

RESUMO

Este estudo tem como objectivo identificar, analisar e compreender em que momentos da resolução de problemas ocorrem dificuldades dos alunos e como se evidenciam, tendo por base tarefas efectuadas na aula de Matemática. O trabalho no terreno foi realizado numa turma de 9º ano, entre Setembro de 2007 e Maio de 2008.

A investigação foi orientada pelas seguintes questões gerais: (1) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na actividade de resolução de problemas, quando esta é implementada de forma continuada na aula de Matemática? (2) De que forma estas dificuldades se revelam e como afectam o desempenho dos alunos?

De acordo com os objectivos do estudo e, simultaneamente, com o quadro teórico da investigação, a metodologia adoptada contemplou a recolha organizada e a análise de dados, assente na leitura e interpretação de informação qualitativa, obtidos de várias fontes: notas pessoais da investigadora relativas à observação participante em cada aula de resolução de problemas; gravações das aulas em registo áudio; questionários aos alunos e produtos da actividade desenvolvida pelos alunos nas aulas.

No trabalho específico, realizado no contexto da resolução de problemas, foram envolvidos os tópicos curriculares: Probabilidades e Estatística, Sistemas de Equações e Proporcionalidade Inversa. Os problemas apresentados foram de formatos e tipos diversos e para cada um dos temas indicados, foram colocados aos alunos em três fases diferentes: 1) como introdução a cada um dos conteúdos e conceitos; 2) durante o trabalho de desenvolvimento e exploração dos conteúdos e 3) como actividade final, de aplicação, consolidação e sistematização.

As diversas conclusões do estudo estão agrupadas pelos seguintes tópicos:

Pontas de um iceberg: As dificuldades apresentadas pelos alunos revelaram-se muito interligadas e há evidência de que são todas cruciais para que a resolução de um problema seja bem sucedida. Desta forma, não é possível identificar uma dificuldade a que se possa chamar *principal*. A resolução de problemas tem muitos detalhes entrelaçados, que conduzem a outros problemas de igual dificuldade, como se se tratasse de um leque que se vai abrindo e revelando novas camadas.

Dificuldades dos alunos ou dificuldade dos problemas? O nível de dificuldade para os alunos foi tanto maior quanto mais os problemas se afastaram dos “problemas de conteúdo” ou dos “problemas de palavras”. O grau de dificuldade diminui e o nível de confiança dos alunos aumenta quanto mais o contexto do problema for explícito e único, as soluções forem únicas e as resoluções assentarem na combinação de algoritmos, procedimentos e conhecimentos aprendidos recentemente.

A resolução de problemas torna o ensino da Matemática mais exigente. Embora nem todos os alunos revelem as mesmas dificuldades, a aprendizagem através da resolução de problemas é muito exigente para alunos que acusam fortemente a dificuldade. Para estes alunos, o recurso à resolução de problemas pode tornar-se num motivo de frustração e ser considerada um “martírio” que os faz preferir, a breve trecho, tudo o que tiver a ver com capacidades mais elementares e desempenhos mais rotineiros.

Os conhecimentos matemáticos não bastam para resolver problemas. A resolução de problemas pressupõe um amadurecimento intelectual, pelo que não devemos ficar surpreendidos quando os alunos manifestam dificuldades. A resolução de situações problemáticas é um processo aberto, sujeita a um ritmo de evolução e desenvolvimento próprio.

A compreensão e a aprendizagem não são lineares na aula de Matemática. A questão de um entendimento único e uniforme, face à resolução de problemas na aula de Matemática, está longe de corresponder à verdade. Pelo contrário, a ambiguidade e as divergências, relativamente a uma suposta “homogeneidade” de significados, são constantes e criam novos problemas, tornando a actividade na aula de Matemática, numa situação que não se resume à formalização e à execução de técnicas.

Os alunos não aprendem todos da mesma forma. A resolução de problemas só poderá ser acompanhada de sucesso se os problemas forem adaptados às capacidades e características dos alunos com que estamos a trabalhar.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Heurísticas; Dificuldades dos alunos; Compreensão e Interpretação em Matemática; Aula de Matemática.

ABSTRACT

The aim of this study is to identify, analyse and understand in which moments of the problem solving process do students' difficulties occur and how they appear, drawing on a range of tasks developed in the mathematics classroom. The fieldwork was accomplished in a 9th grade class, between September of 2007 and May of 2008.

The research was guided by the following general questions: (1) Which are the main difficulties presented by the students in a problem solving activity, when it is implemented in a continuous way in the mathematics classroom? (2) In which way do these difficulties come forward and how do they affect the performance of the students?

In accordance with the aims of this research and, simultaneously, with the theoretical framework, the adopted methodology consisted of an organised collection and analysis of data, based on the reading and interpretation of qualitative information, obtained from various sources: the researcher's field notes concerning participant observation in each problem solving lesson; audio recordings of the lessons; questionnaires answered by the students and the written products of the activities developed by the students in the classes.

In the specific work carried out in the problem solving lessons, the following curriculum topics were involved: Probability and Statistics; Systems of Linear Equations; and Inverse Variation. The problems presented were of various formats and types for each of the mentioned topics, and were given to the students in three different stages: 1) as an introduction to each of the themes and concepts; 2) during the development and exploration of the themes and 3) as a final activity, of application, consolidation and systematization.

The various conclusions of this research are grouped by the following topics:

Iceberg peaks: The difficulties presented by the students turned out to be much interconnected and there is evidence that they are all crucial so that solving a problem can be successful. Therefore, it is not possible to identify a certain difficulty and refer to it as the *main one*. Problem solving has many intertwined details, which leads to other problems of equal difficulty, like a fan that is opening and revealing new layers.

Students' difficulties or the difficulty of the problems? The level of difficulty for the students was greater the more the problem moved away from "content problems" or "word problems". The more the context of the problem was explicit and unique, the solutions unique and based on a combination of algorithms, procedures and knowledge recently learned the more the degree of difficulty decreased and the level of students' confidence increased.

Problem solving makes mathematics more demanding. Although not all of the students revealed the same difficulties, learning through problem solving is very demanding for the students that strongly experience difficulty. For these students, doing problem solving can turn into a cause of frustration and be considered a "torment" that makes them prefer, shortly after, everything that has to do with more basic capacities and more routine procedures.

Mathematical knowledge isn't enough to solve problems. Solving problems entails an intellectual growth; therefore we shouldn't be surprised when students reveal a number of difficulties. Dealing with problematic situations is an open process, subject to a rhythm of evolution and development.

Understanding and learning aren't linear in a mathematics class. The issue of a unique and uniform understanding, in what concerns the work on problems in a mathematics class, is far from being true. On the contrary, the ambiguity and the

divergences, rather than an alleged “homogeneity” of meanings, are constant and create new problems, turning activity in a mathematics class into a situation that stretches beyond formalizing or applying techniques.

Students don’t all learn the same way. Problem solving can only go together with success if the problems are adapted to the capacities and characteristics of the students with whom we are working in the class.

Key-words: Problem solving; Heuristics; Student’s difficulties; Understanding and interpreting in mathematics; Mathematics class.

Agradecimentos

Aos meus filhos, Márcio e Alexandre. Ao Márcio, que nasceu no ano curricular do mestrado e se portou bem para eu poder estudar e trabalhar e ao Alexandre por ter a compreensão possível de uma criança de 5 anos.

Ao meu marido, Mário, que acreditou em mim, mesmo quando eu não acreditava, que não me deixou desistir e cuidou de mim e dos miúdos. Também pelo seu apoio, desde o início, e compreensão.

À Professora Doutora Susana Carreira que, ao orientar este estudo, me deu o seu incentivo e com quem é muito agradável discutir pontos de vista, pela forma profissional com que me orientou, pelas palavras de encorajamento e por ter facultado grande parte da bibliografia usada.

Aos meus pais, pelo apoio que sempre me deram em todas as minhas aventuras.

À minha amiga e colega Verónica pela estima que me dedica, pelas sugestões que deu, pela colaboração na leitura e revisão deste projecto, pelos jantares que fez e por ter ajudado a cuidar dos miúdos.

Índice

RESUMO.....	i
ABSTRACT	iii
AGRADECIMENTOS.....	v
CAPÍTULO I - MOTIVAÇÕES E PROBLEMA.....	1
O FOCO DA INVESTIGAÇÃO	14
<i>Problema e questões de investigação</i>	<i>14</i>
<i>Cenário pedagógico</i>	<i>16</i>
CAPÍTULO II - REFERENCIAL TEÓRICO.....	19
CONCEITO DE PROBLEMA.....	20
TIPOS DE PROBLEMAS.....	25
PROCESSOS DE PENSAMENTO E ENSINO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	35
<i>Modelos de resolução de problemas</i>	<i>36</i>
<i>Factores presentes na resolução de problemas</i>	<i>54</i>
CONCEPÇÕES DOS ALUNOS ACERCA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	56
O PAPEL DO PROFESSOR NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	60
<i>A questão da avaliação</i>	<i>71</i>
DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	76
CAPÍTULO III - METODOLOGIA	93
OPÇÕES METODOLÓGICAS	94
CARACTERIZAÇÃO DA TURMA	100
O PROJECTO CURRICULAR E O TRABALHO DE CAMPO	102
<i>Processos de recolha de dados</i>	<i>108</i>
<i>Análise de dados</i>	<i>110</i>
CAPÍTULO IV - DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA	113
<i>Probabilidades – 1ª Aula</i>	<i>114</i>
<i>Probabilidades – 2ª Aula</i>	<i>118</i>
<i>Probabilidades – 3ª Aula</i>	<i>131</i>
<i>Sistemas de Equações – 1ª Aula</i>	<i>143</i>
<i>Sistemas de Equações – 2ª Aula</i>	<i>150</i>
<i>Sistemas de Equações – 3ª Aula</i>	<i>155</i>
<i>Proporcionalidade Inversa – 1ª Aula</i>	<i>161</i>
<i>Proporcionalidade Inversa – 2ª Aula</i>	<i>167</i>
<i>Um problema para trabalho de casa</i>	<i>170</i>

<i>Análise e interpretação dos dados recolhidos no questionário</i>	175
<i>Um teste de avaliação</i>	177
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES	193
DIFICULDADES DOS ALUNOS: PONTAS DE UM ICEBERG	194
DIFICULDADES DOS ALUNOS OU DIFICULDADE DOS PROBLEMAS?	203
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TORNA O ENSINO DA MATEMÁTICA MAIS EXIGENTE	206
OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS NÃO BASTAM PARA RESOLVER PROBLEMAS	211
A COMPREENSÃO E A APRENDIZAGEM NÃO SÃO LINEARES NA AULA DE MATEMÁTICA	214
A COMPLEXIDADE DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	216
A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O CONTEXTO SOCIAL	219
CONSIDERAÇÕES FINAIS	224
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	227
ANEXOS	237
<i>Anexo 1</i>	239
<i>Anexo 2</i>	242
<i>Anexo 3</i>	245
<i>Anexo 4</i>	248
<i>Anexo 5</i>	249
<i>Anexo 6</i>	250
<i>Anexo 7</i>	252
<i>Anexo 8</i>	254
<i>Anexo 9</i>	255
<i>Anexo 10</i>	256
<i>Anexo 11</i>	259

Índice de figuras

Fig. 1. O que é um problema, adaptado de esquema de Poggioli (2001)	24
Fig. 2. Os 4 primeiros termos da sucessão dos quadrados dos números naturais (representados geometricamente)	45
Fig. 3. Ilustração dos 4 primeiros termos da sequência 0, 1, 3, 6, 10.....	45
Fig. 4. Ilustração geométrica da obtenção do termo geral da sequência	46
Fig. 5. O ciclo da matematização (PISA, 2003c, p. 21)	53
Fig. 6. O ciclo da modelação matemática (NCTM, 1994, p. 165).	71
Fig. 7. Linguagem oral e escrita de alunos e professores (Pimm, 1987, p. 15).....	78
Fig. 8. Aplicação incorrecta e correcta de heurísticas de verificação (adaptado de Cruz & Carrillo, 2004, p.112).	92
Fig. 9. Classificações dos alunos da turma “Z” a Matemática, no 8º ano	102
Fig. 10. Exemplo de um registo “colado à situação”, ignorando o que é pedido	119
Fig. 11. Exemplo de um registo focado nos objectivos do problema.....	119
Fig. 12. Exemplo de um registo esquemático dos percursos possíveis	120
Fig. 13. Exemplo de um comentário sobre a presença da representação.....	120
Fig. 14. Exemplo de um comentário sobre a necessidade da busca exaustiva	121
Fig. 15. Exemplo ilustrativo da dificuldade de compreensão do problema	122
Fig. 16. Resposta de um grupo que modifica o sentido da questão dada	127
Fig. 17. Resposta de um grupo que mostra dificuldade na expressão do raciocínio....	127
Fig. 18. Tabela de dupla entrada que mostra a anulação dos cartões de uma só cor....	135
Fig. 19. Tabela que mostra a anulação dos cartões de uma só cor e que não repete casos	135
Fig. 20. Comentário de um grupo acerca da dificuldade encontrada no problema	137
Fig. 21. Resposta de um grupo que mostra dificuldade na comunicação matemática .	140
Fig. 22. O grupo toma como variável o número de pilhas (de pratos e de copos), pressupondo que todas têm o mesmo número de objectos.....	146
Fig. 23. A formulação de uma hipótese para justificar as peças não usadas	148
Fig. 24. A formulação de várias hipóteses explicativas e a ideia de que haverá outras	148
Fig. 25. A formulação de duas justificações para as peças não usadas	148
Fig. 26. A condição de não terem faltado convidados é ignorada.....	149

Fig. 27. Um exemplo de interpretação errada da situação descrita	149
Fig. 28. Exemplo do que os alunos descrevem como estratégia, parafraseando procedimentos algébricos	152
Fig. 29. Exemplo da dificuldade dos alunos em perceber como funciona um parâmetro	153
Fig. 30. A interpretação é referida como uma dificuldade global	159
Fig. 31. A procura de uma estratégia é referida como uma dificuldade global.....	159
Fig. 32. Um sistema indeterminado não parece ter significado concreto para os alunos.....	161
Fig. 33 e 34. Dois exemplos da verificação independente de cada uma das condições	165
Fig. 35. O gosto pela resolução dos problemas está associado à compreensão	166
Fig. 36. Os alunos apercebem-se da diferença que a actividade trouxe	167
Fig. 37. Os alunos tomam a iniciativa de usar uma forma de representação.....	168
Fig. 38. Uma tentativa de resposta completa, que resulta numa resposta “atabalhoada”.....	169
Fig. 39. Um problema de probabilidades com tabela de dupla entrada.....	171
Fig. 40. Um problema de probabilidades com lançamento de dados	171
Fig. 41. Um problema para resolver por meio de um sistema.....	172
Fig. 42. Um problema “artificial”.....	172
Fig. 43. Um sistema de equações e uma solução desprovidos de sentido.....	173
Fig. 44. O problema que serviu de modelo para a situação das horas extraordinárias	174
Fig. 45 e 46. Respostas das Cátia e da Rita recorrendo à realidade do seu dia-a-dia	179
Fig. 47. Respostas da Cátia às dificuldades que o problema apresentou	179
Fig. 48. Dificuldades e hesitações na resolução de um problema	180
Fig. 49. Uso inadequado de uma estratégia para a resolução do problema.....	180
Fig. 50. Principal dificuldade diagnosticada por um aluno quando se depara com um problema.....	181
Fig. 51. Resposta inadequada de uma aluna.....	181
Fig. 52. Resposta que revela desconhecimento do contexto do problema	182

Fig. 53. Resposta de uma aluna que tem uma interpretação parcialmente correcta do problema	182
Fig. 54 e 55. Resposta sem coerência matemática e a justificação da mesma	183
Fig. 56. Resposta usando uma informação fornecida no enunciado para resolver uma determinada alínea, sem relevância	184
Fig. 57. Resposta de um aluno induzida pelos meus comentários.	184
Fig. 58. Resposta desesperada da Cátia, reveladora de alguma desconcentração	185
Fig. 59. A justificação da Cátia para a resposta anterior	185
Fig. 60 e 61. Duas traduções incorrectas para sistema de equações.....	186
Fig. 62. Justificação de uma aluna para as dificuldades de tradução em linguagem matemática.....	186
Fig. 63. Incorreção na tradução do termo quádruplo	186
Fig. 64, 65 e 66. Várias incorrecções dos alunos na formalização do sistema.....	187
Fig. 67 e 68. Tentativas de resolução do sistema pelo método de tentativa e erro.....	188
Fig. 69 e 70. Explicações dos alunos para as suas dificuldades, na resolução de problemas, associados aos sistemas de equações	188
Fig. 71 e 72. Dificuldades associadas à tradução em sistemas de equações	189
Fig. 73 e 74. Identificação das possíveis causas para as dificuldades apontadas anteriormente	190
Fig. 75. Resolução do problema usando um método exaustivo	190
Fig. 76, 77 e 78. Depoimentos de alunos que exprimem limitações pessoais.....	191
Fig. 79. Modelo do processo de resolução de problemas, proposto por Pativisan & Niess (2007).....	201

Índice de tabelas

Tabela 1. Classificação de problemas, segundo Borasi (1986)	32
Tabela 2. Tipologia de problemas, segundo Palhares (1997).....	33
Tabela 3. Classificação de problemas, proposta por Pehkonen (1997), tendo em conta a situação de partida e o objectivo.....	34
Tabela 5. Facetas de vários tipos de resolução de problemas (PISA, 2003a, p. 30)	50
Tabela 6. Modelos de ensino de resolução de problemas.....	52
Tabela 7. Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (Ernest, 1996, p 32, citado por Brocardo, 2001, p. 122)	61
Tabela 8. Comparação entre as abordagens “Basic-skill Approach” e “Meaning Approach” (Chapman, 1999, p. 40).....	65
Tabela 9. Quadro comparativo dos diferentes tipos de tarefas ligadas à resolução de problemas (Ponte, 2004, p. 33).....	68
Tabela 10. Escolaridade dos Encarregados de Educação da turma “Z”	101
Tabela 11. Calendarização das actividades realizadas e desenho do estudo	103
Tabela 12. Calendarização das aulas de resolução de problemas (anexos 1 a 8)	105
Tabela 13. Calendarização dos instrumentos de avaliação (anexos 9 a 11)	107
Tabela 14. Fontes e formas de recolha de dados utilizadas no estudo	110
Tabela 15. Tipologia de dificuldades na resolução de problemas	217
Tabela 16. Possíveis localizações das dificuldades dos alunos	218

Capítulo I

Motivações e Problema

Contextualização e Intenções do Estudo

A Matemática rodeia-nos, nas mais pequenas coisas do quotidiano. Para além de intervir em muitas das operações simples que realizamos no dia-a-dia, a Matemática mune o ser humano de recursos válidos para a resolução de uma grande diversidade de problemas.

“A Matemática não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objectos e relações abstractas. É, para além disso, uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizarmos” (ME, 2007, p. 2).

O grande desafio actual da Matemática escolar consiste em transmitir a sua importância e o gosto pela sua exploração às novas gerações.

O ensino da disciplina de Matemática tem sofrido diversas alterações nas últimas décadas. Se em determinada fase foi dada a primazia à resolução de exercícios para a mecanização de procedimentos de cálculo e para o treino de técnicas matemáticas, no actual currículo é atribuída uma importância fundamental à resolução de problemas. Ao consultarmos as competências essenciais propostas para a Matemática no Ensino Básico, podemos ler:

“Todas as crianças e jovens devem ter a possibilidade de:

- *Contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza.*
- *Desenvolver a sua capacidade de usar a Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para racionar e comunicar, assim como a auto-confiança para fazê-lo.” (ME, 1999, p.1)*

Mais do que cálculo, a Matemática é um instrumento que nos permite resolver os mais variados problemas, quer matemáticos, quer exteriores à própria Matemática. Sistematizando raciocínios, ganhamos normalmente em eficácia, até na realização de tarefas quotidianas, algumas das quais podem ser decisivas enquanto formas de actuação e de participação no mundo e na sociedade.

Interessa-nos formar cidadãos competentes para analisar possibilidades e riscos, vantagens e desvantagens, ganhos e prejuízos em questões como a escolha de um tarifário, de um crédito, de uma promoção de um produto ou, ainda, para compreender e interpretar gráficos, sondagens e medidas estatísticas; lidar com percentagens, taxas de variação, modelos matemáticos, relações de dependência entre variáveis, padrões numéricos, etc.

No presente, os Exames Nacionais são um mecanismo de regulação do sistema educativo que indicam se os alunos adquiriram as competências que lhes poderão vir a ser úteis na vida adulta. Sem retirar importância ao cálculo, devemos-nos questionar sobre o papel que este deve assumir na preparação matemática dos jovens.

Com referi anteriormente, no início dos anos 90 surge a necessidade de mudar o ensino da Matemática, sobretudo baseado na resolução de exercícios de cálculo rotineiros. A mudança curricular, além da alteração dos conteúdos, vem alterar a forma como esta é ensinada. É introduzida a experimentação matemática, dando-se ênfase a

diversos tipos de actividades: resolução e formulação de problemas; desenvolvimento de modelos matemáticos; actividades de exploração, investigação e descoberta; formulação de conjecturas; discussão e comunicação; argumentação e prova; construção de conceitos.

Como consequência da reforma curricular, a avaliação tem de ser consonante com as alterações introduzidas. Nos exames nacionais, antes desta reforma, podemos ler a advertência “*indique todos os cálculos que tiver de efectuar*”. Por sua vez, as questões cingem-se à execução de procedimentos: “*resolva a equação*”, “*calcule*”, “*determine*”. No presente, os exames nacionais de final de ciclo, contêm questões de escolha múltipla que não exigem a apresentação de cálculos; questões que pretendem avaliar a capacidade de comunicar em Matemática, em que é necessário elaborar um pequeno texto que justifique a opção tomada; enunciados por vezes longos, recriando situações problemáticas que combinam linguagem corrente e matemática. Pretende-se avaliar, não só até que ponto o aluno sabe executar um determinado procedimento, mas também a sua capacidade de aplicar a Matemática, interpretar e utilizar modelos e conceitos matemáticos.

No currículo anterior, os professores leccionavam a disciplina de Matemática com a preocupação de que os seus alunos atingissem a mecanização de um conjunto de procedimentos e a aplicação de métodos uniformizados para a resolução de questões bastante tipificadas. O exame de 9º ano é agora obrigatório e constitui um dos elementos de aferição das aprendizagens e dos resultados escolares. Se antes as actividades a que os alunos eram sujeitos dependiam de cada professor, actualmente aquilo que se perspectiva como importante e fundamental para que os alunos sejam bem sucedidos nos Exames Nacionais, obriga-nos a repensar a forma como leccionamos. Em particular, percebemos cada vez melhor que as nossas aulas não devem estar

direccionadas para a resolução de exercícios, por si só, mas antes, têm que preparar os alunos para a resolução de problemas num dado contexto.

A minha preocupação, enquanto professora de Matemática do 3º ciclo do ensino básico, é proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que lhes permitam adquirir as competências matemáticas fundamentais. Estas experiências deverão ser diversificadas e incluir resolução de problemas (compreender problemas em contextos matemáticos, adequar e desenvolver estratégias, validar soluções, formular conclusões), actividades de investigação, realização de projectos, comunicação matemática (interpretar enunciados, utilizar a linguagem matemática, descrever e explicar estratégias e procedimentos matemáticos, argumentar e propor justificações), exploração de conexões, utilização das tecnologias e outros materiais. Em suma, pretendo, na minha prática docente, dotar os alunos de recursos que os ajudem a responder de forma eficaz e serena às questões do Exame Nacional de Matemática do 9º ano do 3º Ciclo do Ensino Básico.

O objectivo de melhorar os resultados dos alunos nas avaliações externas a Matemática é comum a muitos professores e actualmente partilhado, de forma explícita, pelo Ministério da Educação. Em 2006/2007, “decorrente da reflexão sobre os resultados dos exames de Matemática do 9º ano” (ME, 2006, citado por Portal do Governo, 2008), o Ministério da Educação traçou um plano de acção a nível nacional com vista a melhorar o ensino da disciplina. Assim, o Plano de Acção para a Matemática assume a “responsabilidade pela criação de condições inovadoras para que as escolas possam desempenhar um papel preponderante neste desafio, no âmbito do exercício da sua autonomia” (ME, 2006, citado por Portal do Governo, 2008). A primeira das acções deste plano implica a elaboração de planos de escola de combate ao insucesso na Matemática. Trata-se de uma medida que subentende um diagnóstico e

uma análise tão profunda quanto possível dos resultados dos alunos em Matemática, mas que tem igualmente um cunho de intervenção, em particular, pela construção de estratégias, propostas e materiais voltados para a melhoria dos resultados, inclusive os dos exames nacionais de final de ciclo.

O actual contexto está nitidamente em consonância com as minhas motivações para o desenvolvimento desta investigação, uma vez que urge encontrar, não apenas as causas das dificuldades dos alunos, mas também a forma como se apresentam no dia-a-dia da aula de Matemática e como se podem ultrapassar. No que se refere ao foco do trabalho que me proponho desenvolver, face à crescente importância de desenvolver competências na aula de Matemática que contribuam para um melhor desempenho na escola (nomeadamente, na avaliação de final de ciclo) e na vida, pretendo proporcionar aos alunos experiências que lhes possam vir a ser úteis no âmbito da resolução de problemas, do desenvolvimento de estratégias, da compreensão e interpretação de situações problemáticas.

Na minha opinião, o grande desafio do professor de Matemática que procura preparar os seus alunos para o exame de final de ciclo passa por uma adequação das suas práticas lectivas, de modo a integrar e articular o trabalho sobre vários tipos de questões que hoje se esperam caber neste exame.

Aparecem contempladas questões de resposta directa, em que apenas é necessário aplicar um determinado procedimento, como as que se seguem:

“Considera a equação $x + (x - 1)^2 = 3$. Resolve-a, utilizando a fórmula resolvente”. (in Exame Nacional de Matemática, 1ª chamada, 2007)

“Escreve um número irracional entre 4 e 5”. (in Exame Nacional de Matemática, 1ª chamada, 2005)

Mas a prova de exame tem, igualmente, incluído problemas, não menos importantes e relacionados com a vida real, que apelam ao raciocínio e à interpretação de situações problemáticas, como se ilustra, em seguida:

“Durante a realização de uma campanha sobre Segurança Rodoviária, três canais de televisão emitiram o mesmo programa sobre esse tema. No 1º dia de campanha, o programa foi emitido nos três canais. Do 1º ao 180º dia de campanha, o programa foi repetido de 9 em 9 dias, no canal A, de 18 em 18 dias, no canal B e de 24 em 24 dias, no canal C. Do 1º ao 180º dia de campanha, em que dias é que coincidiu a emissão deste programa nos três canais? Mostra como obtiveste a tua resposta.” (in Exame Nacional de Matemática, 1ª chamada, 2007)

“O pai da Ana foi contratado para vender um modelo de computadores, cujo preço unitário é de 600 euros. Por mês ele recebe uma quantia fixa de 200 euros. Para além deste valor, recebe ainda, por cada computador que vender, 12% do seu preço. Qual é o número mínimo de computadores que ele terá de vender, num mês, para receber mais do que 1500 euros, nesse mês? Apresenta todos os cálculos que tiveres efectuados.” (in Exame Nacional de Matemática, 2ª chamada, 2005)

O exame tem a intenção de actuar como regulador das competências adquiridas pelos alunos e, de certa forma, das práticas dos professores. Interessa, por isso, preparar os alunos para este momento de avaliação, mesmo que este não seja o único nem seja, só por si, decisivo. Se o professor preparar os alunos para resolver situações problemáticas do mesmo tipo das que constam nos exames, familiarizando-os com a sua estrutura e natureza, é razoável supor que estes irão encará-lo com mais confiança e que as suas hipóteses de sucesso serão maiores.

Se olharmos para os resultados escolares, desde há vários anos, podemos concluir, sem margem para dúvidas, que a disciplina de Matemática é marcada por elevados níveis de insucesso. Na base deste insucesso estarão decerto inúmeros factores que merecem uma cuidada reflexão.

Ao analisarmos esta problemática numa perspectiva sócio-cultural, percebemos que as expectativas em relação à disciplina têm sido e continuam a ser pouco elevadas. Quando falamos com os encarregados de educação dos nossos alunos, ouvimos frequentemente: “Eu nunca fui bom a Matemática, e o meu filho também nunca foi”. Neste discurso, existe ainda uma atitude de condescendência e de quase fatalismo perante as dificuldades do aluno. Demasiadas vezes, não se encontram a intenção e a determinação de levar o aluno a ter uma atitude activa de combate às suas limitações, dificuldades, dúvidas, fraquezas e obstáculos.

Por outro lado, o facto de vivermos numa sociedade que é fundamentalmente de consumo imediato leva os nossos alunos a não quererem perder tempo a pensar, ou sequer a imaginar, formas de construir o seu saber. Raciocinar implica esforço mas também requer uma aprendizagem. Por não ser uma actividade elementar, encontra resistência, principalmente, quando os jovens não se sentem seguros da sua própria capacidade de pensar matematicamente.

Podemos também abordar a questão do insucesso numa perspectiva mais centrada na própria escola. A constituição das turmas não é feita segundo os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos. O professor vê-se confrontado, nas suas aulas, com alunos que mostram vários níveis de desempenho na aquisição, consolidação e aplicação de conhecimentos. Não é fácil planificar uma aula que vá de encontro às necessidades deste leque tão alargado e multifacetado de alunos. Nem todos desenvolvemos as mesmas capacidades da mesma forma, o que leva o professor a ter dificuldades em apoiar cada indivíduo nas suas reais necessidades, dentro da heterogeneidade da turma.

Outro factor a ter em conta é a escassez de recursos. Continua a ser real, em muitas escolas, a falta de instrumentos tecnológicos, como calculadoras científicas, software informático específico para a disciplina ou até a falta de salas ou laboratórios equipados com computadores para as aulas de Matemática. Pese embora a tentativa recente de equipar as escolas com alguns materiais e de colocar computadores portáteis que possam ser usados nas aulas, a disponibilidade de meios é ainda muito insuficiente para permitir uma verdadeira diversificação das estratégias de ensino por parte dos professores.

Devemos, por outro lado, ter em atenção o extenso programa do Ensino Básico. Defrontamo-nos com um elevado número de disciplinas, em que os professores (como é recomendado) tentam diversificar as estratégias de ensino-aprendizagem e as formas de avaliação. Aos alunos são propostos trabalhos individuais e de grupo, que se desdobram e multiplicam, testes de avaliação, apresentações orais, entre outros, que geram alguma dispersão e levam o aluno a interrogar-se sobre quais são realmente importantes e fundamentais. Em certa medida, o aluno quase se sente obrigado a escolher entre as várias disciplinas e, quando o faz, descarta por vezes a Matemática, por ser a que se aparenta como mais trabalhosa e mais difícil. Há, contudo, aqueles alunos que são

empenhados e esforçados e que tentam responder e cumprir em todas as disciplinas, esgotando-se ao longo dos períodos do ano lectivo.

O próprio currículo de Matemática não é fácil de gerir, de adaptar e de implementar. Baseado num ensino em espiral em que, todos os anos, se volta a um determinado assunto para acrescentar algo mais que não foi trabalhado anteriormente, condiciona os alunos e os professores. O professor, mesmo depois de ter abordado o tema em anos anteriores, acaba por ter de o retomar quase como se fosse a primeira vez que é apresentado e isto leva a que os alunos não aprofundem os temas em toda a sua plenitude. Muitas vezes, quando os temas são introduzidos, não chegam a ser suficientemente desenvolvidos, comprometendo-se depois as conexões (que mais tarde o aluno não consegue estabelecer) e que poderiam ser realizadas de forma natural, caso o desenvolvimento do tema fosse realizado de forma mais ampla.

Somando-se a estes factores, assistimos ao aumento da carga horária escolar, que se por um lado deixa os Encarregados de Educação descansados com a ocupação das crianças e jovens, por outro, resulta em pouco tempo livre dos alunos para estudar, explorar novas situações, realizar trabalhos de casa e cimentar aprendizagens.

Para finalizar, podemos ainda falar da formação dos professores de Matemática, em geral. Essa formação, como se nota pelos receios e pelas resistências de muitos docentes, nem sempre terá ido ao encontro das competências necessárias, nem terá sido suficiente para levar os professores a ensinar Matemática na perspectiva da resolução de problemas.

A minha prática pedagógica tem-me levado a procurar a melhor forma de ajudar os meus alunos a despertar para o gosto, trabalho e raciocínio em Matemática. Pergunto-me como devo mostrar-lhes que a compreensão e a capacidade de resolução dos problemas nas aulas de Matemática os poderá ajudar ao longo das suas vidas. Julgo que

é imperativo mudar as práticas lectivas, fazendo aulas de resolução de problemas com os nossos alunos, usando actividades e estratégias diversificadas. Proporcionar-lhes experiências de aprendizagem ricas é o caminho que podemos adoptar para os munir de recursos intelectuais que lhes permitam uma atitude dinâmica e confiante quando confrontados com situações novas.

É, portanto, fundamental percebermos onde estão as dificuldades dos alunos para os poderemos apoiar na aquisição das competências necessárias ao trabalho em resolução de problemas. A resolução de problemas nas aulas tornou-se incontornável para garantir o sucesso na disciplina pois, para além de ser um elemento estimulador da aprendizagem, pode ajudar os alunos a consolidar e alargar os seus conhecimentos. Ao abordar correctamente uma situação problemática, o aluno tem de efectuar uma análise precisa da mesma e estabelecer conexões entre os diversos saberes/conhecimentos de que dispõe e reflectir de forma crítica em relação aos resultados encontrados.

Os problemas propostos devem ser, essencialmente, relacionados com situações quotidianas, de preferência ligadas às vivências dos alunos, para que seja mais forte a sua motivação para a resolução dos mesmos. Assim, espera-se que seja mais fácil a elaboração de conjecturas, a análise dos dados, a discussão das ideias e dos conceitos envolvidos na resolução das questões problemáticas, visto que se pode apelar à intuição e ao conhecimento prévio dos alunos para a compreensão das mesmas. É possível que, partindo de um problema com um contexto familiar para o aluno, este tenha menos dificuldades em interpretá-lo e, como tal, lhe seja mais fácil chegar à solução. Deste modo, é também favorecido o desenvolvimento da autoconfiança dos alunos, pois estes são desafiados a pensar e a explorar situações que têm significado e relevância para eles.

Tendo em conta os resultados escolares pouco satisfatórios, na disciplina de Matemática, a que vamos assistindo ao longo dos anos, decidi fazer a reflexão anterior sobre as suas eventuais causas. Encontrei vários factores e decerto outros haverão: baixas expectativas dos alunos e Encarregados de Educação em relação à Matemática; falta de motivação em produzir raciocínios matemáticos complexos; turmas heterogéneas em que os alunos apresentam diferentes ritmos de aprendizagem; falta de recursos nas escolas; um elevado número de disciplinas do 3º Ciclo que se traduz numa elevada carga horária e num acréscimo de solicitações de trabalho; um programa de Matemática muitas vezes longo e com temas dispersos; formação dos professores, por vezes insuficiente, no que diz respeito à resolução de problemas como actividade a desenvolver na sala de aula.

Todo este contexto foi fundamental para escolha do tema a estudar neste trabalho. Desde a introdução do novo programa que o ensino da Matemática e as recomendações curriculares dão ênfase à resolução de problemas. Mais do que uma sugestão metodológica, a resolução de problemas é de carácter obrigatório e é tida como uma das capacidades transversais, como se pode constatar no programa de Matemática do 3º ciclo:

A resolução de problemas é uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático.

(ME, 2007, p.6)

Todos estes factores são, evidentemente, de grande complexidade mas reforçam a minha intenção de mostrar que a Matemática pode proporcionar experiências novas. Ela pode ser encarada como um desafio, mas é necessário que os alunos se sintam

motivados e com um sentimento de sucesso quando resolvem questões problemáticas. Pretendo, por isso, fomentar a curiosidade e a capacidade de raciocinar matematicamente dos estudantes do 9º ano de escolaridade, propondo-lhes diversos tipos de problemas nas aulas de Matemática, desde geométricos a numéricos. Proponho-me incentivar a resolução de situações problemáticas com recurso a uma ou mais estratégias, sem ter que passar necessariamente por um procedimento mecanizado ou por um determinado algoritmo matemático. O meu interesse primordial, numa investigação intimamente ligada à acção e à transformação, no âmbito da aula de Matemática e do currículo do 9º ano de escolaridade, é identificar e explicar as dificuldades com que os alunos se deparam, para as minimizar ou tentar atenuá-las, e dotar os alunos de ferramentas que lhes permitam, no presente e no futuro, encarar positivamente a resolução de diversos tipos de problemas – matemáticos e não só.

A importância da resolução de problemas na aula de Matemática, não é um tema recente. Nos anos oitenta, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) indicou a resolução de problemas como “*parte integrante para toda a aprendizagem*” (NCTM, 2000, p x). Na mesma época, em Portugal, podemos ver indicações análogas em documentos de orientação para o ensino da Matemática. A Associação de Professores de Matemática (APM) discute a renovação do currículo de Matemática e propõe: “*A resolução de problemas - tradução de problem solving - deverá constituir o tipo privilegiado das actividades em Matemática*” (APM, 1988, p. 44).

Também no programa de Matemática que vigorou no nosso país, durante vários anos, podemos ler: “*A resolução de problemas constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem. Neste sentido, deve estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nos diversos tipos de actividade.*” (ME, 1999, p 8).

Apesar destas orientações, o trabalho desenvolvido com os alunos, tem sido muitas vezes desarticulado e relativamente marginal àquilo que se foi chamando de currículo normal. Muitas vezes, a resolução de problemas foi introduzida apenas no final de um capítulo em estudo, ou somente de forma lúdica nas actividades extra curriculares, como clubes ou o problema da semana/mês, etc. Por outro lado, desde os anos oitenta, existiram mudanças nas práticas da sala de aula, na forma de avaliar e até no tipo de problemas propostos. Estas mudanças ainda não foram as suficientes para superar o desconforto dos alunos acerca da resolução de problemas. Daí nasce a principal importância do tema a estudar, a par da consciência de que a resolução de problemas é hoje incontornável no currículo, na avaliação e nas aulas de Matemática.

O Foco da Investigação

Problema e questões de investigação

Este estudo tem como objectivo identificar, analisar e compreender em que momentos da resolução de problemas ocorrem dificuldades dos alunos e como se evidenciam, tendo por base o trabalho realizado na aula de Matemática.

Um dos aspectos relevantes do presente estudo está no facto de se pretender olhar para a génese das dificuldades e das situações de entrave que ocorrem no decurso do processo de resolução de problemas, procurando-se perceber deficiências ou embaraços manifestados pelos alunos nos vários momentos de trabalho sobre um problema, a saber:

- Na *interpretação* – por exemplo, o aluno toma consciência da sua dificuldade em perceber o enunciado e não avança com um processo de resolução do problema, isto é, desiste; o aluno não tem consciência da sua interpretação incorrecta ou deficiente, deturpa o problema dado e ensaia uma resolução, não respeitando o que é estabelecido ou o que é pedido.
- Na *resolução* – por exemplo, o aluno procura “receitas prontas”, lança mão de mecanismos de cálculo, refugia-se em noções que lhe parecem mais simples, não relacionando adequadamente as várias informações, mas tentando utilizar algum conhecimento e “impondo-o” sobre a situação que está a abordar.
- *Apresentação/conclusão* – por exemplo, o aluno tem dificuldade na expressão ou transcrição do raciocínio que efectuou; o aluno não é capaz de usar a linguagem mais adequada e comete erros matemáticos, dá respostas correctas mas não sabe justificá-las ou chega a um resultado e não o analisa de forma crítica.

Como quis ilustrar com os exemplos anteriores, este estudo visa, em suma, conhecer e entender os principais obstáculos dos alunos no que diz respeito à capacidade de interpretar, de estabelecer e discutir ideias e estratégias e de comunicar, em termos da linguagem Matemática, no âmbito da resolução de problemas na aula de Matemática.

Desta forma, tornam-se pertinentes as seguintes questões de investigação:

(1) *Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na actividade de resolução de problemas, quando esta é implementada de forma continuada na aula de Matemática?*

(2) *De que forma estas dificuldades se revelam e como afectam o desempenho dos alunos?*

Cenário pedagógico

O trabalho realizado em sala de aula, que esteve na base deste estudo, decorreu entre Setembro de 2007 e Maio de 2008, com os alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola básica do concelho de Faro. Neste período de tempo foram dinamizadas, em cada unidade curricular, aulas de resolução de problemas, com o intuito de despertar o espírito crítico, bem como de promover a comunicação matemática e a aplicação dos vários conhecimentos e métodos adquiridos.

A experiência de realização sistemática de aulas de resolução de problemas abrangeu os seguintes temas do currículo: *Probabilidades*, *Sistemas de Equações* e *Proporcionalidade Inversa*. Estes temas foram escolhidos, não apenas pela sua diversidade e relevância para a formação matemática dos alunos no ensino básico, mas também pela própria sequência de implementação do currículo.

No decurso da experiência, os problemas foram colocados aos alunos em três fases diferentes: 1) como introdução a cada um dos conteúdos e conceitos; 2) durante o trabalho de desenvolvimento e exploração dos conteúdos e 3) como actividade final, de aplicação, consolidação e sistematização. A primeira fase favorece a introdução do tema e tem como objectivo que os alunos sintam a necessidade do uso de um novo conceito/recurso/ferramenta de que não dispõem; a segunda fase decorre a meio da unidade, essencialmente para aplicação dos conhecimentos, e a última fase tem como finalidade consolidar e explorar conceitos, com problemas de maior complexidade e aglutinadores de vários conteúdos.

Deliberadamente, os problemas apresentados são de formatos e tipos diversos e pretendem fazer emergir as dificuldades manifestadas pelos alunos na interpretação dos enunciados, nas várias fases da resolução de problemas, na comunicação matemática e

na apresentação de resultados (esquematização, raciocínio lógico, justificação de conclusões, entre outros).

A escolha da turma obedeceu a vários critérios. Em primeiro lugar, trata-se de uma turma que tenho vindo a acompanhar desde o 7º ano e, portanto, não seria a primeira vez que esta turma teria contacto com a resolução de problemas na aula de Matemática. Por outro lado, o meu conhecimento sólido da turma permitiria que os problemas propostos tivessem em consideração as características dos alunos e da turma no seu todo. Decidi que não seria dada importância primordial a aspectos de cálculo, nomeadamente morosos e complicados, pois antevia que isso os poderia desmotivar; em vez disso, apostei nas tarefas que colocassem a ênfase no raciocínio, na sua construção e evolução e, ainda, que permitissem a mobilização e operacionalização de conhecimentos matemáticos.

Em segundo lugar, o facto de ter sido anteriormente a Directora de Turma, dava-me a possibilidade de compreender a realidade cultural e sócio-económica da maioria dos alunos e de entender a sua integração no meio escolar.

Por último, foi importante o facto de a turma ser constituída por catorze alunos. O reduzido número de alunos da turma apresentou-se como um factor facilitador, ao permitir a formação de pequenos grupos de trabalho, os quais poderiam ser apoiados com frequência no decorrer das aulas de resolução de problemas.

Capítulo II

Referencial Teórico

Neste capítulo, pretendo fazer uma análise da literatura, num domínio específico de investigação no Ensino da Matemática, de forma a produzir uma síntese de conceitos e resultados de investigações que se entendem como pertinentes para este estudo. Deste modo, abordarei algumas temáticas relacionadas com a resolução de problemas, que considere fundamentais como alicerces da investigação.

Para que possamos compreender e investigar o processo da resolução de problemas será importante, desde logo, tentar perceber o que se entende por problema de Matemática, nomeadamente, no âmbito da sala de aula. Por outro lado, no que diz respeito a esta actividade, irei focar-me nos processos de pensamento, nas concepções dos alunos, no papel do professor e, por fim, na questão da avaliação na disciplina de Matemática e na sua estreita relação com as dificuldades que os alunos encontram.

Conceito de Problema

“Os problemas são a força motriz da Matemática. Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos. A maior parte dos bons problemas é difícil: na Matemática, como na vida, raramente se consegue alguma coisa de graça. Mas nem todos os problemas difíceis são bons: o culturismo intelectual pode originar músculos mentais, mas alguém quer um cérebro musculoso?” (Stewart, 1996, p. 16)

Como procurei realçar, o ensino da disciplina de Matemática dá hoje grande ênfase à resolução de problemas. Porém, não é seguro que a noção de problema seja tacitamente aceite e que a sua definição seja unívoca, razões pelas quais tomo como ponto de partida analisar o que se entende por problema de Matemática.

Com efeito, não parece haver consenso em torno de uma só definição concreta e absoluta. *“A dificuldade de definir este termo é que problema é um conceito relativo. As mesmas tarefas que exigem esforços significativos a alguns alunos podem muito bem ser exercícios rotineiros para outros, pois resolvê-los pode ser uma questão de recordar alguns factos matemáticos.”* (Vale, 1993, p.15).

Esta noção de relatividade do conceito de problema vem no seguimento do que sugere Kantowski (1977), quando afirma que *“um individuo está perante um problema quando encontra uma questão a que não pode responder, ou uma situação que não pode ser respondida usando os conhecimentos imediatamente disponíveis.”* (p. 163). Kantowski considera que, se o aluno não tiver presente uma estratégia para a resolução de um determinado exercício ou questão, este passará a ser sentido como um problema.

Esta concepção de problema parece ser a que mais traduz a perspectiva do aluno. Também Kantowski (1981), citada por Abrantes (1988, p. 8), refere que *“um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto do aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução.”* Assim, a resolução de problemas envolve dois aspectos (Vale, 1993):

- (a) O processo, ou conjunto de comportamentos, ou actividades, que direccionam a procura da solução;
- (b) O produto ou a solução existente.

Acerca da distinção anterior, entre exercício e problema, Abrantes (1988) adverte para o risco de, por vezes, se usarem critérios menos adequados para a estabelecer, ou

seja, “por vezes estabelece-se uma distinção enganadora: no enunciado de um exercício haveria apenas números e operações enquanto o de um problema conteria alguma referência a um contexto concreto.” (p. 8).

Wheatley (1984), citada por Frank (1992, p. 22) considera que a “*resolução de problemas é aquilo que se faz quando não se sabe o que fazer*”. No entanto, nem sempre esta afirmação tem eco no que sucede quando os alunos são confrontados com problemas. Provavelmente, para a grande maioria dos estudantes, não saber o que fazer implica a imobilização e a expectativa de que alguém (certamente o professor) acabará por dizer o que se “tem de fazer”. É claro que esta situação reflecte bastante o que é ainda entendido, por muitos, como o papel do aluno e do professor no processo de ensino-aprendizagem. Resolver problemas e não saber o que fazer podem ser condições naturais na sala de aula de Matemática. Mas isso pressupõe que o aluno terá um papel activo na procura de respostas e que o professor não será o único que tem na sua posse (e as pode tirar da manga) as respostas às questões, aos desafios e às situações que aparecem no trabalho dentro da aula de Matemática.

O National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM), dos Estados Unidos da América, no que defende ser a Matemática essencial para o século XXI, efectua a seguinte caracterização da actividade de resolução de problemas: “*Resolver problemas consiste no processo de aplicação de conhecimentos, previamente adquiridos, a situações novas e não rotineiras.*” (citado por Fonseca e Palhares, 1990, p. 24). Este apelo às situações novas traduz-se claramente numa perspectiva pedagógica e exige ao professor a necessidade de colocar os seus alunos perante situações que constituam um desafio, de modo que cada nova actividade proposta continue a representar uma situação problemática para aqueles indivíduos em concreto.

Em sintonia com a posição anterior, Cruz e Carrillo (2004), citando Carrillo (1988), adoptam como definição de problema:

“O conceito de problema deve associar-se à aplicação significativa (não mecânica) do conhecimento matemático em situações que não são familiares, à consciência de tal situação, à existência de dificuldade na hora de a realizar e à possibilidade de o problema ser resolvido, aplicando o dito conhecimento.” (p. 105)

Segundo a perspectiva de Newell e Simon (1972), citados por Poggioli (2001, s/p), *“um problema define-se como uma situação na qual o indivíduo deseja fazer algo, mas desconhece o curso da acção necessária para concretizar o que quer”*. Também segundo Chi e Glaser (1983), citados por Poggioli (2001, s/p), *“um problema define-se como uma situação na qual o indivíduo actua com o propósito de alcançar uma meta, utilizando para o efeito uma estratégia em particular”*.

Esta referência a uma “meta” deve ser entendida como o objectivo de chegar a um determinado ponto, de ultrapassar um obstáculo, de vencer um desafio ou de encontrar uma solução. Para estes autores, um individuo está perante um problema quando não sabe que acção deve efectuar para resolver uma determinada situação e quando tem de encontrar uma determinada estratégia, caminho ou tática, para chegar à solução (portanto, a resolução não é imediata). O esquema seguinte engloba estas duas visões e tem como objectivo explicar o que é um problema.

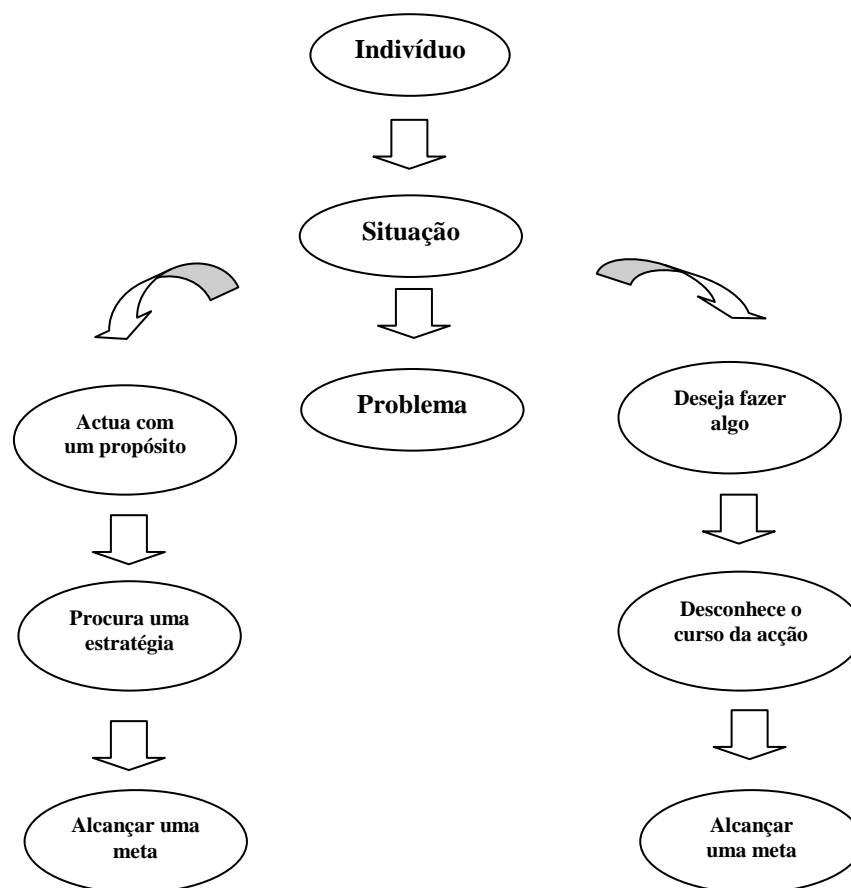


Fig. 1. O que é um problema, adaptado de esquema de Poggioli (2001)

Para Mayer (1985), citada por Vale (1993, p. 16), “*um problema ocorre quando se é confrontado com uma situação inicial (given state) e se pretende chegar a uma situação final (goal state), sem se conhecer previamente o caminho óbvio para a atingir.*” Vale observa que, neste sentido, a resolução de problemas será o processo de passar da situação inicial para a situação final, através de uma série de operações mentais que estão direccionadas para uma finalidade ou objectivo.

