



**Universidade do Algarve**

---

Faculdade de Ciências e Tecnologia

**Aspectos Avançados da Geometria do Triângulo**

(Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática –  
Especialização em Matemática para o Ensino)

Nuno José Coelho Guerreiro Nunes do Rosário

FARO  
2008



# Universidade do Algarve

---

## Faculdade de Ciências e Tecnologia

### Mestrado em Matemática para o Ensino

NOME: Nuno José Coelho Guerreiro Nunes do Rosário

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aspectos Avançados da Geometria do Triângulo

DISSERTAÇÃO ORIENTADA POR:

Doutor Juan C. S. Rodríguez – Departamento de Matemática, UALG

Doutor Paulo A. V. Semião – Departamento de Matemática, UALG

JÚRI:

PRESIDENTE: Doutora **Susana Paula Graça Carreira**, Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

VOGAIS: Doutora **Joana Maria da Silva Teles Correia**, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor **Juan Carlos Sanchez Rodrigues**, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;

Doutor **Paulo Alexandre Valentim Semião**, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

FARO  
2008

*À minha família  
pelo apoio e compreensão*

# Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Doutor Juan C. S. Rodríguez e Prof. Doutor Paulo A. V. Semião por me ensinarem a importância da análise teórica sem deixar de estimular um posicionamento crítico e reflexivo, fazendo-me compreender o que é um trabalho científico.

Ao Prof. Clark Kimberling, professor na Universidade de Evansville, pela gentileza com que recebeu e respondeu aos meus e-mails sobre o tema.

À muito amiga, colega e professora Ana Rita, pelo seu incondicional apoio desde a candidatura até à entrega do trabalho. Também pelas sugestões, críticas e pela revisão do texto.

À minha família, em especial aos meus pais, irmã, cunhado e ao pequeno Francisco, que sempre demonstraram ao longo desta caminhada o seu enorme incentivo, apoio, confiança e orgulho no meu trabalho.

Aos meus amigos, em especial o Nuno, Nelson, Paulo, Carla e Vera que, de uma forma ou de outra, colaboraram para o êxito da pesquisa.

Agradeço a todos os que estiveram presentes, directa e indirectamente, e que colaboraram para a realização deste trabalho, através de incentivo, apoio ou sugestões a respeito do tema.

**Título:** Aspectos Avançados da Geometria do Triângulo

## Resumo

Este trabalho incide sobre o estudo de alguns aspectos avançados da geometria do triângulo, em particular são utilizadas as coordenadas trilineares e as suas relações com as coordenadas cartesianas. As coordenadas trilineares permitem generalizar o conceito de centro do triângulo e facilitar o estudo das relações existentes entre os centros do triângulo.

Outro dos objectivos deste trabalho foi utilizar as novas tecnologias, nomeadamente o computador, quer como auxílio na obtenção de resultados quer como meio de visualização dos mesmos. Para provar e testar ideias o software *Mathematica* tornou-se uma ajuda indispensável assim como o *Geometer's Sketchpad* no campo da representação.

**Palavras chave:** Triângulo; Coordenadas trilineares; Centros do triângulo; Circunferência dos nove pontos; Recta de Euler.

**Title:** Advanced Aspects of the Triangle's Geometry

## Abstract

This assignment is on the study of some of the most advanced aspects of the triangle geometry, particularly the trilinear coordinates and their link to the cartesian coordinates.

The trilinear coordinates allow us to generalize the triangle center concept and facilitate the study of the several existing relations between the triangle centers.

Another of the assignment's goal was based on the use of new technologies, mainly the computer, both as a support to reach the study's results and as a means to display those results. To prove and test ideas, the software *Mathematica* became an essential help as well as the *Geometer's Sketchpad* on the field of representation.

**Key-words:** Triangle; Trilinear coordinates; Triangle center; The nine-point circle; The Euler straight line.

# Índice

<b>Notações</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
1.1 Tecnologia e a Matemática . . . . .	5
1.2 Noções elementares . . . . .	7
<b>2 Coordenadas trilineares</b>	<b>15</b>
2.1 Coordenadas Cartesianas . . . . .	17
2.2 Pontos em coordenadas trilineares . . . . .	20
2.2.1 Conjugado isogonal . . . . .	20
2.2.2 Conjugado isotómico . . . . .	20
2.2.3 Distância entre dois pontos . . . . .	21
2.2.4 Colinearidade . . . . .	25
2.2.5 Ponto médio . . . . .	28
2.3 Rectas . . . . .	30
2.3.1 Equação de uma recta . . . . .	30
2.3.2 Rectas concorrentes . . . . .	32
2.3.3 Rectas paralelas . . . . .	32
2.3.4 Rectas perpendiculares . . . . .	34
2.3.5 Distância entre ponto e recta . . . . .	36
2.4 Circunferência . . . . .	37
2.4.1 Equação da circunferência que passa por três pontos . . . . .	39
2.4.2 Equação da circunferência dado o raio e o centro . . . . .	40
<b>3 Centros do triângulo</b>	<b>41</b>
3.1 Funções do centro do Triângulo . . . . .	41
3.1.1 Propriedades . . . . .	44
3.2 Alguns centros notáveis . . . . .	44
3.2.1 Incentro . . . . .	45
3.2.2 Baricentro . . . . .	46
3.2.3 Circuncentro . . . . .	49

3.2.4	Ortocentro . . . . .	52
3.2.5	Centro da circunferência dos nove pontos . . . . .	54
3.2.6	Ponto de Gergonne . . . . .	57
3.2.7	Ponto de Nagel . . . . .	59
3.2.8	Ponto de Feuerbach . . . . .	60
3.3	Triângulo órtico . . . . .	60
3.4	Triângulo medial . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Rectas e circunferências</b>	<b>64</b>
4.1	Rectas . . . . .	64
4.1.1	Recta de Euler . . . . .	64
4.1.2	Recta de Nagel . . . . .	67
4.2	Algumas circunferências notáveis . . . . .	68
4.2.1	Circunferência inscrita . . . . .	68
4.2.2	Circunferência circunscrita . . . . .	69
4.2.3	Circunferências ex-inscritas . . . . .	70
4.2.4	Circunferência dos nove pontos . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Programação em <i>Mathematica</i></b>	<b>79</b>
5.1	Distância entre dois pontos . . . . .	80
5.2	Ponto médio . . . . .	82
5.3	Rectas . . . . .	83
5.3.1	Recta de Euler . . . . .	83
5.3.2	Recta de Nagel . . . . .	85
5.3.3	Pontos colineares . . . . .	86
5.4	Conjugados . . . . .	88
5.5	Circunferências . . . . .	89
	<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

# Notações

$\Delta ABC$	Triângulo de vértices $A$ , $B$ e $C$ ;
$A, B, C$	Vértices do $\Delta ABC$ ; ângulos internos correspondentes aos vértices;
$PQ$	Recta que contém os pontos $P$ e $Q$ ;
$\overline{PQ}$	Segmento de recta de extremos $P$ e $Q$ ;
$\angle ABC$	Ângulo formado pelos segmentos de recta $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ ;
$\angle \widehat{ABC}$	Amplitude do ângulo $\angle ABC$ ;
$\angle A$	Ângulo interno de um triângulo no vértice $A$ ;
$a, b, c$	Comprimentos dos lados $\overline{BC}$ , $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do $\Delta ABC$ ;
$\sigma$	Área do $\Delta ABC$ ;
$r$	Raio da circunferência inscrita no $\Delta ABC$ ;
$R$	Raio da circunferência circunscrita ao $\Delta ABC$ ;
$r_A, r_B, r_C$	Raio das circunferências ex-inscritas;
$p$	Semi-perímetro do $\Delta ABC$ ;
$ PQ $	Distância entre os pontos $P$ e $Q$ ;
$d(P, r)$	Distância entre o ponto $P$ e a recta $r$ ;
$\alpha : \beta : \gamma$	Coordenadas trilineares homogêneas;
$(\alpha, \beta, \gamma)$	Coordenadas trilineares exactas;
$f(a, b, c)$	Função do centro do triângulo;
$X_i$	Notação para os centros do triângulo ( $i = 1, 2, \dots$ ).

# Capítulo 1

## Introdução

A necessidade económica de contabilizar diversos tipos de objectos esteve na origem da Matemática. De forma semelhante, a Geometria (do Grego *geo*=terra+*metria*=medida, ou seja, “medir a terra”) está intimamente ligada às necessidades do homem, como é o caso da medição de terrenos. A Geometria é a mais antiga manifestação conhecida da actividade matemática. Cerca de 3000 anos a. C. os antigos Egípcios já possuíam os conhecimentos de Geometria necessários para reconstituir as marcações de terrenos destruídos pelas cheias do rio Nilo, bem como para construir as célebres pirâmides.

Inicialmente foi uma ciência de índole prática e objectiva mas, séculos mais tarde, com a ajuda de vários sábios que se dedicaram a esse estudo e desenvolvimento, como o são Arquimédes<sup>1</sup>, Pitágoras<sup>2</sup>, Tales de Mileto<sup>3</sup> e Euclides<sup>4</sup>, entre outros, a Geometria passou a contar com uma componente teórica. Para compreender melhor o desenvolvimento e a história da geometria é sugerida a leitura de [16], pois através da sua leitura poderemos conhecer alguns problemas clássicos assim como algumas noções e biografias breves de grandes matemáticos.

Acompanhando os vários séculos de desenvolvimento da Geometria

---

<sup>1</sup>Nasceu em 287 a.C. em Siracusa. Matemático e geómetra, distinguiu-se igualmente como astrónomo e físico, criou a ciência dos líquidos (hidrostática) e pode ser considerado o primeiro grande engenheiro da Antiguidade.

<sup>2</sup>Pitágoras nasceu no ano 580 a.C. na ilha grega de Samos, perto de Mileto e faleceu no ano 500 A.C. em Metapontum, Lucania. Pitágoras foi responsável por vários progressos nas áreas de Matemática, Astronomia e da Música.

<sup>3</sup>Nasceu em Mileto por volta do ano 625 a.C., Tales foi simultaneamente geómetra, filósofo e astrónomo.

<sup>4</sup>Viveu em Alexandria nos finais do séc. IV e princípios do séc. III a.C. Grande número de geómetras gregos haviam dado, antes de Euclides, elementos de geometria, mas Euclides foi o primeiro que fez demonstrações rigorosas. Foi ele quem introduziu o método da “redução ao absurdo”.

esteve sempre o *Triângulo*. Esta figura sempre despertou o interesse de muitos sábios, ficando alguns ligados fortemente à história do triângulo, como Pitágoras, que provou a existência de relações entre os comprimentos dos lados de um triângulo rectângulo.

No plano, o triângulo é um polígono com o menor número de possível de lados, possui três lados e três ângulos internos que somam  $180^\circ$ . É também o único polígono que não possui diagonais.

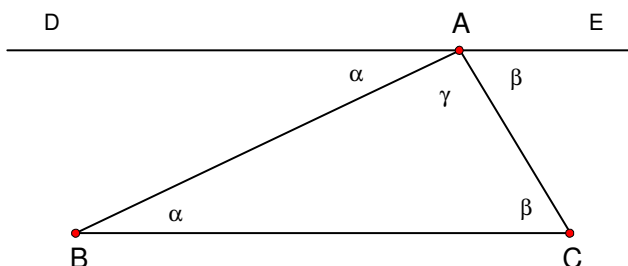


Figura 1.1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

O triângulo pode apresentar-se e ser classificado de várias maneiras. Essa classificação pode ser feita quanto aos lados: escaleno<sup>5</sup>, isósceles<sup>6</sup> ou equilátero<sup>7</sup>; ou ser uma classificação quanto aos ângulos: acutângulo<sup>8</sup>, obtusângulo<sup>9</sup> ou rectângulo<sup>10</sup>.

O lado não adjacente a um ângulo diz-se oposto a esse ângulo e reciprocamente. Em geral, designam-se pela mesma letra o lado e o vértice do ângulo oposto, sendo a primeira uma letra minúscula e a segunda maiúscula. Os ângulos podem também ser designados pela mesma letra do vértice ou por letras do alfabeto grego.

O *Teorema de Pitágoras* que afirma que “Em qualquer triângulo rectângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” pode também ser generalizado à *lei dos cosenos*. Essa lei é válida para todos os triângulos, mesmo que o triângulo não seja rectângulo, e pode ser usada para determinar o comprimento dos lados ou as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, desde que a

<sup>5</sup>Triângulo com as medidas dos três lados diferentes.

<sup>6</sup>Triângulo em que dois dos lados têm o mesmo comprimento.

<sup>7</sup>Triângulo com as medidas dos três lados iguais.

<sup>8</sup>Triângulo com os três ângulos internos agudos, inferiores a  $90^\circ$ .

<sup>9</sup>Triângulo com um ângulo interno obtuso, superior a  $90^\circ$ .

<sup>10</sup>Triângulo com um ângulo interno recto, igual a  $90^\circ$ .

medida de três ou de dois lados e a amplitude de um ângulo interno sejam conhecidas. Uma outra lei, a *lei dos senos* pode ser usada para calcular as medidas dos lados de um triângulo, desde que a amplitude de dois ângulos internos e a medida de um lado sejam conhecidas. A *lei dos senos* relaciona também o comprimento dos lados e as amplitudes dos ângulos internos do triângulo com o raio da circunferência circunscrita a esse mesmo triângulo.

A geometria do triângulo é vastíssima. Leonhard Euler, séc. XVIII, foi um grande contribuidor desta geometria. Depois de se falar durante muito tempo nos quatro centros notáveis, este matemático descobriu que três deles são sempre colineares independentemente do triângulo escolhido. O seu nome foi dado à recta que os contém, *recta de Euler*. Estes teoremas e leis que foram sendo provados ao longo dos séculos permitiram que se fosse desvendando muitos mistérios em volta de uma figura tão simples como é o triângulo.

É sobretudo a partir de 1873 que Lemaine e depois Brocar iniciaram uma série de estudos sobre o triângulo, a que vêm mais tarde juntar-se, entre outros, Vigorie, Ocagne, Longchamps e Neuberg. Nestes estudos sobre o triângulo, estes matemáticos utilizaram para as suas investigações as coordenadas trilineares.

Falar da geometria do triângulo é também falar dos centros ou pontos notáveis do triângulo. Os mais conhecidos e antigos são sem dúvida o incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro, mas não são os únicos (ver Capítulo 3). Para o quadrado o ponto de intersecção das suas diagonais é o mesmo que o ponto equidistante dos lados ou dos vértices, no triângulo esses dois pontos serão o incentro e o circuncentro. Para ajudar a compreender melhor as propriedades e relações entre estes e outros centros do triângulo, a introdução das coordenadas trilineares ocupa um papel muito importante.

Em [11, Encyclopedia of Triangle Centers - ETC], Clark Kimberling reúne provavelmente a maior colecção de centros do triângulo, mais de 3200. Neste site todos os pontos são acompanhados das suas coordenadas trilineares e baricentricas assim como uma profunda colecção de propriedades. É necessário assinalar que em Portugal existem poucas referências bibliográficas que tratem deste assunto, deste modo o referido site de C. Kimberling e os livros [4] e [10] foram muito importantes para a redacção desta tese.

Ao contrário das coordenadas cartesianas, em que os pontos mudam as suas coordenadas sempre que o referencial muda, nas coordenadas trilineares tal não acontece. Assim, os pontos notáveis escritos em coordenadas trilineares mantêm as suas coordenadas mesmo quando o referencial muda, isto é, as coordenadas trilineares serão invariantes qualquer que seja o triângulo considerado. Esta é uma grande vantagem de trabalhar neste tipo de coordenadas e consequentemente o estudo de propriedades e

relações torna-se na maioria dos casos mais simples.

## 1.1 Tecnologia e a Matemática

Em todas as épocas têm surgido novas tecnologias, sendo os novos desenvolvimentos em Matemática muitas vezes o motor que influencia o surgimento dessas novas tecnologias e em muitos casos as diversas tecnologias têm estado associadas ao cálculo aritmético. Esta é uma evolução francamente visível, através da palavra cálculo (do latim *calculus* “pedra”) compreendemos que de facto em tempos antigos eram utilizadas pedras ou pequenos seixos para auxiliar as operações aritméticas. Com o passar dos tempos foram sendo utilizados outros instrumentos, como o caso do ábaco e mais recentemente a máquina da calcular. Actualmente as novas tecnologias centram-se mais no uso dos computadores, pois estes permitem uma grande capacidade de armazenamento de dados e grande rapidez de processamento. A utilização destes meios informáticos é cada vez mais uma prática comum e em muitos casos está a tornar-se mesmo essencial.

Na área da Matemática os computadores são utilizados como instrumentos de cálculo numérico ou simbólico, executando tarefas de acordo com sistemas de regras bem definidos. Podem também ser utilizados como instrumentos de investigação, permitindo a elaboração de conjecturas e a exploração através de simulações do comportamento de determinados sistemas e a influência que neles exercem estes ou aqueles parâmetros ou propriedades estruturais.

No desenvolvimento deste trabalho, o computador desempenha sem dúvida um papel de grande relevo na verificação e obtenção de resultados. Trabalhar com coordenadas trilineares implica trabalhar na maioria das vezes com fórmulas extensas e com diversas variáveis, o que requer algum cuidado e concentração. Assim para tornar a obtenção de resultados mais rápida e sem falhas foi com naturalidade que recorremos ao computador e ao software *Mathematica*. Este software é extremamente abrangente, pode efectuar cálculos numéricos, operar expressões algébricas, gerar uma grande variedade de gráficos e até desenvolver documentos para impressão, utilizando linguagem de programação o que permite ser utilizado em várias áreas e por diversos especialistas. Com o auxílio deste software foi possível deixar as tarefas rotineiras e demoradas de simplificação a cargo do computador. No Capítulo 5 podemos verificar a utilidade desta fabulosa ferramenta que é o *Mathematica*. Através deste software foi possível tirar conclusões que de outra forma seriam quase impossíveis de resolver.

Sendo este um trabalho de geometria, será fácil de imaginar que em

muitos casos as explicações e demonstrações serão acompanhadas de figuras para tornar mais claro e perceptível o raciocínio. Todas as figuras foram elaboradas pelo software *Geometer's Sketchpad*, um programa essencialmente virado para o desenho geométrico, de fácil utilização mas sempre acompanhado de grande rigor.

Com o auxílio destas poderosas ferramentas foi possível testar, analisar, representar e concluir alguns resultados bastante interessantes.

## 1.2 Noções elementares

Alguns teoremas, definições, proposições e equações que ilustram resultados muito conhecidos e que são adquiridos até ao final do ensino secundário são muitas vezes a base para obter resultados mais complexos. Neste trabalho em concreto, as várias equações da recta, as distâncias, a área do triângulo, entre outros resultados são de extrema importância, daí a necessidade de os rever ainda que possam ser encarados como noções elementares.

A equação de uma recta em coordenadas cartesianas pode ser definida de várias formas equivalentes

$$\begin{aligned}y &= mx + b, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ Ax + By + C &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Além destas três equações e através do lema seguinte é possível escrever uma outra equação da recta.

**Lema 1.2.1** *Consideremos os eixos do referencial cartesiano. Seja  $L$  uma recta e  $P$  o ponto de intersecção da recta  $L$  e da recta perpendicular a  $L$  que passa pela origem do referencial  $O = (0, 0)$ ,  $X = (1, 0)$  e  $\theta$  o ângulo  $\angle XOP$ . Uma equação de  $L$  é*

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p,\tag{1.2}$$

onde  $p = |OP|$ .

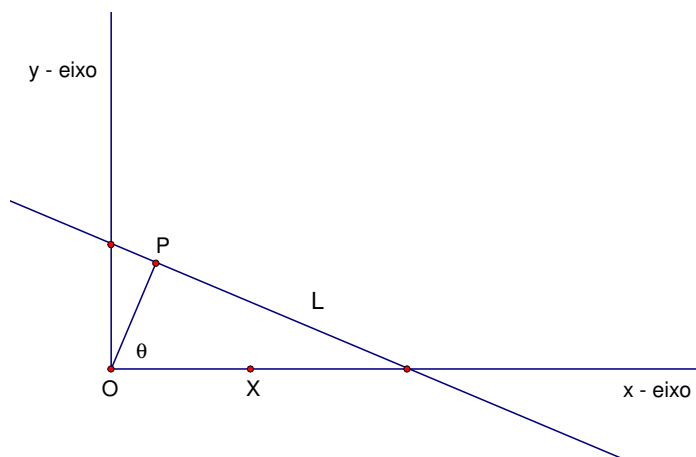


Figura ~ 1.2:

No cálculo de distâncias daremos especial atenção à distância entre dois pontos e à distância entre um ponto e uma recta. Consideremos que  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  são dois pontos em coordenadas cartesianas e  $r$  uma recta da forma (1.1). A distância entre  $P$  e  $Q$  é dada por

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (1.3)$$

e a distância entre o ponto  $P$  e a recta  $r$  será

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.4)$$

Por diversas vezes ao longo do trabalho será feita referência à *lei dos cosenos* e dos *senos*. Estas duas leis permitem-nos relacionar os comprimentos dos lados de um triângulo com os cosenos dos ângulos internos, no primeiro caso e os lados, senos e raio da circunferência circunscrita no segundo.

**Teorema 1.2.2 (Lei dos cosenos)**

*Em qualquer triângulo, o quadrado do comprimento de cada lado é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, menos o dobro do produto dos comprimentos desses lados pelo coseno do ângulo por eles formados, isto é, são válidas as fórmulas*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os ângulos internos e  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados opostos aos ângulos.

**Demonstração** Consideremos um triângulo arbitrário  $[ABC]$  em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Seja  $D$  o ponto da recta  $BC$  de modo a que  $AD$  seja perpendicular a  $BC$  ( $AD$  a altura do triângulo  $[ABC]$  relativamente a  $A$ ). Temos que distinguir três casos, se os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle ACB$  forem ambos agudos, o ponto  $D$  situa-se entre  $B$  e  $C$ , se  $\angle \widehat{ABC} < 90^\circ$  e  $\angle \widehat{ACB} > 90^\circ$ , o vértice  $B$  está entre  $A$  e  $D$  e no caso de  $\angle \widehat{ACB} = 90^\circ$  o ponto  $D$  coincide com  $C$ .

Analisando os dois primeiros casos verificamos que no triângulo  $[ABD]$  os catetos são  $h$  e  $a_1$ , no caso do triângulo  $[ACD]$  os catetos são  $h$  e  $a_2$ , sendo

$$a_1 = c \cos B, \quad a_2 = b \cos C.$$

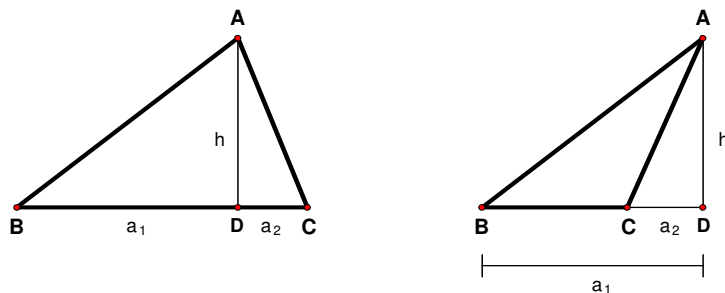


Figura 1.3:

No primeiro caso,  $a_1$  e  $a_2$  são positivos, no segundo caso  $a_1 > 0$  e  $a_2 < 0$ , mas em qualquer dos casos podemos escrever

$$a = a_1 + a_2.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos,  $[ADC]$  e  $[ABD]$ , obtemos

$$b^2 = h^2 + a_2^2, \quad c^2 = h^2 + a_1^2,$$

e daqui

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a_2^2 - a_1^2 \\ &= c^2 + (a - a_1)^2 - a_1^2 \\ &= c^2 + a^2 - 2aa_1 \\ &= c^2 + a^2 - 2ac \cos B. \end{aligned}$$

As restantes duas fórmulas resultam de uma mudança de notação. Na última situação, onde  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ , constatamos que  $a_2 = 0$  e que continuam a ser válidas as mesmas igualdades. ■

**Teorema 1.2.3 (Lei dos senos)**

*Em qualquer triângulo, o comprimento de cada lado é o produto do diâmetro da circunferência circunscrita pelo seno do ângulo oposto. Tomando  $R$  como raio da circunferência circunscrita, temos*

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

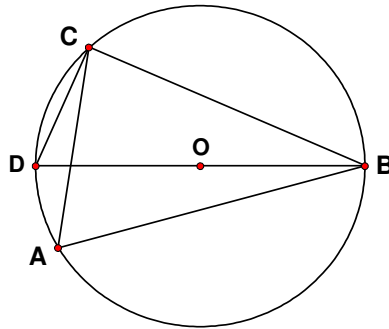


Figura 1.4:

**Demonstração** Iremos provar apenas a primeira igualdade do teorema, as restantes podem ser provadas de forma análoga. Consideremos a Fig. 1.4, onde está representado um triângulo  $[ABC]$ , a circunferência circunscrita a esse triângulo e o ponto  $D$  pertencente à circunferência de modo a que  $\overline{BD}$  seja o diâmetro. No caso de  $C = D$ ,  $\angle BAC$  ficará inscrito numa semi-circunferência e nesse caso  $\sin A = 1$ , sendo a fórmula verdadeira. No caso em que  $C \neq D$ , os ângulos  $\angle BAC$  e  $\angle BDC$  ou são congruentes ou são suplementares, mas em ambos os casos o valor do seno é igual. Como o triângulo  $[BDC]$  é rectângulo, podemos escrever

$$\sin A = \sin(\angle BDC) = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{a}{2R},$$

onde  $R$  representa o raio da circunferência, desta forma provamos que

$$\sin A = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

■

Para trabalhar em coordenadas trilineares, nomeadamente para estudar relações entre pontos, necessitamos de utilizar a área do triângulo e as suas diferentes maneiras de a calcular. No decorrer deste trabalho a área será representada por  $\sigma$ .

