

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Unidade de Ciências Exactas e Humanas

**Modelos de Relação Entre Estruturas Radiantes**

**Unidimensionais e Diagramas de Radiação**

Fernando Beirão Emídio

Dissertação de Mestrado em  
Engenharia de Sistemas e Computação

**Fevereiro de 1998**

17/05/199	263-14
537	
Emi * Mod	

*António Manuel Esteves dos Santos Casimiro*

Dissertação realizada sob a orientação do  
Prof. Doutor António Manuel Esteves dos Santos Casimiro  
Professor Auxiliar com Agregação e Nomeação Definitiva da  
Unidade de Ciências Exactas e Humanas da  
Universidade do Algarve

**Declaro sob compromisso de honra que a presente dissertação é original**

*Fernando Brião Casimiro*

Este trabalho decorreu sob o enquadramento do programa PRODEP, Acção 5.2 - Formação avançada para o Ensino Superior que apoiou financeiramente a sua execução.

---

## *Índice geral*

---

<b>Índice geral</b>	iii
<b>Agradecimentos</b>	vi
<b>Resumo</b>	vii
<b>Abstract</b>	viii
<b>Nota ao Leitor</b>	ix
<b>Lista de símbolos</b>	x
<b>Notação</b>	xii
<b>Lista de siglas</b>	xiii
<b>Prefácio</b>	xv
<b>Capítulo 1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução	1
1.2 Objectivos da dissertação	2
1.3 Estrutura da dissertação	2
<b>Capítulo 2. Resumo da pesquisa bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1 Introdução	4
2.2 Método dos Momentos, MM	7
2.2.1 Formulação matemática do método dos momentos	9
2.2.2 Funções de base	11
2.2.2.1 Funções de subdomínio	12

2.2.2.2	Funções de todo-o-domínio	15
2.2.3	Funções de teste	16
2.2.3.1	<i>Point-Matching</i> ou <i>collocation</i>	16
2.3	<i>Conjugate Gradient Method</i> , CGM	17
2.4	<i>Boundary Element Method</i> , BEM	18
2.5	Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, FDTD	19
2.5.1	O algoritmo de Yee	20
2.5.2	Diferenças finitas e notação	21
2.5.3	Equações de Maxwell em três dimensões	22
2.5.4	Análise de antenas pelo método FDTD	26
2.5.5	Comentários	27
2.6	Método das Diferenças Finitas no Domínio da Frequência, FDFD	29
2.7	Método dos Elementos Finitos, FEM	30
2.8	<i>Uniforme theory of diffraction</i> , UTD	31
2.9	Análise crítica dos diversos métodos	31
<b>Capítulo 3 Aplicação do método dos momentos aos objectivos da dissertação</b>		<b>36</b>
3.1	Antena linear	36
3.2	Antena filamentar de geometria arbitrária	44
3.3	Significado da matriz admitância	48
3.4	Agrupamentos de antenas	51
<b>Capítulo 4 Obtenção de um operador de relação directa</b>		<b>52</b>
4.1	Introdução	52

4.2 Diagrama de radiação	52
4.3 Agrupamento de antenas	53
4.4 Antena linear	56
4.5 Operador único (caso tridimensional)	59
<b>Capítulo 5 Exemplos de aplicação</b>	<b>65</b>
5.1 Introdução	65
5.2 Exemplos	66
<b>Capítulo 6 Conclusão e desenvolvimentos futuros</b>	<b>69</b>
<b>Anexo A Funções especiais utilizadas</b>	<b>70</b>
<b>Anexo B Lista de programas (códigos)</b>	<b>72</b>
<b>Anexo C O programa NEC2</b>	<b>74</b>
<b>Anexo D Programa de análise</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>

---

## *Agradecimentos*

---

Ao Professor Dr. António Casimiro pelo tema proposto, pela sua valiosa orientação científica e apoio prestado na realização deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Electrotécnica da Escola superior de Tecnologia da Universidade do Algarve pelas facilidades concedidas.

À Unidade de Ciências Exactas e Humanas pela realização do mestrado.

À família, amigos e colegas pelo apoio prestado.

---

## *Resumo*

---

Neste trabalho é averiguada a existência de uma relação directa entre estruturas físicas unidimensionais e o respectivo diagrama de radiação.

São estudados diferentes métodos numéricos utilizados na análise de estruturas físicas radiantes, com incidência nos métodos com aplicação no estudo de antenas.

O trabalho efectuado permite concluir que é possível relacionar directamente a excitação de uma estrutura unidimensional com o factor de agrupamento e o diagrama de radiação dessa estrutura.

O programa desenvolvido neste trabalho mostra como uma estrutura pode ser analisada desta forma, com vantagens computacionais relativamente aos métodos clássicos.

---

## *Abstract*

---

This thesis examines the relation between unidirectional structures and radiation patterns. A review of the strengths and limitations of different numerical techniques for analysing electromagnetic configurations is presented, with particular emphasis on how these techniques could be applied to the problem.

The work developed in this thesis lead to the conclusion that is possible to develop a direct relation between a unidirectional structure and the radiation pattern.

Some examples of the program developed in this work show that the analysis of a structure is done with less considerable computer effort, with this approach.

---

## *Nota ao Leitor*

---

Em muitos trabalhos científicos e técnicos, a grande influência da língua inglesa e a falta de normalização da terminologia portuguesa apresentam dificuldades tanto para quem escreve (em português) como para o Leitor. Assim, considero importante uma referência ao texto apresentado nesta dissertação.

Quanto à terminologia utilizada, dado que a quase totalidade das referências encontradas se apresenta escrita em inglês e na falta de designações equivalentes em português, optou-se por apresentar essas designações no seu original em itálico (por exemplo: *Transmission Line Matrix Method*). Isto acarreta o aparecimento de termos de origem anglo-saxónica entremeados nas frases portuguesas, o que não pôde ser evitado. Ao longo do texto são utilizadas várias siglas (que são apresentadas numa lista), quando os termos são referidos frequentemente, evitando-se no entanto o seu abuso.

Quanto à falta de normalização da terminologia portuguesa, podem ocorrer termos que têm outras designações em diferentes Escolas (exemplos: escreve-se *factor de agrupamento* e não *factor de agregado* e *porto de entrada* e não *porta de entrada*).

De referir também que determinados métodos têm designações diversas quando são utilizados em diferentes áreas científicas (exemplo: a designação *Método dos Momentos* utilizada pelos engenheiros electrotécnicos é conhecido por *Método dos Resíduos Ponderados* pelos matemáticos). Aqui optou-se pela terminologia utilizada pelos engenheiros electrotécnicos.

---

## *Lista de símbolos*

---

$\sigma$	condutividade eléctrica, $S\ m^{-1}$
$\delta(t)$	Função Delta de Dirac
$\pi=pi$	constante igual a 3,1415926536
$A$	<i>vector</i> potencial magnético, $W\ bm^{-1}$
$B$	densidade de fluxo magnético, $T = Wb\ m^{-2}$
$c$	velocidade da luz, $299,8 \times 10^6\ m\ s^{-1}$
$D$	densidade de fluxo eléctrico, $C\ m^{-2}$
dB	décibel
$dI$	elemento de corrente eléctrica, A
$dl$	elemento de comprimento, m
$ds$	elemento de superfície, $m^2$
$dv$	elemento de volume, $m^3$
$E$	campo eléctrico, $V\ m^{-1}$
$e$	número natural, igual a 2,7182818285
$E^i$	campo eléctrico incidente, $V\ m^{-1}$
$E^s$	campo eléctrico disperso, $V\ m^{-1}$
$f$	frequência de alimentação, Hz
$H$	campo magnético, $A\ m^{-1}$
$I$	corrente eléctrica, A
$j$	numero imaginário, igual a $\sqrt{-1}$
$J_e$	densidade superficial de corrente eléctrica, $A/m^2$

$J_m$	densidade superficial de corrente magnética equivalente, $V/m^2$
$K$	densidade linear de corrente eléctrica, $A/m$
$Q$	carga eléctrica, $C$
$R$	resistência, $\Omega$
$r, \theta, \phi$	coordenadas esféricas
$S$	superfície, $m^2$
$S$	<i>vector</i> de Poynting, $W m^{-1}$
$t$	tempo, $s$
$X$	reactância, $\Omega$
$x, y, z$	coordenadas rectangulares
$Y$	admitância, $S$
$Z$	impedância, $\Omega$
$Z_0$	impedância intrínseca do vazio, $120\pi \Omega$
$\Phi$	escalar potencial eléctrico, $C m^{-2}$
$\beta$	$\left(\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ constante de propagação, $(rad) m^{-1}$
$\beta_0=k$	$\left(\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$ constante de propagação no vazio, $(rad) m^{-1}$
$\epsilon$	permitividade eléctrica, $F m^{-1}$
$\lambda$	comprimento de onda, $m$
$\mu$	permeabilidade magnética, $H m^{-1}$
$\rho'$	resistividade magnética equivalente, $\Omega m^{-1}$
$\rho, \phi, z$	coordenadas cilíndricas
$\omega$	frequência angular, $(rad) s^{-1}$

---

## Notação

---

$A$	grandeza escalar
$\vec{A}$	grandeza vectorial
$\underline{A}$	fasor <sup>1</sup>
$\hat{x}$	versor (vector unitário)
$\underline{x}^*$	conjugado complexo
$[b_{ij}]=[B]$	matriz
$\nabla \times (\cdot)$	rotacional
$\nabla \cdot (\cdot)$	divergência
$\langle \cdot \rangle$	produto escalar
$(\cdot) \cdot (\cdot)$	produto escalar no espaço ordinário
$(\cdot) \times (\cdot)$	produto vectorial no espaço ordinário
$\text{Re} [ \ ] ; \text{Im} [ \ ]$	parte real de [ ]; parte imaginária de [ ]

---

<sup>1</sup>Neste trabalho ocorrem grandezas sinusoidais do tipo:

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

estas grandezas podem ser representadas por

$$i(t) = \text{Re} \left[ \sqrt{2}I e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right] = \text{Re} \left[ \sqrt{2}I e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} \right]$$

fazendo  $\underline{I} = I e^{j\varphi}$ , vem

$$i(t) = \text{Re} \left[ \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega_0 t} \right]$$

esta relação está implícita no que se designa por Transformada de Steinmetz:

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega_0 t + \varphi) \leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi}$$

---

## *Lista de siglas*

---

ABC	<i>Absorbing Boundary Condition</i>
ACES	<i>Applied Computational Electromagnetics Society</i>
BEM	<i>Boundary Element Method</i>
CGM	<i>Conjugate Gradient Method</i>
CPW	<i>Coplanar Waveguide</i>
EFIE	<i>Electric Field Integral Equation</i>
EMC	<i>Electromagnetic Compatibility</i>
EMI	<i>Electromagnetic Interference</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FA	Factor de agrupamento
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i>
FDFD	<i>Finite Difference Frequency Domain</i>
FVTD	<i>Finite Volume Time Domain</i>
GMT	<i>Generalized Multipole Method</i>
GO	<i>Geometrical Optics</i>
GTD	<i>Geometric Theory of Diffraction</i>
HT	<i>Hybrid Techniques</i>
MFIE	<i>Magnetic Field Integral Equation</i>
MM	<i>Moment Method</i>
NEC	<i>Numerical Electromagnetics Code</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation</i>

PEC	<i>Perfectly Electrical Conductor</i>
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
PO	<i>Physical Optics</i>
PTD	<i>Physical Theory of Diffraction</i>
TEM	<i>Transverse Electromagnetic</i>
TLM	<i>Transmission Line Matrix Method</i>
RCS	<i>Radar Cross Section</i>
UTD	<i>Uniform Theory of Diffraction</i>
VSWR	<i>Voltage Standing Wave Ratio</i>

---

## *Prefácio*

---

Nesta dissertação são estudados modelos que relacionam estruturas físicas unidimensionais com o respectivo diagrama de radiação, daí dar um ênfase ao significado de modelo neste prefácio.

Ao apresentar um modelo, várias questões vão surgir: Porquê a escolha deste modelo e não de outro? Qual o melhor modelo? Quais as limitações ao método baseado no modelo? Não deveria o método ser exacto, isto é, porquê a necessidade de comparar resultados calculado com os obtidos experimentalmente?

Estas questões têm todo o sentido; grande parte do trabalho de investigação consiste na procura das respostas. Por agora limito-me a citar Jorge Buescu, que escreve algo que considero resumir o que se aprendeu ao longo da história da ciência neste contexto:

«Temos de ter a consciência de que as teorias científicas, mesmo as mais elaboradas e sofisticadas, são modelos para a realidade e não a realidade em si; isto é, descrevem um mundo idealizado no qual são válidas determinadas leis, comparando em seguida o resultado dessa idealização com o mundo real.»

Esta afirmação não representa uma visão pessimista quanto ao conhecimento, mas apenas uma visão realista. A história da ciência está repleta de exemplos em que determinada teoria tida como certa se revelou insuficiente ou mesmo errada. Afinal, as Leis de Newton e a Mecânica Clássica consideradas universais durante muitos anos, viriam a mostrar-se adequadas apenas ao dia a dia, não sendo aplicadas a objectos que se movam próximo da velocidade da luz, ou para entidades tão pequenas como os átomos, ou - em alguns aspectos - para objectos tão pesados como as estrelas. Considero então que a noção das limitações de um modelo só contribuem para a sua validação dentro de determinados pressupostos, isto é, para determinar o seu campo de aplicação.

«As ciências não tentam explicar; dificilmente tentam interpretar, apenas constroem modelos. Por um modelo entende-se uma construção matemática que, juntamente com certas interpretações verbais, descreve os fenómenos observados. A justificação de uma tal construção matemática é, única e exclusivamente, a de que se espera que funcione.»

John Von Neumann

---

# Capítulo 1

---

## *Introdução*

### **1.1 Introdução**

A determinação das características de radiação de uma estrutura radiante, quer iluminada, quer alimentada em alguns dos seus pontos, passa pela determinação da distribuição das fontes e posteriormente pela obtenção do diagrama de radiação.

A determinação da distribuição das fontes pode envolver a resolução de equações integro-diferenciais (sujeitas a condições fronteira), o que analiticamente pode ser bastante complexo, senão impossível.

A análise de uma estrutura real implica normalmente a utilização de métodos numéricos, para evitar a complexidade analítica.

A determinação do campo total é feita normalmente por adição dos campos radiados pelas fontes individuais, considerando o fenómeno linear. Estudos indicam que é possível relacionar a distribuição das fontes de radiação e o diagrama de radiação pela Transformada de Fourier.

O uso de métodos numéricos levanta a possibilidade de obter uma relação directa entre a excitação e o diagrama de radiação, sujeita a determinadas aproximações.

## 1.2 Objectivos da dissertação

Neste trabalho pretende-se obter directamente o factor de agrupamento e o diagrama de radiação a partir de uma estrutura radiante unidimensional, pesquisando simultaneamente a possibilidade do uso deste procedimento a agrupamentos multidimensionais.

Paralelamente procura-se também fazer um levantamento dos métodos numéricos actualmente mais usados na resolução de problemas de radiação, aproveitando de entre eles aquele que melhor pode servir os objectivos desta dissertação.

## 1.3 Estrutura da dissertação

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

O presente capítulo apresenta uma introdução ao trabalho, o objectivo geral e a estrutura da dissertação.

No capítulo 2 é apresentado um resumo da pesquisa bibliográfica efectuada sobre os métodos existentes na análise de estruturas radiantes, com incidência no estudo de antenas .

No capítulo 3 é analisada a aplicação do método dos momentos. Esta análise incide sobre a sua utilização em antenas lineares, antenas filamentosas de geometria variável e agrupamentos de antenas.

O capítulo 4 apresenta um operador único que relaciona uma estrutura unidimensional com o diagrama de radiação de forma directa, e apresenta a possibilidade do uso deste procedimento a agrupamentos multidimensionais

No capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de aplicação do programa baseado no operador único, realizado no âmbito do trabalho.

No capítulo 6 são apresentadas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

No final da dissertação são apresentados quatro anexos:

O anexo A apresenta algumas funções especiais utilizadas no trabalho.

O anexo B apresenta uma lista de programas disponíveis para a análise de estruturas radiantes.

O anexo C apresenta o programa NEC, utilizado para determinar a relação entre a estrutura analisada e a distribuição de fontes.

O anexo D apresenta a listagem de um programa de análise desenvolvido no âmbito desta dissertação.

Por último apresenta-se a bibliografia utilizada neste trabalho.

---

## Capítulo 2

---

### *Resumo da pesquisa bibliográfica*

#### **2.1 Introdução**

Como foi referido no capítulo 1, a determinação das características de radiação de uma estrutura radiante, quer iluminada, quer alimentada em alguns dos seus pontos, passa pela determinação da distribuição das fontes e posteriormente pela obtenção do diagrama de radiação. O estudo de estruturas riantes é realizado, nesta dissertação, utilizando técnicas computacionais. Estas técnicas têm revolucionado a forma como os problemas de electromagnetismo são analisados.

Os métodos usados na resolução dos problemas referidos baseiam-se geralmente em uma de duas categorias: técnicas analíticas e técnicas numéricas.

Os métodos analíticos, para resolução de equações ou outros modelos matemáticos que ocorrem em problemas de engenharia ou ciência aplicada, são preferíveis, uma vez que dão soluções gerais em vez de particularizadas, para além de uma maior informação quanto à natureza e dependência dessas funções. Contudo a maior parte dos problemas de engenharia

são, em geral, complexos, muitas vezes envolvendo fenómenos não-lineares pelo que é comum encontrarmo-nos numa situação em que os nossos conhecimentos de matemática não são suficientes para a descoberta duma solução analítica para um problema real [42]. Na resolução de equações diferenciais, é raro encontrar-se um problema que possa ser resolvido analiticamente a menos que se imponham condições de simplificação dos modelos respectivos.

No caso dos problemas de electromagnetismo, as técnicas analíticas baseiam-se em simplificações impostas à geometria a analisar enquanto as técnicas numéricas procuram resolver as equações do campo de forma directa, sujeitas às condições fronteira na geometria.

Com o desenvolvimento de rápidos e eficientes computadores digitais nos anos 60, o papel dos métodos numéricos na resolução deste tipo de problemas aumentou de forma considerável.

Até recentemente, não era feita qualquer referência a métodos numérico avançados na maioria dos cursos de engenharia electrotécnica conhecidos. A literatura não apresentava capítulos sobre o assunto, com a excepção de W. Stutzman [7] e C. A. Balanis [8] que incluem capítulos introdutórios ao método dos momentos (no entanto não são feitas referências a outros métodos). Actualmente uma pesquisa na Internet revela a existência de cursos de pós-graduação que incluem um estudo de técnicas numéricas avançadas.

A pesquisa bibliográfica ficou dependente da encomenda de livros mais recentes, [16] de 1996, [17] de 1995 e [19] de 1996, por exemplo; da consulta de artigos em publicações (em especial na *Transactions on Antennas and Propagation* da IEEE), e de pesquisa na Internet.

A pesquisa na Internet permitiu consultar resumos de artigos, informações sobre métodos em desenvolvimento em determinadas universidades, aceder a programas (uma lista é

apresentada no Anexo B), obter artigos de vários arquivos não comerciais e dos próprios autores.

A grande importância dos métodos numéricos é reconhecida na edição especial sobre técnicas numéricas avançadas em electromagnetismo da publicação *Transactions on Antennas and Propagation* da IEEE de Março de 1997 [38]. No editorial afirma-se que a maioria dos artigos publicados numa edição típica utiliza métodos numéricos para a análise de determinada aplicação, e vários são dedicados quase exclusivamente ao aperfeiçoamento de algoritmos numéricos.

De seguida faz-se um resumo das diferentes técnicas numéricas mais utilizadas para analisar problemas de electromagnetismo. Trata-se de um campo bastante vasto, engloba problemas de interferência electromagnética (EMI), compatibilidade electromagnética (EMC), antenas, guias de onda, máquinas eléctricas, dispositivos semicondutores, *microstrips*, absorção de radiação electromagnética em corpos biológicos, etc..