Ainda Mayer (1983), citada por Poggioli (2001), identifica quatro componentes de um problema, que levam um indivíduo desde o estado inicial até à solução, integrada no estado final:

- 1) As metas – O que pretendemos alcançar, podendo haver uma ou mais metas no decurso do problema, bem definidas ou subjacentes e mais ou menos implícitas.
- 2) Os dados – A informação disponível, o que sabemos, o que podemos admitir e usar como pontos de partida.
- 3) As restrições – Os factores que limitam o caminho para chegar à solução, as relações que existem entre os dados, os pressupostos matemáticos, as hipóteses, as condições que são expressas matematicamente, etc.
- 4) Os métodos – As múltiplas formas de resolver um problema, as formulações matemáticas, os instrumentos matemáticos, as regras, os modos de representação (gráficos, tabelas, diagramas em árvore, esquemas geométricos, etc.), as analogias com outros problemas ou situações, etc.

Em resumo, esta breve análise das formas de entender um problema mostra que não existe uma definição de problema consensual para todos os investigadores, nem tão pouco existe um só tipo de problemas. Porém, no geral, todas as definições apontam como objectivo principal o alcançar de uma *meta* – a chegada a uma solução – mas desconhecendo o *caminho* imediato para a atingir.

Tipos de Problemas

Os problemas podem, ainda, ser de vários tipos ou receber várias classificações. Categorizá-los, pode ajudar-nos, de alguma forma, a encontrar uma via para a sua resolução, pois poderá permitir encaixar problemas novos em problemas já resolvidos anteriormente, dando-nos uma ideia de um caminho promissor a tomar para a sua resolução.

“Se se pretende que a resolução de problemas constitua um eixo organizador do ensino da Matemática, parece pertinente que os alunos contactem, não apenas com tantos problemas quanto possível, mas, mais importante que isso, com uma grande diversidade de problemas de Matemática” (Boavida, 1993, p. 118)

Segundo Hinsley, Hayes & Simon (1977), citados por Schoenfeld (1992), as pessoas ao depararem-se com um problema tendem a recorrer à chamada “memória de longo prazo” para ajudar na sua resolução. Assim, verifica-se que:

- *As pessoas categorizam os problemas em vários tipos.*
- *As pessoas podem categorizar os problemas sem os formularem completamente ou sem terem a solução.*
- *As pessoas têm um conjunto de informações acerca de cada tipo de problemas que são úteis na formulação de problemas com aquele tipo de solução, (...) direccionando-as para elementos importantes do problema, julgamentos relevantes, etc.*
- *Ao resolver um problema, as pessoas usam a identificação da categoria do mesmo para formular problemas que as ajudem a resolver o problema inicial.*

Em suma, ao colocar um problema numa determinada categoria, o indivíduo que pretende resolvê-lo poderá ser levado a usar um determinado processo, já ensaiado antes, ou mesmo a descobrir um determinado caminho para a solução.

Cada autor tem também a sua caracterização específica para diferenciar vários tipos de problemas. Polya (1981), citado por Borasi, (1986), faz a seguinte classificação de problemas:

- i) “Regra debaixo do nariz”: O problema pode ser resolvido apenas por aplicação de um determinado algoritmo.
- ii) Aplicações com alguma escolha: Um determinado procedimento ou algoritmo tem de ser seleccionado entre outros estudados previamente.
- iii) Escolha de uma combinação: Para se chegar à solução, alguns algoritmos conhecidos têm de ser combinados correctamente.
- iv) Aproximação ao nível da investigação: Para se chegar à solução, é necessário elaborar um novo algoritmo ou procedimento, ou mesmo um novo conhecimento matemático.

O Programa para a Avaliação Internacional dos Alunos (PISA), iniciado em 2000 e patrocinado pela OCDE, tem como objectivo avaliar a aquisição de conhecimentos e destrezas essenciais para a vida activa dos alunos dentro da escolaridade obrigatória, nos países onde é aplicado. Em 2003, o principal domínio avaliado foi a literacia matemática, bem como a área transversal de resolução de problemas.

O projecto Pisa 2003 definiu que avaliaria três tipos de problemas, a saber: (a) tomada de decisão, (b) análise e concepção de sistemas e (c) despiste de problemas.

Os problemas de tomada de decisão requerem que o aluno tome uma decisão face a várias alternativas e limitações, de tal modo que a solução deverá satisfazer as restrições impostas. Quanto à análise e concepção de sistemas, o aluno terá de perceber a sua lógica e/ou conceber um sistema funcional que lhe permita alcançar uma solução. Neste tipo de problema, as variáveis estão interligadas entre si de forma dinâmica e pode haver mais do que uma solução. Para finalizar, no despiste de problemas, o aluno tem de compreender o funcionamento de um sistema para perceber onde existe um determinado defeito, incoerência ou inconsistência do sistema.

Em seguida apresenta-se um exemplo para cada tipo de problema.

Exemplo de um problema de tomada de decisão (PISA, 2003a, p. 17-18)

Não é fácil escolher o analgésico certo para os achaques e as dores ocasionais, pois há tantas marcas diferentes de analgésicos no mercado, cada qual reclamando o direito de ser a apropriada para o seu caso. O Grupo Care Medical apresenta a seguinte informação sobre quatro analgésicos diferentes:

Nome do Analgésico	Descrição	Alívio de sintomas	Posologia	Precauções
Aquaspirin	Comprimido de aspirina 100% solúvel. Ideal para pessoas que não conseguem tomar comprimidos.	Dores de cabeça; dores musculares; dores de dentes; dores de costas; garganta irritada; reduz a inflamação e a febre.	Adultos e crianças com mais de 12 anos: 1 a 2 comprimidos, dissolvidos em meio copo de água, de 4 em 4 horas, quando necessário. Não exceder 8 comprimidos em 24 horas. Crianças com menos de 12 anos: Não administrar <i>Aquaspirin</i> a crianças com menos de 12 anos.	O uso prolongado pode ser prejudicial. Não deve ser administrado a pessoas com dietas pobres em sódio.
Paracem	100% paracetamol. Próprio para mães em período de aleitamento e para asmáticos. Não provoca irritações de estômago como a aspirina.	Dores de cabeça; dores de costas; dores de dentes; dores musculares; artrite; reduz a febre.	Adultos e crianças com mais de 12 anos: 1 a 2 comprimidos de 4 em 4 horas, quando necessário. Crianças com menos de 12 anos: ½ a 1 comprimido de 4 em 4 horas, quando necessário.	O uso prolongado pode ser prejudicial.
NoAx	Cada comprimido contém 25 mg de Potássio de Diclofenac. Próprio para o alívio de estados agudos, inflamatórios e dolorosos. O alívio da dor verifica-se habitualmente dentro de 15 a 30 minutos.	Equimoses; dores de pescoço; dores lombares; entorses e luxações; enxaquecas; dores pós-operatórias.	Adultos e crianças com mais de 14 anos: 1 a 2 comprimidos de 8 em 8 horas. Não exceder 6 comprimidos por dia. Crianças de 14 anos ou menos: Crianças de 14 anos ou menos não devem tomar <i>NoAx</i> .	Não tomar <i>NoAx</i> com o estômago vazio. Aconselhe-se junto do seu médico se sofrer de asma ou se estiver a tomar qualquer outra medicação. Possíveis efeitos secundários: tonturas, pés inchados.
Reliefen	Cada comprimido contém 200 mg de ibuprofeno. É mais suave para o estômago do que a aspirina.	Dores de cabeça; dores musculares e reumáticas; dores de dentes; sintomas de constipação; dores de costas; reduz a febre e a inflamação.	Adultos e crianças com mais de 12 anos: 1 a 2 comprimidos, em intervalos de 4 a 6 horas. Não exceder 6 comprimidos por dia. Crianças com menos de 12 anos: <i>Reliefen</i> não deve ser tomado por crianças de 12 anos ou menos.	Se sofre de asma, de problemas renais, se é alérgico à aspirina ou se está grávida, deverá consultar o seu médico antes de tomar <i>Reliefen</i> .

A partir da informação dada, ordene os 4 analgésicos, do mais fraco para o mais forte. (Escreva os números de 1 a 4 nos quadrados, correspondendo o 4 ao mais forte.)

- Aquaspirin
- Paracem
- NoAX
- Reliefe

Exemplo de um problema de análise e concepção de sistemas (PISA, 2003a, p. 21-

22)

A qual das folhas de registo (1 ou 2) deverá ser acrescentado cada um dos seguintes atributos?

<i>ATRIBUTOS</i>	<i>EXEMPLO DE ENTRADAS</i>	<i>FAÇA UM CÍRCULO EM TORNO DE «FOLHA DE REGISTO 1» OU DE «FOLHA DE REGISTO 2»</i>
ARTISTA/ BANDA/ ORQUESTRA	Faye Weber, Filarmónica de Berlim	Folha de Registo 1/Folha de Registo 2
PREÇO DO CD	15 zeds; 25 zeds por um conjunto de dois.	Folha de Registo 1/Folha de Registo 2
SITUAÇÃO DO <i>STOCK</i>	Por encomenda; em <i>stock</i>	Folha de Registo 1/Folha de Registo 2
COMPOSITOR	Warren Jones; Li Y uan	Folha de Registo 1/Folha de Registo 2

A discoteca «CD Bela Melodia» está a desenvolver um sistema de registo de CDs de música vendidos por este estabelecimento. Prepararam informaticamente duas folhas de registo, como a seguir se apresenta:

Folha de Registo 1: Atributos de cada CD (uma linha por CD)

Número ID de série do CD	Título do CD	Editora do CD
14339	<i>Carnaval de Primavera</i>	NAXA
10292	<i>Éxitos dos Anos 90</i>	FineStudio
00551	<i>Árias para Amantes de Ópera</i>	DigiRec

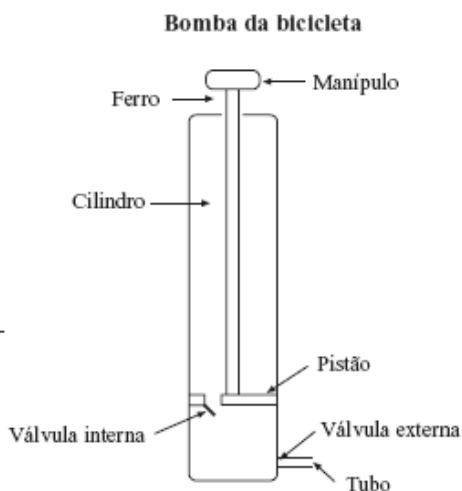
Folha de Registo 2: Atributos de cada faixa de CD (uma linha por faixa)

Número ID de série do CD	Número da faixa	Nome da faixa
14339	1	<i>Febre de Primavera</i>
14339	2	<i>Salto para a Primavera</i>
14339	3	<i>Ritmo da Meia-Noite</i>
10292	1	<i>Best Dance in Town</i>

Exemplo de um problema de despiste (PISA, 2003a, p. 26)

Ontem, a Joana teve problemas com a bomba de ar da sua bicicleta. Repetidamente, puxou o manípulo da bomba para cima e empurrou-o para baixo, sem conseguir que saísse ar pelo tubo. A Joana queria descobrir o que se passava; por isso vasculhou na caixa onde guardava a bomba e descobriu um papel com a seguinte informação:

Quando o mecanismo manípulo-pistão é puxado para cima, o ar passa através da válvula interna e preenche o espaço entre o pistão e a válvula externa. Quando o mecanismo manípulo-pistão é empurrado para baixo, a válvula interna fecha-se e o pistão obriga o ar que se encontra por baixo do pistão a sair através da válvula exterior.



Resolução de problemas – Exemplo 3.1.

Explique como é que o movimento das válvulas permite a operação da bomba da bicicleta, quando o mecanismo manípulo-pistão se encontra em diferentes posições.

No seu artigo, intitulado “On the nature of problems”, Borasi (1986) apresenta um outro modelo para classificar problemas que se encontra discriminado na Tabela 1. A autora elabora esta classificação com o objectivo de fornecer ao educador ferramentas para avaliação de exemplos pertinentes a serem usados nas aulas.

Além das classificações da tabela, a autora propõe outras combinações baseadas na mesma. Por exemplo, problemas em que o contexto é totalmente dado mas a formulação é vagamente ou implicitamente dada, ou então problemas de tipo puzzle e/ou problemas de palavras com mais de uma solução.

Para Borasi, a resolução de problemas vai além da aplicação (ou combinação) de algoritmos conhecidos previamente e do *insight* (reflexão e perspicácia). Englobará

também processos como elaboração de novos algoritmos, exploração de um contexto e formulação de novos problemas.

Resumidamente, Borasi classifica de exercícios as tarefas formuladas de forma explícita, em que as estratégias de resolução passam apenas por aplicação de algoritmos conhecidos, sendo a solução única. Os problemas de palavras diferem da classificação anterior porque estão inseridos num certo contexto. Os problemas tipo puzzle, também inseridos num contexto, são aqueles em que é necessário o conhecimento de um “truque” ou em que há a necessidade de descobrir uma boa ideia que leva à solução, que é única. A demonstração de uma conjectura é um problema do qual o contexto é conhecido em parte, é necessário conhecer previamente teoremas e técnicas e geralmente têm apenas uma solução. Nos problemas da vida real, o contexto não é explícito, sendo necessário recolher informação complementar. Para a sua resolução é necessário a criação de um modelo matemático e ao chegar à solução é ainda preciso adequá-la ao problema, sendo, por isso, muitas vezes apenas uma aproximação. As situações problemáticas, de contexto não explícito, podem necessitar de uma intervenção (de quem resolve) na sua formulação e a reformulação do problema poderá ser necessária para chegar à solução. Para terminar, há as situações não problemáticas, em que não existe um contexto definido e cabe ao indivíduo a criação do seu próprio problema.

Denominação	Contexto	Formulação	Soluções	Método de abordagem
Exercício	Inexistente	Única e explícita	Quase sempre únicas e exactas	Combinação de algoritmos conhecidos previamente
Problemas de palavras	Explícito no texto	Única e explícita	Quase sempre únicas e exactas	Combinação de algoritmos conhecidos previamente
Problemas de tipo puzzle	Explícito no texto	Única e explícita	Quase sempre únicas e exactas	Elaboração de um novo algoritmo – reformulações – descoberta, perspicácia, ideia luminosa (insight)
Demonstração de uma conjectura	Apenas parte no texto – é assumido o conhecimento prévio de algumas teorias	Única e explícita	Geralmente, mas não necessariamente únicas	Exploração de um contexto – reformulações – elaboração de novos algoritmos
Problema da vida real	Apenas parte no texto	Dada em parte, com várias alternativas possíveis	Várias – mas apenas aproximadas	Exploração de um contexto – reformulações – criação de um modelo
Situação problemática	Apenas parte no texto – problemático	Muito é sugerido implicitamente, embora possam também existir dados explícitos	Várias	Exploração de um contexto – reformulações de problemas
Situação	Apenas parte no texto – não problemático	Inexistente, nem sequer implícito	Criação de um problema	Formulação de problemas

Tabela 1. Classificação de problemas, segundo Borasi (1986)

Na perspectiva de Palhares (1997), a classificação de um problema deve ser realizada de acordo com a classe de indivíduos a que o mesmo se destina (Tabela 2). Para este investigador, um tipo de problemas, para certos indivíduos, classifica-se de uma forma que pode não ser a mesma para outros, pois nem todos têm de actuar da mesma forma perante um determinado problema.

“Note-se que (...) o mesmo problema, dependendo da intenção pedagógica ou da altura da aplicação pode ser classificado de maneiras diferentes. É importante esclarecer a classe de indivíduos para a qual se atribui a classificação, a não ser que seja óbvio no contexto.” (p. 169)

Tipologia de problemas	Requerem, para uma determinada classe de indivíduos
Problemas de processo	Estratégias de resolução
Problemas de conteúdo	Conhecimentos matemáticos
Problemas de capacidades (ou problemas de cálculo mental ou de estimativa)	Uso de capacidades matemáticas
Problemas tipo puzzle	Alargamento do espaço de resolução
Problemas de aplicação	Recolha e tratamento de informação
Problemas abertos (sendo esta uma subcategoria de todas as outras)	Escolha ponderada entre os vários caminhos possíveis
Problemas de aparato experimental	Uso de esquemas investigativos

Tabela 2. Tipologia de problemas, segundo Palhares (1997)

Pehkonen (1997) classifica os problemas segundo a situação de partida e objectivo ou situação final (conforme pode ser observado na Tabela 3). Naquilo a que chama “open-ended problems” (problemas abertos), engloba várias situações: investigações, criação de problemas, situações da vida real, projectos, sequências de problemas, problemas sem questão expressa e variações de problemas (por exemplo, enunciados do tipo “e se...”). Os problemas fechados, em contrapartida, são problemas onde a meta que nos propomos atingir é totalmente apresentada e explicada.

Objectivo da situação / Situação de Partida	Fechado (i.e. totalmente explicado)	Aberto
Fechado (i.e. totalmente explicada)	Problemas fechados	Problemas open-ended Situações da vida real Investigações Sequências de problemas Variantes de problemas
Aberta	Situações da vida real Variantes de problemas	Situações da vida real Variantes de problemas Projectos Formulação de problemas

Tabela 3. Classificação de problemas, proposta por Pehkonen (1997), tendo em conta a situação de partida e o objectivo

Embora a classificação de problemas possa não ser unânime, os diversos autores concordam em que um bom problema tem que ser apelativo para a pessoa que o está a resolver. Para tal, tem de ter em conta a perspectiva do sujeito que resolve – o resolvidor, “*aquele indivíduo que perante um problema ou situação problemática a pretende resolver*” (Vale, 1993, p. 10) – para que este mantenha o interesse na sua resolução.

“A definição de «bom problema» é uma noção relativa não só porque depende (...) dos conhecimentos prévios de que o aluno dispõe mas também por outras razões de natureza educativa. Por um lado, é preciso que o aluno tenha interesse em resolvê-lo – como diz Polya (1981), só há um problema quando há uma dificuldade que se deseja vencer ou contornar. Por outro lado, há que ter em conta a variedade das experiências de aprendizagem proporcionadas ao aluno.” (Abrantes, 1988, p. 35).

Processos de Pensamento e Ensino da Resolução de Problemas

“Por onde devo começar? Comece pelo enunciado do problema.

Que posso fazer? Visualize o problema globalmente, com tanta clareza e nitidez quanto possível. De momento, não se preocupe com pormenores.

Qual a vantagem de assim proceder? Precisa de compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na sua mente o seu objectivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e prepará-la para a evocação de pontos relevantes.” (Polya, 2003, p. 53)

Tão difícil como definir problema é definir qual a melhor forma de ensinar a resolver problemas. Por ser um processo complexo, existem vários métodos propostos por diferentes autores, sem que algum deles seja inequivocamente o melhor. Um dos modelos mais aceites como eficaz, tem por base a introdução e utilização de estratégias próprias de resolução de problemas – as heurísticas ou métodos heurísticos.

Fernandes (1992), citado por Porfírio (1993), refere que “*as heurísticas ou métodos heurísticos estão intrinsecamente associados ao ensino de resolução de problemas porque, entre outras características, parecem motivar os alunos, são relevantes do ponto de vista pedagógico, promovem a aprendizagem activa e podem ajudar a melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da resolução de problemas*” (p. 29).

As heurísticas são usadas como um “guião” que, ao ser percorrido em sucessivas etapas, permite ao aluno pensar e repensar cada passo da resolução do problema, bem como, prever qual deverá ser a acção seguinte. As heurísticas podem ser gerais ou específicas conforme se aplicam a um maior ou menor e mais número de problemas.

Alguns autores são peremptórios em dizer que não se encontra uma “receita” que se aplique a todos os problemas e os resolva, mas estabelecem orientações que podem servir de guia na resolução das situações problemáticas. Essencialmente, fornecem-nos possíveis estratégias que poderão ser consideradas com sucesso, quando aparentemente chegamos a um “beco sem saída”.

Modelos de resolução de problemas

Polya terá sido o primeiro autor a sugerir um modelo para descrever como trabalhar na resolução de problemas. Para este matemático e educador “*o professor que deseja desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver problemas, deve motivar, nas suas mentes, algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.*” (2003, p 26).

Este investigador aconselha que o professor, nas aulas, sugira (para exemplificar) aos alunos questões que deseja que eles se coloquem a si próprios, no futuro, aquando

da resolução de problemas. Este processo é importante para que os jovens descubram qual deve ser o uso adequado a fazer das interpretações, dos dados, das questões e das condições dadas. É igualmente importante que o professor discuta e ilustre técnicas de resolução de problemas com os seus alunos, para que estes, a dada altura, as apliquem naturalmente.

O modelo de Polya contempla quatro fases na resolução de um problema, às quais podem ser associadas as heurísticas seguintes (Polya, 2003, p.16 e 17):

1ª Fase – Compreensão do problema

- *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?*
- *Faça uma figura. Escolha uma notação adequada.*
- *Separe as várias partes da condição. É possível anotá-las?*

2ª Fase – Estabelecimento de um plano

- *Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado com o problema proposto? Conhece um teorema que lhe pode ser útil?*
- *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*
- *Aí tem um problema relacionado com o problema proposto e que foi resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Será necessário introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

- *É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.*
- *Se não conseguir resolver o problema proposto, procure resolver, primeiro, algum problema com ele relacionado. Consegue imaginar um problema relacionado com o problema original e que seja mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? Consegue resolver parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condição, ponha a outra de lado; até que ponto fica, assim, determinada a incógnita? Como pode esta última variar? É possível extrair alguma coisa útil dos dados? Consegue pensar noutros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível mudar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de forma que a relação entre eles seja mais imediata?*
- *Utilizou todos os dados? Utilizou a condição na sua totalidade? Tomou em consideração todas as noções essenciais implicadas no problema?*

3ª Fase – **Execução do plano**

- *Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. Consegue ver, com clareza que o passo está correcto? Consegue demonstrar que ele está correcto?*

4ª Fase – **Verificação**

- *É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Consegue vê-lo, num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?*

Polya (2003) defende que, em primeiro lugar, temos de compreender o problema, de perceber claramente o que é necessário, pelo que, se um aluno estiver a aprender a resolver problemas deve começar por retirar, assimilar e interpretar as informações fornecidas no enunciado. Deve também saber identificar qual é a incógnita e, se possível, organizar as suas ideias, ordenando os dados em gráficos, desenhos, tabelas ou esquemas, entre outros. Precisa ainda de identificar a meta que deseja alcançar para que não se desvie do problema.

Em seguida deve ser estabelecido um plano. Nesta fase, pretende-se que o aluno especule, faça ensaios e conjecture um plano que deve assentar numa ideia adequada para a resolução do problema. Para o efeito, o aluno poderá relembrar-se que já resolveu um problema análogo e adequar as estratégias usadas anteriormente ao problema actual. Poderá até começar por resolver um problema semelhante, mas de resolução mais acessível.

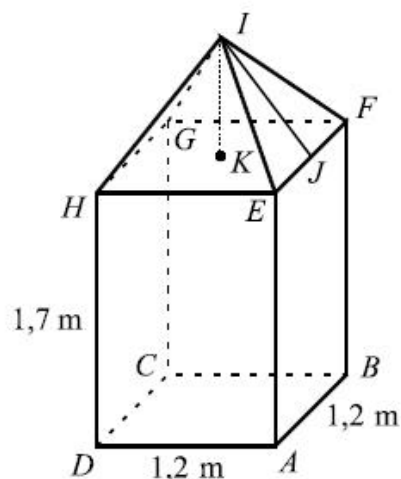
Uma vez estabelecido um plano, este deve ser executado. O aluno deve comprovar sempre se o plano estabelecido anteriormente é eficaz. Não se deve limitar a indicar uma solução, mas deve ser capaz de descrever o procedimento que o levou até à mesma.

Finalmente, a última fase deverá ser a verificação da solução obtida. Nesta fase, pretende-se uma reanálise da resolução do problema. Trata-se de uma etapa muito importante que permite consolidar a resolução efectuada. O aluno poderá tentar uma nova abordagem, mais vantajosa, deverá verificar se a solução é a pretendida e se poderá até generalizar estratégias ou resultados, que se venham a revelar úteis na resolução de novos problemas.

As quatro fases de Polya podem não ser, necessariamente, realizadas pela ordem referida. Um aluno pode, por exemplo, não compreender um problema na sua totalidade

antes que faça uma tentativa para o resolver. Vejamos as orientações de Polya aplicadas a um problema concreto.

9. Na praia do parque de campismo existem barracas como as da fotografia abaixo. Ao lado da fotografia está um esquema da estrutura de uma dessas barracas.



No esquema:

- $[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular regular;
- $[EFGHI]$ é uma pirâmide quadrangular regular;
- $[IK]$ é a altura da pirâmide $[EFGHI]$;
- $[IJ]$ é uma altura do triângulo $[EFI]$.

As medidas de comprimento indicadas estão expressas em metro (m).

- 9.2. Sabe-se que $\overline{IJ} = 1$ m.

De acordo com o esquema, determina o volume da barraca de praia.

Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade de volume.

In Teste Intermédio de Matemática, 7 de Maio de 2008

1. Compreender o problema

Devemos começar por ler e compreender o problema e, para o efeito, podemos considerar algumas questões que nos ajudem a explicitar o problema:

Quais são os dados?

Temos um prisma quadrangular, cuja base mede 1,2 m de lado e cuja altura mede 1,7 m; temos também uma pirâmide quadrangular cuja base tem as mesmas medidas da base do prisma quadrangular.

Mais algum dado?

Sabemos que $\overline{IJ} = 1$ m.

O que se pretende?

Pretende-se determinar o volume da barraca. Para isso, teremos de calcular o volume do prisma e o volume da pirâmide. E fazer a soma dos dois.

Temos todos os dados para o cálculo dos volumes?

Para o volume do prisma, temos tudo. Basta calcular a área da base (um quadrado) e multiplicar pela altura. Mas para o volume da pirâmide, não temos a altura.

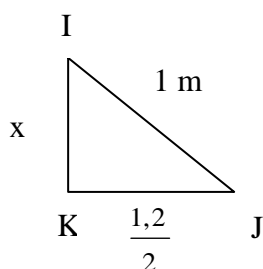
Qual é a incógnita?

Temos de calcular a altura da pirâmide. A incógnita é \overline{IK} .

2. Estabelecer um plano

Há que descobrir a conexão entre os dados e a incógnita. Que estratégia usar?

Ajuda fazer um desenho?



Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente?

Sim, tenho de aplicar o teorema de Pitágoras!

3. Executar o plano

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtenho a equação $x^2 + 0,6^2 = 1$.

Resolvendo esta equação, encontramos o valor $x = 0,8$ m.

4. Analisar a resolução

Neste passo devemos examinar a solução obtida, revendo todos os passos que executamos.

“Até mesmo os alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e posta por escrito a sua resolução, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho.” (Polya, 2003, p. 36)

Ao analisar com atenção a resolução, podemos ver que não respondemos ainda ao nosso problema. Neste caso, há que voltar às fases anteriores e rever o que é necessário fazer a seguir.

2'. Estabelecer um plano

Temos ainda de calcular o volume do prisma quadrangular e o da pirâmide quadrangular. Em seguida devemos somar ambos para obtermos o volume da barraca de praia.

3'. Executar o plano

$$V_{\text{prisma}} = 1,2 \times 1,2 \times 1,7 = 2,448 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 1,2 \times 1,2 \times 0,8 = 0,384 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{barraca}} = 2,448 + 0,384 = 2,832 \text{ m}^3$$

4'. Analisar a resolução

É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio?

Claro que poderemos rever todos os cálculos. Mas, acima de tudo, temos de rever o raciocínio. Calculámos os dois volumes. Para o volume da pirâmide foi necessário determinar a altura. Nesse caso, aplicámos o teorema de Pitágoras porque percebemos que havia um triângulo rectângulo na figura. Uma vez feitos os cálculos, podemos examinar os valores obtidos e ver se fazem sentido. O volume da pirâmide é menor do que o do prisma. Isto é uma conclusão que está de acordo com a figura dada. Por outro lado, também podemos reparar que o volume da pirâmide é cerca de um quarto do volume do prisma. Este resultado também se mostra de acordo com a figura dada.

O uso de heurísticas tem influenciado positivamente o desempenho dos alunos na resolução de problemas, embora Schoenfeld (1992) refira que as caracterizações das fases de Polya não fornecem detalhes suficientemente concretos se as pessoas não estiverem já familiarizadas com a procura de estratégias de resolução de problemas. No entanto, este autor também dá grande importância ao uso de heurísticas para criar familiarização com a resolução de problemas. Grande parte do seu trabalho tem-se centrado, em particular, no campo da metacognição.

A metacognição é o processo que permite ao resolvidor debater e examinar as tomadas de decisão acerca do processo que usou para resolver um problema. Para Garofalo (1987), citado por Vale (1993), a metacognição diz respeito ao conhecimento e controlo que cada um de nós tem acerca das suas funções cognitivas e de como devemos gerir as nossas acções durante qualquer actividade cognitiva, ou seja, pode traduzir-se por uma tomada de consciência das actividades que realizámos.

O que é ensinado pelo professor e o que o aluno aprende poderão não ser coincidentes e, muito frequentemente, não o são. Torna-se, por isso, desejável ensinar alguns esquemas metacognitivos aos alunos como, por exemplo, refazer e examinar as resoluções, para que estes não se limitem a aplicar uma heurística sem perceber as suas implicações e consequências na abordagem à questão proposta.

Consideremos os seguintes problemas, para ilustrar esta ideia:

“Uma torneira enche um tanque em 2 horas e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 4 horas. Se as duas torneiras forem abertas de forma a encherem o tanque ao mesmo tempo quanto tempo leva este a encher?”

“A semana passada o Miguel guardou 2 euros no mealheiro e esta semana juntou mais 4 euros. Quanto poupou em média por semana?”

A resposta ao primeiro problema não é 3 horas, embora muitos alunos possam ser tentados a aplicar a noção da média dos tempos, tal como o fariam no segundo exemplo para saber qual foi a poupança média por semana. Uma forma de perceber que esta estratégia não é eficaz no problema das torneiras é que o tempo com duas torneiras abertas terá de ser inferior a 2 horas, pois a torneira que enche o tanque mais rapidamente (2 horas) vai ser reforçada por outra. Portanto, responder 3 horas não faria sentido e implicaria uma revisão da estratégia utilizada.

Schoenfeld (1985), citado por Ferreira (2007), apresenta um modelo de resolução de problemas composto por cinco fases: análise; desenho; exploração; realização e verificação. Na primeira fase, pretende-se a compreensão do problema. Para o efeito, Schoenfeld (1979) indica algumas heurísticas:

- 1) Elabore um diagrama se for possível. Através de um diagrama sugestivo, pode-se encontrar respostas plausíveis, pode-se até resolver o problema graficamente.

- 2) Se houver um parâmetro numérico, tente chegar à solução por indução. Para tal, particularize para os parâmetros inteiros 1, 2, 3, ... em busca de um padrão.
- 3) Considere a demonstração por redução ao absurdo, ou prove usando a negação. Quando é difícil começar a resolver o problema, devido à escassez dos dados a negação pode fornecer-nos algo mais concreto para trabalhar.

Exemplo da aplicação das heurísticas 1) e 2):

“Mostre que o termo geral da seguinte sequência: 0, 1, 3, 6, 10, ... é $u_n = \frac{n^2 - n}{2}$.”

Aplicando a 1ª heurística, começaremos por analisar a sucessão dos quadrados dos números naturais, geometricamente. Cada um destes quadrados está dividido em $n \times n$ quadrados unitários, os quais podem ser coloridos de acordo com os termos da sequência 0, 1, 3, 6, 10, ... (fig. 2).

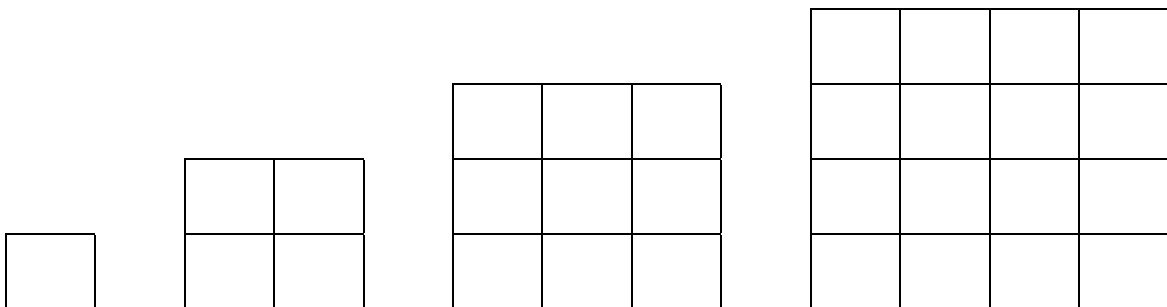


Fig. 2. Os 4 primeiros termos da sucessão dos quadrados dos números naturais (representados geometricamente)

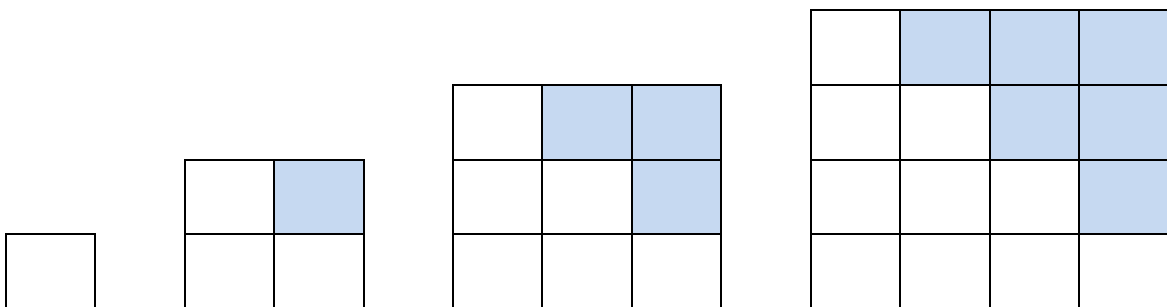


Fig. 3. Ilustração dos 4 primeiros termos da sequência 0, 1, 3, 6, 10...

Com esta ilustração, podemos observar que para determinar o número de quadrados coloridos do termo de ordem n da sequência pedida bastará efectuar a diferença entre o número total de quadrados ($n \times n = n^2$) e o número de quadrados de uma diagonal (n), dividindo o resultado por dois (fig. 4).

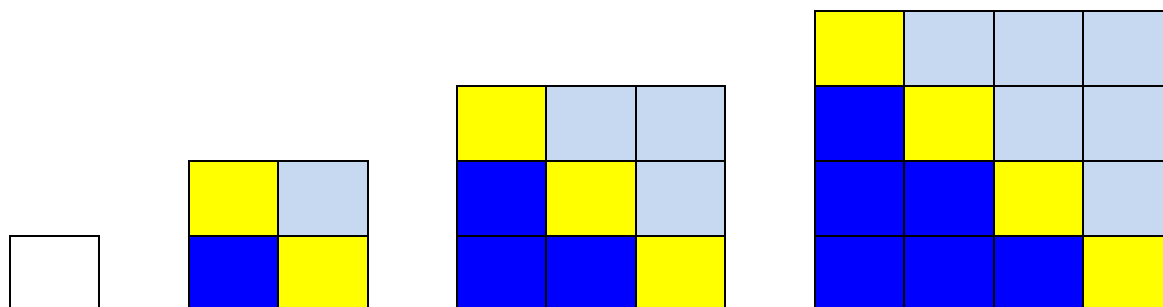


Fig. 4. Ilustração geométrica da obtenção do termo geral da sequência

Usando, agora, a 2ª heurística, podemos começar por examinar os termos de ordem 1, 2 e 3:

$$u_1 = \frac{1^2 - 1}{2} = 0, \quad u_2 = \frac{2^2 - 2}{2} = 1, \quad u_3 = \frac{3^2 - 3}{2} = 3$$

O padrão é, realmente, confirmado. Resta mostrar que continua a funcionar para qualquer n natural. E, neste caso, a prova por indução será uma boa estratégia. Esta opção, no entanto, poderá não estar ao alcance de alguns resolvidores, nomeadamente, dos alunos que não tenham conhecimento do processo de demonstração por indução. Por isso mesmo, a prova pela via geométrica constitui aqui uma boa alternativa.

Na segunda fase do modelo de Schoenfeld – a fase do desenho – o resolvidor deve definir uma estratégia de resolução do problema, não realizando cálculos antecipadamente, sem ter definido o rumo da sua acção. Não são indicadas heurísticas específicas para esta fase.

Na terceira fase – a exploração – o resolvidor explora o problema com vista a ultrapassar dificuldades de desenvolvimento de uma estratégia. Schoenfeld (1979) indica as seguintes como heurísticas promissoras:

- 1) Considere um problema semelhante mas com menos variáveis. Depois de resolver um problema com menos variáveis, é possível adoptar-se o mesmo método para resolver um problema mais complexo.
- 2) Responda por etapas. Tente obter uma parte da solução e continuar a resolução do problema a partir daí. É possível decompor o problema de forma a obter vários resultados que combinados dão a solução do nosso problema?

Exemplo da aplicação das heurísticas 1) e 2):

Suponha que p , q , r e s são números reais. Prove a desigualdade:

$$\frac{(p^2 + 1)(q^2 + 1)(r^2 + 1)(s^2 + 1)}{pqrs} \geq 16$$

Começamos por resolver o seguinte problema com um número inferior de variáveis, isto é, por exemplo:

$$\frac{(p^2 + 1)}{p} \geq 2$$

Depois, se efectuarmos o mesmo raciocínio para q , r e s , bastará multiplicarmos os quatro resultados para provarmos o resultado inicial. (Schoenfeld, 1979)

Na quarta fase – a realização – deve colocar-se em prática o plano estabelecido.

Na quinta e última fase – a verificação – pretende-se saber se a solução é adequada, revendo toda a resolução do problema. As heurísticas propostas por Schoenfeld para esta fase são:

- 1) A resolução passa por testes específicos? Utiliza todos os dados pertinentes? Enquadra-se com as estimativas? Tem aprovação nas provas de simetria, análise de dimensão e escalas?
- 2) A resolução passa pelos seguintes testes gerais? Pode obter-se a resposta de um modo diferente? Pode comprovar-se através de casos específicos? Pode reduzir-se a resultados conhecidos? Pode ser utilizada para gerar algo que se conheça?

Apesar de haver estudos que comprovam a eficácia do uso de heurísticas, existem outros que indicam que os resultados ficam aquém do esperado. Para Schoenfeld (1985), citado por Porfírio (1993), este facto deve-se “*à falta de uma caracterização detalhada de como se devem ensinar no processo de resolução de problemas e ao facto de que aprender a usar heurísticas não é suficiente para resolver correctamente problemas.*” (p. 32) A escolha da estratégia adequada, a importância da tomada de decisões que permitam um controlo e o facto da caracterização das heurísticas nem sempre ser suficientemente prescritiva, leva a que os efeitos produzidos não sejam, em todos os casos, os esperados.

Polya foi o grande precursor na concepção de um modelo de resolução de problemas. Os autores posteriores usam-no como referência para desenvolverem os seus próprios modelos. É o caso de Charles, Lester e O’Daffer (1987), citados por Fonseca (1997). Estes salientam que a resolução de problemas é uma actividade complexa, que envolve uma variedade de processos de pensamento e distinguem sete etapas que consideram particularmente importantes.

Compreender/formular a questão do problema. O resolvidor deve formular uma questão que lhe permita traduzir o enunciado do problema. Este passo traduz a compreensão da linguagem específica do problema.

Compreender as condições e as variáveis do problema. Neste passo, o resolvidor compreende a relação entre as variáveis, clarificando a informação recebida, podendo recorrer à elaboração de esquemas.

Seleccionar ou encontrar os dados necessários para resolver o problema. O resolvidor deverá ser capaz de seleccionar os dados fundamentais para a resolução do problema, desprezando a informação desnecessária. Poderá ser necessário retirar informação de gráficos, mapas, etc.

Resolver/formular sub-problemas e seleccionar estratégias de resolução. O resolvidor terá de adoptar uma estratégia de resolução. Caso o problema seja demasiado complicado, deverá ser subdividido em problemas menores e mais simples.

Implementar correctamente a(s) estratégia(s) e resolver os sub-problemas. Nesta fase, o resolvidor implementa a estratégia que definiu no passo anterior e pode, por exemplo, efectuar cálculos, descobrir um padrão, desenhar uma figura e encontrar relações entre os seus elementos.

Dar uma resposta ao problema não apenas numérica.

Avaliar a razoabilidade da resposta. O resolvidor deve verificar se a solução faz sentido no contexto do problema, sendo convidado a rever os processos que o levaram à mesma.

No quadro seguinte podemos ver os sete processos sugeridos por Charles, Lester e O'Daffer (1987) aplicados aos problemas propostos no PISA 2003. Este quadro resume de forma muito clara o que é esperado em cada um dos processos relativamente ao tipo de problemas propostos, tendo em conta 3 dimensões, os objectivos, os processos envolvidos e as possíveis fontes de complexidade, para cada tipo.

	Tomada de decisão	Análise e concepção de sistemas	Diagnóstico de problemas
Objectivo	Escolher entre alternativas sobre constrangimentos.	Identificar as relações entre partes de um sistema e/ ou conceber um sistema para exprimir as relações entre partes.	Fazer o diagnóstico e corrigir um sistema ou mecanismo defeituoso ou com um desempenho inferior ao requerido.
Processos envolvidos	Compreender uma situação que apresenta várias alternativas e constrangimentos, bem como uma tarefa específica.	Compreender a informação que caracteriza um dado sistema e os requisitos associados a uma tarefa específica.	Compreender as características principais de um sistema ou de um mecanismo e do seu defeito, bem como as exigências de uma tarefa específica.
	Identificar constrangimentos relevantes.	Identificar partes relevantes do sistema.	Identificar variáveis com uma relação causal entre si.
	Representar as alternativas possíveis	Representar as relações entre partes do sistema.	Representar o funcionamento do sistema.
	Tomar uma decisão entre alternativas.	Analisar ou conceber um sistema que apreenda as relações entre as partes.	Diagnosticar o funcionamento defeituoso de um sistema e/ ou propor uma solução.
	Verificar e avaliar a decisão.	Verificar e avaliar a análise ou concepção do sistema.	Verificar e avaliar o diagnóstico e a solução.
	Comunicar ou justificar a decisão.	Comunicar a análise ou justificar a concepção proposta.	Comunicar ou justificar o diagnóstico e a solução.
	Número de constrangimentos.	Número de variáveis inter-relacionadas e natureza das relações	Número de partes inter-relacionadas do sistema ou do mecanismo e modos como estas partes interagem.
Possíveis fontes de complexidade	Número e tipo de representações usadas (verbais, pictóricas e numéricas)	Número e tipo de representações usadas (verbais, pictóricas e numéricas)	Número e tipo de representações usadas (verbais, pictóricas e numéricas)

Tabela 5. Facetas de vários tipos de resolução de problemas (PISA, 2003a, p. 30)

Mason, Burton e Stacey (1985), citados por Brocardo (2001), estabelecem diferenças entre pensar matematicamente (que está relacionado com os processos matemáticos) e os conhecimentos (que dizem respeito a um conjunto de conteúdos e técnicas). Pensar matematicamente é, muitas vezes, independente do conteúdo matemático que se aplica. O seu modelo, também baseado no de Polya, desenvolve-se em três fases: entrada, ataque e revisão.

Na primeira fase – a entrada – o aluno tenta compreender o problema e clarifica o que deve ser feito.

Na segunda fase – o ataque – o aluno estabelece relações entre os diferentes aspectos do problema e poderá decompor o problema ou tentar encontrar um padrão. Caso não seja bem sucedido, deve voltar à primeira fase e escolher um novo caminho.

Na terceira fase – a revisão – o aluno verifica se a solução é adequada ao problema. Se isso não acontecer, terá de voltar a uma das fases anteriores. Nesta última fase, poderá ainda ser criada uma extensão do problema, que pode equivaler a criar um novo problema, dentro do inicial, podendo reforçar aspectos do mesmo e dando a ideia de que um problema é uma situação rica sem fim à vista.

Apesar das diferentes denominações, dentro de cada etapa, todos os modelos anteriores têm o de Polya como base inspiradora. Poderá dizer-se que os modelos diferem entre si pelas subdivisões das fases de Polya, realizadas por cada autor. No quadro seguinte sintetizam-se as variações relativas aos modelos dos autores anteriormente referidos (tabela 4).

Para resolver um problema não basta haver uma vontade expressa; é também necessário que sejam desencadeados vários processos cognitivos, isolados ou em conjunto, com vista a atingir um determinado objectivo. Estes processos incluem: “a

aplicação da compreensão, da caracterização, da representação, da resolução, da reflexão e da comunicação” (PISA 2003a, p.11).

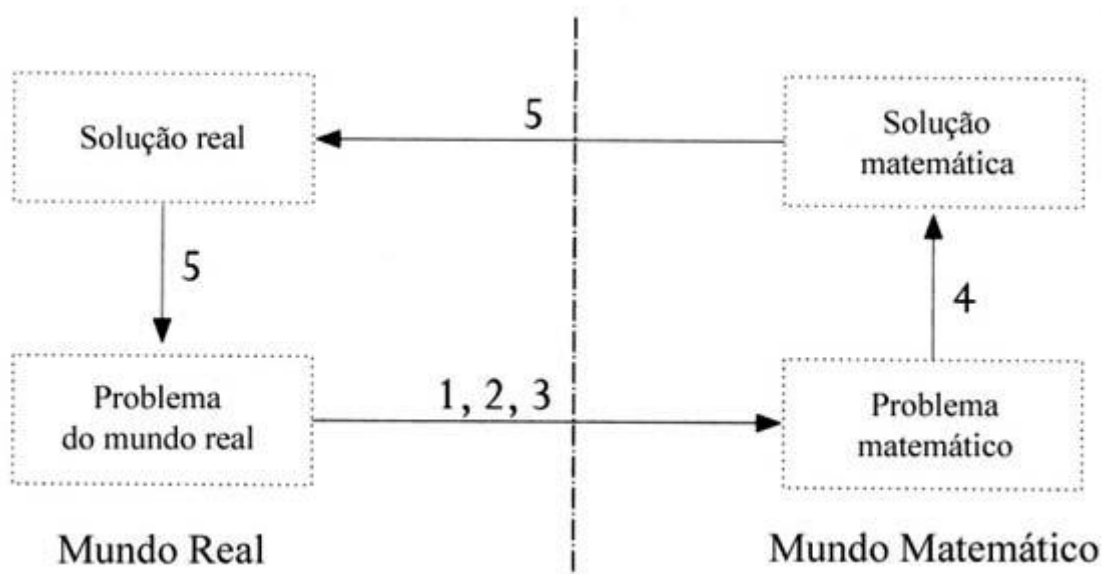
Polya	Schoenfeld	Charles, Lester e O’Daffer	Fases do pensar matematicamente, segundo Mason, Burton e Stacey
Compreensão do problema	Análise	Compreender/formular a questão do problema.	Entrada
		Compreender as condições e as variáveis do problema.	
Estabelecimento de um plano	Desenho	Seleccionar ou encontrar os dados necessários para resolver o problema.	Ataque
	Exploração	Resolver/ formular sub-problemas e seleccionar estratégias de resolução.	
Execução de um plano	Realização	Implementar correctamente a(s) estratégia(s) e resolver os sub-problemas.	
Verificação	Verificação	Avaliar a razoabilidade da resposta.	Revisão/Extensão

Tabela 6. Modelos de ensino de resolução de problemas

O estudo do PISA (2003a) adopta a seguinte definição de resolução de problemas:

“A resolução de problemas é a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da Matemática, das ciências ou da leitura.” (p. 10)

Um problema interessante deve retratar situações reais, abrangendo várias áreas do saber, para que os alunos vejam a importância da aplicação de alguns procedimentos e factos aprendidos previamente. A resolução de problemas poderá, então, ser descrita de acordo com o ciclo a seguir esquematizado (fig. 5):



- (1) Partir de um problema situado na realidade;
- (2) Organizá-lo de acordo com conceitos matemáticos e identificar a matemática relevante;
- (3) Clarificar gradualmente a realidade, através de processos tais como colocar hipóteses, generalizar e formalizar, os quais põem em evidência as características matemáticas da situação e transformam o problema do mundo real num problema matemático que representa fielmente a situação;
- (4) Resolver o problema matemático;
- (5) Validar a solução matemática em termos da situação real, incluindo a identificação das limitações da solução.

Fig. 5. O ciclo da matematização (PISA, 2003c, p. 21)

Factores presentes na resolução de problemas

Não obstante tudo o que foi dito acerca de diversos modelos idealizados de resolução de problemas, existem factores que influenciam o processo de resolução, que devem ser tidos em conta. Fonseca (1997), citando Lester (1980), identifica os seguintes:

- a) A natureza do problema (tipo de problema, conteúdo matemático e estrutura);
- b) As características individuais dos resolvidores (concepções do resolvidor, reacção sob stress e formação matemática);
- c) O comportamento do resolvidor durante a resolução de problemas (forma como organiza e processa a informação e estratégias que utiliza para resolver o problema);
- d) Aspectos de contexto (aspectos externos ao problema e ao sujeito, dos quais se destaca o ensino).

Schoenfeld (1985), citado por Vale (1993), estabelece quatro categorias para a análise do comportamento das pessoas envolvidas em situações que envolvem questões matemáticas, incluindo uma explicação sobre as razões do êxito ou fracasso nas suas tentativas de resolução de problemas. Estas acções ou comportamentos decorrem de:

- 1) *Recursos, conhecimento matemático, factos e algoritmos* – reportam para os conhecimentos matemáticos ou acerca da resolução de problemas;
- 2) *Heurísticas, estratégias de resolução de problemas e outras regras práticas de uso* – capacidades e destrezas do resolvidor.
- 3) *Controlo, modos individuais de tratar informação a que têm acesso* – aspectos metacognitivos relativos ao conhecimento que cada indivíduo tem acerca da forma como pensa e o controlo que exerce sobre o seu pensamento;

4) *Sistemas de convicções, perspectivas individuais, acerca deles próprios, acerca da Matemática, acerca da resolução de problemas e do mundo em geral.* Na resolução de problemas, as convicções dos alunos acerca da Matemática (a forma como estes a encaram) ou acerca da resolução de problemas, podem ajudá-los ou restringi-los na sua busca de uma solução.

Fonseca (1997) considera que existem vários processos que ocorrem em diferentes domínios durante o processo de resolução de problemas. Os domínios identificados são o *cognitivo* (capacidade espacial, computacional, de leitura, e de lógica), *metacognitivo* (conhecimentos matemáticos, reconhecimento da situação em causa, aplicação de estratégias de resolução de problemas) e o *afectivo* (motivação, interesse, perseverança, etc.).

Em suma, para resolver problemas, não basta conhecer uma estratégia mas é também necessário saber aplicá-la. Daí que seja necessário ter em conta uma variedade de factores que passam pela predisposição para resolver problemas, pelos conhecimentos matemáticos e até pelas concepções individuais.

O ensino da resolução de problemas, usando o foco implícito ou explícito nas heurísticas, aparenta ainda ser o mais eficaz, embora o uso das capacidades metacognitivas também se apresente como fundamental para que o aluno compreenda a actividade que realizou. Em todo o caso, é preciso não esquecer que o sucesso na resolução de problemas está sujeito a um conjunto de variáveis, mais ou menos evidentes. Irei, em seguida, analisar algumas delas pela relevância que apresentam no âmbito deste estudo.

Concepções dos Alunos Acerca da Resolução de Problemas

Como foi referido anteriormente, a visão que o aluno tem da Matemática pode afectar profundamente a sua aprendizagem. Frank (1992) efectuou um estudo onde identificou um conjunto de concepções dos alunos acerca da Matemática, das quais se destacam:

- *A Matemática é cálculo*, logo o aluno tende a seguir um conjunto de regras, mecanizando a resolução de exercícios.
- *Os problemas de Matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos passos*, sendo esperado que o caminho a seguir consistirá na aplicação das regras assimiladas anteriormente. Os alunos que demoram muito tempo a responder aos problemas acreditam que estão a resolvê-los de forma errada. Esta constatação é partilhada por Schoenfeld (1985), que verificou que muitos alunos acreditam que um problema se resolve rapidamente, ou seja, em 10 minutos ou menos.
- *O objectivo da Matemática é obter respostas certas*, isto é, os alunos centram a sua atenção nas respostas (produtos) e na questão de saber se estarão correctas (dúvida a ser esclarecida pelo professor). Caso a resposta seja incorrecta, acabam por sentir que o trabalho desenvolvido foi uma experiência sem valor.