Como se sabe, a área de um triângulo obtém-se calculando a metade do produto da medida da sua altura pela medida da sua base

$$\sigma = \frac{1}{2}bh, \tag{1.5}$$

[2, p. 201], esta é sem dúvida a maneira clássica de determinar a área, no entanto existem outras, como é o caso de expressar a área em função dos comprimentos dos lados do triângulo.

**Proposição 1 (Fórmula de Herão)**

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos lados do triângulo  $[ABC]$ , então a sua área é dada por

$$\sigma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (1.6)$$

onde  $p$  representa o semi-perímetro do triângulo  $[ABC]$ . Esta fórmula é também conhecida como a fórmula de Herão<sup>11</sup>.

**Demonstração** Seja  $[ABC]$  um triângulo em que os comprimentos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  são  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, e seja  $D$  o ponto de  $BC$  que representa o pé da altura do triângulo em  $A$ . Considerando, sem perda de generalidade, que os ângulos  $B$  e  $C$  são agudos, a área do triângulo  $[ABC]$  pode ser então escrita como a soma das áreas dos triângulos  $[ABD]$  e  $[ADC]$ .

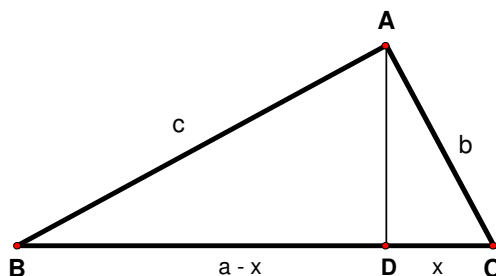


Figura ~ 1.5:

A medida  $\overline{AD}$ , altura do triângulo em  $A$ , pode ser escrita como  $h_A^2 = c^2 - (a-x)^2$  e  $h_A^2 = b^2 - x^2$  em relação aos triângulos  $[ABD]$  e  $[ADC]$ , respectivamente (Fig. 1.5). Destas duas equações obtemos  $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$  e substituindo este resultado em  $h_A^2 = b^2 - x^2$ , temos:

$$h_A^2 = b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2$$

---

<sup>11</sup>ou fórmula de Heron, em homenagem ao geômetra, engenheiro, matemático e mecânico grego Heron de Alexandria (séc. I). A demonstração da fórmula foi apresentada num dos seus tratados chamado Métrica.

$$\begin{aligned}
&= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2} \\
&= \frac{(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)}{4a^2} \\
&= \frac{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)}{4a^2} \\
&= \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c)}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Seja  $P = a + b + c$  e  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , temos então as seguintes relações

$$\begin{aligned}
a + b - c &= a + b + c - 2c = P - 2c = 2(p - c), \\
a - b + c &= a + b + c - 2b = P - 2b = 2(p - b), \\
b + c - a &= a + b + c - 2a = P - 2a = 2(p - a),
\end{aligned}$$

podemos desta forma reescrever  $h_A^2$

$$h_A^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2},$$

então

$$h_A = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

assim, por (1.5), a área do  $\Delta ABC$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{2} a \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \\
&= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.
\end{aligned}$$

■

Uma outra demonstração pode ser vista em [1, p. 81].

Podemos também determinar a área de um triângulo relacionando os comprimentos dos seus lados e a amplitude dos seus ângulos internos.

**Proposição 2** *Sejam  $a, b, c$  os comprimentos dos lados e  $A, B, C$  os ângulos internos do triângulo arbitrário  $[ABC]$ , então a sua área é dada por*

$$\sigma = \frac{1}{2}cb \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C. \quad (1.7)$$

**Demonstração** Pela Fig. 1.5 podemos escrever  $h = c \sin B$ , onde  $h$  representa a altura do triângulo em  $A$ , e por (1.5) a área do triângulo será

$$\sigma = \frac{1}{2}ca \sin B,$$

de forma análoga obtemos as igualdades  $\sigma = \frac{1}{2}cb \sin A$  e  $\sigma = \frac{1}{2}ab \sin C$ . ■

É possível ainda relacionar a área com os comprimentos dos lados e o raio da circunferência inscrita ou os comprimentos dos lados com o raio da circunferência circunscrita.

**Proposição 3** *Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  os comprimentos dos lados e  $r$  o raio da circunferência inscrita no triângulo  $[ABC]$ , então a sua área é dada por*

$$\sigma = rp,$$

onde  $p$  representa o semi-perímetro do triângulo  $[ABC]$ .

**Demonstração** Seja  $I$  o centro da circunferência inscrita no triângulo  $[ABC]$ . Podemos então escrever  $\sigma$  através da soma das áreas dos triângulos  $[ABI]$ ,  $[AIC]$  e  $[IBC]$ , como ilustra a Fig. 1.6.

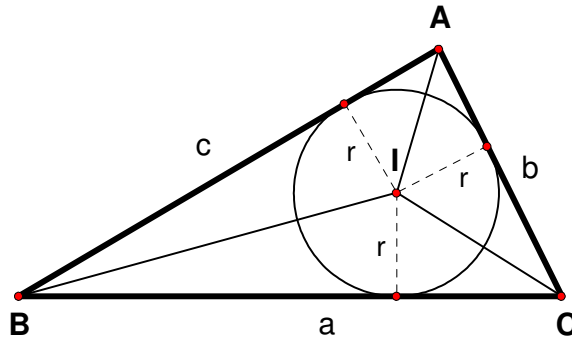


Figura 1.6:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{[ABI]} + \sigma_{[AIC]} + \sigma_{[IBC]} \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar \\ &= \frac{a + b + c}{2}r \\ &= rp, \end{aligned}$$

onde  $p$  representa o semi-perímetro. ■

**Proposição 4** *Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  os comprimentos dos lados e  $R$  o raio da circunferência circunscrita no triângulo  $[ABC]$ , então a sua área é dada por*

$$\sigma = \frac{abc}{4R}.$$

**Demonstração** Para obter a fórmula do cálculo da área do triângulo a depender dos comprimentos dos lados e do raio da circunferência circunscrita, é suficiente relacionar os resultados obtidos na *lei dos senos* e na proposição 2. Assim, considerando

$$a = 2R \sin A \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{2}cb \sin A,$$

chegamos facilmente a

$$\sigma = \frac{abc}{4R}.$$

■

Ao longo deste trabalho iremos também necessitar de outras noções como é o caso da congruência de triângulos ou algumas relações entre ângulos, para isso é sugerido ao leitor a consulta de [14] e de [12].

## Capítulo 2

# Coordenadas trilineares

Consideremos um triângulo arbitrário  $[ABC]$ , em que os comprimentos dos seus lados são  $a$ ,  $b$  e  $c$  (Fig. 2.1). As coordenadas trilineares de um ponto  $P$  em relação ao triângulo  $[ABC]$  representam-se por  $\alpha : \beta : \gamma$ , em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são directamente proporcionais às distâncias euclidianas do ponto  $P$  às rectas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , isto é

$$\alpha : \beta : \gamma = ka' : kb' : kc',$$

sendo  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  as distâncias euclidianas do ponto  $P$  aos respectivos lados do triângulo e  $k$  é uma constante diferente de zero.

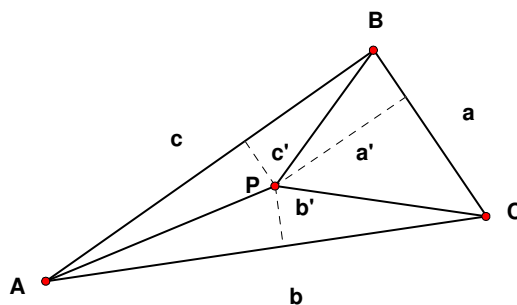


Figura 2.1:

Deste modo os três vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo têm como coordenadas  $1 : 0 : 0$ ,  $0 : 1 : 0$  e  $0 : 0 : 1$ , respectivamente.

**Teorema 2.0.4** *Multiplicando as coordenadas trilineares de  $P = \alpha : \beta : \gamma$  por  $k = \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$  obtemos a distância euclidiana de  $P$  aos lados do triângulo,*

onde  $\sigma$  é a área do  $\Delta ABC$ . Às coordenadas obtidas, isto é, à tripla onde cada uma das componentes representa a distância euclidiana de  $P$  aos lados do triângulo dá-se o nome de coordenadas trilineares exactas.

**Demonstração** Sendo  $\alpha : \beta : \gamma$  as coordenadas de  $P$  e  $a'$ ,  $b'$ , e  $c'$  as distâncias euclidianas de  $P$  aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, podemos então escrever as distâncias da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a' &= k\alpha, \\ b' &= k\beta, \\ c' &= k\gamma. \end{aligned}$$

Através das áreas dos triângulos  $[ABC]$ ,  $[BCP]$ ,  $[ACP]$  e  $[APB]$  (Fig. 2.1), representadas por  $\sigma$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  e  $\sigma_c$ , respectivamente, podemos encontrar o valor de  $k$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c \\ &= \frac{1}{2}aa' + \frac{1}{2}bb' + \frac{1}{2}cc' \\ &= \frac{1}{2}ak\alpha + \frac{1}{2}bk\beta + \frac{1}{2}ck\gamma \\ &= \frac{1}{2}k(a\alpha + b\beta + c\gamma), \end{aligned}$$

então

$$k \equiv \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}. \quad (2.1)$$

■

**Corolário 2.0.5** Quando  $k = 1$ , as coordenadas de  $P$  indicam as distâncias reais (euclidianas) de  $P$  aos lados do triângulo.

As coordenadas trilineares exactas representam-se por  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , caso contrário será utilizada a notação  $\alpha : \beta : \gamma$ . A esta última representação também se dá o nome de coordenadas trilineares homogêneas. Pela introdução do conceito de coordenadas trilineares de um ponto e pelo teorema anterior podemos concluir que qualquer ponto multiplicado pela constante  $k$  ( $k \neq 0$ ), descreve o mesmo ponto.

No plano do triângulo  $[ABC]$  a recta  $BC$  divide o plano em dois semi-planos. Iremos então assumir que o semi-plano que contém o vértice  $A$  é a região onde a coordenada  $\alpha$  é positiva, sendo que no outro semi-plano  $\alpha$  tem um valor negativo, ver Fig. 2.2.

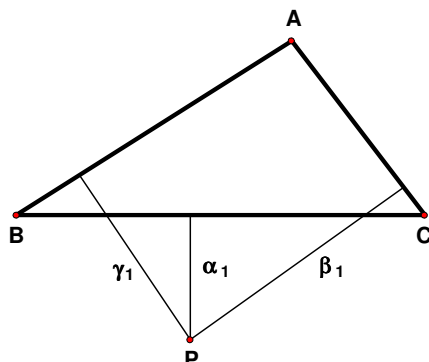


Figura 2.2: Distâncias trilineares euclidianas do ponto  $P$ .  $\alpha_1 < 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$ .

Se  $P$  é um ponto no plano do  $\triangle ABC$ , a sua coordenada em relação ao lado  $BC$  será  $\delta\alpha$ , onde  $\alpha$  representa a distância euclidiana de  $P$  a  $BC$ , e

$$\delta = \begin{cases} -1, & \text{se } P \text{ está no lado negativo de } BC, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente podemos escrever as respectivas coordenadas de  $P$  em relação aos lados  $CA$  e  $AB$ . Desta forma, as distâncias em relação aos lados podem ou não ser negativas, dependendo do sítio onde se encontra o ponto  $P$ .

## 2.1 Coordenadas Cartesianas

As coordenadas trilineares e as coordenadas cartesianas podem ser relacionadas de forma a que qualquer ponto em coordenadas trilineares possa ser convertido em coordenadas cartesianas e vice-versa.

Para relacionar estes dois tipos de coordenadas, introduzimos um referencial cartesiano no plano do triângulo  $[ABC]$ , para que qualquer ponto  $Q$  em coordenadas cartesianas possa ser escrito em coordenadas trilineares e vice-versa.

Começamos por desenhar o referencial cartesiano de tal forma que  $O$  (origem do referencial) se situe no interior do triângulo. Sejam  $P_1, P_2$  e  $P_3$  os pontos de intersecção dos lados do triângulo e das respectivas rectas perpendiculares que passam por  $O$ . Consideremos um ponto  $X$  no eixo dos  $xx$  do referencial cartesiano e um ponto  $Q$  situado no interior do  $\triangle ABC$ , tal como podemos ver na Fig. 2.3, e sejam  $\theta_i = \angle XOP_i$  e  $p_i = |OP_i|$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

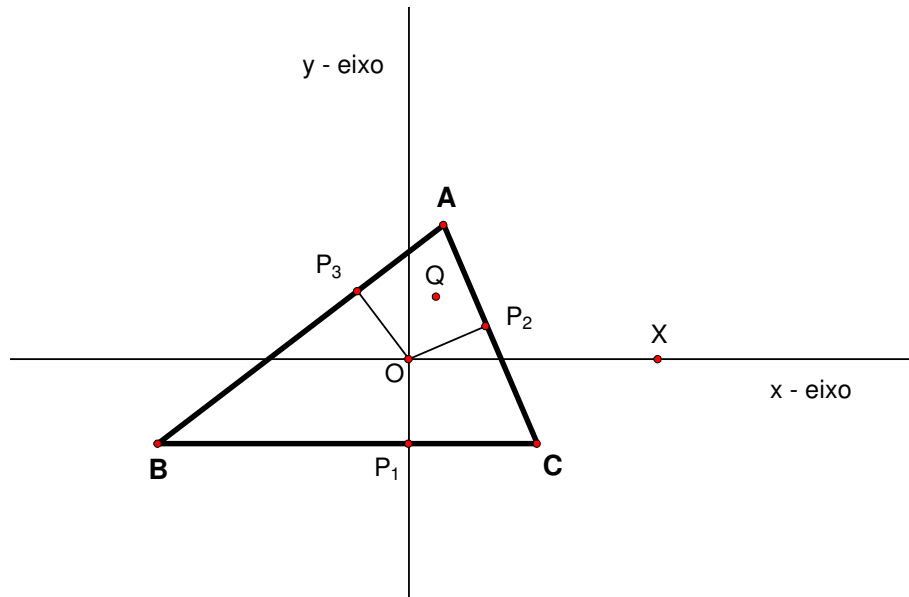


Figura ~2.3: Referencial cartesiano no sistema de coordenadas trilineares.

Pelo Lema 1.2.1 as equações das rectas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  são

$$x \cos \theta_i + y \sin \theta_i = p_i, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Considerando que  $(u, v)$  são as coordenadas cartesianas do ponto  $Q$  e no caso de  $(\alpha, \beta, \gamma)$  serem as coordenadas trilineares exactas do ponto  $Q$ , o sinal das distâncias do ponto  $Q$  aos lados do triângulo é igual ao sinal das distâncias  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , pois o ponto  $O$  situa-se no interior do  $\Delta ABC$ . Recorrendo a (1.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 - u \cos \theta_1 - v \sin \theta_1, \\ \beta &= p_2 - u \cos \theta_2 - v \sin \theta_2, \\ \gamma &= p_3 - u \cos \theta_3 - v \sin \theta_3. \end{aligned}$$

Através das igualdades anteriores podemos verificar que as distâncias  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  dependem de onde está situado o ponto  $O$  e dos ângulos  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Para simplificar as igualdades anteriores escolhemos  $O$  como sendo o incentro do triângulo  $\Delta ABC$ , assim  $p_1 = p_2 = p_3 = r$ , sendo  $r$  o raio da circunferência inscrita em  $\Delta ABC$ . Tomando o eixo das abcissas paralelo a  $BC$  no sentido positivo, ou seja, de  $B$  para  $C$ . Obtemos

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \tag{2.2}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi + C, \quad (2.3)$$

$$\theta_1 - \theta_3 = \pi - B, \quad (2.4)$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \pi - A, \quad (2.5)$$

então  $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + B$  e  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - C$ , logo

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 - u \cos \frac{3\pi}{2} - v \sin \frac{3\pi}{2}, \\ \beta &= p_2 - u \cos \left( \frac{\pi}{2} - C \right) - v \sin \left( \frac{\pi}{2} - C \right), \\ \gamma &= p_3 - u \cos \left( \frac{\pi}{2} + B \right) - v \sin \left( \frac{\pi}{2} + B \right), \end{aligned}$$

simplicando, obtemos as igualdades que nos permitem converter o ponto  $Q$ , escrito em coordenadas cartesianas, em coordenadas trilineares

$$\begin{aligned} \alpha &= r + v, \\ \beta &= r - u \sin C - v \cos C, \\ \gamma &= r + u \sin B - v \cos B. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para obter as coordenadas cartesianas a partir das coordenadas trilineares teremos primeiramente que as converter em coordenadas trilineares exactas, no caso de ainda não o serem, para tal multiplicam-se as coordenadas pela constante  $k = \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$  e obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} k\alpha &= r + v, \\ k\beta &= r - u \sin C - v \cos C, \\ k\gamma &= r + u \sin B - v \cos B. \end{aligned}$$

Utilizando as duas primeiras equações anteriores e resolvendo o sistema em ordem a  $u$  e  $v$ , tem-se

$$\begin{aligned} v &= k\alpha - r, \\ u &= -\frac{k\beta - r + (k\alpha - r) \cos C}{\sin C}, \end{aligned}$$

como  $u$  e  $v$  são as coordenadas cartesianas do ponto  $Q$ , podemos substituí-las por  $x$  e  $y$ , respectivamente, e obter

$$\begin{aligned} x &= -\frac{k\beta - r + (k\alpha - r) \cos C}{\sin C}, \\ y &= k\alpha - r. \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2 Pontos em coordenadas trilineares

**Teorema 2.2.1** *Para determinar um ponto  $P$  em coordenadas trilineares são necessárias apenas duas distâncias trilineares.*

**Demonstração** Tomemos  $P$  um ponto no plano do  $\Delta ABC$  e consideremos, sem perda de generalidade, a recta perpendicular a  $CA$  que contém  $P$ . Obtemos então  $\beta_1$ , a distância de  $P$  a  $CA$ . Analogamente podemos obter  $\gamma_1$  em relação ao lado  $AB$ . Estas duas rectas intersectam-se num único ponto  $P$ . Desta forma a terceira coordenada  $\alpha_1$  está univocamente determinada por  $\beta_1$  e  $\gamma_1$ . ■

### 2.2.1 Conjugado isogonal

Consideremos um ponto  $P$  situado no interior do  $\Delta ABC$  e sejam  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  as rectas que ligam cada um dos vértices ao ponto  $P$ . A reflexão de  $AP$  através da bissectriz<sup>1</sup> do ângulo  $A$ , a reflexão de  $BP$  através da bissectriz do ângulo  $B$  e a reflexão de  $CP$  através da bissectriz do ângulo  $C$  concorrem num ponto<sup>2</sup> a que se dá o nome de conjugado isogonal de  $P$ , Fig. 2.4.

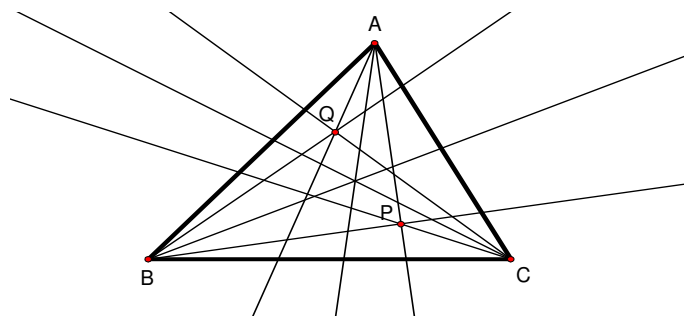


Figura 2.4:  $P$  e  $Q$ , conjugados isogonais.

Sejam  $\alpha : \beta : \gamma$  as coordenadas trilineares de  $P$ , as coordenadas trilineares de  $Q$ , conjugado isogonal de  $P$ , são dadas por  $\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta$  ([10, p. 36]).

### 2.2.2 Conjugado isotómico

Consideremos um ponto  $P$  situado no interior do  $\Delta ABC$  e sejam  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  as rectas que ligam cada um dos vértices ao ponto  $P$ . Sejam  $A'$ ,  $B'$ ,

<sup>1</sup>Semi-recta que divide um ângulo ao meio.

<sup>2</sup>Ver [18, p. 3].

$C'$  os pontos de intersecção das rectas  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  com os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Ao fazer a reflexão de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  em relação aos pontos médios de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  obtemos  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ . As rectas  $AA''$ ,  $BB''$  e  $CC''$  intersectam-se num ponto a que se dá o nome de conjugado isotómico (Fig. 2.5).

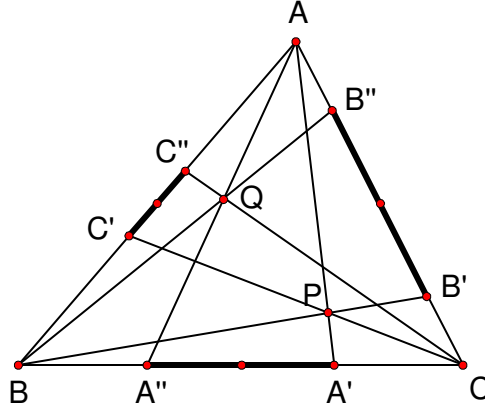


Figura 2.5:  $P$  e  $Q$ , conjugados isotómicos.

Se as coordenadas trilineares de  $P$  forem  $\alpha : \beta : \gamma$  então as coordenadas trilineares do conjugado isotómico serão  $\frac{1}{a^2\alpha} : \frac{1}{b^2\beta} : \frac{1}{c^2\gamma}$  ([10, p. 36 e 37]).

### 2.2.3 Distância entre dois pontos

Devido à complexidade da fórmula da distância entre pontos em coordenadas trilineares e de forma a simplificar os resultados, vamos considerar apenas pontos escritos em coordenadas trilineares exactas.