Um grande número de técnicas numéricas diferentes para a resolução de problemas de electromagnetismo estão disponíveis. Cada técnica numérica é mais adequada à análise de um tipo particular de problema .

A incidência da pesquisa é feita sobre os métodos aplicados na análise de antenas. No entanto são feitas referências a métodos com outras aplicações. Notar que, por exemplo, o método FDTD que não tinha aplicação nesta área até meados dos anos 80 (não permitia o cálculo do campo afastado e do diagrama de radiação entre outros problemas), encontra-se actualmente bastante desenvolvido, defendendo os seus autores determinadas vantagens relativamente ao método MM. Logo não é de excluir que determinado método considerado actualmente mais eficaz, venha a ser suplantado por outro.

De notar que alguns métodos também são utilizados por matemáticos, engenheiros físicos, civis, mecânicos e electrotécnicos. No entanto nota-se que o mesmo método tem por vezes designações diferentes conforme o campo onde é aplicado, como é o caso do Método dos Momentos designado Método dos Resíduos Ponderados pelos matemáticos e conhecido por *Boundary Integral Element Method* na engenharia civil. Estes métodos são bastante complexos, por vezes utilizando notação matemática pouco acessível. O que se apresenta é a abordagem seguida pelos receptivos autores. Nota-se que a maioria dos autores não apresenta grandes preocupações de demonstração matemática, dando maior ênfase às aplicações práticas. É dado um maior destaque ao Método dos Momentos por razões que serão apresentadas posteriormente enquanto outros métodos têm apenas uma referência, omitindo-se a formulação matemática, por se considerar de aplicação limitada ao presente trabalho.

## 2.2 Método dos Momentos, MM

O *método dos momentos* é uma técnica de resolução de equações integrais complexas por redução destas a um sistema de equações lineares simples. Este método utiliza uma técnica conhecida por *método dos resíduos ponderados*. Na realidade os termos método dos resíduos ponderados e método dos momentos são sinónimos.

Nota: A origem do termo *moment method* é incerta. O método é também designado por [3] *método das projecções* ou *método Petrov-Galerkin* e é semelhante ao *conceito de reacção de Rumsey*. A designação *moment method* tem origem na literatura russa. Os primeiro trabalhos publicados no MM devem-se [11] a N. M. Krylov no período 1925-1926. Na literatura ocidental a designação é atribuída a R. F. Harrington. Harrington decidiu usar a designação utilizada por Kantorovich e Krylov; as referências principais no seu livro *Field Computation by Moment Methods* (1968), [15].

O estudo efectuado sobre o *método dos resíduos ponderados* [1] mostra que a estimativa dos resíduos é efectuado recorrendo a um método matemático designado por *method of moments* (as referências utilizadas por Harrington são traduções de russo para inglês).

No entanto, a Harrington é atribuído "o trabalho pioneiro que demonstra o poder e flexibilidade desta técnica numérica na resolução de problemas de electromagnetismo", [27].

A formulação matemática do MM apresentada neste trabalho é a seguida por Harrington em [15].

Todas as técnicas dos resíduos ponderados começam por estabelecer um conjunto de funções solução de base com um ou mais parâmetros variáveis. Os *resíduos* são uma medida da diferença entre a solução de base e a solução real. Os parâmetros variáveis são determinados de forma a garantir uma melhor aproximação das funções de base com base na minimização dos resíduos.

A equação a resolver pelo método dos momentos tem a forma da *equação integral do campo eléctrico* (EFIE) ou *equação integral do campo magnético* (MFIE). Ambas as equações podem ser obtidas das equações de Maxwell considerando o problema de um campo disperso por um condutor perfeito (ou dieléctrico sem perdas). Estas equações têm a forma:

$$\text{EFIE:} \quad E = f_e ( J ) \quad (2.1)$$

$$\text{MFIE:} \quad H = f_m ( J ) \quad (2.2)$$

onde os termos do lado esquerdo destas equações correspondem aos campos incidentes e  $J$  representa a corrente induzida.

A forma da equação integral utilizada determina o tipo de problema para o qual o método dos momentos é mais indicado para resolver. Por exemplo, uma forma da EFIE (Pocklington, Hallén, etc.) pode ser adequada para analisar estruturas com condutores filamentosares enquanto

outra forma é mais adequada para analisar estruturas com placas metálicas. Normalmente estas equações são expressas no domínio da frequência, no entanto o método dos momentos também pode ser aplicado no domínio do tempo [27].

### 2.2.1. Formulação matemática do Método dos Momentos

Pretende-se encontrar a função  $f$  (*campo* ou *resposta*) na transformação linear

$$L(f) = g \quad (2.3)$$

em que  $g$  é uma função conhecida (*fonte* ou *excitação*) e  $L$  o operador da transformação, que pode ser diferencial, integral ou integro-diferencial.

Expandindo  $f$  numa série de funções  $f_n$  conhecidas (no domínio de  $L$ )

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2.4)$$

em que os  $\alpha_n$  são constantes e as funções  $f_n$  são denominadas *funções de base* ou *expansão*. Para soluções exactas, (2.4) é normalmente um somatório infinito e os  $f_n$  formam um conjunto completo de soluções de base. Para soluções aproximadas, (2.4) é normalmente um somatório finito [15].

Desta forma, a transformação inicial pode ser decomposta numa série de transformações das funções de base (atendendo à linearidade de  $L$ )

$$L(f) = L\left(\sum_n \alpha_n f_n\right) = \sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (2.5)$$

em que as incógnitas são agora as escalares  $\alpha_n$ . Notar que, quando se considera a solução aproximada com  $N$  funções de base, a expansão da equação (2.5) corresponde a uma equação com  $N$  incógnitas, o que não é suficiente para as determinar.

Para determinar os escalares  $\alpha_n$  efectua-se o produto escalar com um conjunto de funções conhecidas  $w_m$  chamadas *funções de teste* ou *peso*. O produto escalar  $\langle f, g \rangle$  é uma operação escalar que satisfaz as leis

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (2.6)$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad (2.7)$$

$$\langle f^*, f \rangle > 0 \quad \text{se} \quad f \neq 0 \quad (2.8)$$

$$\langle f^*, f \rangle = 0 \quad \text{se} \quad f = 0 \quad (2.9)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares e o símbolo \* indica complexo conjugado. Um produto escalar típico mas não único é [8]

$$\langle f, g \rangle = \iint_S f \cdot g \, ds \quad (2.10)$$

em que  $S$  é a superfície da estrutura em análise. Notar que as funções  $f$  e  $g$  podem ser vectores.

Assim, para cada função  $w_m$

$$\langle g, w_m \rangle = \langle \sum_n \alpha_n L(f_n), w_m \rangle = \sum_n \alpha_n \langle L(f_n), w_m \rangle \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

Esta relação corresponde a um sistema de equações

$$\begin{matrix} m = 1 \\ m = 2 \\ \vdots \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 \langle w_1, Lf_1 \rangle + \alpha_2 \langle w_1, Lf_2 \rangle + \dots = \langle w_1, g \rangle \\ \alpha_1 \langle w_2, Lf_1 \rangle + \alpha_2 \langle w_2, Lf_2 \rangle + \dots = \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{cases} \quad (2.13)$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ou seja

$$[\ell_{mn}] \cdot [\alpha_n] = [g_m] \quad (2.15)$$

com

$$\begin{aligned} \ell_{mn} &= \langle w_m, L f_n \rangle \\ g_m &= \langle w_m, g \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se a matriz  $[\ell]$  é não singular, a sua inversa  $[\ell^{-1}]$  existe e os  $\alpha_n$  são dados por:

$$[\alpha_n] = [\ell_{mn}^{-1}] [g_m] \quad (2.17)$$

e a solução de  $f$  por

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2.18)$$

Definindo a matriz de funções

$$[\tilde{f}_n] = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots] \quad (2.19)$$

vem

$$f = [\tilde{f}_n] \cdot [\alpha_n] = [\tilde{f}_n] \cdot [\ell_{mn}^{-1}] \cdot [g_m] \quad (2.20)$$

Esta solução pode ser exacta ou aproximada dependendo da escolha dos  $f_n$  e  $w_m$ . Quando as funções de teste são iguais às funções de base, o método é conhecido por *Método de Galerkin*.

### 2.2.2 Funções de base

Um passo muito importante na aplicação de um método numérico é a escolha das funções de base. Em geral escolhe-se um conjunto de funções do género da função desconhecida (parece contraditório mas normalmente -de acordo com o problema- sabemos o tipo de função que vamos encontrar) tendo em atenção o tempo de computação necessário na sua utilização [8].

Teoricamente, existe um número infinito de funções de expansão que podemos utilizar. No entanto, apenas um número limitado é utilizado [8]. Em [25] são apresentadas algumas regras a seguir na escolha das funções de base. Os  $f_n$  devem ser linearmente independentes e escolhidos de forma a que a sobreposição (2.4) aproxime  $f$  de forma razoável.

Estes conjuntos de funções podem ser divididos em duas classes. A primeira é a classe de funções de *subdomínio*, as quais são diferentes de zero apenas em subdomínios de  $f$ . A segunda classe é constituída por funções de *todo-o-domínio*, aquelas que são diferentes de zero em todo o domínio de  $f$ .

### 2.2.2.1 Funções de *subdomínio*

As funções de subdomínio são as mais utilizadas, pois ao contrário das funções de *todo-o-domínio* não implicam o conhecimento antecipado da natureza da função a determinar.

A utilização de funções de subdomínio implica a subdivisão da estrutura em  $N$  segmentos não sobrepostos, como indicado na figura 2.1(a). Para simplificar a representação, consideram-se segmentos colineares de igual comprimento, embora nenhuma destas condições seja necessária.

Exemplos de funções de subdomínio são apresentados a seguir (distribuições representativas destas funções são representadas na figura 2.1):

Nota: a função  $f$  é avaliada no intervalo  $z_0 \leq z \leq z_N$ ; para salientar este facto os autores [6,8] utilizam a notação  $z'$  para a variável  $z$  nesse intervalo.

**Piecewise Constant (Impulso unitário)**

$$f_n(z') = \begin{cases} 1 & , z'_{n-1} \leq z' \leq z'_n \\ 0 & , \text{ outros casos} \end{cases} \quad (2.21)$$

**Piecewise Linear**

$$f_n(z') = \begin{cases} \frac{z' - z'_{n-1}}{z'_n - z'_{n-1}} & , z'_{n-1} \leq z' \leq z'_n \\ \frac{z'_n - z'_{n-1}}{z'_{n+1} - z'_n} & , z'_n \leq z' \leq z'_{n+1} \\ 0 & , \text{ outros casos} \end{cases} \quad (2.22)$$

**Piecewise Sinusoid**

$$f_n(z') = \begin{cases} \frac{\text{sen} \left[ k \left( z' - z'_{n-1} \right) \right]}{\text{sen} \left[ k \left( z'_n - z'_{n-1} \right) \right]} & , z'_{n-1} \leq z' \leq z'_n \\ \frac{\text{sen} \left[ k \left( z'_{n+1} - z' \right) \right]}{\text{sen} \left[ k \left( z'_{n+1} - z'_n \right) \right]} & , z'_n \leq z' \leq z'_{n+1} \\ 0 & , \text{ outros casos} \end{cases} \quad (2.23)$$

**Truncated Cosine**

$$f_n(z') = \begin{cases} \cos \left[ k \left( z' - \frac{z'_n + z'_{n-1}}{2} \right) \right] & , z'_{n-1} \leq z' \leq z'_n \\ 0 & , \text{ outros casos} \end{cases} \quad (2.24)$$

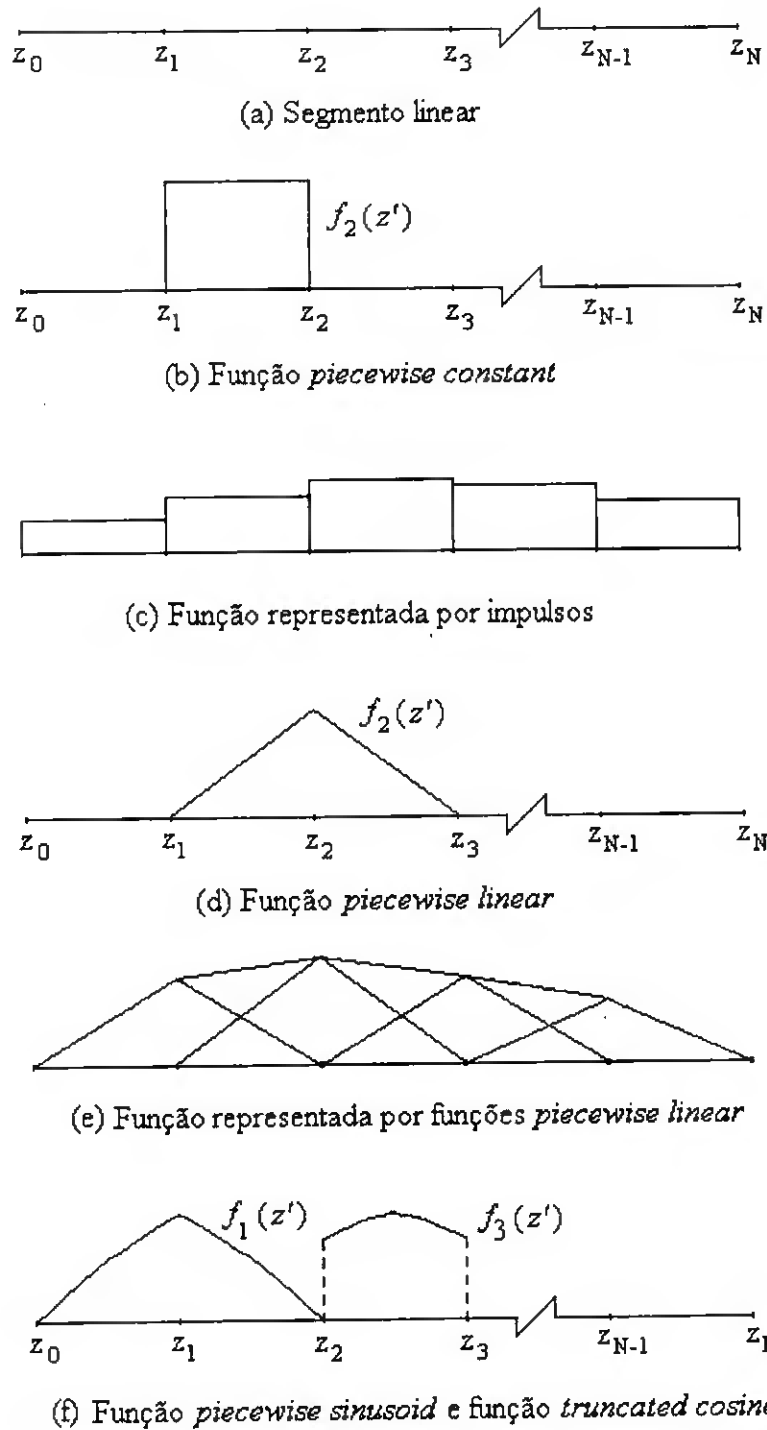


Figura 2.1 Funções de expansão típicas e distribuições representativas

Exemplos de outras funções de subdomínio podem ser encontradas em [21]. Uma função com interesse especial neste trabalho é a função *Spline* utilizada no programa NEC (Anexo B), definida por [21] e representada na figura 2.2:

$$\Omega_n(z') = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{z' - z'_{n-3/2}}{\Delta} \right)^2, & z' \in (z'_{n-3/2}, z'_{n-1/2}) \\ \frac{3}{4} - \left( \frac{z' - z'_n}{\Delta} \right)^2, & z' \in (z'_{n-1/2}, z'_{n+1/2}) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{z' - z'_{n+3/2}}{\Delta} \right)^2, & z' \in (z'_{n+1/2}, z'_{n+3/2}) \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad (2.25)$$

onde  $\Delta = (z'_N - z'_0) / N$ .

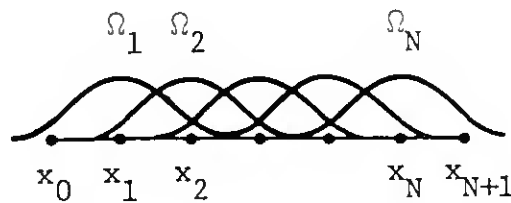


Figura 2.2 Funções *Spline*

### 2.2.2.2 Funções de *todo-o-domínio*

As funções de *todo-o-domínio* são definidas e diferentes de zero em todo o domínio da função  $f$ . Uma função de base comum é

$$f_n(z') = \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi z'}{L} \right], \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2} \quad (2.26)$$

em que  $L = z'_N - z'_0$ .

Esta função é útil no cálculo da distribuição de corrente num dipolo, que se sabe ter distribuição essencialmente sinusoidal [8].

Outras funções de expansão de todo-o-domínio são, por exemplo, os polinómios de Tchebyscheff, Maclaurin, Legendre, e Hermite.

### 2.2.3 Funções de Teste

A escolha das funções de teste é importante na medida em que os elementos  $w_m$  devem ser linearmente independentes, de forma que as  $N$  equações em (2.13) sejam linearmente independentes.

A condição de independência linear entre elementos e a vantagem da simplificação do programa são características importantes na escolha de funções de teste. Por esta razão, a escolha de funções de teste semelhantes às funções de base é geralmente adoptada. Em particular, uma escolha possível é de funções de teste iguais às funções de base, isto é,  $w_m = f_n$  (Método de Galerkin).

#### 2.2.3.1 *Point Matching* ou *Collocation*

A integração necessária na obtenção de  $\ell_{mn} = \langle w_m, L f_n \rangle$  é geralmente difícil de realizar em problemas práticos. Notar que temos  $N^2$  termos a calcular, cada termo requer duas ou mais integrações; pelo menos uma para determinar  $L(f_m)$  e uma para efectuar o produto escalar (2.10).

Existe, no entanto, um conjunto de funções de teste que reduzem o número de integrações necessárias. Trata-se do conjunto de funções Delta de Dirac (A-1)

$$w_m = \delta(p - p_m)$$

em que  $p$  especifica a posição em relação a uma referência (origem), e  $p_m$  representa o ponto onde a condição fronteira deve ser verificada.

Fisicamente, a utilização de funções Delta de Dirac corresponde a exigir que a equação (2.5) seja satisfeita em pontos discretos da região de interesse, daqui o nome *Point Matching*.

Um aspecto importante nesta técnica é a posição dos  $N$  pontos ( $p_m$ s). Em geral, pontos equiespaçados resultam em bons resultados [8]; no entanto isto depende da função de base utilizada. Quando utilizadas funções de subdomínio em conjunção com o método *Point Matching*, um ponto de teste deve existir em cada subsecção (para manter a independência linear). A colocação dos pontos no centro dos segmentos produz bons resultados. É importante que o ponto de teste não coincida com um ponto de descontinuidade da derivada da função base (o pico da função triangular, por exemplo). Isto pode provocar erros em certas situações.

A escolha das funções de base e de teste influenciam (1) o número de funções de expansão necessárias para obter resultados satisfatórios, (2) o tempo de computação, e (3) a simplicidade do programa [6].

Porque permite uma precisão aceitável com vantagem computacional, o método de teste *Point Matching* é o mais utilizado na resolução de problemas de electromagnetismo pelo método dos momentos [8].

### **2.3 Conjugate Gradient Method**

O método *Conjugate Gradient Method* é uma técnica baseada no método dos resíduos ponderados. Esta técnica é semelhante ao método dos momentos, difere apenas em dois

pontos [27]. O primeiro diz respeito à forma como as funções de teste são utilizadas e o segundo ao método como é resolvido o sistema de equações lineares.

