



**DEPARTAMENTO DE
MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS,
TEORÍA DE ESTRUCTURAS e
INGENIERÍA DEL TERRENO**



GRUPO DE ESTRUCTURAS
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Trabajo de Investigación Tutelada

Análisis de la Seguridad de Soportes Mixtos de Hormigón y Acero
Implementación del Método General

Vítor Manuel Lopes de Brito Saraiva Barreto

Programa de Doctorado: Mecánica de Medios Continuos, Teoría de
Estructuras e Ingeniería del Terreno.

Tutor: Fernando Medina Encina

Sevilla, Septiembre de 2008

Análisis de la Seguridad de Soportes Mixtos de Hormigón y Acero Implementación del Método General

SINOPSIS

En la actualidad, el Eurocódigo 4 (EC4) prevé la verificación de la seguridad columnas de (vigas columnas), a través de los designados Métodos de Dimensionamiento de columnas mixtas, en concreto el Método General y el Método Simplificado, aplicables, por supuesto, después de un Análisis Global de la estructura [4]. El EC4 designa para el Método General apenas principios de aplicación generales de que su cumplimiento requiere el desarrollo complementario de un Análisis Estructural de la columna como un elemento estructural aislado [4, 10, 13]. Para el Método Simplificado, la columna también se trata de forma aislada, pero se establecen disposiciones de aplicación explícitas y prácticas, apenas válidas sólo para casos particulares de la geometría de la sección de la columna y de la carga [4, 11, 12, 14].

El objetivo de este trabajo es aplicar una metodología para el análisis y la verificación de la resistencia de las secciones y la verificación de la seguridad a pandeo por flexión de las columnas mixtas, utilizando el Método General. Esto es aplicable a barras de sección variable, con varias condiciones de apoyo, con o sin puntos arriostramiento, y con conocimiento de antemano (i) de los esfuerzos de primer o segundo orden en los extremos de las barras que se derivan de el Análisis Global de la estructura y (ii) de las cargas de vano.

Con el fin de poder alcanzar estos objetivos se han elaborado dos programas. El primer hace el análisis de las secciones y genera relaciones momento-curvatura para ciertos niveles de esfuerzo axial. El segundo, utiliza esta información y procede al el análisis de la barra dónde determina esfuerzos y desplazamientos, la carga última de la estructura, la verificación de la seguridad a flexo-compresión y a pandeo.

En el **Capítulo 1** de este trabajo se hace la introducción al problema desde el punto de vista de la reglamentación (EC-4), haciendo referencia a los tipos de Análisis Global de Pórticos, tipos de Métodos Dimensionado de las columnas, y la interconexión entre ellos.

Así, se empieza por definir, en el contexto de los Eurocódigos, lo que se entiende por análisis lineal y no lineal, de primer o segundo orden. De conformidad con EN 1990 [6], los Análisis Globales, cuando se realizan sobre la geometría inicial de la estructura, es decir, sin tener en cuenta la deformación causada por la carga, son los análisis de "1º orden" y en el caso contrario análisis de "2º orden". En conjunto, estos análisis podrán ser:

- (i) "lineal elástico" o sólo "lineal" (materialmente lineal) si recurren a las leyes de relaciones lineales tensión-deformación de los materiales,
- (ii) "no-lineal" (materialmente no-lineal) si las relaciones tensión deformación de los materiales no es lineal.

Dentro del análisis "no-lineal" aún se distinguen:

- (II.1) análisis de 1^º o 2^º orden, "elástico perfectamente plástico" que se basa en una relación lineal momento-curvatura, seguida de una rama plástica, sin endurecimiento, y aplicada bien sea a la estructura inicial o sobre la estructura deformada;
- (II.2) el análisis de 1 o 2^º orden, "elásto-plástico", que se basa en la relación momento curvatura elástica lineal, seguida de una rama plástica con endurecimiento, o en una relación momento curvatura no lineal, aplicada sobre la estructura inicial o sobre la estructura deformada;
- (II.3) el análisis de 1^º orden, "rígido-plástico" donde se recurre a los teoremas de análisis limite, es decir, se consideran que las secciones tienen un comportamiento rígido hasta llegar al momento de plástico, instante en que se forma una rótula plástica.

Aunque el comportamiento de las secciones sea esencialmente non lineal, el EC4 permite realizar un análisis elástico lineal, siempre y cuando se consideren los efectos de fisuración, fluencia, retracción, proceso constructivo y la pre-compresión, y que consiste principalmente en adoptar la rigidez de flexión adecuada. Estas consideraciones se aplican en todo el EC4 diferenciándose según el tipo de elemento estructural, viga, losa o columna.

En el Análisis Global no-lineal de estructuras mixtas se consideran las leyes de comportamiento no lineal de materiales, hormigón, acero para hormigón y acero estructural, además de el comportamiento de las uniones y de la conexión hormigón-acero que tiene que ser tenidas en cuenta en los efectos de deformación (de 2^º orden).

Finalmente, la verificación de seguridad de pilares mixtos se basa en Métodos de Dimensionamiento ("methods of design" - apartado 6.7.1.(6) del EC4) General o Simplificado y son la fase terminal de un proceso que comienza con el Análisis Global de la estructura y para la cual tienen que ser coherentes. Por eso, se describe muy brevemente los aspectos normativos de la interconexión entre los "Métodos de Análisis Global" de las estructuras y los "Métodos de Dimensionamiento" de las columnas.

Los "Métodos de Análisis Global" de las estructuras consisten en procedimientos o algoritmos que determinan los efectos de las acciones en todos los puntos de la estructura, de los cuáles, los comúnmente más importantes son los esfuerzos y desplazamientos (de primer o segundo orden en régimen materialmente lineal o no lineal) [6]. Los "Métodos de Dimensionamiento" conducen a las Verificaciones de Seguridad a Pandeo de las barras y a las Verificaciones de Resistencia de las secciones [4]. Refiriéndose al EC4 la verificación de la seguridad (a pandeo

por flexión y resistencia) de columnas mixtas puede realizarse por uno de los siguientes procedimientos:

- a) Realizando una Análisis Global de la estructura, por un método de análisis que determine esfuerzos a lo largo de la barra (en una serie de secciones) y considere simultáneamente: (i) las imperfecciones de la estructura, (ii) los efectos de 2^º orden (P- Δ), (iii) las imperfecciones de las barras (iv) los efectos de segundo orden de estas (P- δ), y utilizando un Método de Dimensionamiento para llevar a cabo las verificaciones de resistencia a la flexión compuesta uniaxial o biaxial de las secciones;
- b) Realizando un análisis global de la estructura determinando los esfuerzos en los extremos de cada barra, por un método que considere simultáneamente (i) las imperfecciones de la estructura, (ii) y los efectos de 2^º orden (P- Δ). El Método de Dimensionamiento engloba la verificación a pandeo para cada barra y considerará (i) las imperfecciones de las barras y (ii) los efectos de segundo orden en estas (P- δ), cuyos esfuerzos resultantes deben satisfacer las verificaciones de resistencia a flexión compuesta uniaxial o biaxial de las secciones;
- c) Realizando, en elementos aislados sometidos únicamente a la compresión, las verificaciones de seguridad que se basan en las curvas de estabilidad (de Eurocódigo 3), que ya incorporan los efectos de 2^º orden de las barras y sus imperfecciones (se trata de un Método de Dimensionamiento).

El análisis global de 1^º orden se puede utilizar si el incremento de esfuerzos causado por la deformación obtenida por un análisis de 1^º orden es inferior al 10%, es decir, si el parámetro de carga crítica elástica es $\alpha_{cr} \geq 10$ (apartado 5.2.1-EC4), considerando en el análisis una rigidez “reducida” para tener en cuenta la fisuración, la fluencia y el comportamiento de las conexiones.

En la práctica, el procedimiento más sencillo y por eso probablemente más usual es el del apartado b), el cual se ha adoptado para la implementación del Método General de este trabajo.

En el apartado 1.2.2 se indican los diagramas de flujo que relacionan los distintos Análisis Globales de la estructura con los Métodos de Dimensionamiento de las columnas (Simplificado y General). Atienden al hecho de las imperfecciones de las columnas, así como la naturaleza de los efectos de 2^º orden (P- Δ) hayan sido o no previamente considerados en el Análisis Global de la estructura.

De acuerdo con las Normativas, la comprobación de seguridad de pilares mixtos, independientemente del Método de Dimensionamiento a utilizar, General o Simplificado, reclama al cumplimiento previo de determinados requisitos generales relacionados principalmente con la resistencia del hormigón, del acero estructural, y la esbeltez mínima de las platabandas. El Método Simplificado exige requisitos adicionales, que sobre todo limitan la esbeltez relativa de la columna, las dimensiones relativas de la sección, y espesores de recubrimientos. El Método General puede incluir barras de sección variable a lo largo de su longitud, mientras que el Método Simplificado requiere secciones simétricas y constantes en la barra.

Independientemente del método, las imperfecciones de las barras deberán tenerse en cuenta siempre, y son materializadas por curvas cuya amplitud es una cierta excentricidad, $e_{o,d}$, dada por el EC4. En el Método Simplificado la excentricidad se convierte en un momento adicional $N * e_{o,d}$ [4, 13], mientras que en el Método General se adopta una carga equivalente distribuida y auto equilibrada [3, 4].

Los efectos de 2º orden se deben tener en cuenta si ellos aumentan en más del 10% los esfuerzos primarios. Es equivalente a decir, según el Eurocódigo 4, que los efectos de 2º orden tienen que ser considerados si $N_{Sd} > 10\% N_{cr,eff}$, en el caso del Método Simplificado, mientras que en el Método General no se indica ninguna regla práctica.

Para el Método Simplificado se suministran expresiones de interacción de los esfuerzos para la verificación de la seguridad a compresión simple, compuesta recta y compuesta esviada y cuyos valores resistentes se basan en las curvas resistentes de la interacción momento-esfuerzo axil, cuya construcción también se desarrolla en este trabajo [10, 11, 12, 14].

En el **Capítulo 2** se presenta un enfoque teórico de la aplicación de los principios necesarios para la implementación del Método General, que se traduce en la realización simultánea de [4]:

- (i) un análisis elásto-plástico de columnas - para hallar los esfuerzos y desplazamientos en la fase de pre-incurvación (así como la carga límite), y,
- (ii) en la "verificación de resistencia de las secciones."

El análisis elásto-plástico de vigas-columnas incluye, en general, dos pasos [15]:

- (i.1) el estudio de las secciones transversales
- (i.2) el análisis de la pieza globalmente.

En el estudio de la sección transversal se investiga el comportamiento de la sección cuando se somete a la combinación de esfuerzo axil y momentos flectores. El resultado se expresa generalmente mediante una serie de curvas relacionando el momento, M , con la curvatura, χ ,

para un valor dado de carga axial, N , (**relación $M - \chi - N$**). Este trabajo se pone de manifiesto que estas curvas también pueden ser consideradas curvas resistentes a flexo-compresión. Las tangentes a las curvas $M-\chi$ tienen el sentido de la rigidez de flexión ($EI(\chi)$) de la sección y representan su comportamiento materialmente no lineal.

Las relaciones $M-\chi$ de la sección se deducen teniendo en cuenta las relaciones tensión-deformación de cada uno de los materiales que componen la sección y el dominio de validez de las mismas. Ello es análogo al estudio de una sección de hormigón armado y se basa en las siguientes hipótesis [2, 3, 4]:

- (i) las secciones se mantienen planas en deformación, de acuerdo con la teoría de Euler - Bernoulli
- (ii) el deformación de las armaduras adherentes es la misma que en el hormigón adyacente,
- (iii) se considera adherencia perfecta entre el acero del perfil y el hormigón,
- (iv) la resistencia a la tracción en el hormigón se desprecia,
- (v) las tensiones en el hormigón comprimido se obtienen a partir del diagrama tensión-deformación para análisis global no lineales (apartado 3.1.5 de EC2),
- (vi) las tensiones en la armadura se obtienen de las relaciones tensión deformación del apartado 3.2.7 de EC2,
- (vii) las tensiones en el perfil de acero se obtienen de las relaciones tensión deformación del apartado 5.4.3. (4) de EC3.

Se hacen variar los valores del par (N, ε_2) , siendo ε_2 la deformación en la fibra de hormigón más comprimida, y estableciendo las condiciones de equilibrio en la sección [16] con las hipótesis descritas arriba, se hallan los pares $(M-\chi)$, que son puntos de la curva a determinar, asociada al esfuerzo axial N .

En la análisis de la barra hay que tener en cuenta el comportamiento no lineal de las secciones y a los efectos geoméricamente no lineales derivados de la deformación de la barra (en relación a su cuerda). Como el comportamiento de la barra no es lineal (material y geométrico) el análisis, debe ser incremental. Así la barra es subdividida en trozos donde se identifican las secciones y nodos. En las secciones se mide el estado de deformación de la barra (χ), donde es hallada la rigidez de flexión ($EI(\chi)$), parámetro que se encargará de traducir su comportamiento material. En los nodos se imponen las condiciones de la compatibilidad y equilibrio, y se obtienen soluciones sucesivas a medida que la carga aplicada (o deformación) aumenta por incrementos. Para ello, la carga aplicada se representa mediante un parámetro adimensional de carga, λ . Los esfuerzos son entonces hallados para un cierto nivel de parámetro de carga (normalmente unitario). Por otro lado con el aumento gradual de ese parámetro, se obtiene una curva "parámetro de carga - desplazamiento", cuyo pico es la carga última de pandeo de la barra [15, 18].

A "la verificación de la resistencia de las secciones" (indicada en el último apartado (ii)) es implícitamente verificada en las secciones donde se valoran las curvaturas χ , porque en estas secciones los esfuerzos internos (M.N) tienen que ser coherentes con la curvatura χ , a través de las curvas (M- χ -N).

Para llevar a cabo esto Análisis Globales es necesario considerar los efectos geoméricamente no lineales. Así, es necesario conocer el dominio de validez de las "análisis de estabilidad", saber qué tipo de resultados pueden ser obtenidos a partir de ellas, y qué algoritmos numéricos son los adecuados. Así en el Capítulo 2, además de deducir la relación **M- χ -N**, se trata de explicar:

- (i) los tipos de análisis de la estabilidad actual y su ámbito de aplicación,
- (ii) la correlación entre los métodos de análisis no-lineal de las columnas de acero, hormigón y mixtos, y,
- (iii) cuáles son las características de las rutinas numéricas para análisis no lineal.

Los "análisis de estabilidad" deben incluir obligatoriamente [15]:

- (i) la formulación de las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada y / o,
- (ii) la consideración de relaciones cinemáticas no lineales.

Así el "análisis de estabilidad" incluye siempre los efectos geoméricamente lineales. Según el nivel de no linealidad geométrica en ellos incorporado hay varios tipos de análisis de estabilidad a saber, "el análisis lineal de estabilidad" y "el análisis no-lineal de estabilidad" y que en el contexto de vigas columnas son, respectivamente la "teoría lineal de la viga columna" y la "teoría no lineal de la viga columna" [17].

En este trabajo fue adoptado un "análisis lineal de estabilidad", donde se admiten hipótesis simplificadoras como (i) no hacer depender el esfuerzo axial de la barra de la deformación transversal (flecha), es decir, eliminar el efecto de "bowing", y (ii) desprestigiar la deformación axial. (El efecto de "bowing" es el acortamiento de la cuerda de la barra debido a su deformación por flexión). Esta simplificación lleva a la deducción de una matriz de rigidez total (lineal y geométrica) y los vectores de fuerza relativamente simples [17]. Ellos dependen de las llamadas funciones de estabilidad, que son altamente no lineales con el aumento de N superior a $0,4 \cdot N_{cr}$ [15]. La desventaja de adoptar estas simplificaciones es que la matriz de rigidez total sólo es válida para estudiar la incurvación de la barra y la determinación de su carga crítica (de bifurcación de equilibrio) [21, 22]. Pero esto no es un gran inconveniente, ya que cumple sus objetivos: la determinación de los esfuerzos y de la carga crítica.

Si no se adoptan las simplificaciones antes referidas, el análisis de la estabilidad sería no lineal en régimen de pre-incurvación, adecuado para el análisis de arcos y determinación de su carga

crítica, que es un fenómeno de inestabilidad llamado de punto límite ("snap through") [17, 21, 22].

En este trabajo se hace un breve enfoque a los métodos de análisis materialmente no lineales de columnas de acero, hormigón y mixtos con el fin de encontrar puntos en común entre ellos y, sobre todo, dar soporte adecuado a la implementación del Método General de columnas mixtas que pretende desarrollar. También por este motivo se establecen los métodos de análisis global (de pórticos).

Así, el Eurocódigo 3 (EC3), dice que en el Análisis Global Plástico en Pórticos de acero, teniendo en cuenta las relaciones de tensión deformación bi-lineal elásto-plástico, se podrá adoptar los siguientes modelos de comportamiento:

- a) Análisis de Rígido-Plástico (ARP) – donde se consideran trozos rígidos entre secciones con rotulas plásticas, y que es válida para los casos en que los efectos de 2º orden ($P-\delta$) entre las secciones no significativos.
- b) Análisis Elástico-Plástico (AEP) - se producen rotulas plásticas en las secciones trabajando el resto del elemento en régimen elástico entre las secciones;
- c) Análisis Plástico No Lineal (APNL) que considera la plastificación parcial de los elementos en las zonas plásticas;

En el ámbito de las metodologías de análisis plástica los dos primeros modelos pertenecen a los "Métodos de Rótula de Plástica", donde para el segundo se efectúan "análisis elásto-plástico de 2º orden con el concepto de rótula plástica", y que ya es suficientemente riguroso para aplicaciones prácticas. El último modelo pertenece a los "Métodos de Zona Plástica", donde se efectúan "análisis elásto-plástico de 2º orden con esparcimiento de la plasticidad" y que requieren un alto esfuerzo computacional [15, 18].

Recientemente Liew entre otros [24, 25], han introducido una nueva metodología, el "Método Refinado de Rótula Plástica" (MRRP) que considera el comportamiento elásto-plástico, en lugar de un comportamiento elástico, entre las secciones con rótulas, y es una mejora con respecto a el "análisis elásto plástico de 2º orden con concepto de rótula plástica" tradicional. Este método actualiza en cada paso incremental el módulo tangente E_t así como los coeficientes η_a y η_b asociados a las secciones extremas de cada barra y que se relacionan simultáneamente, en cada sección, con su grado de plastificación y su verificación de la resistencia. Estos parámetros afectan a la matriz rigidez total tangente y cuando $\eta_a=0$ o $\eta_b=0$ surge una rótula donde es permitido el giro libre entre secciones adyacentes de esta. Este método es equivalente a "metodos de zona plástica" en exactitud pero más sencillo.

Dependiendo de las hipótesis adoptadas por el comportamiento de los materiales (lineales o no lineales), la inclusión de los efectos geométricamente no lineales (1º / 2º orden), y los modelos

de comportamiento (ubicación de las rótulas plásticas, o zonas plásticas) se pueden relacionar las cargas parametrizadas con desplazamientos, a partir de la cual resultan las curvas de la figura siguiente. Aunque originalmente se aplican a pórticos también se puede utilizar para columnas con imperfecciones. Para los parámetros de carga se definen las siguientes nomenclaturas [15, 18]:

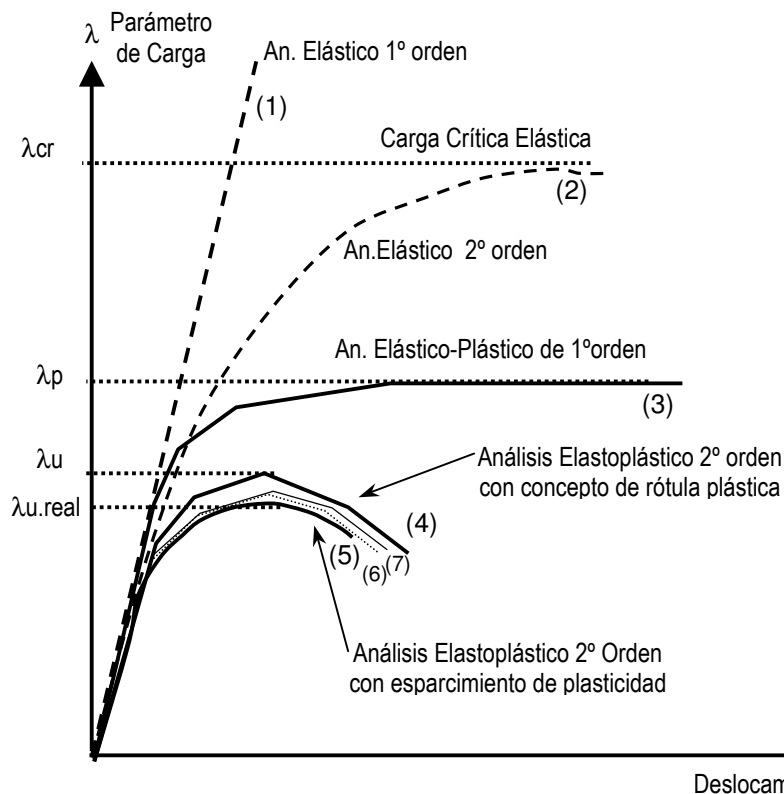
λ_{cr} – parámetro de carga crítica - si el análisis fuera materialmente lineal y de 2º orden ;

λ_p – parámetro de carga plástico - si el análisis fuera de 1º orden con la plasticidad concentrada en las secciones de mayor momento elástico;

λ_u - parámetro de carga último - si el análisis fuera no lineal y de 2º orden concentrando la plasticidad en las secciones de mayor momento elástico y considerando comportamiento elástico entre las rótulas plásticas.

$\lambda_{u,real}$ - parámetro de carga último - si el análisis fuera materialmente no lineal y de 2º orden con distribución de la plasticidad a lo largo de las secciones y barras.

Se deduce en este trabajo que el parámetro de la carga del "Método Refinado de Rótula plástica" se queda entre las curvas (4) e (5) y cerca de esta (cuva (6)). Por otro lado, la carga última del Método General aquí desarrollado se deprehede que se detiene encima de esta última curva.



En las columnas imperfectas, la presencia de la curvatura inicial, las tensiones residuales, excentricidad accidental de aplicación de la fuerza axial (designadas en general por "imperfecciones" [3,4]), y la presencia de cargas transversales en régimen lineal elástico conducen a curvas de evolución de la pre-incurvación no lineales, pero no cambia el valor de la

carga crítica de la columna perfecta. Adoptando un comportamiento del material no lineal, la carga crítica se reduce y pasa a ser conocida como la carga última de pandeo por flexión.

En lo que respecta al dimensionamiento de las columnas, el Eurocódigo 3, se basa en las curvas de estabilidad de columnas para realizar la comprobación de la seguridad a pandeo, que complementa con la verificación de la seguridad de las secciones a resistencia plástica o resistencia elástica, procesos que son relativamente simples de efectuar. Aunque no explícitamente mencionado en el EC3, se puede aplicar a la columna los mismos modelos de comportamiento que se han descrito anteriormente, lo que exigirá discretizar la barra en varios trozos.

Los Eurocódigos 2 (de hormigón armado) y 4 (de estructuras mixtas) aplican a efectos de dimensionamiento de las columnas los "Métodos Generales" y "Métodos Simplificados".

El "Método General" de EC2 y EC4, como se ha dicho antes, se basa en un Análisis Global física y geoméricamente no lineal que obligan a la discretización de la estructura en una serie de secciones, el establecimiento de las condiciones de equilibrio y compatibilidad en nodos y secciones, y la integración de los parámetros que importan estudiar a lo largo de secciones e barras. Según la metodología presentada, el valor de cálculo de la carga de rotura resulta directamente del análisis, no siendo proporcionado por los Eurocódigos más detalles sobre la metodología de análisis no-lineal [26].

Los Métodos Simplificados del EC2 son los siguientes:

- (i) "Método Basado en la Rigidez Nominal" y el
- (ii) "Método Basado en la Curvatura Nominal".

El primero puede subdividirse [26] en:

- (I.1) "Método Basado en la Rigidez Nominal para un análisis geoméricamente no-lineal" y,
- (I.2) "Método Basado en la Rigidez Nominal con el concepto de amplificación de momentos".

En "Los Métodos Basados en la Rigidez Nominal" se refieren a las reglas de aplicación que permitan la consideración de los efectos de 2^º orden y las imperfecciones de las barras a partir de la estimación de la rigidez de flexión de las piezas seguido por (i) o un análisis elástico de 2^º orden total ($P-\Delta$ para el pórtico y $P-\delta$ para todas las barras comprimidas) (ii) o la amplificación de momentos en las barras aisladas con factores adecuados.

El "Método Basado en la Curvatura Nominal" se basa en el cálculo del momento nominal de 2^º orden (M_2) hallado a partir de una cierta excentricidad e_2 , que a su vez depende (i) de la

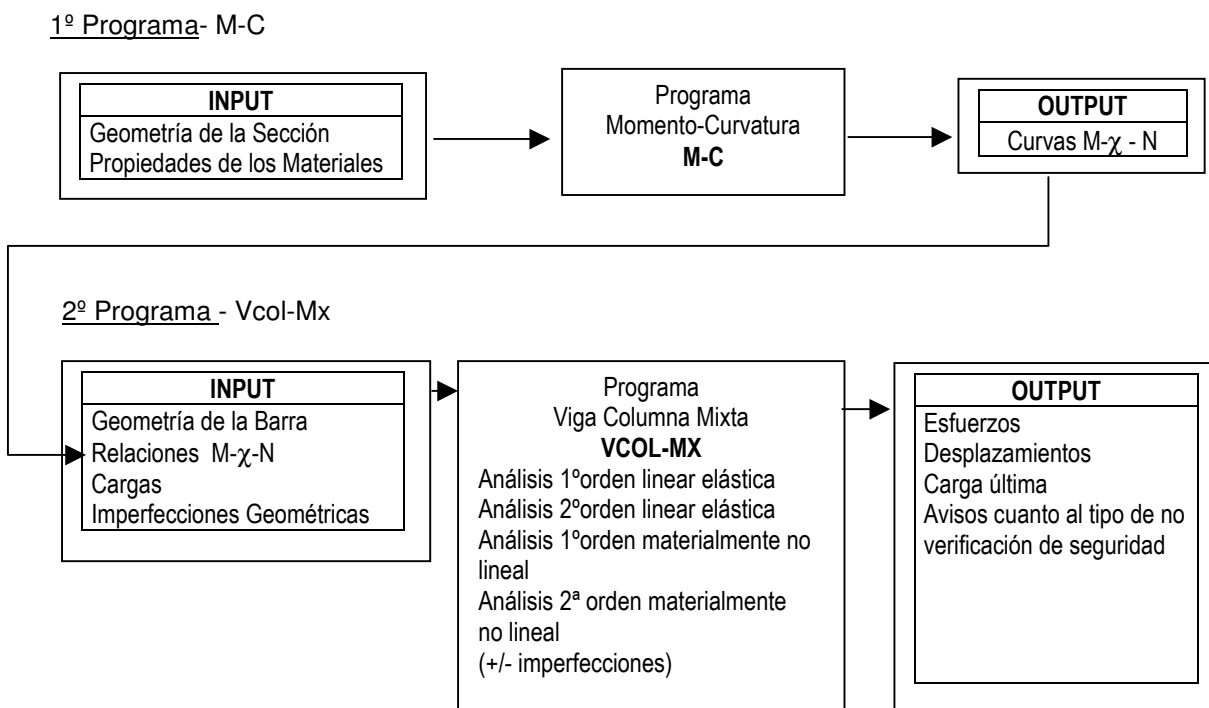
longitud efectiva de incurvación (pandeo) de la barra y (ii) en una estimación de la curvatura máxima para la barra.

El Método Simplificado del EC4, a parte de las expresiones de verificación de seguridad, se basa en una rigidez efectiva de la sección y en la amplificación de momentos, y, es similar al "Método Basado en el Concepto de Rigidez Nominal con amplificación de momentos" del EC2.

Finalmente, se indica que el método implementado en este trabajo sigue los principios especificados para el Método General (en el EC4). La implementación considera las verificaciones de la resistencia plástica en las secciones extremas de cada trozo (en que la barra está subdividida) y corrige la rigidez de flexión en cada paso incremental. Este procedimiento tiene muchas similitudes con el "Método Refinado de Rótula Plástica" difiriendo de este en no permitir el giro libre en la rótula, es decir, suya curvatura es siempre limitada a la curvatura limite de la relación **M- χ - N**. Esta es la razón porque la suya carga última está por encima de la de MRRP. Por otra parte, para satisfacer el estado de fisuración y la fluencia de la barra se adopta una rigidez reducida, que se deduce de las curvas Momento-Curvatura generadas, concepto que está implícito en el "Método Simplificado" del EC4 o en el "Método Basado en la Rigidez Nominal" del EC2 .

En el apartado 2.5 se aborda de forma sistemática y resumida algoritmos numéricos para análisis no lineales basados en el concepto de la matriz de rigidez tangente. De los algoritmos de control de carga se eligió el Método de Newton-Rapson Modificado [18, 27] en el cálculo de esfuerzos y desplazamientos en la fase de pre-incurvación la columna, lo cuál también proporciona un valor de la carga crítica menor. Este método es poco preciso cerca de la carga crítica [21, 22] y por eso, para su determinación con precisión, se escogió el Método de Control de Arco (Arc Length Method) [18, 21, 22], y para poder confrontar los resultados el Método de Control de Trabajo (Work Control Method) [18]. En estos dos métodos cuando se pasa la carga crítica (o limite) y cerca de esta, los incrementos de los desplazamientos en cada iteración son progresivamente mayores y poco realistas. Ocurren grandes deformaciones y la consiguiente rotura de resistencia de las secciones (aunque ya haya sobrepasado la carga última de pandeo). Para evitar este problema se combinó el método de Control del Arco con el Método de Control de Desplazamientos, que se activa (desactiva) cuando el parámetro de rigidez de Bergan es menor (mayor) a 0,01 [21]. En el Método de Control de Trabajo se eligió otra estrategia. Una vez que el parámetro de rigidez de Bergan es inferior a 0,05 se dejan de realizar las iteraciones dentro de cada paso (o incremento) [18]. Al final del Capítulo 3, apartado 3.4, se muestra el flujo de todos los algoritmos que se han descrito anteriormente.

El **Capítulo 3** trata de la implementación computacional del Método General, conforme el desarrollo teórico y justificativo de capítulos anteriores. Se elaboró un conjunto de dos programas, siendo el primero, "M-C", de análisis de las secciones mixtas, y el otro, "Vcol-MX", de análisis de barras, que utilizados en secuencia permiten la verificación de la resistencia de las secciones de flexo-compresión y la verificación a pandeo por flexión de una columna mixta. El primer programa consiste en el análisis de las secciones mixtas para la producción de curvas momento-curvatura en función de determinado nivel de esfuerzo axial. Estas curvas en última instancia, reflejan el comportamiento materialmente no lineal de la sección a la flexo-compresión y sus valores se almacenan en un archivo. Son, por eso, una información absolutamente necesaria para el segundo programa, de análisis no-lineal de la columna. La interconexión entre los programas se plantea en el esquema siguiente.



Los datos necesarios al primer programa "M-C" son básicamente las características geométricas de los elementos de la sección, las clases de resistencia de los materiales, las leyes de comportamiento de los materiales, la naturaleza del cálculo (si es a corto o a largo plazo, si en valores característicos o de cálculo), y otros datos del tipo de operacional. Con base en estos, son generadas curvas **M - χ - N** que pueden ser gráficamente visualizadas como medida práctica en la detección de errores.

El segundo programa, "Vcol- Mx" procede a un análisis estructural no-lineal. Realiza un análisis incremental, a base de matrices de rigidez material y geoméricamente no lineales, y vectores de la fuerza equivalente a la carga uniforme, para cada un de los trozos (elementos finitos). Esta matriz y vector se definen de forma cerrada [15, 17, 18], es decir, no se integra según el

área y longitud del elemento en cada instante del análisis, lo cual daría lugar a un programa más complejo, con mayor volumen de datos y lento. En cada ciclo de análisis incremental la rigidez de flexión EI que afecta a la matriz de rigidez de cada elemento se actualiza reflejando el comportamiento materialmente no lineal. La actualización del esfuerzo axial afecta a las funciones de estabilidad de los elementos de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas equivalentes de las cargas de vano, lo que representa los efectos geoméricamente no lineales.

Para realizar el análisis incremental, la barra debe ser subdividida en trozos, lo que presenta las siguientes ventajas:

- (i) permite cuantificar mejor el cambio de rigidez de flexión según la longitud de la barra;
- (ii) causa la aparición de más grados de libertad y una mejor definición del estado de deformación de la barra;
- (iii) permite la aplicación de cargas nodales, las cuales pueden ser de fuerza axial, fuerza transversal y momento, a un mayor número de nodos, simulando mejor las condiciones de carga;
- (iv) permite para cada trozo definir una sección geoméricamente diferente, lo que da al programa la capacidad de analizar piezas de sección variable.

Los datos a proporcionar al segundo programa, "Vcol-Mx," son básicamente datos geoméricos de la columna, su discretización, y los grados de libertad restringidos por los apoyos extremos o intermedios, excentricidades de las imperfecciones geométricas y las cargas nodales.

El uso del programa es interactivo. De este modo, el usuario puede elegir el tipo de análisis material lineal o no lineal, de primer o segunda orden, con o sin imperfecciones geométricas pudiendo estas actuar en un sentido o sentido contrario. Se puede obtener los esfuerzos y desplazamientos para un determinado parámetro de carga e incremento de carga e imprimir los resultados en un archivo. Las verificaciones de seguridad a flexión compuesta son automáticamente satisfechas en las secciones críticas (los extremos de cada trozo) porque el proceso de cálculo averigua en cada iteración si la carga plástica de compresión es excedida y si la curvatura asociada al estado de deformación excede la curvatura límite del esfuerzo axial correspondiente. En el primer caso, se trata de la verificación de la resistencia a compresión y en el segundo caso la verificación de la resistencia a la flexión compuesta (flexo-compresión). Si no se cumple alguna de estas verificaciones el programa se detiene y avisa al usuario. Además puede hacer el cálculo de la carga crítica (o límite); basta para ello dar un incremento de arco o de trabajo (en las rutinas de Control de Arco y Control de Trabajo) y aumentar progresivamente el número de pasos. Se puede refinar los resultados mediante la reducción respectivamente del incremento de arco o de trabajo. El hecho de que el programa es interactivo también facilita estudios de convergencia.

En el **Capítulo 4** del presente documento se exponen ejemplos de la aplicación del Método Simplificado, para el que fueron desarrolladas hojas de cálculo en Mathcad que figuran en el anexo. Resolviendo los mismos problemas por el Método General, utilizando los programas desarrollados, "M-C" y "Vcol-MX", se hizo un análisis comparativo, cuyos resultados se presentan en el apartado 4.2. Pero la conclusión más importante es que la carga última del Método Simplificado es siempre inferior al del Método General, siendo en compresión simple casi igual, pero más diferente cuando hay momentos. El Método General es, por tanto, más económico. También se efectuó un análisis paramétrico variando la resistencia del hormigón cuyos resultados fueron coherentes.

Se elaboraron otros ejemplos para los cuáles sólo sería válido el Método General. Consistirán en variar la carga axial aplicada como la geometría de las secciones transversales y se determinaron los esfuerzos, los desplazamientos y los parámetros de carga última. También se planteó una metodología para el cálculo del coeficiente de longitud de pandeo, β , lo cual fue comparado, en dos ejemplos, con los de la Norma Española EAE [8] (en régimen elástico). Las diferencias son insignificantes. Se cuantificó el mismo parámetro en régimen elásto-plástico que es siempre superior al del régimen elástico.

El **Capítulo 5** se refiere a las conclusiones y futuros desarrollos.

La utilidad principal de este trabajo es permitir el dimensionamiento de columnas mixtas que no serían posibles dimensionar a través de las reglas del Método Simplificado. De este modo, el uso de programas desarrollados permite la aplicación del Método General, es decir, el dimensionamiento de columnas con: (i) sección transversal variable y sujeta a diversos tipos de cargas en sus extremos o en el vano, (ii) la colocación de arriostamientos a lo largo de la columna, (iii) el uso de diversos tipos de apoyo. Permite también (i) la realización de diversos tipos de análisis material y geométrico (ii) realizar estudios paramétricos.

Con respecto a la evolución futura es posible, con poco esfuerzo, considerar más tipos de secciones transversales e incorporar en las rutinas de Control de Arco y Control de Trabajo la determinación de los esfuerzos (en la actualidad sólo es posible en la rutina de Newton Rapson). A medio plazo sería interesante ampliar el programa para (i) el cálculo de arcos discretizados en trozos rectos que requeriría la inclusión de las matrices de rigidez para "análisis no lineales de estabilidad", y (ii) el tratamiento tridimensional de barras.

Todos los cálculos se hicieron en el supuesto de que la adherencia hormigón - acero estructural era total, independientemente del gradiente y la intensidad de los esfuerzos. Como se sabe, esta hipótesis no es siempre válida y por eso es muy importante y necesario alguna investigación en ese sentido.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor D. Fernando Medina Encina pelo seu apoio científico, técnico e experiência profissional que me facultou no sentido de eu poder concretizar este trabalho. Agradeço também a sua amizade e disponibilidade em me receber em virtude de condicionalismos do meu serviço e da longa distância entre Faro e Sevilla.

Uma palavra de agradecimento ao docente Héctor Bulté pela seu apoio bibliográfico, disponibilidade e simpatia.

Á minha mulher pelo seu companheirismo, incentivo e optimismo e à minha filha pela sua alegria, às quais dedico este trabalho.

ÍNDICE GERAL

Sinopsis	I
Agradecimentos.....	XV
Índice Geral	XVII
Índice de Figuras	XX
Índice de Quadros	XXII
Capítulo 1 : Enquadramento Regulamentar.....	1.1
1.1 - Introdução. Objectivos e Âmbito do Trabalho.....	1.1
1.2 - Disposições Regulamentares do Eurocódigo 4	1.2
1.2.1- Denominação das Análises Globais	1.2
1.2.2- Análises Globais e Métodos de Dimensionamento	1.4
1.2.3- Métodos de Dimensionamento de Colunas.....	1.16
1.2.3.1- Método Geral.....	1.18
1.2.3.2- Método Simplificado	1.22
1.2.3.2.(a)- Determinação de Esforços de Segunda Ordem	1.23
1.2.3.2.(b)- Verificação de Resistência das Barras.....	1.26
A) Resistência de barra à compressão simples.....	1.26
B) Resistência de barra à compressão com flexão uniaxial	1.26
C) Resistência de barra à compressão com flexão biaxial.....	1.28
1.2.3.3- Diagramas de Interação M-N para uma Secção Mista	1.29
1.2.3.3.(a)- Influência do Esforço Transverso	1.29
1.2.3.3.(b)- Sobre-resistência de Secções Cheias	1.30
1.2.3.3.(c)- Curvas de Interação M-N.....	1.30
Capítulo 2 - Enquadramento Teórico	2.1
2.1- Introdução. Análise Elásto-plástico de Colunas.....	2.1
2.2- Relação Momento-Curvatura	2.2
2.3- Análises de Estabilidade	2.11
2.3.1- Análises Lineares e Não Lineares de Estabilidade	2.11
2.3.1.1- Matriz de Rigidez Global	2.14
2.3.1.2 - Curvatura elementar.....	2.14
2.3.2- Âmbito de Aplicação da Análise Linear de Estabilidade.....	2.20
2.3.3- Influência das Imperfeições, Cargas Transversais e Cedência do Material.....	2.22
2.3.4- Cálculo da Carga Crítica e Carga Última.....	2.23
2.4- Métodos de Análise Materialmente Não Linear de Colunas.....	2.26
2.4.1- Estruturas de Aço.....	2.26

2.4.2- Estrutura de Betão	2.29
2.4.3- Estruturas Mistas	2.32
2.5- Algoritmos Para a Análise Não Linear	2.33
2.5.1- Introdução	2.33
2.5.2- Método do Controle de Carga.....	2.36
2.5.2.1 - Método Simples Incremental.....	2.37
2.5.2.2 - Método Iterativo de Newton	2.38
2.5.2.3- Método de Newton Modificado.....	2.40
2.5.2.4 - Método Misto de Newton-Rapson.....	2.40
2.5.2.5- Método de Misto de Newton Rapson Modificado	2.42
2.5.2.6 - Método Misto de Bergan	2.43
2.5.3 - Método do Controle de Deslocamentos	2.44
2.5.4 - Método do Comprimento de Arco	2.47
2.5.5 - Método do Controle de Trabalho	2.51
Capítulo 3 : Implementação do Método Geral	3.1
3.1- Introdução. Programa de Análise Não Linear de Colunas Mistas	3.1
3.2 - Programa M-C.....	3.2
3.2.1- Anexo. Exemplo de Ficheiro de Dados (tipo <i>*.MCDAT</i>).....	3.11
3.3 - Programa VCol-Mx.....	3.13
3.3.1- Cálculo de Esforços e de Deslocamentos Nodais.....	3.14
3.3.2- Determinação da Carga Última.....	3.19
3.3.2.1- Método de Controlo de Trabalho (Work Control Method).....	3.19
3.3.2.2- Método de Controlo de Arco (Arc-Legth Method)	3.21
3.3.2.3- Aspectos Particulares do Programa.....	3.23
3.4 - Fluxogramas	3.24
- Método de Controlo de Carga de Newton Rapson Modificado	3.24
- Método de Controle de Trabalho (Work Control).....	3.26
- Método de Controlo de Arco (Arc-Length) e Método de Controle de Deslocamento	3.29
3.5 - Exemplo de Ficheiros de Dados e Resultados	3.33
3.5.1 - Exemplo de Ficheiro de Dados (*.dat) para Vcol-Mx	3.33
3.5.2 - Exemplo de Ficheiro de Resultados (*.res) de Vcol-Mx	3.35
Capítulo 4 : Aplicações.....	4.1
4.1- Introdução 4.1	
4.2 - Análise Comparativa entre o Método Geral e o Método Simplificado	4.1
4.3 - O Método Geral em Problemas Particulares	4.10
4.3.1- Problema 5.....	4.10
4.3.2 - Problema 6.....	4.14
4.3.3- Problema 7.....	4.18

Capítulo 5 : Conclusões	5.1
5.1- Considerações Finais.....	5.1
5.2 - Conclusões	5.1
5.3 - Desenvolvimentos Futuros.....	5.3
- Bibliografia1
Anexo A. Folhas de Cálculo MathCad para o Método Simplificado	A.0
- Problema 1-A, Betão C25/30	1-A.1
- Problema 1-B, Betão C25/30	1-B.1
- Problema 1-B, Betão C50/60	1-B.20
- Problema 2, Betão C25/30.....	2.1
- Problema 3, Betão C25/30.....	3.1
- Problema 4, Betão C25/30.....	4.1
Anexo B. Instruções para o Uso do Programa.....	B.1
PARTE A - Programa "M-C"	B.2
PARTE B - Programa "Vcol-Mx"	B.6

ÍNDICE de FIGURAS

Figura 1.1 - Fluxograma para a Análise global não linear da estrutura	1.7
Figura 1.2 - Fluxograma para o Método de Dimensionamento Simplificado	1.14
Figura 1.3 - Fluxograma para o Método de Dimensionamento Geral.....	1.15
Figura 1.4 - Secções típicas de colunas mistas.....	1.16
Figura 1.5 - Forças equivalentes à imperfeição da barra, $e_{o,d}$	1.17
Figura 1.6 - Relação tensão-deformação para betão C25/30 a curto e longo prazo.....	1.21
Figura 1.7 - Relação tensão-deformação para os aços (a) de armadura e (b) estrutural.	1.21
Figura 1.5 – Momento final de segunda ordem	1.25
Figura 1.9 - Diagrama de interacção M-N de acordo com ENV 1994-1-1	1.27
Figura 1.10 - Diagramas de interacção M-N representativos das expressões (1.33) e (1.34)	1.28
Figura 1.11 - Diagramas de interacção representativo da fórmula de interacção (1.35).....	1.28
Figura 1.12 - Diagramas de tensões com redução de f_{yd} na área de corte do perfil aço devido $V_{a,Ed}$ elevado.....	1.29
Figura 1.13- Zona de validade do diagrama de interacção para secções cheias com sobre- resistência	1.30
Figura 1.14 - Diagrama de interacção M-N em termos de valores resistentes	1.31
Figura 1.15 - Modelo se secção mista bissimétrica	1.32
Figura 2.1 - Relação tensão-deformação do betão para a análise estrutural.....	2.3
Figura 2.2 - Relação tensão-deformação para os aços (a) de armadura e (b) estrutural	2.3
Figura 2.3 - Domínios de deformação da secção para esgotamento ao ELU.....	2.3
Figura 2.4 - Diagrama parábola rectângulo a usar no dimensionamento de secções a ELU ...	2.5
Figura 2.5 - Diagrama de extensões de secção bissimétrica do tipo envolvida	2.7
Figura 2.6 - Extensões limites no domínio 5	2.8
Figura 2.7 - Determinação da rigidez de flexão directa e por interpolação linear.	2.10
Figura 2.8 - Aplicação do PTV ao equilíbrio de uma barra	2.12
Figura 2.9 - Graus de liberdade do elemento viga-coluna	2.14
Figura 2.10 - Funções de forma e suas segundas derivadas para $N/N_{cr} = 0.25$	2.18
Figura 2.11 - Instabilidade bifurcacional	2.20
Figura 2.12 - Instabilidade por ponto limite	2.21
Figura 2.13 - Efeito das imperfeições	2.22
Figura 2.14 - Relação carga-deslocamento	2.24
Figura 2.15 - Comportamento carga deslocamento de um pórtico plano.....	2.28
Figura 2.16 - Fases predictor e corrector	2.33
Figura 2.17 - Erro de desvio.....	2.34
Figura 2.18 - Método Iterativo de Newton.....	2.38

Figura 2.19 - Método Iterativo de Newton Modificado	2.40
Figura 2.20 - Método Misto Newton-Rapson	2.41
Figura 2.21- Método Misto de Newton-Rapson Modificado	2.42
Figura 2.22 - Método Misto de Bergan.....	2.43
Figura 2.23 - Método de Controle de Deslocamento	2.47
Figura 2.24 - Incremento e iterações do Método de Controle de Arco	2.49
Figura 3.1 - Interconexão entre M-C e Vcol-Mx	3.1
Figura 3.2 - Secções tipo já implementadas no programa	3.2
Figura 3.3 - Fluxograma do programa "M-C"	3.6
Figura 3.4 - Curvas Momento Curvatura de secção mista a curto prazo (C25/30)	3.8
Figura 3.5 - Curvas Momento Curvatura de secção mista a longo prazo (C25/30)	3.8
Figura 3.6 - Exemplo de viga coluna.....	3.15
Figura 3.7 - Janela principal do programa Vcol-Mx	3.16
Figura 3.8 - Localização dos ficheiros Momento-Curvatura das secções (tipo *.MCMC)	3.16
Figura 3.9 - Indicação dos ficheiros de dados (*.dat) e resultados (*.res) de Vcol-Mx.....	3.17
Figura 3.10 - Relação carga-deslocamento para $\lambda=1.65$ e $\Delta\lambda=0.1$	3.18
Figura 3.11 - Relação carga-deslocamento para $\lambda=1.75$ e $\Delta\lambda=0.05$ e colapso da secção	3.18
Figura 3.12 - Determinação da carga última pelo algoritmo Controle de Trabalho, $\lambda_u=1.636$.	3.20
Figura 3.13 - Determinação da carga última pelo algoritmo Controle de Arco acoplado ao Controle de Deslocamento, $\lambda_u=1.672$	3.22
Figura 3.14 - Fluxograma do Método de Controlo de Carga Newton-Rapson	3.24
Figura 3.15 - Fluxograma do Método de Controlo de Trabalho.....	3.26
Figura 3.16 - Fluxograma do Método de Controlo de Arco.....	3.29
Figura 4.1- Geometria e acções do Problema 5	4.10
Figura 4.2 - Diagrama de momentos para A.N.L.2ªO com $\lambda = 1$ e $\lambda = \lambda_{cr} = 1.42$	4.13
Figura 4.3 - Geometria e acções para o Problema 6	4.14
Figura 4.4 - Diagrama de momentos do Problema 6	4.17
Figura 4.5 - Deformada do Problema 6.....	4.17
Figura 4.6 - Geometria e acções para o Problema 7	4.19
Figura 4.7 - Diagrama de momentos flectores do Problema 7	4.21
Figura 4.8 - Deformada do Problema 7.....	4.22

ÍNDICE de QUADROS

Quadro 1.1 - Factor de imperfeição, α	1.26
Quadro 2.1- Métodos de dimensionamento elasto-plástico de colunas	2.32
Quadro 2.2 - Parâmetros predictor e corrector de cada método	2.52
Quadro 3.1 - Comparação de carga última associada a fenómenos de encurvadura	3.22
Quadro 4.1 - Resumo dos Problemas 1-A a 4 - Método Simplificado	4.2
Quadro 4.2 - Resumo dos Problemas 1-A e 1-B - Método Simplificado e Método Geral.....	4.4
Quadro 4.3 - Resumo do Problema 2 - Método Simplificado e Método Geral	4.6
Quadro 4.4 - Resumo do Problema 3 - Método Simplificado e Método Geral	4.7
Quadro 4.5 - Resumo do Problema 4 - Método Simplificado e Método Geral	4.8
Quadro 4.6 - Razão entre cargas últimas	4.9
Quadro 4.7 - Parâmetros de carga e factores de encurvadura do Problema 5.....	4.11
Quadro 4.8 - Momentos flectores do Problema 5	4.13
Quadro 4.9 - Parâmetros de carga e factores de encurvadura do Problema 2.....	4.15
Quadro 4.10 - Momentos flectores e deslocamentos nodais do Problema 6	4.16
Quadro 4.11 - Esbeltezas relativas do Problema 7.....	4.20
Quadro 4.12 - Factores de carga do Problema 7.....	4.20
Quadro 4.13 - Momentos flectores do Problema 7	4.21
Quadro 4.14 - Deslocamentos nodais do Problema 7	4.22

Capítulo 1 : Enquadramento Regulamentar

1.1 - Introdução. Objectivos e âmbito do trabalho

As colunas metálicas de edifícios de vários pisos precisam de protecção ao fogo. Esta é muitas vezes providenciada pelo envolvimento da secção por betão. Até aos anos de 1950 era prática normal usar uma mistura de betão de baixa resistência, e desprezar a contribuição do betão para a resistência e estabilidade da coluna. Testes efectuados por Faber e outros demonstraram que se obtiam ganhos económicos usando betões de maior qualidade e dimensionando a coluna como elemento misto. Foi originalmente tratado no "método das estruturas envolvidas" - "cased struts" - regulamentado na BS 449 ainda numa filosofia de segurança baseada em tensões admissíveis e mais tarde na BS 5950, Parte 3 Secção 3.1, já de acordo com o método dos coeficientes parciais de segurança (vulgarmente designado como método dos estados limites). Neste último regulamento assumia-se que o betão reduzia a esbelteza efectiva da coluna, aumentando a sua resistência axial. A resistência à flexão era providenciada pelo perfil metálico, sendo que nenhum papel era dado às armaduras para betão. Testes posteriormente efectuados mostraram que aqueles regulamentos conferiam excessiva margem de segurança. Um dos métodos mais recentes que tomam adequadamente em conta a interacção entre o aço e o betão numa secção envolvida H é devido a Basu e Sommerville. O seu estudo baseou-se em aproximações algébricas obtidas de análises numéricas e estão de acordo com resultados de testes, mesmo para flexão biaxial. No entanto, o Eurocódigo 4, parte 1.1 deu preferência ao método desenvolvido por Roik, Bergman e outros da Universidade de Bochum por ser mais abrangente, por se basear num modelo conceptual claro e ser ligeiramente mais simples [1].

Actualmente o Eurocódigo 4 já prevê a verificação de segurança de colunas (vigas colunas) através de métodos de dimensionamento a aplicar, naturalmente, após a análise global da estrutura. Os métodos de dimensionamento são o Método Geral e o Método Simplificado. Para o Método Geral o EC4 indica apenas princípios de aplicação que do seu cumprimento obriga a desenvolvimento de uma análise estrutural da coluna isolada. Para o Método Simplificado o EC4 enuncia regras de aplicação explícita que só são válidas para casos particulares de geometria da coluna e carregamento.

O objectivo deste trabalho consiste em implementar uma metodologia de análise e verificação de segurança à resistência de secções e à encurvadura por flexão usando o Método Geral, para barras de secção variável, com condições de apoio diversas, com ou sem pontos de contraventamento, sendo *a priori* conhecidos (i) os esforços de primeira ou de segunda ordem nos extremos das barras que resultam da análise global da estrutura e (ii) as cargas de vão. Para se implementar o Método Geral é necessário implementar um algoritmo de análise não linear de 1ª ou 2ª ordem à própria barra isolada.

Como resultado da aplicação do método é possível:

- (i) determinar os esforços e deslocamentos finais ao longo da barras, que resultam de uma análise materialmente e geometricamente não lineares da barra,
- (ii) verificar a segurança da barra à encurvadura,
- (iii) determinar o parâmetro de carga último (em regime não linear), ou seja, o coeficiente que é necessário aplicar ao carregamento e esforços até se atingir o colapso,
- (iv) e identificar o tipo de colapso, se por flexão compressão, se prioritariamente por plastificação axial da secção ou se por encurvadura,
- (v) determinar comprimentos de encurvadura e compará-lo inclusive com os da norma EAE.
- (vi) realizar estudos paramétricos ou de sensibilidade relativamente à variação das características dos materiais, variação das dimensões dos elementos da secção, etc.

Pretende-se também comparar resultados do Método Geral com casos em que foi possível a aplicação do Método Simplificado para aferição do procedimento desenvolvido.

De modo a ser possível a concretização destes objectivos foram elaborados dois programas. O primeiro faz a análise de secções e gera as relações momento curvaturas para certos níveis de esforço axial. O segundo, utiliza esta informação e procede à análise da barra determinando os esforços e deslocamentos, a carga última da estrutura e as verificações de segurança à flexo-compressão e encurvadura.

Em virtude de haver várias versões dos Eurocódigos e pré normas salienta-se que se seguem:

- (i) o Eurocódigo 2 - EN 1992-1-1, parte 1-1 de Dezembro de 2003, [2]
- (ii) o Eurocódigo 3 baseado no texto final da pré-norma, prEN 993-1-1- parte 1-1,8,[3]
- (iii) o Eurocódigo 4 baseado na pré-norma prEN 1994-1-1, parte1-1 de Janeiro de 2004,[4].

Os artigos são mencionados no texto com o símbolo "§" e são por omissão os do Eurocódigo 4.

1.2 - Disposições Regulamentares do Eurocódigo 4

1.2.1- Denominação das Análises Globais

Antes de mais é necessário esclarecer dentro do contexto dos Eurocódigos o que se entende por análises lineares e não lineares, de 1ª ordem ou de 2ª ordem. Assim de acordo com o EN 1990, as análises globais quando exercidas sobre a geometria inicial da estrutura, isto é, sem ter em conta as deformações devidas ao carregamento são análises de "1ª ordem" e caso contrário análises de "2ª ordem". Simultaneamente estas análises podem ser:

- (i) "*lineares elásticas*" ou só "*lineares*" (materialmente lineares) se recorrerem às leis lineares das relações tensão deformação dos materiais ou,

(ii) "*não lineares*" (materialmente não lineares) se as relações tensão deformação dos materiais for não linear.

As análises "não lineares" ainda se denominam:

(i) análise de 1ª ou 2ª ordem, "*elástica perfeitamente plástica*" se baseada numa relação momento curvatura linear elástica seguida por um patamar plástico, sem endurecimento, e desenvolvida respectivamente sobre a estrutura inicial e sobre a estrutura deformada;

(ii) análise de 1ª ou 2ª ordem, "*elásto-plástica*" se baseada na relação momento curvatura linear elástica seguida por um patamar plástico com endurecimento, ou numa relação momento curvatura não linear, desenvolvidas respectivamente sobre a estrutura inicial ou sobre a estrutura deformada;

(iii) análise de 1ª ordem, "*rígido-plástica*" se recorre aos teoremas de análise limite, ou seja, as secções têm comportamento rígido até atingirem o momento plástico, instante em que se forma uma rótula.

Para efeitos de análise global da estrutura (§ 5.1.1-EC4) os modelos estruturais e as hipóteses de base devem ser escolhidas de acordo com a EN 1990 artigo 5.1.1, ou seja, baseadas em teorias e práticas de engenharia certificadas, que reflectem o comportamento real das secções, barras, ligações e apoios. Assim para efectuar uma análise não linear de pórticos (§5.4.3-EC4), na determinação de esforços, é necessário ter em conta os seguintes factores:

- (i) o comportamento não linear dos materiais;
- (ii) os efeitos de corte na ligação aço de perfil - betão, sobretudo nas vigas e extremidades de pilares;
- (iii) o comportamento da ligação viga-pilar (§ 5.1.2);
- (iv) os efeitos da deformação da estrutura devido à presença de acções (§ 5.2.1);
- (v) os efeitos das imperfeições globais do pórtico (§5.3.2.2) e locais ou das barras (§5.3.2.3).

Embora o comportamento das secções mistas seja intrinsecamente não linear, o EC4 permite a realização de análises elásticas lineares desde que se considerem os efeitos da fissuração, fluência, retracção, sequência de construção e pré-tensão (§5.4.2-EC4) e que consistem fundamentalmente em adoptar rigidezes de flexão adequadas. Estas considerações estão disseminadas no EC4 porque dependem do tipo de elemento estrutural, viga, laje e coluna.

Nas análises *não lineares* de estruturas mistas as leis de comportamento não linear dos materiais têm que estar também de acordo com os regulamentos de betão armado (§3.1.5-EC2, §3.2.7-EC2) e de aço estrutural (§5.4.3-EC3), e que no betão são corrigidas para ter em conta a fluência (§5.4.3-EC4, §5.8.6-EC2), para além de que o comportamento das ligações tem que ser contabilizado para os efeitos de deformação (de 2ª ordem).

Qualquer das análises tem que cumprir o equilíbrio e compatibilidade quer ao nível das

secções como nas ligações entre barras e apoios.

As análises são de 1ª ordem se os efeitos da deformação da estrutura na presença de certo carregamento forem desprezáveis, ou seja, se o acréscimo de esforços relevantes devido às deformações for inferior a 10%. (§5.2.1(3)-EC4). Uma forma de medir a sensibilidade da estrutura a este acréscimo de esforços é determinar o factor de carga crítico (§5.2.1.(3)-EC4, §5.2.1-EC3):

$$\alpha_{cr} = F_{cr} / F_E \quad (1.1)$$

sendo F_{Ed} a carga de cálculo da estrutura e F_{cr} a carga crítica global de instabilidade baseada na rigidez inicial elástica (§5.2.1-EC3), para elementos estruturais de aço. No caso de elementos estruturais mistos e como as grandezas envolvidas na definição deste factor são em regime elástico, F_{cr} é então determinado com base em numa rigidez de flexão corrigida (§5.4.2.3 do EC4 - ver Bloco 5 do fluxograma da Figura 1.1).

O factor carga crítica define-se como o valor pelo qual a carga de cálculo deve ser factorizada de modo que se atinja a instabilidade elástica da estrutura (ou barra).

Se o factor de carga crítica for superior ou igual a 10 a análise a efectuar ao pórtico pode ser apenas de 1ª ordem, (e de acordo com nomenclatura anterior designavam-se tais pórticos como intraslacionáveis, aliás conceito adoptado no Documento Básico SE-A, §5.3.1). Caso contrário a análise será de 2ª ordem, onde os efeitos das imperfeições, ditos P-delta, têm que ser considerados na análise (os pórticos designavam-se por translacionáveis). As análises mais sofisticadas consideram os efeitos resultantes quer do deslocamento relativo entre nós extremos das barras (efeitos P- Δ) quer os efeitos da deformada das barras em relação às suas cordas (efeitos P- δ). Análises de 2ª ordem mais simples consideram apenas os efeitos P- Δ . Há ainda a possibilidade de considerar os efeitos P- Δ de forma indirecta, realizando uma análise de 1ª ordem e amplificando adequadamente a fase translacionável da estrutura.

1.2.2- Análises Globais e Métodos de Dimensionamento

A verificação de segurança de pilares baseada nos métodos de dimensionamento ("methods of design" - artigo 6.7.1.(6) do EC4) Geral ou Simplificado são a fase final de um processo que se inicia com a análise global da estrutura e em relação à qual têm que ser coerente. Assim, descreve-se muito sumariamente os aspectos regulamentares de interligação entre os "métodos de análise global de estruturas" e os "métodos de dimensionamento" de colunas.

O método de análise global da estrutura consiste num procedimento ou algoritmo que determine os efeitos das acções em cada ponto da estrutura [6]. Os efeitos que interessa quantificar são os esforços e deslocamentos de primeira ou segunda ordem em regime materialmente linear ou não linear. O método de dimensionamento procede às verificações de

segurança de estabilidade das barras e de resistência das secções e depende da forma como foram considerados os efeitos de segunda ordem e as imperfeições das barras na análise global da estrutura. Assim a verificação de segurança à estabilidade por flexão de colunas mistas pode ser efectuada por um dos seguintes processos (art.5.2.2.(6)):

a) Realizando uma análise global da estrutura, por um método de análise que determine os esforços ao longo das barras e considere simultaneamente: (i) as imperfeições da estrutura, (ii) e os efeitos de 2ª ordem (P- Δ) , (iii) as imperfeições das barras e, (iv) os efeitos de segunda ordem destas (P- δ), e utilizando um método de dimensionamento que realize as verificações de segurança à flexão composta uniaxial ou biaxial das secções (artigos 6.7.3.6 e 6.7.3.7);

b) Realizando uma análise global da estrutura determinando os esforços nos extremos de cada barra, por um método que considere simultaneamente (i) as imperfeições da estrutura, (ii) e os efeitos de 2ª ordem (P- Δ). O método de dimensionamento engloba a verificação de segurança de estabilidade para cada barra isolada e considerará (i) as imperfeições das barras (artigos 5.3.2.3, 6.7.3.4 e Tabela 6.5) e (ii) os efeitos de segunda ordem destas (P- δ) (artigo 6.7.3.4), cujos esforços resultantes devem satisfazer as verificações de segurança à flexão composta uniaxial ou biaxial das secções (artigos 6.7.3.6 e 6.7.3.7);

c) Realizando, em elementos sujeitos apenas à compressão, verificações de segurança que se baseiam nas curvas de estabilidade, as quais já incorporam os efeitos de 2ª ordem das barras e suas imperfeições (artigo 6.7.3.5) (método de dimensionamento).

As análises globais de 1ª ordem podem ser usadas se o incremento dos esforços causados pelas deformações dada por uma análise de 1ª ordem for inferior a 10%, ou seja, se o parâmetro de carga crítica elástico for $\alpha_{cr} \geq 10$ (§5.2.1-EC4), sendo adoptadas para a estrutura rigidezes "reduzidas" para atender à fissuração, fluência e comportamento dos nós.

Se optar pela metodologia a) o controle de incremento dos esforços tem que se efectuar para todas as secções da barra incluindo as extremas, e se os esforços superarem 10% dos de 1ª ordem terá que se realizar uma análise de 2ª ordem do tipo P- Δ + P- δ . Se optar pela metodologia b) esse controle só é feito nas secções extremas, adiando o controle sobre as secções intermédias para a fase de dimensionamento. A análise de 2ª ordem, se tiver que se realizar, é do tipo P- Δ .

Na prática o procedimento mais corrente é o da alínea b). Se a barra estiver sujeita apenas à compressão e se houver curvas de encurvadura para a sua secção transversal poderá usar mais facilmente o procedimento c).

Obtidos os esforços de 1ª ou 2ª ordem nas colunas aplica-se um dos seguintes métodos de dimensionamento (artigo 6.7.1(6)):

- (i) o Método Geral, aplicável a barras com secção não simétrica e de secção variável ao longo do seu comprimento, e;
- (ii) o Método Simplificado, aplicável a barras de secção bissetricada e constante ao longo do seu comprimento.

Cada um dos métodos é aplicável dentro de certas restrições. No entanto o Eurocódigo dá regras explícitas e simples para a aplicação do Método Simplificado, enquanto para o Método Geral apenas informa de quais as relações tensão-deformação a serem usadas nas análises materialmente e geometricamente não lineares, sendo as suas restrições menores.

Apresenta-se na Figura 1.1 um fluxograma que permite correlacionar estes factores e deduzir qual o tipo de análise estrutural global a realizar. Cada um dos tipos de análise relaciona-se com os métodos de dimensionamento de colunas como mostram as Figuras 1.2 e 1.3. Em cada bloco dos fluxogramas indicam-se os artigos dos vários Eurocódigos a que respeitam as disposições regulamentares que ele pretende abranger.

- Bloco 1

Numa análise não linear o comportamento dos materiais é descrito através da relação não linear entre tensões e deformações, definidos em vários artigos dos Eurocódigos, dos quais os mais relevantes estão indicados no bloco 1 do fluxograma. É de salientar que para ter em consideração os efeitos de fluência a longo prazo é necessário corrigir o diagrama tensão-deformação do betão, aumentando a extensão em função do valor do coeficiente efectivo de fluência (§5.8.6(4)-EC2). Como da análise se pretende obter valores de cálculo, as tensões médias e características dos materiais são afectadas pelos coeficientes parciais de segurança para materiais e o módulo de elasticidade do betão é reduzido por um factor de segurança (§5.8.6-EC4).

- Bloco 2

Na análise do pórtico há que ter sempre em conta o comportamento da ligação pilar-viga (§5.1.2) que pode ser:

- (i) simples, se não transmitir momentos entre barras,
- (ii) contínuo, se a resistência e rigidez da ligação permitir continuidade total das barras assumidas na análise global, e,
- (iii) semi-contínua, para a qual a flexibilidade da ligação tem que ser considerada na análise porque influencia de forma não linear a deformabilidade da estrutura e a distribuição de esforços.

ANÁLISE GLOBAL NÃO LINEAR
Caracterização dos MATERIAIS
 (§5.4.3-EC4)

<p>Bloco1 Betão (§3.1.5-EC2; §5.8.6(3)+(4)-EC2;§5.8.4-EC2)</p>	
$\sigma_c = f_{cd} * \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \quad \text{Curto Prazo : } \eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}; \quad \text{Longo Prazo : } \eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1} * (1 + \varphi_{ef})}$ $k = 1.05 * \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}} * \frac{ \epsilon_{c1} }{f_{cd}}, \quad \varphi_{ef} = \varphi(\infty, t) * \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}; \quad \gamma_{cE} = 1.2; \gamma_c = 1.5$	
<p align="center">Aço (§3.2.7(2)-EC2)</p>	<p align="center">Aço Estrutura (§3.2.1;5.4.3)-EC3</p>
$\sigma = E_s * \epsilon \Rightarrow \text{se } \epsilon \leq \epsilon_d$ $\sigma = f_{yd} \left[1 + (\epsilon - \epsilon_d) * \frac{(k-1)}{(\epsilon_{uk} - \epsilon_d)} \right] \text{ se } \epsilon > \epsilon_d$ $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}; \epsilon_d = \frac{f_{yd}}{E_s}; \gamma_s = 1.15$	$\sigma = E_a \epsilon \text{ se } \epsilon \leq \epsilon_y$ $\sigma = f_y \text{ se } \epsilon > \epsilon_y \quad (\text{ver prEN1993-1-5})$ $f_y = \frac{f_{yk}}{\gamma_a}; \epsilon_y = \frac{f_y}{E_a}; \gamma_a = 1.1$

Bloco2 **Comportamento da Ligação - PILAR-VIGA**
 (§5.1.2(2) - EC4)

Bloco3 **Cálculo da Combinação de Accões**

- combinação fundamental ELU (para situações persistentes ou transientes)- curto ou longo prazo (§6.4.3.2(3)-EC0)

$$\gamma_g G_k + \gamma_f P + \gamma_q Q_k + \gamma_q \Sigma \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

- combinação característica ELS (para estados limites irreversíveis) -(§6.5.3-EC0)

$$\Sigma G_k + P + Q_k + \Sigma \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

Figura 1.1 - Fluxograma para a análise global não linear de estruturas mistas (continua)

Bloco4

Cálculo das imperfeições globais

(ou do pórtico)

- (§5.3.2.2-EC4 ; §5.3.2 -EC3)
- na forma de de forças horizontais equivalentes , Hi

$$\phi = \phi_0 * \alpha_h * \alpha_m, \quad H_i = \phi * N_{Ed}$$

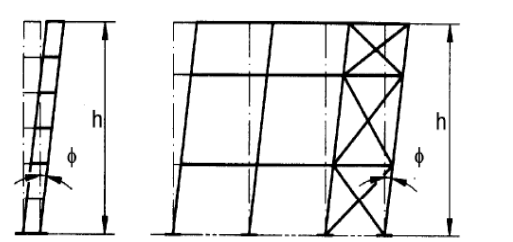


Figure 5.2: Equivalent sway imperfections

Classificação do pórtico quanto a deslocamentos laterais (translacionalidade)

Bloco5

- consiste no cálculo do parâmetro de carga crítica α_{cr} (§5.2.1(3)-EC4)
- Consideração dos efeitos de fissuração do betão (§5.4.2.3.-EC4)

A.1 - Uncracked Analysis

- considera combinação de ações característica (ELS)
- considera efeitos de longo prazo
- **VIGAS:** (§5.4.2.3(2)-EC4) rigidez $E_a I_1$ com

E_a = módulo de elasticidade do aço

I_1 = Secção de aço equivalente (homogeneizada) para efeitos a longo prazo, com coeficiente de homogeneização, n_L (§5.4.2.2-EC4):

$$n_L = n_0 * (1 + \psi_L * \phi_t)$$

$$n_0 = E_a / E_{cm}$$

$$\phi_t = \phi(t, t_0) = \phi(\infty, t_0) \quad (§3.1.4-EC2)$$

- **PILARES** (§5.4.2.3(4)-EC4 + §6.7.3.4(2)e§6.7.3.3(4)-EC4) rigidez efectiva $(E I)_{eff, II}$

$$(E I)_{eff, II} = K_0 \left[E_a I_a + E_s I_s + \frac{K_{e, II} * E_{cm} * I_c}{1 + \frac{N_{G, Ed}}{N_{Ed}} \phi_t} \right]$$

- Considera o comportamento das ligações nos nós (§8.2- EC4 + §5.1-EC3)
- Realiza análise materialmente não linear de 1ª Ordem, incluindo imperfeições do pórtico para determinação de deslocamentos e de esforços.

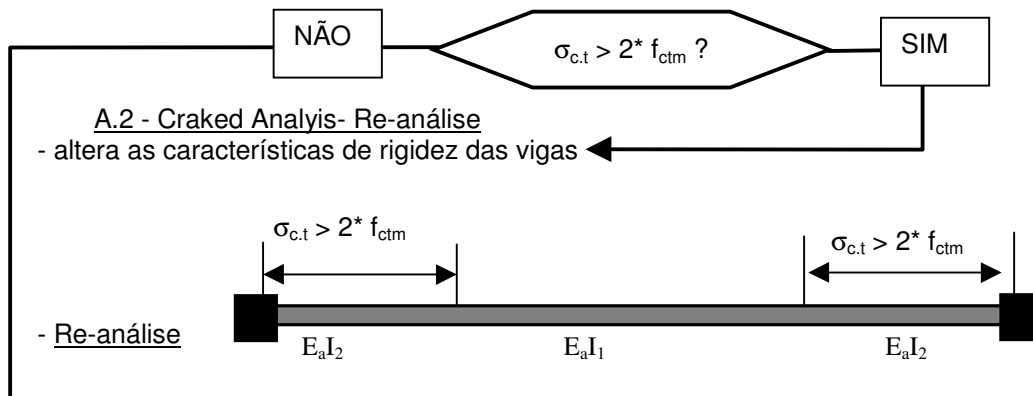


Figura 1.1 - Fluxograma para a análise global não linear de estruturas mistas (continua)

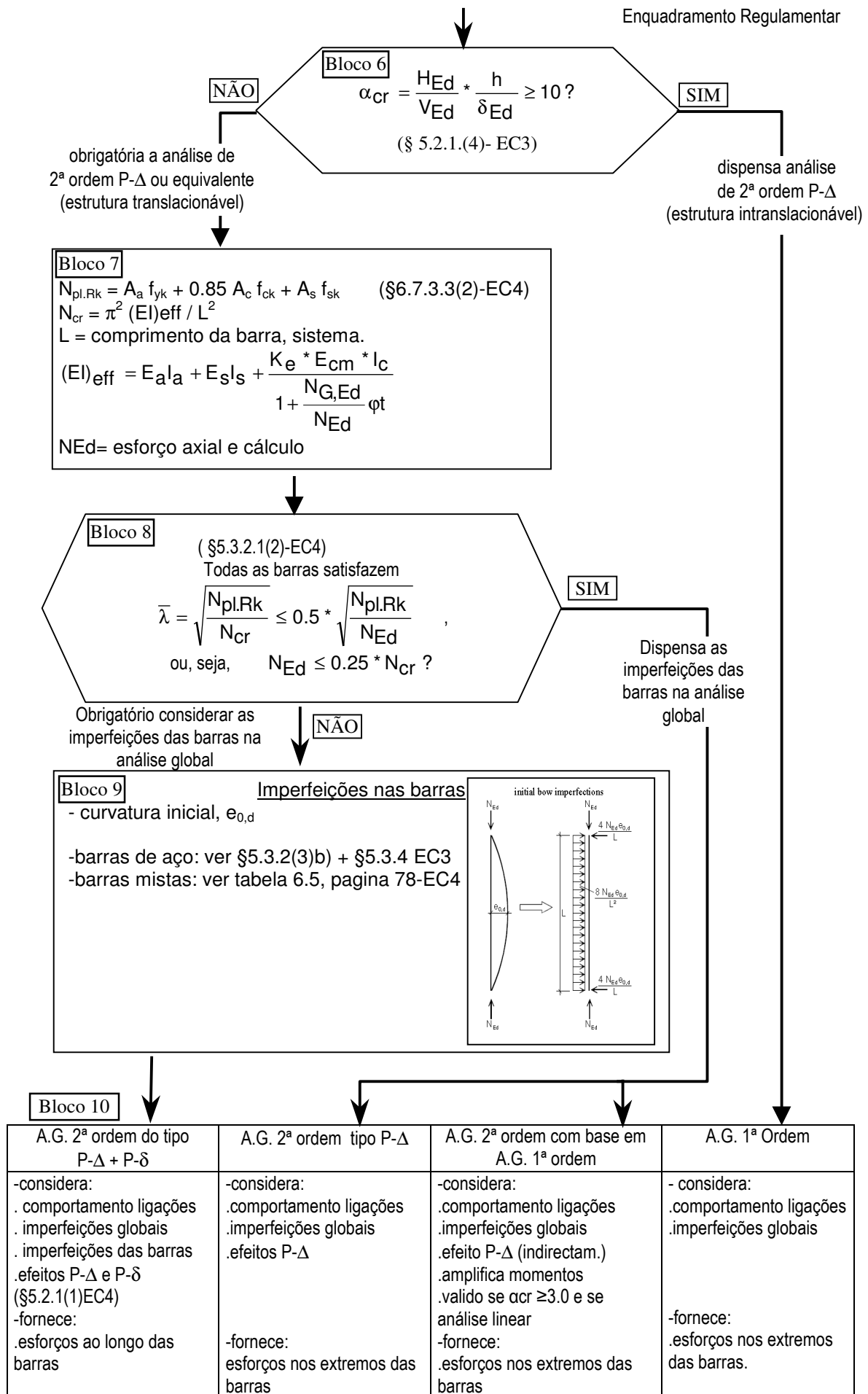


Figura 1.1 - Fluxograma para a análise global não linear de estruturas mistas

- Bloco 3

Como as imperfeições do pórtico e a sua sensibilidade a deslocamentos laterais dependem das acções, é necessário para cada acção de base efectuar a combinação de acções a Estados Limites Últimos e Estados Limites de Utilização, procedimento representado no bloco 2.

- Bloco 4

As imperfeições globais do pórtico, que correspondem à falta de verticalidade das colunas e traduzida pelo ângulo ϕ , é obrigatória considerar para todo o tipo de análises. Na prática substitui-se este desvio angular por forças horizontais equivalentes, H_i , que dependem desse desvio e do nível de esforço axial em cada piso (Bloco 3).

- Blocos 5 e 6

Procede-se à classificação da estrutura como intranslacionável ou translacionável, para se saber se análise efectuar basta ser de 1º ordem ou tem que ser de 2ª ordem. É necessário determinar deslocamentos laterais e esforços, recorrendo-se a análises lineares de 1ª ordem, na qual é preciso utilizar rigidezes de flexão para pilares e vigas que considerem a fissuração do betão. Assim procede-se a uma primeira análise "uncracked analysis" onde a rigidez das vigas é a de uma secção homogeneizada não fissurada ($E_a I_1$) e a dos pilares a rigidez efectiva ($E I_{eff,II}$) definida pela expressão 6.42 do EC4. Posteriormente nas zonas das vigas onde as tensões de tracção ultrapassarem $2 \cdot f_{ctm}$ é necessário corrigir a rigidez para a de uma secção fissurada ($E_a I_2$) e realizar uma segunda análise "cracked analysis". Com o resultado desta pode determinar-se o factor de carga crítico α_{cr} . Este pode ser calculado por métodos numéricos para uma estrutura com as características de rigidez acima mencionadas. O Eurocódigo 4 refere no §5.2.2(1) que para estruturas mistas com as características indicadas no §5.2.1(4) do EC3, é ainda válida a expressão (5.2) do EC3, [1], ou seja:

$$\alpha_{cr} = \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{h}{\delta_{H,Ed}} \quad (1.2)$$

Se $\alpha_{cr} \geq 10$ dispensa-se a consideração dos efeitos de 2ª ordem P- Δ na análise global, e a análise é de 1ª ordem. Para além disso não é necessário atender às imperfeições das barras nem aos efeitos P- δ (§5.3.2.1(2) -EC4). (Contudo, no processo de dimensionamento das barras, ao efectuarem-se as verificações de segurança à estabilidade da barra isolada, se $N_{Ed} \geq N_{cr} / 10$, com N_{cr} determinado com a rigidez efectiva $E I_{eff,II}$ (equação 6.42-EC4) é necessário ter em conta os efeitos P- δ devido aos esforços de extremidade e cargas de vão).

Se $\alpha_{cr} < 10$ é necessária uma análise de 2ª ordem do tipo P- Δ .

- Blocos 7 e 8

Aqui avalia-se a obrigatoriedade ou não de considerar as imperfeições das barras no processo de análise global do pórtico. As imperfeições nas barras são a falta de rectilinearidade, tensões

residuais, excentricidades menores de ligações (§5.3.1(1),§5.3.2.3-EC4) e são simuladas por uma curvatura senoidal de amplitude $e_{o,d}$ da tabela 6.5 do EC4. Podem ser representadas por uma carga distribuída equivalente de valor $q_{eq} = 8 * N_{Ed} * e_{o,d} / L^2$ e cargas concentradas $Q_{eq} = 4 * N_{Ed} * e_{o,d} / L$ em auto-equilíbrio, sem introduzirem forças externas aos nós da estrutura (§5.3.2.(7)-EC3).

Se a esbelteza reduzida for:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{N_{pl,Rk} / N_{cr}} \leq 0.5 \sqrt{N_{pl,Rk} / N_{Ed}} \quad , \quad (1.3)$$

ou de forma equivalente se, $N_{Ed} \leq 0.25 N_{cr}$ (1.4)

sendo:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{L^2} \quad (1.5)$$

calculado com base da rigidez equivalente $(EI)_{eff}$ (§6.7.3.3(3) e (4)) e L o comprimento da barra, as imperfeições locais (ou da barra) não precisam de ser consideradas na análise global, e deverão por isso ser posteriormente consideradas directamente nos métodos de dimensionamento das barras.

Se a última inequação for falsa a análise estrutural global de 2ª ordem deve também incorporar as imperfeições locais e por isso os efeitos P-δ (para além dos efeitos P-Δ). Consequentemente para os posteriores métodos de dimensionamento esta análise deve fornecer esforços finais de 2ª ordem ao longo de toda a barra de modo a não de "perder informação" relativa os efeitos P-δ. As imperfeições das barras não serão consideradas nos métodos de dimensionamento.

- Bloco 9

Determinam-se as imperfeições da barra que na prática são cargas equivalentes distribuídas e pontuais como mostra a Figura 1.1

- Bloco 10

Chegamos por fim a quatro possíveis análises. Todas elas consideram o comportamento das ligações e a existência de imperfeições globais. O que as distingue é (i) a consideração ou não dos efeitos P-Δ e/ou P-δ, (ii) a forma como o consideram e, (iii) se incluem ou não as imperfeições das barras. As análises são as seguintes:

1) Análise Global de 2ª ordem do tipo P-Δ + P-δ:

- (1.i) Inclui as imperfeições das barras, e deve fornecer esforços finais de 2ª ordem ao longo das mesmas (§5.2.2.(3)-EC4);
- (1.ii) A verificação de estabilidade estrutural de toda a estrutura está implícita pelo que basta realizar a verificação de resistência das secções no método de dimensionamento (§5.2.2.(6)a-EC4).

2) Análise Global de 2ª ordem do tipo P-Δ:

- (2.i) Não inclui as imperfeições das barras;
- (2.ii) Basta fornecer os esforços finais de 2ª ordem dos extremos das barras (§5.2.2.(4)-EC4);
- (2.iii) No método de dimensionamento é necessário considerar as imperfeições das barras, e realizar quer as verificações de estabilidade à encurvadura quer as verificações de resistência das secções (§5.2.2.(6)b)-EC4).

3) Análise Global de 2ª ordem do tipo P-Δ a partir de uma análise de 1ª ordem:

- (3.i) Não inclui as imperfeições das barras;
- (3.ii) É realizada uma análise de 1ª ordem onde as forças horizontais da combinação de acções e as forças horizontais equivalentes às imperfeições do pórtico (H_i) são amplificadas pelo factor de amplificação $[1 / (1 - 1/\alpha_{cr})]$, (§5.2.2.(2)-EC4 e §3.2.2.(5)-EC3). O método só é válido para $\alpha_{cr} \geq 3$, para pórticos de 1 piso, e para análise elástica;
- (3.iii) Basta fornecer os esforços finais de 2ª ordem dos extremos das barras;
- (3.iv) No método de dimensionamento é necessário considerar as imperfeições das barras, e realizar quer as verificações de estabilidade à encurvadura quer as verificações de resistência das secções (§5.2.2.(6)b)-EC4).

4) Análise Global de 1ª ordem :

- (4.i) Não inclui as imperfeições das barras;
- (4.ii) É realizada uma análise de 1ª ordem sem ser necessário considerar as imperfeições das barras nem efeitos de 2ª ordem P-δ (§6.7.3.4(3), §5.2.1(3)-EC4);
- (4.iii) Basta fornecer os esforços finais de 2ª ordem dos extremos das barras;
- (4.iv) No método de dimensionamento é necessário realizar as verificações de resistência das secções e as verificações de estabilidade à encurvadura (§5.2.2.(6)b)-EC4).

Finalmente se refere que o presente fluxograma também é aplicável a análises lineares se as leis de comportamento dos materiais no bloco 1 se alterarem de modo a satisfazer o §5.4.2.2 e §5.4.2.3 do EC4, considerando os efeitos de fluência, retracção e fissuração do betão, e artigo §5.4 do EC2.

As Figuras 1.2 e 1.3 relacionam-se as análises globais com cada um dos métodos de dimensionamento de colunas (simplificado e geral), ou seja, com os procedimentos de verificação de segurança à encurvadura das barras e verificação de resistência secções. As verificações de estabilidade das barras consistem na verdade na determinação de esforços de 2ª ordem (se não forem já conhecidos da análise global) e nas verificações de resistência das

secções à flexão composta uniaxial e biaxial. Os quadros incluem quer para o Método Simplificado como para o Geral os artigos regulamentares associados a cada etapa.

No secção seguinte passa-se à explicação pormenorizada dos Métodos Simplificado e Geral, que são os métodos essenciais para o dimensionamento de colunas mistas, objectivo deste trabalho, permitindo-se assim a correcta interpretação dos fluxogramas das Figuras 1.1 e 1.2, embora *a posteriori*.

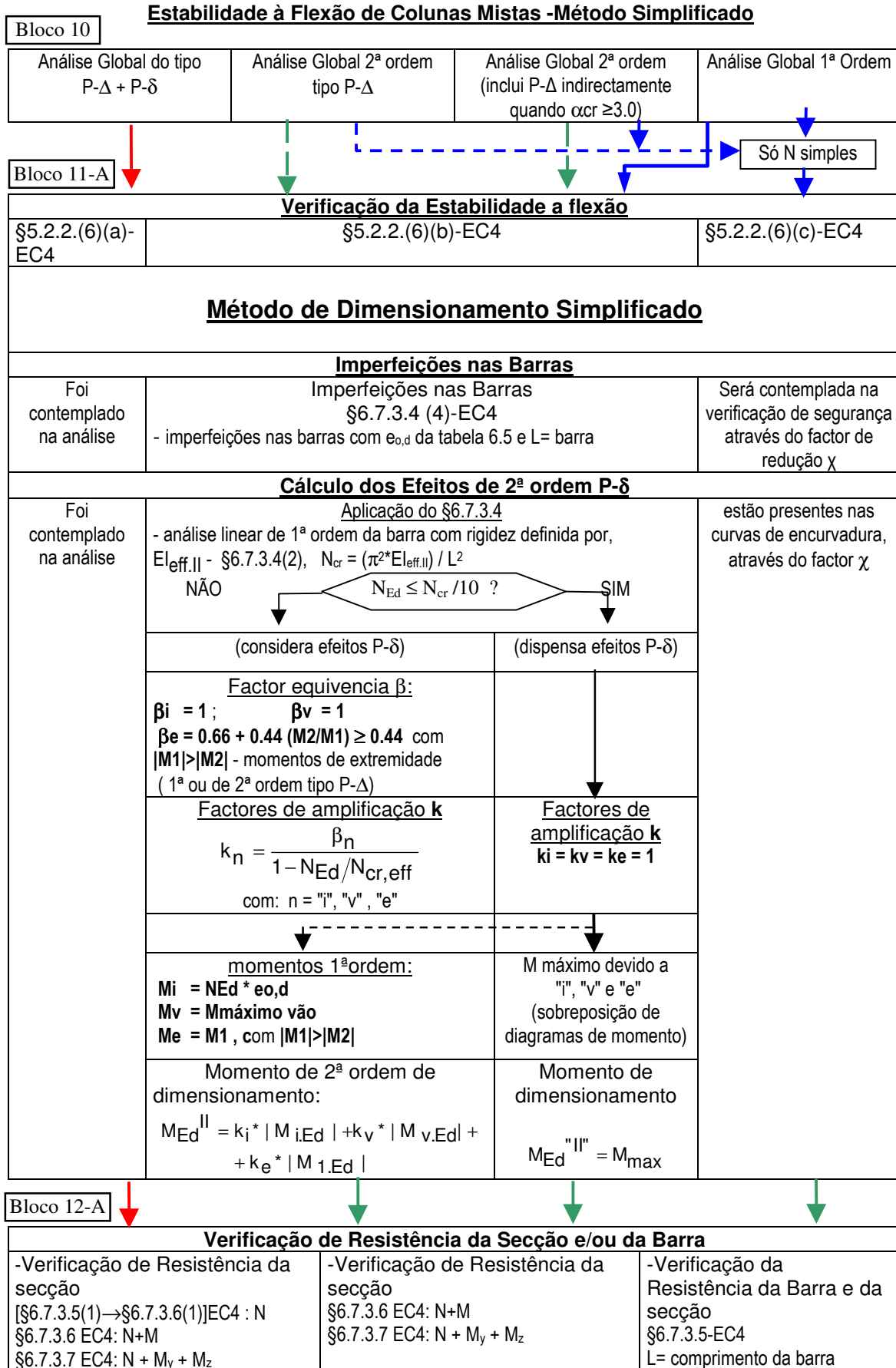


Figura 1.2- Método de Dimensionamento Simplificado

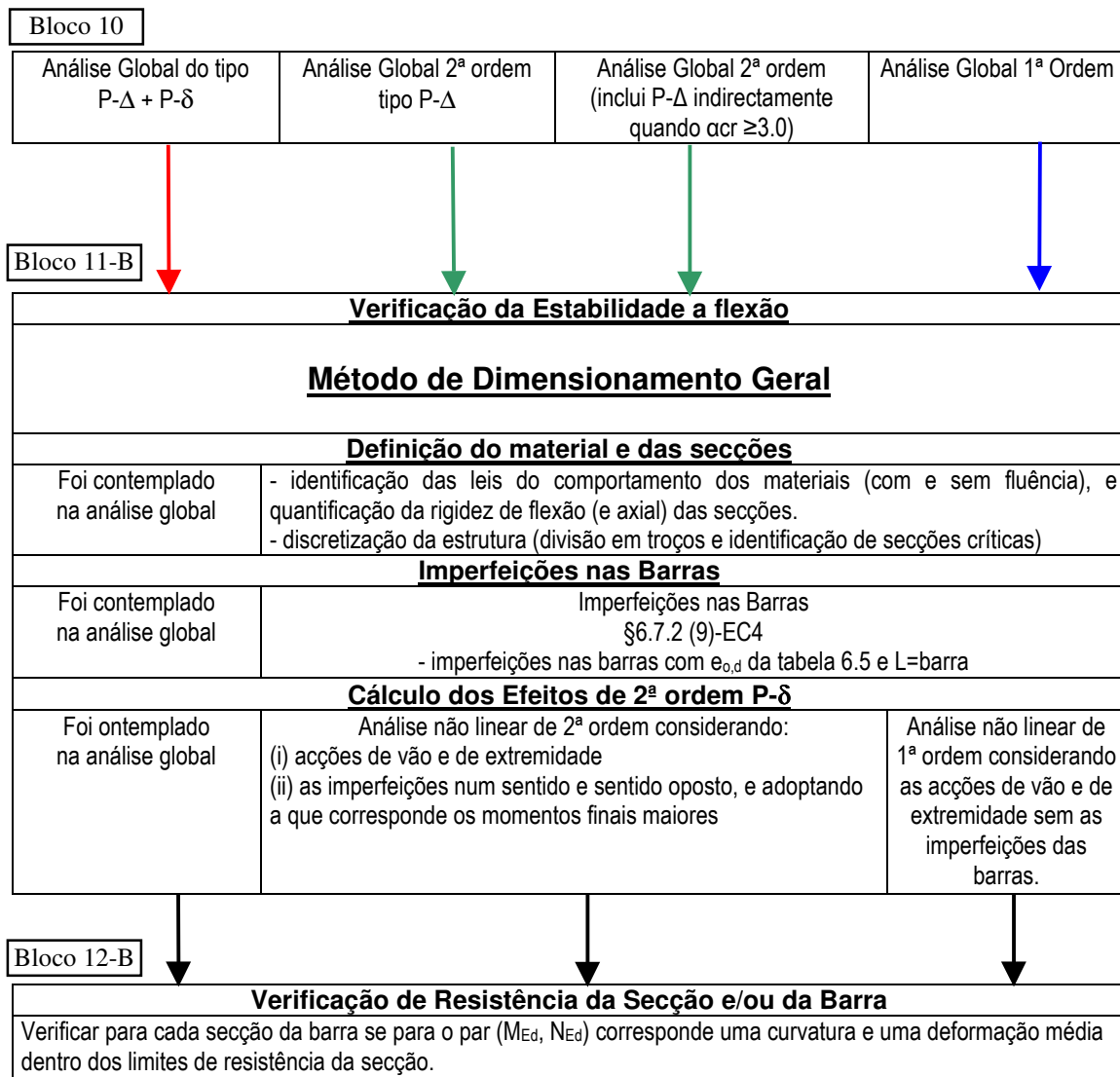
Estabilidade à Flexão de Colunas Mistas -Método Geral

Figura 1.3- Método de Dimensionamento Geral

1.2.3- Métodos de Dimensionamento de Colunas

A verificação de segurança de pilares mistos independentemente do método de dimensionamento a usar, Geral ou Simplificado, está limitado ao cumprimento de certos requisitos gerais que se indicam a seguir. Para o Método Simplificado há ainda exigências adicionais.

As regras de verificação de segurança de colunas mistas referem-se a barras cujas secções transversais são classificadas em 3 tipos:

(i) secções envolvidas [5], embebidas [11] ou recubiertas [10] - se o perfil de aço for totalmente embebido pelo betão, (Fig. 1.4-d,e,f)

(ii) secções parcialmente envolvidas, parcialmente embebidas (ou parcialmente recubiertas) - se apenas parte do perfil de aço for coberto pelo betão, (Fig. 1.4-d,e,f)

(iii) secções cheias [5] rellenas [10,11] se toda a secção (tubo circular ou rectangular) for preenchido pelo betão e pode ter outro perfil ou armaduras no seu interior (Fig. 1.4-d,e,f).

