UNIVERSIDADE DO ALGARVE

ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA

CURSO BIETÁPICO EM ENGENHARIA CIVIL - 1º Ciclo

ANÁLISE DE ESTRUTURAS II

Apontamentos para as Aulas Teóricas

MÉTODO DE CROSS

(Setembro de 2002)

Vítor Barreto

ÍNDICE

MÉTODO DE CROSS

1- Método de Cross

1.1- Rigidez de Rotação de uma Secção e de um Nó

As barras estudadas até agora quando destacadas de uma estrutura podiam ser dos seguintes tipos: encastradas-encastradas (E-E), encastradas-rotuladas (E-R), encastradas-libertação de esforço transverso (E-V) e finalmente consolas, cujas extremidades estão respectivamente encastradas e livres, (E-L).

Define-se como rigidez de rotação de uma secção extrema de uma barra isolada, ou simplesmente como rigidez de rotação de uma secção, como sendo o momento necessário aplicar a essa secção para mantê-la rodada de uma unidade (1 radiano). Assim as rigidezes de rotação das barras E-E, E-R, E-V e E-L são respectivamente $4EI/L$, $3EI/L$, EI/L e 0 (zero), como se mostra na figura 1.1. Estas rigidezes dependem das condições de fronteira das barras. Caso extremo é o da barra E-L (consola) para a qual o momento necessário aplicar-lhe para manter a secção de encastramento rodada é nulo.

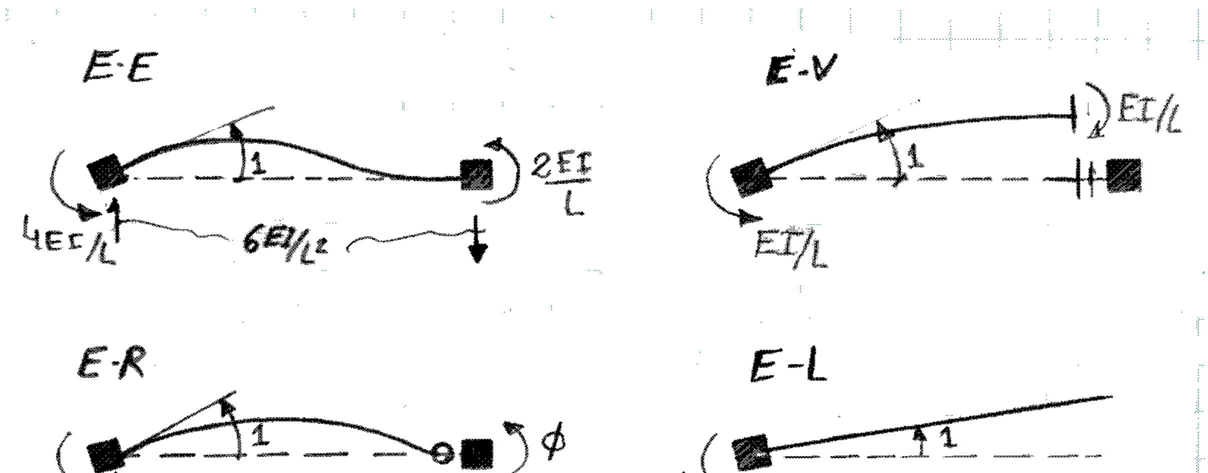


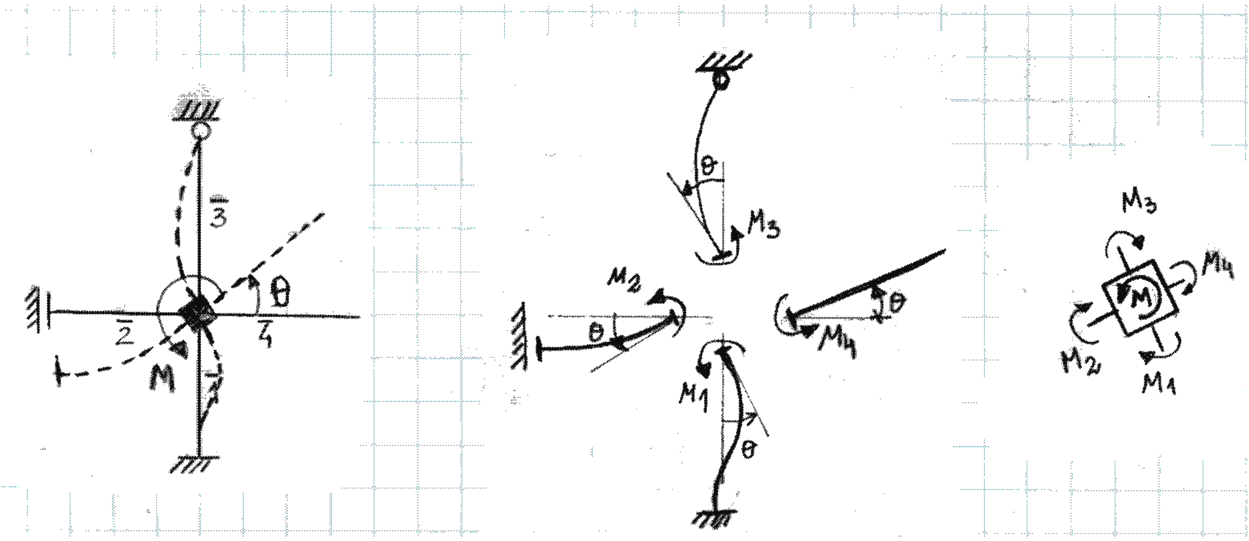
Figura 1.1

Imagine-se que várias barras convergem num nó. Designa-se por rigidez de rotação de um nó o momento necessário aplicar-lhe para o manter rodado de uma unidade. Como as secções das barras adjacentes a um nó rodam a mesma quantidade que este, então a rigidez de rotação do nó é o somatório da rigidez de rotação das secções das barras adjacentes ao nó. (ver fig.1.2)

1.2- Coeficientes de Distribuição e de Transmissão

Imagine-se a estrutura da figura 1.2.a) à qual se aplica um momento M ao nó central. Este irá rodar de uma quantidade θ assim como todas as secções das barras neles convergentes.

