em (2.15) e (2.14), respectivamente, obtemos

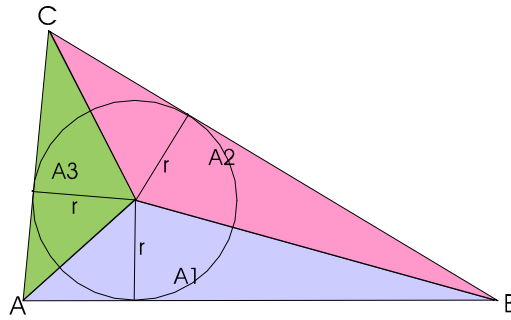
$$x' = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{p}, \quad y' = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{p},$$

onde $p = a + b + c$, representa o perímetro do triângulo $[ABC]$. ■

Proposição 5 *O raio da circunferência inscrita está relacionado com a área do triângulo por*

$$A_{\Delta} = \frac{(a + b + c)r}{2}.$$

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC representado na figura seguinte



O triângulo ABC está dividido em três triângulos de altura r . Aplicando (2.1), obtemos

$$A_1 = \frac{cr}{2}, \quad A_2 = \frac{ar}{2} \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{br}{2}.$$

Logo

$$A_{\Delta} = \frac{(a + b + c)r}{2}.$$

Proposição 6 *Se a circunferência inscrita é tangente aos lados BC , CA e AB , em Q , R e P , respectivamente, então*

$$\overline{AP} = \overline{AR} = \frac{b + c - a}{2}, \quad \overline{BP} = \overline{BQ} = \frac{a + c - b}{2} \quad \text{e} \quad \overline{CQ} = \overline{CR} = \frac{a + b - c}{2}.$$

Estas expressões são usualmente simplificadas pela introdução do símbolo s que representa o semiperímetro $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Deste modo:

$$\overline{AP} = \overline{AR} = s - a, \quad \overline{BP} = \overline{BQ} = s - b \quad \text{e} \quad \overline{CQ} = \overline{CR} = s - c$$

Demonstração: Provemos a primeira igualdade, para as outras duas procede-se de modo análogo.

Da fórmula de Herão (teorema 7) e da proposição 5 podemos concluir que

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = sr.$$

Portanto

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \quad (2.17)$$

Por outro lado, de acordo com os dados da figura 2.5, podemos afirmar que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{\overline{AP}},$$

ou seja,

$$\overline{AP} = r \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

logo

$$\overline{AP} = r \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}.$$

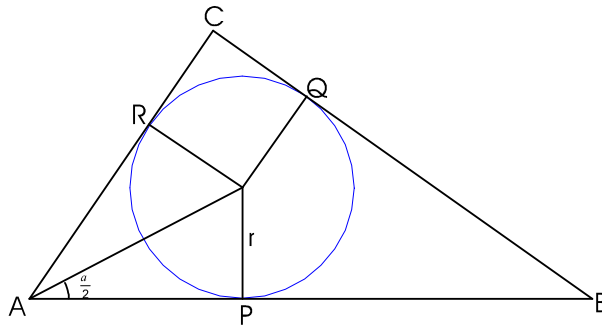


Figura 2.5:

Mas, aplicando a lei dos cossenos (teorema 3) podemos concluir que

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}.$$

Deste modo,

$$\overline{AP}^2 = r^2 \frac{-2bc - b^2 - c^2 + a^2}{-2bc + b^2 + c^2 - a^2},$$

ou seja,

$$\overline{AP}^2 = r^2 \frac{a^2 - (b+c)^2}{(b-c)^2 - a^2},$$

logo

$$\overline{AP}^2 = r^2 \frac{(-a + b + c)(a + b + c)}{(-b + c + a)(b - c + a)}.$$

Substituindo r pela expressão (2.17), obtemos

$$\overline{AP}^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s} \frac{(s - a)s}{(s - b)(s - c)},$$

logo

$$\overline{AP} = \overline{AR} = s - a.$$

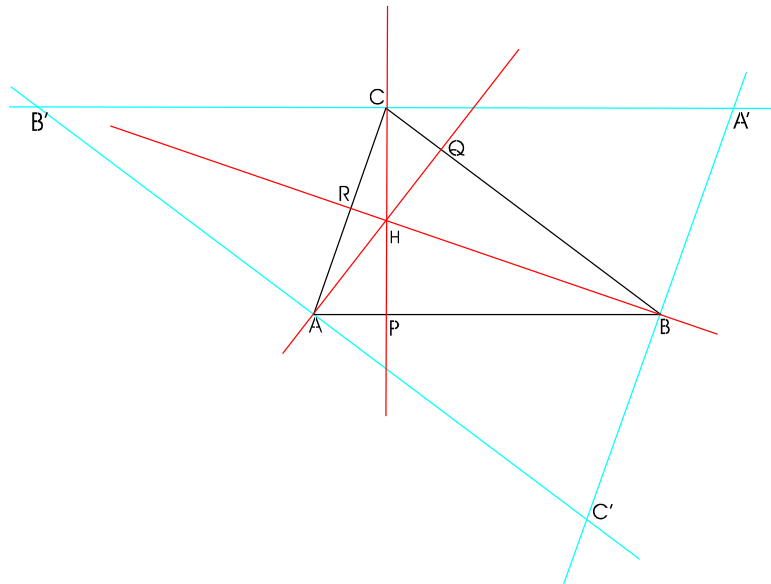
■

2.2.3 Ortocentro

Definição 3 As *alturas* de um triângulo são as rectas que são perpendiculares a um lado e contêm o vértice oposto a esse lado.

Teorema 15 As três alturas de um triângulo concorrem no mesmo ponto, denominado *ortocentro*.

Demonstração: Tracemos as rectas paralelas aos lados e que passam pelos vértices opostos. Obtemos assim as rectas $A'B'$, $B'C'$ e $A'C'$, como se pode observar na figura seguinte:



Os quadriláteros $ABA'C$, $ABCB'$ e $ACBC'$ são, por construção, paralelogramos. Considerando o paralelogramo $ABCB'$ verifica-se que $\overline{AB} = \overline{B'C}$. Por outro lado, considerando o paralelogramo $ABA'C$, concluímos que $\overline{CA'} = \overline{AB}$. Portanto $\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$ e C é o ponto médio do lado $A'B'$. Procedendo de modo análogo para os outros lados do triângulo, podemos afirmar que o triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC , com razão de semelhança $r = 2$ e A , B e C são respectivamente os pontos médios dos lados $B'C'$, $A'C'$ e $A'B'$. Logo, as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes (veja a definição 4) do triângulo $A'B'C'$, que são concorrentes (veja a demonstração do teorema 16). ■

Também se pode mostrar que as alturas de qualquer triângulo (acutângulo ou não) são concorrentes utilizando o teorema de Ceva (teorema 9), como se pode ver no livro [18] e na proposição seguinte.

Proposição 7 *Para determinarmos as coordenadas de ortocentro de qualquer triângulo, podemos usar a fórmula*

$$H \left(\frac{x_1 \tan \alpha + x_2 \tan \beta + x_3 \tan \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}, \frac{y_1 \tan \alpha + y_2 \tan \beta + y_3 \tan \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma} \right),$$

onde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são respectivamente as coordenadas cartesianas dos vértices A , B e C , e α , β e γ são respectivamente, os ângulos com vértice em A , B e C

Demonstração: Vamos considerar um triângulo não rectângulo, pois evidentemente o ortocentro de um triângulo rectângulo é o vértice do ângulo recto.

Sem perda de generalidade, consideremos o triângulo acutângulo ABC . Representamos os pés das alturas relativas aos vértices A , B e C por Q , R e P , respectivamente.

Então

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CP}}{\tan \alpha},$$

e

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CP}}{\tan \beta}.$$

Logo

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\Delta_b}{\Delta_a},$$

e, análogamente,

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} = \frac{\Delta_c}{\Delta_b} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{\tan \alpha}{\tan \gamma} = \frac{\Delta_a}{\Delta_c}.$$

Então, substituindo em (2.15) e (2.14) obtemos, respectivamente

$$x' = \frac{x_1 \tan \alpha + x_2 \tan \beta + x_3 \tan \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma},$$

e

$$y' = \frac{y_1 \tan \alpha + y_2 \tan \beta + y_3 \tan \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}.$$

■

Repare-se que as constantes $\tan \alpha$, $\tan \beta$ e $\tan \gamma$ utilizadas na formulação do resultado anterior, também podem ser determinadas em função das coordenadas cartesianas dos vértices. De facto, como se sabe

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1,$$

onde

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{AB}\|},$$

e o produto escalar

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (C - A)(B - A),$$

ou seja

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1).$$

Logo

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}{((x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1))^2} - 1}.$$

Do mesmo modo,

$$\tan \beta = \pm \sqrt{\frac{((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}{((x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1))^2} - 1}$$

e

$$\tan \gamma = \pm \sqrt{\frac{((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2)((x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2)}{((x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_3 - y_1))^2} - 1}.$$

onde os sinais das tangentes dos ângulos α , β e γ são tomados de acordo com o quadrante onde os mesmos se encontram.

Outro conhecido centro do triângulo é o circuncentro que, à diferença dos outros, não é definido como o ponto de intersecção de cevianas.

2.2.4 Circuncentro

Definição 4 *Mediatriz* de um segmento de recta é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a igual distância dos extremos do segmento.

Teorema 16 *As três mediatrizes dos lados do triângulo concorrem no mesmo ponto, denominado **circuncentro**.*

Demonstração: Consideremos o triângulo ABC . Evidentemente, todos os pontos da mediatriz do lado $[AB]$ estão à mesma distância de A e de B . Análogamente, todos os pontos da mediatriz do lado $[BC]$ estão à mesma distância de B e de C . Logo o ponto de intersecção das duas rectas está à mesma distância de A e de C , ou seja, pertence à mediatriz do lado $[AC]$. ■

Da demonstração anterior, é agora imediata a seguinte proposição:

Proposição 8 *O circuncentro é centro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Proposição 9 *As coordenadas do circuncentro de qualquer triângulo podem ser obtidas aplicando a fórmula*

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} - \frac{x_1 \tan \alpha + x_2 \tan \beta + x_3 \tan \gamma}{2(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma)}, \\y &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2} - \frac{y_1 \tan \alpha + y_2 \tan \beta + y_3 \tan \gamma}{2(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma)},\end{aligned}$$

onde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são respectivamente as coordenadas cartesianas dos vértices A , B e C , e α , β e γ são respectivamente, os ângulos com vértice em A , B e C

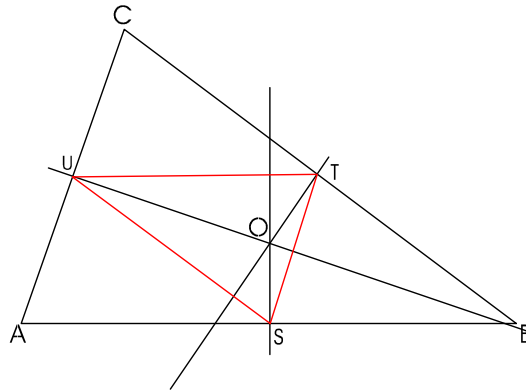
Demonstração: Seja ABC um triângulo não rectângulo. Se tomarmos os pontos S , T e U , pontos médios dos lados AB , BC e AC , respectivamente, verifica-se que:

$$\begin{aligned}S &= \frac{B + A}{2}, \\T &= \frac{B + C}{2}, \\U &= \frac{A + C}{2}.\end{aligned}$$

Os triângulos STB e ABC são semelhantes, pois têm um ângulo comum e os lados que o formam são proporcionais. Logo, os ângulos do triângulo STU

são iguais aos ângulos do triângulo ABC e também o lado ST é paralelo ao lado AC . Do mesmo modo, também os lados SU e BC são paralelos, assim como os lados TU e AB .

Logo as mediatrizes dos lados do triângulo ABC contêm as alturas do triângulo STU .



Portanto, o circuncentro O do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo STU .

Logo, da proposição 7 vem que

$$O = \frac{T \tan \alpha + U \tan \beta + S \tan \gamma}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma},$$

e portanto

$$O = \frac{A + B + C}{2} - \frac{A \tan \alpha + B \tan \beta + C \tan \gamma}{2(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma)}.$$

■

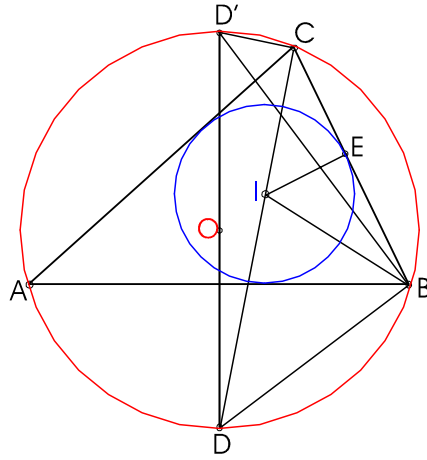
Proposição 10 (fórmula de Euler). A distância d entre o circuncentro O e o incentro I de um triângulo, é dada pela relação

$$d^2 = R(R - 2r),$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita e r o raio da circunferência inscrita.

Demonstração: Seja ABC o triângulo, O o seu circuncentro e I o incentro. Seja R o raio da circunferência circunscrita e r o raio da circunferência inscrita. Seja E o ponto de tangência da circunferência inscrita com o lado BC , e sejam D e D' os pontos médios do arco AB sobre a circunferência circunscrita. Finalmente, seja $d = \overline{OI}$.

A figura seguinte ilustra esta situação:



Podemos observar que $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$, desde que D bissecte o arco AB . Consequentemente, I está no segmento $[CD]$. Também se pode facilmente observar que $[DD']$ é um diâmetro da circunferência circunscrita.

Note-se que $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ porque são ângulos inscritos no mesmo arco, AD . Portanto

$$\widehat{DBI} = \widehat{DBA} + \widehat{ABI} = \widehat{DCA} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{ICA} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Note-se também que $\widehat{BDI} = \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$, pois os ângulos BDC e BAC estão ambos inscritos no arco, BC .

Portanto, considerando o triângulo BDI , temos que

$$\widehat{BID} = 180^\circ - \widehat{BDC} - \widehat{DBI}$$

logo

$$\begin{aligned} \widehat{BID} &= 180^\circ - \widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \\ &= \widehat{ACB} + \widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}$$

Portanto, o triângulo BID é isósceles e $\overline{DB} = \overline{DI}$.

Não é difícil verificar que os triângulos $D'BD$ e CEI são semelhantes, pois

$$\widehat{DD'B} = \widehat{DCB} = \widehat{ICE} \text{ e } \widehat{D'BD} = \widehat{CEI} = 90^\circ.$$

Podemos usar este resultado para obter a seguinte razão:

$$\frac{\overline{DD'}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IE}},$$

da qual podemos deduzir:

$$\overline{DD'} \times \overline{IE} = \overline{IC} \times \overline{DB}.$$

Mas,

$$\overline{DD'} = 2R, \quad \overline{IE} = r \quad \text{e} \quad \overline{DB} = \overline{DI},$$

portanto

$$2Rr = \overline{IC} \times \overline{ID}. \quad (2.18)$$

Consideremos agora o triângulo $D'DC$, onde $\overline{OD} = \overline{OD'} = \overline{OC} = R$ e, portanto,

$$O\hat{C}D = O\hat{D}C = \alpha.$$

Aplicando a lei dos cossenos (veja o teorema 3), aos triângulos OCI e ODI , obtemos

$$\begin{cases} d^2 = R^2 + \overline{CI}^2 - 2R\overline{CI} \cos \alpha \\ d^2 = R^2 + \overline{DI}^2 - 2R\overline{DI} \cos \alpha \end{cases}$$

isto é

$$\frac{d^2 - R^2 - \overline{CI}^2}{-2R\overline{CI}} = \frac{d^2 - R^2 - \overline{DI}^2}{-2R\overline{DI}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (d^2 - R^2) \overline{DI} - \overline{CI}^2 \overline{DI} &= (d^2 - R^2) \overline{CI} - \overline{DI}^2 \overline{CI}, \\ (d^2 - R^2) (\overline{DI} - \overline{CI}) - \overline{DI} \overline{CI} (\overline{CI} - \overline{DI}) &= 0, \\ (d^2 - R^2 + \overline{DI} \overline{CI}) (\overline{DI} - \overline{CI}) &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\overline{DI} \overline{CI} = R^2 - d^2. \quad (2.19)$$

ou

$$\overline{DI} = \overline{CI}$$

No caso particular em que $\overline{DI} = \overline{CI}$, o triângulo ODI é rectângulo e, portanto, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$\overline{DI}^2 = R^2 - d^2$$

de onde podemos afirmar que neste caso também tem lugar a igualdade (2.19).