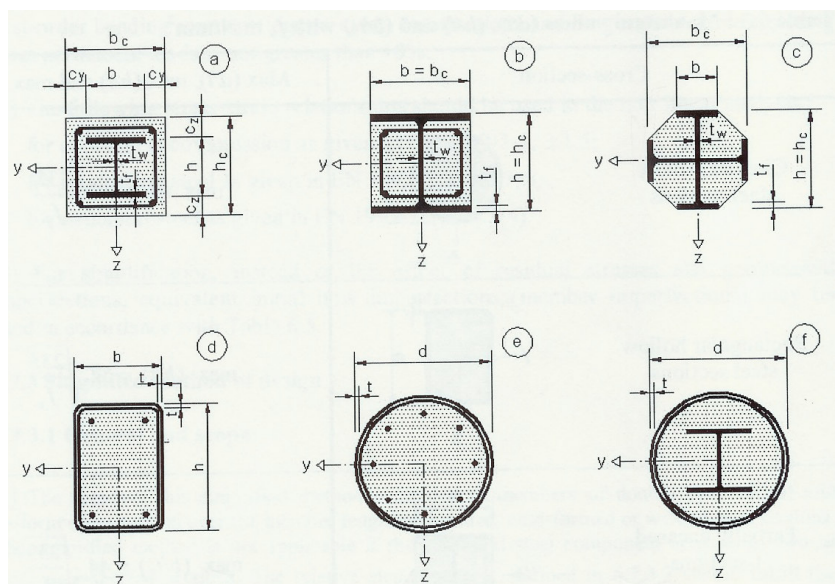


Figura 1.4 - Secções típicas de colunas mistas [4].

Embora seja conveniente numa coluna que os baricentros da secção do perfil metálico e da secção de betão coincidam, o que ocorre sempre em secções bissimétricas, nem sempre será assim quando se tratarem de secções monossimétricas ou assimétricas (este último caso só pode ser resolvido pelo método geral).

As cláusulas aplicam-se a colunas isoladas, isto é, que possam ser tratadas como estando destacadas dos pórticos, mas pertencentes a estruturas aporticadas onde os outros elementos sejam mistos ou de aço (§6.7.2(4)). A estrutura pode ser intranslocável (de nós fixos) mas

também translacionável (de nós móveis) definição não contemplada na anterior norma ENV 1994-1-1:1992 [5].

Deverão verificar-se ainda as seguintes regras gerais:

- (i) o betão é de peso normal e de classe C20/25 a C50/60;
- (ii) o aço estrutural é de classe S235 a S460;
- (iii) a taxa de contribuição do aço estrutural, δ , deve estar compreendida entre 0.2 e 0.9.

Representa a razão entre a resistência plástica do perfil e a resistência plástica total da secção,

$$\delta = \frac{A_a f_{yd}}{N_{pl,Rd}}, \quad (1.6)$$

sendo:

$$N_{pl,Rd} = A_a f_{yd} + A_s f_{sd} + \alpha_c A_c f_{cd} \quad (1.7)$$

com $\alpha_c = 0.85$ em geral e $\alpha_c = 1$ para secções cheias. Se δ for menor que 0.2 a coluna deverá ser dimensionada como sendo de betão armado e se for superior a 0.9 como secção de aço [1].

(iv) os efeitos da encurvadura local dos elementos do perfil de aço devem ser tidos em conta. O Eurocódigo não esclarece como o fazer, no entanto acrescenta que estes efeitos podem ser desprezados se (iv.1) a secção for totalmente envolvida com recobrimento não inferior a 40 mm e 1/6 da largura do banzo (§6.7.5.1(2)) e, (iv.2) se para secções do tipo cheia ou parcialmente envolvida não se ultrapassarem as esbeltezas indicadas na tabela 6.3 do EC4.

(v) para elementos sujeitos a flexão com compressão axial resultante de acções independentes o factor parcial de segurança γ_F afecto às acções que conduzem a um acréscimo de resistência deve ser reduzido em 20%. Em geral este aumento de resistência está associado ao efeito estabilizador para a flexão que por vezes o esforço axial apresenta. Então, para acções independentes, ou esforços independentes há que fazer duas análises, respectivamente para 100% e 80% do esforço axial e considerar os resultados mais conservativos. Este aspecto é tido em conta no método simplificado quando se limita μ_d a 1 no artigo 6.7.3.6(2). Deste artigo também se deduz que em geral os esforços (momentos e esforço axial) devem ser considerados sempre independentes, excepto, quando o momento seja um momento secundário que resulte de excentricidades de aplicação do esforço axial.

Deverão também ser cumpridas certas disposições construtivas (§6.7.5) relacionadas com (i) o recobrimento dos perfis metálicos e recobrimento das armaduras, e (ii) com a colocação da armadura longitudinal e transversal para o betão. O primeiro aspecto assegura transmissão de forças de aderência, a protecção do aço à corrosão e evita a projecção do betão em secções envolvidas. Consiste em garantir um recobrimento mínimo do perfil por uma espessura de betão de 40mm ou 1/6 da largura do perfil e o recobrimento das armaduras de betão que devem cumprir o Eurocódigo 2. O segundo aspecto trata de se garantir uma correcta aplicação de armaduras mínimas longitudinais e transversais, definidas pelo Eurocódigo 2, cuja armadura mínima longitudinal é de 0.3% para secções totalmente envolvidas. Para secções cheias não se exige aplicação de qualquer tipo de armadura. Outras exigências adicionais poderão ser

adoptadas para se garantir resistência ao fogo, para o que se deve consultar o Eurocódigo 4 parte 1.2.

Finalmente se refere que as verificações de segurança de colunas ou de suas secções, a efectuar, são:

(i) verificação de resistência da barra (inclui fenómenos de encurvadura e plastificação da secção (resistência)) de acordo com o secção 6.7.2 - Método Geral, ou secção 6.7.3 - Método Simplificado;

(ii) verificação de resistência à encurvadura local - já abordado acima - e que é em geral satisfeito controlando a geometria da secção;

(iii) verificação de transferência de cargas resultantes de cargas aplicadas nos extremos da barra, ou a elementos metálicos ou devido à variação de secção, e sua distribuição por toda a secção, e que ocorre para certo comprimento da coluna (§6.7.4.2);

(iv) verificação de resistência ao corte entre o perfil de aço e o betão fora das zonas de aplicação de cargas, (§6.7.4.3) que consiste em assegurar que as tensões entre o aço e o betão não ultrapasse certo valor resistente τ_{Rd} , ou garantir o não deslizamento relativo entre aqueles materiais.

As verificações (iii) e (iv) embora muito importantes não são objecto de estudo neste trabalho.

Assegurando que todas as regras anteriores são cumpridas, o Eurocódigo 4 apresenta dois métodos de dimensionamento de colunas:

(i) o Método Geral - cujo âmbito inclui barras com secções transversais não simétricas e secção variável ao longo da coluna;

(ii) o Método Simplificado - restrito a barras com dupla simetria, de secção constante ao longo do comprimento da coluna e que satisfaçam requisitos adicionais do artigo 6.7.3.1 (a ver mais tarde).

1.2.3.1- Método Geral

Para aplicação deste método o Eurocódigo 4 estabelece hipóteses sem concretizar critérios de aplicação prática [10] limitando-se apenas a indicar qual o tipo de análise a efectuar, qual o comportamento que os materiais devem ter, quais os factores que influenciam esse comportamento e que efeitos de 2ª ordem devem ser tidos em conta.

O cálculo de esforços ao longo da barra devem ser determinados por uma análise elasto-plástica, ou seja, uma análise materialmente não linear, que obviamente considera relações não lineares entre tensões e deformações dos materiais, admitindo que as secções transversais permanecem planas, que há aderência completa entre os elementos de aço e o betão até à rotura da secção e que as tensões de tracção no betão são negligenciáveis (§6.7.2.3(3), (4), (5)). Há também que ter em conta os efeitos das tensões residuais, as

imperfeições geométricas, a instabilidade local, a fissuração, fluência e retracção do betão, a cedência dos aços das armaduras e do perfil (§6.7.2.3(1)). Os efeitos de 2ª ordem, que podem actuar em qualquer direcção, só precisam de ser considerados se afectarem significativamente a estabilidade da barra, o que quer dizer, se a sua influência fizer crescer em mais de 10% os esforços primários.

Por simplificação, o EC4 permite que se considerem as tensões residuais e as imperfeições geométricas, como sendo equivalentes a uma curvatura inicial da barra (imperfeições da barra) com amplitude definida na tabela 6.5 do EC4. Este tipo de imperfeição é transformado neste trabalho num conjunto de forças distribuídas e concentradas auto-equilibradas, como mostra a Figura 1.5 e de acordo com o artigo §5.3.2.(7) do EC3.

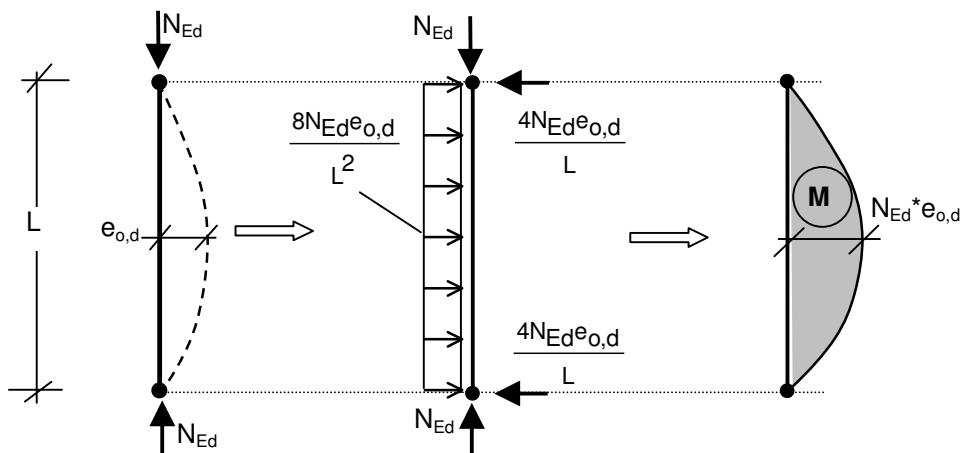


Fig. 1.5- Forças equivalentes à imperfeição da barra, $e_{o,d}$.

As relações tensão-deformação no betão são as definidas pelo §3.1.5 do EC2, ou seja pela expressão:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = -\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (1.8)$$

sendo, η a extensão relativa e k o parâmetro de cálculo dados por:

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (1.9)$$

$$k = 1.05 * E_{cm} * \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}} \quad (1.10)$$

e ainda, ε_{c1} a extensão correspondente à tensão máxima, f_{cm} e E_{cm} respectivamente a tensão média e o módulo de elasticidade do betão. Estes três últimos parâmetros dependem da classe de resistência do betão e constam na Tabela 3.1 do Eurocódigo 2.

Uma forma possível de considerar a fluência do betão a longo prazo (§5.8.5.(4)-EC2) é multiplicar os valores da extensão na relação $\sigma_c - \varepsilon_c$ pelo factor $(1 + \phi_{eff})$ sendo:

ϕ_{eff} o coeficiente efectivo de fluência, definido por:

$$\phi_{\text{eff}} = \phi(\infty, t_0) * \frac{M_{0\text{Eqp}}}{M_{0\text{Ed}}}, \quad (1.11)$$

com:

$\phi(\infty, t_0)$ - coeficiente de fluência de acordo com o §3.4 do EC2 e que pode ser facilmente determinado pela Figura 3.1 do EC2;

$M_{0\text{Eqp}}$ - momento de cálculo de 1ª ordem para a combinação quase permanente no Estado Limite de Serviço;

$M_{0\text{Ed}}$ - momento de cálculo de 1ª ordem para a combinação associada ao Estado Limite Último em análise.

No presente trabalho, que trata de colunas, as quais trabalham essencialmente à compressão substituem-se os momentos acima indicados pelos esforços axiais correspondentes $N_{G,Ed}$ e N_{Ed} .

Pretende-se neste trabalho determinar os esforços finais de cálculo e parâmetro de carga último de cálculo. Para isso é necessário rescrever as relações tensão em termos de valores de cálculo em vez de valores médios. Assim nas expressões (1.8) e na definição de k , expressão (1.10), deve substituir-se f_{cm} por f_{cd} , e considerar E_{cd} em vez de E_{cm} , sendo (§5.8.6(3)-EC2):

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}}, \quad \text{com } \gamma_{cE} = 1.2. \quad (1.12)$$

A relação 1.8 passa a ter o seguinte aspecto:

$$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = - \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (1.13)$$

com:

$$k = 1.05 * \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}} * \frac{|\epsilon_{c1}|}{f_{cd}}, \quad (1.14)$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad \text{extensão relativa a curto prazo}, \quad (1.15)$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{(1 + \phi_{\text{eff}})\epsilon_{c1}}, \quad \text{extensão relativa a longo prazo} \quad (1.16).$$

Salienta-se que as extensões ϵ_{c1} e ϵ_c são de encurtamento e por isso negativas assim como as tensões de compressão σ_{cd} . O gráfico seguinte representa as relações tensão deformação do betão a curto e longo prazo.

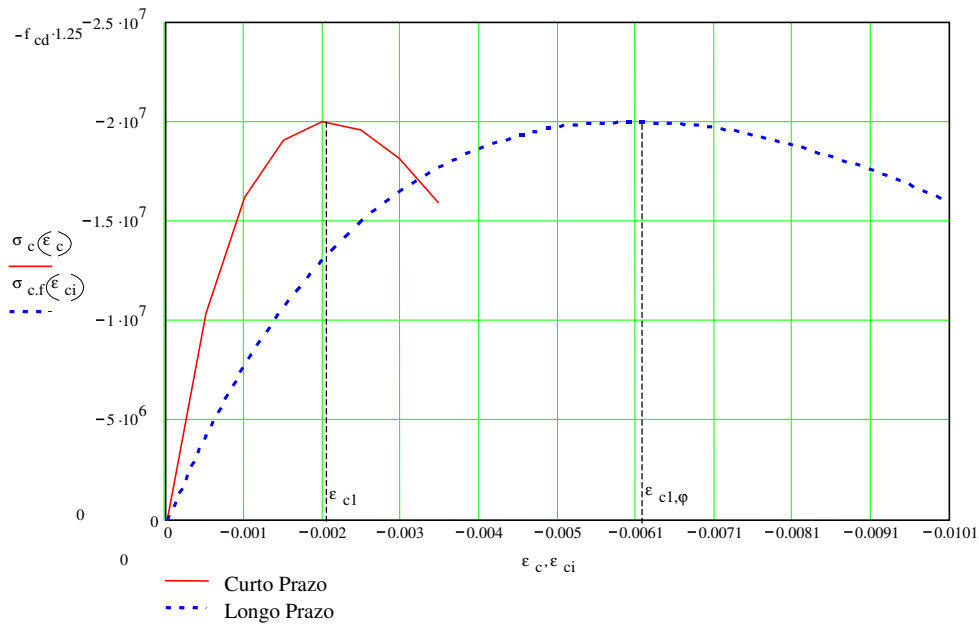


Fig.1.6 - Relação tensão-deformação para betão C25/30 a curto e longo prazo

A relação tensão-deformação para o aço de armaduras, Fig.1.7(a), aqui adoptado é o diagrama bilinear de cálculo, com um troço linear até à extensão de cedência $\epsilon_{s1} = f_{sd} / E_s$, e outro troço horizontal de tensão constante limitado à extensão $\epsilon_{s,lim} = 1\%$, (dentro dos limites da Tabela C.1 do Anexo C do EC2).

Também para o aço estrutural se adopta um diagrama bilinear sem endurecimento (§ 5.4.3(4)-EC3), com extensão limite de proporcionalidade $\epsilon_{yd} = f_{yd} / E_a$, por ser suficientemente preciso e seguro para os objectivos deste trabalho (Figura 1.7(b)).

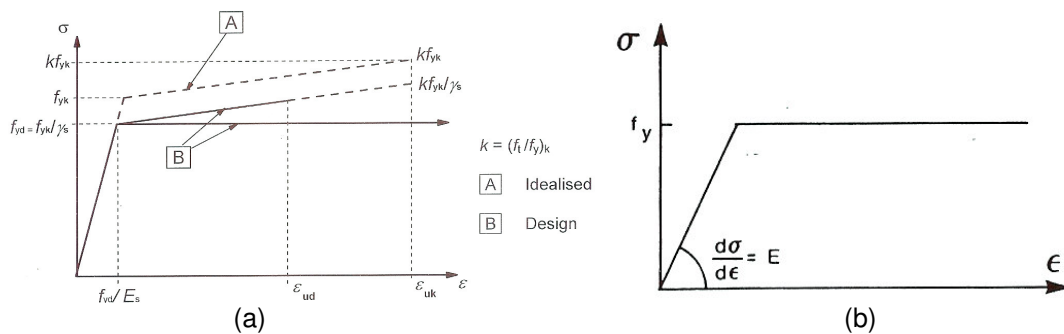


Figura 1.7 - Relação tensão-deformação para os aços (a) de armadura e (b) estrutural.

Os efeitos da fissuração do betão surgem naturalmente quando se procede ao equilíbrio de esforços em cada secção da estrutura sujeita à flexão composta e se despreza as tensões no betão em fibras traccionadas.

Como se referiu atrás os efeitos de 2ª ordem só precisam de ser quantificados se afectarem a estabilidade significativamente. Na prática são sempre considerados porque não há meios

expeditos de quantificar a sua importância.

A Figura 1.3 mostra as etapas mais importantes de um possível algoritmo de aplicação do Método Geral e que são:

(i) definição do material através das suas leis de comportamento, características resistentes e de deformação (tensões de cedência, extensões limites, a consideração ou não de fluência, etc) e a determinação da rigidez de flexão ou axial das secções ao longo da coluna. Para não tornar o problema infinito há necessidade de discretizar a coluna, ou seja, subdividi-la em troços e secções;

(ii) quantificar as imperfeições das barras;

(iii) efectuar uma análise não linear de segunda ordem;

(iv) realizar as verificações de resistência das secções, a qual consiste em testar se o estado de deformação da secção é compatível com os esforços actuantes (M_{Ed} , N_{Ed}) e limites de validade do comportamento do material, por consulta das relações momento-curvatura da secção.

No Capítulo 3 explica-se a implementação de um algoritmo de cálculo para a verificação de segurança de colunas baseados nas regras e os princípios acima descritos.

1.2.3.2- Método Simplificado

O Eurocódigo 4 estabelece regras de aplicação prática do método simplificado. Como vimos, este método só é válido para colunas cuja secção é bissimétrica e de geometria constante ao longo da barra. Para além de se ter de cumprir as exigências gerais para colunas mistas (secção 1.3.2) há que considerar as seguintes exigências adicionais:

(i) A esbelteza relativa da barra dever ser $\bar{\lambda} \leq 2,0$, sendo:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl,Rk}}{N_{cr}}} \quad (1.17)$$

com $N_{pl,Rk}$ o valor característico da resistência plástica à compressão

$$N_{pl,Rk} = A_a f_{yk} + A_s f_{sk} + \alpha_c A_c f_{ck} \quad (1.18)$$

N_{cr} a carga crítica para o modo de encurvadura relevante,

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{L_e^2} \quad (1.19)$$

sendo, L_e , o comprimento de encurvadura da barra, que depende das suas condições de fronteira e $(EI)_{eff}$ a rigidez efectiva de flexão, que a curto prazo vale:

$$(EI)_{eff} = E_a I_a + E_s I_s + k_c E_{cm} I_c \quad (1.20)$$

e a longo prazo é:

$$(EI)_{eff} = E_a I_a + E_s I_s + k_c \frac{E_{cm}}{1 + (N_{G,Ed} / N_{Ed}) \phi_t} I_c \quad (1.21)$$

O coeficiente $K_c=0.6$ foi obtido por calibração, I_a , I_s e I_c são os momentos de inércia do aço estrutural, da armadura de betão e da secção não fissurada de betão no plano considerado, N_{GEd} e N_{Ed} os esforços axiais associados à carga permanente em serviço e à carga de cálculo no Estado Limite Último.

Na prática, a esbeltez relativa $\bar{\lambda}$ raramente ultrapassa o valor limite de 2 [1] e é em geral condicionante a longo prazo.

(ii) A espessura de recobrimento do perfil por betão está limitada aos máximos seguintes:

$$\max c_z = 0.3h \quad \text{e} \quad \max c_y = 0.4b$$

e que está relacionado com as proporções de colunas para as quais o método foi validado. Para além disso As relações entre altura h_c e largura da secção b_c , devem estar entre os limites $0.2 \leq h_c / b_c \leq 5$.

(iii) A armadura longitudinal está limitada ao valor máximo de 6% exigindo-se no entanto um valor mínimo de 0.3% .

A análise a efectuar para as verificações da coluna é uma análise materialmente linear para a qual se adoptam certas rigidezes efectivas e geometricamente não linear realizada com base em coeficientes de amplificação e coeficientes de equivalência a carga uniforme.

As rigidezes efectivas $(EI)_{\text{eff,II}}$ são definidas a curto e a longo prazo respectivamente por:

$$(EI)_{\text{eff,II}} = k_o (E_a I_a + E_s I_s + k_{e,II} E_{cm} I_c) \quad (1.22)$$

e a longo prazo é:

$$(EI)_{\text{eff,II}} = k_o \left(E_a I_a + E_s I_s + k_{e,II} \frac{E_{cm}}{1 + (N_{G,Ed} / N_{Ed}) \varphi_t} I_c \right) \quad (1.23)$$

sendo $k_{e,II} = 0.5$ um factor de correcção para ter em conta a fissuração, $k_o = 0.9$ um factor de calibração, tendo sido as restantes grandezas já definidas antes.

As verificações de segurança englobam duas fases:

(i) a determinação de esforços finais ao longo das barras considerando as imperfeições e os efeitos de 2ª ordem, que aqui se pode designar por "determinação de esforços de segunda ordem" , e,

(ii) a verificação de resistência das barras à compressão simples, e secções à flexão composta uniaxial, biaxial, que se pode designar por "verificação de resistência das barras".

1.2.3.2.(a)- Determinação de Esforços de Segunda Ordem

No único caso particular da análise global ter sido de 2ª ordem do tipo P- Δ +P- δ , (ver Figura 1.2) os esforços finais são já de 2ª ordem ao longo da barra e por isso passa-se de imediato à fase seguinte, "verificação de resistência da secção e/ou barra" ou como designa o EC4 apenas por "verificação de resistência das barras" (ver secção 1.2.3.2.(b)).

Nas restantes análises globais obtêm-se momentos das secções extremas da barra de 1ª ordem ou de 2ª ordem (do tipo P-Δ), $M_{1.Ed}$ e/ou $M_{2.Ed}$, que designaremos momentos de extremidade. Eventualmente actuarão na barra cargas de vão, cujos momentos ($M_{v.Ed}$) têm que ser determinados recorrendo às leis da estática, supondo a barra biarticulada.

No método simplificado as imperfeições também são tidas como excentricidades de curvatura das barras $e_{o,d}$ obtidas da tabela 6.5 do EC4 determinado-se de imediato:

(i) um momento equivalente a elas associado e constante em toda a barra:

$$M_{i.Ed} = e_{o,d} * N_{Ed} \quad , \text{ ou,} \quad (1.24)$$

(ii) um diagrama de momentos sinusoidal como mostra a Figura 1.5.

Antes de mais há que fazer algumas considerações relativamente à presença de imperfeições das barras e à obrigatoriedade de quantificar efeitos de 2ª ordem P-δ.

As imperfeições das barras devem ser sempre consideradas. No entanto, no caso da coluna estar sujeita a uma flexão biaxial as imperfeições devem ser tratadas só no plano em que é espectável ocorrer a rotura. Quando tal não for evidente as imperfeições fazem-se actuar em cada um dos planos, separadamente, tendo-se que para tal efectuar, naturalmente, duas análises e as consequentes verificações de resistência.

Quanto aos efeitos de segunda ordem não precisam de ser considerados (§6.7.3.4(3) e §5.2.1.(3)) quando:

$$N_{cr,eff} \geq 10 * N_{Ed} \quad (1.25)$$

com:

$$N_{cr,eff} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff,II}}{L_e^2} \quad (1.26)$$

e $(EI)_{eff,II}$ definido pelas expressões (1.22) ou (1.23). Neste caso basta somar aos momentos primários os momentos devido às imperfeições ($M_{i.Ed}$) obtendo-se os esforços finais (M_{Ed}^{II}) e passar para a "verificação de resistência das barras" (secção 1.2.3.2(b)).

Salienta-se que o Eurocódigo 4 anterior [5] referia que também se poderia dispensar os efeitos de 2ª ordem para pilares isolados com momentos nas extremidades ($M_{1.Ed}$ e $M_{2.Ed}$) em que $\bar{\lambda} \leq 0.2 * (2 - r)$, com $r = M_{2.Ed} / M_{1.Ed}$ e $|M_{1.Ed}| \geq |M_{2.Ed}|$, aspecto que não será considerado neste trabalho.

Se a inequação (1.25) não for satisfeita determinar-se-á o momento final de dimensionamento de 2ª ordem de acordo com a igualdade [1,12]:

$$M_{Ed}^{II} = k_i * |M_{i.Ed}| + k_v * |M_{v.Ed}| + k_e * |M_{1.Ed}|, \quad (1.27)$$

que está simbolicamente representada na Figura 1.8, onde os factores k_i , k_v , e k_e são factores

de amplificação respectivamente do momento equivalente às imperfeições $M_{i,Ed}$, do momento máximo devido a cargas de vão, $M_{v,Ed}$, e do momento máximo de extremidade $M_{1,Ed}$.

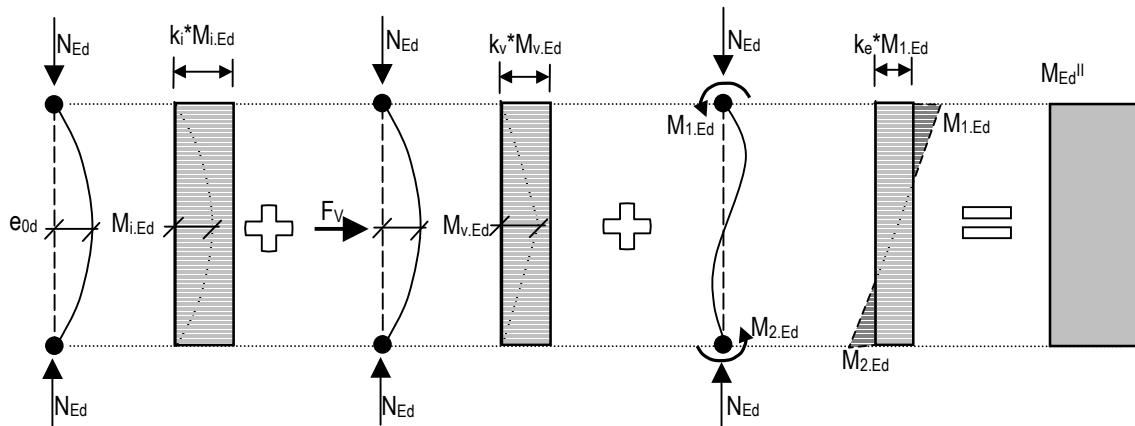


Figura 1.8 – Momento final de segunda ordem

Os factores k são genericamente definidos por:

$$k = \frac{\beta}{1 - N_{Ed}/N_{Cr,eff}}, \quad \text{mas } k \geq 1.0 \quad (1.28)$$

os quais dependem dos factores de equivalência a momento uniforme, β , fornecidos pela tabela 6.4 do Eurocódigo 4, e da carga crítica $N_{Cr,eff}$ definido por:

$$N_{Cr,eff} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff,II}}{L^2} \quad (1.29)$$

sendo L o comprimento da barra supondo-a biarticulada.

Os factores de equivalência a momento uniforme convertem a distribuição de momentos primários aos quais está associada uma deformada máxima na barra (em relação à sua corda), num momento uniforme que produz a mesma deformada máxima. São definidos diversos factores de equivalência a momento uniforme, β , com os seguintes valores e significados:

- (i) $\beta_i=1$, para momentos ($M_{i,Ed}$) associados às imperfeições das barras;
- (ii) $\beta_v=1$, para momentos isostáticos (supondo a barra biarticulada) de 1ª ordem devido a cargas de vão, sendo o seu valor máximo $M_{v,Ed}$;
- (iii) $\beta_e = 0.66+0.4r$, mas $\beta_e \geq 0.44$, para momentos de extremidade ($M_{1,Ed}$ e $M_{2,Ed}$) que resultam de uma análise global de 1ª ordem ou de segunda ordem do tipo P- Δ . O factor r ($-1.0 \leq r \leq 1.0$) é a razão $r = M_{2,Ed} / M_{1,Ed}$ sendo $|M_{1,Ed}| \geq |M_{2,Ed}|$.

Se a inequação (1.25) for satisfeita não há que considerar efeitos de 2ª ordem. Para determinar o momento máximo de dimensionamento poderá (i) recorrer na mesma à expressão (1.27) mas adoptar como unitários todos os coeficientes de amplificação ($k_i = k_v = k_e = 1$) visto não haver efeitos de 2ª ordem, ou (ii) utilizar o princípio de sobreposição de efeitos, somando os diagramas de momentos, e determinar o momento máximo na barra. Este segundo processo é mais trabalhoso mas frequentemente mais económico.

1.2.3.2.(b)- Verificação de Resistência das Barras

A verificação de "resistência de barras" está prevista no Eurocódigo para os seguintes casos:

- A) Resistência de barra à compressão simples,
- B) Resistência de barra à compressão com flexão uniaxial,
- C) Resistência de barra à compressão com flexão biaxial,

consistindo de facto no primeiro caso uma verificação da barra e nos dois últimos a verificação de resistência de secções.

A) Resistência de barra à compressão simples

Para barras à compressão simples a verificação de segurança consiste em satisfazer a inequação:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_{\min} * N_{pl,Rd}} \leq 1.0 \quad (1.30)$$

sendo a $N_{pl,Rd}$ definido pela expressão (1.7) (com f_{yd} determinado com γ_{M1}) e χ o factor de redução mínimo $\chi_{\min} = \min\{\chi_y, \chi_z\}$ que é função da esbelteza relativa $\bar{\lambda}$ definida por (1.17) de cada um dos planos (λ_y e λ_z). A expressão geral do factor de redução é dada por §6.3.1.2-EC3:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}, \text{ mas } \chi \leq 1.0, \text{ com } \phi = 0.5 * \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) - \bar{\lambda}^2 \right] \quad (1.31)$$

sendo α o factor de imperfeição do quadro seguinte, cujas curvas de encurvadura a, b ou c, associadas a cada secção tipo e eixo de flexão, são as da tabela 6.5 do EC4.

Quadro 1.1 - Factor de imperfeição, α

Curva de encurvadura	a	b	c
Factor de imperfeição, α	0.21	0.34	0.49

Nesta verificação de segurança trata-se de uma verificação da barra à encurvadura por flexão (se $\chi < 1.0$) a qual considera indirectamente as imperfeições da barra e os efeitos de 2ª ordem. Se o factor χ for superior a 1, deve ser tomado como unitário, e a verificação de segurança reduz-se a uma verificação de resistência à compressão simples, que tem o valor limite de $N_{pl,Rd}$. Neste contexto e para o caso de secções mistas cheias com tubos $N_{pl,Rd}$ pode ser o da expressão (1.42).

B) Resistência de barra à compressão com flexão uniaxial

A verificação de segurança (das secções) é baseada nas curvas de interacção M-N (que serão abordadas no parágrafo 1.2.3.3.(c)) e deve satisfazer a seguinte inequação:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{pl.N.Rd}} = \frac{M_{Ed}}{\mu_d * M_{pl.Rd}} \leq \alpha_M \quad (1.32)$$

sendo:

M_{Ed} - os momentos máximos na barra calculados na etapa secção anterior (considerando as imperfeições e os efeitos de 2ª ordem se necessários);

$$M_{pl.N.Rd} = \mu_d * M_{pl.Rd} \quad (1.33)$$

o momento resistente à flexão com interacção com esforço axial (e em casos particulares também com o esforço transversal (ver 1.2.3.3.(a));

μ_d - momento reduzido obtido das curvas de interacção M-N (ver Figura 1.5 e secção 1.3.2.2.3)

$M_{pl.Rd}$ - momento plástico resistente da secção à flexão simples.

α_M - um factor de redução, devido ao facto de se assumir um bloco de tensões rectangular no betão e até à linha neutra plástica para a construção das curvas de interacção M-N, que em contraste com a resistência dos aços se torna favorável [5]. O factor de redução vale, $\alpha_M = 0.9$ para aços S235 e S355 e $\alpha_M = 0.8$ para S420 e S460.

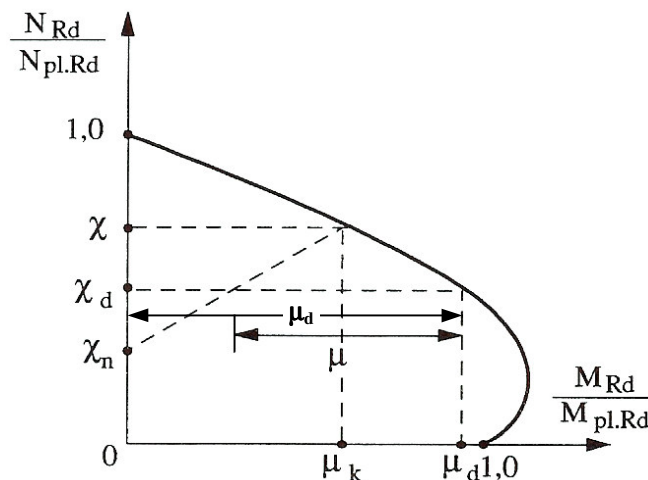


Fig 1.9 - Diagrama de interacção M-N de acordo com ENV 1994-1-1 [5].

Antes de prosseguir é conveniente comentar a Figura 1.9. A Figura está de acordo com o antigo Eurocódigo 4 (ENV) e representa a curva de interacção o "momento reduzido de cálculo" - μ_d - e o "esforço axial reduzido de cálculo" - χ_d . De acordo com o EC4 adoptado neste trabalho só interessam de facto estes dois parâmetros. As outras grandezas (χ , χ_n , μ_k) representavam a forma como a ENV actuava para ter em conta as imperfeições das barras. Consistia na redução do momento reduzido μ_d para μ . Este procedimento não é aplicável neste trabalho.

É importante referir que o momento reduzido μ_d só pode ser tomado superior a 1 quando o momento M_{Ed} (integralmente) resultar directamente da acção de N_{Ed} , como por exemplo resultar de excentricidades de aplicação de N_{Ed} . Caso contrário, aplica-se a cláusula 6.7.1(7) do EC4 que na prática consiste em determinar, o μ_d associado a $(M_{Ed}; N_{Ed})$ e outro μ_d para $(M_{Ed}, 80\%N_{Ed})$, e adoptar o menor.

Finalmente se refere que a expressão (1.32 também pode ser utilizada para pilares à compressão simples desde que se calcule explicitamente as imperfeições da barra (de onde resultam momentos) (§6.7.3.5(1)-EC4). Este procedimento conduz a situações mais desfavoráveis, mas é necessário quando não há disponível na Tabela 6.5 do EC4 curvas de encurvadura para o tipo de geometria da secção em causa.

C) Resistência de barra à compressão com flexão biaxial

Consiste na verificação de resistência da secção com base na resistência à flexão uniaxial em cada um dos eixos e numa expressão de interacção:

$$\frac{M_{y,Ed}}{\mu_{d,y} * M_{pl,y,Rd}} \leq \alpha_{M,y} \quad (1.33)$$

$$\frac{M_{z,Ed}}{\mu_{d,z} * M_{pl,z,Rd}} \leq \alpha_{M,z} \quad (1.34)$$

$$\frac{M_{y,Ed}}{\mu_{d,y} * M_{pl,y,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{\mu_{d,z} * M_{pl,z,Rd}} \leq 1.0 \quad (1.35)$$

em que as grandezas envolvidas, agora indexadas a cada um dos eixos de flexão, e têm o significado explicado nas secções anteriores (ver Figuras 1.10 e 1.11).

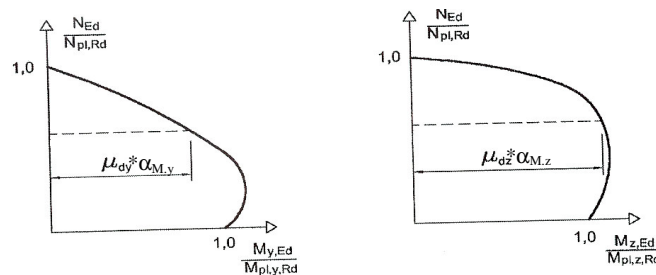


Fig 1.10 - Diagramas de interacção M-N representativos das expressões (1.33) e (1.34)

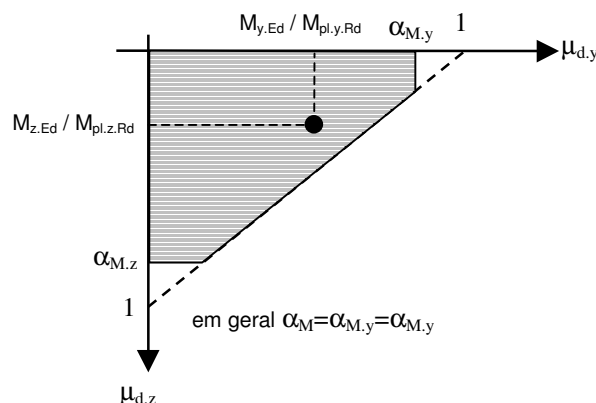


Fig 1.11 - Diagramas de interacção representativo da fórmula de interacção (1.35)

É conveniente lembrar que as imperfeições das barras são consideradas no plano em que a rotura é previsível. Se assim não for, verificações serão feitas para ambos os planos com as imperfeições a actuar alternadamente.

1.2.3.3- Diagramas de Interação M-N para uma Secção Mista

Antes de prosseguir há considerar dois aspectos (i) a influência do esforço transversal elevado no comportamento de uma secção à flexão-compressão e (ii) a sobre-resistência das secções do tipo cheia.

1.2.3.3.(a)- Influência do Esforço Transverso

O esforço transversal V_{Ed} distribui-se pelo perfil metálico $V_{a,Ed}$ e pela secção de betão $V_{c,Ed}$ de acordo com as seguintes expressões:

$$V_{a,Ed} = V_{Ed} \frac{M_{pl,a,Rd}}{M_{pl,Rd}} \quad (1.36)$$

$$V_{c,Ed} = V_{Ed} - V_{a,Ed} \quad (1.37)$$

sendo

$M_{pl,a,Rd}$ - o momento plástico resistente da secção de aço,

$M_{pl,Rd}$ - o momento plástico resistente da secção mista (ver expressão (1.46.a))

As acções $V_{a,Ed}$ e $V_{c,Ed}$ não podem superar a resistência ao corte da secção respectivamente do §6.2.6 do EC3 e §6.2 do EC2. Por simplificação pode assumir-se V_{Ed} actua isoladamente no perfil de aço (§6.7.3.2(4)).

Se o esforço transversal actuante na secção de aço, $V_{a,Ed}$, for superior a 50% da resistência plástica do perfil ao corte, $V_{pl,a,Rd}$, apenas uma percentagem da tensão resistente de cálculo f_{yd} do aço estrutural da área de corte da secção A_v , está disponível para equilibrar os esforços axiais e momentos actuantes, e vale $(1 - \rho) \cdot f_{yd}$, sendo o factor de redução ρ definido por:

$$\rho = \left(2 \cdot V_{a,Ed} / V_{pl,Rd} - 1 \right)^2. \quad (1.38)$$

A resistência plástica do perfil ao corte é:

$$V_{pl,a,Rd} = A_v \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \quad (1.39)$$

sendo a área de corte A_v definida no §6.2.6 (3) do EC3 e depende da direcção segundo a qual actua o esforço cortante.

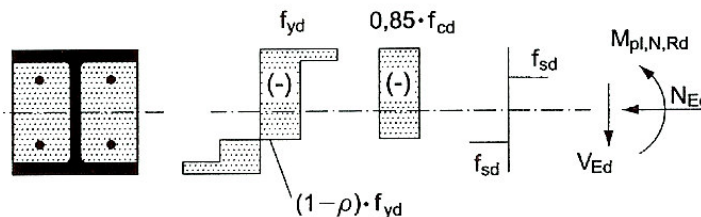


Fig 1.12 - Diagramas de tensões com redução de f_{yd} na área de corte do perfil aço devido $V_{a,Ed}$ elevado

Em vez de se fazer a redução de tensão no diagrama de tensões da referida na área de corte é mais prático e equivalente fazer a redução de espessura da própria área de corte. Para o perfil da Figura 1.9, por exemplo, a redução de espessura recairia sobre a alma, de tal modo que [13]:

$$t_{w,\text{reduzido}} = t_w * (1 - \rho) \quad (1.40)$$

1.2.3.3.(b)- Sobre-resistência de Secções Cheias

Como foi referido na secção 1.2.3 a resistência plástica à compressão é dada pela expressão 1.7 onde em geral $\alpha_c=0.85$ e em particular para secções cheias (rectangulares ou tubulares) passa a ser $\alpha_c=1$.

$$N_{pl,Rd} = A_a f_{yd} + A_s f_{sd} + \alpha_c A_c f_{cd} \quad (1.7\text{-rep})$$

Porém para secções cheias circulares pode ser considerada um acréscimo de resistência no betão causada pelo seu confinamento (ou efeito de compressão triaxial [13]) desde que:

$$\bar{\lambda} \leq 0.5 \text{ (definida por 1.17)} \quad \text{e} \quad \frac{M_{Ed}}{d * N_{Ed}} < 0.1 \quad (1.41)$$

sendo a resistência plástica da secção tubular:

$$N_{pl,Rd} = \eta_a A_a f_{yd} + A_s f_{sd} + A_c f_{cd} \left(1 + \eta_c \frac{t}{d} \frac{f_y}{f_{ck}} \right) \quad (1.42)$$

com os novos parâmetros definidos no §6.7.3.2 (6) do EC4.

Devido à condição (1.41) os diagramas de interacção só serão válidos numa zona restrita onde $M_{Ed} < 0.1 * d * N_{Ed}$ como mostra a Figura seguinte.

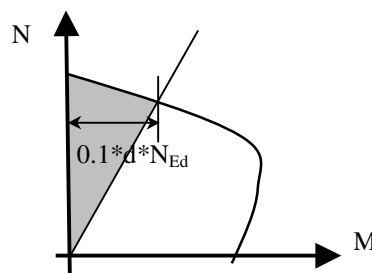


Figura 1.13- Zona de validade do diagrama de interacção para secções cheias com sobre-resistência

1.2.3.3.(c)- Curvas de Interacção M-N

As curvas de interacção podem ser encontradas considerando diferentes posições para o eixo neutro na secção, associado a uma extensão média, e determinando os esforços internos resultantes a partir dos blocos de tensão dos diversos materiais. Este procedimento pode ser

efectuado recorrendo a uma análise computacional, cujo resultado tipo, é a curva a cheio da Figura 1.14. [12].

Um procedimento manual é consentido pelo EC4 (§6.7.3.2(5)) [4], explicado no anexo C da antiga ENV 1994-1-1 [5] e também em bibliografia diversa [10, 11, 12, 14]. O método simplificado permite o cálculo manual dos cinco pontos (A, B, C, D e E) mostrados da Figura 1.14. Ou seja a curva exacta é substituída pela linha poligonal que passa por aqueles pontos, sendo o ponto E opcional. Este último ponto não é necessário quando há flexão em torno do eixo forte. No entanto é conveniente determiná-lo em secções com perfis I à flexão em torno do eixo fraco [13] por ficar muito afastado da linha AC. Este método simplificado é aplicável ao dimensionamento de colunas mistas com secções simétricas em relação a ambos eixos principais (y e z).

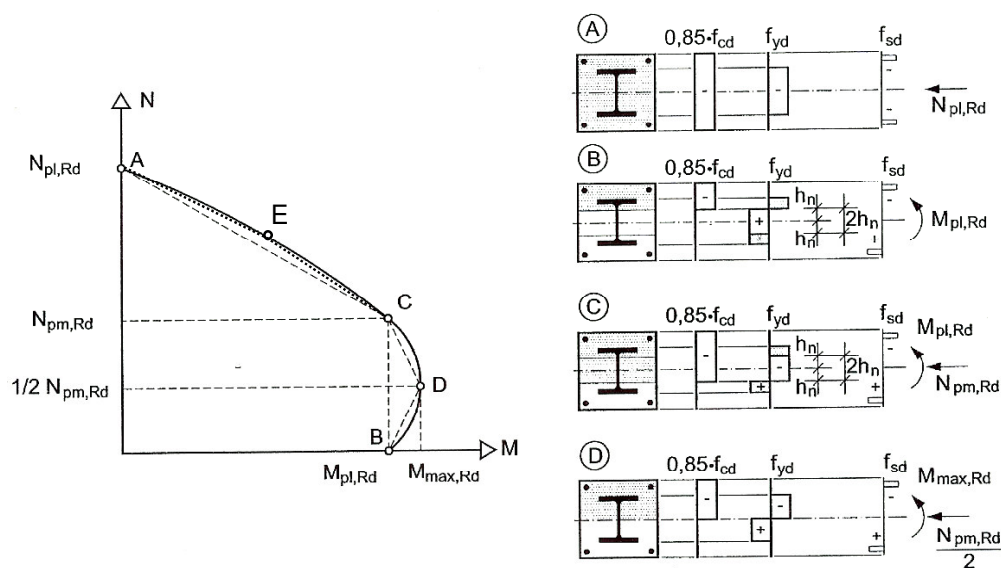


Fig 1.14 - Diagrama de interacção M-N em termos de valores resistentes (adaptação de[4])

A metodologia para determinar as coordenadas dos pontos A a E baseia-se no estudo do modelo da Figura 1.15 que representa uma secção mista bissimétrica. Nesse modelo o aço estrutural e o das armaduras está representado pela zona central a tracejado e o betão pela zona circundante a traço interrompido. O centro de gravidade da secção não fissurada é o ponto G.

No que se refere apenas à flexão simples (ponto B da Figura 1.14) o eixo neutro plástico é a linha B-B da Figura 1.15, à distância h_n do centro de gravidade, G. À mesma distância h_n e do lado oposto a G situa-se a linha C-C que representa o ponto C da Figura 1.14. Tal deve-se ao facto das áreas de aço estrutural, de betão e de armadura serem todas simétricas em relação a G. A Figura 1.14 mostra que quando o eixo se move de B-B para C-C, instante para o qual se atinge um esforço axial $N_{mp,Rd}$, aumenta a resistência de flexão, porque o efeito de pré-tensão

do esforço axial reduz a extensão da zona fissurada [13]. Demonstra-se [3, 12, 14] que $N_{pm.Rd}$ é o esforço axial capaz de esgotar a capacidade resistente da zona (2) da secção (ver Figura 1.15) de altura $2 \cdot h_n$, e que, em virtude da (bis)simetria da secção, é numericamente igual à resistência de compressão de toda a área de betão.

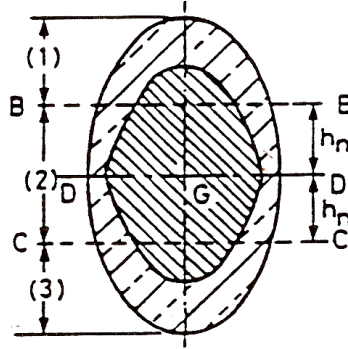


Fig 1.15 - Modelo se secção mista bissimétrica [5]

Assim:

$$N_{pm.Rd} = \alpha_c A_c f_{cd} \quad (1.43)$$

com $\alpha_c = 0.85$ em geral e $\alpha_c = 1$ para secções cheias, lembrando que A_c é a área total de betão. Mas $N_{pm.Rd}$ também é a resistência plástica à compressão da secção da zona (2), que se determina escrevendo as expressões 1.7 (ou 1.42) em função de h_n , ou seja:

$$N_{pl.Rd}^{(2)}(h_n) = A_a(h_n) \cdot f_{yd} + A_s(h_n) \cdot f_{sd} + \alpha_c A_c(h_n) \cdot f_{cd} \quad (1.44)$$

e atendendo à variação da geometria da secção (por exemplo, em $A_s(h_n)$ só se poderá incluir os varões que estão efectivamente na zona (2) de altura $2 \cdot h_n$). Fazendo:

$$N_{pm.Rd} = N_{pl.Rd}^{(2)}(h_n) \quad (1.45)$$

obtém-se o valor numérico de h_n , ficando objectivamente demarcadas as zonas (1), (2) e (3) da Figura 1.15. É agora possível determinar as coordenadas dos pontos A a E [12].

Ponto A - marca a resistência da secção à compressão

$$N_A = N_{pl.Rd}, \text{ com } N_{pl.Rd} \text{ definido por (1.7) (ou 1.42)}$$

$$M_A = 0$$

Ponto B - marca a resistência da secção mista à flexão simples

$$N_B = 0$$

$$M_B = M_{pl.Rd} = M_{max.Rd} - M_{n.Rd} \text{ (ver Figura 1.14)} \quad (1.46.a)$$

$$M_{pl.Rd} = (W_{pa} - W_{pan}) f_{yd} + (W_{pc} - W_{pcn}) \frac{\alpha_c f_{cd}}{2} + (W_{ps} - W_{psn}) f_{sd} \quad (1.46.b)$$

$$M_{n.Rd} = W_{pan} f_{yd} + W_{pcn} \frac{\alpha_c f_{cd}}{2} + W_{psn} f_{sd} \quad (1.47)$$

onde:

W_{pa} , W_{pc} , W_{ps} são os módulos plásticos de toda a secção de aço estrutural, de toda a área de betão (assumindo-o não fissurado), e de toda a armadura;

W_{pan} , W_{pcn} , W_{psn} são os módulos plásticos de parte da secção da zona (2) de altura $2 \cdot h_n$, respectivamente para parte do aço estrutural, parte da área de betão (assumindo-o não fissurado), e da armadura dentro da zona (2).

Ponto C - corresponde à resistência à flexão mas com a compressão adicional sobre a zona (2), e a partir do qual, o acréscimo de esforço axial faz reduzir a resistência da secção mista à flexão.

$$N_C = N_{pm.Rd}, \quad (\text{expressão 1.43})$$

$$M_C = M_{pl.Rd} \quad (\text{expressão 1.46.a})$$

Ponto D - a linha neutra plástica coincide com o centro de gravidade, obtendo-se a máxima resistência à flexão da secção mista.

$$N_D = N_{pm.Rd} / 2$$

$$M_D = M_{max} = M_{pl.Rd} + M_{n.Rd}$$

$$M_{max.Rd} = W_{pa} f_{yd} + W_{pc} \frac{\alpha_c f_{cd}}{2} + W_{ps} f_{sd} \quad (1.48)$$

Ponto E - a linha neutra plástica localiza-se na zona (3) e corresponde a um estado de flexão composta intermédio entre os pontos A e C.

Pode admitir-se em geral:

$$N_E = \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad (1.49)$$

$$M_E = M_{pl.Rd}(h_E) \quad (1.50)$$

e calcular h_E da mesma forma que se fez para h_n . Para isso na igualdade (1.45) substitui-se $N_{pm.Rd}$ por N_E e h_n por h_E , e resolve-se em ordem a h_E . O momento M_E é determinado usando a expressão (1.46.a) onde as grandezas W_{pan} , W_{pcn} , W_{psn} se referem à zona central de altura $2 \cdot h_E$. Este processo é algo trabalhoso e por isso se podem adoptar as seguintes alternativas:

(i) para secções com perfis H flectindo em torno do eixo fraco, pode arbitrar-se a posição de h_E como a meia distância entre h_n e a extremidade do banzo, à distância $b/2$, e utilizar a expressão C.29 do anexo C da ENV EC4. Se N_E ficar próximo de N_C ajustar h_E . M_E determina-se pela igualdade (1.47);

(ii) para secções cheias h_E fica a meia distância entre h_n e a extremidade do perfil e utiliza-se a expressão C.35 anexo C da ENV EC4. De resto procede-se como em (i).

Capítulo 2 - Enquadramento Teórico

2.1- Introdução. Análise Elásto-Plástica de Colunas

A implementação do Método Geral descrito na secção 1.2.3.1 traduz-se na realização de uma análise elásto-plástica de colunas. Pretende-se determinar esforços e deslocamentos na fase de pré encurvadura assim como a carga limite. Exclui-se a análise da coluna no domínio de pós-encurvadura. A análise elasto-plástica de vigas colunas engloba normalmente dois passos [15]:

- (i) a análise da secção transversal
- (ii) a análise da barra.

Na análise da secção transversal é investigado o comportamento da secção quando submetida à combinação de força axial e momentos. O resultado é usualmente expresso num conjunto de equações relacionando o Momento, M , e a curvatura, χ , para um certo valor da carga axial (relação $M - \chi - N$). Se o esforço axial for significativo outro conjunto de relações entre a carga axial, N , e a deformação axial, ϵ , deve ser desenvolvido (a relação $P - \epsilon - N$). Contudo para a maioria das vigas colunas a deformação por flexão tem usualmente uma ordem de magnitude maior que a deformação axial e por isso pode ser geralmente razoável obter apenas a relação $M - \chi - P$. Uma vez que esta relação seja estabelecida a análise da barra pode prosseguir.

No algoritmo de análise da barra há que atender à relação não linear Momento-Curvatura das secções e aos efeitos geometricamente não lineares resultantes da deformação da barra. Como o comportamento da barra é não linear (material e geométrico) a análise tem que ser incremental. Assim a barra é subdividida em troços onde se identificam secções e nós. Nas secções avalia-se o estado de deformação da barra, a partir do qual é aferida a rigidez de flexão, parâmetro que irá traduzir o seu comportamento material (não linear). Nos nós realizam-se as condições de compatibilidade e de equilíbrio, e obtêm-se soluções à medida que a carga aplicada (ou deformação) aumenta incrementalmente. Para este efeito a carga aplicada, que corresponde a certa combinação fundamental de acções, é previamente indexada a um parâmetro λ , o parâmetro de carga. Os esforços são então calculados para um certo nível do parâmetro de carga (em geral unitário). Aumentando progressivamente aquele parâmetro, irá obter-se uma curva "parâmetro de carga - deslocamento" cujo pico representa o parâmetro de carga última da barra (o produto da carga pelo parâmetro será obviamente a combinação "carga última").

Contudo, para realizar estas análises onde intervêm fenómenos instabilidade é necessário conhecer o domínio de validade das "análises de estabilidade", saber que tipo de resultados se podem obter das mesmas, e que algoritmos numéricos são adequados.

Atendendo a tudo o que foi dito, nas secções de texto seguintes procura-se explicar:

- (i) como quantificar a relação $M - \chi - N$,
- (ii) qual o tipo de análises de estabilidade existentes e seu domínio de aplicação,
- (iii) qual a correlação entre os métodos de análise não linear de colunas de aço, betão e mistas, e,
- (iii) quais as características das rotinas numéricas para análises não lineares.

2.2- Relação Momento-Curvatura

Para se implementar uma análise materialmente não linear é necessário conhecer a evolução da rigidez de flexão (e axial) das secções. A rigidez de flexão (ou axial) não é mais do que a relação entre o incremento de momento (ou esforço axial) e o incremento de curvatura (ou da deformação axial do baricentro) da secção. Como as relações tensão-deformação são não lineares, a cada incremento de deformações (curvatura ou deformação axial) correspondem incrementos não proporcionais de tensão, cujas resultantes são esforços (momentos e esforços axiais). Assim a relação entre estes esforços e as deformações, são também não lineares. Deste modo, para achar rigidez de flexão é necessário iniciar o estudo da distribuição de tensões numa secção em função de dado campo de deformações e só depois deduzir as relações entre momentos (esforços axiais) com as curvaturas (deformações médias).

O estudo de uma secção mista tem que contemplar as leis de comportamento de cada um dos materiais que constitui a secção, e o domínio de validade das mesmas (em termos de extensões) e é em tudo muito semelhante ao estudo de uma secção de betão armado. Baseia-se nas seguintes hipóteses para a deformação da secção e comportamento material (§6.1 EC2 e §6.7.2(4),(8)-EC4):

- (i) As secções mantêm-se planas na deformação, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli.
- (ii) A extensão das armaduras aderentes é a mesma do betão adjacente.
- (iii) "full composite action" é assumida entre o aço do perfil e o betão (§6.7.2.(4)-EC4).
- (iv) A resistência à tracção no betão é ignorada.
- (v) As tensões no betão comprimido são obtidas a partir do diagrama tensões-extensões do parágrafo 3.1.5 do EC2, visto ser o adequado para análises globais não lineares (Figura 2.1) (§6.7.2(8)-EC4).
- (vi) As tensões nas armaduras são obtidas das relações tensão deformação do parágrafo 3.2.7 do EC2 (§6.7.2(8)-EC4) (ver Figura 2.2.a))
- (vii) As tensões no aço do perfil são obtidas das relações tensão deformação do parágrafo 5.4.3.(4) do EC3 (§6.7.2(8)-EC4) (ver Figura 2.2.b))

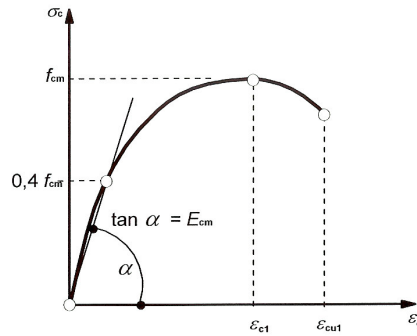


Figura 2.1 - Relação tensão-deformação do betão para a análise estrutural

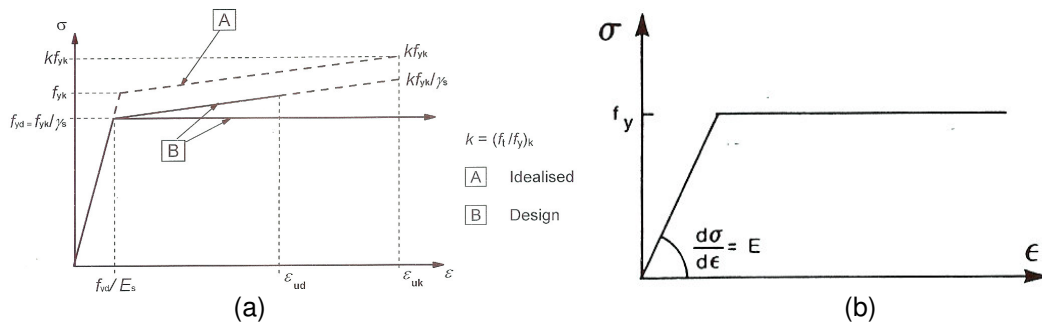


Figura 2.2 - Relação tensão-deformação para os aços (a) de armadura e (b) estrutural.

(viii) para as secções sujeitas à compressão simples a extensão de compressão é limitada a ϵ_{c1} (-0.002 a -0.00245 consoante a classe resistente do betão, (Figura 1.2; Tabela 3.1-EC2);

(ix) para secções que à flexão composta não estejam completamente comprimidas a extensão da fibra mais comprimida é limitada a ϵ_{cu1} (-0.0035).

(x) para secções à flexão composta mas totalmente comprimidas (domínio 5 da Figura 2.3), define-se o diagrama de extensões admitindo-se que se atinge a extensão ϵ_{c1} na fibra à distância $(1 - \epsilon_{c1} / \epsilon_{cu1}) * h$, sendo h a altura total da secção.

A adopção das hipóteses formuladas conduz ao conjunto de diagramas de extensões possíveis ilustrados na Figura:

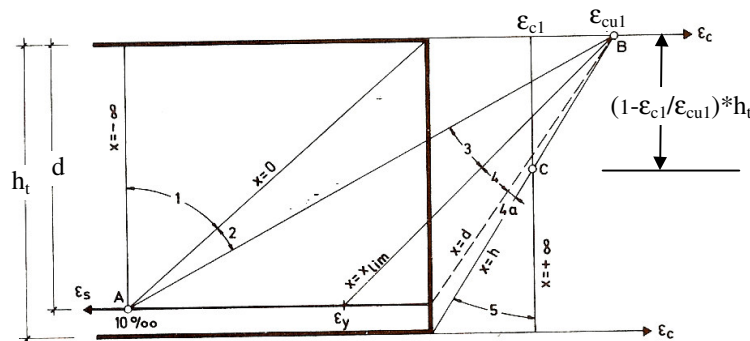


Figura 2.3 - Domínios de deformação da secção para esgotamento ao ELU (adaptado de [1])

Antes de prosseguir interpretemos a Figura 2.3. onde "d" representa a fibra mais traccionada do perfil ou da armadura:

Domínio 1: Tracção simples ou composta onde toda a secção está em tracção. As rectas de deformação giram em torno do ponto A, correspondente a um alongamento da fibra de aço (armadura no caso de secções envolvidas, ou fibra de aço estrutural no caso de secções cheias) mais afastada e mais traccionada de 1%.

Domínio 2: Flexão simples ou composta onde o betão não alcança a rotura. As rectas de deformação continuam a girar em torno do ponto A correspondente a um alongamento do aço mais traccionado. A máxima compressão do betão é igual a ϵ_{cu1} (-0.0035) e corresponde à profundidade da linha neutra de $x = |\epsilon_{cu1}| / (1\% - |\epsilon_{cu1}|) * d$.

Domínio 3: Flexão simples ou composta onde as rectas de deformação giram em torno do ponto B, correspondente ao máximo encurtamento de betão (ϵ_{cu1}). O alongamento das fibras de aço mais traccionadas está compreendido entre 1% e ($\epsilon_{sy} = f_{sd} / E_s$) no caso de barras de armadura e ($\epsilon_{ay} = f_{yd} / E_a$) no caso de fibras do perfil. Se as fibras estão à mesma profundidade este último limite é o maior entre ϵ_{sy} e ϵ_{ay} .

Domínio 4: Flexão simples ou composta onde as rectas de deformação continuam girando em torno do ponto B. O alongamento da fibra de aço mais traccionada está compreendido entre os limites do domínio anterior (ϵ_{sy} ou ϵ_{ay}) do aço.

Domínio 4a: Ocorre só em secções totalmente envolvidas. Flexão composta onde todas as fibras de aço estão comprimidas e existe uma pequena zona de betão em tracção. As rectas de deformação giram em torno de B.

Domínio 5: Compressão simples ou composta onde ambos os materiais trabalham à compressão. As rectas de deformação giram à volta do ponto C, à profundidade de $(1 - \epsilon_{c1} / \epsilon_{cu1})$. A profundidade do eixo neutro está entre $x=h$ e $x=\infty$.

O domínio 5 é típico em pilares se bem que quando há momentos elevados se possa ficar dos domínios 3 em diante, enquanto o domínio 2 é típico de vigas. O domínio 1, tracção simples ou composta, não é tratado neste trabalho.

Como se pretende realizar uma análise global com base em valores de cálculo, as tensões a adoptar nas leis de comportamento das Figuras 2.1 e 2.2 são as de cálculo, obtidas dos valores característicos divididos pelos coeficientes parciais de segurança para materiais. No que respeita ao betão há ainda que substituir o módulo de elasticidade médio E_{cm} pelo módulo de elasticidade de cálculo $E_{cd} = E_{cm} / \gamma_{cE}$ como refere o §5.8.6.(3) do EC2. Assim e como já foi explicado na secção 1.2.3.1 a lei de comportamento do betão é:

$$\sigma_{cd} = -\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} f_{cd} \quad \text{para } \epsilon_{cu1} \leq \epsilon_c < 0$$

$$\sigma_{cd} = 0 \quad \text{para } \epsilon_c \geq 0 \quad (2.1)$$

sendo ε_c a extensão numa fibra de betão, k um parâmetro (expressão 1.14), e $\eta(\varepsilon_c)$ a extensão relativa definida pelas expressões (1.15) e (1.16) respectivamente para curto e longo prazo. Salienta-se a extensão de encurtamento, ε_c , é negativa, assim como as tensões de compressão σ_{cd} . Os valores característicos das propriedades do betão e os coeficientes parciais de segurança que permitem a quantificação dos valores de cálculo estão respectivamente nas Tabela 3.1 e Tabela 2.1N do EC2. O limite de extensão última do betão, ε_{cu1} , e a extensão correspondente à tensão máxima ε_{c1} são dados na Tabela 3.1 do EC2.

O Eurocódigo 2 apresenta a "profundidade do ponto C" (ver Figura 2.3) apenas para diagramas tensão-extensão a usar na verificação de segurança de secções, para efeitos de dimensionamento, valendo:

- (i) $(1 - \varepsilon_{c2} / \varepsilon_{cu2}) \cdot h$ caso se adopte um diagrama parábola-rectângulo (na Figura 2.4), ou
- (ii) $(1 - \varepsilon_{c3} / \varepsilon_{cu3}) \cdot h$, caso se adopte um diagrama bilinear.

Nada se refere para o caso da relação tensão - extensão, da Figura 2.1, usada na análise estrutural cuja "profundidade do ponto C" interessa agora quantificar. Ora ε_{c1} é a extensão associada à tensão máxima do diagrama para análise global (Figura 2.1) e ε_{c2} a extensão associada à tensão máxima do diagrama parábola rectângulo (fim da parábola) da Figura 2.4, e ε_{cu1} e ε_{cu2} são as extensões últimas para ambos os casos. Atendendo ao mesmo significado que estas variáveis têm entre os dois diagramas adoptou-se como profundidade do ponto C, para a análise global, a cota $(1 - \varepsilon_{c1} / \varepsilon_{cu1}) \cdot h$, como mostra a Figura 2.3 e que pode ser comparada com a da Figura 6.1 do EC2.

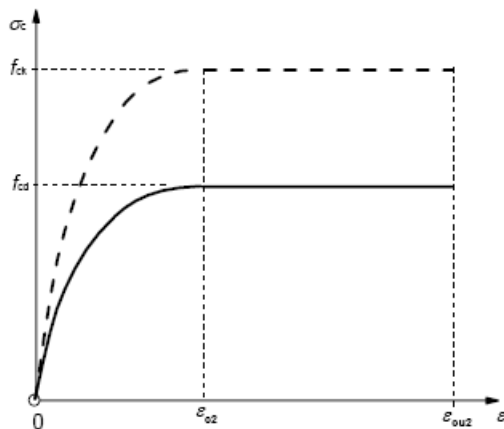


Figura 2.4 – Diagrama parábola rectângulo a usar no dimensionamento de secções a ELU (Figura 3.3-EC2)

Entretanto verifica-se da Tabela 3.1 do EC2 que para o intervalo de classes de betão para estruturas mistas (betão C20/25 a C50/60) que $\varepsilon_{c1} \geq \varepsilon_{c2}$ e $\varepsilon_{cu1} = \varepsilon_{cu2}$. Verifica-se também que a resultante da distribuição de tensões de um diagrama σ - ε parábola rectângulo (Figura 2.4) usado na verificação de resistência (§3.1.7-EC2) é sempre superior à resultante de distribuição de tensões do diagrama σ - ε (Figura 2.1) para a análise não linear de estruturas (§3.1.7-EC2) sendo a maior diferença de 8% para o betão de máxima classe (C50/60). Devido à forma dos diagramas a resultante do primeiro diagrama localiza-se mais alta conferindo um maior braço

para momento. Estes dois aspectos levam a concluir que utilizando o diagrama σ - ε da análise estrutural na verificação de resistência de secções é ligeiramente mais conservativo. Por este motivo as curvas Momento-Curvaturas aqui deduzidas, necessárias para definir a rigidez de flexão, são neste trabalho, também interpretadas como curvas de verificação de resistência da secção à flexão simples e composta (ou flexo-compressão).

A lei de comportamento para os aços da armadura está representada na Figura 2.2 (a) é o diagrama bilinear de cálculo, com um troço linear até à extensão de cedência $\varepsilon_{s1} = f_{sd} / E_s$, e outro troço horizontal de tensão constante limitado à extensão $\varepsilon_{s1.lim} = \varepsilon_{ud} = 1\% \leq 0.9 \varepsilon_{uk}$, que está dentro dos limites da Tabela C1 do Anexo C do EC2.

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s * \varepsilon & \text{para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_{sd} &= \frac{f_{sd}}{E_s} \\ \sigma_s &= f_{sd} & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{sd}, \\ \sigma_s &= -f_{sd} & \text{para } \varepsilon < -\varepsilon_{sd} \end{aligned} \quad (2.2)$$

com, ε a extensão de uma fibra, $E_s=200$ GPa (§3.2.7(4)-EC2) o módulo de elasticidade da armadura, f_{sd} a tensão de cálculo obtida da tensão característica f_{yk} da Tabela C1 do Anexo C do EC2 e $\gamma_{Ms} = 1.15$ (situação de projecto persistente ou transiente) da Tabela 2.1N do EC2.

Para o aço estrutural (ver Figura 1.7.(b)) a lei de comportamento é:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= E_a * \varepsilon & \text{para } |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} &= \frac{f_{yd}}{E_a} \\ \sigma_a &= f_{yd} & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{yd}, \\ \sigma_a &= -f_{yd} & \text{para } \varepsilon < -\varepsilon_{yd} \end{aligned} \quad (2.3)$$

As tensões de cálculo são obtidas com base nas tensões características da Tabela 3.1 do EC3, o módulo de elasticidade é $E_a= 210$ GPa (§3.2.6-EC3) e a extensão limite $\varepsilon_{u,a} = 1\%$, e que cumpre as condições de ductilidade do §3.2.2. do EC3. Conservativamente foi adoptado neste trabalho o coeficiente parcial de segurança $\gamma_a = \gamma_{M0} = 1.1$, com base na antiga norma EC3. De facto o actual EC3 sugere o valor $\gamma_{M0} = 1.0$ devendo contudo ser aprovado por Documento Nacional. A norma EAE sugere o mesmo valor mas o documento base DB-SE-AE, mais recente, refere no artigo 2.3.3 $\gamma_{M0} = 1.05$.

Finalmente com base nos modelos de comportamento dos materiais acima descritos deduz-se um procedimento para determinar as relações Momento - Curvatura na secção. O diagrama de deformações (extensões) da Figura 2.5 representa a secção deslocada em relação à sua posição inicial (linha S-S') que por hipótese é uma superfície que se mantém plana. Esse deslocamento da secção tem dois graus de liberdade, uma translação e uma rotação. É então sempre necessário dois parâmetros de deslocamento (ou variáveis) para definir o estado de deformação da secção.

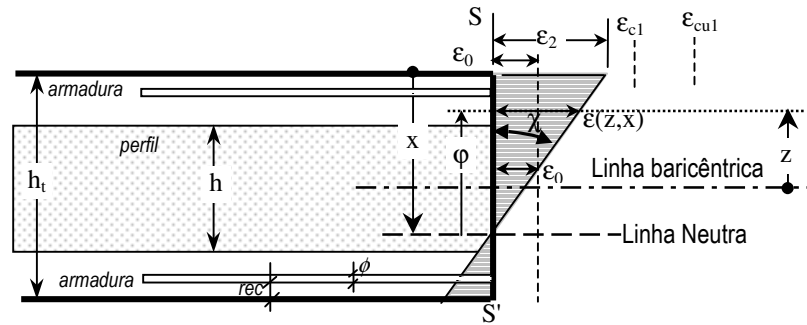


Figura 2.5- Diagrama de extensões de secção bissimétrica do tipo envolvida

Adopta-se para já os parâmetros de deslocamento seguintes:

- ε_2 , a extensão da fibra mais comprimida,
- x , profundidade da linha neutra, medida a partir daquela fibra.

Conhecendo-os deduzem-se as seguintes relações cinemáticas:

$$(i) \text{ a extensão à cota baricêntrica } z, \quad \varepsilon(z, x) = \frac{\varepsilon_2}{x} \left(z + x - \frac{ht}{2} \right) \quad (2.4)$$

$$(ii) \text{ a curvatura da secção:} \quad \chi = \frac{-\varepsilon_2}{x} \quad (2.5)$$

$$(iii) \text{ extensão na fibra inferior de betão:} \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{h_t - x}{x} \right) (-\varepsilon_2) \quad (2.6)$$

$$(iv) \text{ extensão na fibra mais traccionada do perfil:} \quad \varepsilon_{a1} = \left(\frac{h_t}{2} + \frac{h}{2} - x \right) \frac{(-\varepsilon_2)}{x} \quad (2.7)$$

$$(v) \text{ extensão nas armaduras mais tracionadas:} \quad \varepsilon_{s1} = \left(h_t - x - \text{rec} - \phi/2 \right) \frac{(-\varepsilon_2)}{x} \quad (2.8)$$

A primeira relação cinemática (equação 2.4) é muito importante porque em conjunto com as relações constitutivas (2.1) a (2.3) permite determinar a distribuição de tensões normais ao longo da secção. As resultantes dessas distribuições, designadas por esforços internos, são:

$$N = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon(z, x)) dA_c + \int_{A_a} \sigma_a(\varepsilon(z, x)) dA_a + \sum_i \sigma_s(\varepsilon(z, x)) * A_i \quad (2.9)$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon(z, x)) * z * dA_c + \int_{A_a} \sigma_a(\varepsilon(z, x)) * z * dA_a + \sum_i \sigma_s(\varepsilon(z, x)) * A_i * z_i \quad (2.10)$$

sendo as integrais desenvolvidas nas áreas de betão, A_c , e do perfil, A_a , e A_i a área dos varões de armadura e z a coordenada de cada fibra em relação ao baricentro, e estão em equilíbrio com forças externas aplicadas.

Fazendo variar ε_2 e x , dentro dos limites impostos pela Figura 2.3 em cada um dos seus domínios, e colocando (2.4) em (2.9) e (2.10), determina-se o terno ordenado (N, M, χ) através respectivamente das duas últimas expressões e de (2.5).

No entanto, para se obter uma relação directa entre $M-\chi$ para cada nível de "esforço axial aplicado" (N_{axil}), procedeu-se aqui de forma diferente. Fixam-se duas variáveis (mudas) N_{axil} e, ϵ_2 , substitui-se a definição $\epsilon(z,x)$ por $\epsilon(\epsilon_2,x)$ (ver equação (2.4)) nos factores $\sigma_c(\epsilon(z,x))$, $\sigma_a(\epsilon(z,x))$ e $\sigma_s(\epsilon(z,x))$ das igualdades (2.9) e (2.10), e substitui-se N por N_{axil} na (2.9). As equações (2.9) e (2.10) ficam dependentes das duas variáveis mudas N_{axil} e ϵ_2 e da variável livre x :

$$N_{axil} = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_2, x) dA_c + \int_{A_a} \sigma_a(\epsilon_2, x) dA_a + \sum_i \sigma_s(\epsilon_2, x) * A_i \quad (2.11)$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_2, x) * z * dA_c + \int_{A_a} \sigma_a(\epsilon_2, x) * z * dA_a + \sum_i \sigma_s(\epsilon_2, x) * A_i * z_i \quad (2.12)$$

Para cada par de valores conhecidos N_{axil} , e ϵ_2 , procede-se à verificação de equilíbrio da equação (2.11), resolvendo-a em ordem a x , isto é, determinando a profundidade da linha neutra, e calcula-se de seguida o momento de equilíbrio com a expressão (2.12). Obtém-se o terno ordenado (N_{axil}, M, χ) sendo χ calculado de (2.5) que também depende de x .

Neste caso a variável "esforço axial aplicado", N_{axil} , vai de zero até 95% do valor plástico resistente da secção, $(95\%N_{pl.Rd})$. (Se $N_{axil} = N_{pl.Rd}$ não é possível deduzir qualquer relação $M - \chi$ (objectivo deste algoritmo) porque a secção está esgotada).

Para cada nível de esforço axial (N_{axil}), e se a secção estiver a trabalhar nos domínios 2 a 4 faz-se variar a extensão na fibra mais comprimida ϵ_2 , desde ϵ_0 até à extensão ultima do betão, ϵ_{cu1} , como mostra a Figura 2.5. A extensão ϵ_0 , constante em toda a secção, é aquela que equilibra o esforço axial N_{axil} se este actuar isolado, e é inferior ou igual à extensão de tensão máxima máxima ϵ_{c1} (ver Figura 2.1 e 2.5).

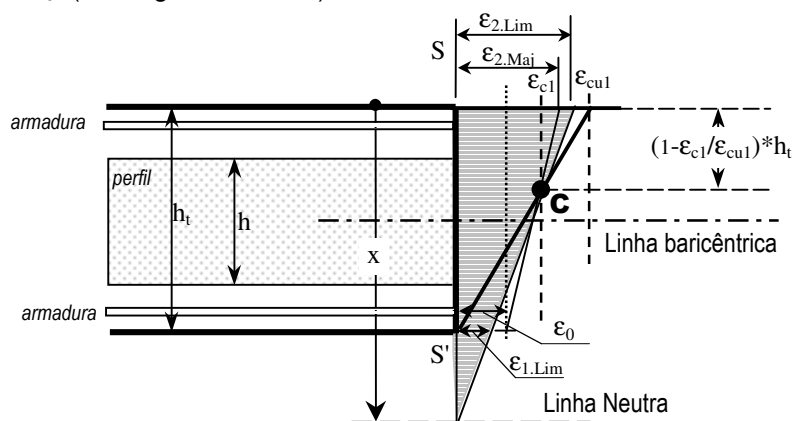


Figura 2.6- Extensões limites no domínio 5

Se a secção estiver a trabalhar no domínio 5, ϵ_2 varia entre ϵ_0 e uma extensão limite $\epsilon_{2,lim}$ (Figura 2.6) para se garantir que a recta de deformação gira em torno do ponto C.

De seguida validam-se as extensões máximas nas fibras dos materiais. Este procedimento é feito a posteriori ao cálculo de x , e é consequência do facto de se ter feito variar N_{axil} e ε_2 em vez, de variar directamente x e ε_2 . A validação consiste em determinar as extensões com as expressões (2.6) a (2.8) e compará-las com os correspondentes valores limites últimos. Estes são $\varepsilon_{a1.lim}=+1\%$, para o perfil à tracção, $\varepsilon_{s1.lim}=+1\%$, para a armadura à tracção e ε_{cu1} para a fibra mais comprimida de betão e nos domínios 2 a 4. As extensões de compressão para os aços não são condicionantes porque são muito superiores às do betão, mesmo em secções do tipo cheia. Porém, para o domínio 5 é necessário garantir que o valor arbitrado ε_2 não ultrapassa a extensão limite $\varepsilon_{2.Lim}$ (Figura 2.6). Isto é feito indirectamente impondo um limite de encurtamento à fibra inferior do betão, $\varepsilon_{1.Lim}$, e verificando se o encurtamento calculado por (2.6), ε_1 satisfaz tal limite, que vale:

$$\varepsilon_{1.Lim} = \varepsilon_{c1} - \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cu1} - \varepsilon_{c1}} \right) * (\varepsilon_2 - \varepsilon_{c1}) \quad \text{se } \varepsilon_2 < \varepsilon_{c1} \quad (2.13.a)$$

$$\varepsilon_{1.Lim} = \varepsilon_{c1} \quad \text{se } \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{c1} \quad (2.13.b)$$

Se $\varepsilon_{1.Lim} \leq \varepsilon_1$ então todas as tensões no betão estão validadas no domínio 5 (e de forma redundante também nos domínios 2 a 4, (combinar Figuras 2.6 e 2.3)). Caso contrário ficamos a saber que a extensão arbitrada ε_2 está fora do domínio 5, e que por isso se atingiu a rotura. O processo acabaria aqui sendo este o último ponto (não válido) da curva deduzida. Vamos substituir esse ponto “ ε_2 não válido” por um majorante (as extensões de compressão são negativas) da extensão limite (que de facto não conhecemos). Esse valor, deduzido tendo em conta a cota ε_0 na Figura 2.6, é:

$$\text{novo } \varepsilon_{2.Lim} = \varepsilon_{2.Maj} = \max \left\{ (\varepsilon_{c1} - \varepsilon_0) \frac{\varepsilon_{cu1} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c1}} + \varepsilon_{c1} ; \varepsilon_{cu1} \right\}, \quad (2.14.a,b)$$

Como o processo é iterativo, verifica-se se o ponto anterior, $\varepsilon_{2,j-1}$, cumpre esse limite, assumindo-se como novo $\varepsilon_{2.Lim}$ o menor encurtamento entre $\varepsilon_{2,j-1}$ e $\varepsilon_{2.Lim}$ da expressão (2.14). Geram-se novos valores de $\varepsilon_{2,j}$, igualmente espaçados entre todos os pontos, e dentro do intervalo $[\varepsilon_0, \varepsilon_{2.Lim}]$.

Tendo-se validado as extensões nos materiais, basta agora determinar:

(i) o momento resistente, M , associado aquele nível de esforço axial (N_{axil}) e de deformação imposta (ε_2), utilizando a igualdade (2.12) e,

(ii) determinar a curvatura, χ , com a igualdade (2.5).

É então possível, para cada nível de esforço axial N , desenhar uma curva M - χ , limitado apenas por um valor superior da curvatura χ_{lim} , que corresponde ao colapso da secção (Figura 2.7). As curvas M - χ deduzidas para certo nível de esforço axial (N_1, N_2, N_3 , etc.) permitem o cálculo directo rigidez de flexão associado a determinada curvatura (digamos χ_a), bastando para tal

determinar a inclinação do troço da curva onde se localiza essa curvatura, χ_a . Se o esforço axial N_j for diferente dos pré-estabelecidos para as curvas, basta encontrar as duas curvas mais próximas, majorante (N_1) e minorante (N_2) e realizar uma interpolação linear como mostra a Figura 2.7. Mede-se desta forma o comportamento materialmente não linear das secções (a sua rigidez de flexão) para qualquer N_j e χ_a .

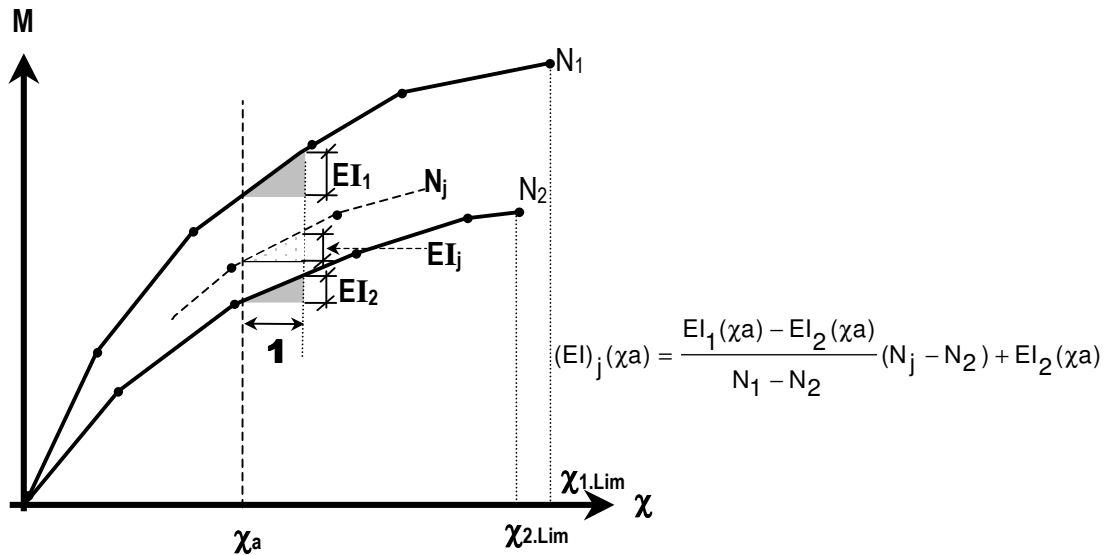


Figura 2.7- Determinação da rigidez de flexão directa e por interpolação linear.

Como limitação deste método, indica-se que não é possível avaliar casos para os quais $N_{axil} > 95\%N_{pl,Rd}$, mas tal não é muito grave visto que para esse nível de esforço axial haver pouca reserva de resistência ao momento flector.

2.3- Análises de Estabilidade

2.3.1- Análises Lineares e Não Lineares de Estabilidade

Genericamente falando pode definir-se como "comportamento de uma estrutura" submetida a um conjunto de acções a relação que existe entre os valores dessas acções e os efeitos por elas provocado. A determinação desse comportamento requer a consideração conjunta das seguintes equações:

- (i) equações de equilíbrio - envolvendo forças aplicadas, esforços e tensões
- (ii) relações constitutivas (relações tensões - deformações) - envolvem esforços ou tensões e deformações e descrevem o comportamento do material que constitui a estrutura
- (iii) relações cinemáticas (relações deformações - deslocamentos) envolvem deformações e deslocamentos;
- (iv) equações de compatibilidade - envolvendo deslocamentos e destinadas a garantir que a estrutura respeita as ligações entre elementos e entre estes e o exterior [15].

Dependendo do problema específico que se pretende estudar, adoptando hipóteses diversas para as equações acima, obtêm-se análises estruturais diferentes. A análise estrutural mais simples está associada ao comportamento linear, designa-se por "análise linear de estruturas" ou, de acordo com a nomenclatura dos Eurocódigos por "análise linear de 1ª ordem", e baseia-se na hipótese de todas as equações serem lineares, isto é, pressupõe:

- (i) linearidade física ou material - relações constitutivas lineares, isto é, materiais elásticos lineares;
- (ii) linearidade geométrica - equações de equilíbrio escritas na configuração indeformada da estrutura.

No entanto numa análise de 1ª ordem (linear ou não linear) não permite identificar fenómenos de instabilidade, o que resulta do facto da natureza destes fenómenos ser geometricamente não linear. Qualquer "análise de estabilidade" ou de "2ª ordem" envolve obrigatoriamente:

- (i) o estabelecimento de equações de equilíbrio na configuração deformada e/ou,
- (ii) a consideração de relações cinemáticas não lineares.

Assim a análise de estabilidade inclui sempre efeitos geometricamente não lineares e por isso são sempre análises não lineares. Consoante o nível de não linearidade geométrica nelas incorporado existem vários tipos de análise de estabilidade nomeadamente "análises lineares de estabilidade" e "análises não lineares de estabilidade" [15], e que no contexto de vigas colunas as referidas análises estão respectivamente relacionadas com a "teoria linearizada de viga - coluna" e a "teoria não linear de viga - coluna" [17].

Define-se como "viga-coluna" uma barra sujeita a esforços axiais de compressão e a momentos flectores em torno do eixo de maior inércia. São por isso elementos estruturais onde são

potenciais os fenómenos de encurvadura por flexão e/ou torção e encurvadura lateral. No entanto, dada a compacidade das secções mistas aqui tratadas os fenómenos de encurvadura por torção e encurvadura lateral não podem ocorrer.

As equações diferenciais governativas para a análise de 2ª ordem de uma viga coluna com encurvadura por flexão podem ser formuladas com base no princípio dos trabalhos virtuais, adoptando as hipóteses usuais da teoria clássica de vigas (teoria de Euler Bernoulli) para as secções transversais. Nesse processo são deduzidas equações de equilíbrio consistentes com equações de compatibilidade e adoptam-se relações cinemáticas não lineares, nomeadamente, a componente axial da relação deformação - deslocamento do tensôr de Green (num sistema cartesiano bidimensional):

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (a)$$

sendo u e v os deslocamentos longitudinais e transversais de um ponto da secção transversal (Figura 2.8).

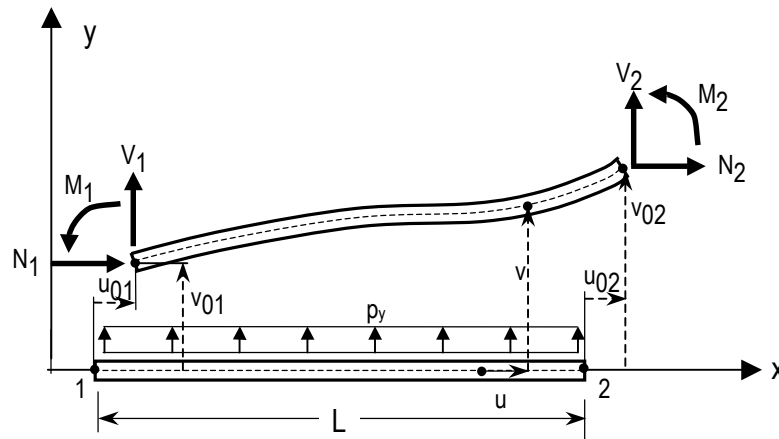


Figura 2.8 - Aplicação do P.T.V ao equilíbrio da barra

Adoptando para a viga coluna a hipótese de "pequenas deformações e rotações moderadas" a expressão anterior é simplificada para:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (b)$$

Expressa-se agora (b) em termos dos deslocamentos u_0 e v_0 do centróide da secção, ficando:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \quad (c)$$

que é a relação deformação - deslocamento usualmente aplicada na análise de elementos finitos de 2ª ordem para pórticos planos [17]. De seguida usam-se a deformação ϵ_{xx} , as componentes σ_{xx} , as forças externas e os deslocamentos virtuais na equação de equilíbrio da viga coluna escrita em termos do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta \Pi = \int_{0A}^L \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dA dx - \int_0^L p_y \delta v_0 - [n_x (N_i \delta u_{0i} + V_i \delta v_{0i} + M_i \delta v_{0i})]_1^2 = 0 \quad (d)$$

para a qual $\int_A dA$ é a integração sobre a secção transversal, $\int_0^L dx$ é a integração sobre o comprimento da barra, n_x tem valor -1 e 1 respectivamente sobre os nós 1 e 2, N_i , V_i , e M_i são respectivamente os esforços axiais, esforço transversal e momento nos nós, e $\delta \varepsilon_{xx}$ a deformação virtual que é a variação de ε_{xx} (c):

$$\delta \varepsilon_{xx} = \delta u_0' - y \delta v_0'' + v_0' \delta_0' \quad (e)$$

Operando sobre esta equação obtêm-se as seguintes definições, já conhecidas, para os esforços internos:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad M = \int_A \sigma_{xx} * y dA \quad (f),(g)$$

assim como as equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (2.15,h)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + N \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + p_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(EI \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + p_y = 0. \quad (2.15,i,j)$$

Substituindo (c) em (f) e (g) obtêm-se as relações entre esforços e deslocamentos:

$$N = EA \left[u_0' + \frac{1}{2} (v_0')^2 \right], \quad M = -EI v_0'' \quad (k),(l)$$

O efeito de "bowing" ou encurtamento de curvatura está incluído na equação (k) a qual está associada à "teoria não linear de vigas colunas" (ou análise não linear de estabilidade) e da qual se obtém uma matriz de rigidez tangente que é simétrica e consistente com a Teoria de Elasticidade. Esta matriz é adequada para estruturas que apresentem um comportamento de pré-encurvatura não linear como por exemplo os arcos abatidos, e por isso está fora do âmbito deste trabalho.

Se omitir a parcela termo não linear $(1/2 (v_0')^2)$ da expressão (k) esta simplifica-se para:

$$N = EA * u_0', \quad (m)$$

e o efeito de "bowing" passa a ser ignorado na análise. Devido a esta simplificação é fácil a dedução da matriz de rigidez mas esta torna-se assimétrica a não ser que a deformação axial de pré - encurvatura ou o esforço axial seja ignorado. Aliás observa-se que os modos de instabilidade são caracterizados por deslocamentos axiais nulos o que significa que não é necessário tais deslocamentos para calcular as cargas críticas (de bifurcação), admitindo-se assim a indeformabilidade axial, $\varepsilon_{xx}=0$ e $EA=\infty$. Isto está contra a Teoria da Elasticidade no sentido estrito. Assim a teoria linearizada não pode simular o comportamento de encurvatura tendo em atenção só o deslocamento axial necessitando de outros graus de liberdade como rotações e/ou deslocamentos transversais. A teoria que adopta esta simplificação é a "teoria

linearizada de viga coluna" e é a mais frequentemente usada (em pórticos / vigas-colunas). Verifica-se que apresenta um comportamento linear de pré-encurvadura e por isso ainda pode ser usada no estudo de vigas colunas, pelo que será usada neste trabalho.

2.3.1.1- Matriz de Rigidez Total

Da resolução da equação de equilíbrio com base nos trabalhos virtuais (d) e ignorando o efeito de "bowing" obtém-se uma equação matricial de equilíbrio que se pode escrever:

$$[K^t] * \{q\} = \{F\} + \{F_v\} \quad (2.16)$$

em que $[K^t]$ é a matriz de rigidez total (linear e geométrica), $\{F_v\}$ o vector de forças nodais equivalente a forças distribuídas, $\{F\}$ o vector de forças nodais aplicadas e/ou de interacção, em coordenadas generalizadas, correspondentes aos deslocamentos $\{q\}$ mostrados na Figura 2.9.