Um aluno que partilha estas concepções tende a ver a Matemática como um conjunto de mecanismos a dominar na resolução de exercícios. Esperam bons resultados se os exercícios que lhes surgem forem de aplicação de regras e procedimentos aprendidos anteriormente. Frank (1992) concluiu que, ao depararem-se com um problema genuíno, estes alunos inclinam-se a:

a) Recusar a tarefa (não a aceitam como aquilo que é normal na aula de Matemática) ou trabalhar nela desordenadamente, sem qualquer estratégia.

b) Abordar o problema com se se tratasse de um exercício, tentando aplicar uma regra que lhes dê a resposta rapidamente. Desistem se não conseguem achá-la e recorrem de pronto à ajuda do professor.

c) Utilizar uma estratégia de resolução de problemas, fazendo progressos na busca da solução. No entanto, se a resposta não é obtida facilmente, abandonam o trabalho, sentindo que estão a fazer algo de errado. Classificam o problema como tendo um “truque” para obter uma solução.

A autora refere ainda que são deficientes, nestes alunos, a atenção sobre o processo, a autonomia, a persistência e a flexibilidade necessárias na resolução de problemas.

Abrantes (1994) agrupa as concepções dos alunos sobre a natureza da Matemática da seguinte forma:

- Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta.
- Há apenas uma maneira correcta de resolver problemas de Matemática – geralmente a última que o professor explicou à turma.
- Os alunos vulgares não podem compreender Matemática, apenas memorizá-la e aplicar o que aprenderam de um modo mecânico.
- A Matemática é uma actividade solitária, feita por indivíduos em isolamento.
- Os alunos que compreendem a matéria serão capazes de resolver qualquer problema que lhes seja passado, em cinco minutos ou menos.
- A Matemática que se aprende na escola tem pouco a ver com o mundo real.
- A demonstração formal é irrelevante nos processos de descoberta ou invenção.

O estudo PISA (2003b) concluiu que os alunos mais motivados estavam entre os que revelavam maior sucesso no que respeita à aprendizagem. Entre os factores de

motivação contam-se o interesse e o prazer com a Matemática, a motivação instrumental (que decorre da introdução de recompensas externas, como seja a obtenção de um bom emprego no futuro), a atitude face à escola (de que forma esta os prepara para a vida activa) e o sentimento de pertença à escola. Também as convicções (positivas) sobre a Matemática podem ter influência no desempenho dos alunos. Aqueles que obtêm melhores resultados têm um melhor auto-conceito acerca da sua competência matemática e são mais auto-suficientes.

Por outro lado, as estratégias aplicadas na aprendizagem da Matemática, quando desenvolvidas adequadamente, parecem também representar factores que contribuem para o sucesso. Englobam-se aqui as estratégias de memorização e elaboração (designadas de cognitivas) e as estratégias de controlo (designadas de metacognitivas). Os factores emocionais na Matemática não deixarão de ter considerável efeito na obtenção de bons resultados, pois alguns alunos evitam a disciplina, convencem-se de que nunca serão capazes de alcançar sucesso e preferem não tentar resolver qualquer problema.

Ainda segundo o relatório de PISA (2003b), enquanto estudantes de Matemática, os jovens são claramente influenciados por fenómenos de motivação e pelas atitudes e emoções que desenvolvem face à Matemática e à escola:

- O interesse e o prazer na Matemática: influenciam a intensidade, perseverança e empenho em situações de aprendizagem, selecção de estratégias e profundidade da compreensão.
- A motivação instrumental para a Matemática: as recompensas externas, tais como elogios ou as perspectivas pessoais futuras do aluno, melhoram os seus resultados.

- A auto-eficácia na Matemática: para obter bons resultados escolares é importante conseguir lidar eficazmente com as situações de aprendizagem propostas, superando as dificuldades. Caso contrário, existe um grande impacto negativo na motivação do aluno, levando-o a desistir facilmente perante as dificuldades.
- O auto-conceito na Matemática: os alunos que acreditam nas suas capacidades e competências realizam aprendizagens mais bem sucedidas. A auto-confiança (convicção positiva) é benéfica relativamente à motivação e ao modo como são abordadas as tarefas.
- A ansiedade perante a Matemática: a pressão emocional leva alguns alunos a evitarem a Matemática e a desistirem rapidamente de aprender.
- A atitude face à escola: um aluno que gosta da área disciplinar da Matemática tem maior percepção do que aprende e de que forma esta aprendizagem lhe poderá ser útil no futuro; a forma como a escola lhe inculca confiança para tomar decisões influencia positivamente os seus resultados, comparativamente com outro aluno que pensa que a escola é uma perda de tempo.
- O sentimento de pertença à escola: os alunos que se sentem inseridos na escola e têm facilidade em fazer amigos têm melhores resultados do que os que se sentem solitários e deslocados.

O Papel do Professor na Resolução de Problemas

Boavida (1993), baseando-se em Stanic e Kilpatrick (1990), indica as várias perspectivas da resolução de problemas, usadas ao longo dos tempos no ensino da Matemática, agrupando-as em três temas gerais:

- *Resolução de problemas como contexto*, onde os problemas são considerados como um meio para atingir uma determinada meta. São ainda considerados cinco subtemas relacionados com este. Deste modo podemos ver a resolução de problemas, como:

- *Justificação*, em que os problemas são incluídos no currículo da Matemática para justificar a necessidade da aprendizagem da Matemática e o papel que esta desempenha nas várias áreas.

- *Motivação*, em que os problemas servem para despertar o interesse pela Matemática e pelo seu estudo.

- *Recreação*, em que os problemas são realizados como actividade lúdica com a finalidade, tal como no tópico anterior, de motivar os alunos.

- *Veículo*, em que os problemas são um meio de ensinar um novo conceito ou competência.

- *Prática*, em que os problemas vêm reforçar os conceitos e competências trabalhados.

- *Resolução de problemas como competência*, em que a resolução de problemas é vista como mais uma das competências a ensinar na escola.

- *Resolução de problemas como arte*, em que a resolução de problemas é encarada, à luz da perspectiva de Polya, como uma competência e uma aptidão que pode ser

trabalhada e desenvolvida com os alunos, nomeadamente, através da prática de estratégias de resolução.

A resolução de problemas pode ser encarada igualmente como uma pedagogia. Acerca deste conceito, Boavida (1993) refere que *“aqui, a resolução de problemas é considerada não como um acréscimo ao currículo de Matemática, mas, simultaneamente, em termos de processo de aprendizagem e de abordagem pedagógica a adoptar na sala de aula para todo o currículo.”* (pp. 113, 114).

Na resolução de problemas como pedagogia, Ernest (1996), citado por Brocardo (2001), caracteriza o papel do professor e do aluno face ao método utilizado. Na tabela seguinte podemos observar as suas propostas:

Método	Papel do professor	Papel do aluno
Descoberta guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com um objectivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objectivo.	Segue a orientação do professor
Resolução de problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno)	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho

Tabela 7. Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (Ernest, 1996, p 32, citado por Brocardo, 2001, p. 122)

O que se destaca na resolução de problemas como pedagogia é que o professor deverá apenas formular os problemas, deixando que sejam os alunos a descobrir a

estratégia de resolução dos mesmos. Para Ernest, os alunos devem, ainda, ser encorajados a pensar de forma crítica.

Boavida (1993), citando Ernest, indica três diferentes visões filosóficas dos professores face à resolução de problemas:

(1) A visão absolutista, em que a resolução de problemas, apesar de ser vista como a realização de tarefas não rotineiras, vem na sequência da exposição dos conteúdos e tem respostas esperadas e pretendidas pelo professor.

(2) A visão absolutista progressista, em que a resolução de problemas é vista como uma forma de aplicar estratégias e algoritmos matemáticos. Os alunos são guiados nas descobertas a realizar.

(3) A visão falibilista, em que a resolução de problemas é vista como uma pedagogia a aplicar na aula. Os alunos são parte activa na formulação de problemas e na resolução dos mesmos, sendo este processo amplamente discutido.

Chapman (1999) partilha uma visão semelhante à de Paul Ernest. Inicialmente, identifica no ensino da Matemática duas abordagens: “Basic-skill Approach”, (abordagem pelas competências básicas) e “Meaning Approach” (abordagem pelo significado).

Na primeira abordagem, o professor tem como objectivo dotar os alunos das competências básicas, isto é, das competências que lhes permitam resolver questões matemáticas operacionais (regras, fórmulas algébricas, procedimentos, entre outros). O método é essencialmente expositivo e os alunos participam, respondendo a questões pontuais colocadas pelo professor. Os exercícios propostos são maioritariamente de cálculo, com enunciados onde predominam verbos como, resolve, determine, calcula, tal como pode ser observado no exemplo seguinte:

7. Resolve a inequação

$$\frac{x-3}{2} + 5 \geq 2x$$

(in *Teste Intermédio de Matemática, 7 de Maio de 2008*)

Na “Meaning Approach”, o professor leva os alunos a adquirirem uma compreensão conceptual ou relacional dos conteúdos e procedimentos matemáticos. Nesse caso, o professor deverá ser um facilitador de experiências significativas que devem incluir o ouvir, o observar, o pensar e o questionar. Os alunos irão construir o seu saber matemático através do raciocínio, comunicação, exploração e colaboração, em grupo, na realização das tarefas propostas. Os enunciados são, em geral, mais longos e retratam situações problemáticas, tais como:

2. Na tabela que se segue estão registados os preços, em euros, a pagar, por dia, num parque de campismo e os descontos especiais para os meses de Julho, Agosto e Setembro.

PREÇOS POR DIA	
(em euros)	
Criança dos 3 aos 12 anos	3,20
Pessoa com mais de 12 anos	5,50
Caravana	5,60
Tenda individual	3,40
Tenda familiar	6,50
Automóvel	5,80
Motocicleta	3,40

DESCONTOS ESPECIAIS		
Mês	Estadia igual ou superior a	Desconto
Julho	25 dias	20%
Agosto	30 dias	10%
Setembro	1 semana	35%

O Martim e a sua irmã Leonor foram acampar com os pais para este parque de campismo.

O Martim tem 13 anos e a Leonor tem 10 anos.

Levaram uma tenda que dá para toda a família.

Decidiram guardar o automóvel dentro do parque de campismo.

Chegaram ao parque no dia 2 de Setembro e só saíram no dia 12 desse mês. Como partiram de madrugada, já não tiveram de pagar a estadia deste dia (12 de Setembro).

Tendo em conta os descontos especiais, quanto é que a família do Martim pagou pela sua estadia no parque de campismo?

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

(in *Teste Intermédio de Matemática, 7 de Maio de 2008*)

Estas duas abordagens podem comparar-se como se mostra na seguinte tabela:

Basic-skill Approach	Meaning Approach
<u>Objectivo do ensino:</u> Entendimento superficial dos factos e mestria nas competências básicas.	<u>Objectivo do ensino:</u> Entendimento conceptual ou relacional e pensamento matemático.
<u>Foco:</u> Factos, regras, fórmulas e procedimentos, i.e., o quê e como.	<u>Foco:</u> Saber explicar conceitos e procedimentos, i.e., o porquê.
<u>Regra do estudante:</u> Memorização através da prática.	<u>Regra do estudante:</u> Construir o saber matemático, através de raciocínio comunicação, exploração e colaboração.
<u>Tarefas de aprendizagem:</u> Realização de exercícios tipo.	<u>Tarefas de aprendizagem:</u> Descoberta através de actividades abertas, problemas e investigações.

Tabela 8. Comparação entre as abordagens “Basic-skill Approach” e “Meaning Approach” (Chapman, 1999, p. 40)

De acordo com Chapman, o professor tem ao seu dispor duas formas distintas para ensinar a resolução de problemas: o ensino para resolver problemas ou o ensino através da resolução de problemas.

No ensino para resolver problemas, a resolução de problemas deve ser interpretada como a aplicação de conceitos matemáticos. Neste ensino, estará mais presente a “Basic-skill Approach”. Uma das consequências desta modalidade é a de o professor decidir que apenas resolve problemas depois da introdução dos conceitos matemáticos. Deste modo, exemplifica, nos problemas a resolver com os alunos, as aplicações dos conceitos que leccionou e procura ilustrar como os procedimentos podem ser aplicados.

Em seguida, o que provavelmente sucede é que os alunos realizam mais actividades propostas, seguindo o método usado pelo professor.

Caso a abordagem usada seja a “Meaning Approach”, as actividades proporcionadas pelo professor interligam aplicações e conceitos. Estes professores permitem que as aplicações tenham um papel importante na introdução dos conceitos, estabelecendo e exibindo a sua utilidade na vida real e desafiando a compreensão dos estudantes.

No ensino através da resolução de problemas, existe uma clara incompatibilidade com a “Basic-skill approach”, visto que não se pretende um ensino que passe largamente pela resolução repetitiva de actividades. As aplicações e os problemas são o primeiro objectivo do ensino e aprendizagem da Matemática. Quando se fala de ensinar através da resolução de problemas, está-se a pensar que um problema ou uma situação de aplicação serve para introduzir conceitos, investigar relações matemáticas, conectar novos e antigos conceitos ou aprofundar ideias matemáticas. Será através destas experiências e processos que os estudantes adquirem as competências básicas e terão oportunidades para desenvolver capacidades de nível mais elevado.

Porfírio (1993), citando Lester (1980), indica algumas sugestões a serem usadas na resolução de problemas. Uma delas poderá ser o desenvolvimento de “capacidades instrumentais específicas”, ou seja, técnicas facilitadoras do uso de estratégias gerais. Neste caso, propõe-se, por exemplo, que o professor comece por mostrar como construir uma tabela para que o aluno o consiga fazer em seguida noutras situações que o justifiquem. Posteriormente, os alunos deverão trabalhar incisivamente na elaboração de tabelas, perceber a sua utilidade, a sua função e o seu papel na resolução de questões.

Outra sugestão, incluiu a resolução, por parte do professor, de problemas diversos para que o aluno tome contacto com as estratégias de resolução de problemas e mais tarde seja ele próprio a aplicá-las em novos problemas.

Na discussão promovida no seminário de Vila Nova de Milfontes, para a renovação do currículo de Matemática, em 1988, foi defendido que a resolução de problemas não deveria ser uma actividade para realizar em paralelo ao ensino curricular da Matemática. Em consonância, era proposto que o professor, na sua prática pedagógica, ensinasse as ideias e conceitos matemáticos, usando como ponto de partida situações problemáticas. Em 1988, concluiu-se que não bastava apresentar os problemas como forma de aplicar os conhecimentos de Matemática, mas que estes deveriam servir como meio para motivar os alunos e para fazer surgir e explorar conceitos matemáticos.

Neste contexto, o papel do professor adquire uma nova dimensão. *“O professor deixará de ter meramente o papel de fornecedor da informação para passar a ser também um organizador das actividades, um facilitador da aprendizagem, um dinamizador do trabalho, um companheiro da descoberta”*. (APM, 1988, p. 58).

Ao professor cabe a escolha das situações problemáticas, que devem ser ricas tanto na perspectiva do desenvolvimento curricular como nas possibilidades de gerar aprendizagens, e a promoção de um ambiente facilitador da actividade matemática que poderá passar pela discussão em grupos das referidas situações.

As iniciativas não devem estar restritas apenas ao professor e as aprendizagens devem também acontecer no seguimento de questões e de sugestões de todos os intervenientes no processo de ensino-aprendizagem.

De seguida, é apresentado um quadro, contendo várias hipóteses de tarefas que poderão ser usadas na sala de aula e as respectivas potencialidades. Não podemos, no entanto, incorrer no erro de decidir quais as tarefas mais importantes no ensino da

Matemática. O professor tem de fazer as melhores opções, ao escolher as tarefas para os seus alunos, devendo ter em conta vários factores, entre os quais, as características de cada tipo de tarefas, as capacidades e os interesses dos alunos.

Características das tarefas	Exemplos	Potencialidades
Natureza fechada	Exercícios, problemas	Importantes para desenvolver raciocínio matemático do aluno, caracterizado por uma relação estreita e rigorosa entre dados e resultados
Natureza acessível	Explorações, exercícios	Concedem ao aluno um elevado grau de êxito e de desenvolvimento da confiança em si próprio
Natureza desafiante	Investigações, problemas	Indispensáveis para que os alunos vivam uma experiência matemática efectiva
Enquadradas em contextos reais	Tarefas de aplicação e de modelação	Importantes para que aluno se dê conta do modo como se utiliza a Matemática em vários contextos e como aproveitar os seus conhecimentos nestes contextos.
Formuladas em contextos matemáticos	Investigações, problemas, explorações	Permitem que os alunos se dêem conta de como se desenvolve a actividade matemática dos matemáticos profissionais.

Tabela 9. Quadro comparativo dos diferentes tipos de tarefas ligadas à resolução de problemas (Ponte, 2004, p. 33)

Vale (1993) refere que a tarefa do professor não fica, assim, necessariamente mais fácil. Os alunos trazem para a sala de aula pré-concepções, que afectam a percepção e

compreensão das situações abordadas, dos fenómenos envolvidos e dos processos a desenvolver. Por sua vez, os professores possuem certas teorias implícitas, que condicionam fortemente o que dizem e realizam nas aulas.

Nas Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (APM, 1994), é defendido que a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação deverão ser amplamente trabalhados pelos professores nas aulas de Matemática. No que concerne à resolução de problemas, é sugerida a utilização de problemas não rotineiros de forma a promover a exploração, a formulação de conjecturas, a observação e a experimentação.

Mais recentemente, o NCTM (2000) atribui ao professor e às suas acções didácticas o papel preponderante no trabalho em resolução de problemas na sala de aula. Este deve resolver problemas activamente, nas suas aulas, tendo o cuidado de seleccionar problemas interessantes e relacionados com o currículo. São apresentadas algumas sugestões que poderão ajudar o professor, na sua prática lectiva, considerando-se que deve ser dada aos alunos a possibilidade de criarem ou seleccionarem alguns problemas a serem resolvidos; ao professor caberá ajudar os seus alunos na compreensão e análise de problemas, incluindo, para o efeito, enunciados com informações supérfluas para a resolução do problema ou problemas com mais de uma solução; ao professor impõe-se, ainda, motivar os alunos, estimulando a comunicação, a colaboração e reconhecendo as contribuições dos alunos para chegar à solução; as resoluções deverão ser revistas e discutidas com todos os alunos na aula de Matemática.

O professor poderá ajudar os alunos a tomarem consciência das suas resoluções se, durante o processo, recorrer à exemplificação, à observação e se for colocando questões. Os alunos devem ser encorajados a monitorizarem-se (tomando consciência daquilo que sabem), a avaliarem-se (para que possam no futuro planear uma estratégia eficaz); devem ser levados a reflectir sobre as suas resoluções, para que adquiram consciência

do que pode ser modificado, sistematizado ou que necessita de ser clarificado; devem também generalizar ou ampliar problemas, ter a percepção de que a resolução de um problema só acaba depois de se “olhar para trás”. Por último, o professor deverá considerar as várias soluções dos alunos, discutindo-as com todos eles, para que seja desenvolvida a aptidão da explicação das suas próprias abordagens.

O NCTM defende que a resolução de problemas deve constituir parte integrante do ensino da Matemática. Desta forma, os programas de ensino devem estar orientados para:

- “ - Construir novos conhecimentos matemáticos através de resolução de problemas;*
- Resolver problemas que surgem em Matemática e outros contextos;*
- Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;*
- Analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas;”*

NCTM (2000, p. 57).

Nas aulas de Matemática torna-se fundamental que o professor recorra à resolução de problemas para desenvolver o raciocínio matemático e o espírito crítico dos alunos, impelindo tanto à aplicação como à compreensão dos conceitos que se vão construindo. Para o efeito, os problemas apresentados poderão ser propiciadores de situações interdisciplinares e/ou relacionados com a vida real, dando significado ao currículo matemático e tendo em atenção as capacidades dos alunos.

Pretende-se, com efeito, que o aluno atinja uma literacia matemática, isto é, que use os seus conhecimentos e competências para resolver situações problemáticas, inseridas num determinado contexto, que é visto como relevante e significativo. Neste processo,

espera-se que os alunos estabeleçam conexões, usem processos matemáticos para procurarem e deslindarem soluções e que percebam a utilidade e o valor da Matemática no mundo que os rodeia.

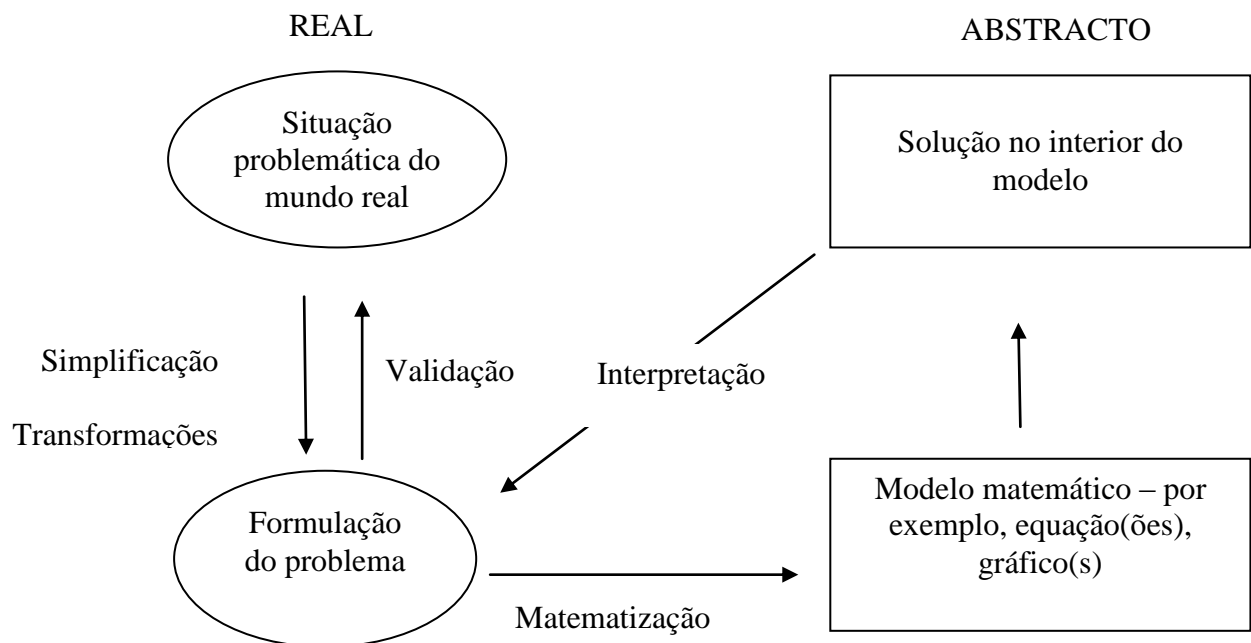


Fig. 6. O ciclo da modelação matemática (NCTM, 1994, p. 165).

A questão da avaliação

Ao introduzirmos a resolução de problemas na aula de Matemática teremos de estar preparados para pensar na melhor forma de a avaliar. Se o aluno deixou de ser um espectador e um receptor de informação ou um reproduzidor de mecanismos estereotipados e passou a construir o seu conhecimento, como forma de realizar as suas aprendizagens, é de esperar que o processo de avaliação também seja reformulado relativamente à avaliação tradicional.

O NCTM (1994) sugere que se avalie os alunos de forma sistemática e contínua, de modo a promover a sua confiança na capacidade de resolver problemas. Ser capaz de trabalhar num problema deve pressupor as várias etapas constantes da resolução de problemas: formulação, procura de estratégias de resolução, verificação e interpretação de resultados. É ainda necessário avaliar e valorizar a comunicação oral e escrita e a perseverança face ao problema.

Charles et al. (1987), citados por Vale (1993), aconselham uma avaliação que tenha em atenção os diferentes estilos de aprendizagens dos alunos, para que estes possam apresentar os seus conhecimentos de várias formas e vejam que o professor está aberto a aceitar diferentes processos de resolução. A avaliação deve contemplar as capacidades evidenciadas e a utilização de estratégias distintas para a resolução de problemas, bem como atitudes e concepções que se integram com a actividade matemática originada no âmbito da resolução de problemas.

Como formas de avaliação dos alunos no domínio da resolução de problemas são sugeridos: a análise de trabalhos escritos (composições, relatórios, etc.); observação directa e colocação de questões no decorrer do processo de resolução de problemas; entrevistas e conversas em torno de problemas; auto-avaliação; testes, incluindo testes de escolha múltipla ou testes com espaços para preencher.

Aquando da observação directa, poderá ser útil ao professor o recurso a uma grelha de observação, onde poderá colocar apontamentos dos aspectos mais relevantes. Poderá também usar uma *checklist*, contendo vários objectivos, que serão assinalados caso o aluno atinja a competência ou o objectivo esperado.

No que diz respeito aos trabalhos escritos, o professor poderá munir-se de uma escala holística que defina critérios relativos à resolução de problemas e que possam ser observados.

Kilpatrick (1992), citado por Porfírio (1993), defende que uma forma eficaz para avaliar os alunos na resolução de um problema é pedir-lhes para descrever por extenso a forma de solucionar o problema. Desta forma, o professor avalia a forma de comunicar do aluno, distinguindo igualmente o seu nível de compreensão da situação e dos procedimentos usados para resolver o problema.

A avaliação não deve, em caso algum, ter um carácter penalizador. O seu principal objectivo deve ser o de melhorar as aprendizagens dos alunos e o de fornecer ao professor informações para que possa reorientar o seu ensino da resolução de problemas.

Santos (2004), sugere que numa avaliação ao serviço da aprendizagem deve ser dada especial importância à comunicação. Neste sentido, o professor poderá colocar questões ao aluno, no decorrer da resolução de problemas, para que este regule a sua actividade e a sua aprendizagem. Trata-se de uma forma muito importante de avaliação formativa que decorre da interacção entre aluno e professor. A autora refere que encontrar uma questão adequada a cada situação não é, de todo, tarefa fácil. Em primeiro lugar, o professor deve recolher informação que lhe permita perceber qual a situação que está a ser experimentada pelo aluno e, em seguida, terá de formular e colocar a questão. O professor terá ainda de ter em atenção alguns factores. Se colocar perguntas fechadas, pode levar o aluno a responder-lhe irreflectidamente sem ter melhorado a sua compreensão; se fizer sempre a mesma pergunta, o aluno vai mudando de opinião até chegar à resposta correcta, não compreendendo afinal onde está a errar.

Nesta perspectiva, sugerem-se as questões abertas para que o aluno compreenda o que deve fazer. Vejamos alguns exemplos: “O que fizeste?”; “Porque tomaste essa opção?”; “De onde surgiu essa ideia? ”; “Se quisesses convencer alguém dessa ideia, o que lhe dirias?” (Santos, 2004, p. 160). Este tipo de questões ajuda os alunos na sua

aprendizagem, desenvolvendo a sua actividade de metacognição e, quando efectuadas sistematicamente, podem vir a desenvolver a autonomia do aluno e a capacidade de serem eles a colocar questões a si próprios.

O ambiente promovido pelo professor nestas aulas deve permitir que o aluno também ponha questões livremente e exponha as suas dificuldades, sem medo de ser humilhado ou penalizado. Deste modo, o professor estará a contribuir para o aumento da confiança do aluno em si próprio, estimulando com isso uma atitude mais positiva e, por consequência, maior interesse pela aquisição de novos conhecimentos.

A autora refere também a necessidade da realização de avaliação sumativa que certifique até que nível as aprendizagens foram consolidadas. Para isso, o professor poderá recorrer a um teste, uma prova ou trabalho escrito. Este poderá ser apreciado, por exemplo, com uma escala holística, havendo a possibilidade de associar à atribuição de um nível uma segunda fase, em que o aluno tenha a possibilidade de rectificar os erros que cometeu, para que estes não voltem a ocorrer, ou de melhorar o que já foi capaz de fazer.

Em seguida, é apresentado um exemplo de uma escala holística, proposta por Leal (1992, citada por Santos, 2004, p.164), para a classificação da resolução de problemas:

Escala de classificação holística

- 0- Não respondeu.*
- 1- Tentou mas não aplicou a estratégia mais adequada.*
- 2- Tentou definir uma estratégia mas não a desenvolveu.*
- 3- Estabeleceu uma estratégia adequada e aplicou-a de forma satisfatória.*
- 4- Estabeleceu uma estratégia adequada e aplicou-a com sucesso.*

Porfírio (1993) menciona os investigadores do Califórnia Assessment Program que desenvolveram escalas de classificação de resolução de problemas “de forma a

minimizar possíveis inconsistências resultantes da inadequação das escalas de classificação” (p. 45). Assim, utilizaram, além da escala geral, escalas adaptadas a cada problema. Estas últimas foram construídas tendo em conta os seguintes parâmetros (Porfírio, 1993, p. 46):

- (1) *Análise do problema e soluções desejáveis;*
- (2) *Classificar, de forma holística, um grande número de soluções para cada problema de 0 a 6;*
- (3) *Descrever as características das soluções a que foi atribuída uma determinada pontuação;*
- (4) *Discutir essas descrições.*

Resumidamente, a avaliação da resolução de problemas é importante para que o aluno adquira confiança no trabalho que realiza e, ao mesmo tempo, tenha a noção de que os erros que comete podem ser corrigidos, melhorando o seu desempenho no futuro. Formativa ou certificativa, a avaliação não deverá, porém, ser de carácter penalizador ou destruidor. É importante que o professor se muna de diferentes instrumentos de avaliação para que seja justo no juízo que efectua acerca do desenvolvimento dos seus alunos e para que reformule, de forma adequada, o ensino das estratégias de resolução de problemas. O processo de avaliação deve ser dirigido, sobretudo, para a compreensão das estratégias usadas pelo aluno para chegar à solução (isto é, deve estimular o raciocínio matemático e a metacognição).

Dificuldades na Resolução de Problemas

As dificuldades, apresentadas pelos alunos na resolução de problemas são variadas e dependem dos vários factores inerentes ao resolvidor e ao problema apresentado. Apesar de bem patentes em muitas aulas de Matemática, as verdadeiras dificuldades não estão determinadas com exactidão e não se conhecem em toda a sua amplitude. Apenas é possível citar algumas investigações que apontaram determinadas causas, como as prováveis, dos impedimentos que o resolvidor encontra para chegar a uma solução inteiramente válida.

A primeira dificuldade com que os alunos se deparam ao tentar resolver um problema, será, em muitos casos, a interpretação do enunciado e da situação apresentada no mesmo. Para o aluno, um conjunto de frases com uma determinada sequência, encadeamento e carregando múltiplas e variadas informações, poderá não ter exactamente o significado que se pretende ou se imagina e o texto poderá não fazer sentido para o aluno, por assim dizer. A linguagem que usamos no dia-a-dia aplicada num contexto matemático adquire um novo significado que nem sempre é familiar ou acessível ao aluno. Também a linguagem empregue pelo professor na sala de aula poderá não ser compreendida da mesma forma por todos os alunos.

Existem também desfasamentos entre a Matemática oral e a que efectivamente escrevemos. A comunicação matemática (sobretudo entre alunos) nem sempre é feita correctamente e rigorosamente, pelo que o significado do que é dito poderá não ser interpretado da mesma maneira por todos.

Steinbring (1998), defende que a compreensão matemática está dependente de que o aluno decifre sinais e símbolos. Em especial, considera que existem dois tipos de sinais e símbolos: os matemáticos (códigos, letras, variáveis, gráficos, diagramas, etc.) e

os sociais (pistas escondidas, confirmações, rejeições, reforços, etc.) transportados pelo professor ou pelo próprio aluno.

Para este autor, no decorrer de uma aula, quando os alunos estão a construir conhecimento matemático, existe uma associação interactiva que é baseada numa estrutura nem sempre cientificamente correcta mas que organiza e torna legítimo o processo de compreensão, através de um entendimento partilhado. Perceber um conceito ou problema durante a aula, não é só entender a intenção dos símbolos matemáticos empregues. As interpretações correctas e adequadas podem depender das convenções sociais dos alunos. Um aluno necessita de perceber, não só os conceitos matemáticos, mas também enquadrá-los nos seus próprios padrões sociais/culturais e de ter em conta as metáforas que estão a circular na comunicação. O professor introduz na aula um registo próprio e pessoal e cada indivíduo interpreta-o, num registo também próprio que nem sempre corresponde ao do professor e daí se percebe que existam muitas divergências entre o que é ensinado e o que é aprendido.

Ao deparar-se com um problema, um aluno poderá não entender o enunciado se, por acaso, a situação colocada não se enquadrar dentro do seu repertório de experiências culturais e sociais. Voltemos, assim, ao problema do parque de campismo (anexo 11), a que já fiz referência, na página 63. Supondo que um aluno nunca foi acampar, é natural que se interrogue se deve somar o valor da tenda para determinar o custo do parque, caso seja referido que se leva uma tenda de casa. Por sua vez, os seus modelos sócio-culturais também poderão influenciar a sua capacidade de verificação da resposta. Se o aluno nunca foi acampar e chega a um resultado de 29 euros para um total de 10 dias, pode, eventualmente, achar que não é um valor descabido no contexto do problema.

Pimm (1987) desenvolveu vários trabalhos, na área da linguagem e da comunicação matemática, onde colocou como hipótese a ideia de a Matemática poder ser encarada como uma língua e observou os aspectos orais e escritos da mesma.

Dos seus estudos, conclui que existem várias diferenças entre a linguagem falada pelos alunos e pelos professores, diferenças entre o que é dito na sala de aula e o que é realmente aprendido pelos alunos e até entre o que é dito e a forma como é escrito. O seguinte esquema faz uma síntese desta perspectiva de Pimm e dos paralelismos que estabeleceu.

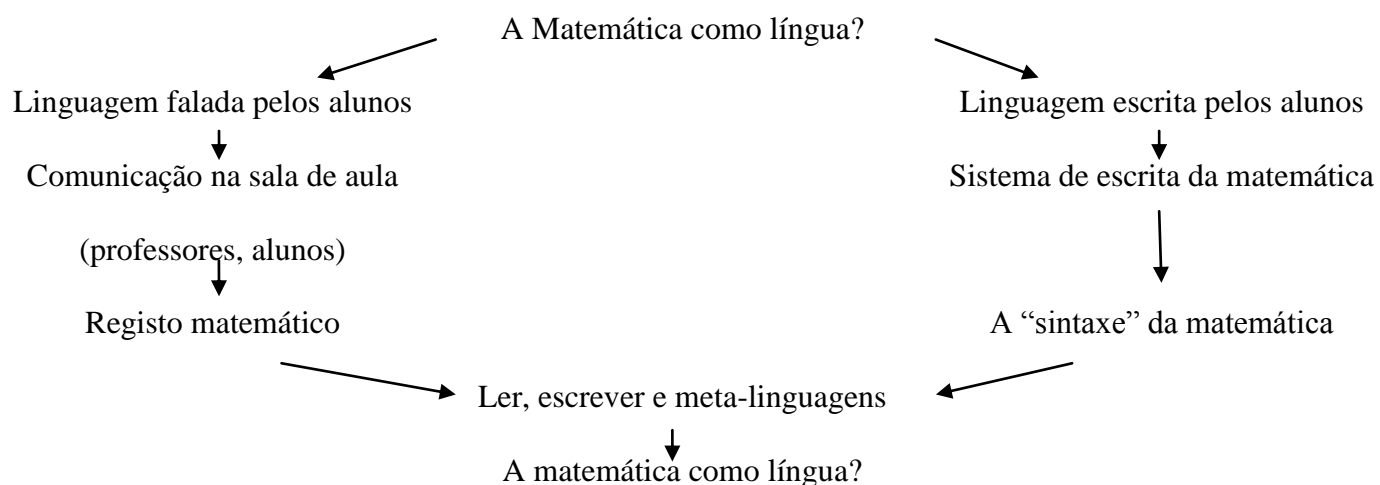


Fig. 7. Linguagem oral e escrita de alunos e professores (Pimm, 1987, p. 15)

Este esquema de Pimm começa por introduzir a Matemática como uma língua, dado que apresenta significados, símbolos e sintaxe próprios. Embora Matemática não seja uma língua como é o Português ou o Inglês, tem um sistema complexo de escrita que obedece a regras próprias.

No que respeita ao significado, sabemos que quando é colocada uma questão nem todos a interpretamos da mesma forma e as respostas podem ser diversas e nem estarem correctas. Por exemplo:

Professor: Qual a diferença entre 50 e 5?

Aluno 1: São ambos múltiplos de 5.

Aluno 2: Um é par outro é impar.

Estas respostas sugerem uma certa forma de compreensão do termo diferença, que o professor estaria a usar no sentido matemático de subtracção.

A Matemática tem também uma simbologia própria e os alunos focam-se por vezes mais nos símbolos, em termos de linguagem, do que no significado desses símbolos. Vejamos um exemplo dado por Pimm:

Professor: Seja x um número.

Aluno: Mas x é uma letra!

Este é um problema que surge porque os símbolos são abstractos, gerais, abrangentes e, como tal, difíceis de perceber para muitos alunos.

Em termos de sintaxe, a álgebra, por exemplo, pode ser vista como uma manipulação de símbolos que obedecem a certas regras (a gramática das expressões simbólicas). Por exemplo, $(a+b)^2$ não é o mesmo, na maioria das vezes, que a^2+b^2 . Mas para que isso se torne claro para os alunos eles têm de ser capazes de operar com familiaridade os símbolos, caso contrário, não estarão em condições de interpretar ou de verificar cálculos.

Ao analisar a linguagem dos alunos, Pimm constatou que o seu discurso oral e informal fica muitas vezes inacabado, tornando-se vago e incompreensível para os outros. Por exemplo:

Professor: Como se desenvolve $(a+b)^2$?

Aluno: aahh... faz-se o primeiro termo ao quadrado...multiplica-se o dois pelo a e pelo b e faz-se o último termo ao quadrado....

Frequentemente, para que uma frase seja percebida por todos da mesma forma, tem de ser várias vezes reformulada. Outra constatação que surge no discurso da sala e aula é a de que, numa discussão em grande grupo, os alunos tendem a dirigir-se apenas para o professor, não realizando difusão de intervenções, mas sim várias conversações individuais entre cada aluno e o professor. Concluiu também que quando os alunos expõem as suas dificuldades em voz alta, acabam por encontrar, muitas vezes, a resposta no seu próprio discurso. Por outro lado, falar com os colegas ou para o professor, encoraja a reflexão, pois há a necessidade de ter um discurso coerente perante os outros. Outra sugestão para melhorar a compreensão de uma frase é falar para si próprio, repetindo a mesma informação várias vezes para ajudar a clarificar uma ideia ou a fixá-la.

Pimm constatou também que ao chamar um aluno para responder a uma questão, o professor poderá estar a criar uma situação de intimidação e o canal de comunicação é alterado. O professor funciona como controlador pois é conhecedor da linguagem própria da Matemática e, como tal, influencia a linguagem usada pelo aluno.

A linguagem usada pelo professor é vista pelos alunos numa função sócio-cultural. Os alunos entendem-na como uma linguagem típica apenas dos professores que usam convenções diferentes das dos alunos. Por exemplo, os alunos não recriam frases como a que se segue:

$(a+b)^2$ desenvolve-se, somando o quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto do primeiro termo pelo segundo com o quadrado do segundo termo.

Porém, embora as convenções dos alunos não sejam as cientificamente correctas, é importante reconhecer que poderão permitir-lhes a percepção do propósito da actividade.

No que diz respeito ao registo matemático, no que apelida de processo da metaforização, Pimm faz uma analogia entre as metáforas e a linguagem matemática. O discurso matemático é distinto do discurso corrente, porque envolve termos matemáticos misturados com palavras do dia-a-dia, atribuindo a estes, significados diferentes daqueles com que contactamos diariamente. A linguagem matemática adquire, por este motivo, um estatuto de metáfora onde as palavras que usamos diariamente adquirem novos significados.

Quando se deparam com estas “metáforas”, na Matemática, os alunos podem considerá-las como incertas e portanto não ajustadas ao trabalho matemático. Muitas vezes, ocorrem confusões pois são feitas diferentes interpretações linguísticas dos enunciados dos problemas. Mesmo no decorrer de uma aula, o professor poderá estar a empregar palavras com um determinado sentido matemático e os alunos estarem a interpretá-las como linguagem comum do dia-a-dia. Sabemos que a definição de sucessão limitada é diferente da definição de sucessão com limite e, no entanto, em linguagem corrente, ter um limite é sinónimo de ser limitado. Analogamente, ao pedirmos a um aluno para fazer uma análise de um texto não temos em mente a mesma actividade do que quando pedimos ao aluno analisar um gráfico em Matemática.

A linguagem escrita dos alunos é ainda reveladora de muitas incorrecções. Antes de mais, não é fácil transcrever ideias em Matemática de um discurso oral para a linguagem escrita. As representações em Matemática não são só palavras escritas e incluem também representações simbólicas. Se o professor indicar ao aluno: “considere um número e some-lhe 5 unidades”, este terá de estar familiarizado com a noção de que

“um número” é a incógnita e deve ser designado por uma letra, a ou x , ou outra. Por sua vez, para ler e decodificar a escrita matemática (fértil em símbolos) e ser capaz de a transformar em linguagem corrente é necessário um domínio da simbologia matemática.

O sistema de escrita matemático, no entanto, tem um enorme poder: permite fazer manipulações e avançar mais rápido no decorrer da actividade matemática. O sistema de escrita próprio, a que podemos chamar sintaxe, permite, através do uso de símbolos, concentrar e compreender muita informação sem estarmos preocupados com os objectos concretos a que nos estamos a referir. Para o efeito, temos de obedecer a regras já estipuladas, que nos permitem manipular os símbolos como se fossem os ditos objectos. Por exemplo, tomemos a questão: “Um número mais a sua terça parte é igual a quatro; qual é esse número?”. Em Matemática, podemos resolver o problema fazendo $x+x/3=4$, mas para resolver a equação é ainda necessário saber as regras da resolução de equações.

Saitta et al. (1996) defendem que é necessário ter em conta a relação entre as aprendizagens efectuadas pelo aluno e o conhecimento científico veiculado. Os significados que o aluno constrói, quando está a interpretar situações reais, podem não ser os adequados. Ao interpretar uma determinada situação real o aluno cria um “modelo” dessa situação, que depende sempre do seu ponto de vista. Desta forma, selecciona os dados do problema que julga adequados, segundo a sua perspectiva e vivências pessoais e sociais. Isto implica imediatamente que a resolução da situação pode não ser a adequada, caso o aluno faça uma interpretação incorrecta de um determinado termo. Tomemos, como exemplo, o significado de “semelhança” no contexto de um problema matemático. Em termos científicos esta expressão não tem o mesmo significado do que na vida corrente e a resposta correcta a uma questão que empregue estes termos dependerá da forma como a informação é entendida pelo aluno.

Outro exemplo poderá ser o da palavra “quadrado”, que na linguagem corrente e no uso coloquial raramente é visto como um rectângulo.

Também na linguagem escrita parecem existir inúmeras subtilezas. Num texto matemático, poderá haver palavras empregues num registo matemático e palavras da linguagem comum. Neste tipo de texto poderão ainda existir símbolos que formam o sistema de escrita matemático (por exemplo, $2+3$ poderá ser lido como dois mais três ou três adicionado a dois, etc.). Para poder ler e entender esta simbologia matemática é necessário estar familiarizado com ela e com as suas múltiplas variantes.

Durkin (1991) reitera que os significados do que queremos transmitir são muitas vezes complexos e as palavras que escolhemos para os transmitir são, frequentemente, dotadas de outros significados.

Para Durkin os alunos têm dificuldades no vocabulário matemático, na troca directa de palavras num registo matemático e em seguir instruções que envolvam termos matemáticos. A linguagem corrente traz as suas próprias regras e exigências, que nem sempre estão em correspondência com as regras e as exigências da Matemática. Defende, ainda, que é errado supor que existe um estágio de maturação em que os aspectos linguísticos da aprendizagem da Matemática deixam de ser problema. É evidente que para comunicar matematicamente – a qualquer nível – é necessário comunicar linguisticamente.

Pirie (1991) analisou as diferenças entre a linguagem falada e a escrita na resolução de problemas por pares de alunos. Verificou que, para os alunos, não era claro qual o registo que deveriam usar ou qual o registo que seria efectivamente funcional.

Algumas questões, que não são levantadas pelos alunos, são cruciais na comunicação matemática, no decorrer da resolução de problemas, como sejam: Serão as convenções relevantes na sala de aula? Será a conversação entre aluno e professor a

apropriada? Até onde os participantes de uma discussão, usando a mesma linguagem, estão a descrever o mesmo conceito matemático? Será a linguagem do dia-a-dia a mais apropriada, neste processo?

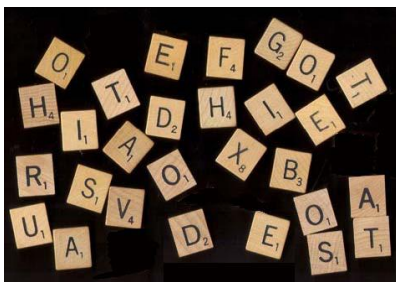
Para esta autora ficou claro que a linguagem na resolução de problemas não poderá ser a linguagem completamente formal, uma vez que esta é sobretudo simbólica e escrita e é indispensável a utilização de um registo oral menos rígido.

Quando falamos da compreensão matemática, Sierpiska (1994) defende que os objectos matemáticos (que necessitam de entendimento em Matemática), são constituídos por meio de actos de compreensão. Os conceitos abstractos e algumas relações podem não ser comunicados de forma evidente e pronta. Com frequência, o aluno não é capaz de identificar o que tem de compreender, pois nem sempre o objecto de compreensão é claro nos primeiros actos de compreensão. Apenas um processo de compreensão pode levar a uma forma de classificação e identificação do objecto e, para o efeito, tem de haver a sensação de que há algo para compreender.

Existe, no seu entender, compreensão quando se reconhece algo, classificando-o, ordenando-o, colocando-o entre objectos semelhantes. Por exemplo, se deparamos com um triângulo rectângulo em que nos são fornecidos os comprimentos de dois lados, consideramos estar perante uma situação em que fará sentido aplicar o teorema de Pitágoras. Para certos alunos a compreensão de uma noção matemática poderá ocorrer se já tiverem ouvido falar nesse teorema (desde que, evidentemente, esta memória seja activada, ao conseguir relacionar-se com o contexto dado).

A compreensão científica é caracterizada por reduzir a complexidade, unificar e efectuar simplificações, usando algumas leis gerais. Para haver compreensão, o aluno terá de juntar várias informações, num todo que faça sentido. Vejamos este exemplo:

O Emanuel sugeriu aos colegas que jogassem “scrabble”. O jogo consiste em retirar um determinado número de peças ao acaso (como as da figura) de um saco e formar uma palavra. Na imagem podes ver as peças que sobram dentro do saco, num determinado momento do jogo. O Emanuel retirou quatro letras do saco e formou a palavra gota.



Qual a probabilidade de a próxima letra retirada ao acaso do saco ser um T?

(In *1000 Itens*, GAVE)

O aluno terá de identificar que existem 28 letras no total e que destas 4 são letras *t*. Para calcular a probabilidade pedida, há que retirar 4 letras das 28 que existem e um *t* dos 3 existentes. Só após o reconhecimento de todas as informações, será possível chegar à solução correcta.

O objecto que requer compreensão nem sempre é o mesmo para professor e alunos. O que para o professor é um método algébrico adequado para resolver determinados problemas, para o aluno poderá ser visto como um procedimento mecânico, uma maneira estereotipada de chegar a algum resultado que o aluno viu ser aplicada, em vários momentos, nas aulas de Matemática. Consideremos um exemplo elucidativo no ensino da programação linear. Para resolver qualquer problema de programação linear é necessário seguir um algoritmo próprio: definir as variáveis; definir as restrições; definir a função objectivo; representar a região admissível e determinar a solução

(analiticamente ou graficamente). Para os alunos, muitas vezes, este passa a ser um processo mecânico em que a maior dificuldade reside em definir a função objectivo.

Exemplo1: *Uma fábrica manufactura duas espécies de patins para o gelo: patins A de competição e patins B de demonstração. Na tabela podemos saber o tempo que é necessário para a elaboração de cada tipo de patins.*

<i>Tipo de patins</i>		
<i>Tempo (em horas)</i>	<i>Patins A</i>	<i>Patins B</i>
<i>Fabrico</i>	<i>6</i>	<i>4</i>
<i>Acabamentos</i>	<i>1</i>	<i>2</i>

O departamento de fabrico tem, no máximo 120 horas disponíveis por dia e o departamento de acabamentos não tem mais de 40 horas/dia. Se o lucro de venda de cada patim A é de 10 € e o lucro de cada patim B é de 12 €, quantos patins de cada devem ser manufacturados cada dia para maximizar o lucro? (assumindo que todos os patins que são fabricados são vendidos). (in XeqMat 11º ano vol I, Texto Editora, p.177)

Os alunos fixam que o objectivo é, habitualmente, maximizar os lucros ou minimizar os custos, elementos que neste tipo de problemas são fáceis de identificar. Esta tarefa deixa de ter um carácter exigente do ponto de vista cognitivo, para passar a ser vista uma estratégia que não requer grande investimento intelectual. Mas esse investimento intelectual poderá vir a ser necessário numa situação em o objectivo não é o esperado pelo aluno, como no exemplo seguinte.

Exemplo 2: Para um desfile de Carnaval, uma turma de 11º ano conseguiu que uma fábrica disponibilizasse 16 metros de tecido com bolas, 11 metros de tule e 15 metros de cetim. Uma modista propôs-lhe a confecção de dois tipos diferentes de fato, A e B. A tabela seguinte informa a quantidade de matérias para confeccionar os dois fatos.

<i>Quantidade em metros</i> <i>Fato</i>	<i>Tecido</i>	<i>Tule</i>	<i>Cetim</i>
<i>A</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>B</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>

Qual o número máximo de fatos que podem ser confeccionados? (in XeqMat 11º ano vol I, Texto Editora, p.177)

A compreensão de um problema assenta na identificação do que é dado, na identificação do que deve ser encontrado e passa até por reconhecer em que categoria se insere o problema. Muitas vezes, o objectivo é identificar onde está a dificuldade para se poder, depois, procurar uma estratégia adequada para a ultrapassar. O professor ensina as definições, os factos e teoremas, exemplifica e mostra situações de aplicação, propõe questões, sugere problemas, mas caberá ao aluno, mais tarde ou mais cedo, compreender como e onde deve aplicar esse conhecimento.

Sierpinska, refere, ainda, que para entender um texto matemático é necessário perceber o significado das definições matemáticas. Por exemplo, se um aluno lê um texto em que se refere uma homotetia, a ausência da compreensão do significado de homotetia, impedirá o entendimento do texto.

Blanco (1997), na sua investigação, questionou os resolvedores acerca das dificuldades que tinham encontrado na resolução de problemas e as respostas que obteve centraram-se na compreensão do que era pedido, nos passos que tinham de seguir para chegar à solução, na formulação e no planeamento de uma estratégia de resolução.

