

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Dinâmica dos Oceanos

Ana Cristina Martins Ribeiro Silva Paiva

Mestrado em Matemática

Especialização em Matemática para o Ensino

2008

Dissertação orientada por:

Professor Doutor Hermenegildo Borges de Oliveira

Resumo

O objectivo principal deste trabalho é estudar os escoamentos em larga escala nos oceanos, afastados de qualquer tipo de fronteira, seguindo os estudos mais recentes em Dinâmica dos Fluidos Geofísicos. Este é o ramo da Mecânica dos Fluidos que estuda o escoamento dos fluidos, assunto tratado no Capítulo 2. Neste capítulo é caracterizado o movimento e analisadas as mudanças que este provoca, devidas principalmente à velocidade, e consequentes deformações, e à transferência de determinadas propriedades ao longo do percurso em estudo. Os efeitos provocados por estas forças são caracterizados no Capítulo 3. A partir dos Princípios Clássicos da Mecânica, de conservação da massa e do momento, são deduzidas as equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos. Para descrever o movimento particular das massas oceânicas, é necessária uma análise às forças que provocam este movimento. Por isso, no Capítulo 3, é analisada a acção destas forças, que produzem efeitos complexos como o da força de Coriolis. Estes efeitos vão provocar alterações significativas nas equações de Navier-Stokes, conduzindo a um formalismo matemático descritivo da situação em estudo. Com base em experiências e aproximações, são deduzidas equações para o caso particular dos escoamentos geostróficos, uma classe essencial dos movimentos oceânicos. Estas aproximações baseiam-se em simplificações por restrições a domínios no interior do oceano, afastados do fundo do mar, das placas continentais e da superfície. De facto, a grande maioria dos movimentos de variação lenta no oceano estão em equilíbrio geostrófico.

Abstract

The main goal of this work is the study of large scale flows in the oceans, away from any kind of boundary, following up with the latest studies in Geophysical Fluid Dynamics. This is the branch of Fluid Mechanics that deals with fluid flow, explained in Chapter 2. In this chapter the flow is described and a study about the changes due to velocity and to the transfer of properties of the fluid is made. The effects of the forces acting on the fluid is explained in Chapter 3. The Navier-Stokes equations for Newtonian fluids are deduced from the Classical Principles of Mechanics, of conservation of mass and moment. To describe the particular movement of the ocean fluids, it's necessary to study the forces that cause this movement. Therefore, in Chapter 3, these forces are analysed, as they produce complex effects like the Coriolis force. These effects cause significant changes on the Navier-Stokes equations, leading to a mathematical formalism which describes the situation. These changes are based upon simplifying assumptions by restricting the flow to dominions in the oceans interior, away from the bottom, from the continental plates and from the surface. In practice, most of the slow motion flows in the ocean are in geostrophic equilibrium.

Palavras-chave

Fluidos
Equações de Navier-Stokes
Força de Coriolis
Oceanos
Rotação
Estratificação
Escoamentos geostróficos
Escoamentos quase-geostróficos

Keywords

Fluids

Navier-Stokes equations

Coriolis force

Oceans

Rotation

Stratification

Geostrophic flows

Quasi-geostrophic flows

Prefácio

Este trabalho pretende reunir conceitos físicos e matemáticos necessários à caracterização dos escoamentos em larga escala nos oceanos e afastados das fronteiras fixas como o fundo do mar ou as placas continentais e, ainda, afastado da interface entre a litosfera e a atmosfera. O estudo dos oceanos é um assunto que ainda tem muitas lacunas, derivadas da especificidade do próprio meio. Não é possível prever muitos fenómenos que acontecem e muitos físicos e matemáticos dedicam a sua vida à investigação e tentativa de explicar e prever esses fenómenos. Por ser um assunto tão delicado, em muitos livros que consultei encontrei resultados diferentes e algumas incongruências. Em livros de Mecânica dos Fluidos, nem sempre as deduções matemáticas são as mais correctas e em livros de teorias matemáticas sobre este assunto, nem sempre os conceitos físicos são explícitos o suficiente para se perceber como a teoria se pode aplicar em casos reais. Estas discrepâncias derivam do facto de que matemáticos e físicos olham para o mesmo fenómeno de formas diferentes e também por ainda haver neste campo muitas dúvidas e falta de ferramentas adequadas para modelar muitas situações.

Espero conseguir com este trabalho juntar mais uma referência ao panorama português, apesar de sentir que muito ficou por fazer e por dizer, pois apenas num ano é impossível reunir o trabalho de décadas desenvolvido por muitos físicos e matemáticos. Ainda assim, considero que os conceitos e ferramentas que são aqui descritos não estavam antes reunidos num só trabalho, pois infelizmente a Física e a Matemática parecem seguir caminhos diferentes, quando cada vez mais é necessário um trabalho conjunto para desvendar mistérios do nosso mundo. É meu desejo que este trabalho possa de alguma forma ajudar quem se inicia neste estudo, permitindo um acesso mais rápido à informação necessária acerca das ferramentas utilizadas nos últimos anos no estudo dos oceanos.

A decisão em fazer este trabalho não passou pela carreira profissional, não passou por qualquer gratificação, mas sim e apenas pela satisfação pessoal, pois é um assunto pelo qual sinto uma forte inclinação, talvez por ser uma matéria em que ainda muito há para fazer ou talvez por ter crescido perto

do mar e seus fascínios.

Para terminar, gostaria de agradecer ao meu companheiro Rafael e ao meu filho Rafael, pelas longas horas que não estive com eles, pelas longas horas que me ajudaram no que podiam e aos meus pais, pelo orgulho que têm em mim e pela força que sempre me deram para continuar. Foi neles que pensei quando o desespero batia à porta, principalmente na alegria e orgulho do meu filho em me ver a estudar ao lado dele, fazendo com que também ele ganhasse ânimo para estudar. Agradeço também ao meu irmão Júlio que fez comigo a parte curricular e que tanto me ajudou para que hoje pudesse estar onde estou. Também à minha irmã Sónia e à minha cunhada Marina, por terem ficado com os miúdos quando eu e o meu irmão estávamos cheios de trabalho e pelo apoio moral e incondicional. Os meus agradecimentos também vão para todas as pessoas que trabalham na Universidade do Algarve que de alguma forma contribuíram para facilitar o meu trabalho, nomeadamente para a Célia, pela simpatia e disponibilidade com que sempre me atendeu, pronta a ajudar sempre com um sorriso. Por último, mas não em último, ao meu professor e orientador Hermenegildo Oliveira, por tudo, pela disponibilidade constante, pela simpatia, pela compreensão, pela paciência, por explicar tão bem, por fazer o difícil parecer tão fácil e, acima de tudo, por ser um excelente Professor, com letra maiúscula, muito obrigado.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento	1
1.2	Fluidos	2
1.3	Conceitos Fundamentais	4
1.3.1	Notações	4
1.3.2	Vectores e Tensores	5
1.3.3	Operadores Diferenciais	6
1.3.4	Resultados Auxiliares	8
2	Mecânica dos Fluidos	11
2.1	Descrições do Movimento	11
2.2	Gradiente de Deformação	14
2.3	Teorema de Reynolds	17
2.4	Equação da Continuidade	18
2.5	Equação do Movimento	20
2.6	Lei Constitutiva	24
2.7	Condições Iniciais e de Fronteira	27
3	Dinâmica dos Oceanos	29
3.1	Introdução	29
3.2	Escalas de Movimento	30
3.3	Aceleração de Coriolis	34
3.4	Movimento num Referencial em Rotação	39
3.5	Aproximação Geostrófica	42
3.6	Escoamentos Quase-Geostróficos	46
4	Conclusão	55

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é feito um enquadramento do estudo realizado, explicada a sua importância e são referidos quais os objectivos a alcançar. São também introduzidos conceitos fundamentais de Mecânica dos Fluidos, assim como resultados auxiliares que serão necessários no decurso deste trabalho.

1.1 Enquadramento

A Terra, nossa casa, é constituída em grande parte por uma massa azul, cheia de dinâmica e de vida, mesmo nas suas mais recônditas profundezas. Falar de oceanos é falar de movimento, de padrões e regularidades, enfim, é falar de vida. A Matemática intervém no estudo dos oceanos e sem ela vários fenómenos ficariam por explicar. Os oceanos são constituídos por um fluido específico com vários elementos químicos e a que vulgarmente se chama de água. Assim, os conceitos de Mecânica dos Fluidos são fundamentais para o estudo que se pretende fazer.

Numa primeira abordagem, no Capítulo 2 apresentam-se os princípios da Mecânica dos Fluidos que conduzem às equações que governam o escoamento do fluido. De forma a poder caracterizar o comportamento de um fluido, terá de se ter em atenção as suas propriedades e exprimi-las nessas equações. Este procedimento conduzirá a um sistema de equações às derivadas parciais para quantidades como a velocidade, densidade, pressão e outras, relativas ao movimento arbitrário de um fluido. Neste trabalho serão consideradas estas equações e as várias formas que assumem quando se fazem considerações acerca da constituição do fluido ou do seu movimento. Este processo conduz à dedução das equações de Navier-Stokes, assim denominadas em tributo ao trabalho de Claude-Louis Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903) nesta área. Em termos práticos, apenas é possível encontrar soluções

exactas para os casos mais simples. Estes casos envolvem frequentemente escoamentos não turbulentos em estado estacionário no qual se podem desprezar uma série de factores que permitem a simplificação das equações. Para situações mais complexas envolvendo turbulência, não é possível encontrar soluções para esta classe de problemas. O Instituto de Matemática Clay incluiu este problema nos «problemas do milénio», oferecendo um prémio de um milhão de dólares para quem fizer progressos substanciais na direcção de uma teoria matemática que possa ajudar a entender este fenómeno. Note-se que as equações de Navier-Stokes podem descrever o movimento de um fluido apenas aproximadamente, a uma escala extremamente pequena ou sob condições extremas. Fluidos reais são constituídos de uma mistura de moléculas discretas e outros materiais, tais como partículas em suspensão e gases dissolvidos. Este facto faz com que os resultados sejam diferentes dos obtidos no estudo de um fluido contínuo e homogéneo modelado pelas equações de Navier-Stokes. Contudo, as equações de Navier-Stokes são úteis para um grande número de problemas práticos. Estas equações são obtidas a partir de princípios básicos de conservação da massa e do momento. Adicionalmente, é necessário assumir uma relação constitutiva ou equação de estado para o fluido. No Capítulo 3 são feitas considerações acerca da particularidade dos fluidos geofísicos, especificamente para o caso dos oceanos. O estudo baseia-se nas indicações da Dinâmica dos Fluidos Geofísicos, o ramo da Física que estuda os escoamentos em grande escala a nível planetário. Assim, para descrever este tipo de escoamentos, é feita uma particularização das equações de Navier-Stokes para os fluidos oceânicos. Para isso, é necessário ter em conta diversos factores que condicionam o movimento destes fluidos, que não afectam outro tipo de fluidos ou de situações específicas. Para os oceanos deverão ser tidas em consideração a rotação da Terra e a estratificação dos oceanos.

1.2 Fluidos

Em Física, um fluido é definido como sendo uma substância que toma facilmente a forma do recipiente que o contém, devido à mobilidade das suas moléculas. As substâncias que existem na Natureza podem ser classificadas na globalidade em duas formas, os sólidos e os fluidos. Um sólido tem uma forma definida, para a qual regressará no seu estado de repouso, desde que a força aplicada não seja demasiado forte para o deformar. Quando se trata de um fluido, não se pode dizer o mesmo, pois deforma-se continuamente até que a força a que está sujeito pare, por muito pequena que seja a magnitude dessa força.

Uma das primeiras hipóteses que é formulada no estudo dos fluidos (e também dos sólidos), é a chamada *hipótese de continuidade*. Qualquer substância é composta por um grande número de moléculas em constante movimento. Por isso, a matéria é descontínua ou discreta, do ponto de vista microscópico. Porém, na grande maioria dos casos, interessa estudar o comportamento do fluido como um todo ou a média do movimento das moléculas e considerar o fluido como um meio contínuo. É por isso possível ignorar a estrutura molecular discreta da matéria e substituir por uma distribuição contínua. Para esta hipótese ser válida, o tamanho do sistema de escoamento tem de ser maior do que o percurso livre médio das moléculas¹, o que se verifica na grande maioria das situações. Para estudar propriedades de determinado fluido, considera-se uma porção de fluido microscopicamente pequena, mas suficientemente grande para conter várias moléculas, a qual se denomina *elemento de um fluido* e que será representativa do restante fluido nas mesmas condições. Alguns autores utilizam simplesmente o termo *partícula*.

O estudo matemático dos meios contínuos assenta em três princípios gerais que governam o seu comportamento mecânico (Truesdell e Noll [19, p.36]). O *princípio da indiferença material* estabelece que, independentemente da posição do observador, a resposta de um corpo, fluido ou sólido, é a mesma. O *princípio do determinismo* estabelece que a tensão num corpo é determinada pela história do movimento desse corpo. Por último, o *princípio da acção local* estabelece que, ao determinar a tensão numa dada partícula, pode ser desprezado o movimento fora de uma vizinhança arbitrária dessa partícula.

Para estudar o comportamento dos fluidos, é necessário ter em conta várias propriedades dos fluidos. É importante definir algumas dessas propriedades, tais como a massa, a viscosidade e a tensão superficial. Relativamente à primeira, convém frisar que quando se fala em massa de um fluido, fala-se efectivamente em massa volúmica. A massa de um fluido é a propriedade da matéria correspondente à massa por volume, ou seja, a proporção existente entre a massa de um corpo e o seu volume. Desta forma, diz-se que a massa volúmica mede o grau de concentração de massa em determinado volume. É importante distinguir os conceitos de massa e de densidade. Entende-se por densidade a relação entre a massa volúmica da matéria em causa e a massa volúmica de matéria de referência, sendo a água geralmente tomada como referência. Por exemplo, quando se diz que um corpo tem uma densidade de 5, quer dizer que tem uma massa volúmica cinco vezes superior à da água (Kundu [10, pp.3-4]).

¹Distância média percorrida pelas partículas entre impactos.

A viscosidade é a medida da resistência de um fluido à deformação causada por uma ou várias forças. A viscosidade descreve a resistência interna e deve ser pensada como a medida de atrito do fluido. Por exemplo, a água tem baixa viscosidade, enquanto o óleo vegetal tem uma alta viscosidade. As velocidades de dois fluidos com densidades diferentes, que escoam sob as mesmas condições, são inversamente proporcionais às viscosidades dos fluidos. Ou seja, quanto maior a viscosidade, menor a velocidade de escoamento. Há que fazer a distinção entre viscosidade dinâmica ou molecular e viscosidade cinemática ou turbulenta. A primeira é resultado das forças intermoleculares, e a segunda é o quociente entre a viscosidade dinâmica e a densidade do fluido, não dependendo da unidade da massa. Esta distinção tornar-se-á mais clara ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

A tensão² é a intensidade total das forças internas que actuam num corpo, como reacção às forças externas. A tensão superficial é um efeito que ocorre na camada superficial de um fluido e leva a sua superfície a comportar-se como uma membrana elástica. Este efeito permite que insectos caminhem sobre a água ou que pequenos objectos de metal como agulhas ou moedas flutuem na superfície da água. A tensão superficial está relacionada com a diferença de pressão entre os dois lados de uma interface entre dois fluidos, como por exemplo, a água do mar e a atmosfera.

1.3 Conceitos Fundamentais

1.3.1 Notações

As quantidades escalares, quer sejam funções ou não, são representadas por símbolos em itálico. Por exemplo, ρ denota a função densidade e t denota o tempo. As quantidades vectoriais são representadas por símbolos em negrito, tal como \mathbf{a} ou \mathbf{u} . Os tensores são escritos em letra maiúscula, para distinguir dos vectores, tal como \mathbf{T} ou \mathbf{D} .