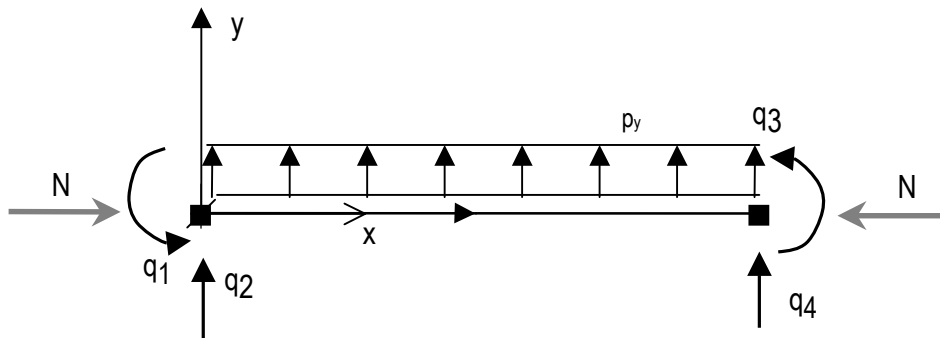


Figura 2.9 - Graus de liberdade do elemento viga-coluna [15]

A matriz de rigidez e o vector de forças equivalente à carga de vão p_y apresentam-se nas expressões (2.17) e (2.19).

Resultados idênticos para a matriz de rigidez são obtidos [15] numa formulação que determina a energia potencial do sistema (V), e cuja condição de equilíbrio é estabelecida pelo Princípio de Estacionaridade da Energia Potencial, ($\partial V / \partial q_i = 0$). A energia potencial é escrita em termos dos graus de liberdade q_i , aplicando o método de Rayleigh e adoptando uma certa configuração aproximada para a deformada da estrutura (idealmente aquela que corresponde à solução da equação diferencial (2.15,j)).

$[K^t]$: matriz de rigidez total:

$$[K^t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 * \phi_3 & 6 * \phi_2 / L & 2 * \phi_4 & -6 * \phi_2 / L \\ & 12 * \phi_1 / L^2 & 6 * \phi_2 / L & -12 * \phi_1 / L^2 \\ & & 4 * \phi_3 & -6 * \phi_2 / L \\ \text{Simétrica} & & & 12 * \phi_1 / L^2 \end{bmatrix} \quad (2.17.a)$$

Os coeficientes desta matriz estão afectados pelas funções ϕ_i , designadas por *funções de estabilidade*. As que estão aqui presentes são válidas para N em compressão (positivo) e N=0 e são:

- se $N > 0$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{\beta^2}{3 * (1 - \beta * \cotg(\beta))}, & \phi_1 &= \beta * \phi_2 * \cotg(\beta), \\ \phi_3 &= \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta * \cotg(\beta), & \phi_4 &= \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta * \cotg(\beta) \end{aligned} \quad (2.17.b,c,d,e)$$

- se $N = 0$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 1 \quad (2.17,f)$$

com:

$$\beta = \frac{kL}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_E}} \quad (2.17,g,h,i)$$

e N_E (ou P_E) a Carga Crítica de Euler de uma barra biarticulada de comprimento L

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.18)$$

As funções de estabilidade tendem para 1 quando N tende para zero, mas na proximidade de zero as funções tornam-se indefinidas e por isso numericamente instáveis pelo que certos autores [17,18] aconselham o seu desenvolvimento em série para evitar erros numéricos. Neste trabalho é desnecessário fazê-lo porque como N aumenta incrementalmente, ou é exactamente zero (onde $\phi_i=1$) ou suficientemente afastado de zero para não criar este problema. Existem também funções de estabilidade para N à tracção e que não são aqui tratadas visto não se prever esse tipo de esforço neste trabalho.

Vector de forças equivalente à carga uniforme distribuída:

$$\{F_v\}^T = \{F_1, F_2, F_3, F_4\} \quad (2.19,a)$$

$$F_1 = \frac{pl^2}{12} * s, \quad F_2 = \frac{pl}{2}, \quad F_3 = -F_1, \quad F_4 = F_2 \quad (2.19,b,c,d,e)$$

$$s = \left(\frac{3 * (\tan\beta - \beta)}{\beta^2 * \tan\beta} \right) \quad \text{para } N > 0, \text{ e, } \quad s = 1, \quad \text{para } N = 0.$$

Pode verificar-se que quando N tende para zero os elementos da matriz se reduzem aos elementos de uma matriz de uma viga da teoria linear de estruturas. A presença das funções de estabilidade faz com que os efeitos geometricamente não lineares apareçam para N superior a zero. Por este motivo a matriz de rigidez total é muitas vezes apresentada como a sobreposição de uma matriz de rigidez linear (típica de uma viga) com uma outra matriz de rigidez geométrica que só tem em consideração os efeitos geometricamente não lineares. Este aspecto torna-se

evidente se “linearizarmos” a matriz de rigidez total, ou seja, derivarmos cada uma as funções

de estabilidade em ordem a N , $\left. \begin{array}{l} \phi_i = \frac{d\phi_i}{dN} \\ N=0 \end{array} \right\}$ que substituídos em (2.17a) fica:

$$[K_t]_{\text{aprox}} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 6/L & 2 & -6/L \\ & 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 \\ & & 4 & -6/L \\ \text{Simétr.} & & & 12/L^2 \end{bmatrix} - N^* \begin{bmatrix} 2L/15 & 1/10 & -L/30 & -1/10 \\ & 6/(5L) & 1/10 & -6/(5L) \\ & & 2L/15 & -1/10 \\ \text{Simetr.} & & & 6/(5L) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$[K^t]_{\text{aprox}} = [[K] - N^* [G]]$: matriz de rigidez total aproximada

$[K]$: matriz de rigidez linear

$[G]$: matriz de rigidez geométrica

No âmbito da “teoria linear de estabilidade” a matriz definida em (2.17) designa-se por matriz de rigidez total *exacta* e a definida por (2.20) por matriz de rigidez total *aproximada*. Como se constata a primeira é altamente não linear em N , enquanto a segunda, depende linearmente de N e por isso exige uma maior discretização das barras (pelo menos 3 troços) para se obter um grau de precisão aceitável [15]. Como já se referiu neste trabalho será usada a matriz de rigidez “exacta” para N superior ou igual a zero.

2.3.1.2 - Curvatura Elementar

A rigidez de flexão EI numa secção é obtida das relações Momento-Curvatura, explicadas na secção 2.2, em função da curvatura da secção, a qual depende, como se pretende agora mostrar, dos deslocamentos nodais da barra (ou troços de barra).

Como vimos, para a hipótese de pequenos deslocamentos e rotações moderadas, e desprezando a deformação axial das barras, a equação diferencial de equilíbrio da barra era dada pelo conjunto das duas expressões (2.15.h) e (2.15.j). Admitamos que não existe carga de vão p_y . Por simplicidade de notação adopte-se $v(x) = v_0(x)$ como representação dos deslocamentos transversais do centróide da secção, a equação (2.15.j) fica:

$$EI \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

cuja solução é a equação:

$$v(x) = p_1 * \sin(kx) + p_2 * \cos(kx) + p_3 * x + p_4 \quad (b)$$

com $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$. (c)

As constantes p_1 a p_4 são determinadas a partir das seguintes condições de fronteira, em que q_1 a q_4 são os deslocamentos nodais do troço (ver Figura 2.9):

$$v(0) = q_2 \quad v'(0) = q_1 \quad v(L) = q_4 \quad v'(L) = q_3. \quad (d)$$

Resulta um sistema de 4 equações que é resolvido em ordem às constantes p_1 a p_4 que são colocadas em (b) de onde resultará a seguinte equação da linha elástica:

$$v(x) = \psi_1 * q_1 + \psi_2 * q_2 + \psi_3 * q_4 + \psi_5 * q_5 \quad (2.21,a)$$

dependente dos deslocamentos nodais q_i e das seguintes funções de forma [15]:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{A-B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{C}{kA} \cos(kx) + \frac{B}{A}x - \frac{C}{kA}, \\ \psi_2(x) &= \frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) + \frac{B}{A} \cos(kx) - \frac{k\text{sen}(kL)}{A}x + \frac{A-B}{A} \\ \psi_3(x) &= -\frac{B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{D}{kA} \cos(kx) + \frac{B}{A}x - \frac{D}{kA} \\ \psi_4(x) &= -\frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) - \frac{B}{A} \cos(kx) + \frac{k\text{sen}(kL)}{A}x + \frac{B}{A} \end{aligned} \quad (2.21.b)$$

e das constantes:

$$A = 2(\cos(kL) - 1) + kL\sin(kL), \quad B = \cos(kL) - 1, \quad C = kL\cos(kL) - \sin(kL), \quad D = \sin(kL) - kL. \quad (2.21,c)$$

Atendendo ao referencial adoptado, ao sentido positivo do deslocamento transversal e rotação de um ponto do eixo da viga, a curvatura é positiva e dada por [19]:

$$\chi(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (2.22,a)$$

Introduzindo (2.21.a) em (2.22.a) obtêm-se as curvaturas em qualquer secção da barra em função dos deslocamentos nodais:

$$\chi(x) = \psi''_1 * q_1 + \psi''_2 * q_2 + \psi''_3 * q_3 + \psi''_4 * q_4 \quad (2.22,b)$$

$$\begin{aligned} \psi''_1(x) &= \frac{(A-B)k}{A} \text{sen}(kx) + \frac{Ck}{A} \cos(kx), \\ \psi''_2(x) &= \frac{k^2\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) + \frac{Bk^2}{A} \cos(kx) \\ \psi''_3(x) &= \frac{-kB}{A} \text{sen}(kx) + \frac{Dk}{A} \cos(kx) \\ \psi''_4(x) &= \frac{-k^2\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) - \frac{Bk^2}{A} \cos(kx) \end{aligned} \quad (2.22.c)$$

com A,B,C e D dado por (2.21,c).

De (2.22,b) se verifica que a curvatura ao longo de um troço (ou barra) é a combinação linear das segundas derivadas das funções de forma, $\psi_i(x)$, em que as constantes de ponderação são os deslocamentos nodais q_i .

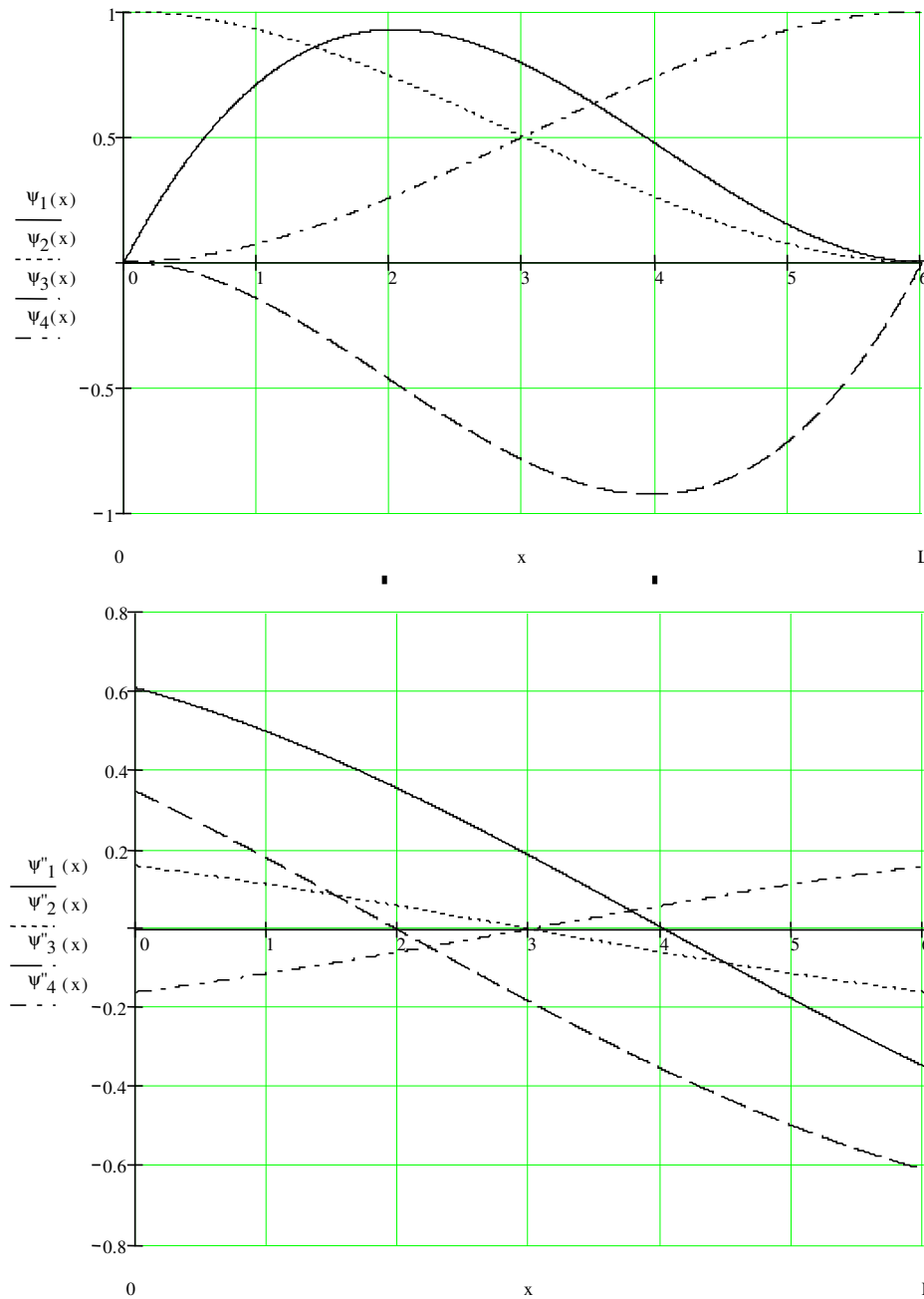


Figura 2.10- Funções de forma e suas segundas derivadas para $N/N_{cr} = 0.25$

Verifica-se entretanto o seguinte. Numa barra bi - articulada de comprimento L com um só troço, apesar dos termos senoidais nas segundas derivadas das funções de forma (expressões 2.22.b) observa-se que (ver Figura 2.10) :

(i) as funções $\psi''_i(x)$ que estão associadas a deslocamentos transversais são lineares e independentes de N,

(ii) as funções $\psi''_i(x)$ que estão associadas a rotações são (ii.1) praticamente lineares para $N < 0.25 N_{cr}$, (ii.2) são progressivamente não lineares para valores $N > 0.25 N_{cr}$,

(iii) apresentam em geral valores máximos nas secções extremas, excepto as associadas a graus de liberdade de rotação ($\psi''_1(x)$, $\psi''_3(x)$) para $N > 0.5 N_{cr}$.

Contudo, para rotações pequenas ($\theta < 0.1$ rad) o efeito não linear destas últimas funções fica atenuado de tal forma que o resultado da combinação das referidas funções, função curvatura ($\chi(x)$), é praticamente linear, apresentando máximos nas secções extremas.

Veremos que para a implementação do Método Geral é conveniente atender à variação da rigidez da barra (EI) ao longo do seu comprimento, o que só é possível fazer com a discretização da barra em troços. Cada um deles fica com uma rigidez de flexão constante, que pode ser assumida como a rigidez média no troço, a qual pode ser determinada com base na curvatura média do troço atendendo às relações rigidez-curvatura conhecidas da secção 2.2. Estas são as tangentes às curvas Momento-Curvatura.

Imagine-se agora que uma barra biarticulada de comprimento L está subdividida em dois troços iguais e que o esforço axial N está próximo da carga crítica da barra, $N \approx N_{cr,barra}$, ($N_{cr,barra} = \pi^2 EI / L^2$) valor que não pode ser ultrapassado sem que ocorra colapso por encurvadura. Como cada troço tem um comprimento de metade do comprimento da barra a sua carga crítica é quatro vezes maior, $N_{cr,troço} = 4 * N_{cr,barra}$, e conseqüentemente a relação $N / N_{cr,troço}$ fica na ordem de 0.25, relação para a qual, como se viu acima, as curvaturas são praticamente lineares. Se a evolução das curvaturas é praticamente linear, a "curvatura média" é obtida com base na média dos módulos das curvaturas de apenas duas secções no troço. Estas são as de extremidade e podem ser referidas como secções críticas. É de salientar que, quanto mais troços houver, a relação $N / N_{cr,troço}$ se reduz quadraticamente o que se traduz por uma melhor "linearização" das curvaturas ao longo do troço. As condições de fronteira da barra também alteram aquela relação mas a sua influência torna-se pequena e desprezável com o aumento do número de troços.

Na equação diferencial (a) adoptou-se $p_y = 0$, ou seja, não foi considerada a possibilidade de haver cargas de vão no troço (como as que simulam as imperfeições geométricas) para efeito do cálculo de curvaturas. Por isso as conclusões acima tiradas quanto ao número de secções mínimo para avaliação da curvatura média ficam de certo modo goradas. Este aspecto pode merecer um estudo mais rigoroso mas atendendo a limites de tempo achou-se não prioritário.

O aumento de precisão da determinação da rigidez de flexão ao longo da barra deve fazer-se sobretudo com o aumento do número de troços do que com o aumento de secções em cada troço.

2.3.2- Âmbito de Aplicação da Análise Linear de Estabilidade

A análise linear de estabilidade só pode ser aplicada em sistemas com estados lineares de pré-encurvadura onde, em regime elástico linear, (i) os deslocamentos, tensões e deformações variam ao longo da trajectória fundamental linearmente com o parâmetro de carga λ , e (ii) a carga crítica de bifurcação pode ser determinada pela resolução de um problema de valores e vectores próprios [15]. O parâmetro de carga λ afecta todo o carregamento..

Os sistemas estruturais que, em regime elástico linear, cumprem os requisitos acima, são as colunas. Estas apresentam um tipo de instabilidade designado por *bifurcacional*. Quer dizer que se traçar a curva carga-deslocamento, para uma coluna ideal (sem imperfeições) antes de se atingir a carga crítica os deslocamentos transversais à barra são nulos. A trajectória descrita designa-se por trajectória fundamental e é estável. Mas ao ultrapassar essa carga crítica, estes deslocamentos passam a observar-se para um lado ou para outro da sua configuração inicial, ou seja, ocorre uma bifurcação de equilíbrio, para uma trajectória de pós-encurvadura que também é estável. Porém se aumentar a carga para além da carga crítica e se se obrigar a barra a prosseguir pela trajectória fundamental, este estado é instável, pelo que a barra terá potencial tendência em apresentar um deslocamento transversal para a trajectória de pós-encurvadura. O que se verifica na prática é que os deslocamentos apresentados sobre a trajectória de pós-encurvadura, logo após a carga crítica, aumentam abruptamente para valores excessivamente altos, com a carga aplicada, o que conduz à imediata rotura da coluna. Diz-se que a coluna não apresenta reserva de resistência no regime de pós-encurvadura, e por isso, para efeitos práticos não interessa muito estudá-la no domínio de pós-encurvadura.

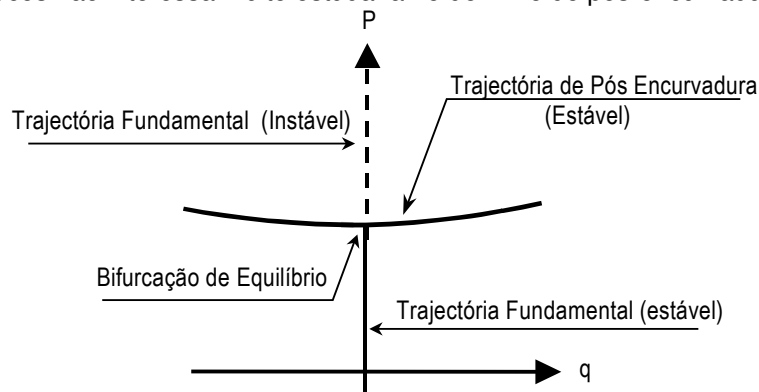


Figura 2.11 – Instabilidade bifurcacional

Existem outros sistemas estruturais, com comportamento elástico linear, para os quais o estado de pré-encurvadura tem que ser obrigatoriamente representado pela análise não linear de estabilidade. Tais sistemas são os arcos, as calotes esféricas, barras em V invertido com relação altura (h) vão (L) muito pequeno ($h/L < 200$) e sujeitos à compressão. Estes sistemas apresentam um tipo de instabilidade designada por *instabilidade por ponto limite* ou por “*snap-through*” (ver Figura 2.12.b)). A trajectória fundamental de equilíbrio é não linear e, quando se

atinge o ponto limite, se a carga for aumentada a estrutura “salta” dinamicamente para a configuração afastada e estável, ponto C da Figura 2.12.a).

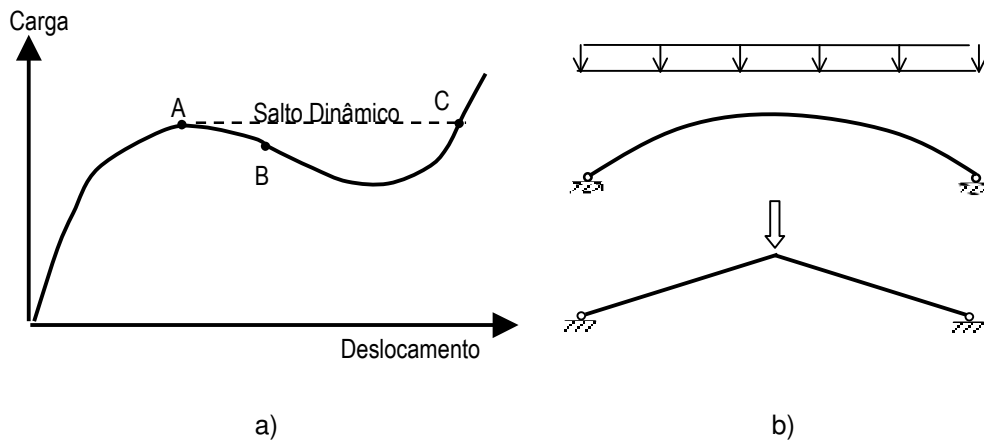


Figura 2.12- Instabilidade por ponto limite

Em alguns casos a diferença entre as duas teorias, linear e não linear de estabilidade, pode ser significativa para comportamentos críticos tais como bifurcação e carga limite de instabilidade. No entanto tais diferenças são desprezáveis para a maioria das análises de projecto de pórticos rectangulares para os quais se obtêm resultados satisfatórios. Para além disso, Chen e Toma [17], mostram num exemplo que também para uma coluna em consola carregada por um momento na extremidade (e à compressão) que os resultados entre a teoria linearizada e a não linear são coincidentes durante a trajectória fundamental de pré encurvadura e na vizinhança da carga crítica.

A vantagem da teoria não linear de estabilidade é ser mais abrangente, isto é, ser válida para o regime de pré-encurvadura para o início do regime de pós-encurvadura de colunas e arcos, embora a sua matriz de rigidez, vector de forças equivalente a cargas de vão e equação de equilíbrio sejam bem mais complexos.

Ambas as teorias foram aqui abordadas para o caso de pequenas deformações e rotações moderadas, como as que se observam em pórticos. Para tratar de casos com rotações muito grandes ambas as teorias ainda podem ser aplicadas, embora aproximadamente, se usadas dentro de uma formulação co-rotacional [17].

Conclui-se portanto que (i) para colunas uma “análise linear de estabilidade” é suficiente para a análise da fase de pré-encurvadura incluindo a vizinhança do ponto de bifurcação, e (ii) para arcos a “análise não linear de estabilidade” é imprescindível na fase de pré-encurvadura sendo que para a fase de pós-encurvadura afastada do ponto limite seja necessário uma “análise não linear de encurvadura” com base nos grandes deslocamentos.

Apesar das reservas acima descritas, mas: (i) por ser suficiente para a análise de pré - encurvadura de colunas, (ii) devido à sua maior simplicidade, e (iii) por ser comum a sua utilização, adopta-se neste trabalho a “teoria linear de estabilidade” (ou “teoria linearizada de vigas colunas”), e por conseguinte a matriz de rigidez K^t definida por (2.17) para N nulo ou em compressão.

2.3.3- Influência das Imperfeições, Cargas Transversais e Cedência do Material

O comportamento da coluna ideal, isto é, sem imperfeições, e sujeita apenas a carga axial, com comportamento material elástico linear e de tensão de cedência infinita foi mostrada na Figura 2.11.

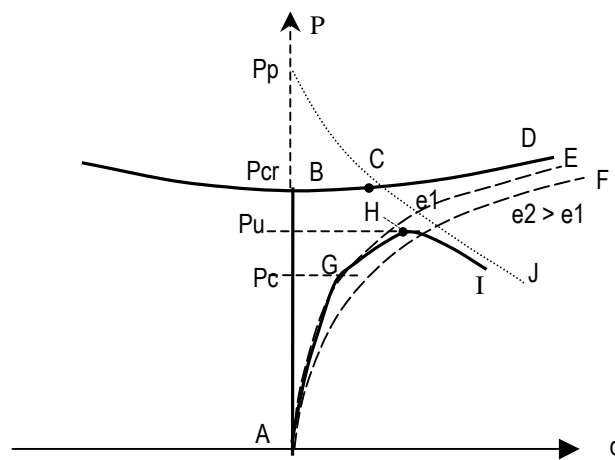


Figura 2.13- Efeito das imperfeições

No caso de colunas reais existem imperfeições traduzidas pela falta de rectilinearidade da barra, aplicação excêntrica accidental da carga, tensões residuais, etc, fazem com que o seu comportamento se afaste do problema antes tratado. Havendo uma imperfeição traduzida por uma excentricidade e_1 , numa coluna axialmente comprimida a sua resposta ao acréscimo de compressão é mostrada pela curva AE da Figura 2.13, a qual é assintótica à trajectória de pós - encurvadura da coluna ideal (curva BD), ou seja, ao nível da carga crítica elástica de bifurcação. Salienta-se que a carga crítica P_{cr} depende das condições de apoio da viga coluna e que obviamente será igual à carga crítica de Euler se barra for bi-articulada.

Quanto maior a excentricidade ($e_2 > e_1$) maiores deformações ocorrem para o mesmo nível de carga axial, mas a carga máxima continua a ser assintótica à carga crítica (de bifurcação).

Caso houvesse cargas transversais aplicadas que fossem constantes ou directamente proporcionais à compressão axial, o comportamento seria idêntico ao da existência de imperfeições, e os seus efeitos somar-se-iam pelo que as curvas se afastariam mais da trajectória fundamental (AB).

Se a carga transversal aumentar para um esforço axial constante (inferior à carga crítica), a relação carga deslocamento é linear, se bem que os incrementos de deslocamento sejam superiores para níveis de esforço axial maior. A principal consequência deste facto é que o princípio da sobreposição de efeitos (de cargas transversais) é válido desde que o esforço de compressão (constante) seja aplicado conjuntamente com cada uma das cargas transversais a combinar [15].

Em regime elásto-plástico, enquanto as tensões forem inferiores às de cedência a barra acompanha a curva elástica corresponde ao seu nível de imperfeições (e1 por exemplo na Figura 2.3). Logo que uma fibra entre em cedência (ponto G) há um decaimento da curva carga - deslocamento face à anterior e atinge-se um ponto máximo (ponto H), a carga última, P_u . A parte descendente desta curva é assintótica à curva de descarregamento plástico (curva Pp-J).

Algumas conclusões se podem tirar desta breve abordagem:

- (i) – Em regime elástico a carga crítica não depende do nível de imperfeições nem das cargas transversais aplicadas (proporcionais a N), e é assintótica à carga crítica;
- (ii) Em regime elástico, para o mesmo nível de esforço axial, as deformações são maiores quanto maior as imperfeições ou cargas transversais;
- (iii) Em regime elásto-plástico a presença de imperfeições e/ou de cargas transversais antecipa a cedência e baixa o valor da carga última;
- (iv) A carga última em regime elásto-plástico é sempre inferior à carga crítica elástica.

2.3.4- Cálculo da Carga Crítica e Carga Última

Se parametrizar a combinação de acções da estrutura pelo parâmetro de carga λ os esforços axiais virão afectados por esse parâmetro e consequentemente coeficientes da matriz de rigidez na sua parcela geométrica. A carga crítica, λ_{cr} , é o menor valor próprio da matriz de rigidez total, e corresponde à menor raiz da equação característica:

$$\left[\left[K^t \right] \right] = 0 \quad (2.23)$$

a qual é altamente não linear em λ se adoptar a matriz de rigidez exacta (expressão (2.17)). Esta raiz, λ_{cr} , só pode ser determinada numericamente usando, por exemplo, o método da falsa posição e ainda sabendo que $\left[\left[K^t(\lambda = 0) \right] \right] > 0$ [20]. Se adoptar a matriz de rigidez total linearizada (expressão 2.20) a equação característica é um polinómio de grau n, sendo n igual ao nº de graus de liberdade (livres) da estrutura, e para o qual existem técnicas numéricas mais simples de determinação da sua menor raiz λ_{cr}^* , e que será um majorante de λ_{cr} .

As cargas críticas elásticas são determinadas com relativa facilidade e são parâmetros precisos porque não dependem da história de carregamento da estrutura e do seu grau de plastificação. Por isso os regulamentos, sobretudo de estruturas metálicas, se servem das cargas críticas elásticas, para através destas indicar limites de validade dos seus métodos de análise.

A determinação da carga última em regime elásto-plástico requer uma análise materialmente não linear de 2ª ordem e por isso algo trabalhosa, por exigir um tratamento incremental e iterativo.

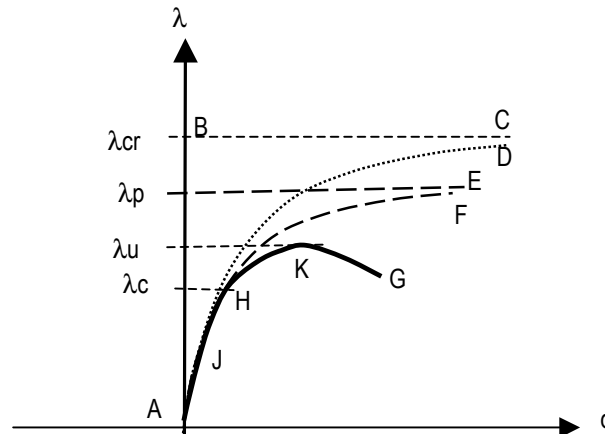


Figura 2.14 - Relação carga - deslocamento

O comportamento previsível de uma coluna com imperfeições e em regime elástico de 2ª ordem é curva AD assintótica à carga crítica elástica (Figura 2.14). Em regime não linear de 1ª ordem o comportamento é o da curva AF que tende para a carga de colapso plástico da estrutura, λ_p , obtida de um mecanismo com comportamento rígido-plástico. Em regime elásto-plástico de 2ª ordem a curva é do tipo da AG e apresenta um ponto de cedência em H e outro ponto de cota máxima, ponto K, ponto de carga última. A tangente à curva em K é nula e depois dele é negativa. O troço AH representa o comportamento elástico e a parte restante HKG o comportamento elásto-plástico. Em qualquer dos casos os valores particulares que as tangentes tomam permitem a determinação das cargas crítica, plástica e última.

Os ramos ascendentes das curvas representam instantes em que a estrutura tem equilíbrio estável. Se nos situarmos num ponto intermédio do ramo ascendente, troço AK, ele é definido por um estado de deformação e de tensão (ou conjunto de esforços), e por uma matriz de rigidez (tangente) K^t , que em geral é dependente dos estados de deformação e tensão naquele instante e que está em equilíbrio com as cargas exteriores (parametrizadas para um determinado valor de λ).

Se perturbarmos o equilíbrio impondo um acréscimo de deslocamentos Δd , que podem estar relacionados com um acréscimo do parâmetro de carga $\Delta \lambda$, a estrutura muda da sua posição original de equilíbrio que contém um determinado estado de energia para outro de estado de

energia maior, e para a qual foi necessário realizar um incremento de trabalho ΔW positivo, ou seja :

$$\Delta W = \Delta d^T * K^t * \Delta d > 0 \text{ para qualquer } \Delta d. \quad (2.24,a)$$

Como houve dispêndio de trabalho (energia) para demover a estrutura o equilíbrio diz-se estável. Neste caso a matriz de rigidez tangente designa-se por positiva definida [22, 23], e corresponde ter (para o estado de deformação e de tensão naquele ponto) só valores próprios positivos.

Para um equilíbrio instável, uma pequena perturbação do equilíbrio Δd numa determinada direcção, move a estrutura para outro estado de equilíbrio de menor energia, o que só acontece se nos localizarmos num ponto intermédio do ramo KG. Consequentemente:

$$\Delta W = \Delta d^T * K^t * \Delta d < 0 \text{ para algum } \Delta d. \quad (2.24,b)$$

Nestas circunstâncias K^t não será positiva definida e ter-se-á pelo menos um valor próprio negativo.

O equilíbrio diz-se indiferente [15] ou neutro [22] quando se tem:

$$\Delta W = \Delta d^T * K^t * \Delta d = 0 \text{ para algum } \Delta d \neq 0. \quad (2.24,c)$$

e K^t tem um valor próprio nulo, e está-se exactamente sobre o ponto H. Esta condição corresponde a ter o determinante da matriz de rigidez tangente nulo ($\det(K^t)=0$).

O valor próprio não nulo mais baixo corresponde:

- (i) a um ponto de bifurcação de equilíbrio ou,
- (ii) a um ponto limite correspondente à instabilidade por “snap-trough”.

Para os distinguir será necessário um procedimento adicional. Porém em vigas colunas é desnecessário fazer essa distinção porque nestas só existe instabilidade bifurcacional.

Se estiver a trabalhar em regime elástico linear de 2ª ordem o valor próprio referido é o parâmetro de carga crítica λ_{cr} , se em regime elastoplástico de 1ª ordem, a carga de crítica plástica λ_p , e enquanto em regime elasto-plástico de 2ª ordem é o parâmetro de carga última λ_u . da Figura 2.14.

Os algoritmos de análise não linear (geométrica e material) são construídos com base em incrementos de parâmetros de carga aos quais correspondem sempre incrementos de deslocamento Δd . Por isso em qualquer instante se quantifica o incremento de trabalho ΔW (expressão 2.24) e se verifica se mudou de sinal ou se aproxima de zero, instante em que se atingem estas cargas notáveis. Dispensa-se a necessidade de usar uma rotina de cálculo de valores e vectores próprios.

2.4- Métodos de Análise Materialmente Não Linear de Colunas

Nas secções anteriores foi referida a análise elasto-plástica de uma forma genérica para atender ao comportamento não linear dos materiais. Cabe agora particularizar esse comportamento para cada um dos tipos de estrutura, ou seja, de aço, de betão e mistas, fazendo referência, se possível, a métodos de análise regulamentares.

2.4.1- Estruturas de Aço

O Eurocódigo 3 prevê as seguintes análises globais de pórticos: Análise Global Elástica e Análise Global Plástica (§5.4 EC3). A Análise Global Elástica assume uma relação tensão deformação linear para o material qualquer que seja o nível de extensão, mesmo que posteriormente as verificações de segurança das secções se baseiem na resistência plástica.

A Análise Global Plástica adopta uma das seguintes relações tensão deformação sendo o primeiro de uso geral e os restantes para cálculos mais rigorosos (§5.4.3(4) EC3 e Anexo C EC3 Parte 1-5):

- diagrama bi-linear elástico-plástico sem endurecimento;
- diagrama bi-linear elástico-plástico com pseudo endurecimento (por razões numéricas)
- diagrama bi-linear elástico-plástico com endurecimento linear;
- diagrama bi-linear elástico-plástico com endurecimento não linear.

Usando uma das relações anteriores a Análise Global Plástica adopta os seguintes modelos de comportamento:

- Análise Elástica-Plástica (AEP) em que ocorrem rótulas plásticas nas secções ou nós de ligações trabalhando o restante elemento em regime elástico entre essas secções e/ou nós;
- Análise Plástica Não Linear (APNL) que considera a plastificação parcial dos elementos em zonas plásticas;
- Análise Rígido Plástica (ARP) – em que ocorrem rótulas plásticas, considerando os troços rígidos entre secções, e que é válida para os casos em que os efeitos de 2ª ordem $P-\delta$ entre as secções são desprezáveis.

No que se refere ao comportamento de vigas colunas o EC3 baseia-se nas curvas múltiplas de encurvadura que já incluem informação relativa ao comportamento elasto-plástico proveniente de ensaios e testes numéricos. Excepto se as barras forem de secção variável ou com carga de compressão não uniformes refere a necessidade de efectuar uma análise de 2ª ordem geométrica atendendo a imperfeições das barras. Neste caso a barra tem que ser discretizada em elementos mais pequenos e deve ser analisada recorrendo aos métodos de análise global de estruturas. Tem sido efectuada alguma investigação neste domínio.

De facto hoje em dia considerável atenção tem sido devotada para o problema das estruturas metálicas na presença de não linearidades geométricas e materiais como resultado do desenvolvimento da tecnologia de computadores e de adoptar princípios de projecto baseados em estados limite. Em geral estas metodologias tem sido categorizadas em dois tipos principais:

- (i) "métodos de zona plástica", onde se efectuem "análises elasto-plásticas de 2ª ordem com espalhamento de plasticidade" onde se englobam a APNL do EC3 e
- (ii) "métodos de rótula plástica", onde se efectuem "análises elasto-plásticas de 2ª ordem com conceito de rótula plástica" e onde cabem as AEP e ARP do EC3.

No primeiro método consideram-se progressivas plastificações que ocorrem quer ao longo das fibras das secções quer segundo o comprimento das barras e eventuais descargas elásticas. O segundo método concentra a plasticidade nas secções críticas (onde se localizam rótulas plásticas) e considera os efeitos geométricamente não lineares ($P-\delta$) entre essas secções em regime *elástico*. Estes últimos métodos são muito mais simples que o primeiro, e fornecem um majorante da carga última sendo contudo bastante precisa e por isso considerada exacta [15].

Entretanto Liew entre outros [24, 25] introduziram o "Método Refinado de Rótula Plástica" que considera o comportamento elasto-plástico, em vez de um comportamento elástico, entre as secções com rótulas, sendo por isso um avanço em relação à "análise elasto-plástica de 2ª ordem com conceito de rótula plástica" tradicional.

O "Método Refinado de Rótula Plástica" considera:

- (i) as funções de estabilidade na matriz de rigidez global de modo a capturar os efeitos de 2ª ordem das barras ($P-\Delta$ e $P-\delta$),
- (ii) o comportamento inelástico do material entre rótulas adoptando o conceito de módulo de elasticidade tangente (E_t) e,
- (iii) o grau de plastificação das secções extremas das barras através dos coeficientes η_a e η_b .

Estes coeficientes valem 1 quando a secção estiver em regime elástico e reduzem-se progressivamente até zero, quando uma rótula é formada, e dependem directamente das expressões de verificação de segurança a estados limites últimos das secções, que contemplam a interacção entre os momentos e esforços axiais, os quais por seu lado dependem do estado de deformação da estrutura. O módulo de elasticidade tangente E_t , afecta a matriz de rigidez e por isso afecta toda a barra. Pode ser determinado por um processo iterativo em [25] onde intervêm as curvas múltiplas de encurvadura, tem em conta as imperfeições da barras nomeadamente, o descarregamento elástico, imperfeições geométricas, tensões residuais, forma da secção, etc. Kim e Chen também desenvolveram o "método refinado de rótula plástica" e adoptaram o módulo elástico tangente CRC, que considera os efeitos da cedência gradual devido às tensões residuais, e que é definido por uma expressão muito simples. A carga crítica (última) da estrutura pode ser determinada no ponto onde a

matriz de rigidez tangente for (quase) indefinida. Neste método o estado de deformação e de plastificação das secções extremas a e b, é reflectido por toda a barra, porque os parâmetros η_a e η_b afectam os coeficientes de rigidez da mesma.

A Figura 2.15 mostra esquematicamente a comparação da relação carga-deslocamento do comportamento de uma estrutura (ou viga coluna) usando estes métodos simples e refinados:

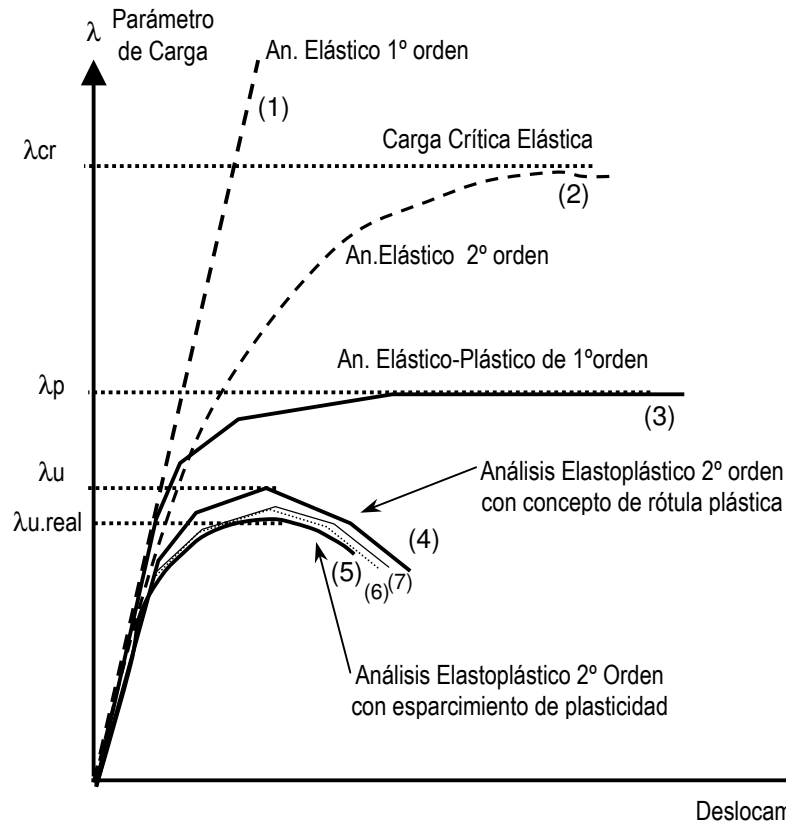


Figura 2.15 - Comportamento carga deslocamento de um pórtico plano [18].

- curva (1): a linha interrompida recta é obtida de uma análise linear (geométrica e material);
- curva (2): linha interrompida curva é uma análise elástica de 2ª ordem incluindo apenas o efeito de mudança de geometria e instabilidade. Esta curva aproxima-se assintoticamente à carga crítica elástica (ponto de bifurcação de equilíbrio) a qual pode ser obtida directamente por uma análise de valores e vectores próprios;
- curva (3): a linha curva por troços sem ramo descendente, é uma análise de 1ª ordem rígido-plástica, ignora os efeitos de mudança de geometria mas considera a não linearidade material. O seu valor de pico é a carga plástica limite, e pode ser obtido directamente de uma simples análise plástica;
- curva (4): a linha curva por troços com ramo descendente mostra o resultado de uma análise de 2ª ordem elasto-plástica com um modelo de rótula plástica. A plasticidade é concentrada numa secção e a mudança de geometria está associada ao incremento de deformação lateral P-Δ;

- curva (5): a curva contínua representa uma análise com espalhamento de plasticidade, onde foi considerada a influência das tensões residuais, imperfeições iniciais e endurecimento do aço for considerada uma curva contínua é obtida de uma análise de 2ª ordem com espalhamento de plasticidade. O pico desta curva dá a resistência real da estrutura em estudo.

Adoptando uma análise refinada de rótula plástica surgiria uma curva (6), quebrada com troços curvos, entre as curvas (4) e (5). A análise levada a efeito no presente trabalho produz uma curva acima desta última.

2.4.2- Estruturas de Betão

De acordo com o Eurocódigo 2 as análises são feitas adoptando idealizações para a geometria e comportamento da estrutura as quais têm que ser adequadas ao problema em análise. As idealizações de comportamento do material comuns para a análise são:

- comportamento elástico linear;
- comportamento elástico linear com redistribuição limitada;
- comportamento plástico (incluído modelos de escora e tirante);
- comportamento não linear.

Por outro lado os efeitos geometricamente não lineares (de 2ª ordem) têm que ser sempre considerados excepto se forem inferiores a 10% dos efeitos correspondentes em 1ª ordem ou se, no caso de colunas ou barras isoladas, a sua esbelteza λ (§ 5.8.3.2 EC2) for inferior à esbelteza limite λ_{lim} do § 5.8.3.1-EC2. A esbelteza da barra depende das suas condições de apoio e do facto de ser um elemento contraventado ou não contraventado. Considera-se que o elemento é contraventado se, para a combinação de acções presente, o deslocamento relativo entre nós não contribui para a instabilidade global da estrutura (ou seja, conduz a um acréscimo de esforços inferior a 10%).

Nas verificações a estados limites últimos as imperfeições geométricas dos pórticos e das barras que estejam comprimidas têm que se considerar. No caso específico das barras as imperfeições são traduzidas por excentricidades "e;" (§ 5.2(7)) que podem ser convertidas em forças equivalentes horizontais.

Tendo em conta estas considerações o Eurocódigo 2 prevê três métodos principais para análise material e geometricamente não linear:

- (i) "Método Geral",
- (ii) "Método Baseado na Rigidez Nominal"
- (iii) "Método Baseado na Curvatura Nominal",

pertencendo os dois últimos ao conjunto dos "métodos simplificados".

De uma leitura atenta do artigo 5.8.7.(1) o "Método Baseado na Rigidez Nominal" pode ser decomposto em dois [26]:

(ii.1) "Método Baseado na Rigidez Nominal para uma análise elástica de geometricamente não linear" (de segunda ordem total, do tipo P- Δ + P- δ), e,

(ii.2) "Método Baseado na Rigidez Nominal com o conceito de amplificação de momentos" e que recorre a uma análise elástica de primeira ordem.

O "Método Geral" é baseado numa análise global física e geometricamente não linear, de acordo com as regras especificadas no EC2 para este tipo de análises. Especificamente é referido que devem ser utilizadas:

- relações não lineares adequadas para o betão (§3.1.5) para o aço (§3.2.2),
- as correcções nos diagramas tensão - deformação para ter em conta a fluência,
- as correcções ao módulo de elasticidade médio e valores característicos resistentes dos materiais se a análise decorrer com base em valores de cálculo (§5.8.6(3)),
- as verificações das condições de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas num número suficiente de secções para que os resultados da análise sejam aceitáveis.

Este último aspecto obriga à discretização da estrutura num certo número de secções, ao estabelecimento das condições referidas nessas secções e à integração dos parâmetros que interessam analisar ao longo das secções e barras. Segundo a metodologia apresentada, o valor de cálculo da carga de rotura resulta directamente da análise, não sendo fornecidos mais pormenores em relação à metodologia da análise não linear [26].

O "Método Baseado na Rigidez Nominal com análise elástica geometricamente não linear", é aplicável à estrutura na sua globalidade ou a barras isoladas, devendo estas estar subdivididas em troços. O Método baseia-se numa estimativa de rigidez (nominal) para as barras, seguida do cálculo de esforços recorrendo a uma análise elástica de segunda ordem total do tipo P- Δ + P- δ . Os esforços resultantes, lidos nas secções extremas e secções intermédias de cada barra, são usados directamente para o dimensionamento de secções à flexão com compressão de acordo com a secção 6.1 do EC2 (§5.8.7.1(2)). A rigidez nominal de flexão a estimar é dada por:

$$EI = K_c E_c I_c + K_s E_s I_s \quad (2.25)$$

a qual depende do módulo de elasticidade dos materiais (betão e aço), das inércias das secções brutas não fissuradas, e de factores que têm em conta a fissuração, a contribuição da armadura e a correcção do módulo de elasticidade do betão para ter em conta a fluência. Uma vez dominada a metodologia de cálculo da rigidez nominal, em que em princípio a rigidez é determinada para cada elemento, este método é relativamente simples de aplicar apresentando o mesmo grau de dificuldade de uma simples análise elástica linear e caracteriza-se por ser um método de análise global da estrutura [26].

O "Método Baseado na Rigidez Nominal com o conceito de amplificação de momentos" é aplicável a barras isoladas e baseia-se numa estimativa de rigidez (nominal) para as barras seguida da amplificação de esforços. Com as características de rigidez nominal já definidas é efectuada uma análise elástica de 1ª ordem que contemple os efeitos das imperfeições geométricas, lendo-se os esforços nos extremos de cada barra. Os momentos máximos resultantes são multiplicados por um factor de amplificação que considera em simultâneo um factor de equivalência a momento uniforme, obtendo-se assim o momento de cálculo final M_{Ed} (de 2ª ordem), isto é:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[1 + \frac{\beta}{N_B/N_{Ed} - 1} \right] \quad (2.26)$$

em que, M_{0Ed} é o momento de 1ª ordem, β um factor que depende da distribuição de momentos de 1ª e 2ª ordem, N_{Ed} o esforço axial de cálculo e N_B a carga crítica do elemento baseada na rigidez nominal e no comprimento efectivo de encurvadura l_0 .

Este método, tal como o anterior, utiliza a rigidez nominal para contabilizar a não linearidade material. Apresenta a desvantagem de não poder ser aplicado de forma global, permitindo apenas a análise local de elementos, com as inerentes dificuldades ao nível de compatibilização de esforços na estrutura [26].

Cabe aqui realçar que o procedimento é semelhante ao do "Método Simplificado" (do EC4) para o dimensionamento de colunas mistas. A única diferença reside no facto dos momentos aqui indicados serem de 1ª ordem, M_{Ed} , enquanto no EC4 são momentos ou de 1ª ordem, se a estrutura for intranslacionável, ou de 2ª ordem do tipo P- Δ , se a estrutura for translacionável.

O "Método Baseado na Curvatura Nominal" é adequado a barras isoladas com esforço axial constante e com um certo comprimento efectivo de encurvadura, l_0 . O método baseia-se no cálculo do momento nominal de 2ª ordem (M_2) determinado a partir de uma excentricidade e_2 , a qual por seu lado dependa (i) do comprimento efectivo de encurvadura da barra e (ii) numa estimativa de curvatura máxima para a barra. O momento de cálculo total é:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (2.27)$$

em que M_{0Ed} é o momento máximo de 1ª ordem que já inclui os efeitos das imperfeições, sendo o momento nominal de 2ª ordem (M_2 - equivalente ao "momento secundário" nas análises de estabilidade) dado por:

$$M_2 = N_{Ed} * e_2 \quad (2.28)$$

com a excentricidade de 2ª ordem obtida de:

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} \quad (2.29)$$

sendo $1/r$ a curvatura máxima e c um factor que depende da distribuição de curvatura.

2.4.3- Estruturas Mistas

Em colunas mistas os métodos de análise não linear e geométrica são os "Métodos Geral" cujos princípios foram descritos na secção 1.2.3.1 e cujo algoritmo se pretende implementar neste trabalho e o "Método Simplificado" cujas regras de aplicação estão explicadas em pormenor na secção 1.2.3.2.

Os procedimentos de cálculo a adoptar para o "Método Geral" de estruturas mistas são semelhantes aqueles para o "Método Geral" de estruturas de betão armado.

O "Método Simplificado" para estruturas mistas é semelhante ao "Método baseado na rigidez nominal com o conceito de amplificação de momentos"

Quadro 2.1 - Métodos de dimensionamento elásto-plástico de colunas

Pilar Metálico (EC3)	Pilar de Betão (EC2)	Pilar Misto(EC4)
Baseado nas curvas de encurvadura de colunas ou Métodos de análise global de estruturas (AEP, APNL, ARP)	Método Geral	Método Geral
	<i>Métodos simplificados</i>	
	Método baseado na <u>rigidez nominal</u> para uma análise de 2ª ordem elástica	- - -
	Método baseado na <u>rigidez nominal</u> com o conceito de <u>amplificação de momentos</u>	Método Simplificado (adopta rigidez <u>efectiva</u> com <u>amplificação de momentos</u>)
	Método baseado na <u>curvatura nominal</u>	- - -

2.5- Algoritmos Para a Análise Não Linear

2.5.1- Introdução

Numa estrutura com comportamento não linear a configuração de equilíbrio altera-se constantemente à medida que a carga aumenta, sendo a relação entre os *incrementos de carga* e os seus efeitos (incrementos de deslocamentos, de tensões e de esforços) não linear. Como a determinação dos efeitos incrementados são obtidos recorrendo-se cálculos lineares, ocorre um desequilíbrio entre as cargas aplicadas na estrutura nesse instante e a resultante de esforços internos na estrutura. Há então que adoptar um procedimento para eliminar esse desequilíbrio. Assim nos algoritmos de análise não linear há duas fases distintas [21]: fase *predictor ou incremental* e fase *corrector ou iterativa*. Na primeira arbitra-se um *incremento* de um parâmetro de carga ou de deslocamento e estabelecem-se as relações de equilíbrio entre forças externas e internas. Sendo estas forças diferentes, inicia-se a segunda fase iterativa ou corrector, que restabelece o equilíbrio da estrutura à custa de um número *iterações* suficiente para que aquele desequilíbrio seja desprezável. Só depois se prossegue para o passo de carga (ou de deslocamento) seguinte. Pode então afirmar-se que a análise não linear se faz por uma série de incrementos de carga em *regime linear*, restabelecendo-se no fim de cada incremento e de forma iterativa, o equilíbrio entre as forças exteriores e as forças internas da estrutura.

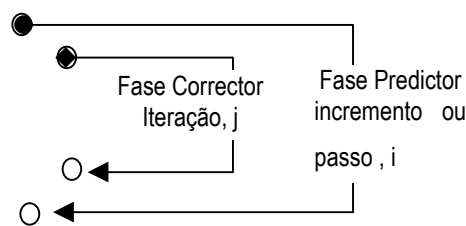


Figura 2.16 – Fases predictor e corrector

Um aspecto primordial neste tipo de análise, reside assim, na escolha do valor parâmetro incremental, que é independente da análise, mas que a regula, isto é:

- (i) se o incremento for pequeno, o tempo de cálculo poderá ser muito longo,
- (ii) se o incremento for grande o número de iterações para obter a convergência dentro daquele incremento poderá ser elevado, e em alguns casos a solução poderá divergir.

Se se optar por não fazer iterações (dentro de cada incremento) aparecerão grandes erros provenientes do desequilíbrio entre forças externas e internas (drift error), que no gráfico carga deslocamento, causam um desvio de trajectória relativamente à trajectória real de equilíbrio (ver Figura 2.17).

Quando a natureza do parâmetro incremental for uma fracção (variável ou não) da carga aplicada os métodos que o adoptam dizem-se Métodos de Controle de Carga. Se a natureza do parâmetro incremental for um deslocamento, os métodos que o adoptam dizem-se de Método de Controle de Deslocamento. Neste último é possível relacionar o deslocamento imposto (variável independente)

com um parâmetro de carga (dependente) o que se torna útil por ser mais fácil de tratar nos algoritmos de análise incremental do tipo Newton-Rapson. Existem outros métodos mais recentes como o do Controlo do Arco e Controlo do Trabalho onde as variáveis independentes, comprimento de arco e incremento de trabalho, se convertem num parâmetro de carga. Iremos abordar sumariamente os métodos descritos para depois ver em detalhe os Métodos de Controlo de Arco e Método do Trabalho.

Existem basicamente quatro métodos de análise não linear:

- (i) Método de Controle de Carga (Simple Incremental, Iteração de Newton, Newton-Rapson, etc)
- (ii) Método de Controle de deslocamento (Argyris, Pian, Tong)
- (iii) Método de Controle do Arco (Wemper, ...)
- (iv) Método de Controle do Trabalho

Muitos outros métodos poderão ser encontrados mas são variantes de um ou mais destes.

Admite-se sempre a hipótese de que a trajectória de equilíbrio que é contínua e única. A análise desenvolve-se por "incrementos de um parâmetro" ou passo "i". No início do passo i são conhecidas as forças de equilíbrio e os deslocamentos (em coordenadas generalizadas) do passo anterior ($i-1$), ou seja são conhecidas as seguintes entidades:

D_{i-1} : Deslocamento no fim do passo ($i-1$),

R_{i-1} : Nível de carga no fim do passo ($i-1$),

K_{i-1} : Matriz de rigidez no fim do passo ($i-1$),

$Q_{i-1} = 0$: Forças de desequilíbrio entre forças exteriores e interiores, que representa o valor do erro de desvio (drift error) no fim do passo ($i-1$) e que é zero porque a estrutura está em equilíbrio nesse instante.

Demos agora um passo, por exemplo, um incremento de carga ΔR_i . A equação de equilíbrio é, *aparentemente*, dada por:

$$K_{i-1} * \Delta D_i = \Delta R_i \quad (2.30)$$

que nos fornece o equilíbrio no ponto A sobre a trajectória aproximada (calculada).

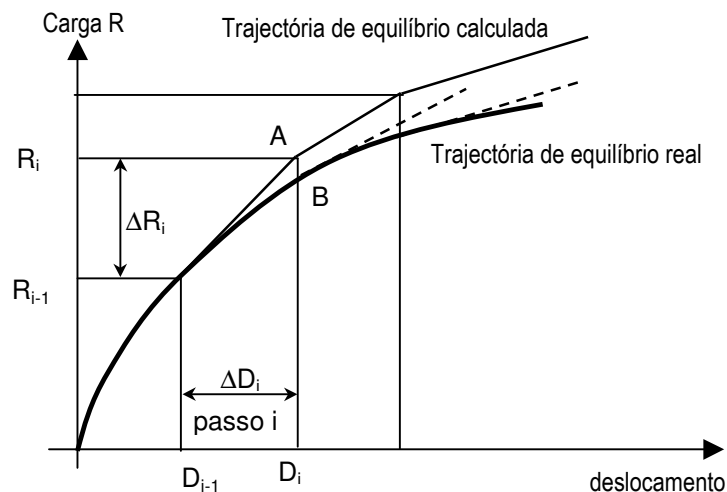


Figura 2.17 – Erro de desvio

Sobre a trajectória real a equação de *equilíbrio incremental* seria:

$$K_{i-1} * \Delta D_i = \Delta R_i + Q_i \quad (2.31)$$

sendo Q_i a diferença entre o incremento de carga aplicado e o incremento de forças internas gerado, indicado na Figura 2.17 pela distância AB.

Aplicações sucessivas da equação anterior conduzem à acumulação de erros de desvio. Se se adoptarem passos muito curtos esses erros reduzem-se mas nunca desaparecem. Para os eliminar há que realizar dentro do passo i , iterações j , de modo a que a forças desequilibradas $Q_{i,j}$ (parcelas de Q_i) se reduzam a zero à medida que j aumenta (quando tal não acontece o problema diverge)

Impondo sucessivas iterações, a expressão incremental anterior transforma-se na seguinte expressão de *equilíbrio iterativa*, comum a todos os métodos:

$$K_{i, j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta R_{i, j} + Q_{i,j} \quad (2.32.a)$$

ou,
$$K_{i, j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} R + Q_{i,j} \quad (2.32.b)$$

$K_{i, j-1}$: Matriz de rigidez no fim no passo i formulada com base no equilíbrio e condições cinemáticas no fim da iteração anterior. Para $j=1$ (1ª iteração) do passo i , vem $K_{i,0} = K_{i-1, j=\infty}$ do passo anterior ($i-1$).

$\Delta D_{i,j}$: é o incremento de deslocamento na j ésima iteração dentro do passo i ,

$\Delta R_{i,j}$: é o incremento de carga j ésima iteração dentro do passo i . É uma percentagem da carga total e por isso pode ser representado por:

$$\Delta R_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} * R \quad (2.33)$$

$\Delta \lambda_{i,j}$: incremento de parâmetro de carga da j ésima iteração dentro do passo i .

$Q_{i,j}$: é o vector de forças desequilibradas no fim da j ésima iteração dentro do passo i .

As forças desequilibradas $Q_{i,j}$ são calculadas como a diferença entre as forças externas e internas (em coordenadas generalizadas) :

$$Q_{i,j} = R_i - F_i \quad (2.34)$$

- Forças Externas:

$$R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1}^n \Delta R_{i,j} \quad (2.35.a)$$

ou,
$$R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1}^n \Delta \lambda_{i,j} R \quad (2.35.b)$$

- Forças Internas:

$$F_i = F_{i-1} + \Delta F_{i,j} \quad (2.36)$$

$$\text{com: } \Delta F_{i,j} = \sum_{e=1}^{\text{nelementos}} T^{(e)T} * B^{(e)T} * K^{(e)}(D_i^{(e)}, X_i^{(e)}) * \Delta D_{i,j}^{(e)} \quad (2.37)$$

$$\text{sendo } C_L^{(e)} = T^{(e)} * C_G \quad (2.38)$$

$$D^{(e)} = B^{(e)} * D \quad (2.39)$$

com $T^{(e)}$ a matriz de transformação de coordenadas dos graus de liberdade do elemento escritos no referencial local para o referencial global, e $B^{(e)}$ um operador que transforma os vectores elementares (deslocamentos ou forças) em coordenadas globais em no vector global de deslocamentos (ou forças) em coordenadas globais, também designados por deslocamentos (ou forças) generalizadas. O somatório estende-se a todos os elementos da estrutura e tem o significado da “assemblagem” do vector.

A matriz de rigidez elementar é construída com base nos deslocamentos ($D_i^{(e)}$) e esforços internos ($X_i^{(e)}$) totais actualizados lidos no fim da iteração j .

As forças desequilibradas tem que ser calculadas com base na condição de equilíbrio total e não na condição de equilíbrio incremental, de modo a evitar a acumulação de erro de iteração para iteração.

Após n iterações dentro do passo i obtemos $Q_{i,n} = 0$, e a estrutura fica em equilíbrio. No fim do passo i o vector de forças aplicadas totais é dado pela expressão (2.35.a) e o de deslocamentos por:

$$D_i = D_{i-1} + \Delta D_i \quad (2.40.a)$$

$$\text{com } \Delta D_i = \sum_{j=1}^n \Delta D_{i,j} \quad (2.40.b)$$

É feita a actualização da matriz de rigidez e prossegue-se para um novo incremento da fase predictor.

2.5.2- Método do Controle de Carga

É o método mais antigo. O parâmetro de incremento de carga ΔR_i é uma percentagem da carga total, R , habitualmente representado pelo parâmetro de carga λ_i , dado pela expressão:

$$\Delta R_i = \Delta \lambda_i * R \quad (2.41)$$

O parâmetro de carga é sempre igual em cada passo e a sua escolha é baseada na experiência do utilizador na resolução análise deste tipo de problemas.

O Método do Controle de Carga pode subdivide-se basicamente nos três seguintes:

- Método simples incremental , (ou de Newton) onde não há iterações de carga,
- Metodo Iterativo de Newton
- Metodo Iterativo de Newton Modificado

Pela combinação destes surgem adicionalmente:

- Método Newton- Rapson onde há iterações de carga dentro de cada passo de modo a eliminar os desvios de trajectória.

- Método Newton- Rapson-Modificado, igual ao anterior mas onde se adopta para todas as iterações a matriz de rigidez do início do passo ($j=1$).

2.5.2.1- Método Simples Incremental

O equilíbrio em cada passo é governado pela expressão (2.30):

$$K_{i-1} * \Delta D_i = \Delta R_i \quad (2.30\text{-rep})$$

com: $\Delta R_i = \Delta \lambda R$

e o deslocamento total no fim de cada passo i é:

$$D_i = D_{i-1} + \Delta D_i \quad (2.42)$$

É um método simples de usar porque não inclui iterações dentro de cada passo e por isso surgem erros de desvio de trajectória (drift error). Pode representar também um ramo descendente de carga desde que se faça $\Delta \lambda$ negativo, logo que a matriz de rigidez deixe de ser positiva definida. Como desvantagem refere-se a acumulação do erro de desvio.

Algoritmo (1.a) para efeitos de determinação de esforços finais:

(a) Iniciação :

$$\Delta R_i = \Delta \lambda * R;$$

Definir deslocamentos iniciais D_0 e esforços iniciais X_0 . Em geral serão nulos, excepto se houver um troço em regime linear, no fim do qual se tem $D_0 = D_{\text{linear}}$, $X_0 = X_{\text{linear}}$.

Passo 1: Montar $K_0 = K(D_0, X_0)$

Equilíbrio: $K_0 * \Delta D_1 = \Delta R_1$, obter: ΔD_1

actualizar: $\Delta X_1^{(e)} = K_0^{(e)} * (\Delta D_1^{(e)})$, incremento de esforço no elemento (e)

actualizar: $D_1 = D_0 + \Delta D_1$, deslocamento no final do passo i

actualizar $X_1^{(e)} = X_0^{(e)} + \Delta X_1^{(e)}$, esforço no elemento (e) no final do passo i

actualizar $F_1 = F_0 + \sum T^{(e)T} * B^{(e)T} * X_1^{(e)}$ vector de forças generalizadas

Passo 2: Montar $K_1 = K(D_1, X_1)$

Equilíbrio: $K_1 * \Delta D_2 = \Delta R_2$, obter: ΔD_2

actualizar: $\Delta X_2^{(e)} = K_1^{(e)} * (\Delta D_2^{(e)})$

actualizar: $D_2 = D_1 + \Delta D_2$

actualizar $X_2^{(e)} = X_1^{(e)} + \Delta X_2^{(e)}$

actualizar $F_2 = F_1 + \sum T^{(e)T} * B^{(e)T} * X_2^{(e)}$

Passo i: Montar $K_{i-1} = K(D_{i-1}, X_{i-1})$

Equilíbrio: $K_{i-1} * \Delta D_i = \Delta R_i$, obter: ΔD_i

actualizar: $\Delta X_i^{(e)} = K_{i-1}^{(e)} * (\Delta D_i^{(e)})$

actualizar: $D_i = D_{i-1} + \Delta D_i$
 $D_i = D_0 + \sum_{1..i} \Delta D_i$

actualizar: $X_i^{(e)} = X_{i-1}^{(e)} + \Delta X_i^{(e)}$
 $X_i^{(e)} = X_0^{(e)} + \sum_{1..i} \Delta X_i^{(e)}$

actualizar: $F_i = F_{i-1} + \sum_{1..e} T^{(e)T} * B^{(e)T} * X_i^{(e)}$
 $F_i = F_0 + \sum_{1..i} (\sum_{1..e} T^{(e)T} * B^{(e)T} * X_i^{(e)})$

2.5.2.2 - Método Iterativo de Newton

No Método *Iterativo* de Newton aplica-se a totalidade da carga generalizada R numa única iteração, obtém-se o incremento de deslocamento Δd_1 :

$$\Delta d_1 = K_0^{-1} * R \quad (2.43)$$

O "estado" de carga e de deformação da estrutura corresponde ao ponto (A), de coordenadas (d_1, P) , da Figura 2.18.

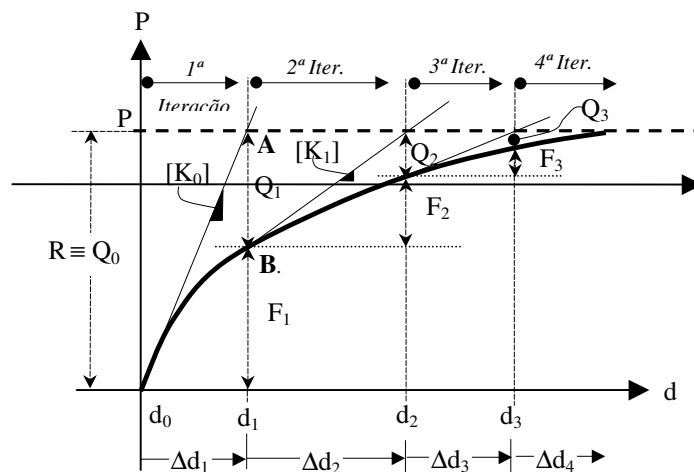


Figura 2.18- Método Iterativo de Newton [27]

Como a estrutura tem na realidade uma resposta não linear deveríamos estar sobre o ponto B, cuja abcissa (deslocamentos da estrutura) é d_1 . A localização da ordenada deste ponto é quantificada à custa dos esforços internos reais que resultam da existência de uma intensidade de deslocamentos de valor Δd_1 . A resultante destes esforços internos, em termos de forças generalizadas, vale F_1 :

$$F_1 = \sum_{e=1}^{n \text{ elementos}} T^{(e)T} * B^{(e)T} * (k^{(e)T}(d_1^{(e)})) * \Delta d_1^{(e)} \quad (2.44)$$

com $T^{(e)}$ e $B^{(e)}$ definidos por (2.38) e (2.39). Para que haja equilíbrio a resultante dos esforços internos (expressão (2.44)) deverá ser igual ao vector de carga generalizadas R aplicado à estrutura. Tal corresponde geometricamente à coincidência entre os pontos A e B na Figura 2. À diferença $Q_1 = R - F_1$ designa-se por carga desequilibrada (ou não equilibrada) e representa a diferença entre forças externas e internas no fim da iteração 1.

Para que se reduza o valor da carga desequilibrada é necessária nova iteração, iteração 2, na qual se calcula o incremento de deslocamento Δd_2 , que resulta do estabelecimento da equação de equilíbrio para uma acção igual à força desequilibrada da iteração anterior Q_1 com base na matriz de rigidez K_1 construída com base no "estado de deformação e tensão" no fim da iteração anterior. O processo evolui sucessivamente até que: (i) a carga desequilibrada se anule ou, (ii) que o incremento de deslocamento seja desprezável.

Sistematizando, podemos afirmar que, no início da (j) ^{ésima} iteração se tem:

- estado de deslocamentos:

$$d_{j-1} = d_{j-2} + \Delta d_{j-1} \Leftrightarrow d_{j-1} = d_0 + \sum_{m=1}^{j-1} \Delta d_m \quad (2.45) \text{ e } (2.46)$$

- estado de tensão/esforços:

$$X_{j-1} = X_{j-2} + \Delta X_{j-1} \Leftrightarrow X_{j-1} = X_0 + \sum_{m=1}^{j-1} \Delta X_m \quad (2.47) \text{ e } (2.48)$$

- os estados de deformação e tensão permitem conhecer a matriz de rigidez tangente no início desta iteração (fim da iteração anterior (j-1)):

$$K_{j-1} = K(d_{j-1}, X_{j-1}) \quad (2.49)$$

- a carga (ou força) desequilibrada é :

$$Q_{j-1} = R - F_1 - F_2 - \dots - F_{j-1} \quad (2.50)$$

$$Q_{j-1} = P - \sum_{m=1}^{j-1} F_m \quad (2.51)$$

com :

$$F_m = \sum_{e=1}^{n \text{ elementos}} T^{(e)T} * B^{(e)T} * \left(k^{(e)T}(d_{m-1}^{(e)}) \right) * \Delta d_m^{(e)} \quad (2.52)$$

em que os somatórios só são válidos se $m \geq (j-1)$. (portanto $Q_0 = R$, vector generalizado de cargas aplicadas).

Finalmente podemos estabelecer a equação de equilíbrio de forças com base no "estado da estrutura" no **início** da iteração j , obtendo-se o incremento de deslocamento Δd_j :

$$\Delta d_j = K_{j-1}^{-1} * Q_{j-1} \quad (2.53)$$

Admite-se uma vez mais uma resposta linear durante este incremento de deslocamento. No **fim** desta iteração determina-se o incremento de forças internas, que é dado por (2.52) fazendo $m=j$, e a carga desequilibrada acumulada Q_j é dada por (2.51). Finalmente verifica-se se o valor dos

deslocamentos Δd_j e se as forças desequilibradas Q_j satisfazem os erros admissíveis definidos nos critérios de paragem para as iterações. ($Q_j \cong 0$). Se tal não acontecer ocorre nova iteração.

2.5.2.3- Método de Newton Modificado

A construção e inversão da matriz de rigidez (tangente) em cada iteração no método de Newton torna-se morosa e cara se a estrutura tiver muitos graus de liberdade. Assim, como alternativa pode adoptar-se para todas as iterações a matriz de rigidez da 1ª iteração. Consiste portanto em adoptar na equação (2.53) $[K_{j-1}]^{-1} = [k_0]^{-1}$ para todas as iterações j . O número de iterações aumenta, como se mostra na Figura 2.19, mas cada ciclo torna-se bastante mais rápido.

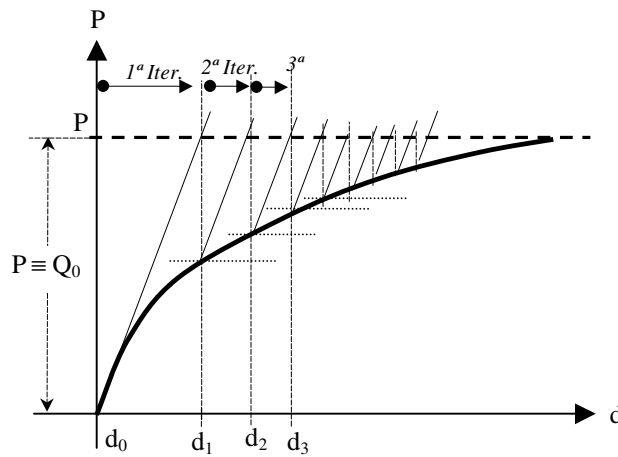


Figura 2.19 - Método Iterativo de Newton Modificado [27]

2.5.2.4 - Método Misto de Newton-Rapson

O método misto de Newton-Rapson concilia os métodos Simples Incremental com o Iterativo de Newton [18, 27]. O vector de cargas generalizadas R não é aplicado de uma vez só à estrutura, mas sim por incrementos ΔR , no que se designa por Passo Incremental. Dentro deste passo procede-se à implementação de iterações, etapas iterativas, cujo processo iterativo permite a correcção sucessiva da trajectória de cálculo para a trajectória real.

O incremento de carga generalizado ΔR pode ser substituído por um parâmetro de carga incremental $\Delta \lambda$, definido por $\Delta R = \Delta \lambda * R$, ($0 < \Delta \lambda \leq 1$). A convergência das iterações deve ser controlada (i) pelo valor mínimo de força desequilibrada [18, 27] e (ii) pelo acréscimo máximo de deslocamento [18] quando se está perto do ponto limite. Perto do ponto limite (carga limite) a matriz de rigidez é quase indefinida pelo que os resultados se obtêm com menor precisão. Aqui é necessário corrigir o parâmetro de carga λ_i , por exemplo, na razão inversa da relação entre o deslocamento máximo obtido e o deslocamento máximo permitido. De qualquer forma o método Misto de Newton-Rapson não converge no ponto limite, o que é uma das suas características e desvantagem.

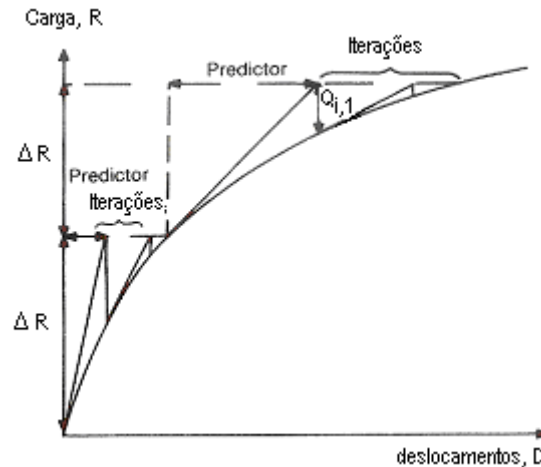


Figura 2.20- Método Misto Newton-Rapson (adaptado de [18])

Considere-se o início da 1ª iteração, $j=1$, do passo de carga i . A matriz de rigidez $k_{i,0}$ é montada de acordo com o campo de deslocamentos e de esforços (tensões) da última iteração do passo anterior ($i-1$), ou seja, $K_{i,0} = K_{i-1,j=\infty}$. Por outro lado a força desequilibrada é nula, $Q_{i,j} = 0$ e a equação de equilíbrio iterativa (2.32.a) reduz-se a :

$$K_{i,0} * \Delta D_{i,1} = \Delta R_{i,1} \quad (2.54)$$

Para iterações superiores à primeira ($j>1$) não é dado nenhum incremento de carga e por isso $\Delta R_{i,j}=0$, mas a força desequilibrada $Q_{i,j}$ é diferente de zero, pelo que a equação de equilíbrio (2.32.a) fica:

$$K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = Q_{i,j} \quad (2.55)$$

Nos métodos de controle de carga a convergência deve ser controlada com base na redução das forças desequilibradas [21], por exemplo através da norma Euclidiana:

$$\| Q_{i,j} \| = (Q_{i,j}^T * Q_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta R_i \| = \beta (\Delta R_i^T * \Delta R_i)^{1/2} \quad (2.56)$$

sendo ΔR_i o incremento de carga no início do passo i , e β um parâmetro entre 0.001 e 0.01.

O algoritmo do Método Misto de Newton-Rapson (full Newton-Rapson Method) pode ser implementado com as seguintes etapas

(a) é conhecido:

(a1)deslocamentos finais do passo anterior, D_{i-1}

(a2)esforços finais do passo anterior , X_{i-1}

(a3)Força desequilibrada da última iteração do passo anterior, $Q_{i-1,j} = 0$

(b) impor incremento de carga : $\Delta R_i = \Delta \lambda_i * R$

(c) montar $K_{i-1,j}$ (c1)→ Se $j=1$, $K_{i-1,j} = K(D_{i-1}, X_{i-1})$

(c2)→ Se $j > 1$, $K_{i-1,j} = K(D_i, X_i)$ com D_i da alínea (e) e X_i da alínea (f).

(d) Resolver a equação de equilíbrio (2.31)

$$K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta R_{i,j} + Q_{i,j} \quad (2.32.a\text{-rep})$$

ou, $K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} R + Q_{i,j}$ (2.32.b-rep)

(d1)→ Se $j=1$, resolver $K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta R_{i,1} = \Delta \lambda_{i,1} * R$ → obter $\Delta D_{i,j} = \Delta D_{i,1}$

(d2)→ Se $j > 1$, resolver $K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = Q_{i,j}$ → obter $\Delta D_{i,j}$

(e) actualizar deslocamentos

$$D_i = D_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta D_{i,j}$$

(f) actualizar forças nodais equivalentes a esforços internos

$$\Delta D_{i,j}^{(e)} = B^{(e)} * \Delta D_{i,j}$$

$$\Delta X_{i,j}^{(e)} = K^{(e)}(D_i, X_i) * \Delta D_{i,j}^{(e)}, \quad X_i^{(e)} = X_{i-1}^{(e)} + \Delta X_{i,j}^{(e)}$$

com D_i da alínea (e)

$$\Delta F_{i,j}^{(e)} = \sum_{e=1..nelementos} T^{(e)T} * B^{(e)T} * \Delta X_{i,j}^{(e)}, \quad F_i = F_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta F_{i,j}$$

(g) Calculo da força desequilibrada

$$\text{força externa total aplicada: } R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta R_{i,j} \Leftrightarrow R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta \lambda_{i,j} R$$

$$\text{força desequilibrada: } Q_{i,j} = R_i - F_i$$

(h) Verificação de convergência

$$\| Q_{i,j} \| = (Q_{i,j}^T * Q_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta R_i \| = \beta (\Delta R_i^T * \Delta R_i)^{1/2}$$

→ se não verifica executa nova iteração, $j = j + 1$, vai para (c2)

→ se verifica executa novo incremento de carga ΔR_i , $i = i + 1$, vai para (b)

2.5.2.5- Método de Misto de Newton Rapson Modificado

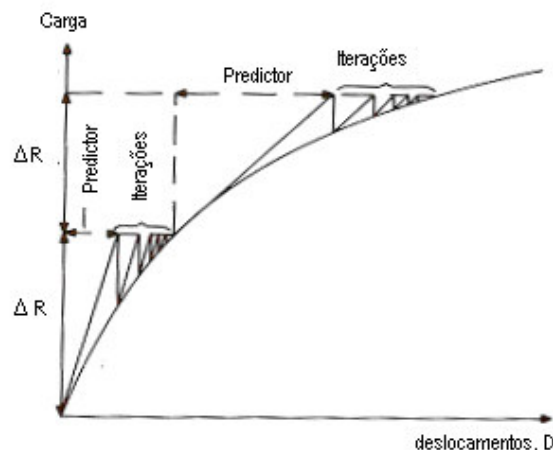


Figura 2.21- Método Misto de Newton-Rapson Modificado (adaptado de [18, 21])

O Método Misto de Newton-Rapson é diz-se Modificado se dentro de cada passo as iterações forem realizadas com base na matriz de rigidez inicial desse passo. O algoritmo é igual ao do

método interior mas só se monta a matriz de rigidez na 1ª iteração (alínea (c1)) servindo esta para todas as iterações j dentro daquele passo i , $K_{i,j-1}=K_{i,0}$. Elimina-se o cálculo numérico da matriz de rigidez nas iterações superiores à primeira, o que aumenta o número de iterações, pelo que a convergência é mais lenta, mas reduz-se frequentemente o tempo de cálculo. Por outro lado também falha no ponto limite. É contudo o método mais utilizado.

2.5.2.6 - Método Misto de Bergan

É um método que tenta resolver a falha dos anteriores no ponto limite. Define um parâmetro de rigidez S_p [18, 21] (expressão 2.57) que mede a rigidez global da estrutura para um dado estado de deformação. O parâmetro de rigidez vale 1 no 1º incremento de carga, é superior a zero enquanto ocorre aumento de rigidez, inferior no caso contrário e vale zero no ponto limite.

$$S_p = \frac{(1/\lambda_{1,1})\{\Delta D_{1,1}\}\{R\}}{(1/\lambda_{i,1})\{\Delta D_{i,1}\}\{R\}} \quad (2.57)$$

com:

- $\lambda_{1,1}$ e $\Delta D_{1,1}$ o parâmetro de carga e o vector de incremento de deslocamentos na 1ª iteração do 1º incremento de carga e,

- $\lambda_{i,1}$ e $\Delta D_{i,1}$ o parâmetro de carga e o vector de incremento de deslocamentos na 1ª iteração do incremento de carga corrente i .

O Método Misto de Bergan usa o método de Newton - Rapson (modificado ou não) nos ramos ascendente ($S > 0$) e descendente ($S < 0$) da curva de equilíbrio, e, próximo do ponto limite ($S \approx 0$) as iterações são suspensas, recorrendo-se apenas aos passos, ou seja, ao método simples incremental. Consequentemente nessa zona o erro de desvio não é eliminado.

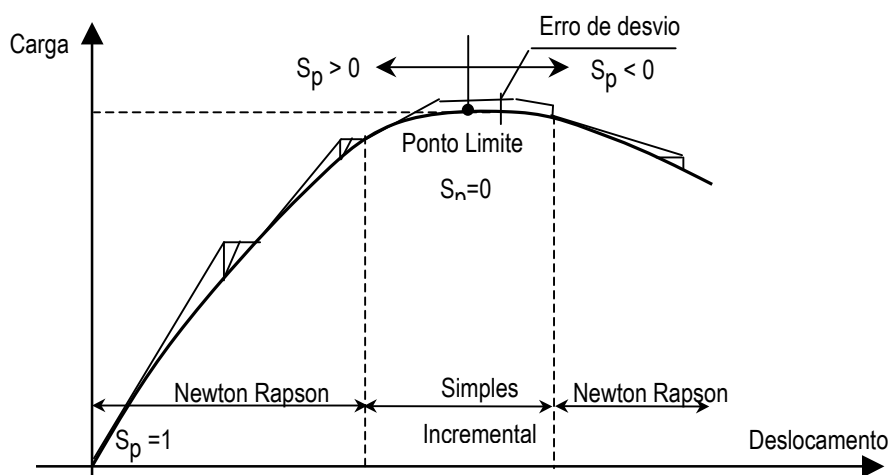


Figura 2.22 - Método Misto de Bergan (adaptado de [18])

2.5.3 - Método do Controle de Deslocamentos

Neste método impõe-se um incremento de deslocamento ($\Delta D_{q_i,j}$) segundo um grau de liberdade "q". A escolha deste grau de liberdade, designado por "grau de liberdade de controle", requer o conhecimento prévio do comportamento da estrutura em regime não linear. Em princípio deve corresponder a um ponto que evidencie maiores deslocamentos mesmo numa análise linear, ou seja, a um ponto com alguma flexibilidade estrutural. O incremento de deslocamento é convertido num parâmetro de carga cujo valor é determinado de forma diferente na 1ª iteração e nas iterações seguintes. A equação de equilíbrio iterativa (2.32.b) é desdobrada em duas para se garantir simetria dos sistemas de equações, no que resulta ter que desdobrar também o vector de incremento de deslocamentos:

$$K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} * R + Q_{i,j} \quad (2.32.b\text{-rep})$$

$$K_{i,j-1} \Delta D'_{i,j} = R \quad (2.58)$$

$$K_{i,j-1} \Delta D''_{i,j} = Q_{i,j} \quad (2.59)$$

$$\Delta D_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j} \quad (2.60)$$

Para o grau de liberdade prescrito, q, o incremento de deslocamento é a partir de (2.60):

$$\Delta D_{q_i,j} = \Delta \lambda_{i,j} * \Delta D'_{q_i,j} + \Delta D''_{q_i,j} \quad (2.61)$$

que resolvido em ordem a $\Delta \lambda_{i,j}$ nos dá o parâmetro de carga:

$$\Delta \lambda_{i,j} = \frac{\Delta D_{q_i,j} - \Delta D''_{q_i,j}}{\Delta D'_{q_i,j}} \quad (2.62)$$

Para a 1ª iteração, $j=1$, o incremento de deslocamento imposto ao grau de liberdade q é conhecido, ($\Delta D_{q_i,j} = \Delta D_{q_i,1}$) e as forças desequilibradas são nulas, $Q_{i,j} = Q_{i,1} = 0$ e por isso da equação (2.58) se obtém $\Delta D''_{i,1} = 0$. O parâmetro de carga da primeira iteração é, a partir de (2.62):

$$\Delta \lambda_{i,1} = \frac{\Delta D_{q_i,1}}{\Delta D'_{q_i,1}} \quad \text{para } j = 1. \quad (2.34)$$

Como se trata do primeiro parâmetro de carga e como está associado ao incremento de deslocamento arbitrado, designa-se por parâmetro de carga *predictor*.

Para evitar os desvios de trajectória é necessário realizar iterações ($j > 1$), sendo que, nessa fase nenhum incremento de deslocamento é prescrito, e por isso, $\Delta D_{q_i,j} = 0$. Consequentemente de (2.62) obtém-se o parâmetro de carga corrector:

$$\Delta \lambda_{i,j} = \frac{-\Delta D'_{q_i,j}}{\Delta D'_{q_i,j}} \quad \text{para } j > 1. \quad (2.63)$$

A vantagem do método de controle de deslocamento é de ser aplicável a problemas de ponto limite. Contudo podem surgir soluções divergentes em problemas com snap-back [18]. Existe uma dificuldade que é a escolha do grau de liberdade para o deslocamento de controle, o qual tem grande influência nas características de convergência. Para superar este problema providenciando que todos os deslocamentos e não um só estejam incorporados na solução surgem os Métodos de Controle de Arco e de Controle de Trabalho que serão abordados nas secções seguintes.

O critério de convergência para Métodos de Controle de Deslocamento deve basear-se no controle dos deslocamentos [21] nomeadamente:

$$\| \Delta D_{i,j} \| = (\Delta D_{i,j}^T * \Delta D_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta D_i \| = \beta (\Delta D_i^T * \Delta D_i)^{1/2} \quad (2.64)$$

com β entre 0.001 e 0.01. Na expressão anterior figuram o vector de incremento de deslocamento $\Delta D_{i,j}$ (2.59) e o vector de deslocamentos total actualizado D_i (2.37). Por vezes a norma do incremento de deslocamento altera-se muito pouco enquanto as forças desequilibradas têm uma grande variação [21]. Por este motivo é prudente considerar em simultâneo o critério de convergência do método de controle de carga ou seja,

$$\| Q_{i,j} \| = (Q_{i,j}^T * Q_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta R_{ap,j} \| = \beta (\Delta R_{ap,j}^T * \Delta R_{ap,j})^{1/2} \quad (2.56\text{-rep})$$

sendo $\Delta R_{ap,j}$ os incrementos de reacção de apoio na iteração j .

É importante referir que o deslocamento imposto $\Delta D_{qi,1}$ é diferente de zero na primeira iteração e que da conjugação das expressões (2.64) e (2.61) resulta que nas iterações seguintes este grau de liberdade tem deslocamento nulo, e por isso mantém o valor do deslocamento prescrito ($\Delta D_{qi,1}$) durante todas as iterações. Porém, para os outros graus de liberdade, em virtude de (2.64), (2.61) e de $Q_{i,1}=0$ ocorrem variações de deslocamentos cujos valores nas iterações seguintes vão sendo sucessivamente menores devido ao efeito de (2.64) em (2.61) e também pelo facto de $Q_{i,j}$ se reduzir (quando o problema converge). Finalmente podemos acrescentar que nas equações de equilíbrio (2.58) e (2.59) se pode usar em todas as iterações a matriz de rigidez da primeira iteração. Poupa-se tempo de cálculo nomeadamente na montagem e inversão da matriz de rigidez global e no cálculo do vector $\Delta D'_{i,j}$ que passa a poder escrever-se, $\Delta D'_{i,j} = \Delta D'_{i,1}$, qualquer que seja o j .

A implementação de um método do tipo Método de Controle de Deslocamentos contempla as seguintes etapas:

- (a) No início da primeira iteração ($j = 1$) do passo i , é conhecido:
 - (a1) deslocamentos finais do passo anterior, D_{i-1}
 - (a2) esforços finais do passo anterior, X_{i-1}
 - (a3) Força desequilibrada da última iteração do passo anterior, $Q_{i-1,j} = 0$

(b) prever um incremento de deslocamento para um grau de liberdade "q" escolhido previamente:

$$\Delta D_{qi,j} = \Delta D_{qi,1}$$

(c) montar $K_{i-1,j}$ (c1) → Se $j=1$, $K_{i-1,j} = K(D_{i-1}, X_{i-1})$

(c2) → Se $j>1$, $K_{i-1,j} = K(D_i, X_i)$ com D_i da alínea (e) e X_i da alínea (f).

(d) Resolver as equações de equilíbrio (2.31)

$$K_{i,j-1} \Delta D'_{i,j} = R \quad (2.57\text{-rep})$$

$$K_{i,j-1} \Delta D''_{i,j} = Q_{i,j} \quad (2.58\text{-rep})$$

isto é,

(d1) → Se $j=1$, resolver $K_{i,j-1} * \Delta D'_{i,j} = R \rightarrow$ obter $\Delta D'_{i,j} = \Delta D'_{i,1}$

(d2) → Se $j>1$, resolver

$$(d2.1) \quad K_{i,j-1} * \Delta D'_{i,j} = R \rightarrow \text{obter } \Delta D'_{i,j}$$

$$(d2.2) \quad K_{i,j-1} * \Delta D''_{i,j} = Q_{i,j} \rightarrow \text{obter } \Delta D''_{i,j}$$

(e) Determinar os parâmetros de carga predictor ($\Delta \lambda_{i,1}$) ou corrector ($\Delta \lambda_{i,j}$) respectivamente de (2.33) e (2.63):

$$(e1) \rightarrow \text{Se } j=1, \quad \Delta \lambda_{i,1} = \frac{\Delta D_{qi,1}}{\Delta D'_{qi,1}} \quad (\text{predictor})$$

$$(e2) \rightarrow \text{Se } j>1, \quad \Delta \lambda_{i,j} = \frac{-\Delta D''_{qi,j}}{\Delta D'_{qi,j}} \quad (\text{corrector})$$

(f) calcular incremento deslocamentos $\Delta D_{i,j}$ e actualizar deslocamentos D_i :

$$\Delta D_{i,j} = \lambda_{i,j} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j}$$

$$D_i = D_{i-1} + \Delta D_i$$

$$\Delta D_i = \sum_{j=1..j} \Delta D_{i,j}$$

(g) actualizar forças nodais equivalentes a esforços internos

$$\Delta D_{i,j}^{(e)} = B^{(e)} * \Delta D_{i,j}$$

$$\Delta X_{i,j}^{(e)} = K^{(e)}(D_i, X_i) * \Delta D_{i,j}^{(e)}, \quad X_i^{(e)} = X_{i-1}^{(e)} + \Delta X_{i,j}^{(e)}$$

com D_i da alínea (f)

$$\Delta F_{i,j} = \sum_{e=1..nelementos} T^{(e)T} * B^{(e)T} * \Delta X_{i,j}^{(e)}, \quad F_i = F_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta F_{i,j}$$

$$\Delta Rap_{i,j} = \text{partição de } \Delta F_{i,j}$$

(h) Calculo da força desequilibrada

$$\text{força externa total aplicada: } R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1..j} \Delta R_i \Leftrightarrow R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1..j} \lambda_i R$$

$$\text{força desequilibrada: } Q_{i,j} = R_i - F_i$$

(i) Verificação de convergência

$$\| \Delta D_{i,j} \| = (\Delta D_{i,j}^T * \Delta D_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta D_i \| = \beta (\Delta D_i^T * \Delta D_i)^{1/2} \quad (\text{eq.1})$$

$$\| Q_{i,j} \| = (Q_{i,j}^T * Q_{i,j})^{1/2} < \beta \| \Delta R_{ap,j} \| = \beta (\Delta R_{ap,j}^T * \Delta R_{ap,j})^{1/2} \quad (\text{eq.2})$$

com $\beta \in [0.00, 0.01]$ e

→ se não verifica eq.1 e eq.2 executa nova iteração, $j = j + 1$, vai para (c2)

→ se verifica eq.1 e eq.2 executa novo incremento de deslocamento $\Delta D_{qi,1}$, $i = i + 1$, vai para (b)

Como já se referiu uma forma alternativa de usar o algoritmo é manter em todas iterações dentro de cada passo a matriz de rigidez $K_{i-1,1}$ calculada em (c2) e o vector de incremento de deslocamento $\Delta D'_{i,1}$ calculado em (d1) sendo por isso desnecessárias as alíneas (c.2) e (d2.1).