**Proposição 5** Sendo  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$  e  $Q = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  dois pontos em coordenadas trilineares exactas, a distância entre estes dois pontos é dada por

$$|PQ| = \frac{\sqrt{-abc [a(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) + b(\gamma - \gamma_1)(\alpha - \alpha_1) + c(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)]}}{2\sigma}, \quad (2.8)$$

ou

$$|PQ| = \frac{\sqrt{abc [a \cos A (\alpha - \alpha_1)^2 + b \cos B (\beta - \beta_1)^2 + c \cos C (\gamma - \gamma_1)^2]}}{2\sigma},$$

em que  $\sigma$  representa a área do triângulo  $[ABC]$  e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

**Demonstração** Sejam  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$  e  $Q = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  dois pontos em coordenadas trilineares exactas. Recorrendo a (2.7) e tendo em conta que  $k = 1$ , visto considerarmos apenas pontos em coordenadas exactas, temos

$$P = \begin{cases} x = -\frac{\beta - r + (\alpha - r) \cos C}{\sin C}, \\ y = \alpha - r, \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} x_1 = -\frac{\beta_1 - r + (\alpha_1 - r) \cos C}{\sin C}, \\ y_1 = \alpha_1 - r. \end{cases}$$

Agora com  $P$  e  $Q$  escritos em coordenadas cartesianas podemos aplicar (1.3) e determinar a distância entre os dois pontos.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 &= \left( -\frac{\beta - r + (\alpha - r) \cos C}{\sin C} + \frac{\beta_1 - r + (\alpha_1 - r) \cos C}{\sin C} \right)^2 \\ &= \left( \frac{-\beta + r - (\alpha - r) \cos C + \beta_1 - r + (\alpha_1 - r) \cos C}{\sin C} \right)^2 \\ &= \left( \frac{-\beta + \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha) \cos C}{\sin C} \right)^2 \\ &= \frac{(\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2 \cos^2 C + 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \cos C}{\sin^2 C}, \end{aligned}$$

e

$$(y - y_1)^2 = (\alpha - r - \alpha_1 + r)^2 = (\alpha - \alpha_1)^2.$$

Substituindo estes resultados em  $|PQ|$ , temos

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{(\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2 \cos^2 C + 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \cos C}{\sin^2 C} + (\alpha - \alpha_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2 + 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \cos C}{\sin^2 C}} \\ &= \sqrt{\frac{(\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2 + 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \cos C}{\frac{4\sigma^2}{a^2 b^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 b^2 [(\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2 + 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \cos C]}}{2\sigma}. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} D &= (\beta - \beta_1)^2 + (\alpha - \alpha_1)^2, \\ E &= 2(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1)\cos C. \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $P$  e  $Q$  estão em coordenadas exactas, podemos escrever

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\sigma, \\ a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 2\sigma, \end{cases}$$

subtraindo as igualdades, obtemos que

$$a(\alpha - \alpha_1) + b(\beta - \beta_1) + c(\gamma - \gamma_1) = 0, \quad (2.9)$$

o que quer dizer que

$$\begin{cases} \alpha - \alpha_1 = \frac{-b(\beta - \beta_1) - c(\gamma - \gamma_1)}{a}, \\ \beta - \beta_1 = \frac{-a(\alpha - \alpha_1) - c(\gamma - \gamma_1)}{b}, \end{cases}$$

substituindo em  $D$ , vem que

$$\begin{aligned} & (\beta - \beta_1) \frac{-a(\alpha - \alpha_1) - c(\gamma - \gamma_1)}{b} + (\alpha - \alpha_1) \frac{-b(\beta - \beta_1) - c(\gamma - \gamma_1)}{a} \\ &= \frac{-a^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) - ac(\beta - \beta_1)(\gamma - \gamma_1)}{ab} + \\ &+ \frac{-b^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) - bc(\alpha - \alpha_1)(\gamma - \gamma_1)}{ab}. \end{aligned}$$

Utilizando a *lei dos cosenos*, enunciada no Capítulo 1, podemos reescrever  $E$

$$\begin{aligned} E &= 2 \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} (\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) \\ &= \frac{a^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) + b^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) - c^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)}{ab}, \end{aligned}$$

então  $D + E$  é

$$\frac{-ac(\beta - \beta_1)(\gamma - \gamma_1) - bc(\alpha - \alpha_1)(\gamma - \gamma_1) - c^2(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)}{ab},$$

voltando à expressão da distância, obtemos

$$\frac{\sqrt{-abc[a(\beta - \beta_1)(\gamma - \gamma_1) + b(\gamma - \gamma_1)(\alpha - \alpha_1) + c(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)]}}{2\sigma}.$$

Esta é a fórmula da distância entre dois pontos que depende apenas dos comprimentos dos lados do triângulo. No entanto é possível escrever a fórmula da distância dependendo dos comprimentos dos lados e dos ângulos internos do triângulo de referência.

Começemos por traçar as alturas do  $\Delta ABC$ , como mostra a Fig. 2.6.

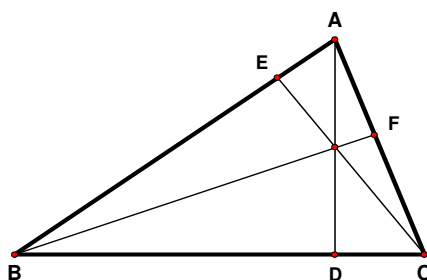


Figura 2.6:

Tendo em conta que

$$a = |BD| + |DC|,$$

podemos escrever o lado  $|BC|$ , de comprimento  $a$ , como sendo

$$a = c \cos B + b \cos C,$$

de forma análoga poderemos obter para  $b$  e  $c$ , comprimentos dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , as seguintes expressões

$$b = c \cos A + a \cos C,$$

$$c = b \cos A + a \cos B.$$

De (2.8), seja

$$F = a(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) + b(\gamma - \gamma_1)(\alpha - \alpha_1) + c(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1).$$

Considerando agora os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  acima descritos e substituindo em  $F$ , temos

$$\begin{aligned} F = & (b \cos C + c \cos B)(\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) + \\ & (c \cos A + a \cos C)(\gamma - \gamma_1)(\alpha - \alpha_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b \cos A + a \cos B) (\alpha - \alpha_1) (\beta - \beta_1) \\
= & \cos A (\alpha - \alpha_1) [c (\gamma - \gamma_1) + b (\beta - \beta_1)] + \\
& \cos B (\beta - \beta_1) [c (\gamma - \gamma_1) + a (\alpha - \alpha_1)] + \\
& \cos C (\gamma - \gamma_1) [b (\beta - \beta_1) + a (\alpha - \alpha_1)].
\end{aligned}$$

A partir de (2.9), temos que

$$F = -a \cos A (\alpha - \alpha_1)^2 - b \cos B (\beta - \beta_1)^2 - c \cos C (\gamma - \gamma_1)^2.$$

Por último, substituindo em (2.8) e simplificando, obtemos

$$|PQ| = \frac{\sqrt{abc [a \cos A (\alpha - \alpha_1)^2 + b \cos B (\beta - \beta_1)^2 + c \cos C (\gamma - \gamma_1)^2]}}{2\sigma}.$$

■

A demonstração da proposição 5 mostra que o cálculo da distância entre pontos em coordenadas trilineares pode ser uma tarefa extremamente complicada do ponto de vista prático. Por esta razão é quase indispensável o uso das novas tecnologias nos processos de simplificação.

## 2.2.4 Colinearidade

**Proposição 6** *Três pontos  $\alpha : \beta : \gamma$ ,  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  e  $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$  são colineares se e só se*

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

**Demonstração** Sejam  $P = (u, v)$ ,  $P_1 = (u_1, v_1)$  e  $P_2 = (u_2, v_2)$  três pontos em coordenadas cartesianas e colineares. As suas coordenadas trilineares são

$$\begin{aligned}
\alpha &= r + v, \\
\beta &= r - u \sin C - v \cos C, \\
\gamma &= r + u \sin B - v \cos B,
\end{aligned}$$

para  $P$ ;

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= r + v_1, \\
\beta_1 &= r - u_1 \sin C - v_1 \cos C, \\
\gamma_1 &= r + u_1 \sin B - v_1 \cos B,
\end{aligned}$$

para  $P_1$  e

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= r + v_2, \\ \beta_2 &= r - u_2 \sin C - v_2 \cos C, \\ \gamma_2 &= r + u_2 \sin B - v_2 \cos B,\end{aligned}$$

para  $P_2$ .

Substituindo estas expressões no determinante  $D$ , obtemos que

$$D = \begin{vmatrix} r + v & r - u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ r + v_1 & r - u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r + v_2 & r - u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix},$$

aplicando as propriedades dos determinantes vem que

$$D = \begin{vmatrix} r & r - u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ r & r - u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r & r - u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v & r - u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ v_1 & r - u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ v_2 & r - u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix}.$$

Podemos então dizer que  $D = E + F$ , sendo

$$E = \begin{vmatrix} r & r - u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ r & r - u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r & r - u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix},$$

e

$$F = \begin{vmatrix} v & r - u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ v_1 & r - u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ v_2 & r - u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix},$$

De maneira semelhante, para o determinante  $E$ , temos que

$$E = \begin{vmatrix} r & r & r + u \sin B - v \cos B \\ r & r & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r & r & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & -u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ r & -u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r & -u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix}$$

logo

$$E = 0 + \begin{vmatrix} r & -u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ r & -u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ r & -u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix},$$

continuando a aplicar as propriedades dos determinantes e simplificando, obtemos que

$$E = \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} r \sin(C + B).$$

Para o determinante  $F$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} F &= \begin{vmatrix} v & r & r + u \sin B - v \cos B \\ v_1 & r & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ v_2 & r & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} v & -u \sin C - v \cos C & r + u \sin B - v \cos B \\ v_1 & -u_1 \sin C - v_1 \cos C & r + u_1 \sin B - v_1 \cos B \\ v_2 & -u_2 \sin C - v_2 \cos C & r + u_2 \sin B - v_2 \cos B \end{vmatrix} = \\ &= r \sin B \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} + r \sin C \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \\ &= r (\sin B + \sin C) \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

É então possível reescrever  $D$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} D &= E + F \\ &= \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} r \sin(C + B) + r (\sin B + \sin C) \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} r [\sin A + \sin B + \sin C]. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\begin{vmatrix} 1 & u & v \\ 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u - u_1 & v - v_1 \\ u - u_2 & v - v_2 \end{vmatrix}$$

podemos afirmar que  $D = 0$  se e só se

$$\begin{vmatrix} u - u_1 & v - v_1 \\ u - u_2 & v - v_2 \end{vmatrix} = 0$$

isto é, se e só se  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são colineares. ■

**Exemplo 2.2.2** Os pontos de coordenadas trilineares  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ ;  $a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2)$  e  $\frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{1}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)}$  respeitam a proposição anterior, isto é, são colineares. Estes três pontos são o baricentro, o circuncentro e o ortocentro que serão estudados em pormenor no Capítulo 3, a recta que os contém é uma das mais conhecidas e estudadas, a recta de Euler.

## 2.2.5 Ponto médio

**Proposição 7** Consideremos dois pontos

$$P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 \quad e \quad P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2,$$

em coordenadas trilineares e o segmento de recta por eles formado. O ponto médio  $M = \alpha_m : \beta_m : \gamma_m$  do segmento de recta é dado por

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 2a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + c(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1), \\ \beta_m &= a(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2b\beta_1\beta_2 + c(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1), \\ \gamma_m &= a(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + b(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + 2c\gamma_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Demonstração** Recorrendo à relação existente entre as coordenadas trilineares e as coordenadas cartesianas (2.7), podemos escrever os pontos  $P_1$  e  $P_2$  em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{cases} x_1 = -\frac{k_1\beta_1 - r + (k_1\alpha_1 - r)\cos C}{\sin C}, \\ y_1 = k_1\alpha_1 - r, \end{cases} \\ P_2 &= \begin{cases} x_2 = -\frac{k_2\beta_2 - r + (k_2\alpha_2 - r)\cos C}{\sin C}, \\ y_2 = k_2\alpha_2 - r. \end{cases} \end{aligned}$$

Com os pontos em coordenadas cartesianas podemos facilmente encontrar o ponto médio,  $M$ , que será dado por

$$\begin{aligned} M &= \begin{cases} x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_m = \frac{-(k_1\beta_1 + k_2\beta_2) + 2r - \cos C(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r)}{2\sin C}, \\ y_m = \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando (2.6) é possível escrever  $M$  em coordenadas trilineares. A coordenada  $\alpha_m$  será dada por

$$\begin{aligned}\alpha_m &= r + \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r}{2} \\ &= \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}{2}.\end{aligned}$$

Tendo em conta (2.1), temos

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{\sigma}{E} [\alpha_1 (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2) + \alpha_2 (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)] \\ &= \frac{\sigma}{E} [2a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + c(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2)],\end{aligned}$$

onde

$$E = (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)(a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2).$$

A coordenada de  $\beta_m$  será

$$\begin{aligned}\beta_m &= r - \frac{-(k_1\beta_1 + k_2\beta_2) + 2r - \cos C (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r)}{2 \sin C} \sin C - \\ &\quad \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r}{2} \cos C \\ &= \frac{k_1\beta_1 + k_2\beta_2}{2} \\ &= \frac{\sigma}{E} [a(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) + 2b\beta_1\beta_2 + c(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)].\end{aligned}$$

Para o cálculo de  $\gamma_m$ , no lugar de (2.7) é necessário utilizar uma outra relação entre as coordenadas trilineares e as cartesianas. De facto podemos escrever (2.7) em função de  $\alpha$  e  $\gamma$ , que será da forma

$$\begin{aligned}x &= \frac{k\gamma - r + (k\alpha - r) \cos B}{\sin B}, \\ y &= k\alpha - r.\end{aligned}$$

e neste caso

$$M = \begin{cases} x_m = \frac{k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 - 2r + \cos B(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r)}{2 \sin B}, \\ y_m = \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r}{2}. \end{cases}$$

Assim

$$\gamma_m = r + \frac{k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 - 2r + \cos B (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r)}{2 \sin B} \sin B -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - 2r}{2} \cos B \\
= & \frac{k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2}{2} \\
= & \frac{\sigma}{E} [a(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + b(\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2) + 2c\gamma_1\gamma_2].
\end{aligned}$$

As coordenadas trilineares de  $M$  serão

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \frac{\sigma}{E} [2a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + c(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2)], \\
\beta_m &= \frac{\sigma}{E} [a(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) + 2b\beta_1\beta_2 + c(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)], \\
\gamma_m &= \frac{\sigma}{E} [a(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + b(\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2) + 2c\gamma_1\gamma_2],
\end{aligned}$$

como as coordenadas trilineares são coordenadas homogêneas, podemos multiplicar o terno por

$$k = \frac{E}{\sigma},$$

obtendo assim as coordenadas simplificadas de  $M$ , o ponto médio do segmento formado por  $P_1$  e  $P_2$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= 2a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + c(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2), \\
\beta_m &= a(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + 2b\beta_1\beta_2 + c(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2), \\
\gamma_m &= a(\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2) + b(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + 2c\gamma_1\gamma_2.
\end{aligned}$$

■

É necessário assinalar que as coordenadas trilineares dos pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  do triângulo de referência  $[ABC]$  são  $b : a : 0$ ,  $c : 0 : a$  e  $0 : c : b$ , respectivamente.

## 2.3 Rectas

### 2.3.1 Equação de uma recta

**Proposição 8** *Sejam  $P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  e  $P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$  dois pontos em coordenadas trilineares, a equação da recta que passa por esses dois pontos é dada por*

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\alpha + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)\beta + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma = 0.$$

**Demonstração** Sejam  $P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  e  $P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$  dois pontos em coordenadas trilineares e  $\alpha : \beta : \gamma$  um terceiro ponto arbitrário. Pela proposição 6, três pontos são colineares se e só se

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo a equação em coordenadas trilineares da recta definida por  $P_1$  e  $P_2$  é

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\alpha + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)\beta + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma = 0. \quad \blacksquare$$

De forma a simplificar a escrita da equação de uma recta em coordenadas trilineares, iremos introduzir a seguinte notação

$$\begin{aligned} l &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ m &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ n &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \end{aligned}$$

e portanto

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad (2.12)$$

é a equação em coordenadas trilineares da recta definida por  $P_1$  e  $P_2$ .

**Corolário 2.3.1** *Os lados do triângulo  $[ABC]$  estão contidos nas rectas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , sendo as suas equações  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$ , respectivamente.*

Como vimos anteriormente as coordenadas trilineares e as cartesianas podem ser relacionadas, utilizando (2.6) e (2.7) é possível obter uma relação entre as equações de uma mesma recta em coordenadas trilineares e coordenadas cartesianas.

**Proposição 9** *Seja  $XOY$  o referencial cartesiano introduzido na secção 2.1 e seja  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  a equação de uma recta em coordenadas trilineares. A sua equação em coordenadas cartesianas é dada por*

$$(m \sin C - n \sin B)x + (-l + m \cos C + n \cos B)y - (l + m + n)r = 0, \quad (2.13)$$

onde  $r$  é o raio da circunferência inscrita no triângulo de referência.

**Demonstração** Seja

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

a equação de uma recta em coordenadas trilineares. Substituindo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  por (2.6) e modificando a notação de  $u$ ,  $v$  para  $x$ ,  $y$  obtemos a equação desejada.  $\blacksquare$

### 2.3.2 Rectas concorrentes

**Proposição 10** *Sejam*

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \\ t & : l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0, \end{aligned}$$

*três rectas em coordenadas trilineares. As rectas são concorrentes se e só se*

$$l(m_1n_2 - n_1m_2) + m(n_1l_2 - l_1n_2) + n(l_1m_2 - m_1l_2) = 0. \quad (2.14)$$

**Demonstração** As rectas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são concorrentes se e só se no sistema homogéneo

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \\ t & : l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0, \end{aligned}$$

ocorrer

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, se se verificar (2.14). ■

**Corolário 2.3.2** *Se as rectas  $r$ ,  $s$  e  $t$  são concorrentes, então o ponto de intersecção é dado por*

$$m_1n_2 - n_1m_2 : n_1l_2 - l_1n_2 : l_1m_2 - m_1l_2.$$

### 2.3.3 Rectas paralelas

**Proposição 11** *Duas rectas*

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \end{aligned}$$

*são paralelas se e só se*

$$a(mn_1 - nm_1) + b(nl_1 - ln_1) + c(lm_1 - ml_1) = 0. \quad (2.15)$$

**Demonstração** Sejam

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \end{aligned}$$

duas rectas em coordenadas trilineares. Pela proposição 9, as equações das rectas  $r$  e  $s$  em coordenadas cartesianas são dadas por

$$\begin{aligned} r & : (m \sin C - n \sin B)x + (-l + m \cos C + n \cos B)y - \\ & \quad (l + m + n)r = 0, \\ s & : (m_1 \sin C - n_1 \sin B)x + (-l_1 + m_1 \cos C + n_1 \cos B)y - \\ & \quad (l_1 + m_1 + n_1)r = 0. \end{aligned}$$

As duas rectas são paralelas se e só se os seus vectores forem colineares, isto é

$$\begin{vmatrix} l - m \cos C - n \cos B & m \sin C - n \sin B \\ l_1 - m_1 \cos C - n_1 \cos B & m_1 \sin C - n_1 \sin B \end{vmatrix} = 0,$$

aplicando as propriedades dos determinantes e simplificando, temos que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} \sin C + \begin{vmatrix} l & -n \\ l_1 & -n_1 \end{vmatrix} \sin B + \\ & \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \sin B \cos C - \begin{vmatrix} n & m \\ n_1 & m_1 \end{vmatrix} \sin C \cos B = 0. \end{aligned}$$

Dividindo a igualdade anterior por  $\sin B$ , e utilizando a *lei dos senos*, teorema 1.2.3, vem que

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} \frac{c}{b} + \begin{vmatrix} l & -n \\ l_1 & -n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \left( \cos C + \frac{c}{b} \cos B \right) = 0.$$

Utilizando agora a *lei dos cosenos*, teorema 1.2.2, para o  $\cos C$  e para o  $\cos B$ , obtemos que

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} \frac{c}{b} + \begin{vmatrix} l & -n \\ l_1 & -n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \frac{a}{b} = 0,$$

assim, a condição de paralelismo entre duas rectas  $r$  e  $s$  nas condições acima referidas é dada por

$$a(mn_1 - nm_1) + b(nl_1 - ln_1) + c(lm_1 - ml_1) = 0.$$

Podemos também escrever a condição através do determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

**Proposição 12** *A recta  $r$  definida por*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ bn - cm & cl - an & am - bl \end{vmatrix} = 0$$

*é paralela à recta  $s : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  e passa pelo ponto  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ .*

**Demonstração** Pela proposição 6 é evidente que o ponto  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  pertence à recta  $r$ . Por outro lado a recta  $r$ , desenvolvendo o determinante, pode ser escrita da forma

$$[\beta_1(am - bl) - \gamma_1(cl - an)]\alpha + [\gamma_1(bn - cm) - \alpha_1(am - bl)]\beta + [\alpha_1(cl - an) - \beta_1(bn - cm)]\gamma = 0.$$

Aplicando  $r$  e  $s$  directamente em (2.15) verifica-se que as duas rectas são paralelas. ■

### 2.3.4 Rectas perpendiculares

**Proposição 13** *Duas rectas*

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \end{aligned}$$

*são perpendiculares se e só se*

$$(ll_1 + mm_1 + nn_1) - (mn_1 + m_1n) \cos A - (nl_1 + n_1l) \cos B - (lm_1 + l_1m) \cos C = 0. \quad (2.16)$$

**Demonstração** Sejam

$$\begin{aligned} r & : l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ s & : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \end{aligned}$$

duas rectas em coordenadas trilineares. De acordo com (2.13) podemos escrever as rectas em coordenadas cartesianas, obtendo

$$\begin{aligned} r & : (m \sin C - n \sin B) x + (-l + m \cos C + n \cos B) y - \\ & \quad (l + m + n) r = 0, \\ s & : (m_1 \sin C - n_1 \sin B) x + (-l_1 + m_1 \cos C + n_1 \cos B) y - \\ & \quad (l_1 + m_1 + n_1) r = 0. \end{aligned}$$

As rectas são perpendiculares<sup>3</sup> se e só se satisfazem a condição

$$AA_1 + BB_1 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A & = (m \sin C - n \sin B), \\ A_1 & = (m_1 \sin C - n_1 \sin B), \\ B & = (-l + m \cos C + n \cos B), \\ B_1 & = (-l_1 + m_1 \cos C + n_1 \cos B). \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos que duas rectas são perpendiculares se e só se tem lugar (2.16). ■

**Proposição 14** *A equação de uma recta que passa por um ponto  $P$  de coordenadas trilineares  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  e é perpendicular à recta  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  é dada por*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ l - m \cos C - n \cos B & m - n \cos A - l \cos C & n - l \cos B - m \cos A \end{vmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

**Demonstração** Consideremos um ponto  $P$  de coordenadas trilineares  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  e a recta  $r$  de equação  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ . Seja  $s$  uma recta

---

<sup>3</sup>Duas rectas

$$r : Ax + By + C = 0, \quad s : A'x + B'y + C' = 0,$$

em coordenadas cartesianas são perpendiculares se e só se

$$AA' + BB' = 0.$$

perpendicular a  $r$  que contém o ponto  $P$ . A equação da recta  $s$  será da forma  $x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$ .

Como  $P \in s$ , então

$$x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 = 0,$$

por outro lado as rectas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, por (2.16) temos

$$(lx + my + nz) - (mz + yn) \cos A - (nx + zl) \cos B - (ly + xm) \cos C = 0,$$

isto é

$$x\varepsilon + y\zeta + z\eta = 0,$$

onde

$$\varepsilon = l - n \cos B - m \cos C,$$

$$\zeta = m - n \cos A - l \cos C,$$

$$\eta = n - m \cos A - l \cos B.$$

Os coeficientes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da recta  $s$  deverão satisfazer o sistema

$$\begin{cases} x\alpha + y\beta + z\gamma = 0, \\ x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 = 0, \\ x\varepsilon + y\zeta + z\eta = 0, \end{cases}$$

que deverá ser um sistema homogéneo possível e indeterminado, o que quer dizer que

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \varepsilon & \zeta & \eta \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, tem lugar (2.17). ■

### 2.3.5 Distância entre ponto e recta

Tal como o cálculo da distância entre dois pontos, para o cálculo da distância entre um ponto e uma recta é necessário que as coordenadas do ponto estejam em coordenadas trilineares exactas.