Deste modo, podemos escrever (2.18) como

$$2Rr = R^2 - d^2.$$

De onde se obtém

$$d^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

■

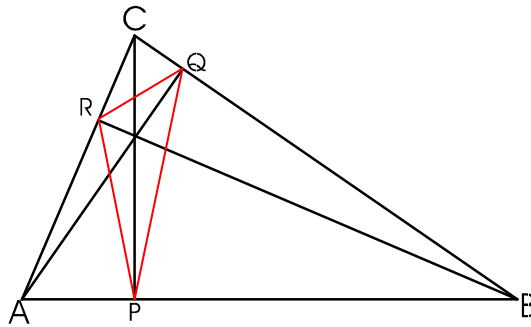
Demonstrações alternativas à aqui apresentada poderão ser consultadas em [8], [25] ou [26].

2.3 Outros Resultados

Definição 5 O triângulo PQR , cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC , é chamado **triângulo órtico** do triângulo ABC .

Teorema 17 O ortocentro de um triângulo acutângulo é o incentro do seu triângulo órtico.

Demonstração: Sejam P , Q e R os pés das alturas do triângulo ABC , como vemos na figura abaixo



Podemos facilmente estabelecer que

$$\overline{BQ} = c \cos \beta \quad \text{e} \quad \overline{PB} = a \cos \beta,$$

onde β é o ângulo com vértice em B.

Logo

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{PB}} = \frac{c}{a}. \tag{2.20}$$

De modo análogo, obtemos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AR}} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\overline{CR}}{\overline{CQ}} = \frac{a}{b}. \quad (2.21)$$

Tendo em conta as igualdades (2.20) e (2.21), o critério de semelhança de triângulos LAL implica que

$$\Delta ABC \sim \Delta PQB \sim \Delta PAR \sim \Delta CQR$$

e, portanto, as alturas do triângulo ABC são as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico PQR . ■

Definição 6 *O triângulo que se obtém unindo os pontos médios de cada lado é conhecido como **triângulo medial**.*

Como já foi referido na demonstração do teorema 12, o triângulo medial satisfaz a seguinte propriedade:

Proposição 11 *O triângulo STU (figura 2.6) é semelhante ao triângulo ABC , com razão de semelhança $r = \frac{1}{2}$.*

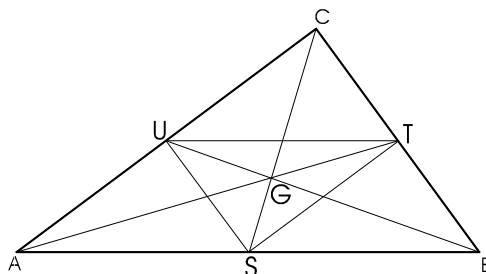


Figura 2.6:

Proposição 12 *Os triângulos ABC e STU partilham o mesmo baricentro.*

Demonstração: Da proposição 11, podemos concluir que a recta US é paralela à recta CB e que a recta ST é paralela à recta AC , logo $[CUST]$ é um paralelogramo, portanto $[CS]$ e $[UT]$ bissetam-se. Por conseguinte, as medianas do triângulo STU estão sobre as medianas do triângulo ABC , o que mostra que ambos os triângulos têm o mesmo baricentro, G . ■

Por outro lado, as alturas do triângulo STU são as mediatrizes dos lados do triângulo ABC . Podemos portanto concluir que:

Proposição 13 *O circuncentro do triângulo ABC coincide com o ortocentro do triângulo medial.*

Vamos, de seguida, estudar algumas propriedades duma circunferência notável, conhecida desde o início do século XIX. Alguns atribuem a sua descoberta a Euler que já conhecia algumas das suas propriedades. Mas, na realidade, ela surge pela primeira vez, na literatura, num artigo escrito por dois geómetras franceses Poncelet e Brianchon por volta de 1820. Foi porém, Karl W. Feuerbach (1800 - 1834) que em 1822 publicou num livro várias propriedades desta circunferência, daí ela ser chamada circunferência de Euler-Feuerbach ou **circunferência dos nove pontos**.

Definição 7 *A circunferência dos nove pontos é a circunferência definida pelos pontos médios dos lados do triângulo.*

Teorema 18 *Em qualquer triângulo ABC , os pés das alturas (P , Q e R) e os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro (X , Y e Z) estão sobre a circunferência dos nove pontos.*

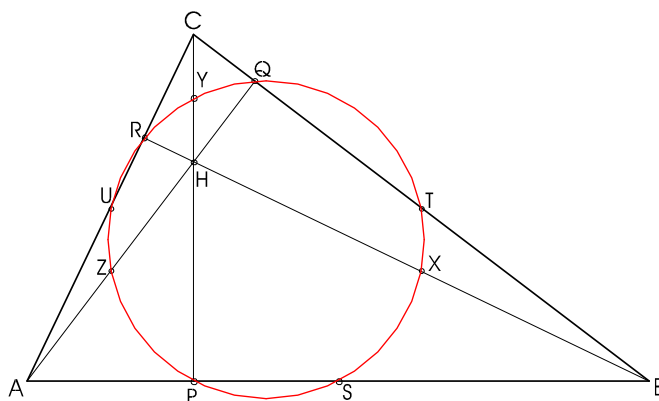
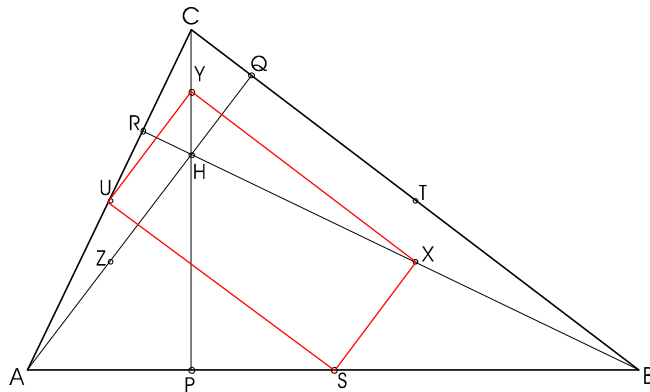


Figura ~2.7:

Demonstração: Começemos por considerar os pontos S , X , Y e U e verifiquemos que estes pontos definem um rectângulo.



De facto, em relação aos segmentos de recta $[US]$ e $[XY]$ podemos garantir o seu paralelismo e que $\overline{US} = \overline{XY}$, já que unem os pontos médios dos lados de dois triângulos com a mesma base $[BC]$ (referimo-nos aos triângulos ABC e HBC). De igual modo, também os segmentos de recta $[UY]$ e $[SX]$ são paralelos e têm a mesma medida, já que são definidos pelos pontos médios dos lados de dois triângulo de base $[HA]$ (os triângulos AHB e AHC).

Para além disso, $[US]$ e $[XY]$ são paralelos a $[BC]$, enquanto $[UY]$ e $[SX]$ são paralelos a $[AH]$, o que, conjugado com o facto de ser $[AH]$ perpendicular a $[BC]$ (por estar contido na altura do triângulo ABC em relação ao vértice A), permite concluir que o polígono $[SXYU]$ é um rectângulo.

Consequentemente, a circunferência de diâmetro $[UX]$ é-lhe circunscrita.

Considerando agora os pontos Z, X, T e U , por um raciocínio idêntico ao anterior, verificamos que $[ZXTU]$ é um rectângulo, também ele inscrito na circunferência de diâmetro $[UX]$.

Por outro lado, o ângulo \widehat{XRU} é recto, pelo que também o ponto R pertence à circunferência de diâmetro $[UX]$, o mesmo acontecendo com os pontos S e T , como se comprova facilmente por raciocínio análogo.

Fica assim provado que todos os nove pontos S, T, R, X, Y, Z, P, Q e R estão sobre uma circunferência, a circunferência de diâmetro $[UX]$.

Demostrações alternativas à apresentada poderão ser consultadas nos livros [6] [8] e [16]. ■

Durante o século XIX foram descobertos diversos resultados sobre esta circunferência, alguns dos quais se apresentam a seguir:

Proposição 14 *O raio da circunferência dos nove pontos tem um comprimento igual a metade do comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Demonstração: De (2.5), obtemos que o raio da circunferência circunscrita é dado pela fórmula

$$R = \frac{abc}{4A_{\Delta[ABC]}}.$$

Por outro lado, é evidente que, o raio da circunferência dos nove pontos é igual ao raio da circunferência circunscrita ao triângulo medial.

Mas, da proposição 11, concluímos que os lados do triângulo medial têm metade do comprimento dos lados do triângulo ABC . Assim, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo medial é dado por

$$R_{\Delta_{medial}} = \frac{abc}{32A_{\Delta_{medial}}}.$$

Mas da proposição 11, obtemos também que a área do triângulo medial é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo ABC . Portanto

$$R_{\Delta_{medial}} = \frac{abc}{8A_{\Delta[ABC]}}.$$

■

Definição 8 *A circunferência que é tangente externamente ao lado BC do triângulo ABC e às rectas AB e AC é denominada **circunferência exinscrita** relativa ao vértice A . O seu centro é chamado **exincentro** (ou **excentro**) relativo ao vértice A do triângulo ABC . As outras duas circunferências exinscritas e os dois outros exincentros são definidos de forma análoga.*

Teorema 19 (teorema de Feuerbach). *A circunferência dos nove pontos é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências exinscritas do triângulo.*

A demonstração deste teorema pode ser consultada, por exemplo, no livro [5].

Capítulo 3

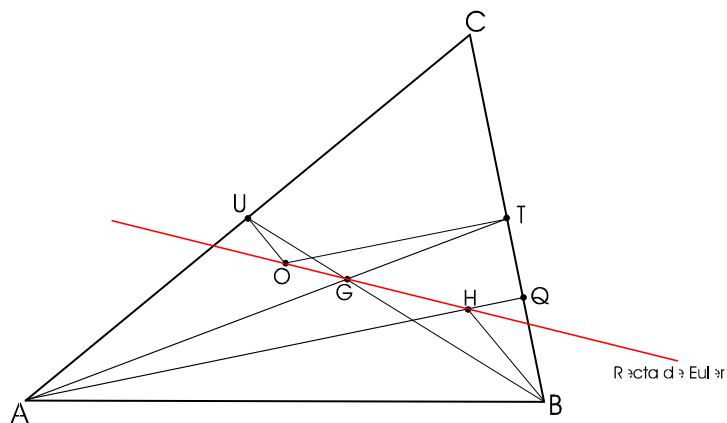
Recta de Euler

3.1 Recta de Euler

Teorema 20 *Em qualquer triângulo não equilátero, o ortocentro H , o baricentro G e o circuncentro O , são pontos colineares e verificam a relação métrica*

$$\overline{HG} = 2\overline{GO}.$$

Demonstração: Relativamente ao triângulo ABC , consideremos os pontos T e Q , respectivamente o ponto médio do segmento de recta $[BC]$ e o pé da perpendicular traçada de A para a recta BC , o ponto U , ponto médio de $[AC]$, e a recta que contém o circuncentro O e o baricentro G do triângulo.



Seja H o ponto de intersecção da recta OG com a recta AQ . Do facto dos triângulos GOT e GHA serem semelhantes e dado que $\overline{AG} = 2\overline{TG}$, (veja o teorema 12) o triângulo GHA é transformado no triângulo GOT pela

homotetia de centro em G e razão $r = -2$. Por esta homotetia, o ponto H é o transformado de O , o que garante que $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ e que O, G e H são pontos colineares. Pretendemos agora mostrar que H é precisamente o ortocentro do triângulo ABC .

O ponto H é, obviamente, um ponto pertencente à altura, relativa a A , do triângulo ABC . Se se provar que H pertence também a outra das alturas do triângulo, fica provado o pretendido.

Considerando agora os triângulos UOG e BGH , atendendo a que são semelhantes (um ângulo geometricamente igual e as medidas dos lados que o formam proporcionais) conclui-se que as rectas UO e HB são paralelas e, conseqüentemente, que o ponto H pertence à altura, relativa ao ponto B , do triângulo ABC o que, conjugado com o facto de as rectas que contêm as três alturas de um triângulo serem concorrentes (veja o teorema 15), permite garantir que H é o ortocentro do triângulo ABC e deste modo concluir a demonstração. ■

Outras demonstrações deste teorema podem ser consultadas em [8] e [25].

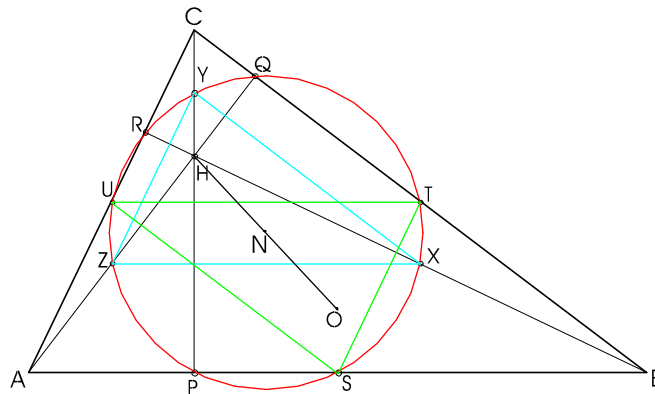
Definição 9 *A recta determinada pelo ortocentro, baricentro e circuncentro chama-se **recta de Euler**¹.*

Proposição 15 *O centro da circunferência dos nove pontos N está sobre a recta de Euler, a meia distância entre o ortocentro e o circuncentro:*

$$\overline{HN} = \overline{NO}.$$

Demonstração: Como foi referido na demonstração do teorema 18, o segmento $[UX]$ é um diâmetro da circunferência dos nove pontos. Do mesmo modo, é possível concluir que $[YS]$ e $[ZT]$ também são diâmetros da circunferência dos nove pontos.

¹Leonhard Euler nasceu a 15 de Abril de 1707 em Brasileia, Suíça, foi um dos mais produtivos matemáticos e o seu nome aparece ligado às mais diversas áreas da Matemática. Após a conclusão dos seus estudos na Universidade de Brasileia foi convidado, em 1727, para a Academia de Ciências de St. Petersburg, na Rússia. Em 1741, já Euler possuía uma reputação elevada tendo vencido o Grande Prémio da Academia de Paris em 1738 e 1740 (ainda que em ambas as situações o tenha partilhado com outros matemáticos), parte para Berlim para se tornar o titular da cadeira de Matemáticas na Academia Prussiana. Regressa a St. Petersburg em 1766 onde permaneceria até à sua morte em 18 de Setembro de 1783. Foram variadíssimas as obras de Euler sendo de referir que, cerca de 50 anos após a sua morte, ainda a Academia de St. Petersburg fazia publicar obras suas que ainda não o haviam sido.



Logo X , Y e Z são diametralmente opostos, respectivamente, a U , S e T e, portanto, os dois triângulos XYZ e UST são simétricos relativamente ao centro da circunferência dos nove pontos N . Portanto, os seus ortocentros também são simétricos. Mas, visto que H é o ortocentro do triângulo XYZ e O é o ortocentro do triângulo STU (veja a proposição 13), temos que N é o ponto médio de $[HO]$. ■

Da definição da circunferência dos nove pontos, é evidente que tem lugar a seguinte proposição:

Proposição 16 *O circuncentro do triângulo medial coincide com o centro da circunferência dos nove pontos.*

3.2 Classificação das curvas de segunda ordem

Os resultados incluídos nesta secção podem ser consultados no livro [11] e, embora não estejam directamente relacionados com a geometria do triângulo, são imprescindíveis para uma melhor compreensão da secção 3.3. Outras abordagens para a classificação das curvas de segunda ordem poderão ser consultadas, por exemplo, nos livros [17] e [20].