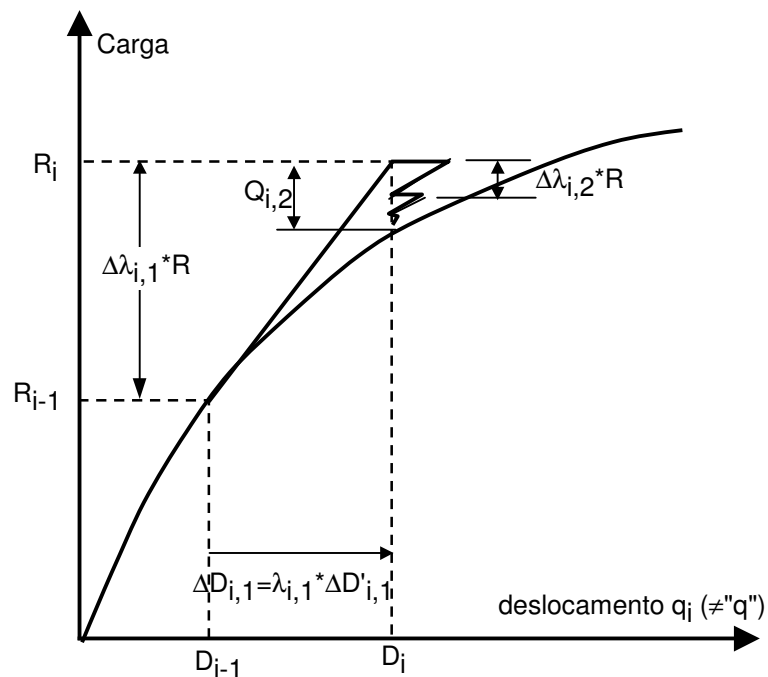


Figura 2.23- Método de Controle de Deslocamento

2.5.4 - Método do Comprimento de Arco (Arc Length Method)

O método de controle do comprimento de arco foi introduzido por Wemper (1971) e Riks (1979) tendo sofrido implementações significativas por Ramm (1983) e Criesfield (1983) [21, 22] e generalizado por Forde e Stiener (1987) [18]. Este método insere-se no grupo dos métodos de controle de deslocamento na medida em que se prescreve um incremento de arco (sobre a curva não linear Carga - deslocamento) a partir do qual se determinam os parâmetros de carga predictor e corrector.

O incremento de arco ds é uma nova variável e por isso é necessário uma nova equação, de restrição, a ser adicionada ao sistema:

$$K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta \lambda_{i,j} * R + Q_{i,j} \quad (2.32.b\text{-rep})$$

Na versão original de Riks e Wemper a nova equação de restrição era traduzida por um comprimento de arco constante:

$$s = \int ds = \text{const.} \quad (2.66)$$

com o diferencial ds dado por:

$$ds = \sqrt{dD_{i,j}^T * dD_{i,j} + d\lambda_{i,j}^2 * \psi^2 * R^T * R} \quad (2.67)$$

onde ψ é um parâmetro de escala porque a contribuição de carga depende da escala adoptada entre os termos da carga e o termo dos deslocamentos. Entretanto Criesfield [21] indica que para Métodos de Comprimento de Arco expressão diferencial (2.67) pode ser substituída pela equação incremental:

$$[(D_{i,j}^T * D_{i,j}) + \Delta\lambda_{i,j}^2 * \psi^2 * (R^T * R)] = \Delta L^2 \quad (2.68)$$

a qual foi simplificada para:

$$(\Delta D_{i,j}^T * \Delta D_{i,j}) = \Delta L^2 \quad (2.69)$$

onde, nas expressões anteriores se define:

ΔL é um "raio" (que intersecta a curva Carga-Deslocamento no fim do comprimento de arco s),

$\Delta\lambda_{i,j=\infty}$, é incremental isto é, relativo ao último ponto de equilíbrio

$D_{i,j}$ é o incremento de deslocamento acumulado que inclui a parte incremental e a iterativa dado por:

$$D_{i,j} = \sum_{j=1}^{n^{\text{iterações}}} \Delta D_{i,j} = D_{i,(j-1)} + \Delta D_{i,j} \quad (2.70)$$

sendo $\Delta D_{i,j}$ dado por (2.60).

A introdução da restrição expressão (2.68) no sistema (2.32.b) faz com que a matriz de rigidez global aumentada perca a sua simetria e o seu carácter de bandeda [21] e por isso recorre-se novamente à técnica de sobreposição [18] reescrevendo (2.32.b) na forma desacoplada já conhecida:

$$K_{i,j-1} \Delta D'_{i,j} = R \quad (2.58\text{-rep})$$

$$K_{i,j-1} \Delta D''_{i,j} = Q_{i,j} \quad (2.59\text{-rep})$$

com:

$$\Delta D_{i,j} = \lambda_{i,j} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j} \quad (2.60\text{-rep})$$

Sabendo que no início da 1ª iteração ($j=1$) que $Q_{i,j}=0$ vem de (2.59) que $\Delta D''_{i,j}=0$. Substituindo (2.60) em (2.70) e esta em (2.69) resulta o seguinte parâmetro de carga predictor:

$$\Delta\lambda_{i,1} = s \frac{\Delta L}{\sqrt{\Delta D'_{i,1}^T * \Delta D'_{i,1}}} \quad (2.71)$$

sendo $s=+1$ quando a matriz de rigidez global $[K]$ no início do incremento for positiva definida, e, $s=-1$ quando for negativa definida. A mudança de sinal ocorrerá quando se ultrapassa o ponto limite ou um ponto de bifurcação de equilíbrio.

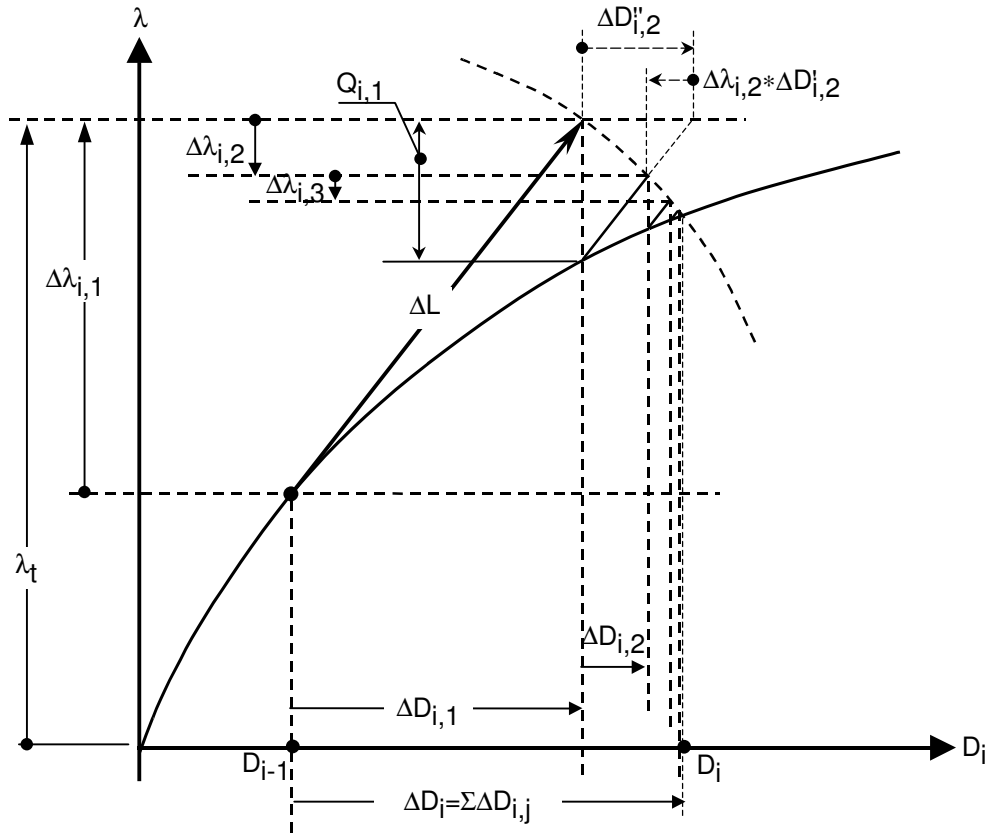


Figura 2.24 - Incremento e iterações do Método de Controle de Arco

Tratemos agora da parte iterativa. Substituindo as expressões (2.60) e (2.70) em (2.69) obtemos:

$$a_1 * \Delta\lambda_{i,j}^2 + a_2 * \Delta\lambda_{i,j} + a_3 = 0 \quad (2.72)$$

com

$$a_1 = \Delta D'_{i,j}{}^T * \Delta D'_{i,j} \quad (2.73)$$

$$a_2 = 2 * \Delta D'_{i,j}{}^T * (D_{i,j-1} + \Delta D''_{i,j}) \quad (2.74)$$

$$a_3 = (D_{i,j-1} + \Delta D''_{i,j})^T * (D_{i,j-1} + \Delta D''_{i,j}) - \Delta L^2 \quad (2.75)$$

que é uma equação do 2º grau, e por isso com duas raízes, $\Delta\lambda_{i,j}^{(1)}$ e $\Delta\lambda_{i,j}^{(2)}$. Para a escolha de uma das duas raízes há que adoptar uma estratégia, a qual consiste em optar pela raiz que dê o ângulo menor entre o anterior vector incremental de deslocamento ($D_{i,j}$) e os novos vectores incrementais, que são:

$$D_{i,j}^{(1)} = D_{i,j} + \Delta\lambda_{i,j}^{(1)} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j} \quad (2.76)$$

$$D_{i,j}^{(2)} = D_{i,j} + \Delta\lambda_{i,j}^{(2)} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j} \quad (2.77)$$

A ideia que está subjacente à escolha do menor ângulo é para evitar a solução "doubling back" (volta para trás) [21, 22]. Esta solução pode ser implementada calculando os ângulos referidos a partir de:

$$\cos(\theta^{(n)}) = \frac{D_{i,j}^T * D_{i,j}^{(n)}}{\Delta L^2} = \frac{a_4 + a_5 * \Delta\lambda_{i,j}^{(n)}}{\Delta L^2} \quad (2.78)$$

sendo o (n) um índice (não expoente) relativo às possíveis soluções 1 e 2 e:

$$a_4 = (D_{i,j-1})^T * (\Delta D''_{i,j} + D_{i,j-1}) \quad (2.79)$$

$$a_5 = (D_{i,j-1})^T * (\Delta D''_{i,j}) \quad (2.80)$$

A raiz a adoptar, ou seja, o parâmetro de carga corrector, será:

$$\Delta\lambda_{i,j} = \Delta\lambda_{i,j}^{(1)} \quad \text{se} \quad \Delta L^2 * \cos(\theta^{(1)}) \geq \Delta L^2 * \cos(\theta^{(2)}) \quad (2.81.a)$$

$$\Delta\lambda_{i,j} = \Delta\lambda_{i,j}^{(2)} \quad \text{se} \quad \Delta L^2 * \cos(\theta^{(1)}) < \Delta L^2 * \cos(\theta^{(2)}). \quad (2.81.b)$$

Outros autores, adoptam outros parâmetros de carga diferentes para o Método de Controle de Arco. Chen [18] considera como equação de restrição a seguinte:

$$ds^2 = (\lambda_{i,1})^2 + \{\Delta D_{i,1}\}^T \{\Delta D_{i,1}\} \quad (2.82)$$

sendo ds o incremento de arco.

Como a força desequilibrada na primeira iteração vale zero ($Q_{i,j} = 0$) segue que da equação (2.59) vem $\Delta D''_{i,j} = 0$, e da equação (2.60) que $\Delta D_{i,1} = \Delta\lambda_{i,1} * \Delta D'_{i,1}$ que substituído em (2.82) resulta:

$$\Delta\lambda_{i,1} = \sqrt{\frac{ds^2}{1 + \{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D_{i,1}\}}} \quad (2.83)$$

que é conhecido desde que se prescreva previamente ds .

Para reduzir erros de desvio de trajectória é necessário fazer iterações j dentro de cada passo i . Para as subsequentes iterações a condição de ortogonalidade obriga a que o factor de incremento de carga $\lambda_{i,j}$ (para $j > 1$) satisfaça a restrição:

$$(\lambda_{i,1}) (\lambda_{i,j}) + \{\Delta D_{i,1}\}^T \{\Delta D_{i,1}\} = 0$$

de onde se obtém:

$$\Delta\lambda_{i,j} = \frac{-\{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D'_{i,1}\}}{1 + \{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D'_{i,1}\}}, \quad j > 1. \quad (2.84)$$

Finalmente se refere que o método de controlo de arco pode ser usado em métodos de ponto limite, snap through, snap back. A intersecção do arco (ou raio) na curva carga deslocamento exactamente sobre o ponto limite leva a que a matriz de rigidez se torne indefinida. Porém esta situação é muito pouco provável ocorrer na prática. Se eventualmente tal acontecer é necessário correr o algoritmo com outro valor para o incremento de arco (ou raio).

Um algoritmo de aplicação do Método de Controlo de Arco é estruturalmente semelhante ao do Método de Controle de Deslocamentos atrás apresentado (na secção 2.5.3). Neste último algoritmo há apenas que indicar o incremento de arco na alínea (b) e substituir as os parâmetros de carga predictor e corrector, das alíneas (c1) e (c2) respectivamente pelas expressões (2.71) e (2.81), ou (2.83) e (2.84). Durante as iterações j , pode ser mantida a mesma matriz de rigidez da primeira iteração com as vantagens já referidas na secção anterior.

2.5.5 - Método do Controle de Trabalho (Energia)

Neste método o parâmetro de carga predictor é deduzido à custa de um incremento de trabalho dW dado à estrutura no início da fase incremental, ou seja para $j=1$. Para as subsequentes iterações ($j>1$) os parâmetros de carga são determinados sob a condição de trabalho constante, isto é, de incremento de trabalho nulo, $dW=0$. A implementação do método faz-se também com a decomposição do sistema (2.31) nas equações já conhecidas:

$$K_{i,j-1} * \Delta D_{i,j} = \Delta\lambda_{i,j} * R + Q_{i,j} \quad (2.32.b\text{-rep})$$

$$K_{i,j-1} \Delta D'_{i,j} = R \quad (2.58\text{-rep})$$

$$K_{i,j-1} \Delta D''_{i,j} = Q_{i,j} \quad (2.59\text{-rep})$$

com:

$$\Delta D_{i,j} = \Delta\lambda_{i,j} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j} \quad (2.60\text{-rep})$$

O incremento de trabalho dW define-se como:

$$dW = \Delta D_{i,j} * \Delta\lambda_{i,j} R \quad (2.85)$$

Substituindo (2.60) em (2.85) e sabendo que na primeira iteração se tem $Q_{i,1}=0$, e $\Delta D''_{i,1}=0$, vem:

$$dW = \Delta D_{i,1} * \Delta\lambda_{i,1} R = \Delta\lambda_{i,1} * \Delta D'_{i,1} * \Delta\lambda_{i,1} R$$

de onde se obtém, o incremento de carga predictor:

$$\Delta\lambda_{i,1} = s * \sqrt{\frac{dW}{\{\Delta D'_{i,1}\}^T \{R\}}} \quad (2.86)$$

em que $s=+1$ se a matriz de rigidez for positiva definida e $s=-1$ se for negativa definida.

Para as iterações seguintes, $\lambda_{i,j} > 1$, o incremento de trabalho é nulo, o que permite tornar nula a expressão (2.85). Substituindo uma vez mais em (2.85) a definição (2.60) e zerando vem:

$$dW = \Delta D_{i,j} * \lambda_{i,j} R = [\lambda_{i,j} * \Delta D'_{i,j} + \Delta D''_{i,j}] * \lambda_{i,j} R = 0$$

de onde resulta o parâmetro de carga corrector:

$$\Delta \lambda_{i,j} = \frac{-\{\Delta D'_{i,j}\}^T \{R\}}{\{\Delta D'_{i,j}\}^T \{R\}} \quad (2.87)$$

Este método é semelhante ao método do controle do comprimento do arco. A sua implementação segue os mesmos passos que os do Método de Controle de Deslocamento bastando para isso a substituição dos parâmetros de carga predictor e corrector respectivamente pelas expressões (2.86) e (2.87). Também neste método pode ser mantida em todas as iterações a mesma matriz de rigidez global da primeira iteração.

Apresenta-se no Quadro 2 as diferenças entre os métodos aqui abordados.

Quadro 2.2 - Parâmetros predictor e corrector de cada método

Método	parâmetro prescrito	Parâmetro Predictor	Parâmetro Corrector
Simple Incremental	Incremento de carga ΔR_i , ou de parâmetro de carga $\Delta \lambda_i$	$\Delta \lambda_i$	Não têm este parâmetro
Iterativo de Newton	Carga total R	um só "incremento", isto é, carga total R.	É na sua natureza um procedimento iterativo de correção de desequilíbrio ($\Delta \lambda_j = 0$).
Método de Newton - Rapson (Total (full) ou Modificado)	Parâmetro de carga $\Delta \lambda_{i,1}$	$\Delta \lambda_{i,1}$	$\Delta \lambda_{i,j} = 0$
Método de Controle de Deslocamento	incremento de deslocamento no grau de liberdade q, $\Delta D_{qi,1}$	$\Delta \lambda_{i,1} = s \frac{\Delta D_{qi,1}}{\Delta D'_{qi,1}}$	$\Delta \lambda_{i,j} = s \frac{-\Delta D'_{qi,j}}{\Delta D'_{qi,j}}$
Método de Controlo de Arco (cilíndrico), Crisfield	Incremento do arco (raio), ds	$\Delta \lambda_{i,1} = s \frac{\Delta L}{\sqrt{\Delta D'_{i,1}^T * \Delta D'_{i,1}}}$	uma das raízes de $a_1 * \Delta \lambda_{i,j}^2 + a_2 * \Delta \lambda_{i,j} + a_3 = 0$ ver equação (2.72) a (2.81)
Método de Controlo de Arco, Chen	Incremento do arco (raio), ds	$\Delta \lambda_{i,1} = s \sqrt{\frac{ds^2}{1 + \{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D'_{i,1}\}}}$	$\Delta \lambda_{i,j} = s \frac{-\{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D'_{i,1}\}}{1 + \{\Delta D'_{i,1}\}^T \{\Delta D'_{i,1}\}}$
Método de Controle do Trabalho	Incremento de trabalho, dW	$\Delta \lambda_{i,1} = s * \sqrt{\frac{dW}{\{\Delta D'_{i,1}\}^T \{R\}}}$	$\Delta \lambda_{i,j} = s \frac{-\{\Delta D'_{i,j}\}^T \{R\}}{\{\Delta D'_{i,j}\}^T \{R\}}$

Capítulo 3 : Implementação do Método Geral

3.1- Programa de Análise Não Linear de Colunas Mistas

Seguindo o desenvolvimento teórico e justificativo do Capítulo 2 foi elaborado um conjunto de dois programas, sendo o primeiro, M-C, de análise de secções mistas, e o outro, Vcol-Mx, de análise de barras, que usados sequencialmente permitem realizar a verificação de resistência de secções à flexo-compressão e verificação à estabilidade por encurvadura por flexão de uma de uma coluna mista, de acordo com o Método Geral do Eurocódigo 4. O código dos programas está em linguagem Visual Basic [28, 29] para ambiente Windows.

Como já foi referido na secção 2.1, o primeiro passo da implementação do Método Geral consiste na análise das secções mistas para a produção de curvas Momento-Curvatura, as quais estão relacionadas rigidez de flexão da secção mista em função de determinada curvatura (e nível de esforço axial). Estas curvas traduzem afinal o comportamento materialmente não linear da secção à flexo-compressão, e os seus valores são guardados num ficheiro. São por isso uma informação absolutamente necessária para o segundo passo da implementação, a elaboração de uma análise não linear de 2ª ordem da coluna. A interconexão entre os programas apresenta-se no seguinte esquema.

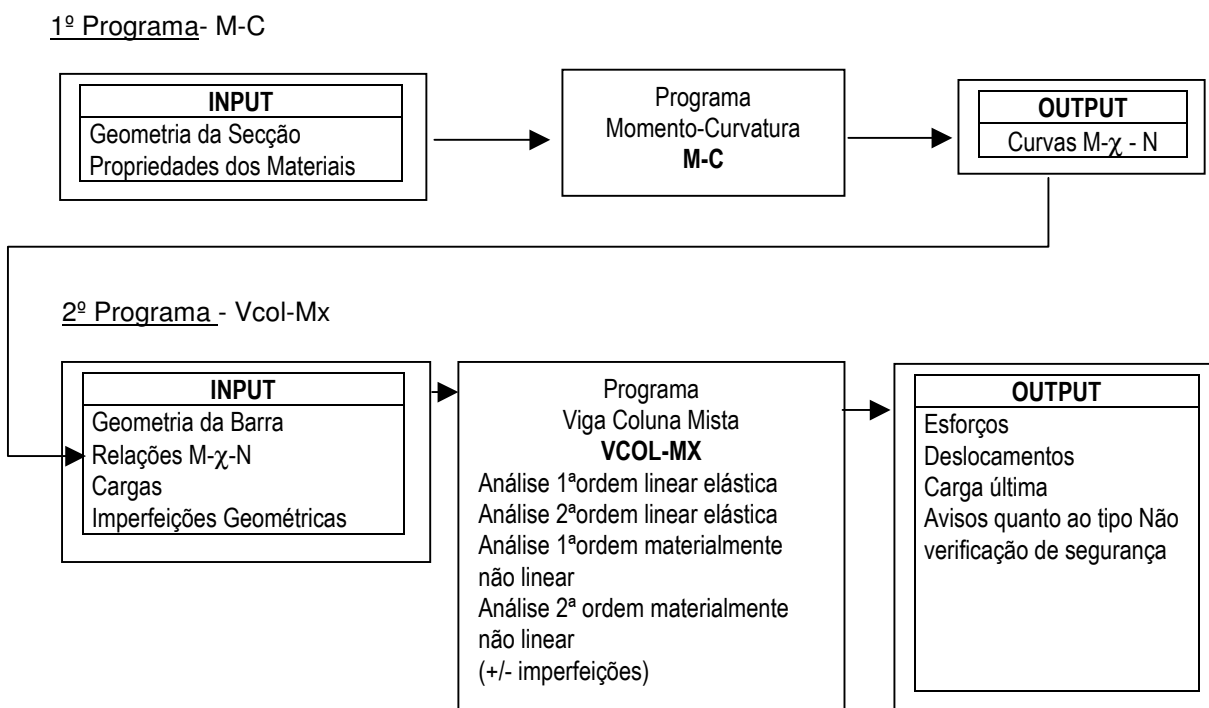


Figura 3.1 - Interconexão entre M-C e Vcol-Mx

Para além da análise não linear referida de onde resultam esforços, deslocamentos e o cálculo da carga limite, o segundo programa permite a verificação automática de resistência à flexo-

compressão das secções e a verificação à encurvadura por flexão. No Anexo B ilustra-se a utilização dos programas desenvolvidos com na resolução de um problema.

3.2 - Programa M-C

O primeiro programa, M-C, gera curvas Momento-Curvatura para níveis diferentes de esforço axial, o qual varia desde zero até (quase) o esforço axial plástico (resistente ou característico) a partir do conhecendo a geometria da secção transversal (betão, perfil e armaduras) e das propriedades dos materiais (resistentes ou características). Neste processo é tida em consideração as leis não lineares de comportamento dos diversos materiais, a fissuração do betão e a fluência.

Descrevem-se as etapas do programa Momento-Curvatura, "M-C", adoptando a nomenclatura da secção 2.2 e pormenorizando aspectos não tratados nessa secção. Apresenta-se na Figura 3.3 um fluxograma que correlaciona as várias etapas.

Etapa 1) - Leitura de Dados

Nesta versão (que não é comercial) os dados são fornecidos pelo preenchimento de um ficheiro pré formatado em ASCII, como se mostra no final desta secção de texto.

Os dados a fornecer são:

- (1.i) dados materiais- valores característicos dos materiais, coeficientes parciais de segurança, módulos de elasticidade, coeficiente de fluência e razão entre carga permanente (em estado limite de serviço) e carga de cálculo (estado limite último) ;
- (1.ii) dados geométricos e topológicos - valores das dimensões da secção de betão, do perfil de aço, número de varões por camada , diâmetro e recobrimento dos varões. Os tipos de secções tratadas são as da figura:

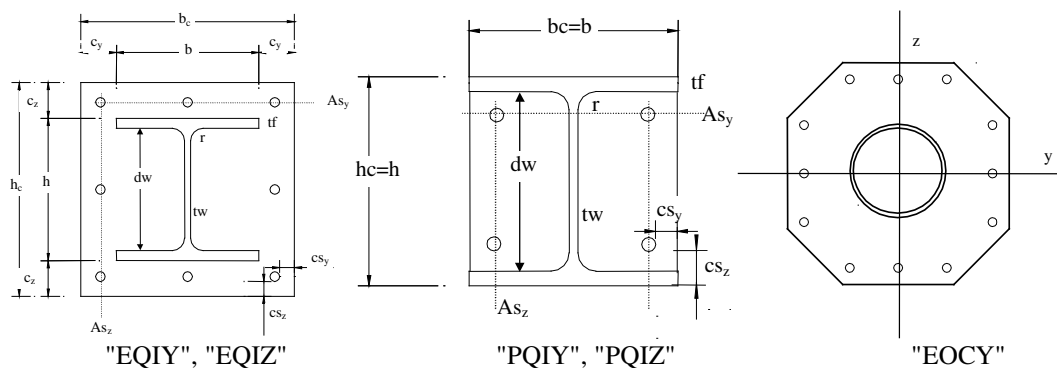


Figura 3.2 - Secções tipo já implementadas no programa.

Para as distinguir usam-se códigos alfanuméricos como por exemplo:

"EQIY"- secção envolvida (E- encased), quadrada (ou rectangular), com perfil I, em flexão em torno de y-y,

"PQIZ"- secção parcialmente envolvida quadrada (ou rectangular), com perfil I, em flexão em torno de z-z,

"EOCY"- secção envolvida, octogonal (não regular), com tubo circular, em flexão em torno y-y.

(1.iii)- dados de comportamento - indicar se a análise é feita com base nos valores característicos e médios dos materiais, ou se com base em valores de cálculo, se é a curto ou a longo prazo, e qual o eixo de flexão (está indicado no código alfanumérico).

(1.iv)- dados para definição das curvas - indicar as características das curvas momento curvatura a obter como sejam, (i) o número de curvas e os respectivos percentis de esforço axial resistente (variam de 0% a 95%), e (ii) o número de pontos de cada curva e as correspondentes extensões (ϵ_2) da fibra mais comprimida.

Salientamos que o programa está preparado para facilmente se expandir para outros tipos de secções. Por outro lado o número mínimo de curvas é 6 e aconselha-se um número mínimo de pontos de 10. As extensões ϵ_2 arbitradas podem ser automaticamente alteradas no decurso do programa.

Etapa 2) - Validação do âmbito de aplicação do programa.

Determinam-se as áreas de betão, aço e armaduras, os valores resistentes $N_{pl.Rd}$ ou $N_{pl.Rk}$, consoante a análise seja por valores resistentes ou característicos, e o factor de contribuição do aço δ (expressão 1.6). Se $\delta < 0.2$ ou $\delta > 0.9$ as secções devem ser tratadas respectivamente como de betão armado ou de aço, e não como mistas, pelo que o programa pára.

(Na verdade nesta etapa deveria constar os requisitos de aplicabilidade do Método Geral. Porém isso é realizado numa folha Mathcad, onde as alterações das variáveis se podem fazer mais facilmente de forma interactiva.)

Etapa 3) - Ler esforço axial aplicado. Cálculo de ϵ_0 .

Inicia-se uma (nova) curva. Ler o (novo) nível de esforço axial, $N_{axil,i}$, e determinar a extensão média correspondente ϵ_0 . Consiste em resolver a equação de equilíbrio (2.11) com $x=\infty$, $N=N_{axil}$, e substituindo ϵ_2 por ϵ_0 , de que resulta:

$$N_{axil,i} = \sigma_c(\epsilon_0) * A_c + \sigma_a(\epsilon_0) * A_a + \sum_i \sigma_s(\epsilon_0) * A_i \quad (3.1)$$

A equação é resolvida iterativamente em ordem a ϵ_0 usando o Método de Newton em conjugação com o Método da Secante [30, 31].

Etapa 4) - Leitura da extensão na fibra mais comprimida do betão.

Ler o (novo) $\epsilon_{2,j}$ dos valores ϵ_2 arbitrados para a curva cujo esforço axial é $N_{axil,i}$. Se $\epsilon_{2,j} > \epsilon_0$, é necessário corrigir todos os ϵ_2 arbitrados de modo a pertencerem ao intervalo $[\epsilon_0, \epsilon_{cu1}]$, sendo

ϵ_{cu1} a extensão última do betão, o que é feito por $j-1$ intervalos dos j pontos existentes. Esta alteração ocorre normalmente para curvas com nível de esforço axial muito elevado e para o primeiro ponto.

Etapa 5) - Determinar a profundidade da linha neutra, x .

Utilizando de forma conjugada o método iterativo de Newton e da Bi-secção, resolve-se a equação (2.11) em ordem a x , a cota da linha neutra.

Etapa 6) - Verificações de segurança e validação domínios de flexão.

Calculam-se as extensões extremas nos materiais e verifica-se se estão dentro dos limites regulamentares e se necessário geram-se novos $\epsilon_{2,j}$ que respeitem os encurtamentos máximos do domínio 5.

• Através das relações cinemáticas semelhantes às equações (2.6) a (2.8) (porque dependem do tipo de secção e plano de flexão) determinam-se as extensões extremas dos materiais que são negativas se forem de encurtamento:

ϵ_1 - extensão na fibra menos comprimida de betão (fibra inferior)

ϵ_{a1} - extensão na fibra mais traccionada do perfil,

ϵ_{s1} - extensão na fibra mais traccionada das armaduras

• Verificar se as extensões de tracção, no perfil e armadura, ultrapassam as extensões limite:

Verificar se: $\epsilon_{a1.lim}(=+1\%) \geq \epsilon_{a1}$, senão, ocorre ruptura do perfil à tracção;

Verificar se: $\epsilon_{s1.lim}(=+1\%) \geq \epsilon_{s1}$, senão, ocorre ruptura das armaduras à tracção.

(As extensões de compressão não são condicionantes para o perfil e armaduras porque são muito superiores às extensões limites de encurtamento do betão, mesmo em secções cheias)

• Verificar se a extensão $\epsilon_{2,j}$ não ultrapassa a $\epsilon_{2.lim}$, o que é feito:

(i) impondo um limite de encurtamento à fibra inferior de betão, $\epsilon_{1.Lim}$, e,

(ii) verificando se o encurtamento calculado na fibra inferior de betão (ϵ_1) satisfaz esse limite

Limite de encurtamento na fibra inferior, $\epsilon_{1.Lim}$.

Se $\epsilon_{2,j} < \epsilon_{c1}$ então ϵ_1 não pode ultrapassar o limite

$$\epsilon_{1.Lim} = \epsilon_{c1} - \frac{\epsilon_{c1}}{\epsilon_{cu1} - \epsilon_{c1}} (\epsilon_2 - \epsilon_{c1}), \quad (2.13.a-rep)$$

caso contrário não há que alterar nada, $\epsilon_{1.Lim} = \epsilon_{2,j}$, sendo ϵ_{c1} a extensão de encurtamento no betão associada à sua tensão máxima.

Verificar se ϵ_1 cumpre o limite $\epsilon_{1.Lim}$

Se $\epsilon_{1.Lim} \leq \epsilon_1$ então todas as tensões no betão estão validadas (estado de flexão compressão entre os domínios 2 a 4) e passa-se para a **Etapa 7**.

Se não se cumprir $\epsilon_{1.Lim} \leq \epsilon_1$ estamos no domínio 5 cuja extensão limite é:

$$\epsilon_{2.Lim} = (\epsilon_{c1} - \epsilon_0) \frac{\epsilon_{cu1} - \epsilon_{c1}}{\epsilon_{c1}} + \epsilon_{c1}, \quad (2.14.a-rep)$$

e o $\varepsilon_{2,j}$ não cumpre este limite. Então verifica-se a seguir se o ponto anterior, $\varepsilon_{2,j-1}$, cumpre esse limite, assumindo-se como novos $\varepsilon_{2,lim}$ o menor encurtamento entre $\varepsilon_{2,j-1}$ e $\varepsilon_{2,lim}$ da expressão (2.14a,b). Geram-se novos valores de $\varepsilon_{2,j}$, igualmente espaçados entre todos os pontos, e dentro do intervalo $[\varepsilon_0, \varepsilon_{2,lim}]$. Retrocede-se para a **Etapa 4**.

Etapa 7) - Coordenadas da curva Momento Curvatura.

Através das expressões (2.12) e (2.5) aqui repetidas, obtém-se o par ordenado (M- χ) que é mais um ponto da curva M- χ associada ao esforço axial $N_{axil,i}$.

$$M = \int_{A_c} \sigma_c(\varepsilon_2, x) * z * dA_c + \int_{A_a} \sigma_a(\varepsilon_2, x) * z * dA_a + \sum_i \sigma_s(\varepsilon_2, x) * A_i * z_i \quad (2.12\text{-rep})$$

$$\chi = \frac{-\varepsilon_2}{x} \quad (2.5\text{-rep})$$

Os resultados (M, χ), coordenadas de mais um ponto da curva Momento-Curvatura são guardados. Os integrais da expressão 2.12 tem que considerar a variação da geometria da secção. Não se usa nenhuma técnica de integração numérica para os resolver (tipo Gauss, Lobatto, etc). Os elementos maiores da secção no sentido (almas, secção de betão, ocos redondos, etc) são divididos em faixas de 0.25 mm, tendo as de extremidade 0.125 mm para se atender melhor às tensões de "pico" nos extremos. Os elementos menores da secção (abas, tubos) são divididos em faixas de metade de dimensão das anteriores. O processo é suficientemente rápido e bastante preciso.

Se houver mais extensões $\varepsilon_{2,j}$ voltar à **Etapa 4**.

Se houver mais esforços axiais $N_{axil,i}$ voltar à **Etapa 3**.

Etapa 8) - Escrever os resultados num ficheiro (tipo *.MCMC). Fim.

Os resultados são o número de curvas (igual ao número de níveis de esforço axial), esforço axial plástico, número de pontos por curva, coordenadas desses pontos (M- χ), curvatura limite de cada curva, tipo de análise se por valores característicos ou resistentes, etc.

Fluxograma do Programa "M-C"

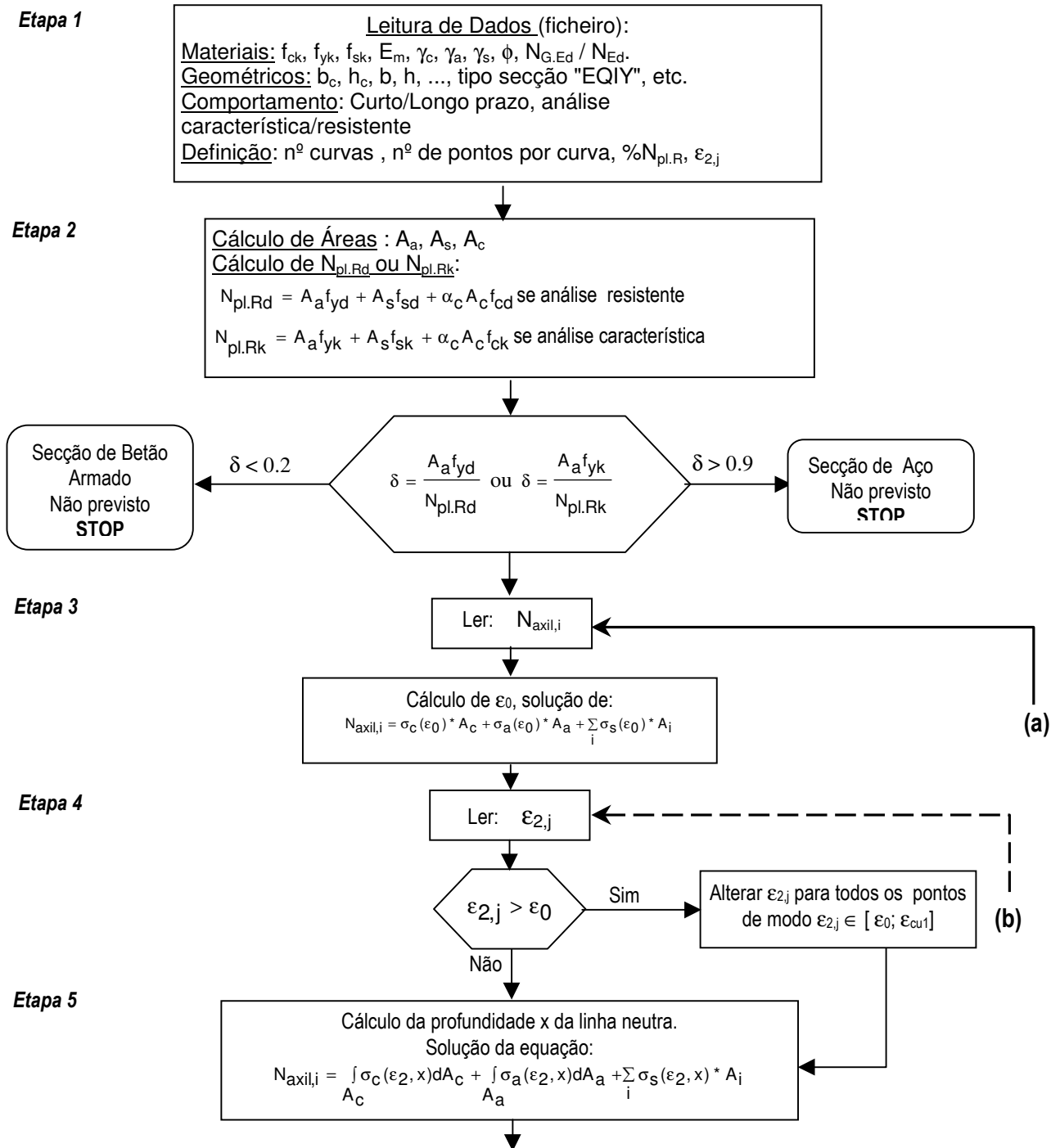


Figura 3.3- Fluxograma do programa "M-C" (continua).

Etapa 6

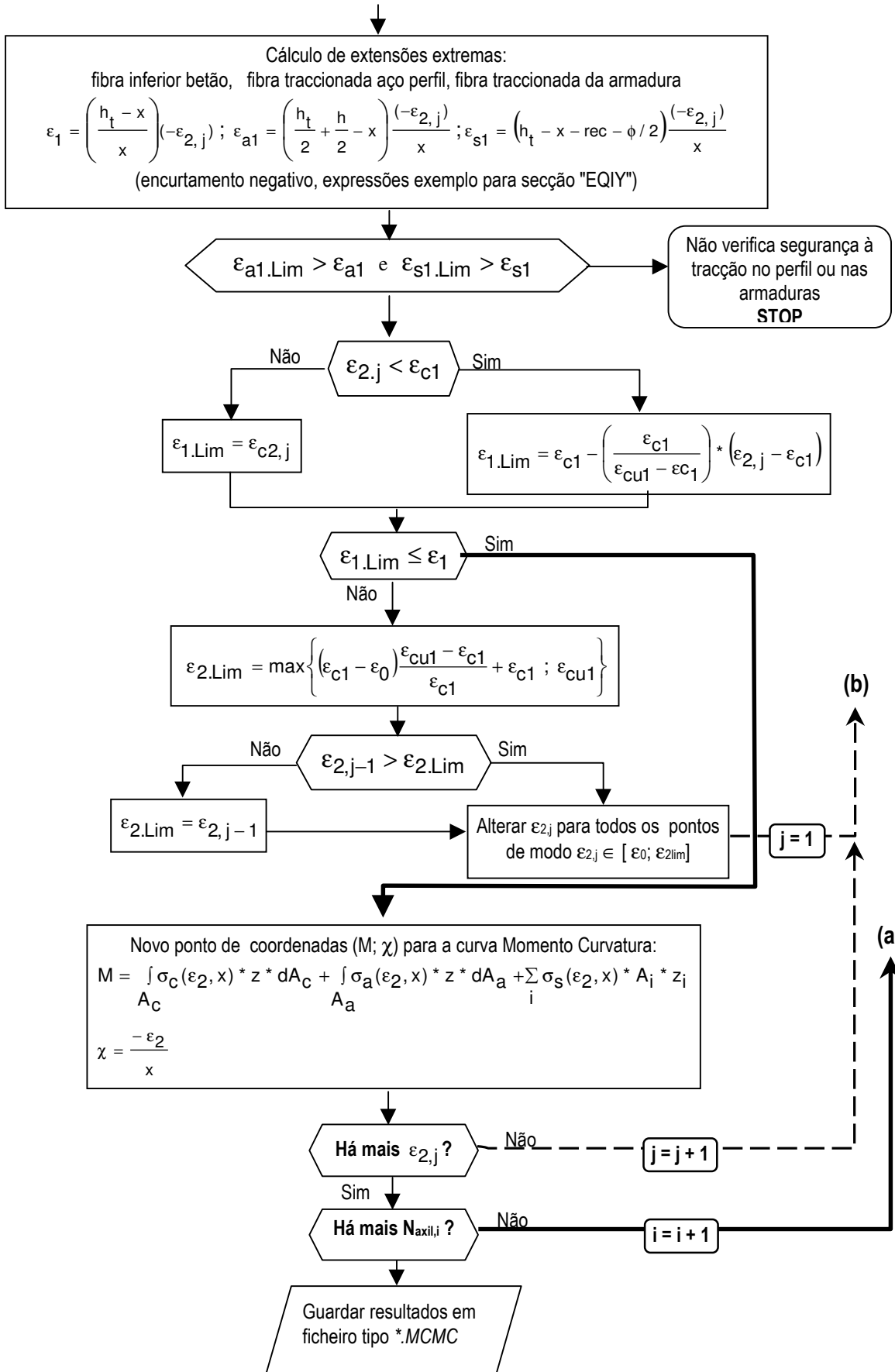


Figura 3.3 (continuação) - Fluxograma do programa "M-C"

As Figuras 3.4 e 3.5 apresentam curvas momento curvatura geradas pelo programa descrito respectivamente para situação de serviço a curto e a longo prazo. Refere-se a uma secção envolvida de betão C25/30 de dimensões 360x360 mm, com um perfil HEB 240 de aço S235 e 8 varões de diâmetro $\phi 16$ de aço A400, em flexão em torno do eixo y-y.

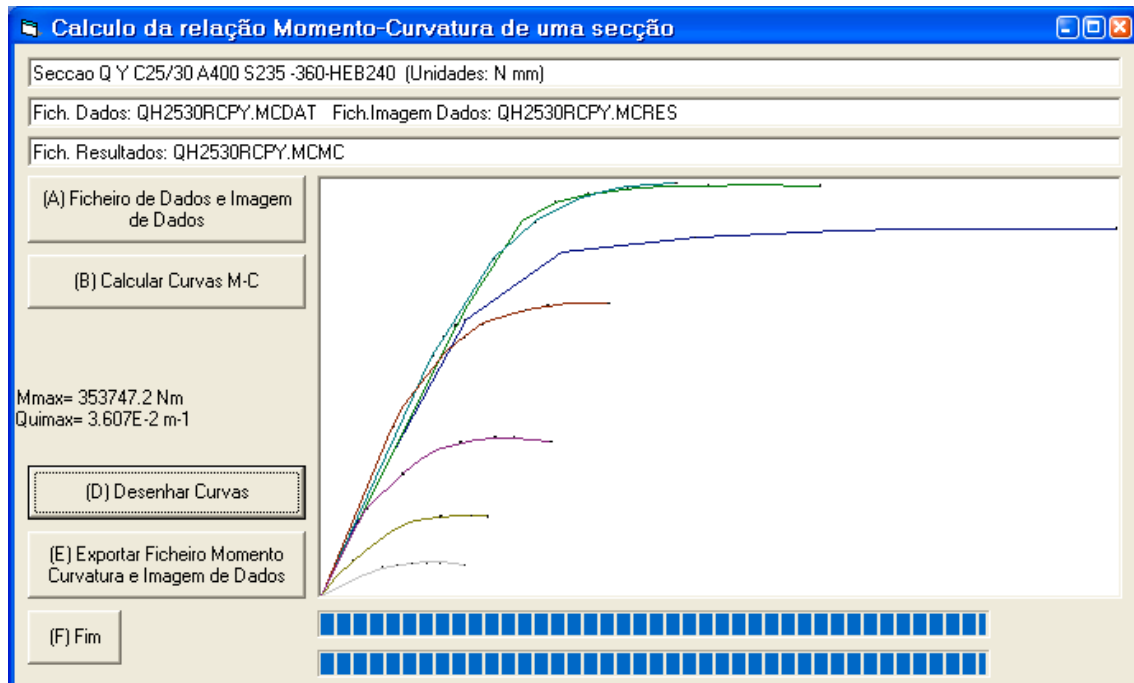


Figura 3.4 - Curvas Momento-Curvatura de secção mista a curto prazo (C25/30)

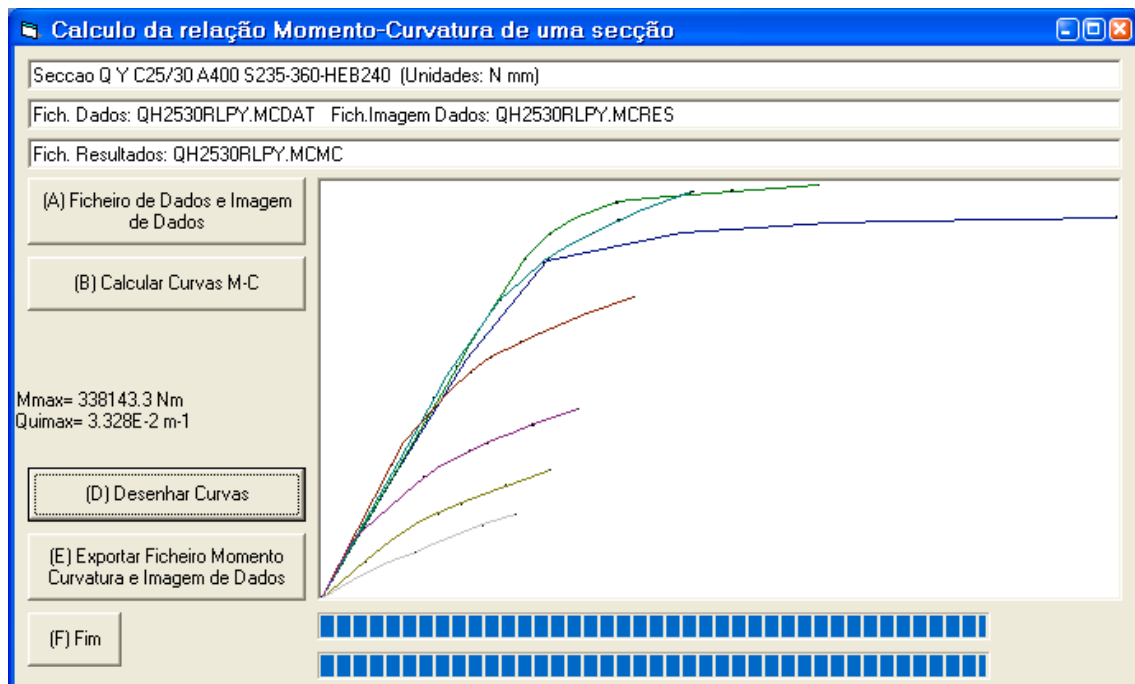


Figura 3.5 - Curvas Momento-Curvatura de secção mista a longo prazo (C25/30)

As abcissas representam curvaturas e as ordenadas momentos. A curva a azul (patamar de cedência maior) diz respeito à flexão simples ($N_{axil,1}=0$). As duas curvas de momento máximo acima da anterior são para esforços axiais de $12.5\%N_{pl,Rd}$ e $25\%N_{pl,Rd}$ que têm o efeito de aumentar a resistência da secção a momento flector. As restantes curvas, de momentos máximos sempre decrescentes, correspondem a esforços axiais respectivamente de 50%, 75%, 87.5% e 95% de $N_{pl,Rd}$. A curvatura máxima que se atinge em cada curva (curvatura limite), decresce com o aumento do esforço axial. A curto prazo as secções têm um comportamento não linear pronunciado, e são mais dúcteis.

As rigidezes das secções são as tangentes às curvas desenhadas. Para curvaturas pequenas (momentos aplicados pequenos) e para esforços axiais até $25\%N_{pl,Rd}$ ocorre um aumento de rigidez, devido ao efeito estabilizador do esforço axial.

Apresenta-se de seguida um ficheiro de dados tipo (*.MCDAT).

Exemplo de Ficheiro de Dados (tipo *.MCDAT)

Titulo do ficheiro

Seccao Q Z C50/60 A400 S235-360-HEB240 (Unidades: N mm)

'Tipo de Secção (EQIY ECQIZ FC FRY FRRZ FCEIY FCEZ PEXY) E-encased P-parcial/ encased F-filled
EQIY

'tensao caract: betao caract, betao med,aço armad., aço estrut.

50 58 400 235

'coeficiente fluencia, mod.elast.Betão, mod.elast.AçoArmadura ,mod elast açoPerfil

3 37000 200000 210000

'Curto Prazo CP ou Longo Prazo LP

LP

'Razão entre: NcargaPermanente/Ncarga calculo

0.628

'CoefKSd[0/1], coef segurança: betao[gamaC], Mod.Elastic[gamaE] , aço armaduras[gamaS], aço perfil[gamaA]

1 1.5 1.2 1.15 1.1

'secção de betão: base1 altura1 base2 altura2 fibrabetãocomprimidaY fibBetTraccionadaY fibBetComprZ fibBetTraccZ

360 360 25 25 0 0 0 0

, recobrimento medido paralelo a Y ,recobrimento medido paralelo a Z

25 25

'nome do perfil metalico

HEB 240

'dimensões do perfil metalico nº1: altura hy, baseby , esp.alma twy, esp.banzo tfy, raio rry

240 240 10 17 21

'dimensões do perfil metalico nº2: altura hZ, basebZ , esp.alma twZ, esp.banzo tfZ, raio rrZ

240 240 10 17 21

'diametro dos varões, Nº total varões, varoes numa camada paralelos a YY , paralelos a ZZ, de canto

16 8 3 3 0

'Nº de (i) niveis de esforço axial

7

'razão entre o nivel (i) e Npl.Rk (ou Npl.Rd)

0 0.125 0.25 0.5 0.75 0.875 0.95

'Numero de Pontos

11

' Extensão2 de cada um dos pontos

```
0 0 0 0 0 0 0
-0.00001 -0.00111 -0.00111 -0.00111 -0.00111 -0.00111 -0.00111
-0.0001 -0.0012 -0.0012 -0.0012 -0.0012 -0.0012 -0.0012
-0.00025 -0.0016 -0.0016 -0.0016 -0.0016 -0.0016 -0.0016
-0.0005 -0.0018 -0.0018 -0.0018 -0.0018 -0.0018 -0.0018
-0.001 -0.002 -0.002 -0.002 -0.002 -0.002 -0.002
-0.0015 -0.0023 -0.0023 -0.0023 -0.0023 -0.0023 -0.0023
-0.002 -0.0025 -0.0025 -0.0025 -0.0025 -0.0025 -0.0025
-0.0025 -0.00275 -0.00275 -0.00275 -0.00275 -0.00275 -0.00275
-0.00275 -0.003 -0.003 -0.003 -0.003 -0.003 -0.003
-0.0035 -0.0035 -0.0035 -0.0035 -0.0035 -0.0035 -0.0035
```

'Tipo de Secção (EQIY ECQIZ FC FRY FRRZ FCEIY FCEZ PXY)

1ª letra: E-encased P-parcial/ encased F-filled

2ª letra: Q -quadrada R- rectangular C-Circular X- cruz

3ª letra: no caso de Encased ou parcial/ encased I - perfil metalico I

3ª ou 4ª letra: Y-eixo y , Z- eixo z, "-sem eixo

3.3 - Programa VCol-Mx

O segundo programa é um programa de análise estrutural não linear. Realiza por isso uma análise incremental, adoptando matrizes de rigidez material e geometricamente não lineares, e vectores de força equivalentes a carga uniforme, para cada um dos troços (elementos finitos). Esta matriz e vector estão definidas na forma fechada, ou seja, não são integradas ao longo da área e comprimento do elemento em cada instante da análise, pois tornaria o programa mais complexo, com maior volume de dados e demorado. Em cada ciclo da análise incremental a rigidez de flexão EI que afecta matriz de rigidez de cada elemento é actualizada o que traduz o comportamento materialmente não linear da barra. A actualização do esforço axial afecta as funções de estabilidade dos elementos da matriz de rigidez e no vector de forças equivalente a cargas de vão, o que representa os efeitos geometricamente não lineares.

Como já foi explicado na secção 2.3.1.2 a rigidez de flexão EI de cada troço determina-se a partir da curvatura média do troço, que é a média das curvaturas em módulo das secções extremas. Usa-se o módulo das curvaturas para o cálculo da curvatura média porque como a secção é simétrica a rigidez é independente do sentido de actuação do momento. As curvaturas dependem do estado de deformação do troço, por intermédio dos deslocamentos nodais q_i , e do estado de tensão, por intermédio de N (no factor k), como mostra a equação 2.22.b e c.

Conservativamente as secções que nos interessa averiguar são as de menor rigidez de flexão que são em geral aquelas onde o momento flector é maior. Por isso deveria em cada troço averiguar o ponto de maior momento, determinar a curvatura, e a rigidez. Não foi este o caminho seguido porque se achou demasiado conservativo. Limitamo-nos a usar a média dos valores das secções extremas. De qualquer forma é intuitivo que a estimativa de EI ao longo da barra será tanto mais precisa quanto maior o número de troços porque se minoram as diferenças entre os valores das secções extremas e o valor máximo (não necessariamente no vão). Estes aspectos podem merecer um estudo mais rigoroso mas atendendo a limites de tempo achou-se não prioritário.

Portanto tem que se assumir que o cálculo da rigidez de flexão de um troço, com a perspectiva de a reduzir a um só número, é sempre uma aproximação. Para superar esta dificuldade de uma forma pragmática realiza-se a subdivisão da barra num número razoável de troços. Também baseado no bom senso se admite ter um troço por cada momento máximo ou inversão de sinal de momento na barra, o que conduz a um número mínimo de três troços por barra.

A subdivisão da barra num maior número de troços é vantajosa porque:

(i) permite quantificar melhor a variação de rigidez de flexão ao longo desta;

- (ii) origina o aparecimento de mais graus de liberdade, e conseqüentemente uma melhor definição do estado de deformação da estrutura;
- (iii) possibilita a aplicação de cargas nodais, as quais podem ser momento, força axial e força transversal, em maior número nós, simulando melhor as condições de carregamento;
- (iv) possibilita definir para cada troço uma secção geometricamente diferente, o que dá ao programa a particularidade de resolver barras de secção variável.

A metodologia usada para implementar a análises presentes inspira-se

- (i) no "Metodo Refinado de Rótula Plástica" que actualiza o módulo tangente E_t e os coeficientes η_a e η_b os quais traduzem a verificação de resistência e grau de plastificação das secções extremas. Paralelamente, a sistematização desenvolvida actualiza a rigidez de flexão EI e avalia se as curvaturas nas secções extremas estão dentro dos limites de validade das verificações e segurança à flexo-compressão.
- (ii) o "Método Baseado na Rigidez Nominal" do EC2 ou o "Método Simplificado do EC4" quando utiliza uma rigidez de flexão nominal (ou efectiva) para atender ao estado de fissuração, fluência da barra.

As análises possíveis efectuar são de dois tipos:

- (i) cálculo de esforços e de deslocamentos nodais
- (ii) determinação da carga última.

3.3.1- Cálculo de Esforços e de Deslocamentos Nodais.

Começa-se por discretizar a estrutura, ver Figura 3.6, indicando o número de troços, relacionando as partes contraventadas com estes, indicando as restrições de apoio, indicando o número de secções tipo e correlacionando-as com cada troço, indicando o nome dos ficheiros que contém informação acerca das curvas Momento-Curvatura de cada secção, as cargas nodais, e as excentricidades de cada parte contraventada de acordo com a Tabela 6.5 do EC4, os parâmetros de carga λ e incrementos de carga $\Delta\lambda$ a assumir automaticamente, etc. Esta informação está ordenada e constitui um ficheiro de dados do tipo **"*.dat"**. Um exemplar é mostrado na secção 3.5.1.

O conjunto de cargas aplicadas aos nós podem ser momento, carga longitudinal e/ou carga transversal. As imperfeições geométricas, excentricidade da tabela 6.5 do EC4 que é indicada da folha de dados, é convertida em força horizontal equivalente (conjunto de forças q_{eq1} , q_{eq2} , Q_{eq1} e Q_{eq2} da Figura 3.6). Como exige o EC4, esta imperfeição tem que actuar no sentido mais desfavorável que em geral não se sabe porque depende da combinação de acções presente. Por isso, de forma interactiva, o utilizador pode mudar o sentido da imperfeição e optar pelos resultados mais penalizantes. Por outro lado, se a barra estiver contraventada pontualmente o

sentido da imperfeição é automaticamente alternado entre as partes da coluna separadas por apoios e/ou pontos de contraventamento, como mostra a Figura 3.6.

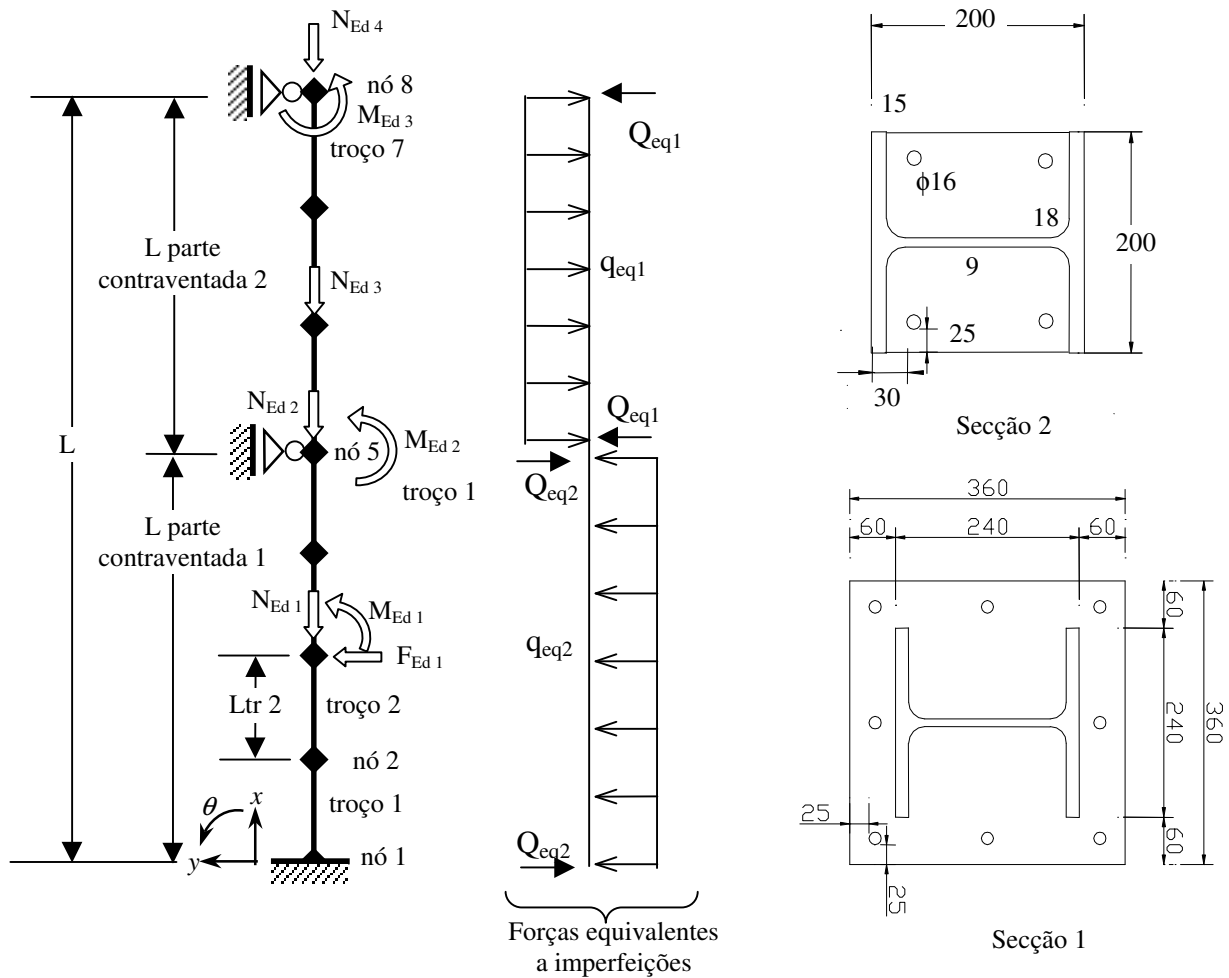


Figura 3.6 - Exemplo de viga coluna

Tanto as cargas como as imperfeições são directamente proporcionais ao parâmetro λ . Desta forma os esforços são calculados para a combinação de cargas presente, ou para outra que lhe é proporcional. Salienta-se que os valores de λ e de $\Delta\lambda$ fornecidos pelo ficheiro de dados podem ser alterados interactivamente pelo utilizador.

A partir da janela principal do programa (Figura 3.7) o utilizador indica de forma interactiva, e "clikando" no rato do computador, a localização do directório onde se localizam os ficheiros com a curvas de interacção Momento-Curvatura das diversas secções (Figura 3.8), sendo desnecessário indicar qual o ficheiro porque o seu nome deve constar no ficheiro de dados de Vcol-Mx (do tipo *.DAT). Indicará também interactivamente qual o directório do ficheiro de dados para Vcol-Mx, e qual o seu nome. A partir desse nome é-lhe automaticamente acrescentado o sufixo "*.res", de modo a constituir o nome do ficheiro de resultados (Figura 3.9). Após estas operações aparece na janela principal o comprimento total da barra (L), o

parâmetro de carga λ e o incremento $\Delta\lambda$ a assumir automaticamente e o grau de liberdade de controle (que possibilita a o de senho das curvas carga-deslocamento)

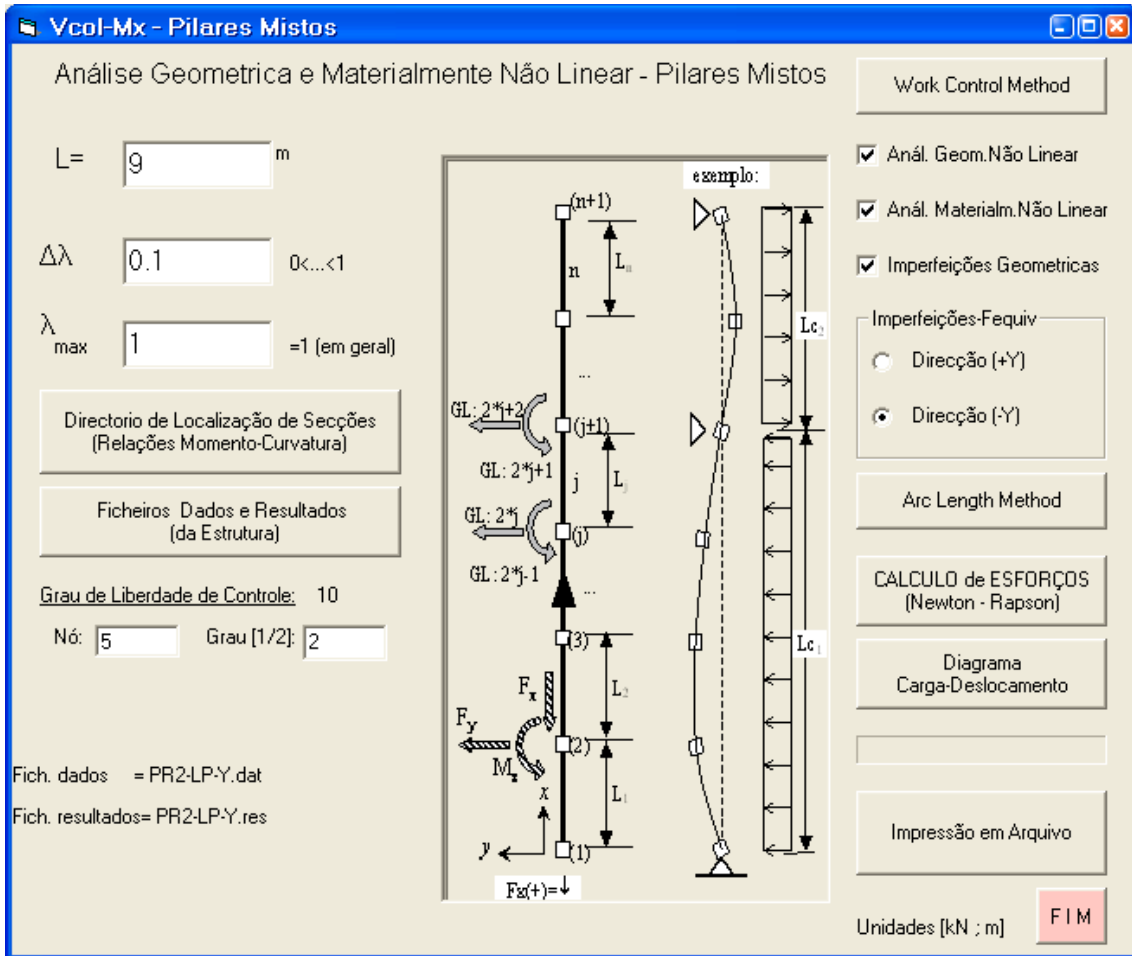


Figura 3.7 - Janela principal do programa Vcol-Mx

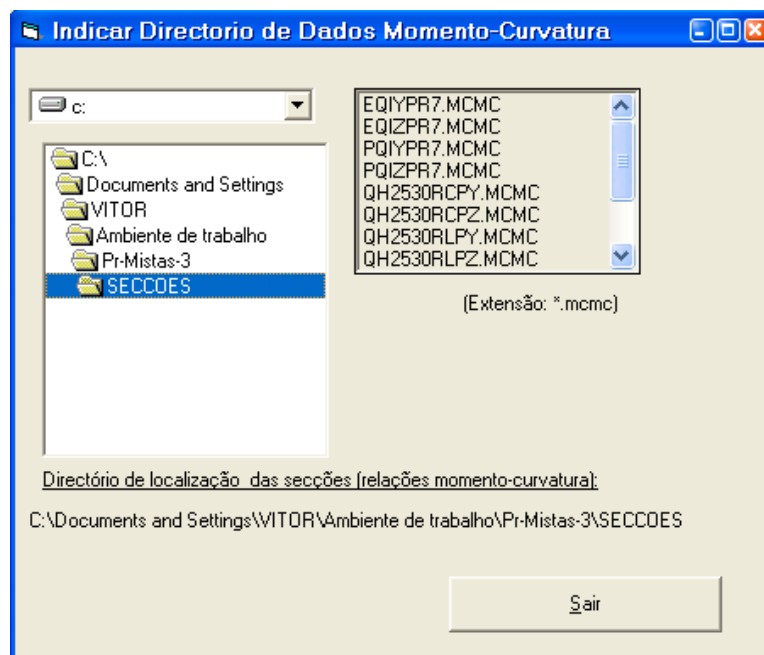


Figura 3.8 - Localização dos ficheiros Momento-Curvatura das secções (tipo *.MCMC)

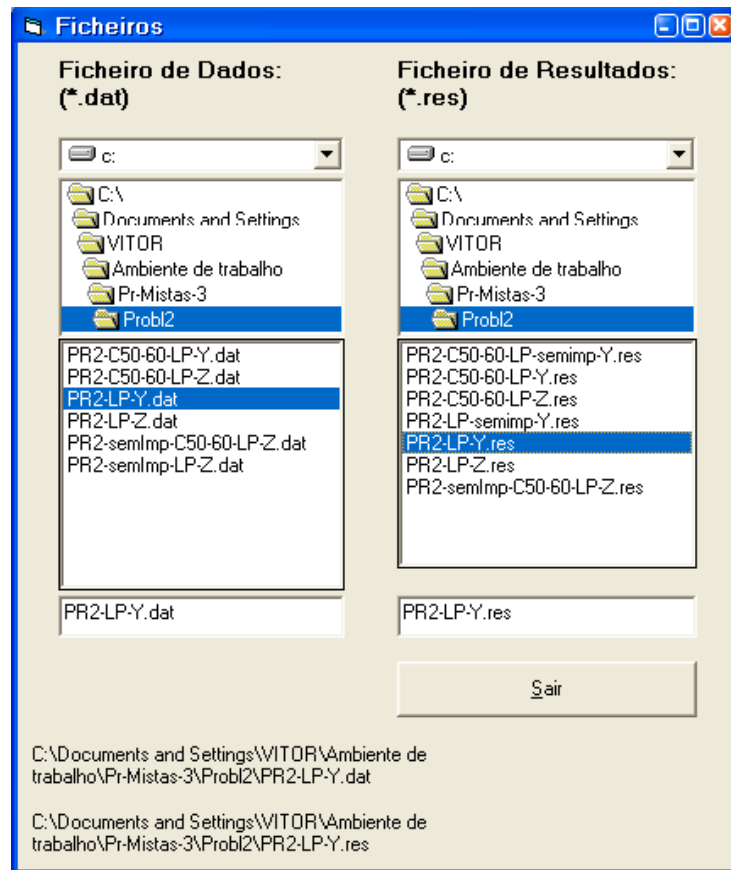


Figura 3.9 - Indicação dos ficheiros de dados (*.dat) e resultados (*.res) de Vcol-Mx

Basta agora escolher o tipo de análise (ver Figura 3.7) cujas opções podem ser (i) geométricamente não linear (2º ordem) ou linear (1ª ordem), (ii) materialmente não linear ou linear, (iii) com imperfeições geométricas, devendo aqui indicar o sentido (+Y ou -Y), ou sem imperfeições. De seguida em "Cálculo de Esforços" é efectuada a análise com base no parâmetro λ . É preciso carregar em "Impressão em Arquivo" para que toda a informação (i) dos dados (ii) escolhida interactivamente e (iii) os resultados dos esforços e deslocamentos seja registada no ficheiro de resultados (tipo *.res). Um exemplar deste ficheiro apresenta-se na secção 3.5.2.

É ainda possível visualizar a relação carga deslocamento carregando em "Diagrama Carga-Deslocamento". Surge uma nova na janela (Figura 3.10), onde se pode alterar λ ($e/ou \Delta\lambda$) e avaliar a "resposta" da estrutura. Verifica-se que para um parâmetro de carga $\lambda=1.65$ a relação carga-deslocamento é, na parte final, não linear e que o deslocamento máximo do grau de liberdade de controle é de -0.0619m.

As verificações de segurança à flexo-compressão são satisfeitas visto não ter surgido qualquer aviso.

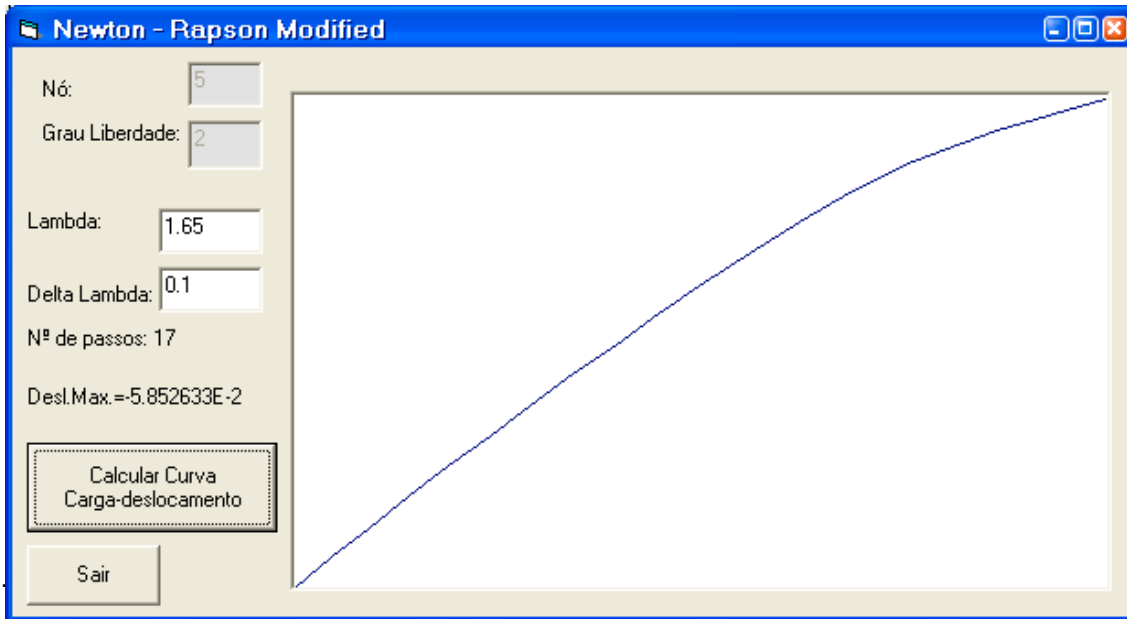


Figura 3.10 - Relação carga-deslocamento para $\lambda=1.65$ e $\Delta\lambda=0.1$

Porém se aumentar λ para 1.75 ocorre um aviso de colapso por rotura da secção em flexão, resultante de um deslocamento excessivo, -0.147m. Esta curva (ver Figura 3.11) já mostra um patamar horizontal bastante longo.

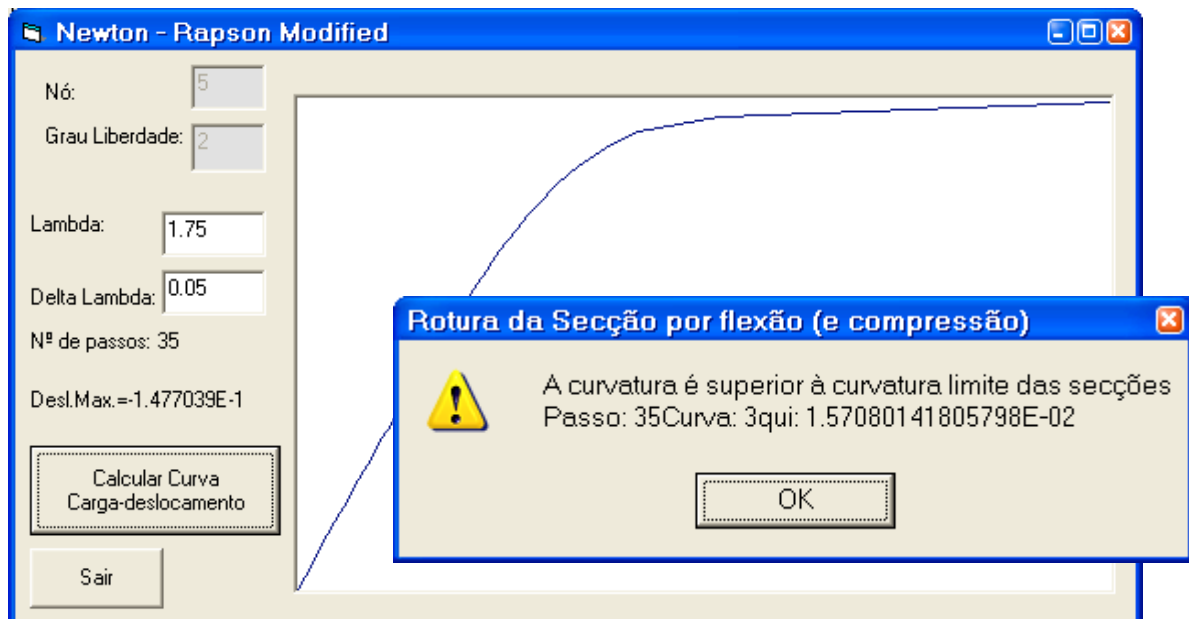


Figura 3.11 - Relação carga-deslocamento para $\lambda=1.75$ e $\Delta\lambda=0.05$ e colapso da secção

Os deslocamentos na parte final do patamar poderão ter sido determinados com pouco rigor. De facto assim pode acontecer porque o método incremental de cálculo usado para o cálculo de esforços e deslocamentos é o de Newton-Rapson Modificado, explicado nas secções 2.5.2 a 2.5.2.5, o qual tem um comportamento pouco preciso perto da carga limite, em virtude da matriz de rigidez ser quase indefinida.

Os avisos de colapso por falta de resistência podem ser de dois tipos:

- (i) rotura por flexo-compressão - se a curvatura limite da curva Momento-Curvatura é ultrapassada (o aviso da Figura 3.11 refere-se a este tipo de colapso);
- (ii) rotura por compressão excessiva - se a própria resistência plástica axial é ultrapassada

A coluna ainda pode colapsar por encurvadura e por isso é importante determinar a carga limite, o que deve ser feito recorrendo ao método de Controle de Arco (Arc-Length) ou Método de Controle de Trabalho (Work Control).

No entanto o método de Newton-Rapson permite determinar um minorante da carga crítica, aumentando sucessivamente λ até ao colapso. Em termos gerais esta metodologia não é recomendada [21] porque (i) o cálculo já tem pouco rigor no patamar horizontal, (ii) a barra pode colapsar por outro motivo (resistência, deformação excessiva) antes de ter atingido o ponto limite (aspecto que é detectado pelo presente programa). No caso presente obteve-se um aviso de rotura por flexo-compressão para $\lambda = 1.73$, num ponto em que a curva carga-deslocamento inicia o patamar horizontal, portanto muito próximo da carga limite.

O Fluxograma do Método de Controle de Carga Newton-Rapson Modificado, está apresentado na secção 3.4, no final deste Capítulo, tendo as variáveis mesmo significado das da secção 2.5.2 a 2.5.2.5.

3.3.2- Determinação da Carga Última.

3.3.2.1- Método de Controlo de Trabalho (Work Control Method)

Como vimos, no que respeita ao cálculo da carga limite o Método Newton-Rapson fornece valores que são convergentes para o ponto limite, mas com pouco rigor [18] porque a matriz de rigidez é quase indefinida. Por isso é preciso escolher um método incremental vocacionado para ultrapassar o ponto limite, isto é, que apresente pelo menos o início da curva descendente, de modo a se ter a certeza de que esse ponto foi ultrapassado.

Optou-se inicialmente pelo Método de Controle de Trabalho por ter alguma independência em relação a cargas impostas ou deslocamentos impostos, como são os métodos de controle de carga e controle de deslocamento.

O Método de Controle de Trabalho (secção 2.5.5) baseia-se na imposição de um incremento de trabalho (dW) à estrutura em cada passo, sendo nulo durante as iterações. É necessário indicar o número de passos (incrementos) a efectuar. O utilizador controlando simultaneamente estas

duas variáveis faz com que o programa evolua até ultrapassar a carga limite, ou até à rotura por resistência.

A partir da janela principal (Figura 3.7) e escolhendo "Work Control Method" surge uma nova janela, da Figura 3.12 onde, por várias tentativas se indicou como incremento de trabalho $dW = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ e um número de passos = 93.

Verificamos da curva carga-deslocamento que ao fim do passo 93 o ponto limite foi claramente ultrapassado, concretamente para uma carga limite "Lambda Crítico" = 1.727, no passo 89, a que corresponde o deslocamento crítico de "Des.Crit." = -0.0805m.

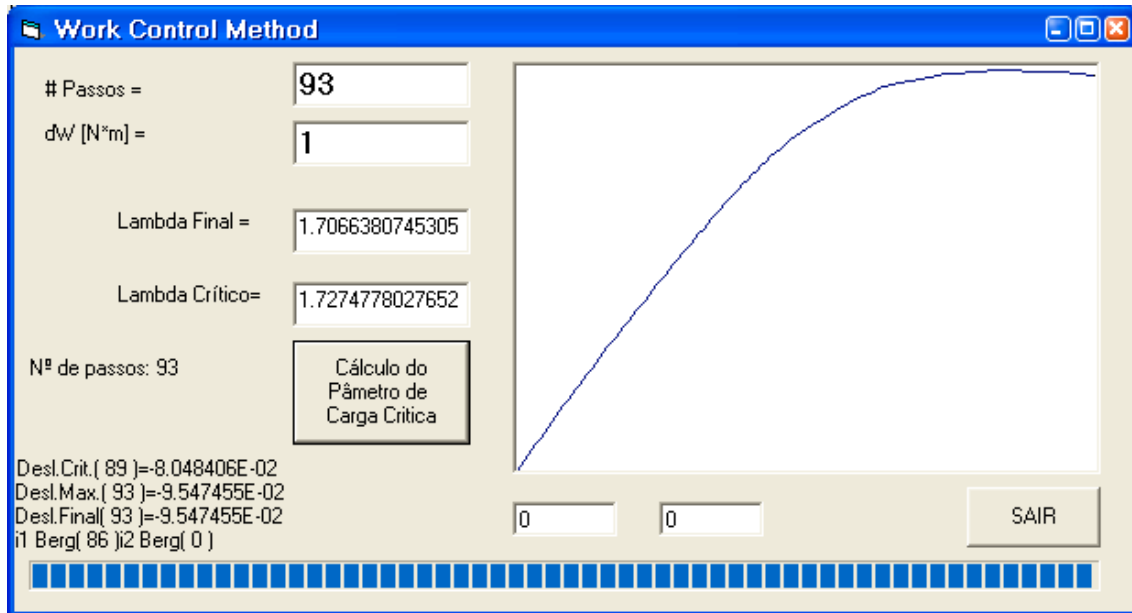


Figura 3.12 - Determinação da carga última pelo algoritmo Controle de Trabalho, $\lambda_u = 1.727$.

Também se constata que o deslocamento máximo foi, no fim do passo 93, $\text{Desl.Final} = -0.0955\text{m}$. Se agora introduzirmos mais um passo verifica-se que surge um aviso de rotura por flexo-compressão no passo 94 (ver Figuras B.13 e B.14 do Anexo B) para um deslocamento final de $\text{Desl.Final} = -0.0981\text{m}$. Este deslocamento é 2.7% superior ao do passo 93, e, 21% superior ao deslocamento crítico. Conclui-se para já que a rotura é por encurvadura.

É conveniente fazer um estudo de convergência variando dW e o número de passos (ver anexoB). Chegou-se à conclusão que carga limite tende para 1.731.

Numa fase inicial de implementação do programa verificou-se que logo que se ultrapassava a carga limite, nos passos imediatamente a seguir o incremento de deslocamento era muito grande, conduzindo e forma irreal à rotura por resistência. A razão residia no facto da matriz de rigidez ser quase indefinida e a parcela de forças desequilibradas ser muito pequena conduzindo ao aparecimento de erros e oscilação de resultados. Assim introduziu-se o conceito do parâmetro de rigidez de Bergan. Quando este parâmetro, que é a razão entre a rigidez passo corrente e ao do primeiro passo, estiver no intervalo $[-0.05; +0.05]$ o programa deixa de

efectuar as iterações corrector, sem grande prejuízo visto as forças desequilibradas serem muito pequenas. Os resultados dependem também do intervalo de Bergan e por isso foram escolhidos valores que traduzissem um melhor comportamento, o que se pode reflectir na precisão dos resultados.

Contudo uma vantagem do método é fornecer parâmetros de carga sempre reais, o que nem sempre acontece com o Arc-Length a seguir implementado. Um fluxograma relativo a este algoritmo apresenta-se na figura 3.15 da secção 3.4.

3.3.2.2- Método de Controlo de Arco (Arc-Legth Method)

De modo a aferir os resultados do método anterior foi implementado o Método de Arc-Length do tipo cilíndrico [21, 22], que difere dos outros métodos do tipo arc-length sobretudo ao determinar o parâmetro de carga corrector ($\Delta\lambda_{i,j}$) a partir da resolução de uma equação quadrática. Neste método, e de uma forma interactiva, é prescrito pelo utilizador um determinado comprimento de arco, ds (mas indicado na janela por "delta L", ver Figura 3.13), que em princípio se mantém durante todo o processo, assim como o número de iterações. Como se sabe esse parâmetro de arco é convertido num parâmetro de carga predictor ($\Delta\lambda_{i,1}$) diferente de passo a passo. O utilizador, por tentativas, varia ds , mas sobretudo o número de iterações até se atingir a carga limite ou o esgotamento por resistência de alguma secção.

O algoritmo é ligeiramente mais lento que o de controle de trabalho. Na proximidade do ponto limite, verifica-se por vezes dois tipos de ocorrência. No primeiro, o parâmetro de carga corrector é superior ao predictor, e para evitar divergência no processo, o programa reduz automaticamente para metade o valor de arco, e reinicia-se o passo. O segundo resulta que equação quadrática fornece por vezes valores não reais, o que impossibilita o prosseguimento do cálculo e é difícil detectar a sua causa. Principalmente por esta última razão foi implementado o Método de Controle de Deslocamento acoplado ao Método de Controle de Arco. Assim quando o coeficiente de rigidez de Bergan (S_p) estiver no intervalo $[-0.001; +0.001]$ o programa comuta para o Método de Controle de Deslocamento, onde um incremento de deslocamento no grau de liberdade de controle é prescrito, e convertido num parâmetro de carga. O incremento de deslocamento prescrito é o último incremento observado (e portanto ainda dentro da rotina Arc-Length) segundo o grau de liberdade de controle. Este grau de liberdade é por omissão o deslocamento transversal do nó central da viga-coluna. No entanto o utilizador pode alterá-lo interactivamente, sobretudo se houver contraventamentos. A escolha deve recair sobre um ponto de flexibilidade moderada a fraca. Se eventualmente esse grau de liberdade for mal escolhido o diagrama carga-deslocamento apresentará curvas muito irregulares, e deslocamentos muito pequenos (fica graficamente representada a instabilidade numérica do problema). Este algoritmo está representado na Figura 3.16 da secção 3.4.

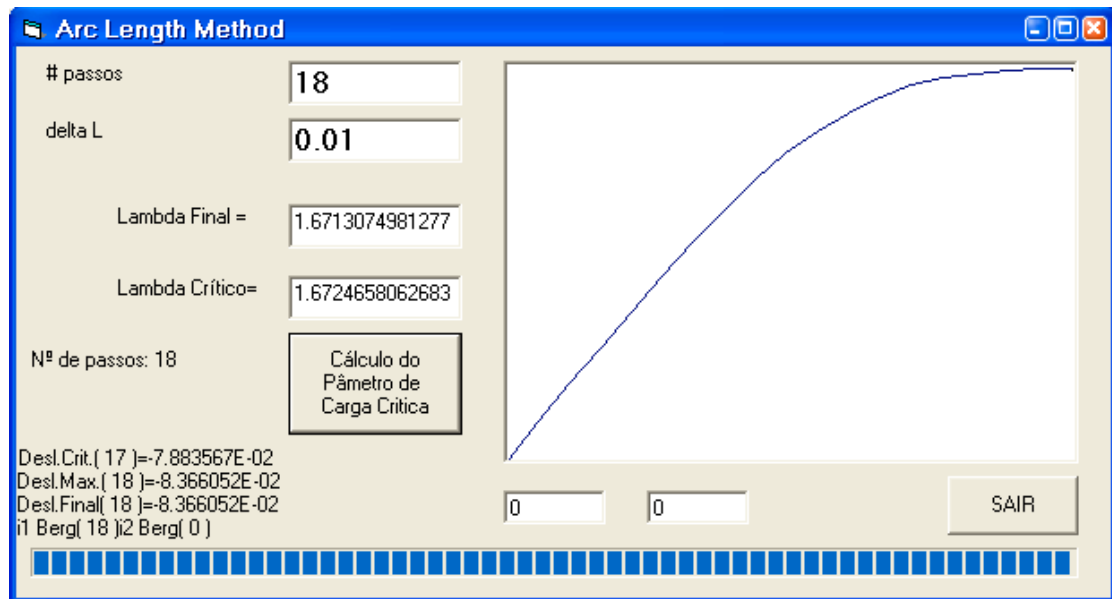


Figura 3.13 - Determinação da carga última pelo algoritmo Controle de Arco acoplado ao Controle de Deslocamento, $\lambda_u=1.672$.

Da Figura 3.13 se constata que logo que se atinge a carga limite há um decaimento muito breve da mesma, como se vê comparando o $\lambda_{\text{final}}=1.671$ (do último ponto calculado) com o $\lambda_{\text{cr}}=1.672$. Se aumentar um passo mais verifica-se o colapso da barra por resistência à flexo-compressão (excede a curvatura limite). No entanto como se tinha ultrapassado a carga limite $\lambda_u=1.672$, o tipo de rotura é por encurvadura por flexão global da barra.

Estudos de convergência efectuados posteriormente para os dois métodos resumem-se no seguinte quadro:

Quadro 3.1 - Comparação de carga última associada a fenómenos de encurvadura.

Controle de Trabalho			Arc-Length		
dW	nº Incrementos	λ_{limite}	ds	nº Incrementos	λ_{limite}
1	90	1.727	0.01	18	1.672
0.01	279	1.730	0.001	170	1.727
0.001	877	1.731	0.0001	1689	1.731

Ambos os métodos conduzem ao mesmo valor de carga crítica, que pelo facto de ser em regime materialmente não linear se designa por carga limite. No Anexo B mostra-se um estudo mais detalhado deste exemplo.

Nem o Método de Controle de Arco nem o Método de Controle de Trabalho aqui desenvolvidos têm uma rotina de cálculo de esforços e por isso não é possível o seu cálculo. Podemos no entanto determinar os esforços para um parâmetro de carga ligeiramente inferior ao da carga última recorrendo ao Método de Newton-Rapson. Serão obtidos com pouca precisão e será sempre uma situação de recurso, e efectuado por tentativas porque o método pode divergir.

3.3.2.3- Aspectos Particulares do Programa

Sempre que o programa correr até ao fim sem nenhum aviso as verificações de segurança à flexão composta nas secções extremas de cada barra são verificadas. No caso contrário há violação das verificações de segurança, o que acontece para um determinado valor de parâmetro de carga, a carga de rotura. As roturas ocorrem quando :

(i) o esforço axial superar o esforço resistente plástico, e nesse caso surge um aviso de "v fora dos intervalos previsto - rotura da secção por esforço axial", ou,

(ii) a curvatura na secção excede os limites de curvatura, para o nível de esforço axial presente, da relação Momento Curvatura da secção em causa, surgindo um aviso de "Curvatura superior à curvatura limite da secção - Rotura da secção por flexo compressão".

Relembra-se de que devido à impossibilidade de traçar curvas Momento-Curvatura para $N=N_{pl.Rd}$ que se assume como esforço axial máximo um valor na ordem de $95\%N_{pl.Rd}$ e que é um dado, fornecido pelo utilizador, para o programa M-C. Por este motivo as roturas da alínea (i) do parágrafo anterior surgem precoces em relação à realidade.

O programa avisa sempre quando a matriz de rigidez passa a negativa definida, indicando em que passo de carga tal ocorre. Também determina a carga no ponto limite e mostra o deslocamento do grau de liberdade de controle a ela associada. Se estiver a trabalhar em regime elástico o "Lambda Crítico" tem significado de carga crítica, e em regime não linear material tem o significado de carga limite. Para qualquer valor de parâmetro de carga, imediatamente abaixo do ponto limite é possível a determinação de esforços através do método Newton Rapson. A carga última é a menor carga de rotura ou do ponto limite para o menor deslocamento.

Finalmente se refere que a resolução do sistema de equações necessário resolver em cada passo de carga traduz-se pelo produto da matriz de rigidez inversa, da estrutura com condições de apoio, pelo vector de forças generalizadas, operação relativamente rápida. A inversão da matriz de rigidez é realizada à custa da eliminação de Gauss [30,32], como se se obtivesse a matriz solução de uma matriz de termos independentes de diagonal unitária. Em virtude do número reduzido de graus de liberdade das barras (em geral bem inferior a 50) e face à memória e velocidade dos computadores actuais, não se justificou a adopção de outro método de resolução de sistemas. Contudo, para uma expansão tridimensional, é de realçar que se deveria tirar partido da matriz ter uma semibanda muito estreita, convertendo-a numa matriz badeada, o que poupa espaço de memória e tempo de calculo [32]. Outra alternativa seria adoptar um método de resolução do sistema usando a factorização de Crout no formato $K = L \cdot D \cdot L^T$, que é bastante rápido e cuja matriz diagonal D contém pivots que ajudam a distinguir se os pontos singulares da curva carga-deslocamento são pontos de bifurcação ou pontos limite [22].