Para os conjuntos de números usa-se a notação usual, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} para os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente. \mathbb{R}^N é o espaço euclideano de dimensão N , $N \in \mathbb{N}$ e, para $N = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Os pontos de \mathbb{R}^N são denotados por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, notação que pode também indicar os vectores correspondentes. Usam-se as notações $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ para $N = 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ para $N = 2$, e x para $N = 1$. V é um domínio de \mathbb{R}^N , isto é, um conjunto aberto, limitado e simplesmente conexo contido em \mathbb{R}^N . ∂V designa a fronteira de V , conjunto dos pontos fronteiros do conjunto

²Do inglês *stress*.

V. A base canónica de \mathbb{R}^N é denotada por

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_N = (0, \dots, 0, 1).$$

O símbolo δ_j^i designa-se por *delta de Kronecker* e é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A constante de permutação e_{ijk} é definida por

$$e_{ijk} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix}.$$

O *vector dual* é definido por $t_i = e_{ijk}T_{jk}$, onde T_{jk} é um tensor.

1.3.2 Vectores e Tensores

Um *vector* é definido como um elemento de um espaço vectorial. Esta é uma definição abstracta, mas com muitas concretizações possíveis (números, funções, geometria e outros). Para este estudo, interessa considerar um objecto geométrico, ou seja, um segmento de recta orientado e com uma determinada direcção e comprimento, num espaço tridimensional euclideano. Há quantidades físicas que são representadas por vectores, como por exemplo, a velocidade, a aceleração, o momento ou uma força.

O produto escalar, ou produto euclideano, entre dois vectores

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$$

e

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$$

define-se por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N u_i v_i.$$

A norma euclideana define-se por $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Para $N = 3$, define-se formalmente o produto vectorial ou produto externo entre dois vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix},$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 formam a base canónica de \mathbb{R}^3 . O vector resultante é igual ao vector com comprimento $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$ (sendo θ o ângulo formado pelos vectores \mathbf{u} e \mathbf{v}) e direcção perpendicular ao plano formado pelos vectores \mathbf{u} e \mathbf{v} . Pode-se estender esta noção formal ao produto externo entre dois tensores \mathbf{A} e \mathbf{B} ambos de dimensão 3×3 ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

onde A_i e B_i , $i = 1, 2, 3$, indicam as linhas das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente, e os produtos $A_i B_i$ daí resultantes são equivalentes ao cálculo do produto interno entre dois vectores.

Um *tensor de segunda ordem* \mathbf{T} , frequentemente intitulado apenas de *tensor*, é definido como uma aplicação linear que transforma vectores em vectores,

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}.$$

Os tensores são definidos por nove componentes. É o caso da tensão (força por unidade de área) num ponto, que precisa de nove componentes, porque há três direcções envolvidas na sua descrição. Uma direcção especifica a orientação da superfície na qual a tensão está a ser aplicada, e as outras duas especificam a direcção da força na superfície, conforme mostra a Figura 1.1. Um tensor pode ser escrito na forma matricial, representado pelas suas componentes T_{ij} ,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Em geral, os tensores podem ser de qualquer ordem. De facto, um escalar pode ser considerado como um tensor de ordem zero e um vector como um tensor de ordem um. Em mecânica dos fluidos os tensores mais usados são o tensor das tensões, \mathbf{T} e o tensor da taxa de deformação, \mathbf{D} .

1.3.3 Operadores Diferenciais

Nesta secção, os resultados são restringidos às dimensões $N = 2$ e $N = 3$, por serem as mais utilizadas ao longo do trabalho.

A derivada parcial de uma função escalar f é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\mathbf{e}_i) - f(x)}{h},$$

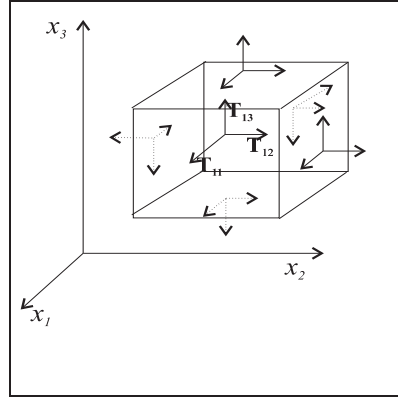


Figura 1.1: Campo de tensões num ponto, aqui representado por um cubo infinitesimal.

desde que o limite exista.

O operador diferencial ∇ é definido simbolicamente por

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

para $N = 3$ e

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

para $N = 2$. O operador ∇ , quando aplicado num campo escalar u , gera os vectores

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right),$$

para $N = 3$, ou

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right),$$

para $N = 2$. O vector ∇u é habitualmente designado por *gradiente* de u . A *divergência* de um campo vectorial $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ é definida por

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

É evidente que a operação divergência diminui a ordem de um tensor em uma unidade, enquanto que a operação gradiente aumenta a ordem do tensor em uma unidade. O operador diferencial *Laplaciano* de um campo escalar u é definido por

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

O *rotacional* de um campo vectorial \mathbf{u} é ainda um vector e, no caso $N = 3$, define-se formalmente por

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \nabla \times \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

Se $N = 2$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e a partir do formalismo anterior,

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Se $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, diz-se que \mathbf{u} é um campo vectorial *irrotacional*.

A matriz Jacobiana de um vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é definida por

$$M_J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

O determinante de M_J designa-se por Jacobiano. A divergência de uma matriz M define-se por

$$\operatorname{div} M = \begin{pmatrix} \operatorname{div} M_1 \\ \operatorname{div} M_2 \\ \operatorname{div} M_3 \end{pmatrix},$$

onde $M_i = (M_{i1}, M_{i2}, M_{i3})$, $i = 1, 2, 3$.

1.3.4 Resultados Auxiliares

Nesta secção apresentam-se alguns resultados importantes usados no desenvolvimento deste estudo.

Proposição 1.3.1 *Seja $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

onde \times representa o produto externo entre vectores.

Demonstração: Kundu [10, p.97]. \square

O Teorema de Gauss, também conhecido por Teorema da Divergência, que a seguir se enuncia, é útil no estudo do comportamento de fluidos, pois permite trabalhar quer com um volume de fluido, quer com a sua superfície.

Teorema 1.3.1 (de Gauss) Sejam V um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^N , e ∂V a sua fronteira compacta, que se supõe suficientemente regular de modo a existir a normal \mathbf{n} em quase todos os pontos de ∂V . Suponha-se que \mathbf{F} é uma função vectorial, contínua e diferenciável em V . Então,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Demonstração: Boyce e Diprima [4, pp.1036-1038]. \square

No caso da função \mathbf{F} ser uma função escalar f , a igualdade do Teorema de Gauss reduz-se a

$$\int_V \nabla f \, dv = \int_{\partial V} f \mathbf{n} \, ds.$$

Proposição 1.3.2 Sejam f e \mathbf{g} duas funções diferenciáveis em V . Então, nas condições do Teorema 1.3.1,

$$\int_V \nabla f \cdot \mathbf{g} \, dv = - \int_V f \operatorname{div} \mathbf{g} \, dv + \int_{\partial V} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (1.2)$$

Demonstração: Aplicação do Teorema 1.3.1 a $f\mathbf{g}$. \square

No caso particular de uma função escalar g , (1.2) reduz-se ao resultado conhecido por integração por partes:

$$\int_V f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dv = - \int_V g \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dv + \int_{\partial V} f g \, \partial v,$$

com i a variar de 1 até n .

O seguinte resultado é frequentemente designado por Teorema da Mudança de Variável.

Teorema 1.3.2 Sejam V e Ω dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^N , limitados por funções diferenciáveis, $\varphi : \Omega \rightarrow V$ uma função bijectiva com derivadas parciais contínuas e f uma função contínua em V . Então,

$$\int_V f \, dv = \int_{\varphi^{-1}(V)} f \circ \varphi \, J \, dw,$$

onde $dv = J dw$ e $J = \det \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]$, com $i, j \in 1, 2, 3$.

Demonstração: Lax [11, pp.497-501]. \square

Capítulo 2

Mecânica dos Fluidos

A Mecânica dos Fluidos lida com o escoamento dos fluidos e, tal como outras ciências, necessita de observações experimentais e de análise matemática. Muitas vezes, são necessárias grandes aproximações devido à complexidade dos fenómenos. Tal como noutros campos, a matemática que se conhece não é suficiente para resolver os problemas complexos de escoamentos de alguns fluidos. Nestes casos, quer se esteja interessado em compreender a física do problema ou as suas aplicações, terá de se confiar em observações experimentais para testar a análise feita e para poder formular conjecturas sobre a natureza do fenómeno. Neste capítulo, apresentam-se as descrições Lagrangeana e Euleriana do movimento e sua importância para a formulação das equações do movimento. Caracterizam-se as deformações do fluido provocadas pelas forças a que está sujeito. É demonstrado o Teorema de Reynolds, importante para a obtenção das equações que governam o escoamento de fluidos. A equação da continuidade é obtida a partir do Princípio de Conservação da Massa. A equação do movimento, também conhecida por equação do momento, é obtida a partir do Princípio de Conservação do Momento Linear. Após ser estabelecida a Lei Constitutiva para fluidos Newtonianos, obtêm-se as equações de Navier-Stokes. Por fim, são apresentadas as principais condições de fronteira que caracterizam o fluido nas fronteiras dos domínios considerados. Neste capítulo, as referências mais importantes foram Feistauer [7], Kundu [10] e Serrin [17].

2.1 Descrições do Movimento

Em Mecânica, o ramo que trata de quantidades que envolvem o espaço e o tempo é a Cinemática. No caso dos fluidos, estuda variáveis como o deslocamento, a velocidade, a aceleração, rotações e deformações de elementos do

fluido. Pode-se dizer que procura descrever os movimentos e deformações de corpos contínuos. As forças que originam estes movimentos são analisadas por outro ramo, a Dinâmica.

Para caracterizar o movimento, usualmente a Cinemática utiliza duas descrições, a descrição Lagrangeana e a descrição Euleriana. Para tal, é necessário considerar um intervalo de tempo $(0, t) \subset \mathbb{R}_0^+$, durante o qual se segue o movimento do fluido. Considera-se também um domínio $V = V(t) \subset \mathbb{R}^3$ que representa o volume ocupado pelo fluido no instante de tempo $t \in (0, t)$. Sobre este volume serão aplicados alguns princípios clássicos da Mecânica. Este volume permanece fixo no espaço ou pode mover-se com o fluido, o que leva a descrições diferentes do movimento.

Na descrição Lagrangeana, segue-se a história de partículas individuais do fluido. Neste caso, consideram-se duas variáveis independentes a estudar: o tempo t , e a posição de cada partícula movendo-se com o fluido, que no instante $t = 0$ ocupava a posição $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Considerando que no instante de tempo t , a partícula em estudo moveu-se para a posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, o escoamento representa-se pela transformação

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Observe-se que \mathbf{x} é apenas função do tempo t , estando a posição inicial \mathbf{X} fixa. Assim, (2.1) representa o caminho da partícula P inicialmente em \mathbf{X} , conforme mostra a Figura 2.1. Por esta razão esta descrição é também designada por descrição material. A velocidade de cada partícula, ou elemento do fluido, representa-se pelo vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e é dada pela derivada do vector posição em ordem ao tempo,

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

A aceleração é representada pelo vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e obtém-se derivando o vector velocidade em ordem ao tempo,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Na descrição Euleriana, estuda-se o comportamento das partículas do fluido num ponto arbitrário do espaço, \mathbf{x} . Esta descrição é mais utilizada, porque no estudo de um fluido raramente interessa o movimento de cada partícula do fluido, individualmente, mas sim o estado do fluido como um todo e as suas mudanças ao longo do tempo. Nesta descrição, o tempo t está fixo e \mathbf{X} varia, pelo que a equação (2.1) determina a transformação de uma região inicialmente ocupada pelo fluido para a sua posição no instante

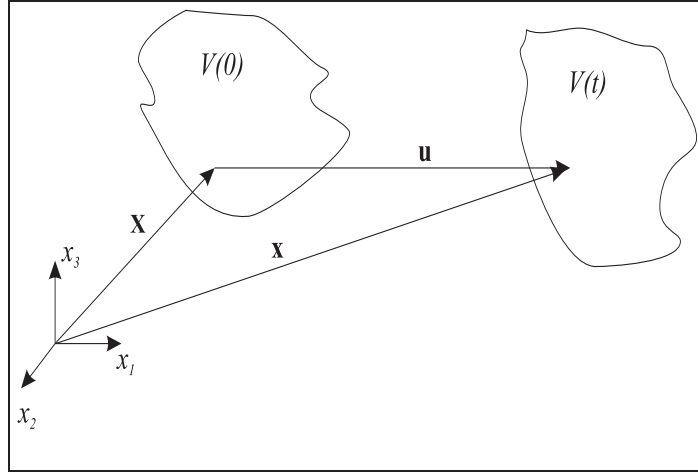


Figura 2.1: Descrição Lagrangeana do movimento.

t . Esta é a razão porque esta descrição também é designada por descrição espacial. Assim,

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt}. \quad (2.2)$$

Ao calcular a aceleração,

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde se usou a convenção de Einstein para índices repetidos. Em notação vectorial,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Para compreender melhor este resultado, considere-se uma quantidade física qualquer transportada pelo fluido em movimento. Na descrição Lagrangeana esta quantidade é vista como uma função $H(\mathbf{X}, t)$, que determina o valor da quantidade considerada, associada à partícula na posição X , no instante de tempo t . No caso da descrição Euleriana, a quantidade é representada por uma função $F(\mathbf{x}, t)$ que determina o valor da quantidade no ponto \mathbf{x} no instante de tempo t . Tendo em conta a equação (2.1), pode-se escrever que

$$H(\mathbf{X}, t) = F(\varphi(\mathbf{X}, t), t).$$

Se F tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas dentro do volume de controlo, facilmente se verifica que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F. \quad (2.4)$$

Esta expressão é usualmente designada por *derivada material*, para realçar o facto de que a derivada é calculada seguindo um elemento do fluido. Pode ser considerada como um caso geral da equação (2.3). A primeira parcela, $\frac{\partial F}{\partial t}$, é a taxa de variação local de F num dado ponto, e é igual a zero para escoamentos estacionários. A segunda parcela, $\mathbf{u} \cdot \nabla F$, chama-se derivada advectiva ou termo advectivo, por representar as mudanças em F devido à advecção da partícula¹ de um lugar para outro, onde o valor de F é diferente.

Para passar da descrição Lagrangeana para a Euleriana, escreve-se a velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ em coordenadas Eulerianas. De acordo com (2.1), a função $\varphi(\cdot, t)$ é, para t fixo, uma função injectiva e por isso possui inversa. Seja $\phi(\cdot, t)$ a sua função inversa. Então

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \Leftrightarrow \mathbf{X} = \phi(\mathbf{x}, t),$$

e, para a velocidade,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\phi(\mathbf{x}, t), t).$$

A passagem da descrição Euleriana para a Lagrangeana é efectuada resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}$. A solução corresponde à trajectória do elemento do fluido que passa na posição \mathbf{X} no instante de tempo inicial $t = 0$.