A estrutura pode entretanto ser desmembrada de acordo com a figura 1.2.b) na qual todas as secções das barras rodam a mesma quantidade θ. Isolando o nó das barras (figura 1.2.c)) verificamos que, para haver equilíbrio neste, que o momento aplicado M será a soma dos momentos existentes nas secções extremas (M_1 a M_4), como se ilustra na figura 1.2.



a) b) c)

Figura 1.2

Podemos estão escrever:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \left(\frac{4EI}{L}\right)_1 * \theta + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 * \theta + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 * \theta + \left(\frac{0}{L}\right)_4 * \theta \qquad (1.1)$$

com:

$$M_1 = k_1 * \theta = \left(\frac{4EI}{L}\right)_1 * \theta, \qquad M_2 = k_2 * \theta = \left(\frac{EI}{L}\right)_2 * \theta,$$
$$M_3 = k_3 * \theta = \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 * \theta, \qquad M_4 = k_4 * \theta = \left(\frac{0}{L}\right)_4 * \theta = 0 \qquad (1.2)$$

Da igualdade (1.1) podemos determinar a rotação θ do nó devido a M e escrever:

$$\theta = \frac{M}{k_{nó}} = \frac{M}{\sum_j k_j} = \frac{M}{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{0}{L}\right)_4}, \qquad (1.3)$$

O denominador da expressão (1.3) é a rigidez de rotação do nó, $k_{nó}$. Substituindo (1.3) em cada uma das igualdades de (1.2) obtemos as parcelas de momento flector aplicado *M*, que se *distribui* por cada uma das secções adjacentes ao nó, obtendo-se:

$$M_1 = \frac{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1}{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{0}{L}\right)_4} * M = \frac{k_1}{k_{nó}} * M = r_1 * M \quad , \tag{1.4.a)}$$

$$M_2 = \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_2}{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{0}{L}\right)_4} * M = \frac{k_2}{k_{nó}} * M = r_2 * M \tag{1.4.b)}$$

$$M_3 = \frac{\left(\frac{3EI}{L}\right)_3}{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{0}{L}\right)_4} * M = \frac{k_3}{k_{nó}} * M = r_3 * M \tag{1.4.c)}$$

$$M_4 = \frac{\left(\frac{0}{L}\right)_4}{\left(\frac{4EI}{L}\right)_1 + \left(\frac{EI}{L}\right)_2 + \left(\frac{3EI}{L}\right)_3 + \left(\frac{0}{L}\right)_4} * M = \frac{k_4}{k_{nó}} * M = r_4 * M = 0 \tag{1.4.d)}$$

À razão r_i entre a rigidez da secção transversal *i* a rigidez do nó designa-se por <u>coeficiente de distribuição da secção *i*</u> ou factor de rotação da secção *i*.

$$r_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{1.5}$$

Como é fácil verificar o somatório $\mathbf{\Sigma\ r_i}$ num nó é sempre unitário.

Como se constata das igualdades anteriores (1.4.a)) a (1.4.d)) o momento *M* aplicado ao nó distribui-se pelas *i* secções adjacentes, M_i, proporcionalmente aos coeficientes de distribuição, podendo-se escrever:

$$M_i = r_i * M \tag{1.6}$$

É de realçar que o momento aplicado ao nó se distribui pelas secções a ele adjacentes no mesmo sentido. Admite-se que o sentido do momento é positivo se o for no *sentido positivo de Cross*, o qual se assume ser o sentido anti-horário.

Entretanto quando numa secção adjacente ao nó que acaba de rodar se instala um momento, uma parte deste *transmite-se* para outra secção extrema da barra para se garantir o equilíbrio global da mesma. O valor deste momento depende das condições de apoio (fronteira) da barra. À razão entre o momento na secção da barra oposta à secção adjacente ao nó que roda e entre o momento da secção adjacente ao nó que roda, com sinal de Cross, designa-se por coeficiente de transmissão. Simbolicamente podemos designar por coeficiente de transmissão da secção i para j à razão.

$$t_{ij} = M_j / M_i \tag{1.7}$$

sendo M_i o momento na secção que roda e M_j o da extremidade oposta.

Observando novamente a figura 1.1 verificará que os coeficientes de transmissão das barras E-E, E-R, E-V e E-L são respectivamente 0.5, 0 (zero) , -1 e 0 (zero).

1.3- Momento Nodal e sua Distribuição pela Estrutura.

Designa-se por momento nodal um momento aplicado directamente a um nó.

Imagine-se agora que temos uma estrutura à qual se aplica um momento a um determinado nó e que se pretende saber como este se distribui pelas barras.
Numa fase inicial devemos supor que todos os nós estão impedidos de rodar e de ter translações. O nó, não podendo rodar quando sob a acção de um momento, é como se estivesse ficticiamente fixo ao exterior por um momento nodal de fixação, com sinal contrário ao momento aplicado. Libertando agora o vínculo ao exterior o nó fica livre de rodar, recebendo directamente o momento aplicado o qual se e distribuirá pelas secções *i* adjacentes ao nó de acordo com a expressão (1.6). Os momentos instalados na secção *i*, M_i, serão imediatamente transmitidos para a secção oposta da barra (secção j), com o mesmo sinal de Cross, valendo:

$$M_j = t_{ij} * M_i. \tag{1.8}$$

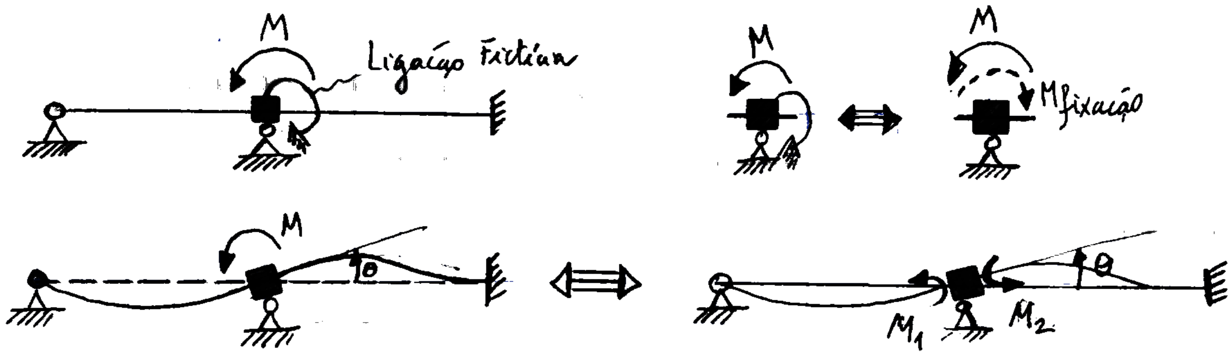


Figura 1.3- Momento de fixação para acção (momento) nodal e sua distribuição

1.4- Momentos de Bloqueamento Perfeito (M_{bp}) e sua distribuição pela estrutura.