Uma curva de segunda ordem é o lugar geométrico dos pontos do plano, cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação polinomial de segunda ordem, da forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (3.1)$$

3.2.1 Transformação dos coeficientes da equação da curva de segunda ordem quando se muda de referencial cartesiano

A curva L , determinada pela equação (3.1), não muda como objecto geométrico ao mudar o referencial cartesiano.

Como se sabe, a mudança do referencial cartesiano pode-se realizar em duas partes: em primeiro lugar, podemos deslocar a origem do referencial até à origem do novo referencial cartesiano e, em segundo lugar, é necessário realizar uma rotação dos eixos do referencial. Estas duas transformações serão estudadas em separado e, evidentemente, assumiremos que em (3.1) pelo menos um dos coeficientes a_{11} , a_{12} ou a_{22} é diferente de zero.

Os termos $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ são denominados como os termos de segunda ordem e as parcelas $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ são referidas como a parte linear da equação (3.1).

Transformação dos coeficientes quando se muda a origem do referencial

Obviamente, as coordenadas no referencial cartesiano xOy e no novo referencial $x'O'y'$ estão relacionadas pelas igualdades

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad (3.2)$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas da origem O' , no referencial xOy .

Substituindo (3.2) em (3.1) obtemos a equação da curva L no referencial $x'O'y'$:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podemos então tirar as seguintes conclusões: quando se muda a origem do referencial cartesiano, os coeficientes dos termos de segunda ordem não mudam e os coeficientes da parte linear são dados pelas igualdades (3.4).

Observação 1 *Utilizando as primeiras duas equações de (3.4) podemos afirmar que*

$$a'_{33} = (a'_{13} + a_{13})x_0 + (a'_{23} + a_{23})y_0 + a_{33}. \quad (3.5)$$

Transformação dos coeficientes quando se efectua uma rotação dos eixos coordenados

De seguida, assumiremos que o referencial $x'Oy'$ se obtém a partir do referencial xOy quando se faz uma rotação dos eixos coordenados de ângulo φ .

Como se sabe, estes dois referenciais estão relacionados pelas igualdades

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Substituído (3.6) em (3.1) podemos afirmar que a curva L , no referencial $x'Oy'$, é dada pela equação

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,\tag{3.7}$$

onde

$$\begin{aligned}a'_{11} &= a_{12} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\a'_{12} &= -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi, \\a'_{22} &= -a_{12} \sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\a'_{13} &= a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi, \\a'_{23} &= a_{23} \cos \varphi - a_{13} \sin \varphi, \\a'_{33} &= a_{33}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Observação 2 *Sejam P , Q e R , respectivamente as constantes, tais que*

$$\begin{aligned}P &= \sqrt{a_{12}^2 + \left[\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\right]^2}, \\Q &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\R &= \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}.\end{aligned}$$

Seja ainda, α o ângulo tal que

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_{12}}{P}, \\ \sin \alpha &= \frac{a_{11} - a_{22}}{2P}, \text{ se } P \neq 0\end{aligned}$$

e $\alpha = 0$, se $P = 0$.

E seja β o ângulo tal que

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{a_{23}}{R}, \\ \sin \beta &= \frac{a_{13}}{R}, \text{ se } R \neq 0\end{aligned}$$

e $\beta = 0$, se $R = 0$.

Então, as igualdades de (3.8) podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned}a'_{11} &= P \sin(2\varphi + \alpha) + Q, \\ a'_{12} &= P \cos(2\varphi + \alpha), \\ a'_{22} &= -P \sin(2\varphi + \alpha) + Q, \\ a'_{13} &= R \sin(\varphi + \beta), \\ a'_{23} &= R \cos(\varphi + \beta), \\ a'_{33} &= a_{33}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Repare-se que P , Q , R , α e β não dependem de φ .

3.2.2 Invariantes das curvas de segunda ordem

Teorema 21 *As constantes*

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{3.10}$$

são invariantes quando se muda o referencial cartesiano.

Demonstração: Obviamente é suficiente provar, por separado, que I , D e A são invariantes com relação à mudança de origem do referencial e que são invariantes com relação à rotação dos eixos coordenados.

De acordo com a observação 1, quando se muda a origem do referencial cartesiano, os coeficientes dos termos de segunda ordem não se alteram e portanto não mudam I e D . No novo referencial, A tem a forma

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Utilizando (3.4) e (3.5) é possível concluir que A é invariante quando se muda a origem do referencial.

Consideremos agora o caso em que o novo referencial se obtém a partir do anterior quando se faz uma rotação dos eixos coordenados de ângulo φ . De acordo com (3.9),

$$\begin{aligned} I' &= a'_{11} + a'_{22} = 2Q = a_{11} + a_{22}, \\ D' &= a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = Q^2 - P^2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12}. \end{aligned}$$

Logo I e D são invariantes.

Seja

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

de acordo com a regra de Laplace,

$$\tilde{A} = a'_{13} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{23} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} + a'_{33} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

e, tendo em conta que $a'_{33} = a_{33}$ (veja 3.8) e que

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

temos que

$$\tilde{A} = a'_{13} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{23} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} + a_{33}D. \quad (3.11)$$

A partir de (3.9) podemos concluir que

$$a'_{13} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} = \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= R \sin(\varphi + \beta) \begin{vmatrix} P \cos(2\varphi + \alpha) & -P \sin(2\varphi + \alpha) + Q \\ R \sin(\varphi + \beta) & R \cos(\varphi + \beta) \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \sin(\varphi + \beta) \{P \cos(\varphi + \alpha - \beta) - Q \sin(\varphi + \beta)\}. \end{aligned}$$

E, de modo análogo,

$$a'_{23} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} = R^2 \sin(\varphi + \beta) \{P \sin(\varphi + \alpha - \beta) + Q \cos(\varphi + \beta)\}. \quad (3.13)$$

Logo

$$\tilde{A} = PR^2 \sin(2\beta - \alpha) - QR^2 + a_{33}D. \quad (3.14)$$

Como foi afirmado na observação 2, as constantes P , Q e R e os ângulos α e β não dependem de φ .

Então \tilde{A} não depende de φ e portanto $\tilde{A} = \tilde{A}|_{\varphi=0} = -QR^2 + a_{33}D = A$.
Com isto concluímos a demonstração do teorema. ■

As características geométricas das curvas de segunda ordem podem ser determinadas a partir dos invariantes I , D e A .

Em função do sinal de D , as curvas de segunda ordem dividem-se nas seguintes classes:

- tipo elíptico, se $D > 0$
- tipo hiperbólico, se $D < 0$
- tipo parabólico, se $D = 0$.

Obviamente, o tipo de curva de segunda ordem não se altera quando se muda o referencial cartesiano. Mais adiante será feita uma classificação exaustiva deste tipo de equações algébricas.

3.2.3 Centro das curvas de segunda ordem

Sejam x_0, y_0 as coordenadas de O' , a origem do referencial $x'O'y'$, tais que

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Se o sistema anterior tem solução, esta será referida como as coordenadas do centro da curva de segunda ordem.

É necessário clarificar qual o sentido da denominação "centro". Se o sistema (3.15) tem solução, então no novo referencial $x'O'y'$ determinado pelas igualdades (3.2) a curva de segunda ordem tem a forma

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \quad (3.16)$$

Seja $M(x', y')$ um ponto que satisfaz esta equação, então o seu simétrico, com relação a O' é $M^*(-x', -y')$ que obviamente também satisfaz (3.16). Ou seja, quando a curva L tem centro O' a mesma é simétrica com relação a este ponto.

Observação 3 *Se a curva L de segunda ordem tem centro então, a partir de (3.16), podemos concluir que*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix},$$

e portanto,

$$A = Da'_{33}. \quad (3.17)$$

Evidentemente, a existência do centro de uma curva de segunda ordem depende da solubilidade do sistema (3.15). Se este sistema é possível determinado dizemos que a curva de segunda ordem é central.

Tendo em conta que o determinante do sistema (3.15) coincide com D podemos afirmar que apenas as linhas de segunda ordem do tipo elíptico e hiperbólico são centrais.

Observação 4 *Nas condições da observação anterior podemos afirmar que*

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{D} = 0. \quad (3.18)$$

3.2.4 Simplificação das curvas de segunda ordem com recurso à rotação dos eixos coordenados

De seguida, será mostrado que a equação (3.1) da curva de segunda ordem pode ser simplificada com recurso a uma rotação dos eixos de maneira que $a'_{12} = 0$, isto é, de maneira que a equação de L , no novo referencial cartesiano não contenha a parcela $2a'_{12}x'y'$.

Seja φ o ângulo da rotação dos eixos, então de acordo com (3.8)

$$-\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi = 0, \quad (3.19)$$

onde estamos a considerar que $a_{12} \neq 0$, logo

$$\cot 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (3.20)$$

Ou seja, no referencial cartesiano $x'Oy'$ determinado pelas igualdades (3.6) L tem a forma

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \quad (3.21)$$

3.2.5 Classificação das curvas centrais ($D \neq 0$)

Se a curva (3.1) é central então a sua simplificação pode ser feita em dois passos: primeiro deslocando a origem do referencial até ao centro, a equação da curva L pode ser levada à forma (3.18) e, em segundo lugar, é feita uma rotação dos eixos de maneira que $a'_{12} = 0$.

Se em (3.18):

1. $a_{12} = 0$, podemos deixar o referencial $x'O'y'$ inalterado (rotação dos eixos com $\varphi = 0$);

2. $a_{12} \neq 0$, podemos determinar o ângulo φ a partir de (3.20) e fazer uma rotação dos eixos coordenados de acordo com (3.6).

Em qualquer um dos casos anteriores, a equação de L no referencial $x''O'y''$ tem a forma

$$a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + \frac{A}{D} = 0. \quad (3.22)$$

De seguida, serão consideradas, em separado, as curvas de segunda ordem do tipo elíptico e do tipo hiperbólico.

Curvas do tipo elíptico ($D > 0$)

Tendo em conta que

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

então $a_{11}a_{22} > 0$, logo a_{11} e a_{22} têm o mesmo sinal que coincide com o sinal de $I = a_{11} + a_{22}$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que este sinal é positivo.

Teorema 22 *Seja (3.1) a equação da curva L , de tipo elíptico, normada de maneira que $I > 0$. Então,*

- i) se $A < 0$, L é uma elipse;*
- ii) se $A = 0$, a equação (3.1) é satisfeita pelas coordenadas de um único ponto. Neste caso, dizemos que L é uma elipse degenerada;*
- iii) se $A > 0$, não existe nenhum ponto cujas coordenadas satisfaçam (3.1). Neste caso, dizemos que L é uma elipse imaginária.*

Demonstração: A equação (3.22) da linha L pode ser escrita da seguinte maneira:

se $A < 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-A}{Da''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-A}{Da''_{22}}}\right)^2} = 1,$$

se $A = 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{22}}}\right)^2} = 0,$$

se $A > 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{A}{Da''_{11}}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{A}{Da''_{22}}}\right)^2} = -1.$$

Onde as afirmações do enunciado do teorema são agora evidentes. ■

A equação (3.1) pode ser normada ao dividir esta equação por $\text{sgn}(I)$, logo é possível formular o seguinte corolário:

Corolário 1 *Seja (3.1) a equação da curva L , de tipo elíptico, então*

- i) se $\frac{A}{I} < 0$, L é uma elipse;*
- ii) se $A = 0$, L é um ponto real;*
- iii) se $\frac{A}{I} > 0$, L é uma elipse imaginária.*

Curvas do tipo hiperbólico ($D < 0$)

Teorema 23 *A equação (3.1) da curva L , de tipo hiperbólico, é uma hipérbole se $A \neq 0$ e um par de rectas concorrentes se $A = 0$.*

Demonstração: Tendo em conta que

$$D = a''_{11}a''_{22} < 0,$$

podemos concluir que a''_{11} e a''_{22} têm sinais contrários. Sem perda de generalidade vamos considerar que $a''_{11} > 0$ e $a''_{22} < 0$, então (3.22) pode ser escrita da seguinte maneira:

se $A < 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{A}{Da''_{11}}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{A}{D(-a''_{22})}}\right)^2} = -1, \quad (3.23)$$

se $A = 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-a''_{22}}}\right)^2} = 0, \quad (3.24)$$

se $A > 0$:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{-A}{Da''_{11}}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{-A}{D(-a''_{22})}}\right)^2} = 1. \quad (3.25)$$

Evidentemente (3.23) e (3.25) são as equações canónicas de duas hipérbolas.

Relativamente à equação (3.24) a mesma pode ser escrita como

$$\left(\frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} + \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}}\right) \left(\frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{a''_{11}}} - \frac{y''}{\sqrt{-a''_{22}}}\right) = 0.$$

De onde é possível observar que a mesma é satisfeita pelos pontos de duas rectas que se intersectam em $x'' = y'' = 0$. ■

3.2.6 Classificação das curvas não centrais ($D = 0$)

Repare-se em primeiro lugar que para as curvas de segunda ordem do tipo parabólico o invariante $I \neq 0$.

De facto, se

$$I = a_{11} + a_{22} = 0,$$

então

$$I^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} = 0,$$

ou seja,

$$a_{11}a_{22} = -\frac{a_{11}^2}{2} - \frac{a_{22}^2}{2}.$$

Tendo em conta que

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

podemos concluir que

$$-\frac{a_{11}^2}{2} - \frac{a_{22}^2}{2} = a_{12}^2,$$

isto é, $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, o que é uma contradição com a nossa hipótese de que pelo menos um dos coeficientes a_{11} , a_{22} ou a_{12} é diferente de zero. Logo $I \neq 0$.

De seguida, podemos simplificar a equação (3.1), da curva de segunda ordem com recurso a uma rotação dos eixos coordenados:

1. se $a_{12} = 0$, o referencial xOy mantém-se inalterado;
2. se $a_{12} \neq 0$, fazemos uma rotação dos eixos coordenados com ângulo φ , determinado a partir da fórmula (3.20). Desta maneira, no novo referencial $x'Oy'$, os coeficientes da curva de segunda ordem são dados por (3.8).

Em qualquer um dos casos acima referidos, a curva de segunda ordem passa a ter a forma (3.21).

Tendo em conta que $I = a'_{11} + a'_{22}$, $D = a'_{11}a'_{22}$, $I \neq 0$ e $D = 0$ podemos concluir que um dos coeficientes a'_{11} ou a'_{22} é igual a zero, sendo o outro obrigatoriamente diferente de zero.

Sem perda de generalidade, vamos considerar que $a'_{11} = 0$ e $a'_{22} \neq 0$, então $I = a'_{22}$, ou seja, no referencial $x'Oy'$ a curva de segunda ordem tem a equação

$$Iy'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \quad (3.26)$$

Por último, a equação (3.26) pode ser simplificada com recurso a uma translação do referencial cartesiano $x'Oy'$. Repare-se que (3.26) pode ser escrita na forma

$$I \left(y' + \frac{a'_{23}}{I} \right)^2 + 2a'_{13}x' + a_{33} - \frac{a_{23}^2}{I} = 0. \quad (3.27)$$

Fazendo

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{a'_{23}}{I} \end{cases}$$

e introduzindo as notações

$$a''_{13} = a'_{13}, \quad a''_{33} = a_{33} - \frac{a_{23}^2}{I}, \quad (3.28)$$

podemos afirmar que a curva L no referencial $x''O''y''$ tem equação

$$Iy''^2 + 2a''_{13}x'' + a''_{33} = 0. \quad (3.29)$$

Teorema 24 *A equação (3.1) da curva L de tipo parabólico é:*

- 1) *uma parábola, se $A \neq 0$;*
- 2) *um par de rectas paralelas (podem ser coincidentes) ou um par de rectas paralelas imaginárias, se $A = 0$.*

Demonstração: A partir de (3.29) temos que

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & I & 0 \\ a''_{13} & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = -Ia''_{13}^2. \quad (3.30)$$

Tendo em conta que $I \neq 0$, podemos afirmar que $A = 0$ se e só se $a''_{13} = 0$. Portanto:

- 1) se $A \neq 0$,

$$Iy''^2 + 2a''_{13} \left(x'' + \frac{a''_{33}}{2a''_{13}} \right) = 0, \quad (3.31)$$

- 2) se $A = 0$,

$$Iy''^2 + a''_{33} = 0. \quad (3.32)$$

A igualdade (3.31) é a equação de uma parábola que pode ser reduzida à sua forma canónica fazendo

$$\begin{cases} X = x'' + \frac{a''_{33}}{2a''_{13}} \\ Y = y'' \end{cases},$$

e

$$p = \left| \frac{a''_{13}}{I} \right|.$$

Desta maneira, (3.31) transforma-se em $Y^2 = 2pX$ ou $Y^2 = -2pX$.