Outras dificuldades identificadas pelos resolvedores de problemas e professores foram as seguintes:

- a) A capacidade inata dos resolvedores de problemas: a falta de aptidão, inata para alguns, foi apontada como um factor inibidor, quando se procura uma estratégia eficaz para a resolução de um problema.
- b) As estratégias de resolução: a resolução, baseada em problemas tipo, condicionou as ideias no que respeita às estratégias de resolução de problemas. Mesmo seguindo, por exemplo, as heurísticas de Polya, aquando da primeira fase, os passos pareciam não ser os suficientes para ajudar a encontrar o caminho da resolução.
- c) A comunicação: é valorizada a falta de tempo que se dedica à discussão da resolução problema. Uma vez resolvido o problema, nem sempre é refeito o caminho seguido e explicadas convenientemente as tomadas de decisão (que poderiam ter sido outras, subsistindo a dúvida se não estaria correcta outra forma de resolução).
- d) Falta de prática na resolução de problemas: alguns alunos aprendem por repetição, logo é necessário ter uma experiência de resolução de muitos problemas, anteriormente.
- e) Má experiência, no que respeita à avaliação na resolução de problemas: os alunos tornavam-se obcecados por atingir um resultado correcto e por alcançar um

nível positivo de desempenho. Muitas vezes, apenas é avaliado o resultado final, não os passos intermédios. Esta situação poderá ser valorizada negativamente e influenciar a atitude para com a Matemática. Em particular, pode criar a sensação de que não vale a pena tentar resolver o problema, pois raramente se consegue chegar à solução correcta.

Também Fonseca (1997) efectuou um estudo com o objectivo de identificar as dificuldades encontradas no processo de resolução de problemas. Para este estudo, foram implementadas estratégias de resolução de problemas, semelhantes às propostas por Polya. As principais dificuldades diagnosticadas foram:

- a) Resolução de sub-problemas quando estes não são explícitos.
- b) Ausência de uma avaliação da resposta obtida, não permitindo detectar as falhas cometidas.
- c) Generalizar conceitos e apresentar conjecturas.
- d) Trabalhar simultaneamente com várias condições do problema.
- e) Selecção da(s) condição(ões) chave para a resolução do problema.
- f) Compreensão dos conceitos matemáticos
- g) Reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

Algumas dificuldades eram agravadas pela falta de domínio dos conceitos matemáticos, pela falta de hábito de reflexão acerca do trabalho desenvolvido e pela falta de registo de algumas das conclusões a que os alunos chegavam.

Apesar dos resolvedores estarem familiarizados com o processo de resolução de problemas, nem sempre elaboravam um plano para a resolução dos mesmos. As suas concepções acerca de si mesmos, não permitiram por vezes o sucesso desejado – sentiram que não dominavam os conceitos matemáticos (concluindo, até, que o facto de

saberem ou não Matemática, poderia não ter utilidade na resolução de problemas). Tiveram dificuldades em inovar, experimentar e particularizar.

Abele (1998) indica uma explicação para o facto de os alunos não conseguirem implementar estratégias de resolução de problemas. Do seu ponto de vista, perante um problema, a cada proposição que aparece, podem ser feitas várias associações. Quando os alunos tentam traduzir as proposições nas fases necessárias para a resolução do problema consideram apenas a primeira das associações possíveis. Esta primeira possibilidade é vista como única. Por isso, caso esteja errada, essa rigidez leva a que a resolução do problema não seja conseguida. Por outro lado, nem sempre o aluno tem a capacidade de considerar todas as associações que podem ser realizadas, para que possa seleccionar a correcta. Em muitos casos, o aluno acaba por se deter numa associação supérflua e isso impede-os de levar a resolução do problema até à fase seguinte.

O estudo PISA 2003 identificou que os alunos portugueses tinham maior dificuldade em questões onde fosse exigido um nível de reflexão elevado, nomeadamente, em problemas onde fosse necessário conjugar diversas informações ou em que os conceitos fossem mais abstractos. Neste leque de situações, englobam-se os casos em que a informação deverá ser retirada de um gráfico. Os alunos apresentaram dificuldades em analisar gráficos para produzir uma argumentação, ou para elaborar uma fundamentação, bem como em considerar mais do que um gráfico em simultâneo.

Outro obstáculo, na resolução de problemas, prendeu-se com a utilização de processos de contagem que decorreram da interpretação de informação essencial fornecida no enunciado, bem como de raciocínio combinatório. Foi também identificada dificuldade na realização de raciocínios que envolvessem transformações entre variáveis e apreciação conjugada do papel das mesmas.

Cruz e Carrillo (2004) efectuaram uma investigação para perceber o que aprendiam os alunos acerca da resolução de problemas. Este estudo envolveu alunos do 7º e 9 anos e na análise dos resultados foi usado o modelo de Schoenfeld, referido anteriormente, que especifica 4 categorias para caracterizar a resolução de problemas (recursos, heurísticas, controlo e crenças).

Nesta investigação, houve alguns alunos a conseguirem solucionar os problemas sem fazerem uso de todos os recursos de que dispunham, mas houve outros que não apresentaram uma solução válida para o problema e também não mobilizaram recursos eficazes para obterem um resultado correcto. Logo, embora os alunos disponham aparentemente dos recursos para resolverem os problemas, nem sempre os usam ou os conseguem aplicar de forma correcta.

Quanto às heurísticas, os alunos apresentaram muitas fragilidades na representação da informação disponível. Raramente recorreram a materiais manipulativos e não desenharam figuras que os ajudassem na resolução dos problemas. As figuras apenas eram usadas no caso de já se encontrassem no enunciado, sendo que, também então, eram exploradas de forma pouco exaustiva e criativa.

Houve poucas evidências do uso de heurísticas de verificação e quando estas eram realizadas limitavam-se apenas à verificação dos cálculos (da fase de execução). Os alunos não colocavam em hipótese ter cometido erros no planeamento ou na exploração do problema, como demonstra o esquema que se segue.

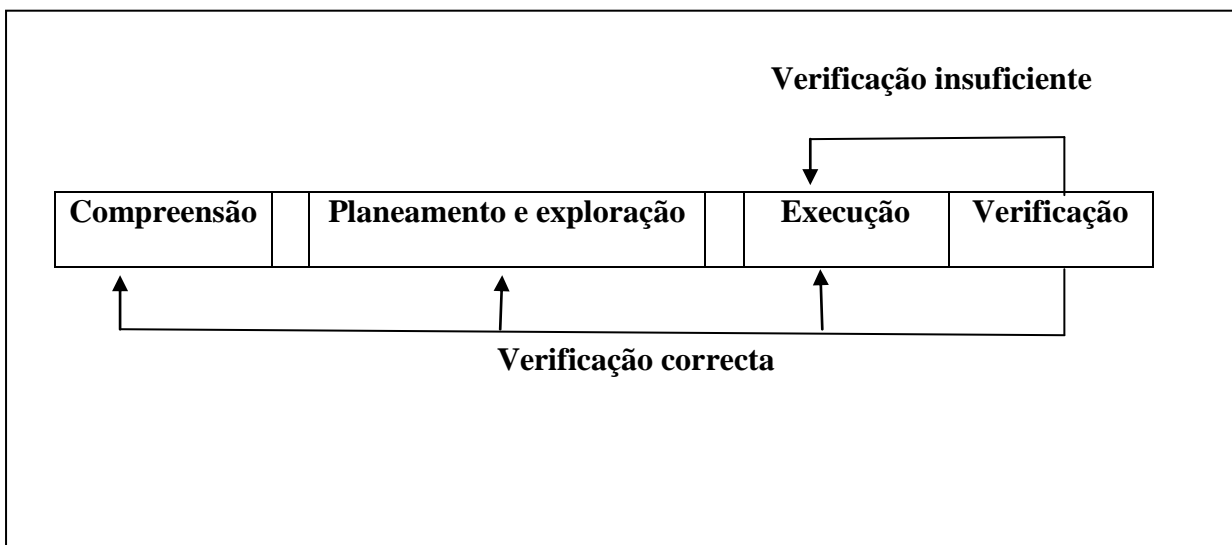


Fig. 8. Aplicação incorrecta e correcta de heurísticas de verificação (adaptado de Cruz & Carrillo, 2004, p.112)

Ao identificar as principais dificuldades dos alunos na resolução de problemas, os vários autores pretendem fornecer informações úteis que possam ser usadas pelos professores na sua actividade docente. O professor poderá, com estes elementos, melhorar e enriquecer a sua prática pedagógica de forma a colmatar muitas das falhas que diariamente encontra. Antes de mais, caber-lhe-á fornecer aos alunos problemas variados e ricos, que fomentem processos cognitivos de nível mais elevado. Além disso, será importante fornecer sugestões de métodos de resolução dos mesmos, promover discussões acerca das tomadas de decisão nos vários passos que levam à resolução do problema (para que não subsistam dúvidas acerca do trabalho realizado e dos vários caminhos possíveis de serem adoptados).

É bastante seguro afirmarmos, a partir da investigação disponível, que o aluno, ao ter a experiência de resoluções bem sucedidas, ganha confiança em si próprio, nos seus saberes e na sua capacidade de os aplicar, podendo, no futuro, sentir confiança para superar novos desafios que lhe sejam colocados.

Capítulo III

Metodología

Opções Metodológicas

De acordo com os objectivos do estudo e, simultaneamente, com o quadro teórico da investigação, a metodologia adoptada contemplou a recolha organizada e a análise de dados, assente na leitura e interpretação de informação qualitativa. As questões levantadas, no âmbito do problema de investigação, centram-se nas dificuldades dos alunos na resolução de problemas de Matemática, considerando o trabalho realizado na sala de aula, numa turma do 9º ano.

A investigação quantitativa considera que a realidade é objectiva, podendo ser mensurada estatisticamente ou, de alguma forma, quantitativamente. Baseia-se na formulação do problema e das hipóteses a testar, dando notoriedade à amostra representativa, tendo como propósito a generalização dos resultados a uma população.

No final da década de oitenta, princípio da década de noventa, aparecem novas perspectivas em oposição a esta corrente. Os seus defensores são os que se colocam e apostam numa visão pós-modernista da ciência e da investigação, como por exemplo, Boaventura Sousa Santos (1989), entre outros. Refiro-me em particular à perspectiva interpretativa, baseada na fenomenologia (Ponte 1994) que não pretende a quantificação dos fenómenos, mas tem como grande premissa que qualquer estudo tem um cunho pessoal e terá como factor de autenticidade a inclusão do sujeito e da visão subjectiva da pessoa sobre determinado assunto ou acontecimento.

Da perspectiva anterior, nasce e ganha credibilidade a investigação qualitativa que recorre a uma variedade de novos processos, como: empírico-dedutivos (as generalizações são efectuadas sobre a prática); observantistas (observação-acção) e hermenêuticos (interpretações de textos, entrevistas, questionários, etc.) (Sousa, 2005).

A metodologia qualitativa tem como propósito compreender o sentido dado pelo indivíduo comum, a certos acontecimentos e interações em situações específicas. Por outras palavras, num estudo em que é usada esta perspectiva, pretende-se ter conhecimento da realidade tal como é vista pelos seus intervenientes.

No geral, trata-se aqui de um estudo com um pendor descritivo que configura as características de uma investigação de natureza qualitativa, sugeridas por Flick (2005):

- *Adequação dos métodos e teorias* ao fenómeno em estudo, pois foi necessário adoptar um quadro aberto e evolutivo que se moldasse à complexidade do problema e das situações construídas e observadas;

- *Análise das perspectivas dos participantes e consciência da sua diversidade*, dando especial atenção às múltiplas e diversas dificuldades dos alunos e à forma como se exprimiam e se traduziam na sua capacidade de resolver problemas;

- *Reflexão da investigadora sobre o próprio significado e implicações do estudo*, na medida em que a investigadora se constitui como o principal instrumento da investigação, interpretando e compreendendo o que observou, num processo que se quer flexível e, ao mesmo tempo, constituinte do próprio fenómeno em estudo.

- *Variedade de abordagens e métodos*, tendo em conta que as opiniões de cada indivíduo, que representarão um ponto de partida fundamental mas exigirão uma articulação entre dados de vários tipos e fontes, pelo que o questionário, a observação participante e a análise documental se combinaram para chegar a uma imagem mais completa e alargada do fenómeno.

Para além das características anteriormente apontadas, serão igualmente assinaláveis neste trabalho, as seguintes, referidas por Bodgan & Biklen (1982):

- *O ambiente natural é a fonte directa dos dados*, uma vez que a recolha de dados empíricos teve lugar na sala de aula, onde foi permanente a convivência directa e activa da investigadora com a situação em estudo, durante um período de tempo considerável;

- *A análise de dados tende a seguir um processo indutivo*, em que os objectivos e a problemática em estudo se foram refinando, reformulando e consolidando, partindo-se dos factos e das evidências geradas para encontrar padrões e chegar a formulações tão genéricas quanto possível, ainda que marcadas pelo contexto e pela especificidade dos participantes e das vivências construídas nas aulas de Matemática.

Ao endossar estes princípios, na investigação que desenvolvi, reconheço que há críticos às minhas opções, designadamente os que argumentam que o investigador e o professor não devem ser o mesmo indivíduo, sob pena de o estudo tender a ser parcial ou mesmo enviesado.

Para delinear e conceber este estudo apoiei-me no espírito do movimento pós-modernista, a propósito do qual Feldam et al. (2007) apresentam uma ideia chave: “(...) *Os pós-modernistas defendem que a verdade é relativa, condicional e situacional e que o conhecimento é permanentemente uma consequência da experiência anterior.*” (p. 946). A grande premissa deste movimento, na ciência contemporânea e na investigação, é a de que qualquer estudo tem um cunho pessoal e terá como factor de autenticidade a inclusão do sujeito e da visão subjectiva da pessoa sobre determinado assunto ou acontecimento. Tutelares deste movimento, tal como Hugo Zemelman, apontam que é necessário questionar princípios básicos em que a vida moderna assenta, para que seja possível construir conhecimento científico válido. Para que esta construção tenha lugar é necessário:

“Sermos críticos daquilo que nos sustenta no plano teórico, ou seja, sermos capazes de nos distanciarmos tanto de conceitos que manejamos como da realidade observada” (Zemelman, 2003, p. 442)

Por outras palavras, não devemos tomar como garantidas teorias que regem as nossas vidas sociais, pessoais e profissionais e precisamos de ser críticos em relação ao que observamos. Torna-se, por isso, fundamental, efectuarmos as nossas próprias investigações com o propósito de adquirirmos conhecimentos acerca da realidade que nos rodeia.

Pelo facto de ter optado por uma investigação centrada numa das minhas turmas de docência, revi-me neste posicionamento metodológico e neste enquadramento teórico, pois aliei ao trabalho de investigação preocupações pedagógicas reais ligadas à minha intervenção na sala de aula e a muitas outras questões e reflexões sobre a minha própria prática profissional. Desta forma, reflectindo sobre o que faço com os meus alunos e sobre o que aprendo com a sua participação, o seu desempenho e as suas atitudes, tenho como objectivo quebrar rotinas e ideias prévias associadas à resolução de problemas e à forma de operacionalizar eficazmente no currículo de Matemática do 3º ciclo do ensino básico, impondo-me a mim própria, o desafio da mudança.

“À medida que reflectimos sobre a nossa realidade, se fazemos uma análise crítica, podemos mudar e desenvolver-nos, e a decisão de mudar ou resistir à mudança é permeada pelo nosso conhecimento, crenças, características pessoais e interesses.” (Polettini e Sabaraense, 1999, p. 193).

Quero, com este trabalho, impedir um certo processo de acomodação, que o tempo e uma determinada construção social da prática docente vêm potenciando, e responder

às novas solicitações da educação matemática dos nossos jovens, com respostas viáveis, sustentadas e adequadas. Foi por isso que preferi estudar a minha prática e a dos meus alunos, numa tentativa de perceber o que não funciona ou o que ensombra a procura do sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática, o que são os grandes obstáculos para os alunos e quais as soluções possíveis que poderei levar para as minhas aulas.

Foi com muito prazer e dedicação que me empenhei nesta investigação, redescobrimo-me a cada momento, nos problemas e nas soluções ensaiadas, repensando a minha postura e a minha acção na sala de aula, olhando e considerando as reacções, opiniões e dúvidas dos meus alunos, enfim recolocando-me enquanto docente de Matemática.

Ao iniciar o meu estudo, tomei como ponto de partida a questão: *“Qual a melhor forma de preparar os (meus) alunos, especialmente na resolução de problemas, para o exame final de Matemática de 9º ano?”*. Com o decorrer do estudo e do trabalho no terreno, vi-me obrigada a reconhecer que esta não era a questão fulcral a estudar com aquele grupo de alunos. Mais do que prepará-los para um exame, para qualquer prova, ou qualquer que fosse o meio de aferição das aprendizagens, tinha de me assegurar que o trabalho diário, nas minhas aulas, daria aos alunos oportunidades de aprendizagem da Matemática e, em particular, uma experiência de resolução de problemas, desejavelmente virada para o êxito. Antes de mais, pretendia que os meus alunos, quando confrontados com um obstáculo, fossem capazes de ultrapassá-lo com sucesso e aprender com essa situação. Neste sentido, portanto, a investigação implicava um programa que não poderia ser fixo, pré-determinado e imutável.

Ao ser confrontada com as vivências reais, com os problemas autênticos, com as dificuldades diárias da sala de aula, a minha investigação manteve-se guiada pela ideia de promover uma aprendizagem efectiva da resolução de problemas de Matemática

mas, de uma forma cada vez mais premente, percebi que tinha de me debruçar e analisar as dificuldades dos alunos neste tipo de actividade matemática. Reconheci a importância de identificar essas dificuldades, de as analisar e compreender, e de delinear estratégias de resolução das mesmas.

Neste trabalho, ao envergar o duplo papel de investigadora e professora, foi-me possível intervir e ter decisão sobre a minha própria prática como docente.

“Embora todos os investigadores educacionais tenham como meta o melhoramento da prática de ensino, os professores investigadores diferem dos investigadores tradicionais na medida em que os seus resultados são imediatamente transformados na prática no mesmo cenário em que a investigação foi realizada.” (Serrazina et al., 2002, p. 286)

Seguindo uma perspectiva de *investigação-acção*, ser-me-á permitido, através de um processo de experimentação e reflexão sobre a prática, tirar conclusões sobre a minha conduta profissional, ao mesmo tempo que irei definindo as linhas mais relevantes do referencial teórico em que me irei apoiar para discutir e obter resultados. O estudo a desenvolver será, assim, parte integrante de um processo de aprendizagem, de (re)construção da minha prática docente e de aprofundamento do meu conhecimento profissional.

“Sem descartar a interlocução entre a perspectiva do professor e a perspectiva do pesquisador, segundo o seu referencial teórico, a consideração das percepções do próprio professor sobre mudanças significativas que ocorrem com ele e o que possa ter influenciado essas mudanças é importante para uma melhor compreensão das contribuições de

tais mudanças para o seu desenvolvimento pessoal e profissional.”

(Polettini et al., 1999, p. 189)

Caracterização da Turma

Para a escolha da turma do 9º ano em que realizei este estudo foi determinante o facto de já ter sido professora daqueles alunos, desde o 7º ano. Conhecia os alunos, estava familiarizada com as suas características e tinha uma ideia clara acerca dos seus métodos de trabalho.

A turma “Z”, denominação fictícia que adoptarei, tem 14 alunos, de idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos. Começarei por fazer um breve relato do seu percurso escolar, desde o 7º ano, para dar a conhecer algumas das dificuldades destes alunos ao longo do 3º ciclo.

No 7º ano, os alunos que compõem a turma estavam distribuídos em duas turmas distintas. Uma das turmas era composta por 15 alunos, na sua maioria repetentes no 7º ano, que continuaram sem obter sucesso; apenas 5 alunos transitaram. A outra turma, era composta por 17 alunos e teve igualmente um elevado número de reprovações; no total ficaram 9 alunos retidos.

No geral, os trabalhos apresentados pelos alunos das duas turmas no 7º ano (às várias disciplinas), revelavam dificuldades em vários parâmetros: na expressão escrita, na apresentação gráfica, no domínio dos conteúdos leccionados (insatisfatório ou um conhecimento superficial e incompleto) e na originalidade.

No 8º ano, foi constituída uma nova turma com os alunos que transitaram das duas anteriores, à qual que se juntaram 4 alunos repetentes do 8º ano, formando uma turma

com 19 alunos. Destes, transitaram 14 alunos para o ano seguinte que deram origem à turma Z do 9º ano.

Importa salientar que este conjunto de alunos que transitaram até ao 9º ano tiveram resultados escolares que se podiam considerar satisfatórios ou quase satisfatórios (em média, melhores do que os dos colegas que ficaram retidos) mas não se tratava, de forma alguma, de alunos com desempenho escolar excepcional nem com resultados francamente bons.

Esta turma incluía 3 alunos integrados no Regime de Educação Especial, que beneficiaram de condições especiais de avaliação e de um projecto curricular próprio. Destes alunos, um tinha dislexia e os outros dois apresentavam consideráveis dificuldades de aprendizagem.

No que respeita às expectativas de futuro, 5 alunos ainda não sabiam que profissão gostariam de ter no futuro, 2 alunos gostariam de ser futebolistas, 1 aluna gostaria de ser atriz e houve 6 alunos que referiram uma profissão para a qual seria necessário frequentar um curso superior. Quanto à escolaridade dos encarregados de educação, apenas os pais de um aluno têm habilitações superiores, os pais de um outro aluno têm o 12º ano e os restantes dividem-se entre o 6º ano e o 9º ano de escolaridade.

Escolaridade dos E. Educação	Número de alunos
Curso Superior	1
12º ano	1
6º ao 9ºano	12

Tabela 10. Escolaridade dos Encarregados de Educação da turma “Z”

As classificações obtidas a Matemática, no 8º ano, pelos alunos desta turma foram as seguintes: 3 alunos obtiveram nível 4 (quatro), 8 alunos obtiveram nível 3 (três) e 3 alunos ficaram no nível 2 (dois).

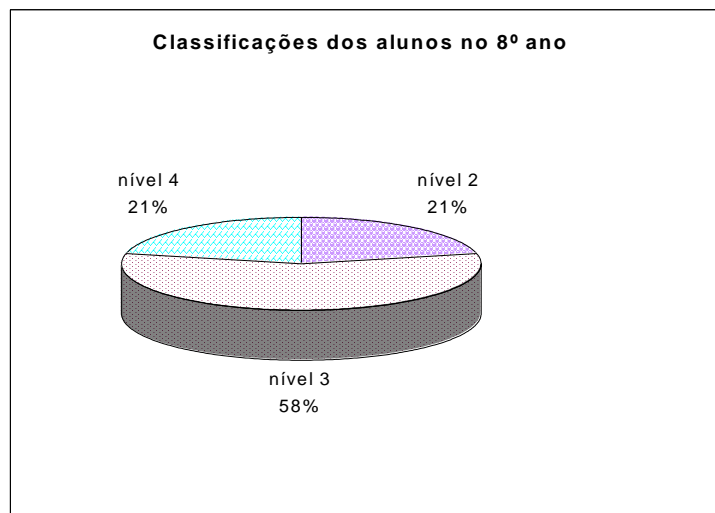


Fig. 9. Classificações dos alunos da turma “Z” a Matemática, no 8º ano

O Projecto Curricular e o Trabalho de Campo

O estudo foi realizado com uma turma do 9º ano da Escola E.B. 2,3 de Montenegro, Faro, entre Setembro de 2007 e Maio de 2008. O esquema seguinte apresenta a calendarização do projecto, desde a sua implementação no terreno até à sua finalização.

Data	Desenvolvimento
Setembro 2007/ Novembro 2007	<ul style="list-style-type: none"> - Pesquisa bibliográfica; - Planificação de actividades e de aulas; - Construção e selecção de problemas para as aulas; - Realização de aulas relativas ao tema <i>Probabilidades</i>; - Observação; - Registos áudio das aulas; - Recolha de documentos;

Novembro 2007/ Dezembro 2007	<ul style="list-style-type: none"> - Desenvolvimento do quadro teórico - Realização de aulas relativas ao tema <i>Sistemas de Equações</i>; - Observação; - Registos áudio das aulas; - Recolha de documentos; - Questionário aos alunos;
Dezembro 2007/ Fevereiro 2008	<p>Realização de aulas relativas ao tema <i>Proporcionalidade Inversa</i>;</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ficha de avaliação interna, contendo pequeno questionário; - Observação; - Registos áudio das aulas; - Recolha de documentos; - Teste intermédio do 9º ano no final de Janeiro;
Fevereiro 2008/ Maio 2008	<p>Início da análise de dados;</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ampliação do quadro teórico e conceptual; - Teste intermédio do 9º ano no início de Maio; - Conclusão da análise e síntese dos resultados;
Maio 2008/ Setembro 2008	<ul style="list-style-type: none"> - Formulação de conclusões e finalização do estudo

Tabela 11. Calendarização das actividades realizadas e desenho do estudo

A escolha do tema que me propus investigar teve como objectivo perceber quais as dificuldades que os alunos do 9º ano apresentam na resolução de problemas de Matemática.

Em termos do trabalho implementado na sala de aula, na primeira aula de resolução de problemas foi fornecido aos alunos um guião (anexo 1), que tinha como objectivo apoiá-los no decorrer da actividade continuada de resolução de problemas. Este guião, baseado nas fases de resolução de problemas de Polya, pretendia auxiliar os alunos a definir uma metodologia e uma orientação para a resolução de qualquer problema. Em síntese, pretendia desenvolver competências de resolução de problemas nos alunos, fornecendo-lhes uma espécie de “farol” que os fosse guiando na sua actividade.

No trabalho específico que foi realizado no contexto da resolução de problemas foram envolvidos os seguintes tópicos curriculares, não só pela sua diversidade e relevância para a formação matemática dos alunos no ensino básico, mas também pela própria sequência que seguiram na implementação do currículo (veja-se a tabela 12):

- **Probabilidades e Estatística**
- **Sistemas de Equações**
- **Proporcionalidade Inversa.**

Deliberadamente, os problemas apresentados foram de formatos e tipos diversos e pretendiam fazer emergir as dificuldades manifestadas pelos alunos na interpretação dos enunciados, nas várias fases de resolução de problemas, na comunicação matemática entre os vários elementos do grupo e na apresentação de resultados (esquematização, raciocínio lógico, conclusões, entre outros).

Para cada um dos temas indicados, os problemas foram colocados aos alunos em três fases diferentes: 1) como introdução a cada um dos conteúdos e conceitos; 2) durante o trabalho de desenvolvimento e exploração dos conteúdos e 3) como actividade final, de aplicação, consolidação e sistematização. A primeira fase favorece a introdução do tema e tem como objectivo que os alunos sintam a necessidade do uso de um novo conceito/recurso/ferramenta de que não dispõem. Será também uma forma de introduzir novos conteúdos que irão ser retomados nas aulas seguintes, com o intuito de “fazer a ponte” entre os conceitos matemáticos e as suas possíveis aplicações. A segunda fase decorre a meio da unidade temática, essencialmente para aplicação dos conhecimentos produzidos. Esta segunda fase ocorre após uma ou várias aulas, em que se procura que os alunos tomem contacto com os conteúdos essenciais, havendo lugar a momentos de resolução de exercícios. A última fase tem como finalidade consolidar e explorar conceitos, com problemas de maior complexidade e aglutinadores de vários conteúdos.

Aqui, foi intencional que os problemas propostos tivessem enunciados mais “ricos”, contendo várias informações, sendo necessário articulá-las para a respectiva resolução.

Data	Problemas	Tema do Currículo
25.09.07	Jogo da soma, do produto e da diferença; Problema dos lápis	- Probabilidades e Estatística
9.10.07	Problema da formiga; Problema do metropolitano; Problema do Miguel e da TV; Problema dos iogurtes	- Probabilidades e Estatística
23.10.07	Problema das cores dos cartões de convite; Problema das bolas; Problema das moedas.	- Probabilidades e Estatística
30.10.07	Problema da festa de aniversário	- Sistemas de Equações (equações do primeiro grau com duas incógnitas)
6.11.07	Problema da paisagem das maçãs e das peras	- Sistemas de Equações
20.11.07	Problema da festa de finalistas	- Sistemas de Equações
27.11.07	Problema dos rectângulos	- Proporcionalidade Inversa.
4.12.07	Problema da corrida dos 3000 m	- Proporcionalidade Inversa.
11.12.07	Pedido de apresentação de um problema à escolha do aluno	- Probabilidades e Estatística; - Sistemas de Equações; - Proporcionalidade Inversa

Tabela 12. Calendarização das aulas de resolução de problemas (anexos 1 a 8)

Nos dois primeiros tópicos considerados, houve 3 aulas que foram alvo de maior atenção e relevância para o presente estudo e, no último, proporcionalidade inversa, apenas 2 foram encaradas como determinantes para a recolha de dados. No total, o estudo contemplou um conjunto de 8 aulas com a duração de 90 minutos cada. Para finalizar, houve ainda uma aula em que pedi aos alunos, como trabalho de casa, que

procurassem e trouxessem problemas relacionados com os três tópicos curriculares e que estes fossem propostos, na aula, aos colegas da turma.

Com vista a fomentar a colaboração, a troca de ideias e a discussão entre os alunos, no decurso da resolução dos problemas, a turma foi dividida em grupos de três a quatro alunos, que no decorrer da aula deveriam produzir um registo escrito, por grupo, o qual deveria ser entregue no final da aula. Houve a preocupação de distribuir um enunciado de cada problema, por aluno, sabendo-se que cada um deveria também tomar notas e escrever a resolução do problema no seu caderno diário. No decorrer da aula, circulava entre os grupos para tentar perceber as dificuldades encontradas e as estratégias seguidas, durante a tarefa em curso. O guião, que os alunos iriam adoptar nas aulas de resolução de problemas, pretendia orientá-los na resolução de cada problema e também no registo das suas resoluções e resultados. Este mini-guião era composto pelas seguintes indicações:

- 1º) No teu entender, o que te é pedido?
- 2º) Resolveste o problema?
- 3º) Explica como chegaste ao resultado (qual foi o raciocínio que realizaste)
- 4º) Que dificuldades encontraste (compreender o enunciado, dificuldades nos conteúdos matemáticos, encontrar uma estratégia para resolver o problema,...)
- 5º) O que achaste do problema?

Após cada aula, as resoluções escritas dos grupos eram recolhidas, para que eu as pudesse avaliar, corrigir e comentar. Na parte final de cada uma das aulas, era sempre discutida a actividade proposta, com toda a turma, e as várias soluções encontradas.

Em todas as aulas houve um grupo que ficava com o gravador áudio ligado sobre a sua mesa, para que eu pudesse registar as discussões realizadas entre os alunos. Com

base nas transcrições dessas gravações e no trabalho efectuado pelos alunos, elaborei uma síntese escrita dos episódios e acontecimentos mais significativos. Outro registo realizado foi o das minhas observações após cada aula, com vista a sistematizar os aspectos observados que mais informações poderiam fornecer para o estudo.

Além das aulas de resolução de problemas, os alunos realizaram também uma ficha de avaliação interna e dois testes intermédios, externos, que foram recolhidos e tidos em conta, no âmbito do trabalho de campo. Os testes que constituíram fontes de dados para o estudo, foram realizados nas seguintes datas: (1) no início do 2º período (avaliação interna) que continha, no final, um questionário acerca das dificuldades sentidas pelos alunos e do gosto/importância de resolver problemas e (2) o teste intermédio (avaliação externa) proposto pelo Ministério de Educação, a 7 de Maio de 2008. Os alunos responderam ainda a um questionário anónimo (anexo 9) para obter outras informações acerca das aulas de resolução de problemas.

Data	Instrumento	Descrição
13.12.07	Questionário	Identificação pelos alunos das suas dificuldades
8.01.08	Ficha de avaliação interna e pequeno questionário	Avaliação relativa aos tópicos curriculares: probabilidades e estatística e sistemas de equações; identificação das dificuldades sentidas pelos alunos
31.01.08	Teste intermédio	Avaliação dos tópicos curriculares: probabilidades e estatística, sistemas de equações e proporcionalidade inversa
7.05.08	Teste intermédio	Avaliação dos tópicos curriculares constantes no programa de 9º ano, à excepção da trigonometria.

Tabela 13. Calendarização dos instrumentos de avaliação (anexos 9 a 11)

Processos de recolha de dados

Na recolha dos dados empíricos, houve a preocupação de obter uma quantidade de informação rica e variada, incluindo o recurso à observação participante, a gravação das aulas em registo áudio, a notas pessoais da investigadora relativas a cada sessão de resolução de problemas e, ainda, questionários aos alunos durante o estudo. Os produtos da actividade desenvolvida pelos alunos nas aulas, como relatórios, esquemas, notas e registos no caderno, constituíram também elementos portadores de informação.

No que respeita à observação, a sua importância revelou-se, desde o início, primordial, pois permitiu dar a percepção e conseguir a captação dos acontecimentos à medida que estes ocorreram. No decorrer das aulas, assumi várias atitudes: desde a de mera observadora e ouvinte não interventora até à de observadora participante e dinamizadora das intervenções e actuações dos alunos. Tentei, sempre que possível, manter-me neutra perante as divergências ou indecisões dos alunos, evitando direccionar ou encaminhar o percurso dos alunos, para que não fosse a minha influência o aspecto mais decisivo da actividade em curso. Mas, sendo eu a professora da turma e co-responsável pelas aprendizagens e pelas competências que pretendia promover, foi necessário muitas vezes responder às solicitações dos alunos, tentando aliviar obstáculos que se mostrassem intransponíveis, para que lhes fosse possível continuar a resolver os problemas propostos. Envolvi-me, por isso, amiúde, como observadora participante, monitorizando, regulando e esclarecendo dúvidas.

O registo escrito das observações efectuadas foi sempre elaborado no próprio dia da sua realização para que contivesse o maior número de pormenores possível. Da mesma forma, sempre que pude, tentei ouvir e transcrever os registos áudio no próprio dia da sua gravação, não só para não perder alguma informação que viesse a tornar-se

desconexa e indecifrável mais tarde, mas também, para obter informações que poderiam ser úteis na próxima actividade de resolução de problemas. Os registos escritos (quer do que observei, quer das gravações em áudio) tentaram ser fiéis ao decorrer da aula, de um ponto de vista cronológico e dos episódios que marcaram mais fortemente cada sessão.

Importa ainda referir que os alunos foram bastante sensíveis à presença do gravador. Inicialmente, este foi um elemento que inibiu comportamentos, pois os alunos sentiram que poderiam ser avaliados negativamente por alguma incorrecção sua que ficasse registada na gravação. Foi necessário explicar-lhes várias vezes que os registos não seriam usados como instrumentos da sua avaliação contínua nem teriam qualquer efeito lesivo, para que alguns elementos mudassem o seu comportamento e se tornassem mais espontâneos na sua actuação. No entanto, por vezes, a sua atitude não foi a que eu consideraria natural e habitual, já que houve momentos em que, aparentemente, tentavam evidenciar-se com gracejos ou faziam intervenções que eram bastante desligadas da actividade em curso.

Nos registos da minha observação, descrevi tudo o que achei pertinente: o rumo da actividade na sala de aula, as reacções dos alunos e os seus sentimentos, entre outros. Para o efeito, tentei reger-me pelos princípios apresentados por Sousa (2005): a neutralidade, a objectividade (evitando recorrer a frases como “acho que” e sem efectuar julgamentos) e a universalidade, tentando relatar o que outro observador veria nas mesmas condições.

Fonte	Procedimento de recolha de dados	Descrição
Sala de aula	Observação de aulas	Obtenção de informação sobre o aluno enquanto resolvidor de problemas.
Alunos	Relatórios	Registos escritos da resolução dos problemas efectuados pelos alunos.
Grupo de alunos	Registos áudio	Registos em gravador de áudio do processo de resolução de problemas.
Professora	Registos de observação de aula;	Registos escritos, contendo observações da professora no decorrer da resolução de problemas.
Alunos	Questionários	Registo realizados pelos alunos em que expressam as suas dificuldades.
Alunos	Fichas de avaliação	Registos escritos elaborados pelos alunos que documentam o seu desempenho.

Tabela 14. Fontes e formas de recolha de dados utilizadas no estudo

Análise de dados

Uma das consequências do tipo de estudo realizado foi uma grande quantidade de dados recolhidos relativamente às aulas de resolução de problemas, facto que aumentou a necessidade de os olhar com perícia, sensibilidade e com uma preocupação de selecção do essencial. No que se refere aos problemas resolvidos nas aulas, procurei perceber se os alunos tinham compreendido o problema, se seleccionaram uma estratégia adequada de resolução, se efectuaram a fase da verificação e se houve dificuldades em alguma destas fases.

Para a análise e interpretação dos dados assumi um papel de “narradora”, descrevendo pequenos episódios ocorridos durante a investigação ou, por outras palavras, contando curtas histórias (“telling stories”) (Shulte, 2007; Feldman 2007).

“As narrativas acerca das aulas são poderosas porque têm em conta não só as práticas correntes e as situações, mas também, as experiências passadas dos professores e as suas futuras aspirações. Estas pretendem providenciar uma ocasião para reflexão por parte do escritor e do leitor: dilemas particulares da educação são vistos com toda a sua força emocional e moral e com muita da sua complexidade intacta.” (Geelan, 2007, p. 140).

Nesta análise pretendi efectuar a construção de “quadros”, aula a aula, que serão acompanhados de transcrições de falas dos alunos e de excertos de registos escritos dos seus produtos, no decurso da resolução de problemas. Deste modo, no capítulo seguinte, apresento o desenvolvimento da experiência, usando como ponto de partida o trabalho dos alunos para exemplificar, documentar e suportar o que pensei ser relevante no âmbito das dificuldades identificadas e dos seus efeitos na actividade matemática dos alunos. Analisando as suas respostas, os seus momentos de desânimo, as suas formas de interpretar e de agir perante um problema, pretendo transmitir a minha experiência, permitindo ao leitor uma noção tão vívida e real quanto possível da prática pedagógica e dos episódios que a formaram, em torno das principais dificuldades que detectei nos meus alunos, no trabalho em resolução de problemas.

CAPÍTULO IV

Desenvolvimento da experiência

Probabilidades – 1ª Aula

A primeira aula de resolução de problemas, ocorreu no final de Setembro e teve como objectivo introduzir o conceito de probabilidade. Iniciei a aula, organizando grupos de trabalho tendo o cuidado de distribuir, de forma equitativa, os alunos com melhores resultados escolares pelos vários grupos, com o objectivo destes ajudarem aqueles que apresentassem mais dificuldades.

Em seguida, fiz uma breve introdução dos objectivos desta experiência, indicando aos alunos que iria haver aulas em que estaríamos unicamente a resolver problemas, que esse trabalho seria considerado e tratado como elemento para a avaliação e que em cada uma dessas aulas as discussões e diálogos de um grupo diferente seriam gravados com um gravador áudio. Nesta aula, optei por deixar os alunos mais à vontade, achando que seria importante uma fase inicial de adaptação e de envolvimento natural dos alunos e, como tal, decidi não gravar as conversas dos alunos, nesta primeira aula. Reservei ainda, algum tempo para explicar aos alunos que haveria um guião que seria importante percorrerem na resolução de todos os problemas que fossem propostos, nesta aulas e nas seguintes.

A primeira reacção dos alunos a esta fase introdutória foi questionarem-me acerca do que aconteceria no caso de não conseguirem resolver o problema: *“E se não conseguirmos resolver o problema, o que nos vai acontecer? Vamos ter negativa? Nós quase nunca conseguimos resolver problemas”*. E o que deveriam fazer para cumprir o que era pedido em cada passo do guião? A pergunta mais frequente dos alunos relativamente às indicações do guião foi: *“O que é para fazer aqui?”*

Efectuei os esclarecimentos necessários. Acerca da avaliação, que foi um aspecto que lhes interessou, elucidei os alunos que iria dar maior ênfase ao empenho, à

persistência e às estratégias de resolução de cada problema. O que pretendia, antes de mais, era que os alunos tentassem, com afinco, responder aos problemas que lhes eram colocados. Quanto à questão do que fazer em cada um dos passos indicados no guião, optei por percorrê-los, um a um, com os alunos, clarificando e elucidando com diversos exemplos o que seria esperado que fizessem em cada um. Pretendia deste modo, que se sentissem confiantes acerca do que teriam de fazer em cada momento.

As actividades apresentadas tinham como objectivo a exploração do conceito de probabilidade de forma intuitiva, visto que os alunos nunca tinham estudado o conceito anteriormente. A minha expectativa era usar estes conceitos apreendidos de forma informal, para em seguida explorar o conceito de probabilidade de forma formal. Apresento em seguida as actividades propostas nesta aula:

Jogo da Soma, do Produto e da Diferença

Em cada um dos jogos seguintes, usam-se dois dados numerados. Há dois jogadores (um jogador aposta em “par” e outro jogador em “ímpar”).

- *Jogo da soma: Lançam-se os dados. Se a soma dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”.*
- *Jogo do produto: Lançam-se os dados. Se o produto dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”.*
- *Jogo da diferença: Lançam-se os dados. Se o valor absoluto da diferença dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”. (Considera, o zero um número par)*

O jogo é justo? Justifica a tua resposta?

O problema dos lápis

“Numa caixa existem 100 lápis azuis, 100 vermelhos, 100 verdes e 10 amarelos. Qual o número mínimo de lápis que tens de tirar, sempre com os olhos fechados, para teres a certeza que tiraste pelo menos um vermelho e um azul.”

in “Sub12- Campeonato de Matemática”, 2007

Para a primeira actividade, foram distribuídos dados cúbicos com pintas aos alunos, para que estes efectuassem a experiência aleatória relativa aos jogos referidos. Sugeri que, a partir das suas experiências e para cada jogo, os alunos averiguassem se era justo.

A primeira pergunta que os alunos me fizeram, referiu-se ao significado do que é um jogo justo. Apesar de ter redirigido a pergunta à turma, nenhum deles deu qualquer sugestão ou lançou uma hipótese sobre a sua interpretação. Todos esperaram para saber a resposta que eu daria. Houve então a necessidade do meu esclarecimento: um jogo justo é aquele em que todos os jogadores têm igual probabilidade de ganhar.

Feita esta explicação, os alunos passaram imediatamente à experimentação, lançando os dados. O primeiro obstáculo que foi sentido prendeu-se com a atribuição de tarefas a todos os elementos dentro dos vários grupos, pois todos estavam desejosos de ter alguma actuação na resolução do problema. Uma vez ultrapassada essa fase de maior instabilidade, um dos grupos realizou 5 ou 6 lançamentos dos dados e chegou a uma conclusão. Contudo, estes alunos não se detiveram na discussão dos resultados entre si e, rapidamente, me chamaram para validar a sua resposta: “ *O jogo não é justo, porque o número par sai mais vezes. Não é professora?*”. A minha resposta foi no sentido de levar os alunos a chegar, por si só, à resposta. Mostrei-lhes que, havendo resultados

diferentes entre os grupos, isso significava que a experiência não tinha sido feita o número de vezes suficiente. Os alunos dos outros grupos terminaram também as suas experiências para divulgarem igualmente os seus resultados. Notei uma precipitação dos alunos em chegarem rapidamente ao resultado por sentirem que um problema de Matemática se deve resolver rapidamente e também reconheci que não eram susceptíveis à ideia de que o resultado de uma experiência aleatória não se consegue com poucos testes.

Pedi-lhes os registos efectuados e constatei que nenhum grupo tinha começado por responder ao proposto no guião. Apenas dois grupos tinham efectuado o registo dos resultados das suas experiências, mas apontando apenas os resultados no caso da soma.

Apercebi-me de que os vários grupos demonstraram dificuldades em considerar e utilizar o guião de trabalho, revelaram não estar totalmente familiarizados com o contexto da actividade, nomeadamente, com a ideia de jogo justo. Mostraram reservas em investigar/experimentar, não se detiveram a discutir e a analisar as suas conclusões com os colegas, poucos efectuaram registos escritos do seu trabalho (tendo-os feito de forma desorganizada) e tiveram dificuldades em descrever as suas ideias.

Pareceu-me importante sugerir aos alunos que elaborassem todos os registos de uma forma organizada, no decurso da sua actividade. Dei-lhes a ideia de poderem recorrer a uma tabela de dupla entrada para anotar os resultados obtidos e fiz, ainda, notar que 5 ou 6 lançamentos não seriam suficientes para tirar conclusões. Os alunos começaram então a actividade e, desta vez, produziram melhores resultados, mais consonantes com o que esperava que fizessem.

Os 90 minutos da aula foram chegando ao fim, restando tempo apenas para que um elemento de cada grupo respondesse a cada uma das questões da primeira actividade no quadro e para que todos pudessem examinar e corrigir as suas próprias conclusões. No

final da aula, um dos alunos conhecedor do problema, apresentou a toda a turma a sua resolução do problema dos lápis. Não surgiram dúvidas da parte dos restantes alunos, até porque o tempo da aula se esgotou.

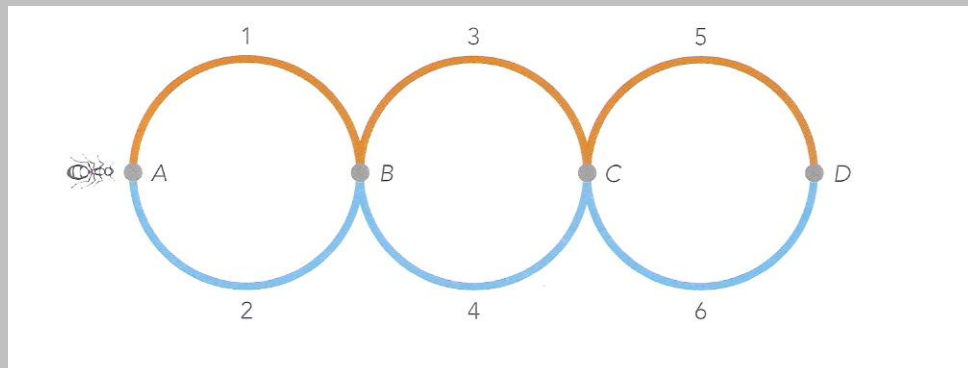
Probabilidades – 2ª Aula

A segunda aula ocorreu em Outubro, depois de terem sido tratados vários conceitos e representações: lei de Laplace, diagramas em árvore e tabelas de dupla entrada.

Os grupos de trabalho mantiveram-se iguais à aula anterior. No início da aula, os alunos começaram a trabalhar prontamente nos problemas sem levantar quaisquer questões acerca do guião.

O problema da formiga

Uma formiga quer ir de A a D passando obrigatoriamente por B e C

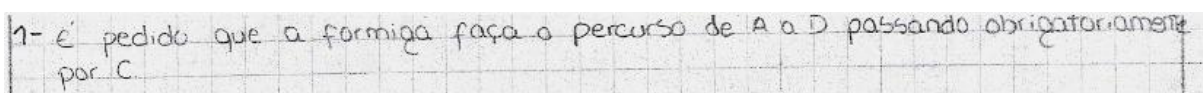


- Quantos percursos pode escolher?
- Qual a probabilidade de, o percurso por ela escolhido ser o da linha azul (linha mais grossa)?

In “Mat 9”, Texto Editora p. 23

Desta vez, os grupos começaram por descrever por palavras suas o que era pedido no problema, como se propunha no guião. Na sua maioria, as frases dos alunos revelaram uma grande proximidade textual com a linguagem do enunciado. Os elementos que são referidos pelos alunos dizem respeito às palavras expressas no problema: “os percursos que pode escolher, tem que ir de A a D, passando obrigatoriamente por C”. A figura que acompanha o enunciado não parece ter tido relevância na forma de os alunos se exprimirem, uma vez que não há referências a aspectos dessa figura.

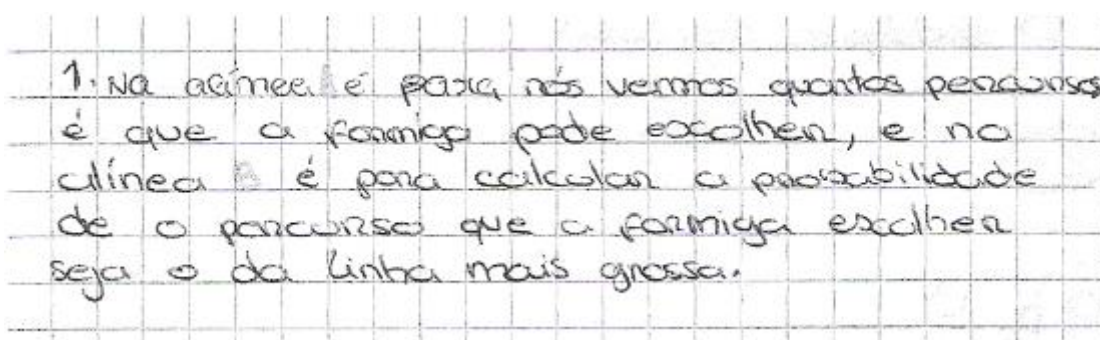
Como exemplo, apresenta-se uma resposta que se baseia essencialmente na transcrição dos dados ou da situação descrita, que é prévia à formulação das questões.



1- é pedido que a formiga faça o percurso de A a D passando obrigatoriamente por C.

Fig. 10. Exemplo de um registo “colado à situação”, ignorando o que é pedido

Apenas um grupo apresentou uma interpretação da questão, apontando a ideia do que se pretendia saber e do que era necessário calcular. Estes referem que é “para ver quantos percursos é que a formiga pode escolher” e “para calcular a probabilidade”.



1. Na primeira é para nós vermos quantos percursos é que a formiga pode escolher, e na segunda é para calcular a probabilidade de o percurso que a formiga escolheu seja o da linha mais grossa.

Fig. 11. Exemplo de um registo focado nos objectivos do problema

Para resolver o problema, um dos grupos tentou contar os casos possíveis sem recurso a nenhum esquema ou anotação escrita; todos os restantes grupos optaram por começar a desenhar todos os casos possíveis. O primeiro grupo depressa abandonou a

sua estratégia, percebendo que era pouco prática e fiável, adoptando, entretanto, a dos colegas. Num dos grupos, o João sugeriu que se elaborasse um diagrama em árvore, mas a sugestão não foi tida em consideração pelos colegas. Este facto pode ser explicado pela falta de confiança que os alunos tinham, nesta altura, na estratégia de elaboração de um diagrama em árvore. Provavelmente esta estratégia pareceu-lhes ter um maior grau de dificuldade do que a da representação, por esquemas baseados na figura dada, de todos os percursos. Na sua maioria, as respostas apresentadas foram semelhantes à que se encontra abaixo.

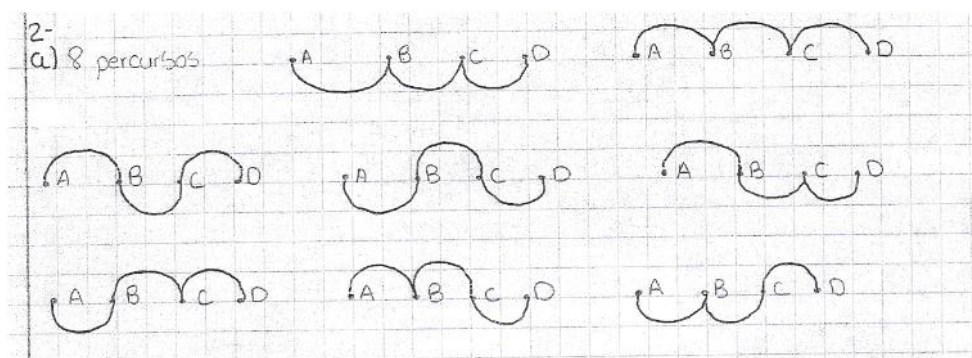


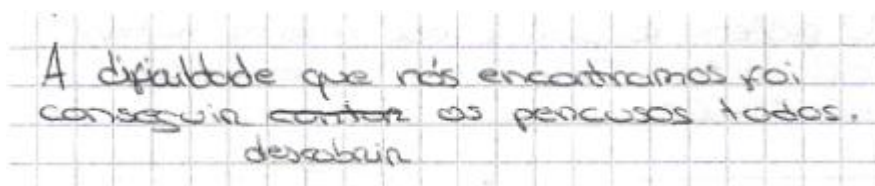
Fig. 12. Exemplo de um registo esquemático dos percursos possíveis

Quando questionados acerca das dificuldades que encontraram, as respostas dos alunos mostram que uma das suas barreiras foi a de conseguirem fazer uma identificação sistemática de todas as possibilidades, sem deixarem nenhuma de fora. Como alguns afirmaram, não era viável fazer de cabeça e, mesmo com papel e lápis, nem sempre os alunos viram todas as hipóteses que existiam.