No método dos momentos é definido um produto interno entre duas funções  $f$  e  $g$  como

$$\langle f, g \rangle = \iint_S f \cdot g \, ds \quad (2.27)$$

Este produto interno é denominado *produto simétrico*. O método *Conjugate Gradient Method* utiliza uma forma diferente do produto interno denominado *produto interno de Hilbert*. Este é definido como

$$\langle f, g \rangle = \iint_S f \cdot g^* \, ds \quad (2.28)$$

onde  $*$  indica conjugado complexo. Se ambas as funções são reais, estas duas definições são equivalentes.

A outra diferença entre o método dos momentos e o *Conjugate Gradient Method* está relacionada com a técnica utilizada para resolver o sistema de equações que estes métodos geram. O método dos momentos geralmente utiliza o *método de Gauss-Jordan* ou outro método directo. O *conjugate gradient method* utiliza um método iterativo. Este procedimento é denominado *method of conjugate gradients*. Métodos iterativos como o *method of conjugate gradients* são eficientes quando aplicados a matrizes esparsas (matrizes com um número relativamente pequeno de elementos não nulos [1]) de grande dimensão [27].

#### 2.4 *Boundary Element Method* (BEM)

O método *Boundary Element Method* (BEM) é outra técnica dos resíduos ponderados. Consiste no método dos momentos com funções de base e funções de teste definidas apenas na superfície fronteira.

## 2.5 Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, FDTD

O método das diferenças finitas no domínio do tempo (*Finite-Difference Time-Domain Method*, FDTD) é baseado na solução directa das equações de Maxwell no domínio do tempo, dadas por (na forma apresentada por A. Taflove, [17]):

$$\nabla \times \bar{E} = -\rho' \bar{H} - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.30)$$

Nota: vários autores consideram *conveniente* e *útil* a introdução de correntes e cargas magnéticas fictícias como técnica de análise de determinados problemas de electromagnetismo, [4,10,14,16]. Assim,  $\bar{J}_e = \sigma \bar{E}$  é a densidade de corrente eléctrica e  $\bar{J}_m = \rho' \bar{H}$  representa a densidade de corrente magnética equivalente (ver lista de símbolos).

De forma a seguir o algoritmo introduzido por Kane Yee em 1966 [32], escrevem-se as equações anteriores na seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{E} - \frac{\rho'}{\mu} \bar{H} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \bar{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \bar{E} \quad (2.32)$$

De seguida escrevem-se as componentes vectoriais do operador rotacional de forma a obter o sistema de seis equações escalares no sistema de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right) \quad (2.33a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho' H_y \right) \quad (2.33b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho' H_z \right) \quad (2.33c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \sigma E_y \right) \quad (2.34b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \sigma E_z \right) \quad (2.34c)$$

### 2.5.1 O algoritmo de Yee

Em 1966, Kane Yee propôs um conjunto de equações de diferenças finitas para os sistemas de equações (2.33) e (2.34). Para compreender este conjunto de equações é necessário tratar os campos como sendo discretos em vez de contínuos no espaço, como indicado na figura 2.2.

A figura 2.3 representa uma célula unitária ou *célula de Yee*, de dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  em que as componentes dos campos eléctrico e magnético se encontram entrelaçadas. Assim, cada componente do campo magnético existe no ponto médio de cada lado da célula e cada componente do campo eléctrico existe no centro da superfície. Notar que cada componente do vector campo eléctrico é rodeado por quatro componentes do vector campo magnético. Também se pode assumir que cada componente do campo eléctrico existe no ponto médio de

cada lado e cada componente do campo magnético existe no centro da superfície, sendo a escolha arbitrária [17].

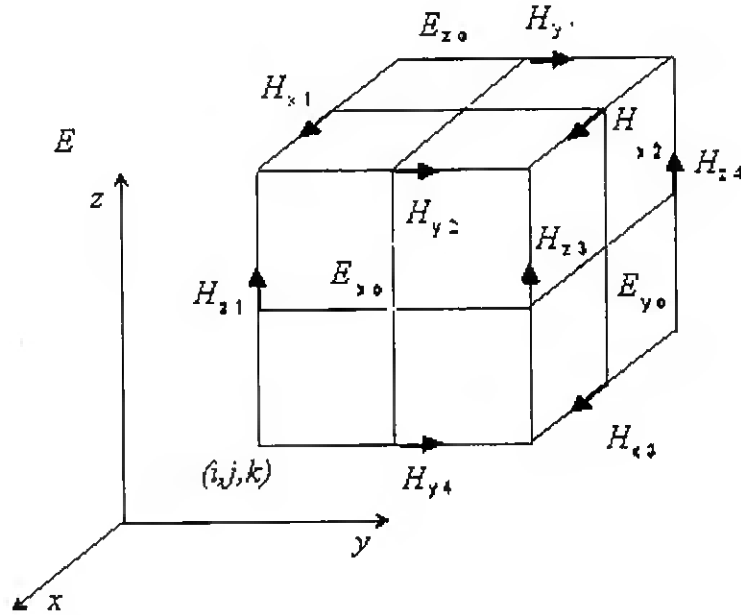


Figura 2.3 Célula unitária



Se considerarmos a variável temporal dividida em intervalos de tempo discretos  $\Delta t$ , então os valores dos campos podem ser calculados a partir dos seus valores anteriores.

### 2.5.2 Diferenças finitas e notação

Seguindo a notação de Yee, representamos um ponto numa malha (*lattice*) rectangular uniforme por

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (2.35)$$

onde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são, respectivamente, os incrementos espaciais nas direcções das coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , e  $i, j$ , e  $k$  são números inteiros.

Denota-se uma função do espaço e do tempo num ponto discreto da malha num instante discreto de tempo por

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (2.36)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento temporal, que se assume uniforme no intervalo de observação, e  $n$  é um inteiro.

A expressão para a primeira derivada parcial de  $u$  em ordem ao espaço na direcção  $x$ , no instante  $t_n = n\Delta t$  é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2.37)$$

Onde  $O[(\Delta x)^2]$  é a notação simplificada para o termo restante, introduzido pela truncagem de séries. Diz-se que o erro é de ordem  $(\Delta x)^2$  ou simplesmente  $O[(\Delta x)^2]$  e representa termos não superiores a  $(\Delta x)^2$  [2].

As aproximações numéricas para  $\partial u/\partial y$  e  $\partial u/\partial z$  são obtidas por incremento dos índices  $j$  e  $k$  de  $u$  por  $\pm 1/2\Delta y$  ou  $\pm 1/2\Delta z$ , respectivamente.

A expressão para a primeira derivada parcial em ordem ao tempo de  $u$ , no ponto  $(i, j, k)$  é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (2.38)$$

### 2.5.3 Equações de Maxwell em três dimensões

Considere-se a equação (2.33a), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right) \quad (2.39)$$

Aplicando a notação apresentada atrás, substituem-se as derivadas espaciais e temporais por diferenças finitas, para o ponto  $(i, j, k)$  no passo temporal  $n$ . Assim, a equação (2.33a) fica

$$\frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_{i,j,k}} \left( \frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1,k}^n - E_z|_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} - \rho'_{i,j,k} H_x|_{i,j,k}^n \right) \quad (2.40)$$

Notar que todas as quantidades no lado direito são avaliadas no passo  $n$ . Como  $H_x$  no instante  $n\Delta t$  não está armazenado na memória do computador, é necessário estimar este valor. Para tal utiliza-se uma aproximação denominada *semi-implícita* dada por:

$$H_x|_{i,j,k}^n = \frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{2} \quad (2.41)$$

Isto é,  $H_x$  no passo  $n$  é considerado como a média aritmética do valor de  $H_x$  no passo  $n-1/2$  (armazenado na memória) com o valor de  $H_x$  no passo  $n+1/2$  (ainda por calcular).

Substituindo (2.41) em (2.40) obtém-se para  $H_x$  a seguinte expressão:

$$H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left( \frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \left( \frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (2.42a)$$

De forma análoga obtém-se as expressões para  $H_y$  e  $H_z$ :

$$\begin{aligned}
 H_y \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} &= \left( \frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) H_y \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} \\
 &+ \left( \frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{E_z \Big|_{i+1/2,j,k}^n - E_z \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{E_x \Big|_{i,j,k+1/2}^n - E_x \Big|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.42b}$$

$$\begin{aligned}
 H_z \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} &= \left( \frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) H_z \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} \\
 &+ \left( \frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{E_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n - E_x \Big|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} - \frac{E_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - E_y \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.42c}$$

Seguindo um procedimento análogo, derivam-se as expressões das diferenças finitas dos campos  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  dados pelas equações de Maxwell, (2.34a) a (2.34c). Desta forma obtém-se um conjunto de três equações

$$\begin{aligned}
 E_x|_{i,j,k}^{n+1} &= \left( \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_x|_{i,j,k}^n \\
 &+ \left( \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.43a}$$

$$\begin{aligned}
 E_y|_{i,j,k}^{n+1} &= \left( \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_y|_{i,j,k}^n \\
 &+ \left( \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.43b}$$

$$\begin{aligned}
 E_z|_{i,j,k}^{n+1} &= \left( \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z|_{i,j,k}^n \\
 &+ \left( \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left( \frac{H_y|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.43c}$$

Com os sistemas (2.42) e (2.43), o novo valor de cada componente vectorial de um campo em qualquer ponto da malha depende apenas do seu valor anterior e dos valores anteriores de cada componente vectorial dos campos em pontos adjacentes. Notar que as componente do

campo eléctrico e as componente do campo magnético são calculados a intervalos de tempo  $1/2\Delta t$ .

O incremento temporal é realizado até à obtenção do regime permanente ou da solução pretendida [17].

#### 2.5.4 Análise de antenas pelo método FDTD

O método FDTD tem sido aplicado a problemas de antenas nos últimos anos. O método FDTD foi aperfeiçoado de forma a calcular diagramas de radiação e impedâncias de entrada.

As condições fronteira são dadas por:

$$\hat{n} \times (\overline{H}_2 - \overline{H}_1) = \overline{J}_s \quad (2.44)$$

$$\hat{n} \times (\overline{E}_2 - \overline{E}_1) = \overline{M}_s \quad (2.45)$$

onde  $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{E}_1$  e  $\overline{E}_2$  são campos tangenciais a determinada superfície.

A condição fronteira no tempo é a condição inicial,  $\overline{E} = \overline{H} = 0$ , em toda a malha. As condições fronteira na superfície não necessitam de ser especificadas. Isto porque a solução do conjunto de equações diferenciais auto-geram as condições fronteira [17], como é possível compreender pelo que se segue.

A figura 2.4 representa um objecto (*scatterer*) envolvido numa malha espacial. Valores de  $\mu, \epsilon$  e  $\sigma$  são atribuídos para cada componente do campo em cada célula. Desta forma ficam definidas as propriedades eléctricas e a posição do objecto e do meio envolvente.

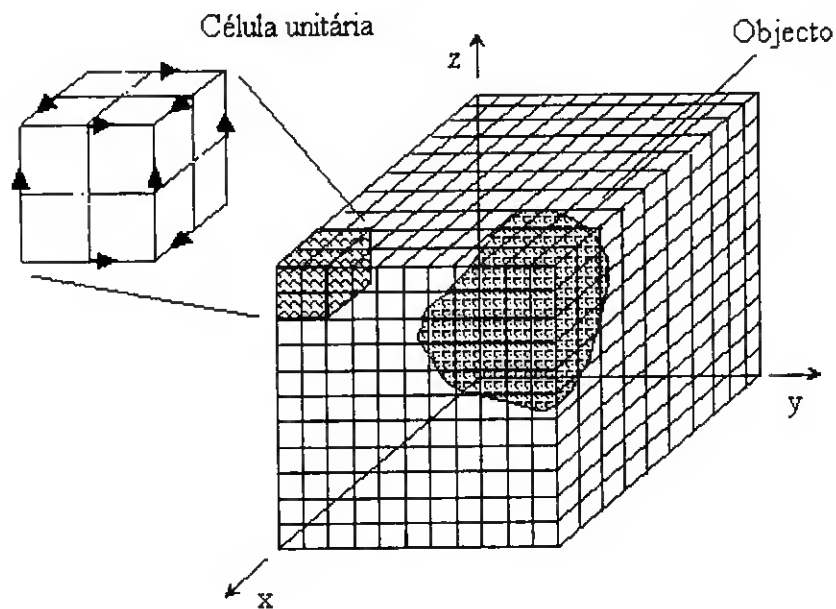


Figura 2.4 Objecto numa malha

Materiais não-lineares podem ser considerados ajustando os valores dos parâmetros a cada passo temporal.

São definidos *elementos de absorção* na fronteira exterior da malha de forma a evitar reflexões dos sinais que a atingem [17].

A quantidade de memória necessária e o tempo de computação são proporcionais ao volume da região a analisar e à resolução da malha.

### 2.5.5 Comentários

Este método utiliza como elemento básico o cubo (célula de Yee), de forma que superfícies curvas de um objecto têm uma aproximação em *escada*. Para muitos casos isto não constitui problema. No entanto para a análise de objectos com fronteiras *agudas*, uma aproximação em escada pode necessitar de uma malha de dimensões muito reduzidas. Isto implica um aumento do tempo de cálculo. Para estes casos foram desenvolvidos métodos

FDTD com elementos não rectangulares. Um método que permite que cada elemento da malha tenha uma forma arbitrária é denominado método *Finite Volume Time Domain*, FVTD [39].

O método FDTD tem uma desvantagem óbvia; para grandes configurações, a malha toma dimensões tais que os cálculos exigidos são proibitivos para a maioria dos computadores. Isto porque o volume da malha deve ser suficientemente grande para englobar todo o objecto e a região de campo próximo. Objectos com geometrias complexas exigem malhas de grande resolução. Nestes casos outras técnicas revelam-se mais adequadas.

É possível obter resultados no domínio da frequência por aplicação da transformada discreta de Fourier aos resultados no domínio do tempo. No entanto, esta solução exige mais trabalho de computação, e não tem sido utilizada [27]. A alternativa é resolver as equações de Maxwell no domínio da frequência, o que constitui o método FDFD apresentado em 2.6.

Apesar do seu potencial, o algoritmo de Yee esteve bastante limitado até ao princípio dos anos 80 devido a determinados problemas básicos [20].

1. esta formulação não permite a simulação dos campos em regiões que se estendam ao infinito;
2. não permite a simulação de uma onda incidente com duração arbitrária ou ângulo de incidência e polarização variáveis;
3. não permite obter a resposta sinusoidal estacionária a partir da resposta transitória;
4. não permite o cálculo do campo distante e do diagrama de radiação;
5. a discretização do espaço exigia recursos computacionais não disponíveis.

Publicações de A. Taflove [17], K. Umashankar [20], Mur e outros investigadores apresentam soluções para estes problemas. Os *seguidores* deste método afirmam que as maiores dificuldades com o método FDTD estão actualmente ultrapassadas.[20].

A. Taflove e K. Umashankar introduzem *meios* que permitem obter a resposta sinusoidal estacionária a partir da resposta transitória. A utilização de computadores da série CRAY, com velocidade de processamento e memória suficientes, permitem o estudo de estruturas tridimensionais de dimensões entre 20 a 30 vezes o comprimento de onda [20].

Para o cálculo do campo distante é utilizado o Teorema da Equivalência de Superfícies apresentado em [5] e [17].

Este método não permite, no entanto, estabelecer um operador na forma matricial, como se pretende neste trabalho. Desta forma, o estudo da mesma estrutura com uma pequena alteração na excitação implica a resolução de outro problema (o tempo de processamento é a principal desvantagem do método FDTD). Por outro lado, este método é utilizado para resolver o problema de análise de uma estrutura, não se prevendo a resolução do problema de síntese.

## 2.6 Método das Diferenças Finitas no Domínio da Frequência, FDFD

O método FDFD (*Finite Difference Frequency Domain*) é semelhante ao método das diferenças finitas no domínio do tempo, no entanto, neste caso são utilizadas as equações de Maxwell no domínio da frequência, dadas por:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (2.46)$$

$$\nabla \times \bar{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\bar{E} \quad (2.47)$$

A única referência a este método foi encontrada em [27]. Segundo o autor, este método é conceptualmente mais simples que o FEM. No entanto, pouca atenção tem sido dada a esta técnica na literatura, talvez devido ao facto de o estudo do FEM se apresentar mais desenvolvido.

## 2.7 Método dos Elementos Finitos, FEM

O método das diferenças finitas apresentado em 2.5 é utilizado para resolver equações diferenciais parciais (PDEs). Neste método o domínio é dividido numa malha, como indicado na figura 2.5(b). A PDE é escrita para cada nó e as derivadas substituídas por diferenças finitas. No entanto a sua aplicação é limitada quando a estrutura a analisar tem uma geometria irregular, condições fronteira especiais, ou composição não homogénea [2].

O Método dos Elementos Finitos, FEM apresenta uma alternativa ao método FDTD. Com esta técnica o domínio é dividido em regiões simples, denominadas *elementos*. Uma solução aproximada é desenvolvida para a PDE para cada um destes elementos. Como indicado na figura 2.5(c), a utilização de elementos ao contrário de uma malha rectangular, fornece uma melhor aproximação para estruturas da natureza referida.

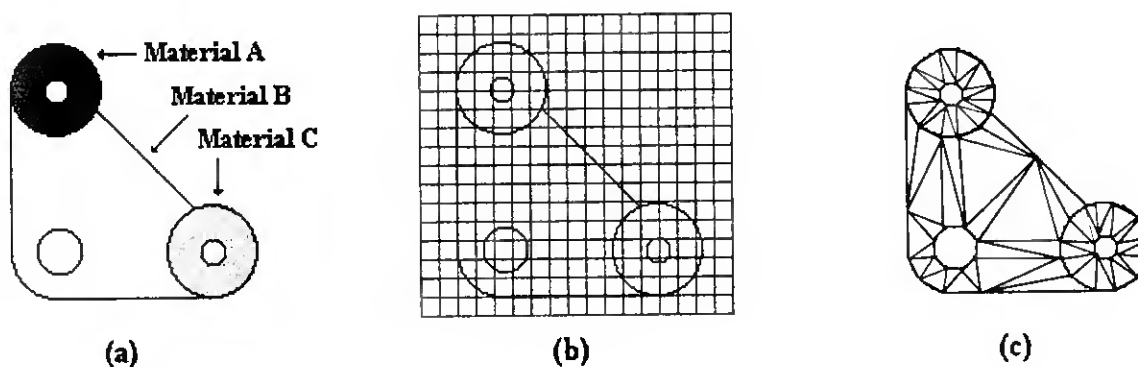


Figura 2.5 (a) Estrutura de composição não homogénea e geometria irregular. (b) Discretização pelo método FDTD. (c) Discretização pelo método FEM.

Este método tem sido utilizado em diversas áreas tais como máquinas eléctricas, guias de ondas, dispositivos semicondutores, *microstrips*, e absorção de radiação electromagnética em corpos biológicos [3]. Na análise de antenas, o método dos momentos é preferível por várias razões, sendo as principais:

1. o método FEM discretiza toda a estrutura enquanto o método MM discretiza apenas a fronteira da estrutura, de forma que o número de equações é muito maior no primeiro caso;
2. tem como resultado matrizes esparsas;
3. o método FEM é conceptualmente mais complexo.

A formulação matemática do método FEM é omitida, pois é de aplicação limitada ao trabalho presente.

### **2.8 Uniform Theory of diffraction, UTD**

A *Uniform Theory of diffraction (UTD)* é uma extensão do método *Geometrical Theory of Diffraction (GTD)*. Ambos os métodos destinam-se a análises a alta-frequência; só se aplicam quando as dimensões dos objectos em análise são *grandes* relativamente ao comprimento de onda do campo. Em geral, quando o comprimento de onda tende para zero, os campos podem ser determinados pela geometria óptica. Os métodos UTD e GTD são extensões da geometria óptica incluindo efeitos de difracção.

O interesse deste método neste trabalho é bastante limitado pois as estruturas a analisar têm dimensões próximas do comprimento de onda.