**Proposição 15** *Seja  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  um ponto em coordenadas trilineares exactas e  $r$  a recta  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ , então*

$$d(P, r) = \frac{|\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos A - 2nl \cos B - 2lm \cos C}}.$$

**Demonstração** Para a demonstração desta proposição iremos começar por converter a equação da recta para coordenadas cartesianas e posteriormente determinar a distância entre um ponto e uma recta recorrendo a (1.4).

Sejam  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  e  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  um ponto e uma recta em coordenadas trilineares, a recta em coordenadas cartesianas tem a equação (2.13). Desta forma a distância será dada por

$$d(P, r) = \frac{|l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1|}{\sqrt{(m \sin C - n \sin B)^2 + (-l + m \cos C + n \cos B)^2}},$$

simplicando o denominador obtemos

$$d(P, r) = \frac{|l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn \cos(B + C) - 2nl \cos B - 2lm \cos C}}.$$

Tendo em conta que  $\cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$ , obtemos a equação desejada para  $d(P, r)$ . ■

## 2.4 Circunferência

De forma a complementar a compreensão desta secção, recomenda-se a leitura atenta de [10, p. 219].

A circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r > 0$  é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à distância  $r$  de  $O$ . Tomemos dois pontos distintos  $P, Q \in C$ . No caso em que  $P, Q$  e  $O$  são colineares, ao segmento  $\overline{PQ}$  designamos de diâmetro de  $C$ , sendo  $C$  simétrica em relação à recta  $PQ$ .

Para o nosso caso, interessa-nos apenas a equação da circunferência em coordenadas trilineares, que tem a expressão

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) + k(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = 0, \text{ com } z \neq 0. \quad (2.18)$$

O centro  $\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0$  da circunferência dada pela equação anterior é

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= l + z \cos A - n \cos B - m \cos C, \\ \beta_0 &= m - n \cos A + z \cos B - l \cos C, \\ \gamma_0 &= n - m \cos A - l \cos B + z \cos C. \end{aligned}$$

Para valores fixos de  $l, m$  e  $n$  e uma variável  $z$ , a equação (2.18) representa uma família de circunferências, tendo em conta que quando  $z \rightarrow \infty$ , as

circunferências aproximam-se da circunferência circunscrita, sendo esta uma das possíveis interpretações geométricas.

Seja  $O'$  o centro da circunferência  $\Gamma'$  e  $O$  o centro da circunferência  $\Gamma$ , a circunferência circunscrita ao triângulo  $[ABC]$ . A recta que contém  $O'$  e é paralela à recta  $OA$ , intersecta  $\Gamma'$  em dois pontos. Escolhemos, sem perda de generalidade, um dos pontos e atribuímos a letra  $A'$ . A recta que contém  $O'$  e é paralela à recta  $OB$  intersecta  $\Gamma'$  em dois pontos,  $B_1$  e  $B_2$ . Dos ângulos  $\angle A'O'B_1$  e  $\angle A'O'B_2$  um é igual ao ângulo  $\angle AOB$ . Seja  $B'$  esse ângulo, podemos, de forma análoga, determinar o ângulo  $C'$ , de tal modo que o  $\Delta A'B'C'$  fique inscrito em  $\Gamma'$ , com os lados  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{C'A'}$  e  $\overline{A'B'}$  paralelos aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

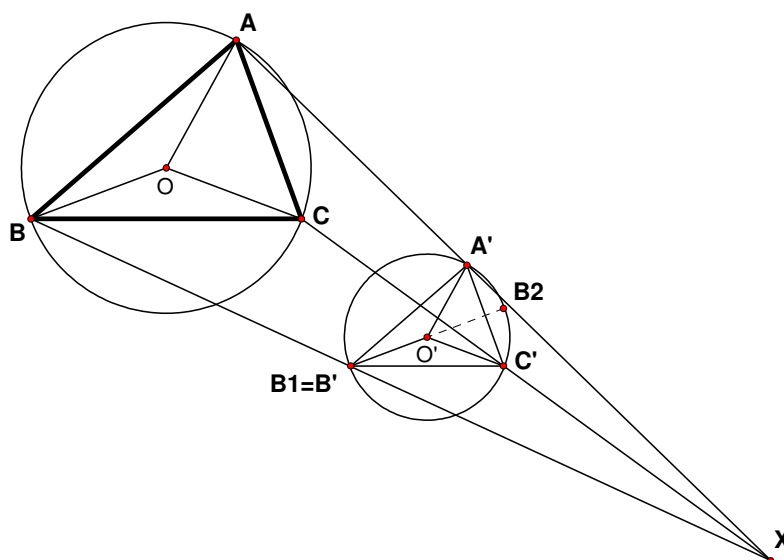


Figura ~2.7:

Seja  $X = (u, v, w)$  o centro de homotetia dos triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  e as suas coordenadas as distâncias trilineares exactas ao  $\Delta ABC$ . Sendo  $\lambda$  a razão de homotetia, os comprimentos dos lados do  $\Delta A'B'C'$  são  $\lambda a$ ,  $\lambda b$  e  $\lambda c$ . Seja  $P$  um ponto arbitrário e  $(\alpha, \beta, \gamma)$  as coordenadas trilineares exactas de  $P$  em relação aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $(\alpha', \beta', \gamma')$  as coordenadas trilineares exactas de  $P$  em relação aos lados  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{A'C'}$  e  $\overline{A'B'}$ . Assim, a equação de  $\Gamma'$  que contém os vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  é dada por

$$\lambda a \beta' \gamma' + \lambda b \gamma' \alpha' + \lambda c \alpha' \beta' = 0. \quad (2.19)$$

Como  $\frac{|XA'|}{|XA|} = \frac{|XB'|}{|XB|} = \frac{|XC'|}{|XC|} = \lambda$ , então as distâncias reais de  $X$  em relação ao

$\Delta A'B'C'$  são  $u' = \lambda u$ ,  $v' = \lambda v$ ,  $w' = \lambda w$ . Conseqüentemente, as distâncias entre  $B'C'$  e  $BC$ ,  $C'A'$  e  $CA$ ,  $A'B'$  e  $AB$ , são  $(1 - \lambda)u$ ,  $(1 - \lambda)v$ ,  $(1 - \lambda)w$ , respectivamente. Desta forma  $\alpha' = \alpha - \epsilon u$ ,  $\beta' = \beta - \epsilon v$ ,  $\gamma' = \gamma - \epsilon w$ , sendo  $\epsilon = 1 - \lambda$ .

Na equação (2.19) podemos eliminar  $\lambda$  e substituir  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  de forma a obter

$$a(\beta - \epsilon v)(\gamma - \epsilon w) + b(\gamma - \epsilon w)(\alpha - \epsilon u) + c(\alpha - \epsilon u)(\beta - \epsilon v) = 0,$$

ou

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta - T_1\epsilon + T_2\epsilon^2 = 0, \quad (2.20)$$

onde  $T_1 = a(w\beta + v\gamma) + b(u\gamma + w\alpha) + c(v\alpha + u\beta)$  e  $T_2 = avw + bwu + cuv$ . De modo a transformar a equação (2.20) numa equação homogênea (equação que é satisfeita tanto por pontos em coordenadas trilineares exactas como por pontos em coordenadas trilineares homogêneas), seja  $\delta = (a\alpha + b\beta + c\gamma) / 2\sigma$ , igual a 1, multiplicando  $T_1$  por  $\delta$  e  $T_2$  por  $\delta^2$ . Depois de expandir os produtos e de agrupar os termos semelhantes obtemos uma equação da forma de (2.18) com

$$\begin{aligned} z &= 4\sigma^2, \\ l &= a\epsilon^2(avw + bwu + cuv) - 4\sigma\epsilon(bw + cv), \\ m &= b\epsilon^2(bwu + cuv + avw) - 4\sigma\epsilon(cv + au), \\ n &= c\epsilon^2(cuv + avw + bwu) - 4\sigma\epsilon(au + bw), \end{aligned}$$

onde  $\epsilon = 1 - r/R$ , sendo  $r$  e  $R$  os raios de  $\Gamma'$  e  $\Gamma$ , respectivamente, e  $\sigma$  a área do triângulo  $[ABC]$ .

### 2.4.1 Equação da circunferência que passa por três pontos

Sejam  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ ,  $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$  e  $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$  três pontos não colineares, então a equação da circunferência que contém estes três pontos é dada por

$$\begin{vmatrix} a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta & \alpha & \beta & \gamma \\ a\beta_1\gamma_1 + b\gamma_1\alpha_1 + c\alpha_1\beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a\beta_2\gamma_2 + b\gamma_2\alpha_2 + c\alpha_2\beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a\beta_3\gamma_3 + b\gamma_3\alpha_3 + c\alpha_3\beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Resolvendo este determinante obtemos

$$h_1\beta\gamma + h_2\gamma\alpha + h_3\alpha\beta + h_4\alpha + h_5\beta + h_6\gamma = 0,$$

onde  $h_1, \dots, h_6$  são constantes. Contudo esta não é uma equação homogénea, sendo por isso necessário transformá-la. Multiplicando  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pela constante  $k$  (veja (2.1)), a equação anterior toma a forma

$$2\sigma (h_1\beta\gamma + h_2\gamma\alpha + h_3\alpha\beta) + (h_4\alpha + h_5\beta + h_6\gamma) (a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} & ah_4\alpha^2 + bh_5\beta^2 + ch_6\gamma^2 + (2\sigma h_1 + bh_6 + ch_5) \beta\gamma \\ & + (2\sigma h_2 + ch_4 + ah_6) \gamma\alpha + (2\sigma h_3 + ah_5 + bh_4) \alpha\beta. \end{aligned}$$

Esta última equação é homogénea em  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , ver [10, p. 222].

## 2.4.2 Equação da circunferência dado o raio e o centro

Conhecido o raio e as coordenadas do centro de uma circunferência é possível escrever a sua equação. Supondo que  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  são as coordenadas trilineares exactas do centro e  $r$  o raio, a equação da circunferência de centro  $P$  e raio  $r$  é

$$\begin{aligned} & [r^2 \sin^2 A - (\beta_1^2 + \gamma_1^2 + 2\beta_1\gamma_1 \cos A)] \alpha^2 + \\ & [r^2 \sin^2 B - (\gamma_1^2 + \alpha_1^2 + 2\gamma_1\alpha_1 \cos B)] \beta^2 + \\ & [r^2 \sin^2 C - (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 \cos C)] \gamma^2 + \\ & 2 [r^2 \sin B \sin C + \beta_1\gamma_1 + \gamma_1\alpha_1 \cos C + \alpha_1\beta_1 \cos B - \alpha_1^2 \cos A] \beta\gamma + \\ & 2 [r^2 \sin C \sin A + \gamma_1\alpha_1 + \alpha_1\beta_1 \cos A + \beta_1\gamma_1 \cos C - \beta_1^2 \cos B] \gamma\alpha + \\ & 2 [r^2 \sin A \sin B + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\gamma_1 \cos B + \gamma_1\alpha_1 \cos A - \gamma_1^2 \cos C] \alpha\beta \\ = & 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Veja também [10, p. 223].

# Capítulo 3

## Centros do triângulo

Como foi referido a circunferência é uma curva plana que se define como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo, chamando-se este o centro da circunferência. Assim quando falamos do centro da circunferência falamos de um único ponto. Noutras figuras planas, como por exemplo o quadrado, a noção de centro surge naturalmente, pois neste caso podemos considerar que o centro é o ponto equidistante dos quatro lados.

Em contrapartida, desde os primórdios da Matemática é sabido que no triângulo é possível definir vários tipos de centros. Alguns como o incentro, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro eram já referidos pelos matemáticos da antiga Grécia. Outros pontos, como é o caso do centro de Fermat, foram descritos algumas centenas de anos mais tarde, no séc. XVII.

Recentemente foi formalizada a noção de centro do triângulo, permitindo que um grande número de pontos notáveis associados ao triângulo possam ser considerados como centros, sendo actualmente conhecidos mais de 3200 centros do triângulo (veja [10] e [11]).

As coordenadas trilineares dos centros são escritas através das medidas dos comprimentos dos lados, ou dos ângulos internos ou através de ambos. Em muitos casos recorre-se à *lei dos cosenos* para obter as respectivas coordenadas.

### 3.1 Funções do centro do Triângulo

Considere-se  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$  o anel das funções contínuas definidas de  $T$  em  $\mathbb{R}$ , relativamente às operações usuais de soma e multiplicação de funções, onde

$$T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < b + c, 0 < b < c + a, 0 < c < a + b\},$$

representa um triângulo qualquer no plano euclidiano e

$$a = d(B, C), \quad b = d(A, C), \quad c = d(A, B),$$

veja também [1, p. 30].

Consideremos agora o anel  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})^3$  e o conjunto

$$E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (g_1 \cdot g_2 \cdot g_3)(a, b, c) = 0\}.$$

Vamos introduzir a relação de congruência definindo que a tripla  $(f_1, f_2, f_3)$  é equipolente a  $(g_1, g_2, g_3)$  se se verifica as seguintes condições

- i)  $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall (a, b, c) \in T \quad f_i(a, b, c) = 0 \Rightarrow g_i(a, b, c) = 0,$
- ii)  $\forall (a, b, c) \in T \setminus E \quad \frac{f_1}{g_1}(a, b, c) = \frac{f_2}{g_2}(a, b, c) = \frac{f_3}{g_3}(a, b, c).$

**Definição 3.1.1 (Ponto)**

Um ponto  $P$  é uma classe de congruência não nula  $[(f_1, f_2, f_3)] \in \mathcal{C}(T, \mathbb{R})^3 / \simeq$  que denotamos por  $f_1 : f_2 : f_3$ .

**Definição 3.1.2 (Função do centro)**

Sejam  $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$  o anel das funções contínuas e  $U \subseteq T$ . Uma função do centro é uma função  $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  tal que satisfaz

- i)  $\forall (a, b, c) \in U \quad f(a, b, c) = f(a, c, b);$
- ii)  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall (a, b, c) \in U, \exists n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c).$

**Observação 1** A primeira condição da definição de função do centro, indica-nos que  $f$  é simétrica nas variáveis  $b$  e  $c$ , enquanto que a segunda diz-nos que a função é homogênea.

**Definição 3.1.3 (Centro)**

Um ponto  $f_1 : f_2 : f_3$  é um centro do triângulo, se existe uma função do centro  $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  tal que satisfaz

$$(f_1(a, b, c), f_2(a, b, c), f_3(a, b, c)) = (f(a, b, c), f(b, c, a), f(c, a, b)).$$

Para ajudar na compreensão destas definições recomenda-se a leitura de [9].

Pelas definições anteriores podemos afirmar que as coordenadas trilineares de um centro são cíclicas, isto é, a maneira como é obtida a primeira coordenada de um centro é repetida para as restantes coordenadas.

Tomemos como exemplo a construção do ortocentro<sup>1</sup>, primeiro construímos a altura em relação a um dos vértices e depois repetimos a mesma construção para os outros dois vértices. Fazemos então uma repetição cíclica da construção das alturas dos diferentes vértices.

Por outro lado também se verifica a propriedade bi-simétrica em  $b$  e  $c$ , condição *i*) da definição (3.1.2). Por exemplo quando é construída a mediatriz do lado  $\overline{BC}$ , o resultado é o mesmo se fizermos a construção da mediatriz do lado  $\overline{CB}$ .

Por último, a condição *ii*) é referente à homogeneidade, isto é, triângulos semelhantes têm os centros situados no mesmo sítio. Consideremos os triângulos semelhantes  $[ABC]$  e  $[DEF]$ , o que quer dizer que os comprimentos dos lados são proporcionais, isto é, existe  $t > 0$ , de modo a que os comprimentos dos lados de  $\Delta DEF$  são  $ta, tb, tc$ . Seja  $X$  um centro do  $\Delta ABC$  e  $f$  a sua função, então as coordenadas de  $X$  serão

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

esse mesmo centro do triângulo  $[DEF]$  será

$$f(ta, tb, tc) : f(tb, tc, ta) : f(tc, ta, tb),$$

que pela propriedade da homogeneidade é igual a  $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$ , isto é, a razão das distâncias de  $X$  aos lados dos dois triângulos é a mesma.

Contudo, nem todos os centros do triângulo satisfazem estas propriedades, como é o caso dos centros bi-centricos que não satisfazem a propriedade bi-simétrica. Os pontos mais comuns deste tipo são o primeiro e segundo ponto de Brocard em que as suas funções são homogêneas e cíclicas mas não bi-simétricas. Estes pontos têm como suas coordenadas trilineares

$$\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a},$$

e

$$\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b},$$

respectivamente.

Podemos então obter funções centro do triângulo  $f'(a, b, c)$  que não satisfazem explicitamente a bi-simetria, no entanto, nesses casos  $f'(a, b, c)$  pode ser transformada numa função equivalente  $f(a, b, c)$  que satisfaz a propriedade bi-simétrica

$$f(a, b, c) = [f'(a, b, c)]^2 f'(b, c, a) f'(c, a, b).$$

---

<sup>1</sup>Construção na p. 52.

### 3.1.1 Propriedades

Existem casos particulares de alguns triângulos em que os centros notáveis tomam posições muito específicas.

- No caso do triângulo de referência ser *equilátero* temos que  $a = b = c$ , de forma que

$$f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b),$$

o que quer dizer que todos os centros serão coincidentes e da forma

$$f(a, b, c) : f(a, b, c) : f(a, b, c) = 1 : 1 : 1,$$

serão estas também as coordenadas trilineares do incentro de qualquer triângulo (p. 45).

- Quando o triângulo é *isósceles* com  $a = b$ , as coordenadas trilineares do centro do triângulo são

$$f(a, a, c) : f(a, c, a) : f(c, a, a),$$

tendo em conta que a função  $f$  é bi-simétrica, temos que as coordenadas do centro podem ser reescritas da seguinte maneira

$$f(a, a, c) : f(a, a, c) : f(c, a, a),$$

o que quer dizer que neste caso todos os centros do triângulo são equidistantes dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , isto é, estão sobre a bissetriz do ângulo  $C$ . Para os casos em que  $a = c$  e  $b = c$ , os centros encontrar-se-ão na bissetriz de  $B$  e  $A$ , respectivamente.

## 3.2 Alguns centros notáveis

Nesta secção são referidas as principais propriedades de alguns dos centros mais conhecidos do triângulo, sendo para eles utilizada a notação  $X_i$ , onde  $i$  representa o número que o respectivo centro ocupa na lista elaborada por C. Kimberling<sup>2</sup> em [10] e [11].

---

<sup>2</sup>Professor de Matemática, na Universidade de Evansville.

### 3.2.1 Incentro

O incentro, que habitualmente é representado pela letra  $I^3$ , é o centro da circunferência inscrita<sup>4</sup> de um determinado triângulo. O incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo. Sendo a bissetriz de um triângulo a semi-recta que parte do vértice de um ângulo e o divide ao meio.

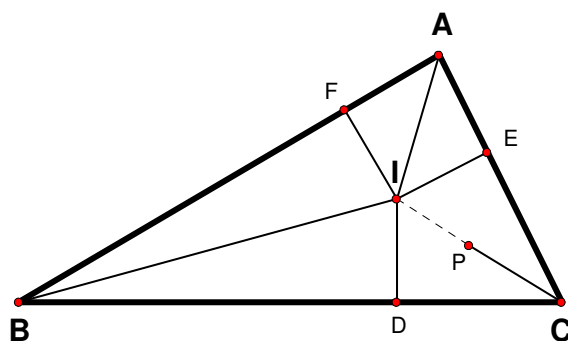


Figura 3.1:

**Proposição 16** *As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo são concorrentes.*

**Demonstração** A demonstração será realizada utilizando as ideias expostas em [8, p. 85].

Vamos provar que  $CP$  passa pelo ponto de intersecção de  $AI$  e  $BI$ , Fig. 3.1, em que  $AI$ ,  $BI$  e  $CP$  são as bissetrizes dos ângulos do  $\triangle ABC$ . Começemos por traçar os segmentos perpendiculares aos lados do  $\triangle ABC$  e que passem por  $I$ , isto é, os segmentos  $\overline{ID}$ ,  $\overline{IE}$  e  $\overline{IF}$ .

Sabemos que  $|ID| = |IF|$  e que  $|IF| = |IE|$ , pois qualquer ponto da bissetriz de um ângulo está equidistante dos lados que formam o ângulo, o que quer dizer que  $|IE| = |ID|$ . Assim o ponto  $I$  pertence à bissetriz do ângulo  $C$ , ou seja,  $CP$  passa pelo ponto  $I$ . ■

Pela proposição anterior podemos concluir que as três bissetrizes dos ângulos internos do  $\triangle ABC$  concorrem no ponto  $I$ .

<sup>3</sup>O incentro é  $X_1$  em [11].

<sup>4</sup>Circunferência que se encontra no interior do triângulo e é tangente aos três lados.

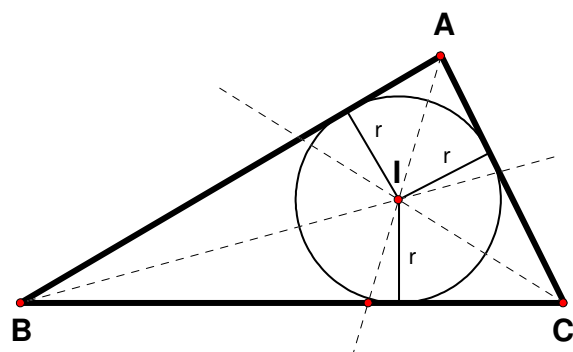


Figura ~3.2:

O incentro é um ponto equidistante dos três lados do triângulo, assim é o centro da circunferência inscrita, desta forma o incentro encontra-se à distância  $r$  dos lados do  $\Delta ABC$ , podemos também afirmar que o ponto  $I$  encontra-se sempre no interior do triângulo.

Como as coordenadas trilineares de um ponto são as distâncias desse ponto aos lados do triângulo, no caso do incentro as suas coordenadas serão

$$r : r : r.$$

No entanto podemos simplificar as coordenadas multiplicando por  $k = \frac{1}{r}$  visto que as coordenadas trilineares respeitam a homogeneidade, obtemos então

$$1 : 1 : 1.$$

A função do centro do triângulo do incentro é dada por

$$f(a, b, c) = 1.$$

### 3.2.2 Baricentro

O baricentro é também representado pela letra  $G^5$  e divide o  $\Delta ABC$  nos triângulos  $[ABG]$ ,  $[AGC]$  e  $[BCG]$ , que têm a mesma área. O ponto  $G$  é o centro de gravidade do  $\Delta ABC$  e é obtido através da intersecção das medianas do triângulo  $[ABC]$  (veja Fig. 3.3). A mediana de um triângulo é a recta que une o ponto médio de um lado do triângulo ao vértice oposto. Pela definição de mediana podemos concluir que este ponto, tal como o incentro, encontra-se sempre no interior do triângulo.

---

<sup>5</sup>O baricentro é  $X_2$  em [11].

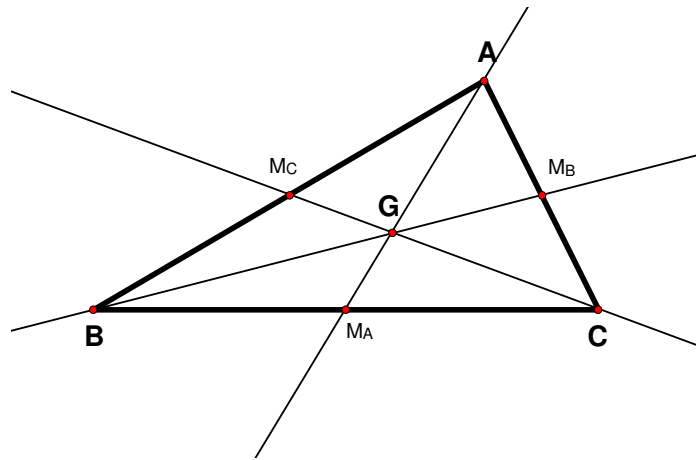


Figura 3.3: Baricentro (G), ponto de intersecção das medianas.