• A nossa dificuldade foi tentar resolver o problema de cabeça.

Fig. 13. Exemplo de um comentário sobre a presença da representação

Houve um grupo que desenhou apenas seis percursos e só acabou por encontrar os restantes porque ouviu os colegas de outros grupos dizerem que tinham achado mais soluções. É curioso notar como os alunos emendam a sua frase de “contar os percursos todos” para “descobrir os percursos todos”, mostrando que a sua dificuldade foi a de esgotarem todas as hipóteses e terem a certeza de que estavam todas contempladas.



A dificuldade que nós encontramos foi conseguir contar os percursos todos, descobri

Fig. 14. Exemplo de um comentário sobre a necessidade da busca exaustiva

Na segunda alínea, era pedido o cálculo de uma probabilidade. Esta questão não levantou grandes dificuldades; apenas um grupo se esqueceu de que estava a resolver uma questão relacionada com a primeira e considerou simplesmente que a formiga tinha de caminhar sobre 3 arcos de circunferência para percorrer o caminho de A até D. Estes 3 arcos foram aqui considerados como o número de percursos favoráveis, ou seja, levando a fazer o cálculo de 3 percursos sobre o total de possibilidades. Há, pois, uma interpretação dúbia da noção de “casos favoráveis” neste contexto. Os alunos como que vêem o caminho de A a D agora dividido em três pedaços ou 3 arcos. Este número de arcos que a formiga descreve começa a ter um outro significado. Como observam sempre 3 arcos ou 3 pontos, em qualquer dos percursos que a formiga poderá fazer, este elemento constante adquire um sentido para os alunos que aparentemente o vêem como algo que se verifica sempre quando a formiga se desloca de A até D. O facto de se ter de passar obrigatoriamente pelos pontos B e C traz como consequência que haverá sempre três pedaços a ser percorridos em cada trajecto.

Dir-se-á que um dos elementos do próprio problema veio interferir na compreensão do memo, fazendo conflitar a ideia de “traçado ou desenho do percurso” com a noção de “tipos distintos de percursos”

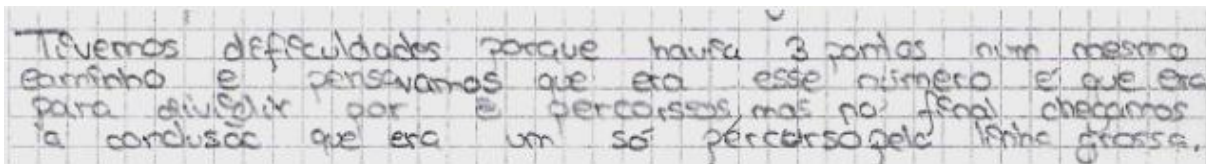


Fig. 15. Exemplo ilustrativo da dificuldade de compreensão do problema

Em conclusão, a primeira questão do problema colocou alguns entraves porque os alunos tiveram dificuldades em seleccionar um algoritmo adequado para resolver o problema, designadamente ao nível da busca exaustiva. Por sua vez, a representação que efectuaram carecia, em geral, de organização e sistematização, levando-os a responder incorrectamente sem se darem conta da sua falha. Apesar de vários alunos verificarem a resolução, o facto de repetirem o mesmo processo e de persistirem na mesma forma de busca, levou-os sempre aos mesmos resultados. Nalguns casos, foi somente o facto de ouvirem os resultados de outros colegas, que os levou a considerar a resolução que tinham efectuado como incompleta. Quando um grupo não sabe que estratégia adoptar segue a estratégia dos colegas por achar que é a adequada.

O Problema do metropolitano

Ricky é um jovem holandês que, sempre que vai a uma cidade com metropolitano, gosta de visitar e fotografar todas as estações. Normalmente escolhe de modo aleatório a estação onde começa a sua viagem. Ricky visitou a cidade de Lisboa no mês passado.

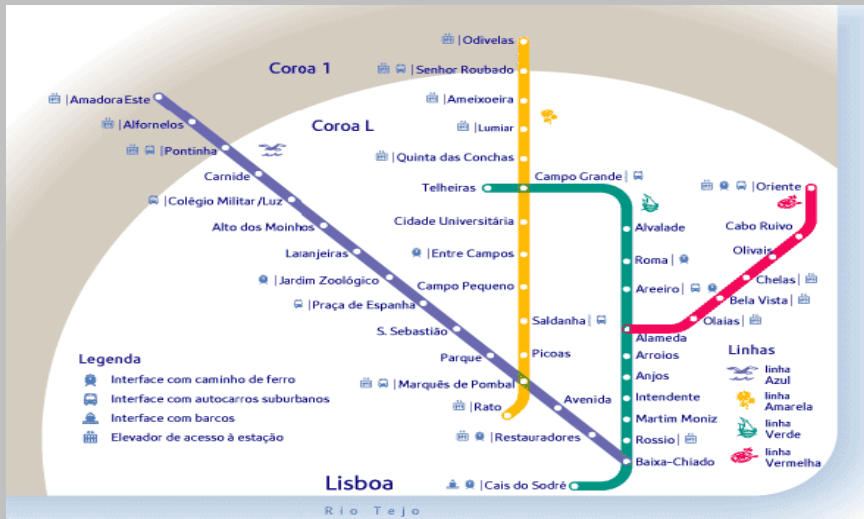
Em Lisboa, a rede de metropolitano é constituída por quatro linhas, com um total de 44 estações, como mostra a figura. Ricky procedeu como de costume e escolheu aleatoriamente a primeira estação a visitar.

1. Qual é a probabilidade de Ricky ter começado a sua viagem numa estação:

a) da linha amarela, ou seja, a linha em que Odivelas é a estação terminal?

b) que permita trocar de linha?

c) que não seja da linha vermelha, isto é, da linha em que o Oriente é a estação terminal?



2. De entre as opções que se seguem, escolhe aquela que completa a frase correctamente.

É muito provável que o Ricky tenha começado a viagem...

(A) numa estação da coroa 1.

(B) numa estação da linha Alameda/Oriente.

(C) numa estação de interface com barcos.

(D) numa estação da coroa L.

Justifica a tua opção.

In www.gave.pt ,1000 Itens

Neste problema, a principal dificuldade dos alunos consistiu na interpretação do mapa do metropolitano de Lisboa e fui chamada a todos os grupos para explicá-lo. Um dos grandes obstáculos residiu na contagem das estações que servem duas linhas, outro foi interpretar e reconhecer o que era uma interface com os barcos e, por último, não foi simples para os alunos verem como se poderiam distinguir as estações da coroa L das da coroa 1.

Quando os alunos estavam a trabalhar sobre a primeira questão, fui chamada por dois dos grupos para os esclarecer acerca da contagem dos casos possíveis: deveriam contar as estações ou deveriam contar apenas o número de linhas? Remeti-os para o enunciado.

- *“Leiam novamente a questão”.*

- *“Qual a probabilidade de Ricky ter começado a sua viagem numa estação (...)”*

- *“Então, o que deveremos contar?”*

- *“As estações?”*

Muitas vezes, parecia que os alunos precisavam de uma confirmação da minha parte para prosseguirem com a sua resolução. Dava a ideia de que se sentiam mais confiantes por ouvirem as minhas questões, mesmo que não lhes respondesse directamente às suas incertezas. Tratava-se, acima de tudo, de uma forma de controlarem a sua própria interpretação dos dados e do problema.

Os grupos, após terem percebido como interpretar o mapa, não apresentaram dificuldades de maior no cálculo das probabilidades.

Na segunda questão, ao deambular pela sala, em redor dos grupos, apercebi-me de que nenhum deles estava a justificar a resposta que tinha. Foi necessário chamar a atenção dos alunos para que tentassem dar uma resposta adequada e que soubessem explicar o porquê dessa resposta.

Esta segunda questão veio a revelar-se motivo de grandes entraves, sobretudo porque os alunos não estavam familiarizados com o contexto do problema. Foi necessário descodificarem muita informação e tomarem consciência de vários aspectos da situação real que não conheciam. Alguns, não começaram a responder sem que eu os ouvisse. Foi necessário apoiá-los, para que lhes fosse possível acreditar que estavam a interpretar devidamente e a perceber as perguntas, para as quais tinham de procurar respostas. Na fase de execução do plano (que foram estabelecendo ao longo do tempo), não se notaram dificuldades.

Inicialmente, o grupo onde estava colocado o gravador falou pouco acerca dos problemas, pois os alunos mantinham algum receio de que eventuais respostas erradas viessem a pesar negativamente na sua avaliação. Porém, ao chegarem a este problema, já tinha passado mais de metade da aula e os alunos começaram, pouco a pouco, a desinibir-se. O gravador tornou-se, algum tempo depois, um factor de distração e de dispersão do grupo. Os alunos deste grupo desconcentraram-se, talvez cansados de resolverem os sucessivos problemas, e tiveram de ser, várias vezes, chamados a retomar o trabalho e a darem conta dos progressos feitos. Uma aula de 90 minutos a resolver um conjunto de problemas pareceu tornar-se uma tarefa demasiado pesada e deu-me a sensação que era tempo excessivo, a realizar uma actividade deste tipo em que era necessário usar o raciocínio, para os alunos desta turma.

O problema do Miguel e da TV

“O Miguel verificou que mais de metade das vezes que vê televisão depois das 22 horas chega atrasado à escola, no dia seguinte. Considera a questão:

«Escolhendo ao acaso um dia em que o Miguel vê televisão depois das 22 horas, qual é a probabilidade de ele chegar atrasado à escola no dia seguinte»

Dos três valores que se seguem, dois nunca poderão ser a resposta correcta a esta questão. Quais? Justifica a tua resposta.”

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{6}{5}$$

In Exame 9º ano, 2006, 1ª chamada

Neste problema, os grupos iniciaram a resolução, calculando a probabilidade do Miguel chegar atrasado. No grupo do João, foi a Maria quem iniciou o raciocínio a seguir:

- “Sabemos que o total das vezes é 5. Logo 2 vezes em cinco são menos de metade das vezes e 6 em 5 são mais que o total das vezes.”

- “Então a resposta ao problema é 3/5.” - Respondeu o João.

Como o grupo se propunha a passar ao exercício seguinte, acabei por intervir.

- “Será que responderam ao problema?”

- “Ah...É para escolher as respostas que estão erradas” - afirmou a Sónia.

Os alunos não efectuaram espontaneamente a verificação da sua resposta, donde não perceberam que não tinham respondido ao que era pedido no problema. O registo oral parece apresentar-se como o preferido de todos os elementos do grupo. Após uma leitura do problema, os alunos retêm algumas das informações do conjunto fornecido no

enunciado, mas raramente retomam essa leitura e apenas continuam a trocar ideias entre si, de forma mais ou menos descoordenada. Não é tanto o cálculo da probabilidade que levanta dúvidas mas sim o enunciado, em particular porque é portador de detalhes e de alguma especificidade, por colocar a questão pela negativa. Outro grupo que exibiu a mesma interpretação da questão dada (encontrar o valor adequado) foi o que apresentou a seguinte resolução:

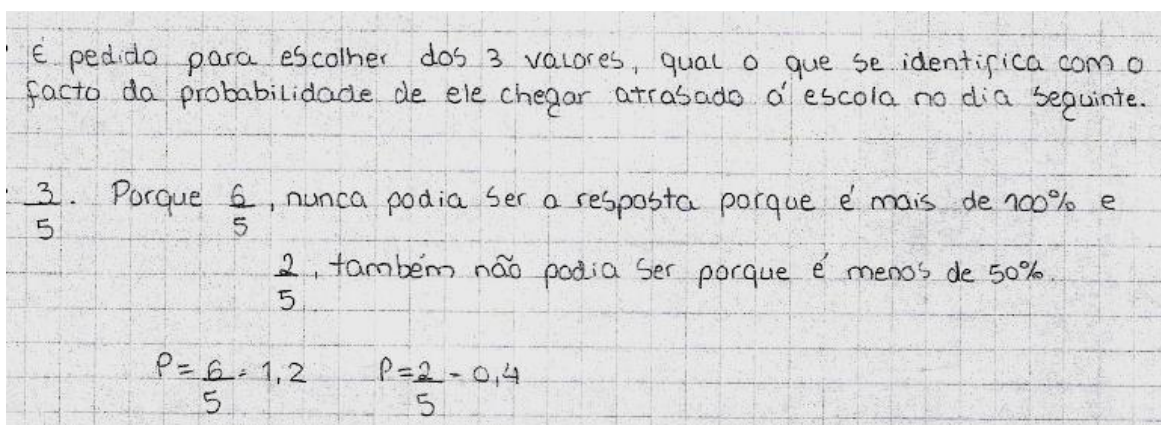


Fig. 16. Resposta de um grupo que modifica o sentido da questão dada

Como no grupo anterior, os alunos foram procurar o valor da probabilidade que deveria ser o adequado, embora o tenham feito, justificando quais os valores que seriam inaceitáveis. Em todo o caso, os alunos evidenciaram ter uma ideia de como proceder para decidir entre os valores inadmissíveis e o que seria admissível.

Um terceiro grupo respondeu à questão da seguinte forma:

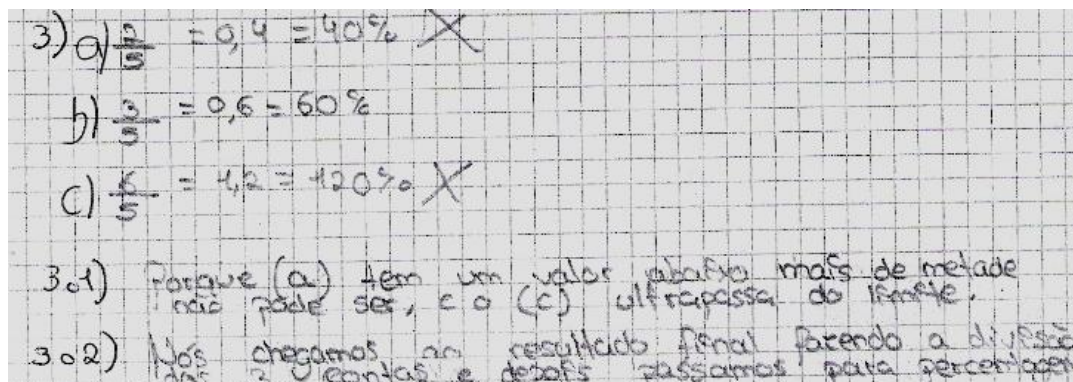


Fig. 17. Resposta de um grupo que mostra dificuldade na expressão do raciocínio

Esta resposta apresenta outras imprecisões e ambiguidades, principalmente porque faz uma passagem automática do registo oral para o registo escrito. Mesmo assim, também neste caso, os alunos assinalam com um X as duas respostas que não se adequam. É bastante confusa a forma como explicam a escolha da hipótese a). Dizem que “tem um valor abaixo” e acrescentam que “um valor abaixo de metade não pode ser”. Eventualmente, os alunos reconhecem que não poderá estar correcto um valor abaixo dos 50% porque, como refere o enunciado, “mais de metade das vezes que o Miguel vê televisão depois das 22 horas chega atrasado à escola”. Também é curioso observar que não lhes basta responder que $6/5$ é maior que 1 (e que o valor de uma probabilidade varia entre 0 e 1).

Há, da parte destes alunos, uma preferência pela utilização de percentagens para representar a probabilidade. Ao pensarem em termos de percentagem, referem que $6/5$ ultrapassa o limite, o que significará, possivelmente, que os alunos estão a pensar que a percentagem ultrapassa os 100%.

Quando solicitados a justificarem as suas escolhas, os textos não reflectem de forma clara a sua forma de pensar e são efectuados num registo bastante impreciso. Por exemplo, é nítida a preocupação dos alunos em traduzir os aspectos de cálculo que realizaram, como se estes fossem as principais explicações para o raciocínio que desenvolveram. Assim, referem que efectuaram “a divisão das 3 contas”, dando ênfase ao facto de terem passado das fracções dadas às dízimas e depois às percentagens. Para estes alunos, percebe-se que esta parte da sua resolução é aquela que eles vêem como a que dá mais informação acerca do raciocínio envolvido na resolução.

Problema dos iogurtes

“No frigorífico tínhamos iogurtes da mesma marca de três sabores: morango, ananás e banana. A probabilidade de tirar ao acaso um iogurte de morango é de $\frac{1}{5}$ e de tirar um iogurte de banana é de $\frac{1}{3}$. Sabendo que há 14 iogurtes de ananás, determine quantos iogurtes há ao todo.”

In *Caderno de actividades “Matemática Dinâmica”*, Porto Editora p. 9

O tempo da aula estava a terminar, quando os vários grupos chegaram a este problema. Não houve tempo para registarem as suas conclusões, no entanto, o grupo do João começou a pensar como poderia resolver o problema.

- *“Se há 14 iogurtes de ananás, no total haverão $30-14=16$. 16 são os que restam de outros sabores.”* - considerou o João.

- *“Queremos saber quantos iogurtes há ao todo?”* – questionou a Cátia.

- *“Professora há 30 iogurtes?”* – perguntou a Sofia.

- *“Não sei. Como chegaram a essa conclusão?”* – respondi-lhes.

- *“Fazemos uma regra de três simples”* – indicou a Maria.

O João é um daqueles alunos para os quais algoritmos matemáticos não têm grande significado. Ele responde às questões (por vezes correctamente) efectuando cálculos mentais, no entanto, é raro conseguir explicar como procedeu.

Pedi aos alunos que consultassem o caderno das aulas, pois tínhamos realizado um problema semelhante algumas aulas antes. Quando a aula terminou, os alunos estavam a pesquisar nos seus cadernos para encontrarem uma forma de resolver a questão.

Esta aula decorreu melhor do que a primeira. Os alunos tiveram mais capacidade de lidar com as questões colocadas, de reagir positivamente às situações propostas, de avançar com ideias, raciocínios e conclusões. Fiquei com a sensação de que, se a aula de resolução de problemas ocorresse depois de leccionados e aplicados vários conteúdos e introduzidos certos conceitos fundamentais, os alunos já estariam familiarizados com alguns mecanismos apropriados à resolução e não sentiriam tanto a sensação de impotência, que lhes notei quando confrontados com uma situação problemática completamente nova.

Conseguimos resolver quase todos os problemas propostos, embora sentisse que os alunos, a partir de certa altura, começaram a mostrar-se cansados da actividade e pareceu-me que poderia ser mais proveitoso resolver menos problemas por aula. O gravador foi também um factor de destabilização para os alunos; se inicialmente os inibia de falarem e discutirem entre si, com o decorrer da aula esta atitude mudou e culminou com os alunos a dizer tolices à margem das actividades, divertindo-se com a ideia de que estas estavam a ser gravadas.

No que respeita à utilização de conhecimentos e conceitos de probabilidades, os problemas não se mostraram demasiado exigentes e apelaram à aplicação de procedimentos que foram tratados e praticados durante as aulas. Os alunos reconheceram oportunidades de aplicar conceitos, usaram formas de organizar o raciocínio, bem como processos e algoritmos. A integração de procedimentos matemáticos na resolução dos problemas mostrou não constituir grande complicação para os alunos. Em contrapartida, a questão da familiaridade com os contextos considerados em cada problema, a necessidade de se situarem no campo de significados do problema, a tendência para responderem à questão colocada muito rapidamente e a

criação dos registos escritos revelaram-se os obstáculos mais importantes para estes alunos.

Não houve tempo para efectuarmos a correcção no quadro dos vários problemas, mas todos os grupos concluíram as suas respostas. Recolhi os seus trabalhos para os corrigir em casa e devolvê-los com os meus comentários e anotações. Na aula seguinte, resolvi o último problema no quadro para a turma toda, e prosseguimos com a resolução de exercícios e problemas de aplicação das probabilidades. Para o efeito, os alunos receberam uma ficha de trabalho composta por questões retiradas de exames dos últimos anos.

Probabilidades – 3ª Aula

Após terminado o estudo das probabilidades, realizou-se uma nova aula de resolução de problemas. Na sessão anterior de problemas, os alunos tinham-se empenhado na procura de respostas e tinham atingido um desempenho bastante satisfatório. Por esta razão, as minhas expectativas eram elevadas e pensei até que os problemas viessem a ser francamente acessíveis, com os alunos a chegarem rapidamente às respectivas soluções. No início da aula pedi aos alunos que se organizassem nos grupos formados anteriormente e coloquei o gravador num dos grupos. Voltei a lembrar que os problemas deviam ser resolvidos e discutidos com recurso ao guião.

Problema das cores dos cartões de convite

A Teresa decidiu fazer os cartões de convite para a sua festa de anos. Em cada um deles, utilizou duas cores diferentes da roda das cores da figura e escolheu, de forma aleatória, o cartão a enviar a cada amigo. Quando pensou no número de combinações de cores possíveis, descobriu que era igual ao número de convites que ia fazer.

A Maria, quando soube, pensou que gostaria de receber o cartão verde e amarelo.



1.1. Qual é a probabilidade da Maria receber o cartão verde e amarelo? Explica como chegaste ao resultado.

1.2. Qual é a probabilidade da Maria receber um cartão que tivesse a cor verde?”

In www.gave.pt, 1000 Items

Optei por escolher problemas que indiciassem uma dose acrescida de dificuldade, pois esta seria a última aula de resolução de problemas dentro do tema das probabilidades e, por assim, dizer, o culminar de um trabalho já significativo de resolução de problemas.

O primeiro problema revelou-se imediatamente difícil para os alunos, no que respeita à contagem dos casos possíveis. O grupo da Rita iniciou a resolução da questão:

- “Primeiro temos de contar todas as possibilidades.” - sugeriu a Rita.

- *“Ora, temos de calcular a probabilidade de sair cartão verde e amarelo. Então a resposta é 1 em 6. O total é 6, pois pode sair cartão amarelo e vermelho, amarelo e verde, amarelo e azul, etc.”* – respondeu o Hugo.

Os alunos, deste grupo, deram por finalizada a sua resposta. Nos outros grupos existia um grande entorpecimento no que respeita à escolha do procedimento a adoptar para resolver o problema e ninguém tinha sugestões de como chegar à resposta.

Considerei necessária a minha intervenção para que todos os grupos tivessem alguma ideia de como iniciar a resolução do problema. Acabei por me dirigir a todos e perguntar:

- *“Como poderemos calcular os casos possíveis?”*

Não obtive resposta. Passei, então, a outra questão:

- *“Não resolvemos nenhum problema semelhante a este?”*

Mas continuei sem obter resposta.

- *“Então, se eu estivesse a lançar dois dados, como poderia contar os casos possíveis?”* – voltei a insistir.

- *“Podíamos fazer uma tabela”* – respondeu-me o Hugo.

- *“Também podíamos fazer um diagrama em árvore.”* – disse a Amália.

- *“A tabela é mais fácil.”* – concluiu o Hugo.

- *“Então, com estas sugestões tentem resolver novamente o problema.”* – sugeri.

Todos os grupos optaram por realizar uma tabela de dupla entrada. Mas não o conseguiram fazer prontamente e sem apoio; foi necessário recorrerem ao caderno para verem como poderiam proceder. Ao acabarem a tabela de dupla entrada, os alunos contaram todas as possibilidades. Verifiquei que não tiveram em consideração que um cartão verde e amarelo e um cartão amarelo e verde corresponderiam a um mesmo caso;

também observei que estavam a contar os cartões com a mesma cor dos dois lados, facto que não se coadunava com as condições do enunciado.

Mesmo assim, questionei a turma para saber qual seria a probabilidade de sair um cartão amarelo e verde. O Hugo respondeu-me:

- *“A probabilidade é 2 em 36.”*

Os restantes grupos confirmaram a resposta. Então, optei por pedir ao Hugo que fosse resolver a questão ao quadro. Quando acabou de preencher a tabela de dupla entrada fiz-lhe algumas perguntas:

- *“Será que devemos contar o cartão verde e amarelo e o cartão amarelo e verde como dois casos distintos?”*

- *“Humm...Não – respondeu-me – Então, os casos possíveis são metade de 36, porque todos aparecem aqui duas vezes. A resposta terá de ser 1 em 18.”*

- *“Vamos olhar melhor para a tabela. Não haverá ainda outros casos que não satisfaçam as condições do enunciado?”*

- *“Ah...pois. Temos de tirar ainda os cartões com a mesma cor dos dois lados. A resposta é 1/15.”*

Após o Hugo ter dado indicação de como se deveria elaborar a tabela de dupla entrada, os diversos grupos tentaram a sua própria resolução. Eis duas das tabelas de dupla entrada construídas pelos alunos:

1.1.

COR	verde	Amarelo	vermelho	Rosa	Roxo	Azul
verde	X	verde Amarelo	verde vermelho	verde Rosa	verde Roxo	verde Azul
Amarelo	Amarelo verde	X	Amarelo vermelho	Amarelo Rosa	Amarelo Roxo	Amarelo Azul
vermelho	vermelho verde	vermelho Amarelo	X	vermelho Rosa	vermelho Roxo	vermelho Azul
Rosa	Rosa verde	Rosa Amarelo	Rosa vermelho	X	Rosa Roxo	Rosa Azul
Roxo	Roxo verde	Roxo Amarelo	Roxo vermelho	Roxo Rosa	X	Roxo Azul
Azul	Azul verde	Azul Amarelo	Azul vermelho	Azul Rosa	Azul Roxo	X

$P = \frac{1}{15}$

Fig. 18. Tabela de dupla entrada que mostra a anulação dos cartões de uma só cor

1.

	Verde	Amarelo	vermelho	Rosa	Roxo	Azul
verde						
Amarelo						
vermelho						
Rosa						
Roxo						
Azul						

1.1. A probabilidade de a Maria receber o cartão verde e amarelo é de $\frac{1}{15}$

Fig. 19. Tabela que mostra a anulação dos cartões de uma só cor e que não repete casos

Neste problema os alunos não conseguiram aplicar, de forma expedita, os seus conhecimentos prévios para chegar a uma solução. A primeira dificuldade que enfrentaram residiu na procura de uma estratégia adequada para a resolução do problema. Também aqui, continua a prevalecer o sentimento de que uma resposta tem de ser obtida rapidamente e, por isso, apressam-se sem uma compreensão sólida das condições dadas. Os alunos avançam de forma precipitada para um dado procedimento e ficam na expectativa de que este os leve à resposta pretendida.

De uma forma geral, não têm em conta a totalidade dos dados; por exemplo, esquecem-se que os cartões têm de ter duas cores diferentes. Entretanto, centram-se na aplicação de uma regra, neste caso a Lei de Laplace, procuram mentalmente vislumbrar todos os casos possíveis e tentam que a professora valide a sua resposta, evidenciando que é pouco relevante para eles a fase da verificação da solução e da reflexão acerca da eficácia do seu raciocínio. Apesar de estarem a trabalhar em grupo, foi notório que, se um dos elementos oferecia uma resposta, os outros alunos não reflectiam sobre ela, não se perguntavam se estaria certa ou errada e não davam sugestões para a verificar ou melhorar.

Quando solicitei a opinião dos grupos acerca deste problema, responderam que o acharam fácil depois de resolvido. Porém, mesmo após a sua resolução, pareceram não ter plena consciência das razões das suas dificuldades e daquilo que falhou quando o tentaram resolver, inicialmente. Apesar de tudo, a resposta de um dos grupos veio mostrar uma vaga noção da dificuldade que sentiram. Para eles, o maior óbice foi o facto de não saberem o que fazer com os dados, ou seja, trata-se da evidência de uma situação em que os alunos não descobrem com facilidade uma estratégia para abordar o problema.

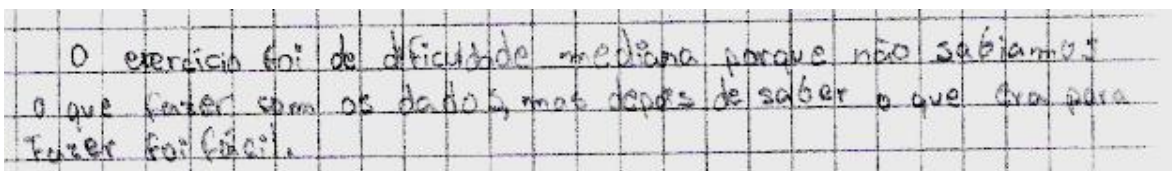


Fig. 20. Comentário de um grupo acerca da dificuldade encontrada no problema

Apresenta-se em seguida o problema do euromilhões:

Problema do Euromilhões

Numa aposta simples, no Euromilhões, escolhem-se cinco números (1 a 50) e duas estrelas (1 a 9). Um boletim de jogo permite, como podes ver na imagem, fazer cinco apostas simples. Podem fazer-se 76 275 360 apostas simples diferentes.

2.1. No mínimo, quantos boletins completos terias de preencher para teres 25% de probabilidades de ganhar o Euromilhões, fazendo apenas apostas simples?

2.2. No dia 27 de Outubro de 2006, houve um sorteio do Euromilhões em que nenhum dos vencedores registou o seu boletim em Portugal. De acordo com os dados oficiais, fornecidos na tabela, determina, aproximadamente, qual era a probabilidade de o prémio vencedor ter saído em Portugal.

<i>N.º de bilhetes registados em Portugal</i>	<i>5 103 849</i>
<i>N.º de combinações [apostas simples diferentes] registadas em Portugal</i>	<i>13 947 383</i>
<i>N.º de apostas simples registadas em Portugal</i>	<i>16 118 477</i>

In www.gave.pt, 1000 Items

A primeira dificuldade dos alunos girou em torno do significado de *aposta simples*. Resolvi explicar à turma como era preenchido o boletim do Euromilhões e como eram realizadas as apostas. Em seguida, foi também preciso explicar a tabela dada no problema, pois os alunos não eram capazes de perceber a diferença entre o número de combinações registadas em Portugal e número de apostas simples registadas. Quis ainda sublinhar o facto de um boletim permitir fazer 5 apostas simples.

Em seguida, os alunos tiveram dificuldades em encontrar o número de casos possíveis. Um grupo chamou-me para saber se algum dos valores da tabela dada corresponderia ao número de casos possíveis. Estes alunos não conseguiram distinguir se a tabela dada era ou não relevante para a primeira questão colocada. Em particular, não foi significativo para os alunos o facto de a tabela ser relativa a uma situação concreta, verificada em determinado dia. Provavelmente, não tiveram a percepção de que a questão feita inicialmente, era posta em termos abstractos, isto é, saber quantos boletins teriam de se preencher para se chegar a uma probabilidade de 25% de acertar, num dia qualquer.

No grupo do Hugo, a Rita começou a pensar em voz alta:

- *“Queremos 25 por cento de probabilidades de ganhar. Sabemos que o total é 100.”*

- *“Cada aposta tem 59 números para podermos escolher, contando com as estrelas.”* - disse o André.

- *“Não se contam as estrelas.”* - respondeu Hugo.

- *“E se contássemos este número como o total?”* - voltou a dizer a Rita, referindo-se ao número 76 275 360 – *“Professora!... Podia chegar aqui? Não percebemos o que temos de fazer.”*

Através do diálogo com os alunos, foi possível ajudá-los a obter um entendimento acerca do propósito da questão. Posteriormente, o André sugeriu que se resolvesse o problema, usando uma regra de três simples.

Quando questionados acerca da dificuldade encontrada no problema, a resposta voltou a ser “*não sabíamos o que fazer com os dados do enunciado*”. Perante um problema, existe frequentemente, por parte dos alunos, um sentimento de incapacidade de resolução do mesmo. Assim sendo, recorrem amiúde à ajuda da professora para lhes explicar o enunciado, para obterem dicas que lhes permitam descobrir uma estratégia de resolução ou para verificarem se estão a interpretar correctamente as condições dadas no problema. Quando a professora não está disponível para algum esclarecimento ou para os encaminhar, os alunos desistem com facilidade, ficam em suspenso e não esboçam propostas para encetar possíveis resoluções.

Após a conclusão deste problema, a cassette do gravador acabou e os alunos do grupo não me avisaram para que pudesse substituí-la. Apenas fizeram referência a este facto no final da aula “*Professora o gravador deu um estalinho ainda há pouco...Para aí há meia hora.*” Devido a este facto, pareceu-me, ter havido alguma relutância da parte dos elementos deste grupo em que fossem registadas as suas palavras e as suas discussões no decorrer da actividade. Por outro lado, ficou demonstrado que os alunos se sentem intimidados com a presença do gravador o que provavelmente até condiciona o seu trabalho.

Problema das bolas

3. Num saco há bolas verdes e bolas azuis. Se uma bola é tirada ao acaso, a probabilidade de sair verde é $\frac{1}{8}$.

3.1. Qual a probabilidade de sair bola azul?

3.2. Retirou-se uma bola do saco e observou-se que era bola verde. Qual o número mínimo de bolas azuis que há no saco?

3.3. Sem repor a bola retirada, tirou-se outra bola do saco e verificou-se que também era verde. Qual o número mínimo de bolas azuis que estavam no saco inicialmente?

In *Matemática Dinâmica*, Porto Editora, p. 31

Para os alunos, este problema pareceu trivial, pelo que nenhum grupo me chamou, desta vez, para o esclarecimento de dúvidas. Talvez por lhes dar a sensação de ter uma resolução fácil, os alunos não sentiram necessidade de explicar como chegaram ao resultado e, nos registos que fizeram, apenas aparecem respostas correctas. Destaco a resolução de um grupo que tenta uma explicação para a questão 3.1, ainda que com bastantes atropelos.

3.
3.1. $P(\text{Verde}) = \frac{1}{8}$
 $P(\text{Azul}) = \frac{7}{8} \text{ (} \approx 8 - 1 \text{)}$
R: A probabilidade de sair bola azul é de $\frac{7}{8}$
3.2. O número mínimo de bolas azuis é de 7.
3.3. R: O mínimo de bolas azuis que estavam dentro do saco inicialmente eram 14.

Fig. 21. Resposta de um grupo que mostra dificuldade na comunicação matemática

O grupo tenta mostrar de onde vem o valor que dá o resultado, isto é, como surge a probabilidade de $7/8$. No entanto, na justificação, não é feita qualquer uso da linguagem corrente. Trata-se de uma situação bastante comum nestes alunos, talvez indicadora da concepção de que apenas se deve usar linguagem simbólica na resolução de um problema e que a produção de um texto não fará sentido como parte da resposta a um problema matemático. Mas os alunos parecem também atrapalhar-se com a linguagem simbólica usada na sua resposta. O símbolo de equivalência parece mais um sinal de advertência que surge ali para fazer notar que há uma razão para o aparecimento do valor 7 e que o mesmo resulta do cálculo da diferença entre 8 e 1 .

Em suma, as dificuldades de expressão do raciocínio são grandes nestes alunos e, em certa medida, quanto mais directa lhes parece a obtenção de uma resposta, menos sentem a importância ou a pertinência de justificar, explicar ou expor o seu pensamento.

Problema das moedas

4) Uma moeda é lançada ao acaso sobre uma mesa rectangular com um círculo desenhado no centro. O diâmetro do círculo é de 10 cm e a mesa tem 70 cm de comprimento e 30 cm de largura. Calcula a probabilidade do centro da moeda ficar fora do círculo.

In Matemática Dinâmica, Porto Editora, p. 31

Para este último problema já não restou muito tempo da aula para pensar. Mesmo assim, como primeiro passo a dar, achei oportuno sugerir à turma a realização de um

desenho que ilustrasse a situação. Acabei por mencionar que teriam de recorrer ao cálculo das áreas das figuras planas pois houve vários alunos que não conseguiram relacionar as duas figuras geométricas com o cálculo de uma probabilidade. Em várias das respostas apresentadas, os alunos calcularam a probabilidade da moeda cair dentro do círculo, e não fora deste, ou seja, fizeram o quociente entre as duas áreas (a do círculo e a do rectângulo) em vez de calcularem a diferença entre a área do rectângulo e a área do círculo – que corresponderia à região exterior ao círculo, onde se pressupunha que a moeda iria cair – para depois dividirem pela área da mesa.

Em suma, esta aula surpreendeu-me pela quantidade de dificuldades que os alunos encontraram. Tinha ficado na esperança de que, se os alunos dominassem os conceitos e os processos, a resolução de problemas seria um meio proveitoso de utilização, aplicação e reorganização dos mesmos. Todavia, apesar de terem trabalhado na resolução de problemas, em diversas aulas, no decorrer do estudo das probabilidades, de já terem recorrido a várias estratégias e formas de representação, entre as quais as tabelas de dupla entrada, os alunos não identificaram, num momento posterior, em que problemas as poderiam aplicar. Foi uma aula em que se generalizou o sentimento de impotência e de incapacidade perante um problema, levando os alunos a recorrerem à professora antes de terem qualquer sugestão de resolução ou de terem efectuado qualquer tentativa.

Após o primeiro problema, não foram discutidos os resultados dos problemas seguintes com a turma, pois todos apresentaram a mesma resolução. As dificuldades que apareceram em cada grupo foram sendo resolvidas no decorrer da aula. O elevado número de dúvidas colocadas e a falta de autonomia dos alunos, no que respeita à escolha de procedimentos e à sua aplicação, levou a que as minhas explicações tivessem

de ser bastante detalhadas, muitas vezes guiando os alunos até a um ponto em que estes já se sentissem capazes de prosseguir sozinhos.

Esta aula, realizada a uma sexta-feira, precedeu a ficha de avaliação relativa a este tema, que foi dada aos alunos na terça-feira seguinte. Talvez por isso, alimentasse mais expectativas de que os alunos dominassem os conteúdos, estivessem razoavelmente preparados, fossem mais desembaraçados na procura de estratégias de resolução dos problemas. Na verdade, porém, os alunos confessaram que ainda não tinham tido tempo para estudar e que o fim-de-semana seria para se prepararem para o teste, o que me levou a constatar que o empenho dos alunos no trabalho autónomo e fora da aula é muito escasso até à véspera do teste.

Sistemas de Equações – 1ª Aula

A aula de resolução de problemas, que se seguiu, ocorreu na introdução ao estudo dos sistemas de equações e envolveu a manipulação de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Problema da festa de aniversário

Para a festa de aniversário da Andreia colocaram-se três pilhas iguais de pratos e vários copos de plástico. No total estão na mesa 72 peças entre copos e pratos.

- a) Quantos copos e quantos pratos existem na mesa?*
- b) A Andreia contou os convidados e comprou copos e pratos de modo a que cada amigo tivesse um prato para o bolo e um copo para o sumo. Quantos amigos convidou a Andreia para a festa?*

c) Cada convidado tira apenas um copo e um prato. No fim da festa, a mãe da Andreia verificou que tinham ficado seis peças sem serem usadas. Como explicas esta situação?

d) A Andreia estava muito feliz porque tinha os convidados todos na sua festa de aniversário. O Kevin e o Marcelo não gostaram do sumo de maracujá e cada um foi tirar outro copo para beber sumo de laranja. Mesmo assim, não faltou copo para ninguém. Porquê?

Iniciei a aula, redistribuindo os alunos por novos grupos. Isto aconteceu, em primeiro lugar, porque a dinâmica dos grupos anteriores não estava a ser a melhor (os alunos não tinham escolhido os grupos e não estavam a gostar de trabalhar com certos elementos) e, em segundo lugar, porque era meu propósito ter todos os alunos a trocarem ideias entre si. Em qualquer caso, pareceu-me que os grupos ficariam mais equilibrados se fosse eu organizá-los. (Estes grupos mantiveram nas três aulas de resolução de sistemas). A proposta para esta aula foi a de cada grupo resolver, em colaboração, as duas primeiras alíneas, mas as alíneas seguintes teriam de ser resolvidas individualmente.

Verifiquei que feitas as alterações, estes novos grupos funcionaram melhor do que os anteriores, havendo maior discussão e troca de ideias entre os vários elementos.

Os alunos iniciaram a actividade, com grande empenho, lendo o enunciado em voz alta. No grupo que tinha o gravador, uma das alunas concluiu que as três pilhas de pratos seriam representadas por $3x$ (porque não se sabia quantos pratos havia ao todo) e que os copos seriam representados por y logo a equação que representaria o problema seria $3x + y = 72$. No entanto, este grupo não conseguiu encontrar uma solução particular desta equação, o que me leva a concluir que, apesar de terem equacionado o problema

correctamente, ficaram aprisionados pela representação algébrica, sem compreender como tirar partido dela para a procura de uma resposta. Eventualmente, o facto de terem duas incógnitas na equação poderá ter constituído uma barreira, pois uma vez estabelecida a igualdade, os alunos acabam por se desligar da situação do problema e quedar-se perante uma formulação matemática que não sabem como manejar.

Num outro grupo, o Hugo colocou-me uma questão pertinente: “*Quantos pratos pode ter uma pilha de pratos?*”. Coloquei a questão à turma: “*Um prato fará uma pilha de pratos?*”. Os alunos responderam-me negativamente e deixei-os a investigar.

Nos restantes grupos, a preocupação era achar a solução particular que satisfizesse o problema, indo por tentativas. O grupo que tinha o gravador efectuou o seguinte raciocínio:

- “*E se fizermos 72 a dividir por três.*” - Perguntou a Lia.

- “*Não poderá ser assim, porque 72 é o total de copos e pratos. Ao dividir 72 por 3 estás só a considerar que tens 3 pilhas de pratos. Terias apenas um resultado para os pratos.*” - Respondeu a Cátia.

- *Se há 3 pilhas de pratos tem de haver 3 pilhas de copos.* - Concluiu o Rui.

- *Sim, tem de haver o mesmo número de pratos que copos.* - Confirmou a Lia.

- *Basta fazer 72 a dividir por 6 que dá 12. Logo tenho em cada pilha 12* – Continuou o Rui.

- “*12 mais 12, mais 12 dá 36 pratos e também 36 copos.*” - Prosseguiu a Lia.

Achei oportuno intervir:

- “*Mas haverá necessariamente o mesmo número de copos que de pratos?*”.

Deixei o grupo a pensar mas não conseguiram arranjar outra solução. Todos os grupos vieram a obter uma solução particular. Eis a resposta de outro grupo que toma como variável fundamental o número de pilhas (de pratos e de copos), pressupondo que

todas têm o mesmo número de objectos e que há uma única pilha de copos, ou seja, existem 4 pilhas sobre a mesa:

Handwritten mathematical work on grid paper showing a problem-solving process. The text includes:

- $20 = \text{n}^\circ \text{ de pilhas}$
- $x = 4$
- $\frac{32}{4} = 18$
- $18 \times 3 = 54$
- $54 = \text{n}^\circ \text{ total de pratos}$
- $32 - 54 = 18$
- $18 = \text{n}^\circ \text{ de copos / n}^\circ \text{ de peças por pilha}$

Fig. 22. O grupo toma como variável o número de pilhas (de pratos e de copos), pressupondo que todas têm o mesmo número de objectos

Durante a realização da actividade, os grupos foram trocando ideias e perceberam que não tinham obtido resultados iguais. Fui chamada, pelos alunos, a ver a solução de cada grupo e fui dizendo que todas as soluções estavam correctas. Instalou-se uma certa confusão na sala, pois ao compararem os resultados, os alunos percebiam que estavam perante respostas diferentes. Alguns eram peremptórios em afirmar que a sua resposta teria de ser a correcta pois a professora tinha dito que estava correcto. Como poderia ser que as diferentes soluções para o mesmo problema estivessem correctas? Deixei-os trocar ideias entre si, na esperança de que concluíssem que o problema tinha mais de uma resposta, mas não foi o que efectivamente se verificou.

A principal dificuldade dos alunos foi conseguirem ver o problema no seu todo e admitir a existência de várias hipóteses que satisfaziam a situação dada. No entender dos alunos, uma solução para um problema é sempre única e quando obtêm uma

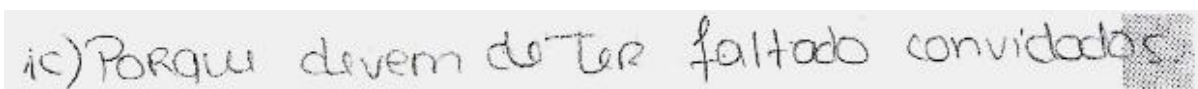
resposta, seja ela qual for, dão o problema como resolvido e não imaginam que possam existir outras respostas correctas. Nenhum grupo tentou, portanto, chegar a hipóteses alternativas de resolução depois de ter chegado a uma solução particular.

Mais uma vez, senti que se impunha a necessidade de uma intervenção minha. Fiquei desapontada por nenhum grupo se ter lembrado de recorrer a uma tabela para abordar o problema. Apesar de terem usado tabelas em vários problemas, anteriormente, os alunos não pareciam capazes de ver, também neste caso, utilidade para as mesmas. Apercebi-me da dificuldade dos alunos na generalização de conceitos e procedimentos. Por outras palavras, o conhecimento de determinado procedimento num dado momento e num dado problema, não é suficiente para ter êxito em resoluções futuras, com problemas diferentes.

Optei por começar a resolver o problema no quadro. Pedi as soluções a que cada grupo tinha chegado e escrevi-as no quadro. O Rui estava convencido de que o número de copos e de pratos não teria de ser igual. Acabou por me dizer: “*Assim sendo, poderia haver 71 pratos e 1 copo*”. Parecia mesmo zangado por a sua solução não ser única. Lembrei-lhe que um copo não faria uma pilha e perguntei-lhe como distribuiria 71 pratos por 3 pilhas iguais. O Rui percebeu que se efectuasse a divisão não obteria número inteiro e o Hugo acrescentou que o número de pratos teria de ser um múltiplo de 3. Construí uma tabela, no quadro, onde anotei as soluções dos alunos, discutimos a equação que traduzia o problema e reflectimos sobre o significado da mesma. Para finalizar, analisámos todas as soluções possíveis.

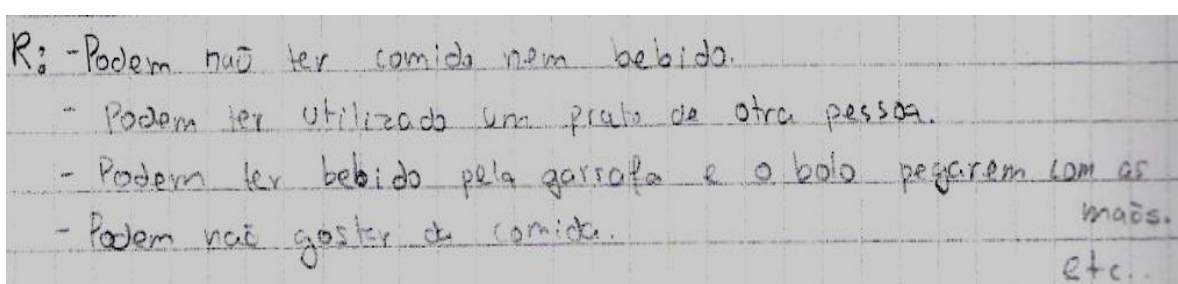
Na alínea b, nenhum grupo recorreu a uma equação para resolver o problema. Como um dos grupos já tinha encontrado esta solução particular (em que o número de pratos é igual ao número de copos) e tínhamos discutido o seu significado, a questão não lhes pareceu problemática.

Para responder à alínea c, os alunos foram criativos e entre as respostas houve várias justificações e suposições diferentes. Dos catorze alunos, todos responderam correctamente à questão, mas apenas dois pensaram em mais do que uma justificação. Eis alguns exemplos:



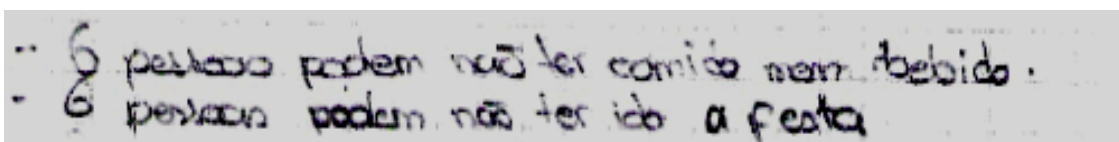
ic) Porque devem de ter faltado convidados.

Fig. 23. A formulação de uma hipótese para justificar as peças não usadas



R: - Podem não ter comida nem bebida.
- Podem ter utilizado um prato de outra pessoa.
- Podem ter bebido pela garrafa e o bolo pegarem com as mãos.
- Podem não gostar de comida.
etc.

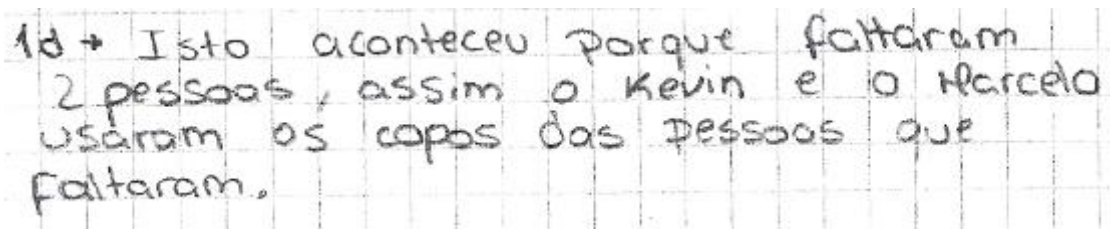
Fig. 24. A formulação de várias hipóteses explicativas e a ideia de que haverá outras



- 6 pessoas podem não ter comida nem bebida.
- 6 pessoas podem não ter ido à festa.

Fig. 25. A formulação de duas justificações para as peças não usadas

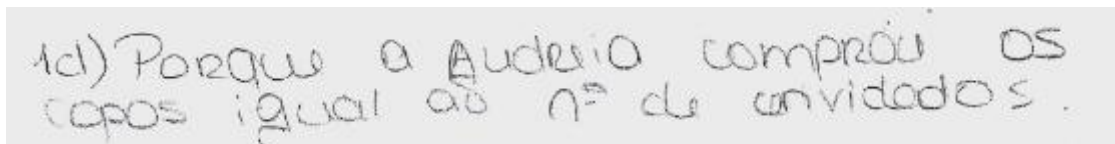
A resolução da alínea d também não apresentou grandes dificuldades. Apesar de o enunciado referir que ninguém tinha faltado à festa, isto é, que todos os convidados tinham comparecido, dois alunos respondem que essa era a causa de haver dois copos a mais para os dois convidados que quiseram mudar de sumo. Tal resposta sugere que estes alunos não atribuíram a necessária atenção à formulação da questão e, provavelmente, como já antes tinham pensado na ausência de alguns convidados, precipitaram-se novamente para essa ideia.



1d → Isto aconteceu porque faltaram 2 pessoas, assim o Kevin e o Marcelo usaram os copos das pessoas que faltaram.

Fig. 26. A condição de não terem faltado convidados é ignorada

A resposta seguinte evidencia que o aluno não entendeu a questão ou não soube encontrar uma explicação para dois dos convidados terem usado, cada um, mais do que um copo.



1d) Porque a Audezia comprou os copos igual ao nº de convidados.

Fig. 27. Um exemplo de interpretação errada da situação descrita

Os alunos tiveram dificuldades em perceber que a situação dos copos e dos pratos para a festa, apresentada como ponto de partida, era válida para todas as questões propostas, mas que estas eram independentes entre si. Tenderam, por isso, a cometer dois erros: esqueceram-se de considerar esse contexto inicial na resolução da 2ª ou 3ª alíneas e consideraram resultados das alíneas anteriores que não eram relevantes nem aplicáveis para a resposta às alíneas seguintes.

As duas últimas questões não levantaram grande dificuldade a nível da utilização de conhecimentos e conceitos matemáticos. Pretendia-se, com elas, que os alunos efectuassem uma interpretação de uma situação que procurava contemplar um cenário realista. Mas o facto de este contexto real, aparecer num problema de Matemática, fez com que fosse interpretado como uma ocasião em que se tornava “obrigatório” aplicar

uma equação, um algoritmo, uma fórmula ou uma regra. As questões simples, portadoras de significados vinculados a situações reais, adquirem, assim, uma dificuldade acrescida, acabando por ocultar ou contaminar a naturalidade aparente da solução. O aluno esquece o senso comum e a experiência que usaria para lidar com a situação (se esta fosse real), obrigando-se a dar uma qualquer resposta formalmente “matemática”.