Por último, a equação (3.32) pode ser escrita na forma

$$y''^2 = -\frac{a''_{33}}{I}. \quad (3.33)$$

Então,

- i) se $-\frac{a''_{33}}{I} > 0$, (3.33) define um par de rectas paralelas;
- ii) se $-\frac{a''_{33}}{I} = 0$, (3.33) é a equação do eixo coordenado Ox'' ;
- iii) se $-\frac{a''_{33}}{I} < 0$, a equação (3.33) não é satisfeita pelas coordenadas de nenhum ponto. Neste caso, dizemos que (3.33) define um par de rectas paralelas imaginárias. ■

Corolário 2 *Seja*

$$A' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.34)$$

então, nas condições do teorema anterior, quando $A = 0$ a equação (3.1) da curva L , define:

1. *um par de rectas paralelas, se $A' < 0$,*
2. *a equação do eixo coordenado Ox'' , se $A' = 0$,*
3. *um par de rectas paralelas imaginárias, se $A' > 0$.*

Demonstração: De (3.28) e (3.30) temos que

$$(a'_{23})^2 = (a_{33} - a'_{33}) I$$

e

$$(a'_{13})^2 = 0.$$

Tendo em conta (3.8), estas igualdades podem ser escritas da seguinte maneira

$$a_{23}^2 \cos^2 \varphi - a_{23} a_{13} \cos \varphi \sin \varphi + a_{13}^2 \sin^2 \varphi = (a_{33} - a'_{33}) I$$

e

$$a_{13}^2 \cos^2 \varphi + 2a_{13} \cos \varphi \sin \varphi + a_{23}^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

Somando as expressões, obtemos

$$a_{23}^2 + a_{13}^2 = (a_{33} - a'_{33}) I,$$

isto é,

$$a'_{33} = \frac{A'}{I}.$$

Logo $\frac{a'_{33}}{I}$ e A' têm o mesmo sinal. ■

Toda a classificação das curvas de segunda ordem apresentada anteriormente poderá ser consultada, de forma resumida, na tabela seguinte.

Classificação das curvas de segunda ordem

			Curvas não degeneradas $A \neq 0$	Curvas degeneradas $A = 0$
Curvas centrais $D \neq 0$	$D > 0$	$\frac{A}{I} < 0$	Elipse (circunferência se $I^2 = 4D$ ou $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$)	
		$\frac{A}{I} > 0$	Elipse imaginária	
		$\frac{A}{I} = 0$		Um ponto real
	$D < 0$		Hipérbole	Par de rectas concorrentes
Curvas não centrais $D = 0$		$A' > 0$	Parábola	Par de rectas imaginárias
		$A' < 0$		Par de rectas paralelas
		$A' = 0$		Uma recta

onde I, D, A e A' são dados pelas igualdades (3.10) e (3.34).

3.3 Cónicas relacionadas com a recta de Euler

Esta secção contém os resultados publicados no artigo [22].

Sem perda de generalidade, consideremos o triângulo ABC com dois dos seus vértices nos pontos A e B , respectivamente, com coordenadas

$$A = (-1, 0) \quad \text{e} \quad B = (1, 0) \quad (3.35)$$

e cujo terceiro vértice C , tem coordenadas cartesianas

$$C = (x, y), \quad \text{com } y \neq 0. \quad (3.36)$$

Nesta secção, começamos por estudar a localização do vértice C , de modo que a recta de Euler do triângulo ABC tenha declive m .

Como se sabe, a posição do baricentro G e do ortocentro H de um triângulo pode ser determinada a partir das coordenadas dos seus vértices (veja as proposições 2 e 7). Em particular, no triângulo ABC , os centros G e H têm, respectivamente, as seguintes coordenadas:

$$G = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right), \quad H = \left(x, \frac{-x^2 + 1}{y} \right). \quad (3.37)$$

Logo, o vector

$$\overrightarrow{GH} = \left(\frac{2x}{3}, \frac{-3x^2 - y^2 + 3}{3y} \right) \quad (3.38)$$

é paralelo à recta de Euler. Quando a recta de Euler não é vertical ($x \neq 0$), o seu declive é dado por

$$m = \frac{-3x^2 - y^2 + 3}{2xy}, \quad (3.39)$$

então, as coordenadas do vértice (3.36) deverão satisfazer a equação

$$3x^2 + y^2 + 2mxy - 3 = 0. \quad (3.40)$$

Esta equação será por nós referida como equação das cónicas de Euler. É necessário assinalar que os pares $(\pm 1, 0)$ são sempre solução desta equação e correspondem aos casos particulares em que o vértice C coincide, respectivamente com A ou B , e conseqüentemente, não é possível definir o triângulo ABC . Os pares $(0, \pm\sqrt{3})$ são também soluções da equação (3.40) e correspondem ao caso trivial em que o triângulo é equilátero. Nesta última situação, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem e, portanto a Recta de Euler não é única.

Obviamente, a cónica obtida da equação (3.40) é uma curva do segunda ordem que, como se sabe, pode ser classificada a partir dos seus invariantes.

No caso particular da equação (3.40) temos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3 & a_{13} &= 0 & a_{23} &= 0 \\ a_{12} &= m & a_{22} &= 1 & a_{33} &= -3 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Logo, os seus invariantes são

$$I = 4, \quad D = 3 - m^2, \quad A = 3(m^2 - 3).$$

Como estes dependem da constante m podemos ter três diferentes tipos de cónicas de Euler:

- elipse, quando $D > 0$ e $\frac{A}{I} < 0$,
- hipérbole, quando $D < 0$,
- ou um par de rectas paralelas, quando $D = 0$ e $A = 0$ pois $A' = -12$.

Todas as propriedades das cónicas de Euler estão resumidas nas seguintes proposições:

Proposição 17 *Se $m \neq \pm\sqrt{3}$, o centro das cónicas é o ponto médio do lado AB , isto é, a origem das coordenadas.*

Demonstração: Como foi assinalado na secção anterior, as coordenadas cartesianas do centro de uma curva de segunda ordem central ($D \neq 0$), satisfaz o sistema (3.15), logo

$$x_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad y_0 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad (3.42)$$

então, em particular, para a cónica determinada pela equação das cónicas de Euler, quando $m \neq \pm\sqrt{3}$, as coordenadas do centro são ambas iguais a zero. ■

Proposição 18 *Nas condições da última proposição, a equação (3.40) admite a representação canónica*

$$\frac{x'^2}{P^2} + \frac{y'^2}{Q^2} = 1, \quad \text{se } |m| < \sqrt{3}, \quad (3.43)$$

ou

$$\frac{x'^2}{P^2} - \frac{y'^2}{Q^2} = 1, \quad \text{se } |m| > \sqrt{3}, \quad (3.44)$$

onde

$$P^2 = \frac{3}{|2 + \operatorname{sgn}(m)\sqrt{m^2 + 1}|}, \quad Q^2 = \frac{3}{|2 - \operatorname{sgn}(m)\sqrt{m^2 + 1}|},$$

e

$$\operatorname{sgn}(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m > 0 \\ 0 & \text{se } m = 0 \\ -1 & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Demonstração: Para reduzir a equação (3.40) à forma canónica, necessitamos de um novo sistema de coordenadas $x'Oy'$ que está relacionado com o sistema de coordenadas xOy pelas fórmulas

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad (3.45)$$

onde x_0 e y_0 , de acordo com a proposição anterior, são ambos nulos.

Logo

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

e então

$$x^2 = x'^2 \cos^2 \varphi - x'y' \sin \varphi \cos \varphi + y'^2 \sin^2 \varphi, \quad (3.46)$$

$$y^2 = x'^2 \sin^2 \varphi + x'y' \sin \varphi \cos \varphi + y'^2 \cos^2 \varphi, \quad (3.47)$$

$$2mxy = 2m(x'^2 \sin \varphi \cos \varphi + x'y' \cos^2 \varphi - x'y' \sin^2 \varphi - y'^2 \sin \varphi \cos \varphi). \quad (3.48)$$

Substituindo (3.46), (3.47) e (3.48) na equação (3.40), obtemos

$$Ax'^2 + By'^2 + Cx'y' = 3, \quad (3.49)$$

onde

$$A = 1 + 2 \cos^2 \varphi + 2m \sin \varphi \cos \varphi, \quad (3.50)$$

$$B = 1 + 2 \sin^2 \varphi - 2m \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$C = -2 \sin(2\varphi) + 2m \cos(2\varphi),$$

e o ângulo φ é determinado de maneira que

$$C = 0,$$

ou seja

$$-2 \sin(2\varphi) + 2m \cos(2\varphi) = 0,$$

e portanto

$$m = \frac{\sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} = \tan(2\varphi).$$

Seja θ o ângulo que a recta de Euler forma com o eixo Ox então $m = \tan \theta$ e podemos considerar

$$\varphi = \frac{\theta}{2} \quad (3.51)$$

Da conhecida relação trigonométrica

$$1 + \tan^2(2\varphi) = \frac{1}{\cos^2(2\varphi)},$$

temos que

$$1 + m^2 = \frac{1}{\cos^2(2\varphi)}.$$

Então podemos concluir que

$$\cos(2\varphi) = \frac{\operatorname{sgn}(m)}{\sqrt{1+m^2}},$$

com $m \neq 0$.

Para obter as igualdades (3.43) e (3.44), em primeiro lugar consideremos o caso em que $m > 0$, então

$$\cos(2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},$$

logo

$$\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, temos

$$1 - 2\sin^2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},$$

ou seja,

$$\sin^2(\varphi) = \frac{\sqrt{m^2+1}-1}{2\sqrt{m^2+1}}.$$

Logo

$$\sin(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{2\sqrt{m^2+1}}} \quad (3.52)$$

e

$$\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}+1}{2\sqrt{m^2+1}}} \quad (3.53)$$

Substituindo em (3.50) obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 + \sqrt{m^2+1}}{3}, \\ B &= \frac{2 - \sqrt{m^2+1}}{3}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Por último, substituindo (3.54) em (3.49) obtemos

$$x'^2 \left(\frac{2 + \sqrt{m^2 + 1}}{3} \right) + y'^2 \left(\frac{2 - \sqrt{m^2 + 1}}{3} \right) = 1,$$

ou seja

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{3}{2 + \sqrt{m^2 + 1}} \right)} + \frac{y'^2}{\left(\frac{3}{2 - \sqrt{m^2 + 1}} \right)} = 1.$$

e, portanto, as igualdades (3.43) e (3.44) têm lugar quando $m > 0$.

Em segundo lugar, consideremos o caso em que $m < 0$. Nesta situação podemos afirmar que

$$\cos(2\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Mas

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi),$$

logo

$$\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Mas, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, temos que

$$1 - 2\sin^2(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}},$$

ou seja,

$$\sin^2(\varphi) = \frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{2\sqrt{m^2 + 1}},$$

portanto

$$\sin(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{2\sqrt{m^2 + 1}}}$$

e

$$\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} - 1}{2\sqrt{m^2 + 1}}}.$$

Substituindo em (3.50) obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 - \sqrt{m^2 + 1}}{3} \\ B &= \frac{2 + \sqrt{m^2 + 1}}{3} \end{aligned} \tag{3.55}$$

e substituindo (3.55) em (3.49) obtemos

$$x'^2 \left(\frac{2 - \sqrt{m^2 + 1}}{3} \right) + y'^2 \left(\frac{2 + \sqrt{m^2 + 1}}{3} \right) = 1,$$

ou seja

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{3}{2 - \sqrt{m^2 + 1}} \right)} + \frac{y'^2}{\left(\frac{3}{2 + \sqrt{m^2 + 1}} \right)} = 1.$$

Para provar as afirmações da proposição, resta agora considerar o caso em que $m = 0$. Evidentemente, de (3.40), vem que

$$x'^2 + \frac{y'^2}{3} = 1$$

Assim, podemos finalmente afirmar que, em todos os casos, a equação (3.40) pode ser escrita numa das formas (3.43) ou (3.44). ■

Por outras palavras, para reduzir a equação (3.40) à forma canónica ($m \neq \pm\sqrt{3}$) é necessário fazer uma rotação do sistema de coordenadas igual a metade do ângulo formado entre a recta de Euler e o eixo Ox .

Seguidamente, descrevemos as propriedades das cónicas de Euler nos três casos possíveis: elíptico, hiperbólico e o caso degenerado.

3.3.1 Caso Elíptico

Como mencionamos anteriormente, quando $|m| < \sqrt{3}$, a curva determinada pela equação das cónicas de Euler é uma elipse, que pode ser reduzida à forma canónica (3.43) no sistema de coordenadas $x'Oy'$. Portanto, para qualquer triângulo inscrito nesta elipse, com dois dos vértices nos pontos (3.35), a respectiva recta de Euler tem declive m (veja a figura 3.1).

Proposição 19 *Os eixos de simetria da elipse são as rectas*

$$y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{m}x, \quad \text{quando } m \neq 0$$

ou

$$y = 0 \quad e \quad x = 0, \quad \text{quando } m = 0.$$

Demonstração: No referencial cartesiano xOy , as equações dos eixos de simetria são

$$y = x \tan \varphi, \quad y = -x \cot \varphi,$$

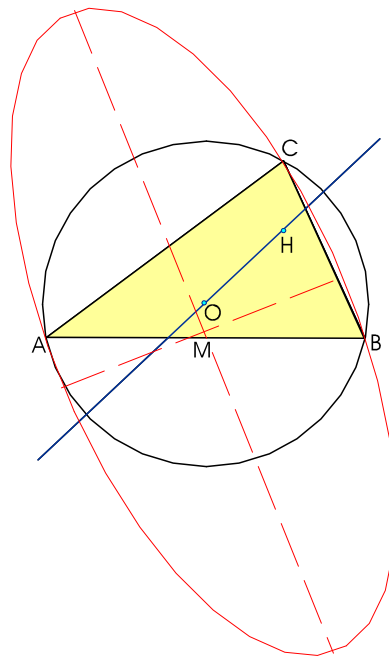


Figura ~3.1:

onde φ é o ângulo (3.19)

Para $m > 0$, tomando em conta (3.52) e (3.53) e simplificando, obtemos

$$\tan \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1}.$$

Então os eixos de simetria são as rectas

$$y = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1} + 1}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{m}x.$$

Para $m < 0$, temos

$$\tan \varphi = -\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{m}.$$

Logo os eixos de simetria são as rectas

$$y = -\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{m}x \quad \text{e} \quad y = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2} + 1}x.$$

Evidentemente, quando $m = 0$, os eixos de simetria da elipse coincidem com os eixos Ox e Oy . ■

Proposição 20 *As coordenadas cartesianas dos focos desta elipse são os pontos $F_i = (x, y)$, $i = 1, 2$, em que*

$$x = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}-1}}{\sqrt{3-m^2}}, \quad y = \mp\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+1}}{\sqrt{3-m^2}}, \quad \text{quando } m \geq 0,$$

ou

$$x = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}-1}}{\sqrt{3-m^2}}, \quad y = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+1}}{\sqrt{3-m^2}}, \quad \text{quando } m \leq 0.$$