**Proposição 17** *As medianas de um triângulo concorrem num ponto cuja distância a qualquer um dos vértices é  $\frac{2}{3}$  do comprimento da respectiva mediana.*

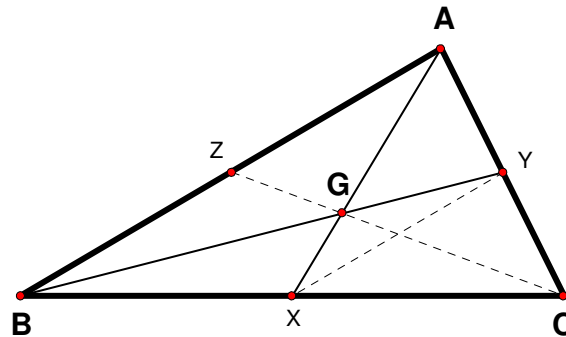


Figura 3.4:

**Demonstração** Demonstração retirada de [1, p. 87]. Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pontos médios dos lados do  $\triangle ABC$  e  $G$  o ponto de intersecção de  $BY$  com  $AX$ . Temos que os triângulos  $[ABG]$  e  $[YGX]$  são semelhantes com razão de semelhança 2, porque  $|XY| = \frac{1}{2}|AB|$ . Daqui resulta que

$$|GY| = \frac{1}{2}|GB|, \quad |GX| = \frac{1}{2}|GA|.$$

Se denotarmos por  $H$  a intersecção de  $CZ$  com  $AX$ , obtemos analogamente que

$$|HZ| = \frac{1}{2}|HC|, \quad |HX| = \frac{1}{2}|HA|$$

Vemos assim que tanto  $G$  como  $H$  dividem o segmento  $\overline{AX}$  na mesma proporção, significando então que  $G = H$ . Podemos então afirmar que as três medianas do  $\Delta ABC$  são concorrentes e que

$$\begin{aligned} |AG| &= \frac{2}{3}|AX|, \\ |BG| &= \frac{2}{3}|BY|, \\ |CG| &= \frac{2}{3}|CZ|, \end{aligned}$$

isto é, a distância de cada vértice ao baricentro é igual a  $\frac{2}{3}$  do comprimento da respectiva mediana. ■

Para determinar as distâncias de  $G$  aos lados do triângulo, ou seja, para determinar as suas coordenadas trilineares vamos recorrer à área de  $\Delta ABC$ . A área do  $\Delta ABC$  pode ser obtida através de

$$\sigma = \frac{bc}{2} \sin A = \frac{ca}{2} \sin B = \frac{ab}{2} \sin C,$$

As áreas dos triângulos  $[BGC]$ ,  $[AGC]$  e  $[AGB]$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \sigma_{BGC} &= \frac{a \cdot h_1}{2}, \\ \sigma_{AGC} &= \frac{b \cdot h_2}{2}, \\ \sigma_{AGB} &= \frac{c \cdot h_3}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado também sabemos que a área de qualquer de um destes três triângulos é a terça parte da área do triângulo inicial (veja [1, p. 93]). Desta forma podemos relacionar as áreas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{bc}{6} \sin A &= \frac{a \cdot h_1}{2}, \\ \frac{bc}{6} \sin A &= \frac{b \cdot h_2}{2}, \\ \frac{bc}{6} \sin A &= \frac{c \cdot h_3}{2}, \end{aligned}$$

resolvendo em ordem às alturas obtemos

$$\begin{aligned}\frac{bc}{3a} \sin A &= h_1, \\ \frac{bc}{3b} \sin A &= h_2, \\ \frac{bc}{3c} \sin A &= h_3.\end{aligned}$$

Assim as coordenadas trilineares de  $G$  são

$$\frac{bc}{3a} \sin A : \frac{bc}{3b} \sin A : \frac{bc}{3c} \sin A.$$

Estas coordenadas podem ser simplificadas multiplicando por  $k = \frac{3}{bc \sin A}$  de forma a obter um resultado mais simples

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

A função do centro do triângulo do baricentro é dada por

$$f(a, b, c) = \frac{1}{a}.$$

### 3.2.3 Circuncentro

O ponto do triângulo que representa o centro da circunferência circunscrita ao  $\Delta ABC$  é chamado de circuncentro e representa-se normalmente pela letra  $O^6$ . O ponto  $O$  é a intersecção das mediatrizes do triângulo.

A mediatriz de um triângulo é a recta perpendicular a um lado do triângulo e que passa pelo ponto médio desse lado. Este ponto, ao contrário do  $I$  e do  $G$ , pode encontrar-se ou não no interior do triângulo.

**Proposição 18** *As mediatrizes de um triângulo concorrem num ponto.*

**Demonstração** Começemos por traçar as mediatrizes de cada um dos lados do  $\Delta ABC$ , como ilustra a Fig. 3.5. Qualquer ponto sobre a mediatriz do lado  $\overline{BC}$  encontra-se a igual distância de  $B$  e de  $C$ . O mesmo se verifica para a mediatriz de  $\overline{AB}$ . Seja o ponto  $O$  o ponto de intersecção destas duas mediatrizes, podemos afirmar que

$$|OB| = |OC| \quad \text{e} \quad |OA| = |OB|,$$

---

<sup>6</sup>O circuncentro é  $X_3$  em [11].

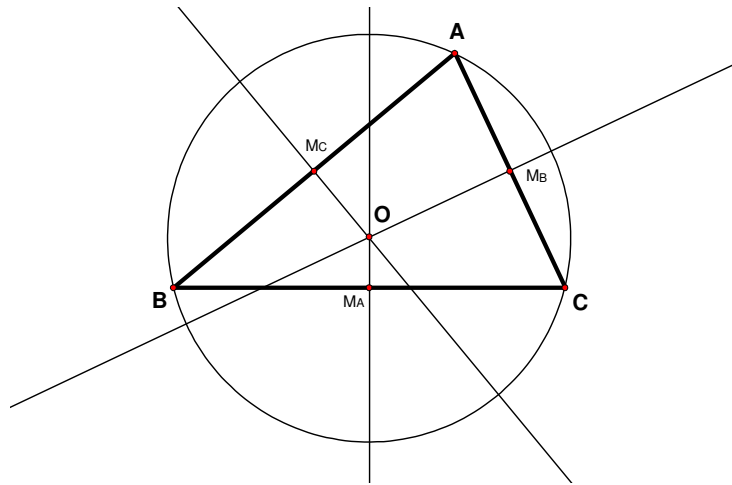


Figura 3.5: Circuncentro ( $O$ ), ponto de intersecção das mediatrizes.

assim

$$|OA| = |OC|,$$

o que quer dizer que o ponto  $O$  é equidistante de  $A$  e de  $C$ , ou seja, a mediatriz de  $\overline{AC}$  passa pelo ponto  $O$ . Desta forma concluímos que as três mediatrizes intersectam-se num ponto. ■

Para determinar as coordenadas trilineares de  $O$  vamos recorrer a relações entre vários ângulos. Por definição,  $O$  é o ponto que se encontra à mesma distância dos vértices do  $\Delta ABC$ . Podemos dividir o  $\Delta ABC$  em três triângulos isósceles,  $\Delta AOC$ ,  $\Delta BOC$  e  $\Delta AOB$ . Como os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais (veja a Fig. 3.6), podemos escrever o sistema de equações

$$\begin{aligned}\gamma + \beta &= A, \\ \alpha + \gamma &= B, \\ \alpha + \beta &= C.\end{aligned}$$

Assim pode-se obter que

$$\begin{aligned}2\alpha &= (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) \\ &= C + B - A,\end{aligned}$$

determinando o valor de  $\alpha$ , vem

$$\alpha = \frac{1}{2}(C + B - A)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (C + B + A - 2A) \\
&= \frac{1}{2} (\pi - 2A) \\
&= \frac{\pi}{2} - A.
\end{aligned}$$

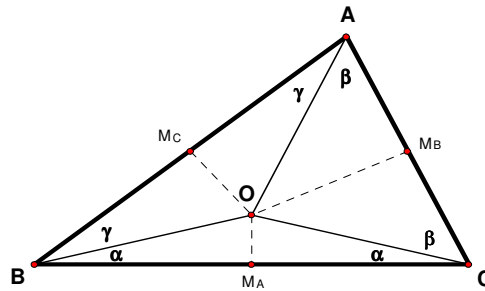


Figura 3.6:

Podemos então obter a distância do  $O$  ao lado  $\overline{BC}$ , isto é, de  $O$  a  $M_A$

$$\begin{aligned}
d(O, M_A) &= R \sin \left( \frac{\pi}{2} - A \right) \\
&= R \cos A.
\end{aligned}$$

De forma análoga poderemos obter as distâncias de  $O$  ao lado  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , que são  $R \cos B$  e  $R \cos C$ , respectivamente. As coordenadas trilineares de  $O$  são

$$R \cos A : R \cos B : R \cos C,$$

que podem ser simplificadas multiplicando por  $k = \frac{1}{R}$

$$\cos A : \cos B : \cos C.$$

Utilizando a *lei dos cosenos* pode ser obtida uma expressão das coordenadas trilineares do circuncentro a depender unicamente dos comprimentos lados do triângulo, que após a sua simplificação resulta em

$$a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2).$$

A função do centro do triângulo do circuncentro é dada por

$$f(a, b, c) = \cos A,$$

ou

$$f(a, b, c) = a(b^2 + c^2 - a^2),$$

no caso das coordenadas em função dos comprimentos dos lados.

No caso do triângulo  $[ABC]$  ser rectângulo, o circuncentro ficará situado sobre a hipotenusa, sendo esta o diâmetro da circunferência circunscrita.

### 3.2.4 Ortocentro

O ortocentro é também o ponto de intersecção de rectas, é obtido pela intersecção das três alturas de um triângulo e representa-se habitualmente pela letra  $H^7$ .

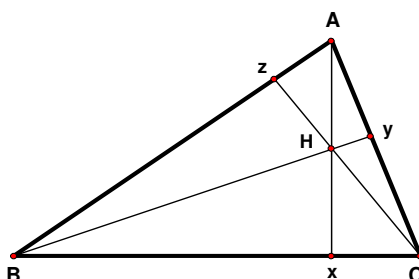


Figura 3.7: Ortocentro (H), ponto de intersecção das alturas do triângulo.

**Proposição 19** *As alturas de um triângulo ou os seus prolongamentos são concorrentes num ponto.*

**Demonstração** Consideremos o triângulo  $[ABC]$  e os triângulos  $[ACD]$ ,  $[BFC]$  e  $[EBA]$  semelhantes ao triângulo inicial  $[ABC]$ , de modo a construirmos a figura seguinte.

Facilmente se verifica que os pontos  $E$ ,  $A$  e  $D$  são colineares, assim como os pontos  $F$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ ,  $B$ ,  $F$ . Desta forma o polígono  $[EDF]$  é um triângulo semelhante ao triângulo  $[ABC]$  e este último é o triângulo medial<sup>8</sup> do triângulo  $[DEF]$ .

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os pontos médios do triângulo  $[DEF]$ , logo as alturas do  $\Delta ABC$  são as mediatrizes do  $\Delta DEF$ . Como as mediatrizes intersectam-se num único ponto (ver proposição 18), as alturas também concorrem num ponto. ■

<sup>7</sup>O ortocentro é  $X_4$  em [11].

<sup>8</sup>Ver 3.4.

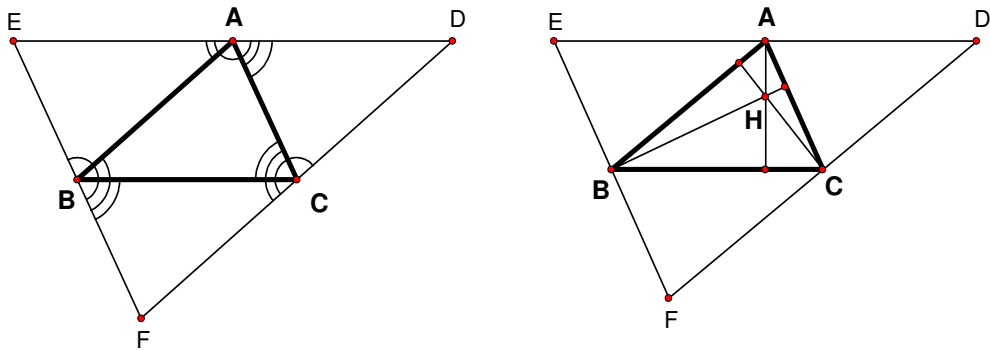


Figura 3.8:

O  $H$ , tal como o  $O$ , é um ponto que pode ou não situar-se no interior do triângulo. No caso de considerarmos um triângulo obtusângulo, um dos pés das alturas irá situar-se no exterior do triângulo. Assim, obrigatoriamente a intersecção das alturas será um ponto exterior ao triângulo.

Para a obtenção das coordenadas trilineares de  $H$  vamos considerar, sem perda de generalidade, que  $H$  se encontra no interior do  $\triangle ABC$ . Vamos também considerar que os pés das alturas nos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  são  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Assim, podemos escrever

$$\angle YBC = \frac{\pi}{2} - C,$$

o que quer dizer que no  $\triangle BHX$

$$\angle BHX = \frac{\pi}{2} - \angle YBC = C,$$

logo  $\angle AHY = C$ , por serem ângulos verticalmente opostos.

Analogamente, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \angle CHY &= \angle BHZ = A, \\ \angle AHZ &= \angle CHX = B. \end{aligned}$$

A distância de  $H$  ao lado  $\overline{BC}$ , isto é  $|HX|$ , pode ser dada por

$$|HX| = \frac{BX}{\tan C}.$$

Considerando o  $\triangle ABX$ , podemos escrever o lado  $\overline{BX}$  em função do lado  $\overline{AB}$  e do ângulo  $B$

$$|BX| = c \cos B,$$

assim

$$|HX| = \frac{c \cos B}{\tan C}.$$

Da mesma forma poderemos obter  $|HY|$  e  $|HZ|$

$$\begin{aligned} |HY| &= \frac{a \cos C}{\tan A}, \\ |HZ| &= \frac{b \cos A}{\tan B}. \end{aligned}$$

Encontramos desta forma as coordenadas de  $H$  em função dos lados e dos ângulos do  $\Delta ABC$

$$\frac{c \cos B}{\tan C} : \frac{a \cos C}{\tan A} : \frac{b \cos A}{\tan B} = \frac{c \cos B \cos C}{\sin C} : \frac{a \cos C \cos A}{\sin A} : \frac{b \cos A \cos B}{\sin B}.$$

No entanto podemos simplificar estas expressões recorrendo à *lei dos senos*

$$\frac{a \cos B \cos C}{\sin A} : \frac{a \cos C \cos A}{\sin A} : \frac{a \cos A \cos B}{\sin A},$$

e multiplicando as coordenadas de  $H$  pela constante  $k = \frac{\sin A}{a \cos A \cos B \cos C}$ , obtemos finalmente que

$$\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} = \sec A : \sec B : \sec C.$$

Contudo, recorrendo à *lei dos cosenos* podemos obter as coordenadas trilineares de  $H$  em função dos comprimentos dos lados do  $\Delta ABC$

$$\frac{1}{a(b^2 + c^2 - a^2)} : \frac{1}{b(a^2 + c^2 - b^2)} : \frac{1}{c(a^2 + b^2 - c^2)},$$

ou

$$bc(a^4 - (b^2 - c^2)^2) : ac(b^4 - (c^2 - a^2)^2) : ab(c^4 - (a^2 - b^2)^2).$$

### 3.2.5 Centro da circunferência dos nove pontos

A circunferência dos nove pontos é uma circunferência que, como o nome indica, contém nove pontos notáveis. Contém os pontos médios dos lados do  $\Delta ABC$ , que na figura seguinte estão representados pelas letras  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Contém também os pés das alturas, pontos estes que correspondem às letras  $G$ ,  $I$  e  $J$ . Os outros três pontos são os pontos médios dos segmentos formados pelo ortocentro e os vértices do triângulo, que no exemplo estão representados pelas letras  $K$ ,  $L$  e  $M$ . O centro da circunferência dos nove pontos é geralmente representado pela letra  $N$ <sup>9</sup>.

O ponto  $N$  é um ponto que também pertence à recta de Euler<sup>10</sup>, assim

<sup>9</sup>O centro da circunferência dos nove pontos é  $X_5$  em [11].

<sup>10</sup>Recta famosa que contém vários pontos notáveis. Veja as secções 4.1.1 e 5.3.1.

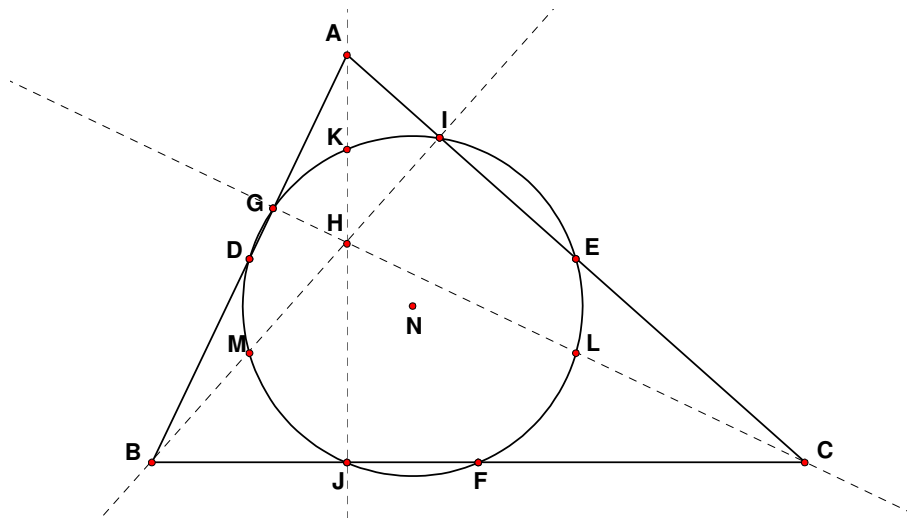
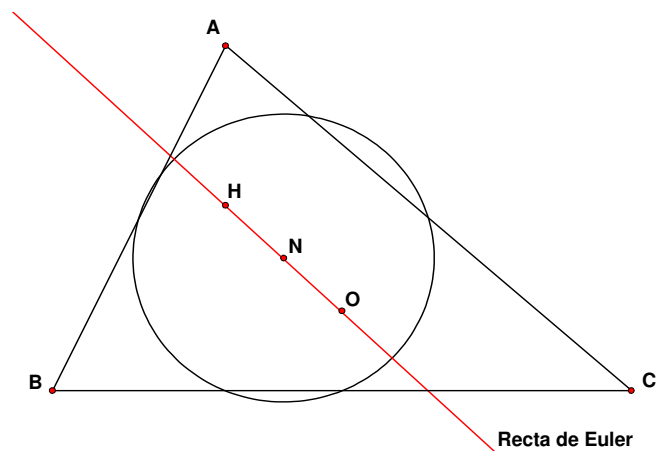


Figura 3.9:  $N$ , centro da circunferência dos nove pontos.

como o circuncentro ( $O$ ) e o ortocentro ( $H$ ), coincidindo com o ponto médio destes dois pontos (veja [5]).



Assim, para obter as coordenadas trilineares de  $N$  podemos recorrer às coordenadas de  $O$  (circuncentro) e de  $H$  (ortocentro). Recordemos as coordenadas trilineares de  $O$  e de  $H$

$$O = a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2),$$

$$H = bc(a^4 - (b^2 - c^2)^2) : ac(b^4 - (c^2 - a^2)^2) : ab(c^4 - (a^2 - b^2)^2).$$

Seja  $\alpha_m : \beta_m : \gamma_m$  o ponto médio definido por  $O$  e  $H$ . Através de (2.11)

podemos escrever  $\alpha_m$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= 2a^2 (b^2 + c^2 - a^2) bc (a^4 - (b^2 - c^2)^2) + \\
&\quad b \left[ a (b^2 + c^2 - a^2) ac (b^4 - (c^2 - a^2)^2) + \right. \\
&\quad \left. b (a^2 + c^2 - b^2) bc (a^4 - (b^2 - c^2)^2) \right] + \\
&\quad c \left[ a (b^2 + c^2 - a^2) ab (c^4 - (a^2 - b^2)^2) + \right. \\
&\quad \left. c (a^2 + b^2 - c^2) bc (a^4 - (b^2 - c^2)^2) \right] \\
&= 2a^2 bc (b^2 + c^2 - a^2) (a^4 - (b^2 - c^2)^2) + \\
&\quad bc \left[ a^2 (b^2 + c^2 - a^2) (b^4 - (c^2 - a^2)^2) + \right. \\
&\quad \left. b^2 (a^2 + c^2 - b^2) (a^4 - (b^2 - c^2)^2) \right] + \\
&\quad bc \left[ a^2 (b^2 + c^2 - a^2) (c^4 - (a^2 - b^2)^2) + \right. \\
&\quad \left. c^2 (a^2 + b^2 - c^2) (a^4 - (b^2 - c^2)^2) \right] \\
&= bc \left[ (b^2 + c^2 - a^2) \left( 2a^2 (a^4 - (b^2 - c^2)^2) + a^2 (b^4 - (c^2 - a^2)^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. a^2 (c^4 - (a^2 - b^2)^2) \right) + \right. \\
&\quad \left. (a^4 - (b^2 - c^2)^2) [b^2 (a^2 + c^2 - b^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2)] \right].
\end{aligned}$$

Simplificando, vem que

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= bc \left[ 2a^2 (b^2 + c^2 - a^2) \left[ a^2 b^2 + a^2 c^2 - (b^2 - c^2)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. (a^4 - (b^2 - c^2)^2) \left[ a^2 b^2 + a^2 c^2 - (b^2 - c^2)^2 \right] \right] \\
&= bc \left( a^2 b^2 + a^2 c^2 - (b^2 - c^2)^2 \right) (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4).
\end{aligned}$$

Analogamente é possível obter as expressões de  $\beta_m$  e  $\gamma_m$

$$\begin{aligned}
\beta_m &= ac \left( b^2 c^2 + b^2 a^2 - (c^2 - a^2)^2 \right) (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4), \\
\gamma_m &= ab \left( c^2 a^2 + c^2 b^2 - (a^2 - b^2)^2 \right) (2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4).
\end{aligned}$$

Devido à homogeneidade das coordenadas trilineares, podemos multiplicar o termo pela constante  $\frac{1}{2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$ , obtendo desta

forma

$$\begin{aligned}\alpha_m &= bc \left( a^2 b^2 + a^2 c^2 - (b^2 - c^2)^2 \right), \\ \beta_m &= ac \left( b^2 c^2 + b^2 a^2 - (c^2 - a^2)^2 \right), \\ \gamma_m &= ab \left( c^2 a^2 + c^2 b^2 - (a^2 - b^2)^2 \right).\end{aligned}$$

Sendo estas as coordenadas trilineares de  $N$ , centro da circunferência dos nove pontos, em função dos comprimentos dos lados do  $\Delta ABC$ . Estas coordenadas também podem ser escritas em função dos ângulos do  $\Delta ABC$ , e nesse caso serão

$$\cos A + 2 \cos B \cos C : \cos B + 2 \cos C \cos A : \cos C + 2 \cos A \cos B,$$

coordenadas estas que podem ser obtidas recorrendo à *lei dos cosenos* (1.2.2).

### 3.2.6 Ponto de Gergonne

Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do  $\Delta ABC$ , respectivamente. As cevianas<sup>11</sup>  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem num ponto a que se dá o nome de ponto de Gergonne<sup>12</sup> (veja [10]).

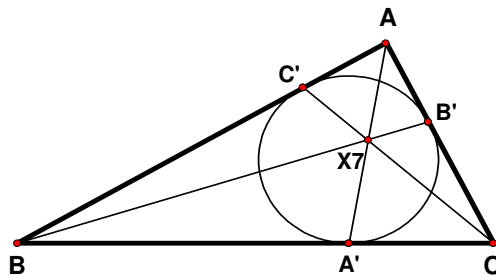


Figura 3.10:

Para obter as coordenadas trilineares do ponto de Gergonne iremos começar por determinar os pontos de intersecção da circunferência inscrita com os lados do triângulo. Neste caso iremos necessitar das

<sup>11</sup>Ceviana é o segmento de recta que une um vértice do triângulo ao lado oposto correspondente ou ao seu prolongamento.