Imagine-se a estrutura sujeita a cargas de vão. Numa fase inicial supõe-se que os nós estão impedidos de rodar. Assim, nas secções extremas das barras actuam Momentos de Bloqueamento Perfeito (M_{bp}) que equilibram as cargas de vão em cada barra. Pelo Princípio da Acção-Reacção deduz-se que sobre os nós onde essa barra está ligada actuam momentos no sentido contrário. Para que o nó não rode é necessário que esteja ficticiamente ligado ao exterior com um *Momento de Fixação* (*MF*), cujo sentido é igual ao do momento de bloqueamento perfeito. Este Momento de Fixação é o somatório dos Momentos de Bloqueamento Perfeito de todas as secções (nas barras) adjacentes ao nó.

Quando se libertar o vínculo fictício do nó ao exterior, este rodará no sentido contrário ao do Momento de Fixação, como se o momento de fixação actuasse como um *momento aplicado ao nó* mas em sentido contrário (o sinal é por isso trocado). O momento de fixação, com o sinal trocado, irá distribuir-se pelas secções adjacentes ao nó de acordo com a expressão (1.5). Imediatamente depois, estes momentos distribuídos são transmitidos para as secções opostas das barras (que (ainda) não rodaram) pela expressão 1.8.

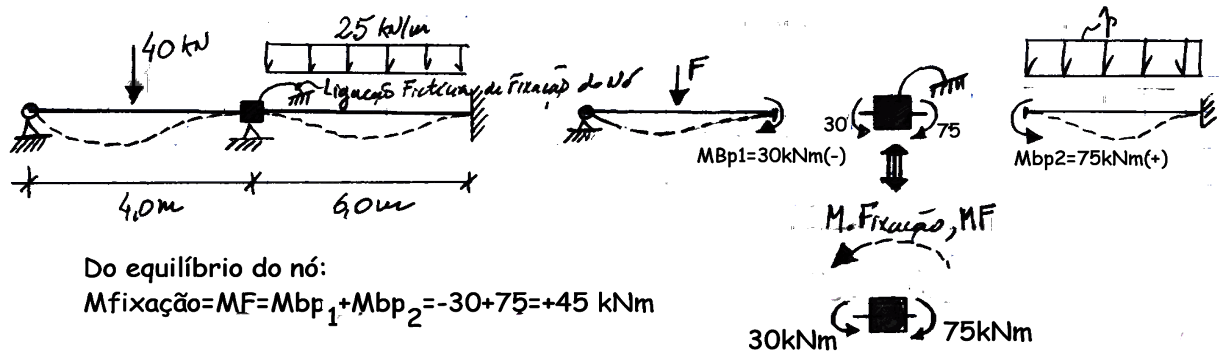


Figura 1.4-Momento de fixação para acções de vão

1.5.- Algoritmo de Cross (sem fases deslocáveis)

O método de Cross é um método iterativo que se fundamenta na redistribuição de momentos até ao equilíbrio total da estrutura, à custa da rotação sucessiva dos nós.

A aplicação de método comporta duas partes :

I) Parte Inicial:

Nesta fase determinamos os coeficientes de distribuição, de transmissão, os momentos nodais , os momentos de bloqueamento perfeito e os momentos fixação *iniciais*.

II) Parte Iterativa:

Esta fase consiste na distribuição do momento de fixação (ou desequilibrado) existente em cada nó pelas secções críticas adjacentes ao nó (momento distribuído), e ainda na transmissão de parte deste último para a secção crítica da extremidade oposta da barra (momento transmitido). Esta rotina é realizada nó a nó até que o momento de fixação (ou desequilibrado) atinja valor desprezável.

1.5.1- Hipóteses e Definições

Para podermos aplicar o método há que reter as seguintes hipóteses e definições:

1) A estrutura é constituída por uma série de barras, *elementos-base*, de qualquer tipo (E-E, E-R, E-V, E-L) e indeformáveis axialmente

2) As *secções críticas* estão localizadas nos extremos de cada barra, e são os locais onde vamos ler e ou aplicar os momentos.

3) Os momentos nas secções críticas são considerados como positivos se estiverem aplicados no sentido de rotação positiva dos nós e quando se imaginam as barras destacadas da estrutura. Este sentido é o *anti-horário* ou *directo*. Dizem-se então com "sinal de Cross".

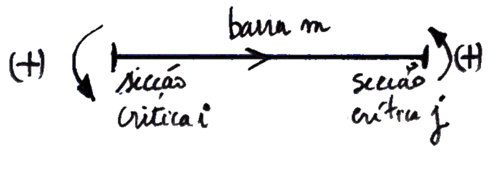


Figura 1.5 - Momentos com sentido positivo aplicados nas secções críticas

4) Os *momentos nodais* (MN) são aqueles aplicados directamente aos nós, sendo positivos no sentido anti-horário. São solicitações ou acções.

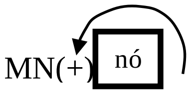


Figura 1.7 -Momento Nodal

5) Os *momentos de bloqueamento perfeito* (M_{bp}) são os momentos aplicados nas secções extremas (*secções críticas*) de cada barra supondo-as destacadas da estrutura, para equilibrar as cargas de vão quando os nós independentes do elemento-base não rodam (estão bloqueados).

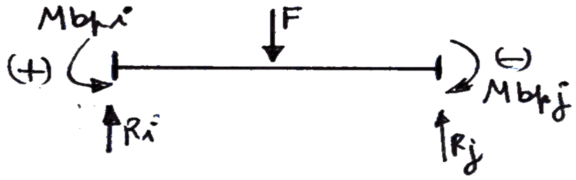


Figura 1.8 - Momentos de bloqeamento perfeito para uma carga de vão

6) *Momento de fixação inicial* (MFI) de um nó é a soma do simétrico do momento nodal (aplicado) ao nó com o valor dos momentos de bloqueamento perfeito das secções críticas das barras que convergem nesse nó, $MFI = - MN + \Sigma M_{bp}$. *Momento de fixação inicial* de um determinado *nó* é o momento nodal necessário aplicar ao nó para o manter em repouso, no início do algoritmo de Cross.