O *NEC-Basic Scattering Code (BSC)* é um programa de computador baseado no método UTD e está disponível no Electrocience Laboratory da Ohio State University. Na referência [40], apresentam-se programas e descrição da teoria da física óptica aplicada a antenas.

### **2.9 Análise crítica dos diferentes métodos**

As técnicas numéricas utilizadas na análise de problemas de electromagnetismo podem ser divididas em dois grupos. Um grupo é denominado de técnicas de alta-frequência, que inclui a geometria óptica (GO), física óptica (PO), [40], e técnicas mais elaboradas como a

*geometrical theory of diffraction (GTD)*, a *physical theory of diffraction (PTD)*, a *uniform theory of diffraction (UTD)* e a *spectral theory of diffraction*. O outro grupo é denominado de técnicas de baixa-frequência, que inclui o método dos momentos (MM), o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [17], e o método dos elementos finitos (FEM), como exemplos mais significativos.

A tabela 2.1 (referência [20]) apresenta uma avaliação da aplicação destas técnicas em termos da dimensão da estrutura a analisar.

Tabela 2.1

Dimensão da estrutura, em comprimentos de onda

Método	$< \lambda/10$	$\rightarrow \lambda$	$\rightarrow 10\lambda$	$\rightarrow 100\lambda$	$> 100\lambda$
Técnicas de alta-freq.	×	×	•	•	•
Método do Momentos	•	•	?	×	×
FDTD ou FEM	?	•	•	•	?

Significado dos símbolos:

- aplicável
- × não aplicável
- ? não se sabe se é aplicável

Muitos problemas não podem ser analisados com precisão por técnicas de baixa ou alta frequência de forma isolada. A solução para esta dificuldade tem passado pelo aperfeiçoamento dos algoritmos por parte de alguns autores. Outros autores optam por combinar as duas técnicas, de que resultam os denominados métodos híbridos (em [21] e [37] por exemplo, é possível encontrar vários métodos híbridos).

Os métodos mais utilizados no tratamento numérico dos problemas de radiação são o

Método dos Momentos (MM) e a *Uniform Theory of diffraction* (UTD). Estes dois métodos complementam-se, pois o primeiro é utilizado para tratar estruturas *pequenas* enquanto o segundo é aplicado a estruturas *grandes* em relação ao comprimento de onda. No entanto, nos últimos anos tem-se verificado um aumento de interesse pelas técnicas baseadas no *Finite Element Methods* e *Finite Difference Time Domain Methods* (este aumento de interesse pode ser verificado pelo grande aumento de publicações nesta área), estando já disponíveis vários programas baseados nestas teorias em alguns Laboratórios.

O estado-da-arte neste campo está em rápido progresso. Todos os anos as implementações destas técnicas ficam mais poderosas e precisas, de forma que novos problemas podem ser analisados. No entanto a maioria dos métodos continua em estudo.

Neste trabalho não se pretendia um estudo exaustivo sobre os diferentes métodos numéricos, mas uma visão genérica sobre os mais importantes que fossem detectados na pesquisa bibliográfica, procurando um método que relacionasse de forma matricial a excitação com as correntes na estrutura unidimensional.

Relativamente ao método dos momentos foram publicados na revista *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, cerca de quatro centenas de artigos no período 1963-1995.

A leitura dos artigos publicados na área dos métodos numéricos utilizados na análise de problemas de electromagnetismo nesta revela, no entanto, que a abordagem dos autores não tem sido a mais esclarecedora. O comentário do professor Robert E. Collin escrito em 1990 [33], sobre os artigos publicados nesta área parece resumir as principais deficiências detectadas. Dada a importância neste estudo transcrevo no original<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Este comentário é apresentado como complemento ao texto, é transcrito no original pois a tradução poderia apresentar erros e/ou deturpar o seu sentido.

*"Authors have generally been more interested in the formulation of a problem for numerical solution, than in generating numerical results. In many published papers, authors do not document studies carried out on the numerical convergence, or any assessment of the absolute accuracy achieved for their numerical results. One frequently finds that authors do not record how many basis functions were used, how the numerical results would change if the number of the basis functions were doubled, how many basis functions must be used to achieve a numerical convergence to within 1 percent, or any checks on absolute convergence to the correct answer. The user is left to the burden of trying to assess the reliability of the published results, and without sufficient information to repeat the numerical evaluation."*

Os métodos desenvolvidos por vários autores baseiam-se em métodos matemáticos avançados. No entanto, em geral, o formalismo original é omitido; são desenvolvidos algoritmos relativamente simples, e as denominações são por vezes alteradas (considero curiosa a designação de *"family recipes"* utilizada por Allen Taflove [17]). Como consequência existe uma perda de rigor matemático. Em geral, os autores não respondem a várias questões simples, tais como o número de funções de base necessárias para obter um erro mínimo com determinado método.

Ao utilizar um algoritmo ou conjunto de algoritmos para a resolução de um problema é necessário considerar todas as fontes de erro capazes de terem afectado os resultados. É importante ter em atenção a precisão requerida, estimar a grandeza de erros de arredondamento, erros de discretização, determinar o número de passos e/ou número de iterações requeridas, e permitir acções de correcção em casos de não convergência para a solução [42].

O Prof. E. Juillard escreveu *«The engineer is a guy who knows what to leave out»*; por vezes a avaliação do que *fica de fora* revela-se fundamental.

Referências a outros métodos foram encontradas em publicações e livros. No entanto a sua importância não pôde ser avaliada pois tratam-se de trabalhos de investigação pontuais e de difícil acesso. A maioria destes métodos são variações dos métodos apresentados, desenvolvidos para casos particulares de problemas (métodos como o *Transmission Line Matrix Method* e *Generalized Multipole Technique* foram omitidos).

O método dos momentos foi considerado o método mais indicado para o presente trabalho, no entanto a sua aplicação ainda apresenta alguns dos problemas mencionados atrás.

---

## Capítulo 3

---

### *Aplicação do Método dos Momentos aos objectivos da dissertação*

#### **3.1 Aplicação do método dos momentos a uma antena linear**

Considere-se o exemplo de uma antena filamentar, rectilínea, com alimentação central no espaço livre ( $\epsilon_0, \mu_0$ ); o comprimento é  $L$  e o raio  $a$  conforme o esquema da figura 3.1.

Por antena filamentar considera-se  $a \ll \lambda$  e  $a \ll L$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda.

O eixo do condutor corresponde ao eixo  $z$  e o ponto de alimentação está na origem das coordenadas.

Porque o condutor é filamentar, a corrente é circunferencialmente uniforme e flui apenas na direcção dos  $z$  [6].

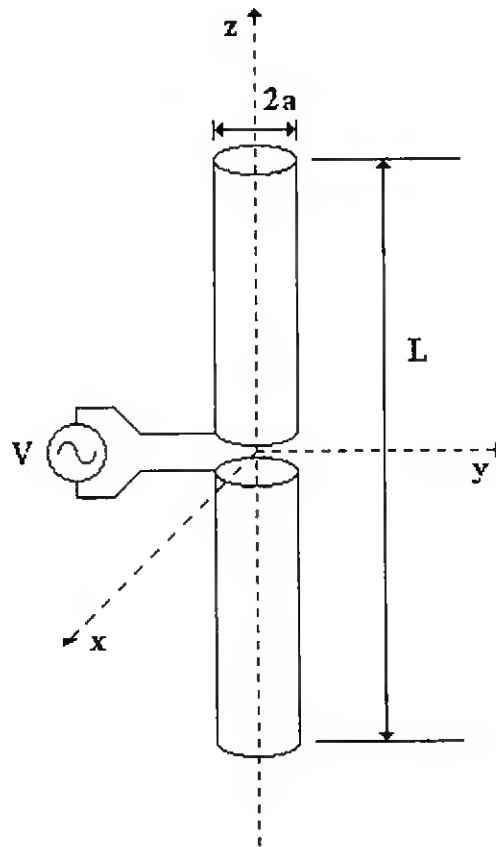


Figura 3.1 Antena de dipolo

Considere-se também que o condutor é perfeito. Desta forma o campo eléctrico é zero no seu interior e a condição fronteira na superfície lateral é

$$E_z(J_z) = E_z^{in} \quad (3.1)$$

em que,  $E_z^{in}$  é a componente segundo o eixo dos  $z$  de um campo eléctrico conhecido (no hiato).  $E_z(J_z)$  é a componente segundo o eixo dos  $z$ s do campo eléctrico produzido pela densidade de corrente induzida,  $J_z$ .

O campo  $E_z^{in}$  pode ser escrito como a componente  $z$  de um campo eléctrico impresso conhecido,  $E_z^i$ , da forma

$$E_z^{in} = - E_z^i \quad (3.2)$$

Desta forma a equação (3.1) fica

$$-E_z(J_z) = E_z^i \quad (3.3)$$

Notar que, na equação (3.3),  $E_z^i$  é conhecido e  $J_z$  é a incógnita.

De acordo com o método dos momentos escolhe-se uma função de expansão para  $J_z$  e uma função de teste para a condição fronteira (3.3). Para a análise de uma antena de condutor filamentar, a experiência mostra que a escolha de funções *piecewise sinusoidal* para funções de expansão e funções de teste conduz a um resultado que é numericamente eficiente e preciso [6]. O método assim obtido é por vezes designado por método *Piecewise Sinusoidal Galerkin*.

Por simplicidade o condutor é dividido em  $N + 1$  subsecções de comprimento  $\Delta z = \frac{L}{N + 1}$ , em que  $N$  é o número de funções de expansão. O extremo de cada subsecção é numerado de 0 a  $N + 1$ .

Assim,

$$J_z(z') = \sum_{n=1}^N I_n J_{z_n}(z') \quad (3.4)$$

onde

$$J_{z_n}(z') = \begin{cases} \frac{\text{sen} [k(z' - z_{n-1})]}{S N} & , z_{n-1} \leq z' \leq z_n \\ \frac{\text{sen} [k(z_{n+1} - z')]}{S N} & , z_n \leq z' \leq z_{n+1} \\ 0 & , \text{outros casos} \end{cases} \quad (3.5)$$

Cada  $J_{z_n}$  ocupa uma secção  $2 \Delta z$  e  $z'$  é um ponto arbitrário do condutor;  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$S N = \text{sen}(\beta \Delta z)$  e  $0 < \beta \Delta z \leq \frac{\pi}{2}$ . O coeficiente  $I_n$  é uma constante complexa a ser

determinada.

Estamos interessados no valor do campo eléctrico fora da superfície lateral. Como assumimos que o condutor é filamental, podemos considerar que a corrente  $J_{zn}$  está concentrada no eixo dos  $z$  de onde o condutor é removido (figura 3.2(a)), mas a condição fronteira (3.3) é satisfeita na superfície lateral imaginária onde o condutor existia (outros autores [7] consideram uma corrente  $J_{zn}$  filamental concentrada na superfície e a condição fronteira (3.3) é satisfeita no eixo dos  $z$ s, o que é equivalente para efeitos de cálculo).

Com esta aproximação, o vector potencial é um integral de linha com respeito a  $z'$  em vez de um integral de superfície.

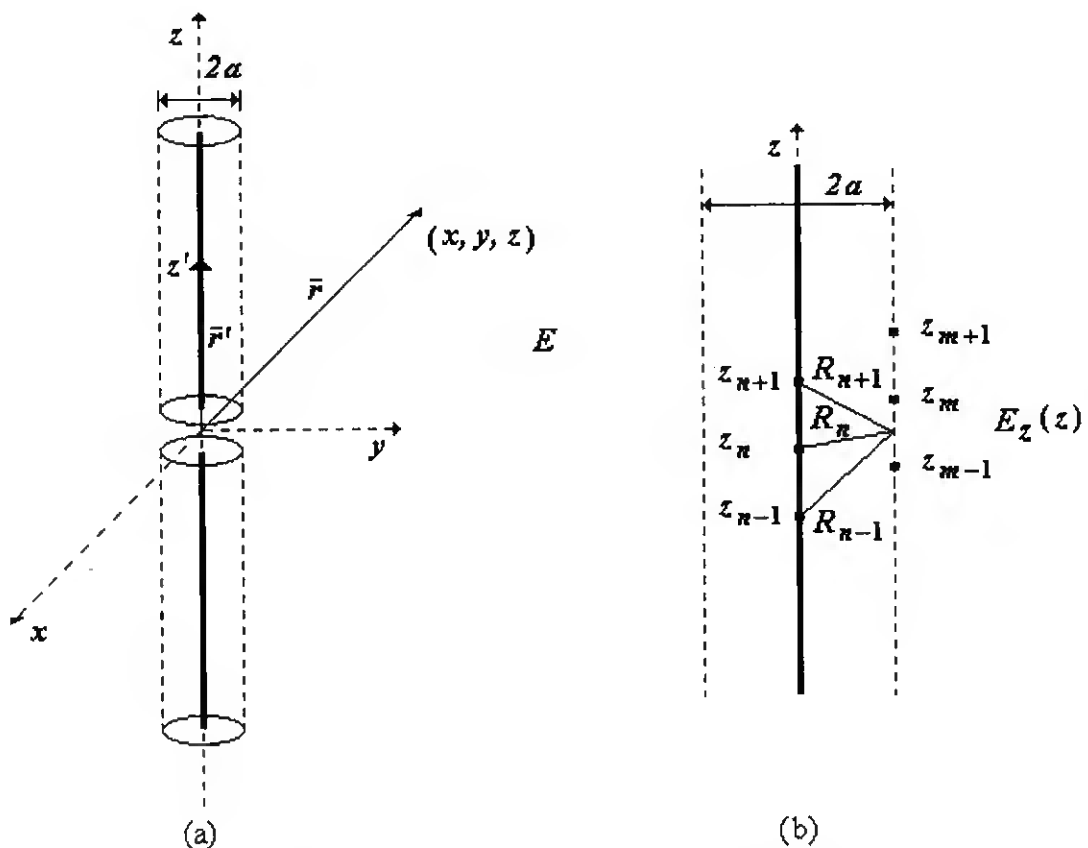


Figura 3.2 Aproximação de corrente filamental

O vector potencial tem apenas uma componente segundo  $z$  e um campo eléctrico produzido por  $J_z$  é dado por [5]

$$\bar{E}(x, y, z) = -j\omega \bar{A}(x, y, z) + \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}(x, y, z)) \quad (3.6)$$

$$\bar{A}(x, y, z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\hat{z} J_z(\bar{r}') \mu_0 e^{-j\beta|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|} dz' \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ \bar{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \bar{r}' &= z'\hat{z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

e  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  são os vectores unitários do sistema de coordenadas.

Porque em (3.7) existe apenas a componente  $z$  de  $\bar{A}$ , a equação (3.6) toma a forma

$$E_z(x, y, z) = -j\omega A_z + \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

O campo eléctrico em  $z$  na superfície imaginária do condutor devido à função de expansão  $J_{zn}$  pode ser deduzida de (3.9), desta forma [12,14]

$$E_z(z) = -\frac{j30}{SN} \left[ \frac{e^{-j\beta r_{n-1}}}{R_{n-1}} - CS \frac{e^{-j\beta r_n}}{R_n} + \frac{e^{-j\beta r_{n+1}}}{R_{n+1}} \right] \quad (3.10)$$

em que

$$CS = 2 \cos(\beta \Delta z) \quad (3.11)$$

$$R_{n-1}^2 = a^2 + (z - z_{n-1})^2 \quad (3.12)$$

$$R_n^2 = a^2 + (z - z_n)^2 \quad (3.13)$$

$$R_{n+1}^2 = a^2 + (z - z_{n+1})^2 \quad (3.14)$$

Antes de prosseguir com a aplicação do método dos momentos, escolhe-se um produto interno como [6]

$$\langle \bar{E}(z), \bar{J}_w(z) \rangle = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \bar{E}(z) \cdot \bar{J}_w(z) dz \quad (3.15)$$

$\bar{E}(z)$  é um campo eléctrico na superfície imaginária do condutor produzido pela densidade de corrente  $J_z(z')$  no eixo  $z$  e  $\bar{J}_w(z)$  é uma função de teste na mesma superfície. De seguida escolhe-se uma função de teste igual à função de expansão (3.5) e aplica-se o método dos momentos a (3.3).

Desta forma, na superfície imaginária do condutor verifica-se

$$- \sum_{n=1}^N I_n \langle \hat{z} E_z(J_z), \hat{z} J_{zm} \rangle = \langle \hat{z} E_z^{imp}, \hat{z} J_{zm} \rangle \quad (3.16)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

A equação (3.16) corresponde a um sistema de equações lineares de dimensão  $N$ , e pode ser escrito na forma

$$\sum_{n=1}^M Z_{mn} I_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.17)$$

que pode ser expresso na forma

$$[Z] [I] = [V] \quad (3.18)$$

em que  $[Z]$  é denominada matriz impedância e tem dimensão  $N \times N$ . A matriz  $[I]$  e a matriz  $[V]$  são matrizes coluna de dimensão  $N$  (o significado destas matrizes é analisado em 3.3).

Como o hiato é infinitesimal, pode-se assumir que

$$V_m = 1 \quad \text{para} \quad m = \frac{N+1}{2} \quad \text{e zero noutros casos,} \quad (3.19)$$

A quantidade  $Z_{mn}$  é a impedância mútua entre as duas antenas de dipolo de comprimento

$2\Delta z$  situadas nas secções  $(z_{m-1}, z_{m+1})$  e  $(z_{n-1}, z_{n+1})$ , como representado na figura 3.2(b). Esta quantidade é dada por [6]

$$Z_{mn} = - \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{\text{sen } \beta (z - z_{m-1})}{S N} E_z(z) dz - \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\text{sen } \beta (z_{m+1} - z)}{S N} E_z(z) dz \quad (3.20)$$

A equação (3.16) pode ser resolvida por integração numérica em relação a  $z$  na superfície considerada. No entanto, é possível [7] efectuar a integração em termos de cosenos "Ci" e senos "Si" integrais (anexo A). Desta forma os elementos  $Z_{mn}$  são dados por

$$Z_{mn} = R_{mn} + jX_{mn} \quad (3.21)$$

com

$$\begin{aligned} R_{mn} = & \frac{15}{\text{sen } (\beta \Delta z_m) \text{ sen } (\beta \Delta z_n)} \\ & \left[ \cos \beta (z_{n-1} - z_{m-1}) \{ Ci(v_0) + Ci(u_0) - Ci(u_1) - Ci(v_1) \} \right. \\ & + \text{sen } \beta (z_{n-1} - z_{m-1}) \{ Si(v_0) - Si(u_0) + Si(u_1) - Si(v_1) \} \\ & + \cos \beta (z_{n+1} - z_{m-1}) \{ Ci(v_4) + Ci(u_4) - Ci(u_5) - Ci(v_5) \} \\ & + \text{sen } \beta (z_{n+1} - z_{m-1}) \{ Si(v_4) - Si(u_4) + Si(u_5) - Si(v_5) \} \\ & - 2 \cos \beta (\Delta z_n) \cos \beta (z_n - z_{m-1}) \{ Ci(v_2) + Ci(u_2) - Ci(u_3) - Ci(v_3) \} \\ & - 2 \cos \beta (\Delta z_n) \text{sen } \beta (z_n - z_{m-1}) \{ Si(v_2) - Si(u_2) + Si(u_3) - Si(v_3) \} \\ & + \cos \beta (z_{n-1} - z_{m+1}) \{ Ci(v_6) - Ci(v_1) + Ci(u_6) - Ci(u_1) \} \\ & + \text{sen } \beta (z_{n-1} - z_{m+1}) \{ Si(v_6) - Si(u_6) + Si(u_1) - Si(v_1) \} \\ & \left. + \cos \beta (z_{n+1} - z_{m+1}) \{ Ci(v_8) - Ci(v_5) - Ci(u_5) + Ci(u_8) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \operatorname{sen} \beta(z_{n+1} - z_{m+1}) \{ \operatorname{Si}(v_8) - \operatorname{Si}(u_8) + \operatorname{Si}(u_5) - \operatorname{Si}(v_5) \} \\
 & - 2 \cos \beta(\Delta z_n) \cos \beta(z_n - z_{m+1}) \{ \operatorname{Ci}(v_7) - \operatorname{Ci}(v_3) - \operatorname{Ci}(u_3) + \operatorname{Ci}(u_7) \} \\
 & - 2 \cos \beta(\Delta z_n) \operatorname{sen} \beta(z_n - z_{m+1}) \{ -\operatorname{Si}(u_7) + \operatorname{Si}(v_7) + \operatorname{Si}(u_3) - \operatorname{Si}(v_3) \} \quad ] \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

onde

$$u_0 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n-1} - z_{m-1})^2} + (L)(z_{m-1} - z_{n-1}) \right] \quad (3.23a)$$

$$u_1 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n-1} - z_m)^2} + (L)(z_m - z_{n-1}) \right] \quad (3.23b)$$

$$u_2 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_n - z_{m-1})^2} + (L)(z_{m-1} - z_n) \right] \quad (3.23c)$$

$$u_3 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_n - z_m)^2} + (L)(z_m - z_n) \right] \quad (3.23d)$$

$$u_4 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n+1} - z_{m-1})^2} + (L)(z_{m-1} - z_{n+1}) \right] \quad (3.23e)$$

$$u_5 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n+1} - z_m)^2} + (L)(z_m - z_{n+1}) \right] \quad (3.23f)$$

$$u_6 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n-1} - z_{m+1})^2} + (L)(z_{m+1} - z_{n-1}) \right] \quad (3.23g)$$

$$u_7 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_n - z_{m+1})^2} + (L)(z_{m+1} - z_n) \right] \quad (3.23h)$$

$$u_8 = \beta \left[ \sqrt{\rho^2 + (z_{n+1} - z_{m+1})^2} + (L)(z_{m+1} - z_{n+1}) \right], \quad (3.23i)$$

com

$$\Delta z_n = z_n - z_{n-1} = z_{n+1} - z_n, \quad \Delta z_m = z_m - z_{m-1} = z_{m+1} - z_m, \quad (3.24)$$

$L = +1$  e  $\rho = a$  no exemplo. Os  $v_i$ s são obtidos de forma semelhante a (3.23) com  $L = -1$ . A expressão de  $X_{mm}$  pode ser obtida substituindo  $\operatorname{Ci}(x)$  por  $-\operatorname{Si}(x)$  e  $\operatorname{Si}(y)$  por  $\operatorname{Ci}(y)$  na expressão de  $R_{mm}$ .