2.2 Gradiente de Deformação

Para além da caracterização do movimento de um fluido, também é importante caracterizar a deformação provocada pelas forças a que o fluido está sujeito. O *gradiente de deformação* denota-se por \mathbf{K} e é um tensor definido por

$$\mathbf{K} = \nabla x(\mathbf{X}, t), \quad (2.5)$$

¹Processo de transporte da partícula.

ou, em termos das suas componentes,

$$K_{ik} = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_k}, \quad i, k \in 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

De acordo com esta definição, o gradiente de deformação \mathbf{K} pode ser interpretado como a matriz da função definida por (2.1). Esta função transforma elementos (de linha, área e volume) da configuração inicial em elementos da configuração actual, conforme se pode observar na Figura 2.2. Por exemplo, um elemento na configuração actual, diga-se $d\mathbf{x}$, está relacionado com um elemento da configuração inicial, diga-se $d\mathbf{X}$, por

$$d\mathbf{x} = \mathbf{K} d\mathbf{X}. \quad (2.7)$$

De facto, para todo $i = 1, 2, 3$, tem-se

$$dx_i = \frac{dx_i}{dX_k} dX_k = K_{ik} dX_k. \quad (2.8)$$

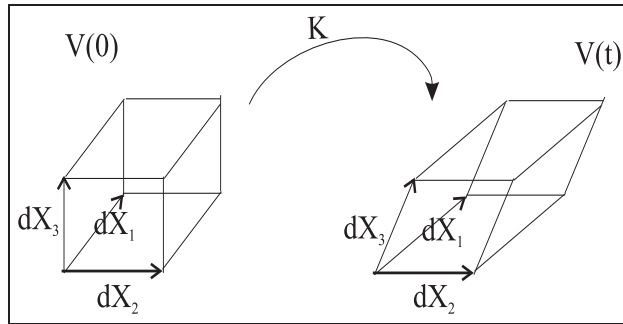


Figura 2.2: Gradiente de deformação.

O determinante do gradiente da deformação é designado por *Jacobiano*,

$$J = \det \mathbf{K}. \quad (2.9)$$

O Jacobiano determina as mudanças do volume local devido ao movimento,

$$dv = J dV, \quad (2.10)$$

onde dV é o elemento de volume no referencial inicial e dv é o elemento de volume no referencial actual. Derivando o gradiente da deformação em ordem ao tempo,

$$\frac{dK_{ik}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dX_k} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial X_k} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}, \quad i, j, k \in 1, 2, 3,$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \nabla \mathbf{u} \mathbf{K}. \quad (2.11)$$

Euler demonstrou (Serrin [17, p.9]) que a divergência do vector velocidade determina mudanças no volume, através do resultado que se segue.

Lema 2.2.1 : *Nas condições definidas em (2.2) e (2.9),*

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Demonstração: Seja A_{jk} a matriz dos coeficientes de $\frac{\partial x_i}{\partial X_k}$ na expansão do determinante do Jacobiano, de forma a que

$$A_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = J \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker. Então,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \delta_{ij} = J \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad \square$$

O tensor $\nabla \mathbf{u}$, tal como qualquer tensor arbitrário, pode ser decomposto como

$$\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.12)$$

Desta forma, o gradiente da velocidade está decomposto em duas partes, uma simétrica,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

e outra anti-simétrica,

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T).$$

e assim

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

Para permitir interpretar os elementos do tensor \mathbf{D} , utilizando (2.7), (2.11) e o facto de que $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0$, pode-se escrever a derivada em ordem ao tempo dos elementos de arco $d\mathbf{x}$ como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} d\mathbf{X} = \nabla \mathbf{u} \mathbf{K} d\mathbf{X} = \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Tendo em conta (2.12),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D} d\mathbf{x} + \mathbf{W} d\mathbf{x}. \quad (2.14)$$

Uma vez que o tensor \mathbf{W} é anti-simétrico, a sua matriz tem apenas três elementos independentes. Sem perda de generalidade, pode-se escrever como

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os componentes w_i podem ser considerados como componentes do vector dual

$$\mathbf{w} = \text{dual } \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Então, $\mathbf{W} d\mathbf{x}$ pode escrever-se como

$$\mathbf{W} d\mathbf{x} = \mathbf{w} \times d\mathbf{x}.$$

Assim, a equação (2.14) fica

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D} d\mathbf{x} + \mathbf{w} \times d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

A primeira parcela do segundo membro da equação descreve a deformação do movimento, por isso \mathbf{D} é chamado de *tensor das velocidades de deformação do movimento* e representa as deformações a que o fluido está sujeito. Se $\mathbf{D} = 0$, diz-se que o movimento é localmente e instantaneamente rígido. A segunda parcela representa a rotação do fluido com velocidade angular \mathbf{w} . Por isso, \mathbf{W} chama-se *tensor das velocidades de rotação do movimento*.

2.3 Teorema de Reynolds

O Volume V , conforme definido na Secção 2.1, pode ser considerado como um volume fixo no espaço ou um volume material, consistindo das mesmas partículas, mas cujas superfícies limitrofes se movimentam com o fluido. As expressões que traduzem os princípios de conservação dependem do volume considerado. Para as derivar, é necessária a aplicação do Teorema de Reynolds, também conhecido por Teorema do Transporte, que se demonstra nesta secção.

Teorema 2.3.1 (de Reynolds) Sejam $V = V(t)$ um volume arbitrário que se move com o fluido, com velocidade \mathbf{u} e $F = F(\mathbf{x}, t)$ uma função escalar. O integral de volume $\int_V F dv$ é função do tempo e a sua derivada em ordem ao tempo é dada pela seguinte fórmula:

$$\frac{d}{dt} \int_V F dv = \int_V \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dv. \quad (2.16)$$

Demonstração: Para demonstrar este resultado, introduzem-se novas variáveis de integração, (X_1, X_2, X_3) que são as variáveis relativas ao instante t em que ocupam a posição descrita pelas variáveis (x_1, x_2, x_3) , através de (2.1). Então, a região V em movimento nas variáveis x_i é substituída pela região fixa $V_0 = V(0)$ nas variáveis X_i . Note-se que V é composto pelas mesmas partículas, qualquer que seja o instante de tempo. Então, por aplicação do Teorema 1.3.2,

$$\int_V F dv = \int_{V_0} F J dv_0,$$

sendo $dv = J dv_0$ e J o Jacobiano da transformação. Uma vez que V_0 não depende do tempo ($t = 0$),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} F J dv_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (F J) dv_0 = \int_{V_0} \left(J \frac{dF}{dt} + F \frac{dJ}{dt} \right) dv_0.$$

Aplicando o Lema 2.2.1,

$$\frac{d}{dt} \int_V F dv = \int_{V_0} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{u} \right) J dv_0.$$

Aplicando novamente o Teorema 1.3.2,

$$\frac{d}{dt} \int_V F dv = \int_V \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dv. \quad \square$$

Este teorema permite derivar em ordem ao tempo integrais de tensores de qualquer ordem, quer em volumes que se movam com o fluido, quer em volumes fixos. Será útil na derivação dos princípios de conservação que se enunciam a seguir.

2.4 Equação da Continuidade

Um fluido obedece a princípios físicos de conservação da massa e do momento. Estes princípios podem ser formulados na forma diferencial, quando

aplicados num determinado ponto. Para o estudo em causa, interessa uma formulação na forma integral, por serem aplicados a uma determinada região. Considere-se o volume V fixo no espaço. Supondo que a densidade do fluido é caracterizada pela função $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\rho > 0$, a massa do fluido que ocupa a região V é determinada pelo integral

$$\int_V \rho \, dv.$$

Princípio 1 (da conservação da massa) *A massa de um fluido no volume material V não muda quando o volume V se move com o fluido.*

Pode-se afirmar então que a taxa de variação da massa é nula, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv = 0. \quad (2.17)$$

Aplicando o Teorema 2.3.1,

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = 0.$$

Tendo em conta que o volume V é arbitrário,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.18)$$

Esta é a forma Euleriana da equação da continuidade. É a derivação feita por Euler, pensa-se que por volta de 1751. É uma condição necessária e suficiente para que o movimento conserve a massa do volume. Tendo em conta que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla F + F \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(F\mathbf{u}), \quad (2.19)$$

e utilizando (2.4), a equação (2.18) pode ser escrita noutra forma,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.20)$$

No caso particular do estudo de fluidos incompressíveis, isto é, fluidos cuja densidade não muda sob o efeito da pressão, sabe-se, pelo Lema 2.2.1, que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. A equação (2.18), neste caso, é equivalente a

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

o que implica que ρ seja constante ao longo das trajectórias das partículas. Se, além do mais, o fluido for homogéneo, ρ é constante. Juntando estas condições, (2.18) ou (2.20) reduzem-se a

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.21)$$

Aplicando o Teorema 2.3.1 e a equação (2.18), obtém-se a fórmula seguinte, que permite derivar facilmente integrais de volume em ordem ao tempo,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho F dv = \int_V \rho \frac{dF}{dt} dv. \quad (2.22)$$

2.5 Equação do Movimento

As equações dinâmicas básicas que descrevem o movimento de um fluido são derivadas a partir do Princípio da Conservação do Momento Linear. O momento linear, ou quantidade de movimento, caracteriza o efeito dinâmico de um corpo animado com velocidade \mathbf{u} e é definido por

$$\int_V \rho \mathbf{u} dv.$$

Sob as condições referidas na Secção 2.4, verifica-se o princípio que a seguir se enuncia.

Princípio 2 (da conservação do momento linear) *A taxa de variação total do momento linear de um fluido ocupando o volume V é igual à resultante das forças que actuam sobre esse volume.*

Este princípio pode ser traduzido através da equação

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dv = \int_V \mathbf{f} dv + \int_{\partial V} \mathbf{t} \partial v, \quad (2.23)$$

onde \mathbf{f} é a força de volume, função conhecida da posição e do tempo e \mathbf{t} é a tensão. O primeiro membro da equação representa a taxa de variação total do momento linear. Quanto ao segundo membro da equação, resulta da extensão dos princípios da dinâmica clássica aos meios contínuos deformáveis. A primeira parcela representa as **forças de volume** (ou *forças externas*) e a segunda parcela as **forças de superfície** (ou *forças internas*). As forças de volume actuam em elementos do volume V , sem contacto e resultam do facto do fluido estar num determinado campo de forças, como por exemplo campos gravitacionais ou electromagnéticos. As forças de superfície não são determinadas por acções exteriores, mas pelas reacções internas dos meios face às deformações e aos movimentos. Representam as acções locais de contacto, ou seja, as acções do fluido exterior no volume considerado, através da sua fronteira ∂V . Estas forças são de difícil caracterização, uma vez que

variam em função das superfícies em que actuam. O Postulado de Cauchy permite, através de uma hipótese matemática, modelar este tipo de forças (Truesdell e Noll [19, p.32]).

Postulado 2.5.1 (de Cauchy) *As forças de superfície são representadas por uma distribuição de vectores de tensão \mathbf{t} , que, num dado instante t , dependem da posição e orientação do elemento de superfície dv . Sendo \mathbf{n} o vector unitário normal a ∂V , então $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$.*

Usando (2.22), é possível escrever (2.23) de outra forma,

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dv = \int_V \rho \mathbf{f} dv + \int_{\partial V} \mathbf{t} \partial v. \quad (2.24)$$

Formulado desta maneira, o princípio está expresso em termos de dois tipos diferentes de integral. É necessário transformar o integral de superfície em integral de volume, aplicando o Teorema 1.3.1 e o resultado que a seguir se enuncia, habitualmente designado por Princípio das Tensões de Cauchy.

Lema 2.5.1 *Sendo \mathbf{t} contínuo em cada $\mathbf{x} \in V$, existe um único tensor $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ tal que, para todos os vectores unitários \mathbf{n} ,*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.25)$$

Demonstração: Seja l^3 o volume de V . Dividindo ambos os membros de (2.24) por l^2 ,

$$l^{-2} \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dv = l^{-2} \int_V \rho \mathbf{f} dv + l^{-2} \int_{\partial V} \mathbf{t} \partial v.$$

Passando ao limite,

$$\lim_{V \rightarrow 0} l^{-2} \int_{\partial V} \mathbf{t} \partial v = 0, \quad (2.26)$$

Observe-se que os integrais de volume vão tender para zero, pois são limitados. A expressão (2.26) expressa o facto das forças de superfície estarem em equilíbrio local. Considere-se agora o tetraedro da Figura 2.3, com vértice num ponto arbitrário x e com três faces paralelas aos planos coordenados.

Seja \mathbf{n} o vector normal à face oblíqua do tetraedro e $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ e $-\mathbf{k}$ as normais às outras faces, respectivamente correspondentes a \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 . Representando as suas áreas por $n_1\Sigma$, $n_2\Sigma$ e $n_3\Sigma$, pode-se afirmar que $l^2 \simeq \Sigma$ e

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) + n_1\mathbf{t}(-\mathbf{i}) + n_2\mathbf{t}(-\mathbf{j}) + n_3\mathbf{t}(-\mathbf{k}) = 0. \quad (2.27)$$

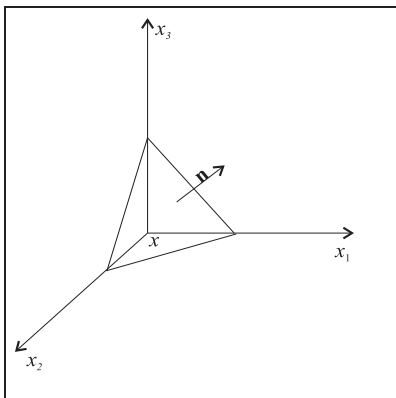


Figura 2.3: Tetraedro das tensões.

Esta igualdade é válida para componentes positivas de \mathbf{n} . Para alargar a sua validade a componentes negativas, note-se que, por continuidade, é válida se $n_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3$. Então, em particular,

$$\mathbf{t}(\mathbf{i}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{i}), \quad \mathbf{t}(\mathbf{j}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{j}), \quad \mathbf{t}(\mathbf{k}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{k}). \quad (2.28)$$

Aplicando o mesmo argumento aos restantes quadrantes e usando (2.28),

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{t}(\mathbf{i}) + n_2 \mathbf{t}(\mathbf{j}) + n_3 \mathbf{t}(\mathbf{k}), \quad (2.29)$$

donde se conclui que \mathbf{t} pode ser escrito como combinação linear das componentes de \mathbf{n} . \square

As componentes encontradas na demonstração do Lema anterior podem ser agrupadas num tensor que se denota por \mathbf{T} . É designado por tensor das tensões de Cauchy e é o que verdadeiramente caracteriza a especificidade de cada fluido. Substituindo \mathbf{t} por $\mathbf{T} \mathbf{n}$ em (2.24) e aplicando o Teorema 1.3.1,

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dv &= \int_V \rho \mathbf{f} dv + \int_{\partial V} \mathbf{T} \mathbf{n} \partial v \\ &= \int_V (\rho \mathbf{f} + \text{div } \mathbf{T}) dv. \end{aligned}$$

Como o volume V é arbitrário, pode-se afirmar que

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \text{div } \mathbf{T}. \quad (2.30)$$

A esta equação dá-se o nome de *equação do movimento*. Provou-se que o vector tensão pode ser escrito como combinação linear das componentes do

vector normal (2.25). Para além desta propriedade, também se pode afirmar que é um tensor simétrico, desde que exista conservação do momento angular. Em Física, o momento angular é definido por

$$\int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv.$$

Ou seja, é o produto vectorial entre o vector posição e o momento linear, por isso muitas vezes se fala do momento angular como sendo o momento do momento. Quando está em causa um sistema isolado (sistema em que não existem forças de superfície) ou pseudo-isolado (sistema em que a soma das forças de superfície é nula, isto é, quando o tensor das tensões é simétrico), existe conservação do momento angular.

Princípio 3 (da conservação do momento angular) *A taxa de variação do momento angular de um fluido ocupando o volume V é igual à soma dos momentos lineares das forças de volume e das forças de superfície que actuam nesse volume.*

Este princípio pode ser traduzido pela expressão

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dv + \int_{\partial V} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \partial v \quad (2.31)$$

Teorema 2.5.1 Se o princípio de conservação do momento angular (2.31) é válido, o tensor das tensões \mathbf{T} é simétrico.