3.4 - Fluxogramas

Método de Controlo de Carga de Newton Rapson Modificado

(projecto: COL-MX.vbw , modulo COL-MX3.bas)

(Considera imperfeições nas barras através de forças equivalentes)

Dados: N_{Ed} , M_{Ed} , $\Delta\lambda$, $\lambda_{m\acute{a}x}$, Geometria, Materiais
 Objectivo: Cálculo de esforços, Cálculo da carga limite

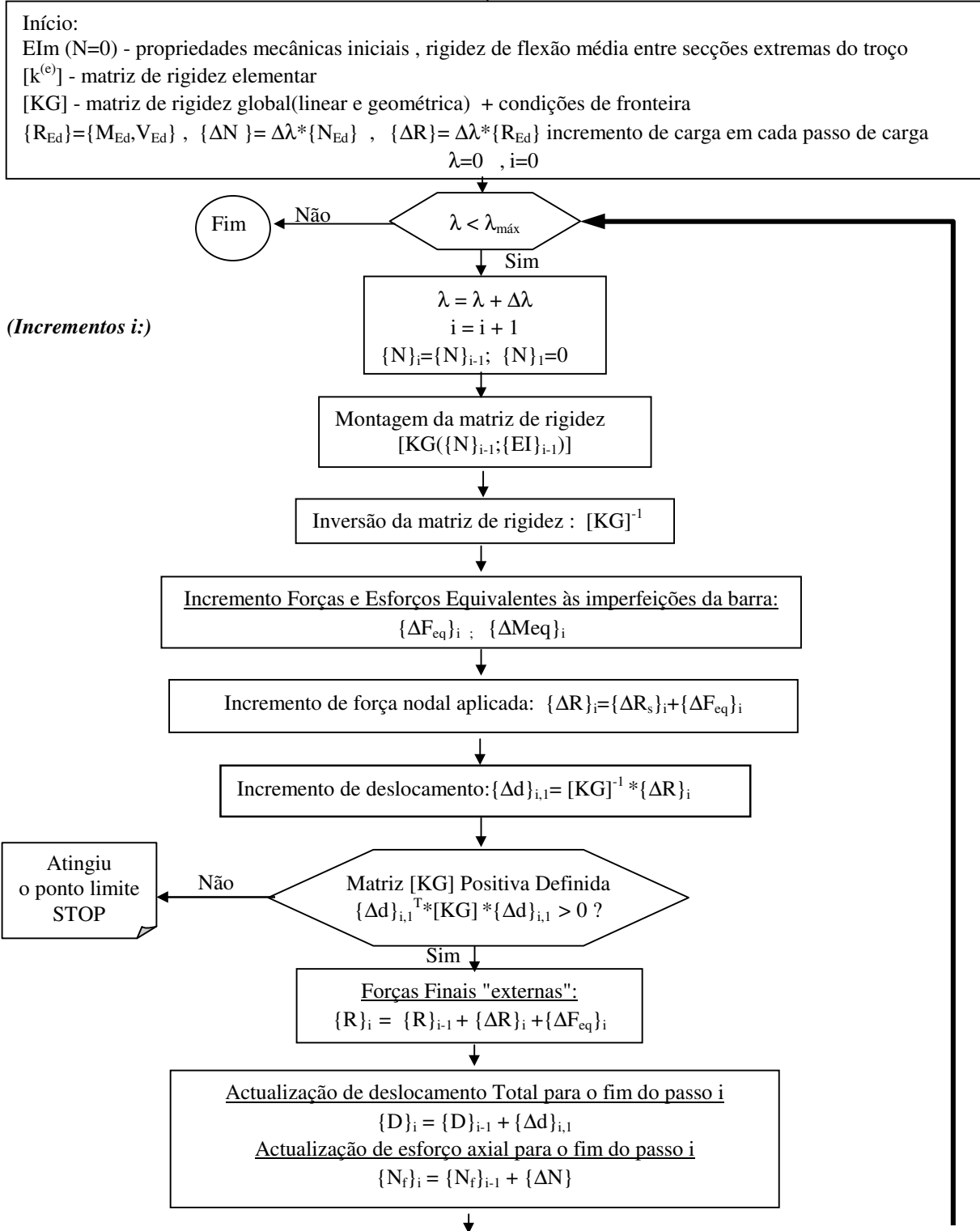


Figura 3.14 - Fluxograma do Método de Controlo de Carga Newton-Rapson (continua)

(a)

(Iterações j:)

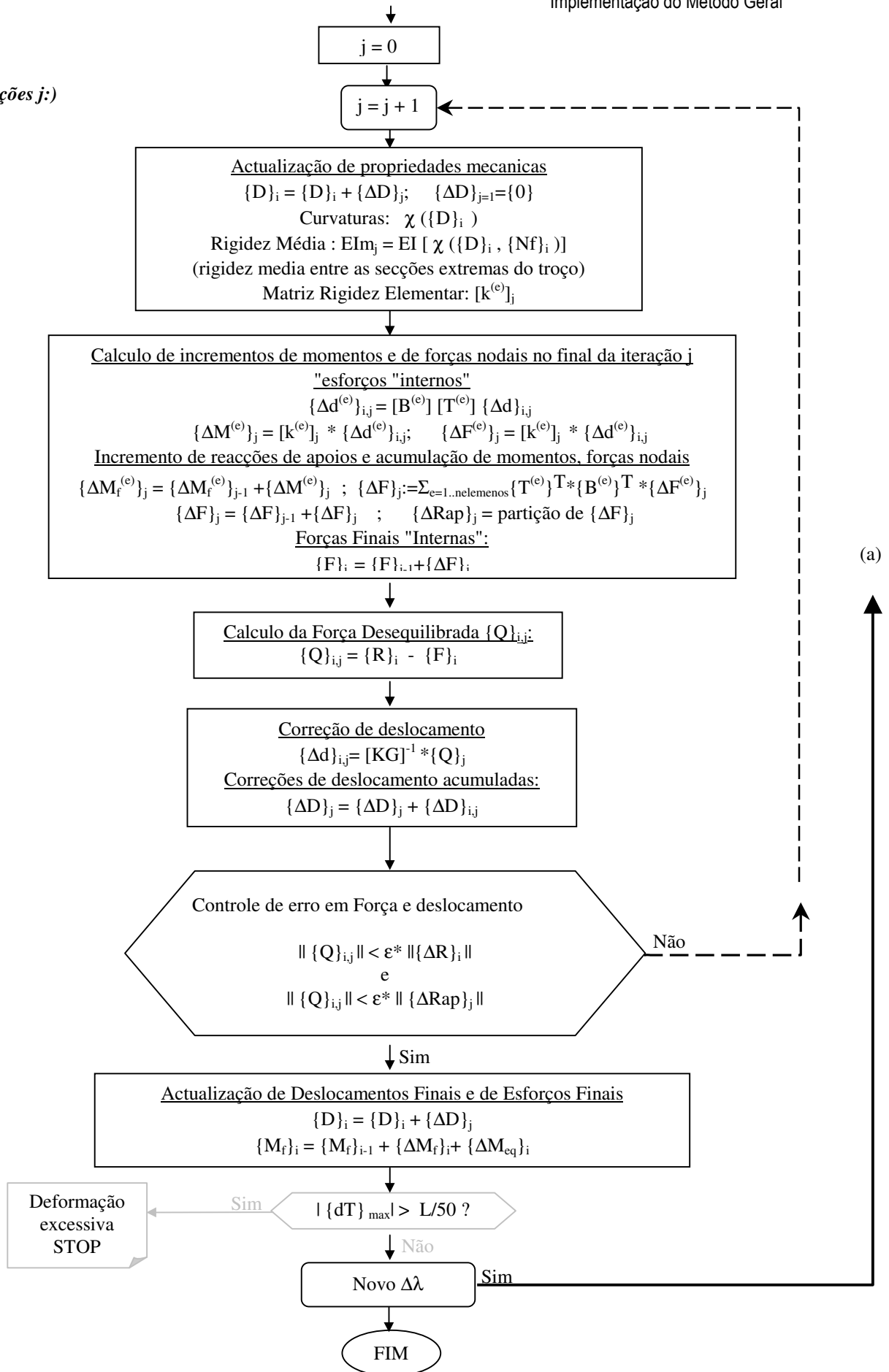


Figura 3.14 (continuação)- Fluxograma do Método de Controle de Carga Newton-Rapson

Método Work Control

(projecto: COL-MX.vbw , modulo COL-MX3.bas)
 (Considera imperfeições nas barras através de forças equivalentes)

Dados: N_{Ed} , M_{Ed} , $\Delta\lambda$, $\lambda_{máx}$, Geometria, Materiais, dW -percentagem de incremento de trabalho
 # Passos (incrementos)
 Objectivo: Determinar o parâmetro de carga limite

Início: $\{R_{Ed}\}$ - totalidade de forças aplicadas em coordenadas generalizadas
 $\{N_x\}$ - esforços axiais nos troços devidos às forças aplicadas na sua totalidade
 $\{N_f\}_i$ - esforços axiais nos troços no fim do passo i
 EIm ($N_x=0$, $\chi=0$) - propriedades mecânicas iniciais, rigidez de flexão média do troço
 $s=+1$ (carga) ou -1 (descarga), respectivamente antes e depois do ponto limite (carga)
 $\lambda_{Final}=0$, $\Delta\lambda_{passo}=0$, $\lambda_{Crit}=0$

(nIncrementos i):

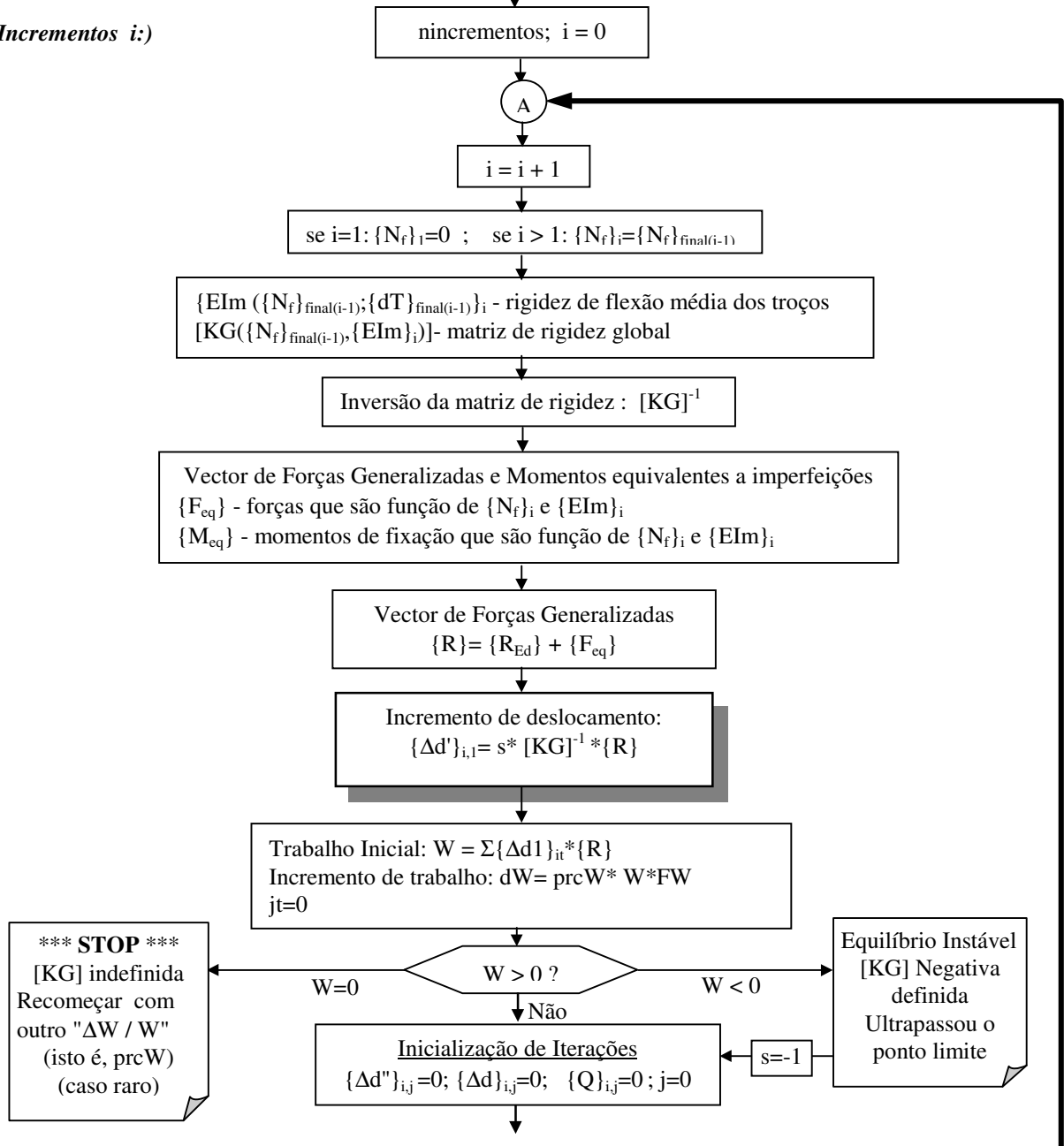


Figura 3.15 - Fluxograma do Método de Controlo de Trabalho (continua)

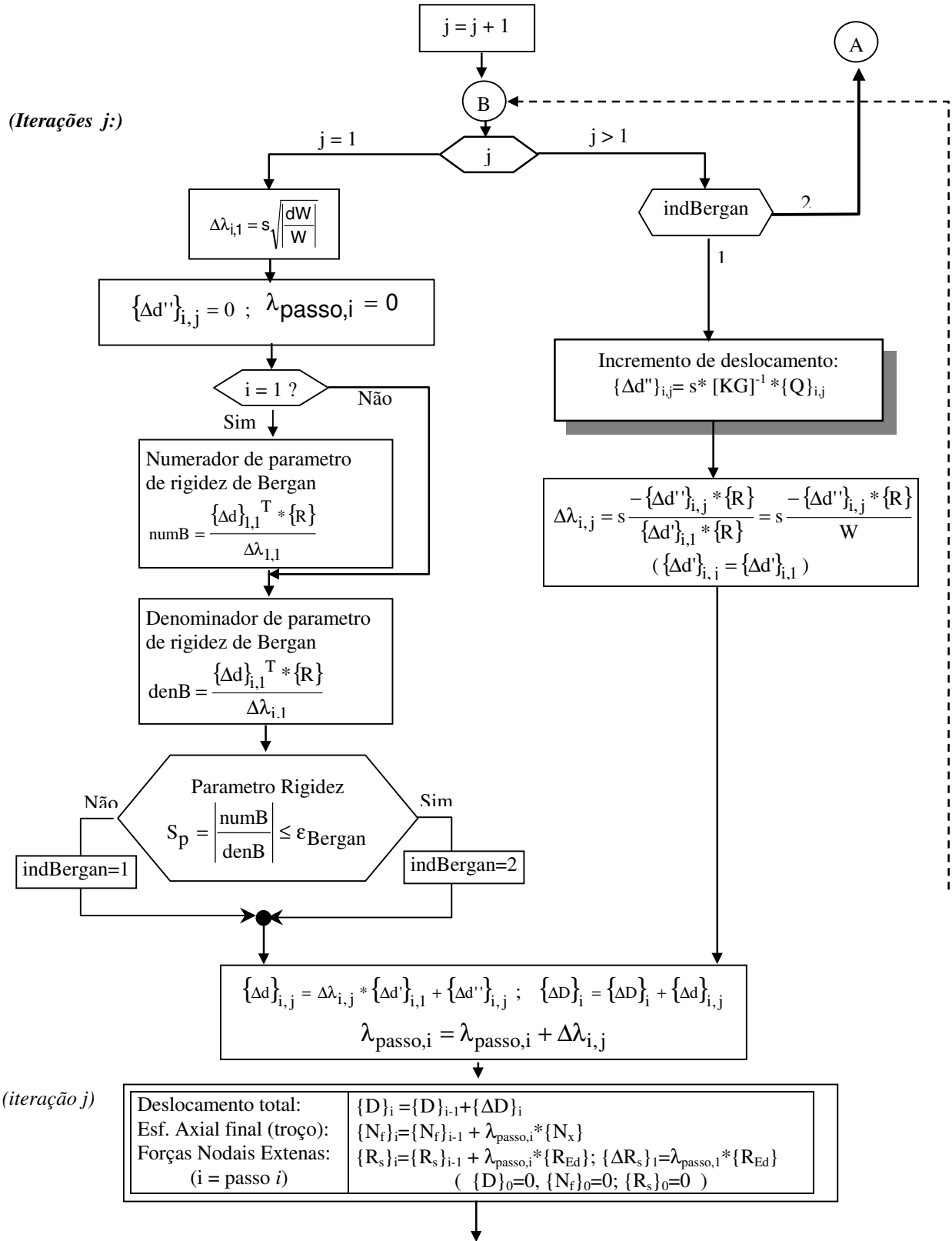


Figura 3.15 (continuação)- Fluxograma do Método de Control de Trabalho

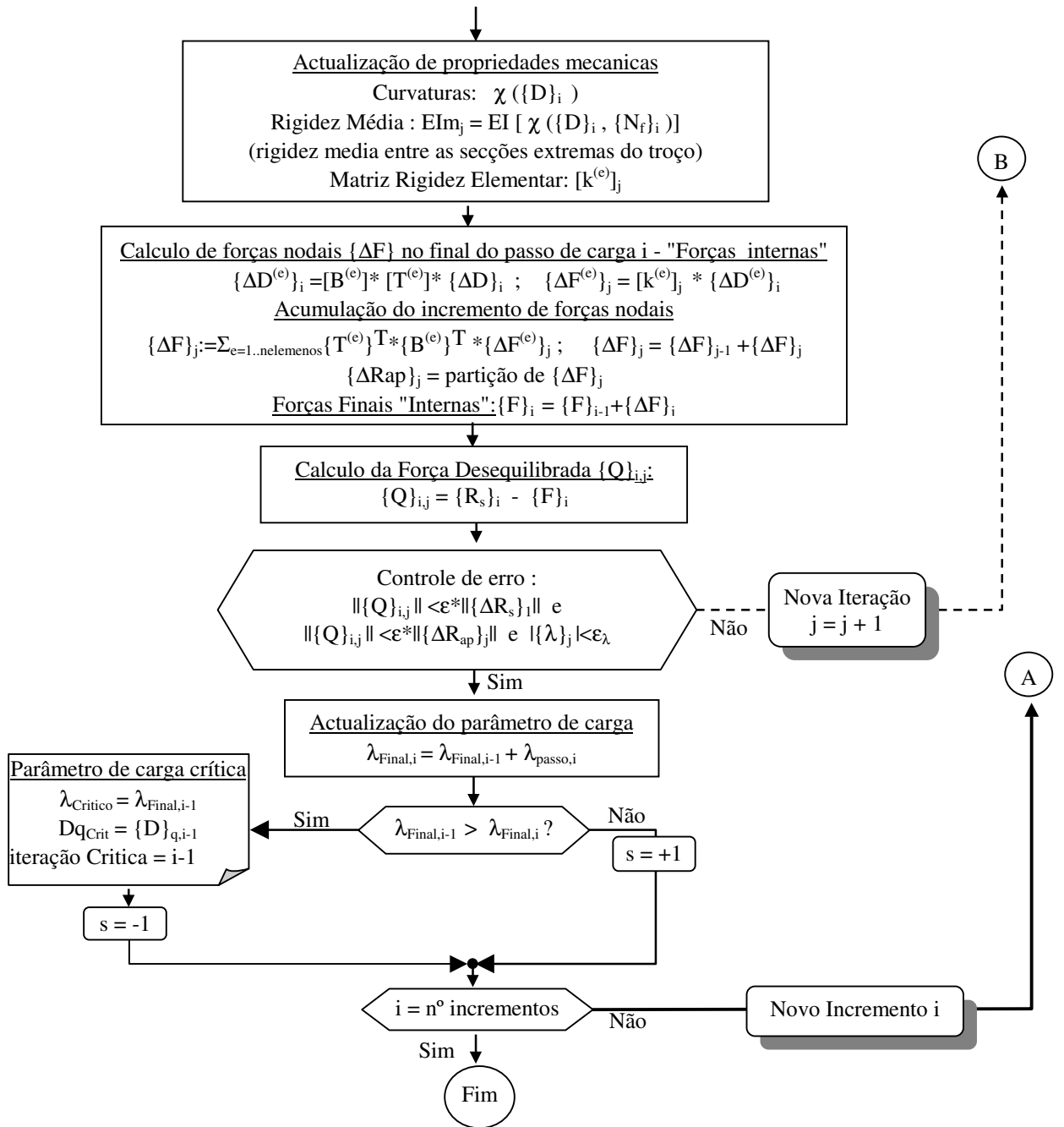


Figura 3.15 (continuação)- Fluxograma do Método de Controle de Trabalho

Método de Arc-Length e Método de Controle de Deslocamento

(projecto: COL-MX.vbw , modulo COL-MX3.bas)

Considera imperfeições nas barras através de forças equivalentes

Dados: NEd, MEd , nº passos, Δs, GLControle, Geometria, Materiais
 Objectivo: λ_{crit}, λ_{final}, q Grau de liberdade de controle

Início:
 {R_{Ed}} - totalidade de forças aplicadas em coordenadas generalizadas
 {N_x} - esforços axiais nos troços devidos às forças aplicadas na sua totalidade
 {N_f}_i - esforços axiais nos troços no fim do passo i
 EIm (N_x=0, χ=0) - propriedades mecânicas iniciais , rigidez de flexão média entre secções extremas de cada troço
 nIncrementos - número de passos de carga; Δs - comprimento de arco
 GLControle - grau de liberdade de controle para traçar a curva carga - deslocamento
 s=+1, variável +1 se antes do ponto limite (carga) s=-1, depois do ponto limite (descarga)
 i=0, λ_{final}=0, Δλ_{nássco}=0, λ_{crit}=0

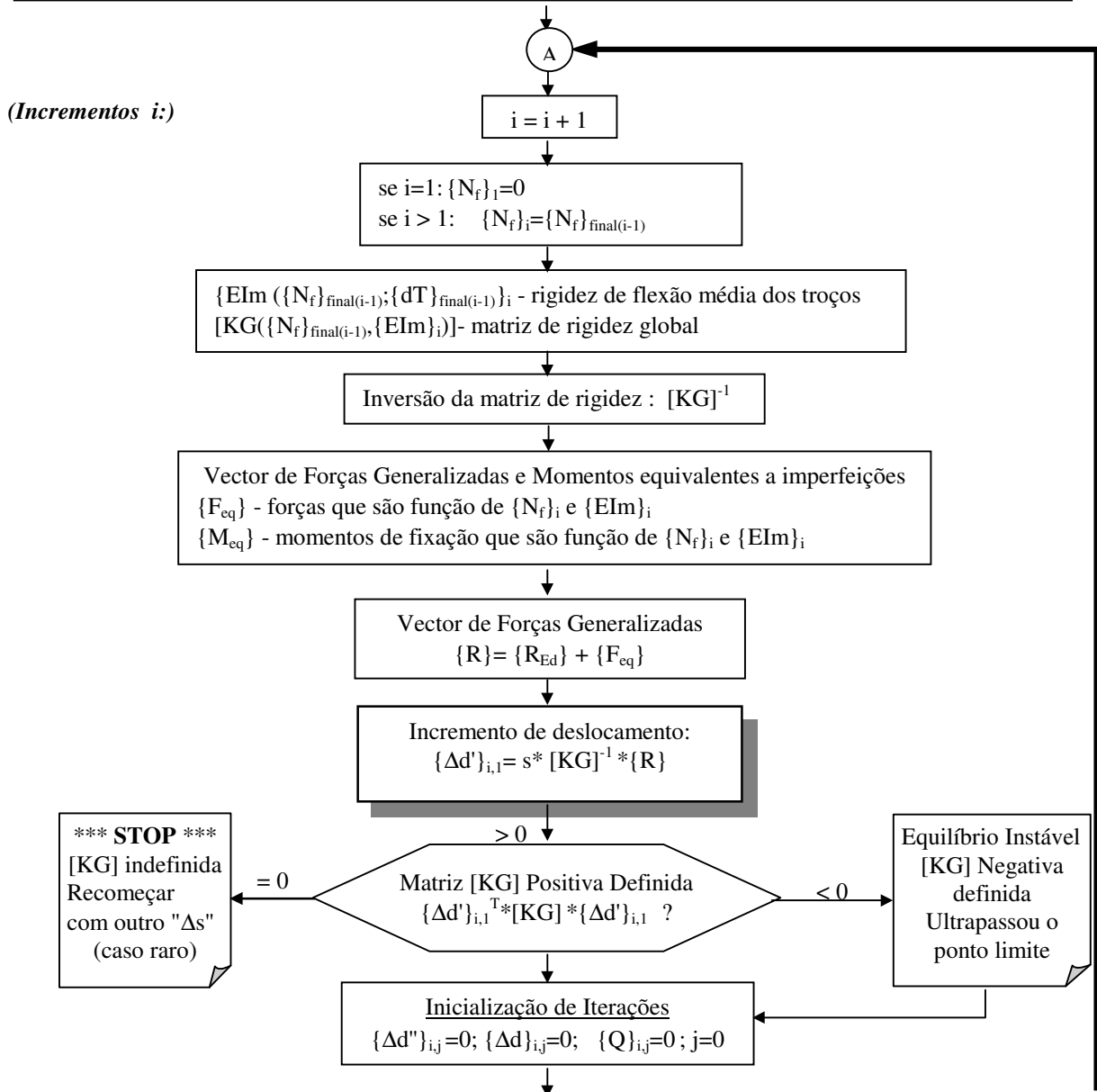


Figura 3.16 - Fluxograma do Método de Controlo de Arco (continua)

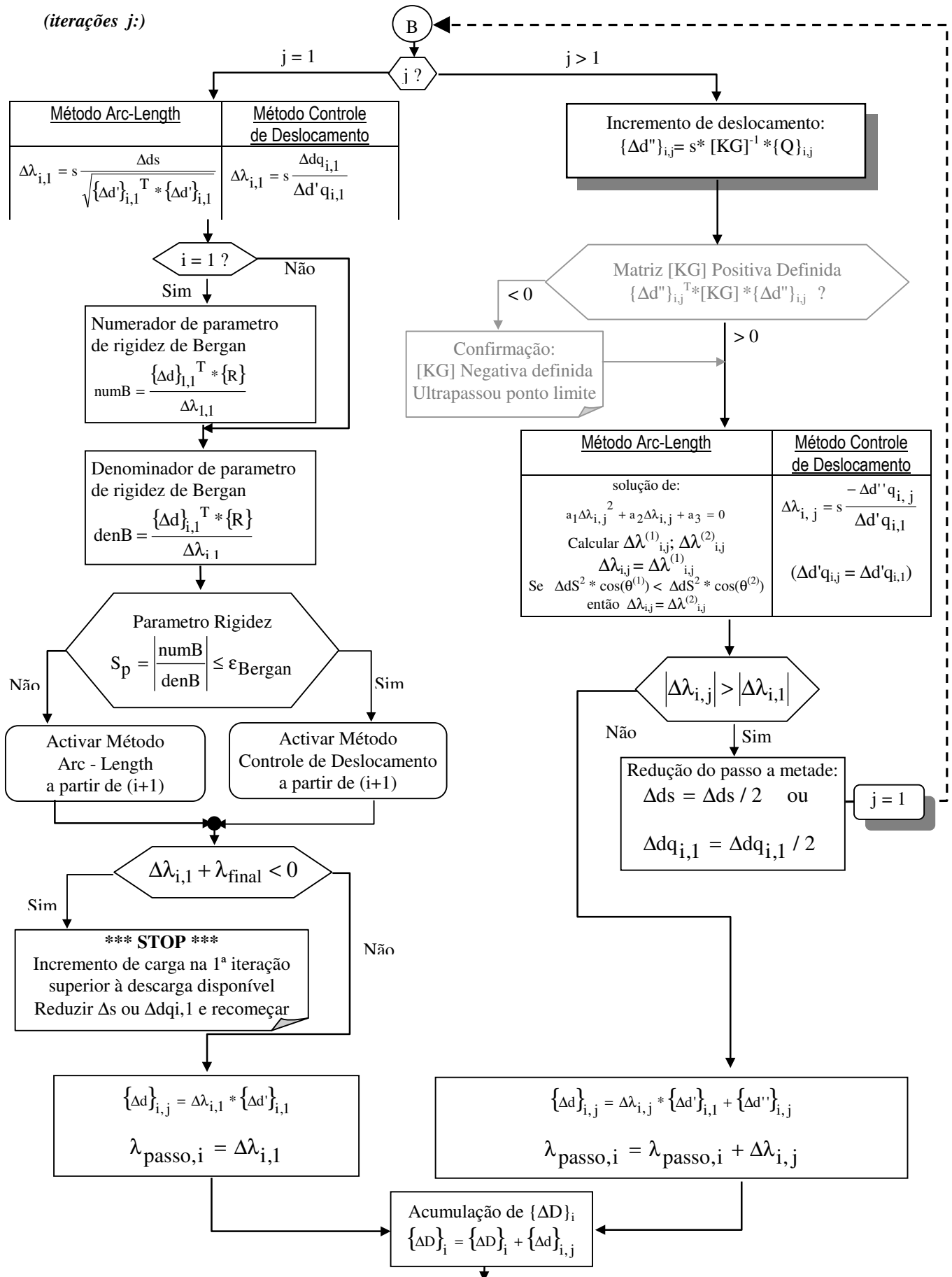


Figura 3.16 (continuação)- Fluxograma do Método de Controle de Arco

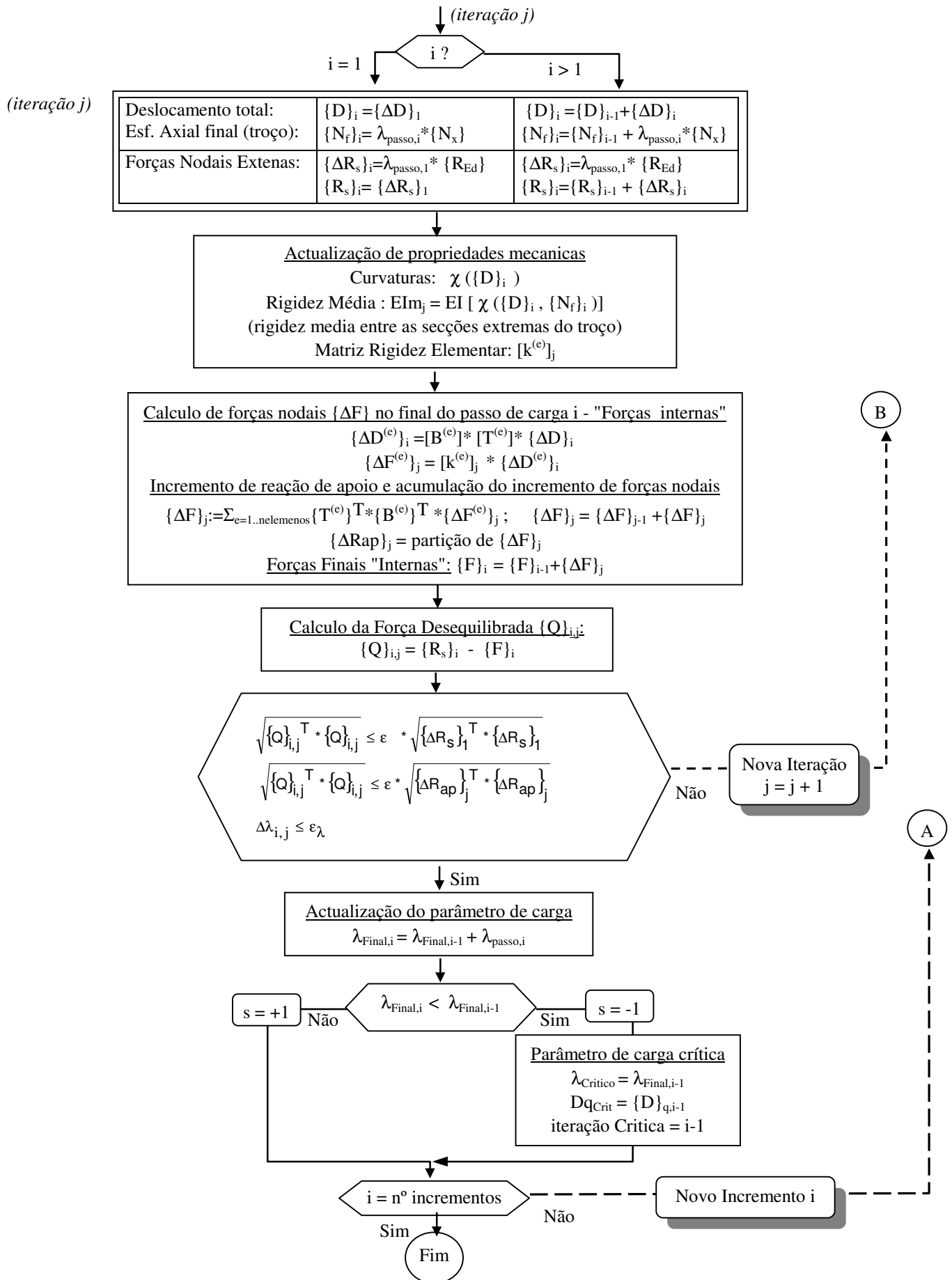


Figura 3.16 (continuação)- Fluxograma do Método de Controle de Arco

3.5- Exemplos de Ficheiros de Dados e Resultados

3.5.1 - Exemplo de Ficheiro de Dados (*.dat) para Vcol-Mx - (Baseado no Problema 7)

Problema 7-Y - Coluna Mista com dois pisos

```
'dltLambda Lambda
0.1 1
'ntroços
16
'L(1) L(2) ... L(n)
0.5625 0.5625 0.5625 0.5625 0.5625 0.5625 0.5625 0.5625 0.475 0.475 0.475 0.475 0.475 0.475 0.475 0.475
'nRestricoes
3
'No restr_mom restr_fy
1 0 1
9 0 1
17 0 1
'nNosCarregados
2
'No Mz Fy Fx
9 -49200 0 343000
17 -42200 0 1245000
'Lc(1) Lc(2)... Lc(n)
4.5 4.5 4.5 4.5 4.5 4.5 4.5 4.5 3.8 3.8 3.8 3.8 3.8 3.8 3.8 3.8
'Denom(1) Denmin(2) ... Denomin(n)
200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200 200
'Parte contraventada
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2
'Numero de Secções a usar
2
'Troços a que correspondem as secções
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2
'Em cada linha colocar o nome do ficheiro *.mcmc com extensão
EQIYPR7.MCMC
PQIYPR7.MCMC
```

 Observações:

 Título
 deltaLambda , Lambda
 n° de barras nt
 L(1), L(2), ... , L(nt) 'comprimento dos troços
 nRestr 'n° nos com restrições de apoio
 no , retr1 , restr 2 ' no , restrição momento , restrição força y (1=restringido, 0=Livre)
 ...
 ...
 nNosCarr 'n° de nos carregados
 no, Mz , Fy , Fx 'no , momento , força y , força Fx(positiva de cima para baixo)
 ...
 Lc(1), , Lc(nt) 'comprimento entre pontos contraventados
 denomin(1),denomin(nt) 'denominador correspondente à excentricidade eo,d
 npc(1) ... npc(ntroços) 'parte contraventada a que pertence o troço
 nSecTipo 'número de secções tipo a usar
 nSecTroco(1), nSecTroco(2), 'nSectroco(nt) 'secção tipo do troço nt=1, nt=2 ,, nt=nt
 NomeFichSeccao(1) 'nome do ficheiro com informação da secção 1
 NomeFichSeccao(2) 'nome do ficheiro com informação da secção 2
 ,, 'nome do ficheiro com informação da secção
 NomeFichSeccao(nSecTipo) 'nome do ficheiro com informação da secção nSecTipo

3.5.2- Exemplo Ficheiro de Resultados (*.res) para Vcol-Mx - (Baseado no Problema 7)

Título:

Problema 7-Y - Coluna Mista com dois pisos

Seccão Título da Secção:

- | | |
|---|--|
| 1 | Seccao Q Y C25/30 A400 S235-360-HEB200 (Unidades: N mm) |
| 2 | Seccao Parcial. Envolvida Y C25/30 A400 S235-360-HEB200 (Unidades: N mm) |

Resultados em unidades : N e m

Análise geometricamente linear

Análise materialmente linear

Sem considerar imperfeições geométricas

Ficheiros de Dados das Secções

Troço Seccão Tipo Nome do Ficheiro

1	1		EQIYPR7.MCMC
2	1		EQIYPR7.MCMC
3	1		EQIYPR7.MCMC
4	1		EQIYPR7.MCMC
5	1		EQIYPR7.MCMC
6	1		EQIYPR7.MCMC
7	1		EQIYPR7.MCMC
8	1		EQIYPR7.MCMC
9	2		PQIYPR7.MCMC
10	2		PQIYPR7.MCMC
11	2		PQIYPR7.MCMC
12	2		PQIYPR7.MCMC
13	2		PQIYPR7.MCMC
14	2		PQIYPR7.MCMC
15	2		PQIYPR7.MCMC
16	2		PQIYPR7.MCMC

baseada nos valores resistentes de cálculo dos materiais

fcd , fsd, fyd

deltaLambda Lambda

0.1 1

Numero incrementos de carga = 10

ErroDeslocamento= 0.00001 ErroForca= 0.01 ErroEsforco= 1

Comprimento dos troços

1 = 0.5625	2 = 0.5625	3 = 0.5625	4 = 0.5625	5 = 0.5625
6 = 0.5625	7 = 0.5625	8 = 0.5625	9 = 0.475	10 = 0.475
11 = 0.475	12 = 0.475	13 = 0.475	14 = 0.475	15 = 0.475
16 = 0.475				

nº de nós restringidos = 3

No restrRot RestrTransl y

1	0	1
9	0	1
17	0	1

nº de nós carregados= 2

No	Mz	Fy	Nx
9	-49200	0	343000
17	-42200	0	1245000

Partes Contraventadas

parte nó nó 1º ultimo

	esq	dir	troço	troço
1	1	9	1	8

2	9	17	9	16
Troços correspondentes				
troço parte Distan- denomi-				
		-cia		-nador
1	1	4.5	200	
2	1	4.5	200	
3	1	4.5	200	
4	1	4.5	200	
5	1	4.5	200	
6	1	4.5	200	
7	1	4.5	200	
8	1	4.5	200	
9	2	3.8	200	
10	2	3.8	200	
11	2	3.8	200	
12	2	3.8	200	
13	2	3.8	200	
14	2	3.8	200	
15	2	3.8	200	
16	2	3.8	200	

Incri	Iterj()	Nf(troço1,it)	EIm(tr1,it)	Fs(gl4,it)	Fsd(gl4,it)	erroF(gl4,it)
		troço1	troço1	GL4	GL4	GL4
1	12	158800.	1.696485E+7	0.E+0	-6.85929E-163	6.85929E-163
2	12	317600.	1.696485E+7	0.E+0	-6.42516E-163	6.42516E-163
3	12	476400.	1.696485E+7	0.E+0	-6.85929E-163	6.85929E-163
4	12	635200.	1.696485E+7	0.E+0	-1.21557E-163	1.21557E-163
5	12	794000.	1.696485E+7	0.E+0	-4.81887E-163	4.81887E-163
6	12	952800.	1.696485E+7	0.E+0	-2.34432E-163	2.34432E-163
7	12	1111600.	1.696485E+7	0.E+0	9.02996E-163	-9.02996E-163
8	12	1270400.	1.696485E+7	0.E+0	1.74738E-163	-1.74738E-163
9	12	1429200.	1.696485E+7	0.E+0	3.39709E-163	-3.39709E-163
10	12	1588000.	1.696485E+7	0.E+0	-5.01423E-163	5.01423E-163

Incri	dT(no c,it)	rota(no n,it)	Mapl(s2,it)	Mf(s2,it)	erroMf(s2,it)	erroMf(s3,it)
	nó central	no de topo	secção 2	secção 2	secção 2	secção 3
1	0.E+0	-2.53723E-4	-187.381	-187.381	.	.
2	0.E+0	-5.07446E-4	-374.761	-374.761	.	.
3	0.E+0	-7.61169E-4	-562.142	-562.142	.	.
4	0.E+0	-1.01489E-3	-749.523	-749.523	.	.
5	0.E+0	-1.26861E-3	-936.903	-936.903	.	.
6	0.E+0	-1.52234E-3	-1124.284	-1124.284	.	.
7	0.E+0	-1.77606E-3	-1311.665	-1311.665	.	.
8	0.E+0	-2.02978E-3	-1499.045	-1499.045	.	.
9	0.E+0	-2.28351E-3	-1686.426	-1686.426	.	.
10	0.E+0	-2.53723E-3	-1873.807	-1873.807	.	.

Momentos Finais

Troço	Mf esq	Mf dir
1	.	-1873.807
2	-1873.807	-3747.614
3	-3747.614	-5621.42
4	-5621.42	-7495.227
5	-7495.227	-9369.034
6	-9369.034	-11242.841
7	-11242.841	-13116.647
8	-13116.647	-14990.454
9	34209.546	24658.353
10	24658.353	15107.159

11	15107.159	5555.966
12	5555.966	-3995.227
13	-3995.227	-13546.42
14	-13546.42	-23097.614
15	-23097.614	-32648.807
16	-32648.807	-42200.

Deslocamentos dos nós

NÓ	Rotação	Translação
1	+6.627139E-4	+0.E+0
2	+6.316492E-4	+3.66952E-4
3	+5.384551E-4	+6.989561E-4
4	+3.831315E-4	+9.610647E-4
5	+1.656785E-4	+1.11833E-3
6	-1.13904E-4	+1.135804E-3
7	-4.556158E-4	+9.785386E-4
8	-8.594571E-4	+6.115866E-4
9	-1.325428E-3	+0.E+0
10	-2.094688E-4	-3.502039E-4
11	+5.443662E-4	-2.563317E-4
12	+9.360772E-4	+1.096077E-4
13	+9.656641E-4	+5.756053E-4
14	+6.33127E-4	+9.696523E-4
15	-6.153414E-5	+1.11974E-3
16	-1.118319E-3	+8.538585E-4
17	-2.537229E-3	+0.E+0

FIM

Capítulo 4 : Aplicações

4.1- Introdução

Elaboraram-se um conjunto de Problemas, do 1-A ao 4, cujas características permitem o uso de ambos os métodos de dimensionamento de colunas, o Método Geral e o Método Simplificado, para ser possível a comparação de resultados e aferir o comportamento dos programas M-C e Vcol-Mx. Realiza-se ainda um pequeno estudo paramétrico.

Um segundo conjunto de problemas, Problema 5 ao 7, foi efectuado para casos onde só é possível aplicar o Método Geral permitindo mostrar as capacidades do programa desenvolvido para a resolução de colunas nomeadamente com carga axial variável, secção variável, determinação do comprimento de encurvadura em regime elástico e sua comparação com a Norma EAE, cálculo do comprimento de encurvadura em regime elásto-plástico, etc.

4.2 - Análise Comparativa entre o Método Geral e o Método Simplificado

No primeiro conjunto de problemas estes sucedem-se com grau de complexidade crescente e todas as análises foram efectuadas para 2 classes de betão distintas, a classe C25/30 e a C50/60, para permitir um pequeno estudo paramétrico. Adoptou-se o comportamento do betão a longo prazo visto ter-se verificado ser mais desfavorável (a rigidez efectiva de flexão é menor).

Para realizar o cálculo das colunas pelo Método Simplificado elaboram-se folhas de cálculo em MathCad (ver Anexo A). Nestas, as acções presentes são multiplicadas pelo parâmetro λ_{ult} , o qual é feito variar até que pelo menos uma verificação de segurança seja incumprida. Este valor é comparado com a carga última obtida pelo Método Geral no programa Vcol-Mx.

Por ser demasiado extenso, à excepção do Problema 1-B, só se apresentam as folhas MathCad de cada problema relativamente a uma classe de betão. Pela mesma razão omite-se em alguns casos a dedução do diagrama de interacção M-N relativo à secção quadrada por esta ser igual em vários problemas.

Apresentam-se de seguida os quadros resumo das análises efectuadas. O Quadro 4.1 trata apenas dos problemas resolvidos pelo Método Simplificado e permite uma fácil análise comparativa atendendo à classe de betão. Os restantes quadros englobam ambos os métodos. Cada quadro tem os seus próprios comentários mas no fim apresenta-se uma conclusão geral.

Do Problema 1-A ao 3 a secção é quadrada com um perfil HEA 240 envolvido. No Problema 4 a secção é octogonal com um tubo de aço envolvido.

Quadro 4.1 - Resumo dos Problemas 1-A a 4 -Método Simplificado

PROBLEMA	Fenómeno em estudo	Parametro de carga, λ ult.	Secção	Ações Geometria	Metodo	Verificações de Segurança (VS)
Problema 1-A	Compressão simples (inclui imperfeições da barra)	C25/30 4.75 C50/60 5.72 (+20%)	Quadrada de betão com perfil HEB 240 (envolvida)	NEd=900kN L= 9m	Método Simplificado do EC4 mas recorre às curvas múltiplas de encurvadura do EC3.	VS à compressão simples (artigo 6.7.3.5(1)) EC4
Problema 1-B	Igual ao anterior	C25/30 1.575 C50/60 1.838 (+17%)	igual ao anterior	NEd=900kN L=9 m	Método Simplificado do EC4 mas tratando o problema como se fosse uma Flexão Composta. Os momentos resultam das imperfeições e efeitos de 2ª ordem.	(i) VS à Flexão Composta (N +My) imperfeições em Y-Y (ii) VS à Flexão Composta Desviada (N+My+Mz) imperfeições em Z-Z
Problema 2	Compressão com flexão uniaxial	C25/30 1.209 C50/60 1.426 (+18%)	igual ao anterior	NEd=900kNm, MyEd=65kNm pz.Ed=5.4kN/m L= 9 m	Igual ao anterior	(i) VS à Flexão Composta Desviada (N +My+Mz) imperfeições em Y-Y (ii) VS à Flexão Composta Desviada (N+My+Mz) imperfeições em Z-Z
Problema 3	Compressão Com Flexão Biaxial	C25/30 1.1 C50/60 1.289 (+18%)	igual ao anterior	NEd=900kNm, MyEd=65kNm pz.Ed=5.4kN/m Mz.Ed= 35kNm L= 9m	igual ao anterior	igual ao anterior
Problema 4	igual ao anterior	C25/30 1.534 C50/60 2.030 (32%)	Secção Octogonal com Tubo	NEd=1500kNm, MyEd=40 kNm pz.Ed=5.4kN/m Mz.Ed= 20kNm L= 4 m	igual ao anterior	igual ao anterior

Notas relativas ao Quadro 4.1 :

(i) Dos Problemas 1-B ao Problema 4 usam-se curvas de interacção $N_{.Rd}-M_{y,Rd}$ e $N_{.Rd}-M_{z,Rd}$ que incluem o “ponto E”.

(ii) As imperfeições têm que ser consideradas separadamente nos planos Y-Y e Z-Z, e daí resultam 2 casos de Verificação de Segurança, mesmo que só haja cargas aplicadas e esforços aplicados em torno de um eixo.

(iii) O parâmetro de carga último λ_{ult} aumenta com a classe de resistência do betão (entre 17% e 20% nos problemas 1-A a 3, e 32% no problema 4) sendo pouco sensível ao carregamento (porque o esforço axial predomina).

(iv) O parâmetro de carga reduz-se do Problema 1-B ao 3 devido à presença cada vez maior dos efeitos da flexão.

(v) O ganho de resistência do material definido por $g_{rm} = \frac{N_{pl,Rd}(C50/60)}{N_{pl,Rd}(C25/30)}$ é de $g_{rm} = 1.37$ nos problemas

1-A a 3 e $g_{rm} = 1.47$ no problema 4.

(vi) Verifica-se que o aumento do custo do betão é de 25% mas a incidência deste na secção mista é 13.3% de onde resulta apenas um acréscimo de custo de 3%, que aliado ao ganho de resistência de pelo menos 37% se conclui ser economicamente vantajoso aplicar um betão de melhor classe.

[Custo do C25/30 = 126 €/m³, Custo do C50/60 = 157 €/m³, Aço perfil 13109 €/m³].

Quadro 4.2 - Resumo dos Problemas 1-A e 1-B - Método Simplificado e Método Geral

PROBLEMA (descrição)	Método	Betão	Parametro de carga, λ_{ult} . e λ_k	Combinação/Caso	Verificação de Segurança (VS)	Comentários Tipo de rotura
Problema 1-A (resolvido com curvas de encurvadura do EC3) NEd=3000kN L=9 m	Simplif.	C25/30	$\lambda_{ult.} = 4.75$ Npl.Rd=4487kN Npl.Rk=5628kN Ncr(z)=2687 kN $\lambda_z = 1.45$	(1) N+imp.z (2) N+imp.y	de acordo com curvas de encurvadura EC3 de acordo com curvas de encurvadura EC3 ($\chi_y=1.023$, $\chi_z=0.870$)	Rotura por encurvadura $\chi_{min}<1$ flexão condicionante Z-Z Longo prazo
		C50/60	$\lambda_{ult.} = 5.719$ Npl.Rd=6150kN Npl.Rk=8123kN Ncr(z) = 2890 kN $\lambda_z = 1.68$	(1) N+imp.z (2) N+imp.y	de acordo com curvas de encurvadura EC3 de acordo com curvas de encurvadura EC3 ($\chi_y=0.89$, $\chi_z=0.784$)	Rotura por encurvadura $\chi_{min}<1$ flexão condicionante Z-Z Longo prazo
	Geral	C25/30	$\lambda_{Ry} = 2.469$ $\lambda_{Rz} = 1.628$	N+imp.z N+imp.y	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem+imperfeições	encurvadura encurvadura+ rot. flexão (d=0.0739m)
		C50/60	$\lambda_{Ry} = 2.740$ $\lambda_{Rz} = 1.876$	N+imp.z N+imp.y	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem+imperfeições	rotura por flexão ($\lambda_{cr}=2.756$) rotura por flexão +encurvadura (d=0.0814m)

PROBLEMA (descrição)	Método	Betão	Parametro de carga, λ_{ult} . e λ_k	Combinação/Caso	Verificação de Segurança (VS)	Comentários Tipo de rotura	
Problema 1-B NEd=3000kN L=9 m (resolvido como se estivesse à flexão composta sendo os momentos devidos às imperfeições e efeitos de 2ª ordem)	Simplif.	C25/30	$\lambda_{ult.} = 1.575$ Ncr(z)=2687 kN $\lambda_z = 1.45$	(1) N+imp.z (L/200) (2) N+imp.y (L/150)	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y}.Rd = 0.348$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z}.Rd = 0.998$	Consideração explícita das imperfeições (L/200 e L/150) - flexão condicionante Z-Z Longo Prazo	
		C50/60	$\lambda_{ult.} = 1.838$ Ncr(z)=2890 kN $\lambda_z = 1.68$	(1) N+imp.z (L/200) (2) N+imp.y (L/150)	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y}.Rd = 0.322$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z}.Rd = 0.999$	Consideração explícita das imperfeições (L/200 e L/150) - flexão condicionante Z-Z Longo prazo	
	Geral	C25/30	$\lambda_{Ry} = 2.469$ $\lambda_{Rz} = 1.628$	Igual ao Problema 1-A			
		C50/60	$\lambda_{Ry} = 2.740$ $\lambda_{Rz} = 1.876$				

Comentários:

- (i) λ_{ult} - parâmetro de carga de rotura do Método Simplificado, associado à verificação de segurança mais condicionante entre as várias possíveis.
 λ_{Ry} ou λ_{Rz} - parâmetro de carga de rotura do Método Geral, respectivamente em torno do eixo y-y ou z-z.
 λ_z - esbelteza mecânica da peça definida por $\lambda_z = (N_{pl,Rk} / N_{cr,z})^{0.5}$ [art. 6.7.3.3(2)], sendo $N_{cr,z}$ a carga crítica de encurvadura em torno do eixo z-z, a longo prazo por ser mais desfavorável.
- (ii) Entre os dois valores λ_{Ry} e λ_{Rz} interessa apenas o menor, que no caso presente é sempre o λ_{Rz} , porque (ii.1) a rigidez de flexão em torno de z-z é menor e (ii.2) os comprimentos de encurvadura são iguais.
- (iii)- No Método Simplificado a diferença fundamental entre o problema 1-A e 1-B é que no primeiro as imperfeições das barras estão incluídas nos factores de redução χ (χ_y e χ_z), enquanto no segundo elas são consideradas explicitamente (L/200 em flexão y-y e L/150 em flexão z-z). As imperfeições no segundo caso parecem exageradas, gerando momentos secundários mais elevado. Por esta razão as cargas de rotura do problema 1-B são muito inferiores aos do problema 1-A.
- (iv) Independentemente do tipo de betão, C25/30 ou C50/60 os λ_{Rz} 's do Método Geral são sempre superiores aos λ_{ult} do Método Simplificado, porque este é mais conservativo. A razão entre eles é $\lambda_{Rz}/\lambda_{ult} = 1.628/1.575 = 1.034$ para o C25/30 e $\lambda_{Rz}/\lambda_{ult} = 1.876/1.838 = 1.021$ para o C50/60. Estes valores são próximos de 1 porque a coluna está sujeita à compressão simples (embora com imperfeições).
- (v) Há ganhos de carga última quando se passa de um betão C25/30 para outro C50/60, que são respectivamente $\lambda_{ult}(C50/60) / \lambda_{ult}(C25/30) = 1.838 / 1.575 = 1.167$ no Método Simplificado e $\lambda_{Rz}(C50/60) / \lambda_{Rz}(C25/30) = 1.876/1.628 = 1.152$ no Método Geral.
- (vi) O tipo de rotura condicionantes nos dois métodos é semelhante.

Notas Adicionais:

- a) No Método Simplificado usam-se curvas de interacção N.Rd-My:Rd e N.Rd-Mz.Rd que incluem o "ponto E".
- b) As Verificações de segurança à estabilidade do novo Eurocódigo 4 consideram as imperfeições admitindo uma deformada senoidal para a barra com excentricidade máxima a meia altura dada pela Tabela 6.5 do EC4. No anterior Eurocódigo as imperfeições eram definidas pelo valor de χ e pelo cálculo de um μ_d menor, determinado com a ajuda da recta $(0;\chi_n) - (\mu_d;\chi_d)$ no diagrama de interacção N.Rd-M.Rd.
- c) O EC4 diz que as imperfeições têm que ser consideradas separadamente nos planos Y-Y e Z-Z, e daí resultam 2 casos de Verificação de segurança, mesmo que só haja cargas aplicadas e esforços aplicados que gerem momentos em torno de um só eixo.

Quadro 4.3 - Resumo do Problema 2- Método Simplificado e Método Geral

PROBLEMA (descrição)	Método	Betão	Parametro de carga, λ_{ult} .	Combinação/Caso	Verificação de Segurança (VS)	Tipo de rotura
Problema 2 NEd=3000kN My.Ed=40kNm pz.Ed=5.4 kN/m L=9 m	Simplif.	C25/30	$\lambda_{ult} = 1.209$ $N_{cr}(z) = 2687 \text{ kN}$ $\lambda_{z} = 1.45$	(1) N+My+imp.z N+ imp.y (2) N+Mz imp.y	$My.Ed/\alpha M * MN_{pl.y.Rd} = 0.782$ $My.Ed/\alpha M * MN_{pl.y.Rd} = 0.558$ $Mz.Ed/\alpha M * MN_{pl.z.Rd} = 0.542$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 0.99$	-flexão composta biaxial. - mais condicionante na flexão em torno de y-y por causa das acções
		C50/60	$\lambda_{ult} = 1.426$ $N_{cr}(z) = 2890 \text{ kN}$ $\lambda_{z} = 1.68$	(1) N+My+imp.z N+ imp.y (2) N+Mz imp.y	$My.Ed/\alpha M * MN_{pl.y.Rd} = 0.814$ $My.Ed/\alpha M * MN_{pl.y.Rd} = 0.577$ $Mz.Ed/\alpha M * MN_{pl.z.Rd} = 0.533$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 0.999$	-flexão composta biaxial. - mais condicionante na flexão em torno de y-y por causa das acções
	Geral	C25/30	$\lambda_{Ry} = 1.731$ $\lambda_{Ry} = 2.086$	N+My+imp.z N+My	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	-encurvadura -encurvadura (d=0.0588m)
			$\lambda_{Rz} = 1.628$ $\lambda_{Rz} = 2.75$	N+imp.y N	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	-rotura por flexão -encurvadura (d=0.012m)
		C50/60	$\lambda_{Ry} = 1.996$ $\lambda_{Ry} = 2.371$	N+My+imp.z N+Mz	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	rotura por flexão (d=0.103m !) -encurvadura+rot.flexao (d=0.0735m)
			$\lambda_{Rz} = 1.86$ $\lambda_{Rz} = 3.326$	N+imp.y N	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	-rot. flexao ($\lambda_{cr} = 1.871$)(d=0.088m) -encurvadura (d=0.00329m)

Comentários:

(i) Os parâmetros de carga do Método Geral são sempre superiores aos do Método Simplificado.

(ii) Independentemente do método o parâmetro aumenta com a classe de betão. As taxas de aumento são $\lambda_{ult}(C50/60) / \lambda_{ult}(C25/30) = 1.426 / 1.209 = 1.179$ no Método Simplificado e $\lambda_{Rz}(C50/60) / \lambda_{Rz}(C25/30) = 1.86/1.628 = 1.142$ no Método Geral. O mesmo se passa para a flexão em torno de y-y , de onde se obtém $\lambda_{Ry}(C50/60) / \lambda_{Ry}(C25/30) = 1.996 / 1.726 = 1.156$. Ou seja é na ordem de 15%.

(iii) No Método Geral, os parâmetros de carga condicionantes correspondem aos casos em que se consideram imperfeições.

Quadro 4.4 - Resumo do Problema 3- Método Simplificado e Método Geral

PROBLEMA (descrição)	Método	Betão	Parametro de carga, λ_{ult} .	Combinação/Caso	Verificação de Segurança (VS)	Tipo de rotura	
Problema 3 NEd=3000kN My.Ed=40kNm pz.Ed=5.4 kN/m Mz.Ed=20kNm L=9 m	Simplif.	C25/30	$\lambda_{ult.} = 1.1$ Ncr(z)=2687 kN $\lambda_{z} = 1.45$	(1) N+My+imp.z N+ Mz	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.685$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.165$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 0.765$	-flexão composta biaxial	
				(2) N+My N+Mz+ imp.y	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.492$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.619$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 1.0$		
		C50/60	$\lambda_{ult.} = 1.289$ Ncr(z)= 2890 kN $\lambda_{z} = 1.68$	(1) N+My+imp.z N+ Mz	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.725$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.15$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 0.787$		-flexão composta biaxial
				(2) N+My N+Mz+ imp.y	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.517$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.594$ $My.Ed/M_{Npl.y.Rd} + Mz.Ed/M_{Npl.z.Rd} = 1.0$		
	Geral	C25/30	$\lambda_{Ry} = 1.731$ $\lambda_{Ry} = 2.086$ $\lambda_{Rz} = 1.608$ $\lambda_{Rz} = 2.71$	N+My+imp.z N+My	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	-encurvadura -encurvadura (d=0.0588m)	
				N+Mz+imp.y N+Mz	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	-rot.flexão+encurv. (d=0.078m) -rot.flexao	
C50/60		$\lambda_{Ry} = 1.996$ $\lambda_{Ry} = 2.371$ $\lambda_{Rz} = 1.85$ $\lambda_{Rz} = 3.16$	N+My+imp.z N+Mz	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	rotura por flexão (d=0.103m !) -encurvadura+rot.flexao (d=0.0735m)		
			N+Mz+imp.y N+Mz	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	-rot.flexao+enc. (d=0.087m) -rot. flexao		

Comentários:

As observações são idênticas aos dos problemas anteriores. Acresce ainda que comparando os parâmetros de carga entre os problemas estes descem com a presença de cargas de vão e momentos aplicados. Simultaneamente a diferença entre os parâmetros de carga do Método Geral e os do Método simplificado aumentam, ou seja, a diferença entre parâmetros aumenta à medida que se passa de um problema de compressão simples para outro de compressão com flexão.

Quadro 4.5 - Resumo do Problema 4 - Método Simplificado e Método Geral

PROBLEMA (descrição)	Método	Betão	Parametro de carga, λ_{ult} .	Combinação/Caso	Verificação de Segurança (VS)	Tipo de rotura
Problema 4 NEd=1500kN My.Ed=40kNm pz.Ed=5.4 kN/m Mz.Ed=20kNm L= 4 m Secção Octogonal 400x400 x200 x200 com tubo 180x8	Simplif.	C25/30	$\lambda_{ult.} = 1.534$ Npl.Rd= 3351 kN Npl.Rk= 4364 kN Ncr(z)=14898 kN $\lambda_z=0.54$ (longo prazo)	(1) N+My+imp.z N+ Mz (2) N+My N+Mz+ imp.y	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.909$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.207$ $My.Ed/M_{N_{pl.y.Rd}} + Mz.Ed/M_{N_{pl.z.Rd}} = 1.0$ $My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.538$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.574$ $My.Ed/M_{N_{pl.y.Rd}} + Mz.Ed/M_{N_{pl.z.Rd}} = 1.0$	-flexão composta biaxial - como a secção é bissimétrica a VS composta biaxial para as duas combinações dá o mesmo resultado. -admitiu-se imperfeição $e_o=L/200$
		C50/60	$\lambda_{ult.} = 2.030$ Npl.Rd= 4940 kN Npl.Rk= 6747 kN Ncr(z)= 16065 kN $\lambda_z=0.65$ (longo prazo)	(1) N+My+imp.z N+ Mz (2) N+My N+Mz+ imp.y	$My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.913$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.197$ $My.Ed/M_{N_{pl.y.Rd}} + Mz.Ed/M_{N_{pl.z.Rd}} = 0.999$ $My.Ed/\alpha M^*MN_{pl.y.Rd} = 0.531$ $Mz.Ed/\alpha M^*MN_{pl.z.Rd} = 0.579$ $My.Ed/M_{N_{pl.y.Rd}} + Mz.Ed/M_{N_{pl.z.Rd}} = 0.999$	-flexão composta biaxial - como a secção é bissimétrica a VS composta biaxial para as duas combinações dá o mesmo resultado. -admitiu-se imperfeição $e_o=L/200$
	Geral	C25/30	$\lambda_{Ry} = 1.68$ $\lambda_{Ry} = 1.68$	N+My+imp.z N+My	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	-rotura por compressão ($v=0.95$) - a coluna é pouco esbelta e por isso insensível às imperfeições e efeitos de 2ªordem.
			$\lambda_{Rz} = 1.68$ $\lambda_{Rz} = 1.68$	N+Mz+imp.y N+Mz	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	
		C50/60	$\lambda_{Ry} = 2.356$ $\lambda_{Ry} = 2.356$	N+My+imp.z N+Mz	N+My + 2ª ordem+imperfeições N+My + 2ª ordem	-rotura por compressão ($v=0.95$) - a coluna é pouco esbelta e por isso insensível às imperfeições e efeitos de 2ªordem.
			$\lambda_{Rz} = 2.356$ $\lambda_{Rz} = 2.356$	N+Mz+imp.y N+Mz	N+Mz+ 2ª ordem+imperfeições N+Mz + 2ª ordem	

Comentários:

A secção é bissimétrica e por isso as verificações de segurança dos casos (1) e (2) são iguais, e correspondem à verificação de segurança à flexão composta biaxial. Isto acontece porque apesar de haver cargas de vão ou momentos nos dois planos de flexão, o esforço axial é predominante e gera momentos de 2ª ordem elevados. Se o carregamento lateral ou momentos fossem mais severos provavelmente a verificação de segurança condicionante corresponderia à flexão composta uniaxial, não se verificando assim a casualidade anterior.

Podem tirar-se as seguintes conclusões gerais:

(i) A consideração explícita das imperfeições com base nas excentricidades dadas pela Tabela 6.5 do EC4 é algo gravosa, como se torna evidente, comparando a carga última do Problema 1-B onde a imperfeição foi assim considerada, e a carga última do Problema 1-A onde esta está implicitamente incluída nas curvas múltiplas de dimensionamento de colunas do EC3.

(ii) Quer pelo Método Geral como pelo Método Simplificado a carga última para classes de betão C50/60 é sempre superior que a da classe C25/30.

(iii) Exceptuando o Problema 1-A, para os restantes problemas, e para a mesma classe de betão, a carga última menor corresponde sempre ao Método Simplificado. Para além disso a razão $\lambda_{ult.Simplificado} / \lambda_{ult.Geral}$ vale:

Quadro 4.6 - Razão entre cargas últimas

$\lambda_{ult.Simplificado} / \lambda_{ult.Geral}$	Compressão simples	Flexão composta uniaxial	flexão composta biaxial	flexão composta biaxial (Probl.4)
Betão C25/30	0.967	0.743	0.68	0.913
Betão C50/60	0.979	0.766	0.69	0.86

de onde se conclui que:

(a) para a compressão simples a carga última é praticamente igual - e é uma boa aferição dos 2 métodos de análise;

(b) que a relação $\lambda_{ult.Simplificado} / \lambda_{ult.Geral}$ é praticamente independente da classe de betão;

(c) que a presença de momento (uniaxiais e biaxiais) aumenta a diferença de resultados, ficando o Método Simplificado mais conservativo que o Método Geral, se o fenómeno condicionante de colapso for a encurvadura por flexão;

(d) que a presença de momento (uniaxiais e biaxiais) aumenta ligeiramente a diferença de resultados, ficando o Método Simplificado mais conservativo que o Método Geral, se o fenómeno condicionante de colapso for o esgotamento de capacidade da secção à flexo-compressão, como comprova o Problema 4.

(iv) Dos problemas 1-A a 3 quando se consideram as imperfeições (o que é obrigatório) o plano de flexão condicionante é o de menor inércia (o que seria de esperar), porque conduz sempre a um λ_{Rz} menor que λ_{Ry} .

(v) A coluna do problema 4 é muito compacta pelo que a carga última corresponde sempre à plastificação da secção e não à uma carga de encurvadura por flexão.

4.3 - O Método Geral em Problemas Particulares

O segundo conjunto de problemas, que só pode ser resolvido pelo Método Geral, caracteriza-se por tratar de colunas com esforços axiais variáveis e/ou secções transversais diferentes ao longo do seu comprimento, condições de apoio diversas, nomeadamente fixa, encastrada e livre, e contraventamento em zona central. Para além disso recorre-se ao programa para determinar a carga crítica elástica daquelas colunas e apresenta-se uma metodologia para o cálculo do factor de comprimento de encurvadura (β) que se compara com o dado pela Norma EAE. Repete-se o procedimento para determinar o mesmo factor em regime elásto-plástico.

4.3.1- Problema 5

Trata-se de uma coluna encastrada-apoiada de secção constante e carga axial variável.

Objectivo:

- (i) Calcular o comprimento de encurvadura numa análise linear de 2ª ordem e compará-lo com o valor da EAE;
- (ii) Calcular o comprimento de encurvadura numa análise não linear de 2ª ordem sem e com imperfeições da barra;
- (iii) Cálculo e desenho dos diagramas de momentos para (iii.1) análise linear de 1ª ordem e (iii.2) análise não linear de 2ª ordem respeitantes à carga de colapso.

Geometria:

Coluna com 12 metros, discretizada em oito barras, com secção mista quadrada de 360x360 mm com perfil HEB 240 envolvido. O estudo faz-se com flexão em torno de z-z e a longo prazo por ser mais desfavorável.

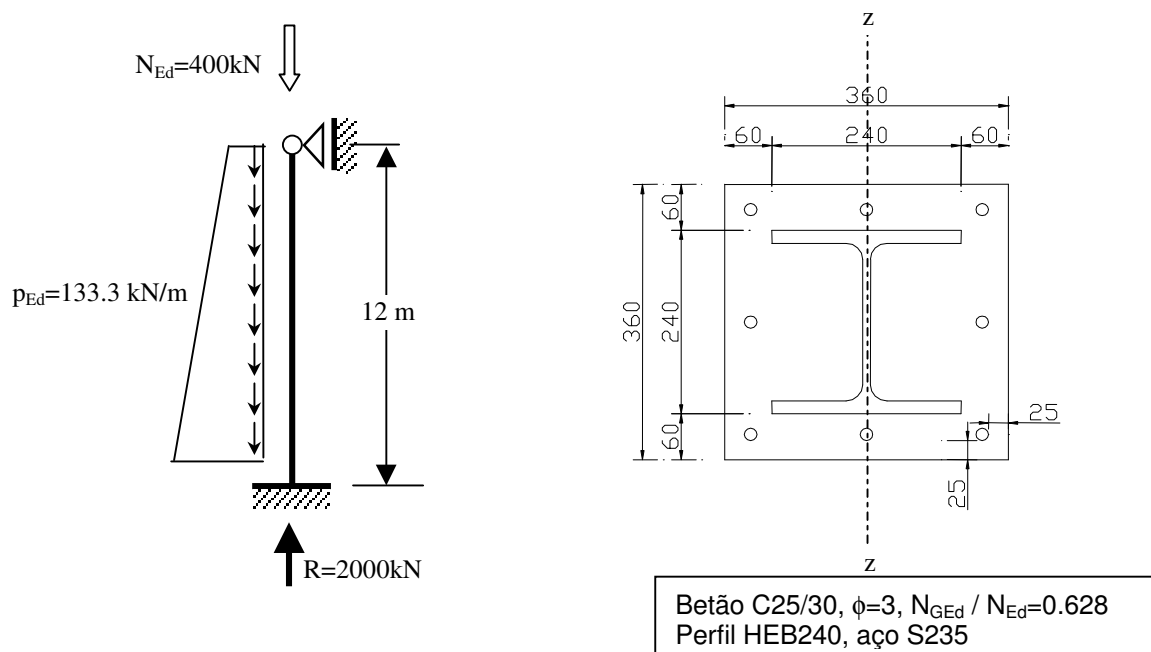


Figura 4.1- Geometria e acções do Problema 5

A esbelteza relativa da coluna é : $\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{N_{pl,Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{5628}{3084}} = 1.35$, com $L_e=0.7*L$ na determinação de N_{cr} ,

(§6.7.3.3.(2)).

Resolução:

Com o programa "M-C" foram deduzidas as curvas Momento Curvatura da secção mostrada. De seguida, recorrendo a "Vcol-Mx", determinaram-se as cargas críticas para cada uma das análises mostradas no quadro seguinte:

Quadro 4.7 - Parâmetros de carga e factores de encurvadura do Problema 5

Análise	Parâmetro de carga λ	β	β (EAE)
1- Análise Linear de 2ª Ordem	2.65	0.490	0.495
2- Análise Não Linear de 2ª Ordem (sem imperfeições)	1.85	0.586	---
3- Análise Não Linear de 2ª Ordem com imperfeições na barra (L / 150)	1.42 (p)	0.669 (nv)	---

p- rotura por plastificação , nv- não válido

Adopta-se a seguinte metodologia no cálculo dos factores de comprimento de encurvadura (β):

(i) Realiza-se uma Análise Linear. Para o parâmetro de carga $\lambda=1$ a reacção na base vale 2000 kN.

(ii) Factorizando a carga em "Vcol-Mx" até se obter o parâmetro de carga crítico (λ_{cr}) o esforço axial na barra atinge o seu máximo e vale:

$$N_{max} = \lambda_{cr} * 2000 \text{ kN} \quad (a)$$

(iii) Nesse instante atinge-se a carga crítica da coluna que é definida por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (b)$$

sendo $L_e = \beta * L$, comprimento de encurvadura da coluna que se pretende calcular (ou factor β) .

Igualando (a) a (b) porque são iguais, e resolvendo em ordem a β obtém-se:

$$\beta = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{N_{max}(\lambda_{cr})}} \quad (c)$$

ou, para o presente problema:

$$\beta = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\lambda_{cr} * 2000 \text{ kN}}} \quad (d)$$

(iv) Surge agora a necessidade de escolher a rigidez de flexão EI adequada para as expressões anteriores. Temos as seguintes hipóteses:

a) Hipótese 1: O Eurocódigo 4 define no artigo 6.7.3.3(3) a rigidez de flexão efectiva EI_{eff} , da expressão seguinte, quando se pretende determinar a esbelteza relativa $\bar{\lambda}$ e a carga crítica elástica N_{cr} :

$$EI_{\text{eff}} = \left(E_a I_a + E_s I_s + 0.6 * \frac{E_{cm} * I_c}{1 + \left(\frac{N_{G,Ed}}{N_{Ed}} \right) * \varphi} \right) \quad (e)$$

b) Hipótese 2: O Eurocódigo 4 define no artigo 6.7.3.4 rigidez de flexão efectiva $EI_{\text{eff,II}}$ quando, em *métodos de análise* se determinam esforços internos considerando os efeitos de 2ª ordem:

$$EI_{\text{eff,II}} = 0.9 * \left(E_a I_a + E_s I_s + 0.5 * \frac{E_{cm} * I_c}{1 + \left(\frac{N_{G,Ed}}{N_{Ed}} \right) * \varphi} \right) \quad (f)$$

c) Hipótese 3: A análise efectuada pelo programa Vcol-Mx foi uma análise linear de 2ª ordem, para a qual o programa assume como rigidez de flexão a tangente à curva Momento-Curvatura no ponto de origem, a que corresponde curvatura nula e esforço axial nulo. Este valor permaneceu constante em toda a análise e com base nele foi determinado λ_{cr} .

De acordo com cada uma das hipóteses obtiveram-se os seguintes valores:

$EI_{\text{eff}} = 1.317 \times 10^{+13} \text{ Nmm}^2$, com a expressão (e), hipótese 1,

$EI_{\text{eff,II}} = 1.855 \times 10^{+13} \text{ Nmm}^2$, com a expressão (f), hipótese 2,

$EI = 1.880 \times 10^{+13} \text{ Nmm}^2$, recorrendo ao programa descrito, hipótese 3.

Os dois últimos valores são praticamente iguais, e por isso se conclui que se não tivesse acesso a um programa de análise a expressão (f) poderia ser usada. Como refere o artigo 6.7.3.4 do EC4, quando se usam métodos de análise, como o foi feito para o cálculo de λ_{cr} deve-se adoptar a rigidez $EI = EI_{\text{eff,II}}$, que pelos vistos "deu" certo com o programa desenvolvido. Devido a esta coincidência, que penso não ser ocasional, no cálculo de β adoptar-se-á sempre $EI = EI_{\text{eff,II}}$.

(v) Substituindo o valor da rigidez $EI = EI_{\text{eff,II}}$ na expressão de β ,

$$\beta = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\lambda_{cr} * 2000 \text{ kN}}} = \frac{\pi}{12000} \sqrt{\frac{1.855 * 10^{13}}{2.65 * 2000 * 10^3}} = 0.490$$

(vi) Do artigo 70º da EAE temos para o caso presente:

$$\beta = \sqrt{\frac{1 + c * N' / N}{k}} = \sqrt{\frac{1 + 1.65 * (400 \text{ kN} / 2000 \text{ kN})}{5.42}} = 0.495$$

que é apenas 1.0% superior ao obtido pela metodologia anterior. Constata-se então que a metodologia usada para achar β está correcta.

(vii) Utilizando agora o programa para as análises não lineares de 2ª ordem, sem imperfeições e com imperfeições, determinam-se as cargas críticas correspondentes, e com a ajuda das expressões (c) e (f) calculam-se os factores de comprimento de encurvadura β correspondentes, e preenche-se o Quadro

4.7. Realça-se aqui se está a usar um EI constante, quando na verdade nas análises não lineares ele varia.

Verificou-se durante a análise 3 do Quadro 4.7 que o valor de $\lambda=1.42$ corresponde atingir-se a rotura da secção por plastificação da base da coluna em flexo-compressão e não a carga crítica associada ao fenómeno de encurvadura. Nesse sentido a expressão de β não pode ser usada e o seu resultado não é válido (nv). Serve apenas como resultado comparativo. Se a secção resistisse seria um majorante do valor real, e por isso útil porque é conservativo.

(vii) Apresentam-se sumariamente os momentos determinados por cada uma das análises.

Quadro 4.8 - Momentos flectores do Problema 5

PROBLEMA 5

	Analise					(e-d)/d
	Linear 1ºO					
	AL1ºO	AL2ºO	ANL2ºO	ANL2ºO + +Imperfeic	ANL2ºO+ +Imperfeic	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	
λ		$\lambda_{cr}=2.65$	1.85	1	1.42	
M.Rotura					flexão	
Momentos						
M1	-0.20	-2.31	-0.57	-118530.32	-180646.34	0.52
M2	-0.13	-1.64	-0.38	-49977.21	-76918.72	0.54
M3	-0.05	-0.32	-0.10	4917.90	12721.54	1.59
M4	0.03	0.96	0.17	41425.25	73403.10	0.77
M5	0.10	1.75	0.38	58832.09	101563.35	0.73
M6	0.18	1.95	0.53	59271.86	100182.45	0.69
M7	0.25	1.74	0.62	46634.58	76968.06	0.65
M8	0.33	1.36	0.68	25455.58	40961.35	0.61
M9	0.40	1.06	0.72	0.40	0.57	0.42

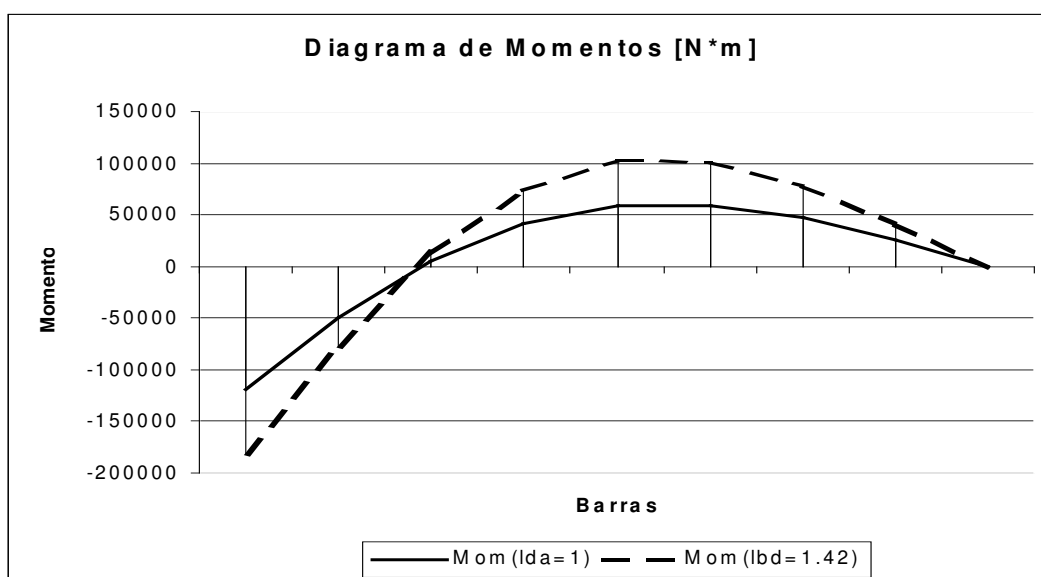


Figura 4.2 - Diagrama de momentos para A.N.L.2ª Ordem com $\lambda = 1$ e $\lambda = \lambda_{cr} = 1.42$

Nota: Como a estrutura tem apenas cargas axiais, e na hipótese de não haver imperfeições, é necessário aplicar um pequeno "momento residual" ($0.4 \text{ N}\cdot\text{m}$) para "mobilizar" deformações por flexo-compressão. Por isso surge um momento $M_9 = 0.4 \text{ N}\cdot\text{m}$ na análise linear na coluna (a) do Quadro 4.8. O "momento residual" das restantes análises estão multiplicados pelos respectivos parâmetros de carga λ .

4.3.2 - Problema 6

Trata-se de uma coluna encastrada-livre (mensula) de secção constante e carga axial variável

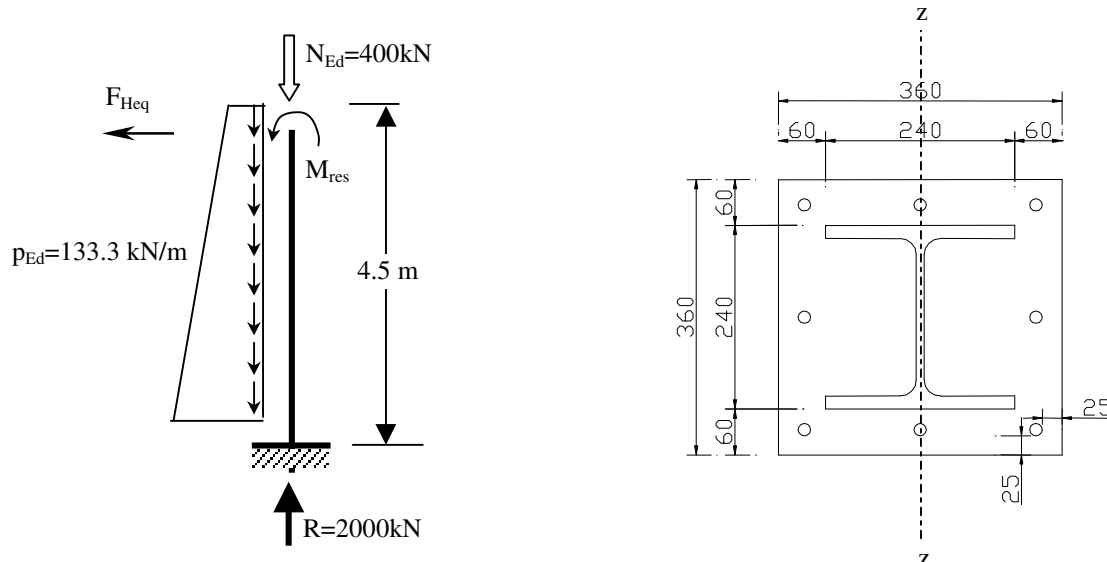
Objectivo:

- (i) Calcular o comprimento de encurvadura numa análise linear de 2ª ordem e compará-lo com o valor da EAE;
- (ii) Calcular o comprimento de encurvadura numa análise não linear de 2ª ordem sem e com imperfeições da barra;
- (iii) Cálculo do comprimento de encurvadura numa análise não linear de 2ª ordem com imperfeições da barra (locais) e imperfeições globais (pórtico). Discussão de resultados;
- (iv) Esboço dos diagramas de momentos e das deformadas para as diversas análises.

Geometria:

Coluna com 4.5 metros, discretizada em oito barras. A secção da barra é igual à do Problema 5, ou seja, é uma secção recoberta mista quadrada de $360 \times 360 \text{ mm}$ com perfil HEB 240.

O estudo faz-se com flexão em torno de z-z e a longo prazo por ser mais desfavorável.



$M_{res} = 0.2 \text{ N}\cdot\text{m}$, momento residual;
 $F_{Heq} = \phi \cdot N_{max} = 2000 \text{ kN} / 200 = 10 \text{ kN}$, força horizontal equivalente a imperfeições globais (usada em duas das análises)

Betão C25/30, $\phi=3$, $N_{GEd} / N_{Ed}=0.628$
 Perfil HEB240, aço S235

Figura 4.3 - Geometria e acções para o Problema 6

A esbelteza relativa da coluna é : $\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{5628}{2687}} = 1.45$, com $L_e=2*L$.

Resolução:

A metodologia de cálculo é semelhante à do Problema 5.

Quadro 4.9 - Parâmetros de carga e factores de encurvadura do Problema 2

Análise	Parâmetro de carga λ	β	β (EAE)
1- Análise Linear 2ª Ordem	2.67	1.301	1.340
2- Análise Não Linear de 2ª Ordem	1.80 (p)	1.585 (nv)	---
3- Análise Não Linear de 2ª Ordem com imperfeições na barra (L / 150)	1.80 (p)	1.585 (nv)	---
4- Análise Não Linear de 2ª Ordem com imperfeições na barra e globais.	1.63 (f)	1.665 (nv)	

p- rotura por plastificação axial, f- rotura pr flexão, nv- não válido em termos do significado da expressão de β .

Comentários:

(i) O parâmetro de carga crítico da análise linear de 2ª ordem é $\lambda_{cr} = 2.67$ de onde resulta um factor de comprimento de encurvadura β igual a:

$$\beta = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\lambda_{cr} * N_{max}}} = \frac{\pi}{45000} \sqrt{\frac{1.855 * 10^{13}}{2.67 * 2000 * 10^3}} = 1.301$$

sendo EI a rigidez de flexão definida pelo artigo 6.7.3.4 do EC4.

(ii) Do artigo 70º da EAE temos para o caso presente:

$$\beta = \sqrt{\frac{1+c * N'/N}{k}} = \sqrt{\frac{1+2.18 * (400kN/2000kN)}{0.8}} = 1.340$$

que é apenas 3% superior ao obtido pela alínea (i). Constata-se então que a análise realizada pelos programas é aceitável.

(iii) Utiliza-se agora o programa para as análises não lineares de 2ª ordem, sem e com imperfeições locais, com imperfeições globais, e, determinam-se as cargas críticas correspondentes: Com a ajuda da expressão de β calculam-se os factores de comprimento de encurvadura, e preenche-se o Quadro 4.9.

Os valores λ obtidos para as análises 2 e 3 correspondem à rotura da secção por plastificação axial (letra p) e por isso são iguais. O da análise 4 corresponde à rotura por flexão (letra f). Nenhum deles corresponde a de um fenómeno de encurvadura e por isso a expressão de β deixa de ser válida, em termos de rigor. Uma vez mais essa expressão, para estes casos, dá valores majorantes do coeficiente de encurvadura, pelo que é conservativa.

(iv) Apresentam-se sumariamente os momentos e deslocamentos determinados por cada uma das análises.

Quadro 4.10 - Momentos flectores e deslocamentos nodais do Problema 6

PROBLEMA 6

	Analise							
	Linear	AL2 ^a O	ANL2 ^a O	ANL2 ^a O+	ANL2 ^a O+		ANL2 ^a O+	ANL2 ^a O+
				+imperfeição	+Imperfeição		+imperfeição	+Imperfeição
							+Fheq	+Fheq
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(e-d)/d	(f)	(g)
λ		$\lambda_{cr}=2.67$	1.8	1	1.8		1	1.63
Modo Rotura ->		pandeo	axial		axial			flexão
Momentos								
M1	0.20	14.37	0.67	-3058.19	2111.26	-1.69	58248.24	122008.22
M2	0.20	13.76	0.66	7027.22	20001.08	1.85	42076.69	93838.39
M3	0.20	12.17	0.62	13469.52	30844.24	1.29	28855.84	68297.62
M4	0.20	9.99	0.58	16640.03	35449.82	1.13	18483.54	46726.77
M5	0.20	7.57	0.52	16981.29	34765.46	1.05	10761.57	29514.69
M6	0.20	5.21	0.47	14980.91	29831.31	0.99	5411.75	16620.48
M7	0.20	3.16	0.43	11147.47	21710.57	0.95	2094.61	7738.08
M8	0.20	1.57	0.39	5989.82	11441.58	0.91	427.40	2394.34
M9	0.20	0.53	0.36	0.20	0.36	0.80	0.20	0.33

Deslocamentos [m]								
No 1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		0.00E+00	0.00E+00
No 2	1.68E-09	1.20E-07	5.91E-09	2.81E-06	8.59E-05		4.02E-04	1.13E-03
No 3	6.73E-09	4.71E-07	2.27E-08	1.08E-04	4.97E-04		1.45E-03	4.01E-03
No 4	1.52E-08	1.03E-06	4.90E-08	4.17E-04	1.37E-03		2.95E-03	8.00E-03
No 5	2.69E-08	1.75E-06	8.38E-08	9.84E-04	2.78E-03		4.74E-03	1.27E-02
No 6	4.21E-08	2.60E-06	1.27E-07	1.82E-03	4.71E-03		6.70E-03	1.79E-02
No 7	6.06E-08	3.54E-06	1.77E-07	2.89E-03	7.10E-03		8.76E-03	2.33E-02
No 8	8.25E-08	4.54E-06	2.33E-07	4.15E-03	9.83E-03		1.09E-02	2.88E-02
No 9	1.08E-07	5.56E-06	2.97E-07	5.51E-03	1.27E-02		1.30E-02	3.44E-02

(v) Diagramas de Esforços e Deformadas

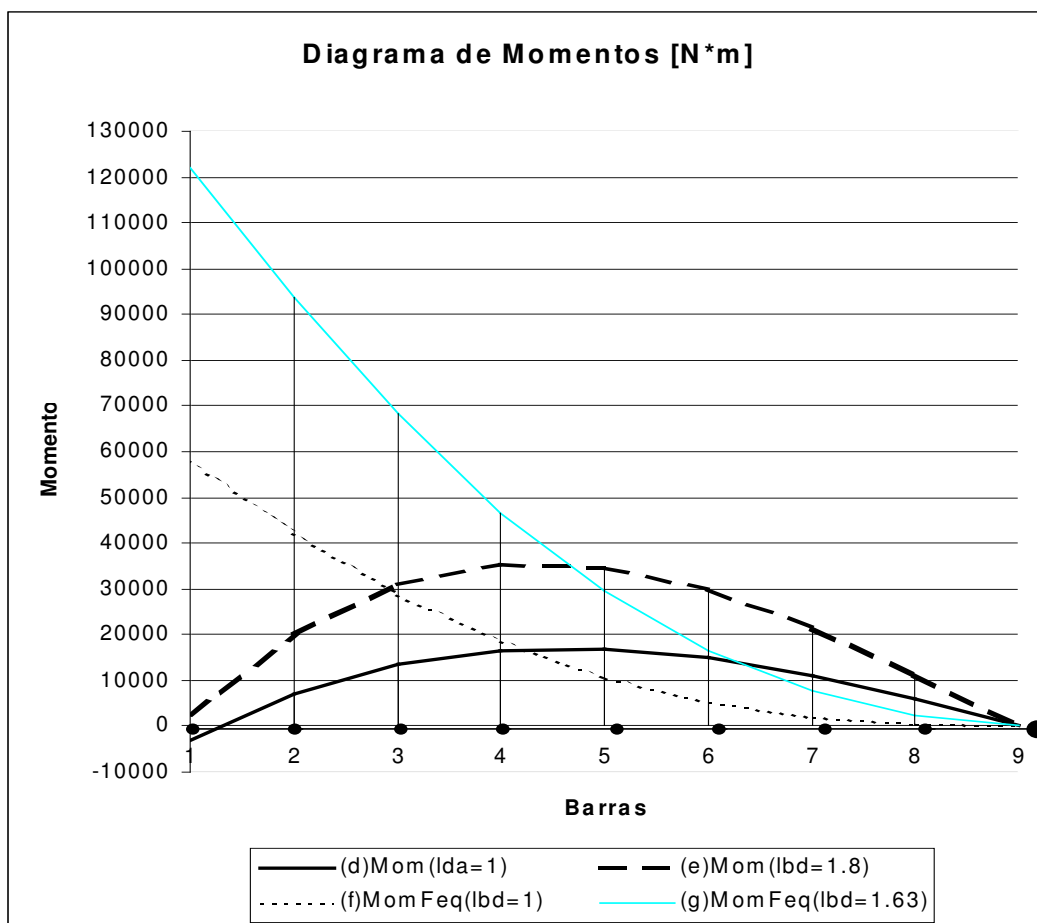


Figura 4.4 - Diagrama de momentos do Problema 6

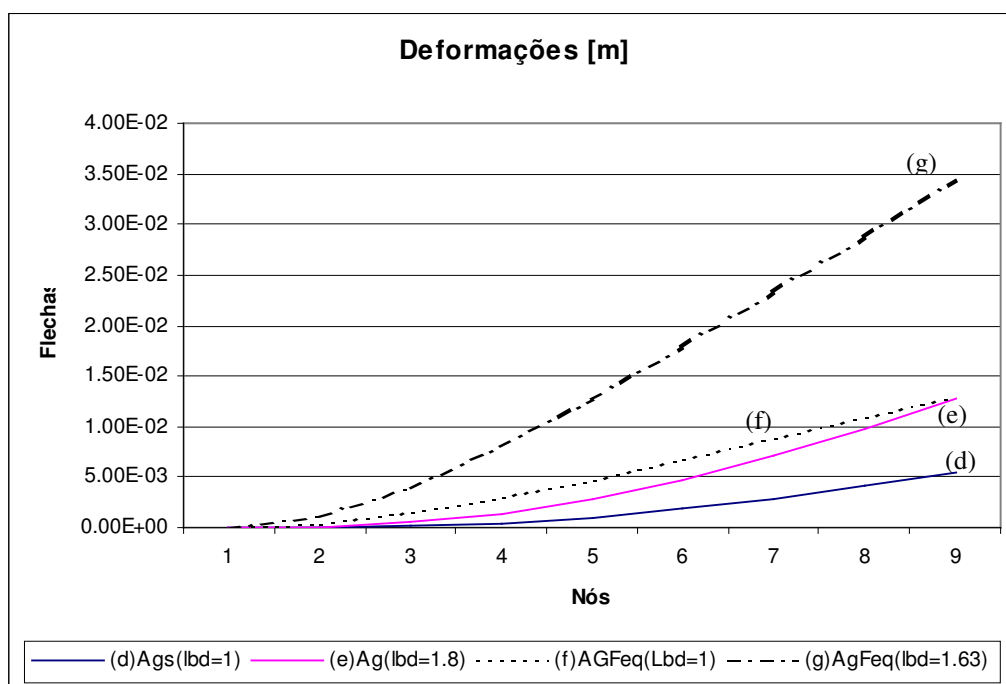


Figura 4.5 - Deformada do Problema 6

(vi) Comentários aos diagramas de esforços e deformações de cada uma das análises Figuras 4.4 e 4.5.