Demonstração: Para $m \geq 0$

$$C = \sqrt{Q^2 - P^2},$$

onde C é metade da distância focal, ou seja

$$C = \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}}.$$

Os focos da elipse estão no eixo coordenado Oy' . Então as coordenadas cartesianas dos focos no referencial $x'Oy'$ são

$$x' = 0, \quad y' = \pm C.$$

Substituindo em (3.45) temos

$$x = \mp\sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}} \sin \varphi, \quad y = \pm\sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}} \cos \varphi,$$

então, tendo em conta (3.52) e (3.53),

$$x = \mp\sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{2\sqrt{m^2+1}}} = \mp\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{3-m^2}}},$$

e

$$y = \pm\sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}+1}{2\sqrt{m^2+1}}} = \pm\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}+1}{\sqrt{3-m^2}}}.$$

De maneira similar, para $m \leq 0$, podemos afirmar que

$$C = \sqrt{P^2 - Q^2} = \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}}.$$

Os focos da elipse estão no eixo coordenado Ox' e portanto, as coordenadas cartesianas dos focos no referencial $x'Oy'$ são

$$x' = \pm C, \quad y' = 0.$$

De (3.45) temos

$$x = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{2\sqrt{m^2+1}}} = \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}-1}{\sqrt{3-m^2}}},$$

e

$$y = \mp \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}+1}{2\sqrt{m^2+1}}} = \mp \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+1}+1}{\sqrt{3-m^2}}}.$$

■

Proposição 21 *A excentricidade da elipse é*

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+m^2}}{2+\sqrt{m^2+1}}}.$$

Demonstração: Para $m > 0$, a excentricidade $\varepsilon = \frac{C}{Q}$ pode ser calculada de acordo com a fórmula

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{Q^2 - P^2}}{Q} = \sqrt{1 - \frac{P^2}{Q^2}}.$$

então

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{m^2+1}}{2+\sqrt{m^2+1}}}.$$

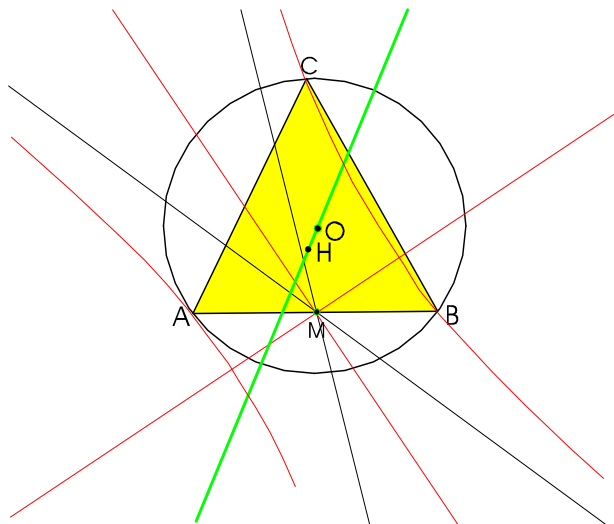
Para $m < 0$, $\varepsilon = \frac{C}{P}$ e, de modo análogo ao anterior, podemos concluir que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{m^2+1}}{2+\sqrt{m^2+1}}}.$$

■

3.3.2 Caso Hiperbólico

Quando $|m| > \sqrt{3}$, a curva determinada pela equação (3.40) é uma hipérbole centrada na origem, como se pode ver na figura seguinte



Proposição 22 *Os eixos de simetria da hipérbole são as rectas*

$$y = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+1}}x \quad e \quad y = -\frac{\sqrt{1+m^2+1}}{m}x.$$

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração da proposição 19. ■

Proposição 23 *As coordenadas cartesianas dos seus focos são os pontos $F_i = (x, y)$, $i = 1, 2$, em que*

$$x = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+1}}{\sqrt{m^2-3}} \quad e \quad y = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}-1}}{\sqrt{m^2-3}}, \quad \text{quando } m > 0,$$

ou

$$x = \pm\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+1}}{\sqrt{m^2-3}} \quad e \quad y = \mp\sqrt{3}\frac{\sqrt{\sqrt{m^2+1}-1}}{\sqrt{m^2-3}}, \quad \text{quando } m < 0.$$

Demonstração: Para $m > 0$,

$$C = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Tomando em consideração que $|m| > \sqrt{3}$ então

$$P^2 = \frac{3}{2 + \sqrt{m^2 + 1}}, \quad Q^2 = \frac{3}{-2 + \sqrt{m^2 + 1}},$$

ou seja

$$C = \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}}.$$

Os focos da hipérbole estão no eixo coordenado Ox' . Portanto, as coordenadas cartesianas dos focos da hipérbole, no referencial $x'Oy'$ são

$$x' = \pm C, \quad y' = 0.$$

substituindo em (3.45) temos

$$x = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}} \cos \alpha, \quad y = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}} \sin \alpha,$$

logo, tendo em conta (3.52) e (3.53),

$$x = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{2\sqrt{m^2 + 1}}} = \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 - 3}}}$$

e

$$y = \pm \sqrt{\frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 - 3}} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} - 1}{2\sqrt{m^2 + 1}}} = \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} - 1}{\sqrt{m^2 - 3}}}.$$

Quando $m < 0$, pode-se concluir de maneira semelhante que

$$x = \mp \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} + 1}{\sqrt{m^2 - 3}}}$$

e

$$y = \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 + 1} - 1}{\sqrt{m^2 - 3}}}.$$

■

Proposição 24 *A excentricidade da hipérbole é*

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1} - 2}}.$$

Demonstração: Quando $m > 0$, a excentricidade $\varepsilon = \frac{C}{P}$ é dada pela fórmula

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{Q^2}{P^2}},$$

ou seja

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1} - 2}}.$$

Para $m < 0$, $\varepsilon = \frac{C}{Q}$ e, de modo análogo ao anterior, podemos concluir que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1} - 2}}.$$

■

Proposição 25 Se $|m| > \sqrt{3}$, as assíntotas da hipérbole (3.40) são as rectas

$$y = \left(-m \pm \sqrt{m^2 - 3}\right)x.$$

Demonstração: A hipérbole está centrada na origem do referencial xOy logo as suas assíntotas têm a forma

$$y = m'x,$$

onde m' é o declive das assíntotas.

Logo, se (x, y) é um ponto da hipérbole então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = m'.$$

A equação da hipérbole (3.40) é equivalente a

$$\frac{3x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{2mxy}{x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

Passando ao limite em ambos os membros podemos concluir que m' satisfaz a equação do segundo grau

$$3 + (m')^2 + 2mm'd = 0,$$

cujas soluções são

$$d = -m \pm \sqrt{m^2 - 3}.$$

Então as assíntotas são as rectas de equação

$$y = \left(-m \pm \sqrt{m^2 - 3}\right)x.$$

■

3.3.3 Caso degenerado

Quando $|m| = \sqrt{3}$, as cónicas relacionadas com a recta de Euler degeneram num par de rectas paralelas.

Lema 2 *Seja o triângulo ABC com os vértices A e B , respectivamente no ponto (3.35). O declive da recta de Euler do triângulo ABC é*

$$m = \pm\sqrt{3}$$

se e só se, um dos ângulos internos A ou B tem amplitude igual a 60° ou 120° .

Demonstração: Seja $m = \sqrt{3}$, então (3.40) tem a forma

$$3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy - 3 = 0,$$

ou seja

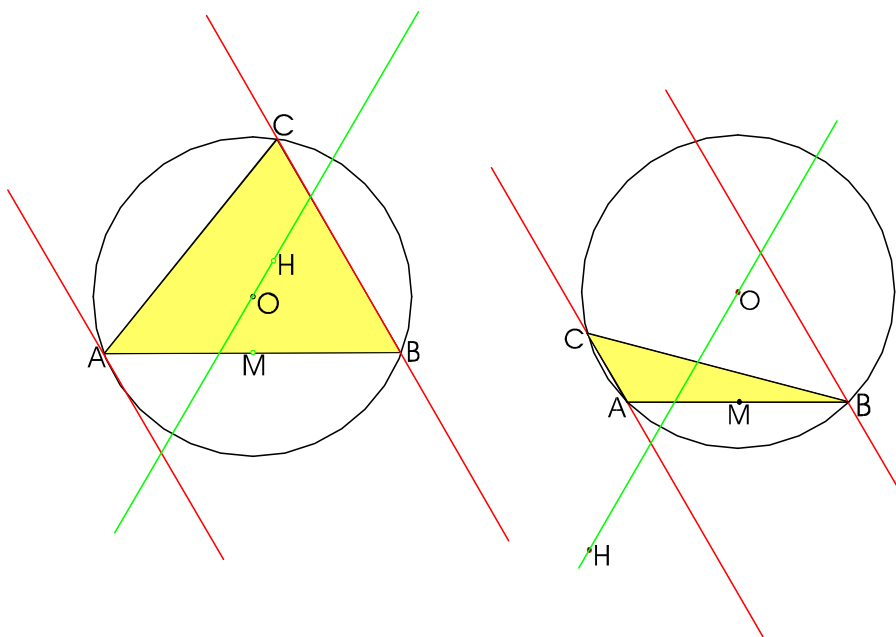
$$(\sqrt{3}x + y)^2 = 3,$$

isto é

$$\sqrt{3}x + y = \pm\sqrt{3},$$

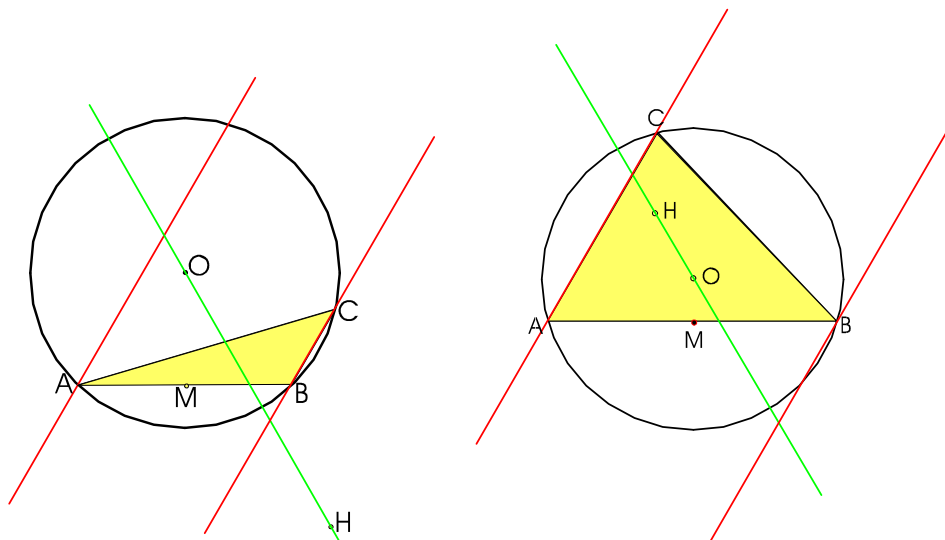
então obtemos um par de rectas paralelas

$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$



Da mesma forma, se $m = -\sqrt{3}$, obtemos também o par de rectas paralelas,

$$y = \sqrt{3}(x + 1) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3}(x - 1)$$



Ou seja, como está ilustrado nas figuras acima, a amplitude dos ângulos internos α ou β do triângulo ABC devem ser 60° ou 120° .

Relativamente à afirmação recíproca, a mesma será provada de seguida, sem perda de generalidade, para o caso em que o ângulo β tem a amplitude de 120° ou 60° . De facto, considerando o triângulo com vértices nos pontos (3.35) e (3.36) e com o ângulo em β com amplitude 120° , a recta BC tem equação

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

logo

$$C(x, \sqrt{3}x - \sqrt{3})$$

e, a partir de (3.39), obtemos que

$$m = -\sqrt{3}$$

Do mesmo modo se prova que, quando o ângulo β é 60°

$$m = \sqrt{3}.$$

■

Corolário 3 *Seja ABC um triângulo. A amplitude do ângulo formado pelo lado AB e pela correspondente recta de Euler é 60° se e só se um dos ângulos internos α ou β tiverem amplitude igual a 60° ou 120° .*

3.4 Outros resultados

Nesta secção estudamos o problema de encontrar as coordenadas do terceiro vértice (3.36) dada a recta de Euler do triângulo ABC com vértices A e B , respectivamente, nos pontos (3.35).

Lema 3 (*Caso vertical*) *A recta de Euler do triângulo ABC é vertical se e só se*

$$C = (0, y), \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Além disso, $x = 0$ é a equação da recta de Euler.

Demonstração: A recta de Euler é vertical se e só se a primeira coordenada do vector (3.38) for zero, isto é, se e só se $x = 0$. ■

Do lema 3 imediatamente podemos concluir que:

Corolário 4 *A recta de Euler do triângulo ABC é ortogonal ao lado AB , se e só se o triângulo ABC é isósceles e $\overline{AC} = \overline{BC}$.*

De seguida, consideraremos o caso em que a recta de Euler não é vertical. Seja

$$y = mx + k,$$

a equação reduzida da recta no sistema de coordenadas xOy .

Usando as coordenadas cartesianas (3.37), respectivamente, do baricentro e do ortocentro do triângulo ABC , podemos concluir que

$$k = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y},$$

e portanto, as coordenadas (x, y) do vértice C são as soluções do sistema de equações formado pela equação (3.40) e pela equação da circunferência circunscrita

$$x^2 + (y - k)^2 = k^2 + 1. \quad (3.56)$$

Deve-se observar que este sistema de equações tem as soluções triviais $(\pm 1, 0)$.

O nosso próximo objectivo é estudar a condição de existência de soluções não triviais do referido sistema de equações e, se existirem, encontrar essas soluções. Do ponto de vista geométrico, precisamos encontrar a intersecção não trivial da cónica (3.40) e do círculo (3.56).

As respostas a estas questões são dadas pelos seguintes lemas:

Lema 4 (Caso elíptico) Quando $|m| < 3$, o sistema de equações dado pela equação (3.40) e pela equação (3.56) tem soluções não triviais, se e só se $k \in [k_1, k_2]$, onde k_i , $i = 1, 2$ são, respectivamente, a raiz positiva e a raiz negativa

$$k_i = \pm \sqrt{\frac{m^2 + 1}{3 - m^2}}, \quad (3.57)$$

da equação

$$(m^2 - 3)k^2 + m^2 + 1 = 0. \quad (3.58)$$

Se $k \in [k_1, k_2]$ e x é um dos zeros da equação

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mkx + 3k^2 - 1 = 0, \quad (3.59)$$

Então o par (x, y) , onde

$$y = mx + 3k, \quad (3.60)$$

é uma solução não trivial do sistema dado pela equação das cónicas de Euler e pela equação (3.56).

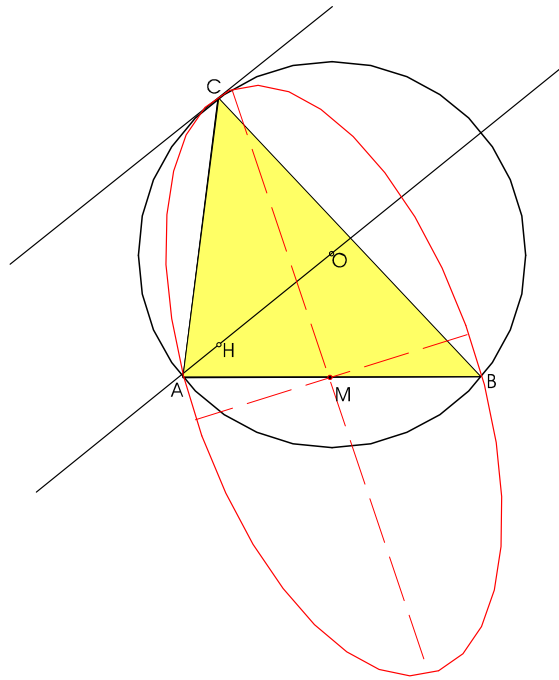
A figura seguinte ilustra o caso em que $k = \sqrt{\frac{m^2+1}{3-m^2}}$.