Demonstração: Por (2.22),

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv = \int_V \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv = \int_V \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) dv.$$

Por (2.30),

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv = \int_V [\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T})] dv.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dv = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dv + \int_V \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{T} dv$$

Então, (2.31) é equivalente a

$$\int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dv + \int_V \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{T} dv = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dv + \int_{\partial V} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \partial v.$$

Ou seja,

$$\int_V \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv - \int_{\partial V} \mathbf{x} \times (\mathbf{T} \mathbf{n}) \, \partial v = \mathbf{0}.$$

Aplicando a Proposição 1.3.2,

$$\int_V \nabla \mathbf{x} \times \mathbf{T} \, dv = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

Como $\nabla \mathbf{x} = I$,

$$\int_V \mathbf{I} \times \mathbf{T} \, dv = \mathbf{0}.$$

Desenvolvendo este produto,

$$\int_V (T_{32} - T_{23}, -T_{31} + T_{13}, T_{21} - T_{12}) \, dv = \mathbf{0},$$

o que é equivalente a afirmar que

$$T_{32} = T_{23} \wedge T_{31} = T_{13} \wedge T_{21} = T_{12}.$$

Ou seja, \mathbf{T} é tensor simétrico. \square

Observação 2.5.1 *Pode-se mostrar que a recíproca do Teorema 2.5.1 também é válida, isto é, se \mathbf{T} é tensor simétrico, então (2.31) é válido.*

2.6 Lei Constitutiva

Nesta secção deduzem-se as equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos, conduzindo a uma adaptação do problema ao estudo em causa. O vector das tensões que descreve a acção de forças através da superfície do volume V tem a decomposição $\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}$, como foi visto em (2.25), onde $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, t)$ é o tensor das tensões e \mathbf{n} é o vector unitário normal à superfície. Ao relacionar \mathbf{T} com outras variáveis, definimos o tipo de fluido em estudo.

No caso geral, o objectivo é encontrar equações aplicáveis a fluidos com tensões tangenciais consideráveis. Para tal, estabelece-se um conjunto de condições que explicam como o fluido reage sob deformação. Estas equações irão incluir termos que representam as forças de atrito, nomeadamente a viscosidade, de forma a poderem representar certo tipo de situações reais. Define-se *fluido newtoniano* como sendo um fluido que satisfaz os seguintes

postulados, estabelecidos por Stokes:

- (1) \mathbf{T} é uma função contínua do tensor da taxa de deformação \mathbf{D} e é independente de outras quantidades cinemáticas;
- (2) \mathbf{T} não depende explicitamente da posição \mathbf{x} (*Homogeneidade espacial*);
- (3) Não há nenhuma direcção definida no espaço (*isotropia*);
- (4) Quando $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$.

A expressão que traduz (1) e (2) é

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{D}), \quad (2.33)$$

sendo \mathbf{f} função tensorial contínua. Pode-se traduzir a condição de isotropia através da seguinte expressão:

$$\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{f}(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}), \quad (2.34)$$

para todas as matrizes de transformação ortogonais \mathbf{S} . Esta igualdade afirma que, independentemente da orientação do fluido, uma dada deformação produz a mesma resposta intrínseca. Os postulados (1) a (4) conduzem à expressão geral para o tensor das tensões (Serrin [17, pp.231-233]),

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2, \quad (2.35)$$

onde α , β e γ são funções escalares dos invariantes principais de \mathbf{D} , isto é, $\alpha = \alpha(I, II, III)$, etc. Os invariantes principais podem ser definidos como coeficientes de λ na expansão do determinante $\mathbf{D}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}) = \lambda^3 - I\lambda^2 + II\lambda - III$. Em particular, $I = Tr(\mathbf{D}) = \text{div } \mathbf{u}$. Os valores principais d_1 , d_2 e d_3 de \mathbf{D} são as raízes da equação $D(\lambda) = 0$.

Teorema 2.6.1 Se aos postulados de (1) a (4) acrescentarmos a condição de que as componentes de \mathbf{T} sejam lineares nas componentes de \mathbf{D} , então a equação (2.35) reduz-se à forma

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{div } \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D},$$

onde λ e μ são constantes ou funções escalares.

Demonstração: Feistauer [7, pp.45-48]

λ e μ são, respectivamente, o primeiro e segundo coeficientes de viscosidade, também designados por coeficientes de viscosidade de Lamé. Note-se que se o fluido for incompressível, o primeiro coeficiente, λ , desaparece, uma vez que $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

A magnitude do tensor da taxa de deformação \mathbf{D} é relativamente pequena comparando, por exemplo, com algumas velocidades ou comprimentos de referência. Assim, é razoável admitir uma relação linear entre \mathbf{T} e \mathbf{D} . Não deixa de ser uma hipótese, válida se os resultados obtidos concordarem com as experiências. Esta hipótese conduz, aplicando (2.6.1), à equação constituinte clássica para fluidos incompressíveis, frequentemente designada por *Lei de Stokes*,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (2.36)$$

Utilizando esta lei e a equação (2.30), obtemos as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis,

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.38)$$

Aplicando (2.4),

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.39)$$

Sabe-se que para fluidos incompressíveis, a equação da continuidade (2.21) implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Isto traduz o facto de que a densidade é constante ao longo da trajectória do fluido. Assim, se o fluido for homogéneo, a densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, 0)$ é independente de \mathbf{x} e pode-se considerar $\rho = \text{const.} > 0$. Pode-se então dividir os termos da equação (2.39) por ρ para obter

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.40)$$

onde o coeficiente $\nu = \mu/\rho$ é designado por viscosidade cinemática.

Caso particular dos fluidos perfeitos: Um fluido perfeito é, por definição, um fluido em que o efeito das tensões tangenciais é tão pequeno que se pode desprezar em termos práticos. Isto significa que o fluido apenas sofre os efeitos da componente normal do vector das tensões.

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n}, \quad (2.41)$$

onde $p = p(x, t)$ é a pressão e é independente de \mathbf{n} , por comparação de (2.27) e de (2.41). Assim, $\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p$ e a equação (2.30) para fluidos perfeitos fica definida por

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (2.42)$$

2.7 Condições Iniciais e de Fronteira

Na Secção anterior obtiveram-se um conjunto de equações às derivadas parciais. Para obter soluções para estas equações, é necessário estabelecer condições iniciais e condições de fronteira. As condições iniciais traduzem a posição do sistema no instante $t = 0$. Nas condições de fronteira podem estar caracterizadas fronteiras laterais, de fundo, entre líquidos de diferentes densidades e viscosidades, ou de interface entre a superfície e a atmosfera. No estudo do escoamento dos fluidos averigua-se o que acontece no limite do volume de fluido em estudo. Quando a fronteira é sólida e impermeável, a condição clássica de aderência na fronteira² é

$$\mathbf{u} = 0, \quad (2.43)$$

condição proposta por Stokes em 1845. No entanto, por volta de 1879, experiências levadas a cabo por Maxwell (Serrin [17, pp.240-241]) provaram que esta condição não explica todo o fenómeno físico envolvente. A expressão (2.43) traduz a aderência do fluido à fronteira do domínio do escoamento e funciona apenas para fluidos com pressões moderadas e baixas tensões de superfície. As experiências comprovaram que apenas fluidos perfeitos, sem viscosidade, ou fluidos em velocidades muito elevadas, não aderem a paredes e corpos (Feistauer [7, pp.63]). Uma superfície livre, sem fronteiras ou em interface com outro fluido, é modelada como sendo livre de tensão, isto é,

$$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{em } \partial V,$$

onde $\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}$ é o vector das tensões e $\boldsymbol{\tau}$ é o vector tangente à fronteira ∂V . A condição de não-aderência na fronteira proposta por Navier (Serrin [17, p.240] e respectivas referências) é

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = k \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

sendo k uma função de valores negativos, mostrando que o deslizamento do fluido na fronteira tem direcção oposta à da força que a fronteira exerce no

²Do inglês *no-slip condition*.

fluido. Segundo Antontsev e Oliveira [2, p.3], uma das condições de fronteira mais importantes propostas nos últimos tempos é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.44)$$

e

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \beta^{-1} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.45)$$

onde \mathbf{n} é o vector unitário normal a ∂V . A impermeabilidade da fronteira é traduzida por (2.44) e o escoamento com resistência é traduzido por (2.45). Se $\beta^{-1} < 0$, significa que existe fricção e não aderência. Se $\beta^{-1} > 0$, significa que as fronteiras aceleram o movimento do fluido. Assim, se $\beta \rightarrow 0$, a expressão (2.45) representa condições de não-aderência na fronteira, e se $\beta \rightarrow \infty$, representa condições de aderência na fronteira. Esta condição de fronteira é hoje muito utilizada para o estudo do deslocamento de tornados.

Capítulo 3

Dinâmica dos Oceanos

Neste capítulo, é feita uma breve introdução onde são explicados os principais domínios de estudo e investigação da dinâmica dos oceanos, bem como alguns conceitos importantes para o seu estudo. São definidas escalas de movimento para as principais variáveis de interesse, de modo a poder estimar valores reais. É efectuado um estudo acerca da aceleração de Coriolis e do modo como afecta os escoamentos no planeta, para ser possível formular as equações do movimento num referencial em rotação. As equações de Navier-Stokes não têm soluções analíticas, pelo que se torna necessário efectuar aproximações a casos mais simples, que são feitas caracterizando escoamentos em situações onde os termos não lineares possam ser desprezados, encontrando soluções aproximadas. As referências mais importantes utilizadas neste capítulo foram Cushman-Roisin [6], Pedlosky [15] e Pond e Pickard [16].

3.1 Introdução

A dinâmica dos fluidos geofísicos estuda escoamentos que ocorrem na atmosfera e nos oceanos, mas apenas escoamentos em larga escala. A Hidrologia estuda os escoamentos que ocorrem em rios, a Oceanografia estuda, por exemplo, micro-turbulências nas camadas superficiais do oceano e a Meteorologia estuda, por exemplo, convexões em nuvens. A rotação da Terra e a estratificação dos oceanos e da atmosfera são as duas características essenciais que distinguem a dinâmica dos fluidos geofísicos de outras áreas da dinâmica dos fluidos. A rotação da Terra modifica os padrões de movimento do escoamento definidos pela mecânica dos fluidos. A estratificação vertical do oceano ou da atmosfera vai modificar a formulação das equações do movimento. Neste capítulo, serão estudados escoamentos que ocorrem apenas em oceanos. No

oceano, uma coluna de água pode ser aproximadamente dividida em quatro camadas (ver Figura 3.5). No topo, a primeira camada designa-se por *camada superficial* ou *camada mista*¹, ronda os dez metros de profundidade e a estratificação é quase inexistente. Por baixo desta, existe uma camada designada por *termoclina sazonal*, rondando os cem metros de profundidade. Nesta camada, a estratificação muda todos os anos devido ao arrefecimento no Inverno. Por baixo do limite máximo da convecção² de Inverno encontra-se a camada designada por *termoclina permanente*, que é permanentemente estratificada e está a uma profundidade entre os 500 e os 1000 metros. O resto da coluna de água, que inclui a maioria da água dos oceanos, é uma camada designada por *zona abissal*. A média da temperatura nesta camada é muito baixa e os movimentos das partículas são muito lentos. Estas duas

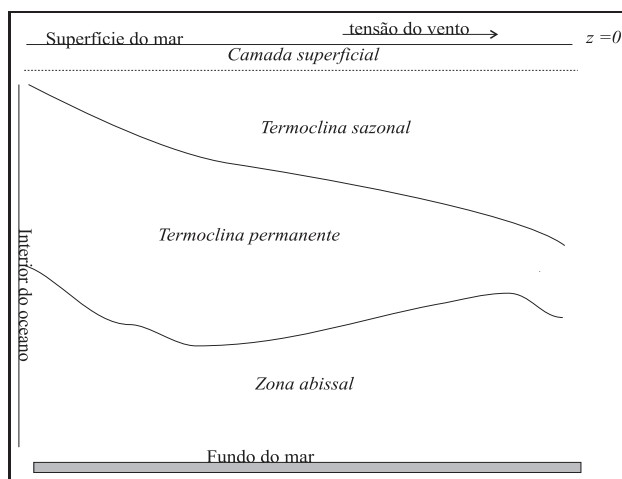


Figura 3.1: Estrutura vertical de uma coluna de água no oceano do ponto de vista da circulação em grande escala.

últimas camadas, quando consideradas juntas, formam o que se designa por *interior do oceano*. Existem movimentos em pequena escala nestas camadas provocados pelas flutuações de pressão das camadas superiores. Contudo, e numa primeira aproximação, estes movimentos podem ser desprezados.

3.2 Escalas de Movimento

No estudo das variáveis que afectam o movimento dos oceanos, a dinâmica dos fluidos geofísicos define, para estas variáveis, escalas de movimento, que

¹Do inglês *mixed layer*.

²Fenómeno físico observado num meio fluido onde há propagação de calor provocado pelas diferenças de densidade nesse fluido.

na maioria dos casos, são escalas para a velocidade, o tempo e o comprimento. Estas escalas são valores estimativos que representam os valores das variáveis consideradas. Os movimentos dos oceanos estendem-se por escalas muito diferentes, desde a microturbulência até aos movimentos em grande escala. São necessárias informações sobre os processos físicos para poder escolher a escala adequada. Por exemplo, se se escolher determinada escala para o tempo, está-se a condicionar os factores físicos intervenientes se o problema depender de condições atmosféricas. Assim, a tendência é para escolher variáveis relevantes para o estudo em causa. No caso particular dos oceanos, torna-se importante definir a que escalas a rotação da Terra é um factor importante para o movimento do fluido. Define-se a velocidade angular Ω como sendo a taxa de rotação da Terra,

$$\Omega = \frac{2\pi \text{ radianos}}{\text{tempo de uma rotação}}. \quad (3.1)$$

Se o movimento do fluido acontecer numa escala de tempo igual ou superior ao tempo de uma rotação, pode-se antecipar que esta rotação provocará alterações no movimento. Seja ω a razão entre o tempo de uma rotação e a escala de movimento para o tempo, T ,

$$\omega = \frac{2\pi/\Omega}{T} = \frac{2\pi}{\Omega T}.$$

Se $\omega \leq 1$, os efeitos da rotação devem ser considerados. Existe um segundo critério, mais usado e mais fiável, que resulta da consideração, não só dos efeitos da escala do tempo, como também dos efeitos da velocidade e da escala para o comprimento. Se uma partícula do fluido que viaja à velocidade U percorre a distância L num intervalo de tempo igual ou superior a um período de rotação, espera-se que a trajectória seja influenciada pela rotação ambiente. Define-se ε como sendo a razão entre o tempo de uma rotação e o tempo que uma partícula do fluido demora a percorrer a distância L à velocidade U ,

$$\varepsilon = \frac{2\pi/\Omega}{L/U} = \frac{2\pi U}{\Omega L}.$$

Se $\varepsilon \leq 1$, devem ser considerados os efeitos da rotação. Numa análise de escala, o parâmetro 2π pode ser omitido porque a sua importância é secundária. Obtém-se assim outro número de medida da importância da rotação, muito utilizado em dinâmica dos fluidos, o *número de Rossby*,

$$R_o = \frac{U}{2\Omega L}. \quad (3.2)$$

Para além das escalas mencionadas, para quantidades que podem ser afectadas pelos efeitos da rotação ambiente, é necessário definir também escalas de movimento para as quantidades que poderão ser alteradas pelos efeitos da estratificação do oceano. Conforme já foi referido, os problemas de dinâmica dos fluidos geofísicos envolvem movimentos de fluidos com um ou dois atributos, nomeadamente, a rotação e a estratificação. A rotação imprime no fluido uma certa rigidez vertical e um fluido estratificado, de densidade heterogénea, encontra-se disposto em camadas de densidades diferentes, devido à força gravítica, estando as densidades maiores por baixo das menores. Os parâmetros mais importantes são $\bar{\rho}$, densidade média das camadas em que se encontra dividido o fluido, $\Delta\rho$, taxa de variação da densidade destas camadas e H , altura na qual estas variações de densidade ocorrem. Uma perturbação típica no oceano é descrita como a elevação de um elemento do fluido, de densidade $\bar{\rho} + \Delta\rho$, acima da altura H e, como há conservação de volume, este movimento provoca a descida de outra partícula do fluido mais leve, de densidade $\bar{\rho}$. A mudança correspondente da energia potencial por unidade de volume é

$$(\bar{\rho} + \Delta\rho)gH - \bar{\rho}gH = \Delta\rho gH.$$

Num fluido com velocidade U , a energia cinética disponível por unidade de volume é

$$\frac{1}{2}\bar{\rho}U^2.$$

Constrói-se a razão

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\bar{\rho}U^2}{\Delta\rho gH}.$$

Se $\sigma \simeq 1$, é importante considerar os efeitos da estratificação, pois um aumento de energia potencial necessário à perturbação da estratificação consome uma porção significativa da energia cinética disponível, modificando o escoamento substancialmente. Estes efeitos também são importantes se $\sigma \ll 1$, pois significa que não há energia cinética suficiente para perturbar a estratificação.