1- As análises (d) e (e) incluem apenas as imperfeições das barras. Admite-se que a coluna foi construída de modo a que os extremos superior e inferior se localizem na mesma linha vertical ao solo. Como seria de esperar surgem momentos maiores no vão que no apoio em virtude da forma que se assume para a imperfeição da barra que é uma deformada senoidal. Nos cálculos presentes não se adopta explicitamente esta deformada, mas sim forças laterais distribuídas no vão e concentradas nos nós dos extremos que lhe são equivalentes. Curiosamente surgem momentos negativos no encastramento para $\lambda=1$ (contrariamente aos positivos no vão), e que se tornam positivos para $\lambda=1.8$ devido aos momentos secundários.

2- Admitindo que a coluna ao ser montada fica com a sua extremidade superior excêntrica em relação à inferior é necessário considerar essa imperfeição (global) que é a falta de verticalidade definida pelo Eurocódigo 3 pelo ângulo ϕ . Nas análises (f) e (g) efectuadas, esta imperfeição global foi considerada através de uma força lateral $F_{Heq} = \phi \cdot N_{max} = 10$ kN, como indica o Eurocódigo 3. Simultaneamente é necessário considerar também as imperfeições das barras (imperfeições locais) referidas no parágrafo anterior. Na prática aplicam-se as cargas equivalentes às imperfeições locais em dois sentidos contrários para se obter o caso mais desfavorável.

Destas análises, que consideram estas imperfeições, resultam os diagramas de momentos (f) e (g) cuja forma e valores são muito diferentes das análises anteriores (d) e (e).

3- Como se constata no diagrama das deformações os deslocamentos (translações) são sempre crescentes da base para o topo (o que seria de prever numa consola). Embora pareça estranho, o mesmo ocorre para as análises (d) e (e) nas quais o diagrama de momentos apresenta momentos de vão superiores aos de extremidade.

4.3.3-Problema 7

Trata de uma coluna de pórtico contraventado, com secção variável, e carga axial variável.

Objectivo:

- (i) Cálculo do parâmetro de carga crítica ou carga última nos planos XoZ e XoY.
- (ii) Desenho dos diagramas de esforços $M_{y,Ed}$ de 1ª ordem e de 2ª ordem com imperfeições geométricas associado ao parâmetro de carga último.

Geometria:

Coluna com as dimensões mostradas na Figura 4.6, discretizada em dezasseis barras (oito por piso). O primeiro piso tem uma secção mista envolvida quadrada de 320x320 mm com perfil HEB 200 e quatro varões de $\phi=16$ mm. O segundo piso tem uma secção mista parcialmente envolvida num perfil HEB200,

e quatro varões $\phi=16$ mm. Ambas as secções satisfazem os requisitos geométricos para serem consideradas como mistas.

A carga actua no plano XoZ flectindo as barras em y-y, e por isso a análise é realizada neste plano. Complementa-se a análise no plano XoY, flexão em z-z, só com as cargas axiais e imperfeições geométricas.

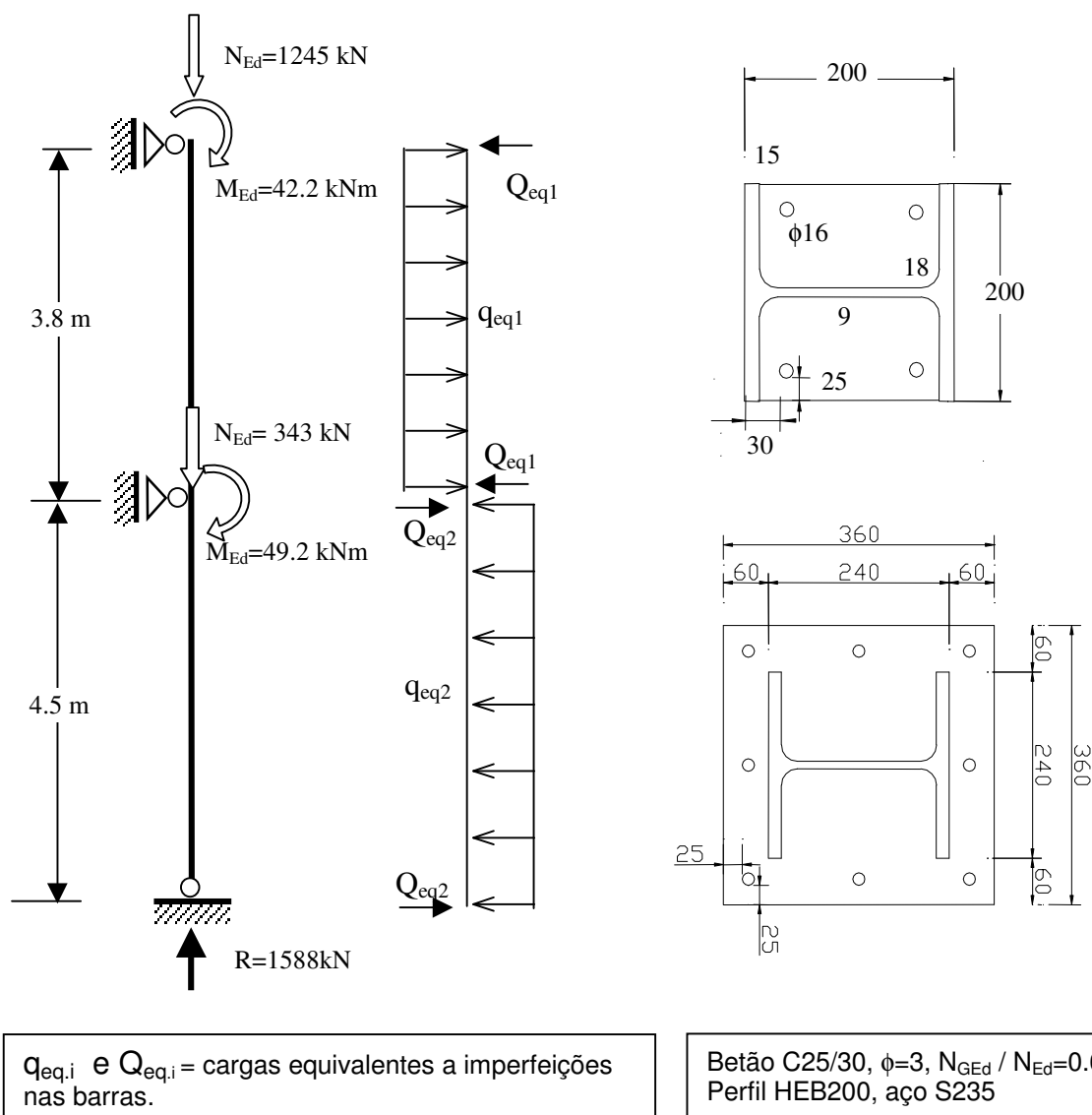


Figura 4.6 - Geometria e acções para o Problema 7.

As esbeltezas relativas (artigo 6.7.3.3.(2)) são as seguintes:

Quadro 4.11 - Esbeltezas relativas do Problema 7

Piso	Plano XoZ (flexão y-y)	Plano XoY (flexão z-z)
1º Piso	$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{4150}{9259}} = 0.67$	$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{4150}{5775}} = 0.85$
2º Piso	$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{2824}{8671}} = 0.57$	$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{2824}{3854}} = 0.86$

Devido às condições de apoio o comprimento de encurvadura elástico, em qualquer dos planos, é sempre $L_e=1*L$, para o cálculo de N_{cr} .

Resolução:

Foram realizadas análises não lineares de 2ª ordem com imperfeições geométricas das barras, cujas forças distribuídas e nodais equivalentes estão mostradas na Figura 4.6 da página anterior. Os resultados apresentam-se no Quadro 4.12.

Quadro 4.12 - Factores de carga do Problema 7

Análise	Parâmetro de carga λ_p	
	Plano XoZ (y-y)	Plano XoY (z-z)
1- Análise Não Linear de 2ª Ordem com imperfeições no sentido (+1)	$\lambda_{cr} = 1.457$	$\lambda_{cr} = 1.201$
1- Análise Não Linear de 2ª Ordem com imperfeições no sentido (-1)	1.385 (f)	$\lambda_{cr} = 1.201$

f- rotura por flexo-compressão

Comentários:

(i) No plano XoZ as imperfeições se aplicadas no sentido (+1) da Figura 4.6, são menos favoráveis do que quando aplicadas no sentido contrário, (-1). Correspondem respectivamente aos parâmetros de carga $\lambda = 1.457$ (cujo fenómeno de rotura associado é o de encurvadura, e por isso $\lambda = \lambda_{cr}$), e $\lambda = \lambda_p = 1.385$ (cujo fenómeno de rotura associado foi atingir-se a resistência por flexo-compressão).

(ii) No plano XoY é indiferente o sentido de aplicação das imperfeições porque não há cargas directas aplicadas que produzem momentos em torno de z-z. O parâmetro de carga está associado à encurvadura por flexão em torno de z-z, e vale $\lambda_{cr} = 1.201$.

(iii) Para efeitos práticos o parâmetro de carga último é o menor de todos eles, $\lambda_u = \lambda_p = \lambda_{cr} = 1.201$.

(iv) Apresenta-se os diagramas de momentos $M_y.Ed$ correspondentes a uma análise de linear de 1ª ordem, e os de uma análise geometricamente e materialmente não linear com imperfeições no sentido (-1), o mais desfavorável, e para o parâmetro de carga $\lambda_u = 1.2$.

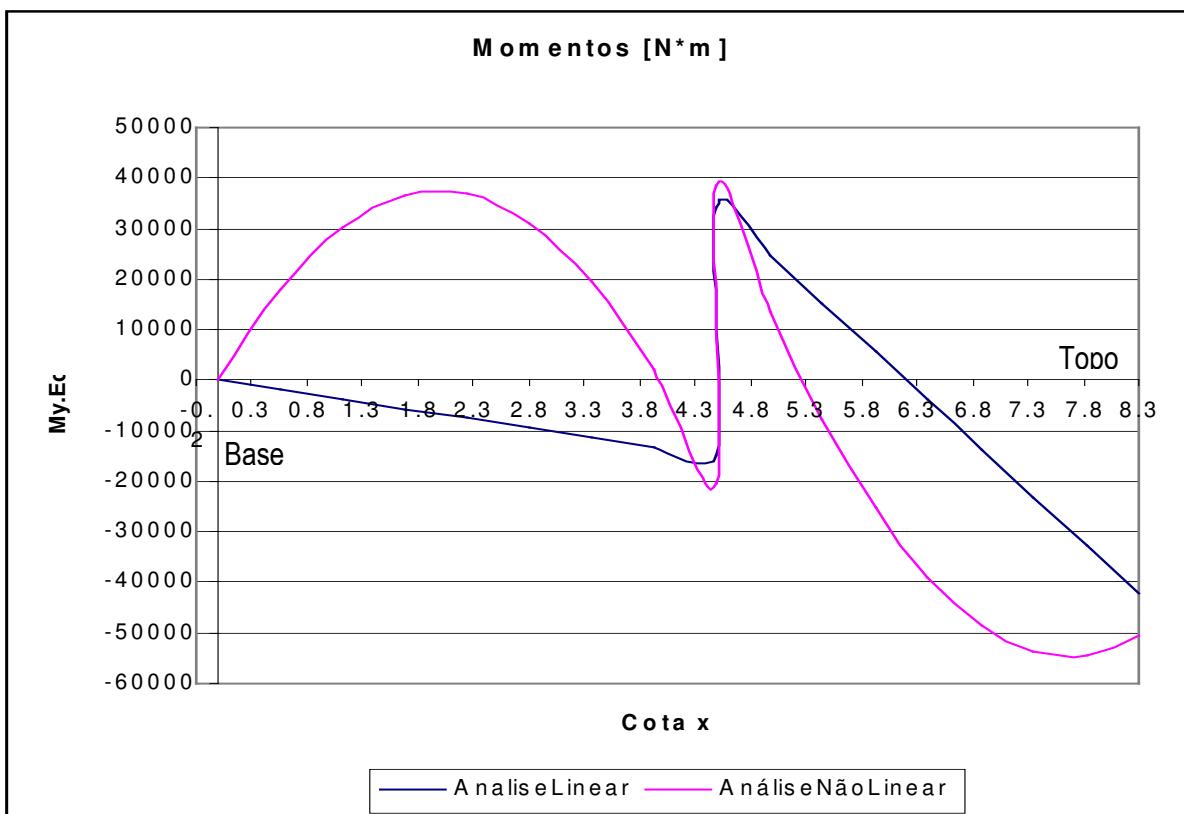


Figura 4.7 - Diagrama de momentos flectores do Problema 7

Quadro 4.13 - Momentos flectores do Problema 7

Momentos Finais [N*m]	Análise Linear 1ª Ordem	Análise Não Linear 2ª Ordem
Cota x		$\lambda_{cr}=1.2$
0	0	0
0.56	-1874	17902
1.13	-3748	30145
1.69	-5621	36498
2.25	-7495	36824
2.81	-9369	31111
3.38	-11243	19477
3.94	-13117	2137
4.50	-14990	-20616
4.50	34210	38424
4.98	24658	13758
5.45	15107	-7581
5.93	5556	-25267
6.40	-3995	-39024
6.88	-13546	-48586
7.35	-23098	-53754
7.83	-32649	-54438
8.30	-42200	-50640

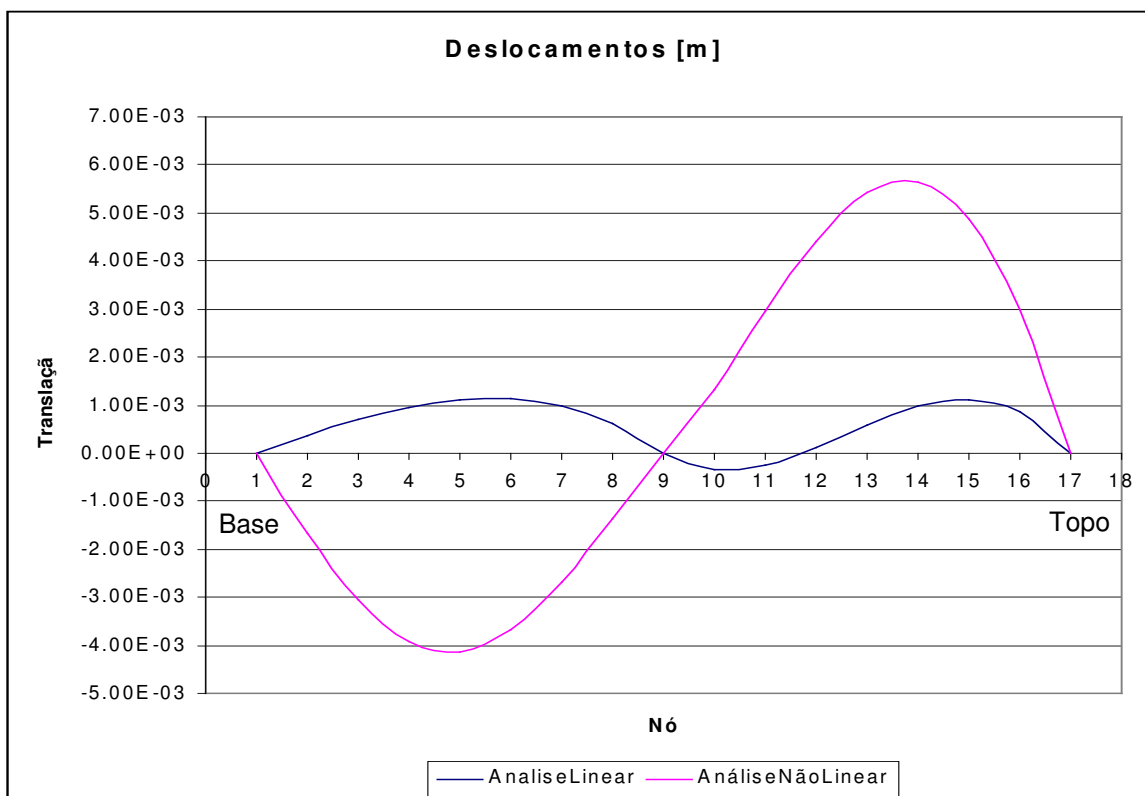


Figura 4.8 - Deformada do Problema 7

Quadro 4.14 - Deslocamentos nodais do Problema 7

Deslocamentos dos nós [m]		
Nó	Análise Linear 1ª Ordem	Análise Não Linear 2ª Ordem
1	0.00E+00	0.00E+00
2	3.67E-04	-1.68E-03
3	6.99E-04	-3.06E-03
4	9.61E-04	-3.92E-03
5	1.12E-03	-4.12E-03
6	1.14E-03	-3.67E-03
7	9.79E-04	-2.68E-03
8	6.12E-04	-1.35E-03
9	0.00E+00	0.00E+00
10	-3.50E-04	1.34E-03
11	-2.56E-04	2.95E-03
12	1.10E-04	4.42E-03
13	5.76E-04	5.42E-03
14	9.70E-04	5.64E-03
15	1.12E-03	4.87E-03
16	8.54E-04	2.99E-03
17	0.00E+00	0.00E+00

Capítulo 5 : Conclusões

5.1- Considerações Finais

Convém, antes de mais, referir que a rotina Newton-Rapson para determinação de esforços (e que também fornece valores que são assintóticos à carga limite) foi testada, em análises elásticas de 1ª e 2ª ordem, com o programa comercial SAP 2000 (v.9) tendo sido os resultados coincidentes. Nestas análises fizeram-se vários incrementos de carga 2, 10, 20, 10000, assim como se discretizou a barra em 2, 4 e 8 troços.

Também se testaram as rotinas de Controlo de Arco (Arc-Length) e Controlo de Trabalho (Work Control) comparando as suas cargas críticas elásticas com as da análise de estabilidade (buckling analysis / com pequenos deslocamentos) do SAP 2000 sendo a máxima diferença de apenas 1.3%.

As análises foram desenvolvidas sem e com imperfeições cujas diferenças só se reflectem nos esforços e deslocamentos finais, apresentando a mesma carga crítica em regime elástico, o que era de esperar.

Não foi possível fazer esta análise comparativa em regime não linear mas, o programa desenvolvido, VCol-Mx, fornece resultados expectáveis, ou seja, as cargas últimas (em regime não linear) são sempre inferiores às cargas críticas (em regime linear).

Por haver limites de tempo para realização deste trabalho alguns aspectos foram considerados menos relevantes, embora merecessem algum tempo adicional de estudo, nomeadamente:

- (i) a influência que a carga de vão possa ter na evolução da curvatura ao longo da barra,
- (ii) o critério de escolha da curvatura média ou rigidez média de cada troço,
- (iii) o aparecimento de raízes imaginárias no cálculo de $\Delta\lambda_{i,j}$ (para $j>1$) no Método de Comprimento de Arco (cilíndrico), que ocorre por vezes, e que conduziram à necessidade de acoplar aquela rotina a rotina de Controle de Deslocamentos,
- (iv) não ter sido possível implementar outro tipo de Método de Controlo de Arco (linear), e,
- (v) a consideração de mais secções tipo (embora o ficheiro de dados já esteja preparado para isso).

5.2- Conclusões

Fez-se uma abordagem teórica e regulamentar da verificação de segurança (e dimensionamento) de colunas mistas isoladas, tendo no entanto em consideração as análises prévias efectuadas para os pórticos que as contêm. Para a verificação de segurança e dimensionamento das colunas isoladas implementaram-se de dois programas de aplicação do

Método Geral, e elaboraram-se folhas de cálculo em MathCad para a aplicação do Método Simplificado. Comparam-se resultados em cinco problemas onde ambos os métodos eram aplicáveis. Em três problemas adicionais, recorrendo-se ao Método Geral exemplificou-se a sua aplicação para casos onde não é válido o Método Simplificado, nomeadamente quando as cargas axiais são variáveis, quando ha cargas de vão, quando há variação de secção e para condições de apoio diversas incluindo contraventamentos. Nestes problemas, determinou-se o factor de comprimento de encurvadura em regime elástico, e comparou-se com a Norma EAE, assim como em regime não linear, determinaram-se esforços e deslocamentos nodais, as cargas últimas e detectou-se o tipo de colapso a elas associado.

Para a situação actual, os programas permitem realizar a verificação de segurança e validar o dimensionamento de colunas mistas para 3 tipos de secções (quadrada / rectangular envolvendo perfil H, quadrada / rectangular parcialmente envolvendo perfil H, octogonal com (ou sem) tubo), com distribuição de cargas nodais ao longo da barra, com condições de apoio diversas (encastrada, fixa e rotulada) incluindo contraventamentos.

As análises desenvolvidas podem ser lineares, não lineares, de 1ª ou de 2ª ordem, com e sem imperfeições, a curto ou a longo prazo.

De facto o programa permite tirar partido dos benefícios de uma análise não linear e que são:

- (i) considerar efeitos geometricamente e materialmente não lineares,
- (ii) não precisar de fazer as verificações de segurança das secções e barras separadamente,
- (iii) superar a dificuldades devidos a incompatibilidades de deslocamentos nos extremos de cada tramo, no caso de um pilar contínuo ao longo de vários pisos ser constituído por um tramo (com um ou mais troços) por piso.

Conclui-se da utilização dos programas que:

- (i) o Método Geral fornece cargas últimas maiores que as do Método Simplificado, do que resulta um dimensionamento mais económico, sobretudo se o colapso estiver associado a fenómenos de encurvadura;
- (ii) as excentricidades da tabela 6.5 do EC4 para efeitos de consideração das imperfeições são excessivas se compararmos os resultados dos problemas 1-A e 1-B,
- (iii) o programa tem bom comportamento com o aumento da resistência do betão pois conduz a cargas últimas maiores,
- (iv) a utilização das rotinas incrementais requer algum treino na definição do incremento e do número de passos (ou parâmetro de carga máximo),
- (v) que a rotina Controle de Trabalho é mais sensível ao controle das variáveis indicadas na alínea anterior.

Conclui-se ainda que a manipulação dos dados para "M-C" e "Vcol-Mx" é fácil bastando a partir de um ficheiro antigo alterar os parâmetros adequados ao novo problema, recorrendo a um processador de texto em ASCII. Para além disso, o programa a partir do nome raiz do ficheiro de dados gera automaticamente os nomes dos ficheiros de dados, de resultados escritos e de resultados para interconexão entre programas de modo a evitar erros.

O programa, no estado actual, permite ainda realizar estudos paramétricos:

- (i) fazendo variar as classes de resistência dos materiais (aço, betão),
- (ii) alterando os parâmetros geométricos das secções,
- (iii) alterando o diâmetro, posição e número de varões para betão armado,
- (iv) alterando as cargas ao longo dos vãos,
- (v) alterando condições de apoio e/ou de contraventamento
- (vi) considerando vários tipos de análises.

5.3- Desenvolvimentos Futuros

No que respeita ao futuro dois níveis de intervenção são possíveis, a curto prazo e a médio/longo prazo.

Intervenções imediatas poder ser realizadas no programa "M-C" no sentido de possibilitar o tratamento de novas secções, para as quais o ficheiro de dados já está adaptado, nomeadamente para:

- (i) secção octogonal envolvendo parcialmente dois perfis H dispostos em cruz (POXY),
- (ii) secção octogonal envolvendo totalmente dois perfis H dispostos em cruz (EOXY),
- (iii) secção circular cheia (FCY),
- (iv) secção circular cheia envolvendo perfil H (FCIY),e
- (v) secção rectangular cheia (FRY),

ou seja, todas as secções da Figura 1.4.

No programa "Vcol-Mx" as melhorias a curto prazo podem ser:

- (i) Incorporar uma sub-rotina de cálculo de esforços nas rotinas dos Métodos de Controlo de Arco e Método de Controlo de Trabalho, de modo a possibilitar o cálculo de esforços no ponto limite com mais rigor,
- (ii) alterar a actual rotina de resolução de sistemas de equações para permitir o uso de matrizes globais bandeadas, poupando memória e aumentando a rapidez de cálculo,
- (iii) fazer a avaliação da importância da carga distribuída equivalente às imperfeições no valor da curvatura do troço,
- (iv) usar um critério mais rigoroso para estimar a curvatura média ou rigidez média no troço.

A médio/longo prazo a experiência adquirida permitirá:

- (i) reverter o problema circunscrito ao plano para um problema tridimensional, com flexão biaxial,
- (ii) consideração de estruturas curvas com grande raio de curvatura mas discretizadas por troços rectos,
- (iii) consideração de formulações que considerem a deformação axial no "efeito de bowing", adoptando matriz de rigidez e vector de forças para a análise não linear de estabilidade, o que é importante para arcos abatidos,
- (iv) consideração de formulações com base em grandes deslocamentos, o que também é importante na análise de pós encurvadura de arcos,
- (v) adoptar leis de comportamento de aços e alta resistência e aços inoxidáveis,
- (vi) considerar situação de pré-carga para ter em conta as fases de construção de um edifício,
- (vii) considerar a existência de pré esforço (aderente e não aderente)
- (viii) realizar a verificação de segurança de arcos abatidos e estudar fenómenos de encurvadura no seu plano (snap-through) e eventualmente fora dele (lateral).

Outro aspecto de relevância é estudar a aderência betão - aço dos perfis.

Bibliografía

- [1] R.P.Johnson, "Composite Structures of Steel and Concrete", Blackwell Publishing. 2004.
- [2] EN 1992-1-1, Eurocode 2: Design of concrete structures -Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004, December.
- [3] prEN 1993-1-1, Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2003, December.
- [4] prEN 1994-1-1, Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004, January.
- [5] ENV 1994-1-1; "Eurocódigo 4: Projecto de estruturas mistas aço-betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", 1992, Outubro.
- [6] EN 1990; "Basis of structural design", 2002, April
- [7] prEN 1993-1-5; "Design of Steel Structures, Part 1.5 Plated structural elements, 2003, 19 September
- [8] EAE; "Instrucción Española de Acero Estructural"
- [9] "Documento basico SE-A, Seguridad estructural, Acero", 2006, Marzo.
- [10] Leonhart, J.M.,; "Estructuras Mixtas para Edificación según criterios del Eurocódigo 4", Ed Universidad Politécnica de València, 2002, Septiembre.
- [11] Bulté, H.C., ; Medina, F.E.; "Analysis del comportamiento al fuego de estructuras mixtas", Proyecto fin de carrera para Titulación Ingeniería Industrial,2001, Septiembre.
- [12] "Design Handbook for Braced Composite Steel.Concrete Buildings according to Eurocode 4", ECCS nº 96, 2000
- [13] Johnson,R.P.; Anderson D.; "Designer's Handbook to Eurocode 4 - Part-1.1:Design of composite steel and concrete structures", Ed. Thomas Telford, 1993.
- [14] Gil,B. ; Medina, F.E.; "Diseño sismoresistente de estructuras mixtas de hormigón y acero, Proyecto fin de carrera para Titulación Ingeniería Industrial", 2001, Diciembre.
- [15] Reis,A.; Camotin,D.; "Estabilidade Estructural", McGraw Hill,2001
- [16] Montoya,P.J.; Meseguer,A.G.; Cabré,F.M.; "Hormigón Armado - Ajustado al Código Modelo CEB-FIP", Ed. Guatavo Gili,S.A., 11ª edicion.
- [17] Chen, W.F.; Toma S.; "Advanced Analysis of Steel Frames", CRC Press, London, 1994
- [18] Chen, W.F.; Lui, E.M.; "Stability Design of Steel Frames", CRC Press, London, 1991
- [19] Oñate, E.; "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos", CIMNE, 2ªEd., 1995.
- [20] Barreto,V.; "Implementação Computacional e Automatização do Dimensionamento de Pórticos de Acordo com o EC3", dissertação Mestrado, IST, 1997
- [21] Crisfield,M.A.; "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures"; Vol1, John Wiley & Sons, 1991
- [22] Crisfield,M.A.; "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures"; Vol2, John Wiley & Sons, 1997

- [23] Ghali A., Neville A.M.; Brown, T.G.; "Structural Analysis - A Unified Classical and Matrix Approach", 5ª Edition, Spon Press, 2006.
- [24] Seung-Eock Kim, Wai-Fah Chen, "A sensitivity Study on Number of Elements in Refined Plastic-Hinge Analysis", - Computers & Structures, Vol 66, Nº 5, pp 665-673, 1998, Elsevier Science Ltd.
- [25] Yoo H., Choi D-H., "New method of inelastic buckling analysis for steel frames", Journal of Constructional Steel Research, 2008.
- [26] Falcão, J.; Vinagre, J.; "Análise das disposições do EC2 para a avaliação dos efeitos de segunda ordem em estruturas de betão armado", LNEC, RPEE, pp31-38, nº 3, Maio 2008.
- [27] Fornons, José Maria; "El Metodo de los Elementos Finitos en La Ingeniería de Estructuras", Universidad Politécnica Barcelona, 1982
- [28] Halvorson, Michael; "Microsoft Visual Basic 6.0", McGraw Hill, 2001, 1999
- [29] "Microsoft Visual Basic 5.0, Language reference"; Microsoft Press, 1997
- [30] Ruggiero, M.; Lopes, V.; "Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais", Makron Books, Lda, 2ª Ed., 1997
- [31] Rodrigues, J.A.; "Métodos Numéricos - Introdução, Aplicação e Programação", Ed. Sílabo, 2003
- [32] Chandrupatla, T.R.; Belegundu, A.D.; "Introduction to Finite Elements in Engineering", Prentice-Hall, Inc., 1991

ANEXO - A

Anexo A : Folhas de Cálculo MathCad para o Método Simplificado

Apresentam-se os cálculos pelo Método Simplificado dos problemas seguintes:

- Problema 1-A, Betão C25/30
- Problema 1-B, Betão C25/30
- Problema 1-B, Betão C50/60
- Problema 2, Betão C25/30
- Problema 3, Betão C25/30
- Problema 4, Betão C25/30

A dedução dos diagramas resistentes de interacção $N_{Rd}-M_{y,Rd}$ e $N_{Rd}-M_{z,Rd}$ das secções dos Problemas 2 e 3 é extensa e igual à do Problema 1-A e por isso foi omitida.

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)
 EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)
 EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

PROBLEMA 1-A

$\lambda_{ult} := 4.75$ Pâmetro de carga último.

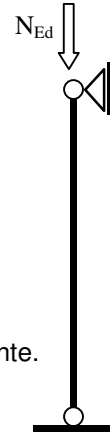
DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão simples de acordo com o método simplificado e artigo 6.7.5 do EC4.

Accões:

$$N_{Ed} := 900 \cdot 1000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad N_{Ed} = 4275 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esfuerzo de compresión del pilar}$$

$$N_{G.Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G.Ed} = 2684700 \cdot \text{N} \quad \text{esfuerzo de compresión de carga permanente.}$$



Propriedades dos materiais:

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C25/30	$f_{ck} := 25 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 16.7 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Módulo de elasticidade do betão	$E_{cm} := 31000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Coefficiente de fluência:		$\phi := 3$
Módulo de elasticidade do aço	$E_a := 210000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$			
Módulo de elasticidade do aço estrutural	$E_s := 200000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$			

Geometria:

$L := 9.0 \cdot \text{m}$	longitud del pilar	
$\beta_{ey} := 1$	$\beta_{ez} := 1$	coeficiente pandeo a flexión
$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$	$L_{ey} = 9000 \cdot \text{mm}$	longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y
$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$	$L_{ez} = 9000 \cdot \text{mm}$	longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da seção:

Sección de hórmiçón - seccion quadrada con:
 $h_c := 360 \cdot \text{mm}$ canto de la sección (largo a largo)
 $b_c := 360 \cdot \text{mm}$ ancho de la sección

Sección de acero estrutural - perfil HEB 240
 $h := 240 \cdot \text{mm}$ canto del perfil metálico
 $b := 240 \cdot \text{mm}$ ancho del ala del perfil metalico
 $t_w := 10 \cdot \text{mm}$ espesor del alma
 $t_f := 17 \cdot \text{mm}$ espesor de las alas
 $d_w := h - 2 \cdot t_f$ $d_w = 206 \text{ mm}$ ancho del alma
 $r_c := 21 \cdot \text{mm}$ raio de concordância

$$c_y := \frac{(b_c - b)}{2}$$

$c_y = 60 \text{ mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje fuerte

$$c_z := \frac{(h_c - h)}{2}$$

$c_z = 60 \text{ mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje débil

# barras	diâmetro	Área individual	ÁreaTotal	recobrimiento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$	$A_{sy} = 603 \text{ mm}^2$ $c_{sy} := 25 \cdot \text{mm}$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$	$A_{sz} = 603 \text{ mm}^2$ $c_{sz} := 25 \cdot \text{mm}$

(recobrimiento : 25 mm , Classe estrutural S4, classe de exposição XC2)

Cálculo de Areas

$$A_a := 2 \cdot b \cdot t_f + d_w \cdot t_w + r_c^2 \cdot (4 - \pi)$$

$$A_a = 105.986 \text{ cm}^2$$

area del perfil metálico

$$A_s := 8 \cdot A_{si}$$

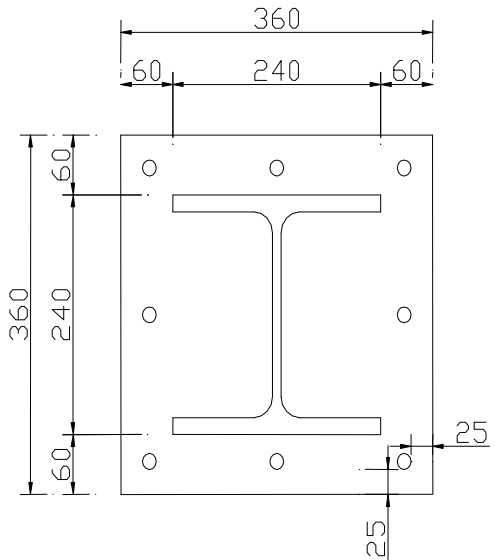
$$A_s = 16.08 \text{ cm}^2$$

area de armaduras de betão armado

$$A_c := h_c \cdot b_c - A_a - A_s$$

$$A_c = 1.174 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$$

area de la sección de hórmiçón

**RESOLUÇÃO:**

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra está integrada, se os houver, estão considerados

Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Verificações de segurança

Parte 1) Esforços

O esforço primário é apenas o esforço axial de compressão (ver primeira figura do problema).

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:

- (i) **Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna** R.:Cumpre § 6.7.1.(6)
 (ii) **Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460** R.:Cumpre § 6.7.1.(2)
 (iii) **Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.**

$$c_y = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

- (iv) **Verificação de recobrimento máximo, área de armadura máxima e mínima e ratio hc/bc**

$$c_y = 60 \text{ mm} \leq 0.4 \cdot b = 96 \text{ mm}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot h = 72 \text{ mm}$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(2)

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.014 \leq 0.06$$

R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)

$$0.2 < \frac{h_c}{b_c} = 1 \leq 5$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)

- (v) **O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$**

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd}$$

$$N_{pl.Rd} = 4487 \cdot 1000 \text{ N}$$

Resistência plástica axial da secção

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}}$$

$$\delta = 0.505$$

R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)

- (vi) **esbelteza relativa λ_* menor que 2.0**

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk} \leq 2.0}{N_{cr}}}$$

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk}$$

$$N_{pl.Rk} = 5628 \cdot 1000 \text{ N}$$

Resistência característica axial da secção

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais , a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := 2 \cdot b \cdot \frac{t_f^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f)^3 \cdot \frac{t_w}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2$$

$$I_{ay} = 10893 \cdot \text{cm}^4$$

$$I_{az} := 2 \cdot t_f \cdot \frac{b^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f) \cdot \frac{t_w^3}{12}$$

$$I_{az} = 3919 \cdot \text{cm}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$z_{sz} := h_c - 2 \cdot c_{sz} - d_s \quad z_{sz} = 294 \text{ mm} \quad I_{sy} := n_{sy} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sz}}{2} \right)^2 \quad I_{sy} = 2607 \text{ cm}^4$$

$$z_{sy} := b_c - 2 \cdot c_{sy} - d_s \quad z_{sy} = 294 \text{ mm} \quad I_{sz} := n_{sz} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sz} \cdot \left(\frac{z_{sy}}{2} \right)^2 \quad I_{sz} = 2607 \text{ cm}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{b_c \cdot h_c^3}{12} - I_{ay} - I_{sy} \quad I_{cy} = 126468 \text{ cm}^4$$

$$I_{cz} := \frac{b_c^3 \cdot h_c}{12} - I_{az} - I_{sz} \quad I_{cz} = 133442 \text{ cm}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.y.tC}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{\text{cr.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tC}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.y.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tC}} = 5.161 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tC}} = 6289 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} = 0.95$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz} \quad N_{\text{cr.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tC}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.z.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} = 3.826 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tC}} = 4662 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} = 1.1$$

Longo Prazo (tT):

$$EI_{\text{eff.y.tT}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.y.tT}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tT}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tT}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.y.tT}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tT}} = 3.625 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tT}} = 4416 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tT}} = 1.13$$

$$EI_{\text{eff.z.tT}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.z.tT}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tT}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tT}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.z.tT}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tT}} = 2.205 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tT}} = 2687 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tT}} = 1.45$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema.

Parte 3)- Verificações de Segurança

(3.i) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Critica de encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tC}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} = 4.292 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} = 5230 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \right]$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tL}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} = 3.14 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} = 3826 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} := \min([N_{\text{cr.II.y.tC}} \quad N_{\text{cr.II.y.tL}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} = 3826 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if}(N_{\text{cr.II.y.tC}} \leq N_{\text{cr.II.y.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"})$$

$$\text{Res} = \text{"Longo Prazo"}$$

(b) Carga Critica de encurvadura em torno de Z-Z

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz})$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tC}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} = 3.071 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} = 3742 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \right]$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} = 1.855 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} = 2261 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min([N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 2261 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Re} := \text{if}(N_{\text{cr.II.z.tC}} \leq N_{\text{cr.II.z.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"})$$

$$\text{Re} = \text{"Longo Prazo"}$$

Nota: As cargas críticas condicionantes (menores) em cada um dos planos correspondem em princípio ao mesmo caso de acção temporal (a curto prazo / longo prazo).

(b) Carga Critica Global:

$$N_{\text{cr.eff.II}} := \min([N_{\text{cr.eff.II.y}} \quad N_{\text{cr.eff.II.z}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II}} = 2261 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$N_{Ed} = 4275 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if}(N_{\text{cr.eff.II}} > 10 \cdot N_{Ed}, \text{"Dispensa calculo de efeitos de 2ªOrdem P-d"}, \text{"Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"})$$

$$\text{Res} = \text{"Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"}$$

(3.ii) - Verificação de Segurança

Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.5

$$\text{V.S.} \quad \frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{pl.Rd}} \leq 1.0$$

O factor de redução χ já inclui imperfeições residuais e imperfeições geométricas da barra.

De acordo com a Tabela 6.5 as curvas de encurvadura em torno dos eixos y-y e z-z são respectivamente as curvas b e c, às quais estão associados os factores de imperfeição 0.34 e 0.49 (EC3, Tabela 6.1).

$$\alpha_y := 0.34 \quad \phi_y := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha_y \cdot (\lambda_{y.tC} - 0.2) + \lambda_{y.tC}^2 \right] \quad \chi_y := \left(\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \lambda_{y.tC}^2} \right)^{-1} \quad \chi_y = 1.023$$

$$\alpha_z := 0.49 \quad \phi_z := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha_z \cdot (\lambda_{z.tC} - 0.2) + \lambda_{z.tC}^2 \right] \quad \chi_z := \left(\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \lambda_{z.tC}^2} \right)^{-1} \quad \chi_z = 0.87$$

$$\chi := \min(\chi_y \quad \chi_z \quad 1) \quad \chi = 0.87$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{pl.Rd}} = 1 \quad \leq 1.0$$

Logo, verifica a segurança da barra (§ 6.7.3.5) .

Fim.

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)

EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)

EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

Design Handbook for braced composite steel-concrete buildings according to Eurocode 4, ECCS, 2000

R.P. Johnson, Composite structures of steel and concrete, Ed. Blackwell Publishing, 3ªed. 2004

José Monfort Leonart, Estructuras Mixtas para Edificación, según criterios del Eurocódigo4, Ed. Un.Po.de València

PROBLEMA 1-B

$$\lambda_{ult} := 1.575$$

Parâmetro de carga último.

Betão C25/30

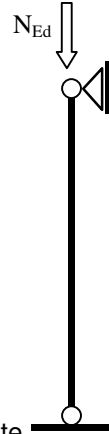
DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão simples de acordo com o método simplificado e artigo 6.7.3.6 do EC4.

Accões:

$$N_{Ed} := 900 \cdot 1000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad N_{Ed} = 1417.5 \cdot 1000 \text{ N} \text{ esfuerzo de compresión del pilar}$$

$$N_{G.Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G.Ed} = 890.19 \cdot 1000 \cdot N \text{ esfuerzo de compresión de carga permanente}$$



Propriedades dos materiais:

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C25/30	$f_{ck} := 25 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 16.7 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Módulo de elasticidade do betão	$E_{cm} := 31000 \cdot \frac{N}{mm^2}$	Coeficiente de fluência:		$\phi := 3$
Módulo de elasticidade do aço	$E_a := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$			
Módulo de elasticidade do aço estrutural	$E_s := 200000 \cdot \frac{N}{mm^2}$			

Geometria:

$$L := 9.0 \cdot m$$

longitud del pilar

$$\beta_{ey} := 1$$

$$\beta_{ez} := 1$$

coeficiente pandeo a flexión

$$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$$

$$L_{ey} = 9000 \cdot mm$$

longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y

$$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$$

$$L_{ez} = 9000 \cdot mm$$

longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da secção:

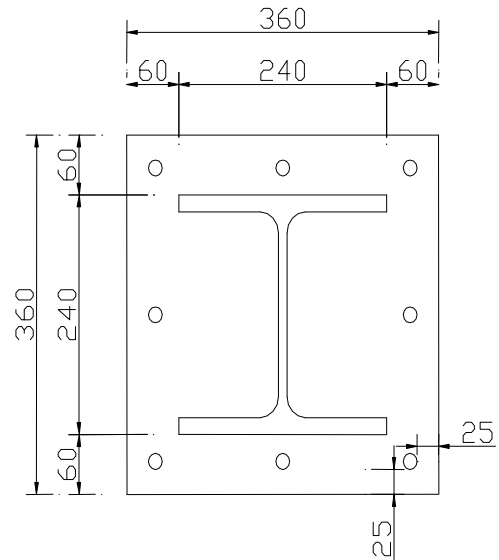
Sección de hórmiçón - seccion quadrada con:
 $h_c := 360 \cdot \text{mm}$ canto de la sección (largo a largo)
 $b_c := 360 \cdot \text{mm}$ ancho de la sección

Sección de acero estrutural - perfil HEB 240
 $h := 240 \cdot \text{mm}$ canto del perfil metálico
 $b := 240 \cdot \text{mm}$ ancho del ala del perfil metalico
 $t_w := 10 \cdot \text{mm}$ espesor del alma
 $t_f := 17 \cdot \text{mm}$ espesor de las alas

$d_w := h - 2 \cdot t_f$ $d_w = 206 \cdot \text{mm}$ ancho del alma
 $r_c := 21 \cdot \text{mm}$ raio de concordância

$c_y := \frac{(b_c - b)}{2}$ $c_y = 60 \cdot \text{mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje fuerte

$c_z := \frac{(h_c - h)}{2}$ $c_z = 60 \cdot \text{mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje débil



# barras	diâmetro	Área individual	ÁreaTotal	recobrimiento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$ $A_{sy} = 603 \cdot \text{mm}^2$	$c_{sy} := 25 \cdot \text{mm}$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$ $A_{sz} = 603 \cdot \text{mm}^2$	$c_{sz} := 25 \cdot \text{mm}$

Cálculo de Areas

$A_a := 2 \cdot b \cdot t_f + d_w \cdot t_w + r_c^2 \cdot (4 - \pi)$ $A_a = 105.986 \cdot \text{cm}^2$ area del perfil metálico

$A_s := 8 \cdot A_{si}$ $A_s = 16.08 \cdot \text{cm}^2$ area de armaduras de betão armado

$A_c := h_c \cdot b_c - A_a - A_s$ $A_c = 1.174 \cdot 10^3 \cdot \text{cm}^2$ area de la sección de hormigón

RESOLUÇÃO:

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra, se os houver, estão considerados.

Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interacção N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

Parte 4) Verificações de segurança (que pode incluir, em geral, a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Parte 1) Esforços

O esforço primário é apenas o esforço axial de compressão (ver primeira figura do problema).

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:**(2.i) Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna**

R.:Cumpre § 6.7.1.(6)

(2.ii) Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460

R.:Cumpre § 6.7.1.(2)

(2.iii) Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.

$$c_y = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

(2.iv) Verificação de recobrimento máximo, área de armadura máxima e mínima e ratio hc/bc

$$c_y = 60 \text{ mm} \leq 0.4 \cdot b = 96 \text{ mm}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot h = 72 \text{ mm}$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(2)

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.014 \leq 0.06$$

R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)

$$0.2 < \frac{h_c}{b_c} = 1 \leq 5$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)

(2.v) O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd} \quad N_{pl.Rd} = 4487 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia plástica axial da secção}$$

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}} \quad \delta = 0.505 \quad \text{R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)}$$

(2.vi) esbelteza relativa λ_* menor que 2.0

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk} \leq 2.0}{N_{cr}}}$$

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk} \quad N_{pl.Rk} = 5628 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia plástica característica da secção}$$

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais , a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := 2 \cdot b \cdot \frac{t_f^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f)^3 \cdot \frac{t_w}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2 \quad I_{ay} = 10893 \text{ cm}^4$$

$$I_{az} := 2 \cdot t_f \cdot \frac{b^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f) \cdot \frac{t_w^3}{12} \quad I_{az} = 3919 \text{ cm}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$z_{sz} := h_c - 2 \cdot c_{sz} - d_s \quad z_{sz} = 294 \text{ mm} \quad I_{sy} := n_{sy} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sz}}{2} \right)^2 \quad I_{sy} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

$$z_{sy} := b_c - 2 \cdot c_{sy} - d_s \quad z_{sy} = 294 \text{ mm} \quad I_{sz} := n_{sz} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sy}}{2} \right)^2 \quad I_{sz} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{b_c \cdot h_c^3}{12} - I_{ay} - I_{sy} \quad I_{cy} = 126468 \text{ cm}^4$$

$$I_{cz} := \frac{b_c^3 \cdot h_c}{12} - I_{az} - I_{sz} \quad I_{cz} = 133442 \text{ cm}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.y.tC}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{\text{cr.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tC}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tC}} = 5.161 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tC}} = 6289 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} = 0.95$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz} \quad N_{\text{cr.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tC}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} = 3.826 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tC}} = 4662 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} = 1.1$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.y.tL}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tL}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tL}} = 3.625 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tL}} = 4416 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} = 1.13$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tL}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tL}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} = 2.205 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tL}} = 2687 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tL}} = 1.45$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema.

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

(3.i) Diagrama de interacção My.Rd-NRd

FLEXÃO Y-Y

Módulos de resistência plástica:

$$\begin{aligned}
 \text{da armadura} \quad W_{ps,y} &:= 2 \cdot \left(n_{sy} A_{si} \cdot \frac{z_{sz}}{2} \right) & W_{ps,y} &= 177 \text{ cm}^3 \\
 \text{do perfil metalico} \quad W_{pa,y} &:= \frac{(h - 2 \cdot t_f) \cdot t_w^2}{4} + b \cdot t_f \cdot (h - t_f) + \frac{4 - \pi}{2} \cdot r_c^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f) + \frac{3 \cdot \pi - 10}{3} \cdot r_c^3 \\
 \text{do betão} \quad W_{pc,y} &:= \frac{(h_c^2 \cdot b_c)}{4} - W_{pa,y} - W_{ps,y} & W_{pa,y} &= 952 \text{ cm}^3 \\
 & & W_{pc,y} &= 1.053 \cdot 10^4 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

(3.i) (a)- COORDENADA DO PONTO A: (MpA.y;NpA.y)= (0 ; Npl.Rd)

Coordenadas do ponto A:

$$\begin{aligned}
 M_{pA,y} &:= 0 \cdot N \cdot m & M_{pA,y} &= 0 \cdot N \cdot m \\
 N_{pA,y} &:= N_{pl.Rd} & N_{pA,y} &= 4486615 \cdot N
 \end{aligned}$$

(3.i) (b)COORDENADA DO PONTO D: (MpD.y;NpD.y)= (Mmax.y.Rd ; 1/2*Npm.Rd)

Resistência à flexão no ponto D

$$M_{max,y.Rd} := W_{pa,y} \cdot f_{yd} + W_{ps,y} \cdot f_{sd} + W_{pc,y} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{max,y.Rd} = 3.529 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m$$

Resistência à compressão de toda a área de betão

$$N_{pm.Rd} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad N_{pm.Rd} = 1.663074 \cdot 10^6 \cdot N$$

Coordenadas do ponto D:

$$\begin{aligned}
 M_{pD,y} &:= M_{max,y.Rd} & M_{pD,y} &= 352877 \cdot N \cdot m \\
 N_{pD,y} &:= \frac{1}{2} \cdot N_{pm.Rd} & N_{pD,y} &= 831537 \cdot N
 \end{aligned}$$

(3.i) (c)COORDENADA DO PONTO B: (MpB.y;NpB.y)= (Mpl.y.Rd ; 0)

+++++ 1 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para Npm.Rd:

Caso 1: $h_n \leq \frac{h}{2} - t_f$ $\frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot t_w \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 90.1 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := t_w \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 81145 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 2840062 \cdot \text{mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{b}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 1$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 4.1 \cdot 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pl.Rd1} = 3.119 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{h}{2}$ $\frac{h}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ y $h_n > \frac{h}{2} - t_f$ $\frac{h}{2} - t_f = 103 \cdot \text{mm}$

$$A_s := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b \cdot c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot b \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}$$

$$h_{n2} = 101.856 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := b \cdot h_{n2}^2 - \frac{(b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^2}{4}$$

$$W_{pan} = 49842.129 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 3685026.065 \cdot \text{mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{h}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 0$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 4.136 \cdot 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 3.115 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 3: $\frac{h}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ $\frac{h}{2} \leq h_n \leq \frac{h_c}{2}$ $\frac{h_c}{2} = 180 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b \cdot c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = -266.201 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.y}$$

$$W_{pan} = 952205.726 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 24558547.541 \cdot \text{mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{h_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 4.081 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = -5.52 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$h_{n.y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{n.y.Rd} := \begin{cases} M_{n.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{n.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{n.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{pl.y.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para Nmpl.Rd:

Caso = "Linha Neutra do Caso 1"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{n.y} = 90.1 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico da zona central da Seccção limitada pelas linhas hn

$$M_{n.y.Rd} = 41003 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Momento Resistente Plástico da Seccção Total

$$M_{pl.y.Rd} = 311874 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto B:

$$M_{pB.y} := M_{pl.y.Rd} \quad M_{pB.y} = 311874 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pB.y} := 0 \cdot N \quad N_{pB.y} = 0 \text{ N}$$

(3.i) (d) COORDENADA DO PONTO C: (MpC.y; NpC.y) = (Mpl.y.Rd ; Npm.Rd)

Coordenadas do ponto C

$$M_{pC.y} := M_{pB.y} \quad M_{pC.y} = 311874 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pC.y} := N_{pm.Rd} \quad N_{pC.y} = 1663074 \text{ N}$$

(3.ii) (e) COORDENADA DO PONTO E: (MpE.y; NpE.y) = (MplE.y.Rd ; NpE.Rd)

+++++ 2 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para NpE.Rd:

$$N_{pE.Rd} := \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad N_{pE.Rd} = 3074845 \text{ N}$$

Caso 1: $h_n \leq \frac{h}{2} - t_f$ $\frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$ (armadura na zona 2*hn)

$$h_{n1} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot t_w \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 166.5 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := t_w \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 277385 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 9708479 \text{ mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{b}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{variable de control} \\ i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd1} = 1.402 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd1} \quad M_{pl.Rd1} = 2.127 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{h}{2} \quad \frac{h}{2} = 120 \text{ mm} \quad \text{y} \quad h_n > \frac{h}{2} - t_f \quad \frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$$A_s := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot b \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 108.6 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := b \cdot h_{n2}^2 - \frac{(b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^2}{4} \quad W_{pan} = 391905 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 3856057 \text{ mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{h}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd2} = 1.159 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd2} \quad M_{pl.Rd2} = 2.37 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 3: $\frac{h}{2} = 120 \text{ mm} \quad \frac{h}{2} \leq h_n \leq \frac{h_c}{2} \quad \frac{h_c}{2} = 180 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}} \quad h_{n3} = -127.8 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.y} \quad W_{pan} = 952206 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 4926929 \text{ mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{h_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 2.445 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 1.084 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad h_{nE.y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad M_{plE.y.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para NmE.Rd :

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{nE.y} = 108.6 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico no ponto E:

$$M_{plE.y.Rd} = 237018 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto E:

$$M_{pE.y} := M_{plE.y.Rd} \quad M_{pE.y} = 237018 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pE.y} := N_{pE.Rd} \quad N_{pE.y} = 3074845 \text{ N}$$

(3.i) (f) Construção do gráfico M-N

Adimensionalizando os diferentes pontos

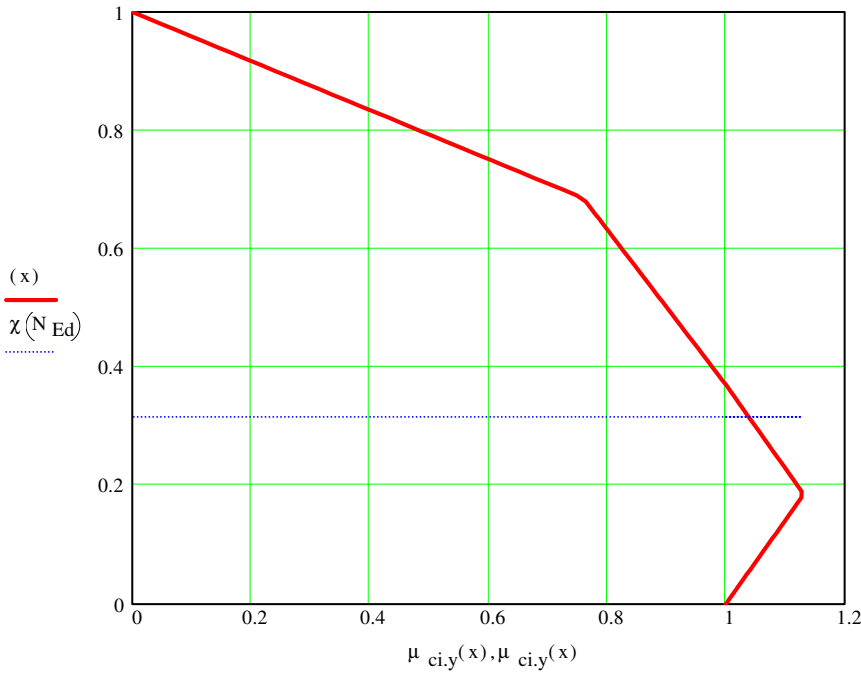
$$M_{pl.y.Rd} := M_{pB.y}$$

$$\mu(M) := \frac{M}{M_{pl.y.Rd}} \quad \mu(M_{pA.y}) = 0 \quad \mu(M_{pB.y}) = 1 \quad \mu(M_{pC.y}) = 1 \quad \mu(M_{pD.y}) = 1.131 \quad \mu(M_{pE.y}) = 0.76$$

$$\chi(N) := \frac{N}{N_{pl.Rd}} \quad \chi(N_{pA.y}) = 1 \quad \chi(N_{pB.y}) = 0 \quad \chi(N_{pC.y}) = 0.371 \quad \chi(N_{pD.y}) = 0.185 \quad \chi(N_{pE.y}) = 0.685$$

$$\mu_{ci.y}(x) := \begin{cases} \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pD.y}) - 1) + \chi(N_{pD.y})}{\chi(N_{pD.y})} \right] & \text{if } 0 \leq x \leq \chi(N_{pD.y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pC.y}) - \mu(M_{pD.y})) + \mu(M_{pD.y}) \cdot \chi(N_{pC.y}) - \mu(M_{pC.y}) \cdot \chi(N_{pD.y})}{\chi(N_{pC.y}) - \chi(N_{pD.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pD.y}) < x < \chi(N_{pC.y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pE.y}) - \mu(M_{pC.y})) + \mu(M_{pC.y}) \cdot \chi(N_{pE.y}) - \mu(M_{pE.y}) \cdot \chi(N_{pC.y})}{\chi(N_{pE.y}) - \chi(N_{pC.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pC.y}) < x \leq \chi(N_{pE.y}) \\ \left[\frac{-x \cdot (\mu(M_{pE.y})) + \mu(M_{pE.y})}{1 - \chi(N_{pE.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pE.y}) < x \leq 1 \end{cases}$$

x := 0, 0.01.. 1



x := 0, 0.1.. 1

<abscissa> <ordenada>

$\mu_{ci,y}(x)$	x
1	0
1.071	0.1
1.121	0.2
1.05	0.3
0.978	0.4
0.901	0.5
0.825	0.6
0.725	0.7
0.483	0.8
0.242	0.9
0	1

$$M_{pl,y,Rd} = 311.9 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pl,Rd} = 4486.6 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(3.ii) Diagramas de interacção Npl.Rd - Mpl.z.Rd

FLEXÃO Z-Z

Módulos de resistência plástica:

da armadura $W_{ps,z} := 2 \cdot \left(n_{sy} A_{si} \cdot \frac{z_{sy}}{2} \right)$ $W_{ps,z} = 177 \text{ cm}^3$

do perfil metalico $W_{pa,z} := \frac{t_f \cdot b^2}{2} + \frac{(h - 2 \cdot t_f) \cdot t_w^2}{4} + \frac{4 - \pi}{2} \cdot r_c^2 \cdot (t_w) - \frac{3 \cdot \pi - 10}{3} \cdot r_c^3$

do betão $W_{pc,z} := \frac{(h_c \cdot b_c^2)}{4} - W_{pa,z} - W_{ps,z}$ $W_{pa,z} = 498 \text{ cm}^3$
 $W_{pc,z} = 1.099 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$

(3.ii) (a)- COORDENADA DO PONTO A: (MpA.z;NpA.z)= (0 ; Npl.Rd)

Coordenadas do ponto A:

$$M_{pA,z} := 0 \cdot \text{N}\cdot\text{m} \quad M_{pA,z} = 0 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pA,z} := N_{pl,Rd} \quad N_{pA,z} = 4486615 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (b)COORDENADA DO PONTO D: (MpD.z;NpD.z)= (Mmax.z.Rd ; 1/2*Npm.Rd)

Resistencia a flexão no ponto D

$$M_{max,z,Rd} := W_{pa,z} \cdot f_{yd} + W_{ps,z} \cdot f_{sd} + W_{pc,z} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$
 $M_{max,z,Rd} = 2.597 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$

Resistência a compressão de toda a área de betão

$$N_{pm,Rd} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad N_{pm,Rd} = 1.663074 \cdot 10^6 \cdot \text{N}$$

Coordenadas do ponto D:

$$M_{pD.z} := M_{\max.z.Rd} \quad M_{pD.z} = 259713 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$N_{pD.z} := \frac{1}{2} \cdot N_{pm.Rd} \quad N_{pD.z} = 831537 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (c) COORDENADA DO PONTO B: (MpB.z; NpB.z) = (Mpl.z.Rd ; 0)

+++++ 1 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para Npm.Rd:

Caso 1: $h_n \leq \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot h \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 8 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := h \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 15271 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 7635 \cdot \text{mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 3.326 \cdot 10^3 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{\max.z.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pl.Rd1} = 2.564 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{b}{2} \quad \frac{b}{2} = 120 \cdot \text{mm} \quad y \quad h_n > \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot \text{mm}$

$$A_s := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + t_w \cdot (2 \cdot t_f - h) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 4 \cdot t_f \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 21.2 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := 2 \cdot t_f \cdot h_{n2}^2 + \frac{t_w^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f)}{4} \quad W_{pan} = 20442 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 141476 \cdot \text{mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 5.546 \cdot 10^3 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 2.542 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 3: $\frac{b}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ $\frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2}$ $\frac{b_c}{2} = 180 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = -266.201 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.z}$$

$$W_{pan} = 498418 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 25012335 \cdot \text{mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{b_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 3.149 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = -5.52 \cdot 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$h_{n.z} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{n.z.Rd} := \begin{cases} M_{n.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{n.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{n.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{pl.z.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para Nmpl.Rd:

Posição da Linha Neutra:

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

$$h_{n.z} = 21.2 \cdot \text{mm}$$

Momento Resistente Plástico da zona central da Secção limitada pelas linhas hn

$$M_{n.z.Rd} = 5546 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Momento Resistente Plástico da secção Total

$$M_{pl.z.Rd} = 254167 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Coordenadas do ponto B:

$$M_{pB.z} := M_{pl.z.Rd} \quad M_{pB.z} = 254167 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$N_{pB.z} := 0 \cdot \text{N} \quad N_{pB.z} = 0 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (d) COORDENADA DO PONTO C: (MpC.z; NpC.z) = (Mpl.z.Rd ; Npm.Rd)

Coordenadas do ponto C

$$M_{pC.z} := M_{pB.z} \quad M_{pC.z} = 254167 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pC.z} := N_{pm.Rd} \quad N_{pC.z} = 1663074 \cdot N$$

(3.ii) (e) COORDENADA DO PONTO E: (MpE.z; NpE.z) = (MplE.z.Rd ; NpE.Rd)

+++++ 2 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para NpE.Rd:

$$N_{pE.Rd} := \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad N_{pE.Rd} = 3074845 \cdot N$$

Caso 1: $h_n \leq \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot mm$

$$A_{sn} := 0 \cdot mm^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot h \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 14.7 \cdot mm$$

$$W_{pan} := h \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 52202 \cdot mm^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot mm^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 26101 \cdot mm^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd1} = 1.137 \cdot 10^4 \cdot N \cdot m$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd1} \quad M_{pl.Rd1} = 2.483 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{b}{2} \quad \frac{b}{2} = 120 \cdot mm \quad y \quad h_n > \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot mm$

$$A_s := 0 \cdot mm^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + t_w \cdot (2 \cdot t_f - h) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 4 \cdot t_f \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 58.1 \cdot mm$$

$$W_{pan} := 2 \cdot t_f \cdot h_{n2}^2 + \frac{t_w^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f)}{4} \quad W_{pan} = 119831 \cdot mm^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot mm^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 1094435 \cdot mm^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 3.472 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 2.25 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 3: $\frac{b}{2} = 120 \text{ mm}$ $\frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2}$ $\frac{b_c}{2} = 180 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = -127.8 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.z}$$

$$W_{pan} = 498418 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 5380716 \text{ mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{b_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 1.513 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 1.084 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$h_{nE.z} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{plE.z.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para NmE.Rd :

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{nE.z} = 58.1 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico no ponto E:

$$M_{plE.z.Rd} = 224992 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto E:

$$M_{pE.z} := M_{plE.z.Rd} \quad M_{pE.z} = 224992 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pE.z} := N_{pE.Rd} \quad N_{pE.z} = 3074845 \text{ N}$$

(3.ii) (f) Construção do gráfico M-N

Adimensionalizando os diferentes pontos

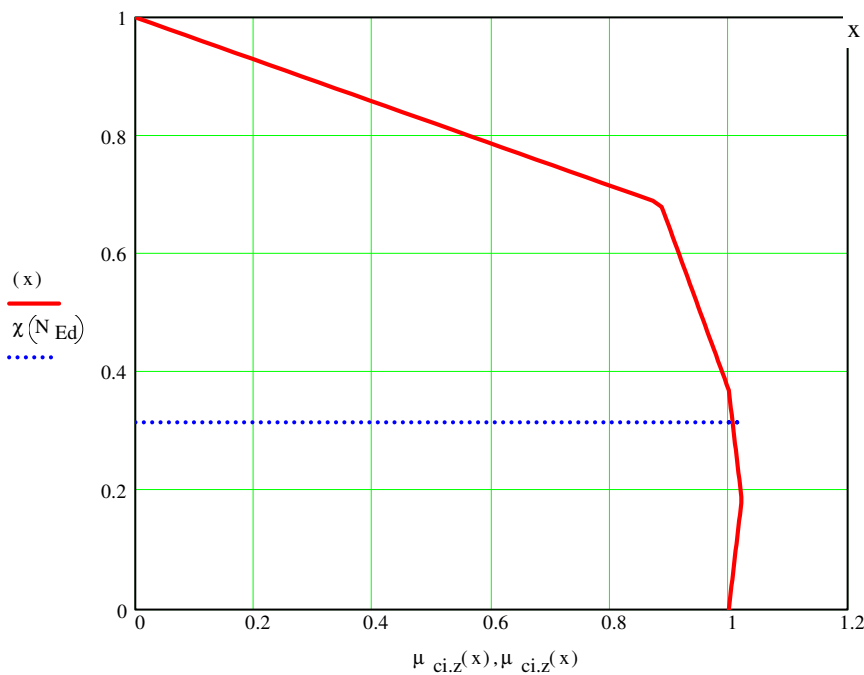
$$M_{pl.z.Rd} := M_{pB.z}$$

$$\mu(M) := \frac{M}{M_{pl.z.Rd}} \quad \mu(M_{pA.z}) = 0 \quad \mu(M_{pB.z}) = 1 \quad \mu(M_{pC.z}) = 1 \quad \mu(M_{pD.z}) = 1.022 \quad \mu(M_{pE.z}) = 0.885$$

$$\chi(N) := \frac{N}{N_{pl.Rd}} \quad \chi(N_{pA.z}) = 1 \quad \chi(N_{pB.z}) = 0 \quad \chi(N_{pC.z}) = 0.371 \quad \chi(N_{pD.z}) = 0.185 \quad \chi(N_{pE.z}) = 0.685$$

$$\mu_{ci.z}(x) := \begin{cases} \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pD.z}) - 1) + \chi(N_{pD.z})}{\chi(N_{pD.z})} \right] & \text{if } 0 \leq x \leq \chi(N_{pD.z}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pC.z}) - \mu(M_{pD.z})) + \mu(M_{pD.z}) \cdot \chi(N_{pC.z}) - \mu(M_{pC.z}) \cdot \chi(N_{pD.z})}{\chi(N_{pC.z}) - \chi(N_{pD.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pD.z}) < x < \chi(N_{pC.z}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pE.z}) - \mu(M_{pC.z})) + \mu(M_{pC.z}) \cdot \chi(N_{pE.z}) - \mu(M_{pE.z}) \cdot \chi(N_{pC.z})}{\chi(N_{pE.z}) - \chi(N_{pC.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pC.z}) < x \leq \chi(N_{pE.z}) \\ \left[\frac{-x \cdot (\mu(M_{pE.z})) + \mu(M_{pE.z})}{1 - \chi(N_{pE.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pE.z}) < x \leq 1 \end{cases}$$

x := 0, 0.01.. 1



x := 0, 0.1.. 1

<abscissa> <ordenada>

$\mu_{ci.z}(x) =$	$x =$
1	0
1.012	0.1
1.02	0.2
1.008	0.3
0.989	0.4
0.953	0.5
0.916	0.6
0.844	0.7
0.563	0.8
0.281	0.9
0	1

$$M_{pl.z.Rd} = 254.2 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pl.Rd} = 4486.6 \cdot 1000 \cdot N$$

**Parte 4) Verificações de segurança
(inclui a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)**

Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.6

Embora a barra esteja sujeita apenas a uma carga axial externa devido às imperfeições geométricas da barra surgem momentos. Para além disso só há que considerar a imperfeição num único plano, aquele em se espera que haja falha (§ 6.7.3.7). Por isso este problema de compressão subdivide-se em dois problemas independentes de flexão composta recta.

(4.i) Verificação da Resistência ao Esforço Transverso. Importância do Esforço Transverso

Como $V_{Sd} < 50\%V_{pl,Rd}$ não há interação M-V, em nenhum dos planos, por isso os diagramas de interacção M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interação os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- (i) reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
- (ii) reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$. (mais fácil de implementar).
- (iii) alterar a espessura da alma/banzo do perfil e recalculer diagramas de interacção M-N

(4.ii) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Crítica de encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff,II,y,tC} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$EI_{eff,II,y,tC} = 4.292 \cdot 10^{13} \cdot N \cdot mm^2$$

$$N_{cr,II,y,tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,y,tC}}{L_{ey}^2}$$

$$N_{cr,II,y,tC} = 5230 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{eff,II,y,tL} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G,Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$EI_{eff,II,y,tL} = 3.14 \cdot 10^{13} \cdot N \cdot mm^2$$

$$N_{cr,II,y,tL} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,y,tL}}{L_{ey}^2}$$

$$N_{cr,II,y,tL} = 3826 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{eff,II,y} := \min \left(\left[EI_{eff,II,y,tC} \quad EI_{eff,II,y,tL} \right] \right)$$

$$EI_{eff,II,y} = 31397.4 \cdot 1000 \text{ N} \cdot m^2$$

$$N_{cr,eff,II,y} := \min \left(\left[N_{cr,II,y,tC} \quad N_{cr,II,y,tL} \right] \right)$$

$$N_{cr,eff,II,y} = 3826 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$Res := \text{if} \left(N_{cr,II,y,tC} \leq N_{cr,II,y,tL}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

Res = "Longo Prazo"

(b) Carga Crítica de encurvadura em torno de Z-Z

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff,II,z,tC} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz})$$

$$EI_{eff,II,z,tC} = 3.071 \cdot 10^{13} \cdot N \cdot mm^2$$

$$N_{cr,II,z,tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,z,tC}}{L_{ez}^2}$$

$$N_{cr,II,z,tC} = 3742 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo(tL):

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \right]$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} = 2261 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} = 1.855 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} := \min \left(\left[EI_{\text{eff.II.z.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} = 18553.3 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 2261 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$Re := \text{if} \left(N_{\text{cr.II.z.tC}} \leq N_{\text{cr.II.z.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

$$Re = \text{"Longo Prazo"}$$

Nota: As cargas críticas condicionantes (menores) em cada um dos planos correspondem em princípio ao mesmo caso de acção temporal (a curto prazo / longo prazo).

(c) Carga Crítica Global:

$$N_{\text{cr.eff.II}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.eff.II.y}} \quad N_{\text{cr.eff.II.z}} \right] \right) \quad N_{\text{cr.eff.II}} = 2260.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$N_{Ed} = 1417.5 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$Res := \text{if} \left(N_{\text{cr.eff.II}} > 10 \cdot N_{Ed}, \text{"Dispensa calculo de efeitos de 2ª Ordem P-d"}, \text{"Obrigatório cálculo de efeitos de 2ª ordem P-d"} \right)$$

Res = "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ª ordem P-d"

(4.iii) Verificação de segurança para encurvadura no eixo y-y (Imperfeição da direcção Z-Z)**(a) Factores k (de amplificação e equivalência)****(a.i) -Carga critica relevante (§ 6.7.3.4 (5))**

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{\text{cr.eff.y}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y}}}{L^2}$$

$$N_{\text{cr.eff.y}} = 3825.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(a.ii) Factor k_{0.y} para imperfeições

$$\beta := 1 \quad \text{da tabela 6.4}$$

$$k_{0.y} := \frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{\text{cr.eff.y}}}} \quad k_{0.y} = 1.589$$

(b) da tabela 6.5 a imperfeição vale L/200:

$$e_{0.z} := \frac{L}{200} \quad e_{0.z} = 45 \cdot \text{mm}$$

(L é o comprimento da coluna)

(c) Esforços actuantes

$$N_{Ed} = 1417.5 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$M_{y.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0.z} \cdot k_{0.y}$$

$$M_{y.Ed} = 101334 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(d) Esforços resistentes

$$M_{pl.y.N.Rd} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \cdot M_{pl.y.Rd} \quad M_{pl.y.N.Rd} = 323983 \cdot N \cdot m$$

$$\mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) = 1.039$$

$$M_{pl.y.Rd} = 311874 \cdot N \cdot m$$

Nota : Os momentos dependem directamente do esforço axial e por isso $\mu_{ci,y}$ pode ser superior a 1 (art.6.7.3.6(2)).

(e) Verificação de segurança

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9 \quad \frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.348 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

(4.iii) Verificação de segurança para encurvadura no eixo z-z (Imperfeição da direcção Y-Y)

(a) Factores k (de amplificação e equivalência)

(a.i) -Carga critica relevante (§ 6.7.3.4 (5)) (Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff.z} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.II.z}}{L^2} \quad N_{cr,eff.z} = 2260.7 \cdot 1000 \cdot N$$

(a.ii) Factor $k_{0,y}$ para imperfeições $\beta := 1$ da tabela 6.4

$$k_{0,z} := \frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff.z}}} \quad k_{0,z} = 2.681$$

(b) da tabela 6.5 a imperfeição vale L/150: $e_{0,y} := \frac{L}{150}$ $e_{0,y} = 60 \cdot mm$

(c) Esforços actuantes

$$N_{Ed} = 1417.5 \cdot 1000 \cdot N$$

$$M_{z.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,y} \cdot k_{0,z} \quad (\text{momento de 2ª ordem}) \quad M_{z.Ed} = 228 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(d) Esforços resistentes

$$M_{pl.z.N.Rd} := \mu_{ci.z}(\chi(N_{Ed})) \cdot M_{pl.z.Rd} \quad M_{pl.z.N.Rd} = 255.8 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$\mu_{ci.z}(\chi(N_{Ed})) = 1.006$$

$$M_{pl.z.Rd} = 254 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Nota : Os momentos dependem directamente do esforço axial e por isso $\mu_{ci.z}$ pode ser superior a 1 (art.6.7.3.6(2)).

(e) Verificação de segurança

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{z.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9 \quad \frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.99 < 1, \text{ Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

CONCLUSÃO : Verifica-se a segurança à encurvadura por flexão, sendo mais crítica a encurvadura em torno do eixo fraco.

Fim

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)

EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)

EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

Design Handbook for braced composite steel-concrete buildings according to Eurocode 4, ECCS, 2000

R.P. Johnson, Composite structures of steel and concrete, Ed. Blackwell Publishing, 3ªed. 2004

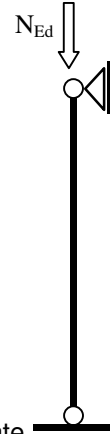
José Monfort Leonart, Estructuras Mixtas para Edificación, según criterios del Eurocódigo4, Ed. Un.Po.de València

PROBLEMA 1-B

$\lambda_{ult} := 1.838$

Parâmetro de carga último.

Betão C50/60



DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão simples de acordo com o método simplificado e artigo 6.7.3.6 do EC4.

Acções:

$$N_{Ed} := 900 \cdot 1000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad N_{Ed} = 1654.2 \cdot 1000 \text{ N esfuerzo de compresión del pilar}$$

$$N_{G.Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G.Ed} = 1038.84 \cdot 1000 \cdot N \text{ esfuerzo de compresión de carga permanente}$$

Propriedades dos materiais:

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C50/60	$f_{ck} := 50 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 33.3 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Módulo de elasticidade do betão	$E_{cm} := 37000 \cdot \frac{N}{mm^2}$	Coeficiente de fluência:		$\phi := 3$
Módulo de elasticidade do aço	$E_a := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$			
Módulo de elasticidade do aço estrutural	$E_s := 200000 \cdot \frac{N}{mm^2}$			

Geometria:

$$L := 9.0 \cdot m$$

longitud del pilar

$$\beta_{ey} := 1$$

$$\beta_{ez} := 1$$

coeficiente pandeo a flexión

$$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$$

$$L_{ey} = 9000 \cdot mm$$

longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y

$$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$$

$$L_{ez} = 9000 \cdot mm$$

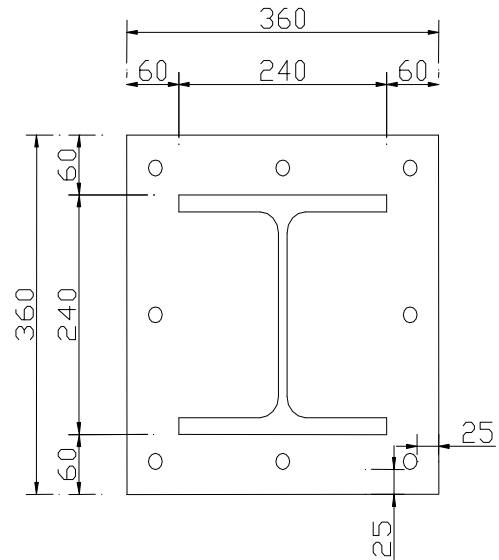
longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da secção:

Sección de hórmiçón - seccion quadrada con:
 $h_c := 360 \cdot \text{mm}$ canto de la sección (largo a largo)
 $b_c := 360 \cdot \text{mm}$ ancho de la sección

Sección de acero estrutural - perfil HEB 240
 $h := 240 \cdot \text{mm}$ canto del perfil metálico
 $b := 240 \cdot \text{mm}$ ancho del ala del perfil metalico
 $t_w := 10 \cdot \text{mm}$ espesor del alma
 $t_f := 17 \cdot \text{mm}$ espesor de las alas
 $d_w := h - 2 \cdot t_f$ $d_w = 206 \cdot \text{mm}$ ancho del alma
 $r_c := 21 \cdot \text{mm}$ raio de concordância

$c_y := \frac{(b_c - b)}{2}$ $c_y = 60 \cdot \text{mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje fuerte
 $c_z := \frac{(h_c - h)}{2}$ $c_z = 60 \cdot \text{mm}$ recubrimiento del hormigon segundo el eje débil



# barras	diâmetro	Área individual	Área Total	recobrimiento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$ $A_{sy} = 603 \cdot \text{mm}^2$	$c_{sy} := 25 \cdot \text{mm}$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$ $A_{sz} = 603 \cdot \text{mm}^2$	$c_{sz} := 25 \cdot \text{mm}$

Cálculo de Areas

$$A_a := 2 \cdot b \cdot t_f + d_w \cdot t_w + r_c^2 \cdot (4 - \pi) \quad A_a = 105.986 \cdot \text{cm}^2 \quad \text{area del perfil metálico}$$

$$A_s := 8 \cdot A_{si} \quad A_s = 16.08 \cdot \text{cm}^2 \quad \text{area de armaduras de betão armado}$$

$$A_c := h_c \cdot b_c - A_a - A_s \quad A_c = 1.174 \cdot 10^3 \cdot \text{cm}^2 \quad \text{area de la sección de hormigón}$$

RESOLUÇÃO:

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra, se os houver, estão considerados.

Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interacção N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

Parte 4) Verificações de segurança (que pode incluir, em geral, a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Parte 1) Esforços

O esforço primário é apenas o esforço axial de compressão (ver primeira figura do problema).

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:**(2.i) Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna**

R.:Cumpre § 6.7.1.(6)

(2.ii) Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460

R.:Cumpre § 6.7.1.(2)

(2.iii) Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.

$$c_y = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

(2.iv) Verificação de recobrimento máximo, área de armadura máxima e mínima e ratio hc/bc

$$c_y = 60 \text{ mm} \leq 0.4 \cdot b = 96 \text{ mm}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot h = 72 \text{ mm}$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(2)

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.014 \leq 0.06$$

R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)

$$0.2 < \frac{h_c}{b_c} = 1 \leq 5$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)

(2.v) O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd} \quad N_{pl.Rd} = 6150 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia plástica axial da secção}$$

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}} \quad \delta = 0.368 \quad \text{R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)}$$

(2.vi) esbelteza relativa λ_* menor que 2.0

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk} \leq 2.0}{N_{cr}}}$$

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk} \quad N_{pl.Rk} = 8123 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia plástica característica da secção}$$

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais , a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := 2 \cdot b \cdot \frac{t_f^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f)^3 \cdot \frac{t_w}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2 \quad I_{ay} = 10893 \text{ cm}^4$$

$$I_{az} := 2 \cdot t_f \cdot \frac{b^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f) \cdot \frac{t_w^3}{12} \quad I_{az} = 3919 \text{ cm}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$z_{sz} := h_c - 2 \cdot c_{sz} - d_s \quad z_{sz} = 294 \text{ mm} \quad I_{sy} := n_{sy} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sz}}{2} \right)^2 \quad I_{sy} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

$$z_{sy} := b_c - 2 \cdot c_{sy} - d_s \quad z_{sy} = 294 \text{ mm} \quad I_{sz} := n_{sz} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sy}}{2} \right)^2 \quad I_{sz} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{b_c \cdot h_c^3}{12} - I_{ay} - I_{sy} \quad I_{cy} = 126468 \text{ cm}^4$$

$$I_{cz} := \frac{b_c^3 \cdot h_c}{12} - I_{az} - I_{sz} \quad I_{cz} = 133442 \text{ cm}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.y.tC}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{\text{cr.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tC}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tC}} = 5.616 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tC}} = 6844 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} = 1.09$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz} \quad N_{\text{cr.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tC}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} = 4.307 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tC}} = 5248 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tC}} = 1.24$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.y.tL}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tL}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tL}} = 3.782 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tL}} = 4609 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} = 1.33$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tL}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{\text{-z.tL}} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} = 2.371 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tL}} = 2890 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-z.tL}} = 1.68$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema.