7) *Momento de fixação (não inicial)* (MF) de um determinado *nó* é o momento nodal fictício necessário aplicar ao nó para o manter em repouso, sendo igual à soma dos momentos instalados nas secções críticas barras adjacentes ao nó, $MF = \Sigma M_{s.crit.}$

8) *Momento desequilibrado* (MD) de um determinado *nó* é a soma dos momentos instalados nas secções críticas adjacentes a esse nó. É numericamente igual ao momento de fixação,
$MD = MF = \Sigma M_{s.crit.}$

1.5.2- Procedimento Prático do Algoritmo de Cross

I - Parte Inicial

Passo 1: Identificar o grau de indeterminação cinemático (β) e redução da estrutura a uma estrutura fundamental (conjunto de elementos base). Discretização da estrutura numerando as barra e as secções críticas.

Passo 2: Cálculo da rigidez de flexão de cada secção crítica K_i. Determinação dos coeficientes de distribuição $r_i = k_i / (\Sigma K_j)$. Determinação dos coeficientes de transmissão (t_{ij}). Colocação dos coeficientes de distribuição dentro das "caixas" nos extremos das barras (sobre as secções críticas) e colocação dos coeficientes de transmissão sobre uma seta a meio das barras indicando estas o(s) sentido(s) de transmissão.

Passo 3: Determinação dos momentos de fixação dos momentos nodais e sua colocação dentro de "caixas circulares" nos nós. Determinação dos momentos de bloqueamento perfeito e sua colocação por baixo das "caixas" com os coeficientes de distribuição.

Passo 4: Cálculo dos Momentos de Fixação Iniciais (MFI) e sua colocação na coluna respectiva da tabela auxiliar.

II - Parte Iterativa

Passo 5: Escolha do nó com o maior momento de fixação (em valor absoluto). Distribuição do *simétrico* do momento de fixação pelas secções críticas adjacentes ao nó (momento distribuído). (Note que o nó rodará no sentido contrário ao do momento de fixação. Por isso de troca o sinal). Deve sublinhar-se o momento distribuído, significando um dos instantes em que se atingiu o equilíbrio deste nó.

Passo 6: Transmissão de parte do momento distribuído para a secção crítica oposta na barra.

Passo 7: Determinação dos momentos de fixação em todos os nós e preencher a coluna correspondente na tabela auxiliar. Repetir a partir do passo 6 até que o momento de fixação seja desprezável (ou até que os momentos distribuídos o sejam).

Notas :

(i) Para acelarar o processo de convergência e diminuir o número total de iterações deve iterar-se sempre o nó que tiver o momento mais desequilibrado, ou seja, o maior momento de fixação (em valor absoluto).

(ii) Se houver dois nós em igualdade de circunstâncias deve iterar-se aquele que tiver maior coeficiente de distribuição na barra que o liga ao maior número de barras da estrutura (barra que conduz à maior dispersão/distribuição do momento a transmitir).

1.6 - Método de Cross com Fases Deslocáveis (translações)

Fases deslocáveis são os movimentos de translação que conjuntos barras e de nós podem ter mobilizando apenas deformação por flexão das barras. É por exemplo o movimento horizontal de um andar de um edifício de malha ortogonal. Estes movimentos de translação englobam em geral mais do que um nó.

O cálculo de uma estrutura com fases deslocáveis é realizado em duas fases distintas, fases *Indeslocável* e *Deslocável*, como se pretende esquematizar na figura seguinte. É complementado com aplicação do método dos deslocamentos e equação de sobreposição de efeitos para esforços.

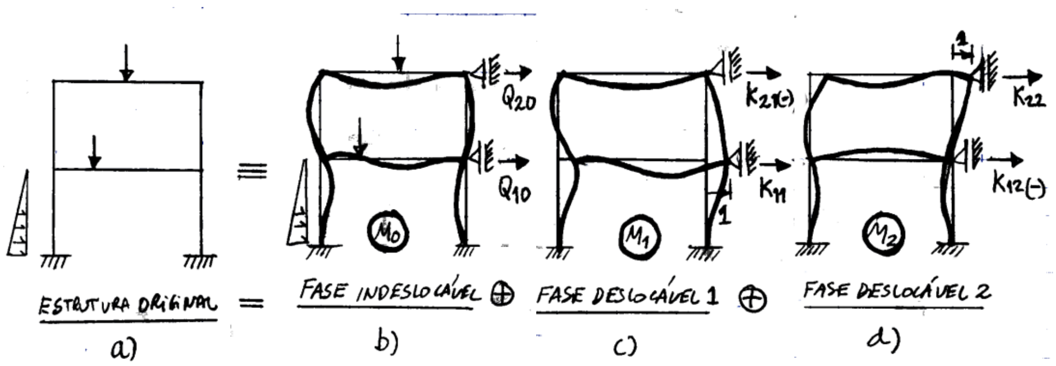


Figura 1.9 -Método de Cross com fases deslocáveis

1.6.1- Fase Indeslocável :

Nesta fase identificam-se todos os deslocamentos de translação possíveis, arbitrando o sentido positivo para cada deslocamento de translação. É necessário eleger os nós, ou pontos da estrutura, onde estes deslocamentos irão ser provisoriamente restringidos e lidos.

De seguida colocam-se *apoios fictícios* naqueles pontos que impossibilitem os deslocamentos de translação da estrutura. Acaba-se de se transformar a estrutura inicial numa outra onde só são possíveis as rotações dos nós. É a estrutura da *Fase Indeslocável* ou *Fase Zero*.

Submetemos essa estrutura às acções. Determinamos os esforços finais (momentos flectores- $\mathbf{M}_O$) aplicando o método de Cross para estruturas sem fases deslocáveis antes descrito. Como se viu esse processo é constituído pela parte inicial e parte iterativa.

De seguida determinam-se as reacções de apoio nos apoios fictícios, agrupando essas forças no vector $\{Q_O\}$:

$$\{Q_O\}^T = \{ Q_{10}, Q_{20}, \ \dots \ , Q_{n0} \} \qquad (1.8)$$

sendo *n* o número de fases deslocáveis. (ver figura 1.9.b))

Estas reacções determinam-se aplicando as Equações de Equilíbrio da Estática quer à estrutura global quer a partes da mesma, consoante mais cómodo ou mais directo, não se esquecendo que há já bastantes esforços internos (momentos) e externos (reacções momento) que são conhecidos e que por isso facilitam esta tarefa. Outro processo, provavelmente mais trabalhoso, será o de realizar o equilíbrio de forças nos nós externos, cujas forças em jogo são esforços axiais e esforços transversos. Estes são determinados a partir dos diagramas de esforços axiais e transversos entretanto desenhados sendo estes últimos quantificados a partir dos diagramas de momentos flectores.