<sup>12</sup>O ponto de Gergonne é  $X_7$  em [11].

equações das rectas que contêm os lados do triângulo e da equação da circunferência inscrita. As primeiras equações foram referidas na p. 31, enquanto a última, a equação da circunferência inscrita será estudada mais adiante, na secção 4.2.1. Utilizando a equação da recta definida pelo lado  $\overline{BC}$  que é dada por  $\alpha = 0$  e substituindo na equação da circunferência inscrita (4.2) obtemos

$$\left( \cos^2 \left( \frac{B}{2} \right) \beta - \cos^2 \left( \frac{C}{2} \right) \gamma \right)^2 = 0,$$

É possível então escrever uma das coordenadas em função da outra, como por exemplo

$$\gamma = \frac{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)} \beta,$$

desta forma podemos obter uma expressão das coordenadas trilineares do ponto  $A'$

$$0 : 1 : \frac{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)}.$$

De forma análoga podem ser obtidas expressões para as coordenadas trilineares dos pontos  $B'$  e  $C'$

$$1 : 0 : \frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)},$$

e

$$1 : \frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)} : 0,$$

respectivamente. Logo as equações das rectas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$ , são

$$\gamma = \frac{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)} \beta \quad ; \quad \gamma = \frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)} \alpha \quad ; \quad \beta = \frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)} \alpha,$$

respectivamente. Por (2.14) as rectas são concorrentes e o ponto de intersecção é

$$-1 : -\frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{B}{2} \right)} : -\frac{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{C}{2} \right)},$$

tomando  $k = -\frac{1}{\cos^2 \left( \frac{A}{2} \right)}$ , temos

$$\sec^2 \left( \frac{A}{2} \right) : \sec^2 \left( \frac{B}{2} \right) : \sec^2 \left( \frac{C}{2} \right),$$

obtendo desta forma as coordenadas trilineares do ponto de Gergonne.

### 3.2.7 Ponto de Nagel

Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pontos de tangência das circunferências ex-inscritas com os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do  $\Delta ABC$ , respectivamente. Entenda-se por circunferência ex-inscrita, a circunferência exterior ao triângulo que é tangente a um dos lados e ao prolongamento dos outros dois, um triângulo tem portanto três circunferências ex-inscritas (ver Fig. 4.5).

As rectas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem num ponto a que se dá o nome de ponto de Nagel<sup>13</sup> (veja [10]).

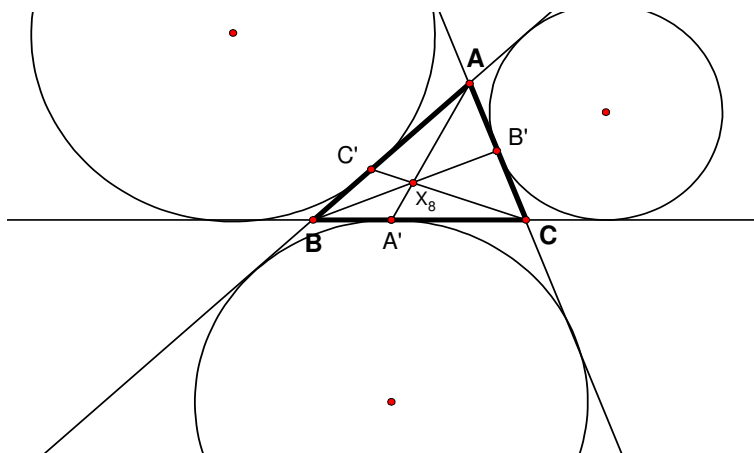


Figura 3.11:

As coordenadas do ponto  $A'$ , podem ser obtidas através do sistema de equações da recta  $BC$  e da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice  $A$ . Para os cálculos seguintes foram utilizadas as equações trilineares das circunferências ex-inscritas que serão construídas em 4.2.3. Resolvendo o sistema obtemos

$$\left( \sin^2 \left( \frac{B}{2} \right) \beta - \sin^2 \left( \frac{C}{2} \right) \gamma \right)^2 = 0,$$

ou seja

$$\gamma = \frac{\sin^2 \left( \frac{B}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{C}{2} \right)} \beta.$$

As coordenadas trilineares de  $A'$  serão

$$0 : 1 : \frac{\sin^2 \left( \frac{B}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{C}{2} \right)}.$$

<sup>13</sup>Em homenagem ao Matemático alemão Christian Heinrich von Nagel (1803-1882). O ponto de Nagel é  $X_8$  em [11].

Seguindo o mesmo raciocínio para os outros dois pontos, obtemos as coordenadas

$$1 : 0 : \frac{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)}, \quad \text{e} \quad 1 : \frac{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)} : 0,$$

para  $B'$  e  $C'$ , respectivamente. Da mesma forma que determinámos  $X_7$ , podemos fazê-lo para  $X_8$ , obtendo as coordenadas

$$-1 : -\frac{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)} : -\frac{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)},$$

ou

$$\csc^2\left(\frac{A}{2}\right) : \csc^2\left(\frac{B}{2}\right) : \csc^2\left(\frac{C}{2}\right).$$

### 3.2.8 Ponto de Feuerbach

Segundo o teorema de Feuerbach<sup>14</sup>, a circunferência inscrita é tangente à circunferência dos nove pontos, o que significa que estas duas circunferências se intersectam num único ponto denominado de ponto de Feuerbach<sup>15</sup>. As coordenadas trilineares deste ponto são

$$1 - \cos(B - C) : 1 - \cos(C - A) : 1 - \cos(A - B).$$

De facto, substituindo estas coordenadas nas equações (4.2) e (4.6), equações das circunferências inscrita e dos nove pontos obtidas na secção 4.2, verificamos que este ponto pertence a ambas as circunferências e pelo teorema referido anteriormente concluímos que o ponto é único. Ao verificar se o ponto de Feuerbach pertence às equações da circunferência inscrita e circunferência dos nove pontos, as expressões obtidas são extensas. Assim de modo a evitar erros nos cálculos intermédios, as simplificações foram efectuadas utilizando o software *Mathematica*.

## 3.3 Triângulo órtico

Num triângulo acutângulo  $\triangle ABC$  (Fig. 3.12) os pés das alturas  $D$ ,  $E$ ,  $F$  formam o triângulo  $[DEF]$ , ao qual se dá o nome de *triângulo órtico*.

**Teorema 3.3.1** *O ortocentro de um triângulo acutângulo é o incentro do seu triângulo órtico.*

<sup>14</sup>Consulte o teorema 4.2.2 na p. 76.

<sup>15</sup>O ponto de Feuerbach é  $X_{11}$  em [11].

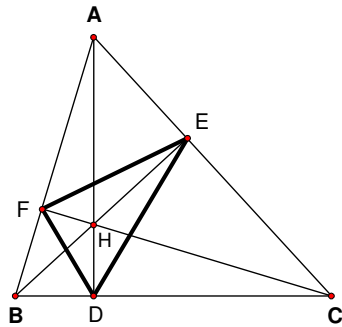


Figura ~3.12:

**Demonstração** Consideremos o triângulo  $[ABC]$ , a circunferência circunscrita a esse triângulo e o triângulo  $[BCG]$  onde o lado  $\overline{CG}$  coincide com o diâmetro da circunferência circunscrita, como mostra a Fig. 3.13.

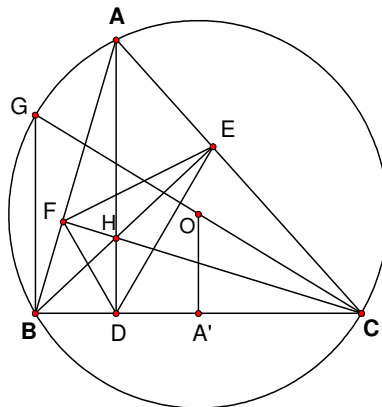


Figura ~3.13:

Os ângulos  $\angle BAC$  e  $\angle BGC$  são iguais<sup>16</sup>. Por outro lado os triângulos  $\triangle BCG$  e  $\triangle A'CO$  são semelhantes, considerando  $BG$  paralela a  $OA'$ , logo  $\angle A'OC$  tem a mesma amplitude que  $A$ . Tendo em conta que o  $\triangle BCO$  é isósceles podemos concluir que  $\angle A'BO = \angle A'CO = \alpha = 90^\circ - A$ . Sendo  $\triangle AFC$  um triângulo rectângulo podemos também afirmar que  $\angle FCA = \alpha$ .

<sup>16</sup> Ângulos inscritos com o mesmo arco.

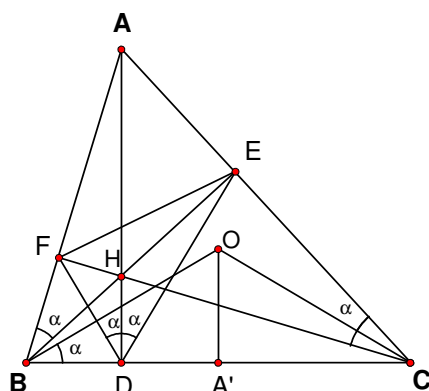


Figura 3.14:

O quadrilátero  $[BDHF]$  pode ser inscrito numa circunferência pois os ângulos  $\angle BDH$  e  $\angle BFH$  são rectos, de forma análoga podemos dizer o mesmo para os quadriláteros  $[DCEH]$  e  $[BCEF]$ . Assim podemos afirmar que

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH = \alpha.$$

A recta  $HD$  é a bissetriz do ângulo  $\angle FDE$ , da mesma forma que  $EH$  e  $FH$  são as bissetrizes de  $\angle DEF$  e  $\angle DFE$ , respectivamente. Podemos desta forma afirmar que as alturas do  $\Delta ABC$  são as bissetrizes do seu triângulo órtico, logo o ortocentro do  $\Delta ABC$  é o incentro do  $\Delta DEF$  (veja também [5, p. 17]). ■

### 3.4 Triângulo medial

O triângulo formado pelos pontos médios dos lados do  $\Delta ABC$  é chamado de *triângulo medial*.

**Teorema 3.4.1** *O circuncentro de um triângulo é o ortocentro do seu triângulo medial.*

**Demonstração** Sejam os triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$ , onde o segundo é o triângulo medial. Assim os vértices do triângulo medial são os pontos médios dos lados do triângulo que lhe deu origem. Os

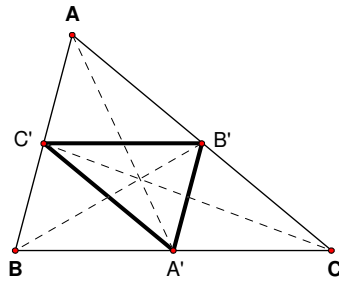


Figura 3.15: Triângulo medial.

triângulos  $[ABC]$  e  $[A'B'C']$  são semelhantes, o que nos permite afirmar que o lado  $\overline{BC}$  é paralelo ao lado  $\overline{B'C'}$ . Analogamente podemos afirmar que os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  também o são, assim como os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{A'C'}$ . As mediatrizes do  $\Delta ABC$  coincidem com as alturas do  $\Delta A'B'C'$ , podemos desta forma concluir que o circuncentro do  $\Delta ABC$  é o ortocentro do triângulo medial  $[A'B'C']$ . ■

# Capítulo 4

## Rectas e circunferências

### 4.1 Rectas

#### 4.1.1 Recta de Euler

No século XVIII viveu um dos matemáticos mais produtivos de sempre, Leonhard Euler (1707-1783). Matemático de nacionalidade Suíça, nasceu em Basileia, em cuja universidade se formou. Produziu trabalhos nas mais diversas áreas, da Engenharia à Mecânica, da Óptica à Astronomia, da Música à Matemática, Geometria, Álgebra.

No campo da geometria, Euler descobriu que o ortocentro, o circuncentro e o baricentro de um triângulo são colineares, sendo mais tarde atribuído o nome de *recta de Euler* à recta que une estes três pontos, em homenagem a este grande matemático Suíço.

**Teorema 4.1.1** *Em qualquer triângulo não equilátero  $[ABC]$  o ortocentro ( $H$ ), o circuncentro ( $O$ ) e o baricentro ( $G$ ) são três pontos colineares alinhados por esta ordem; e tem-se  $H, G$  e  $O$  com  $|GH| = 2|GO|$ .*

**Demonstração** A demonstração do teorema que de seguida se reproduz pode ser encontrada em [7, p. 152].

Designemos por  $A_0, B_0$  e  $C_0$  os pés das alturas e por  $A_1, B_1$  e  $C_1$  os pontos médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Suponhamos, sem perda de generalidade que o lado  $|AC|$  é diferente de  $|BC|$ , já que  $\Delta ABC$  não é equilátero. Então podemos afirmar que  $C_0 \neq C_1$ . O circuncentro ( $O$ ) e o baricentro ( $G$ ) do  $\Delta ABC$  coincidem respectivamente com o ortocentro ( $H_1$ ) e o baricentro ( $G_1$ ) do triângulo medial  $[A_1B_1C_1]$ , como podemos observar pelos ângulos na Fig. 4.1.

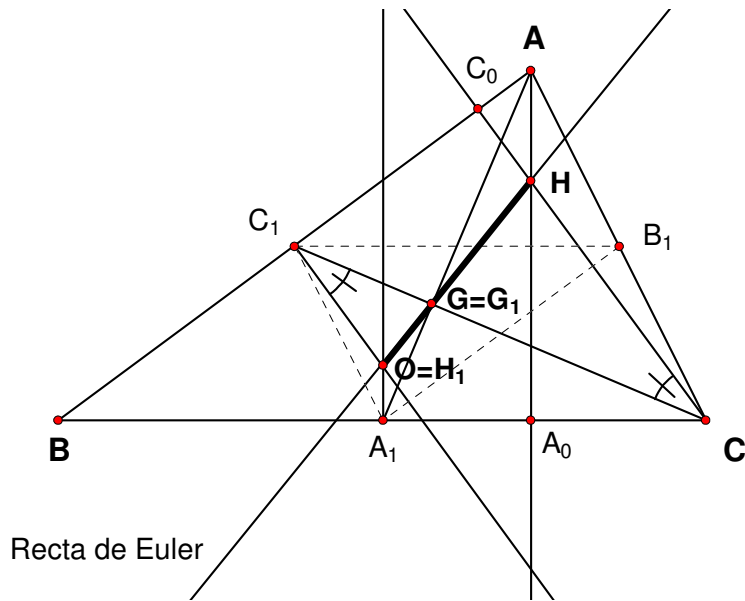


Figura ~ 4.1:

O triângulo  $[A_1B_1C_1]$  é semelhante ao triângulo  $[ABC]$  com uma razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ , por isso

$$|A_1O| = |A_1H_1| = \frac{1}{2} |AH|,$$

tal como

$$|A_1G| = \frac{1}{2} |AG|.$$

Por outro lado, como  $AA_0$  é paralela a  $A_1O$  e  $AA_1$  é secante a estas duas rectas, temos  $\angle G_1A_1H_1 = \angle HAG$  (ângulos alternos-internos). Assim os triângulos  $[A_1H_1G_1] = [A_1OG]$  e  $[AHG]$  são semelhantes, correspondendo-se os vértices  $A_1, A$  e  $O, H$ . Por consequência podemos afirmar

$$\angle A_1GO = \angle AGH,$$

e como  $A_1, G$  e  $A$  são colineares,  $O, G$  e  $H$  também o serão (Axioma III-4 em [7, p. 51]).

Como a razão de semelhança entre os triângulos  $[A_1B_1C_1]$  e  $[ABC]$  é  $\frac{1}{2}$ , significa que  $|GH| = 2|GO|$ , isto é  $|GH| = \frac{2}{3}|HO|$ . ■

Através deste teorema foi demonstrado que o baricentro, circuncentro e ortocentro são três pontos colineares. No entanto, quando o triângulo

de referência é isósceles a recta de Euler contém também o incentro. Supondo que no  $\Delta ABC$  temos  $|AB| = |AC|$ , como ilustra a Fig. 4.2, a bissetriz em  $A$ , a mediana em  $A$ , a mediatriz do lado  $\overline{BC}$  e a altura no vértice  $A$  representam a mesma recta, ficando desta forma os quatro centros colineares, isto é, pertencem todos à recta de Euler.

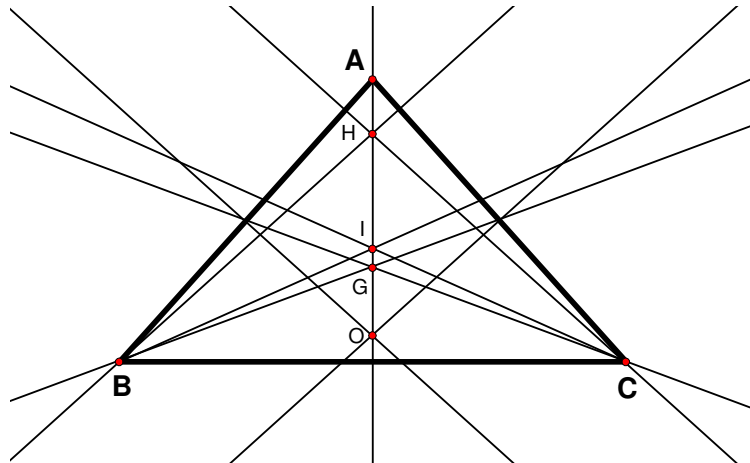


Figura ~ 4.2:

No caso do triângulo ser equilátero não faz sentido falar na recta de Euler pois os centros do triângulo concentram-se todos num só ponto, coincidentes com o incentro.

O baricentro, o circuncentro e o ortocentro são três pontos colineares, contudo para escrever uma equação da recta de Euler basta considerar dois destes três pontos. Considerando as coordenadas trilineares do baricentro e do circuncentro em função dos ângulos temos, respectivamente,  $\csc A : \csc B : \csc C$  e  $\cos A : \cos B : \cos C$ .

Recorrendo a (2.10) obtemos

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \csc A & \csc B & \csc C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0,$$

resolvendo e multiplicando pela constante  $\sin A \sin B \sin C$  temos

$$\begin{aligned} \sin A (\sin C \cos C - \sin B \cos B) \alpha &+ \\ \sin B (\sin A \cos A - \sin C \cos C) \beta &+ \\ \sin C (\sin B \cos B - \sin C \cos A) \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Como  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os ângulos internos do  $\Delta ABC$ , podemos escrever  $A = \pi - (B + C)$  e analogamente para os ângulos  $B$  e  $C$ , obtendo desta forma

$$\begin{aligned} & \sin A (\sin (A + B) \cos C - \sin (C + A) \cos B) \alpha + \\ & \sin B (\sin (B + C) \cos A - \sin (A + B) \cos C) \beta + \\ & \sin C (\sin (C + A) \cos B - \sin (A + B) \cos A) \gamma = 0, \end{aligned}$$

desenvolvendo  $\sin (A + B)$ ,  $\sin (C + A)$ ,  $\sin (B + C)$  e simplificando o resultado, podemos escrever de forma simplificada a equação da recta de Euler em coordenadas trilineares

$$\sin 2A \sin (B - C) \alpha + \sin 2B \sin (C - A) \beta + \sin 2C \sin (A - B) \gamma = 0.$$

A equação da recta de Euler pode também ser expressa em função dos comprimentos dos lados do triângulo de referência. Nesse caso utilizamos  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$  e  $a(b^2 + c^2 - a^2) : b(c^2 + a^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2)$ , como as coordenadas do baricentro e do circuncentro em função dos lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Resolvendo novamente o determinante e simplificando obtemos

$$\begin{aligned} & a(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) \alpha \quad + \\ & b(c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) \beta \quad + \\ & c(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \gamma = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Outros pontos notáveis do triângulo, como o centro da circunferência dos nove pontos, o ponto de Longchamps<sup>1</sup>, o ponto de Schiffler<sup>2</sup>, o ponto de Exeter<sup>3</sup> ou o ponto Far-out<sup>4</sup>, entre outros, situam-se também sobre a recta Euler.

### 4.1.2 Recta de Nagel

Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pontos de tangência das circunferências ex-inscritas ao  $\Delta ABC$  (construção idêntica à realizada em 3.2.7, ponto de Nagel). As cevianas que unem os vértices do triângulo com os pontos de tangência  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , intersectam-se num ponto, ponto de Nagel. À recta definida pelo incentro e pelo ponto de Nagel dá-se o nome de *recta de Nagel*.

---

<sup>1</sup>O ponto de Longchamps é  $X_{20}$  em [11].

<sup>2</sup>O ponto de Schiffler é  $X_{21}$  em [11].

<sup>3</sup>O ponto de Exeter é  $X_{22}$  em [11].

<sup>4</sup>O ponto de Far-out é  $X_{23}$  em [11].

Utilizando (2.10) e as coordenadas trilineares do incentro e do ponto de Nagel, que têm coordenadas  $1 : 1 : 1$  e  $\frac{(b+c-a)}{a} : \frac{(c+a-b)}{b} : \frac{(a+b-c)}{c}$ , podemos obter a equação da recta de Nagel

$$a(b-c)\alpha + b(c-a)\beta + c(a-b)\gamma = 0.$$

## 4.2 Algumas circunferências notáveis

Nesta secção pretendemos lembrar e estudar, desde a óptica das coordenadas trilineares, as principais propriedades de circunferências notáveis associadas ao triângulo. Como são o caso da circunferência inscrita, a circunferência circunscrita, as circunferências ex-inscritas e a circunferência dos nove pontos.

### 4.2.1 Circunferência inscrita

Como já foi referido, a circunferência inscrita num triângulo é aquela que se encontra no interior do triângulo e que é tangente aos seus três lados. Evidentemente o centro da circunferência é o ponto que se encontra a igual distância dos lados e que coincide com o incentro.

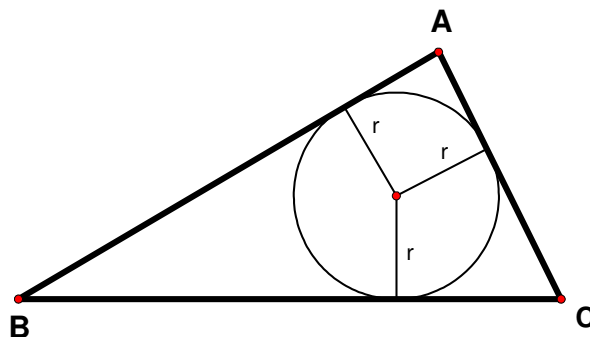


Figura ~ 4.3:

As coordenadas trilineares homogêneas do incentro são dadas por  $1 : 1 : 1$ , como vimos em 3.2.1 e para obter as coordenadas trilineares exactas teremos de multiplicar a tripla pela constante  $k$  (2.1), obtendo desta forma as coordenadas

$$\frac{2\sigma}{a+b+c} : \frac{2\sigma}{a+b+c} : \frac{2\sigma}{a+b+c}.$$

Podemos concluir que o raio da circunferência inscrita é dado por

$$r = \frac{2\sigma}{a + b + c}.$$

A equação da circunferência inscrita pode ser obtida através de (2.21). Logo obtemos

$$\begin{aligned} & (\sin^2 A - 2 - 2 \cos A) \alpha^2 + \\ & (\sin^2 B - 2 - 2 \cos B) \beta^2 + \\ & (\sin^2 C - 2 - 2 \cos C) \gamma^2 + \\ & 2 (\sin B \sin C + 1 + \cos C + \cos B - \cos A) \beta\gamma + \\ & 2 (\sin C \sin A + 1 + \cos A + \cos C - \cos B) \gamma\alpha + \\ & 2 (\sin A \sin B + 1 + \cos B + \cos A - \cos C) \alpha\beta = 0, \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} & - (1 + \cos A) \alpha^2 - (1 + \cos B) \beta^2 - (1 + \cos C) \gamma^2 + \\ & 2 (1 + \cos B) (1 + \cos C) \beta\gamma + \\ & 2 (1 + \cos A) (1 + \cos C) \gamma\alpha + \\ & 2 (1 + \cos A) (1 + \cos B) \alpha\beta = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação por  $-\frac{1}{4}$  e considerando que  $\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1+\cos A}{2}$ , podemos reescrever a equação na forma

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \cos^4\left(\frac{A}{2}\right) + \beta^2 \cos^4\left(\frac{B}{2}\right) + \gamma^2 \cos^4\left(\frac{C}{2}\right) - \\ & 2\beta\gamma \cos^2\left(\frac{B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{C}{2}\right) - 2\gamma\alpha \cos^2\left(\frac{C}{2}\right) \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \\ & 2\alpha\beta \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) \cos^2\left(\frac{B}{2}\right) = 0 \quad . \quad (4.2) \end{aligned}$$

### 4.2.2 Circunferência circunscrita

Como indica o seu nome, a circunferência circunscrita é a circunferência que circunscribe o triângulo, isto é, a circunferência definida pelos três vértices do triângulo.