### 3.2 Análise de uma antena filamentar de geometria arbitrária

Considere-se um condutor filamentar com superfície  $S$  numa região onde existe um campo eléctrico conhecido  $\underline{E}^i$ , como indicado na figura 3.3. Sejam  $\sigma$  e  $J$  as densidades de carga e corrente, respectivamente, e  $\underline{E}^s$  o campo eléctrico produzido por  $\sigma$  e  $J$  (o procedimento para determinar a matriz  $[Z]$  é o seguido por Harrington em [15] e [23]).

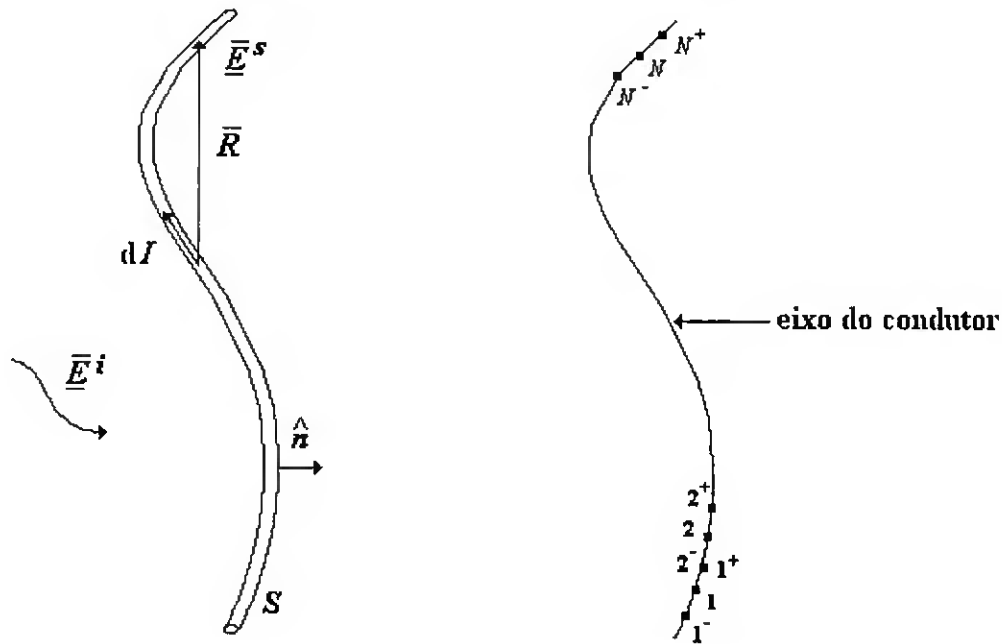


Figura 3.3 (a) Secção de um condutor. (b) Condutor dividido em  $N$  segmentos

A equação para a densidade de carga  $\sigma$  e corrente  $J$  num corpo condutor é obtida da seguinte forma [23]. O campo disperso  $\underline{E}^s$  produzidos por  $\sigma$  e  $J$ , é expresso em termos das expressões conhecidas [5], e a condição fronteira  $\hat{n} \times (\underline{E}^s + \underline{E}^i) = 0$  é imposta na superfície. Desta forma obtém-se:

$$\underline{E}^s = -j\omega \bar{A} - \nabla \Phi \quad (3.25)$$

$$\bar{A} = \mu \iint_S \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS \quad (3.26)$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon} \iint_S \sigma \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS \quad (3.27)$$

$$\sigma = -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \bar{J} \quad (3.28)$$

$$\hat{n} \times \bar{E}^s = -\hat{n} \times \bar{E}^i \quad \text{na superfície } S \quad (3.29)$$

A distância  $R$  é medida do ponto fonte no eixo ao ponto na superfície do condutor onde é calculado o campo.

Consideremos as seguintes aproximações: (1) a corrente flui apenas na direcção do eixo do condutor, (2) as densidades de corrente e de carga são aproximadas por filamentos de corrente  $I$  e carga  $\sigma$  no eixo do condutor, e (3) a condição fronteira (3.29) é aplicada apenas à componente axial de  $E$ .

Utilizando estas aproximações, as equações (3.25) a (3.29) tomam a forma:

$$-\bar{E}_e^i = -j\omega \bar{A}_e - \frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \quad \text{na superfície } S \quad (3.30)$$

$$\bar{A} = \mu \int_{\text{eixo}} \bar{I}(\ell) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\ell \quad (3.31)$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\text{eixo}} \sigma(\ell) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\ell \quad (3.32)$$

$$\sigma = -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{dI}{d\ell} \quad (3.33)$$

onde  $\ell$  é a variável comprimento ao longo do eixo do condutor.

A solução para as equações (3.30) a (3.33) é obtida da seguinte forma. Os integrais são aproximados pela soma de integrais nos  $N$  segmentos. As derivadas são aproximadas por diferenças finitas nos mesmos intervalos utilizados na integração.

O segmento  $n$  é identificado pelo seu ponto inicial  $n^-$ , o seu ponto médio  $n$  e o seu ponto final  $n^+$ . A grandeza  $\Delta\ell_n$  representa o incremento entre  $n^-$  e  $n^+$ ,  $\Delta\ell_n^+$  e  $\Delta\ell_n^-$  são incrementos com desvios positivos ou negativos, respectivamente, de meio segmento ao longo de  $l$ .

As aproximações de (3.30) a (3.33) ficam então

$$-E_t^i(m) \cong -j\omega A_t(m) - \frac{\Phi(m^+) - \Phi(m^-)}{\Delta\ell_m} \quad (3.34)$$

$$\bar{A}(m) \cong \mu \sum_n \bar{I}(n) \int_{\Delta\ell_n} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\ell \quad (3.35)$$

$$\Phi(m^+) \cong \frac{1}{\varepsilon} \sum_n \sigma(n^+) \int_{\Delta\ell_n} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\ell \quad (3.36)$$

$$\sigma(n^+) \cong -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{I(n+1) - I(n)}{\Delta\ell_n^+} \quad (3.37)$$

com equações semelhantes a (3.36) e (3.37) para  $\Phi(m^-)$  e  $\sigma(n^-)$ .

De seguida vamos aplicar as equações (3.34) a (3.36) a dois elementos isolados, indicados na figura 6, de forma a obter os elementos da matriz impedância directamente.

Os integrais em (3.35) e (3.36) têm a forma

$$\psi(n, m) = \frac{1}{\Delta\ell_n} \int_{\Delta\ell_n} \frac{e^{-jkR_m}}{4\pi R_m} d\ell \quad (3.38)$$

onde  $R_m$  é a distância de um ponto  $\Delta\ell_n$  ao ponto  $m$ .

Consideremos dois segmentos arbitrários do condutor, como indicado na figura 3.4.

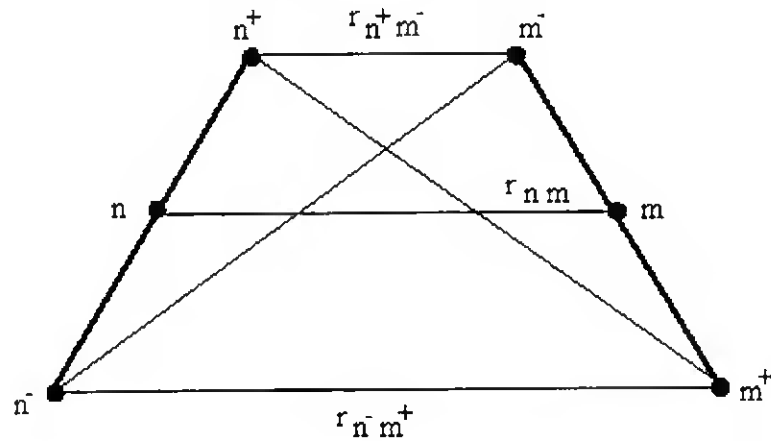


Figura 3.4 Dois segmentos arbitrários do condutor

O elemento  $n$  na figura 6 é constituído por um filamento de corrente  $I(n)$ , e dois filamentos de carga de valores

$$q(n^+) = \frac{1}{j\omega} I(n) \quad q(n^-) = -\frac{1}{j\omega} I(n) \quad (3.39)$$

com  $q = \sigma \Delta \ell$ .

O vector potencial em  $m^+$  devido a  $I(n)$  é, por (3.35)

$$\bar{A}(m) = \mu I(n) \Delta \ell_n \psi(n, m) \quad (3.40)$$

Os potenciais escalares em  $m^+$  e  $m^-$  devido às cargas (3.39) são por (3.36)

$$\begin{aligned} \Phi(m^+) &= \frac{1}{j\omega\epsilon} [I(n) \psi(n^+, m^+) - I(n) \psi(n^-, m^+)] \\ \Phi(m^-) &= \frac{1}{j\omega\epsilon} [I(n) \psi(n^+, m^-) - I(n) \psi(n^-, m^-)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) e (3.40) em (3.34) e considerando  $Z_{mn} = \bar{E}^i(m) \cdot \Delta I_m / I(n)$  obtém-se

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= j\omega\mu \Delta \bar{\ell}_n \Delta \bar{\ell}_m \psi(n, m) + \\ &\frac{1}{j\omega\epsilon} [\psi(n^+, m^+) - \psi(n^-, m^+) - \psi(n^+, m^-) + \psi(n^-, m^-)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

A avaliação de  $\psi(n, m) = \frac{1}{\Delta \ell_n} \int_{\ell_n^-}^{\ell_n^+} \frac{e^{-jkR_m}}{4\pi R_m} d\ell$ , é feita em [15, 23] expandindo a

exponencial numa série de Maclaurin.

Este procedimento é equivalente a utilizar o método dos momentos com impulsos para funções de expansão e funções Delta de Dirac para teste.

### 3.3 Significado da matriz admitância

O sistema (3.13) pode ser escrito na forma

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.43)$$

isto é, resolve-se uma equação integral de forma numérica escrevendo  $N$  equações com  $N$  incógnitas. A equação é semelhante à equação obtida quando se analisa um circuito eléctrico com  $N$  malhas ou  $N$  nós - daqui a semelhança com uma *rede* de  $N$  portos (*n port network*).

A equação (3.20) pode ser escrita na forma matricial como

$$[V] = [Z][I] \quad (3.44)$$

Por analogia com os circuitos eléctricos, designam-se as matrizes  $[V]$ ,  $[Z]$  e  $[I]$  como matrizes tensão, impedância e corrente, respectivamente [15]. Mas trata-se apenas de uma analogia, e as unidades de  $[V]$ ,  $[Z]$  e  $[I]$  não são necessariamente volts, ohms e amperes, respectivamente. Esta analogia não é restrita a segmentos lineares, mas aplica-se também a estruturas arbitrárias.

Desta forma, a corrente nos  $N$  pontos da antena pode ser obtida da matriz corrente dada por

$$[I] = [Y][V] \text{ com } [Y] = [Z^{-1}] \text{ a matriz admitância} \quad (3.45)$$

Vamos considerar uma antena alimentada no intervalo  $i$  por uma fonte de tensão de valor  $V_i$ . A matriz tensão é

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Assim, vem para a matriz corrente

$$[I] = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & \dots & Y_{2i} & \dots & Y_{2N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{i1} & \dots & Y_{ii} & \dots & Y_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{N1} & \dots & Y_{Ni} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = V_i \begin{bmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \\ \vdots \\ Y_{ii} \\ \vdots \\ Y_{Ni} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Para  $V_i=1$  V temos

$$[I] = \begin{bmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \\ \vdots \\ Y_{ii} \\ \vdots \\ Y_{Ni} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Logo, a coluna  $i$  da matriz admitância dá a distribuição de corrente para uma fonte de tensão contínua unitária aplicada no intervalo  $i$ . Assim, a matriz admitância dá simultaneamente as distribuições de corrente para uma antena excitada num intervalo arbitrário ao longo do comprimento.

Os elementos diagonais  $Y_{ii}$  da matriz admitância são as admitâncias de entrada do objecto alimentado no intervalo  $i$ , e os elementos  $Y_{ij}$  são as admitâncias de transferência entre o porto no intervalo  $i$  e o porto no intervalo  $j$ .

Desta forma, o objecto condutor é completamente caracterizado pela sua matriz impedância, sujeita claro, às aproximações consideradas. O objecto é definido por  $2N$  pontos no eixo e pelo raio  $a$ .

O condutor é considerado como um conjunto de  $N$  pequenos segmentos ligados entre si. Os extremos de cada segmento definem um par de terminais no espaço. Estes  $N$  pares de terminais podem ser vistos como parte de uma rede com  $N$  portos (figura 3.4). O condutor filamentar é obtido curto-circuitando todos os portos excepto aquele(s) onde existe excitação.

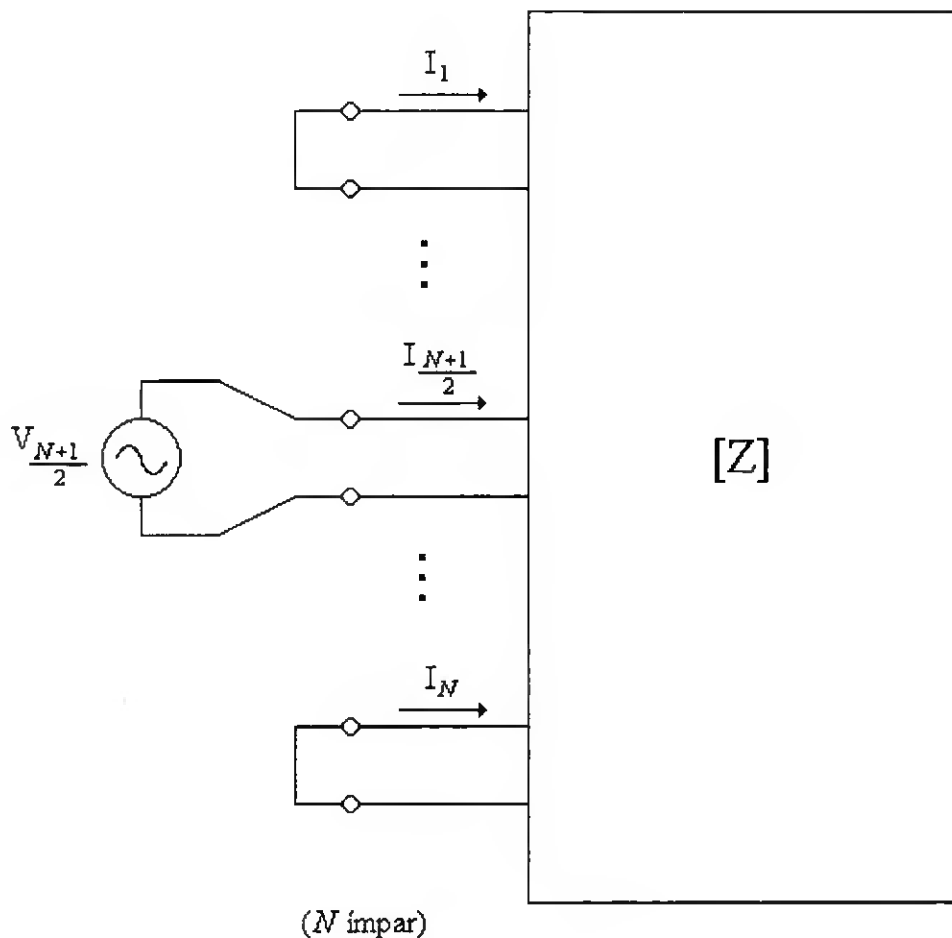


Figura 3.4 Analogia da antena de dipolo com uma rede de  $N$  portos

Uma vez calculada a distribuição de correntes, parâmetros de interesse como o diagrama de radiação, impedância de entrada, etc. podem ser calculados por aplicação das fórmulas apropriadas.

### 3.4 Agrupamentos de antenas

A utilização do método dos momentos na análise e projecto de agrupamentos de antenas tem bastantes vantagens em relação aos métodos *mais* clássicos [7], visto que o acoplamento mútuo entre os elementos é tomado em conta. Além disso o problema pode ser considerado de uma forma mais geral. Por exemplo, os elementos podem ter diferentes comprimentos e raios ou espaçamento não uniforme. Na verdade, a configuração pode ser bastante arbitrária não havendo a necessidade de ter elementos paralelos.

A consideração de que a distribuição de corrente é sinusoidal nos dipolos de meia onda num agregado é bastante exacta e logo os métodos clássicos baseados nesta aproximação são *bastante* precisos. É para elementos diferentes do dipolo que o método dos momentos tem uma vantagem óbvia.

A relação  $[I] = [Y][V]$  com  $[Y] = [Z^{-1}]$  é válida para agrupamentos de antenas, pois o método desenvolvido por Harrington [15] aplica-se a qualquer conjunto de  $N$  segmentos no espaço. Este caso é analisado em (4.5).

---

# Capítulo 4

---

## *Obtenção de um operador de relação directa*

### **4.1 Introdução**

Neste capítulo são apresentadas as noções básicas de diagrama de radiação, agrupamento de antenas e factor de agrupamento de antenas. A teoria do método dos momentos é utilizada de forma a relacionar directamente a excitação de uma estrutura linear com o respectivo diagrama de radiação, na forma matricial.