1.6.2- <u>Fase(s) Deslocável(eis)</u>

O número de fases deslocáveis é igual ao número de translações independentes que a estrutura têm, ou seja, ao grau de indeterminação cinemática associado a translações, β_T.

Para **cada** fase deslocável deve proceder-se do seguinte modo.

No sentido do deslocamento associado à fase deslocável *j* vamos impor um deslocamento unitário (d_j=1) mantendo os nós *SEM* rodar. Deste modo conseguimos calcular os momentos de bloqueamento associados a esta fase deslocável (Fase *j*). A partir destes resolve-se o Cross como se fosse uma estrutura sem fases deslocáveis, como no capítulo anterior. É de notar que os coeficiente de distribuição NÃO se alteram (*[1]).

[1] Os coeficientes de distribuição são exactamente iguais aos da fase zero, pois o que se faz no Algoritmo de Cross é distribuir momentos <u>apenas</u> à custa da rotação dos nós, como já vimos. Os coeficientes de distribuição relacionam-se apenas com a rotação na medida em que são a rigidez de rotação relativa entre secções adjacentes do mesmo nó.

Obtidos os momentos finais da fase *j* ($\mathbf{M}_j$) podemos determinar as reacções nos apoios fictícios. Estas representam os *i* elementos da coluna *j* da matriz de rigidez associada a deslocamentos de translação da estrutura. Obtemos então :

$$\text{coluna j da matriz de rigidez } [K] \equiv \{k_j\} = \begin{Bmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \ldots \\ k_{nj} \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Esquematiza-se na figura 1.10 o que se acaba de explicar para a primeira fase deslocável do pórtico da figura 1.9.

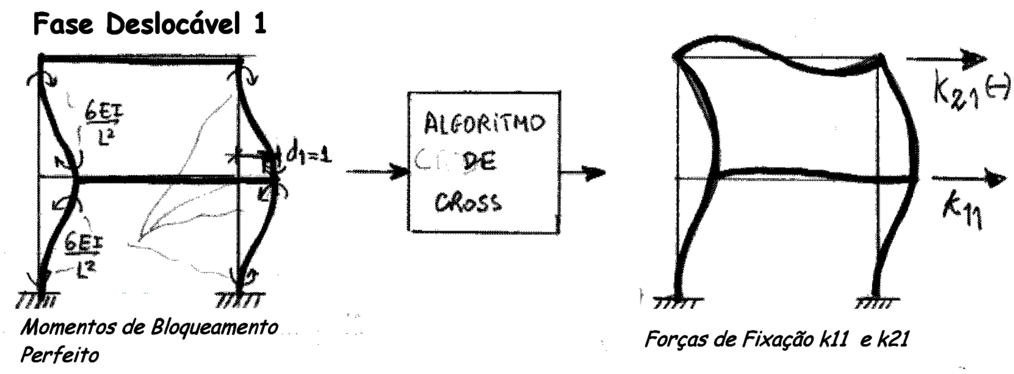


Figura 1.10- Primeira Fase Deslocável . Elementos da coluna 1 da matriz de rigidez.

Procedendo de igual modo para as restantes fases deslocáveis vamos construir a matriz de rigidez [**K**] associada aos modos de translação da estrutura.

A seguinte equação do método dos deslocamentos permite-nos obter os deslocamentos de translação nos apoios fictícios.

$$\mathbf{[K]\,\{d\} + \{Q_0\} = \{Q\}} \tag{1.10}$$

({**Q**} é em geral nulo, exceptuando nos casos de acções sísmicas e do vento)

Os esforços finais são obtidos pela aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos, como se fazia no método dos deslocamentos , isto é :

$$\mathbf{\{X\} = [E_m]\,\{d\} + \{X_0\}} \tag{1.11}$$

1.7.- Conclusão

.

Como se deduz o método dos deslocamentos pode ser resolvido parcialmente usando o método de Cross. Este último permite determinar os deslocamentos nodais independentes associados a rotações em função de cada fase deslocável. Reduzimos assim o número de incógnitas do método dos deslocamentos, que passam a ser agora apenas os deslocamentos de translação (independentes).

Há de facto outro método, Kani, que permite resolver iterativamente as translações. Não faz parte do programa.

Hoje em dia, na era dos computadores, não faz muito sentido a aplicação prática do método de Cross com fases deslocáveis em virtude do trabalho neste envolvido. Têm no entanto particular importância para a ajuda e compreensão do comportamento estrutural.

1.8- Exemplo de Aplicação

Dada a estrutura pretende-se, recorrendo ao método de Cross, determinar:

a) O diagrama final de momentos flectores

b) A rotação final do nó B.

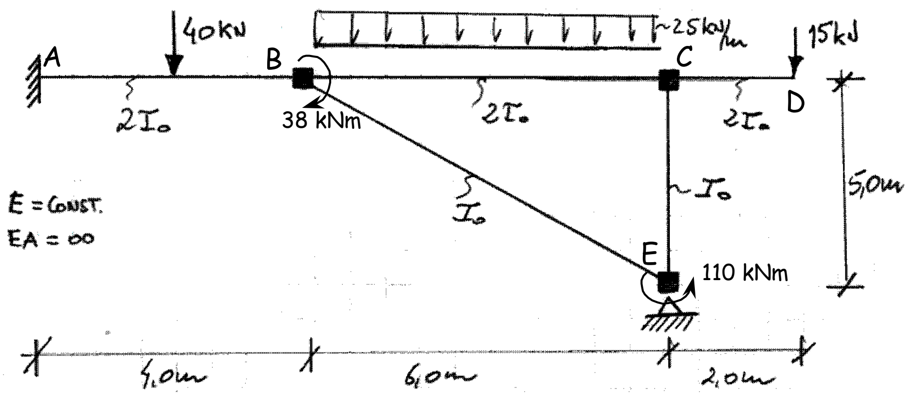


Figura 1.11

Resolução:

Passo 1:

Como se verifica os nós B, C e E podem rodar pelo que β_R=3. Como não há translação de nós (as barras são axialmente indeformáveis) β_T=0 o que significa que não há fases deslocáveis. A estrutura é discretizada tendo sido numeradas as secções e numeradas e orientadas as barras como mostra a figura.