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

(3.i) Diagrama de interacção My.Rd-NRd

FLEXÃO Y-Y

Módulos de resistência plástica:

da armadura	$W_{ps.y} := 2 \cdot \left(n_{sy} A_{si} \cdot \frac{z_{sz}}{2} \right)$	$W_{ps.y} = 177 \text{ cm}^3$
do perfil metalico	$W_{pa.y} := \frac{(h - 2 \cdot t_f) \cdot t_w^2}{4} + b \cdot t_f \cdot (h - t_f) + \frac{4 - \pi}{2} \cdot r_c^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f) + \frac{3 \cdot \pi - 10}{3} \cdot r_c^3$	
do betão	$W_{pc.y} := \frac{(h_c^2 \cdot b_c)}{4} - W_{pa.y} - W_{ps.y}$	$W_{pa.y} = 952 \text{ cm}^3$ $W_{pc.y} = 1.053 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$

(3.i) (a)- COORDENADA DO PONTO A: (MpA.y;NpA.y)= (0 ; Npl.Rd)

Coordenadas do ponto A:

$$M_{pA.y} := 0 \cdot N \cdot m \quad M_{pA.y} = 0 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pA.y} := N_{pl.Rd} \quad N_{pA.y} = 6149689 \cdot N$$

(3.i) (b)COORDENADA DO PONTO D: (MpD.y;NpD.y)= (Mmax.y.Rd ; 1/2*Npm.Rd)

Resistência à flexão no ponto D

$$M_{max.y.Rd} := W_{pa.y} \cdot f_{yd} + W_{ps.y} \cdot f_{sd} + W_{pc.y} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{max.y.Rd} = 4.407 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m$$

Resistência à compressão de toda a área de betão

$$N_{pm.Rd} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad N_{pm.Rd} = 3.326148 \cdot 10^6 \cdot N$$

Coordenadas do ponto D:

$$M_{pD.y} := M_{max.y.Rd} \quad M_{pD.y} = 440664 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pD.y} := \frac{1}{2} \cdot N_{pm.Rd} \quad N_{pD.y} = 2 \cdot 10^6 \cdot N$$

(3.i) (c)COORDENADA DO PONTO B: (MpB.y;NpB.y)= (Mpl.y.Rd ; 0)

+++++ 1 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para Npm.Rd:

Caso 1: $h_n \leq \frac{h}{2} - t_f \quad \frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot t_w \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 117.2 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := t_w \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 137371 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 4807988 \cdot \text{mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{b}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 1.095 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{\max.y.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pl.Rd1} = 3.312 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{h}{2}$ $\frac{h}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ y $h_n > \frac{h}{2} - t_f$ $\frac{h}{2} - t_f = 103 \cdot \text{mm}$

$$A_s := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b \cdot c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot b \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}$$

$$h_{n2} = 104.903 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := b \cdot h_{n2}^2 - \frac{(b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^2}{4}$$

$$W_{pan} = 201020.641 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 3760615.32 \cdot \text{mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{h}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 1.056 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{\max.y.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 3.35 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 3: $\frac{h}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ $\frac{h}{2} \leq h_n \leq \frac{h_c}{2}$ $\frac{h_c}{2} = 180 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b \cdot c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = -44.217 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.y}$$

$$W_{pan} = 952205.726 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -248341.998 \cdot \text{mm}^3$$

$$i_3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{h_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i_3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 1.993 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 2.414 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i_1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i_2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i_3=1 \end{cases}$$

$$h_{n.y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i_1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i_2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i_3=1 \end{cases}$$

$$M_{n.y.Rd} := \begin{cases} M_{n.Rd1} & \text{if } i_1=1 \\ M_{n.Rd2} & \text{if } i_2=1 \\ M_{n.Rd3} & \text{if } i_3=1 \end{cases}$$

$$M_{pl.y.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i_1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i_2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i_3=1 \end{cases}$$

Caso para Nmpl.Rd:

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{n.y} = 104.9 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico da zona central da Seccção limitada pelas linhas hn

$$M_{n.y.Rd} = 105622 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Momento Resistente Plástico da Seccção Total

$$M_{pl.y.Rd} = 335042 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto B:

$$M_{pB.y} := M_{pl.y.Rd} \quad M_{pB.y} = 335042 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pB.y} := 0 \cdot \text{N} \quad N_{pB.y} = 0 \text{ N}$$

(3.i) (d) COORDENADA DO PONTO C: (MpC.y; NpC.y) = (Mpl.y.Rd ; Npm.Rd)

Coordenadas do ponto C

$$M_{pC.y} := M_{pB.y} \quad M_{pC.y} = 335042 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pC.y} := N_{pm.Rd} \quad N_{pC.y} = 3326148 \text{ N}$$

(3.ii) (e) COORDENADA DO PONTO E: (MpE.y; NpE.y) = (MplE.y.Rd ; NpE.Rd)

Cálculo da posição da linha neutra plástica para NpE.Rd:

$$N_{pE.Rd} := \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad N_{pE.Rd} = 4737918 \text{ N}$$

Caso 1: $h_n \leq \frac{h}{2} - t_f$ $\frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot t_w \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 167 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := t_w \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 278732 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 9755634 \text{ mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{b}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd1} = 2.221 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd1} \quad M_{pl.Rd1} = 2.185 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{h}{2} \quad \frac{h}{2} = 120 \text{ mm} \quad \text{y} \quad h_n > \frac{h}{2} - t_f \quad \frac{h}{2} - t_f = 103 \text{ mm}$

$$A_s := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot b \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 111.6 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := b \cdot h_{n2}^2 - \frac{(b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^2}{4} \quad W_{pan} = 547164 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 3933687 \text{ mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{h}{2} - t_f \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd2} = 1.825 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd2} \quad M_{pl.Rd2} = 2.582 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 3: $\frac{h}{2} = 120 \text{ mm} \quad \frac{h}{2} \leq h_n \leq \frac{h_c}{2} \quad \frac{h_c}{2} = 180 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}} \quad h_{n3} = 25 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.y} \quad W_{pan} = 952206 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -727438 \text{ mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{h}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{h_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 1.913 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 2.494 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad h_{nE.y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad M_{plE.y.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para NmE.Rd :

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{nE.y} = 111.6 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico no ponto E:

$$M_{plE.y.Rd} = 258209 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto E:

$$M_{pE.y} := M_{plE.y.Rd} \quad M_{pE.y} = 258209 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pE.y} := N_{pE.Rd} \quad N_{pE.y} = 4737918 \text{ N}$$

(3.i) (f) Construção do gráfico M-N

Adimensionalizando os diferentes pontos

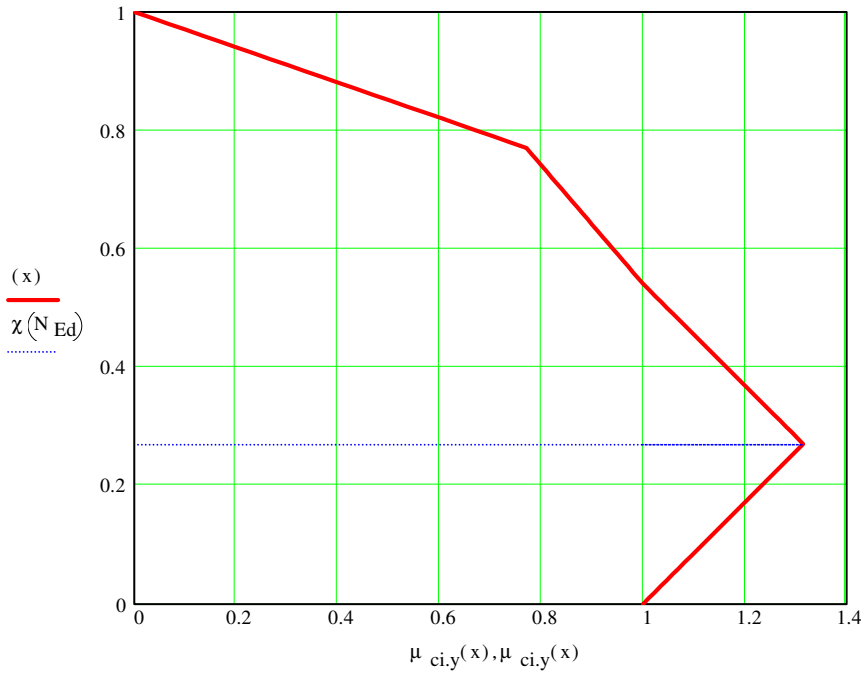
$$M_{pl.y.Rd} := M_{pB.y}$$

$$\mu(M) := \frac{M}{M_{pl.y.Rd}} \quad \mu(M_{pA.y}) = 0 \quad \mu(M_{pB.y}) = 1 \quad \mu(M_{pC.y}) = 1 \quad \mu(M_{pD.y}) = 1.315 \quad \mu(M_{pE.y}) = 0.771$$

$$\chi(N) := \frac{N}{N_{pl.Rd}} \quad \chi(N_{pA.y}) = 1 \quad \chi(N_{pB.y}) = 0 \quad \chi(N_{pC.y}) = 0.541 \quad \chi(N_{pD.y}) = 0.27 \quad \chi(N_{pE.y}) = 0.77$$

$$\mu_{ci.y}(x) := \begin{cases} \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pD.y}) - 1) + \chi(N_{pD.y})}{\chi(N_{pD.y})} \right] & \text{if } 0 \leq x \leq \chi(N_{pD.y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pC.y}) - \mu(M_{pD.y})) + \mu(M_{pD.y}) \cdot \chi(N_{pC.y}) - \mu(M_{pC.y}) \cdot \chi(N_{pD.y})}{\chi(N_{pC.y}) - \chi(N_{pD.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pD.y}) < x < \chi(N_{pC.y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pE.y}) - \mu(M_{pC.y})) + \mu(M_{pC.y}) \cdot \chi(N_{pE.y}) - \mu(M_{pE.y}) \cdot \chi(N_{pC.y})}{\chi(N_{pE.y}) - \chi(N_{pC.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pC.y}) < x \leq \chi(N_{pE.y}) \\ \left[\frac{-x \cdot (\mu(M_{pE.y})) + \mu(M_{pE.y})}{1 - \chi(N_{pE.y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pE.y}) < x \leq 1 \end{cases}$$

x := 0, 0.01.. 1



x := 0, 0.1.. 1

<abscissa> <ordenada>

$\mu_{ci,y}(x)$	x
1	0
1.117	0.1
1.233	0.2
1.281	0.3
1.164	0.4
1.048	0.5
0.941	0.6
0.841	0.7
0.671	0.8
0.336	0.9
0	1

$$M_{pl,y,Rd} = 335 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pl,Rd} = 6149.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(3.ii) Diagramas de interacção Npl.Rd - Mpl.z.Rd

FLEXÃO Z-Z

Módulos de resistência plástica:

da armadura $W_{ps,z} := 2 \cdot \left(n_{sy} A_{si} \cdot \frac{z_{sy}}{2} \right)$ $W_{ps,z} = 177 \text{ cm}^3$

do perfil metalico $W_{pa,z} := \frac{t_f \cdot b^2}{2} + \frac{(h - 2 \cdot t_f) \cdot t_w^2}{4} + \frac{4 - \pi}{2} \cdot r_c^2 \cdot (t_w) - \frac{3 \cdot \pi - 10}{3} \cdot r_c^3$

do betão $W_{pc,z} := \frac{(h_c \cdot b_c^2)}{4} - W_{pa,z} - W_{ps,z}$ $W_{pa,z} = 498 \text{ cm}^3$
 $W_{pc,z} = 1.099 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$

(3.ii) (a)- COORDENADA DO PONTO A: (MpA.z;NpA.z)= (0 ; Npl.Rd)

Coordenadas do ponto A:

$$M_{pA,z} := 0 \cdot \text{N}\cdot\text{m} \quad M_{pA,z} = 0 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pA,z} := N_{pl,Rd} \quad N_{pA,z} = 6149689 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (b)COORDENADA DO PONTO D: (MpD.z;NpD.z)= (Mmax.z.Rd ; 1/2*Npm.Rd)

Resistencia a flexão no ponto D

$$M_{max,z,Rd} := W_{pa,z} \cdot f_{yd} + W_{ps,z} \cdot f_{sd} + W_{pc,z} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$
 $M_{max,z,Rd} = 3.513 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$

Resistência a compressão de toda a área de betão

$$N_{pm,Rd} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad N_{pm,Rd} = 3.326148 \cdot 10^6 \cdot \text{N}$$

Coordenadas do ponto D:

$$M_{pD.z} := M_{\max.z.Rd} \quad M_{pD.z} = 351282 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$N_{pD.z} := \frac{1}{2} \cdot N_{pm.Rd} \quad N_{pD.z} = 2 \cdot 10^6 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (c) COORDENADA DO PONTO B: (MpB.z; NpB.z) = (Mpl.z.Rd ; 0)

Cálculo da posição da linha neutra plástica para Npm.Rd:

Caso 1: $h_n \leq \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot h \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 15.7 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := h \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 59138 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 29569 \cdot \text{mm}^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 1.313 \cdot 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{\max.z.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pl.Rd1} = 3.382 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Caso 2: $h_n > \frac{t_w}{2} \quad \frac{b}{2} = 120 \cdot \text{mm} \quad y \quad h_n > \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot \text{mm}$

$$A_s := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + t_w \cdot (2 \cdot t_f - h) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 4 \cdot t_f \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 52.7 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := 2 \cdot t_f \cdot h_{n2}^2 + \frac{t_w^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f)}{4} \quad W_{pan} = 99549 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 899967 \cdot \text{mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 3.627 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 3.15 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 3: $\frac{b}{2} = 120 \text{ mm}$ $\frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2}$ $\frac{b_c}{2} = 180 \text{ mm}$

$$A_{sn} := 0 \text{ mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pm.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = -44.217 \text{ mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.z}$$

$$W_{pan} = 498418 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 205445 \text{ mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{b_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 1.099 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 2.414 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$h_{n.z} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{n.z.Rd} := \begin{cases} M_{n.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{n.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{n.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

$$M_{pl.z.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para Nmpl.Rd:

Posição da Linha Neutra:

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

$$h_{n.z} = 52.7 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico da zona central da Secção limitada pelas linhas hn

$$M_{n.z.Rd} = 36267 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Momento Resistente Plástico da secção Total

$$M_{pl.z.Rd} = 315015 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto B:

$$M_{pB.z} := M_{pl.z.Rd} \quad M_{pB.z} = 315015 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pB.z} := 0 \cdot \text{N} \quad N_{pB.z} = 0 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (d) COORDENADA DO PONTO C: (MpC.z; NpC.z) = (Mpl.z.Rd ; Npm.Rd)

Coordenadas do ponto C

$$M_{pC.z} := M_{pB.z} \quad M_{pC.z} = 315015 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pC.z} := N_{pm.Rd} \quad N_{pC.z} = 3326148 \cdot N$$

(3.ii) (e) COORDENADA DO PONTO E: (MpE.z; NpE.z) = (MplE.z.Rd ; NpE.Rd)

Cálculo da posição da linha neutra plástica para NpE.Rd:

$$N_{pE.Rd} := \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad N_{pE.Rd} = 4737918 \cdot N$$

Caso 1: $h_n \leq \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot mm$

$$A_{sn} := 0 \cdot mm^2 \quad (\text{armadura na zona } 2 \cdot h_n)$$

$$h_{n1} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 2 \cdot h \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n1} = 22.4 \cdot mm$$

$$W_{pan} := h \cdot h_{n1}^2 \quad W_{pan} = 119995 \cdot mm^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot mm^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n1}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 59997 \cdot mm^3$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n1} \leq \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

variable de control

$$i1 = 0$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd1} = 2.664 \cdot 10^4 \cdot N \cdot m$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd1} \quad M_{pl.Rd1} = 3.246 \cdot 10^5 \cdot N \cdot m$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{b}{2} \quad \frac{b}{2} = 120 \cdot mm \quad y \quad h_n > \frac{t_w}{2} \quad \frac{t_w}{2} = 5 \cdot mm$

$$A_s := 0 \cdot mm^2$$

$$h_{n2} := \frac{N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd}) + t_w \cdot (2 \cdot t_f - h) \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} + 4 \cdot t_f \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})} \quad h_{n2} = 82.4 \cdot mm$$

$$W_{pan} := 2 \cdot t_f \cdot h_{n2}^2 + \frac{t_w^2 \cdot (h - 2 \cdot t_f)}{4} \quad W_{pan} = 235979 \cdot mm^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot mm^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n2}^2 - W_{pan} - W_{psn} \quad W_{pcn} = 2208092 \cdot mm^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n2} \leq \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n2} > \frac{t_w}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 8.722 \cdot 10^4 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 2.641 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

Caso 3: $\frac{b}{2} = 120 \cdot \text{mm}$ $\frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2}$ $\frac{b_c}{2} = 180 \cdot \text{mm}$

$$A_{sn} := 0 \cdot \text{mm}^2$$

$$h_{n3} := \frac{[N_{pE.Rd} - A_{sn} \cdot (2 \cdot f_{sd} - 0.85 \cdot f_{cd})] - A_a \cdot (2 \cdot f_{yd} - 0.85 \cdot f_{cd})}{2 \cdot h_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_{n3} = 25 \cdot \text{mm}$$

$$W_{pan} := W_{pa.z}$$

$$W_{pan} = 498418 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{psn} := 0 \cdot \text{mm}^3$$

$$W_{pcn} := h_c \cdot h_{n3}^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -273651 \cdot \text{mm}^3$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_{n3} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n3} \leq \frac{b_c}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 1.019 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.z.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 2.494 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad h_{nE.z} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \end{cases} \quad M_{plE.z.Rd} := \begin{cases} M_{pl.Rd1} & \text{if } i1=1 \\ M_{pl.Rd2} & \text{if } i2=1 \\ M_{pl.Rd3} & \text{if } i3=1 \end{cases}$$

Caso para NmE.Rd :

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

Posição da Linha Neutra:

$$h_{nE.z} = 82.4 \cdot \text{mm}$$

Momento Resistente Plástico no ponto E:

$$M_{plE.z.Rd} = 264067 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto E:

$$M_{pE.z} := M_{plE.z.Rd} \quad M_{pE.z} = 264067 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pE.z} := N_{pE.Rd} \quad N_{pE.z} = 4737918 \cdot \text{N}$$

(3.ii) (f) Construção do gráfico M-N

Adimensionalizando os diferentes pontos

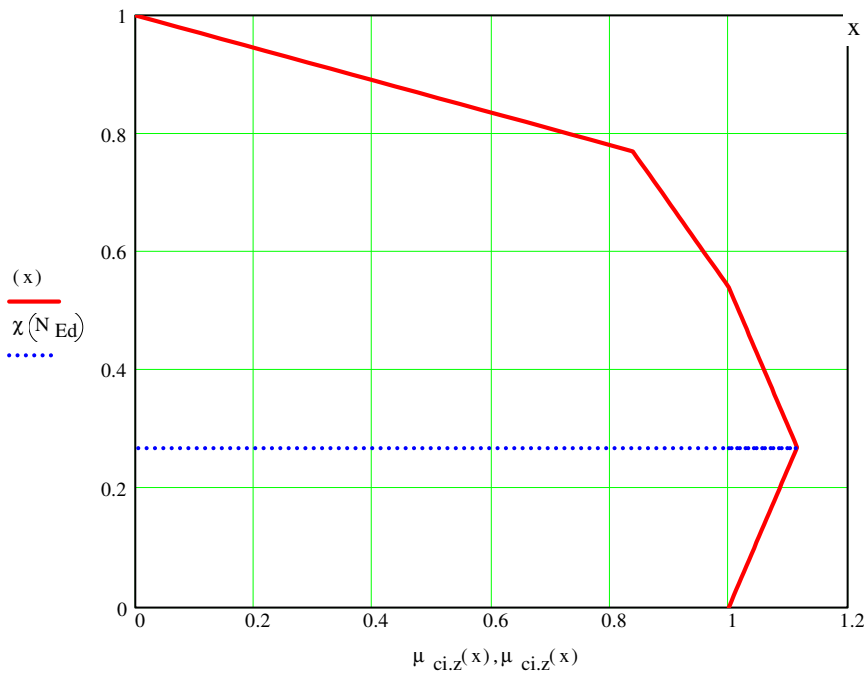
$$M_{pl.z.Rd} := M_{pB.z}$$

$$\mu(M) := \frac{M}{M_{pl.z.Rd}} \quad \mu(M_{pA.z}) = 0 \quad \mu(M_{pB.z}) = 1 \quad \mu(M_{pC.z}) = 1 \quad \mu(M_{pD.z}) = 1.115 \quad \mu(M_{pE.z}) = 0.838$$

$$\chi(N) := \frac{N}{N_{pl.Rd}} \quad \chi(N_{pA.z}) = 1 \quad \chi(N_{pB.z}) = 0 \quad \chi(N_{pC.z}) = 0.541 \quad \chi(N_{pD.z}) = 0.27 \quad \chi(N_{pE.z}) = 0.77$$

$$\mu_{ci.z}(x) := \begin{cases} \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pD.z}) - 1) + \chi(N_{pD.z})}{\chi(N_{pD.z})} \right] & \text{if } 0 \leq x \leq \chi(N_{pD.z}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pC.z}) - \mu(M_{pD.z})) + \mu(M_{pD.z}) \cdot \chi(N_{pC.z}) - \mu(M_{pC.z}) \cdot \chi(N_{pD.z})}{\chi(N_{pC.z}) - \chi(N_{pD.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pD.z}) < x < \chi(N_{pC.z}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pE.z}) - \mu(M_{pC.z})) + \mu(M_{pC.z}) \cdot \chi(N_{pE.z}) - \mu(M_{pE.z}) \cdot \chi(N_{pC.z})}{\chi(N_{pE.z}) - \chi(N_{pC.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pC.z}) < x \leq \chi(N_{pE.z}) \\ \left[\frac{-x \cdot (\mu(M_{pE.z})) + \mu(M_{pE.z})}{1 - \chi(N_{pE.z})} \right] & \text{if } \chi(N_{pE.z}) < x \leq 1 \end{cases}$$

x := 0, 0.01.. 1



<abscissa> <ordenada>

$\mu_{ci.z}(x) =$	$x =$
1	0
1.043	0.1
1.085	0.2
1.103	0.3
1.06	0.4
1.017	0.5
0.958	0.6
0.888	0.7
0.73	0.8
0.365	0.9
0	1

$$M_{pl.z.Rd} = 315 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pl.Rd} = 6149.7 \cdot 1000 \text{ N}$$

Parte 4) Verificações de segurança**(inclui a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)****Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.6**

Embora a barra esteja sujeita apenas a uma carga axial externa devido às imperfeições geométricas da barra surgem momentos. Para além disso só há que considerar a imperfeição num único plano, aquele em se espera que haja falha (§ 6.7.3.7). Por isso este problema de compressão subdivide-se em dois problemas independentes de flexão composta recta.

(4.i) Verificação da Resistência ao Esforço Transverso. Importância do Esforço Transverso

Como $V_{Sd} < 50\%V_{pl,Rd}$ não há interação M-V, em nenhum dos planos, por isso os diagramas de interacção M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interação os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- (i) reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
- (ii) reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$. (mais fácil de implementar).
- (iii) alterar a espessura da alma/banzo do perfil e recalculer diagramas de interacção M-N

(4.ii) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Crítica de encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff,II,y,tC} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$EI_{eff,II,y,tC} = 4.634 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{cr,II,y,tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,y,tC}}{L_{ey}^2}$$

$$N_{cr,II,y,tC} = 5646 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{eff,II,y,tL} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G,Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$EI_{eff,II,y,tL} = 3.258 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{cr,II,y,tL} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,y,tL}}{L_{ey}^2}$$

$$N_{cr,II,y,tL} = 3970 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{eff,II,y} := \min \left(\left[EI_{eff,II,y,tC} \quad EI_{eff,II,y,tL} \right] \right)$$

$$N_{cr,eff,II,y} := \min \left(\left[N_{cr,II,y,tC} \quad N_{cr,II,y,tL} \right] \right)$$

$$Res := \text{if} \left(N_{cr,II,y,tC} \leq N_{cr,II,y,tL}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

$$EI_{eff,II,y} = 32581.4 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{cr,eff,II,y} = 3970 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

Res = "Longo Prazo"

(b) Carga Crítica de encurvadura em torno de Z-Z

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff,II,z,tC} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz})$$

$$EI_{eff,II,z,tC} = 3.432 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{cr,II,z,tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,z,tC}}{L_{ez}^2}$$

$$N_{cr,II,z,tC} = 4181 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo(tL):

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} = 2413 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} = 1.98 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} := \min \left(\left[EI_{\text{eff.II.z.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} = 19802.6 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 2413 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$Re := \text{if} \left(N_{\text{cr.II.z.tC}} \leq N_{\text{cr.II.z.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

$$Re = \text{"Longo Prazo"}$$

Nota: As cargas críticas condicionantes (menores) em cada um dos planos correspondem em princípio ao mesmo caso de acção temporal (a curto prazo / longo prazo).

(c) Carga Crítica Global:

$$N_{\text{cr.eff.II}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.eff.II.y}} \quad N_{\text{cr.eff.II.z}} \right] \right) \quad N_{\text{cr.eff.II}} = 2412.9 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$N_{Ed} = 1654.2 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$Res := \text{if} \left(N_{\text{cr.eff.II}} > 10 \cdot N_{Ed}, \text{"Dispensa calculo de efeitos de 2ª Ordem P-d"}, \text{"Obrigatório cálculo de efeitos de 2ª ordem P-d"} \right)$$

Res = "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ª ordem P-d"

(4.iii) Verificação de segurança para encurvadura no eixo y-y (Imperfeição da direcção Z-Z)**(a) Factores k (de amplificação e equivalência)****(a.i) -Carga critica relevante (§ 6.7.3.4 (5))**

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{\text{cr.eff.y}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y}}}{L^2}$$

$$N_{\text{cr.eff.y}} = 3969.9 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(a.ii) Factor k_{0.y} para imperfeições

$$\beta := 1 \quad \text{da tabela 6.4}$$

$$k_{0.y} := \frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{\text{cr.eff.y}}}} \quad k_{0.y} = 1.714$$

(b) da tabela 6.5 a imperfeição vale L/200:

(L é o comprimento da coluna)

$$e_{0.z} := \frac{L}{200} \quad e_{0.z} = 45 \text{ mm}$$

(c) Esforços actuantes

$$N_{Ed} = 1654.2 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$M_{y.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0.z} \cdot k_{0.y}$$

$$M_{y.Ed} = 127613 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(d) Esforços resistentes

$$M_{pl.y.N.Rd} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \cdot M_{pl.y.Rd} \quad M_{pl.y.N.Rd} = 440101 \cdot N \cdot m$$

$$\mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) = 1.314$$

$$M_{pl.y.Rd} = 335042 \cdot N \cdot m$$

Nota : Os momentos dependem directamente do esforço axial e por isso $\mu_{ci,y}$ pode ser superior a 1 (art.6.7.3.6(2)).

(e) Verificação de segurança

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{y.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9 \quad \frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.322 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

(4.iii) Verificação de segurança para encurvadura no eixo z-z (Imperfeição da direcção Y-Y)

(a) Factores k (de amplificação e equivalência)

(a.i) -Carga critica relevante (§ 6.7.3.4 (5)) (Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff.z} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.II.z}}{L^2} \quad N_{cr,eff.z} = 2412.9 \cdot 1000 \cdot N$$

(a.ii) Factor $k_{0,y}$ para imperfeições $\beta := 1$ da tabela 6.4

$$k_{0.z} := \frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff.z}}} \quad k_{0.z} = 3.18$$

(b) da tabela 6.5 a imperfeição vale L/150: $e_{0,y} := \frac{L}{150}$ $e_{0,y} = 60 \cdot mm$

(c) Esforços actuantes

$$N_{Ed} = 1654.2 \cdot 1000 \cdot N$$

$$M_{z.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,y} \cdot k_{0.z} \quad (\text{momento de 2ª ordem}) \quad M_{z.Ed} = 316 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(d) Esforços resistentes

$$M_{pl.z.N.Rd} := \mu_{ci.z}(\chi(N_{Ed})) \cdot M_{pl.z.Rd} \quad M_{pl.z.N.Rd} = 351.1 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$\mu_{ci.z}(\chi(N_{Ed})) = 1.115$$

$$M_{pl.z.Rd} = 315 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Nota : Os momentos dependem directamente do esforço axial e por isso $\mu_{ci.z}$ pode ser superior a 1 (art.6.7.3.6(2)).

(e) Verificação de segurança

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{z.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9 \quad \frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.999 < 1, \text{ Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

CONCLUSÃO : Verifica-se a segurança à encurvadura por flexão, sendo mais crítica a encurvadura em torno do eixo fraco.

Fim

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)

EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)

EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

Design Handbook for braced composite steel-concrete buildings according to Eurocode 4, ECCS,2000

R.P. Johnson, Composite structures of steel and concrete, Ed. Blackwell Publishing, 3ªed. 2004

José Monfort Leonart, Estructuras Mixtas para Edificación, según criterios del Eurocódigo4, Ed. Un.Po.de València

PROBLEMA 2

FLEXÃO COMPOSTA RECTA

Betão: C25/30

$\lambda_{ult} := 1.209$ Parâmetro de carga último.

DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão composta recta de acordo com o método simplificado e artigos 6.7.3.6 e 6.7.3.7 do EC4.

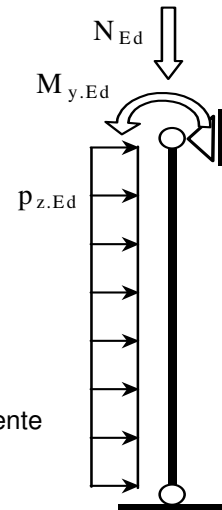
Accões:

$$N_{Ed} := 900 \cdot 1000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad N_{Ed} = 1088.1 \cdot 1000 \cdot N \quad \text{esforço de compressão no pilar}$$

$$N_{G.Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G.Ed} = 683.33 \cdot 1000 \cdot N \quad \text{esforço de compressão permanente}$$

$$p_{z.Ed} := 5400 \cdot N \cdot m^{-1} \cdot \lambda_{ult} \quad p_{z.Ed} = 6528.6 \cdot N \cdot m^{-1} \quad \text{Carga distribuída de vão}$$

$$M_{y.Ed} := 65 \cdot 1000 \cdot N \cdot \lambda_{ult}$$



Propriedades dos materiais:

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C25/30	$f_{ck} := 25 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 16.7 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Módulo de elasticidade do betão $E_{cm} := 31000 \cdot \frac{N}{mm^2}$ Coeficiente de fluência: $\phi := 3$

Módulo de elasticidade do aço do perfil $E_a := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Módulo de elasticidade das armaduras $E_s := 200000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Geometria:

$L := 9.0 \cdot m$ longitud del pilar

$\beta_{ey} := 1$ $\beta_{ez} := 1$ coeficiente pandeo a flexión

$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$ $L_{ey} = 9000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y

$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$ $L_{ez} = 9000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da secção:

Secção de hórmiçón - seccion quadrada con:
 $h_c := 360 \cdot \text{mm}$ canto de la sección (largo a largo)

$b_c := 360 \cdot \text{mm}$ ancho de la sección

Secção de acero estrutural - perfil HEB 240

$h := 240 \cdot \text{mm}$ canto del perfil metálico

$b := 240 \cdot \text{mm}$ ancho del ala del perfil metálico

$t_w := 10 \cdot \text{mm}$ espesor del alma

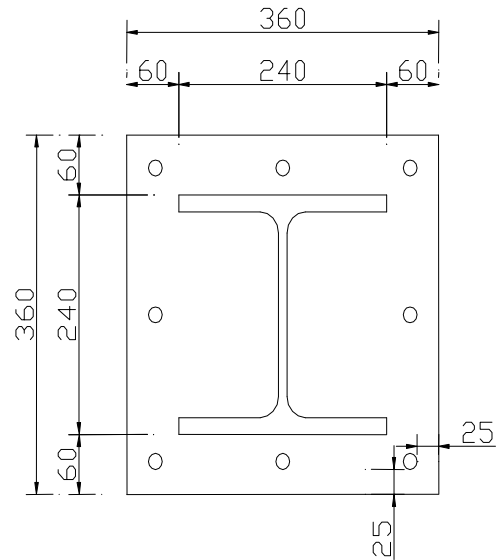
$t_f := 17 \cdot \text{mm}$ espesor de las alas

$d_w := h - 2 \cdot t_f$ $d_w = 206 \text{ mm}$ ancho del alma

$r_c := 21 \cdot \text{mm}$ raio de concordância

$c_y := \frac{(b_c - b)}{2}$ $c_y = 60 \text{ mm}$ recubrimiento del hormiçón segundo el eje fuerte

$c_z := \frac{(h_c - h)}{2}$ $c_z = 60 \text{ mm}$ recubrimiento del hormiçón segundo el eje débil



# barras	diâmetro	Área individual	Área Total	recobrimiento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$ $A_{sy} = 603 \text{ mm}^2$	$c_{sy} := 25 \cdot \text{mm}$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot \text{mm}$	$A_{si} := 201 \cdot \text{mm}^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$ $A_{sz} = 603 \text{ mm}^2$	$c_{sz} := 25 \cdot \text{mm}$

Cálculo de Areas

$A_a := 2 \cdot b \cdot t_f + d_w \cdot t_w + r_c^2 \cdot (4 - \pi)$ $A_a = 105.986 \text{ cm}^2$ area del perfil metálico

$A_s := 8 \cdot A_{si}$ $A_s = 16.08 \text{ cm}^2$ area de armaduras de betão armado

$A_c := h_c \cdot b_c - A_a - A_s$ $A_c = 1.174 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$ area de la sección de hórmiçón

RESOLUÇÃO:

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra está integrada, se os houver, são considerados.

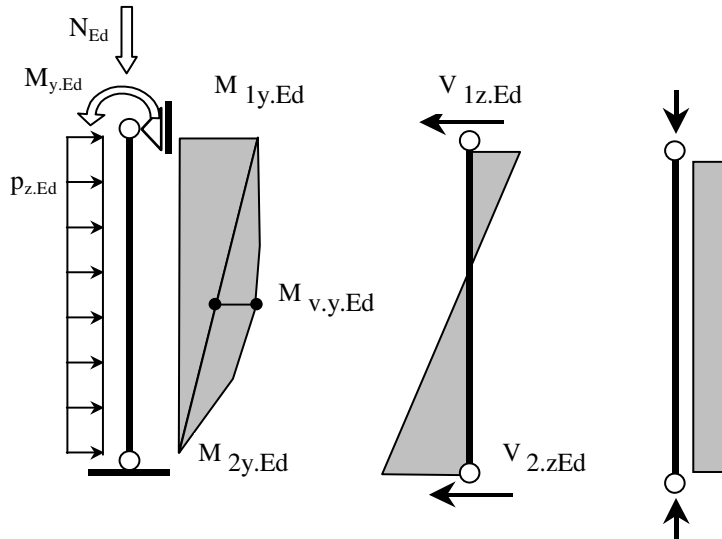
Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

Parte 4) Verificações de segurança (que pode inclui em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Parte 1) Esforços

Os esforços primários são calculados usando as Leis da Estática com base na figura seguinte:



Nota: $|M_{1y.Ed}| > |M_{2y.Ed}|$

$$M_{1y.Ed} := 65000 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult}$$

$$M_{2y.Ed} := 0 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult}$$

$$M_{vy.Ed} := P_{z.Ed} \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$M_{1y.Ed} = 78.6 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{2y.Ed} = 0 \cdot N \cdot m$$

$$M_{vy.Ed} = 66.1 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$V_{1z.Ed} := 17100 \cdot \lambda_{ult} \cdot N$$

$$V_{2z.Ed} := 31500 \cdot N \cdot \lambda_{ult}$$

$$V_{1z.Ed} = 20.674 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$V_{2z.Ed} = 38.084 \cdot 1000 \text{ N}$$

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:

(2.i) Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna

R.:Cumpre § 6.7.1.(6)

(2.ii) Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460

R.:Cumpre § 6.7.1.(2)

(2.iii) Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.

$$c_y = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

(2.iv) Verificação de recobrimento máximo, área de armadura máxima e mínima e ratio h_c/b_c

$$c_y = 60 \text{ mm} \leq 0.4 \cdot b = 96 \text{ mm}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot h = 72 \text{ mm}$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(2)

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.014 \leq 0.06$$

R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)

$$0.2 < \frac{h_c}{b_c} = 1 \leq 5$$

R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)

(2.v) O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd}$$

$$N_{pl.Rd} = 4487 \cdot 1000 \text{ N}$$

Resistência plástica axial da secção

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}}$$

$$\delta = 0.505$$

R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)

(2.vi) esbelteza relativa λ_{-} menor que 2.0

$$\lambda_{-} = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk} \leq 2.0}{N_{cr}}}$$

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk} \quad N_{pl.Rk} = 5628 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistência característica axial da secção}$$

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais, a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := 2 \cdot b \cdot \frac{t_f^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f)^3 \cdot \frac{t_w}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2 \quad I_{ay} = 10893 \text{ cm}^4$$

$$I_{az} := 2 \cdot t_f \cdot \frac{b^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f) \cdot \frac{t_w^3}{12} \quad I_{az} = 3919 \text{ cm}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$z_{sz} := h_c - 2 \cdot c_{sz} - d_s \quad z_{sz} = 294 \text{ mm} \quad I_{sy} := n_{sy} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sz}}{2} \right)^2 \quad I_{sy} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

$$z_{sy} := b_c - 2 \cdot c_{sy} - d_s \quad z_{sy} = 294 \text{ mm} \quad I_{sz} := n_{sz} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sz} \cdot \left(\frac{z_{sy}}{2} \right)^2 \quad I_{sz} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{b_c \cdot h_c^3}{12} - I_{ay} - I_{sy} \quad I_{cy} = 126468 \text{ cm}^4$$

$$I_{cz} := \frac{b_c^3 \cdot h_c}{12} - I_{az} - I_{sz} \quad I_{cz} = 133442 \text{ cm}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff.y.tC} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{cr.y.tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.y.tC}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{-y.tC} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr.y.tC}}}$$

$$EI_{eff.y.tC} = 5.161 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{cr.y.tC} = 6289 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-y.tC} = 0.95$$

$$EI_{eff.z.tC} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz} \quad N_{cr.z.tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.z.tC}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{-z.tC} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr.z.tC}}}$$

$$EI_{eff.z.tC} = 3.826 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{cr.z.tC} = 4662 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-z.tC} = 1.1$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{eff.y.tL} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{cr.y.tL} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.y.tL}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{-y.tL} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr.y.tL}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tL}} = 3.625 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.y.tL}} = 4416 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{-y.tL}} = 1.13$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{\text{cm}} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$\lambda_{\text{-z.tL}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.z.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} = 2.205 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.z.tL}} = 2687 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$\lambda_{\text{-z.tL}} = 1.45$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema.

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

PARTE REMOVIDA - É IGUAL AO DO PROBLEMA 1-B, C25/30



Parte 4) Verificações de segurança (que pode incluir em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.6 e 6.7.3.7

Como $V_{Sd} < 50\% V_{pl.Rd}$ não há interação M-V, em nenhum dos planos, por isso os diagramas de interação M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interação os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- (i) reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
- (ii) reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$. (mais fácil de implementar).
- (iii) alterar a espessura da alma/banzo do perfil e recalcular diagramas de interação M-N

(4.i) Verificação de Segurança ao esforço transverso. Importância do Esforço Transverso

Como $V_{Sd} < 50\% V_{pl.Rd}$ não há interação M-V, em nenhum dos planos, e por isso os diagramas M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interação os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- (i) reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
 - (ii) reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$.
- Esta última hipótese é mais fácil de implementar.

$$V_{z.pl.Rd} := \frac{1.04 \cdot h \cdot t_w \cdot f_{yd}}{1.1 \cdot \sqrt{3}}$$

$$V_{z.pl.Rd} = 279.9 \cdot 1000 \cdot \text{N} \quad \text{superior a :} \quad V_{2z.Ed} = 38.084 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

Logo verifica a resistência ao esforço transverso e não há interação entre M-V ou N-V

(4.ii) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Crítica por encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tC}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} = 4.292 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} = 5230 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tL}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} = 3.14 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} = 3826 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} := \min \left(\left[EI_{\text{eff.II.y.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.y.tL}} \right] \right)$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} = 31397.4 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.II.y.tC}} \quad N_{\text{cr.II.y.tL}} \right] \right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} = 3826 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if} \left(N_{\text{cr.II.y.tC}} \leq N_{\text{cr.II.y.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

$$\text{Res} = \text{"Longo Prazo"}$$

(b) Carga Crítica por encurvadura em torno de Z-Z

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz})$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tC}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} = 3.071 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} = 3742 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} = 1.855 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} = 2261 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} := \min \left(\left[EI_{\text{eff.II.z.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} = 18553.3 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min \left(\left[N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}} \right] \right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 2261 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Re} := \text{if} \left(N_{\text{cr.II.z.tC}} \leq N_{\text{cr.II.z.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"} \right)$$

$$\text{Re} = \text{"Longo Prazo"}$$

Nota: As cargas críticas condicionantes (menores) em cada um dos planos correspondem em princípio ao mesmo caso de acção temporal (a curto prazo / longo prazo).

(c) Carga Crítica Global:

$$N_{cr,eff.II} := \min\left(N_{cr,eff.II,y} \quad N_{cr,eff.II,z} \right) \quad N_{cr,eff.II} = 2260.66 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$N_{Ed} = 1088.1 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

Res := if($N_{cr,eff.II} > 10 \cdot N_{Ed}$, "Dispensa calculo de efeitos de 2ªOrdem P-d", "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d")

Res = "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"

(4.iii) Verificação de segurança a compressão com flexão uniaxial
-encurvadura no eixo y-y (Imperfeição da direcção Z-Z)

(a) Factores k (de amplificação e equivalência)

(a.i) -Carga crítica relevante (§ 6.7.3.4 (5))

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff.y} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.II,y}}{L^2} \quad N_{cr,eff.y} = 3825.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(a.ii) Factor $k_{e,y}$ para momentos de extremidade

Da tabela 6.4 temos: $\psi_y := \frac{M_{2y,Ed}}{M_{1y,Ed}} \quad \psi_y = 0 \quad \beta := 0.66 + 0.44 \cdot \psi_y \quad \beta = 0.66$

$$k_{e,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff.y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{e,y} = 1 \quad \text{Factor para momentos de extremidade}$$

(a.iii) para momentos de vão (parcela isostática)

Da tabela 6.4 temos:

$$\beta := 1$$

$$k_{v,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff.y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{v,y} = 1.397 \quad \text{Factor para momentos de vão (isostaticos)}$$

(a.iv) para momentos devidos a imperfeição da barra

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff.y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{0,y} = 1.397 \quad \text{Factor para momentos devidos a imperfeições da barra}$$

(b) Imperfeição da barra e.0:

Da tabela 6.5 a imperfeição vale L/200: $e_{0,z} := \frac{L}{200} \quad e_{0,z} = 45 \text{ mm}$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0y,Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,z} \quad M_{0y,Ed} = 48.965 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(c) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

Os factores de amplificação e de equivalência transformam os momentos máximos (de extremidade, de vão ou devidos a imperfeições) a momentos equivalentes (como se fossem momentos constantes ao longo da barra) e amplificam-nos. A amplificação resulta da compressão sobre uma barra que apresenta flechas devidas à distribuição aos momentos referidos.

$$N_{Ed} = 1088.1 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

$$M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} = 78.585 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} = 92.4 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido ao momento isostático (carga de vão)}$$

$$M_{0y,Ed} \cdot k_{0,y} = 68.4 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido a imperfeição na barra}$$

$$M_{y,Ed} := M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} + M_{0y,Ed} \cdot k_{0,y} \quad M_{y,Ed} = 239 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(d) Esforços resistentes

- neste caso a flexão é monoaxial em torno de y-y

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 1.091 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 1.1253$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min[\mu_{y1}, \mu_{y2}]] \quad \mu_y = 1.091$$

$$M_{pl,y,Rd} = 312 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl,y,N,Rd} := \mu_y \cdot M_{pl,y,Rd}$$

$$M_{pl,y,N,Rd} = 340 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Nota: O momento actuante não depende directamente do esforço axial e por isso μ_y não pode ser considerado superior a 1 (art.6.7.3.6(2)). Recorrendo a art.6.7.1.(7), reduz-se o esforço axial em 20%, para se quantificar μ_{y2} .

(e) Verificação de segurança

$$\frac{M_{y,Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,y,N,Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9 \quad \frac{M_{y,Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,y,N,Rd}} = 0.782 \quad 1 < \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

(4.iii) Verificação de segurança a compressão com flexão biaxial

- encurvadura no eixo Y-Y devido aos esforços

- encurvadura no eixo Z-Z devido à Imperfeição da direcção y-y

(a) Factores k (de amplificação e equivalência)

(a1)-encurvadura em torno de Y-Y. ver caso acima.

Só nos interessam os coeficientes associados aos momentos de extremidade e isostáticos

$$k_{e,y} = 1$$

$$k_{v,y} = 1.397$$

(a.2i) -Carga critica relevante (§ 6.7.3.4 (5)) (Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff,z} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,z}}{L^2} \quad N_{cr,eff,z} = 2260.7 \cdot 1000 \cdot N$$

(a2.ii) para momentos devidos a imperfeição da barra

(Só interessa os coeficientes das imperfeições da barra)

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0,z} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,z}}} \quad 1 \right] \right] \quad \text{Factor para momentos devido a imperfeições da barra}$$

$$k_{0,z} = 1.928$$

(b) Imperfeição da barra e.0:

Da tabela 6.5 a imperfeição vale L/200: $e_{0,y} := \frac{L}{150}$ $e_{0,y} = 60 \text{ mm}$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0z,Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,y} \quad M_{0z,Ed} = 65.3 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(c) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

$$N_{Ed} = 1088.1 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

(c1) flexão em torno de Y-Y:

$$M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} = 78.585 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} = 92.4 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido ao momento isostático}$$

O momento equivalente de 2º ordem devido a imperfeição na barra não é considerado neste plano

$$M_{y,Ed} := M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} \quad M_{y,Ed} = 171 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(c2) flexão em torno de Z-Z:

Não existem esforços. Só existem imperfeições.

$$M_{0z,Ed} \cdot k_{0,z} = 125.9 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido a imperfeições na barra}$$

$$M_{z,Ed} := M_{0z,Ed} \cdot k_{0,z} \quad M_{z,Ed} = 126 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(d) Esforços resistentes

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 1.091 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 1.1253$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min[\mu_{y1}, \mu_{y2}]] \quad \mu_y = 1.091$$

$$M_{pl.y.Rd} = 312 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl.y.N.Rd} := \mu_y \cdot M_{pl.y.Rd}$$

$$M_{pl.y.N.Rd} = 340 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Nota: O momento actuante não depende directamente do esforço axial e por isso μ_y não pode ser considerado superior a 1 (art.6.7.3.6(2)). Recorrendo a a art.6.7.1.(7), reduz-se o esforço axial em 20%, para se quantificar μ_y .

$$\mu_z := \mu_{ci,z}(\lambda(N_{Ed})) \quad \mu_z = 1.015$$

$$M_{pl.z.Rd} = 254 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl.z.N.Rd} := \mu_z \cdot M_{pl.z.Rd}$$

$$M_{pl.z.N.Rd} = 258 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Nota: O momento $M_{z.Ed}$ actuante depende directamente do esforço axial e por isso μ_z pode ser considerado superior a 1 (art.6.7.3.6(2)).

(e) Verificação de segurança à flexão composta biaxial

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} \leq 1$$

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.558$$

<1, Logo satisfaz a segurança neste plano

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.542$$

<1, Logo satisfaz a segurança neste plano

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} = 0.99$$

<1, Logo satisfaz a segurança nos dois planos

CONCLUSÃO : Verifica-se a segurança à encurvadura por flexão, sendo mais crítica a encurvadura em torno do eixo fraco.

Fim

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)

EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)

EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

Design Handbook for braced composite steel-concrete buildings according to Eurocode 4, ECCS, 2000

R.P. Johnson, Composite structures of steel and concrete, Ed. Blackwell Publishing, 3ªed. 2004

José Monfort Leonart, Estructuras Mixtas para Edificación, según critérios del Eurocódigo4, Ed. Un.Po.de València

PROBLEMA 3**FLEXÃO COMPOSTA DESVIADA****Secção Quadrada com Perfil H**

Betão: C25/30

$$\lambda_{ult} := 1.10$$

Pârametro de carga último.

DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão composta recta de acordo com o método simplificado e artigo 6.7.3.7 do EC4.

Accções:

Esforço de compressão:

$$N_{Ed} := (900 \cdot 1000 \cdot \lambda_{ult}) \cdot N \quad N_{Ed} = 990 \cdot 1000 \text{ N}$$

Esforço de compressão (carga permanente):

$$N_{G,Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G,Ed} = 621720 \cdot N$$

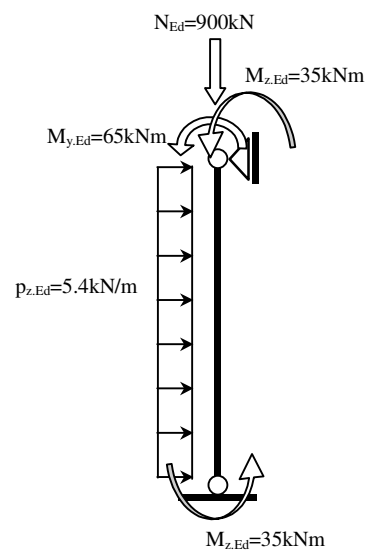
Momentos aplicados:

$$M_{y,Ed} := 65000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{y,Ed} = 71.5 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{z,Ed} := 35000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{z,Ed} = 38.5 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Carga de vão:

$$p_{z,Ed} := 5400 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m^{-1} \quad p_{z,Ed} = 5940 \cdot N \cdot m^{-1}$$

**Propriedades dos materiais:**

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C25/30	$f_{ck} := 25 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 16.7 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Módulo de elasticidade do betão	$E_{cm} := 31000 \cdot \frac{N}{mm^2}$	Coeficiente de fluência:		$\phi := 3$

Módulo de elasticidade do perfil $E_a := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Módulo de elasticidade das barras de aço $E_s := 200000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Geometria:

$L := 9.0 \cdot m$ longitud del pilar

$\beta_{ey} := 1$ $\beta_{ez} := 1$ coeficiente pandeo a flexión

$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$ $L_{ey} = 9000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y

$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$ $L_{ez} = 9000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da secção:

Sección de hórmitón - seccion quadrada con:
 $h_c := 360 \cdot mm$ canto de la sección (largo a largo)

$b_c := 360 \cdot mm$ ancho de la sección

Sección de acero estrutural - perfil HEB 240

$h := 240 \cdot mm$ canto del perfil metálico

$b := 240 \cdot mm$ ancho del ala del perfil metalico

$t_w := 10 \cdot mm$ espesor del alma

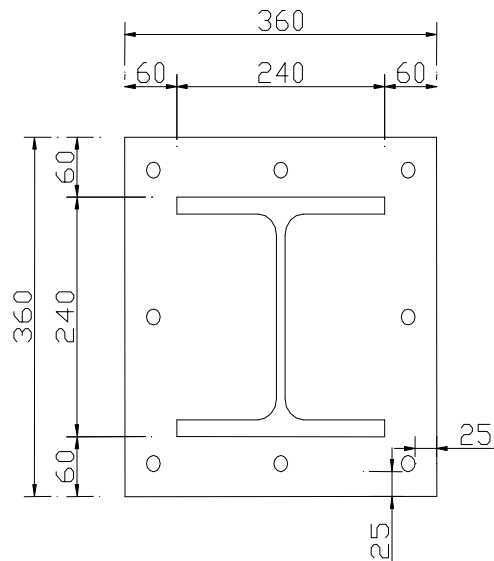
$t_f := 17 \cdot mm$ espesor de las alas

$d_w := h - 2 \cdot t_f$ $d_w = 206 \cdot mm$ ancho del alma

$r_c := 21 \cdot mm$ raio de concordância

$c_y := \frac{(b_c - b)}{2}$ $c_y = 60 \cdot mm$ recubrimiento del hormigon segundo el eje fuerte

$c_z := \frac{(h_c - h)}{2}$ $c_z = 60 \cdot mm$ recubrimiento del hormigon segundo el eje débil



# barras	diâmetro	Área individual	ÁreaTotal	recobrimiento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot mm$	$A_{si} := 201 \cdot mm^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$ $A_{sy} = 603 \cdot mm^2$	$c_{sy} := 25 \cdot mm$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot mm$	$A_{si} := 201 \cdot mm^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$ $A_{sz} = 603 \cdot mm^2$	$c_{sz} := 25 \cdot mm$

Cálculo de Areas

$A_a := 2 \cdot b \cdot t_f + d_w \cdot t_w + r_c^2 \cdot (4 - \pi)$ $A_a = 105.986 \cdot cm^2$ area del perfil metálico

$A_s := 8 \cdot A_{si}$ $A_s = 16.08 \cdot cm^2$ area de armaduras de betão armado

$A_c := h_c \cdot b_c - A_a - A_s$ $A_c = 1.174 \cdot 10^3 \cdot cm^2$ area de la sección de hormigón

RESOLUÇÃO:

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra, se os houver, são considerados.

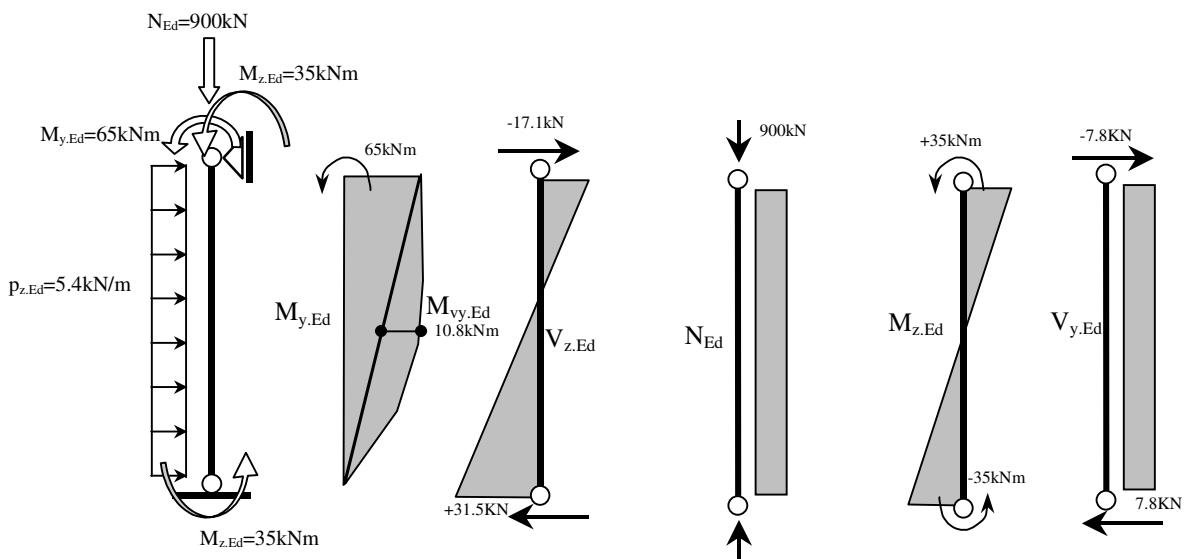
Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

Parte 4) Verificações de segurança (que pode inclui em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Parte 1) Esforços

Os esforços primários são calculados usando as Leis da Estática com base na figura seguinte:



$$M_{1y,Ed} := 65000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{1y,Ed} = 71.5 \cdot 1000 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{2y,Ed} := 0 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{2y,Ed} = 0 \cdot N \cdot m$$

$$M_{vy,Ed} := P_{z,Ed} \cdot \frac{L^2}{8} \quad M_{vy,Ed} = 60.143 \cdot 1000 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{1z,Ed} := 35000 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult} \quad M_{1z,Ed} = 38.5 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{2z,Ed} := -35000 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult} \quad M_{2z,Ed} = -38.5 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$V_{1z,Ed} := 1700 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{1z,Ed} = 1.87 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$V_{2z,Ed} := 31500 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{2z,Ed} = 34.65 \cdot 1000 \cdot N$$

$$V_{1y,Ed} := 7800 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{1y,Ed} = 8.58 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$V_{2y,Ed} := 7800 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{2y,Ed} = 8.58 \cdot 1000 \text{ N}$$

Nota: $|M_{1y,Ed}| > |M_{2y,Ed}|$ e $|M_{1z,Ed}| > |M_{2z,Ed}|$

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:

- (2.i) **Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna** R.:Cumpre § 6.7.1.(6)
 (2.ii) **Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460** R.:Cumpre § 6.7.1.(2)
 (2.iii) **Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.**

$$c_y = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} > \max \{40 \text{ mm}; b / 6\}$$

(2.iv) Verificação de recobrimento máximo, área de armadura máxima e mínima e ratio hc/bc

$$c_y = 60 \text{ mm} \leq 0.4 \cdot b = 96 \text{ mm}$$

$$c_z = 60 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot h = 72 \text{ mm} \quad \text{R.:Cumpre § 6.7.3.1(2)}$$

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.014 \leq 0.06 \quad \text{R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)}$$

$$0.2 < \frac{h_c}{b_c} = 1 \leq 5 \quad \text{R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)}$$

(2.v) O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd} \quad N_{pl.Rd} = 4487 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistência plástica axial da secção}$$

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}} \quad \delta = 0.505 \quad \text{R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)}$$

(2.vi) esbelteza relativa λ_* menor que 2.0

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{cr}}} \leq 2.0$$

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk} \quad N_{pl.Rk} = 5628 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistência característica axial da secção}$$

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais, a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := 2 \cdot b \cdot \frac{t_f^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f)^3 \cdot \frac{t_w}{12} + 2 \cdot b \cdot t_f \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_f}{2} \right)^2 \quad I_{ay} = 10893 \text{ cm}^4$$

$$I_{az} := 2 \cdot t_f \cdot \frac{b^3}{12} + (h - 2 \cdot t_f) \cdot \frac{t_w^3}{12} \quad I_{az} = 3919 \text{ cm}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$z_{sz} := h_c - 2 \cdot c_{sz} - d_s \quad z_{sz} = 294 \text{ mm} \quad I_{sy} := n_{sy} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sy} \cdot \left(\frac{z_{sz}}{2} \right)^2 \quad I_{sy} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

$$z_{sy} := b_c - 2 \cdot c_{sy} - d_s \quad z_{sy} = 294 \text{ mm} \quad I_{sz} := n_{sz} \cdot \pi \cdot \frac{d_s^4}{64} + 2 \cdot A_{sz} \cdot \left(\frac{z_{sy}}{2} \right)^2 \quad I_{sz} = 2607.01 \text{ cm}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{b_c \cdot h_c^3}{12} - I_{ay} - I_{sy} \quad I_{cy} = 126468 \text{ cm}^4$$

$$I_{cz} := \frac{b_c^3 \cdot h_c}{12} - I_{az} - I_{sz} \quad I_{cz} = 133442 \text{ cm}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.y.tC}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{\text{cr.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tC}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{-y.tC} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tC}} = 5.161 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tC}} = 6289 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-y.tC} = 0.95$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz} \quad N_{\text{cr.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tC}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{-z.tC} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tC}} = 3.826 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tC}} = 4662 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-z.tC} = 1.1$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.y.tL}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tL}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{-y.tL} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.y.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tL}} = 3.625 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tL}} = 4416 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-y.tL} = 1.13$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} := E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.z.tL}}}{L_{ez}^2} \quad \lambda_{-z.tL} := \sqrt{\frac{N_{pl.Rk}}{N_{\text{cr.z.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.z.tL}} = 2.205 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.z.tL}} = 2687 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{-z.tL} = 1.45$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema.

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

PARTE REMOVIDA - IGUAL À DO PROBLEMA 1-B, C25/30



Parte 4) Verificações de segurança (que pode inclui em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.7

A barra está sujeita à flexão composta recta com momentos em torno de y-y. Porém, como o efeito das imperfeições pode ocorrer quer no plano y-y como no z-z independentemente há que proceder da seguinte forma:

- considerar o efeito das imperfeições e das cargas no plano y-y e verificar a segurança da barra à compressão com flexão uniaxial (§6.7.3.6);
- considerar o efeito das imperfeições no plano z-z e o efeito das cargas no plano y-y e verificar a segurança da barra à compressão com flexão biaxial (§ 6.7.3.7).

(4.i) Verificação de Segurança ao esforço transverso. Importância do Esforço Trasverso

Como $V_{Sd} < 50\%V_{pl.Rd}$ não há interacção M-V, em nenhum dos planos, por isso os diagramas de interacção M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interacção os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
- reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$. (mais fácil de implementar).
- alterar a espessura da alma/banzo do perfil e recalcular diagramas de interacção M-N

$$V_{z.pl.Rd} := \frac{1.04 \cdot h \cdot t_w \cdot f_{yd}}{1.1 \cdot \sqrt{3}} \quad V_{z.pl.Rd} = 279.877 \cdot 1000 \cdot N \quad \text{superior a : } V_{2z.Ed} = 34.65 \cdot 1000 \cdot N$$

Logo verifica a resistência ao esforço transverso e não há interacção entre M-V ou N-V

$$V_{y.pl.Rd} := \frac{2 \cdot b \cdot t_f \cdot f_{yd}}{1.1 \cdot \sqrt{3}} \quad V_{y.pl.Rd} = 914.981 \cdot 1000 \cdot N \quad \text{superior a : } V_{1y.Ed} = 8580 \cdot N$$

Logo verifica a resistência ao esforço transverso e não há interacção entre M-V ou N-V

(4.ii) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Crítica por encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{eff.II.y.tC} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$N_{cr.II.y.tC} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.II.y.tC}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{eff.II.y.tC} = 4.292 \cdot 10^{13} \cdot N \cdot mm^2$$

$$N_{cr.II.y.tC} = 5230 \cdot 1000 \cdot N$$

Longo Prazo(tL):

$$EI_{eff.II.y.tL} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{cr.II.y.tL} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff.II.y.tL}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{eff.II.y.tL} = 3.14 \cdot 10^{13} \cdot N \cdot mm^2$$

$$N_{cr.II.y.tL} = 3826 \cdot 1000 \cdot N$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} := \min\left([EI_{\text{eff.II.y.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.y.tL}}]\right)$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} = 31397.4 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} := \min\left([N_{\text{cr.II.y.tC}} \quad N_{\text{cr.II.y.tL}}]\right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} = 3826 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if}\left(N_{\text{cr.II.y.tC}} \leq N_{\text{cr.II.y.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"}\right)$$

$$\text{Res} = \text{"Longo Prazo"}$$

(b) Carga Crítica por encurvadura em torno de Z-Z

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz})$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tC}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} = 3.071 \cdot 10^{13} \cdot \text{N}\cdot\text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tC}} = 3742 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{az} + E_s \cdot I_{sz} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cz}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} = 1.855 \cdot 10^{13} \cdot \text{N}\cdot\text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.z.tL}} = 2261 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} := \min\left([EI_{\text{eff.II.z.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.z.tL}}]\right)$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} = 18553.3 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min\left([N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}}]\right)$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 2261 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Re} := \text{if}\left(N_{\text{cr.II.z.tC}} \leq N_{\text{cr.II.z.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"}\right)$$

$$\text{Re} = \text{"Longo Prazo"}$$

Nota: As cargas críticas condicionantes (menores) em cada um dos planos correspondem em princípio ao mesmo caso de acção temporal (a curto prazo / longo prazo).

(c) Carga Crítica Global:

$$N_{\text{cr.eff.II}} := \min\left([N_{\text{cr.eff.II.y}} \quad N_{\text{cr.eff.II.z}}]\right) \quad N_{\text{cr.eff.II}} = 2260.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$N_{Ed} = 990 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if}\left(N_{\text{cr.eff.II}} > 10 \cdot N_{Ed}, \text{"Dispensa calculo de efeitos de 2ªOrdem P-d"}, \text{"Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"}\right)$$

Res = "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"

(4.iii) Factores k (de amplificação e equivalência) e Imperfeições

(a1) Factores ky

(a1.i) -Carga crítica relevante (§ 6.7.3.4 (5))

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{\text{cr.eff.y}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y}}}{L^2}$$

$$N_{\text{cr.eff.y}} = 3825.7 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(a1.ii) Factor ke.y para momentos de extremidade

$$\text{Da tabela 6.4 temos: } \psi_y := \frac{M_{2y.Ed}}{M_{1y.Ed}} \quad \psi_y = 0 \quad \beta := 0.66 + 0.44 \cdot \psi_y \quad \beta = 0.66$$

$$k_{e,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{e,y} = 1 \quad \text{Factor para momentos de extremidade}$$

(a1.iii) para momentos de vão (parcela isostática)

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{v,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{v,y} = 1.349 \quad \text{Factor para momentos de vão (isostáticos)}$$

(a1.iv) para momentos devidos a imperfeição da barra

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{0,y} = 1.349 \quad \text{Factor para momentos devidos a imperfeições da barra}$$

(a2) Factores k_z (de amplificação e equivalência)

(a2.i) -Carga crítica relevante (§ 6.7.3.4 (5))

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff,z} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,z}}{L^2} \quad N_{cr,eff,z} = 2260.7 \cdot 1000 \cdot N$$

(a2.ii) Factor $k_{e,y}$ para momentos de extremidade

Da tabela 6.4 temos: $\psi_y := \frac{M_{2z,Ed}}{M_{1z,Ed}} \quad \psi_y = -1 \quad \beta := 0.66 + 0.44 \cdot \psi_y \quad \beta = 0.22$

$$k_{e,z} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,z}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{e,z} = 1 \quad \text{Factor para momentos de extremidade}$$

(a2.iii) Factor $k_{v,z}$ para momentos de vão (parcela isostática)

Neste caso não há.

(a2.iv) para momentos devidos a imperfeição da barra

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0,z} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,z}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{0,z} = 1.779 \quad \text{Factor para momentos devidos a imperfeições da barra}$$

(b.1) Imperfeição da barra $e_{0,z}$ e Momentos associados:

Da tabela 6.5 a imperfeição vale $L/200$: $e_{0,z} := \frac{L}{200} \quad e_{0,z} = 45 \text{ mm}$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0y,Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,z} \quad M_{0y,Ed} = 44.55 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(b.2) Imperfeição da barra e.0y e Momentos associados:

$$\text{Da tabela 6.5 a imperfeição vale } L/150: \quad e_{0,y} := \frac{L}{150} \quad e_{0,y} = 60 \text{ mm}$$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0z,Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0,y} \quad M_{0z,Ed} = 59.4 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(4.iv) Verificação de segurança à compressão com flexão biaxial
-encurvadura no eixo y-y com Imperfeição + encurvadura no eixo z-z

(4.iv.1) Encurvadura no eixo y-y com Imperfeição + encurvadura no eixo z-z

(a1) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

Os factores de amplificação e de equivalência transformam os momentos máximos (de extremidade, de vão ou devidos a imperfeições) a momentos equivalentes (como se fossem em momentos constantes ao longo da barra) e amplificam-nos. A amplificação resulta da compressão sobre uma barra que apresenta flechas devidas à distribuição aos momentos referidos.

$$N_{Ed} = 990 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

$$M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} = 71.5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} = 81.1 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido ao momento isostático (carga de vão)}$$

$$M_{0y,Ed} \cdot k_{0,y} = 60.1 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido a imperfeição na barra}$$

$$M_{1z,Ed} \cdot k_{e,z} = 38.5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{y,Ed} := M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} + M_{0y,Ed} \cdot k_{0,y} \quad M_{y,Ed} = 213 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z,Ed} := M_{1z,Ed} \cdot k_{e,z} \quad M_{z,Ed} = 39 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(b1) Esforços resistentes

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 1.106 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 1.1252$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min([\mu_{y1} \quad \mu_{y2}])] \quad \mu_y = 1.106$$

$$M_{pl,y,Rd} = 312 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl,y,N,Rd} := \mu_y \cdot M_{pl,y,Rd} \quad M_{pl,y,N,Rd} = 345 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\mu_{z1} := \mu_{ci,z}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{z1} = 1.018 \quad \mu_{z2} := \mu_{ci,z}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{z2} = 1.021$$

$$\mu_z := \text{if}[\mu_{z1} \leq 1, \mu_{z1}, \min([\mu_{z1} \quad \mu_{z2}])] \quad \mu_z = 1.018$$

$$M_{pl,z,Rd} = 254 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl,z,N,Rd} := \mu_z \cdot M_{pl,z,Rd} \quad M_{pl,z,N,Rd} = 259 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(c1) Verificação de segurança à flexão composta biaxial (imperfeição em torno do eixo Y-Y)

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.685 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.165 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} = 0.765 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança nos dois planos}$$

(4.iv.2) Encurvadura no eixo y-y + encurvadura no eixo z-z com Imperfeição

(a2) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

Os factores de amplificação e de equivalência transformam os momentos máximos (de extremidade, de vão ou devidos a imperfeições) a momentos equivalentes (como se fossem em momentos constantes ao longo da barra) e amplificam-nos. A amplificação resulta da compressão sobre uma barra que apresenta flechas devidas à distribuição aos momentos referidos.

$$N_{Ed} = 990 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

$$M_{1y.Ed} \cdot k_{e,y} = 71.5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy.Ed} \cdot k_{v,y} = 81.1 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido ao momento isostático (carga de vão)}$$

$$M_{1z.Ed} \cdot k_{e,z} = 38.5 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{0z.Ed} \cdot k_{0,z} = 105.7 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2º ordem devido a imperfeição na barra}$$

$$M_{y.Ed} := M_{1y.Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy.Ed} \cdot k_{v,y} \quad M_{y.Ed} = 153 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z.Ed} := M_{1z.Ed} \cdot k_{e,z} + M_{0z.Ed} \cdot k_{0,z} \quad M_{z.Ed} = 144 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(b2) Esforços resistentes

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 1.106 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 1.125$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min([\mu_{y1} \quad \mu_{y2}])] \quad \mu_y = 1.106$$

$$M_{pl.y.Rd} = 312 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl.y.N.Rd} := \mu_y \cdot M_{pl.y.Rd}$$

$$M_{pl.y.N.Rd} = 345 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$\mu_{z1} := \mu_{ci.z}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{z1} = 1.018 \quad \mu_{z2} := \mu_{ci.z}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{z2} = 1.021$$

$$\mu_z := \text{if}[\mu_{z1} \leq 1, \mu_{z1}, \min([\mu_{z1} \quad \mu_{z2}])] \quad \mu_z = 1.018$$

$$M_{pl.z.Rd} = 254 \cdot 1000 \cdot N \cdot m \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl.z.N.Rd} := \mu_z \cdot M_{pl.z.Rd}$$

$$M_{pl.z.N.Rd} = 259 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

(c2) Verificação de segurança à flexão composta biaxial (imperfeição em torno do eixo Y-Y)

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.492 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.619 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} = 1 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança nos dois planos}$$

CONCLUSÃO : Verifica-se a segurança à encurvadura por flexão, sendo mais crítica a encurvadura em torno do eixo fraco.

Fim

EC4-prEN 1994-1-1: 2003 (January 2004)

EC3-prEN 1993-1-1: 2003 (December 2003)

EC2-prEN 1992-1-1: 2004 (December 2004)

Design Handbook for braced composite steel-concrete buildings according to Eurocode 4, ECCS,2000

R.P. Johnson, Composite structures of steel and concrete, Ed. Blackwell Publishing, 3ªed. 2004

José Monfort Leonart, Estructuras Mixtas para Edificación, según critérios del Eurocódigo4, Ed. Un.Po.de Valência

PROBLEMA 4**FLEXÃO COMPOSTA DESVIADA****Secção Octogonal Com Tubo**

Betão: C25/30

$$\lambda_{ult} := 1.534$$

Pârametro de carga último: - factoriza as acções até que pelo menos uma verificação de segurança ou regras de validação do método não sejam satisfeitas.

DADOS :

Verifique a segurança do pilar à compressão composta recta de acordo com o método simplificado e artigo 6.7.3.7 do EC4.

Acções:

Esforço de compressão:

$$N_{Ed} := (1500 \cdot 1000 \cdot \lambda_{ult}) \cdot N \quad N_{Ed} = 2301 \cdot 1000 \cdot N$$

Esforço de compressão (carga permanente):

$$N_{G.Ed} := .628 \cdot N_{Ed} \quad N_{G.Ed} = 1445028 \cdot N$$

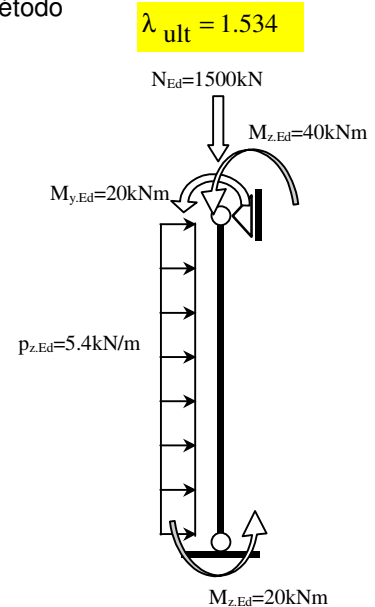
Momentos aplicados:

$$M_{y.Ed} := 40000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{y.Ed} = 61.36 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{z.Ed} := 20000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{z.Ed} = 30.68 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

Carga de vão:

$$p_{z.Ed} := 5400 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m^{-1} \quad p_{z.Ed} = 8283.6 \cdot N \cdot m^{-1}$$

**Propriedades dos materiais:**

Material	Resist. Característica	Coefficiente Minoração	Resistência de Cálculo	
Betão C25/30	$f_{ck} := 25 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_c := 1.5$	$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$	$f_{cd} = 16.7 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço de armar (A400)	$f_{sk} := 400 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_s := 1.15$	$f_{sd} := \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$	$f_{sd} = 347.8 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Aço estrutural (S235)	$f_{yk} := 235 \cdot \frac{N}{mm^2}$	$\gamma_a := 1.1$	$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$	$f_{yd} = 213.6 \cdot \frac{N}{mm^2}$
Módulo de elasticidade do betão	$E_{cm} := 31000 \cdot \frac{N}{mm^2}$		Coefficiente de fluência:	$\phi := 3$

Módulo de elasticidade do perfil $E_a := 210000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Módulo de elasticidade das barras de aço $E_s := 200000 \cdot \frac{N}{mm^2}$

Coefficiente de Fluência: $\phi := 3.0$

Geometria:

$L := 4.0 \cdot m$ longitud del pilar

$\beta_{ey} := 1$ $\beta_{ez} := 1$ coeficiente pandeo a flexión

$L_{ey} := \beta_{ey} \cdot L$ $L_{ey} = 4000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoZ o en torno del eje Y-Y

$L_{ez} := \beta_{ez} \cdot L$ $L_{ez} = 4000 \cdot mm$ longitud de pandeo no plano XoY o en torno del eje Z-Z

Propriedades da secção:

Sección de acero estructural

$D := 180 \cdot mm$ diametro del perfil metálico

$t := 8 \cdot mm$ espesor del perfil metálico

Sección de hórmitón - seccion quadrada con:

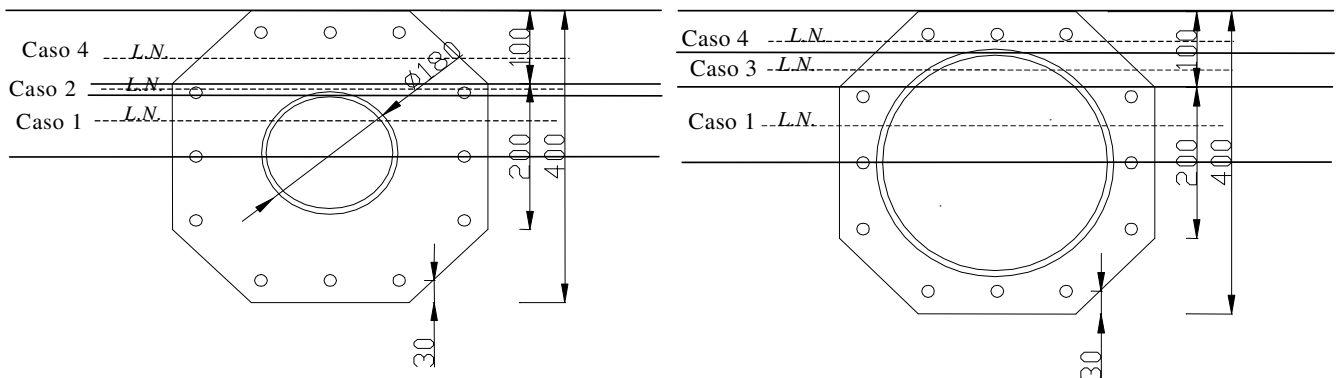
$b_c := 400 \cdot mm$ ancho maior de la sección (largo a largo)

$b := 200 \cdot mm$ ancho menor de la sección

$c := \frac{(b_c - b)}{2}$ $c = 100 \cdot mm$ esquina de la sección

$c_y := \frac{b_c - D}{2}$ $c_y = 110 \cdot mm$ espessura de betão

Apresentación de la seccion y distintas casos para la posición de la linea neutra:



Armaduras

# barras	diâmetro	Área individual	ÁreaTotal	recobrimento
$n_{sy} := 3$	$d_s := 16 \cdot mm$	$A_{si} := 201 \cdot mm^2$	$A_{sy} := n_{sy} \cdot A_{si}$ $A_{sy} = 603 \cdot mm^2$	$c_{sy} := 25 \cdot mm$
$n_{sz} := 3$	$d_s := 16 \cdot mm$	$A_{si} := 201 \cdot mm^2$	$A_{sz} := n_{sz} \cdot A_{si}$ $A_{sz} = 603 \cdot mm^2$	$c_{sz} := 25 \cdot mm$

Cálculo da resistência plástica à compressão da secção:

$$A_s := 12 \cdot A_{si}$$

$$A_s = 24120 \text{ mm}^2$$

área de armaduras de betão armado

$$A_a := \pi \cdot (D \cdot t - t^2)$$

$$A_a = 43230 \text{ mm}^2$$

área do perfil metálico

$$A_c := b \cdot c^2 - 2 \cdot c^2 - \frac{\pi \cdot D^2}{4} - A_s$$

$$A_c = 1121410 \text{ mm}^2$$

área da secção do betão

RESOLUÇÃO:

A resolução deste tipo de problema engloba as seguintes partes:

Parte 1) Cálculo de esforços na barra (que são esforços de 1ª ordem ou de 2ª ordem). Os efeitos P-Δ da estrutura onde a barra está integrada, se os houver, são considerados.

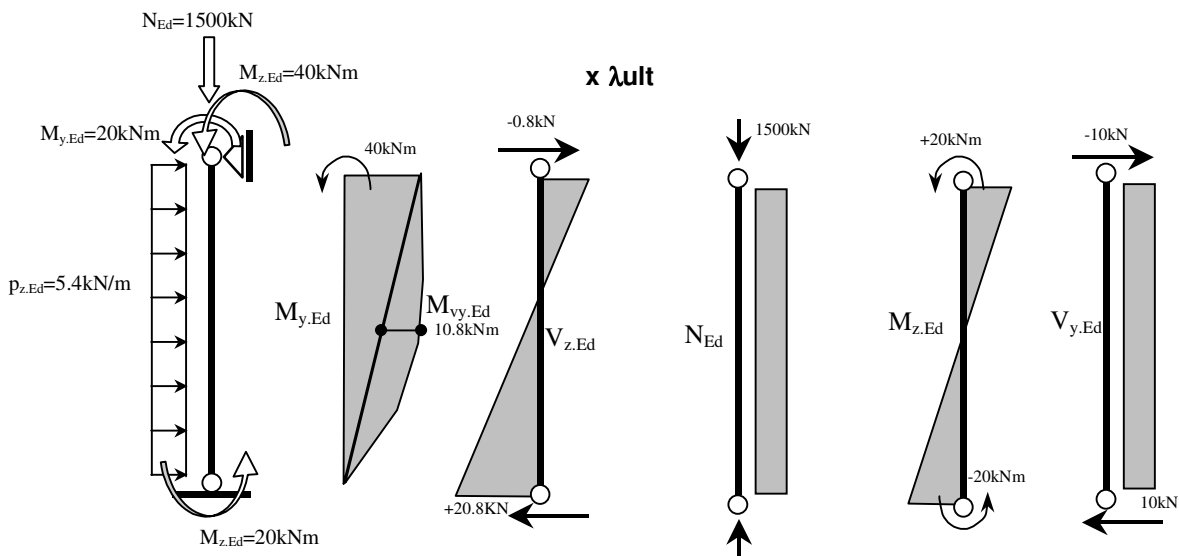
Parte 2) Verificação da aplicabilidade do método simplificado;

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd - My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

Parte 4) Verificações de segurança (que pode inclui em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Parte 1) Esforços

Os esforços primários são calculados usando as Leis da Estática com base na figura seguinte:



$$M_{1y,Ed} := 40000 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{1y,Ed} = 61.36 \cdot 1000 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{2y,Ed} := 0 \cdot \lambda_{ult} \cdot N \cdot m \quad M_{2y,Ed} = 0 \cdot N \cdot m$$

$$M_{vy,Ed} := p_{z,Ed} \cdot \frac{L^2}{8} \quad M_{vy,Ed} = 16.567 \cdot 1000 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{1z,Ed} := 20000 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult} \quad M_{1z,Ed} = 30.68 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{2z,Ed} := -20000 \cdot N \cdot m \cdot \lambda_{ult} \quad M_{2z,Ed} = -30.68 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$V_{1z,Ed} := 800 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{1z,Ed} = 1.227 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$V_{2z,Ed} := 20800 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{2z,Ed} = 31.907 \cdot 1000 \cdot N$$

$$V_{1y,Ed} := 5000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{1y,Ed} = 7.67 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$V_{2y,Ed} := 5000 \cdot N \cdot \lambda_{ult} \quad V_{2y,Ed} = 7.67 \cdot 1000 \text{ N}$$

Nota: $|M_{1y,Ed}| > |M_{2y,Ed}|$ e $|M_{1z,Ed}| > |M_{2z,Ed}|$

Parte 2) Cumprimento dos Requisitos de Aplicabilidade do Método Simplificado:

- (2.i) Secção duplamente simétrica e constante ao longo da coluna R.:Cumpre § 6.7.1.(6)
 (2.ii) Betão de classe entre C20/25 e C50/60, e aço estrutural entre S235 e S460 R.:Cumpre § 6.7.1.(2)
 (2.iii) Verificação dos efeitos de encurvadura local da secção.

$$\frac{D}{t} = 22.5 \quad \text{menor que } 50 \cdot \varepsilon \quad \text{logo, é de classe e não é susceptível a encurvadura local.} \\ \text{(Tabela 5.2 do EC3)}$$

(2.iv) Verificação de espessura de betão máxima, área de armadura máxima e mínima e ratio hc/bc

$$c_y = 110 \text{ mm} \leq 0.3 \cdot b = 60 \text{ mm} \quad \text{R.:NÃO Cumpre § 6.7.3.1(2) -E por isso a} \\ \text{secção tem que ser armada como se} \\ \text{fosse de betão armado, o que se verifica.}$$

$$0.003 < \frac{A_s}{A_c} = 0.022 \leq 0.06 \quad \text{R.:Cumpre § 6.7.5.2(1) e § 6.7.3.1(3)}$$

$$0.2 < \frac{b_c}{b_c} = 1 \leq 5 \quad \text{R.:Cumpre § 6.7.3.1(4)}$$

(2.v) O factor de contribuição do aço cumpre $0.2 \leq \delta \leq 0.9$

Características Resistentes da Coluna:

$$N_{pl.Rd} := A_a \cdot f_{yd} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{cd}) + A_s \cdot f_{sd} \quad N_{pl.Rd} = 3351 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia plástica axial da secção}$$

$$\delta := \frac{A_a \cdot f_{yd}}{N_{pl.Rd}} \quad \delta = 0.276 \quad \text{R.:Está entre 0.2 e 0.9, logo é uma secção mista e cumpre o § 6.7.1 (4)}$$

(2.vi) esbelteza relativa λ_* menor que 2.0

$$\lambda_* = \sqrt{\frac{N_{pl.Rk} \leq 2.0}{N_{cr}}}$$

Nota: A verificação é comum para os eixos Y-Y e Z-Z. Apresentam-se os cálculos em relação a Y-Y.

Resistência plástica característica:

$$N_{pl.Rk} := A_a \cdot f_{yk} + A_c \cdot (0.85 \cdot f_{ck}) + A_s \cdot f_{sk} \quad N_{pl.Rk} = 4364 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{Resistencia característica da secção}$$

Cálculo da esbelteza relativa segundo os planos principais, a curto e longo prazo:

Inércia central do perfil :

$$I_{ay} := \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot [D^4 - (D - 2 \cdot t)^4] \quad I_{ay} = 1.602041 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Inércia central das armaduras :

$$I_{sy} := \frac{\pi \cdot d_s^4}{64} \cdot 12 + \pi \cdot \frac{d_s^2}{4} \cdot \left[\left[4 \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy} \right) \right]^2 + 6 \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{sy} \right)^2 \right] \quad I_{sy} = 5.507931 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Inércia central da secção não fendilhada do betão:

$$I_{cy} := \frac{2 \cdot b \cdot b_c^3 + c \cdot (b + b_c) \cdot (b^2 + b_c^2)}{24} - \frac{\pi \cdot D^4}{64} \quad I_{cy} = 1.515137 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.y.tC}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy} \quad N_{\text{cr.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tC}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.y.tC}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tC}} = 4.256 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tC}} = 26254 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tC}} = 0.41$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.y.tL}} := E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \left[\frac{0.6 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right] \quad N_{\text{cr.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.y.tL}}}{L_{ey}^2} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} := \sqrt{\frac{N_{\text{pl.Rk}}}{N_{\text{cr.y.tL}}}}$$

$$EI_{\text{eff.y.tL}} = 2.415 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2 \quad N_{\text{cr.y.tL}} = 14898 \cdot 1000 \text{ N} \quad \lambda_{\text{-y.tL}} = 0.54$$

R.: A esbelteza relativa é sempre menor que 2.0, Cumpre § 6.7.3.1.(1)

R.: Estão cumpridos todos os requisitos para que o Método Simplificado seja aplicado a este problema obrigando-se a armar o pilar com a armadura mínima do EC2.

Parte 3) Dedução dos diagramas resistentes de interação N.Rd -My.Rd e N.Rd-Mz.Rd

(3.i) Diagrama de interação My.Rd-NRd

FLEXÃO Y-Y e FLEXÃO Z-Z

Módulos de resistência plástica:

(Nota: Os cálculo foram feitos relativamente a Y-Y)

da armadura	$W_{\text{ps.y}} := 6 \cdot A_{\text{si}} \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{\text{sy}} \right) + 4 \cdot A_{\text{si}} \cdot \frac{b}{2}$	$W_{\text{ps.y}} = 2.914 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$
do perfil metálico	$W_{\text{pa.y}} := 2 \cdot \left[\frac{D^3}{12} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{D-2 \cdot t}{2} \right)^3 \right]$	$W_{\text{pa.y}} = 2.368 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$
do betão	$W_{\text{pc.y}} := \frac{b_c^3}{4} - 2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{b_c}{2} - \frac{c}{3} \right) - \frac{D^3}{6} - W_{\text{ps.y}}$	$W_{\text{pc.y}} = 1.14 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$

Resistência à compressão de toda a área de betão

$$N_{\text{pm.Rd}} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{\text{cd}} \quad N_{\text{pm.Rd}} = 1.589 \cdot 10^3 \cdot 1000 \text{ N}$$

Resistencia a flexão do ponto D

$$M_{\max,y,Rd} := W_{pa,y} \cdot f_{yd} + W_{ps,y} \cdot f_{sd} + W_{pc,y} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{\max,y,Rd} = 2.47 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(3.i) (a)- COORDENADA DO PONTO A: (MpA.y;NpA.y)= (0 ; Npl.Rd)

Coordenadas do ponto A:

$$\begin{aligned} M_{pA,y} &:= 0 \cdot \text{N} \cdot \text{m} & M_{pA,y} &= 0 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \\ N_{pA,y} &:= N_{pl,Rd} & N_{pA,y} &= 3351136 \cdot \text{N} \end{aligned}$$

(3.i) (b) COORDENADA DO PONTO D: (MpD.y;NpD.y)= (Mmax.y.Rd ; 1/2*Npm.Rd)

Resistência à flexão do ponto D

$$M_{\max,y,Rd} := W_{pa,y} \cdot f_{yd} + W_{ps,y} \cdot f_{sd} + W_{pc,y} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{\max,y,Rd} = 2.47 \cdot 10^5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Resistência à compressão de toda a área de betão

$$N_{pm,Rd} := A_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad N_{pm,Rd} = 1.588666 \cdot 10^6 \cdot \text{N}$$

Coordenadas do ponto D:

$$\begin{aligned} M_{pD,y} &:= M_{\max,y,Rd} & M_{pD,y} &= 246999 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \\ N_{pD,y} &:= \frac{1}{2} \cdot N_{pm,Rd} & N_{pD,y} &= 794333 \cdot \text{N} \end{aligned}$$

(3.i) (c) COORDENADA DO PONTO B: (MpB.y;NpB.y)= (Mpl.y.Rd ; 0)

+++++ 1 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica :

Caso 1: $h_n \leq \frac{b}{2}$ $\frac{b}{2} = 100 \text{ mm}$ y $h_n \leq \frac{D-t}{2}$ $\frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$

$$h_n := 62.25 \cdot \text{mm}$$

$$\phi_i(h_n) := 2 \cdot \arcsin\left(2 \cdot \frac{h_n}{D}\right) \quad \phi_i(h_n) = 1.614 \quad \text{ss} := \phi_i(h_n) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{ss} = 92.476 \text{ GRAUS}$$

$$Ab1(h_n) := \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \quad Ab1(h_n) = 2.49 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$Wb1 := \left(\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \phi_i(h_n)} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot h_n \quad Wb1 = 1.831 \cdot 10^5 \cdot \text{mm}^3$$

$$Ab2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^2}{8} - Ab1(h_n) \quad Ab2(h_n) = 1.023 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

$$Wb2 := \frac{\pi \cdot D^3}{12} - Wb1 \quad Wb2 = 1.344 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^3$$

$$Ao1(h_n) := \phi_i(h_n) \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t \quad Ao1(h_n) = 1.11 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$Wo1 := \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4} \right] \quad Wo1 = 8.54 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^3$$

$$A_{o2}(h_n) := \pi \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t - A_{o1}(h_n)$$

$$A_{o2}(h_n) = 1.051 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$W_{o2} := \frac{2}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2} \right)^2 - \frac{t^3}{4} \right] \cdot \left(1 - \sin \left(\frac{\phi_i(h_n)}{2} \right) \right)$$

$$W_{o2} = -8.54 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$R_{c2}(h_n) := (b_c \cdot 2 \cdot h_n - 2 \cdot A_{b2}(h_n)) \cdot 0.85 \cdot f_{cd}$$

$$R_{c2}(h_n) = 4.15566 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$R_{a2}(h_n) := 2 \cdot A_{o2}(h_n) \cdot f_{sd}$$

$$R_{a2}(h_n) = 7.31117 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F(h_n) := N_{pm.Rd} - R_{c2}(h_n) - 2 \cdot R_{a2}(h_n)$$

$$h_n := 54.1 \text{ mm}$$

$$\text{root}(F(h_n), h_n) = 54.076 \text{ mm}$$

error relativo

$$\frac{F(h_n)}{N_{pm.Rd}} = -0.00051$$

$$h_{n1} := h_n$$

variable de control

$$i1 = 1$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n \leq \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_n \leq \frac{D-t}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 1:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \sin(\phi_i(h_n)) \right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2} \right)^2 - \frac{t^3}{4} \right]$$

$$W_{pan} = 9.277 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy} \right) \right] & \text{if } h_n \geq \frac{b}{2} - c_{sy} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_n^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 1.161 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 1.166 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd1} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pl.Rd1} = 2.353 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 2: $h_n \leq \frac{b}{2}$ $\frac{b}{2} = 100 \text{ mm}$ y $h_n > \frac{D-t}{2}$ $\frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$

$$h_n := \frac{N_{pm.Rd} - 2 \cdot \pi \cdot (D-t) \cdot t \cdot f_{yd} + \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}{2 \cdot b_c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_n = 9.012 \text{ mm}$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 2:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2} \right)^2 - \frac{t^3}{4} \right]$$

$$W_{pan} = 2.365 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy} \right) \right] & \text{if } h_n \geq \frac{b}{2} - c_{sy} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 0 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot h_n^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -2.04 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n \leq \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n > \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 0$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$h_{n2} := h_n$$

$$M_{n.Rd2} = 4.883 \cdot 10^4 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd2} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pl.Rd2} = 1.982 \cdot 10^5 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

Caso 3:

$$\frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad \frac{b}{2} < h_n \leq \frac{b_c}{2} \quad \frac{b_c}{2} = 200 \text{ mm} \quad y \quad h_n \leq \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$h_n := 10 \text{ mm}$$

$$\phi_i(h_n) := 2 \cdot \arccos\left(2 \cdot \frac{h_n}{D}\right) \quad \phi_i(h_n) = 2.919 \quad ss := \phi_i(h_n) \cdot \frac{180}{\pi} \quad ss = 167.241 \quad \text{GRAUS}$$

$$Ab1(h_n) := \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \quad Ab1(h_n) = 1.093 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$Wb1(h_n) := \left(\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \phi_i(h_n)} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \cdot \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot h_n \quad Wb1(h_n) = 4.77 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$Ab2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^2}{8} - Ab1(h_n) \quad Ab2(h_n) = 1.796 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$Wb2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^3}{12} - Wb1(h_n) \quad Wb2(h_n) = 1.05 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$Ao1(h_n) := \phi_i(h_n) \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t \quad Ao1(h_n) = 2.008 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$Wo1(h_n) := \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \quad Wo1(h_n) = 1.175 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$Ao2(h_n) := \pi \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t - Ao1(h_n) \quad Ao2(h_n) = 153.205 \text{ mm}^2$$

$$Wo2(h_n) := \frac{2}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \quad Wo2(h_n) = -1.175 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$R_{c2}(h_n) := \left[b_c \cdot b + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b) - 2 \cdot Ab2(h_n)\right] \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad R_{c2}(h_n) = -1.67062 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$R_{a2}(h_n) := 2 \cdot Ao2(h_n) \cdot f_{sd} \quad R_{a2}(h_n) = 1.06578 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$F(h_n) := N_{pm.Rd} - R_{c2}(h_n) - 2 \cdot R_{a2}(h_n)$$

$$\text{root}(F(h_n), h_n) = 55.7045 \text{ mm}$$

$$\frac{F(h_n)}{N_{pm.Rd}} = 0.971$$

$$i_3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n > \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n \leq \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i_3 = 0$$

$$h_{n3} := h_n$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 3:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \sin(\phi_i(h_n))\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right]$$

$$W_{pan} = 1.843 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] + 4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{sy}\right) & \text{if } h_n \geq b_c - c_{sy} \\ \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b) \cdot \left[\frac{\left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (3 \cdot b_c - 4 \cdot h_n + 2 \cdot b)}{3 \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b)} + \frac{b}{2}\right] + W_{pan} + W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -3.634 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 5.731 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl.Rd3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pl.Rd3} = 1.897 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 4:

$$\frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad \frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2} \quad \frac{b_c}{2} = 200 \text{ mm} \quad y \quad h_n \geq \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$r_a := -2 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad r_a = -28.333 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$r_b := (2 \cdot b_c + 2 \cdot b) \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad r_b = 1.7 \cdot 10^4 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$r_c := \left[\left(-b \cdot b_c - \frac{b^2}{2} - \pi \cdot \frac{D^2}{4} \right) \cdot 0.85 \cdot f_{cd} - N_{pm.Rd} \right] + 2 \cdot \pi \cdot (D-t) \cdot t \cdot f_{yd} + b_c \cdot b \cdot 0.85 \cdot f_{cd}$$

$$h_{n41} := \frac{-r_b - \sqrt{r_b^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_c}}{2 \cdot r_a} \quad h_{n41} = 576.397 \text{ mm} \quad \text{Escoger } h_n \text{ si estiver dentro del intervalo } [h_{n1}; h_{n2}]$$

$$h_{n42} := \frac{-r_b + \sqrt{r_b^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_c}}{2 \cdot r_a} \quad h_{n42} = 23.603 \text{ mm}$$

$$h_n := \begin{cases} h_{n41} & \text{if } \left(h_{n41} > \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_{n41} \leq \frac{b_c}{2}\right) \cdot \left(h_{n41} > \frac{D-t}{2}\right) \\ h_{n42} & \text{if } \left[\left(h_{n42} > \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_{n42} \leq \frac{b_c}{2}\right) \cdot \left(h_{n42} > \frac{D-t}{2}\right)\right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_n = 0 \text{ mm}$$

$$i4 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n > \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n \leq \frac{b_c}{2}\right) \cdot \left(h_n > \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i4 = 0$$

$$h_{n4} := h_n$$

Cálculo dos módulos plásticos, $M_n.Rd$ y $M_{pl}.Rd$ para o caso 4:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4} \right] \quad W_{pan} = 2.365 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right) \right] + 4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{sy}\right) & \text{if } h_n \geq b_c - c_{sy} \\ \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right) \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b_c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b) \cdot \left[\frac{\left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (3 \cdot b_c - 4 \cdot h_n + 2 \cdot b)}{3 \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b)} + \frac{b}{2} \right] + W_{pan} + W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -3.699 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd4} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2} \quad M_{n.Rd4} = 6.842 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl}.Rd4 := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd4}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 4"} & \text{if } i4=1 \end{cases} \quad h_{n,y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \\ h_{n4} & \text{if } i4=1 \end{cases}$$

$$i1 = 1$$

$$i2 = 0$$

$$i3 = 0$$

$$i4 = 0$$

$$M_{pl}.Rd1 := \text{if}(i1=1, M_{pl}.Rd1, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m}) \quad M_{pl}.Rd2 := \text{if}(i2=1, M_{pl}.Rd2, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m}) \quad M_{pl}.Rd3 := \text{if}(i3=1, M_{pl}.Rd3, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_{pl}.Rd4 := \text{if}(i4=1, M_{pl}.Rd4, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m}) \quad xxx := (M_{pl}.Rd1 \cdot M_{pl}.Rd2 \cdot M_{pl}.Rd3 \cdot M_{pl}.Rd4) \cdot \text{N}^{-3} \cdot \text{m}^{-3} \quad xxx = 235.338 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pl}.Rd1 := \text{if}(i1=1, M_{pl}.Rd1, xxx) \quad M_{pl}.Rd2 := \text{if}(i2=1, M_{pl}.Rd2, xxx) \quad M_{pl}.Rd3 := \text{if}(i3=1, M_{pl}.Rd3, xxx)$$

$$M_{pl}.Rd4 := \text{if}(i4=1, M_{pl}.Rd4, xxx)$$

$$M_{pl}.y.Rd := \min([M_{pl}.Rd1 \quad M_{pl}.Rd2 \quad M_{pl}.Rd3 \quad M_{pl}.Rd4]) \quad M_{pl}.y.Rd = 235.338 \cdot 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso para $N_{mpl}.Rd$:

Posição da Linha Neutra:

Caso = "Linha Neutra do Caso 1"

$$h_{n,y} = 54.1 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico da Seccão Total

$$M_{pl}.y.Rd = 235338 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto B:

$$M_{pB,y} := M_{pl}.y.Rd \quad M_{pB,y} = 235338 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pB,y} := 0 \cdot \text{N} \quad N_{pB,y} = 0 \text{ N}$$

(3.i) (d) COORDENADA DO PONTO C: (MpC.y;NpC.y) = (Mpl.y.Rd ; Npm.Rd)

Coordenadas do ponto C

$$M_{pC.y} := M_{pB.y} \quad M_{pC.y} = 235338 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pC.y} := N_{pm.Rd} \quad N_{pC.y} = 1588666 \text{ N}$$

(3.i) (e) COORDENADA DO PONTO E: (MpE.y;NpE.y) = (MplE.y.Rd ; NpE.Rd)

+++++ 2 +

Cálculo da posição da linha neutra plástica para NpE.Rd:

$$N_{pE.Rd} := \frac{N_{pl.Rd} + N_{pm.Rd}}{2} \quad N_{pE.Rd} = 2469901 \text{ N}$$

+++++

Cálculo da posição da linha neutra plástica :

Caso 1 (PontoE):

$$h_n := 80 \text{ mm} \quad h_n \leq \frac{b}{2} \quad \frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad y \quad h_n \leq \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$\phi_i(h_n) := 2 \cdot \arcsin\left(2 \cdot \frac{h_n}{D}\right) \quad \phi_i(h_n) = 0.952 \quad ss := \phi_i(h_n) \cdot \frac{180}{\pi} \quad ss = 54.532 \text{ GRAUS}$$

$$Ab1(h_n) := \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \quad Ab1(h_n) = 556.162 \text{ mm}^2$$

$$Wb1 := \left(\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \phi_i(h_n)} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) - \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot h_n \quad Wb1 = 4.673 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$Ab2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^2}{8} - Ab1(h_n) \quad Ab2(h_n) = 1.217 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$Wb2 := \frac{\pi \cdot D^3}{12} - Wb1 \quad Wb2 = 1.48 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$Ao1(h_n) := \phi_i(h_n) \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t \quad Ao1(h_n) = 654.814 \text{ mm}^2$$

$$Wo1 := \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \quad Wo1 = 5.417 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$Ao2(h_n) := \pi \cdot \frac{(D-t)}{2} \cdot t - Ao1(h_n) \quad Ao2(h_n) = 1.507 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$Wo2 := \frac{2}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \quad Wo2 = -5.417 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$R_{c2}(h_n) := (b_c \cdot 2 \cdot h_n - 2 \cdot Ab2(h_n)) \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad R_{c2}(h_n) = 561.92683 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$R_{a2}(h_n) := 2 \cdot Ao2(h_n) \cdot f_{sd} \quad R_{a2}(h_n) = 1.04807 \cdot 10^3 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$F(h_n) := N_{pE.Rd} - R_{c2}(h_n) - 2 \cdot R_{a2}(h_n)$$

$$\text{root}(F(h_n), h_n) = 76.373 \text{ mm}$$

$$\frac{F(h_n)}{N_{pE.Rd}} = -0.07618$$

$$i1 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n \leq \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n \leq \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

variable de control

$$i1 = 1 \\ h_{n1} := h_n$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 1:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \sin(\phi_i(h_n))\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right]$$

$$W_{pan} = 4.389 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] & \text{if } h_n \geq \frac{b}{2} - c_{sy} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_n^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 2.456 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd1} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd1} = 5.081 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pE1} := M_{\max.y.Rd} - M_{n.Rd1}$$

$$M_{pE1} = 1.962 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 2 (ponto E):

$$h_n \leq \frac{b}{2} \quad \frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad \text{y}$$

$$h_n > \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$h_n := \frac{N_{pE.Rd} - 2 \cdot \pi \cdot (D-t) \cdot t \cdot f_{yd} + \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}{2 \cdot b \cdot c \cdot 0.85 \cdot f_{cd}}$$

$$h_n = 86.768 \text{ mm}$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 2:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right]$$

$$W_{pan} = 2.365 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] & \text{if } h_n \geq \frac{b}{2} - c_{sy} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot h_n^2 - W_{pan} - W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 2.715 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$i2 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n \leq \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n > \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i2 = 1$$

$$h_{n2} := h_n$$

$$M_{n.Rd2} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd2} = 9.412 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pE2} := M_{\max.y.Rd} - M_{n.Rd2}$$

$$M_{pE2} = 1.529 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 3 (punto E):

$$\frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad \frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2} \quad \frac{b_c}{2} = 200 \text{ mm} \quad y \quad h_n \leq \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$h_n := 86 \text{ mm}$$

$$\phi_i(h_n) := 2 \cdot \arccos\left(2 \cdot \frac{h_n}{D}\right) \quad \phi_i(h_n) = 0.599 \quad ss := \phi_i(h_n) \cdot \frac{180}{\pi} \quad ss = 34.292 \quad \text{GRAUS}$$

$$Ab1(h_n) := \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \quad Ab1(h_n) = 142.15 \text{ mm}^2$$

$$Wb1(h_n) := \left(\frac{2 \cdot D}{3 \cdot \phi_i(h_n)} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \frac{D^2}{8} \cdot \phi_i(h_n) - h_n^2 \cdot \tan\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot h_n \quad Wb1(h_n) = 1.245 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$Ab2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^2}{8} - Ab1(h_n) \quad Ab2(h_n) = 1.258 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$Wb2(h_n) := \frac{\pi \cdot D^3}{12} - Wb1(h_n) \quad Wb2(h_n) = 1.514 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$Ao1(h_n) := \phi_i(h_n) \cdot \frac{(D-t) \cdot t}{2} \quad Ao1(h_n) = 411.779 \text{ mm}^2$$

$$Wo1(h_n) := \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \quad Wo1(h_n) = 3.486 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$Ao2(h_n) := \pi \cdot \frac{(D-t) \cdot t}{2} - Ao1(h_n) \quad Ao2(h_n) = 1.75 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$Wo2(h_n) := \frac{2}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\phi_i(h_n)}{2}\right)\right) \quad Wo2(h_n) = -3.486 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$R_{c2}(h_n) := \left[b_c \cdot b + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b) - 2 \cdot Ab2(h_n)\right] \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad R_{c2}(h_n) = 6.12643 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$R_{a2}(h_n) := 2 \cdot Ao2(h_n) \cdot f_{sd} \quad R_{a2}(h_n) = 1.21714 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$F(h_n) := N_{pE.Rd} - R_{c2}(h_n) - 2 \cdot R_{a2}(h_n)$$

$$\text{root}(F(h_n), h_n) = 76.687 \text{ mm}$$

$$\frac{F(h_n)}{N_{pE.Rd}} = -0.2336$$

$$i3 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n > \frac{b}{2}\right) \cdot \left(h_n \leq \frac{D-t}{2}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$i3 = 0$$

Cálculo dos módulos plásticos, Mn.Rd y Mpl.Rd para o caso 3:

$$h_{n3} := h_n$$

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \sin(\phi_i(h_n))\right) \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right] \quad W_{pan} = 1.033 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] + 4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{sy}\right) & \text{if } h_n \geq b_c - c_{sy} \\ \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy}\right)\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b) \cdot \left[\frac{\left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (3 \cdot b_c - 4 \cdot h_n + 2 \cdot b)}{3 \cdot (2 \cdot b_c - 2 \cdot h_n + b)} + \frac{b}{2} \right] + W_{pan} + W_{psn}$$

$$W_{pcn} = 3.086 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd3} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd3} = 6.875 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pE3} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd3}$$

$$M_{pE3} = 1.782 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso 4 (punto E):

$$\frac{b}{2} = 100 \text{ mm} \quad \frac{b}{2} \leq h_n \leq \frac{b_c}{2} \quad \frac{b_c}{2} = 200 \text{ mm} \quad y \quad h_n \geq \frac{D-t}{2} \quad \frac{D-t}{2} = 86 \text{ mm}$$

$$r_a := -2 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad r_a = -28.333 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$r_b := (2 \cdot b_c + 2 \cdot b) \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \quad r_b = 1.7 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$r_c := \left[\left(-b \cdot b_c - \frac{b^2}{2} - \pi \cdot \frac{D^2}{4} \right) \cdot 0.85 \cdot f_{cd} - N_{pE.Rd} \right] + 2 \cdot \pi \cdot (D-t) \cdot t \cdot f_{yd} + b_c \cdot b \cdot 0.85 \cdot f_{cd}$$

$$h_{n41} := \frac{-r_b - \sqrt{r_b^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_c}}{2 \cdot r_a} \quad h_{n41} = 512.821 \text{ mm} \quad \text{Escoger } h_n \text{ si estuvo dentro del intervalo } [h_{n1}; h_{n2}]$$

$$h_{n42} := \frac{-r_b + \sqrt{r_b^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_c}}{2 \cdot r_a} \quad h_{n42} = 87.179 \text{ mm}$$

$$h_n := \begin{cases} h_{n41} & \text{if } \left(h_{n41} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n41} \leq \frac{b_c}{2} \right) \cdot \left(h_{n41} > \frac{D-t}{2} \right) \\ h_{n42} & \text{if } \left[\left(h_{n42} > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_{n42} \leq \frac{b_c}{2} \right) \cdot \left(h_{n42} > \frac{D-t}{2} \right) \right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_n = 0 \text{ mm}$$

$$i_4 := \begin{cases} 1 & \text{if } \left(h_n > \frac{b}{2} \right) \cdot \left(h_n \leq \frac{b_c}{2} \right) \cdot \left(h_n > \frac{D-t}{2} \right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h_{n4} := h_n$$

$$i_4 = 0$$

Cálculo dos módulos plásticos, $M_n.Rd$ y $M_{pl}.Rd$ para o caso 4:

$$W_{pan} := \frac{4}{3} \cdot \left[3 \cdot t \cdot \left(\frac{D-t}{2} \right)^2 - \frac{t^3}{4} \right] \quad W_{pan} = 2.365 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$W_{psn} := \begin{cases} \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy} \right) \right] + 4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b_c}{2} - c_{sy} \right) & \text{if } h_n \geq b_c - c_{sy} \\ \left[4 \cdot A_{si} \cdot \left(\frac{b}{2} - c_{sy} \right) \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W_{psn} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$W_{pcn} := b \cdot c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (2 \cdot b \cdot c - 2 \cdot h_n + b) \cdot \left[\frac{\left(h_n - \frac{b}{2}\right) \cdot (3 \cdot b \cdot c - 4 \cdot h_n + 2 \cdot b)}{3 \cdot (2 \cdot b \cdot c - 2 \cdot h_n + b)} + \frac{b}{2} \right] + W_{pan} + W_{psn}$$

$$W_{pcn} = -3.699 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$M_{n.Rd4} := W_{pan} \cdot f_{yd} + W_{psn} \cdot f_{sd} + W_{pcn} \cdot \frac{f_{cd}}{2}$$

$$M_{n.Rd4} = 6.842 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pE4} := M_{max.y.Rd} - M_{n.Rd4}$$

$$M_{pE4} = 1.786 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\text{Caso} := \begin{cases} \text{"Linha Neutra do Caso 1"} & \text{if } i1=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 2"} & \text{if } i2=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 3"} & \text{if } i3=1 \\ \text{"Linha Neutra do Caso 4"} & \text{if } i4=1 \end{cases} \quad h_{nE.y} := \begin{cases} h_{n1} & \text{if } i1=1 \\ h_{n2} & \text{if } i2=1 \\ h_{n3} & \text{if } i3=1 \\ h_{n4} & \text{if } i4=1 \end{cases}$$

$$i1 = 1 \quad i2 = 1 \quad i3 = 0 \quad i4 = 0$$

$$M_{pE1} := \text{if}(i1=1, M_{pE1}, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m}) \quad M_{pE2} := \text{if}(i2=1, M_{pE2}, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_{pE3} := \text{if}(i3=1, M_{pE3}, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m}) \quad M_{pE4} := \text{if}(i4=1, M_{pE4}, 1 \cdot \text{N}\cdot\text{m})$$

$$xxx := M_{pE1} \cdot M_{pE2} \cdot M_{pE3} \cdot M_{pE4} \cdot \text{N}^{-3} \cdot \text{m}^{-3} \quad xxx = 2.999 \cdot 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{pE1} := \text{if}(i1=1, M_{pE1}, xxx) \quad M_{pE2} := \text{if}(i2=1, M_{pE2}, xxx)$$

$$M_{pE3} := \text{if}(i3=1, M_{pE3}, xxx) \quad M_{pE4} := \text{if}(i4=1, M_{pE4}, xxx)$$

$$M_{plE.y.Rd} := \min([M_{pE1} \quad M_{pE2} \quad M_{pE3} \quad M_{pE4}])$$

$$M_{plE.y.Rd} = 152877.456 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Caso para NmE.Rd :

Posição da Linha Neutra:

Caso = "Linha Neutra do Caso 2"

$$h_{nE.y} = 86.8 \text{ mm}$$

Momento Resistente Plástico no ponto E:

$$M_{plE.y.Rd} = 152877 \text{ N}\cdot\text{m}$$

+++++

Coordenadas do ponto E:

$$M_{pE.y} := M_{plE.y.Rd} \quad M_{pE.y} = 152877 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{pE.y} := N_{pE.Rd} \quad N_{pE.y} = 2469901 \text{ N}$$

(3.i) (f) Construção de la gráfica M-N

Adimensionalizando os diferentes pontos

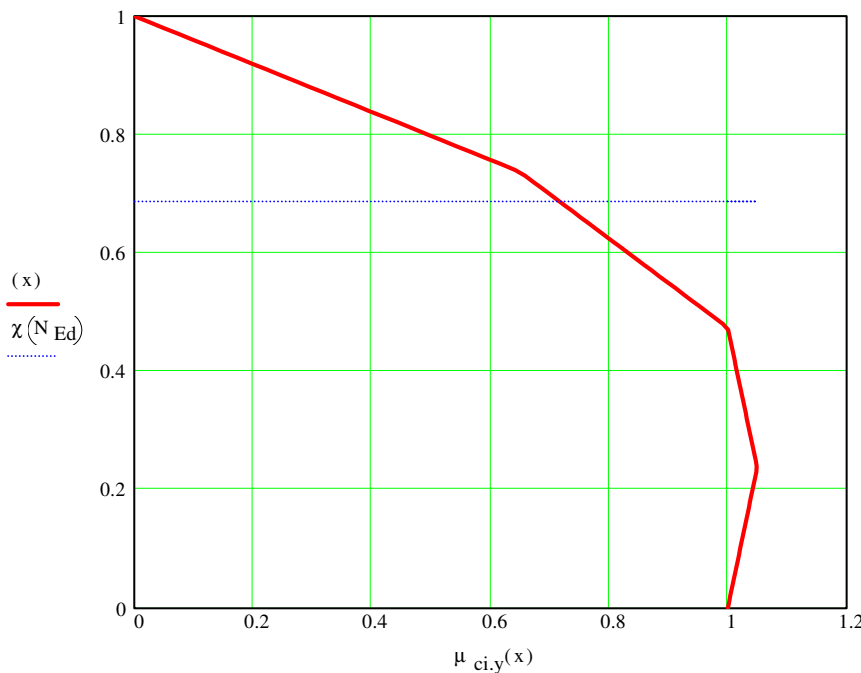
$$M_{pl.y.Rd} := M_{pB.y}$$

$$\mu(M) := \frac{M}{M_{pl.y.Rd}} \quad \mu(M_{pA.y}) = 0 \quad \mu(M_{pB.y}) = 1 \quad \mu(M_{pC.y}) = 1 \quad \mu(M_{pD.y}) = 1.05 \quad \mu(M_{pE.y}) = 0.65$$

$$\chi(N) := \frac{N}{N_{pl.Rd}} \quad \chi(N_{pA.y}) = 1 \quad \chi(N_{pB.y}) = 0 \quad \chi(N_{pC.y}) = 0.474 \quad \chi(N_{pD.y}) = 0.237 \quad \chi(N_{pE.y}) = 0.737$$

$$\mu_{ci,y}(x) := \begin{cases} \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pD,y}) - 1) + \chi(N_{pD,y})}{\chi(N_{pD,y})} \right] & \text{if } 0 \leq x \leq \chi(N_{pD,y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pC,y}) - \mu(M_{pD,y})) + \mu(M_{pD,y}) \cdot \chi(N_{pC,y}) - \mu(M_{pC,y}) \cdot \chi(N_{pD,y})}{\chi(N_{pC,y}) - \chi(N_{pD,y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pD,y}) < x < \chi(N_{pC,y}) \\ \left[\frac{x \cdot (\mu(M_{pE,y}) - \mu(M_{pC,y})) + \mu(M_{pC,y}) \cdot \chi(N_{pE,y}) - \mu(M_{pE,y}) \cdot \chi(N_{pC,y})}{\chi(N_{pE,y}) - \chi(N_{pC,y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pC,y}) < x \leq \chi(N_{pE,y}) \\ \left[\frac{-x \cdot (\mu(M_{pE,y})) + \mu(M_{pE,y})}{1 - \chi(N_{pE,y})} \right] & \text{if } \chi(N_{pE,y}) < x \leq 1 \end{cases}$$

x := 0, 0.01.. 1



x := 0, 0.1.. 1

<abscissa> <ordenada>

$\mu_{ci,y}(x) =$	$x =$
1	0
1.021	0.1
1.042	0.2
1.036	0.3
1.015	0.4
0.965	0.5
0.832	0.6
0.699	0.7
0.494	0.8
0.247	0.9
0	1

$$M_{pl,y,Rd} = 235.3 \cdot 1000 \cdot N \cdot m$$

$$N_{pl,Rd} = 3351.1 \cdot 1000 \cdot N$$

(3.ii) Diagrama de interação Mz.Rd-NRd

Como a secção é bissimétrica este diagrama é igual ao My.Rd-NRd.