Quando tanto a estratificação como a rotação são importantes e nenhuma é dominante, isto é, quando $\sigma \simeq 1$ e $R_o \simeq 1$, verificam-se as relações seguintes ao longo das várias escalas,

$$L \simeq \frac{U}{\Omega}, \tag{3.3}$$

$$U \simeq \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}gH},$$

e

$$T \simeq \frac{1}{\Omega}.$$

Substituindo a velocidade U em (3.3), obtém-se uma escala de comprimento fundamental,

$$L \simeq \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}gH}. \quad (3.4)$$

Num determinado fluido, de densidade média $\bar{\rho}$ e variação de densidade $\Delta\rho$, ocupando uma altura H num planeta com velocidade de rotação Ω e com força de gravidade g , a escala para o comprimento L , dada por (3.4), é a mais adequada a considerar, na qual os movimentos irão ocorrer. Na Terra, $\Omega \simeq 7,29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $g \simeq 9,81 \text{ m/s}^2$. De acordo com Cushman [6, p.10], os valores aproximados da densidade medidos no oceano são $\bar{\rho} \simeq 1028 \text{ Kg/m}^3$, $\Delta\rho \simeq 2 \text{ kg/m}^3$. Relativamente à velocidade, também de acordo com Cushman, no interior do oceano, longe de correntes e fronteiras, a velocidade típica é $U = 0,1 \text{ m s}^{-1}$. Por outro lado, tendo em conta que a profundidade média dos oceanos é 4000 m, é razoável considerar como escala para a altura de uma camada

$$H = 1000 \text{ m}.$$

(Ver também Pond e Pickard [16, p.54]). Assim, de acordo com (3.4), obtém-se a escala natural de comprimento

$$L \simeq 6 \times 10^4 \text{ m}.$$

Para o tempo, tendo em conta (3.3),

$$T \simeq \frac{1}{\Omega} \simeq 10^6 \text{ s} \simeq 10 \text{ dias},$$

o que corresponde a uma escala de tempo razoável para estudar a grande maioria dos fenómenos que ocorrem no interior do oceano. Consideram-se assim os valores para as escalas que constam da Tabela 3.1, que apesar de serem valores de referência, facilmente se reconhecem valores típicos para escoamentos no interior do oceano. No entanto, se surgirem dúvidas numa situação específica, pode-se sempre refazer a análise destas escalas.

Escala	Valor
Distância horizontal(L)	1000 Km = 10^6 m
Velocidade(U)	$0,1 \text{ ms}^{-1}$
Distância vertical(H)	1000 m
Tempo(T)	10 dias $\sim 10^6$ s

Tabela 3.1: Valores de referência para o oceano.

3.3 Aceleração de Coriolis

Do ponto de vista teórico, todas as equações que descrevem processos envolvendo fluidos geofísicos podem ser expressas em termos de sistemas referenciais inerciais, isto é, sistemas fixos em relação a estrelas distantes. Contudo, um observador na Terra vê os movimentos dos fluidos em relação ao sistema que roda com o nosso planeta. Para se perceber a influência da rotação no

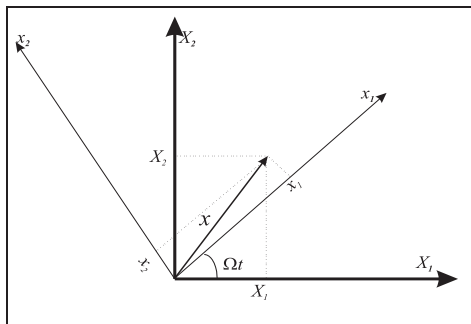


Figura 3.2: Referenciais fixo e rotativo.

movimento dos fluidos, considera-se em primeiro lugar o caso bidimensional. Sejam x_1 e x_2 os eixos do referencial em rotação, cujos vectores unitários são \mathbf{i} e \mathbf{j} , rodando com velocidade angular uniforme Ω (taxa de rotação da Terra). X_1 e X_2 são os eixos do referencial fixo, cujos vectores unitários são \mathbf{I} e \mathbf{J} (ver Figura 3.2). Em qualquer instante t , o sistema de eixos (x_1, x_2) em rotação faz um ângulo de amplitude Ωt com o sistema de eixos fixo (X_1, X_2) . Assim,

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} \cos \Omega t + \mathbf{J} \sin \Omega t, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{j} = -\mathbf{I} \sin \Omega t + \mathbf{J} \cos \Omega t. \quad (3.6)$$

As componentes do vector posição $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ou $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ em qualquer ponto do plano estão relacionadas por

$$x_1 = \cos \Omega t X_1 + \text{sen } \Omega t X_2, \quad (3.7)$$

$$x_2 = -\text{sen } \Omega t X_1 + \cos \Omega t X_2. \quad (3.8)$$

ou

$$X_1 = \cos \Omega t x_1 - \text{sen } \Omega t x_2, \quad (3.9)$$

$$X_2 = \text{sen } \Omega t x_1 + \cos \Omega t x_2. \quad (3.10)$$

Derivando (3.7) e (3.8) em ordem ao tempo, obtém-se

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dX_1}{dt} \cos \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \text{sen } \Omega t - \Omega X_1 \text{sen } \Omega t + \Omega X_2 \cos \Omega t, \quad (3.11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dX_1}{dt} \text{sen } \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \cos \Omega t - \Omega X_1 \cos \Omega t + \Omega X_2 \text{sen } \Omega t. \quad (3.12)$$

As quantidades expressas por (3.11) e (3.12) dão as taxas de variação das coordenadas relativamente ao referencial em movimento à medida que o tempo evolui. Assim, as componentes da velocidade relativa são

$$\mathbf{u} = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{j} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}. \quad (3.13)$$

Da mesma forma, $\frac{dX_1}{dt}$ e $\frac{dX_2}{dt}$ dão as taxas de variação das coordenadas absolutas e são as componentes da velocidade absoluta

$$\mathbf{U} = \frac{dX_1}{dt} \mathbf{I} + \frac{dX_2}{dt} \mathbf{J} = U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j}. \quad (3.14)$$

Na proposição seguinte, mostra-se que a velocidade absoluta é igual à velocidade relativa mais a velocidade devida à rotação do sistema referencial.

Proposição 3.3.1 *Sejam (U_1, U_2) as componentes da velocidade absoluta, \mathbf{U} e (u_1, u_2) as componentes da velocidade relativa, \mathbf{u} , no sistema referencial em rotação (x_1, x_2) e Ω a velocidade angular do sistema referencial (x_1, x_2) em relação a (X_1, X_2) . Nestas condições, verificam-se as igualdades seguintes:*

$$U_1 = u_1 - \Omega x_2, \quad (3.15)$$

$$U_2 = u_2 + \Omega x_1. \quad (3.16)$$

Demonstração: Tendo em conta (3.5)-(3.6) e substituindo em (3.14), obtêm-se as componentes da velocidade absoluta

$$U_1 = \frac{dX_1}{dt} \cos \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \sin \Omega t, \quad (3.17)$$

$$U_2 = -\frac{dX_1}{dt} \sin \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \cos \Omega t. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17)-(3.18) em (3.11),

$$U_1 = \frac{dx_1}{dt} + \Omega(X_1 \sin \Omega t - X_2 \cos \Omega t), \quad (3.19)$$

$$U_2 = \frac{dx_2}{dt} - \Omega(X_1 \cos \Omega t + X_2 \sin \Omega t). \quad (3.20)$$

Aplicando (3.7) e (3.13) a (3.19), obtém-se (3.15). Aplicando (3.8) e (3.13) a (3.20), obtém-se (3.16). \square

Procede-se de forma análoga para obter a expressão para a aceleração relativa,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \mathbf{j} = \frac{du_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{du_2}{dt} \mathbf{j} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}, \quad (3.21)$$

e para a aceleração absoluta,

$$\mathbf{A} = \frac{d^2 X_1}{dt^2} \mathbf{I} + \frac{d^2 X_2}{dt^2} \mathbf{J} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j}. \quad (3.22)$$

Na proposição seguinte, estabelece-se a relação entre a aceleração absoluta e a aceleração relativa.

Proposição 3.3.2 *Sejam (A_1, A_2) as componentes da aceleração absoluta, \mathbf{A} e (a_1, a_2) as componentes da aceleração relativa, \mathbf{a} , no sistema referencial em rotação (x_1, x_2) e Ω a velocidade angular do sistema de coordenadas (x_1, x_2) em relação a (X_1, X_2) . Nestas condições, verificam-se as igualdades seguintes:*

$$A_1 = a_1 - 2\Omega u_2 - \Omega^2 x_1, \quad (3.23)$$

$$A_2 = a_2 + 2\Omega u_1 - \Omega^2 x_2. \quad (3.24)$$

Demonstração: A expressão (3.22) no referencial em rotação é, por (3.5)-(3.6),

$$\mathbf{A} = \frac{d^2 X_1}{dt^2} (\cos \Omega t \mathbf{i} - \sin \Omega t \mathbf{j}) + \frac{d^2 X_2}{dt^2} (\sin \Omega t \mathbf{i} + \cos \Omega t \mathbf{j}),$$

ou seja, as componentes da aceleração absoluta, no referencial em rotação, são

$$A_1 = \frac{d^2 X_1}{dt^2} \cos \Omega t + \frac{d^2 X_2}{dt^2} \operatorname{sen} \Omega t, \quad (3.25)$$

$$A_2 = -\frac{d^2 X_1}{dt^2} \operatorname{sen} \Omega t + \frac{d^2 X_2}{dt^2} \cos \Omega t. \quad (3.26)$$

Derivando (3.11) em ordem ao tempo, obtém-se a componente em x_1 para a aceleração relativa:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d^2 X_1}{dt^2} \cos \Omega t + \frac{d^2 X_2}{dt^2} \operatorname{sen} \Omega t \\ &\quad + 2\Omega \left(-\frac{dX_1}{dt} \operatorname{sen} \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \cos \Omega t \right) \\ &\quad - \Omega^2 (X_1 \cos \Omega t + X_2 \operatorname{sen} \Omega t). \end{aligned}$$

Por aplicação de (3.7), (3.17) e (3.25),

$$a_1 = A_1 + 2\Omega U_2 - \Omega^2 x_1.$$

Por (3.16),

$$a_1 = A_1 + 2\Omega(u_2 + \Omega x_1) - \Omega^2 x_1.$$

Resolvendo em ordem a A_1 , obtém-se (3.23). Procedendo de modo análogo para a outra coordenada, deriva-se (3.12) em ordem ao tempo,

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{d^2 X_1}{dt^2} \operatorname{sen} \Omega t + \frac{d^2 X_2}{dt^2} \cos \Omega t \\ &\quad - 2\Omega \left(\frac{dX_1}{dt} \cos \Omega t + \frac{dX_2}{dt} \operatorname{sen} \Omega t \right) \\ &\quad - \Omega^2 (-X_1 \operatorname{sen} \Omega t + X_2 \cos \Omega t). \end{aligned}$$

Por aplicação de (3.8), (3.18) e (3.26),

$$a_2 = A_2 - 2\Omega U_1 - \Omega^2 x_2.$$

Por (3.15),

$$a_2 = A_2 - 2\Omega(u_1 - \Omega x_2) - \Omega^2 x_2.$$

Resolvendo em ordem a A_2 , obtém-se (3.24). \square

Considere-se agora um referencial tridimensional, onde o eixo \mathbf{x}_3 coincide com o eixo \mathbf{X}_3 , tem a direcção perpendicular ao plano formado pelos eixos (x_1, x_2) ou (X_1, X_2) e sentido de baixo para cima. No caso da Terra, e para numa primeira fase simplificar os cálculos, considera-se a origem deste referencial num dos polos de modo que o eixo de rotação alinhe com o eixo de rotação da Terra. Tendo em conta que nos situamos no Hemisfério Norte, considera-se a origem do referencial no Polo Norte. Neste caso, a rotação da Terra é no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para o Polo Sul procede-se de forma análoga, sendo o sentido a considerar o dos ponteiros do relógio. Neste referencial cada vector posição é definido por

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k},$$

e

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{I} + X_2 \mathbf{J} + X_3 \mathbf{K}.$$

Assim, é possível definir o vector rotação da Terra como

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega) \equiv \Omega \mathbf{x}_3 \equiv \Omega \mathbf{X}_3. \quad (3.27)$$

Este vector tem a direcção do eixo de rotação, sentido de Sul para Norte e o mesmo valor da velocidade angular. Observando que $x_3 = X_3$ implica que $u_3 = U_3$, as expressões (3.15)-(3.16) e (3.23)-(3.24) podem ser escritas na forma vectorial, ou seja,

$$\mathbf{U} = (u_1 - \Omega x_2, u_2 + \Omega x_1, U_3) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}, \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (a_1 - 2\Omega u_2 - \Omega^2 x_1, a_2 + 2\Omega u_1 - \Omega^2 x_2, A_3) \\ &= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Através desta igualdade percebe-se que a diferença entre aceleração absoluta e relativa consiste em duas quantidades: a primeira, proporcional a Ω e à velocidade, designa-se por *aceleração de Coriolis*; a segunda, proporcional a Ω e às coordenadas, designa-se por *aceleração centrífuga*. A expressão para a aceleração centrífuga pode ser escrita de um modo mais simples, por aplicação da proposição que se segue.

Proposição 3.3.3 *Sejam $\boldsymbol{\Omega}$ o vector rotação, \mathbf{x} o vector posição e \mathbf{R} o vector perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$ e com a extremidade coincidente com a de \mathbf{x} (ver Figura 3.3). Nestas condições,*

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = -\Omega^2 \mathbf{R}.$$

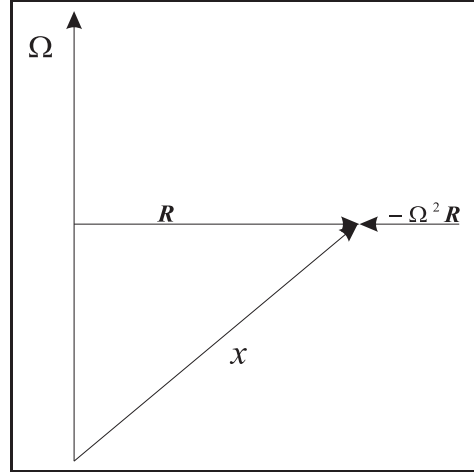


Figura 3.3: Aceleração centrífuga.