### **4.2 Diagrama de radiação**

O diagrama de radiação pode ser definido relativamente aos campos ou relativamente à potência (vector de Poynting), sendo tomado como referência, em qualquer dos casos, o

campo eléctrico máximo. Assim, se o diagrama for definido relativamente aos campos, será dado pela expressão:

$$\frac{|E(\theta, \phi)|}{|E_{\max}|} \quad (4.1)$$

e se for definido relativamente à potência, por:

$$\frac{S(\theta, \phi)}{S_{\max}} = \frac{\frac{|E(\theta, \phi)|}{Z_0}}{\frac{|E_{\max}|}{Z_0}} = \frac{|E^2(\theta, \phi)|}{|E_{\max}^2|} \quad (4.2)$$

Nesta dissertação, considera-se a primeira definição (4.1).

### 4.3 Agrupamento de antenas

Um agrupamento de antenas é um conjunto de antenas agrupadas de forma a obter um diagrama de radiação que não se consegue obter com uma única antena. Os vários elementos do agrupamento (antenas que compõem o agrupamento) podem ter qualquer forma (antenas lineares, de abertura, etc.), e não têm que ser necessariamente iguais. No entanto a utilização de elementos iguais com a mesma orientação (por exemplo, podemos considerar essa orientação o eixo dos  $z$ s, sem perder a generalidade), torna a análise do agrupamento mais simples [8,28]. O estudo de agrupamentos com elementos não paralelos pode ser feita pelo método ortogonal [41], mas não será considerada neste trabalho.

De forma a estabelecer os métodos básicos utilizados na análise de agrupamentos, representa-se na figura 4.1 um agrupamento de  $N$  antenas iguais com a mesma orientação.

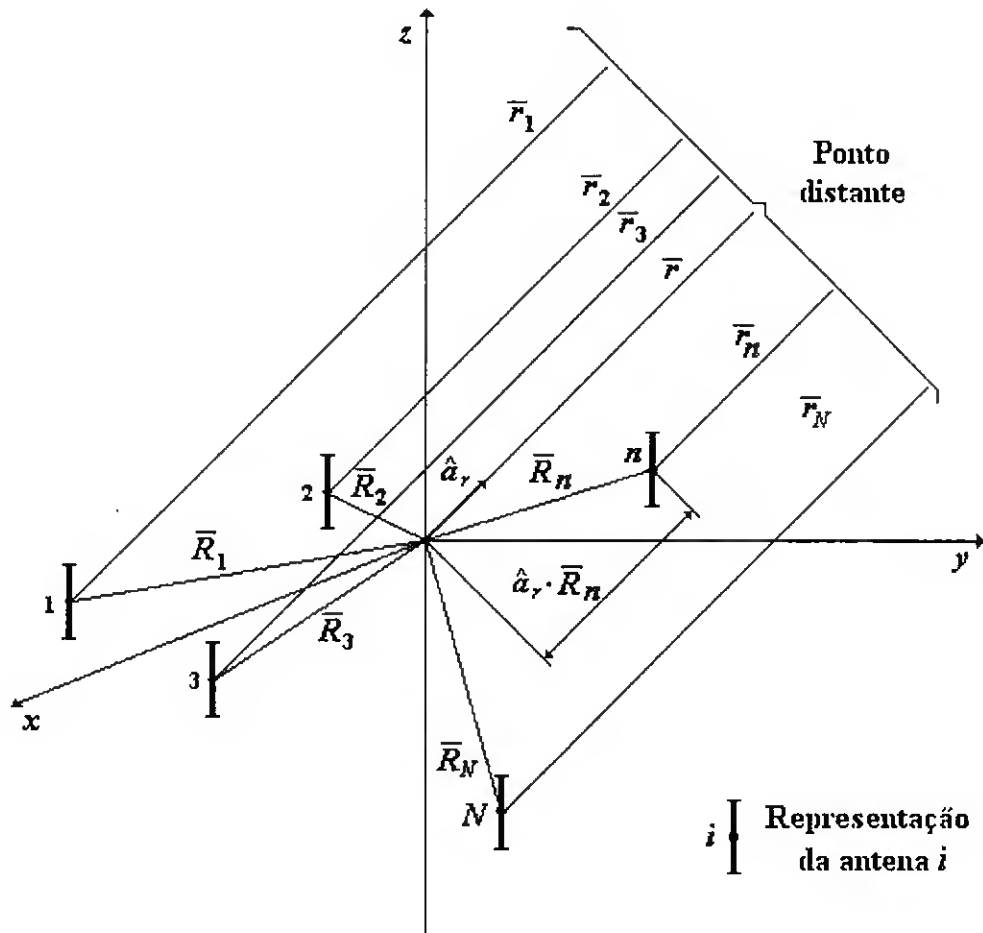


Figura 4.1 Agrupamento de antenas

A posição do elemento  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) é dada pelo vector posição  $\bar{R}_n$ . Os vectores  $\bar{r}_n$  têm origem no elemento  $n$  e estendem-se ao ponto distante. O vector  $\bar{r}$  indica a direcção do ponto distante e tem como versor  $\hat{a}_r$ .

Na zona distante, onde  $|\bar{r}| \gg \bar{R}_n$  os vectores  $\bar{r}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) são essencialmente paralelos [8, 11]. Desta forma, a distância da antena  $n$  ao ponto de interesse na zona distante é

$$r_n = r - \hat{a}_r \cdot \bar{R}_n \quad [11].$$

Desprezando os efeitos de acoplamento entre elementos, o campo total do agrupamento é determinado pela soma vectorial dos campos radiados pelos elementos individuais. Num agrupamento de elementos idênticos, existem cinco factores de controlo que podem ser usados para formar o diagrama de radiação total do agrupamento, que são [8]:

1. A configuração geométrica do agrupamento (linear, circular, rectangular, esférica, etc.);
2. A separação relativa entre elementos;
3. As amplitudes relativas de excitação de cada elemento;
4. As fases relativas de excitação de cada elemento;
5. As diferenças relativas de diagramas de cada elemento.

Se o agrupamento for constituído por elementos iguais, pode ser feita uma decomposição do diagrama de radiação do agrupamento em dois diagramas que se multiplicam: o diagrama de radiação da antena de referência (factor de antena) e o factor de agrupamento (FA), [8,28]:

$$E(\text{total}) = E(\text{um elemento num ponto de referência}) \times \text{FA}$$

ou seja

$$\underline{E}_T = \underline{E}_r \times \text{FA}$$

O factor de agrupamento (FA) de um agrupamento de antenas iguais, com qualquer distribuição espacial e com qualquer distribuição de amplitudes e fases, é dado por [8,11]:

$$\text{FA} = \sum_{n=1}^N I_n e^{j\varphi_n} e^{j\beta_0 \hat{a}_r \cdot \bar{R}_n} \quad (4.3)$$

em que  $N$  é o número de elementos do agrupamento,  $I_n$  e  $\varphi_n$  são, respectivamente, a amplitude e a fase associadas ao elemento  $n$  (o campo distante produzido pela antena  $n$  sofre um *atraso*

de propagação em relação à antena de referência, que produz uma diferença de fase dada por  $\beta_0 \hat{a}_r \cdot \bar{R}_n = \bar{\beta}_0 \cdot \bar{R}_n$ ). Notar que a antena de referência não está necessariamente no agrupamento, serve de referência para comparação dos campos radiados pelas antenas do agrupamento.

De forma a simplificar a expressão, considerando de vantagens óbvias para o programa de análise efectuado neste trabalho, considero  $\underline{I}_n = I_n e^{j\varphi_n}$ , e

$$d_n = \hat{a}_r \cdot \bar{R}_n \quad (4.4)$$

(que representa a distância entre o elemento  $n$  e uma linha de referência de fases no ponto de referência, que deve ser perpendicular à direcção de partida/chegada). Desta forma a relação (4.3) pode ser escrita numa forma mais adequada ao que se pretende:

$$FA = \sum_{n=1}^N \underline{I}_n e^{j\beta_0 d_n} \quad (4.5)$$

Da equação (4.5) pode-se concluir que o factor de agrupamento não depende do diagrama de radiação de cada elemento, dependendo, em geral, do número de elementos, da sua distribuição em termos espaciais, das amplitudes e fases relativas da corrente e também do seu distanciamento.

#### 4.4 Antena linear

Uma antena linear pode ser considerada como consistindo de um determinado número de condutores ligados em série [9], ou seja, um agrupamento de antenas. O objectivo do que se segue é aplicar o método dos momentos em conjunção com a definição de factor de agrupamento para estudar uma antena linear.

Consideremos a antena nestas circunstâncias como indicado na figura 4.1, para o caso de nove segmentos:

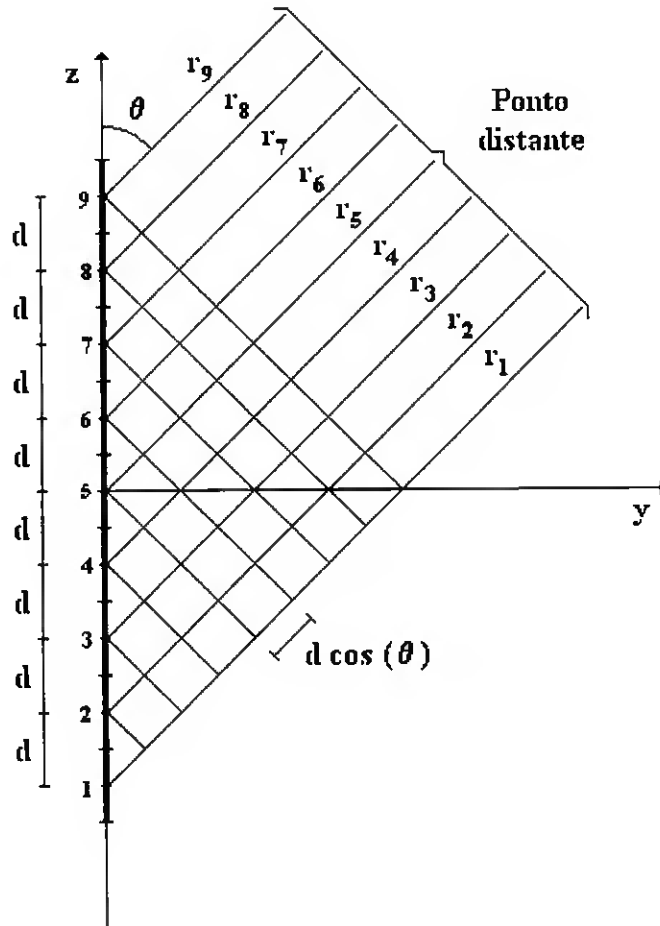


Figura 4.2 Antena de dipolo como agrupamento linear de 9 antenas

Nota:  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$  no caso geral) é o índice do elemento considerado;  $\theta$  é a direcção de observação ou ângulo de pesquisa;  $d$  é a distância entre segmentos consecutivos; desta forma,  $r_n = r_1 - (n-1) d \cos \theta$  (podemos considerar como referência o segmento 1, por exemplo). Para simplificar a notação faz-se  $d_n = (n-1) d \cos \theta$ , de forma que  $r_n = r_1 - d_n$ .

Para efeitos de programação é necessário considerar  $M$  pontos onde se calcula o campo eléctrico. Assim,  $\theta_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) é um valor particular de  $\theta$ , correspondente ao ponto onde o campo está a ser calculado. Da mesma forma acrescenta-se um índice  $m$  a  $d_n$  para realçar este facto e para utilização no programa de análise. Assim fica

$$d_{mn} = (n-1) d \cos \theta_m.$$

Estas considerações são necessárias para a simplificação do programa, pois o índice  $mn$  corresponde ao elemento na linha  $m$  e coluna  $n$  (notar que se pretende um operador na forma matricial).

Como foi verificado no capítulo 3, a antena pode ser caracterizada por uma matriz  $[Y]$ , tal que:

$$[I] = [Y] \cdot [V] \quad (4.5)$$

O factor de agrupamento é dado por (4.4) e repetido aqui ( $\beta_0$  é substituído por  $k$  por conveniência):

$$FA = \sum_{n=1}^N \underline{I}_n e^{jk d_n} \text{ com } \underline{I}_n = I_n e^{j\varphi_n} \quad (4.6)$$

Assim, para um ângulo de observação  $\theta_m$ , e utilizando notação matricial, vem para o valor do factor de agrupamento  $FA(\theta = \theta_m) = FA_m$  (sendo o índice apropriado pois indica a linha da matriz coluna, como se verá a seguir)

$$FA_m = \begin{bmatrix} e^{jk d_{m1}} & e^{jk d_{m2}} & \dots & e^{jk d_{mN}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_N \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

em que  $d_{mn} = (n-1) d \cos(\theta_m)$ .

Considerando que se calcula o campo eléctrico em  $M$  pontos e utilizando a relação (4.5), vem:

$$\begin{matrix}
 \begin{bmatrix} \underline{E}_{T1} \\ \underline{E}_{T2} \\ \vdots \\ \underline{E}_{TM} \end{bmatrix} \\
 (M \times 1)
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} \underline{E}_{r1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{E}_{r2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \underline{E}_{rM} \end{bmatrix} \\
 (M \times M)
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} e^{jkd_{11}} & e^{jkd_{12}} & \dots & e^{jkd_{1N}} \\ e^{jkd_{21}} & e^{jkd_{22}} & \dots & e^{jkd_{2N}} \\ & & \dots & \\ e^{jkd_{M1}} & e^{jkd_{M2}} & \dots & e^{jkd_{MN}} \end{bmatrix} \\
 (M \times N)
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 [Y] \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_N \end{bmatrix} \\
 (N \times N)(N \times 1)
 \end{matrix}
 \quad (4.8)$$

Simplificando a notação, a relação (4.8) pode ser reescrita na forma (introduzindo a designação das matrizes no programa de análise):

$$[ET] = [ER] \cdot [F] \cdot [Y] \cdot [V] \quad (4.9)$$

Definindo um único operador como:

$$[OU] = [ER] \cdot [F] \cdot [Y] \quad (4.10)$$

podemos escrever:

$$[ET] = [OU] \cdot [V] \quad (4.11)$$

Notar que a matriz  $[OU]$  tem dimensão  $M \times N$ , em que  $N$  é o número de segmentos em que foi dividida a antena e  $M$  o número de pontos onde se calcula o valor do campo eléctrico, que será escolhido conforme a resolução que se pretende no diagrama de radiação.

Outra possibilidade consiste em não considerar o campo de referência e trabalhar só com o factor de agrupamento.

#### 4.5 Operador único (caso tridimensional)

Existe a possibilidade, embora tenha que ser aprofundado este estudo, de analisar um agrupamento de antenas paralelas, de comprimentos diferentes, em três dimensões. Apresenta-se a seguir um exemplo simples de aplicação.

Consideremos um agrupamento de  $N$  segmentos paralelos, que constituem um agrupamento de  $P$  antenas de comprimentos diferentes, como indicado na figura 4.3.

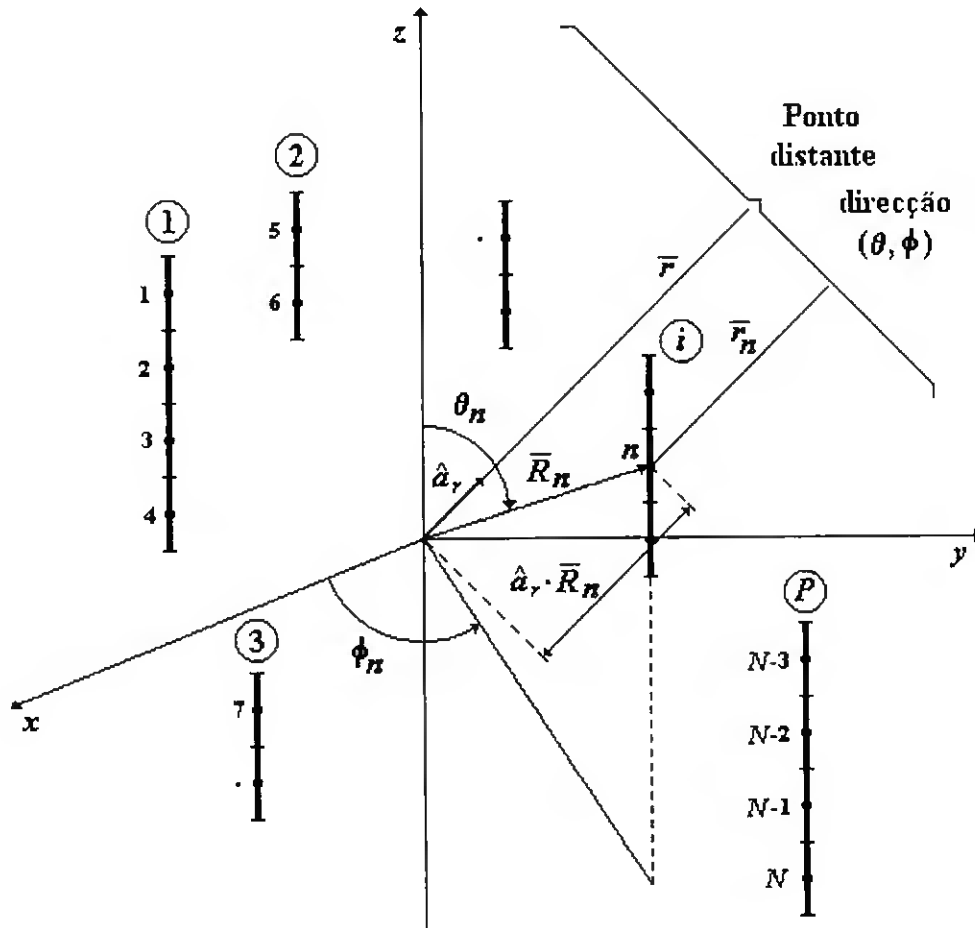


Figura 4.3 Agrupamento de  $P$  antenas de comprimentos diferentes

Utilizando o método dos momentos [7,15] podemos estabelecer uma relação entre as correntes e as tensões nos segmentos na forma

$$[I] = [Y] \cdot [V] \quad (4.17)$$

em que o valor da corrente no elemento  $n$  é dado pelo valor contido na linha  $n$  da matriz  $[I]$ .

No caso tridimensional os vectores posição dos segmentos e o versor da direcção são dados em coordenadas rectangulares por, respectivamente:

$$\bar{R}_n = R_n \sin \theta_n \cos \phi_n \hat{x} + R_n \sin \theta_n \sin \phi_n \hat{y} + R_n \cos \theta_n \hat{z} \quad n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (4.12)$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \quad (4.13)$$

os valores de  $d_n$  são dados por (4.5)

$$d_n = a_r \cdot \bar{R}_n \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.14)$$

efectuando o produto escalar, resulta

$$d_n = R_n [\sin\theta \sin\theta_n \cos(\phi - \phi_n) + \cos\theta \cos\theta_n] \quad (4.15)$$

Utilizando a notação anterior ( $\theta_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) é um valor particular de  $\theta$ ),

$$d_{mn} = R_n [\sin\theta_m \sin\theta_n \cos(\phi - \phi_n) + \cos\theta_m \cos\theta_n] \quad (4.16)$$

Neste caso o diagrama de radiação (em geral) não apresenta simetria em relação a  $\phi$  pois

$$\bar{E}_T(\theta, \phi) = \underline{E}_T^\theta(\theta, \phi) \hat{\theta} + \underline{E}_T^\phi(\theta, \phi) \hat{\phi} \quad (4.18)$$

$$FA = FA(\theta, \phi) \quad (4.19)$$

É necessário, então, calcular o campo total em  $M$  pontos de  $\theta$  para cada valor de  $\phi$  (considere-se esse número igual a  $Q$ ) - sendo  $M$  e  $Q$  escolhidos de forma a obter determinada resolução no diagrama de radiação ( ou calcular o campo total em  $Q$  pontos de  $\phi$  para cada valor de  $\theta$ ).