Sistemas de Equações – 2ª Aula

Este problema, teve como objectivo introduzir os sistemas de equações e foi explorado após terem sido estudadas as equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Problema da pesagem das maçãs e das peras

Se adicionarmos um certo número de quilos de maçãs a um certo número de quilos de peras obtemos um total de a quilos. Se adicionarmos 5 quilos, às maçãs existentes, obtemos o dobro dos quilos de peras. (Considera que o número de quilos é sempre um número inteiro).

- a) Poderá haver 2 Kg de maçãs e 3 Kg de peras?*
- b) Poderá haver 9 Kg de maçãs e 7 Kg de peras? Em que condições?*
- c) Tendo em conta as condições do enunciado, justifica que o número de maçãs é sempre um número ímpar.*
- d) Considera que $a=10$. Calcula quantos Kg temos de maçãs e de peras.*
- e) Este problema poderá ter mais de uma solução? Em que condições?*

Devido ao sucesso obtido na aula anterior, os grupos mantiveram-se iguais, pois estes revelaram-se funcionais. Os alunos iniciaram a resolução do problema, traduzindo o enunciado em duas equações distintas. Para o efeito, fixaram duas letras diferentes para representar os quilos de maçãs e os quilos de peras. A primeira dificuldade sentida por alguns dos alunos foi interpretar a expressão “um *total de a quilos*”, pois não sabiam que significado deviam atribuir à letra *a*. Os alunos esperam, usualmente, encontrar valores concretos em problemas deste género e o uso de uma letra (ou seja, de um parâmetro) para designar o total de quilos confundiu-os.

Para responder à alínea a, um dos grupos, que tinha o sistema formulado correctamente, e apresentava a segunda equação $x+5=2y$, isolou a variável *y*, atribuiu valores a *x* para verificar se encontrava o par ordenado (2,3), como solução possível.

- *“Podemos achar um valor para x e um valor para y e depois substituímos.”*-

Disse o José.

- *“Damos valores pares a x e y para obtermos valores inteiros.”*- Disse o Fred.

- *“Porque é que não das números ímpares?”*- Perguntou a Amália.

- *“Os números têm que ser pares porque temos de dividir por 2.”*- Respondeu o Fred.

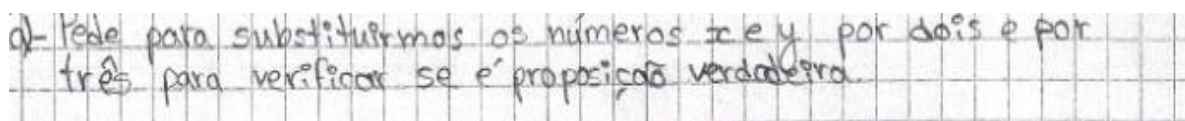
- *“Se substituírmos por 5 o resultado dá um número inteiro, se for por 1, o resultado continua a dar um número inteiro...Temos vários valores, como é que os vamos substituir?”*- Pensou a Amália.

- *“Se obtemos vários valores inteiros é porque temos várias soluções”*. - Respondeu o José.

Neste caso, os alunos começaram por tentar uma técnica adoptada na aula anterior para encontrar uma ou mais soluções de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas. Existe alguma visão, entre os alunos, de que a resolução de um problema

consiste em identificar um determinado algoritmo de entre os conhecidos que conduza à solução. Para muitos, a resolução de um problema, resume-se, em último caso, a escolher a estratégia a aplicar naquele caso. Quando a resolução de problemas antecede o tratamento de conceitos e de conteúdos e pretende colocar os alunos em situações que os levem a pensar e a arquitectar métodos e planos de resolução, esta tentativa de ir à procura de uma “receita” que se aplique acaba por sair frustrada. Simultaneamente, uma vez identificada uma possível estratégia pelos alunos, ela é aplicada de modo algo imponderado, pois o mais importante para os alunos é apresentar uma solução. Acresce que, no final do problema, a maioria dos alunos não passa pela fase de verificação da solução e tem dificuldade em perceber a razão pela qual as respostas obtidas são desadequadas.

Pude também concluir que um determinado procedimento é, por vezes, mecanizado sem ter sido completamente entendido pelos alunos. Traduz-se numa “fórmula”, usada quando aparecem casos semelhantes aos que foram apresentados pelo professor. A forma de explicarem como chegam ao resultado revela pouca segurança na estratégia escolhida. Veja-se, por exemplo, a propósito da alínea a), a resposta de um dos grupos à questão: “Na tua opinião o que deves fazer?”.



a) - pede para substituírmos os números z e y por dois e por três para verificar se é proposição verdadeira.

Fig. 28. Exemplo do que os alunos descrevem como estratégia, parafraseando procedimentos algébricos

Apesar de nos parecer uma resposta aceitável, porque reflecte a relação entre a questão colocada e a solução de um sistema de equações, não explica realmente qual foi

a interpretação feita, nem os passos que executaram. Por outro lado, não indicam qual é a conclusão que se poderá tirar se a proposição for verdadeira.

Após algum tempo, corriji a questão no quadro, falando para todos os alunos. Alguns grupos continuavam sem saber o que fazer para resolver a questão. Comecei por relacionar os 2 kg de maçãs e os 3 kg de peras com a solução do sistema e questionar a turma acerca do que seria necessário fazer para verificar se o par ordenado (2,3) seria uma solução do problema.

-“Temos de resolver a equação.”- Disse a Sofia.

-“E como faríamos isso?” – Perguntei-lhe.

-“Não é necessário, basta substituir os valores.”- Foi a resposta do Hugo.

-“Correcto. E de que outra forma pode ser colocada a questão, quando substituimos os valores?” – Foi a minha pergunta final.

Após a correcção desta alínea, os alunos reconheceram que poderiam usar o mesmo procedimento para responder à alínea seguinte. Alguns manifestaram dificuldade em perceber que as duas equações formavam um sistema, razão pela qual uma solução particular teria de satisfazer ambas as equações. Eis a resposta dada por um dos grupos:

b)-

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + 5 = 2y \end{cases}$$

$a + 7 = a \Rightarrow$
 \checkmark
 $16 = a$ proposição verdadeira

$a + 5 = 2 \times 7 \Rightarrow$
 \checkmark \checkmark
 $14 = 14$ // proposição verdadeira

R: Quando $a = 16$ temos 9 kg de maçãs e 7 peras.

Fig. 29. Exemplo da dificuldade dos alunos em perceber como funciona um parâmetro

Perguntava-se em que condições poderiam os pesos de maçãs e de peras ser os dados. Na verdade, tratava-se de verificar que os dois pesos dados impunham automaticamente um valor para o parâmetro a . Este grupo faz uma coisa curiosa que é dizer, relativamente à primeira equação, que estamos perante uma proposição classificada como verdadeira. Não é claro, desta forma, o significado dos termos matemáticos empregues e a compreensão que deles revelam. Tal como na língua materna ou numa outra língua, também aqui não basta conhecer as palavras; impõe-se saber o seu significado para poder aplicá-las correctamente.

Quanto à alínea c, que não implicava o uso de uma técnica ou de um procedimento automático, apenas um aluno chegou à conclusão esperada. Os restantes grupos não identificaram uma estratégia que permitisse resolver a questão. Tratava-se, essencialmente, de trabalhar com as propriedades dos números e de reconhecer que a expressão $2y$ representa um número par. Pedi a esse aluno que fosse ao quadro e explicasse como procedeu para responder à questão.

Para responder à alínea d, sugeri aos alunos que utilizassem uma abordagem geométrica, com base na intersecção de duas rectas num referencial, algo que não levantou dificuldades visto que tínhamos praticado exercícios semelhantes nas aulas precedentes. Julgo, portanto, que esta questão teve o carácter de exercício e não de um problema.

A alínea d também se revelou fácil depois de toda a discussão anterior em torno do problema. As várias alíneas apresentadas ocuparam os 90 minutos da aula. Noto que estes alunos precisam de tempo para pensar e para conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas.

Quando o grau de dificuldade do problema é maior, os alunos acabam por desistir de tentar a sua resolução. O que para mim, é um manancial de elementos que apelam a

uma actividade de compreensão, para os meus alunos pode tornar-se num beco sem saída. Percebo também que os alunos categorizam ou arrumam os problemas em tipos, procurando associar a cada categoria uma estratégia de resolução. Quando um problema surge de uma forma nova ou inclui alguma representação inesperada, como por exemplo o uso de uma tabela, deixa de se encaixar nos padrões que têm como pré-definidos e não sabem como proceder para chegarem a uma solução. Por outro lado, este facto constitui boa parte da explicação para muitas das dificuldades que emergem do seu desempenho na resolução de problemas. Foi notório que os alunos conseguiram resolver problemas semelhantes a outros já estudados, em que a diferença residia somente nos valores do enunciado. Uma aparente necessidade de mecanização de procedimentos está fortemente ligada à forma como sentem confiança no trabalho que realizam.

As aulas seguintes foram dedicadas à resolução gráfica e analítica de sistemas de equações e ao trabalho com diversos problemas, envolvendo sistemas.

Sistemas de Equações – 3ª Aula

Nesta aula de resolução de problemas escolhi um sistema possível e indeterminado e um sistema impossível para que os alunos percebessem que nem sempre um problema tem uma única solução. De novo, os grupos foram os mesmos da sessão anterior.

Problema da festa de finalistas

O 9º C organizou uma festa de final de período para angariar dinheiro para a viagem de finalistas.

1) Para o efeito, vendeu bilhetes a preços diferentes a alunos da escola e a alunos que não fossem da escola. Sabemos que foram vendidos 80 bilhetes e que o dinheiro total em caixa foi de 150€. Quantos alunos da escola foram à festa?

Tabela de preços	
Alunos da escola	Outros
1,5€	2.5€

2) Foi feito um levantamento dos rapazes e raparigas que foram à festa. O número de raparigas excedia o número de rapazes em 14. O dobro do número de rapazes é igual à soma do número de raparigas com 19. Quantos rapazes e raparigas foram á festa?

3) O 9º C usou a sala dos alunos que tem forma rectangular. O comprimento da sala excede a sua largura em 21cm. Se aumentarmos 4 cm a cada uma das dimensões, a área da sala aumentará 492 cm². Qual a área da sala? (alínea. 3. Adaptado de Matemática 9º ano, O Livro, p. 46)

4) A turma decidiu realizar um sorteio com os bilhetes da festa. À entrada podia ler-se o seguinte cartaz:

Oferecemos as bebidas grátis ao bilhete que satisfizer as seguintes condições:

- a) O algarismo das dezenas é inferior ao algarismo das unidades em 4 unidades.
- b) Se ao número escrito com os mesmos algarismos mas por ordem inversa, subtrairmos o número inicial, obtemos 27.

4 a) Qual o número do bilhete premiado?

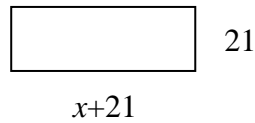
4 b) Resolve o mesmo problema mas substituindo no enunciado, 4 por 3 e indica todos os bilhetes premiados nestas condições. (Alínea 4. Adaptado de Dossier de matemática, Texto Editora, p. 48)

Esta proposta, contendo quatro problemas, revelou-se muito ambiciosa e não houve tempo para os explorar todos de forma exaustiva. O João, mais uma vez, conseguiu resolver a primeira questão mentalmente e resistiu ao uso de um procedimento algébrico. Este aluno nunca se dispôs a aprender determinados algoritmos, porque sabe resolver problemas comuns com que se depara no dia-a-dia e tem a capacidade de explorar mentalmente o problema matemático resolvendo-o de forma mais ou menos arcaica, sem grandes justificações científicas. Foi tendo sucesso na resolução de problemas, em aulas anteriores, neste e noutros conteúdos, sem ter de recorrer a papel e lápis. Foi, à sua maneira, um elemento válido nos grupos, porque chegava às soluções usando raciocínios lógicos, mais ou menos correctos, sem no entanto aplicar os conhecimentos adquiridos nas aulas, deixando aos colegas a responsabilidade de escolherem a estratégia correcta e adequada para confirmarem a solução.

Nos restantes grupos, não houve dificuldades dos alunos em equacionar o problema (até por ser semelhante a outros resolvidos anteriormente nas aulas) e as resoluções apresentadas estavam correctas. A questão 2 também não ofereceu dificuldades.

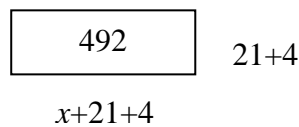
No problema 3, os alunos não conseguiram ultrapassar a fase da compreensão, pelo que nenhum grupo chegou a estabelecer um sistema de equações. Em primeiro lugar, sem recorrer a qualquer figura, esquema ou esboço, os alunos tentaram determinar o que seria o comprimento e a largura da sala, confundindo-se rapidamente nas suas conclusões. Só após uma sugestão minha, os alunos desenharam no caderno um rectângulo para se orientarem. A dificuldade seguinte consistiu em identificar o que incógnita representava pois, de início, não sentiram a necessidade de atribuir letras diferentes ao comprimento e à largura. A intervenção da Rita é ilustrativa desta, que significado há-de atribuir a “o comprimento *excede* a largura em 21 cm”. É possível verificar que, a aluna concluiu erradamente que a largura é apenas 21 e não x .

Se o comprimento excede a largura em 21 cm, então a largura será 21 e o comprimento $x+21$.



O obstáculo seguinte relacionou-se com o facto de os alunos continuarem a considerar a primeira condição para traduzir a condição seguinte.

“O comprimento da sala excede a sua largura em 21cm. Se aumentarmos 4 cm a cada uma das dimensões, a área da sala aumentará 492 cm^2 , logo posso escrever



Para além do erro, que transita da etapa anterior, verifica-se que a aluna comete o mesmo erro no raciocínio, associado à mesma expressão “a área da sala aumentará 492 cm^2 ” confundindo-a com a expressão “a área a sala aumentará para 492 cm^2 ”. Em particular, os alunos não se questionaram: aumentará em relação a quê? Ao continuar com a resolução verifica que cometeu um erro, pois encontra um valor de x negativo, que não poderá estar associado ao lado de um rectângulo.

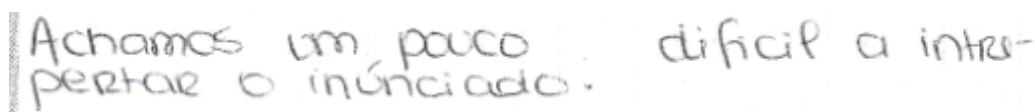
- “E para calcular a área, faço:

$$(x + 25)(25) = 492 \Leftrightarrow 25x + 625 = 492 \Leftrightarrow x = \frac{492 - 625}{25} \Leftrightarrow x = -5.32$$

- “Obtemos um comprimento negativo? Não pode ser.” Foi a resposta da Maria.

Por vezes, neste tipo de problemas, os alunos sentem dificuldades em congregar, simultaneamente, várias condições do problema, embora sejam capazes de identificar correctamente onde e como aplicar cada uma delas. Apesar de serem conhecedores dos conceitos matemáticos básicos, como por exemplo, o cálculo da área do rectângulo, os problemas exigem mais do que uma simples aplicação directa desses conhecimentos.

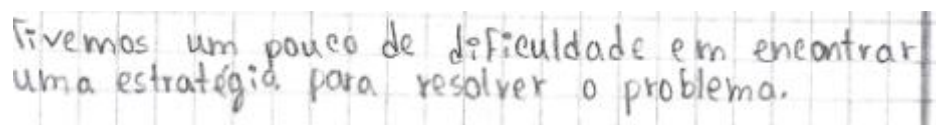
Quando inquiridos acerca das dificuldades sentidas, os alunos mostram não saber bem qual a sua real dificuldade. Tanto quanto podemos observar, entendem o que está escrito no enunciado mas não sabem como relacionar toda a informação:



Achamos um pouco difícil a interpretar o enunciado.

Fig. 30. A interpretação é referida como uma dificuldade global

Note-se, que os problemas da ficha eram de aplicação de sistemas de equações com duas incógnitas e que os alunos não tiveram a capacidade de depreender que, para definir o problema matematicamente teriam de recorrer a duas equações.



Tivemos um pouco de dificuldade em encontrar uma estratégia para resolver o problema.

Fig. 31. A procura de uma estratégia é referida como uma dificuldade global

Acabei por resolver o problema no quadro, dialogando com toda a turma. Os alunos tiveram grandes dificuldades em perceber que a área da sala aumentava 492 cm^2

em relação à área inicial. Foi preciso levá-los a ver que a área inicial se poderia traduzir por xy e, só depois disso, concluíram que a condição que procurávamos teria de ser traduzida por $xy+492$ e não apenas por 492. Levámos muito tempo a descodificar e a discutir as condições do problema até que todos os alunos se mostrassem conscientes do processo a seguir na determinação da resposta. A resolução do sistema foi deixada para trabalho de casa, pois não houve dificuldades com a resolução de sistemas e pareceu-me mais importante explorar a questão seguinte.

Em relação ao quarto problema, a compreensão do enunciado, por parte dos alunos revelou-se novamente uma tarefa muito difícil. Um dos factores a ter em conta foi, estarmos a chegar ao final da aula e os alunos começaram a ficar mais impacientes e menos concentrados. Voltei a optar por discutir o problema com a turma, pois o meu objectivo primordial era a interpretação da solução do sistema. Na alínea 4 a, obtivemos um sistema impossível e a conclusão foi relativamente fácil para os alunos, se o sistema era impossível então o problema não tinha solução (apesar de tal resposta ter sido dada prontamente, este facto deixou-os perplexos, pois não é comum para eles um problema não ter solução).

Para a resolução da alínea 4 b, os alunos tinham o problema equacionado com base na alínea anterior; bastava resolver o sistema de equações e tentar achar uma solução. Mas, ao depararem-se com um sistema possível e indeterminado não souberam como achar uma solução particular. Mais uma vez a dificuldade não residiu na aplicação de um determinado procedimento matemático, mas sim na interpretação de um resultado obtido no decorrer da resolução. Ao serem confrontados com um sistema indeterminado, alguns alunos sugeriram que o problema não tinha solução, tal como o anterior, e outros simplesmente não encontraram uma resposta, deixando o problema em aberto:

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ y - x = 3 \end{cases} \xrightarrow{C \times (-1)} \begin{cases} x = y + 3 \\ -y + x = 3 \end{cases} \xrightarrow{C_1 + C_2} \begin{cases} x = y + 3 \\ x = y + 3 \end{cases} \xrightarrow{C_1 - C_2} \begin{cases} x = y + 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Proposição verdadeira
 Sistema possível determinado

Fig. 32. Um sistema indeterminado não parece ter significado concreto para os alunos

Proporcionalidade Inversa – 1ª Aula

O tema seguinte em estudo foi o da proporcionalidade inversa. Os problemas propostos tinham como objectivo introduzir o tema e foi necessário o recurso a materiais manipuláveis. Esta escolha deveu-se, em grande parte, a muitas das dificuldades manifestadas anteriormente pelos alunos em efectuar deduções lógicas, sempre que se deparavam com um tema novo. Para o efeito, além do enunciado do problema, distribuí, pelos grupos, vários rectângulos em cartolina com dimensões variáveis, dos quais nem todos satisfaziam as condições impostas no problema e, ainda, um referencial cartesiano (Anexo 7).

Problema dos rectângulos

1) *Observa os rectângulos, o referencial cartesiano e a linha curva:*

1.1) *De todos os rectângulos, escolhe aqueles que podem ser colocados sobre o referencial, nas seguintes condições:*

- *Dois lados consecutivos ficam encostados aos eixos do referencial cartesiano;*

- O vértice oposto ao zero (origem do referencial) tem de se situar sobre um ponto da curva.

1.2) Regista na tabela seguinte, as dimensões dos rectângulos escolhidos.

<i>Comprimento</i>								
<i>Largura</i>								

1.3) O que acontece à largura do rectângulo, se o comprimento do mesmo passar para o dobro?

1.4) O que acontece ao comprimento do rectângulo, se a largura do mesmo passar para a terça parte?

1.5) O que acontece à largura do rectângulo, à medida que o comprimento aumenta?

1.6) Completa a seguinte tabela, usando as dimensões dos rectângulos escolhidos.

<i>Comprimento</i>								
<i>Largura</i>								
<i>Área do rectângulo</i>								

1.7) Com base na observação dos resultados obtidos na tabela anterior, que conclusão podes tirar?

1.8) Tendo em conta os valores da tabela anterior, escreve uma expressão que relacione o comprimento com a largura de cada rectângulo.

Adaptado de www.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/materiais_produzidos/pdf_alberto_netto/

[Proporcionalidade Inversa9_PAN.pdf](#)

No início da aula, disse aos alunos que, desta vez podiam eles formar os grupos. Nas aulas de problemas de probabilidades, alguns elementos, no seio dos grupos, não mostravam grandes afinidades com outros. Esta falta de harmonia e entreajuda levava-os a tentar trabalhar isoladamente dentro dos grupos ou até a não quererem participar. Nos problemas de sistemas, tinha alterado os grupos, obtendo melhorias na dinâmica de trabalho, mas continuava a haver elementos marginais que eram excluídos da participação na actividade proposta. Ao deixar os alunos escolherem os elementos com quem queriam trabalhar, consegui que todos os alunos se sentissem integrados dentro do grupo de trabalho do qual faziam parte. Contudo, os alunos mais fracos não se misturaram com os alunos mais desenvolvidos e, apesar dos esforços que fizeram, alguns grupos trabalharam mais lentamente.

Constatei que esta aula decorreu de forma diferente desde o início. Os alunos, satisfeitos com os novos grupos de trabalho, demonstraram grande interesse na actividade proposta. Usar materiais manipuláveis foi também um factor que fez uma diferença apreciável, já que estes alunos têm grandes dificuldades em trabalhar no abstracto e em registar as suas deduções, raciocínios ou conclusões. Ao usar materiais manipuláveis, os alunos foram construindo o seu conhecimento através da experimentação e tendo uma base concreta para as suas conjecturas.

A principal dificuldade dos alunos foi, desta vez, dominar a ansiedade de resolver rapidamente o problema. Foram lendo e procurando entender a finalidade das instruções fornecidas. Mas, de novo, era preciso interpretar as instruções dadas no seu todo. Em problemas em que o enunciado é extenso, estes alunos não são capazes de considerar todas as informações, pois não têm a capacidade de ir registando e organizando (mentalmente ou por escrito) todas as informações dadas. Fui chamada a um grupo que

apenas tinha encontrado dois rectângulos (no total eram 8) que satisfaziam as condições do problema.

–“Professora, colámos os rectângulos uns aos outros e apenas dois satisfazem o primeiro problema.” – disse-me o António.

–“ Mas o objectivo não era que as condições fossem satisfeitas por todos os 20 rectângulos ao mesmo tempo.” – respondi-lhes.

–“Ah, não? Então assim todos os rectângulos satisfazem o problema.” – Concluiu prontamente o António.

Tive de lhe chamar a atenção para o facto de ser importante não tirarmos conclusões precipitadas. Disse-lhe que tinha de ser mais cauteloso e que devia efectuar a experiência com todos os rectângulos, mas o António, após ter experimentado dois rectângulos, concluiu novamente que todos os rectângulos verificavam o enunciado.

Noutros grupos, levantaram-se outras dúvidas como, por exemplo: saber se teriam de medir os rectângulos com uma régua para ter os seus comprimentos; qual seria o comprimento e a largura do rectângulo; e se 1,5 (por não ser um valor inteiro) poderia ser a medida de um dos lados do rectângulo.

Os alunos nem sempre reconhecem e adoptam a linguagem própria da Matemática e apresentam dificuldades em perceber os termos que lhe são inerentes. Apesar de os ouvirem, vezes sem conta, ao longo dos vários anos de escolaridade, não se questionam acerca do significado de termos específicos ou não o conseguem transpor para usos diversificados. Talvez por isso perguntem ao professor, inúmeras vezes, o significado do mesmo termo, designadamente quando este aparece em contextos diferentes.

Existe também uma razoável confiança dos alunos de que as soluções dos problemas dão sempre resultados inteiros. Há algo nos valores decimais que parece

assustar os alunos e fazê-los desconfiar, mesmo quando entendem que os valores inteiros não traduzem muitas situações reais.

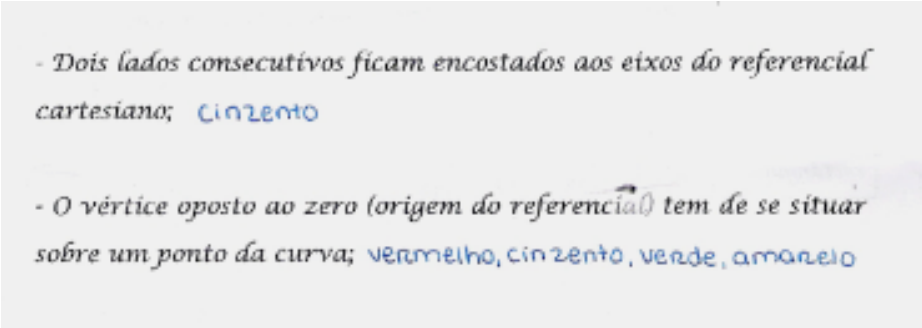
O grupo do António, depois de testar os rectângulos, chamou-me para esclarecer uma dúvida que foi comum a muitos alunos:

-“Professora, quando o enunciado diz para observarmos os rectângulos, é para fazer o quê? É para entendermos os rectângulos?”

-“Não tens de entender, tens de compreender os rectângulos.” – respondeu o José.

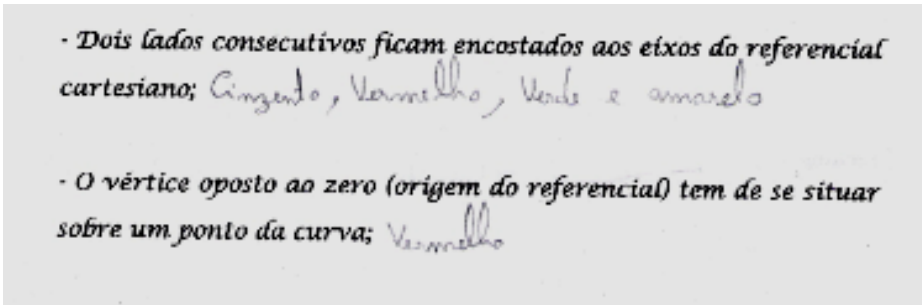
Embora o termo observar, tenho o mesmo grafismo na disciplina de Língua Portuguesa, do que na disciplina de Matemática, ao aparecer num problema de Matemática aparenta ter um significado novo, aparentemente oculto para os alunos.

Noutros grupos, os alunos apresentaram dificuldades em perceber que ambas as condições deveriam verificar-se em simultâneo e não separadamente:



- Dois lados consecutivos ficam encostados aos eixos do referencial cartesiano; cinzento

- O vértice oposto ao zero (origem do referencial) tem de se situar sobre um ponto da curva; vermelho, cinzento, verde, amarelo



- Dois lados consecutivos ficam encostados aos eixos do referencial cartesiano; Cinzento, Vermelho, Verde e amarelo

- O vértice oposto ao zero (origem do referencial) tem de se situar sobre um ponto da curva; Vermelho

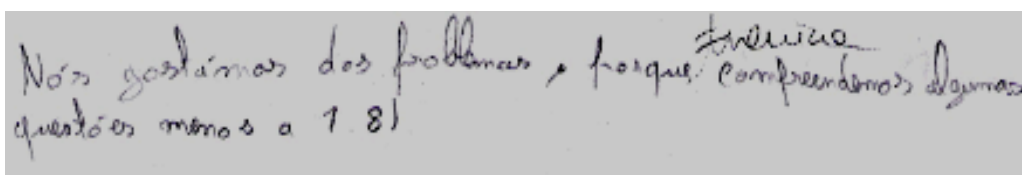
Fig. 33 e 34. Dois exemplos da verificação independente de cada uma das condições

O grupo do António começou por responder à questão 1.3) como se tratasse de uma relação de proporcionalidade directa. Estes alunos tendem a procurar a segurança dos conhecimentos que lhes são mais familiares e não procuram reflectir, antes de responder às questões. Desta forma, a primeira resposta do grupo foi dizer que, se o comprimento aumentasse para o dobro, a largura também aumentaria da mesma forma. Mas o José deu pelo erro e chamou a atenção dos colegas, depois de verificar os valores da tabela:

“Se o comprimento aumenta para o dobro a largura divide-se por dois...Fica duas vezes mais pequena.”

Na questão 1.8) os alunos precisaram da minha ajuda para perceber o que lhes era pedido, provavelmente por se tratar de uma generalização. Embora fosse evidente que, independentemente da largura ou do comprimento dos rectângulos a área seria igual a doze, houve bastantes dificuldades em escrever a expressão analítica pedida na questão 1.8), isto é, em traduzir a linguagem corrente para uma expressão matemática.

No final da aula, a satisfação dos grupos em relação à actividade proposta e aos resultados obtidos era geral. O grupo do António pediu-me, inclusivamente, para repetirmos este tipo de actividades em breve. O seguinte comentário é revelador do seu agrado.

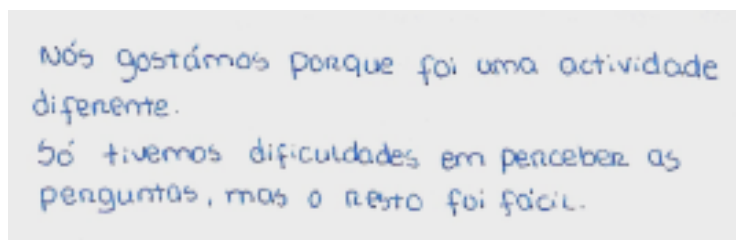


Nós gostámos dos problemas, e porque ^{então} compreendemos algumas questões menos a 1.8)

Fig. 35. O gosto pela resolução dos problemas está associado à compreensão

Parece evidente que, quando os alunos compreendem as questões, torna-se mais plausível “gostarem” de Matemática e dos seus problemas. Com esta actividade, os alunos mostraram que perante alguns problemas, sabem empenhar-se e, em geral,

chegar às conclusões correctas. Por outro lado, problemas que vêm como excessivamente complicados, em que sentem que não dominam os conteúdos e em que as conclusões são morosas e exigem um certo trabalho de análise, interpretação e compreensão, levam-nos a sentir-se incapazes de chegar a uma resolução e chamam-nos a desistir rapidamente.



Nós gostámos porque foi uma actividade diferente.
Só tivemos dificuldades em perceber as perguntas, mas o resto foi fácil.

Fig. 36. Os alunos apercebem-se da diferença que a actividade trouxe

Proporcionalidade Inversa – 2ª Aula

Após a primeira aula de resolução de problemas, nas aulas seguintes foram abordados vários conceitos incluídos no tema da proporcionalidade inversa. Numa aula posterior, foi então proposto o seguinte problema:

Problema da corrida dos 3000 metros

Entre os participantes de uma corrida de 3000 metros estavam o Marcelo a Dânia e a Susana.

- 1) O Marcelo demorou 15 minutos. A que velocidade correu?*
- 2) A Dânia correu a uma velocidade de 75m/mn (metros por minuto). Quanto tempo demorou?*
- 3) A Susana foi ao dobro da velocidade da Dânia (75 m/mn). Quanto tempo demorou?*

- 4) Indica a constante de proporcionalidade e interpreta-a no contexto do problema.
- 5) Elabora um gráfico que traduza a situação.
- 6) Escreve uma expressão que relacione a velocidade em função do tempo.

Esta aula ocorreu já no final do 1º período. Devido aos bons resultados da sessão anterior, deixei os alunos escolherem novamente os grupos de trabalho. Por esta altura, os alunos já estavam familiarizados com as aulas de resolução de problemas e iniciavam a distribuição das tarefas, começando rapidamente a trabalhar, esquecendo até a presença do gravador.

Inicialmente li o enunciado do problema com os alunos e dei algumas informações adicionais para que percebessem o que significava a equação $e=vt$, dizendo-lhes que e seria o espaço percorrido, v a velocidade e t o tempo que levava a percorrer a distância. Decidi fornecer esta fórmula porque os alunos já anteriormente tinham manifestado dificuldades em efectuar generalizações. Com este problema, eu pretendia saber se o conceito de proporcionalidade inversa tinha sido compreendido e se os alunos o sabiam aplicar.

No geral, não houve dúvidas em responder às questões. Os alunos compreenderam rapidamente que bastava substituir os valores do enunciado na fórmula para chegarem à resposta. Nos grupos, os elementos discutiram se deveriam reduzir algum dos valores para outra unidade de medida e decidiram realizar tabelas para organizar as respostas.

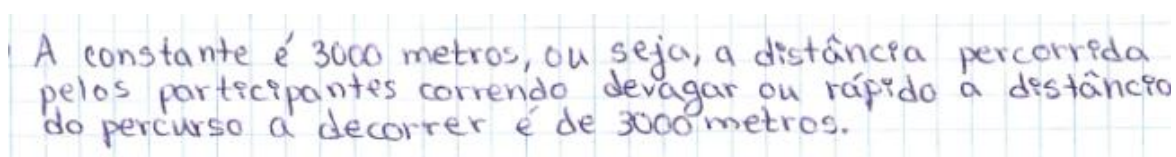
	Hora	Dia	Semana	
t	15	75	20	x
v	200	40	150	$v = \frac{3000}{t}$

Fig. 37. Os alunos tomam a iniciativa de usar uma forma de representação

Os alunos verificaram que se tratava de uma proporcionalidade inversa e que 3000 era a constante de proporcionalidade. A tabela foi usada para responderem às várias questões do problema.

Para a turma, de um modo geral, as questões pareceram bastante simples. O enunciado revelou-se fácil de interpretar e pareceu ir ao encontro das vivências dos alunos. A actividade proposta não mostrou ser problemática, o que me leva a concluir que, uma maior segurança dos alunos acaba por significar que as situações estão mais distantes de problemas genuínos e mais próximas de exercícios ou questões de aplicação de um determinado conteúdo escolar. Ao invés, se o problema for causador de grande insegurança, os alunos deixam de ser capazes de o resolver, nem mesmo com recurso a um problema semelhante que tenha sido resolvido anteriormente.

Subsistiram, no entanto, as dificuldades de traduzir em linguagem corrente os resultados e raciocínios matemáticos. Mesmo quando todos os elementos de um dos grupos quiseram dar o seu contributo para resolver a questão 4, a resposta foi a seguinte:



A constante é 3000 metros, ou seja, a distância percorrida pelos participantes correndo devagar ou rápido a distância do percurso a decorrer é de 3000 metros.

Fig. 38. Uma tentativa de resposta completa, que resulta numa resposta “atabalhoada”

Creio que é bastante nítida a dificuldade que os alunos têm em exprimir-se e em constatar que a sua frase não faz muito sentido. Em todo o caso, satisfeitos com o seu desempenho, os alunos acabaram a resolução dos problemas antes do tempo que tinha previsto para o efeito e foi possível discutir com a turma todas as questões.

Um problema para trabalho de casa

Apesar das várias aulas de resolução de problemas realizadas ao longo do período lectivo, muitas das dificuldades dos alunos persistiram. Então, propus aos alunos uma actividade diferente para trabalho de casa. Cada aluno deveria procurar um problema, relacionado com um assunto já estudado nas aulas e deveria resolvê-lo. Esta proposta tinha vários objectivos: em primeiro lugar, queria que pesquisassem vários problemas e escolhessem um que soubessem apresentar resolvido; em segundo lugar, que identificassem um tipo de problema em que se poderia utilizar uma determinada estratégia (criar uma tabela de dupla entrada, fazer diagrama em árvore, encontrar e resolver um sistema de equações, etc.).

Na aula, o problema de cada aluno seria proposto para ser resolvido por todos os colegas e, é claro, pela professora. Cada aluno teria, ainda, de assumir o papel de “professor” na apresentação do seu problema e deveria ajudar a turma em qualquer dúvida que surgisse.

Os resultados ficaram aquém das minhas expectativas porque apenas metade dos alunos fizeram este trabalho de casa (7 dos 14 alunos). Dos que efectuaram o trabalho de casa, muitos deles revelaram pesquisas pouco incessantes. Escolheram problemas bastante simples e que sentiam que dominavam bem. Apresento alguns dos problemas propostos:

Ao lançarmos dois dados, qual a probabilidade de obtermos resultados cuja soma é sete?

Possíveis alternativas:

- A- $1/2$
- B- $1/3$
- C- $1/4$
- D- $1/5$
- E- $1/6$



Nota: Utiliza uma tabela de dupla entrada como método para a resolução do problema proposto.

Fig. 39. Um problema de probabilidades com tabela de dupla entrada

O aluno apresenta um problema com um formato de resposta de escolha múltipla, o que trouxe alguma novidade, e tem o cuidado de deixar uma nota para que a sua resolução se faça com recurso a uma tabela de dupla entrada. Para este aluno, mostrou-se importante haver uma informação sobre a estratégia a utilizar para resolver o problema, talvez porque a sua principal dificuldade seja exactamente a de identificar qual a estratégia a adoptar. Com esta nota, porém, o aluno faz com que o problema quase se confunda com um exercício relativamente rotineiro.

Um outro aluno apresentou o problema seguinte:

Problema de Probabilidade

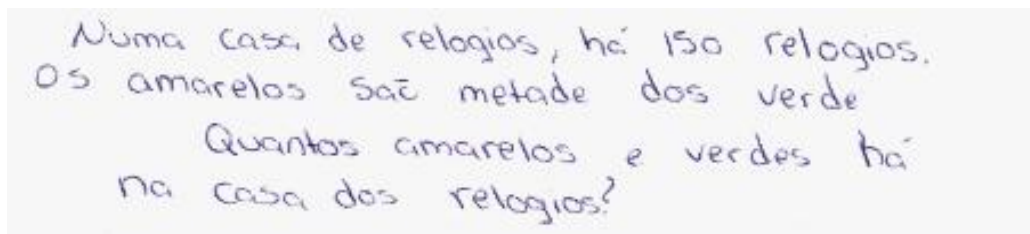
1. No lançamento de dois dados, qual a probabilidade do produto dos pontos ser múltiplo de três?

Fig. 40. Um problema de probabilidades com lançamento de dados

Devido à semelhança com o problema anterior, perguntei-lhes se tinham feito o trabalho de casa em conjunto e eles contaram-me que tinham tido a mesma ajuda para o fazerem. Não escondi que estava um pouco desiludida por terem arranjado problemas

tão parecidos, numa tarefa em que pretendia dar-lhes liberdade para fazerem coisas diferentes.

A aluna da turma que sofre de dislexia apresentou o seguinte problema:

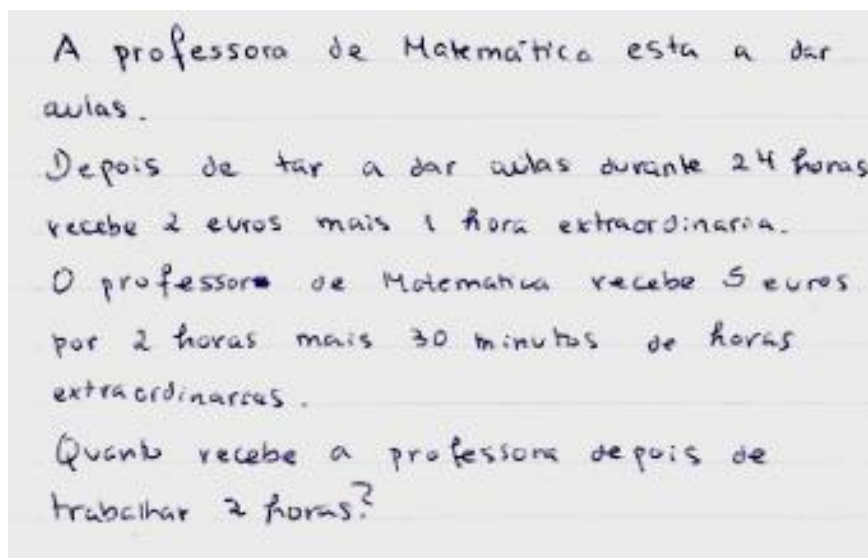


Numa casa de relógios, há 150 relógios.
Os amarelos são metade dos verdes.
Quantos amarelos e verdes há
na casa dos relógios?

Fig. 41. Um problema para resolver por meio de um sistema

Após algum aperfeiçoamento do enunciado, a turma resolveu o problema sem grandes dificuldades. Para o efeito, os alunos atribuíram incógnitas ao número de relógios verdes e amarelos. A obtenção do sistema não apresentou dificuldades e rapidamente os alunos determinaram a solução correcta. Os alunos reconheceram que as condições dadas eram muito simples e que não tiveram que pensar muito.

Eis um outro problema:



A professora de Matemática está a dar aulas.
Depois de ter a dar aulas durante 24 horas
recebe 2 euros mais 1 hora extraordinária.
O professor de Matemática recebe 5 euros
por 2 horas mais 30 minutos de horas
extraordinárias.
Quanto recebe a professora depois de
trabalhar 2 horas?

Fig. 42. Um problema “artificial”

Este problema, centrado numa questão do mundo de trabalho, revelou-se intrigante e bastante difícil de entender pelo desfasamento que revela do contexto real. A primeira observação feita foi a de saber se seria razoável uma professora de Matemática dar aulas durante 24 horas. Porventura, o aluno poderia estar a referir-se a um dia de trabalho da professora, embora não o fazendo da forma mais adequada. O enunciado continuava a parecer ter pouco sentido e, por isso, pedi ao aluno que explicasse qual era a intenção do problema mas o aluno também não foi capaz de esclarecer. Olhei então para a sua resolução e verifiquei que o problema denotava ter sido criado “artificialmente” para levar à resolução de um sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 5 = 2x + 0,5y \\ 24 = 2x + 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = -24 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2x + 0,5(-24 + 2x) \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2x + 12 + 1x \\ y = -24 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1x = -7 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -24 + 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -10 \end{cases}$$

Fig. 43. Um sistema de equações e uma solução desprovidos de sentido

O sistema não faz sentido, tendo em conta o enunciado mas o enunciado também não faz sentido, tendo em conta o sistema. Perguntei ao aluno como tinha efectuado a sua pesquisa e como tinha escolhido o problema para apresentar. Ao responder-me,

mostrou-me o manual e disse-me que tinha tentado usar um dos problemas propostos, alterando valores, como se mostra na figura seguinte:

5. Resolver problemas formando e resolvendo sistemas de equações.


A Ana e o Alexandre trabalham em *part-time* num café-restaurante.

Depois das 22 horas cada hora de trabalho é paga a uma taxa superior.

A semana passada a Ana recebeu 234 euros por 30 horas de trabalho com o preço-base e 12 horas a uma taxa superior.

O Alexandre recebeu 355 euros por 50 horas a preço-base e 15 horas à taxa mais elevada.

Quanto recebe a Ana por hora de trabalho depois das 22 horas?



Seja $x \rightarrow$ preço da hora à taxa normal
 $y \rightarrow$ preço da hora à taxa superior

$$\begin{cases} 234 = 30x + 12y \\ 355 = 50x + 15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{234}{12} - \frac{30}{12}x \\ 355 = 50x + 15\left(\frac{234}{12} - \frac{30}{12}x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{234}{12} - \frac{30}{12}x \\ 355 = 50x + 292,5 - 37,5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{234}{12} - \frac{30}{12}x \times 5 \\ 12,5x = 62,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 5 \end{cases}$$

Depois das 22 horas, a Ana recebe 7 euros por cada hora de trabalho.

In *Matemática, 1ª Parte, Porto Editora, p. 81*

Fig. 44. O problema que serviu de modelo para a situação das horas extraordinárias

Reparei, ainda, que o aluno tinha um erro de sinais na resolução do sistema, no primeiro passo em que isola a incógnita y , na segunda equação. Mas este erro na resolução do sistema não me pareceu o mais grave e creio que, no geral, o aluno sabe o que fazer para resolver um sistema. Noto, porém, que no final o aluno não apresenta qualquer resposta. Penso que este aluno não conseguiu interpretar e/ou compreender o trabalho que efectuou (trabalhar depois das 22 horas, não é o mesmo que trabalhar 22

horas, ou 24 horas), ao decalcar o seu problema do exemplo do manual. Também não parece ter feito uma verificação do que obteve, pois qual seria a explicação a dar para o valor final $y=-10$? Com este exemplo, temos uma evidência de como a Matemática se transforma para alguns alunos num exercício de reprodução de “fórmulas e processos” essencialmente mecânicos, algébricos e de cálculo, em que a construção de sentido deixa de ter importância. Ou, em alternativa, o sentido que emerge é o de uma tentativa de descortinar uma saída, à custa da manipulação de números e de símbolos. São conhecidos da investigação muitas situações análogas a esta, em que os estudantes tentam dar respostas sem passarem pela compreensão dos problemas, fazendo operações com os dados disponíveis, mesmo quando esses dados são inadequados. Na aula de Matemática, os alunos acreditam que a prioridade é resolver, muito mais do que compreender ou atribuir um significado ao que se faz.

Análise e interpretação dos dados recolhidos no questionário

No final do 1º período, pareceu-me importante efectuar um pequeno questionário acerca das aulas de resolução de problemas (anexo 9). Algumas respostas ajudaram-me a perceber como é vista a resolução de problemas e quais os sentimentos que os alunos nutriam por esta actividade.

Cinco dos catorze alunos que constituem a turma disseram que não encontram diferenças entre um exercício de Matemática e um problema. Dos que dizem existir diferenças, referem como principal diferença a existência de um texto num problema, que tem que ser entendido, o que acarreta dificuldades na compreensão/interpretação do problema.

Embora todos os alunos tenham consciência da importância da resolução de problemas nas aulas de Matemática, justificam sempre esse tipo de trabalho pela necessidade de ficarem preparados para o exame final. No seu entender, a resolução continuada de problemas nas aulas, confere-lhes maior capacidade de responder acertadamente aos problemas que irão aparecer nos testes ou exames e melhora a sua autoconfiança. Um aluno refere que as aulas centradas na resolução de problemas lhe oferecem a possibilidade de contactar com diferentes estratégias de resolução e dois alunos referem que são importantes para desenvolver o raciocínio. Após este período de resolução sistemática de problemas nas aulas de Matemática, nenhum dos alunos encara a resolução de problemas como uma forma de introduzir um tópico novo, nem como uma oportunidade de aplicação de conhecimentos, nem mesmo como uma forma de adquirir competências necessárias para a sua formação (e para sua vida futura). Este facto pode explicar alguma falta de adesão dos alunos à resolução de problemas, pois não vêem a necessidade de resolver problemas para além de desejarem resultados positivos nos testes e na avaliação escolar.

Todos os alunos reconhecem que a resolução de problemas melhora capacidades adquiridas e que desenvolve novas capacidades. Quando questionados acerca das novas capacidades que adquiriram, as respostas são vagas e apenas três alunos as identificam. Dois alunos referem que adquirem capacidades a nível da interpretação e um aluno a nível do raciocínio. A resolução de problemas é ainda subestimada por estes alunos, até porque muitos deles não pretendem continuar os estudos para além do 9º ano e outros tencionam escolher áreas em que a Matemática não seja uma disciplina essencial. Desta forma, desvalorizam a sua importância, não se comprometendo de forma efectiva com a ideia de melhorar a sua aptidão na resolução de problemas. Para estes alunos, parece ser algo que não terá grande interesse ou relevância no futuro.

Estes alunos consideram importante a resolução dos problemas em grupo, pois permite a partilha de ideias e acrescentam que, por vezes, a ajuda de um colega é essencial para ultrapassar obstáculos. Um aluno refere que a linguagem usada pelos colegas é até mais acessível do que a usada pela professora e que por esse motivo aprende mais quando está a resolver as questões com os seus colegas de grupo.

Quanto ao tempo requerido para a resolução de problemas, apenas 5 alunos referem que o tempo que tiveram disponível foi insuficiente. Apesar disso, percebem que o tempo não basta para ultrapassarem as dificuldades que encontram perante um problema e admitem que a rapidez com que chegam a uma resposta não é garantia de sucesso. Mas a persistência perante a busca de uma solução é muito fraca. Estes alunos não se detêm espontaneamente a analisar possíveis caminhos ou a explorar e experimentar possibilidades.

Nenhum aluno sugeriu uma proposta para uma futura aula de resolução de problemas, mas houve algumas sugestões no sentido de se fazer um peddy-mat. Infere-se daqui que, para estes alunos, é importante a realização de actividades práticas e lúdicas que os animem face à barreira da disciplina e dê um carácter de utilidade imediata às suas aprendizagens.

Um teste de avaliação

Após as férias do Natal, dei um teste de avaliação que pretendia fazer uma aferição das aprendizagens realizadas no primeiro período. (Anexo 10). O teste tinha apenas 3 questões, uma sobre probabilidades e duas relacionadas com sistemas de equações. No enunciado da primeira questão, os alunos tinham uma figura que ilustrava o problema.

Problema 1 – A Lia e o Paulo têm um jogo que consiste no seguinte: cada um deles escolhe um número de 1 a 9 e coloca uma ficha sobre o número escolhido. De seguida, lançam um dado tetraédrico, com as faces numeradas de 1 a 4, duas vezes consecutivas. Se a soma dos pontos obtidos coincidir com o número escolhido, avança numa quadrícula na vertical. O processo repete-se e é considerado vencedor aquele que em primeiro lugar atingir a linha de chegada.

Para todas as questões justifica convenientemente a tua resposta.

- 1) Para iniciar o jogo, a Lia escolheu o 7 e o Paulo o 4. Qual dos dois tem maior probabilidade de sair vencedor?

Esta questão revelou-se de grande dificuldade, pois os alunos desconheciam o que era um dado tetraédrico. Pediram-me imediatamente para clarificar essa dúvida. Como nenhum dos alunos, apesar da imagem, percebia como funcionava este tipo de dado, desenhei um no quadro e expliquei como funcionava. A questão que os ocupou foi, então, perceber se um dado tetraédrico poderia ter os números de 1 a 9. Dada a minha explicação os alunos ainda não percebiam como funcionava o jogo, mas considerei que não devia esclarecer muito mais e limitei-me a repetir várias vezes que deviam ler o enunciado com atenção. A certa altura, acabei eu por lê-lo em voz alta, pausadamente.

A falta de familiaridade com o contexto do problema levou os alunos a refugiarem-se em contextos mais familiares. Duas das alunas, a Cátia e a Rita não deixaram o problema sem resposta, mas mostraram não ter considerado as pintas que teria o dado tetraédrico. Uma delas assumiu que o dado era um dado convencional com 6 faces:

1) Para iniciar o jogo, a Lia escolheu o 7 e o Paulo o 4. Qual dos dois tem maior probabilidade de sair vencedor? *Têm os dois ~~para~~ a mesma probabilidade de sair vencedores porque o dado tem o mesmo número de números pares e ímpares.*

1. ① O Paulo tem mais probabilidade de vencer porque ao lançar o dado duas vezes tem 6 possibilidades de ~~sair~~ a soma dos dois números seja 7, $(6+1/1+6/5+2/2+5/4+3/3+4)$ enquanto que a Lia tem apenas 3 possibilidades que a soma dos dois números seja 4, $(3+1/1+3/2+2)$.

Fig. 45 e 46. Respostas das Cátia e da Rita recorrendo à realidade do seu dia-a-dia

É interessante verificar que a primeira aluna tem consciência das suas dificuldades e afirma que não percebeu o problema:

Que dificuldade/ dificuldades encontraste para resolver o problema?
As dificuldades foi as probabilidades de sair. (calcular todos os casos possíveis).

Qual a possível causa dessas dificuldades?
A possível causa foi de não perceber o problema.

Fig. 47. Respostas da Cátia às dificuldades que o problema apresentou

Outra aluna respondeu o seguinte sobre a causa das suas dificuldades:

Qual a possível causa dessas dificuldades ?