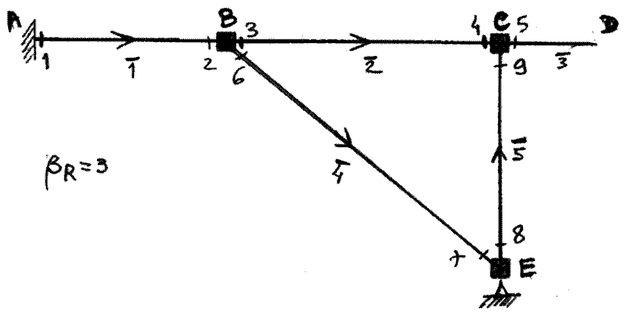


Figura 1.12

Passo 2: Cálculo da rigidez de flexão de cada secção e dos coeficientes de distribuição correspondentes

$k_2 = 4E(2I_0) / 4 = 2.0EI_0$

$k_3 = 4E(2I_0) / 6 = 1.333EI_0$

$k_4 = k_3 = 1.333EI_0$

$k_5 = 0*E(2I_0) / 2 = 0$

$k_6 = 4EI_0 / 7.81 = 0.512EI_0$

$k_7 = k_6 = 0.512EI_0$

$k_8 = 4EI_0 / 5 = 0.8EI_0$

$k_9 = k_8 = 0.8EI_0$

$\begin{cases} r_2 = k_2 / (k_2 + k_3 + k_6) = 0.520 \\ r_3 = k_3 / (k_2 + k_3 + k_6) = 0.347 \end{cases}$

$r_6 = 1 - r_2 - r_3 = 0.133$

$\begin{cases} r_4 = k_4 / (k_4 + k_5 + k_9) = 0.625 \\ r_9 = k_9 / (k_4 + k_5 + k_9) = 0.375 \end{cases}$

$r_5 = 1 - r_4 - r_9 = 0$

$\begin{cases} r_7 = k_7 / (k_7 + k_8) = 0.390 \\ r_8 = 1 - r_7 = 0.610 \end{cases}$

Identifcamos, consoante o tipo de barra os seguintes coeficientes de transmissão:

$t_{21} = t_{34} = t_{43} = t_{67} = t_{76} = t_{89} = t_{98} = 0.5$

Os coeficientes de distribuição relativos a cada secção são agora colocados dentro de caixas sobre as respectivas secções. Pode juntar-se a cada caixa uma seta, perpendicular ao eixo da barra, indicando em que sentido irão ser escritos os futuros momentos distribuídos e transmitidos.. Entretanto a meio de cada barra coloca-se uma seta indicando o sentido da transmissão entre as secções extremas das barras e também o valor deste coeficiente. Ver figura 1.13.

Passo 3: Determinação dos Momentos de Fixação Nodais (*MFN*) e dos Momentos de

Bloqueamento Perfeito (M_{bp})

Observando a figura 1.11 constatamos que temos dois momentos aplicados aos nós B de valor -38 kNm e nó E de valor +110 kNm (com os sinais de Cross). Os respectivos momentos de fixação nodais (*MFN*) terão sentido contrário e por isso os seus valores serão +38 kNm e -110 kNm, os quais se devem colocar dentro de círculos junto a cada nó, como mostra a figura 1.13.

Atendendo às cargas de vão de cada barra determinamos os momentos de bloqueamento perfeito, $M_{bp.i}$, nas suas secções extremas *i*. Ter-se-á então:

- barra 1: $M_{bp.1}$ = 40*4 / 8 = 20 kNm (+, Cross) ; $M_{bp.2}$ = 20 kNm (-, Cross)

- barra 2: $M_{bp.3}$ = $25*6^2 / 12$ = 75 kNm (+, Cross) ; $M_{bp.4}$ = 75 kNm (-, Cross)

- barra 3: $M_{bp.4}$ = 15*2 = 30 kNm (+, Cross)

Estes valores respeitantes a cada secção, colocam-se agora junto à "caixa" associada a essa secção que contem o coeficiente de distribuição.Ver figura 1.13.

Passo 4: Determinação dos Momentos de Fixação Iniciais, *MFI*.

Estes momentos são por definição MFI = -MN + Σ Mbp.i = MFN + Σ Mbp.i e são determinados para cada nó. Temos portanto:

- Nó B: MFI^B = 38 +(-20 +75 + 0) = +93

- Nó C: MFI^C. = 0 + (-75 + 30 + 0) = -45

- Nó E: MFI^E. = -110 + (0 + 0) = -110

Entretanto constrói-se um *quadro auxiliar*, ver figura 1.14, onde esses valores são colocados na coluna 2.

Chegámos ao fim da *Parte Inicial* do algoritmo de Cross.

Inicia-se de seguida, no Passo 5 a *Parte Iterativa*.

Iteração 1, Passo 5 :

Da coluna 2 do quadro auxiliar verifica-se que o momento de fixação maior é o do nó E. Por conseguinte este nó está sujeito ao maior desequilíbrio e por isso deverá libertado realizando-se uma "iteração". Troca-se o sinal ao momento de fixação inicial e distribui-se pelas secções s7 e s8, multiplicando o simétrico do momento de fixação respectivamente pelos coeficientes de distribuição dessas secções (0.39 e 0.61), resultando respectivamente nos momentos distribuídos de +42.9 kNm e +67.1 kNm. Estes momentos são sublinhados, significando assim que o nó está neste instante em equilíbrio total (o somatório de todos os momentos aplicados ao nó e nas secções adjacentes é nulo).

Iteração 1, Passo 6 :

Os momentos distribuídos pelas secções s7 e s8 são transmitidos respectivamente para as secções s6 e s9 (aplicando a expressão 1.7). Valem respectivamente +21.5 kNm e +33.6 kNm.

Iteração 1, Passo 7:

Os momentos transmitidos irão acumular-se aos momentos já existentes nas secções que os recebem, alterando os momentos de fixação dos nós adjacentes aquelas secções. Assim, após iteração no Nó E, que cujo nome se coloca na linha 2 coluna 3 do quadro, os momentos de fixação dos nós B, C e E serão respectivamente +114.5 kNm, -11.4 kNm e 0kN. Devem ser colocados na coluna 3 do quadro. A Iteração 1 está completa.