Demonstração: Da equação (3.40) e da equação (3.56) obtemos, após algumas simplificações, a equação (3.60). Substituindo na equação das cónicas de Euler obtemos a equação quadrática (3.59). É bem conhecido que este tipo de equações tem soluções reais se e só se o seu binómio discriminante for não negativo, i.e, quando

$$(m^2 - 3)k^2 + m^2 + 1 \geq 0. \quad (3.61)$$

Então

$$|k| \leq \sqrt{\frac{m^2 + 1}{3 - m^2}}.$$

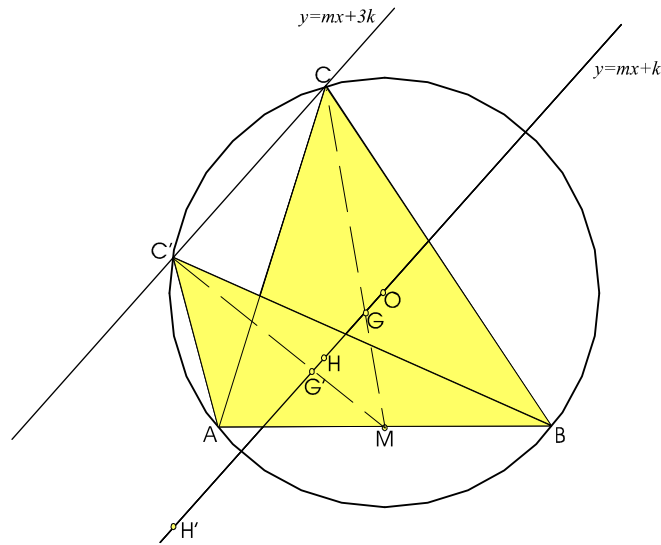


■

Lema 5 (Casos hiperbólico e degenerado). Se $|m| \geq \sqrt{3}$ o sistema de equações dado pela equação (3.40) e pela equação (3.56) tem soluções não triviais para todos os k . Estas soluções são os pares (x, y) que satisfazem as equações (3.59) e (3.60).

Demonstração: Seguindo a ideia da demonstração do lema anterior podemos concluir que, quando $|m| \geq \sqrt{3}$ a equação (3.61) é satisfeita para todos $k \in \mathbb{R}$. ■

Observação 5 Seja M o ponto médio de $[AB]$. Evidentemente M coincide com a origem do referencial xOy . Se G for o baricentro, o vértice C é tal que $MC : MG = 3 : 1$ (veja o teorema 12). Logo, se G pertence à recta $y = mx + k$, então o vértice C pertence à recta $y = mx + 3k$. Ele pode portanto ser determinado como a intersecção desta recta com o círculo (3.56).



Então, a partir dos lemas 4 e 5, podemos formular o seguinte resultado:

Teorema 25 *Seja o triângulo ABC com vértices em $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$. A recta*

$$y = mx + k,$$

é a recta de Euler do triângulo ABC se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $|m| < \sqrt{3}$ e $k \in [k_1, k_2]$, onde $k_i, i = 1, 2$ são as constantes (3.57).
2. $|m| \geq \sqrt{3}$.

Além disso, nas condições acima referidas, as coordenadas cartesianas do vértice $C = (x, y)$ são dadas pelas equações (3.59) e (3.60).

No teorema anterior são enunciadas as condições necessárias e suficientes para a existência do terceiro vértice C , quando são dados os vértices A e B e a recta de Euler do triângulo ABC . Contudo, um problema fica ainda em aberto: como construir com régua e compasso o triângulo ABC sendo conhecidos dois dos seus vértices e a recta de Euler? Este género de problemas de construção têm sido estudados desde a Antiga Grécia veja, por exemplo, [3].

Capítulo 4

Outros centros do triângulo

4.1 Coordenadas trilineares

Como foi referido na introdução, os resultados deste capítulo estão formulados na linguagem das coordenadas trilineares. Nesse sentido, antes de falarmos dos centros do triângulo, iremos fazer uma pequena abordagem a este novo sistema de coordenadas. Mas, antes é necessário estabelecer o novo significado de algumas notações. Assim, neste capítulo, A , B e C denotam os ângulos internos do triângulo ABC e α , β e γ as coordenadas trilineares de um ponto.

Definição 10 *Dado um triângulo ABC como referência, as **coordenadas trilineares** de um ponto P respeitante ao triângulo ABC é um terno ordenado de números, em que cada um é proporcional à distância directa de P a um dos lados.*

As coordenadas trilineares são denotadas como $\alpha : \beta : \gamma$ ou (α, β, γ) , e também são conhecidas como **coordenadas homogêneas**.

As coordenadas trilineares foram introduzidas por Plücker em 1835. Para conhecer mais sobre a vida de Plücker e o seu contributo para a geometria, pode ser consultado o livro [4]. Os livros [12], [13] e [7] também contêm alguns resultados sobre coordenadas trilineares.

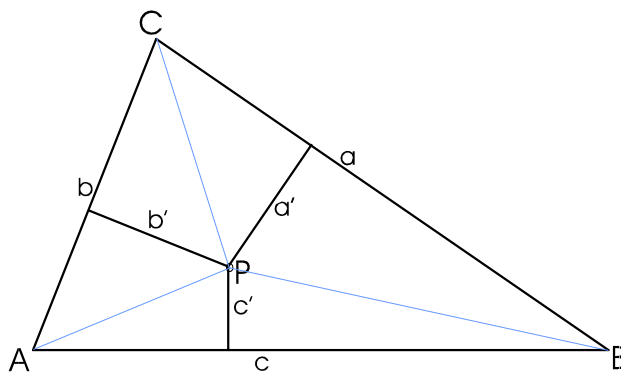
Da definição, é evidente que, uma tripla de coordenadas trilineares obtida multiplicando uma dada tripla por uma constante, diferente de zero, descreve o mesmo ponto, assim:

$$\alpha : \beta : \gamma = \mu\alpha : \mu\beta : \mu\gamma.$$

Desta maneira, podemos considerar que as coordenadas trilineares dos vértices A , B e C do triângulo são normalmente escritas como $1 : 0 : 0$ (ponto A), $0 : 1 : 0$ (ponto B) e $0 : 0 : 1$ (ponto C).

As coordenadas trilineares podem ser normalizadas de modo que expressem as distâncias reais de P a cada um dos lados.

Para efectuar essa normalização, temos o ponto P (na imagem abaixo) em coordenadas trilineares $\alpha : \beta : \gamma$ e as distâncias a' , b' e c' como sendo as distâncias aos lados BC , AC e AB , respectivamente.



Então as distâncias $a' = k\alpha$, $b' = k\beta$ e $c' = k\gamma$ podem ser encontradas escrevendo A_a para a área do triângulo BPC , e de modo análogo para A_b e A_c . Temos então

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= A_a + A_b + A_c = \\ &= \frac{1}{2}aa' + \frac{1}{2}bb' + \frac{1}{2}cc' = \\ &= \frac{1}{2}(ak\alpha + bk\beta + ck\gamma) = \\ &= \frac{1}{2}k(a\alpha + b\beta + c\gamma) \end{aligned}$$

assim

$$k = \frac{2A_{\Delta}}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

onde A_{Δ} é a área do triângulo ABC e a , b e c são os comprimentos dos seus lados. Para obter as coordenadas trilineares que dão as distâncias reais, tomemos $k = 1$. Assim temos as coordenadas

$$a' : b' : c'.$$

As coordenadas trilineares normalizadas são conhecidas por coordenadas trilineares exactas e podem ser determinadas de acordo com as fórmulas:

$$a' = \frac{2\alpha A_{\Delta}}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

$$b' = \frac{2\beta A_{\Delta}}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

$$c' = \frac{2\gamma A_{\Delta}}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

No livro [12], podemos ainda encontrar as fórmulas que permitem converter coordenadas trilineares em coordenadas cartesianas.

4.2 Centros do triângulo

Definição 11 *A função do centro do triângulo, por vezes simplesmente chamada de função do centro, é uma função, diferente de zero, que é:*

homogénea;

i) $f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c)$

e bi-simétrica em b e c ;

ii) $f(a, c, b) = f(a, b, c)$

Definição 12 *O centro do triângulo é um ponto cujas coordenadas trilineares são*

$$\alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

onde f é uma função do centro do triângulo.

Quatro dos mais importantes centros do triângulo são o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro.

Observação 6 *Da definição de centro do triângulo, obtemos que uma simples função α é suficiente para determinar as três coordenadas do centro, usando simplesmente a permutação cíclica das variáveis.*

Estas variáveis podem corresponder aos ângulos A, B, C , ao comprimentos dos lados a, b, c , ou a uma mistura, dado que os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos podem ser relacionados usando a lei dos cossenos (veja o teorema 3).

Por exemplo, a função do centro do triângulo para o baricentro G , pode ser dada como $\alpha = bc$, onde a, b e c representam os comprimentos dos lados do triângulo.

Permutando ciclicamente as variáveis, obtemos a totalidade das coordenadas trilineares do baricentro

$$\alpha : \beta : \gamma = bc : ca : ab.$$

Duas funções do centro do triângulo para um mesmo centro do triângulo não são necessariamente idênticas.

Por exemplo, se h_a é a altura do triângulo ABC , então as expressões

$$\csc A, \quad \sin B \sin C, \quad \frac{1}{a}, \quad bc \quad \text{e} \quad h_a,$$

são funções do centro do triângulo para o baricentro, apesar de $\csc A \neq \sin B \sin C$.

Duas funções do centro do triângulo são equivalentes (i.e. são funções dum mesmo centro do triângulo) se e só se a sua razão é uma função simétrica em a, b e c e/ou A, B e C .

Note-se também que é comum apresentar funções do centro do triângulo numa forma abreviada $f'(a, b, c)$, que não satisfaz explicitamente as condições de bi-simetria, mas antes as condições de bi-antisimetria, assim

$$f'(a, b, c) = -f'(a, c, b).$$

Nestes casos, é possível definir a função $f(a, b, c)$ que satisfaz a condição de bi-simetria, da seguinte maneira

$$f(a, b, c) = [f'(a, b, c)]^2 f'(b, c, a) f'(c, a, b).$$

Um exemplo deste tipo é o centro de Kimberling X_{100} , cuja função do centro é referida em [12] como

$$\alpha_{100} = \frac{1}{b - c},$$

que corresponde à verdadeira função do centro do triângulo

$$\alpha_{100} = \frac{1}{(a - b)(b - c)^2(c - a)}.$$

É necessário assinalar que Kimberling refere, no seu livro [12] e em [13], centenas de centros do triângulo, também conhecidos como centros de Kimberling e denotados por X_n . De seguida, serão apresentados os primeiros vinte e cinco centros do triângulo e algumas rectas notáveis. Estes e outros centros do triângulo e respectivas propriedades poderão também ser consultadas em [24].

X₁ : Incentro

O incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo (veja o teorema 14).

Evidentemente, as coordenadas trilineares do incentro são dadas pelo termo

$$1 : 1 : 1$$

e as coordenadas trilineares exactas por

$$(r, r, r),$$

onde $r = \frac{2A}{a+b+c}$, é o raio da circunferência inscrita.

X₂ : Baricentro

De acordo com o teorema 12, o baricentro é o ponto de intersecção das medianas. Em [12], as suas coordenadas trilineares são referidas como os ternos

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

ou, em função dos ângulos internos A , B e C ,

$$\cos B \cos C - \cos(B - C) : \cos C \cos A - \cos(C - A) : \cos A \cos B (\cos B - A).$$

As coordenadas trilineares exactas são dadas pelas expressões

$$\left(\frac{bc}{6R}, \frac{ca}{6R}, \frac{ab}{6R} \right),$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita.

X₃ : Circuncentro (veja o Teorema)

Como se pode constatar pelo teorema 16, o circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.

As coordenadas trilineares do circuncentro O são, em função dos ângulos internos, dadas pelas expressões

$$\cos A : \cos B : \cos C,$$

e as coordenadas trilineares exactas são, portanto

$$R \cos A : R \cos B : R \cos C,$$

ou, em função dos ângulos internos e do comprimento dos lados,

$$\frac{1}{2}a \cos A : \frac{1}{2}b \cos B : \frac{1}{2}c \cos C,$$

ou ainda, apenas em função do comprimento dos lados,

$$\left(\frac{(-a^2 + b^2 + c^2) R}{2bc}, \frac{(-b^2 + c^2 + a^2) R}{2ac}, \frac{(-c^2 + a^2 + b^2) R}{2ab} \right),$$

X₄ : Ortocentro

De acordo com o teorema 15 o ortocentro é o ponto de intersecção das alturas do triângulo.

As coordenadas trilineares do ortocentro H são referidas por Kimberling como os ternos

$$\cos B \cos C : \cos C \cos A : \cos A \cos B.$$

As coordenadas trilineares exactas são

$$(2R \cos B \cos C, 2R \cos C \cos A, 2R \cos A \cos B),$$

ou ainda

$$\left(\frac{[a^4 - (b^2 - c^2)^2] R}{2a^2bc}, \frac{[b^4 - (c^2 - a^2)^2] R}{2b^2ca}, \frac{[c^4 - (a^2 - b^2)^2] R}{2c^2ab} \right),$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita.

X₅ : Centro da circunferência dos nove pontos

A circunferência dos nove pontos passa pelo pés das alturas do triângulo, pelos pontos médios dos seus lados e pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro, como se pode observar pela figura 2.7. As coordenadas trilineares do centro desta circunferência são

$$\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B).$$

O centro da circunferência dos nove pontos tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_5 = \cos(B - C),$$

ou

$$\alpha_5 = \cos A + 2 \cos B \cos C,$$

ou ainda, em função do comprimento dos lados,

$$\alpha_5 = bc \left(a^2b^2 + a^2c^2 + (b^2 - c^2)^2 \right).$$

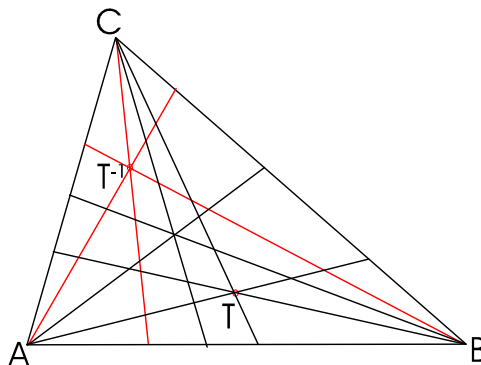
O centro da circunferência dos nove pontos N satisfaz a equação

$$AN^2 + BN^2 + CN^2 = 3R^2 - ON^2,$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita e O é o circuncentro.

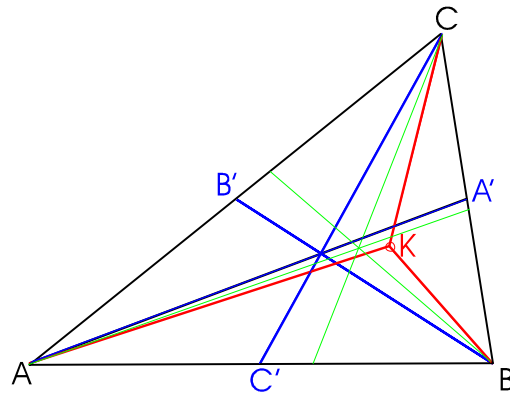
De acordo com a observação 6, podemos indicar apenas a função do centro do triângulo para um determinado centro em vez das suas coordenadas trilineares. Como tal, e para simplificar os resultados, para os próximos centros apenas serão apresentadas as respectivas funções do centro.

Definição 13 *Dado um triângulo ABC e um ponto T do plano de ABC . Reflectindo as rectas TA , TB e TC em relação às bissetrizes internas do triângulo ABC que passam por A , B e C , respectivamente, as rectas resultantes são concorrentes no **conjugado isogonal** T^{-1} de T .*



X_6 : Ponto de Symmedian (ponto de Lemoine ou ponto de Grebe)

O ponto de Symmedian K é o ponto de intersecção das simedianas (recta simétrica à mediana relativamente à bissetriz), mas também pode ser definido como o conjugado isogonal do baricentro.