Tendo em conta as ideias expostas na p. 39, podemos escrever a equação trilinear da circunferência circunscrita utilizando as coordenadas dos três vértices, equação essa que será

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0.$$

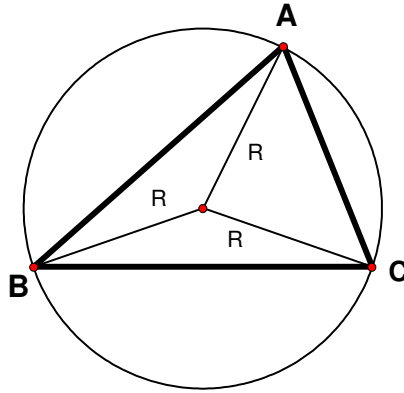


Figura ~ 4.4:

Como foi referido, ao centro desta circunferência chama-se circuncentro e tem como coordenadas trilineares  $\cos A : \cos B : \cos C$ . O raio da circunferência é denotado pela letra maiúscula R e toma o valor  $\frac{a}{2 \sin A}$  (veja a *lei dos senos* 1.2.3).

### 4.2.3 Circunferências ex-inscritas

As bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo  $[ABC]$  intersectam-se nos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , que coincidem com os centros das circunferências ex-inscritas, como mostra a Fig. 4.5.

Os centros destas circunferências são definidos pela distância de cada centro da circunferência ao lado do triângulo, isto é,  $-1 : 1 : 1$ ,  $1 : -1 : 1$  e  $1 : 1 : -1$  são as coordenadas trilineares dos centros das circunferências centradas em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente. Utilizando as coordenadas trilineares exactas destes centros obtemos os raios das circunferências ex-inscritas

$$r_{A'} = \frac{2\sigma}{b + c - a}, \quad r_{B'} = \frac{2\sigma}{c + a - b}, \quad r_{C'} = \frac{2\sigma}{a + b - c}.$$

Para escrever as equações trilineares das circunferências podemos fazê-lo da mesma forma que foi feito para a circunferência inscrita, ou seja, utilizar (2.21) e os respectivos centros e raios. Fazendo cálculos análogos obtemos as seguintes equações para as circunferências ex-inscritas centradas em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente

$$u_1^2 \alpha^2 + v_2^2 \beta^2 + v_3^2 \gamma^2 - 2v_2 v_3 \beta \gamma + 2v_3 u_1 \gamma \alpha + 2u_1 v_2 \alpha \beta = 0, \quad (4.3)$$

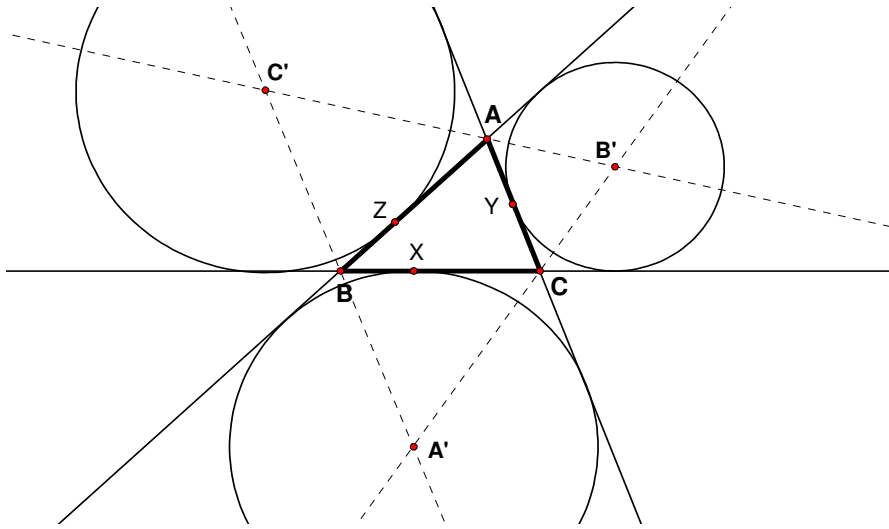


Figura 4.5: Circunferências ex-inscritas ao triângulo  $[ABC]$ .

$$v_1^2 \alpha^2 + u_2^2 \beta^2 + v_3^2 \gamma^2 + 2u_2 v_3 \beta \gamma - 2v_3 v_1 \gamma \alpha + 2v_1 u_2 \alpha \beta = 0, \quad (4.4)$$

$$v_1^2 \alpha^2 + v_2^2 \beta^2 + u_3^2 \gamma^2 + 2v_2 u_3 \beta \gamma + 2v_1 u_3 \gamma \alpha - 2v_1 v_2 \alpha \beta = 0, \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos^2 \left( \frac{A}{2} \right), & v_1 &= \sin^2 \left( \frac{A}{2} \right), \\ u_2 &= \cos^2 \left( \frac{B}{2} \right), & v_2 &= \sin^2 \left( \frac{B}{2} \right), \\ u_3 &= \cos^2 \left( \frac{C}{2} \right), & v_3 &= \sin^2 \left( \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Circunferência dos nove pontos

Circunferência dos nove pontos, circunferência de Feuerbach, circunferência de Euler, circunferência dos seis pontos, circunferência dos doze pontos, circunferência dos  $n$  pontos, circunferência de Terquem são alguns dos nomes atribuídos a esta circunferência. Devido a esta profusa quantidade de nomes será fácil perceber que foram muitos os matemáticos que a estudaram como foi o caso de Euler (1707-1783), Terquem (1782-1862), Brianchon (1783-1864), Poncelet (1788-1867) ou Feuerbach (1800-1834).

A *circunferência dos nove pontos* (será este o nome que iremos utilizar) é uma circunferência que pode ser construída em qualquer triângulo e foi-lhe atribuído este nome por conter nove pontos notáveis, seis dos quais pertencem ao próprio triângulo (excepto no caso do triângulo obtuso).

A circunferência contém:

- os pontos médios dos lados do  $\Delta ABC$ ;

- os pontos médios entre o ortocentro ( $H$ ) e os vértices do  $\Delta ABC$ ;
- os pés das alturas, pontos de intersecção das alturas em  $A$ ,  $B$  e  $C$  com os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

**Teorema 4.2.1** *Os pés das alturas de qualquer triângulo, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos formados pelos vértices e pelo ortocentro, pertencem à mesma circunferência de raio  $\frac{R}{2}$ , onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita.*

**Demonstração** Uma outra demonstração da existência da circunferência dos nove pontos pode ser encontrada em [15] ou em [6].

Observando a Fig. 4.6, onde  $\Delta ABC$  representa um triângulo arbitrário;  $L$ ,  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados;  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pés das alturas;  $H$  o ortocentro e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$ , respectivamente. Na figura foi também desenhado o quadrilátero  $[MNYZ]$ . O segmento  $\overline{MN}$  é paralelo ao lado  $\overline{BC}$ , segundo o teorema que diz que "Se uma recta bissecta ao mesmo tempo dois lados de um triângulo então essa recta é paralela ao terceiro lado", teorema este que é facilmente demonstrado pela semelhança de triângulos. Da mesma forma podemos afirmar que  $\overline{YZ}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ , assim podemos também afirmar que  $\overline{MN}$  é paralelo a  $\overline{YZ}$ .

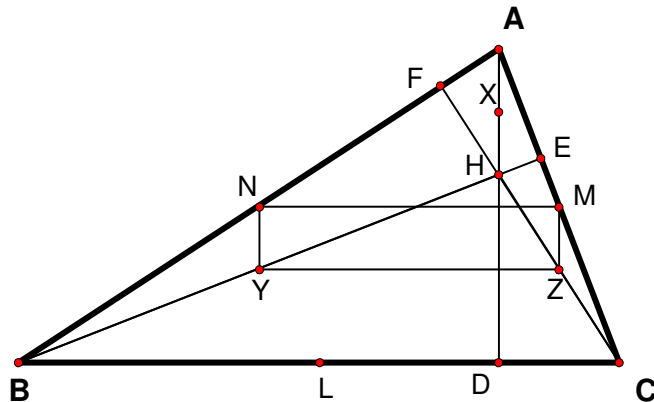


Figura ~ 4.6:

Pelas afirmações anteriores, o quadrilátero  $[MNYZ]$  é um paralelogramo. Podemos também afirmar que  $\overline{NY}$  é paralelo ao

segmento  $\overline{AD}$ . Os triângulos  $[ADB]$  e  $[HDB]$  são rectângulos,  $N$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $Y$  o ponto médio de  $\overline{HB}$ . Podemos construir os segmentos  $\overline{NT}$  e  $\overline{YT}$ , Fig. 4.7, que são ambos segmentos paralelos a  $\overline{AD}$ , daí concluirmos que  $\overline{NY}$  será também paralelo a  $\overline{AD}$ .

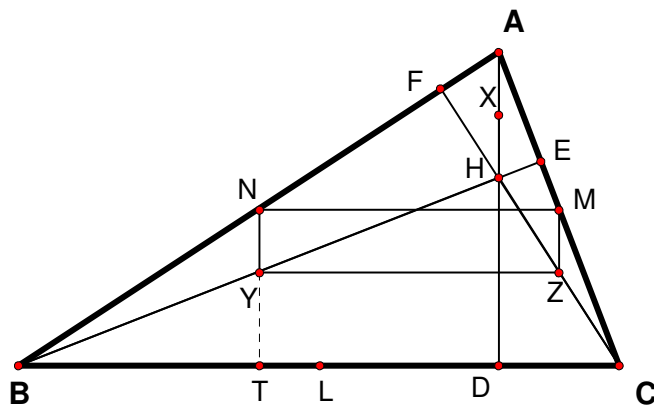


Figura 4.7:

De forma análoga concluímos que  $\overline{AD}$  e  $\overline{MZ}$  são paralelos, logo podemos afirmar que  $\overline{NY}$  e  $\overline{MZ}$  são paralelos. Por outro lado  $\overline{BC}$  é perpendicular a  $\overline{NT}$  e com  $\overline{BC}$  paralelo a  $\overline{NM}$ , logo  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{NY}$ , da mesma forma  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{MZ}$ , o que significa que todos os ângulos do paralelogramo são rectos, assim  $[MNYZ]$  é um rectângulo.

Analogamente podemos mostrar que o quadrilátero  $[XYLM]$  é também um rectângulo. O passo seguinte será mostrar que  $U = U'$ , onde  $U$  representa o ponto de intersecção das diagonais de  $[MNYZ]$  e a intersecção das diagonais de  $[XYLM]$ , Fig. 4.8.

Em  $[MNYZ]$  as diagonais  $\overline{MY}$  e  $\overline{NZ}$  intersectam-se em  $U$ , como  $[MNYZ]$  é um rectângulo,  $|MY| = |NZ|$  e consequentemente  $\overline{MU} = \overline{UY} = \overline{NU} = \overline{UZ}$ . Da mesma forma temos  $|MU'| = |U'Y| = |LU'| = |U'X|$ . Sabemos que  $|MY| = |NZ|$  e  $|MY| = |XL|$ . Concluimos então que  $|NZ| = |XL|$ . Por outro lado  $\overline{MY}$  é diagonal de  $[MNYZ]$  e de  $[XYLM]$ , como  $U$  é o ponto médio de  $\overline{MY}$  em  $[MNYZ]$  e  $U'$  o ponto médio em  $[XYLM]$ , podemos concluir que  $U = U'$ . Temos então

$$|MU| = |UY| = |ZU| = |UN| = |XU| = |UL|.$$

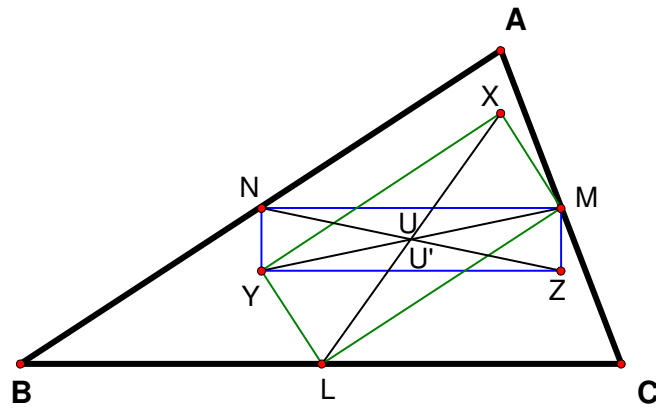


Figura 4.8:

Como as distâncias de  $L, M, N, X, Y, Z$  ao ponto  $U$  são as mesmas, significa que existe uma circunferência de centro em  $U$  contendo os pontos referidos. Neste momento já temos a circunferência a passar em seis dos nove pontos. Para provar que os restantes três pontos dos nove também pertencem à mesma circunferência, vamos considerar o triângulo formado pelos pontos  $X, D$  e  $L$  (Fig. 4.9).

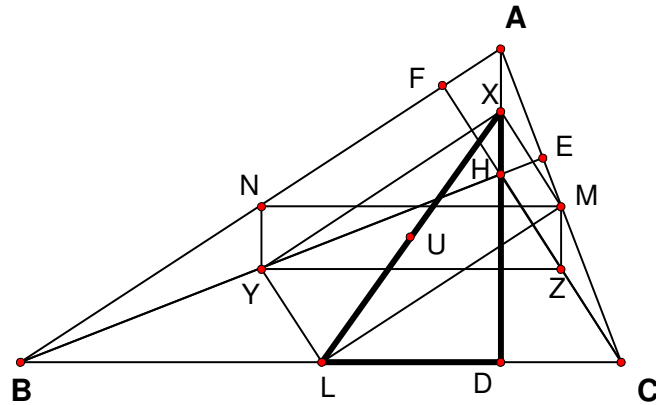


Figura 4.9:

Sabemos que  $|XU| = |UL|$  e como  $XD$  e  $DL$  são perpendiculares, temos que o triângulo  $[XDL]$  é rectângulo. Tendo em conta que

qualquer triângulo inscrito no diâmetro de uma circunferência é rectângulo, podemos afirmar que o ponto médio da hipotenusa coincide com o circuncentro do triângulo  $[XDL]$ , assim

$$|XU| = |UL| = |UD|.$$

Desta forma o ponto  $D$  pertence também à circunferência dos nove pontos, repetindo o mesmo raciocínio para os triângulos  $[YEM]$  e  $[ZNF]$ , verificamos que os pontos  $E$  e  $F$  também pertencem à circunferência. Com este raciocínio mostramos que existe uma circunferência de centro em  $U$  e que contém os nove pontos

$$M, E, X, F, N, Y, L, D, Z.$$

Os triângulos  $[ABC]$  e  $[LMN]$  são semelhantes na razão  $\frac{1}{2}$ , como  $R$ , raio da circunferência circunscrita ao  $\Delta ABC$ , é  $\frac{a}{2\sin A}$  então o raio da circunferência circunscrita ao  $\Delta LMN$  será  $\frac{a}{4\sin A} = \frac{1}{2}R$ . ■

A circunferência dos nove pontos tem como equação:

$$\alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C - 2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0. \quad (4.6)$$

equação esta que pode ser encontrada em [10, p. 41].

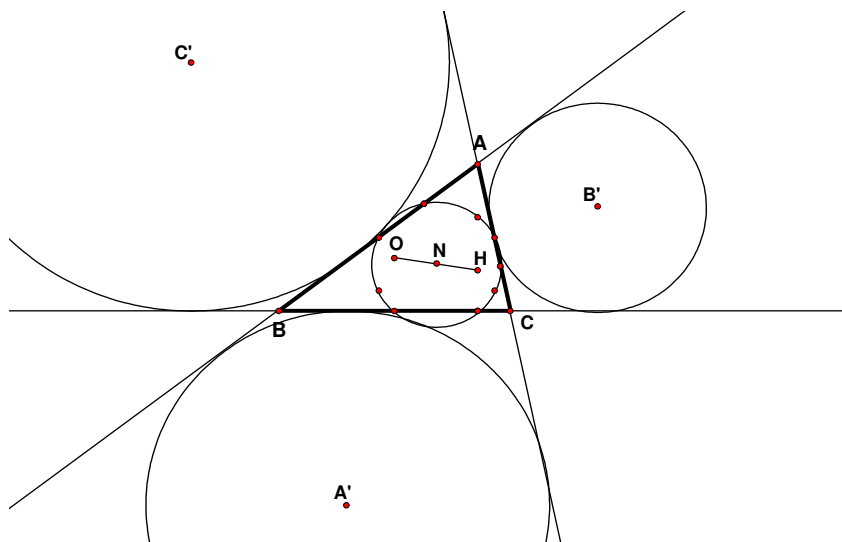


Figura 4.10:

Além destes nove pontos a circunferência contém também os pontos de tangência desta circunferência com as três circunferências ex-inscritas ao  $\Delta ABC$  assim como o ponto de tangência com a circunferência inscrita, este último designado como *ponto de Feuerbach* (Teorema de Feuerbach [5, p. 117]).

**Teorema 4.2.2 (Teorema de Feuerbach)**

*A circunferência dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscritas.*

**Demonstração** Na Fig. 4.11 está representado o  $\Delta ABC$ , o triângulo medial  $[A'B'C']$ , a circunferência inscrita (de centro  $I$ ) tangente a  $BC$  no ponto  $X$ , uma circunferência ex-inscrita (de centro  $I_a$ ) tangente a  $BC$  no ponto  $X_a$ , a recta  $B_1C_1$  obtida através de uma reflexão de  $BC$  em relação a  $II_a$  que é tangente às duas circunferências, a inscrita e a ex-inscrita. Está também representada a circunferência  $\omega$ , de diâmetro  $\overline{XX_a}$  e os pontos  $S, B'', C''$ , obtidos pela intersecção de  $B_1C_1$  com  $BC, A'B'$  e  $A'C'$ , respectivamente.

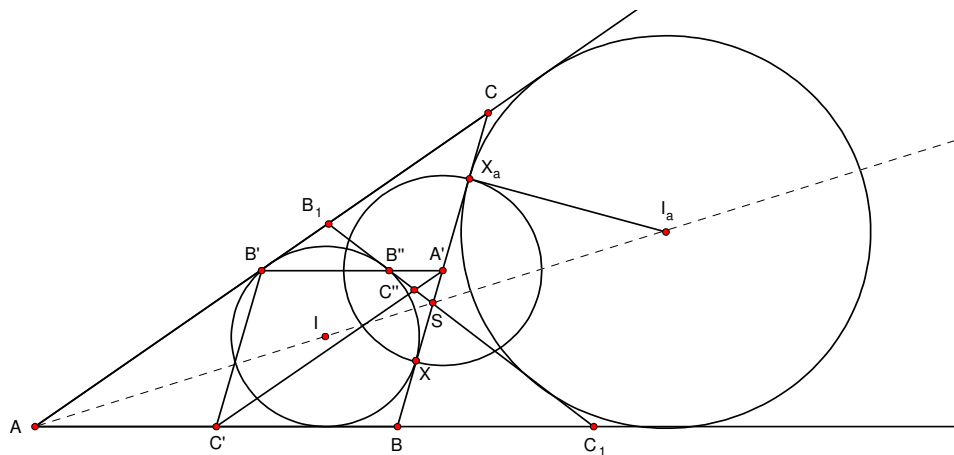


Figura ~4.11:

A circunferência  $\omega$  é ortogonal à circunferência inscrita e à circunferência ex-inscrita,  $XX_a$  é perpendicular a  $X_aI_a$  e a  $IX$ , significa que estas duas circunferências são invariantes em relação a  $\omega$  ([1], p.152). O ângulo entre duas curvas é igual ao ângulo formado pelas inversas dessas duas curvas ([1, p. 154]). Desta forma provando que a inversa da circunferência dos nove pontos em relação a  $\omega$  é a

recta  $B_1C_1$ , provamos que a circunferência é tangente à circunferência inscrita e à circunferência ex-inscrita.

Por [5, p. 11], temos

$$|BS| = |X_aC| = p - b,$$

onde  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . O ponto médio de  $\overline{BC}$ , designado por  $A'$  é o centro de  $\omega$ , então

$$|XX_a| = a - 2(p - b) = b - c,$$

assumindo que este valor é positivo (caso contrário, podemos modificar a ordem de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de modo a tornar o valor positivo). A circunferência dos nove pontos passa por  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e a sua inversão em relação a  $\omega$  é a recta  $B_1C_1$ . Vamos provar que  $B''$  e  $C''$  são os inversos de  $B'$  e  $C'$ .

Os pontos  $I$ ,  $S$  e  $I_a$  situam-se na bissetriz do ângulo  $A$ . Por [5, p. 9], sabemos que  $S$  divide o segmento  $\overline{CB}$  na proporção  $b : c$ , como  $\overline{CB}$  tem comprimento  $a$ , temos que

$$a = SB + \frac{b}{c}SB,$$

então

$$|SB| = \frac{ac}{b+c}, \quad |CS| = \frac{ab}{b+c},$$

e

$$|SA'| = \frac{|CS| - |SB|}{2} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}.$$

Como os triângulos  $[ASC_1]$  e  $[ASC]$  são semelhantes, então  $|AC_1| = |AC|$ , podemos escrever que

$$|BC_1| = |AC_1| - |AB| = |AC| - |AB| = b - c,$$

e analogamente  $|CB_1| = b - c$ .

Por outro lado os triângulos  $[SA'B'']$  e  $[SBC_1]$  são semelhantes, assim como os triângulos  $[SA'C''']$  e  $[SCB_1]$ , o que nos permite escrever

$$\frac{|A'B''|}{|BC_1|} = \frac{|A'B''|}{b-c} = \frac{|SA'|}{|SB|} = \frac{b-c}{2c},$$

e

$$\frac{|A'C'''|}{|CB_1|} = \frac{|A'C'''|}{b-c} = \frac{|SA'|}{|SC|} = \frac{b-c}{2b},$$

logo

$$|A'B'| \times |A'B''| = \frac{c(b-c)^2}{2 \cdot 2c} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

e

$$|A'C'| \times |A'C''| = \frac{b(b-c)^2}{2 \cdot 2b} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

$\omega$  tem raio  $\frac{|XX_a|}{2} = \frac{b-c}{2}$ , por definição de inverso numa circunferência,  $B'$  é o inverso de  $B''$  e  $C'$  o de  $C''$ , como era desejado. ■

Uma outra demonstração deste mesmo teorema pode ser encontrada em [17, p. 75].

## Capítulo 5

# Programação em *Mathematica*

Nos Capítulos anteriores foi possível verificar que quando estamos a trabalhar com coordenadas trilineares homogêneas obtemos na maioria das vezes expressões muito extensas. Com o auxílio dos meios informáticos é possível tornar muitas tarefas quase instantâneas, os cálculos referentes a simplificações que teríamos de efectuar manualmente e que em muitos casos bastava haver uma troca de sinais para nunca chegar ao resultado esperado, tornam-se agora muito mais rápidos e sem erros. Foi com o intuito de passar as tarefas rotineiras de simplificação para o computador que foi utilizada a programação em *Mathematica*. Outro aspecto bastante vantajoso da utilização do computador incide sobre o facto de podermos fazer inúmeros testes, como por exemplo, construir uma base de dados com tantos pontos quantos os desejados e testar, por exemplo, quais desses pontos pertencem a uma dada recta ou circunferência.