Não sei, porque eu até sei resolver o problema mas, depois acho e penso que a resposta está mal e borralho-me toda! =s

Fig. 48. Dificuldades e hesitações na resolução de um problema

Esta aluna domina razoavelmente os conteúdos matemáticos e consegue resolver exercícios de aplicação directa, mas quando se depara com um problema falha na sua interpretação, opta por uma estratégia de resolução inadequada e também não executa a fase da verificação do resultado. Talvez por falta de confiança na sua capacidade de resolução de problemas, no final, sente-se confusa e não tem a capacidade de refazer o raciocínio usado.

Outro aluno optou por uma estratégia de resolução menos adequada e usou um diagrama em árvore para efectuar a contagem de todos os casos possíveis no lançamento dos dois dados. No entanto ignora o enunciado, que pede os resultados da soma de dois lançamentos.

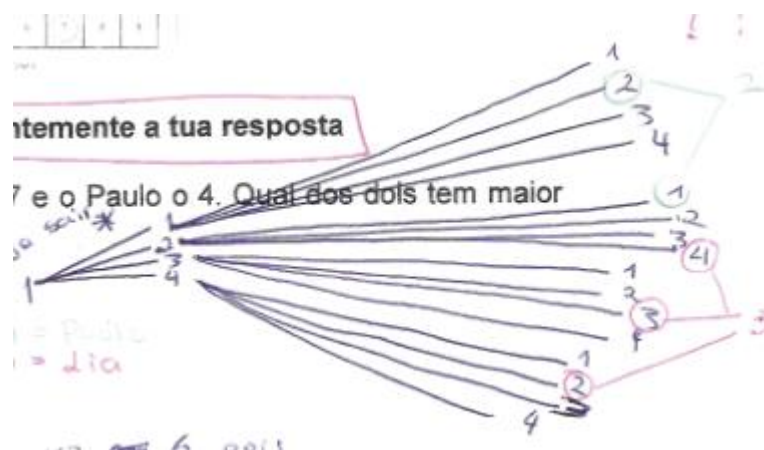


Fig. 49. Uso inadequado de uma estratégia para a resolução do problema

Também, do seu ponto de vista, a dificuldade principal residiu na interpretação:

Durante os problemas tive dificuldade em interpretar.

Fig. 50. Principal dificuldade diagnosticada por um aluno quando se depara com um problema

As questões seguintes, dependiam muito de que os alunos tivessem percebido o problema e adquirido a noção de como funcionava o jogo.

2) *Se fosses um dos jogadores indica:*

2.1.1) *O número em que apostavas.*

2.1.2) *O números ou números em que nunca apostavas.*

Uma das alunas percebeu do que tratava o problema, mas não usou uma estratégia adequada para a sua resolução, o que se traduziu numa contagem incorrecta de casos possíveis e favoráveis:

Quem tem mais probabilidade de sair vencedor é o Paulo. Porque como o dado tem números de 1 a 4 e só se joga (2x) soma-se e por combinações ele tem 1 combinação possível ($1+3=4$) e a Lia também é o caso ($4+3=7$) mas é possível que haja mais *

Para todas as questões justifica convenientemente a

① Para iniciar o jogo, a Lia escolheu o 7 e o Paulo probabilidade de sair vencedor?
* probabilidades que ganha o Paulo $\left(\frac{2}{8}\right)$.

Fig. 51. Resposta inadequada de uma aluna

Na segunda alínea a aluna já não tem em conta os valores saídos no duplo lançamento do dado. Aparentemente, não percebe a relação desta questão com a anterior. Ao responder, cria uma realidade alternativa, considera que os valores obtidos nos lançamentos nunca são iguais e dá uma resposta sem grande sentido no contexto.

2.1.1 O número em que apostavas.
 → No número 4, porque como os números de 1 a 4 no dado nunca saem repetidos e são números de jogos "pequenos" é possível ter boas apostas.
 2.1.2 O números ou números em que nunca apostavas.
 → Eu nunca apostava no 9, porque como é um número com um valor "alto" e o jogo consiste que se jogue (2x) cada um dos jogadores e o número nunca se repete e soma-se o nº 9 é pouco provável de ganhar.
 & Admito que tivesse como adversário um amigo que apostava no 6. Em número ganhar.

Fig. 52. Resposta que revela desconhecimento do contexto do problema

Outra aluna, que também não organizou os casos possíveis, dá uma resposta em que ignora o caso de não poder sair o número 9. A aluna tem a percepção dos valores da soma mais ou menos prováveis. É curioso ver que considera o número 2 como uma aposta que também não é aconselhável.

Nunca apostaria no número 1, porque não há nenhuma possibilidade de a soma de dois números ser 1, também não apostaria no número 2 porque só tem uma possibilidade de a soma dos dois números ser 2 (1+1).

Fig. 53. Resposta de uma aluna que tem uma interpretação parcialmente correcta do problema

Noutros casos, ainda, há quem opte por dar uma resposta com um fundamento completamente alheio a um raciocínio matemático. Este aluno diz mesmo que acaba por inventar outras perguntas para substituir as que são dadas e refere que é uma consequência de se sentir confuso com os problemas.

Fig. 56. Resposta usando uma informação fornecida no enunciado para resolver uma determinada alínea, sem relevância

Começou a questionar-me, após algum tempo a olhar para o enunciado:

- *A minha dúvida é e se sair o número nove duas vezes?*

Acabei por lhe responder:

- *Lê o enunciado com atenção... Olha, explica-me em que consiste o jogo.*

Mas o David, após várias leituras e tentativas de explicação, acabou por responder incorrectamente.

Qual a possível causa dessas dificuldades ?

Tenho dificuldade em ler os problemas com mais cuidado

Fig. 57. Resposta de um aluno induzida pelos meus comentários.

Outros alunos iniciam um novo raciocínio em cada questão, mas cometendo erros um tanto estranhos. A Cátia, que conseguiu contar correctamente os casos possíveis e responder correctamente às outras questões respondeu incorrectamente a esta última.

$1+1=2$	$3+1=4$
$1+2=3$	$3+2=5$
$1+3=4$	$3+3=6$
$1+4=5$	$3+4=7$
$2+1=3$	$4+1=5$
$2+2=4$	$4+2=6$
$2+3=5$	$4+3=7$
$2+4=6$	$4+4=8$

4.1.2) $\frac{9}{8}$ Não existe nenhum nº com 9 possibilidades de sair: o 9 tem 8 possibilidades, o 8 tem 7, o 7 tem 6, o 6 tem 5, o 5 tem 4, o 4 tem 3, o 3 tem 2, o 2 tem 1 e o 1 não tem nenhuma possibilidade.

Fig. 58. Resposta desesperada da Cátia, reveladora de alguma desconcentração

Em enunciados muito extensos os alunos desconcentram-se e afastam-se do pedido. Obtêm mais sucesso numa variedade de pequenos problemas, de enunciado curto.

Gostas de resolver problemas? Sim Não

Justifica a tua resposta

Não gosto porque, os enunciados dos problemas geram muita confusão, ~~apresentam muitos~~ e chega a uma certa altura que já nem sei bem o que fazer.

Fig. 59. A justificação da Cátia para a resposta anterior

Os problemas que se apresentam em seguida eram relativos a sistemas de equações a duas incógnitas.

Problema 2 – O número do vencedor do corta-mato escolar deste ano era formado por dois algarismos. A soma dos dois algarismos é 10 e o algarismo das dezenas é quádruplo do das unidades. Qual o número do vencedor?

Neste problema a grande dificuldade foi traduzir o enunciado em linguagem matemática. Os alunos que apresentaram os seguintes sistemas não percebem que ao usar a expressão “A soma dos algarismos são 10” esgotam a possibilidade de usar os valores desta condição e que a próxima condição é independente da anterior. Estes alunos não começam por identificar o significado das variáveis x e y o que se traduz numa dificuldade em estabelecer as condições:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10 = 4y \end{cases} \Rightarrow$$

Fig. 60 e 61. Duas traduções incorrectas para sistema de equações

Qual a possível causa dessas dificuldades ?

~~_____~~ Não consigo perceber o enunciado do problema.
 Não consigo traduzir um enunciado num sistema.

Fig. 62. Justificação de uma aluna para as dificuldades de tradução em linguagem matemática

Alguns alunos que apresentaram tiveram dificuldades em estabelecer uma condição para “O algarismo das dezenas é o quádruplo do das unidades”. Neste caso a aluna desconhece o significado de quádruplo.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 4 = y \end{cases} \Rightarrow$$

Fig. 63. Incorreção na tradução do termo quádruplo

Nos casos seguintes existe uma troca de variáveis ao escrever a condição:

Dózenas $\rightarrow x$
 unidades $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x = y \end{cases} \Leftrightarrow R: \text{O número do vencedor é } 28. \times$$

$x \rightarrow$ unidades
 $y \rightarrow$ dólares

$$\begin{cases} y + x = 10 \\ 4y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - x \\ y \times 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x \times 4 = x \\ 10 \times 4 = x + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 = 2x \\ -2x = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-40}{2} \\ x = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - (-20) \\ y = 10 + 20 \\ x = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = -20 \end{cases}$$

 $30 - 20 = 10$
 R: O número do vencedor da carta-mata é o número de dólares.

Fig. 64, 65 e 66. Várias incorrecções dos alunos na formalização do sistema

Ao chegarem ao resultado os alunos não efectuem a fase da verificação pois seria fácil perceber que os valores encontrados não satisfaziam as condições do problema.

Noutros casos, os alunos tentaram chegar à solução sem recorrer a um algoritmo (estes últimos são alunos de nível inferior a 3 a Matemática mas que conseguem, pelo uso da sua capacidade de ensaio e análise, chegar a uma solução, como se mostra na figura 67 e 68).

Existem cinco combinações dos algarismos que se somando o resultado é dez. Mas depois os únicos algarismos que nas dezenas é quádruplo do das unidades é o número (28) porque a soma $[2+8=10]$ e o número (8) é quádruplo do número (2) .

$1+9=10$
 $2+8=10$
 $3+7=10$
 $4+6=10$
 $5+5=10$
 $6+4=10$
 $7+3=10$
 $8+2=10$
 $9+1=10$

O número do vencedor é o 82, porque $8+2=10$ e $2 \times 4=8$.

Fig. 67 e 68. Tentativas de resolução do sistema pelo método de tentativa e erro

Os alunos seguintes, por seu lado, associam as suas dificuldades na resolução de sistemas, ao facto de não conseguirem fazer a tradução do problema no respectivo sistema e à falta de compreensão dos dados que constam no enunciado.

Que dificuldade/ dificuldades encontraste para resolver o problema?

Não consigo ~~traduzir~~ traduzir o problema, nem arranjar forma para chegar ao resultado.

Qual a possível causa dessas dificuldades?

Apesar de treinar muito nunca consegui

Que dificuldade/ dificuldades encontraste para resolver o problema?

Não consegui resolver a 5 porque no enunciado dizia que o número das dezenas era o quádruplo do número das unidades, não sei se se referia ao número a descobrir se ao número 10 ~~porque~~ mas o 10 não podia ser porque 1 não pode ser quádruplo de nada e também não me parece que fosse o número a descobrir porque não deve ter algarismo das dezenas já que ele tem de somar com outro número para dar 10.

Fig. 69 e 70. Explicações dos alunos para as suas dificuldades, na resolução de problemas, associados aos sistemas de equações

O último problema apresentado era retirado de um exame nacional e pretendia conferir se, confrontados com este enunciado, os alunos conseguiriam responder correctamente.

Problema 3 – Para efectuar chamadas do seu telemóvel, para duas redes (A e B), o preço, **em cêntimos**, que o Paulo tem a pagar **por cada segundo** de duração de uma chamada é o seguinte:

Rede	Preço por segundo (em cêntimos)
A	0.5
B	0.6

Ontem, o Paulo só efectuou chamadas do seu telemóvel para as redes A e B. A soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos e, no total, o Paulo gastou 35 cêntimos. Qual foi o tempo total de duração das chamadas efectuadas pelo Paulo, para a rede A? Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade.

In Exame Nacional de Matemática, 2ª chamada, 2007

Tal como no problema anterior, as dificuldades centraram-se na tradução do enunciado para um sistema de equações. Poucos alunos responderam a esta questão pois tinham perdido muito tempo nas questões anteriores.

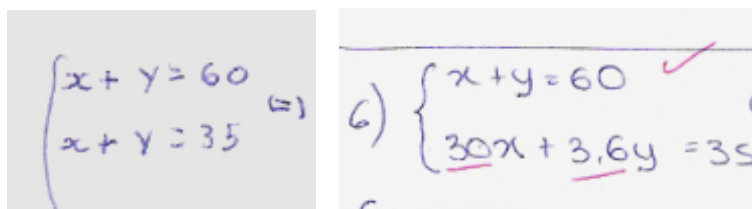


Fig. 71 e 72. Dificuldades associadas à tradução em sistemas de equações

Qual a possível causa dessas dificuldades ?

Principalmente em perceber os enunciados,
~~calcular~~ passar para um sistema de equações.

Que dificuldade/ dificuldades encontraste | para resolver o problema?

Fui no ultimo problema que tive
+ dificuldades preciso + tempo e tenho
~~uma~~ extrema dificuldade a interpretar.

Fig. 73 e 74. Identificação das possíveis causa para as dificuldades apontadas anteriormente

Alguns alunos tentam sucessivamente resolver os problemas, contornando a tradução para um sistema de equações e preferindo ir por métodos mais ou menos exaustivos:

representa todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade.

A duração total dos discursos efectuados pelo Rudo para a rede A é de 7 segundos.

4 - A	
1 - 0,5	
1 - 0,5	
7 - 0,5	7
1 - 0,5	
1 - 0,5	
1 - 0,5	
1 - 0,5	
7 - 0,5	

$7 \times 0,5 = 0,35 \text{€}$

Fig. 75. Resolução do problema usando um método exaustivo

Para finalizar, é interessante analisar o registo das opiniões dos alunos acerca do seu desagrado pela resolução de problemas. Este sentimento está aliado à sua frustração

na falta de obtenção de soluções e à insegurança nos seus saberes matemáticos, como se pode verificar nos depoimentos seguintes:

Gostas de resolver problemas ? Sim Não
Justifica a tua resposta Porque alguns problemas não ~~parecem~~ parecem claros e não consigo resolvê-los.

Qual a possível causa dessas dificuldades ?
Possivelmente a causa dessas dificuldades ou é um pouco Falta de estudo ou então mesmo uma grande falta ~~de~~ concentração.

Que dificuldade/ dificuldades encontraste para resolver o problema?
Encontrei dificuldades a ~~despender~~ justificar as minhas respostas.

Fig. 76, 77 e 78. Depoimentos de alunos que exprimem limitações pessoais

Os alunos acabam por apontar como causas das suas dificuldades na resolução de problemas, não falhas numa das fases da resolução mas insuficiências que dizem respeito a cada um, em particular, como por exemplo a falta de estudo, a falta de concentração e a dificuldade em efectuar justificações credíveis. Parecem sentir que – por estarem a resolver problemas de forma continuada e de tipos diversos, dispondo de um guião com o objectivo de os ajudar nas várias fases de resolução de problemas – o facto de não conseguirem efectuar progressos, ao longo do tempo, só poderá significar que a inaptidão está ligada a eles próprios. Esta incapacidade torna-se interiorizada e os alunos atribuem a si próprios as falhas de um processo, que afinal é bastante complexo.

Capítulo V

Conclusões

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões do presente estudo, em consonância com a análise de dados realizada. O trabalho de campo realizou-se em contexto de sala de aula, tendo sido privilegiadas estratégias de ensino/aprendizagem que tomassem a resolução de problemas nas aulas de Matemática como “peça” fundamental na aquisição, aplicação e consolidação de conhecimentos e no desenvolvimento de competências.

O estudo visava conhecer e entender as principais dificuldades dos alunos, no âmbito da resolução de problemas na aula de Matemática, no que diz respeito à capacidade de interpretar, estabelecer e discutir ideias e estratégias e de comunicar, em termos da linguagem matemática. Para atingir os objectivos propostos, foram seleccionadas, como vectores essenciais da investigação, as seguintes questões:

(1) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na actividade de resolução de problemas, quando esta é implementada de forma continuada na aula de Matemática?

(2) De que forma estas dificuldades se revelam e como afectam o desempenho dos alunos?

Dificuldades dos alunos: Pontas de um iceberg

Para responder às questões que levantei neste estudo, propus-me fazer um exercício de identificação e hierarquização das dificuldades evidenciadas e expressas pelos alunos na actividade de resolução de problemas, tal como esta foi implementada na turma do 9º ano participante no trabalho de campo. Nesse sentido, o primeiro passo que dei consistiu na análise cuidadosa e selectiva dos resultados, destacando evidências e

propondo categorias emergentes. Esta revelou-se uma tarefa verdadeiramente difícil, desde logo, pela dúvida inicial: por onde começar? Procurei então distinguir, de entre as várias instâncias apresentadas no tratamento dos dados, qual poderia ser entendida como a dificuldade crucial dos alunos, ou seja, aquela que poderia hipotecar seriamente a sua capacidade de resolução de um problema de Matemática.

Perante um problema, talvez a primeira dificuldade observada nos alunos tenha sido *a interpretação do seu enunciado*. Quando me refiro ao enunciado, estou a incluir nesse conceito, a apresentação de uma determinada situação, a explicitação de informações diversas e inter-relacionadas, de carácter mais ou menos matemático, a formulação de questões, a presença de diagramas ou figuras, etc. Os resultados obtidos permitem concluir que esta dificuldade global pode subdividir-se em duas complicações distintas para os alunos: a interpretação do contexto do problema, em que se incluem aspectos da situação descrita, relativamente aos quais os alunos não dão o significado esperado, e a interpretação do texto linguístico, em si, designadamente a descodificação de palavras, signos linguísticos e expressões próprias do registo matemático, a que se referem Pimm (1987) e Steinbring (1998).

A dificuldade de interpretação de um determinado contexto parece estar, em muitos casos, relacionada com a maior ou menor familiarização que os alunos têm com o que é sugerido, apresentado ou transmitido no problema. Vejamos, a este propósito, o exemplo do problema do dado tetraédrico (anexo 10). Imediatamente, foi possível notar como se tornou num obstáculo à resolução do problema o desconhecimento que os alunos tinham do formato do dado que era indicado no enunciado: “lançam um dado tetraédrico com as faces numeradas de 1 a 4”. Apesar de lhes ter explicado, por meio de um desenho, a forma de um dado tetraédrico e de lhes ter dito, explicitamente, que as faces desse dado eram numeradas de 1 a 4, houve alunos para quem esta nova ideia não

foi significativa e não suscitou uma nova compreensão do conceito de “dado”. Para estes alunos, um dado é simplesmente aquele que tem os números de 1 a 6 e foi esse entendimento que acabou por prevalecer na questão do lançamento do dado, conduzindo a soluções erradas no contexto de um jogo que usava um dado diferente do habitual – um “dado tetraédrico”.

Por outro lado, o aluno poderá ter dificuldades em interpretar o texto, em si, ou as informações concretas que este inclui, e não interpretar correctamente as afirmações ou as expressões que este fornece, tais como: “o jogo consiste em lançar o dado duas vezes consecutivas e somar os resultados obtidos” ou “o comprimento da sala excede a sua largura em 21cm. Se aumentarmos 4 cm a cada uma das dimensões, a área da sala aumentará 492 cm²” (anexo 6). Quando o resolvidor se depara com um problema que apresenta termos, expressões e códigos linguísticos deste tipo, tem de ser conhecedor do registo matemático em que tais referências são efectuadas. São termos que têm de ser interpretados, tendo em conta uma conotação e uma significação específica, própria da Matemática, com um significado que lhe é particular e que não se reduz a outra interpretação usual num contexto mais corrente. No caso do problema da área da sala para a festa de finalistas (anexo 6), foi visível que os alunos não conseguiram ultrapassar a fase da compreensão. Também foi esclarecedor da insegurança sentida pelos alunos o facto de não terem tomado a iniciativa de desenhar um rectângulo como forma de apoio à compreensão do problema. Só o fizeram depois de incentivados a criarem um esquema. Mesmo assim, a questão do “aumentar” e do “exceder” pareceu revestir-se de grande imprecisão e deu origem a outras ideias precipitadas – colocar números na figura – como se pode verificar no esquema feito por uma das alunas:

$$\begin{array}{c} \boxed{492} \quad 21+4 \\ x+21+4 \end{array}$$

Esta aluna adiciona 4 a cada uma das dimensões do rectângulo e, ao mesmo tempo, “adiciona” 492 à área do rectângulo. Mas como a tal área anterior não está identificada, o valor 492 passa a estar no “lugar onde se escreve a área” e, deste modo, passa a simbolizar a área do rectângulo. A partir daí, começa a funcionar aquilo que os alunos sabem e dominam: o cálculo da área do rectângulo, isto é, a realização de um procedimento que consiste em fazer o produto das duas dimensões. Deste modo, surge uma espécie de saída, ou melhor, os alunos conseguem descortinar algo que lhes parece razoável fazerem, sem terem a noção exacta do que estão a efectuar relativamente ao problema em questão. Situações como esta levam os alunos a exibirem alguma incerteza quanto à sua principal dificuldade na resolução de um problema. Uns referem que “acharam um pouco difícil interpretar o enunciado”, sem dizerem efectivamente onde e porquê, enquanto outros afirmam que “tiveram um pouco de dificuldade em encontrar uma estratégia”, também sem dizerem porquê.

Os problemas de Matemática, nomeadamente, os problemas que fazem parte da Matemática escolar possuem uma estrutura própria, por vezes bastante implícita e muito regulada por um determinado registo, discurso e linguagem. Se o resolvidor tem pouca destreza no reconhecimento e na manipulação do registo matemático, vê a sua dificuldade em interpretar o enunciado traduzida numa confusão entre o que lhe é pedido e o que é fornecido. Não é por acaso que uma das heurísticas de Polya (1981) fornece apoio nesta fase, sugerindo que o resolvidor se coloque as seguintes questões: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição?*

Em certa medida, a descodificação do registo matemático torna a linguagem matemática semelhante a uma língua estrangeira, em que é necessário conhecer o vocabulário para entender o texto, ou seja, a Matemática tem expressões próprias com

significados próprios. Como já foi dito, a propósito das ideias de Pimm (1987), o modo como os alunos falam e escrevem na aula de Matemática não é exactamente igual ao do professor e, por isso, não é comum ouvir um aluno dizer: “ $(a+b)^2$ desenvolve-se, somando o quadrado do primeiro termo, com o dobro do produto do primeiro termo pelo segundo com o quadrado do segundo termo”. Esta será a linguagem própria do professor ou, em certo sentido, a linguagem da Matemática que o professor activa dentro da sala de aula.

O discurso matemático é francamente distinto de outros tipos de discursos, embora, como é inevitável, faça uso de muitas palavras da linguagem coloquial. Mas muitos dos significados que importa construir nesse discurso são bem diferentes daqueles com que lidamos diariamente. A linguagem matemática adquire, por este motivo, um estatuto de metáfora onde as palavras que usamos em muitas situações do quotidiano adquirem novos significados.

Esta presença e emergência constantes de uma linguagem tipicamente matemática estão interligadas com a dificuldade que os alunos apresentam na segunda fase da resolução de problemas: a compreensão. Senão, vejamos; o resolvidor por estar desfasado do registo matemático, perde informação relevante fornecida no enunciado e acaba por paralisar ou por se sentir obrigado a fazer qualquer coisa, por exemplo, a forjar informações para preencher as lacunas existentes. Cria, desta forma, um enunciado paralelo que funciona como um expediente para fugir à dificuldade em compreender o problema. Curiosamente, é de notar que alguns alunos são capazes de reconhecer que é isto que lhes acontece. Recordo o aluno que escreveu a seguinte frase: “Não gosto de resolver problemas porque confundo-me com os enunciados e começo a inventar outras perguntas para a pergunta que me dão no enunciado”.

Os alunos mostraram formas variadas de fugir às dificuldades na compreensão do problema. Contornam esta limitação da compreensão, tentando, por exemplo, que alguém lhes descodifique o enunciado e recorrem, em especial, à pessoa do professor. Parece ser entendido pelos alunos que após a interpretação e clarificação do problema há que procurar estabelecer um plano que permita resolver o problema. Por outras palavras, os alunos sentem que é esperada uma acção, que há alguma coisa a fazer, que é preciso delinear um caminho. Por isso, quando não compreende o problema, o aluno tem estas duas reacções mais frequentes: ficar paralisado ou fazer a primeira coisa que lhe ocorre, muitas vezes de forma relativamente errática.

Dos resultados obtidos no presente estudo, podemos também constatar que os alunos não revêem espontaneamente os seus resultados quando encontram uma solução. Mas esta insuficiência é, na maioria das vezes, uma consequência de uma compreensão deficiente do problema. Para retroceder e verificar com sucesso a resolução de um problema, é necessário que haja uma compreensão global e cíclica de todo o processo que se vai desenrolando. Voltemos ao exemplo da área da sala para a festa de finalistas (anexo 6). Sabemos que uma das alunas consegue perceber que errou na resolução do problema quando o seu resultado para o valor da área é um número negativo, mas não consegue recuar na sua resolução e corrigir o erro que efectuou porque não compreendeu suficientemente o problema.

Embora o modelo apresentado por Polya pretenda ser uma simplificação, existe uma grande complexidade na sua aparente simplicidade. A esta complexidade não são alheios factores como a linguagem própria da Matemática, a consciência do que se dá e do que se pede e uma capacidade de auto-regulação e auto-explicação do processo de resolução.

A este respeito, julgo ser oportuno mencionar um estudo desenvolvido por Pativisan & Niess (2007) sobre os processos de resolução de problemas matemáticos de estudantes dotados na Tailândia. Uma das ideias iniciais sugeridas por estes e outros autores (Garofalo, 1993; Montague, 1991; Sriraman, 2003, citados por Pativisan e Niess, 2007) é a de que os alunos mais hábeis na resolução de problemas são os que despendem mais tempo a reler e a traduzir os problemas pelas suas próprias palavras. Esta é uma das diferenças que distinguem os alunos mais dotados de outros alunos na resolução de problemas. Tendencialmente, são os alunos mais verbais que revelam melhor desempenho e verifica-se até que a sua actividade de verbalização aumenta quando são confrontados com problemas mais difíceis.

Mas o estudo com os alunos Tailandeses revelou um outro elemento muito significativo que vem apoiar a ideia de não linearidade do processo de resolução de um problema e dar grande preponderância à existência de múltiplos ciclos de auto-avaliação. Conforme é referido nos resultados dessa investigação, à medida que os estudantes se envolviam na resolução dos problemas, o seu processo de raciocínio não avançava num fluxo estritamente linear, da fase da compreensão para a fase da verificação. Pelo contrário, um dos resultados mais importantes daquele estudo foi o de perceber que não se trata de um modelo linear mas de um processo multi-cíclico em que os resolvidores monitorizam o seu pensamento, avaliam os seus progressos e esforços e revelam comportamentos afectivos (confiança, dificuldade, frustração, etc). Além disso, foi visível que os momentos de auto-avaliação foram aqueles que orientaram as acções dos alunos em cada uma das fases e que provocaram as diversas transições que estes efectuaram entre as várias fases.

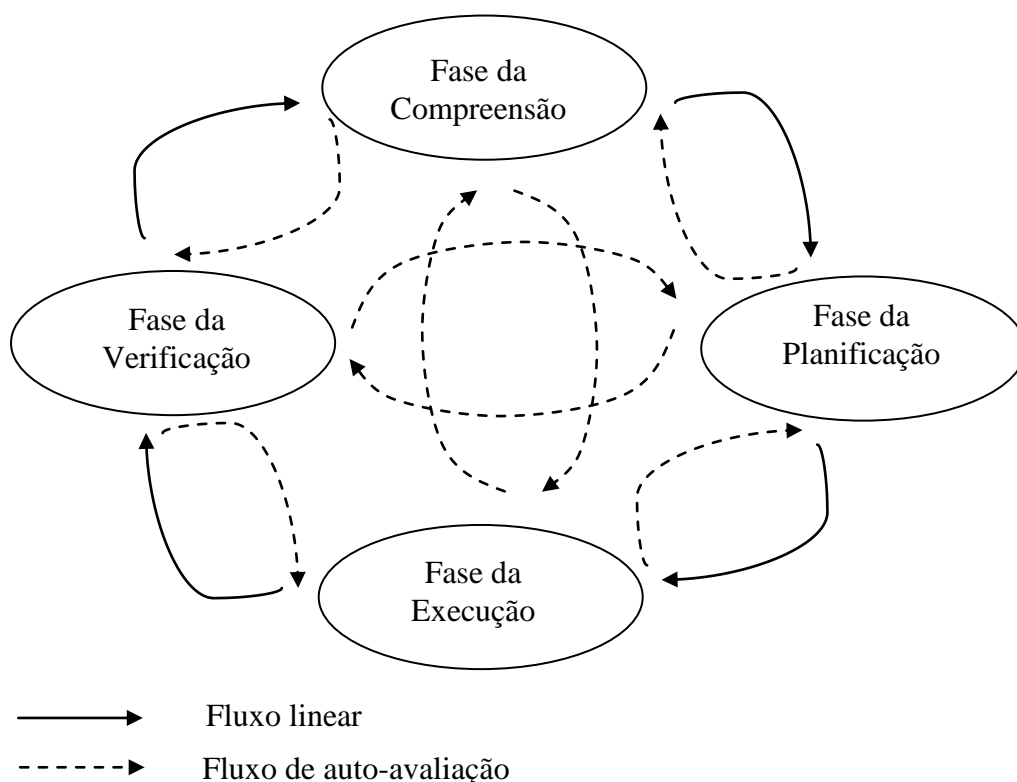


Fig. 79. Modelo do processo de resolução de problemas, proposto por Pativisan & Niess (2007)

Como se mostra no esquema anterior, a resolução de problemas é uma actividade altamente complexa e as dificuldades apresentadas pelos alunos não correspondem a instantes isolados, nem são independentes umas das outras, sem interligações ou conexões entre si. As dificuldades evidenciadas pelos alunos desta turma podem comparar-se a pontas visíveis de um iceberg, pois uma dificuldade, quando detectada, pode sempre associar-se a várias outras e não é possível vê-la nem catalogá-la isoladamente.

Entendo, ainda, como resultado desta investigação o reconhecimento de que o guião elaborado para ajudar os alunos na resolução de problemas, poderá ter funcionado como uma miragem para alguns deles, pois não viam como utilizá-lo e, por isso, acabavam por desistir de o seguir. De certo modo, o guião mostrava-lhes uma proposta

de estruturação dos processos e, possivelmente, “prometia” facilitar-lhes o acesso à resolução do problema. Mas o guião fornecido não deixa de reflectir, essencialmente, um modelo ideal. Por outras palavras, as próprias heurísticas são dependentes entre si e fazem parte de um todo. Quando Polya sugere que o resolvidor recorde se “ *Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado com o problema proposto?*”, parte do princípio de que este já compreendeu que tipo de problema está a querer resolver. Nesse caso, as heurísticas sugeridas poderão ajudar a resolver uma dificuldade mas isso pressupõe, desde logo, que não exista um iceberg no caminho para ser removido.

As dificuldades apresentadas pelos alunos nas várias aulas revelaram-se muito interligadas e há evidência de que são todas cruciais para que a resolução de um problema seja bem sucedida. Desta forma, não é possível identificar uma dificuldade a que se possa chamar *principal*. A resolução de problemas tem muitos detalhes entrelaçados, que conduzem a outros problemas de igual dificuldade, como se se tratasse de um leque que se vai abrindo e revelando novas camadas. Por isso, não basta identificar, por exemplo, a interpretação como uma dificuldade, e treinar esta competência, isoladamente, nas aulas de Matemática ou pedir a ajuda ao professor de Língua Portuguesa para ultrapassar esta limitação. A interpretação de um problema faz parte de um todo indivisível e a progressão na resolução de problemas está dependente da compreensão conjugada de uma multiplicidade de componentes.

Dificuldades dos alunos ou dificuldade dos problemas?

Obviamente que me questioneei se os problemas que escolhi para trabalhar com os meus alunos não teriam sido demasiado difíceis. Como se sabe, a fronteira entre exercício e problema é muito ténue. Se escolhesse problemas demasiado fáceis, de solução imediata, não estaria a apresentar verdadeiramente um problema, mas sim, um exercício de aplicação de um conjunto de técnicas ou de conceitos matemáticos. Não podemos esquecer que o que representa um problema para alguns alunos não será necessariamente um problema para outros, dependendo das suas experiências e, como é evidente, dos seus conhecimentos. Desta forma, propositadamente, foram escolhidos problemas de características e tipos diferentes, para aplicar em diferentes momentos, ao longo do tratamento de um determinado tema. Também os tópicos escolhidos foram bastante diferentes entre si, para que houvesse problemas variados, com novas solicitações, variantes e formas de representação diversas nas resoluções. Por outro lado, temas tais como probabilidades, proporcionalidade inversa ou sistemas de equações mostravam-se adequados para a escolha de propostas mais ou menos acessíveis. Trata-se de áreas do currículo em que é pertinente e está prevista a presença de problemas e de situações que envolvam raciocínio matemático e aplicações à vida real.

Os níveis de dificuldade dos problemas propostos foram, desta forma, variando dos mais simples aos mais complexos, em cada unidade temática, e pretendiam apresentar situações novas que integrassem um elemento desafiador e trouxessem a necessidade de ultrapassar a ausência de um método pré-estabelecido. Foi minha intenção evitar problemas tipificados, ou seja, quis diversificar os contextos e as formulações propostas, de modo a escapar a questões de mera aplicação de técnicas e procedimentos.

Um dos meus objectivos era compreender de forma mais profunda as dificuldades que levanta a resolução de uma actividade em que os alunos se sentem à deriva, isto é, em que experimentam a sensação de que o caminho não é óbvio e precisam de articular conhecimentos e destrezas de vários domínios, que não se resumem à Matemática mas que se enquadram no plano mais lato da literacia. É isto, fundamentalmente, que sugere o relatório PISA (2003a).

“A resolução de problemas é a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da Matemática, das ciências ou da leitura.” (p. 10)

Os resultados obtidos permitem afirmar que as dificuldades vividas pelos alunos nas três fases de trabalho, em cada um dos temas, não tiveram um nível constante. Pelo contrário, notaram-se ligeiras flutuações na forma como os alunos sentiram e experimentaram a dificuldade, e reagiram a esse desafio. Pode dizer-se que a 1ª fase, de introdução a cada novo tema, foi alvo de grande insegurança e perturbação. Na 2ª fase, de desenvolvimento e exploração, houve um alívio da dificuldade, e na 3ª fase, de consolidação e aplicação, o grau de dificuldade acentuou-se de novo.

Esta flutuação foi verificada em cada um dos temas, de forma mais ou menos semelhante. No entanto, pareceu bem distinta no tema das Probabilidades. A segunda fase de resolução de problemas incluiu 3 problemas (Problema do Metropolitano, Problema do Miguel e da TV e Problema dos Iogurtes). Apesar de ter sentido algum

cansaço dos alunos perante este bloco de problemas, constatei que os alunos sentiram estar na posse dos conhecimentos necessários para lidar com as questões colocadas. Muitas das dúvidas surgidas estiveram associadas à análise dos contextos, designadamente, no caso do Metro de Lisboa que exigiu dos alunos um esforço considerável para a leitura e interpretação da informação dada na planta do Metro.

Mas, de facto, foi nesta fase que os alunos responderam mais eficazmente às situações propostas e conseguiram avançar com ideias, raciocínios e conclusões válidas. De alguma forma, esta fase de resolução de problemas surgia na sequência de exemplos e de actividades moldados para trabalhar e interiorizar novos conceitos e técnicas matemáticas. Em certo sentido, esta 2ª fase da resolução de problemas esteve mais alinhada com a abordagem atrás especificada como “basic-skill approach” (Chapman, 1999). Na verdade, para os alunos, o foco ficou mais centrado nos factos, nas regras e nos procedimentos, ou seja, no quê e no como. Para os estudantes, tratou-se de oportunidades de aprendizagem e de memorização de factos, assim como de treino de competências matemáticas básicas, através da prática. De forma correspondente, tanto a 1ª fase como a 3ª fase estiveram mais próximas da abordagem caracterizada como “meaning approach” (Chapman, 1999). Com efeito, nestas duas fases, o foco esteve mais virado para o entendimento conceptual, para a construção do conhecimento e para o estabelecimento de relações e conexões. Trata-se de dar maior ênfase ao porquê, ao raciocínio e à justificação. Nesta linha, a exigência da colaboração, da explicação e da comunicação é maior para os alunos, bem como a importância da descoberta comparativamente com activação de conhecimentos anteriores. Conforme salientei na análise dos dados, notei que os alunos, na 2ª fase, já estavam mais familiarizados com alguns mecanismos apropriados à resolução dos problemas e não sentiam tanto a sensação de impotência revelada perante situações problemáticas mais independentes

dos conhecimentos anteriores. Neste sentido, ganha nova relevância a ideia defendida por Palhares (1997), segundo a qual a tipologia do problema tem de ser equacionada à luz da classe de indivíduos a que se destina: “*o mesmo problema, dependendo da intenção pedagógica ou da altura da aplicação pode ser classificado de maneiras diferentes*” (p. 169). Face aos dados que obtive, poderei concluir que o nível de dificuldade para os alunos foi tanto maior quanto mais os problemas se afastaram dos “problemas de conteúdo” referidos por Palhares (1997) ou dos “problemas de palavras” indicados por Borasi (1986). Em síntese, o grau de dificuldade diminui e o nível de confiança dos alunos aumenta quanto mais o contexto do problema for explícito e único, quanto mais as soluções forem únicas e quanto mais as resoluções assentarem na combinação de algoritmos, procedimentos e conhecimentos aprendidos recentemente.

A resolução de problemas torna o ensino da Matemática mais exigente

Além das conclusões apontadas anteriormente, considero oportuno apontar algumas outras de carácter eminentemente didáctico.

As dificuldades dos alunos na resolução de problemas emergem quando o professor, nas aulas de Matemática, aposta na resolução de problemas como estratégia de ensino/aprendizagem e leva os alunos a ter experiências sucessivas neste âmbito. Certamente, esta ideia será igualmente válida se estivermos a pensar em actividades de investigação ou outras, em que seja fundamental o uso do raciocínio matemático, da compreensão e da construção de significado.

Muitas destas dificuldades não se localizam na aquisição de conhecimentos em particular, relacionados com os conteúdos matemáticos, mas sim, na utilização eficaz

desse conhecimento e na justificação dos processos. Não se trata do desconhecimento do que é uma tabela de dupla entrada, um diagrama em árvore ou de um algoritmo que permita resolver um sistema de equações ou uma equação do segundo grau; trata-se de activar e coordenar estes conhecimentos quando confrontados com uma situação problemática. Os alunos, na sua perspectiva, muitas vezes enformada por concepções duradouras relativamente à actividade matemática, (Vale, 1993) têm dificuldade em detectar e justificar a empregabilidade deste ou daquele procedimento, em seleccionar uma estratégia que lhes permita resolver o problema com sucesso e em interpretar as soluções que encontram. Em muitos casos, constatou-se que para que os seus saberes sejam mais prontamente aplicados, os enunciados dos problemas têm de ser explícitos, tornando-os mais próximos de exercícios de assimilação e treino de procedimentos.

Para os alunos, não é trivial definir uma estratégia para resolução de uma situação problemática. O professor poderá trabalhar as estratégias de resolução de problemas, ensinando heurísticas, criando guiões que os ajudem nas várias fases inerentes ao processo de resolução de um problema. No entanto, subsistem dúvidas quanto à sua exequibilidade, quando os alunos entendem que são úteis mas não sabem como usar esses recursos. Defendo que é importante insistir na sua utilidade mas também é necessário que tais instrumentos introduzam e promovam competências para a resolução de qualquer situação. Isto significa que os alunos devem ser incentivados e encorajados a usá-los até que tais procedimentos sejam despoletados de forma autónoma e quase inconsciente. A ausência de competências no que respeita à resolução de problemas é um dos factores que leva os alunos a estagnar, a não levantar hipóteses e a não confiar no seu próprio trabalho quando percebem que a solução não é imediata. Por outro lado, se o aluno levanta hipóteses, faz tentativas, reflecte sobre os dados, identifica os

objectivos, articula informações, tem ainda de continuar a ser crítico em relação à sua utilidade e validade.

O processo de resolução de problemas, como já salientei, é complexo, sendo necessário passar, com sucesso, por várias fases. A primeira fase diz respeito à compreensão do problema e conseqüentemente à interpretação do enunciado. Nesta fase é perceptível a falta de aposta dos alunos na leitura e releitura e nas verbalizações oral e escrita. O aluno com maior capacidade de verbalização e maior experiência de leitura terá um maior conhecimento de factos e de ideias mais abstractas e estará mais confiante com qualquer tipo de enunciado. Em contraste, um aluno que apenas conta com as vivências do seu quotidiano para interpretar uma situação problemática, vê-se limitado aos escassos modelos e conceitos com que contacta. Como estas competências não são inatas e, bem ao contrário, implicam uma aculturação matemática e escolar bastante consistente, a escola precisa de desenvolver um esforço concertado para que tais competências de carácter geral sejam adquiridas.

Relativamente à ideia de uma cultura específica da aula de Matemática, em que é muito vincada a especificidade do discurso próprio da resolução de problemas, Verschaffel, Greer, & De Corte (2000, p. 59) destacam a seguinte ideia defendida por Lave (1992):

“Existe um discurso dos problemas de palavras – um conjunto de coisas que todos sabem dizer acerca dos problemas de palavras ou que podem esperar-se no “dialecto dos problemas de palavras”, aspectos e questões que surgem quando as pessoas começam a falar sobre estes mas também coisas que não são ditas nesses contextos nem podem sê-lo.” (Lave, 1992, p. 77).

Para autores como Verschaffel, Greer & De Corte (2000), a resolução de problemas na aula de Matemática é como um verdadeiro jogo, cujas regras os alunos têm de aprender. Com base em diversos estudos, identificam um conjunto de princípios subjacentes e de pressupostos que fazem parte do jogo da resolução de problemas, o qual envolve vários outros participantes, como os autores de manuais, os professores e os pais ou os especialistas que produzem os testes e exames. A lista que se segue apresenta alguns dos pressupostos mais comuns que foram identificados no “jogo da resolução de problemas”, na aula de Matemática (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, p. 59-60):

- Acreditar que cada problema apresentado pelo professor ou dado no manual pode ser resolvido e faz sentido. Não levantar questões. Aceitar a correcção e o sentido do problema e assumir que está completo, confiando na respectiva autoridade.
- Acreditar que há uma única resposta correcta para cada problema e que ela tem de ser rigorosa e numérica.
- Acreditar que essa resposta única, rigorosa e numérica pode e deve ser obtida pela execução de uma ou mais operações e fórmulas matemáticas, usando os números fornecidos no problema e, quase sempre, todos os dados.
- Acreditar que a tarefa pode ser realizada com base na Matemática a que o aluno tem acesso – na maioria dos casos, aplicando os conceitos matemáticos, as fórmulas, os algoritmos, etc., recentemente aprendidos nas aulas de Matemática.
- Acreditar que a solução final e até os resultados intermédios envolvem números “simples”.
- Acreditar que o problema contém toda a informação necessária para desenvolver a interpretação matemática correcta e obter a solução. O problema não deverá

ser alterado pela importação de elementos contextuais relevantes se estes não forem dados explicitamente no enunciado.

- Acreditar que as pessoas, os objectos, os lugares, os gráficos, etc. num problema de palavras são diferentes do que acontece numa situação do mundo real. Não estranhar (demasiado) que o conhecimento ou as intuições provenientes do quotidiano sejam violadas pela situação descrita no enunciado.

É perante este ponto de vista, que tão poderosamente enforma a prática da resolução de problemas, que a aula de Matemática precisa de integrar, por exemplo, um momento de trabalho em que se interpretam situações como a de viajar de Metro e de como usar a planta do Metro. Da mesma maneira, é pertinente no contexto da aula de Matemática analisar a questão do jovem Miguel, que se atrasa com maior frequência à escola quando vê televisão até tarde, e perceber que está aí envolvida a ideia de probabilidade. Igualmente, fará todo o sentido que, entre outras coisas, os alunos adquiram a compreensão do significado de um jogo justo no âmbito da sua aprendizagem da Matemática.

Mas um problema não se esgota na fase da compreensão. Para além disso, o aluno tem de ainda estabelecer um plano que se revele eficaz na resolução do problema e tem de aplicá-lo. Nesta actividade, muitas dificuldades dos alunos na expressão escrita levantam obstáculos sérios que muitas vezes comprometem o raciocínio a desenvolver, impedindo-os de atingir os seus objectivos.

Em suma, embora nem todos os alunos revelem as mesmas dificuldades, a aprendizagem através da resolução de problemas é muito exigente para alunos que acusam fortemente a dificuldade. Para estes alunos, o recurso à resolução de problemas pode tornar-se num motivo de frustração e ser considerada um “martírio” que faz

preferir, a breve trecho, tudo o que tiver a ver com capacidades mais elementares e desempenhos mais rotineiros.

Como se constatou nos depoimentos dos alunos, principalmente no teste de avaliação, há sentimentos muito marcados de frustração que afectam o empenho e o gosto pela resolução de problemas. Apresentam-se, em seguida, alguns exemplos de expressões em que está patente a conexão entre não gostar de resolver problemas e o sentimento de não ser capaz: *“Não gosto porque os enunciados dos problemas geram muita confusão, e chega a uma certa altura que já nem sei bem o que fazer”*; *“Apesar de treinar muito nunca consegui”*.

Paralelamente, também há outros testemunhos dos alunos em que o gosto pela realização da actividade está directamente associado ao sucesso na resolução das questões: *“Nós gostámos dos problemas porque compreendemos algumas questões, menos a 1.8.”*; *“Nós gostámos porque foi uma actividade diferente, só tivemos dificuldades em perceber as perguntas, mas o resto foi fácil”*.

Os conhecimentos matemáticos não bastam para resolver problemas

Quando o professor opta pela introdução de um determinado conceito, a partir de problemas, a sensação de desconhecido para muitos alunos é evidente e essa é uma situação com preferem não lidar. Recorrer a uma situação problemática para fazer emergir e surgir novos conceitos e métodos matemáticos poderá ser visto pelos alunos como um “truque” que o professor usou para resolver aquele problema em particular. Notei que há alunos que não fazem facilmente a transferência e a generalização de determinada ideia e que procuram rapidamente processos de mecanização de algoritmos

ou procedimentos como forma de se assegurarem da sua aprendizagem. É razoável supor que estes alunos vêem o professor como o responsável pelo ensino e pela sua aprendizagem em Matemática e depositam muito pouca confiança na sua própria capacidade de desenvolver conhecimento matemático. Como mostrou Schoenfeld (1985, citado por Vale, 1993), há outros aspectos determinantes no êxito ou fracasso na actividade de resolução de problemas, para além dos conhecimentos matemáticos e da aprendizagem de factos e algoritmos. Um deles prende-se com os *sistemas de convicções, perspectivas individuais, acerca deles próprios, acerca da Matemática, acerca da resolução de problemas e do mundo em geral*. Assim, as concepções dos alunos acerca da Matemática e da forma como encaram a disciplina e a sua aprendizagem têm um papel fundamental na capacidade que desenvolvem de enfrentar um problema e procurar uma solução.

Os problemas em que o professor pretende que os alunos sejam capazes de interligar e aplicar conhecimentos diversos têm, por outro lado, um maior nível de abrangência e colocam facilmente os alunos numa encruzilhada, tornando necessário optar por um caminho, efectuando escolhas assertivas e criteriosas dos factos, das ideias e algoritmos a aplicar. Nem sempre os alunos que apresentam capacidade de resposta a questões mais técnicas, mais centradas no cálculo ou em procedimentos algébricos conseguem fazer um uso adequado desse domínio. Conhecer a lei de Laplace não significa conseguir aplicá-la eficazmente, como se viu no problema dos percursos da formiga, em que os alunos tiveram dificuldade em identificar os casos possíveis e favoráveis; nem sempre ser capaz de resolver um sistema de equações significa saber equacionar um problema, nomeadamente, definindo variáveis e relações entre elas.

Quando os alunos revelam grandes embaraços e resistências em resolver situações problemáticas, o ensino de procedimentos e a prática de exercícios de aplicação directa,

intercalados com a resolução de problemas parece ser mais eficaz, uma vez que há uma maior aproximação entre elementos novos e situações que os alunos conseguem manejar. Poderá, inclusivamente, constituir um meio para que o aluno consiga adquirir uma consciência de sucesso que é extraordinariamente importante como elemento de motivação. Os alunos que acusam facilmente as dificuldades, como muitos dos que participaram neste estudo, desistem rapidamente das actividades propostas quando encontram obstáculos, e necessitam de sentir que dominam algo para se empenharem. Uma predominância da resolução de problemas nas aulas de Matemática poderá colocar demasiada tensão sobre os processos de aprendizagem dos alunos, que se não for aliviada, levará os alunos a uma desmotivação e até a uma renúncia para com a Matemática. Neste sentido, se retomarmos as propostas apresentadas por Boavida (1993) sobre a inclusão da resolução de problemas no currículo de Matemática, deveremos ter presente que a resolução de problemas como contexto pode assumir diversas modalidades e que, de acordo com as características dos alunos e das turmas, poderão ser mais pertinentes algumas dessas modalidades, como sejam, os problemas como *motivação*, os problemas como *veículo* e, seguramente, os problemas como *prática*.

A resolução de problemas pressupõe um amadurecimento intelectual, pelo que não devemos ficar surpreendidos quando os alunos manifestam dificuldades. A resolução de situações problemáticas é um processo aberto, sujeita a um ritmo de evolução e desenvolvimento próprio. E a maturação dos alunos nem sempre está em consonância com as múltiplas dificuldades que lhes trazem a resolução de alguns problemas. Os resultados obtidos neste estudo tornam bem claro que um problema não é uma entidade única, pois subdivide-se numa variedade de sub-problemas para os alunos. A pluralidade de obstáculos propaga-se e entrelaça-se, desde a compreensão e

interpretação dos enunciados, à escolha de estratégias eficazes de resolução, à explicação dos raciocínios e à verificação das soluções. Um ou mais impedimentos em qualquer uma das fases da resolução de um problema desencadeia dificuldades subsequentes que, por sua vez, geram novas inseguranças e barreiras, tornando muito estreita a possibilidade de que o problema proposto seja resolvido com sucesso.

A compreensão e a aprendizagem não são lineares na aula de Matemática

Quer na expressão escrita, quer na expressão oral, os alunos fazem a sua própria interpretação do que é apresentado e esta nem sempre é consonante com o significado que se pretende no âmbito de um problema.

Ao ler e processar um enunciado, o aluno elabora o seu próprio registo do que é pedido. Mas ao fazê-lo, perde, por vezes, informações relevantes e noutros casos confunde os dados do problema com o propósito do mesmo. Os enunciados dos problemas contêm descrições, afirmações, pressupostos, informação, números, esquemas, todo um conjunto de elementos que têm de ser interpretados. O registo em que um problema (de palavras) é normalmente formulado não é idêntico ao de uma pergunta directa e puramente matemática, levantando, portanto, um obstáculo que não estará necessariamente relacionado com os conhecimentos matemáticos do aluno. Para que haja uma conexão entre as várias informações fornecidas, os alunos necessitam também de estar suficientemente familiarizados com os contextos, caso contrário enfrentam um novo problema.

Além do mais, há que ter em conta que as palavras, os diagramas, os gráficos, as tabelas, entre outros, não são apreendidos por todos os alunos da mesma forma. Os significados matemáticos próprios deste tipo de símbolos e de representações precisam de ser reconhecíveis para se tornarem aplicáveis. Para abordar eficazmente um enunciado é necessário um grau de entendimento que tem de reflectir um conhecimento científico prévio. Por vezes, a falha na interpretação de um determinado enunciado, ou texto matemático ou questão de índole matemática, induz o aluno a criar uma realidade paralela. Um exemplo muito elucidativo desta situação ocorreu no teste de avaliação, relativamente à pergunta: *“se fosses um dos jogadores indica o número em que apostavas”*. Um dos alunos apresenta uma resposta em que se vê nitidamente que o significado dado à questão está desfasado do sentido matemático do problema. Assim, o aluno escreve: *“O 8 porque é o dia do meu aniversário”*.