Demonstração: Na Figura 3.3, podem ver-se os vectores Ω , vector rotação, \mathbf{x} , vector posição, e o vector $-\Omega^2\mathbf{R}$, que representa a força centrífuga. \mathbf{R} é o vector perpendicular ao eixo de rotação que representa a distância do eixo de rotação ao ponto onde se encontra o elemento do fluido. Observe-se que $\Omega \cdot \mathbf{R} = 0$ e que $\Omega \times \mathbf{x} = \Omega \times \mathbf{R}$. Usando a Proposição 1.3.1, com $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \Omega$ e $\mathbf{C} = \mathbf{R}$,

$$\Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) = (\Omega \cdot \mathbf{R})\Omega - (\Omega \cdot \Omega)\mathbf{R} = -\Omega^2\mathbf{R}. \quad \square$$

Atendendo a (3.29) e à Proposição 3.3.3, a aceleração absoluta pode então ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2\Omega \times \mathbf{u} - \Omega^2\mathbf{R}. \quad (3.30)$$

3.4 Movimento num Referencial em Rotação

Os efeitos causados no movimento dos fluidos devido à rotação da Terra irão afectar a formulação da equação do movimento, estabelecida em (2.40). Ao considerar um referencial em rotação, o termo relativo à aceleração sofre as alterações descritas na secção anterior, traduzidas pela expressão (3.30). Assim, a equação (2.40) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} - \Omega^2\mathbf{R} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}. \quad (3.31)$$

Ao contrário da aceleração de Coriolis, que é proporcional à velocidade, a aceleração centrífuga depende exclusivamente da taxa de rotação e da distância da partícula do fluido ao eixo de rotação. Mesmo em repouso, no que diz respeito ao planeta em rotação, as partículas são afectadas por uma força que puxa para fora. No entanto, nenhum corpo do planeta voa em direcção ao espaço por estar sujeito à força gravítica, que, na ausência de rotação, mantém a matéria junta para formar um corpo esférico (as matérias mais densas no centro e as mais leves na periferia). A força imprimida pela aceleração centrífuga distorce esta forma esférica e o planeta assume uma forma ligeiramente achatada. O grau de achatamento é precisamente o necessário para manter o planeta em equilíbrio com a sua taxa de rotação. Estes termos da aceleração quando colocados no segundo membro da equação (3.31), podem ser considerados como forças. A força centrífuga actua como uma força exterior e a força de Coriolis depende da direcção e do valor da velocidade relativa. Por natureza, a força centrífuga aponta para fora da superfície terrestre, perpendicularmente ao eixo de rotação, enquanto que a força gravítica aponta em direcção ao centro da Terra. A força resultante assume uma direcção intermédia, que é exactamente a direcção da vertical local. De facto, nestas condições, nenhuma partícula voará para fora da Terra, ou seja, qualquer partícula permanece em repouso até ser sujeita a alguma força adicional. O achatamento da Terra é importante para neutralizar a força centrífuga. Apesar de ser uma distorção pequena, a gravidade é muito maior do que a força centrífuga. Por isso, é possível considerar a força gravítica aproximadamente igual à resultante das duas forças, a força centrífuga e a verdadeira força de gravidade. Assim, considera-se na equação (3.31) apenas o termo relativo à aceleração de Coriolis,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (3.32)$$

O referencial tridimensional considerado na Secção 3.3 tinha o eixo de rotação alinhado com o eixo de rotação da Terra e origem no Polo Norte. Mas, no caso geral, considera-se um referencial com origem numa latitude arbitrária no Hemisfério Norte. No caso do Hemisfério Sul, procede-se de forma análoga. Os problemas que envolvem escoamentos geofísicos em escala planetária devem ser resolvidos usando coordenadas esféricas. No entanto, se as escalas de comprimento horizontais forem mais pequenas do que o raio da Terra (6371 km), então a curvatura da Terra pode ser desprezada. Neste caso, o movimento pode ser estudado adoptando um sistema referencial cartesiano local num plano tangente, onde se toma por referencial $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, com o eixo \mathbf{x}_1 a apontar para Este, o eixo \mathbf{x}_2 para Norte e o eixo \mathbf{x}_3 perpendicular ao plano tangente. Na Figura 3.4 está esquematizada a projecção sobre o plano $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$

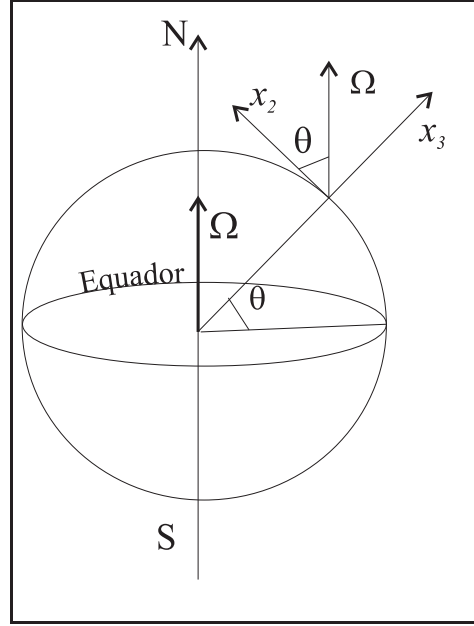


Figura 3.4: Sistema referencial na Terra.

desta situação, sendo \mathbf{x}_1 perpendicular ao plano da folha. Neste referencial, o vector rotação é definido por

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta),$$

e conseqüentemente a aceleração de Coriolis é dada por

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = (2\Omega \cos \theta u_3 - 2\Omega \sin \theta u_2, 2\Omega \sin \theta u_1, -2\Omega \cos \theta u_1). \quad (3.33)$$

Observe-se que no caso da origem do referencial estar situada no Pólo Norte, $\theta = \pi/2$ implica que $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, o que torna a expressão (3.33) válida também para o caso anterior. Para simplificar a escrita, considerem-se

$$f = 2\Omega \sin \theta \quad e \quad f^* = 2\Omega \cos \theta.$$

O coeficiente f é designado por *vorticidade planetária* ou, mais frequentemente, por *parâmetro de Coriolis*. f^* é habitualmente designado por *parâmetro de Coriolis recíproco*. Escrevendo as projecções da equação (3.32) nos três eixos, com a aceleração de Coriolis dada por (3.33), obtêm-se assim as equações do movimento num referencial em rotação,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 + f^* u_3 - f u_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta u_1, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 + f u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \Delta u_2, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_3 - f^* u_1 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \Delta u_3. \quad (3.36)$$

As equações (3.34)-(3.36) vão ter expressões diferentes em função da latitude θ em que seja efectuado o estudo. Nos polos,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = 2\Omega \wedge f^* = 0.$$

No equador,

$$f = 0 \wedge f^* = 2\Omega.$$

No Hemisfério Norte,

$$f > 0,$$

e no Hemisfério Sul,

$$f < 0.$$

Por outro lado,

$$f^* > 0$$

em ambos os hemisférios.

3.5 Aproximação Geostrófica

As equações (3.34)-(3.36) são extremamente difíceis de resolver e para os casos mais complexos, torna-se muito complicado de provar a existência de solução. Para ser possível trabalhar nalgumas situações, é necessário analisar os termos destas equações, estimando a sua grandeza e conseqüente importância para o estudo em questão. É possível inicialmente desprezar alguns termos e ainda restarem equações que retratam uma realidade física no oceano e descrever aproximadamente movimentos reais. Para poder comparar a importância de cada um dos termos, determinam-se escalas para cada um deles, conforme foi visto na Secção 3.2. Obviamente, os valores das escalas variam para cada aplicação. No entanto, as conclusões tiradas a partir destes valores são, na grande maioria dos casos, conclusões válidas. Se existirem dúvidas numa situação específica, a análise das escalas pode ser reformulada. Uma vez que as dimensões x_1 e x_2 não diferem muito, pode ser usada a mesma escala de comprimento, L , e para ambas as componentes da velocidade horizontal, pelo mesmo motivo, usa-se a mesma escala, U . Quanto

à direcção vertical, x_3 , esta vai diferir das outras duas direcções. Como já foi observado na Secção 3.1, devido à estratificação, os escoamentos de fluidos geofísicos ocorrem normalmente em domínios onde o comprimento e largura são muito maiores do que a profundidade. No mar, as correntes estendem-se por centenas de metros e a coluna de água terá, em média, dezenas de metros de profundidade. Então, para movimentos em grande escala,

$$H \ll L,$$

sendo H a escala considerada para a profundidade da camada de água. Esta aproximação é habitualmente designada na literatura específica por aproximação *shallow-water*, ou, mais raramente, por aproximação de Saint-Venant. Este facto pode ser confirmado recorrendo a valores concretos. Considere-se o interior do oceano, descrito na Secção 3.1, afastado das principais correntes marítimas, da superfície, onde a tensão devida ao vento é importante, e da costa ou do fundo, que formam fronteiras onde o fluido se comporta de forma diferente. Tendo em conta os valores definidos na Secção 3.2, é possível usar a equação da continuidade (2.21) para estimar um valor para a escala da velocidade vertical, U_3 ,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

Em termos de escalas,

$$\frac{U_3}{H} \simeq \frac{U}{L} \Leftrightarrow U_3 \simeq \frac{UH}{L} \simeq \frac{10^{-1} \times 10^3}{10^6} \simeq 10^{-4} \text{ ms}^{-1}.$$

Estas escalas sugerem que U_3/U é directamente proporcional a H/L , ou seja, que

$$U_3 \ll U. \quad (3.37)$$

Esta afirmação tem todo o sentido, tendo em conta que a profundidade média das camadas de fluido consideradas é relativamente pequena em comparação com a área pela qual se estende o movimento. Para além disso, as velocidades verticais são muito mais pequenas do que as horizontais. Por outras palavras, os escoamentos geofísicos em larga escala acontecem em camadas de água ($H \ll L$) de profundidade reduzida e são quase bi-dimensionais ($U_3 \ll U$). Em termos de escalas,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + f^* u_3 - f u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta u_1$$

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U_3 U}{H} \quad \Omega U_3 \quad \Omega U \quad \frac{P}{\rho L} \quad \frac{2\nu U}{L^2} + \frac{\nu U}{H^2}$$

Por (3.37), é óbvio que o quinto termo (ΩU_3) é de ordem muito menor do que o sexto termo (ΩU), e pode ser desprezado. Convém salientar que perto do equador, onde f^* atinge o seu máximo e f tende para zero, uma reavaliação das escalas pode ser necessária. Em relação à equação (3.35), para já não há aproximações relevantes a realizar. No entanto, algumas aproximações são possíveis ao fazer o escalonamento da projecção no eixo x_3 da equação (3.36),

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + f^* u_1 - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \Delta u_3$$

$$\frac{U_3}{T} \quad \frac{U U_3}{T} \quad \frac{U U_3}{T} \quad \frac{U_3^2}{H} \quad \Omega U \quad g \quad \frac{P}{\rho H} \quad \frac{2\nu U_3}{L^2} + \frac{\nu U_3}{H^2}$$

O primeiro termo (U_3/T) não pode exceder ΩU_3 , que por sua vez é muito menor do que ΩU , por (3.37). Os três termos seguintes também são muito menores do que ΩU . Assim, os primeiros quatro termos podem ser todos desprezados em comparação com o quinto termo. Mas este termo também é muito pequeno quando comparado com os dois primeiros termos do segundo membro da equação e, por isso, também desprezável. Esta aproximação é designada frequentemente na literatura por aproximação hidrostática. Como já foi visto, as velocidades verticais são muito pequenas quando comparadas com as horizontais e por isso também se pode considerar

$$\Delta u_3 \simeq 0.$$

Posto isto, é possível considerar outra formulação para as equações (3.34)-(3.36),

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - f u_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta u_1, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + f u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \Delta u_2, \quad (3.39)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g. \quad (3.40)$$

Usando as mesmas escalas de valores referidas na Secção 3.2, e considerando uma latitude de $\theta = 45^\circ$, o parâmetro de Coriolis toma o valor de $f = 2\Omega \sin 45^\circ \simeq 2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 0,71 \simeq 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. O valor de μ é tabelado por $10^{-3} \text{ Kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, o valor de ρ por $1028 \simeq 10^3 \text{ Kg m}^{-3}$ (Gill [8, p.75]) e conseqüentemente, $\nu \simeq 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$. Assim, os termos das equações (3.38)-(3.40) podem ser aproximados por valores concretos,

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial u_1}{\partial t} & u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & -f u_2 & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} & \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} & \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} & \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \\ 10^{-7} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-5} & ? & 10^{-19} & 10^{-19} & 10^{-10}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial u_2}{\partial t} & u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & f u_1 & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} & \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} & \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} & \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \\ 10^{-7} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-5} & ? & 10^{-19} & 10^{-19} & 10^{-10}, \end{array}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad g,$$

$$? \quad 10.$$

Os termos relativos à pressão são representados por pontos de interrogação por não haver medições directas. Contudo, estes deverão ser da mesma ordem de grandeza do termo relativo ao parâmetro de Coriolis, nas equações planares (3.38) e (3.39), e da mesma ordem de grandeza da força gravítica na equação vertical (3.40), para permitir equilíbrio nos membros da equação. Estas equações podem ser alvo de simplificações maiores se forem considerados escoamentos geostróficos e homogêneos. Nestes fluidos, a aceleração de Coriolis é dominante em relação aos outros termos de aceleração, fazendo com que o número de Rossby seja pequeno. Os escoamentos em grande escala na camada permanente e na zona abissal são lentos e quase estáveis. As escalas

de tempo são longas, o que permite desprezar todas as derivadas em ordem ao tempo. Os movimentos são predominantemente horizontais, pelo que a velocidade vertical, u_3 , é nula. Dos restantes termos das equações (3.38) e (3.39), os termos relativos à aceleração, $\partial u_1/\partial t$ e $\partial u_2/\partial t$ são os de maior ordem de grandeza, mas é apenas aproximadamente 1% do valor do termo de Coriolis (fu_1 ou fu_2), para escalas de tempo de dez dias, e é ainda menor para escalas de tempo maiores. Assim, as equações (3.38)-(3.40) podem ser simplificadas, com um grau de exactidão de 1%,

$$-fu_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (3.41)$$

$$fu_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (3.42)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (3.43)$$

As equações (3.41) e (3.42) são designadas por *aproximações geostróficas* e a equação (3.43) é designada por *aproximação hidrostática* (Crépon [5,p.12]) e juntas retratam o equilíbrio geostrófico. Estas equações descrevem as relações entre a distribuição da pressão horizontal e as componentes da velocidade no oceano, e entre a distribuição da pressão como função da profundidade e a distribuição da densidade. Deste modo estas equações, em conjunto com a equação de conservação da massa (2.21), são uma boa aproximação para descrever escoamentos no interior do oceano.