O ponto de Symmedian tem as funções do centro do triângulo

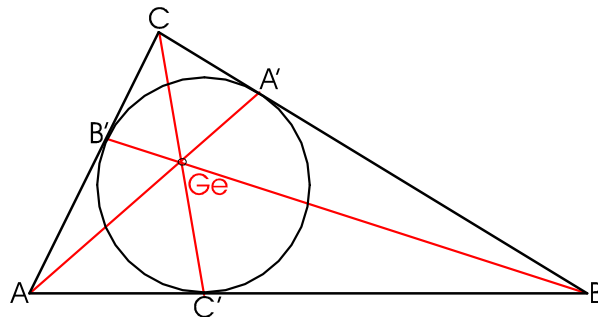
$$\alpha_6 = a,$$

ou

$$\alpha_6 = \sin A.$$

X₇ : Ponto de Gergonne

O ponto de Gergonne Ge é o ponto de intersecção das rectas AA' , BB' e CC' onde A' , B' e C' são os pontos onde os lados do triângulo ABC são tangentes à circunferência inscrita.



O ponto de Gergonne tem as funções do centro do triângulo

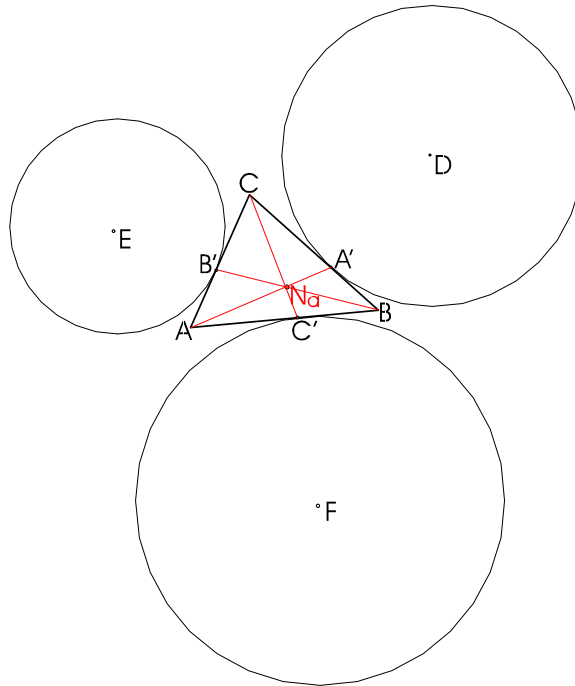
$$\alpha_7 = \frac{bc}{b + c - a},$$

ou

$$\alpha_7 = \sec^2 \left(\frac{1}{2}A \right).$$

X_8 : Ponto de Nagel

Seja B' o ponto onde o excírculo E é tangente ao lado AC do triângulo ABC e definimos A' e C' de modo análogo. Então as rectas AA' , BB' e CC' concorrem no ponto de Nagel Na .



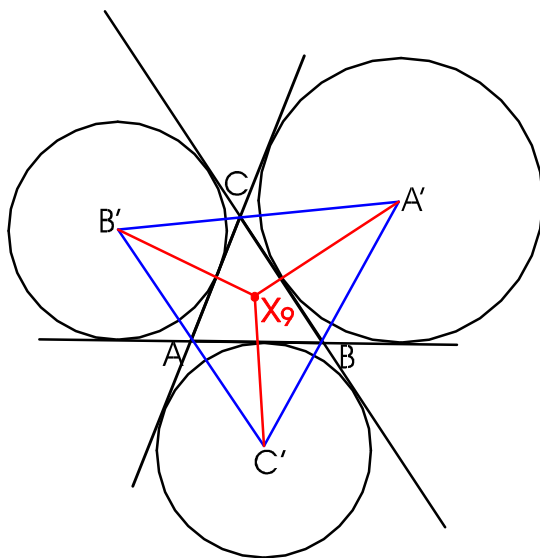
O ponto de Nagel tem a função do centro do triângulo

$$\alpha_8 = \frac{b + c - a}{a}.$$

Definição 14 *O triângulo excentral, de um triângulo ABC , é o triângulo cujos vértices correspondem aos centros dos excírculos do triângulo ABC .*

X_9 : O centro de Mittenpunkt

O MittenPunkt é ponto de Symmedian do triângulo excentral, do triângulo ABC .



O centro de Mittenpunkt tem as funções do centro do triângulo

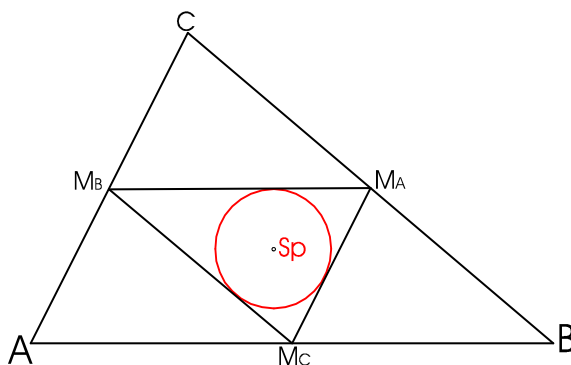
$$\alpha_9 = b + c - a,$$

ou

$$\alpha_9 = \cot\left(\frac{A}{2}\right).$$

X_{10} : Centro de Spieker

O centro de Spieker Sp é o centro da circunferência de Spieker, isto é, a circunferência inscrita ao triângulo medial do triângulo ABC .



O centro de Spieker tem as funções do centro do triângulo

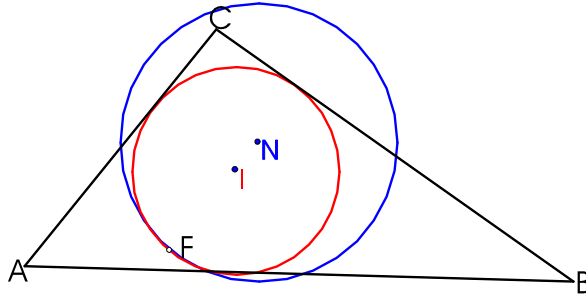
$$\alpha_{10} = bc(b + c),$$

ou

$$\alpha_{10} = \frac{b + c}{a}.$$

X₁₁ : Ponto de Feuerbach

O ponto de Feuerbach F é o ponto de tangência da circunferência inscrita com a circunferência dos nove pontos.



A função do centro do ponto de Feuerbach é

$$\alpha_{11} = 1 - \cos(B - C).$$

Definição 15 Dados os pontos colineares W, X, Y e Z ,

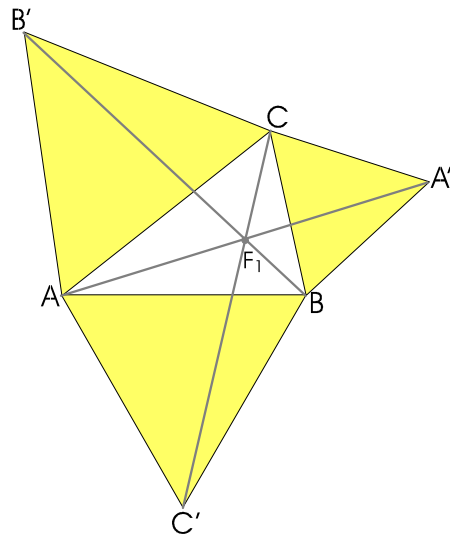


Y e Z são conjugados harmônicos com respeito a W e X se

$$\frac{|WY|}{|YX|} = \frac{|WZ|}{|XZ|}$$

X₁₂ : Conjugado Harmônico de X₁₁ com relação a X₁ e X₅

Sejam A', B' e C' os pontos de intersecção da circunferência dos nove pontos com os excírculo A^-, B^- e C^- , respectivamente. As rectas AA', BB' e CC' intersectam-se em X_{12} .

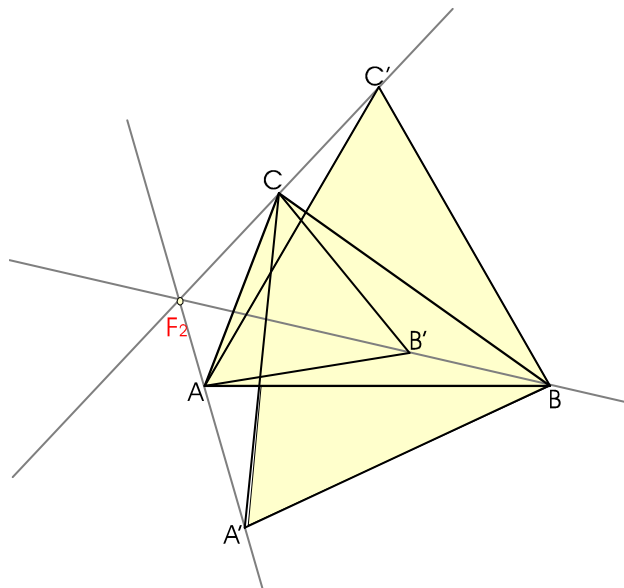


O primeiro ponto de Fermat tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{13} = \csc\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(A - \frac{\pi}{6}\right).$$

X₁₄ : Segundo ponto de Fermat

Construímos o triângulo equilátero $BA'C$ sobre o lado BC e A' no lado oposto de BC . De modo análogo, construímos os triângulos $CB'A$ e $AC'B$. O ponto de intersecção das rectas AA' , BB' e CC' é o segundo ponto de Fermat F_2 .

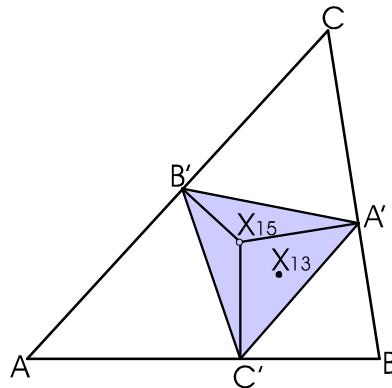


O segundo ponto de Fermat tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{14} = \csc\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(A + \frac{\pi}{6}\right).$$

X₁₅ : Primeiro ponto Isodinâmico

O primeiro ponto Isodinâmico S é o conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat X_{13} .

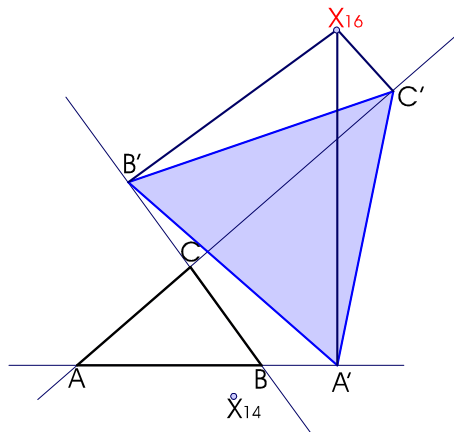


O primeiro ponto Isodinâmico tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{15} = \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right).$$

X₁₆ : Segundo ponto Isodinâmico

O segundo ponto Isodinâmico S' é o conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat X_{14} .

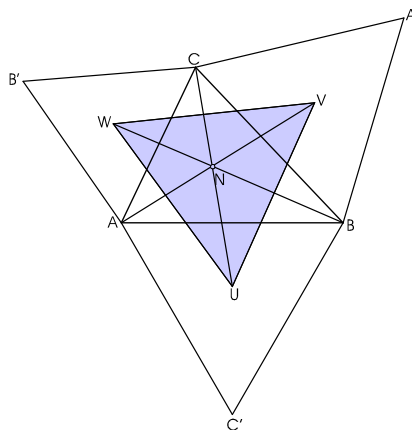


O primeiro ponto Isodinâmico tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{16} = \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right).$$

X₁₇ : Primeiro ponto de Napoleon

Sejam U , V e W os centros dos triângulos equiláteros introduzidos na construção de X_{13} . As rectas AV , BW , CU intersectam-se em X_{17} , ou seja, no primeiro ponto de Napoleon N .

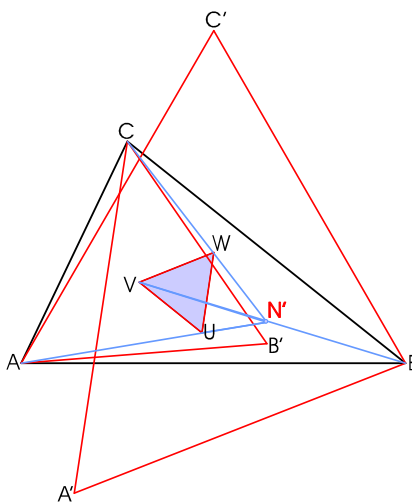


O primeiro ponto de Napoleon tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{17} = \csc\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \sec\left(A - \frac{\pi}{3}\right).$$

X₁₈ : Segundo ponto de Napoleon

Sejam os triângulos $A'BC$, $AB'C$ e ABC' com centros U , V e W no interior dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados BC , AC e AB , de maneira semelhante à utilizada para definir o centro X_{14} . As rectas AU , BV e CW intersectam-se no segundo ponto de Napoleon N' .

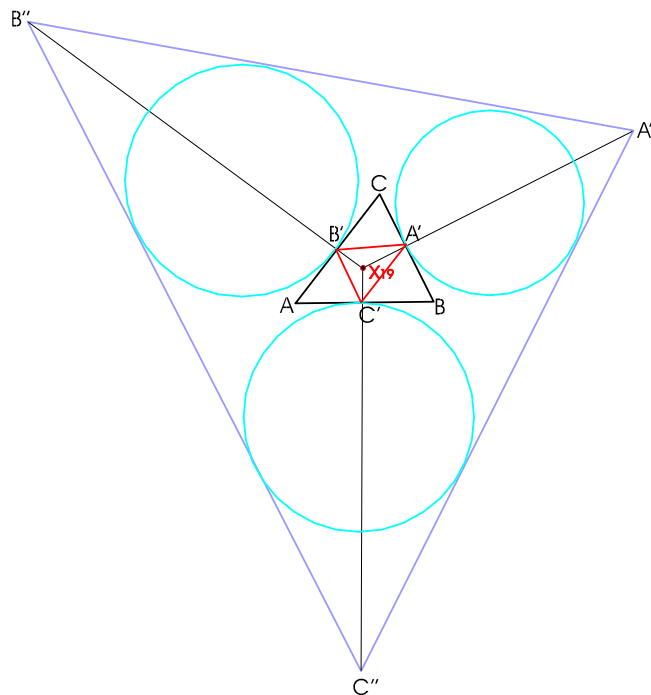


O segundo ponto de Napoleon tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{18} = \csc \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = \sec \left(A + \frac{\pi}{3} \right).$$

X₁₉: Ponto de Clawson

O triângulo extratangente é uma homotetia do triângulo órtico e o centro desta homotetia é conhecido como ponto de Clawson.



O ponto de Clawson tem as funções do centro do triângulo

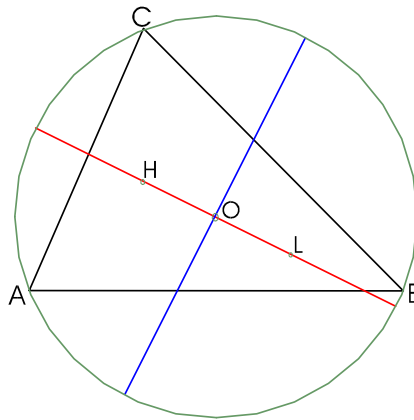
$$\alpha_{19} = \tan A,$$

ou

$$\alpha_{19} = \sin (2B) + \sin (2C) - \sin (2A).$$

X₂₀ : Ponto de Longchamps

O ponto de Longchamps é a reflexão do ortocentro H sobre o circuncentro O , do triângulo ABC .