No entanto, o programa MATLAB4 utilizado neste trabalho, não admite *arrays* multidimensionais (a versão 5 [44] já inclui esta hipótese, o que poderá servir para aplicar o operador único neste caso; no entanto, esta versão não está disponível no momento da realização deste trabalho). Uma solução para este problema pode consistir em calcular o diagrama de radiação em função de  $\theta$ , utilizando o procedimento do operador único, para

determinado valor de  $\phi$ . Desta forma todo o procedimento anterior é válido desde que se considere a variável  $\phi$ :

$$\begin{matrix}
 \begin{bmatrix} \underline{E}_{T1} \\ \underline{E}_{T2} \\ \vdots \\ \underline{E}_{TM} \end{bmatrix} \\
 (M \times 1)
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} \underline{E}_{r1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{E}_{r2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \underline{E}_{rM} \end{bmatrix} \\
 (M \times M)
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 \begin{bmatrix} e^{jkd_{11}} & e^{jkd_{12}} & \dots & e^{jkd_{1N}} \\ e^{jkd_{21}} & e^{jkd_{22}} & \dots & e^{jkd_{2N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{jkd_{M1}} & e^{jkd_{M2}} & \dots & e^{jkd_{MN}} \end{bmatrix} \\
 (M \times N)
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{matrix}
 [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_N \end{bmatrix} \\
 (N \times N)(N \times 1)
 \end{matrix}
 \quad (4.20)$$

Considere-se como exemplo a estrutura da figura 4.4.

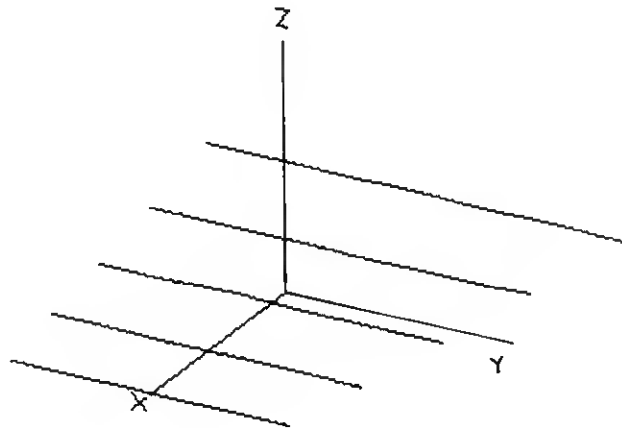


Figura 4.4 Estrutura a analisar

Pode-se considerar  $\phi = 0^\circ$  e desenhar o diagrama de radiação em termos de  $\theta$  obtendo o diagrama da figura 4.5 (a). Para  $\phi = 30^\circ$ ,  $\phi = 60^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ ,  $\phi = 120^\circ$  e  $\phi = 150^\circ$ , obtêm-se respectivamente os diagramas representados em (b), (c), (d), (e) e (f).

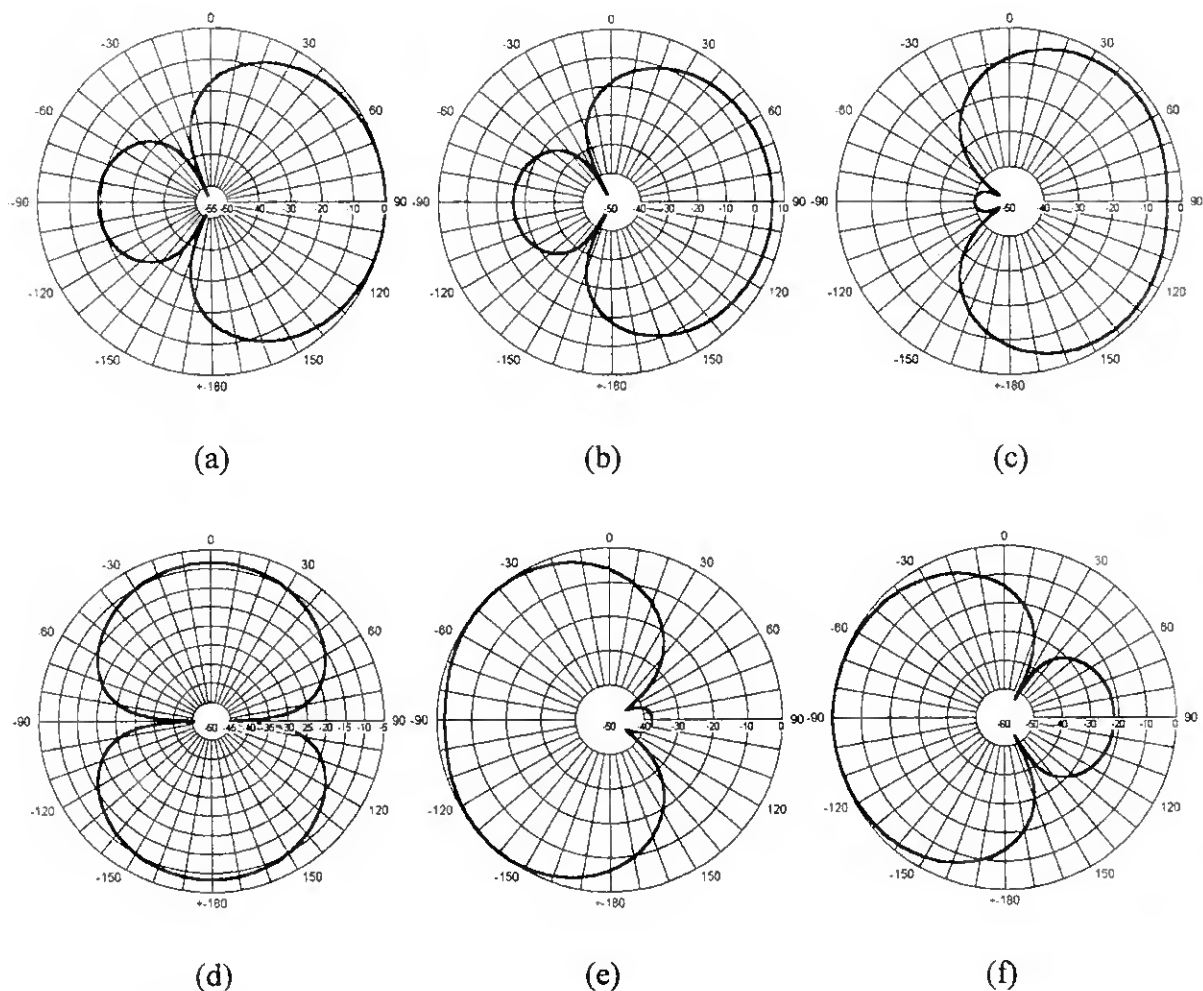


Figura 4.5 Diagramas de radiação em função  $\theta$  de para vários valores de  $\phi$ .

Aplicando o operador para um conjunto de valores de  $\phi$  que depende da resolução pretendida, é possível determinar o diagrama de radiação em três dimensões, como representado na figura 4.6:

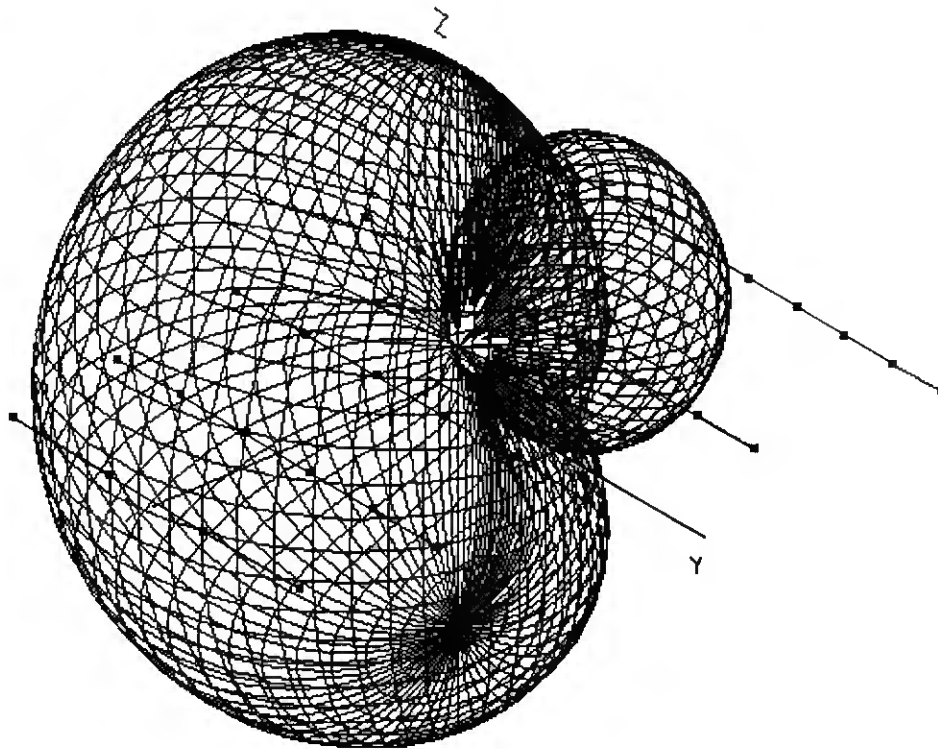


Figura 4.6 Diagrama de radiação a três dimensões

(Simulação com o programa NEC, aplicado várias vezes - os diagramas estão em termos da potência, definição (4.2))

Este raciocínio poderá ser testado com poucas alterações no programa de análise apresentado. A dificuldade maior consiste em obter a matriz  $[Y]$  da estrutura, pois o programa NEC2 não fornece esta matriz, e o processo de dedução bastante demorado.

A utilização do programa MATLAB5 poderá resolver o problema da aplicação do operador único em agrupamentos multidimensionais.

---

## Capítulo 5

---

### *Exemplos de aplicação*

#### 5.1 Introdução

De forma a ilustrar a aplicação do conceito de operador único, descrito no capítulo 4, foi desenvolvido um programa no MATLAB designado "ou.m". A listagem deste programa encontra-se no anexo D.

Este programa determina o diagrama de radiação de uma antena linear de comprimento  $L$  e raio  $a$ .

O programa tem como entrada um ficheiro com a matriz admitância da estrutura (matriz  $[Y]$ ) e o comprimento  $L$ . Neste trabalho a matriz  $[Y]$  foi deduzida através do programa NEC2, mas esta matriz pode ser obtida com outro programa.

O programa NEC2 funciona dividindo a estrutura em pequenos segmentos, de forma que cada segmento pode ser considerado como um dipolo elementar (dipolo de Hertz), para o qual a corrente pode ser considerada constante. O campo total é obtido por soma directa dos campos produzidos por estes segmentos.

O programa efectuado neste trabalho, tem como objectivo a análise de agrupamentos. Nesta situação é possível obter um operador único. A principal vantagem deste procedimento é o facto de uma vez determinado este operador não ser necessário efectuar todos os cálculos sempre que se altera o valor ou a posição da excitação. Notar que para determinadas estruturas o tempo de processamento pode ser um grande inconveniente (o tempo de processamento de uma estrutura complexa pode ser de horas, e em determinados casos pode ser simplesmente impraticável considerando a utilização de um computador *normal*).

O número de segmentos em que a estrutura é dividida é igual à dimensão da matriz  $[Y]$ , logo é deduzida no programa de análise. O programa utiliza como antena de referência o dipolo elementar.

Nota: para evitar um pequeno *questionário* no início do programa, são consideradas determinadas opções:

1. a resolução do diagrama de radiação é de 1 grau - para alterar a resolução para qualquer outro valor, basta alterar o valor da variável *resol* (em radianos) para o valor pretendido;
2. o diagrama de radiação é apresentado na forma normalizada, para obter o gráfico com os valores do campo eléctrico altera-se a variável *diagrnor* para um valor diferente de 1;
3. é possível comparar o diagrama de radiação real com o diagrama de radiação quando se despreza o valor do raio da antena, neste caso coloca-se a variável *raio* a 1.

A entrada do programa é a tensão de excitação, que deve ser armazenada numa matriz coluna de nome  $V$ , em que a linha  $n$  deve conter o valor da tensão aplicada ao segmento  $n$ . Esta deve ser armazenada num ficheiro de nome "v.m" ou introduzida no programa.

## 5.2 Exemplos

A figura 5.1 apresenta o diagrama de radiação de uma antena de  $3/2\lambda$ , nas seguintes situações:

(a) resultados para diâmetro igual a zero (utilizando o método clássico), incluído no programa de análise para comparação;

(b) resultados obtidos pelo programa de análise para um diâmetro de 1 mm;

(c) resultados obtidos para um diâmetro de 1 mm, pelo programa NEC2 (soma directa).

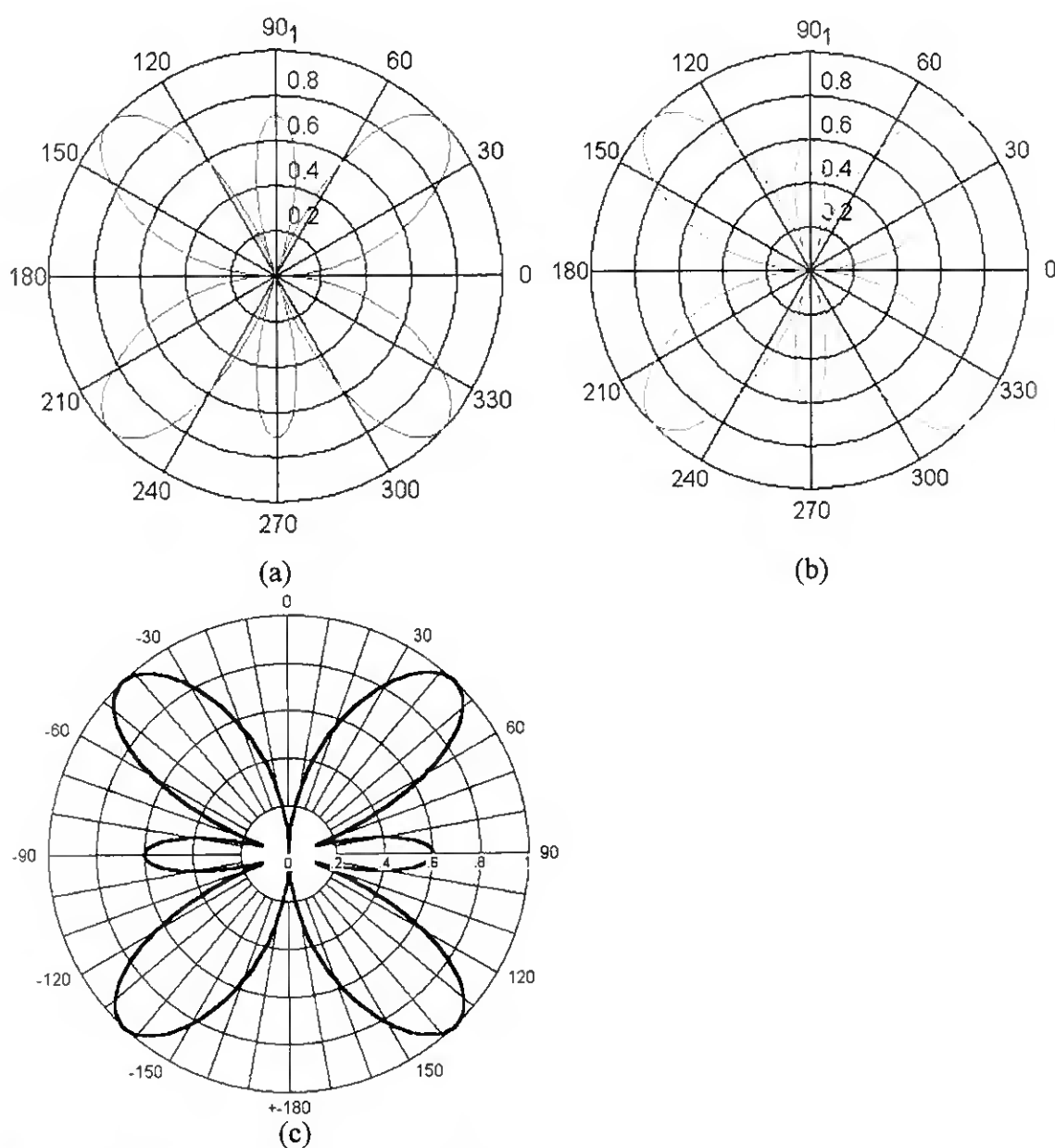


Figura 5.1 Diagramas de radiação de uma antena de  $3/2\lambda$  calculados por diferentes métodos.

A figura 5.2 apresenta os diagramas de radiação quando a antena é alimentada num extremo (segmento 3) com  $1\angle 0^\circ$  V e no outro extremo (segmento 179) com  $1\angle 180^\circ$  V (-1V) em (a) e (b); e com  $1\angle 0^\circ$  V no segmento 3 em (c) e (d). Em (a) e (c) através do programa "ou.m" e em (b) e (d) com o NEC2 (efectuando todos os cálculos cada vez que é alterada a excitação).

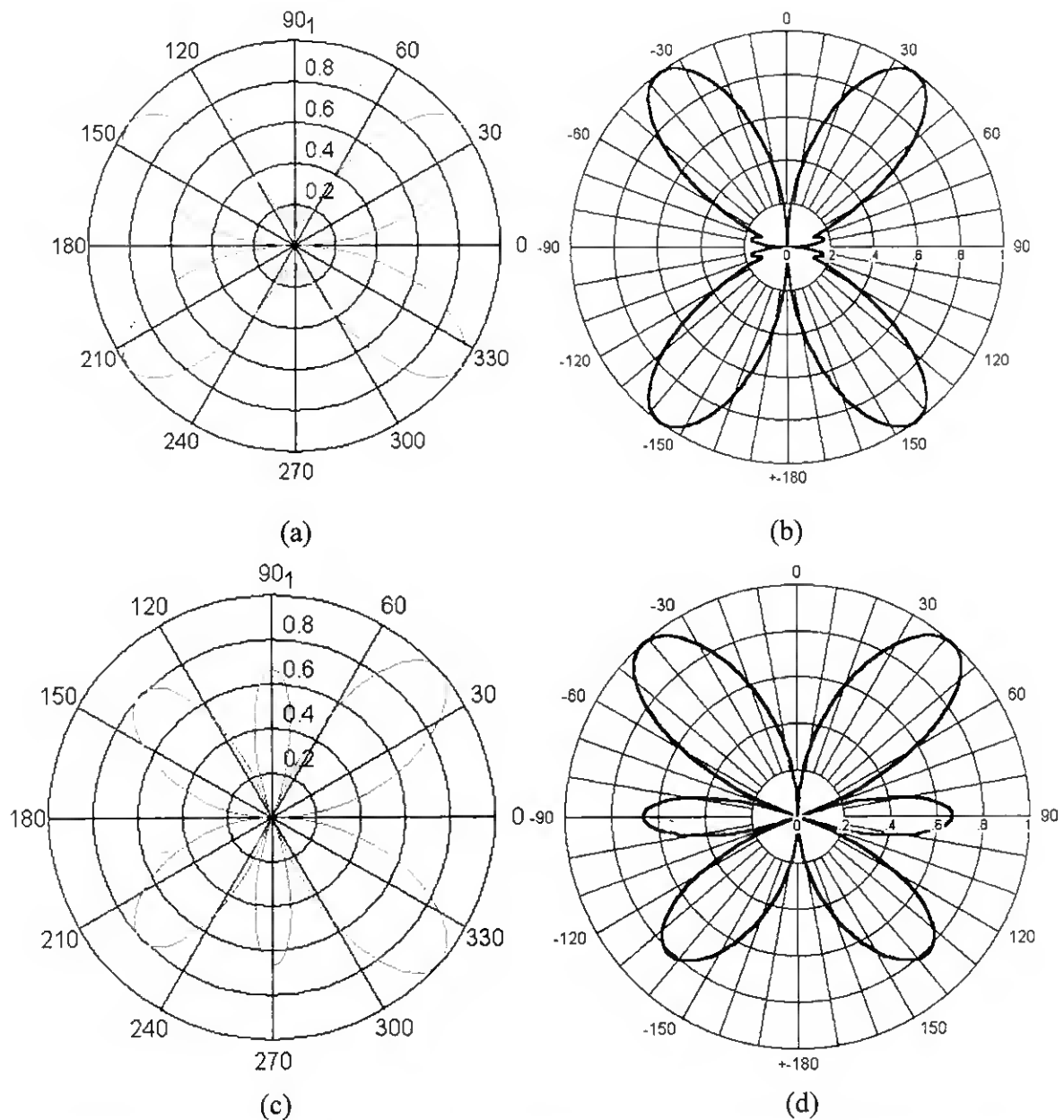


Figura 5.2 Diagramas de radiação de uma antena de  $3/2\lambda$  para excitações diferentes.