3.6 Escoamentos Quase-Geostróficos

Os escoamentos geostróficos consideram apenas o efeito da rotação nos fluidos, partindo do pressuposto que se está a lidar com fluidos de densidade constante. Mas os fluidos presentes nos oceanos têm densidade variável (ver Figura 3.5), por isso é necessária uma abordagem diferente. Nesta secção, consideram-se movimentos quase-geostróficos, no caso de fluidos continuamente estratificados, e voltam a considerar-se os efeitos da viscosidade. Os efeitos da rotação tornam-se importantes quando o número de Rossby é inferior ou igual à unidade. Quanto mais pequeno, maiores os efeitos da rotação e maior é a força de Coriolis em comparação com as restantes forças. De facto, a maioria dos movimentos da atmosfera e do oceano são caracterizados por números de Rossby suficientemente abaixo da unidade

$$0,01 \lesssim R_o \lesssim 0,2.$$

Por isso, numa primeira aproximação, considera-se a força de Coriolis dominante. Esta aproximação conduz ao equilíbrio geostrófico (ver Secção 3.5), onde existe equilíbrio entre a força de Coriolis e o gradiente da pressão - equações (3.41) e (??). Neste caso, a análise foi restringida a fluidos homogêneos. O facto do número de Rossby ser pequeno pode ser justificado por uma das seguintes formas: ou as velocidades são relativamente pequenas (U pequeno), ou o padrão do escoamento é horizontalmente extenso (L grande), de acordo com (3.2). Considerando U pequeno, é possível deduzir equações que retratam a maioria dos escoamentos no interior do oceano. Na maioria dos fluidos geofísicos a densidade varia muito pouco em torno de um valor médio, pelo que é possível simplificar as equações do movimento, assumindo que as variações da densidade são pequenas. Esta aproximação é habitualmente designada por aproximação de Boussinesq. De referir que a aproximação de Boussinesq está muito associada a problemas de convecção térmica, onde as variações de densidade são causadas unicamente por variações da temperatura. Para esses problemas, os efeitos de compressibilidade são muito pequenos e, por isso, é possível assumir que a densidade é constante, excepto na força de volume (neste caso, a gravidade). A vantagem desta aproximação deve-se ao facto de considerar para densidade do fluido a média entre duas densidades diferentes. Assim, em cada camada o valor da densidade do fluido, ρ , não se afasta muito do valor da densidade média, $\bar{\rho}$. Em termos de sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , escreve-se

$$\rho = \bar{\rho}(x_3) + \rho'(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.44)$$

com $|\rho'| \ll |\bar{\rho}|$. Da mesma forma, para a pressão,

$$p = \bar{p}(x_3) + p'(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.45)$$

com $|p'| \ll |p|$. Este formalismo não considera nem a origem nem a manutenção desta estratificação, mas apenas o comportamento dos movimentos que o perturbam, ainda que em pequena escala. Recorde-se que o equilíbrio geostrófico implica a ausência de velocidade vertical. No caso de um fluido estratificado, este facto leva a que não existam deslocamentos verticais das superfícies de densidade, o que por sua vez implica que não ocorram distúrbios de pressão. Assim sendo, no caso dos escoamentos quase-geostróficos, a dinâmica é alterada e os termos que foram desprezados em (3.41)-(3.43) trazem correcções às equações que, embora pequenas, são essenciais. Para alguns fenómenos é necessário considerar alterações relativamente pequenas na latitude mas que provocam grandes alterações no parâmetro de Coriolis, o suficiente para serem significativas em termos da dinâmica do escoamento. Se a coordenada x_2 estiver orientada para Norte (conforme Figura 3.4) e for medida a partir

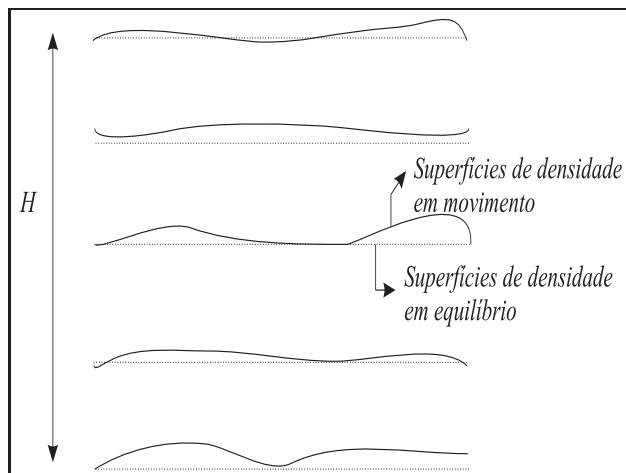


Figura 3.5: Exemplo de um fluido estratificado sob movimentos suaves, descritos como dinâmica quase-geostrófica.

de um referencial numa latitude média θ_0 , então, para amplitudes próximas de θ_0 , é válida a aproximação

$$\theta = \theta_0 + \frac{x_2}{a}, \quad (3.46)$$

onde a é o raio da Terra, $a \simeq 6371$ Km. Neste sentido, admitindo que x_2/a é um pequeno deslocamento, o parâmetro de Coriolis, $f(\theta) = 2\Omega \sin \theta$, pode ser desenvolvido em série de Taylor em torno de θ_0 . Tendo em conta (3.46),

$$f = 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega \cos \theta_0 \frac{x_2}{a} - \Omega \sin \theta_0 \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \dots \quad (3.47)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos, pode-se escrever

$$f = f_0 + \beta_0 x_2, \quad (3.48)$$

sendo

$$f_0 = 2\Omega \sin \theta_0, \quad (3.49)$$

o parâmetro de Coriolis e

$$\beta_0 = \frac{2\Omega}{a} \cos \theta_0, \quad (3.50)$$

é designado por *parâmetro beta*. Quando o fenómeno em estudo acontece ao longo de escalas de tempo na ordem de semanas, ou com escalas de comprimento de milhares de quilómetros, as variações no parâmetro θ são importantes, e o modelo utilizado para estes casos designa-se por *plano- β* . Quando

estas alterações não são significativas, o parâmetro de Coriolis, f , é assumido como constante, e o modelo utilizado designa-se por *plano- f* . A representação no plano- β é válida a latitudes médias apenas se o termo $\beta_0 x_2$ for pequeno comparado com o termo f_0 . Substituindo a coordenada x_2 pela sua escala representativa, L , pode-se afirmar que a representação no plano- β é válida se

$$\beta = \frac{\beta_0 L}{f_0} \ll 1. \quad (3.51)$$

Tendo em conta (3.49)-(3.51), pode-se escrever

$$\beta = \cotg \theta_0 \frac{L}{a}.$$

A latitudes médias $\cotg \theta_0 \simeq 1$, pelo que, nesse caso, β expressa a razão entre a extensão horizontal do escoamento e o raio da Terra. Por este motivo, é habitual designar β por *número planetário*. Na aproximação ao *plano- β* , as equações (3.38)-(3.40), tendo em conta (3.45) e (3.48), podem ser escritas como

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - (f_0 + \beta_0 x_2) u_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (f_0 + \beta_0 x_2) u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \quad (3.53)$$

$$g = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x_3}, \quad (3.54)$$

com $\rho \equiv \rho_0$ constante.³ Nas duas primeiras equações foram desprezados os termos relativos à fricção horizontal, por serem de ordem $\nu U/L^2$ e, por isso, muito menores do que o termo relativo à fricção vertical, que é da ordem de $\nu U/H^2$, conforme foi visto na Secção 3.5. Aplicando (3.44) na equação da continuidade (2.20), obtém-se

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho'}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \rho'}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3} = 0. \quad (3.55)$$

Tendo em conta que $|\rho'|$ é muito menor do que $|\bar{\rho}|$, o termo $u_3 \partial \rho' / \partial x_3$ é desprezável. Observe-se também que

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3} = \frac{d \bar{\rho}}{d x_3},$$

³Por uma questão de simplificação de escrita, e para não introduzir outra notação, considera-se que ρ representa a densidade constante ρ_0 .

pelo que a equação (3.55) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho'}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_2} + u_3 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0. \quad (3.56)$$

Resolvendo as equações (3.41) e (3.42) em ordem às componentes da velocidade e substituindo os valores obtidos em (3.52) e (3.53), obtém-se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2^2} - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \\ & - \frac{1}{\rho f_0} u_3 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial x_3} - f_0 u_2 - \frac{\beta_0}{\rho f_0} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{\nu}{\rho f_0} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_2 \partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} \right) \\ & - \frac{1}{\rho f_0} u_3 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial x_3} - f_0 u_1 - \frac{\beta_0}{\rho f_0} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_2} - \frac{\nu}{\rho f_0} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_1 \partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para permitir simplificar a escrita, os termos entre parêntesis serão doravante substituídos pela notação

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial b}{\partial x_2} - \frac{\partial a}{\partial x_2} \frac{\partial b}{\partial x_1}. \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^2} J\left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{\rho f_0} u_3 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial x_3} \\ & - f_0 u_2 - \frac{\beta_0}{\rho f_0} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{\nu}{\rho f_0} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_2 \partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^2} J\left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{1}{\rho f_0} u_3 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial x_3} \\ & - f_0 u_1 - \frac{\beta_0}{\rho f_0} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_2} - \frac{\nu}{\rho f_0} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_1 \partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

O símbolo $J(,)$ é habitualmente designado por operador Jacobiano. Partindo de (3.57) e (3.58), podem-se encontrar expressões mais completas para as componentes horizontais da velocidade do que as obtidas em (3.41) e (3.42). O escoamento é compressível, mas com variações muito pequenas de volume,

pelo que $\text{div } \mathbf{u}$ é um valor muito pequeno. Tendo em conta este facto e as equações (3.41) e (3.42), o termo $\partial u_3 / \partial x_3$ é muito pequeno e pode-se dizer que a velocidade vertical não é nula, mas sim muito pequena e o termo responsável pela advecção, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, que contém a velocidade vertical, corrige as equações. Deste modo, desprezando os termos em u_3 nas equações (3.57) e (3.58), usando a notação definida em (3.59), e resolvendo-as em ordem às componentes horizontais da velocidade, obtém-se

$$u_1 = -\frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_2} - \frac{1}{\rho f_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^3} J \left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_1} \right) + \frac{\beta_0}{\rho f_0^2} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_2} + \frac{\nu}{\rho f_0^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_1 \partial x_3^2}, \quad (3.62)$$

$$u_2 = \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho f_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^3} J \left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_2} \right) - \frac{\beta_0}{\rho f_0^2} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \frac{\nu}{\rho f_0^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_2 \partial x_3^2}. \quad (3.63)$$

$$u_1 = -\frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_2} - \frac{1}{\rho f_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^3} J \left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_1} \right) + \frac{\beta_0}{\rho f_0^2} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_2} + \frac{\nu}{\rho f_0^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_1 \partial x_3^2} \quad (3.64)$$

$$u_2 = \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho f_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{\rho^2 f_0^3} J \left(p', \frac{\partial p'}{\partial x_2} \right) - \frac{\beta_0}{\rho f_0^2} x_2 \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \frac{\nu}{\rho f_0^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial x_2 \partial x_3^2} \quad (3.65)$$

Estas equações, ao contrário das equações que expressam o equilíbrio geostrófico, contêm uma série de primeiras correcções que resultam da quase-geostrofia. Substituindo estas expressões na condição de incompressibilidade (2.21), determinando as derivadas e simplificando as expressões resultantes, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = & \frac{1}{\rho f_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{1}{\rho^2 f_0^3} \left[\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_2^2} \right) \right] \\ & + \frac{\beta_0}{\rho f_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \frac{\nu}{\rho f_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Usando a notação (3.59),

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\rho f_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta p' + \frac{1}{\rho f_0} J(p', \Delta p') + \beta_0 \frac{\partial p'}{\partial x_1} - \nu \Delta \frac{\partial^2 p'}{\partial x_3^2} \right], \quad (3.66)$$

onde Δ denota o Laplaciano apenas nas variáveis x_1 e x_2 . Na equação (3.56), o primeiro termo é muito pequeno, não só porque ρ' é pequeno, mas também porque a escala do tempo é usualmente grande (ver Tabela 3.1). Da mesma forma, o último termo de (3.56) é muito pequeno porque, como já foi referido anteriormente, a componente vertical da velocidade, através das correcções, resultantes da quase-geostrofia, junta-se à velocidade horizontal, sendo esta última por si só de baixo valor. Os termos intermédios de (3.56) envolvem as perturbações na densidade, que são pequenas, e as componentes horizontais da velocidade, que também são pequenas. Assim sendo, nesta equação não há necessidade das correcções feitas em (3.62) e (3.63), e as equações (3.41)-(3.43) são suficientes, transformando a equação (3.56) em

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial \rho'}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho f_0} \frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial \rho'}{\partial x_2} + u_3 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0. \quad (3.67)$$

Usando a notação (3.59) e denotando

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3},$$

pode-se escrever (3.67) na forma

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{1}{\rho f_0} J(p', \rho') - \frac{\rho N^2}{g} u_3 = 0. \quad (3.68)$$

Habitualmente, N^2 é designado por *frequência de estratificação* ou de *Brunt-Väisälä*. Dividindo (3.68) por N^2/g ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{N^2} g \rho' \right) + \frac{1}{\rho f_0} \frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial (\rho' g)}{\partial x_2} - \frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial (\rho' g)}{\partial x_1} \right) - \rho u_3 = 0.$$

Usando a aproximação hidrostática (3.54) para eliminar ρ' ,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{\rho f_0} \left[\frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] - \rho u_3 = 0. \end{aligned}$$

Derivando em ordem a x_3 ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{1}{\rho f_0} J \left[p', \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (3.69)$$

As equações (3.66) e (3.69) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas: p' , a perturbação da pressão, e $\partial u_3/\partial x_3$, o alongamento vertical. Resolvendo (3.69) em ordem a $\partial u_3/\partial x_3$,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] - \frac{1}{\rho^2 f_0} J \left[p', \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right]. \quad (3.70)$$

Pondo em equação (3.66) e (3.70), pode-se eliminar $\partial u_3/\partial x_3$, obtendo assim a equação final para p' ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta p' + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{1}{\rho f_0} J \left[p', \Delta p' + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial p'}{\partial x_3} \right) \right] \\ + \beta_0 \frac{\partial p'}{\partial x_1} = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Delta p', \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde o operador $J(,)$ é definido por (3.59). Esta última equação é a equação para movimentos não lineares num fluido continuamente estratificado com aproximação ao *plano- β* . No entanto, levanta-se o problema da possibilidade de medir a pressão, que nem sempre é viável. Seria então desejável obter uma equação com informações sobre a velocidade, visto ser uma quantidade mais fácil de medir. Assim, a ideia é encontrar uma relação entre a pressão e a velocidade. Para tal, resolvem-se as equações (3.41) e (3.42) em ordem à pressão p' e, a seguir, introduz-se uma função $\psi(x_1, x_2, x_3)$, tal que

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (3.72)$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3.73)$$

Assim, obtém-se a relação

$$p' = \rho f_0 \psi, \quad (3.74)$$

A função $\psi(x_1, x_2, x_3)$ é designada por *função de corrente*. Esta função é assim designada pelo facto de representar as trajectórias das partículas no

escoamento e permite obter as componentes horizontais da velocidade, u_1 e u_2 . Substituindo (3.74) em (3.71), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta\psi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta_0 x_2 \right] + J[\psi, \Delta\psi \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta_0 x_2] = \nu \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x_3^2}. \end{aligned}$$

Denotando por

$$q = \Delta\psi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta_0 x_2,$$

a equação (3.71) é então equivalente a

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \nu \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x_3^2}. \quad (3.75)$$

A quantidade q é habitualmente designada por *vorticidade potencial* e, por isso, a equação (3.75) é habitualmente designada por equação da vorticidade potencial. Uma vez obtida a solução de (3.75), as equações (3.72) e (3.73) permitem determinar u_1 e u_2 . Para obter o valor de u_3 , substitui-se (3.74) em (3.70), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) - f \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Integrando em ordem a x_3 ,

$$u_3 = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_3} + J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right]. \quad (3.76)$$

Para determinar o valor de p' , pode-se usar a equação (3.74). Finalmente, para ρ' , deriva-se a equação (3.74) em ordem a x_3 e usa-se a aproximação hidrostática (3.54), obtendo

$$\rho' = -\frac{\rho f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}. \quad (3.77)$$

A equação (3.75) descreve os escoamentos quase-geostróficos em termos da função de corrente. A obtenção de solução para esta equação é um processo complicado, por envolver cálculos matemáticos complexos. Muitos matemáticos e físicos continuam a trabalhar no sentido de provar a existência e unicidade de solução, para ser possível descrever com exactidão matemática este tipo de escoamentos.