O *Mathematica* é um software de programação com grandes potencialidades no domínio do cálculo simbólico e visualização gráfica. Através do cálculo simbólico podemos não trabalhar com casos particulares o que tornaria a obtenção de resultados muito mais limitada. Assim é possível trabalhar sempre com as coordenadas gerais de pontos, rectas ou circunferências. Por outro lado, por ser um software que possibilita a criação de representações gráficas, torna muito mais interessante e esclarecedor na obtenção de resultados incentivando também a novas ideias para futuros testes. O próprio software contém um ícone de ajuda, mas para uma melhor compreensão do modo de funcionamento deste software aconselha-se a leitura de [3], que permite adquirir as bases para a construção de programas tanto simples como mais complexos.

As coordenadas trilineares podem, como já foi visto, ser apresentadas em função dos comprimentos dos lados do  $\triangle ABC$ , das amplitudes dos ângulos internos ou até dos lados e dos ângulos em simultâneo. Trabalhar com

fórmulas trigonométricas requer muito cuidado sendo muitas vezes complicado simplificar determinadas expressões, mesmo utilizando o computador nessa tarefa, por vezes é difícil chegar ao resultado esperado. O melhor é converter as coordenadas de modo a ficarem em função apenas dos comprimentos dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  do  $\triangle ABC$ , para isso utilizamos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\sin A = \frac{2\sigma}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\sigma}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\sigma}{ab},$$

onde  $\sigma$  é a área do triângulo, que pode também ser expressa em função de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  considerando (1.6).

Antes de começar a analisar que centros notáveis é que pertencem a determinada recta ou circunferência ou até mesmo se são colineares, a fase inicial consiste na elaboração de uma base de dados com as coordenadas dos vários pontos. Consultando [10] ou [11] verificamos que muitos dos pontos são dados pela função do centro do triângulo, mas para ser mais rápido escrever a tripla de coordenadas podemos criar um pequeno programa para escrever as coordenadas. Começamos por escrever a função do centro a depender dos lados e depois corremos o programa

```
fcentro[x_] := {x, x/.{a -> b, b -> c, c -> a}, x/.{a -> c, b -> a, c -> b}}.
```

Nos programas mais adiante iremos fazer referência à base de dados como “ponto”.

```
ponto = {{1, 1, 1},
          {1/a, 1/b, 1/c},
          {a (b^2 + c^2 - a^2), b (c^2 + a^2 - b^2), c (a^2 + b^2 - c^2)},
          {2bc/(-a^2 + b^2 + c^2), 2ca/(a^2 - b^2 + c^2), 2ab/(a^2 + b^2 - c^2)},
          ...
        }.
```

Esta será a estrutura da base de dados onde importa realçar que a ordem dos pontos segue a de [11].

## 5.1 Distância entre dois pontos

No cálculo de distâncias, as coordenadas deverão ser previamente escritas em coordenadas trilineares exactas, ou seja, teremos de multiplicar a tripla de

coordenadas pela constante (2.1).

$$\sigma = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}$$

coordexacta[ $\alpha_-, \beta_-, \gamma_-, a_-, b_-, c_-, \sigma_-$ ] :=  
Simplify [  
 $\frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  
 $0 < a \&\& 0 < b \&\& 0 < c \&\& 0 < \sigma$   
].

Podemos utilizar este programa para converter os pontos um a um, mas caso estejamos a trabalhar com muitos pontos, este programa pode ser inserido dentro de um outro de modo a converter todos os pontos necessários automaticamente. O programa seguinte converte e calcula de uma só vez a distância entre dois pontos.

$$\sigma = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}$$

distancia[ $\alpha_-, \beta_-, \gamma_-, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, a_-, b_-, c_-, \sigma_-$ ] :=  
Simplify [  
Sqrt [  
 $-abc$   
 $\left( a \left( \beta \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \beta_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) \right.$   
 $\left. \left( \gamma \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \gamma_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) + \right.$   
 $b \left( \gamma \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \gamma_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) \left.$   
 $\left. \left( \alpha \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \alpha_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) + \right.$   
 $c \left( \alpha \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \alpha_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) \left.$   
 $\left. \left( \beta \frac{2\sigma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} - \beta_i \frac{2\sigma}{a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i} \right) \right.$   
 $\left. \right] \div (2\sigma),$   
 $0 < a \&\& 0 < b \&\& 0 < c \&\& 0 < \sigma$   
].

$\alpha, \beta, \gamma$  e  $\alpha i, \beta i, \gamma i$  representam pontos,  $a, b, c$  os comprimentos dos lados do triângulo  $[ABC]$  e  $\sigma$  a respectiva área.

## 5.2 Ponto médio

O centro da circunferência dos nove pontos é o ponto médio entre o circuncentro e o ortocentro, não sendo contudo o único centro que é o ponto médio de outros dois. Através do *Mathematica* é possível verificar que existem outros centros nas mesmas condições. No programa criado foram verificados quais dos primeiros 150 centros são pontos médios de outros dois centros. Neste programa recorreremos a (2.11) e criaram-se três funções de nomes “*pontoum*”, “*pontodois*” e “*pontotres*” que nos dão a primeira, segunda e terceira coordenadas do ponto médio, respectivamente. Depois do programa calcular o ponto médio entre dois pontos, verifica se existe algum centro da base de dados que seja colinear com o anteriormente calculado.

```

For[i = 1, i ≤ 150,
  For[j = i + 1, j ≤ 150,
    For[k = j + 1, k ≤ 150,
      If[
        Simplify[(pontoum[ponto[[i,1]], ponto[[i, 2]], ponto[[i, 3]],
          ponto[[j, 1]], ponto[[j, 2]], ponto[[j, 3]], a, b, c])/(ponto[[k, 1]]) ===
        Simplify[(pontodois[ponto[[i,1]], ponto[[i, 2]], ponto[[i, 3]],
          ponto[[j, 1]], ponto[[j, 2]], ponto[[j, 3]], a, b, c])/(ponto[[k, 2]]) ===
        Simplify[(pontotres[ponto[[i,1]], ponto[[i, 2]], ponto[[i, 3]],
          ponto[[j, 1]], ponto[[j, 2]], ponto[[j, 3]], a, b, c])/(ponto[[k, 3]])],
        Print[k, “ é ponto médio de ”, {i,j}];
      ];
    k++;
  j++;
i++].

```

Os resultados obtidos são apresentados seguidamente e colocados por ordem crescente do número do ponto médio.

$X_1$          $\{X_8, X_{145}\}$  ( $X_1$  é ponto médio do segmento formado por  $X_8 X_{145}$ )  
 $X_3$          $\{X_1, X_{40}\}, \{X_4, X_{20}\}, \{X_{74}, X_{110}\}, \{X_{98}, X_{99}\}, \{X_{100}, X_{104}\},$   
               $\{X_{101}, X_{103}\}, \{X_{102}, X_{109}\}$

$X_4$	$\{X_{147}, X_{148}\}$
$X_5$	$\{X_{32}, X_{49}\}, \{X_{11}, X_{119}\}$
$X_9$	$\{X_4, X_{144}\}$
$X_{10}$	$\{X_1, X_8\}, \{X_4, X_{40}\}, \{X_{65}, X_{72}\}, \{X_{80}, X_{100}\}$
$X_{11}$	$\{X_1, X_{80}\}, \{X_4, X_{104}\}, \{X_{100}, X_{149}\}$
$X_{40}$	$\{X_8, X_{40}\}$
$X_{56}$	$\{X_1, X_{46}\}$
$X_{80}$	$\{X_8, X_{149}\}$
$X_{98}$	$\{X_{20}, X_{148}\}$
$X_{99}$	$\{X_{20}, X_{147}\}$
$X_{104}$	$\{X_{20}, X_{149}\}$
$X_{110}$	$\{X_{20}, X_{146}\}$
$X_{113}$	$\{X_4, X_{110}\}, \{X_{74}, X_{146}\}$
$X_{114}$	$\{X_4, X_{99}\}, \{X_{98}, X_{147}\}$
$X_{115}$	$\{X_4, X_{98}\}, \{X_{13}, X_{14}\}, \{X_{99}, X_{148}\}$
$X_{116}$	$\{X_4, X_{103}\}, \{X_{101}, X_{150}\}$
$X_{117}$	$\{X_4, X_{109}\}$
$X_{118}$	$\{X_4, X_{101}\}$
$X_{119}$	$\{X_4, X_{100}\}$
$X_{124}$	$\{X_4, X_{102}\}$
$X_{125}$	$\{X_4, X_{74}\}, \{X_6, X_{67}\}$
$X_{132}$	$\{X_4, X_{112}\}$
$X_{133}$	$\{X_4, X_{107}\}$
$X_{140}$	$\{X_3, X_5\}$
$X_{141}$	$\{X_6, X_{69}\}, \{X_{67}, X_{110}\}$
$X_{142}$	$\{X_7, X_9\}$
$X_{143}$	$\{X_5, X_{52}\}$ .

## 5.3 Rectas

### 5.3.1 Recta de Euler

A recta de Euler, que passa por  $X_2$  e  $X_3$ , é uma recta muito conhecida e estudada, no entanto com auxílio do *Mathematica* é possível verificar que nos primeiros 100 centros do triângulo,  $X_2, X_3, X_4, X_5$  e os centros do  $X_{20}$

ao  $X_{30}$ , inclusive, pertencem todos à recta de Euler. Esta situação seria bastante complicada de concluir sem recorrer aos meios informáticos, devido à complexidade das coordenadas trilineares de alguns pontos. Abaixo está um programa na forma de ciclo onde o computador vai testando ponto a ponto quais são os que pertencem à recta. Sempre que um dos pontos satisfaz a condição é devolvida uma mensagem com o respectivo número do ponto que se encontra na base de dados.

```

rectaeuler[α-, β-, γ-, a-, b-, c-]:=
  a (b2 - c2) (b2 + c2 - a2) α + b (c2 - a2) (c2 + a2 - b2) β +
  c (a2 - b2) (a2 + b2 - c2) γ
For[i = 1, i ≤ 100,
  If[
    Simplify[
      rectaeuler[ponto[[i,1]],ponto[[i, 2]], ponto[[i, 3]], a, b, c],
      0 < a&&0 < b&&0 < c] == 0,
    Print["É válido para o ponto ",i],
  ],
  i++].

```

A recta de Euler pode ser construída através dos pontos  $X_2$  e  $X_3$ . Podemos também verificar que existem alguns centros que formam rectas paralelas à recta de Euler. Ao correr o programa seguinte foi possível verificar que nos primeiros 100 centros, as rectas formadas pelos pontos  $(X_{11}, X_{36})$ ,  $(X_{12}, X_{35})$ ,  $(X_{13}, X_{15})$ ,  $(X_{14}, X_{16})$  e  $(X_{64}, X_{68})$  são rectas paralelas à recta de Euler.

```

For[i = 1, i ≤ 100,
  For[j = i + 1, j ≤ 100,
    If[
      Simplify[
        Det[{
          {a,b,c},
          {ponto[[2,2]]ponto[[3,3]]-ponto[[2,3]]ponto[[3,2]],
          ponto[[2,3]]ponto[[3,1]]-ponto[[2,1]]ponto[[3,3]],
          ponto[[2,1]]ponto[[3,2]]-ponto[[2,2]]ponto[[3,1]]},
          {ponto[[i,2]]ponto[[j,3]]-ponto[[i,3]]ponto[[j,2]],
          ponto[[i,2]]ponto[[j,3]]-ponto[[i,3]]ponto[[j,2]],

```

```

        ponto[[i,2]]ponto[[j,3]]-ponto[[i,3]]ponto[[j,2]]}
    }],
    0 < a&&0 < b&&0 < c] == 0,
    Print["É válido para os pontos ",{i,j}],
];
j++;
i++].

```

As distâncias entre alguns dos pontos pertencentes à recta de Euler permanecem constantes, como é o caso de  $X_2X_3 : X_2X_4 : X_2X_5 : X_2X_{20} : X_3X_4 : X_3X_5 : X_3X_{20} : X_4X_5 : X_4X_{20} : X_5X_{20} = 2 : 4 : 1 : 8 : 6 : 3 : 6 : 3 : 12 : 9$ .

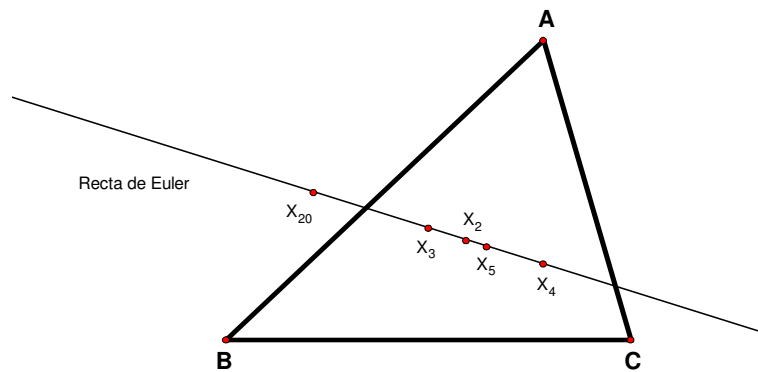


Figura ~5.1:

### 5.3.2 Recta de Nagel

Os pontos  $X_1, X_2, X_8$  são colineares e a recta que contém estes três pontos chama-se recta de Nagel. Além destes três centros, e procedendo da mesma forma com que se trabalhou na recta de Euler, podemos concluir que contém também os pontos  $X_{10}, X_{42}, X_{43}$  e  $X_{78}$ . Esta recta intersecta a recta de Euler no ponto  $X_2$  e é paralela à recta formada pelos pontos  $(X_{36}, X_{100})$ . Os pontos  $X_1, X_2, X_8$  e  $X_{10}$  preservam as proporções  $X_1X_2 : X_1X_8 : X_1X_{10} : X_2X_8 : X_2X_{10} : X_8X_{10} = 3 : 1 : 2 : \frac{3}{2} : 6 : 2$ .

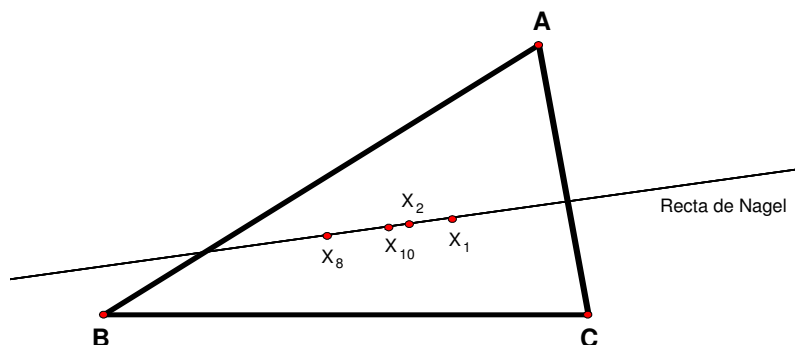


Figura ~5.2:

### 5.3.3 Pontos colineares

Além da recta de Euler e da recta de Nagel é possível, utilizando os centros conhecidos, criar muitas outras rectas considerando os pontos dois a dois. Mas mais interessante é analisar quais os três ou mais pontos que são colineares, como é o caso do incentro e o ponto de Gergonne que formam a recta de Soody. Esta recta contém os centros  $X_1$ ,  $X_7$ ,  $X_{20}$  e  $X_{77}$ , intersectando a recta de Euler no ponto de Longchamps,  $X_{20}$ , e a recta de Nagel no incentro,  $X_1$  (Fig. 5.3). A recta de Soddy é também paralela à recta formada pelos pontos  $(X_4, X_9)$ .

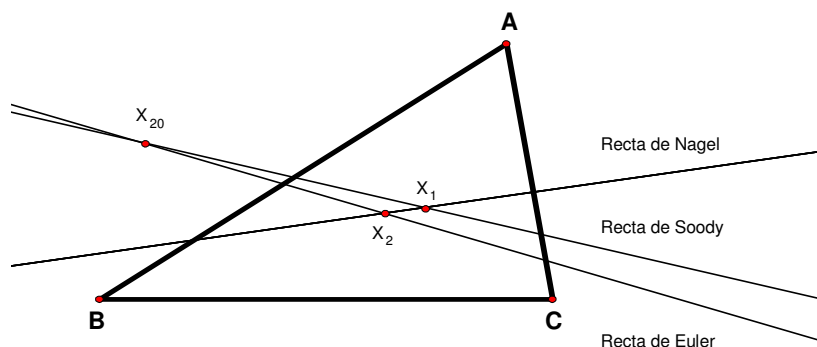


Figura ~5.3:

Podemos contudo fazer uma análise mais rigorosa aos centros conhecidos. Tomando os primeiros 150 centros de [11], foi criado um programa que considerasse as rectas formadas pelos primeiros dez centros e que verificasse quais dos restantes centros pertenciam a essas rectas. O programa é semelhante ao utilizado na recta de Euler, mas neste caso o computador agrupa três pontos e verifica se respeitam a condição (2.10).

```

For[i = 1, i ≤ 10,
  For[j = i + 1, j ≤ 10,
    For[k = j + 1, k ≤ 150,
      If[
        Simplify[
          Det[{
            {ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]},
            {ponto[[j,1]],ponto[[j,2]],ponto[[j,3]]},
            {ponto[[k,1]],ponto[[k,2]],ponto[[k,3]]}
          ]],
          0 < a&&0 < b&&0 < c] === 0,
        Print["Pontos colineares ",{i,j,k}],
      ];
      k++;
    j++;
  i++].

```

Na representação dos resultados a notação utilizada será da forma  $R(1, 2, 8)$ , significando que os pontos 1, 2 e 8 são colineares.

$R(1, 2, 8, 10, 42, 43, 78, 145)$  - Recta de Nagel

$R(1, 3, 35, 36, 40, 46, 55, 56, 57, 65)$

$R(1, 4, 33, 34, 73)$

$R(1, 5, 11, 12, 80, 119)$

$R(1, 6, 9, 37, 44, 45, 72)$

$R(1, 7, 20, 77)$  - Recta de Soddy

$R(1, 8, 10, 42, 43, 48, 145)$

$R(1, 9, 37, 44, 45, 72)$

$R(1, 10, 42, 43, 78, 145)$

$R(2, 3, 4, 5, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 140)$  - Recta de Euler

$R(2, 6, 69, 81, 86, 141)$   
 $R(2, 7, 9, 57, 63, 142)$   
 $R(3, 6, 15, 16, 32, 39, 50, 58, 61, 62)$   
 $R(3, 8, 100, 104)$   
 $R(3, 9, 84)$   
 $R(4, 6, 53)$   
 $R(4, 8, 72, 92)$   
 $R(4, 9, 10, 19, 40, 71)$   
 $R(5, 6, 68)$   
 $R(7, 8, 65, 69, 75, 85, )$ .

## 5.4 Conjugados

Também é possível determinar os centros que são conjugados isogonais ou conjugados isotômicos de outros centros (veja as definições em 2.2.1 e 2.2.2). Através da definição dada no Capítulo 2 sobre conjugados isogonais e conjugados isotômicos podemos determinar os conjugados de alguns dos centros estudados.

Centro notável	Conjugado isogonal	Conjugado isotômico
Incentro $X_1$	$X_1$	$X_{75}$
Baricentro $X_2$	$X_6$	$X_2$
Circuncentro $X_3$	$X_4$	$X_{264}$
Ortocentro $X_4$	$X_3$	$X_{69}$
Centro dos nove pontos $X_5$	$X_{54}$	$X_{95}$
Ponto de Gergonne $X_7$	$X_{55}$	$X_8$

O programa utilizado para determinar os conjugados isogonais foi da forma

```

conjisog1[α-, β-, γ-]:=βγ
conjisog2[α-, β-, γ-]:=γα
conjisog3[α-, β-, γ-]:=αβ
For[i = 1, i ≤ 7,
  For[j = 1, j ≤ 150,
    If[
  
```

```

Simplify[conjisog1[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,1]] ===
Simplify[conjisog2[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,2]] ===
Simplify[conjisog3[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,2]],
Print[{i,j}, " são conjugados isogonais."],
];
j++;
i++],

```

No caso dos conjugados isotômicos o programa manteve a estrutura do anterior, apenas diferindo nas três funções iniciais.

```

conjisot1[α-, β-, γ-, a-, b-, c-]:=1/(a²α)
conjisot2[α-, β-, γ-, a-, b-, c-]:=1/(b²β)
conjisot3[α-, β-, γ-, a-, b-, c-]:=1/(c²γ)
For[i = 1, i ≤ 7,
For[j = 1, j ≤ 150,
If[
Simplify[conjisot1[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,1]] ===
Simplify[conjisot2[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,2]] ===
Simplify[conjisot3[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]],ponto[[i,3]]]/
ponto[[j,2]],
Print[{i,j}, " são conjugados isotômicos."],
];
j++;
i++],

```

## 5.5 Circunferências

A circunferência dos nove pontos (Capítulo 4) é, como vimos, uma circunferência que contém vários centros do triângulo, no entanto apenas contém um centro dos primeiros cem, assim como a circunferência

inscrita, o ponto de Feuerbach,  $X_{11}$ . No caso a circunferência circunscrita, esta contém o centro  $X_{74}$  e todos os centros do  $X_{98}$  até ao  $X_{112}$ . Para verificar estes resultados foi construído um programa que consiste apenas na substituição dos pontos em cada uma das equações das circunferências. Para o caso dos pontos pertencentes à circunferência dos nove pontos temos o programa

```

circnovepontos[α-, β-, γ-, a-, b-, c-]:=

$$\frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2a^2b^2c^2}$$

(a^4α^2+2abcα(cβ+bγ)+(b^2-c^2)(c^2β^2-b^2γ^2)-
a^2(b^2(α^2+β^2)-2bcβγ+c^2(α^2+γ^2)))
For[i = 1, i ≤ 150,
  If[
    Simplify[
      circnovepontos[ponto[[i,1]],ponto[[i,2]], ponto[[i,3]], a, b, c],
      0 < a&&0 < b&&0 < c] === 0,
    Print["É válido para o ponto ",i],
  ],
  i++].

```

Para verificar quais os centros que pertencem à circunferência circunscrita apenas temos que substituir no programa anterior a equação da circunferência dos nove pontos pela equação da circunferência circunscrita. Da mesma forma poderemos fazer o teste para a circunferência inscrita.

# Bibliografia

- [1] Araújo, P. V. (2002). *Curso de Geometria*. Lisboa: Gradiva - Publicações, LDA.
- [2] Birkhoff, G. D., Beatley, R. (1959). *Basic Geometry*. New York: Chelsea Publishing Company.
- [3] Carmo, J., Sernadas, A., Sernadas, C., Dionísio, F. M., Caleiro, C. (2004). *Introdução à Programação em Mathematica*, 2ª edição. Lisboa: IST Press.
- [4] Carr, G. S. (1970). *Formulas and Theorems in Pure Mathematics*, 2nd edition. New York: Chelsea Publishing Company.
- [5] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- [6] Coxeter, H. S. M. (1989). *Introduction to Geometry*, 2 edition. New York: John Wiley & Sons, Inc..
- [7] Dionísio, J. J. (2004). *Fundamentos da Geometria*. Lisboa: Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [8] Fernandes, A. N. P. (1967). *Elementos de Geometria*, para o 2º ciclo dos Liceus, 4ª Edição. Coimbra: Coimbra Editora, Limitada.
- [9] Kimberling, C. (1993). Triangle centers as functions. *Rocky Mountain, Journal of Mathematics*, Volume 23, Number 4, 1269-1286.
- [10] Kimberling, C. (1998). *Triangle Centers and Central Triangles*, *Congressus Numerantium*, 129. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing Incorporated.
- [11] Kimberling, C. (2007). *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*.  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

- [12] Lang, S., Murrow, G. (1988). *Geometry*, 2 edition. New York: Springer.
- [13] Oliveira, A. M., Silva, A. (1971). *Lisa - Biblioteca da Matemática Moderna, vol.1*. São Paulo: Editora Lisa S. A. - Livros irradiantes.
- [14] Oliveira, A. J. F. (1995). *Geometria Euclideana*. Lisboa: Universidade aberta.
- [15] Pedoe, D. (1988). *Geometry, a comprehensive course*. New York: Dover Publications, Inc..
- [16] Veloso, E. (1998). *Geometria, Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- [17] Yiu, P. (1998). *Notes on Euclidean Geometry*. Disponível em:  
<http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html>
- [18] Yiu, P. (2004). *A Tour of Triangle Geometry*. Disponível em:  
<http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html>