Iteração 2, Passo 5 :

Da coluna 3, verificamos que o nó E está em equilíbrio, porque o seu momento de fixação é nulo. Por outro lado, o nó mais desequilibrado é o nó B, cujo momento de fixação vale +114.5 kNm. Deverá por isso ser "iterado". Troca-se o sinal ao momento de fixação (-114.5) e distribui-se pelas secções adjacentes ao nó B, ou sejam, secções s2, s3 e s6, multiplicando o simétrico do MF respectivamente pelos coeficientes de distribuição destas secções. Surgem respectivamente os seguintes momentos distribuídos -59.5 kNm, -39.7kNm e -15.2 kNm. Devem sublinhar-se estes momentos. O nó B atingiu neste instante o equilíbrio.

Iteração 2, Passo 6 :

Os momentos distribuídos pelas secções s2, s3 e s6 são transmitidos respectivamente para as secções s1, s4 e s7, e valem respectivamente -29.8 kNm, -19.9 kNm e -7.6 kNm.

Iteração 2, Passo 7:

Os momentos transmitidos irão novamente acumular-se aos momentos já existentes nas secções que os recebem, alterando os momentos de fixação (MF). Assim, após iteração no Nó B, que cujo nome se coloca na linha 2 coluna 4 do quadro, os momentos de fixação respectivamente nos nós B, C e E serão agora +0 kNm, -31.3 kNm e -7.6 kN, que devem ser colocados na coluna 4. A Iteração 2 está completa.

Inicia-se agora a iteração 3 pelo nó mais desequilibrado o nó C. Os passos 5, 6 e 7 repetem-se. O processo termina quando os momentos de fixação forem desprezáveis face a um determinado erro. Admitiu-se que o erro máximo seria de 1 kNm.

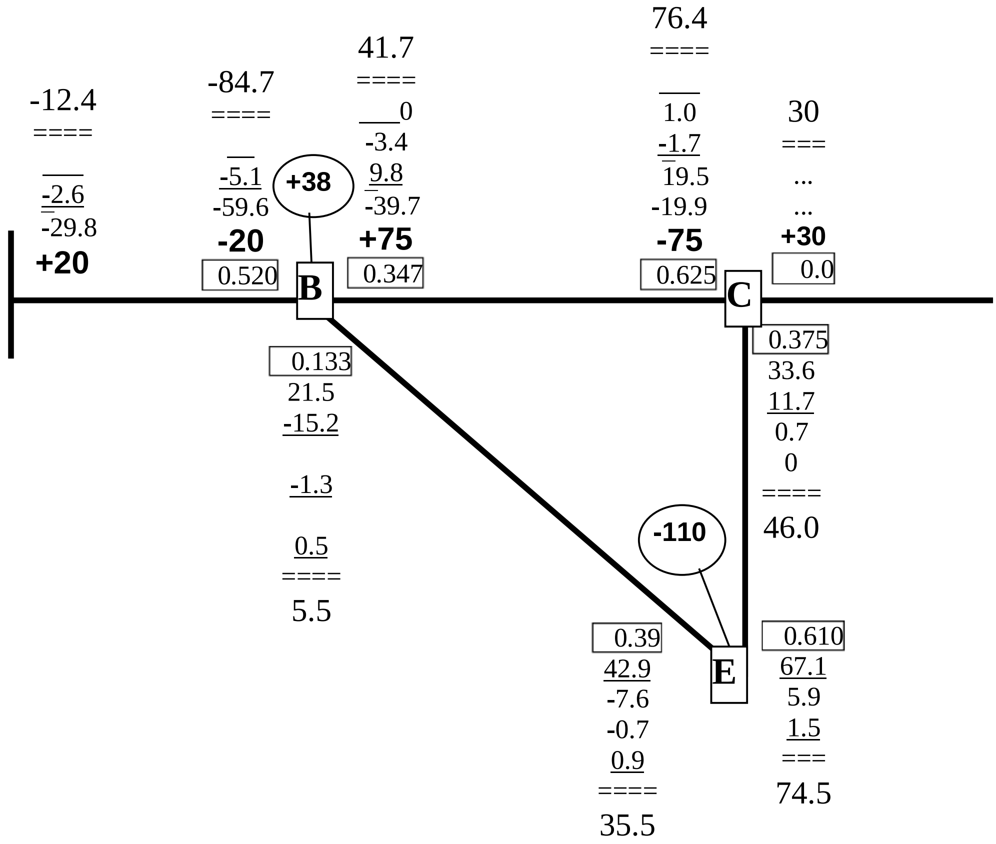


Figura 1.13 - Algoritmo de Cross

	coluna 1	*coluna 2*	*coluna 3*	*coluna 4*	*coluna 5*	*coluna 6*	*coluna 7*	*coluna 8*	*coluna 9*
linha 1	NÓ	MFI	Momento de Fixação (MF) após iteração no nó ...						
linha 2			E	B	C	B	E	...	...
linha 3	**B**	+93	114.4	0	9.8	0	0.5	...	...
linha 4	**C**	-45	-11.4	-31.3	0	-1.7	-1	...	...
linha 5	**E**	-110	0	-7.6	-1.7	-2.4	0	...	...

Figura 1.14 - Quadro Auxiliar

Os momentos finais em cada secção (com o sinal de Cross) resultam da soma dos momentos (de bloquemaneto inicial, distribuídos e transmitidos) baixo da "caixa" que contém o coeficiente de distribuição dessa secção. Para se efectivar a soma costuma-se sublinhar a duplo traço o último momento (distribuído ou transmitido). Os resultados são mostrados na figura 1.13. Para se ter uma ideia mais clara destes resultados repetem-se os mesmos no esquema da figura 1.16.a). Na verdade são apenas momentos hiperestáticos nas barras e com sinal de Cross. Para se desenhar o diagrama de momentos final, com sinais de resistência de materiais há que:

(i) fazer a transposição dos momentos de Cross para momentos com sinais de resistência e materiais (trocando sempre o sinal da secção à esquerda da barra);

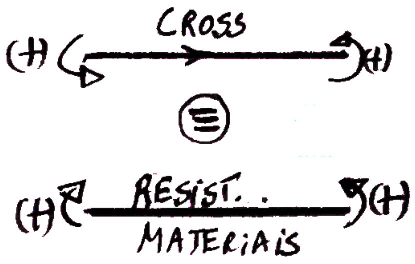


Figura 1.15- Correspondência entre sinais de momentos de Cross e de Resistência de Materiais

(ii) desenhar os momentos hiperestáticos (ver a tracejado na figura 1.15b), e;

(iii) somar à parcela hiperestática a parcela isostática associada às acções de vão.