Portanto, podemos concluir que a questão de um entendimento único e uniforme, face à resolução de problemas na aula de Matemática, está longe de corresponder à verdade. Pelo contrário, a ambiguidade e as divergências relativamente a uma suposta “homogeneidade” de significados são constantes e criam novos problemas, tornando a actividade na aula de Matemática numa situação que não se resume à formalização e à execução de técnicas. A resolução de problemas contribui fortemente para que a aula de Matemática e a aprendizagem estejam permanentemente imersas na negociação de significados.

A complexidade da resolução de problemas

A resolução de problemas é uma actividade cujo êxito depende (embora não inteiramente) das inúmeras características de cada sujeito (isto é, das suas estruturas cognitivas, mas também dos seus traços afectivos/emocionais e igualmente daquilo que é a sua vivência anterior na resolução de problemas e na experiência matemática) e do meio social envolvente (formas de interacção que se estabelecem entre os diversos agentes envolvidos no processo de ensino/aprendizagem e a forma como é considerado e valorizado o desempenho no que respeita à resolução de problemas na sala de aula). Tendo estes factos em consideração, este estudo focou-se nos alunos enquanto resolvedores de problemas, em vez de se centrar sobretudo na complexidade das tarefas. Embora os problemas propostos tenham sido de natureza acessível à faixa etária e nível de escolaridade dos alunos, não se pode afirmar peremptoriamente que as dificuldades não advieram da complexidade dos mesmos. O nível de complexidade da actividade de resolução de problemas é de tal modo vasto, devido ao grande número de variáveis envolvidas, que mesmo a identificação das dificuldades não é linear.

É um facto que não se pode mecanizar a resolução de problemas. Trata-se de uma actividade de um nível complexo, que exige a aplicação de raciocínios, distinta da actividade de resolução de exercícios rotineiros ou da aplicação directa de fórmulas para obter resultados. Perante um problema, o resolvidor terá de satisfazer um conjunto de condições, como sejam: conhecimento de conceitos matemáticos, familiaridade com as situações apresentadas nos problemas, conhecimento de heurísticas, ter ao seu alcance recursos cognitivos, encontrar a necessária motivação para procurar uma solução, entre outros.

Ao pensarmos nas fases a percorrer para que a resolução de problemas seja bem sucedida, concluímos que um conhecimento matemático prévio será de maior importância na fase de exploração ou na fase de verificação. De acordo com os resultados obtidos neste trabalho, as dificuldades na resolução de problemas podem ser resumidas na seguinte tipologia, em termos das fases em que ocorrem (tabela 15) e das formas como se manifestam (tabela 16):

Fases da resolução de problemas	Compreensão	Estabelecimento de um plano	Verificação
Problemas em que a dificuldade se manifestou	- Metropolitano: leitura e interpretação do mapa; - Festa de finalistas: terminologia matemática: “o comprimento da sala excede”; - Formiga: Interpretação do esquema.	- Jogo da soma e do produto: registo dos dados; - Formiga: Contagem de todos os percursos; - Cores e cartões de convite: Contagem dos casos possíveis.	- Festa de aniversário: Existência de mais do que uma solução; - O Miguel e a TV: leitura deficiente do enunciado;
Localização da dificuldade	Recursos cognitivos, contexto do problema desconhecido.	Heurísticas pouco desenvolvidas, conceitos matemáticos.	Conceitos matemáticos, ausência de auto-monitorização eficaz.

Tabela 15. Tipologia de dificuldades na resolução de problemas

Origem das dificuldades	Possíveis manifestações	Exemplos dos problemas
Conceitos matemáticos	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica o conceito, mas não sabe aplicá-lo 	<ul style="list-style-type: none"> • Problema da paisagem das maçãs e das peras
	<ul style="list-style-type: none"> • Identifica o conceito, mas aplica-o incorrectamente 	<ul style="list-style-type: none"> • Problema do euromilhões
Heurísticas	<ul style="list-style-type: none"> • Desconhece a heurística adequada 	<ul style="list-style-type: none"> • Problema da festa de aniversário
	<ul style="list-style-type: none"> • Aplica uma estratégia que não é adequada 	<ul style="list-style-type: none"> • Problema das cores e dos cartões de convite; • Problema da formiga
Recursos cognitivos	<ul style="list-style-type: none"> • Não tem os recursos necessários para resolver os problemas 	<ul style="list-style-type: none"> • Verificável sobretudo nos alunos com dificuldades de aprendizagem.
	<ul style="list-style-type: none"> • Tem alguns recursos, mas não sabe como aplicá-los 	<ul style="list-style-type: none"> • Todos à excepção do problema dos rectângulos e do problema da corrida dos 3000 m.

Tabela 16. Possíveis localizações das dificuldades dos alunos

Para ter êxito na resolução de problemas, o resolvidor terá de coordenar de forma eficaz vários elementos (tabela 16). Desde logo, não basta dispor de conhecimentos matemáticos, é necessário saber quais os conhecimentos que devem ser utilizados em cada problema em particular e aplicá-los correctamente. Da mesma forma, um resolvidor que esteja consciente da possibilidade de considerar determinadas heurísticas poderá não ser bem sucedido caso não saiba como aplicá-las ou escolhê-las adequadamente. Por exemplo, um resolvidor poderá saber como realizar correctamente tabelas de dupla entrada, mas estas não serão eficazes se o problema se resolver com um sistema de equações. E analogamente acontece com os recursos cognitivos.

Em resumo, a dificuldade na resolução de problemas associados a determinado conteúdo matemático poderá estar interligada com as dificuldades do aluno em questões e conceitos matemáticos específicos. Mas a verdade é que esta será uma actividade condenada ao fracasso se o resolvidor não combinar uma panóplia de saberes: conhecimentos, experiências adquiridas em problemas anteriores, representações e simbologia matemática. São ainda de extrema importância a capacidade de experimentação, a intuição, a auto-confiança e a realização de sucessivos ciclos de auto-avaliação dos progressos efectuados ao longo do trabalho sobre um problema.

A resolução de problemas e o contexto social

Ao iniciar este estudo, tinha como grande meta perceber de que forma poderia auxiliar os alunos a adquirem as competências necessárias para reagirem positivamente à resolução de problemas, nomeadamente, face ao requisito introduzido pelo exame nacional de Matemática. Apesar da turma em investigação ter estado envolvida mais

intensamente na actividade de resolução de problemas, decidi usar os mesmos problemas para trabalhar com uma outra turma do 9º ano que também leccionava. Pude perceber que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos da outra turma foram diferentes, a começar pela forma que tinham de atacar e enfrentar as situações propostas. Com o tempo, esses alunos foram evoluindo bastante e melhorando significativamente as suas competências na resolução de problemas. No final do ano, os resultados do exame da referida turma excederem, inclusivamente, as minhas expectativas.

Ao fazer um balanço do trabalho realizado ao longo deste ano lectivo, noto que os resultados da turma “Z” foram inferiores aos dos seus colegas da outra turma e que havia ainda uma clara insuficiência no desempenho destes alunos no que concerne à resolução de problemas. Portanto, supor que o mesmo método de ensino em diferentes turmas levará a resultados idênticos é uma total ilusão, essencialmente, porque são os alunos que fazem toda a diferença.

Esta conclusão adquire manifesta importância, na medida em que o sistema de avaliação prevê uma prova única para todos os alunos, quando estes têm capacidades cognitivas diferentes, retêm e compreendem os conteúdos de formas diferentes, têm concepções e convicções diferentes acerca do que é aprender Matemática e encaram a resolução de problemas, em particular, de modos muito diversos. Será que alunos com características diferentes podem ser adequadamente avaliados, em termos das suas capacidades, conhecimentos e aptidões, por meio de um mesmo instrumento que assume uma padronização das aprendizagens e das competências?

Como balanço pessoal, ao fazer um levantamento das dificuldades dos alunos, fico consciente dos entraves que podem ocorrer no processo de resolução de problemas. Embora não tenha receitas que os resolvam, tentei ajudar os alunos, sem responder

directamente às questões que colocavam, remetendo-os para as informações constantes no enunciado ou lançando outras questões relacionadas. A intenção não era ignorar ou eliminar as suas dificuldades, mas sim levá-los a pensar e a tentar encontrar estratégias de resolução que permanecessem válidas para estes alunos no futuro. Dar a resposta ou colocar o aluno no caminho da resolução do problema pode ser sinónimo de transformar o problema num exercício de aplicação. Tal como é referido insistentemente na teoria sobre resolução de problemas, perante um problema desconhece-se a acção que leva à sua resolução.

Embora os resultados provenientes do trabalho realizado na turma “Z” não se possam encarar como uma imagem de genuíno êxito na implementação da resolução de problemas de Matemática, continuo a posicionar-me como defensora da resolução de problemas nas aulas de Matemática. Mas vejo também a importância de perceber os alunos com quem estou a trabalhar e com quem procuro desenvolver a capacidade de resolução de problemas, reconhecendo o cuidado a ter na procura de um equilíbrio que evite o ponto de criar uma oposição à resolução de problemas e desmotivar os alunos para a aprendizagem da Matemática. Considero indispensável que a resolução de problemas seja intercalada com a execução de exercícios, para que diferentes alunos se possam sentir bem sucedidos nas aulas de Matemática, adquirindo a auto-confiança necessária, e mantenham o seu empenho nas actividades propostas. Sabemos que os alunos podem ficar facilmente desmotivados, quando sentem que o seu desempenho é abalado por dificuldades que consideram inultrapassáveis. O professor deve, portanto, estar atento aos seus testemunhos: “ *Eu não percebi o enunciado*”, “ *Eu não consigo justificar as respostas*”, “ *Eu tenho extrema dificuldade...*”.

A resolução de problemas só poderá ser acompanhada de sucesso se os problemas forem adaptados às capacidades e características dos alunos com que estamos a

trabalhar. A título de curiosidade, gostaria de referir o facto de estar presentemente a leccionar uma turma de 7º ano em que a realização de exercícios rotineiros é sentida pela maioria dos alunos como uma actividade monótona, enfadonha e repetitiva. Estes alunos sentem que a resolução de problemas é uma actividade emocionante e estimulante e é extremamente importante corresponder a este gosto e a esta apetência, potencializando as características destes alunos para a actividade de resolução de problemas e desafios matemáticos.

A questão social e cultural, como se sabe, também aparenta ser um factor determinante no modo como os alunos sentem e lidam com os problemas nas aulas de Matemática. Por exemplo, o grau de escolaridade dos pais e dos familiares não será alheio ao apoio e motivação que cada aluno recebe e às perspectivas de futuro que alimenta dentro do contexto em que se insere. Os próprios alunos podem não encontrar boas razões externas para se empenharem numa actividade matemática mais exigente, onde a resolução de problemas assuma relevo.

Outro ponto de vista que merece reflexão será o de ponderarmos como deveriam ser constituídas as turmas. A criação de “turmas de nível” poderia ser uma solução a tentar. Naturalmente que isto implicaria uma avaliação diferenciada, consonante com os objectivos e com as características da turmas e, nem sempre, muito compatível com a existência de um exame nacional de final de ciclo.

Devo ainda reflectir acerca do significado do exame em termos da nossa prática profissional. Na minha opinião, este não deve ser o primeiro nem o único condicionador das estratégias a aplicar na sala de aula. A nossa preocupação, enquanto profissionais, deve residir na adequação das metodologias e das actividades propostas ao grupo de alunos que nos compete formar e educar. Estas devem ser ricas, havendo lugar para a realização de exercícios, tanto como para a resolução de problemas ou actividades de

investigação. Em suma, para que o ensino da Matemática possa tornar-se numa oportunidade para todos os alunos, há que ensaiar uma combinação de actividades que promovam a integração dos conhecimentos e dos procedimentos matemáticos numa aprendizagem com significado.

Ao iniciar a resolução continuada de problemas nas aulas de Matemática, tinha a intenção de preparar os meus alunos para as solicitações do exame nacional do 9º ano. Quando os alunos evidenciam falhas e insuficiências nesta competência poderá ser mais fácil e simples ignorá-las. Mas que alunos estaremos a preparar nas nossas escolas, se não os confrontarmos com a resolução de problemas e não lhes proporcionarmos experiência nesse domínio? Decerto não pretendemos que a Matemática se esvazie e se reduza a trabalhar o cálculo ou as regras ou qualquer conjunto de receitas que os alunos usam sem saberem porquê.

É minha convicção, perante os resultados deste trabalho, que os alunos ao terem esta experiência ganharam recursos e tomaram contacto com uma perspectiva da Matemática muito mais completa e que poderá progredir à medida que evoluir o seu grau de maturidade. As ferramentas matemáticas e cognitivas que estes alunos puseram em acção nas aulas de resolução de problemas têm interesse e utilidade e estou certa de que poderão, de um modo geral, revelar-se pertinentes no processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Por último, aprende-se quando se conseguem identificar e compreender os obstáculos e quando se procuram formas de os ultrapassar.

Considerações finais

A resolução de problemas deve ser encarada como um dos objectivos gerais da disciplina de Matemática. Esta é, entre outras, uma das recomendações do novo programa de Matemática do Ensino Básico, datado de 2007, que determina que os alunos devem ser capazes de resolver problemas, isto é, (p. 6):

- *Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver, utilizando estratégias apropriadas;*
- *Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto a que chegam;*
- *Monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;*
- *Formular problemas.*

Ao professor de Matemática, caberá a difícil tarefa de escolher problemas que despertem a curiosidade dos seus alunos, nem demasiado difíceis, a ponto de tornar a resolução impraticável (levando os alunos a desistirem da actividade), nem demasiado fáceis, para que o problema não se transforme num exercício.

A resolução de problemas não deverá ser encarada apenas como uma actividade lúdica (embora esta também seja importante e não deva ser eliminada) e exterior à aula de Matemática, tendo em vista despertar o interesse pela disciplina. Pelo contrário, deverá fazer parte integrante e normal do currículo e das actividades da aula de Matemática.

As conclusões deste estudo levam-me a considerar três momentos fundamentais em que a resolução de problemas tem um relevo significativo: como introdução a um determinado tema; como aplicação e exploração desse mesmo tema e como conclusão

do mesmo. As dificuldades apresentadas pelos alunos podem estar relacionadas com a incapacidade de se relacionarem com o novo e desconhecido ou com o facto de não conseguirem estabelecer relações entre diversos conteúdos e/ou efectuar generalizações e transferências entre diferentes situações e contextos. Estas dificuldades não são singelas, nem de fácil resolução, e levam-me a sugerir que nas turmas onde a dificuldade atinge grandes proporções, a resolução de problemas deve ser intercalada com o ensino de técnicas e exercícios de aplicação mais directa dos conhecimentos. Esta sugestão tem em mente atingir os seguintes objectivos: estimular o sentimento de sucesso nos alunos e promover a sua segurança quanto ao domínio de um conjunto de aspectos essenciais, contribuindo para que o empenho nas actividades propostas seja uma constante e favoreça a aplicação dos conceitos e procedimentos, numa fase em que estes estão mais presentes e são mais prontamente activados.

Referências Bibliográficas

- Abele, A. (1998). Reasoning processes and the quality of reasoning. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom*, (p. 127-157). Cambridge: Cambridge University Press.
- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Revista Educação e Matemática*, Nº 8, p. 7-10 e 35.
- Abrantes, P. (1994). *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática*. Tese de Doutoramento. Colecção de Teses. Lisboa: APM.
- APM. (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Blanco, L. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Cuadrante*, Vol. 6, n.º 2, p. 45-65.
- Boavida, A. (1993). *Resolução de problemas em Educação Matemática – Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*. Tese de Mestrado. Colecção de Teses. Lisboa: APM.
- Bodgan, R. & Biklen, S. (1982). *Qualitative research for education*. Boston: Allyn and Bacon.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, **17** (2), p. 125-141.
- Brocardo, J. (2001). *As Investigações na Aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano*. Tese de Doutoramento. Colecção de Teses. Lisboa: APM.

- Carrillo, J. (1988). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: Metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Cruz, J. e Carrillo, J. (2004). Qué aprenden los alumnos para la resolución de problemas? In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en la aula*, (p. 103-115). Barcelona: Biblioteca de Uno.
- Chapman, O. (1999). Problem Solving in Mathematics: Approaches to Classroom Practice. In *Actas do ProfMat 99*, (p. 39-49). Lisboa: APM.
- Charles, R., Lester, F. e O'Daffer, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston: NCTM.
- Chi, M. H. & Glaser, R. (1983). *Problem solving abilities*. Material policopiado, não publicado.
- Durkin, K. (1991). Language in mathematical education: An introduction. In K. Durkin & B. Shire (Eds.). *Language in Mathematical Education: Research and Practice*, (p. 3-16). Philadelphia: Open University Press.
- Ernest, P.(1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Cunha Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (p. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática para Todos e APM.
- Faria, L. et al. (2004), *Matemática Dinâmica*, Manual do 9º ano. Porto: Porto Editora.
- Feldman, A. et al. (2007). Self-study through action research. In J. J. Loughran et al. (Eds.), *International Handbook of self-study of teaching and teacher education practices. (Part Two)*, (p. 943-977). Dordrecht: Springer.
- Fernandes, D. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Avaliação e Formação de Professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.),

- Educação Matemática. Coleção de Temas de Investigação*, (p. 45-103). Lisboa: IIE. e Secção de Educação Matemática da SPCE.
- Ferreira, P. (2007). *A opção dos alunos pelas tecnologias: Um olhar sobre a utilização do Sketchpad na resolução de problemas*. Tese de Mestrado não publicada. Universidade do Algarve.
- Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Lisboa: Monitor.
- Fonseca L. e Palhares P. (1990). A Matemática essencial para o século XXI. *Revista Educação e Matemática*, n.º 14, 2º trimestre, p. 23-25 e 35.
- Fonseca, L.(1997). Processos Utilizados na Resolução de Problemas por Futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes et al. (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática*, (p. 39-68). Aveiro: GIRP
- Frank, M. (1992). Resolução de problemas e concepções acerca da matemática, *Revista Educação e Matemática*, n.º 21, p. 21-23.
- Garofalo, J. (1987). Metacognition and School Mathematics. *Arithmetic Teacher*, **34** (9), p. 22-23.
- Garofalo, J. (1993). Mathematical problem preferences of meaning-oriented and number-oriented problem solvers. *Journal for the Education of the Gifted*, **17**, p. 26-40.
- Gomes, F. e Viegas C. (2004). XeqMat, Manual 11º ano. Lisboa: Texto Editora.
- Hinsley, D.A., Hayes, J. R., & Simon, H.A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In P. A. Carpenter and M. A. Just (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kantowski, M.G. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, **8**, p. 163-180.

- Kantowski, M.G. (1981). Problem Solving. In E. Fennema et al. (Eds.), *Mathematics Education Research - Implications for the 80's*, (p.111-126). Washington: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Kilpatrick, J. (1992). Some Issues in the Assessment of Mathematical Problem Solving. In J. Ponte et al. (Eds), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice*. Berlin: Springer-Verlag.
- Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. In P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing*, (p. 74-92). New York: Harvester Wheatsheaf.
- Leal, L. (1992). *Avaliação das aprendizagens num contexto de inovação curricular*. Tese de Mestrado. Coleção de Teses. Lisboa: APM
- Lester, F. (1980). Problem Solving: Is it a problem? In M. Liguist (Ed.), *Selected Issues in Mathematical Education*. Reston: NCTM.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.
- Mayer, R. (1983). *Thinking, problem solving and cognition*. New York: Freeman.
- Mayer, R. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. In E. Silver (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: multiple research perspectives*. Hillsdale: Erlbaum.
- Ministério da Educação (ME). (1999). *Matemática – Competências Essenciais*. Lisboa: ME, DEB.
- Ministério da Educação (ME). (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

- Montague, M. (1991). Gifted and learning disabled gifted student's knowledge and use of mathematical problem-solving strategies. *Journal for the Education of the Gifted*, **14**, p. 393-411.
- NCTM (1994). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. (Tradução portuguesa). Lisboa: APM/IEE.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. (Tradução portuguesa). Lisboa: APM/IEE.
- NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (Tradução portuguesa). Lisboa: APM.
- Neves, A. et al. (2004). *Matemática, 1ª parte, 9º ano*. Porto: Porto Editora.
- Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores de matemática. In D. Fernandes et al. (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática*, (p. 159-188). Aveiro: GIRP.
- Patavisan, S. & Niess, L. M. (2007). A mathematical problem solving model of Thai gifted students. In D. K. Pugalee, A. Rogerson & A. Schinck (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project: Mathematics Education in a Global Community*. (p. 523-528). The University of North Carolina Charlotte.
- (disponível em http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_2007.htm)
- Pato, H. (2000). *Dossier de Matemática, Manual 9º ano*. Lisboa: Texto Editora.
- Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept of “open-ended problems”. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, (p. 7-11). Helsinki: Department of Teacher Education. University of Helsinki.

- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically – Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge.
- Pirie, S. (1991). Peer discussion in the context of mathematical problem solving. In K. Durkin & B. Shire (eds). *Language in Mathematical Education Research and Practice*, (p. 143-161). Philadelphia: Open University Press..
- PISA (2003a). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação da Resolução de Problemas*. ME, GAVE.
- PISA (2003b). *Resultados do estudo internacional Pisa 2003*. ME, GAVE.
- PISA (2003c). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação da Literacia Matemática*. ME, GAVE.
- Poggioli, L. (2001). *Estrategias de resolución de problemas*. Serie Enseñando a Aprender. Caracas: Polar.
- Polettini, A. e Sabaraense. (1999). Inovações, mudança e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Quadrante*. Vol. 8, p.189-215.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: Wiley.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*. Vol. 3, n.º 1, p.3-18.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (p. 5-28). Lisboa: APM
- Ponte, J. P. (2004), Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matematica en la aula*, (p. 25-34). Barcelona: Biblioteca de Uno.

- Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de Matemática: Uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Coleção de Teses. Lisboa: APM.
- Portal do Governo. (2008). *Plano de acção para promover o sucesso na Matemática*. Ministério da Educação. Acedido em: www.portugal.gov.pt.
- Saitta, L. et al. (1996). Knowledge Representation Changes in Humans and Machines. In P. Reimann & H. Spada (Eds.), *Learning in Humans and Machines*, (p. 109-129). New York: Pergamon.
- Santos, B. S. (1989). *Introdução a uma ciência pós-moderna*. Porto: Edições Afrontamento.
- Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizaje en matemáticas: orientaciones y retos. In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en la aula*, (p. 157-168). Barcelona: Biblioteca de Uno.
- Schoenfeld, A. (1979). Explicit Heuristic as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 10, Nº 3, p. 173-187.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum.
- Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving?. *ZDM*, **1**, p. 4-8.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (p. 334-370). Reston: NTCM.
- Schulte, A. (2007). Examples of practice: professional knowledge and self-study in multicultural teacher education. In J. J. Loughran et al. (Eds.), *International*

- Handbook of self-study of teaching and teacher education practices. (Part One)*, (p. 709-742). Dordrecht: Springer.
- Serrazina, L. et al. (2002). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (p. 283-308). Lisboa: APM.
- Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.
- Sousa, A. B. (2005). *Investigação em Educação*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education*, **14**, p. 151-165.
- Stanic, G. & Kilpatrick J. (1990). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, (p. 1-22). Reston: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.
- Steinbring, H. (1998). Mathematical understanding in classroom interaction: The interrelation of social and epistemological constraints. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom*, (p. 344-372). Cambridge: Cambridge University Press.
- Stewart, I. (1996). *Os Problemas da Matemática*, Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
- Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos*. Tese de Mestrado. Coleção de Teses. Lisboa: APM.

- Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes et al. (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática*, (p. 1-37). Aveiro: GIRP.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse, The Netherlands: Swetz & Zeitlinger Publishers.
- Vieira, L., Gomes, F. & Burnay, M. J. (2000). *Matemática, Manual 9º ano*. Lisboa: Editorial O Livro.
- Wheatley, G. H. (1984). The Importance of Beliefs and Expectations in the Problem Solving Performance of Sixth Grade Pupils. In J. M. Moser (ed.). *Proceedings of the Sixth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for PME*, (p.141-146). Madison, Wisconsin.
- Zemelman, H. (2003). Sujeito e sentido: Considerações sobre a vinculação do sujeito ao conhecimento que constrói. In B. S. Santos (Org.). *Conhecimento Prudente para uma Vida Decente*, (p. 435-446). Porto: Edições Afrontamento.

Anexos

Anexo 1

Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Jogo da Soma, do Produto e da Diferença

Em cada um dos jogos seguintes, usam-se dois dados numerados. Há dois jogadores (um jogador aposta em “par” e outro jogador em “ímpar”).

- Jogo da soma: Lançam-se os dados. Se a soma dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”.
- Jogo do produto: Lançam-se os dados. Se o produto dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”.
- Jogo da diferença: Lançam-se os dados. Se o valor absoluto da diferença dos dois números é par, ganha o jogador “par”, se é “ímpar”, ganha o jogador “ímpar”.

(considera, o zero um número par)

O jogo é justo? Justifica a tua resposta?

In “Dossier de Matemática”, Texto Editora, p. 24

O problema dos lápis

Numa caixa existem 100 lápis azuis, 100 vermelhos, 100 verdes e 100 amarelos. Qual o número mínimo de lápis que tens de tirar, sempre com os olhos fechados, para teres a certeza que tiraste pelo menos um vermelho e um azul.

In www.fct.ualg.pt/matematica/5sestrelas/sub12/, “Sub12 – Campeonato de Matemática”,

2007

Proposta de guião de trabalho

As actividades devem ser resolvidas numa folha (por grupo) para entregarem à professora. Para realizares a actividade deves responder a cada um dos passos seguintes:

- 1º) No teu entender, o que te é pedido?**
- 2º) Resolve o problema**
- 3º) Explica como chegas-te ao resultado (qual foi o raciocínio que realizaste)**
- 4º) Que dificuldades encontraste (compreender o enunciado, dificuldades nos conteúdos matemáticos, encontrar uma estratégia para resolver o problema, ...)**
- 5º) O que achaste do problema?**

Não se esqueçam de identificar a folha de resposta com o nome de todos os elementos do grupo.

Anexo 2



Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

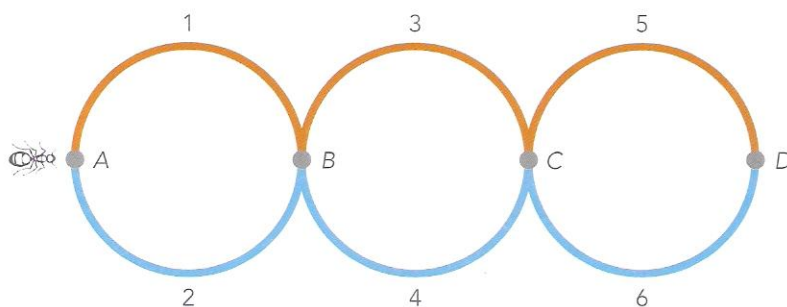
Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

O problema da formiga

Uma formiga quer ir de A a D passando obrigatoriamente por B e C



- c) Quantos percursos pode escolher?
- d) Qual a probabilidade de, o percurso por ela escolhido ser o da linha mais grossa?

In "Mat 9", Texto Editora, p. 23

O problema do metropolitano

Ricky é um jovem holandês que, sempre que vai a uma cidade com metropolitano, gosta de visitar e fotografar todas as estações. Normalmente escolhe de modo aleatório a estação onde começa a sua viagem. Ricky visitou a cidade de Lisboa no mês passado.

Em Lisboa, a rede de metropolitano é constituída por quatro linhas, com um total de 44 estações, como mostra a figura. Ricky procedeu como de costume e escolheu aleatoriamente a primeira estação a visitar.

1. Qual é a probabilidade de Ricky ter começado a sua viagem numa estação:

a) da linha amarela, ou seja, a linha em que Odivelas é a estação terminal?

b) que permita trocar de linha?

c) que não seja da linha vermelha, isto é, da linha em que o Oriente é a estação

terminal?

2. De entre as opções que se seguem, escolhe aquela que completa a frase

correctamente.

É muito provável que o Ricky tenha começado a viagem...

(A) numa estação da coroa 1.

(B) numa estação da linha Alameda/Oriente.

(C) numa estação de interface com barcos.

(D) numa estação da coroa L.

Justifica a tua opção.



O problema do Miguel e da TV

O Miguel verificou que mais de metade das vezes que vê televisão depois das 22 horas chega atrasado à escola, no dia seguinte. Considera a questão:

«Escolhendo ao acaso um dia em que o Miguel vê televisão depois das 22 horas, qual é a probabilidade de ele chegar atrasado à escola no dia seguinte»

Dos três valores que se seguem, dois nunca poderão ser a resposta correcta e esta questão. Quais? Justifica a tua resposta.

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{6}{5}$$

In Exame 9º ano, 2006, 1ª chamada

O problema dos iogurtes

No frigorífico tínhamos iogurtes da mesma marca de três sabores: morango, ananás e banana. A probabilidade de tirar ao acaso um iogurte de morango é de $\frac{1}{5}$ e de tirar um

iogurte de banana é de $\frac{1}{3}$. Sabendo que há 14 iogurtes de ananás, determine quantos iogurtes há ao todo.

In Caderno de actividades “Matemática Dinâmica”, Porto Editora, p. 9

Anexo 3



Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

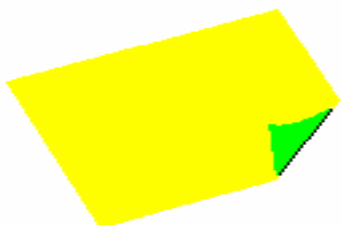
Problema das cores e os cartões de convite

A Teresa decidiu fazer os cartões de convite para a sua festa de anos. Em cada um deles, utilizou duas cores diferentes da roda das cores da figura e escolheu, de forma aleatória, o cartão a enviar a cada amigo. Quando pensou no número de combinações de cores possíveis, descobriu que era igual ao número de convites que ia fazer.

A Maria, quando soube, pensou que gostaria de receber o cartão verde e amarelo.

1.1. Qual é a probabilidade da Maria receber o cartão verde e amarelo? Explica como chegaste ao resultado.

1.2. Qual é a probabilidade da Maria receber um cartão que tivesse a cor verde?



In www.gave.pt, 1000 Itens

Problema do Euromilhões



Numa aposta simples, no Euromilhões, escolhem-se cinco números (1 a 50) e duas estrelas (1 a 9). Um boletim de jogo permite, como podes ver na imagem, fazer cinco apostas simples. Podem fazer-se 76 275 360 apostas simples diferentes.

2.1. No mínimo, quantos boletins completos terias de preencher para teres 25% de probabilidades de ganhar o Euromilhões, fazendo apenas apostas simples?

2.2 No dia 27 de Outubro de 2006, houve um sorteio do Euromilhões em que nenhum dos vencedores registou o seu boletim em Portugal. De acordo com os dados oficiais, fornecidos na tabela, determina, aproximadamente, qual era a probabilidade de o prémio vencedor ter saído em Portugal.

N.º de bilhetes registados em Portugal	5 103 849
N.º de combinações [apostas simples diferentes] registadas em Portugal	13 947 383
N.º de apostas simples registadas em Portugal	16 118 477

In www.gave.pt, 1000 Itens

Problema das bolas

3. Num saco há bolas verdes e bolas azuis. Se uma bola é tirada ao acaso, a probabilidade de sair verde é $\frac{1}{8}$.

3.1) Qual a probabilidade de sair bola azul?

3.2) Retirou-se uma bola do saco e observou-se que era bola verde. Qual o número mínimo de bolas azuis que há no saco

3.3) Sem repor a bola retirada, tirou-se outra bola do saco e verificou-se que também era verde. Qual o número mínimo de bolas azuis que estavam no saco inicialmente?

In “ Matemática Dinâmica”, Porto Editora, p. 31

Problema das moedas

4) Uma moeda é lançada ao acaso sobre uma mesa rectangular com um círculo desenhado no centro. O diâmetro do círculo é de 10 cm e a mesa tem 70 cm de comprimento e 30 cm de largura. Calcula a probabilidade do centro da moeda ficar fora do círculo.

In “ Matemática Dinâmica”, Porto Editora, p. 31

Anexo 4



Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Problema da festa de aniversário

Para a festa de Aniversário da Andreia colocaram-se três pilhas de pratos de loiça iguais e vários copos. No total estão na mesa 72 peças entre copos e pratos.

a) Quantos copos e pratos existem na mesa?

- b) A Andreia contou os convidados e comprou copos e pratos de modo a que cada amigo tivesse um prato para o bolo e um copo para o sumo. Quantos amigos convidou a Ana para a festa?
- c) Cada convidado tira apenas um copo e um prato. No fim da festa, a mãe da Andreia verificou que tinham ficado seis peças sem serem usadas. Como explicas esta situação.
- d) A Andreia estava muito feliz porque tinha os convidados todos na sua festa de Aniversário. O Kevin e o Marcelo não gostaram do sumo de Maracujá e cada um foi tirar outro copo para beber sumo de laranja. Mesmo assim, não faltou copo para ninguém. Porquê?

Anexo 5

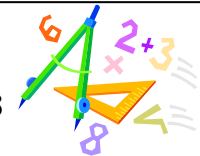


ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Problema da pesagem das maçãs e das peras

Se adicionarmos um certo número de quilos de maçãs com um certo número de quilos de peras obtemos um total de **a** quilos. Se adicionarmos 5 quilos, ás maçãs

existentes, obtemos o dobro dos quilos de peras. (Considera que o número de quilos é sempre um número inteiro)

- a) Poderá haver 2 Kg de maçãs e 3 Kg de peras?
- b) Poderá haver 9 Kg de maçãs e 7 Kg de peras? Em que condições?
- c) Tendo em conta as condições do enunciado justifica que o número de maçãs é sempre um número ímpar.
- d) Considera que $a=10$. Calcula quantos Kg temos de maçãs e de peras.
- e) Este problema poderá ter mais de uma solução? Em que condições?

Anexo 6



ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Problema da festa de finalistas

O 9º C organizou uma festa de final de período, para angariar dinheiro para a viagem de finalistas.

1) Para o efeito vendeu bilhetes a preços diferentes a alunos da escola e a alunos que não fossem da escola. Sabemos que foram vendidos 80 bilhetes e que o dinheiro total em caixa foi de 150€.

Tabela de preços	
Alunos da escola	Outros
1,5€	2.5€

Quantos alunos da escola foram á festa?

2) Foi feito um levantamento dos rapazes e raparigas que foram á festa. O número de raparigas excedia o número de rapazes em 14. O dobro do número de rapazes é igual á soma do número de raparigas com 19. Quantos rapazes e raparigas foram á festa?

3) O 9º C usou a sala dos alunos que tem forma rectangular. O comprimento da sala excede a sua largura em 21cm. Se aumentarmos 4 cm a cada uma das dimensões, a área da sala aumentará 492 cm^2 . Qual a área da sala?

Adaptado de “Matemática 9º ano”, O Livro, p. 46

Anexo 7

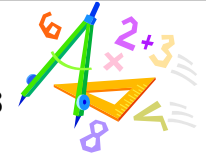


ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Problema dos rectângulos

2) Observa os rectângulos, o referencial cartesiano e a linha curva:

1.2) De todos os rectângulos, escolhe aqueles que podem ser colocados sobre o referencial, nas seguintes condições:

- Dois lados consecutivos ficam encostados aos eixos do referencial cartesiano;
- O vértice oposto ao zero (origem do referencial) tem de se situar sobre um ponto da curva.

1.2) Regista na tabela seguinte, as dimensões dos rectângulos escolhidos

Comprimento								
Largura								

1.3) O que acontece à largura do rectângulo, se o comprimento do mesmo passar para o dobro?

1.4) O que acontece ao comprimento do rectângulo, se a largura do mesmo passar para a terça parte?

1.5) O que acontece à largura do rectângulo, à medida que o comprimento aumenta?

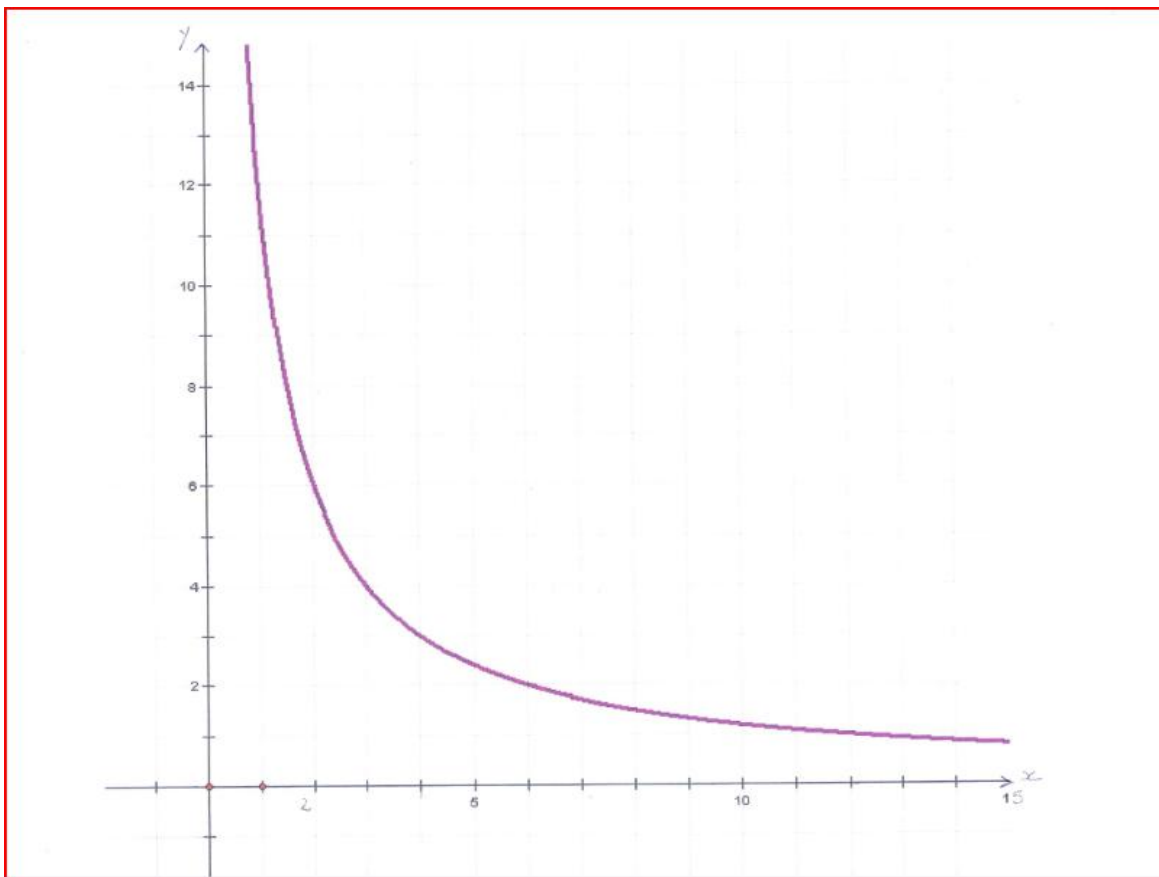
1.6) Completa a seguinte tabela, usando as dimensões dos rectângulos escolhidos

Comprimento								
Largura								
Área do rectângulo								

1.7) Com base na observação dos resultados obtidos na tabela anterior que conclusão podes tirar?

1.8) Tendo em conta os valores da tabela anterior, escreve uma expressão que relacione o comprimento com a largura de cada rectângulo.

www.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/materiais_produzidos/pdf_alberto_neto/Proporcionalidade_Inversa9_PAN.pdf (adaptado)



Anexo 8

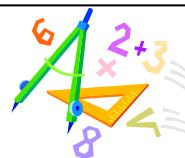


ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Ficha de trabalho de Matemática

9º ano

Ano Lectivo 2007/2008



Nome: _____

Problema da corrida dos 3000 metros

Entre os participantes de uma corrida de 3000 metros estavam, o Marcelo a Dânia e a Susana.

- 1) O Marcelo demorou 15 minutos, a que velocidade ia?

- 2) A Dânia correu a uma velocidade de 75m/m (metros por minuto), quanto tempo demorou?
- 3) A Susana foi ao dobro da velocidade da Dânia (75 m/m). Quanto tempo demorou ?
- 4) Indica a constante de proporcionalidade e interpreta-a no contexto do problema.
- 5) Elabora um gráfico que traduza a situação.
- 6) Escreve uma expressão que relacione a velocidade em função do tempo.

Nota: $e=vt$

Anexo 9



ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Este questionário destina-se a saber a tua opinião, acerca das aulas de resolução de problemas, na disciplina de Matemática.

Nome _____ n.º _____

Data _____

- Na tua opinião, existem diferenças entre um exercício de Matemática e um problema?

Não

Sim, quais

? _____

- A resolução de problemas nas aulas de Matemática é importante?

- Ao resolveres problemas desenvolves novas capacidades?

Não

Sim, quais

? _____

- É importante resolver problemas em grupo? Justifica a tua resposta.

- O tempo que dispões é suficiente para resolveres problemas propostos?

Não Sim

- Qual das perguntas do guião proposto pela professora, tens mais dificuldades em responder?

- Que sugestão gostarias de dar à professora, como proposta de uma futura aula de resolução de problemas? Gostarias de ver alguma actividade desenvolvida em particular?

Obrigado pela tua colaboração

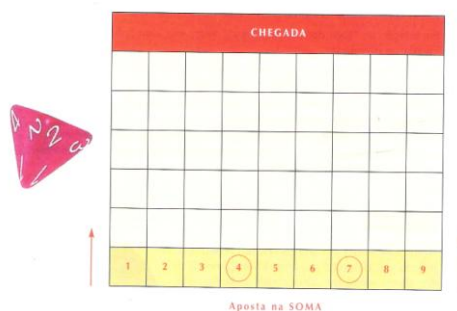
Anexo 10



ESCOLA E.B. 2,3 DE MONTENEGRO

Nome _____ n.º _____ Data _____
Prof.ª _____ Classificação _____ Enc. Educação _____

Problema 1 - A Lia e o Paulo têm um jogo que consiste no seguinte: cada um deles escolhe um número de 1 a 9 e coloca uma ficha sobre o número escolhido. De seguida, lançam um dado tetraédrico, com os vértices numerados de 1 a 4, duas vezes consecutivas. Se a soma dos pontos obtidos coincidir com o número escolhido, avança numa quadrícula na vertical. O processo repete-se e é considerado vencedor aquele que em primeiro lugar atinge a linha de chegada.



Para todas as questões justifica convenientemente a tua resposta

- 1) Para iniciar o jogo, a Lia escolheu o 7 e o Paulo o 4. Qual dos dois tem maior probabilidade de sair vencedor
- 2) Se fosses um dos jogadores indica:
 - 2.1.1) O número em que apostavas.
 - 2.1.2) O números ou números em que nunca apostavas.
- 3) Admite que tinhas como adversário um amigo que apostava no 6. Em que número apostavas para que o jogo fosse equilibrado (com igual probabilidade para ambos).
- 4) Indica, se possível, qual o número em que apostar para que a probabilidade seja:
 - 4.1.1) $\frac{1}{8}$
 - 4.1.2) $\frac{9}{8}$

Espaço B (12º ano), p. 91, Edições ASA, (adaptado)

Problema 2 - O número do vencedor do corta-mato escolar deste ano era formado por dois algarismos. A soma dos dois algarismos é 10 e o algarismo das dezenas é quádruplo do das unidades. Qual o número do vencedor?

Problema 3 - Para efectuar chamadas do seu telemóvel, para duas redes (A e B), o preço, **em cêntimos**, que o Paulo tem a pagar **por cada segundo** de duração de uma chamada é o seguinte:

Rede	Preço por segundo (em cêntimos)
A	0.5
B	0.6

Ontem, o Paulo só efectuou chamadas do seu telemóvel para as redes A e B. A soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos e, no total, o Paulo gastou 35 cêntimos. Qual foi o tempo total de duração das chamadas efectuadas pelo Paulo, para a rede A? Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade.

In Exame Nacional de Matemática, 2ª chamada, 2007

A tua opinião é importante!!!

Que dificuldade/ dificuldades encontraste para resolver os problemas?

Qual a possível causa dessas dificuldades?

Gostas de resolver problemas? Sim Não

Justifica a tua resposta

Anexo 11

2. Na tabela que se segue estão registados os preços, em euros, a pagar, por dia, num parque de campismo e os descontos especiais para os meses de Julho, Agosto e Setembro.

PREÇOS POR DIA	
(em euros)	
Criança dos 3 aos 12 anos	3,20
Pessoa com mais de 12 anos	5,50
Caravana	5,60
Tenda individual	3,40
Tenda familiar	6,50
Automóvel	5,80
Motocicleta	3,40

DESCONTOS ESPECIAIS		
Mês	Estadia igual ou superior a	Desconto
Julho	25 dias	20%
Agosto	30 dias	10%
Setembro	1 semana	35%

O Martim e a sua irmã Leonor foram acampar com os pais para este parque de campismo.

O Martim tem 13 anos e a Leonor tem 10 anos.

Levaram uma tenda que dá para toda a família.

Decidiram guardar o automóvel dentro do parque de campismo.

Chegaram ao parque no dia 2 de Setembro e só saíram no dia 12 desse mês. Como partiram de madrugada, já não tiveram de pagar a estadia deste dia (12 de Setembro).

Tendo em conta os descontos especiais, quanto é que a família do Martim pagou pela sua estadia no parque de campismo?

Apresenta todos os cálculos que efectuares.

3. Sabe-se que

$$I \cap \left[-\frac{2}{3}, \sqrt{10} \right] =]0, \sqrt{10}]$$

Qual dos intervalos seguintes poderá ser o conjunto I ?

- (A) $]0, +\infty[$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $\left[-\frac{2}{3}, 0[\right.$
- (D) $\left[-\frac{2}{3}, +\infty[\right.$
4. Considera o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

Qual dos quatro pares ordenados (x, y) seguintes é a solução deste sistema?

- (A) $(-1, 2)$
- (B) $(1, 2)$
- (C) $(-2, 1)$
- (D) $(2, 1)$
5. Resolve a equação

$$2(x^2 - 5) = 8x$$

6. Quando se coloca um objecto sobre a areia, ela fica marcada devido à pressão exercida por esse objecto.

A tabela seguinte relaciona a **pressão**, exercida por um tijolo sobre a areia, com a **área** da face do tijolo que está assente na areia.

Área (m ²)	0,005	0,01	0,02
Pressão (N/m ²)	4000	2000	1000

A pressão está expressa em newton por metro quadrado (N/m²) e a área em metro quadrado (m²).

- 6.1. A pressão exercida pelo tijolo é inversamente proporcional à área da face que está assente na areia.

Qual é o valor da constante de proporcionalidade inversa?

Mostra como obtiveste a tua resposta.

- 6.2. Na figura ao lado, podes ver um tijolo.

Na posição em que o tijolo se encontra, a pressão que ele exerce sobre a areia é 4000 N/m².

A face do tijolo que está assente na areia é um rectângulo, em que o comprimento é igual ao dobro da largura, tal como está assinalado na figura.

De acordo com os dados da tabela, determina a largura, l , desse rectângulo.

Apresenta todos os cálculos que efectuares e, na tua resposta, indica a unidade de comprimento.



7. Resolve a inequação

$$\frac{x-3}{2} + 5 \geq 2x$$

8. O Martim prendeu, com uma trela, o seu cão a um poste, próximo do supermercado do parque de campismo.

O cão ficou encostado ao poste mas, ao ver o dono desaparecer, tentou libertar-se.

Afastou-se **rapidamente** do poste, até a trela ficar completamente esticada.

Depois, correu à volta do poste, com a trela completamente esticada (**a trela rodou em torno do poste, nunca se enrolando neste**).

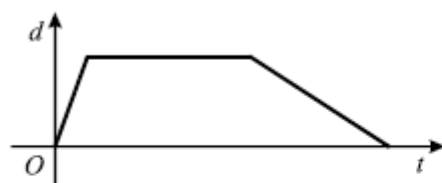
Já cansado, aproximou-se **lentamente** do poste, até ficar encostado a este, à espera do Martim.

Seja d a distância entre o cão e o poste e seja t o tempo que decorre desde que o Martim prendeu o cão ao poste.

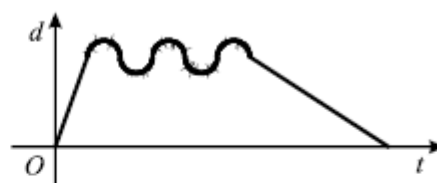
Qual dos três gráficos seguintes poderá representar a situação descrita?

Explica a razão que te leva a rejeitar cada um dos outros dois gráficos.

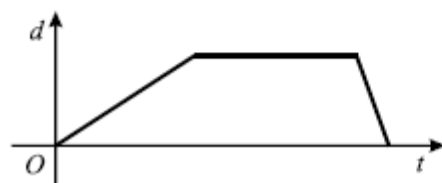
(A) Gráfico A



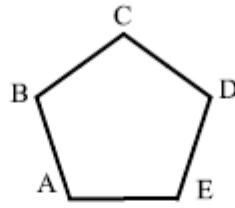
(B) Gráfico B



(C) Gráfico C

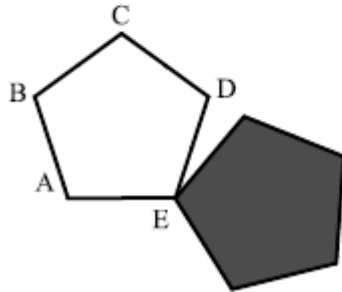


10. Na figura está desenhado um pentágono regular $[ABCDE]$.

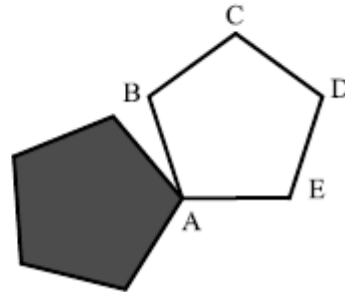


Em qual das quatro figuras que se seguem o pentágono sombreado é a imagem do pentágono $[ABCDE]$ obtida por meio de uma rotação de centro no ponto A e amplitude 180° ?

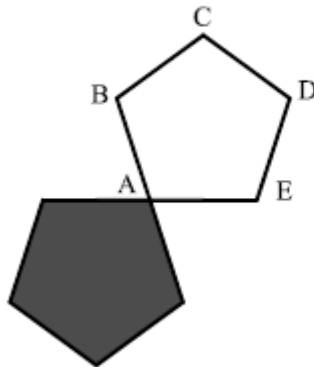
(A)



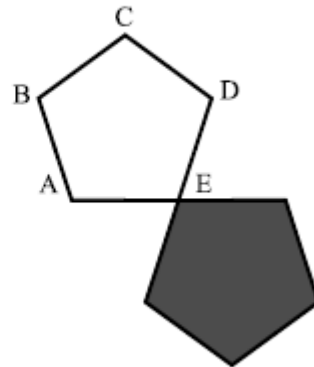
(B)



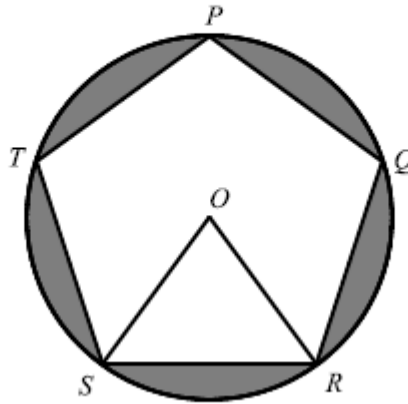
(C)



(D)



11. Na figura que se segue está representada uma circunferência de centro O , em que está inscrito um pentágono regular $[PQRST]$.



- 11.1. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo TPQ ?
Apresenta todos os cálculos que efectuares.

- 11.2. Sabe-se que:

- a circunferência tem raio 5;
- o triângulo $[SOR]$ tem área 12.

Determina a área da zona sombreada a cinzento na figura.

Apresenta todos os cálculos que efectuares e indica o resultado arredondado às décimas.

FIM