Parte 4) Verificações de segurança (que pode inclui em geral a determinação de esforços de 2ª ordem devidos aos efeitos P-δ)

Verificação de Segurança da Barra de Acordo com o artigo 6.7.3.7

A barra está sujeita à flexão composta recta com momentos em torno de y-y. Porém, como o efeito das imperfeições pode ocorrer quer no plano y-y como no z-z independentemente há que proceder da seguinte forma:
 (i) considerar o efeito das imperfeições e das cargas no plano y-y e verificar a segurança da barra à compressão com flexão uniaxial (§6.7.3.6);
 (ii) considerar o efeito das imperfeições no plano z-z e o efeito das cargas no plano y-y e verificar a segurança da barra à compressão com flexão biaxial (§ 6.7.3.7).

(4.i) Verificação de Segurança ao esforço transverso. Importância do Esforço Transverso

Como $V_{Sd} < 50\%V_{pl.Rd}$ não há interação M-V, em nenhum dos planos, por isso os diagramas de interação M-N não precisam de ser alterados.

Se houvesse interação os valores resistentes axiais e de flexão na área de corte deveriam ser calculados com base numa das seguintes hipóteses:

- (i) reduzir f_{yd} sobre a área de corte considerando $f_{yd}(1-\rho)$, ou,
- (ii) reduzir a espessura da chapa da área de corte para $t_{red} = t^*(1-\rho)$. (mais fácil de implementar).
- (iii) alterar a espessura da alma/banzo do perfil e recalcular diagramas de interação M-N

$$V_{z.pl.Rd} := \frac{2 \cdot \frac{A_a}{\pi} \cdot f_{yd}}{1.1 \cdot \sqrt{3}} \quad V_{z.pl.Rd} = 308.582 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{superior a : } V_{2z.Ed} = 31.907 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$V_{y.pl.Rd} := V_{z.pl.Rd} \quad \text{superior a : } V_{1z.Ed} = 1.227 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

Logo verifica a resistência ao esforço transverso e não há interação entre M-V ou N-V

(4.ii) Avaliação da obrigatoriedade de considerar efeitos de 2ª ordem (§ 5.2.1(3), § 6.7.3.4(3), [])

(a) Carga Crítica por encurvadura em torno de Y-Y

R.P.Johnson página 194

Curto Prazo (tC):

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} := 0.9 \cdot (E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + 0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy})$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tC}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tC}} = 3.408 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tC}} = 21021 \cdot 1000 \text{ N}$$

Longo Prazo (tL):

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} := 0.9 \cdot \left[E_a \cdot I_{ay} + E_s \cdot I_{sy} + \frac{0.5 \cdot E_{cm} \cdot I_{cy}}{1 + \frac{N_{G.Ed}}{N_{Ed}} \cdot \phi} \right]$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.y.tL}}}{L_{ey}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.y.tL}} = 2.027 \cdot 10^{13} \cdot \text{N} \cdot \text{mm}^2$$

$$N_{\text{cr.II.y.tL}} = 12504 \cdot 1000 \text{ N}$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} := \min([EI_{\text{eff.II.y.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.y.tL}}])$$

$$EI_{\text{eff.II.y}} = 20270.9 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} := \min([N_{\text{cr.II.y.tC}} \quad N_{\text{cr.II.y.tL}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II.y}} = 12504 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

$$\text{Res} := \text{if}(N_{\text{cr.II.y.tC}} \leq N_{\text{cr.II.y.tL}}, \text{"Curto Prazo"}, \text{"Longo Prazo"})$$

$$\text{Res} = \text{"Longo Prazo"}$$

(b) Carga Crítica por encurvadura em torno de Z-Z

$$EI_{\text{eff.II.z.tC}} := EI_{\text{eff.II.y.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tC}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tC}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z.tL}} := EI_{\text{eff.II.y.tL}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{eff.II.z.tL}}}{L_{ez}^2}$$

$$EI_{\text{eff.II.z}} := \min([EI_{\text{eff.II.z.tC}} \quad EI_{\text{eff.II.z.tL}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} := \min([N_{\text{cr.II.z.tC}} \quad N_{\text{cr.II.z.tL}}])$$

$$N_{\text{cr.eff.II.z}} = 12504 \cdot 1000 \cdot \text{N}$$

(c) Carga Crítica Global:

$$N_{cr,eff,II} := \min\left(\left[N_{cr,II,z,tC} \quad N_{cr,II,z,tL} \right] \right) \quad N_{cr,eff,II} = 12504.1 \cdot 1000 \cdot N$$

$$N_{Ed} = 2301 \cdot 1000 \cdot N$$

Res := if($N_{cr,eff,II} > 10 \cdot N_{Ed}$, "Dispensa calculo de efeitos de 2ªOrdem P-d" , "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d")

Res = "Obrigatório cálculo de efeitos de 2ªordem P-d"

(4.iii) Factores k (de amplificação e equivalência) e Imperfeições

(a1) Factores k_y

(a1.i) -Carga crítica relevante (§ 6.7.3.4 (5))

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff,y} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,y}}{L^2} \quad N_{cr,eff,y} = 12504.1 \cdot 1000 \cdot N$$

(a1.ii) Factor $k_{e,y}$ para momentos de extremidade

Da tabela 6.4 temos: $\psi_y := \frac{M_{2y,Ed}}{M_{1y,Ed}} \quad \psi_y = 0 \quad \beta := 0.66 + 0.44 \cdot \psi_y \quad \beta = 0.66$

$$k_{e,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{e,y} = 1 \quad \text{Factor para momentos de extremidade}$$

(a1.iii) para momentos de vão (parcela isostática)

Da tabela 6.4 temos:

$$\beta := 1$$

$$k_{v,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{v,y} = 1.226 \quad \text{Factor para momentos de vão (isostaticos)}$$

(a1.iv) para momentos devidos a imperfeição da barra

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0,y} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,eff,y}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{0,y} = 1.226 \quad \text{Factor para momentos devidos a imperfeições da barra}$$

(a2) Factores k_z (de amplificação e equivalência)

(a2.i) -Carga crítica relevante (§ 6.7.3.4 (5))

(Nota: Aqui L é o comprimento da barra)

$$N_{cr,eff,z} := \frac{\pi^2 \cdot EI_{eff,II,z}}{L^2} \quad N_{cr,eff,z} = 12504.1 \cdot 1000 \cdot N$$

(a2.ii) Factor $k_{e,y}$ para momentos de extremidade

Da tabela 6.4 temos: $\psi_y := \frac{M_{2z,Ed}}{M_{1z,Ed}} \quad \psi_y = -1 \quad \beta := 0.66 + 0.44 \cdot \psi_y \quad \beta = 0.22$

$$k_{e.z} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr.eff.z}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{e.z} = 1 \quad \text{Factor para momentos de extremidade}$$

(a2.iii) Factor $k_{v.z}$ para momentos de vão (parcela isostática)

Neste caso não há.

(a2.iv) para momentos devidos a imperfeição da barra

Da tabela 6.4 temos: $\beta := 1$

$$k_{0.z} := \max \left[\left[\frac{\beta}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr.eff.z}}} \quad 1 \right] \right] \quad k_{0.z} = 1.226 \quad \text{Factor para momentos devidos a imperfeições da barra}$$

(b.1) Imperfeição da barra e_{0z} e Momentos associados:

Embora a tabela 6.5 não indique a imperfeição para este perfil adopta-se $L/200$:

$$e_{0.z} := \frac{L}{200} \quad e_{0.z} = 20 \text{ mm}$$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0y.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0.z} \quad M_{0y.Ed} = 46.02 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(b.2) Imperfeição da barra e_{0y} e Momentos associados:

$$\text{Adopta-se } L/200: \quad e_{0.y} := \frac{L}{200} \quad e_{0.y} = 20 \text{ mm}$$

O momento secundário (sem amplificação) que lhe está associado é:

$$M_{0z.Ed} := N_{Ed} \cdot e_{0.y} \quad M_{0z.Ed} = 46.02 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(4.iv) Verificação de segurança a compressão com flexão biaxial
-encurvadura no eixo y-y com Imperfeição + encurvadura no eixo z-z

(4.iv.1) Encurvadura no eixo y-y com Imperfeição + encurvadura no eixo z-z

(a1) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

Os factores de amplificação e de equivalência transformam os momentos máximos (de extremidade, de vão ou devidos a imperfeições) a momentos equivalentes (como se fossem em momentos constantes ao longo da barra) e amplificam-nos. A amplificação resulta da compressão sobre uma barra que apresenta flechas devidas à distribuição aos momentos referidos.

$$N_{Ed} = 2301 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

$$M_{1y.Ed} \cdot k_{e.y} = 61.36 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy.Ed} \cdot k_{v.y} = 20.3 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido ao momento isostático (carga de vão)}$$

$$M_{0y.Ed} \cdot k_{0,y} = 56.4 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

momento equivalente de 2ª ordem devido a imperfeições na barra

$$M_{1z.Ed} \cdot k_{e,z} = 30.68 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

momento equivalente de 2ª ordem devido aos momentos de extremidade

$$M_{y.Ed} := M_{1y.Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy.Ed} \cdot k_{v,y} + M_{0y.Ed} \cdot k_{0,y}$$

$$M_{y.Ed} = 138 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z.Ed} := M_{1z.Ed} \cdot k_{e,z}$$

$$M_{z.Ed} = 31 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(b1) Esforços resistentes

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 0.717 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 0.9$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min([\mu_{y1}, \mu_{y2}])] \quad \mu_y = 0.717$$

$$M_{pl,y,Rd} = 235 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl,y,N,Rd} := \mu_y \cdot M_{pl,y,Rd}$$

$$M_{pl,y,N,Rd} = 169 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Nota: O momento actuante não depende directamente do esforço axial e por isso μ_y não pode ser considerado superior a 1 (art.6.7.3.6(2)). Recorrendo ao art.6.7.1.(7), reduz-se o esforço axial em 20%, para se quantificar μ_{y2} .

$$M_{pl,z,Rd} := M_{pl,y,Rd} \quad \text{NOTA : } \mu_{ci,z} = \mu_{ci,y}$$

$$M_{pl,z,N,Rd} := M_{pl,y,N,Rd}$$

$$M_{pl,z,N,Rd} = 169 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(c1) Verificação de segurança à flexão composta biaxial (imperfeição em torno do eixo Y-Y)

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,y,N,Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,z,N,Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{y.Ed}}{M_{pl,y,N,Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl,z,N,Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M = 0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,y,N,Rd}} = 0.909 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,z,N,Rd}} = 0.202 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl,y,N,Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl,z,N,Rd}} = 1 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança nos dois planos}$$

(4.iv.2) Encurvadura no eixo y-y + encurvadura no eixo z-z com Imperfeição

(a2) Esforços de cálculo actuantes equivalentes de 2ª ordem

Os factores de amplificação e de equivalência transformam os momentos máximos (de extremidade, de vão ou devidos a imperfeições) a momentos equivalentes (como se fossem em momentos constantes ao longo da barra) e amplificam-nos. A amplificação resulta da compressão sobre uma barra que apresenta flechas devidas à distribuição aos momentos referidos.

$$N_{Ed} = 2301 \cdot 1000 \text{ N} \quad \text{esforço axial de compressão}$$

$$M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} = 61.36 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} = 20.3 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido ao momento isostático (carga de vão)}$$

$$M_{1z,Ed} \cdot k_{e,z} = 30.68 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido aos momentos de extremidade}$$

$$M_{0z,Ed} \cdot k_{0,z} = 56.4 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{momento equivalente de 2ª ordem devido a imperfeições na barra}$$

$$M_{y,Ed} := M_{1y,Ed} \cdot k_{e,y} + M_{vy,Ed} \cdot k_{v,y} \quad M_{y,Ed} = 81.7 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z,Ed} := M_{1z,Ed} \cdot k_{e,z} + M_{0z,Ed} \cdot k_{0,z} \quad M_{z,Ed} = 87.1 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(b2) Esforços resistentes

$$\mu_{y1} := \mu_{ci,y}(\chi(N_{Ed})) \quad \mu_{y1} = 0.717 \quad \mu_{y2} := \mu_{ci,y}(\chi(0.8 \cdot N_{Ed})) \quad \mu_{y2} = 0.9$$

$$\mu_y := \text{if}[\mu_{y1} \leq 1, \mu_{y1}, \min([\mu_{y1} \quad \mu_{y2}])] \quad \mu_y = 0.717$$

$$M_{pl,y,Rd} = 235 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{da alínea anterior})$$

$$M_{pl,y,N,Rd} := \mu_y \cdot M_{pl,y,Rd} \quad M_{pl,y,N,Rd} = 169 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Nota: O momento actuante não depende directamente do esforço axial e por isso μ_y não pode ser considerado superior a 1 (art.6.7.3.6(2)). Recorrendo ao art.6.7.1.(7), reduz-se o esforço axial em 20%, para se quantificar μ_y .

$$M_{pl,z,Rd} := M_{pl,y,Rd} \quad \text{NOTA :} \mu_{ci,z} = \mu_{ci,y}$$

$$M_{pl,z,N,Rd} := M_{pl,y,N,Rd} \quad M_{pl,z,N,Rd} = 169 \cdot 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

(c2) Verificação de segurança à flexão composta biaxial (imperfeição em torno do eixo Y-Y)

$$\frac{M_{y,Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,y,N,Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{z,Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl,z,N,Rd}} \leq 1 \quad \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,N,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,N,Rd}} \leq 1$$

- para aço S235 o coeficiente de redução de momentos vale : $\alpha_M=0.9$ (§ 6.7.3.6.(1))

$$\alpha_M := 0.9$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.y.N.Rd}} = 0.538 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{z.Ed}}{\alpha_M \cdot M_{pl.z.N.Rd}} = 0.574 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança neste plano}$$

$$\frac{M_{y.Ed}}{M_{pl.y.N.Rd}} + \frac{M_{z.Ed}}{M_{pl.z.N.Rd}} = 1 < 1, \quad \text{Logo satisfaz a segurança nos dois planos}$$

CONCLUSÃO : Verifica-se a segurança à encurvadura por flexão, sendo mais critica a encurvadura em torno do eixo fraco.

Fim

ANEXO - B

Instruções para uso dos programas "M-C" e "Vcol-Mx"

Os programas NÃO dependem da árvore de directórios. Por uma questão de organização deve criar uma pasta para guardar os ficheiros relativos às propriedades das secções os quais podem ser usados por problemas diversos. Cada problema deve ter a sua pasta específica.

No exemplo presente a pasta com as características das secções tem a designação de "Secções" e o problema exemplo é o Problema 2 guardado na pasta "Probl2".

Assim temos:

>Pr-Mistas-3>Secções - contém os ficheiros relativos a cada tipo de secção, usada por todos os problemas. Concretamente contém:

ficheiro tipo ***.MCDAT** - informação necessária como Input do Programa "M-C" (pode e deve ser aberto com processador de texto do tipo NOTEPAD)

ficheiro tipo ***.MCRES** - é um ficheiro gerado a partir do uso do Programa "M-C" e contém a informação do ***.MCDAT** escrita em "texto corrido", fácil de entender (pode e deve ser aberto com processador de texto do tipo NOTEPAD).

ficheiro ***.MCMC** - é o ficheiro sequencial gerado pelo programa "M-C" e que contém as curvas momento curvatura que são o INPUT do Programa "Vcol-Mx".(pode ser aberto com processador de texto do tipo NOTEPAD)

>Pr-Mistas-3>Probl2 - contém os ficheiros específicos do Problema 2, ou seja:

ficheiro tipo ***.dat** - informação necessária como Input do Programa "Vcol-Mx" de acordo com formato próprio (ver na parte B deste texto).

ficheiro tipo ***.res** - ficheiro de resultados onde consta a descrição dos dados introduzidos, iterações desenvolvidas e momentos e deslocamentos calculados.

Vamos tratar da:

PARTE A - Programa "M-C" e,
PARTE B - Programa "Vcol-Mx"

*** PARTE A - Programa "M-C" ***

A.1) Construir o ficheiro de dados para "M-C"

Este ficheiro de dados tem um "nome" livre escolhido pelo utilizador e a extensão obrigatória ".MCDAT". O ficheiro tipo *.MCDAT é facilmente criado a partir de um já existente (ver pasta Secções).

É constituído por pares de linhas onde na primeira, que se inicia com " ", contém a designação dos parâmetros ou variáveis da linha seguinte. Na segunda linha são de facto os "dados" do problema que devem ficar separados por espaços.

Não pode haver linhas em branco.

O "nome" é importante porque a ele será anexado o sufixo *.MCMC que designa o ficheiro com as coordenadas das curvas Momento-Curvatura.

As UNIDADES de trabalho do ficheiro de dados *.MCDAT são [N] e [mm].

No entanto os resultados no ficheiro *.MCMC e nas janelas de visualização são: Momentos [N*m], Curvaturas [m⁻¹].

A.2) Arrancar com o Visual Basic. Abrir o Projecto M-C-3.vbp na pasta M-C-3

A.3)

- Botão: RUN

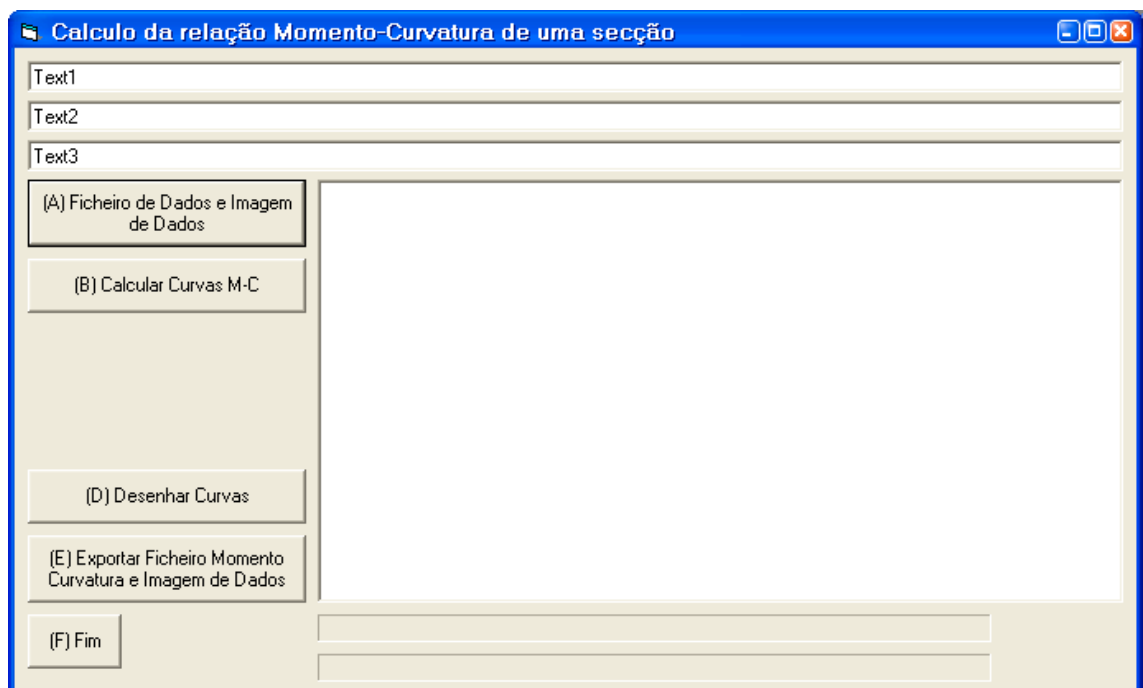


Figura - A.1- Janela principal

- Carregar no Botão "(A) Ficheiro de Dados e Imagem de Dados"

Aparece a nova janela, figura A.2.

Deve indicar usando o rato a localização do directório e pasta onde se localiza o ficheiro de dados "nome.MCDAT".

Clicar (pinchar) sobre esse ficheiro (no caso presente é o QH2530CPY.MCDAT).

QH2530CPY.* significa : secção Quadrada com perfil H e betão 25/30, cálculo a Curto Prazo (CP) flectindo em torno de Y-Y (eixo forte).

Automaticamente o programa cria dois ficheiros com extensões *.MCRES, e *.MCMC.

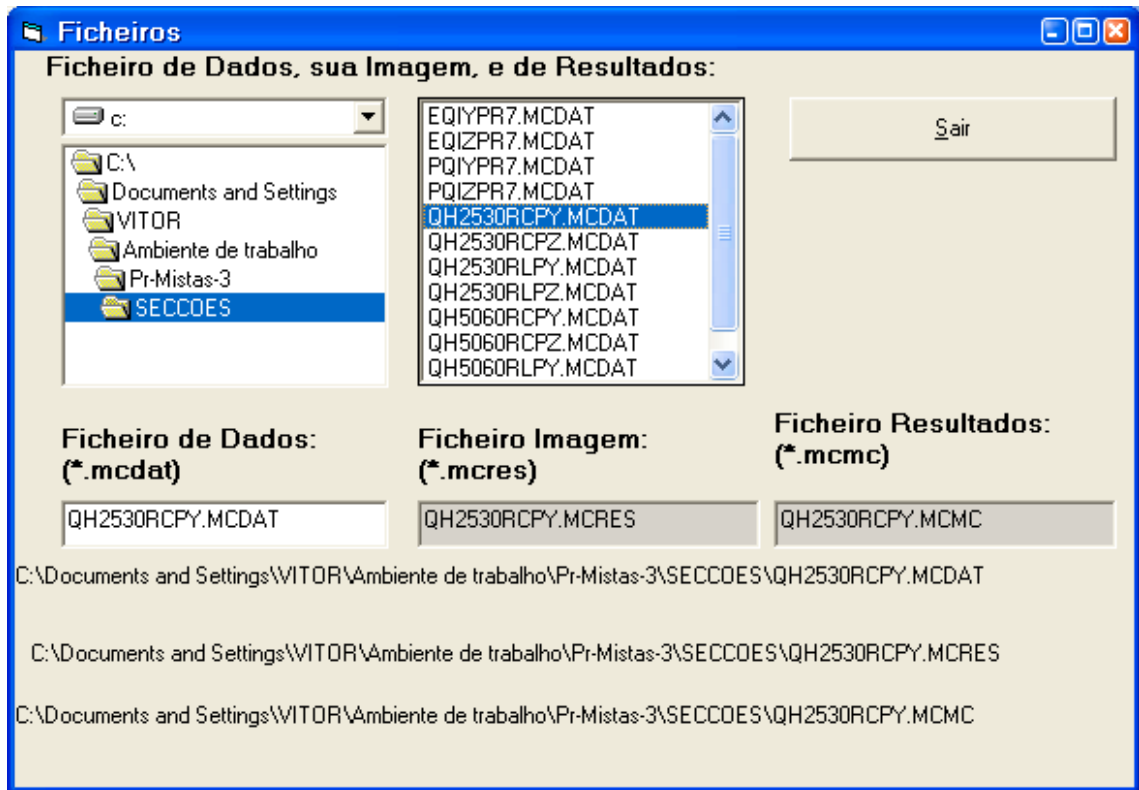


Figura A.2- Janela de ficheiros de dados

O ficheiro tipo *.MCRES irá conter em "texto corrido" o resumo do *.MCDAT
 O ficheiro tipo *.MCMC irá guardar informações das curvas Momento-Curvatura necessárias para o próximo programa "Vcol-Mx"

Carregar em Sair. O título do trabalho e o nome dos ficheiros aparecem nas 3 primeiras linhas (ver figura A.3).

- Botão **(B)** - Calcular Curvas M-C

O programa gera os dados e guarda-os em memória. As barras de controle inferiores ficam azuis.

- Botão **(D)** - Desenhar Curvas

São desenhadas as curvas que servem como verificação visual dos resultados obtidos. Em cada uma delas é dado o momento máximo, a curvatura correspondente a esse momento e a curvatura do último ponto da curva (Figura A.4).

- Botão E - Exportar Ficheiro Momento Curvatura e Imagem de Dados

O ficheiro Momento Curvatura (tipo *.MCMC) e a "imagem" do ficheiro de dados, ou seja o "texto corrido" que descreve os dados (ficheiro tipo *.MCRES) são guardados na mesma pasta onde está o ficheiro original (*.MCDAT).

- Botão F - Fim

Fim.

*** PARTE B - Programa "Vcol-Mx"***

Podemos seguir como exemplo o Problema 2.

B.1) Criar ficheiro de dados para "Vcol-Mx" que tem a extensão *.dat.

Uma forma fácil de o fazer é copiar um problema antigo e fazer as alterações adequadas ao novo problema .

A estrutura do ficheiro de dados é semelhante à do programa "M-C" ou seja é em geral constituído por pares de linhas onde a primeira (que se inicia sempre uma plica " ' ' ") define e explica o significado das variáveis e a segunda fornece as variáveis.

Na parte final há um *Texto Explicativo* das variáveis do próprio ficheiro.

As UNIDADES de trabalho do ficheiro de dados *.dat são [N] e [m (metro)].

Os resultados no ficheiro *.res são: Momentos [N*m], e deslocamentos [m].

Exemplo do ficheiro PR2-LP-Y.dat

Conteúdo do ficheiro de dados PR2-LP-Ydat

```

Problema 2y - Coluna Mista 8 metros com 8 troços
'dltLambda Lambda
0.1 1
' ntroços
8
'L(1) L(2) ... L(n)
1.125 1.125 1.125 1.125 1.125 1.125 1.125 1.125
'nRestricoes
2
'No restr_mom restr_fy
1 0 1
9 0 1
'nNosCarregados
8
'No Mz Fy Fx
2 0 -2700 0
3 0 -2700 0
4 0 -2700 0
5 0 -2700 0
6 0 -2700 0
7 0 -2700 0
8 0 -2700 0
9 65000 0 900000
'Lc(1) Lc(2)... Lc(n)
9 9 9 9 9 9 9 9
'Denom(1) Denmin(2) ... Denomin(n)
200 200 200 200 200 200 200 200
'Parte contraventada
1 1 1 1 1 1 1 1
'Numero de Secções a usar
1
'Troços a que correspondem as secções
1 1 1 1 1 1 1 1
'Em cada linha colocar o nome do ficeiro *.mcmc com extensão
QH2530RLPY.MCMC
    
```

Texto Explicativo com designação das variáveis do programa

Titulo
 deltaLambda , Lambda
 nº de barras nt
 L(1), L(2), ... , L(nt) 'comprimento dos troços
 nRestr 'nº nos com restrições de apoio
 no , retr1 , restr 2 ' no , restrição momento , restrição força y (1=restringido, 0=Livre)
 ...
 ...
 nNosCarr 'nº de nos carregados
 no, Mz , Fy , Fx 'no , momento , força y , força Fx(positiva de cima para baixo)
 ...
 Lc(1), , Lc(nt) 'comprimento entre pontos contraventados
 denomin(1), ...,denomin(nt) 'denominador correspondente à excentricidade eo,d
 npc(1) ... npc(ntroços) 'parte contraventada a que pertence o troço
 nSecTipo 'número de secções tipo a usar
 nSecTroco(1), nSecTroco(2), 'nSectroco(nt) 'secção tipo do troço nt=1, nt=2 , ..., nt=nt
 NomeFichSeccao(1) 'nome do ficheiro com informação da secção 1
 NomeFichSeccao(2) 'nome do ficheiro com informação da secção 2
 , ..., 'nome do ficheiro com informação da secção
 NomeFichSeccao(nSecTipo) 'nome do ficheiro com informação da secção nSecTipo

B.2)

Arrancar com o Visual Basic. Abrir o Projecto Col-Mx.vbp na pasta Col-Mx-3. Corresponde ao programa "Vcol-Mx" do trabalho

B.3)

- Botão: RUN

Aparece a janela da figura B.1

- Botão : Directório de Localização de Secções

Aparece a janela da figura B.2. Com o rato indicar o directório onde se localizam as curvas Momento-Curvatura que o problema vai usar. Depois Carregar em Sair.

Nome do Programa

Instruções para uso dos programas M-C e Vcol-Mx

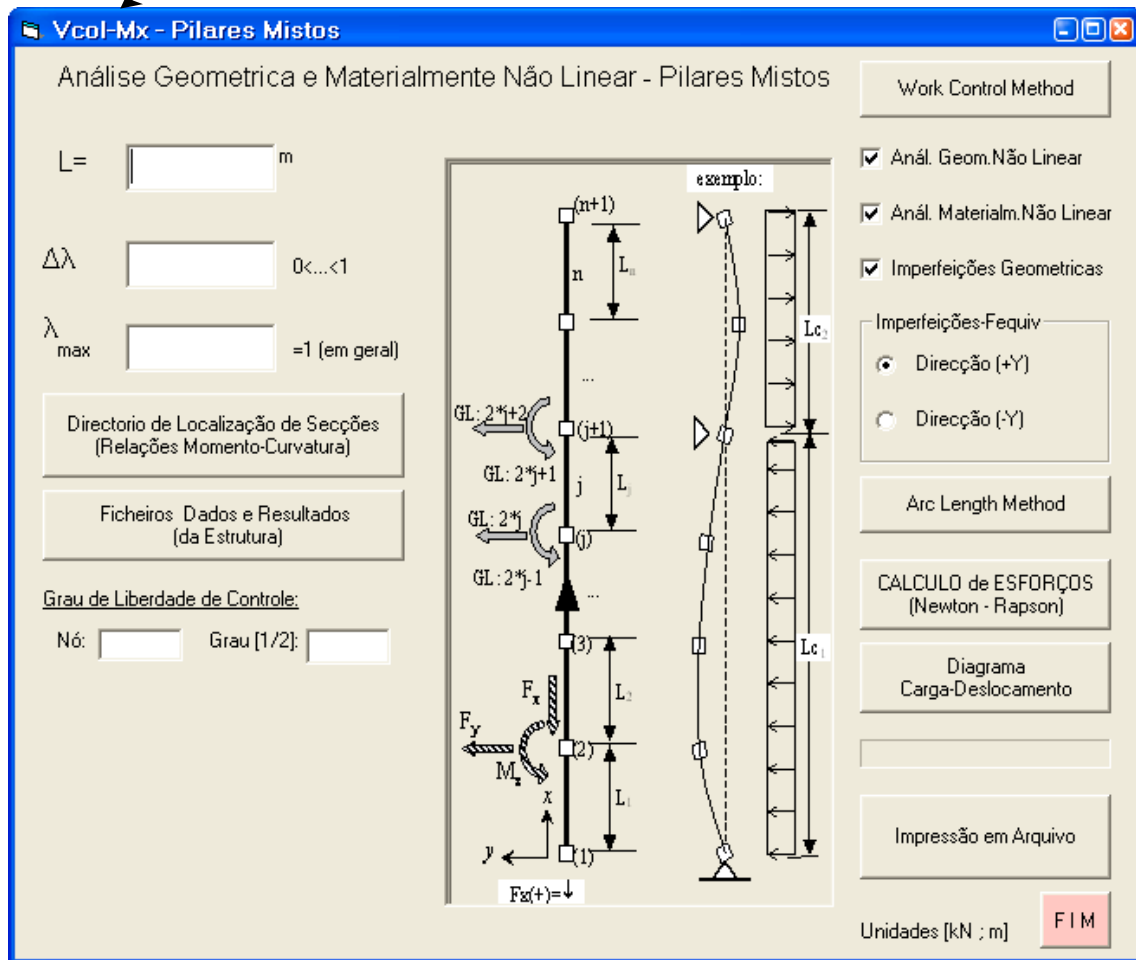


Figura B.1- Janela principal

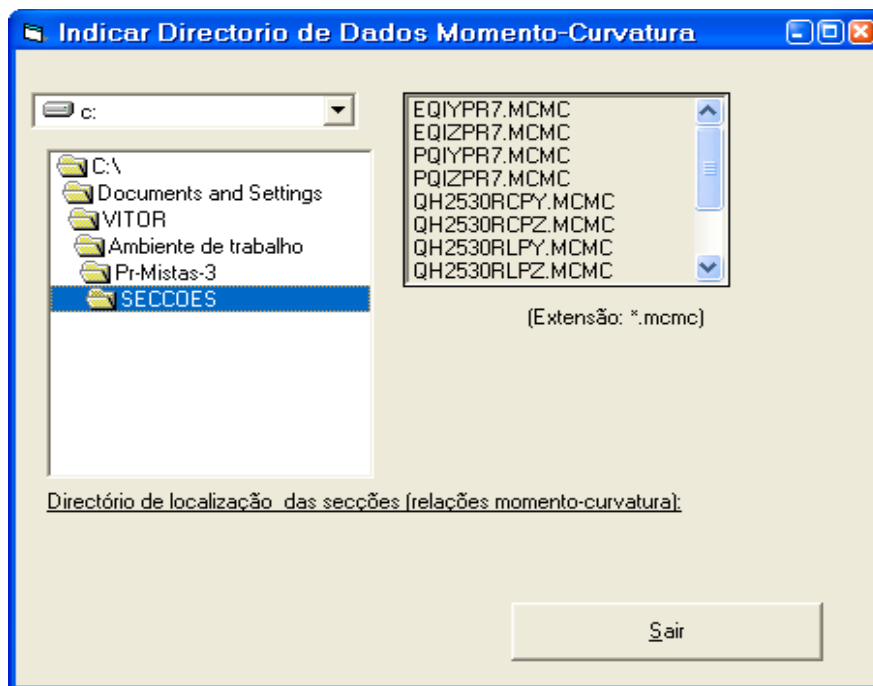


Figura B.2- Directorio de localização dos ficheiros de secções tipo

- Botão : Ficheiro de Dados e Resultados

Neste botão surge uma janela (Figura B.3) onde deverá indicar a localização do ficheiro de dados da coluna (tipo *.dat). Carregando nesse ficheiro automaticamente o programa cria o nome do ficheiro de resultados que tem a extensão *.res.

Aparece na parte inferior o caminho dos ficheiros. Se o ficheiro de resultados já existir (acontece porque antes correu o mesmo problema) pode clicar sobre esse ficheiro na janela da direita, e aparecerá o seu nome na janela direita inferior. (Se clicar sobre outro com nome diferente será esse o ficheiro de resultados que vai ficar activo).

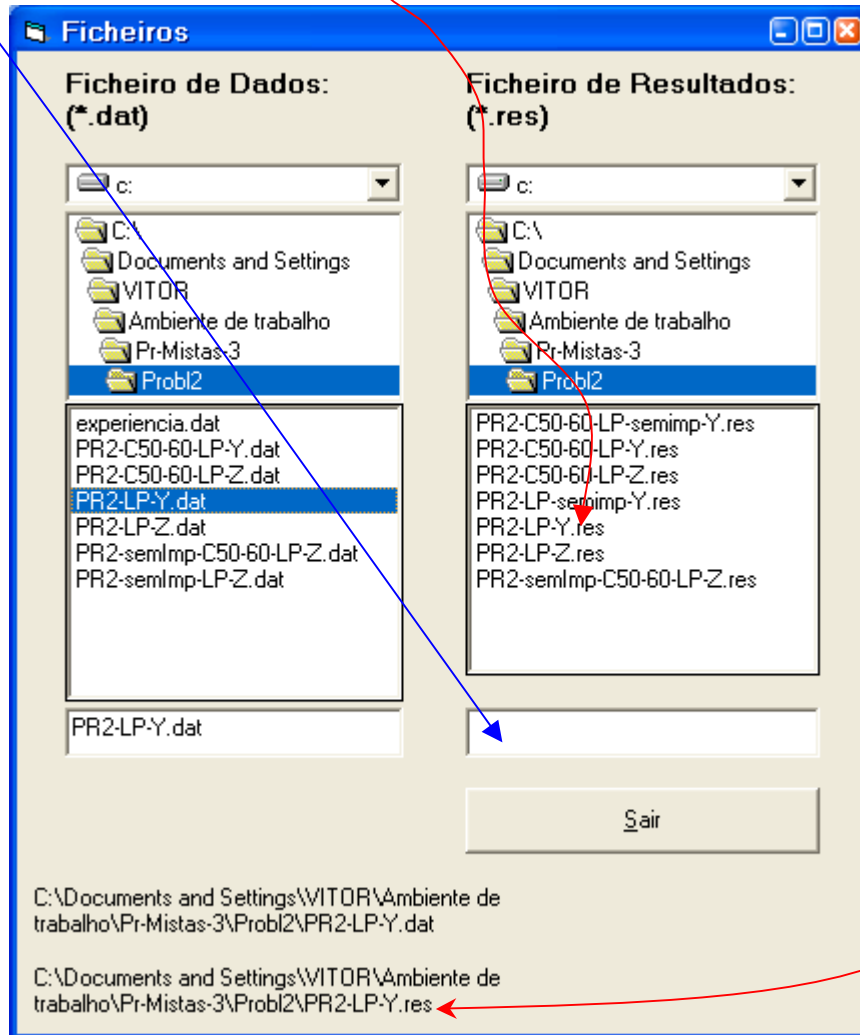


Figura B.3

Carregando em Sair o ficheiro de dados (PR2-LP-Y.dat) é lido. Se estiver mal formatado o programa colapsa !..... Mas se estiver bem, o que chega sempre por acontecer, na janela inicial (Figura B.1) aparece a seguinte informação:

L = comprimento total da coluna,

$\Delta\lambda$ = incremento de parâmetro de carga definido no ficheiro de dados *.dat

λ_{max} = parâmetro de carga máximo definidos no ficheiro de dados *.dat,

Grau de Liberdade de Controle = serve para desenhar a curva carga-deslocamento. (é calculado a partir do nó central e do deslocamento transversal)

Estas grandezas (à excepção de L) podem ser alteradas pelo utilizador.

A janela principal fica com o seguinte aspecto (Figura B.4).

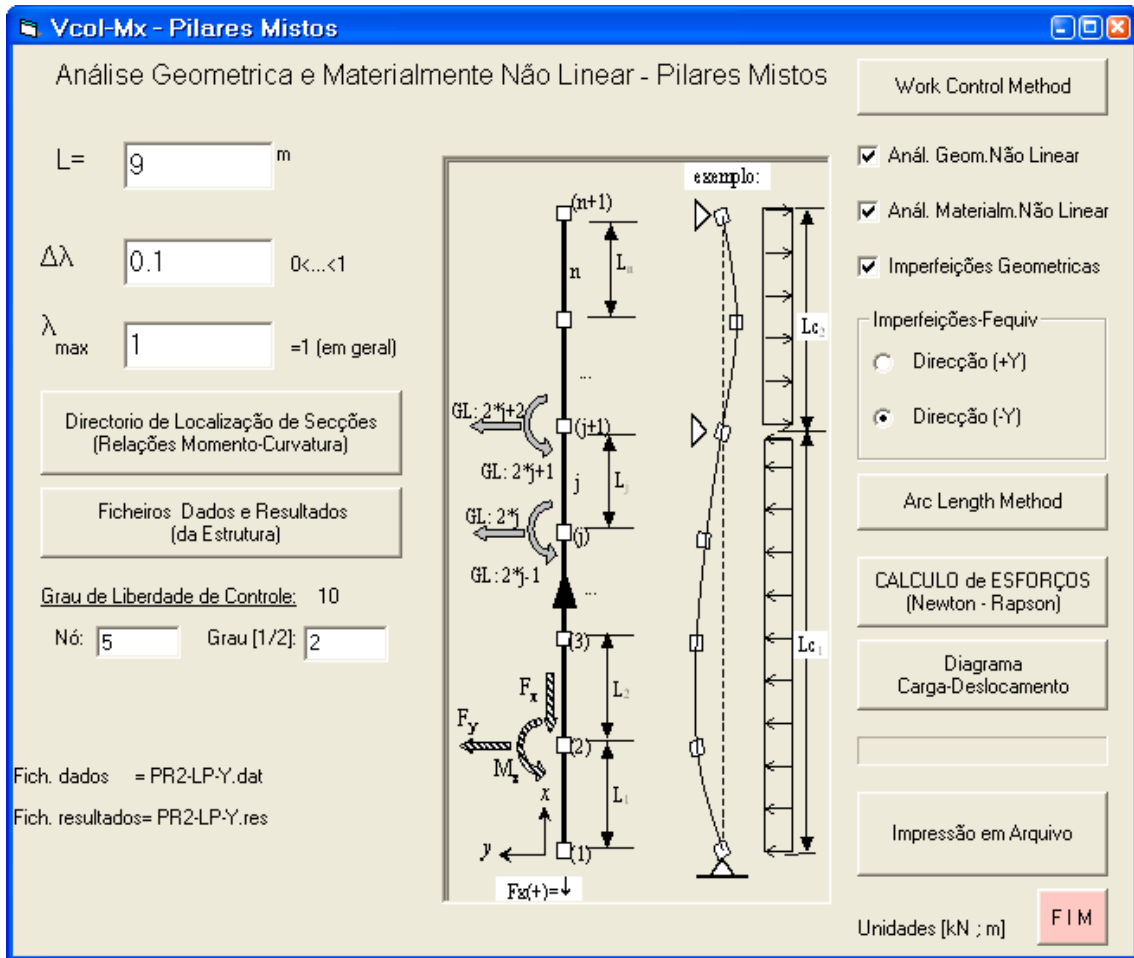


Figura B.4

Como mostra a figura, e carregando nos botões de verificação "" ou opção "(•)" podem ser realizadas análises:

- de 2ª ordem ou de 1ª ordem, (geometricamente não lineares ou lineares),
- não lineares ou lineares (materialmente não lineares ou lineares),
- com e sem imperfeições geométricas, actuando estas na direcção (+Y) ou (-Y).

As análises são realizadas recorrendo aos seguintes métodos:

- Método de Controle de Carga de Newton Rapson Modificado - carregando no botão "Cálculo de Esforços" - a qual está vocacionada para cálculo de esforços e deslocamentos;
- Método de Controle de Trabalho e Método de Controlo de Arco carregando respectivamente nos botões "Work Control Method" e "Arc Length Method", que estão vocacionadas para o cálculo da carga limite.

O botão "Diagrama Carga-Deslocamento" permite o traçado da curva carga-deslocamento calculada com base no Método de Controle de Carga de Newton-Rapson Modificado.

O botão "Impressão em Arquivo" escreve em "texto corrido" no ficheiro *.res os dados do ficheiro *.dat. Se o botão "Cálculo de Esforços" tiver sido activado também escreve os

resultados dos esforços e deslocamentos para o último parâmetro de carga λ e incremento $\Delta\lambda$ activo.

B.4) Cálculo de Esforços

Durante as iterações no cálculo de esforços uma barra de progressão de cálculo, no canto inferior direito da janela principal, é preenchida a azul.

Se o parâmetro de carga λ_{max} for excessivo, ocorre o colapso da barra ou por exceder a resistência à flexo-compressão ou por se exceder a resistência à compressão.

Por exemplo. Fazendo $\lambda_{max}=2$ ocorre rotura por flexo-compressão no passo 17, e surge um aviso. Simultaneamente a célula do parâmetro de carga fica azul clara. O cálculo foi interrompido porque a barra de progressão não chegou ao fim (Figura B.5).

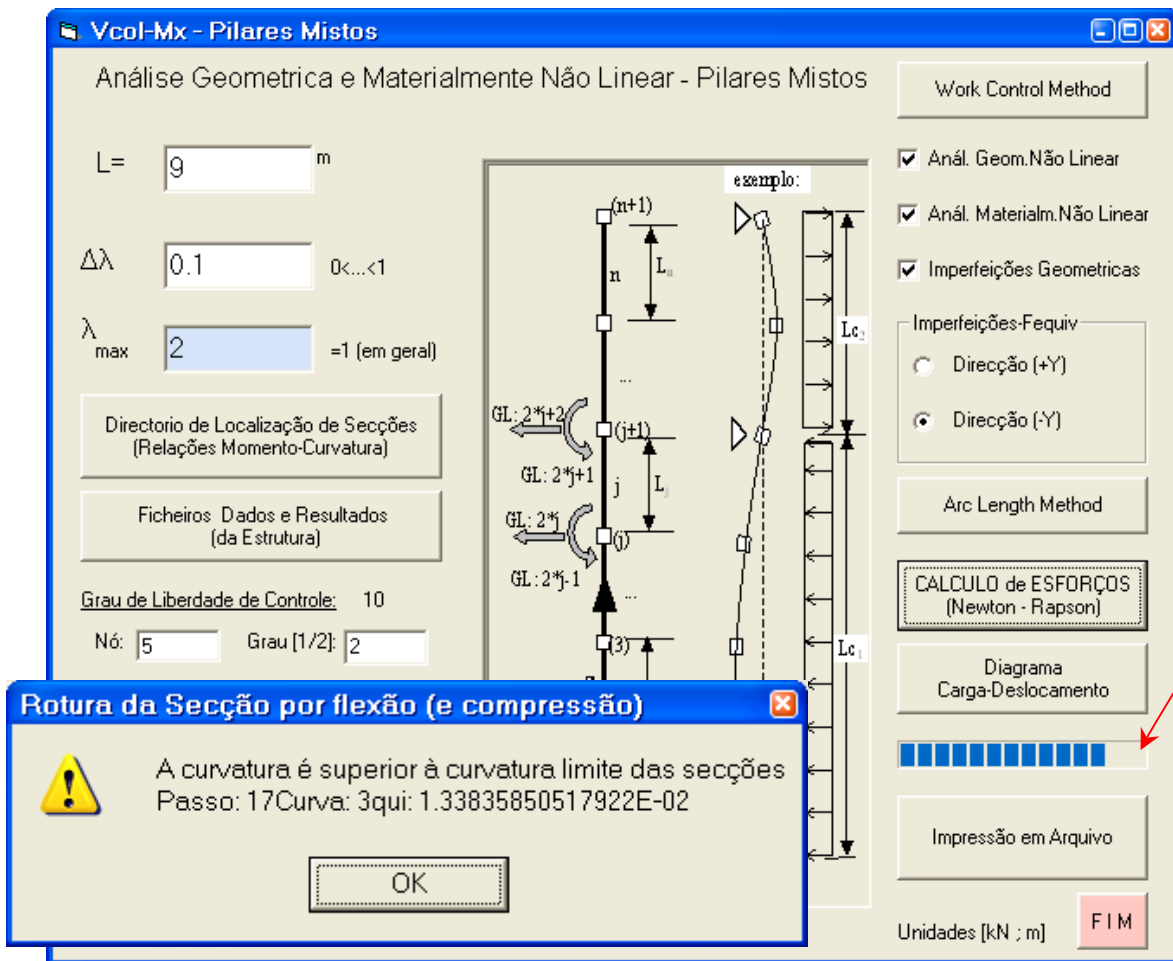


Figura B.5

Como o cálculo não chegou ao fim a impressão de resultados não inclui os momentos e deslocamentos finais.

Calculando os Esforços para $\lambda_{max}=1.2$, carregando em **Impressão em Arquivo**, e abrindo o ficheiro PR2-LP-Y.res com um processador de texto, obtemos os resultados da página seguinte, nos quais se omite informação de controle relativa a cada iteração.

<p>Título: Problema 2y - Coluna Mista 8 metros com 8 trocos Seccão Título da Secção: 1 Seccao Q Y C25/30 A400 S235-360-HEB240 (Unidades: N mm)</p>			
<p>-----</p> <p>Resultados em unidades : N e m Análise geometricamente não linear Análise materialmente não linear Com imperfeições geométricas na direcção (-Y) Ficheiros de Dados das Secções Troço Seccão Tipo Nome do Ficheiro 1 ao 8 1 QH2530RLPY.MCMC baseada nos valores resistentes de cálculo dos materiais fcd , fsd, fyd</p>			
<p>deltaLambda Lambda 0.1 1.2 Numero incrementos de carga = 12 ErroDeslocamento= 0.001 ErroForca= 0.001 ErroEsforco= 1</p>			
<p>-----</p> <p>Comprimento dos troços 1 = 1.125 2 = 1.125 3 = 1.125 4 = 1.125 5 = 1.125 6 = 1.125 7 = 1.125 8 = 1.125</p>			
<p>nº de nós restringidos = 2 No restrRot RestrTransl y 1 0 1 9 0 1</p>			
<p>nº de nós carregados= 8 No Mz Fy Nx 2 0 -2700 0 3 0 -2700 0 4 0 -2700 0 5 0 -2700 0 6 0 -2700 0 7 0 -2700 0 8 0 -2700 0 9 65000 0 900000</p>			
<p>Partes Contraventadas parte nó nó 1º ultimo esq dir troço troço 1 1 9 1 8</p>			
<p>Troços correspondentes troço parte Distan- denomi- -cia -nador 1 1 9 200 2 1 9 200 3 1 9 200 4 1 9 200 5 1 9 200 6 1 9 200 7 1 9 200 8 1 9 200</p>			
<p>Momentos Finais Troço Mf esq Mf dir 1 . 51901.075 2 51901.075 92935.822 3 92935.822 122169.207</p>			

4	122169.206	138922.237
5	138922.238	142805.279
6	142805.279	133738.697
7	133738.697	111958.129
8	111958.13	78000.

Deslocamentos dos nós

NÓ	Rotação	Translação
1	-1.216657E-2	+0.E+0
2	-1.129421E-2	-1.336001E-2
3	-8.877272E-3	-2.483377E-2
4	-5.285254E-3	-3.289115E-2
5	-9.121532E-4	-3.642953E-2
6	+3.810208E-3	-3.481155E-2
7	+8.446368E-3	-2.788892E-2
8	+1.255248E-2	-1.600933E-2
9	+1.571729E-2	+0.E+0

B.5) Diagrama Carga-Deslocamento

Carregando no botão **Diagrama Carga-Deslocamento** aparece uma nova janela onde é traçada esta curva baseada na rotina de cálculo Newton-Rapson. Nesta janela pode-se alterar o parâmetro de carga máximo λ_{max} e o seu incremento $\Delta\lambda$. Na janela aparece também o deslocamento máximo do grau de liberdade de controle.

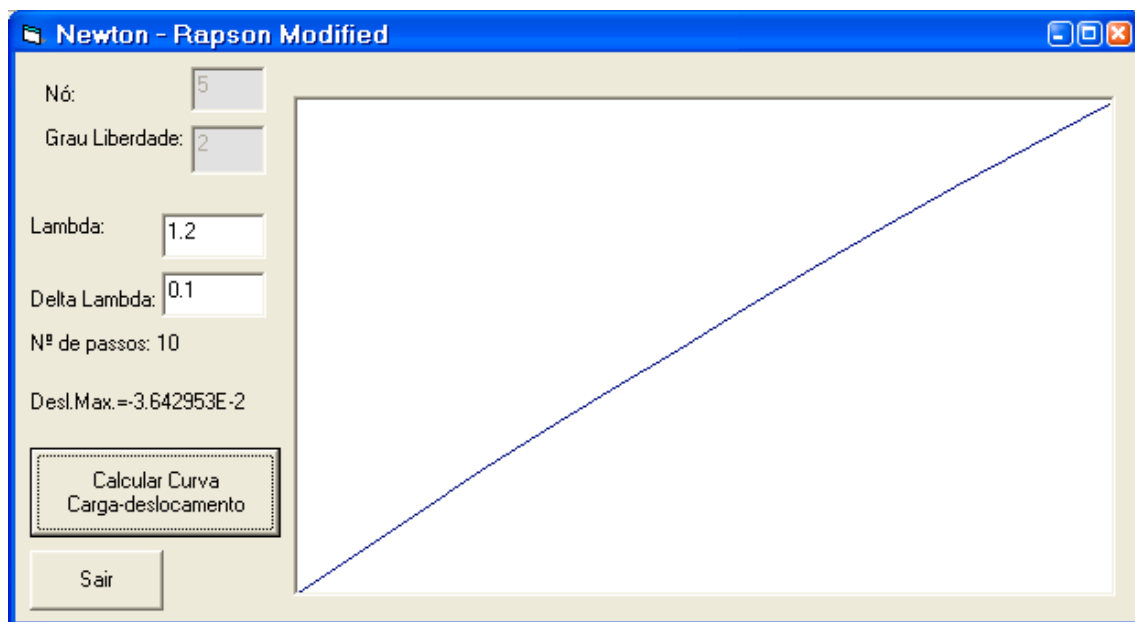
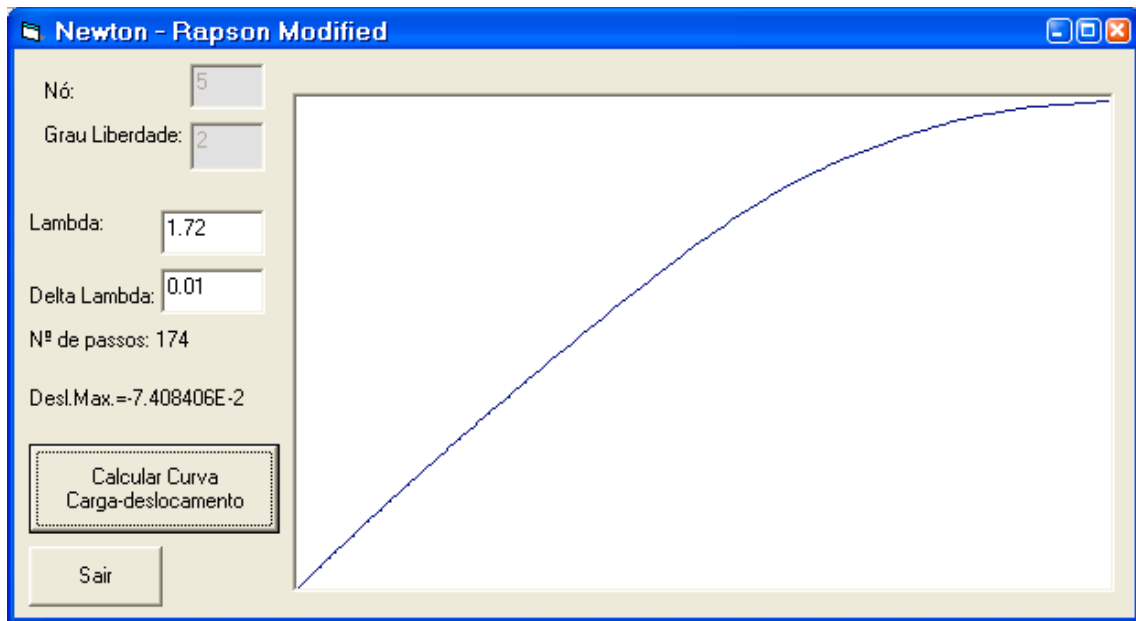


Figura B.6

Podemos ir aumentando λ_{max} (lambda) até se atingir a rotura da barra. Eventualmente poderá aparecer um patamar horizontal, que é assintótico à carga limite. No entanto, de acordo com Crisfield, essa metodologia para determinar a carga limite não é correcta. Mesmo assim explorou-se esta ideia e obteve-se um parâmetro de carga máximo de 1.72 (ver figura B.7) Reduziu-se também o incremento de carga para evitar rotura prematura e para se obter as centésimas do parâmetro de carga.



Verifica-se que para $\lambda_{\max} = 1.73$ surge o aviso da Figura B.8. O deslocamento máximo foi de $-7.977E-2$ e é 7% superior em relação ao parâmetro de carga de 1.72. Parece-me que esta diferença é pequena e por isso a rotura aparenta ser por flexo-compressão e não por encurvadura, embora o gráfico indique que se está próximo do ponto limite (crítico). Uma forma de tirar "dúvidas" é usar um dos métodos Work Control ou Arc-Length para calcular a carga limite e o deslocamento a ela associado..

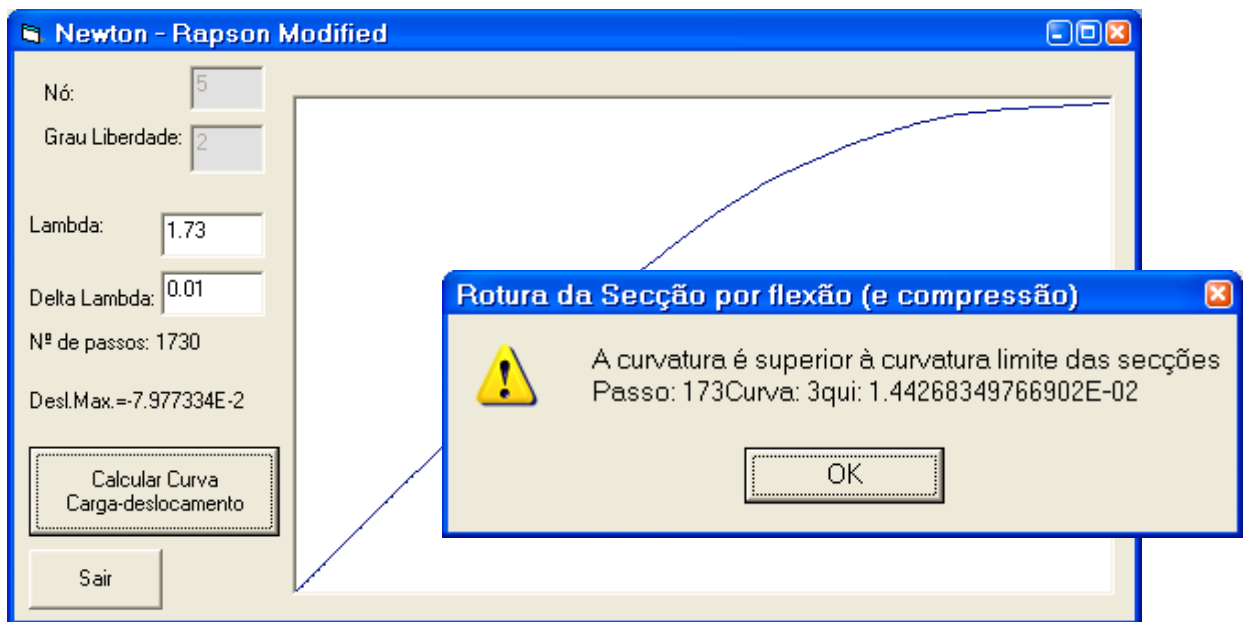


Figura B.8- Aviso para $\lambda_{\max} = 1.73$

Lembra-se que a matriz de rigidez é quase indefinida, pelo que os resultados obtidos (deslocamentos e parâmetro de carga associado) a partir deste ponto, por este método, começam a ser pouco rigorosos.

B.6) Work Control Method

Vamos avaliar o comportamento do Método de Controle de Trabalho aplicado a este problema. Adopte-se o incremento de trabalho de $dW = 350 \text{ N}\cdot\text{m}$ e um número de passos (incrementos) de 8. O resultado é o da Figura B.9 e B.10.

Se durante o processo de cálculo o programa parar num Aviso ou Stop carregue sempre em **OK** ou no botão "play" do VisualBasic "**>**" para prosseguir.

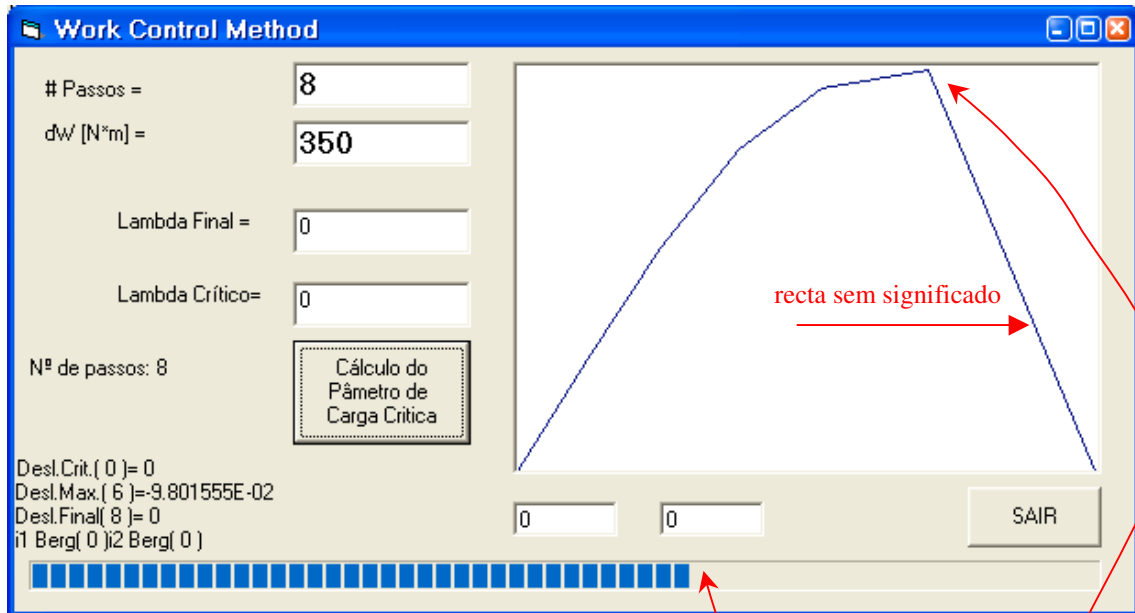


Figura B.9

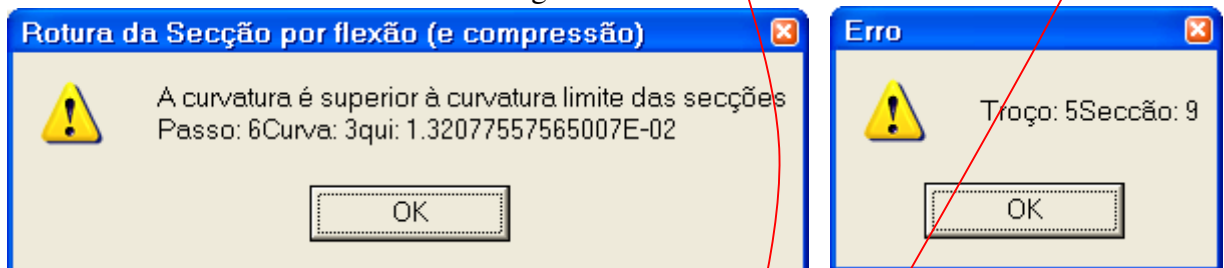


Figura B.10

No decurso desse cálculo surgiu o aviso de rotura por flexo-compressão na secção 9 localizada no troço 5 como mostra a figura B.10. A rotura ocorreu no passo 6 e o programa parou o cálculo no ponto indicado pelo vértice superior da curva. A recta seguinte não tem significado. A barra de progressão não chegou ao fim porque o cálculo parou. O deslocamento máximo obtido (corresponde ao vértice) vale -0.098015 .

Vamos tentar outros valores, "# Passos" = 93 e $dW = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$.

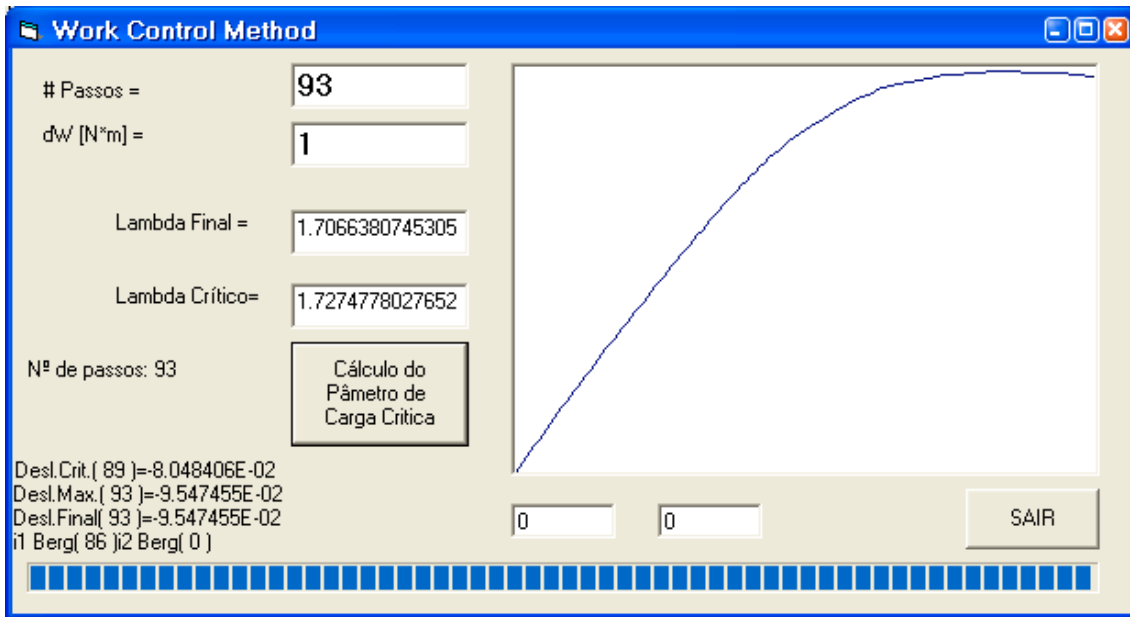


Figura B.11

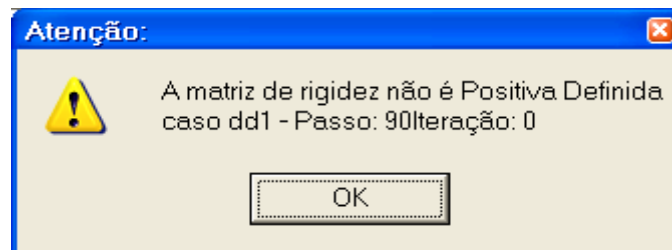


Figura B.12

O programa correu até ao fim sem indicar qualquer erro, mas avisou que a matriz de rigidez se torna positiva não definida a partir do passo 90.

A figura B.11 mostra que:

- (i) o parâmetro de carga limite (crítico) é $\text{Lambda Crítico} = \underline{1.727}$;
- (ii) o deslocamento a ele associado $\text{Desl.Crít}(89) = -8.048\text{E}-2\text{m}$ é obtido no passo 89;
- (iii) que o $\text{Lambda Final} = 1.7066$ ao qual corresponde o deslocamento de $\text{Desl.Final}(93) = -9.547\text{E}-2\text{m}$ é obtido no passo 93;
- (iv) que este deslocamento é 19% superior ao deslocamento crítico.

Fazendo agora, "# Passos" = 94 e $dW = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$, surge o aviso de colapso por flexo-compressão (Figura B.13) e a forma do gráfico carga-deslocamento é o da Figura B.14.

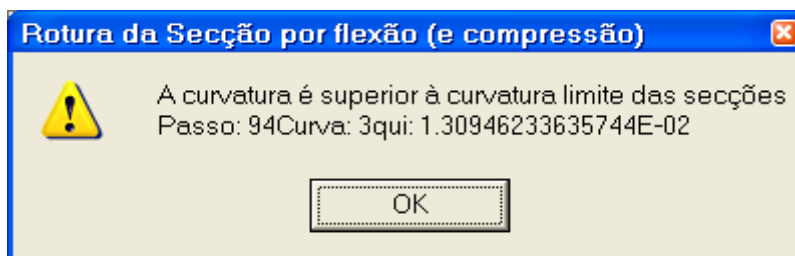


Figura B.13

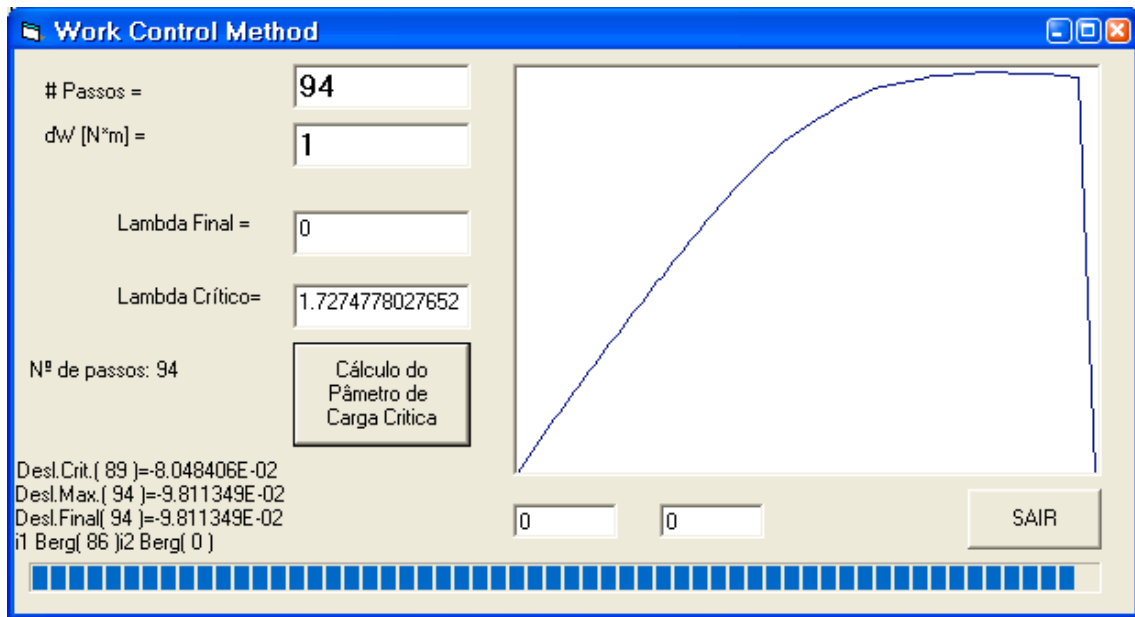


Figura B.14-Instante de rotura no passo 94.

Como a rotura por flexo-compressão ocorre para um deslocamento de Desl.Max= -9.811E-2m após o deslocamento é Desl.Crit.= -8.048E-2m concluímos que a rotura é aparentemente por encurvadura para um parâmetro de carga de **1.727**. É importante referir que estas conclusões dependem do incremento dW pré-estabelecido pelo que é obrigatório fazer um estudo de convergência. Foram então estudados mais casos. Os resultados resumem-se no quadro seguinte:

Quadro B.1-Work Control Method

caso	# Passos	dW	λ_{crit}	Desloc. Crit.	Passo	Desl.Rotura F-C
1	90	1	1.727	-0.0805	93	-0.0958
2	279	0.1	1.730 (+ 0.1%)	-0.0793 (-1.5%)	294	-0.0979 (+2.1%)
3	877	0.01	1.731 (+ 0.05%)	-0.0788 (-0.6%)	934	-0.0983 (+0.4%)

Conclui-se do quadro que, em função do número de passos e inversamente ao incremento de trabalho que:


- (i) a carga crítica tende para 1.731;
- (ii) que os deslocamentos associados à carga crítica decrescem;
- (iii) que os deslocamentos associados à rotura, são sempre superiores às da carga crítica;
- (iv) que os deslocamentos associados à rotura aumentam.

Do exposto pode-se concluir que a carga última corresponde à carga crítica de **1.731**, e por acaso coincide com a carga de rotura por flexo-compressão do Método de Controle de Carga de Newton-Rapson. No entanto o deslocamento crítico no Método de Controle de Trabalho é menor (-0.0788) do que no Método de Newton-Rapson (-0.07977) e por isso o tipo de rotura é detectado para a situação de menor deslocamento (admitindo que não há erros numéricos em nenhum dos métodos) ou seja, a rotura por encurvadura. Como estes deslocamentos estão muito próximos pode-se afirmar, de uma forma pragmática, que rotura é simultânea por encurvadura e flexo-compressão.

B.7) Arc-Length Method

Neste método o utilizador controla o número de passos "# passos" e o comprimento de arco "delta L".

Continuamos a estudar o Problema 2 com as imperfeições a actuar na direcção (-Y).

Neste algoritmo também aparecem muitas instruções "Stop" e Avisos, para que se possa saber como está a decorrer o programa. Deve carregar no botão "play" do VisualBasic "" ou "OK" para continuar.

Por exemplo para "# passos"= 18 e "delta L"=0.01, o primeiro Stop ocorre num ciclo que reduz para metade o incremento do arco pré-estabelecido, porque se verifica, que na iteração 2 do incremento 18, que o acréscimo de parâmetro de carga, $\Delta\lambda_{18,2}$ é superior ao acréscimo de parâmetro de carga do incremento 18, $\Delta\lambda_{18,1}$. No entanto é preciso repetir essa operação seis vezes, até que aquele acontecimento não ocorra. É preciso carregar no "play" seis vezes. Surge um sétimo Stop, para mostrar a comutação do algoritmo de Arc-Length para o algoritmo Controle de Deslocamentos.

Fazendo "# passos"= 170 e "delta L"= 0.001 obtemos o seguinte diagrama:

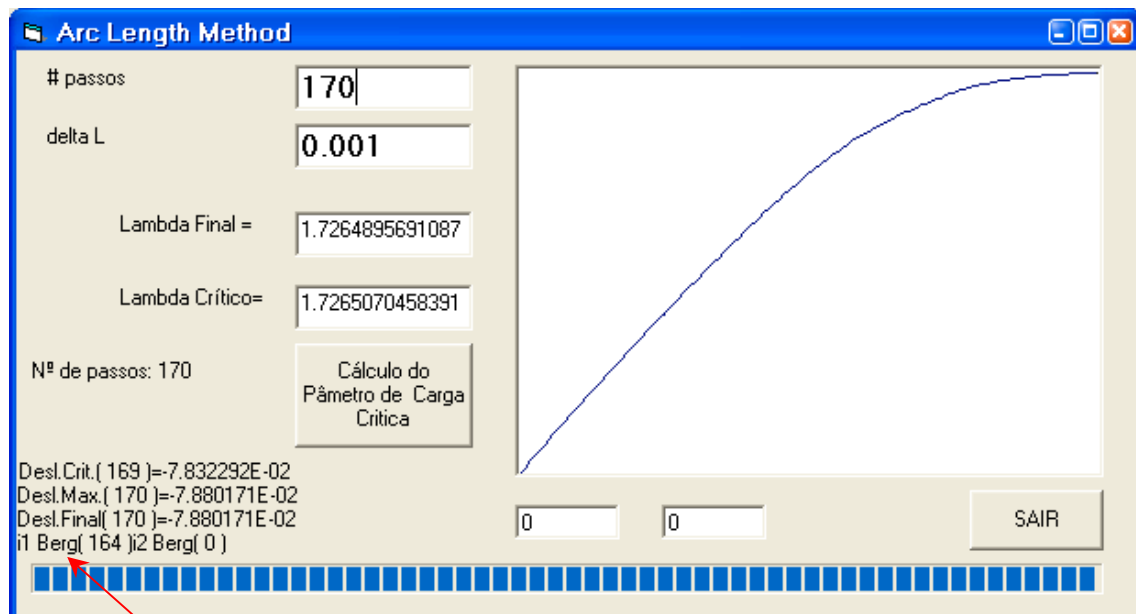


Figura B.15

A comutação do Arc-Length para o Método de Controle de Deslocamentos ocorre no passo 164, controle que é feito pelo parâmetro de rigidez de Bergan, ao qual se associa a variável $i1_Bergan$. Se ocorrer o inverso, no ramo descendente da curva carga-deslocamento, a variável $i2_Bergan$ indicará o passo desse acontecimento.

O incremento de deslocamento adoptado no Método de Controle de Deslocamentos foi -4.787×10^{-4} (só possível ler este valor com o programa aberto na variável "dimposto").

Se incrementar mais um passo ("# passos"= 171 e "delta L"= 0.001) o programa determina a carga crítica, a matriz de rigidez passa a "negativa definida", e o programa

colapsa em virtude dos deslocamentos totais serem excessivos, 0.215m (embora indique rotura por flexo-compressão), ver figura B.16.

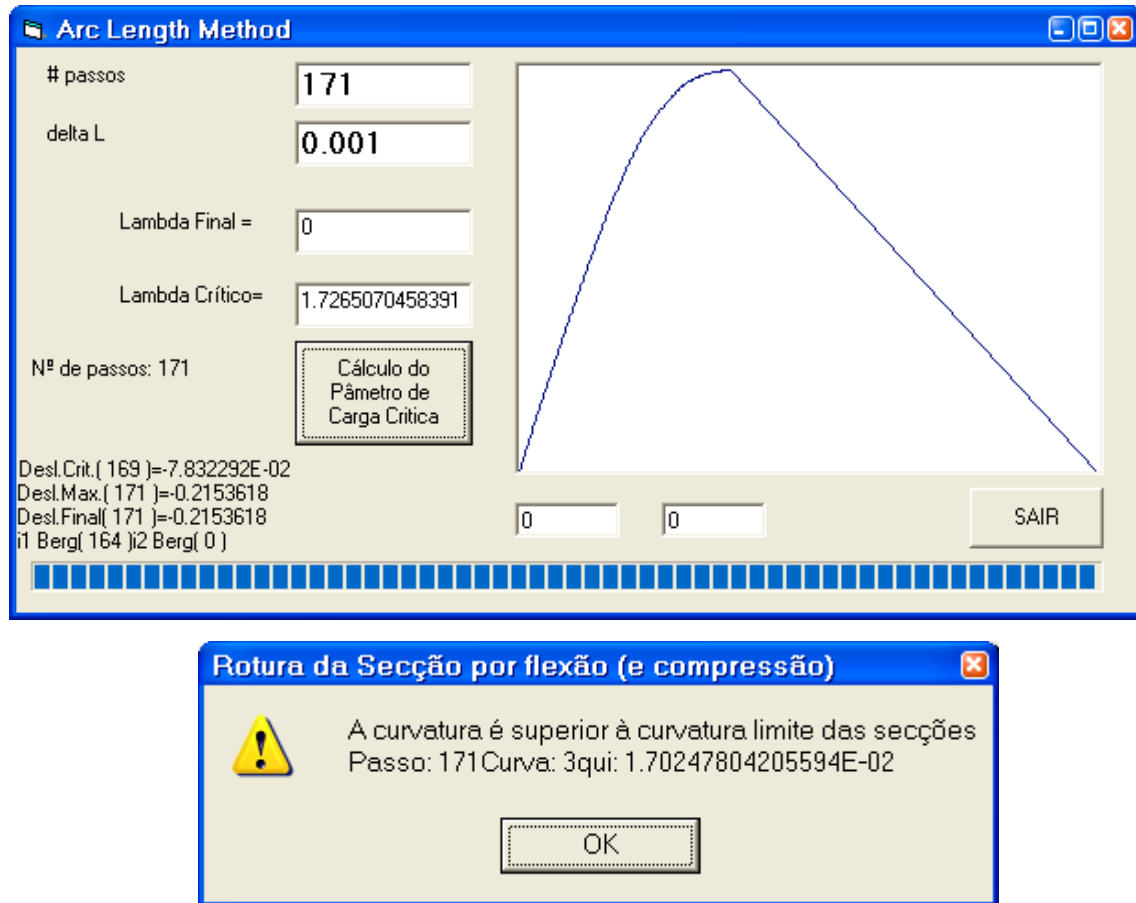


Figura B.16

Correram-se vários casos mostrados no Quadro B.2. O número de passos é escolhido de modo a atingir-se a carga crítica. Com mais um passo, após a carga crítica, o programa apresenta um comportamento brusco, isto é, um aumento excessivo de deslocamentos. O programa torna-se muito lento no caso 4.

Quadro B.2-Arc Length Method

caso	# passos	delta L	λ_{crit}	Desloc. Crit.
1	18	0.01	1.672	-0.07882
2	170	0.001	1.726 (+ 3.2%)	-0.07832 (- 0.6%)
3	1689	0.0001	1.731 (+ 0.28%)	-0.07821 (- 0.1%)
4	16876	0.00001	1.7318 (+ 0.05%)	-0.07819 (- 0.03%)

A carga crítica cresce gradualmente e tende para **1.732**. Os deslocamentos críticos também se reduzem. Adopta-se $\lambda_{crit}=1.732$.

Conclusão Final:

O Quadro resume a análise pelos três métodos:

QuadroB.3- Resumo

Método	Parâmetro de carga	Deslocamento	Tipo colapso
Newton Rapson	$\lambda_{ult} = 1.73$	- 0.07977	flexo-compressão
Work Control	$\lambda_{crit} = 1.731$	- 0.0788	encurvadura
Arc-Length	$\lambda_{crit} = 1.732$	- 0.07819	encurvadura

As diferenças entre os parâmetros de carga dos métodos Work Control e Arc-Length, que detectam adequadamente o fenómeno de encurvadura por flexão, são irrelevantes (0.06%). O mesmo acontece para o Método de Newon-Rapson (0.1%). Assim adopta-se a carga limite de 1.73. Atendendo aos deslocamentos, cujas diferenças são desprezáveis podemos afirmar que o colapso é por encurvadura sendo quase simultâneo com o colapso por flexo-compressão.