Nota: Para todos os testes efectuados os diagramas de radiação são idênticos. No entanto, os valores do campo elétrico calculados pelos dois programas são diferentes pois a distância radial considerada é diferente.

---

## Capítulo 6

---

### *Conclusão e desenvolvimentos futuros*

Foi feito um estudo de diferentes métodos numéricos aplicados na análise de antenas. Concluiu-se que o método dos momentos pode ser utilizado para relacionar a excitação da estrutura com a distribuição de fontes.

O estudo efectuado mostra que é possível relacionar directamente a excitação de um estrutura unidireccional, com o factor de agrupamento e o diagrama de radiação dessa estrutura.

Como desenvolvimentos futuros, podem ser considerados os seguintes aspectos:

utilização deste processo para a síntese de diagramas de radiação;

aplicação a estruturas multidimensionais, pesquisando as condições de aplicabilidade e as vantagens relativamente a outros métodos.

---

**Anexo**  
**A**

---

*Funções*  
*especiais utilizadas*

**A.1 Função Delta de Dirac**

Considere-se a função

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/k & \text{se } a \leq t \leq a+k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

o limite de  $f_k(t)$  quando  $k \rightarrow 0$  é representado por [1]

$$\delta(t-a) \quad (\text{A-2})$$

e é denominado Função Delta de Dirac ou Impulso unitário. Notar que  $\delta(t-a)$  não é uma função no sentido utilizado no cálculo, mas denominado uma *função generalizada*, cujas propriedades podem ser consultadas por exemplo em [1].

## A.2 Seno integral

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt \quad (\text{A-3})$$

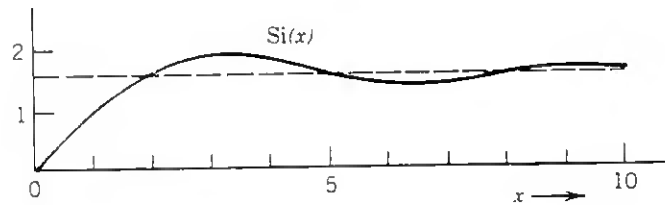


Figura C.1 Gráfico da função Si (x)

## A.3 Coseno integral

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\text{cos } t}{t} dt \quad (\text{A-4})$$

Nota: Tabelas das funções Si (x) e Ci (x) estão disponíveis em [1].

---

## Anexo B

---

### *Lista de programas*

*(Códigos)*

#### **A família NEC**

O programa NEC foi desenvolvido pelo Lawrence Livermore Laboratory e tem várias versões, resultantes de vários anos de desenvolvimento. As primeiras versões são conhecidas por BRACKT e AMP. As versões NEC3 e NEC4 e outras versões em desenvolvimento requerem autorização para utilização do U. S. Department of Defense. O programa MININEC foi a primeira versão do NEC criada para PC. Outras versões foram desenvolvidas para DEC/VAX, CDC, CRAY e Mackintosh.

O NEC2 (incluído no pacote de *software* NEC-Win Pro da Nittany Scientific, Inc. que fornece um interface gráfico para o NEC2) foi adquirido para o trabalho em questão.

Tem como entrada um ficheiro de texto com comandos, a saída é um ficheiro de texto com indicação da distribuição de correntes, valores do campo eléctrico, impedância de entrada, etc. Os utilizadores devem seguir um conjunto de regras práticas na sua execução, caso contrário os resultados podem não ser válidos. Continua a ser o programa mais utilizado por

quem estuda antenas, existindo *sites* na internet onde os utilizadores podem colocar dúvidas.

**APLAC** da Helsinki University of Technology, Nokia Corporation, Research Center, Programa baseado no método FDTD. A versão testada é uma versão de demonstração cedida pelo Laboratório. Exige a aprendizagem de um grande número de comandos, o que se revela inútil pois a versão de demonstração não executa a maioria.

**AWAS** para Windows de A. R. Djordjevic, Roger F. Harrington, T. K. Sarkar, M. D. Bazdar.

Programa baseado no método dos momentos. Utiliza uma aproximação polinomial para as correntes. De características semelhantes ao NEC2, mas mais limitado.

#### **FISC 1.0** (não testado)

O programa mais recente. Utiliza o método dos momentos baseado num algoritmo *Multi-level Fast Multipole* (permite maior velocidade de processamento e redução de memória de armazenamento).

Patrocinado pela Air Force Office of Scientific Research e pelo Wright Laboratory.

Desenvolvido pelo Center for Computational Electromagnetics, Universidade do Illinois e DEMACO, Inc. Comercializado apenas nos Estados Unidos da América submetido a aprovação pela Wright-Patterson Air Force Base.

#### **Outros programas testados**

NEC2d, versão de dupla precisão de Jos Bergervoet, NECSee de Chris Repesh; NECDraw dos arquivos informáticos da ACES (Applied Computational Electromagnetics Society); JGRAPS de John Boyer; EAM, Electromagnetic Antenna Modeling da Science Applications International Corp. (versão de demonstração cedida pela empresa); ARRAYS de A. Elsherbeni; ACAP de K. Hirasawa; SPAP de W. Stutzman e G. Thiele.

---

**Anexo  
C**

---

***O programa***

***NEC2***

O NEC2 (*Numerical Electromagnetics Code – Versão 2*) é um programa de computador desenvolvido para analisar a resposta electromagnética de uma estrutura arbitrária constituída por fios e superfícies no espaço livre ou sobre um plano de terra. A análise é realizada por solução numérica das equações integrais de campo através do método dos momentos. A excitação pode ser uma onda plana incidente (de polarização linear ou elíptica) ou uma fonte de tensão num condutor. A saída pode incluir densidades de corrente ou carga, o campo eléctrico ou magnético nas proximidades da estrutura e campos radiados (calculados por soma directa).

O programa NEC2 foi utilizado neste trabalho para determinar a matriz  $[Z]$  de estruturas unidimensionais. O seu funcionamento e o conjunto de regras a seguir na sua execução não podem ser resumidos neste espaço, no entanto considera-se importante fazer uma referência ao programa utilizado.

O programa tem como entrada um ficheiro de texto com comandos e como saída um ficheiro de dados, de que se apresenta um exemplo a seguir:

**Exemplo de programa de entrada:**

```
CE EXEMPLO1 Antena Linear com alimentação central
GW 0,7,0.,0.,-.25,0.,0.,.25,.001
GE
EX 0 0 4 0 1.
XQ
PQ
NE 0 1 1 15 .001 0 0 0. 0. .01786
EN
```

**Breve descrição dos comandos [30]:****CE (Comment Card)**

Comando onde deve ser indicada uma breve descrição da estrutura. Este comentário é impresso no início do ficheiro de saída;

**GW (Wire Specification)**

**0** - é uma etiqueta atribuída ao condutor (neste caso único);

Trata-se de uma antena filamentar, rectilínea de dipolo situada no eixo dos z, entre os pontos **(0,0,-0.25)** e **(0,0,0.25)**, de raio **0,01**. Considera-se a antena dividida em **7** segmentos.

Quando não é indicada a frequência, o código assume o valor de **2.9980E+02** MHz, de forma que o comprimento de onda é 1 metro. O comprimento da antena é de meio comprimento de onda (0,5m).

**GE (End Geometry Input)**

Indica o fim de especificação da geometria;

**EX (Excitation)**

Especifica a excitação da estrutura. Os valores indicam, respectivamente:

*0* - trata-se de uma fonte de tensão;

*0* - é a etiqueta do condutor a excitar;

*4* - n.º do segmento onde se encontra a excitação (segmento central);

*0* - no action;

*1*. - tensão em volts;

#### **XQ (Execute)**

Indica ao programa que os cálculos devem ser executados;

#### **PQ (Print Control for Charge on Wires)**

Indica ao programa que deve imprimir os valores da carga no condutor;

#### **NE (Near Fields)**

Indica que deve ser calculado o campo eléctrico próximo.

*0* - indica que devem ser utilizadas coordenadas rectangulares;

*1,1,15* - indica o número de pontos desejados nas direcções x,y,z, respectivamente;

*.001,0,0* - coordenadas do primeiro ponto (em metros)

*0,0,.01786* - incremento em (x, y, z)

#### **EN (End of Run)**

Indica ao programa o fim de execução.

#### **Saída:**

A saída é um ficheiro de texto que pode incluir, conforme as especificações, valores das correntes, campo eléctrico, impedância de entrada, etc..

---

## Anexo D

---

### *Programa de análise*

#### **Programa de análise**

```
%  
% PROGRAMA DE ANÁLISE  
% "ou.m"  
%  
% Este programa calcula o diagrama de radiação de uma antena  
% cilíndrica de comprimento "L" e raio "a" para qualquer  
% tensão de alimentação, "V"  
%  
% Entrada: tensão de alimentação, "V"  
% Saída: diagrama de radiação  
% a matriz "y" e o comprimento da antena "L" devem ser  
% definidos no ficheiro my.m  
% e a tensão de alimentação no ficheiro "v.m"  
  
clear  
clc  
  
% MATRIZ ADMITÂNCIA (y)  
%  
% Lê o valor da matriz "y" do ficheiro "my.m"  
my  
  
% ALIMENTAÇÃO (V)  
%  
% Lê o valor da matriz "V" do ficheiro "v.m"  
v
```

```

% OPÇÕES

% Resolução do diagrama de radiação em radianos:
% 1 grau por defeito
resol=pi/180;

% Forma do diagrama de radiação:
% 1- esboça diagrama de radiação normalizado
% 0- se pretende valores do campo eléctrico
diagrnor=1;

% Pretende comparar com o diagrama obtido
% desprezando o valor do raio?
% 1- se pretende comparar com antena de raio 0
% 0- caso contrário
raio=1;

% VARIÁVEIS

% Número de pontos onde se calcula o campo eléctrico
M=pi/resol+1;

% variação de teta (0 a pi radianos; resolução 'resol')
the=0:resol:pi;
% variação de teta (0 a -pi radianos; resolução 'resol')
the2=0:-resol:-pi;

% Número de segmentos (igual à dimensão da matriz y)
N=size(y,1);

% Constante de propagação -assume-se que o comprimento de
% onda é 1 metro (frequência 299.8e6 Hz)
k=2*pi;

% Distância entre segmentos (igual ao comprimento dos segmentos)
d=L/N;

% Distância radial onde se calcula o campo afastado
r=100;

% impedância intrínseca do meio
Z0=120*pi;

%
% MATRIZ DO FACTOR DE AGRUPAMENTO (F)
%
% n índice correspondente ao segmento "n"
% m índice correspondente ao ponto onde se calcula o campo
for m=1:M
    for n=1:N
        dist(m,n)=(n-1)*d*cos(the(m));
        F(m,n)=exp(j*k*dist(m,n));
    end
end
%
% MATRIZ DO CAMPO DE REFERÊNCIA (ER)

```

```

%
% Vector com valores do campo de referência
% (Dipolo elementar)
Ervector=j*Z0*k*d*(sin(the))*(exp(-j*k*r))/(4*pi*r);

ER=zeros(M);
for m=1:M
    % valores da diagonal principal
    ER(m,m)=Ervector(m);
end

% OPERADOR ÚNICO (OU)
OU=ER*F*y;

% DIAGRAMA DE RADIAÇÃO (Campo Eléctrico)
%
% matriz (coluna) com os valores do campo eléctrico
ET=OU*V;
% matriz (linha) com os valores do campo eléctrico
ETvector=ET.';

% Diagrama de radiação normalizado
if diagrnor==1
    % determina o valor máximo do campo eléctrico
    Emax=max(ETvector);
    % matriz (linha) com os valores do campo eléctrico (normalizado)
    ETnorm=ETvector/Emax;
    % diagrama de radiação normalizado em coordenadas polares
    polar(the,abs(ETnorm),'g'),...
    grid
    hold on
    % esboça o diagrama de radiação normalizado para
    % pi<=téta<=2*pi, atendendo à simetria deste diagrama
    polar(the2,abs(ETnorm),'g'),...
    hold on
else
    % Valores do campo eléctrico
    polar(the,abs(ETvector),'r'),...
    grid
    hold on
    polar(the2,abs(ETvector),'r'),...
    hold on
end

% DIAGRAMA DE RADIAÇÃO (Campo Eléctrico)
% desprezando o valor do raio
if raio==1
    the3=pi/180:pi/180:pi-pi/180;
    the4=-pi/180:-pi/180:-(pi-pi/180);;
    EE=cos(3/2*pi*cos(the3))./sin(the3);
    EEn=EE/max(abs(EE));
    if diagrnor==1
        % Diagrama normalizado
        polar(the3,abs(EEn),'c');
        hold on
        polar(the4,abs(EEn),'c');
    else
        % Valores do campo eléctrico
        polar(the3,abs(EE),'c');
    end
end

```

```

        hold on
        polar(the4,abs(EE),'c');
    end
end
%
% FIM DO PROGRAMA
%
```

### Ficheiro com o valor da alimentação, 'v.m'

Exemplo: alimentação central

```

% Alimentação
V=zeros(181,1);
V(91,1)=1;
```

### Ficheiro com a matriz [Y], "y.m"

Para o exemplo da antena de  $3/2\lambda$ , dividida em 181 segmentos, este ficheiro é demasiado longo para ser apresentado -tem 16482 linhas:

- 91×181 linhas correspondentes ao elementos das primeiras 91 colunas da matriz;
- 11 linhas de programação que deduzem as restantes colunas (por simetria).

A matriz [Y] tem 181×181 elementos complexos.

Programa utilizado para deduzir a coluna 91 da matriz [Y], com o código NEC2:

```

CM      Antena de dipolo
CM Comprimento 3/2 lambda (181 segmentos)
CM      Alimentação central
CE
GW 1,181, 0,0,-.75, 0,0,.75, .0005
GS 0 0 1
GE 0
GN -1
FR 0 1 0 0 299.8 5
EX 0 1 91 10 1.0 0.0
RP 0 361 1 1000 -90 0 1 1
RP 0 1 360 1000 90 0 1 1
EN
```

Para deduzir as colunas 1 a 90 altera-se a posição da alimentação.

---

## *Bibliografia*

---

- [1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons, 1993.
- [2] J. R. Rice, *Numerical Methods: Software and Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1983.
- [3] Steven Chapra, Raymond Canale, *Numerical Methods for Enginneers*, McGraw-Hill International Editions, 1990.
- [4] David Staelin, Ann Morgenthaler, Jin Au Kong, *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall International Editions, Cambridge.
- [5] Roger F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill International Editions, 1961.
- [6] Kazuhiro Hirasawa, Misao Haneishi, *Analysis, Design, and Measurements of Small and Low-Profile Antennas*, London: Artech House, 1992.
- [7] Warren Stutzman, Gary Thiele, *Antenna Theory and Design*, New York: John Wiley and Sons, 1981.
- [8] Costantine A. Balanis, *Antenna Theory - Analysis and Design*, New York: John Wiley and Sons, 1982.
- [9] Kai Fong Lee, *Principles of Antenna Theory*, New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [10] J. D. Kraus, *Antennas*, 2ª Edição, McGraw-Hill International Editions, 1988.
- [11] R. E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill International Editions, 1985.
- [12] E. C. Jordan, K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 1ª Edição (1950); 2ª Edição (1968).
- [13] R. King, C. Hansen, *Antennas and Waves - A Modern Aproach*, M.I.T. Press, 1969.

- [14] S. A. Schelkunoff, H. T. Friis, *Antenna Theory and Practice*, New York: John Wiley and Sons, 1952.
- [15] Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York: Macmillan, 1968.
- [16] R. Bancroft, *Understanding Electromagnetic Scattering Using the Moment Method- A Practical Approach*, London: Artech House, 1996.
- [17] Allen Taflove, *Computational Electrodynamics-The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, 1995.
- [18] D. M. Pozar, *Antenna Design Using Personal computers*, Artech House, 1985.
- [19] E. Yamashita (editor), *Analysis Methods for electromagnetic wave problems*, Vol. 2, Artech House, 1996.
- [20] Konada Umashankar, *Computational Electromagnetics*, Artech House, 1993.
- [21] Robert C. Hansen (editor), *Moment Methods in Antennas and Scattering*, Artech House, 1990.
- [22] L. Diaz, T. Milligan, *Antenna Engineering Using Physical Optics*, Artech House, 1996.
- [23] Roger F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems," *Proc. IEEE*, Vol. 55, Fevereiro de 1967, pp. 136-139.
- [24] T. K. Sarkar, "A Note On the choice of Expansion and Weighting Function in the Method of Moments", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-33, pp. 436-441, Abril 1985.
- [25] T. K. Sarkar, A. R. Djordjevic, E. Arvas, "On the choice of Expansion and Weighting Function in the Numerical Solution of Operator Equations", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-33, No. 9, Setembro 1985.
- [26] L. L. Tsai, C. E. Smith, "Method of Moments in Electromagnetics for Undergraduates", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. E-21, No. 1, Fevereiro 1978.

- [27] T. H. Hubing, "Survey of Electromagnetic Modeling Technics", Electromagnetic Compatibility Laboratory, Setembro 1991.
- [28] António Casimiro, *A Relação Básica da Radiação*, Tese de Doutoramento, FEUP, 1990.
- [29] *Special Edition on advanced Numerical Techniques in Electromagnetics*, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 45, No. 3, Março 1997.
- [30] Manual do NEC-Win Professional Antenna Analysis Software Vers. 1.1, Nittany Scientific, 1997.
- [31] A. R. Djordjevic, Roger F. Harrington, T. K. Sarkar, M. D. Bazdar, *Analysis of Wire Antennas and Scatterers: Software and User's Manual*, Artech House, 1990.
- [32] Yee, K. S., "Numerical Solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol.14, 1966, pp. 302-307.
- [33] Robert E. Collin, "The role of analysis in an age of computers: View from the analytical side," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Agosto 1990, pp. 27-31.
- [34] D. R. Wilton, C. M. Butler, "Effective methods for solving integral and integro-differential equations," Hemisphere Publishing Company, 1981.
- [35] E. K. Miller, "A selective survey of computational electromagnetics for antenna applications," AGARD Lecture Series N° 165, 1989.
- [36] R. B. Darst, *Introduction to Linear Programming*, Marcel Dekker, 1991.
- [37] P. P. Silvester, G. Pelosi (editores), *Finite Element for Wave Electromagnetics*, IEEE Press, 1994.
- [38] K. Siakavara, J. N. Sahalos, "A simplification of the syntesis of parallel wire antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, No. 7, pp. 936-940, Julho 1989.

- [39] EM Wavetracer, Finite-Difference Time-Domain software and hardware, Wavetracer, Inc.
- [40] L. Diaz, T. Milligan, *Antenna Engineering Using Physical Optics, Practical CAD Technics and Software*, Artech House, 1996.
- [41] J. N. Sahalos, "Synthesis and optimization for arrays of nonparallel wire antennas by the orthogonal method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-26, pp. 886-890, Nov. 1978.
- [42] M. S. Rosa, *Tópicos de Análise Numérica*, Universidade de Coimbra, 1987 (Texto de apoio aos cursos de Engenharia).
- [43] A. M. Casimiro, J. A. R. Azevedo, A. J. V. Grilo, "FFT for Radiation Pattern analysis and Synthesis," Grupo de Comunicações, Universidade da Madeira.
- [44] The Student Edition of MATLAB (Versão 5), User's Guide, The Math Works Inc., 1997.



Dedicado a

*José Manuel Bernardo Emidio*

(1980-1995)