Capítulo 4

Conclusão

O estudo do movimento dos fluidos nos oceanos é tão vasto quanto os oceanos em si. Os fenómenos mais simples tornam-se verdadeiros quebra-cabeças, por envolverem conceitos e procedimentos físicos e matemáticos complexos. Os movimentos dos fluidos são afectados por quantidades físicas difíceis, ou mesmo impossíveis, de prever, de modelar, de analisar, de medir. O comportamento de escoamentos de fluidos sob determinados tipos de condições são tão difíceis de prever como o comportamento das forças que provocam as mudanças no escoamento.

Neste trabalho reuniram-se as ferramentas, provenientes de diversos ramos da Física e da Matemática, indispensáveis ao estudo e análise de alguns movimentos de fluidos. O estudo restringiu-se aos fluidos Newtonianos com especial relevo para a água do mar, com o objectivo de modelar certo tipo de escoamentos no oceano. Foi necessário partir da definição de fluido e das suas propriedades físicas antes de analisar o seu comportamento. Foram aplicadas noções básicas da Cinemática, ramo da Mecânica, para descrever o movimento de um fluido. Na Secção 2.1, apresentaram-se duas descrições possíveis para o movimento, a Lagrangeana e a Euleriana. Foi a partir desta última descrição que se obteve o conceito de derivada material, útil na dedução das equações do movimento. O movimento pode provocar deformações nos corpos em movimento e, no caso dos fluidos, esta deformação é mais evidente. Na Secção 2.2, estudaram-se estas deformações, que também foram necessárias na dedução das equações de Navier-Stokes. As equações do movimento foram deduzidas partindo dos princípios clássicos da Mecânica, adaptados ao caso dos fluidos. Esta dedução também poderia ser feita partindo da segunda Lei de Newton, situação que é mais comum entre a comunidade geofísica. Do ponto de vista matemático, a melhor forma é partir dos princípios de conservação, da massa e do momento, pois permite uma justificação rigorosa das deduções necessárias. Esta dedução envolveu quantidades como os ten-

sores, representados por matrizes, que permitem trabalhar com propriedades matemáticas importantes. Este desenvolvimento matemático possibilitou um estudo rigoroso das quantidades envolvidas. Foi assim obtido um sistema de equações para fluidos Newtonianos, as equações de Navier-Stokes. Ao obter este sistema de equações, torna-se necessária a procura de uma solução. Para tal, é necessário definir condições iniciais, que são fáceis de definir, e condições de fronteira, que nem sempre são fáceis de determinar. Na Secção 2.7, foram abordadas algumas condições de fronteira possíveis. Mesmo assim, por envolverem termos não lineares, não é possível obter soluções para estas equações. Os estudos mais recentes são feitos com base em modelos aproximados para certo tipo de fluidos, escoando sob determinado tipo de condições. Na prática, consideram-se modelos reais mais simples, permitindo soluções aproximadas, através da aplicação das equações simplificadas.

O âmbito deste trabalho levou ao estudo de Dinâmica dos Fluidos Geofísicos, um ramo da Dinâmica dos Fluidos que estuda os escoamentos que ocorrem na atmosfera e no oceano. No Capítulo 3 fez-se uma iniciação ao estudo dos escoamentos geofísicos no oceano. Os escoamentos geofísicos são escoamentos em larga escala que diferem de outro tipo de escoamentos por considerarem a rotação da Terra e a estratificação como factores que alteram o comportamento do escoamento. Apesar dos escoamentos na atmosfera também serem afectados pela rotação da Terra e pela estratificação em camadas de diferentes densidades, este trabalho centrou-se no estudo de escoamentos que ocorrem no oceano. A rotação da Terra provoca alterações no escoamento destes fluidos, e por isso foi alterado nas equações o termo relativo à aceleração, passando a incluir a aceleração de Coriolis. Ao considerar apenas um fluido específico, a água do mar, as equações podem ser simplificadas, mas o meio em que ocorrem estes escoamentos, o oceano, é condicionado por múltiplas quantidades de modelagem complexa. Por isso, qualquer estudo é restringido a áreas específicas, como é o caso dos escoamentos geostróficos, através de aproximações oceânicas. Na Secção 3.5 retratou-se uma situação em que o sistema de escoamento está em equilíbrio geostrófico, sendo a aceleração de Coriolis dominante, a densidade constante, e a gravidade proporcional ao gradiente da pressão. A aproximação geostrófica é um modelo importante a considerar no estudo dos escoamentos no interior do oceano, onde, tendo em conta as escalas utilizadas, o fluido se encontra em equilíbrio. Este modelo permite escalonar as equações do movimento e desprezar os termos com valores de menor significância. Ao considerar pequenas alterações na densidade e no parâmetro de Coriolis, a situação passa a ser de quase-geostrofia. Os escoamentos quase-geostróficos retratam pequenas mudanças no equilíbrio geostrófico, e é possível encontrar soluções para as equações que descrevem estes movimentos.

Existem outros aspectos dos escoamentos nos oceanos que não foram referidos neste trabalho e, nesse sentido, sugerem-se alguns tópicos para ampliação deste assunto.

O escoamento de um fluido também é condicionado pela sua temperatura, tal como acontece com algumas correntes oceânicas. A Termodinâmica é o ramo da Mecânica que trata de fenómenos que envolvem a temperatura. Um sistema termodinâmico é definido como sendo um volume separado do meio à sua volta por fronteiras flexíveis através das quais existem trocas de calor e de trabalho, mas não de massa. Esta definição não é válida para o caso de escoamento de fluidos, mas experiências mostram que os resultados da termodinâmica clássica podem-se aplicar na maioria dos escoamentos. Este facto é possível porque as mudanças durante o movimento de um fluido são lentas, comparadas com o tempo de relaxação. Este tempo é definido como o tempo que um determinado tipo de material demora a ajustar-se a um novo estado. Na maioria dos fluidos, este tempo é muito pequeno, pois depende das colisões das moléculas. No caso de escoamentos com variações de temperatura, a equação da conservação da energia térmica permite a caracterização de algumas situações. Esta equação é obtida a partir dos princípios clássicos da Termodinâmica. No caso específico de escoamentos no oceano, a densidade do fluido não é só afectada pela sua temperatura, mas também pela sua salinidade. Outra equação que pode ajudar a descrever determinado tipo de situações, é a equação para a salinidade, quando esta causa alterações na densidade. Seria interessante incluir estas duas equações nas restantes equações deduzidas neste trabalho.

O interior do oceano, apesar de representar a parte maior dos oceanos, em termos de volume de água, não representa as condições de muitos escoamentos. Alguns escoamentos são condicionados por fronteiras, tais como o fundo do oceano, ou as placas continentais, ou ainda a fronteira com a atmosfera. Estas fronteiras causam alterações significativas no escoamento. Na interface oceano/atmosfera, as principais forças responsáveis pelos escoamentos são a força da gravidade exercida pela Lua e pelo Sol, a pressão atmosférica, a convecção resultante do arrefecimento da atmosfera e da evaporação e, finalmente, a tensão do vento ao longo da superfície marítima. A Lua e o Sol apenas geram as marés e a pressão atmosférica não é significativa. Por outro lado, a convecção gera correntes e é responsável por um movimento muito lento na zona abissal. O vento é a força principal que afecta o escoamento na superfície dos oceanos. A água dos oceanos responde à tensão do vento por causa da sua baixa viscosidade, mesmo que esta aumente devido à turbulência, e também por causa da consistência com que os ventos sopram ao longo da superfície do oceano. Um bom exemplo são os ventos dos trópicos, que são tão estáveis que, até à idade do vapor, os navios acertavam

os seus rumos de acordo com estes ventos. Junto às placas continentais, ou na fronteira com o fundo do oceano, o escoamento é afectado pelas forças de atrito entre o fluido e estas fronteiras sólidas. Ou seja, se o fluido tiver baixa viscosidade, esta pode ser ignorada em todo o domínio, excepto na camada fronteira com as placas continentais, onde a condição de aderência referida na Secção 2.7 deverá ser satisfeita. A camada fronteira do domínio do fluido é uma região de espessura muito pequena onde a velocidade do fluido se mistura, com maior ou menor suavidade, com a velocidade na fronteira, e as forças desprezadas no interior do oceano voltam a ser importantes. O conceito da existência de uma camada fronteira é um dos marcos na história da Mecânica dos Fluidos. Este assunto por si só seria suficiente para um trabalho extenso e muito interessante.

A Dinâmica Computacional dos Fluidos é o ramo recente da Dinâmica dos Fluidos que, através de algoritmos, métodos numéricos e software adequado, permite encontrar soluções das equações para situações mais complexas do que as descritas neste trabalho. Além de prever o comportamento do fluido em escoamento, a Dinâmica Computacional dos Fluidos permite estimar a transferência de calor, massa, mudança de estado e reacções químicas dos fluidos. São vários os campos de aplicação, desde as indústrias aeroespacial e automobilística, a meteorologia, as engenharias mecânica e química, a biomedicina, até ao estudo dos oceanos e atmosfera. O processo utilizado no estudo de escoamentos de fluidos passa por várias fases. De uma forma muito resumida, a fase inicial baseia-se na construção de um modelo computacional que represente o sistema a ser investigado. Depois, há que aplicar os princípios físicos, que descrevem o transporte de propriedades, ao modelo virtual. Por último, visualiza-se a previsão resultante para o comportamento do escoamento e obtêm-se as quantidades de interesse. Estes métodos permitem modelar algumas situações de turbulência nos oceanos e atmosfera. A turbulência é um fenómeno do dia-a-dia, mas é extremamente difícil de definir com exactidão. Existem teorias muito diferentes, mas todas concordam no aspecto da complexidade e inexistência de soluções. Os escoamentos turbulentos são imprevisíveis e não lineares e a Dinâmica Computacional dos Fluidos veio possibilitar alguns avanços no estudo destes tipo de escoamentos. Seria interessante reunir os trabalhos mais recentes nas aplicações desta área ao estudo dos escoamentos nos oceanos.

Na Secção 3.6, obteve-se a equação (3.75) que caracteriza os escoamentos quase-geostróficos em termos da função de corrente, ψ . Para resolver o problema formado por esta equação, é necessário prescrever condições, inicial, $\psi = \psi_0$ e de fronteira, $\psi = \psi_*$, onde ψ_0 e ψ_* são funções conhecidas. Para além disso, é necessário conhecer o domínio em causa. Neste estudo, trabalhou-se num domínio espaço-temporal, onde o domínio temporal é su-

ficientemente grande para 10 dias e o domínio espacial corresponde à coluna de água analisada. Em termos puramente matemáticos, interessa saber se o problema está bem posto, isto é, se satisfizer as três condições: tem solução, a solução é única, e se a solução depende continuamente dos dados do problema. Para provar a existência de solução, o mais simples é determinar, por algum método, uma solução. Ora a equação (3.75) é às derivadas parciais nas variáveis t, x_1, x_2, x_3 . Trata-se de uma equação de quarta ordem devido ao termo do segundo membro. É não linear devido ao termo abreviado pelo jacobiano. Por isso, a determinação de uma solução analítica é uma tarefa bastante difícil. Uma solução desta equação terá de ser quatro vezes diferenciável (duas em x_1 e x_2 mais duas em x_3) e uma vez diferenciável em t . Uma solução que satisfaça esta regularidade designa-se por *solução forte*. Portanto, o espaço das soluções fortes admissíveis teria de ser um espaço de funções com esta regularidade. Nas situações em que não é possível encontrar uma expressão para a solução, interessa, pelo menos, saber se o problema tem ou não solução. Para provar a existência de solução, habitualmente começa-se por introduzir um conceito de solução mais fraca (designada na literatura por *solução fraca*). A existência de solução fraca é demonstrada recorrendo a resultados da Análise Funcional. Provada a existência de uma solução fraca, posteriormente pode-se mostrar que essa solução é suficientemente regular e, por isso, passa a ser uma solução forte. Das equações para os escoamentos geostróficos e quase-geostróficos deduzidas no Capítulo 3, só a equação (3.75) é que, à partida, não é resolúvel.

Muitos outros assuntos importantes se poderiam tratar mas o que ficou por referir não é de forma alguma menos importante ou interessante no estudo dos oceanos, apenas o tempo e o espaço foi limitado. O oceano, ambiente de incidência deste estudo, é tão diverso que não permite um tratamento genérico. É uma área de estudo ainda em desenvolvimento, pois são ainda tantos os fenómenos por explicar, processos que envolvem cálculos matemáticos e conceitos físicos avançados. Como tal, é comum existirem diferentes abordagens físicas e matemáticas em estudos mais recentes, sobre os mesmos fenómenos. Seria necessário um estudo aprofundado e o estabelecimento de uma teoria que unificasse esta matéria. Neste trabalho apresentou-se uma abordagem da forma mais simples e exacta, reunindo trabalhos recentes de diversos autores, tentando estabelecer uma relação entre a realidade física dos factos e o respectivo envolvimento matemático. Espera-se assim contribuir para um posterior aprofundamento dos assuntos aqui apresentados.

Apêndice

Lista de símbolos utilizados

\mathbf{x}	vector posição
\mathbf{T}	tensor das tensões
\mathbf{u}	vector velocidade
\mathbf{a}	vector aceleração
\mathbf{D}	tensor das deformações
\mathbf{W}	tensor das rotações
\mathbf{I}	tensor unitário
\mathbf{n}	vector unitário normal a uma superfície
\mathbf{t}	vector das tensões
\mathbf{I}	matriz unitária
\mathbf{K}	tensor gradiente de deformação
$\mathbf{\Omega}$	vector rotação
V	volume arbitrário
F	função arbitrária
J	Jacobiano
N^2	frequência de estratificação
T	escala para o tempo
L	escala para o comprimento
U	escala para a velocidade
U_3	escala para a velocidade vertical
H	escala para a altura
p	pressão
t	tempo
ρ	densidade
g	gravidade
q	vorticidade potencial
Ω	taxa de rotação da Terra
ψ	função corrente

Bibliografia

- [1] M. Abbott and D. Basco. *Computational Fluid Dynamics*. Longman Scientific and Technical, Londres, 1989.
- [2] S. Antontsev and H. Oliveira. Navier-stokes equations with absorption under slip boundary conditions: existence, uniqueness and extinction in time. *Rims Kôkyûroku Bessatsu, Kyoto University*, B1:21–42, 2007.
- [3] G. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Londres, 1967.
- [4] W. Boyce and R. Diprima. *Calculus*. John Wiley and Sons, Singapura, 1988.
- [5] M. Crépon. *Initiation à la Dynamique de l’Océan*. Institut Océanographique, Paris, 1999.
- [6] B. Cushman–Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, Dartmouth, 1994.
- [7] M. Feistauer. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific and Technical, Londres, 1992.
- [8] A. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, Orlando, 1982.
- [9] R. Greve. *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Institute of Low Temperature Science - Hokkaido University, Sapporo, 2004/2005.
- [10] P. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, Londres, 1990.
- [11] P. Lax. Change of variables in multiple integrals. *American Mathematical Monthly*, 106, 1999.
- [12] L. Milne–Thomson. *Theoretical HydroDynamics*. Dover Publications, Nova York, 1968.

- [13] P. Nielsen. *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*, volume 4 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, Singapura, 1992.
- [14] A. Paterson. *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London, 1983.
- [15] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Nova York, 1987.
- [16] S. Pond and G. Pickard. *Introductory Dynamical Oceanography*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Londres, 1983.
- [17] J. Serrin. Mathematical principles of classical fluid mechanics. In C. Truesdell, editor, *Encyclopedia of Physics*, volume VIII/1 - Fluid Dynamics I, pages 125–263. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [18] E. Simonnet, M. Ghil, K. Ide, R. Temam, and S. Wang. Low-frequency variability in shallow-water models of the wind-driven ocean circulation. *Journal of Physical Oceanography*, 33, 2003.
- [19] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. In S. Flugge, editor, *Encyclopedia of Physics*, volume III/3 - Fluid Dynamics I. Springer-Verlag, Berlin, 1965.