O ponto de Longchamps tem as funções do centro do triângulo

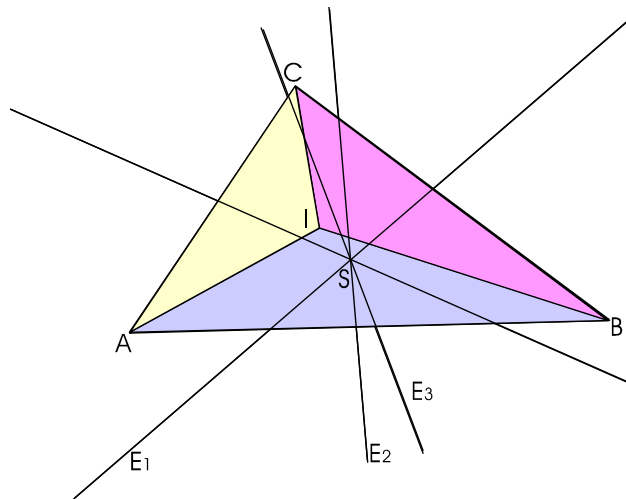
$$\alpha_{20} = \cos A - \cos B \cos C,$$

ou

$$\alpha_{20} = bc (\tan B + \tan C - \tan A).$$

X_{21} : Ponto de Schiffler

Seja I o incentro do triângulo ABC . O ponto de Schiffler S é a intersecção das rectas de Euler dos triângulos ABC , AIB , BIC e AIC .



O ponto de Schiffler tem as funções do centro do triângulo

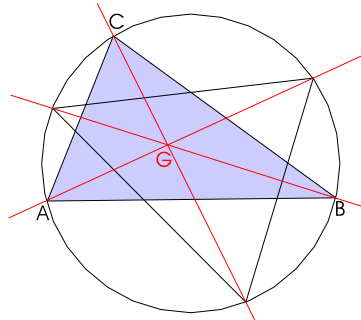
$$\alpha_{21} = \frac{1}{\cos B + \cos C},$$

ou

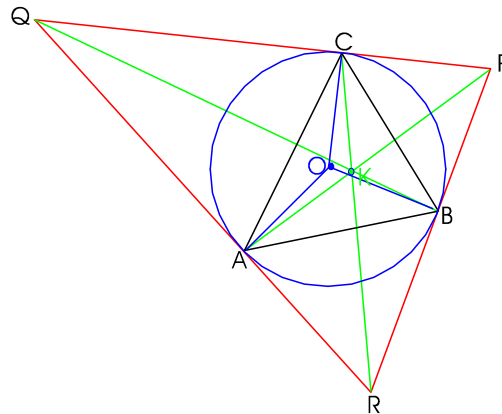
$$\alpha_{21} = \frac{b + c - a}{b + c}.$$

Em [10] podemos encontrar algumas propriedades interessantes do ponto de Schiffler e as respectivas demonstrações.

Definição 16 *O triângulo circummedial tem como vértices os pontos de intersecção das medianas com a circunferência circunscrita..*

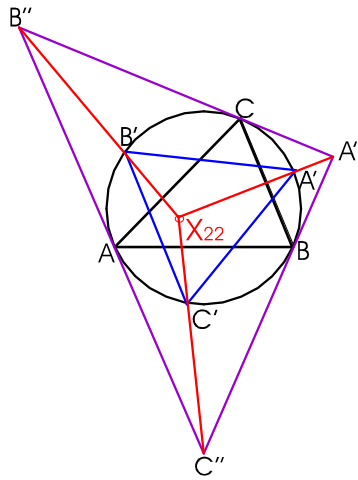


Definição 17 *O triângulo tangencial é o triângulo formado pelas rectas tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo ABC, nos seus vértices.*



X₂₂ : Ponto de Exeter

O ponto de Exeter é o centro de perspectiva do triângulo circummedial $A'B'C'$ e do triângulo tangencial $A''B''C''$.

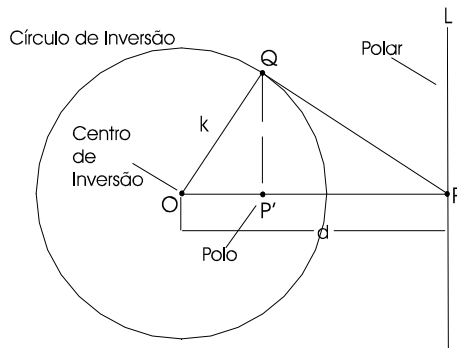


O ponto de Exeter tem a função do centro do triângulo

$$\alpha_{22} = a(b^4 + c^4 - a^4).$$

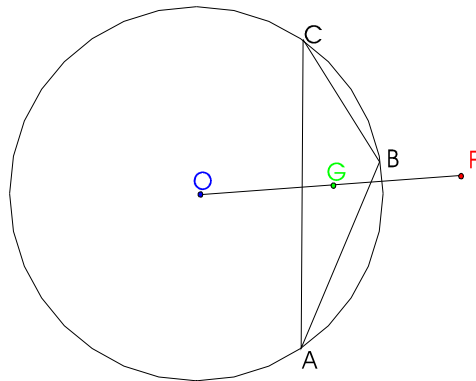
Definição 18 Os pontos P e P' são inversos com respeito ao círculo de inversão se

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2 = k^2$$



X₂₃ : Ponto Far-out

O ponto Far-out F do triângulo ABC é o ponto inverso do baricentro com respeito à circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

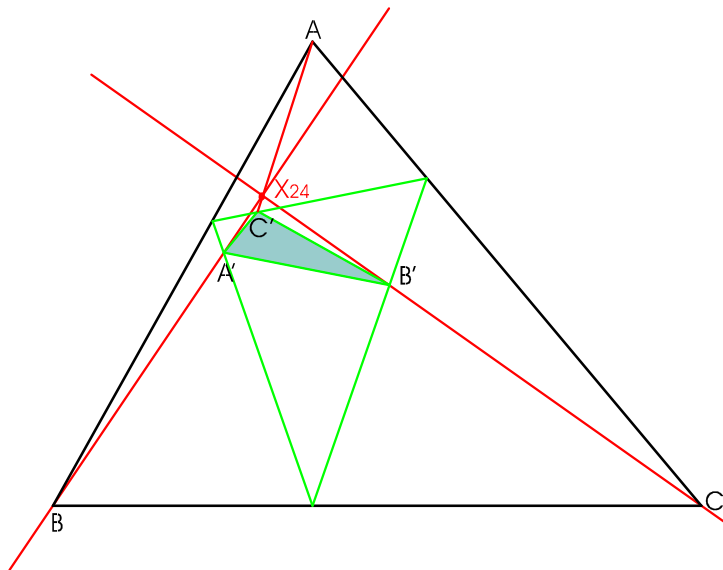


O ponto Far-out tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{23} = a(b^4 + c^4 - a^4 - b^2c^2).$$

X_{24} : Centro de perspectiva do triângulo ABC e do triângulo órtico do triângulo órtico

Como se observa na figura, o centro X_{24} é o centro de perspectiva do triângulo ABC e do triângulo órtico do triângulo órtico, isto é, é a intersecção das rectas AC' , BA' e CB' .



Este ponto tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{24} = \sec A \cos 2A,$$

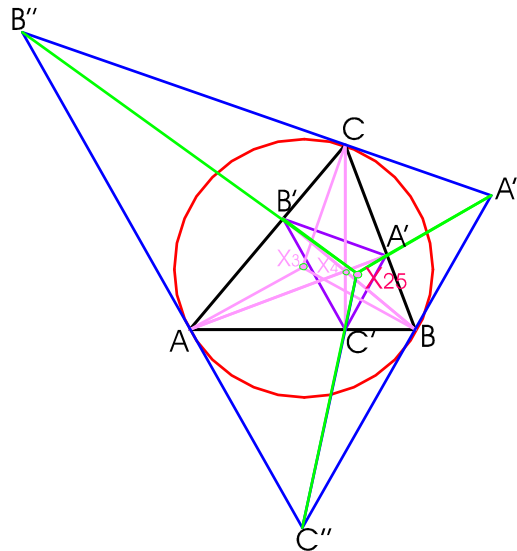
ou

$$\alpha_{24} = \sec A - 2 \cos A.$$

O triângulo $A'B'C'$ é o triângulo órtico do triângulo órtico

X₂₅ : Centro de homotetia do triângulo órtico e do triângulo tangencial

Seja o triângulo $A'B'C'$ o triângulo órtico do triângulo ABC e $A''B''C''$ o triângulo tangencial (veja a definição 17) do triângulo $A'B'C'$. O ponto X_{25} é o ponto de intersecção das rectas $A'A''$, $B'B''$ e $C'C''$.



Este ponto tem as funções do centro do triângulo

$$\alpha_{25} = \sin A \tan A,$$

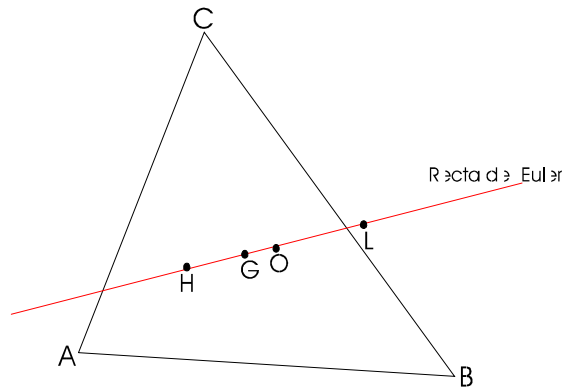
ou

$$\alpha_{25} = \cos A - \sec A.$$

4.3 Algumas rectas notáveis

4.3.1 Recta de Euler

A recta de Euler, como já foi demonstrado no capítulo 3 (veja o teorema 20), passa pelo ortocentro H , baricentro G e circuncentro O .



Esta recta passa também pelo ponto de Longchamps L , pelo centro da circunferência dos nove pontos N e por todos os pontos cujas coordenadas trilineares $\alpha : \beta : \gamma$ satisfazem a condição

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificando, obtemos

$$\alpha \cos A (\cos^2 B - \cos^2 C) + \beta \cos B (\cos^2 C - \cos^2 A) + \gamma \cos C (\cos^2 A - \cos^2 B) = 0,$$

ou seja

$$\alpha \sin(2A) \sin(B - C) + \beta \sin(2B) \sin(C - A) + \gamma \sin(2C) \sin(A - B) = 0,$$

é a equação da recta de Euler em coordenadas trilineares.

Mas, a recta de Euler também é dada, em função do comprimento dos lados, por

$$\alpha f(a, b, c) + \beta f(b, c, a) + \gamma f(c, a, b) = 0, \quad (4.1)$$

onde

$$f(a, b, c) = a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Teorema 26 *O incentro de um triângulo pertence à recta de Euler se e só se o triângulo é isósceles*

Demonstração: As coordenadas trilineares do incentro são

$$1 : 1 : 1,$$

portanto a partir de (4.1) podemos afirmar que o incentro pertence à recta de Euler se e só se

$$a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

De onde se obtém que

$$a^4(-b+c) + a^3(-b^2+c^2) + a^2(b^3-c^3) + a(b^4-c^4) + (bc^4 - b^3c^2 - cb^4 + c^3b^2) = 0.$$

Simplificando, obtemos

$$(a-b)(a-c)[a^2(c-b) + 2a(c^2-b^2) + (c^3-b^3 + bc^2 - b^2c)] = 0,$$

isto é,

$$(a-b)(a-c)(c-b)[a^2 + 2ac + 2ab + c^2 + 2bc + b^2] = 0,$$

e portanto

$$(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)^2 = 0.$$

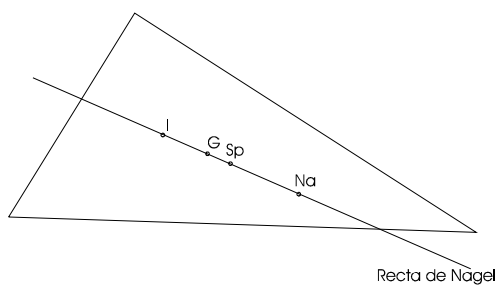
Esta condição só se verifica quando

$$a = b \quad \text{ou} \quad a = c \quad \text{ou} \quad c = b,$$

pois $a + b + c$ é sempre diferente de zero. ■

4.3.2 Recta de Nagel

A recta de Nagel passa pelo incentro I , pelo baricentro G , pelo ponto de Spieker Sp , pelo ponto de Nagel Na e por muitos outros centros de Kimberling.



A equação da recta de Nagel em coordenadas trilineares é

$$a(b-c)\alpha + b(c-a)\beta + c(a-b)\gamma = 0$$

4.3.3 Recta de Soddy

A recta de Soddy passa pelo incentro I , pelo ponto de Gergonne Ge , pelo ponto de Longchamps L . e por outros centros de Kimberling.

A equação trilinear da recta de Soddy é

$$\frac{\gamma - \beta}{(-a + b + c)a} + \frac{\alpha - \gamma}{(a - b + c)b} + \frac{\beta - \alpha}{(a + b - c)c} = 0.$$

A recta de Soddy deve o seu nome ao facto de conter os chamados centros de Soddy. Estes centros são referidos em [12] como X_{175} e X_{176} .

Com recurso a uma simples verificação é possível constatar que a recta de Soddy intersecta a recta de Euler no ponto de Longchamps.

Bibliografia

- [1] **Araújo** P. V. Curso de Geometria, Gradiva, 2002
- [2] **Birkhoff** G. D. e **Beutley** R. Basic Geometry, Third Edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1959
- [3] **Bold** B. Famous Problems of Geometry and How to Solve Them, Dover Publications inc, New York, 1969
- [4] **Castilho** R. M. Plucker y Poncelet - Dos modos de entender la geometría. Nivola Libros Ediciones, 2005
- [5] **Coxeter** H. S. M. e **Greitzer** S. L. Geometry Revisited. The mathematical association of America, 1967
- [6] **Coxeter** H. S. M. Introduction to Geometry, Second Edition. Jonh Wiley & Sons, Inc, 1989
- [7] **Coolidge** J. L. A Treatise on Algebraic Plane Curves. Dover Phoenix Editions, Mineola, New York, 2004
- [8] **Dionísio** J. J., Fundamentos de Geometria. Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 2004
- [9] **Eves** H. College Geometry, Jones and Bartlett Publishers, University of Maine, University of Central Florida, 1995
- [10] **Emelyanov** L. and **Emelyanova** T., A note on the Schiffler point. Forum Geometricorum, Volume 3 (2003) 113–116. Disponível em <http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200312.pdf>
- [11] **Il'in** V. A, e **Pozniak** E. G. Analytic Geometry, Mir Publishers, Moscow, 1984
- [12] **Kimberling** C. Congressus Numerantium, Vol 129. Winnipeg, Canadá, August 1998

- [13] **Kimberling** C. Encyclopedia of Triangle Centers, 2000. Edição disponível em <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
- [14] **Lang** S. e **Murrow** G. Geometry - Second Edition, Springer, 1997
- [15] **Longuet-Higgins** M. The mathematical Intelligencer, Springer-Verlag, New York, 2000
- [16] **Pedoe** D. Geometry - A Comprehensive Course, Dover Publications Inc, New York, 1988
- [17] **Pogorelov** A. Analitic Geometry. Mir Publishers, 1987
- [18] **Posamentier** A. S. e **Salkind** C. T. Challenging Problems in Geometry, Dover Publications Inc - New York, 1996
- [19] **Postnikov** M., Analitic Geometry, Lectures in Geometry, Semester 1, URSS Publishers, Moscov, 1979
- [20] **Prasolov** V. V. e **Tikhomirov** V. M. Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1997
- [21] **Rios** S. , Álgebra Linear e Geometria Vectorial, Litexa, Portugal, 1980
- [22] **Rodriguez** J., **Manuel** P., and **Semião** P. A conic associated with Euler lines, Forum Geometricorum, Volume 6 (2006) 17–23. Disponível em <http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/index.html>
- [23] **Várilly** A. Location of incenters and Fermat points in variable triangles, Harvard University, Cambridge, MA 02138. Disponível em <http://math.berkeley.edu/~varilly/>
- [24] **Yiu** P. A Tour of Triangle Geometry, Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University. Disponível em <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [25] **Yiu** P. Notes on Euclidean Geometry, Department of Mathematics, Florida Atlantic University, 1998. Disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf>
- [26] **Yiu** P. An Introduction to the Geometry of the Triangle, Department of Mathematics, Florida Atlantic University, 2001. Disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf>

- [27] **Yiu** P. Recreational Mathematics, Department of Mathematics, Florida Atlantic University, 2003. Disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/RecreationalMathematics2003.pdf>