O diagrama final de Momentos desenha-se na figura 1.16.b).

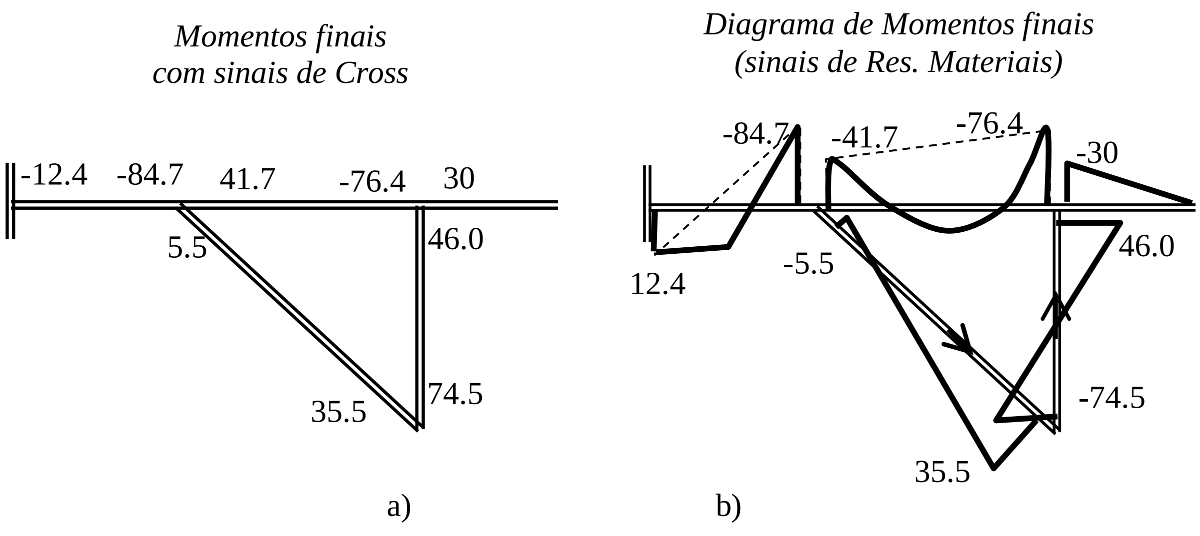


Figura 1.16-a) Momentos Finais (sinal Cross), b)Diagrama de Momentos Finais (sinal Res.Mat.)

Está dada a resposta à alínea a) do problema na figura 1.16b)

b) No início de cada iteração liberta-se o nó. Este sofre um incremento de rotação que é igual à rotação da secção. O incremento de rotação da secção é proporcional ao momento dirtribuído pela secção durante essa libertação, sendo coeficiente de proporcionalidade o inverso da rigidez de flexão dessa secção. A rotação total do nó será o somatório dos incrementos de rotação individuais, e por isso, proporcional ao somatório dos momentos distribuídos nessa secção (afectados pelo traço).

Exemplo: Os momentos distribuídos na secção s_6 são (-15.2) + (-1.3) + (-1) = -17.5 kNm. A rotação da secção é a razão entre estes e a rigidez de rotação da secção, ou seja:

$$\theta_{rot} = \frac{\text{Momentos Distribuidos}}{\text{Rigidez de Flexão da Secção}} = \frac{(-17.4)}{0.512 EI_0} = \frac{-34.0}{EI_0}\,\text{rad}$$

(a secção roda no sentido contrário ao sentido positivo de Cross).

Finalmente como a secção está solidária com o nó este rodará a mesma quantidade.

1.8.1- Resolução Tabelar do Algoritmo de Cross

Em vez de se desenvolver o algoritmo de Cross sobre o esquema da estrutura como se indica na figura 1.13, pode-se fazê-lo numa tabela. Torna-se vantajoso na medida em que é mais cómoda a realização das referidas operações numéricas, conduzindo á automatização do procedimento. Porém, há a desvantagem de se perder o sentido físico do processo.

A tabela, na página seguinte, é por si só é elucidativa quanto ao modo de operar, e por isso se dispensam comentários.

Resolução Tabelar do Algoritmo de Cross

Nó	A	B			C			E	
Secção i-secção j	s1	s2-s1	s3-s4	s6-s7	s4-s3	s9-s8	s5	s7-s6	s8-s9
k_i (*EI_0)	---	*2*	*1.333*	*0.512*	*1.333*	*0.8*	*0*	*0.512*	*0.8*
r_i	**---**	**0.520**	**0.347**	**0.133**	**0.625**	**0.375**	**0**	**0.390**	**0.610**
t_{ij}	---	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	---	0.5	0.5
MFN(Mom Fixação Nodal)		**+38** (este momento actua só no nó B)						**-110** (este momento actua só no nó E)	
Mbp	**20**	**-20**	**75**	**0**	**-75**	**0**	**30**	**0**	**0**
MFI		*38-20+75=93*			*-75+30=-45*			*-110*	
Iteração nó E Distribuição Transmissão				21.5		33.6		42.9	67.1
MF		*93+21.5=114.5*			*-45+33.6=-11.4*			*-110+58+52=0*	
Iteração nó B Distribuição Transmissão	-29.8	-59.5	-39.7	-15.2	-19.9			-7.6	
MF		*114.5-59.5-39.7--15.2=0*			*-11.4-19.9=-31.3*			*-7.6*	
Iteração nó C Distribuição Transmissão			9.8		19.6	11.7	0		5.9
MF		*0+9.8=9.8*			*-31.3+19.6+11.7+0=0*			*-7.6+5.8=-1.7*	
Iteração nó B Distribuição Transmissão	-2.6	-5.1	-3.4	-1.3	-1.7			-0.7	
MF		*9.8-5.1-3.4-1.3=0*			*0-1.7=-1.7*			*-1.7-0.7=-2.4*	
Iteração nó E Distribuição Transmissão				0		0.7		0.9	1.5
MF		*0+0=0*			*-1.7+0.7=--1*			*-2.5+1+1.5=0*	
	etc.....								
Mom. Finais	**-12.4**	**-84.7**	**+41.7**	**5.5**	**-76.0**	**+46.0**	**30**	**35.5**	**74.5**