

**TATIANA SALVADOR DE MELO E SOUZA**

**REGULARIDADES EM SEQUÊNCIAS DE  
CRESCIMENTO NO 5.º ANO DE ESCOLARIDADE:  
UMA ABORDAGEM COM MATERIAIS  
MANIPULÁVEIS**



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**

**ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

2025

**TATIANA SALVADOR DE MELO E SOUZA**

**REGULARIDADES EM SEQUÊNCIAS DE  
CRESCIMENTO NO 5.º ANO DE ESCOLARIDADE:  
UMA ABORDAGEM COM MATERIAIS  
MANIPULÁVEIS**

**Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do ensino básico e de Matemática e  
Ciências Naturais no 2.º Ciclo do ensino básico**

**Trabalho efetuado sob a orientação de:**

**Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro**



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**

**ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

**2025**

**Regularidades em seqüências de crescimento no 5.º ano de escolaridade: uma abordagem com materiais manipuláveis.**

**Declaração de autoria do trabalho**

Declaro ser a autora deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

---

## Copyright

Tatiana Salvador de Melo e Souza

A Universidade do Algarve reserva para si o direito, em conformidade com o disposto no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos, de arquivar, reproduzir e publicar a obra, independentemente do meio utilizado, bem como de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição para fins meramente educacionais ou de investigação e não comerciais, conquanto seja dado o devido crédito à autora e editor respetivos.

## **Agradecimentos**

À minha mãe e ao meu pai, que sempre estiveram ao meu lado. Ainda quando me faltava clareza sobre o caminho a seguir na universidade, foram eles que me indicaram a área da Educação, reconhecendo em mim o jeito natural de cuidar de crianças. Estarei eternamente grata por tudo o que fizeram e continuam a fazer por mim, e por me mostrarem essa direção, que hoje sei ser a certa. Se hoje cheguei aqui, é também graças ao amor, à confiança e ao exemplo que sempre me deram.

Ao meu companheiro, Paulo Henrique, por todo o apoio, pela motivação constante e pela força que nunca deixou faltar. À sua família, que me acolheu com carinho e se tornou também minha.

Ao meu sobrinho Lucas e à minha sobrinha Bella, que me confirmam, todos os dias, que escolhi o curso certo. Estiveram muitas vezes ao meu lado e ao meu colo, enquanto escrevia este relatório, e são uma inspiração contínua para trabalhar com crianças tão incríveis quanto eles.

Aos meus irmãos e às minhas cunhadas, pelo apoio constante e pelo entusiasmo com que sempre acompanharam o meu percurso acadêmico.

Às minhas amigas, pelo apoio ao longo dos anos, e às minhas colegas da universidade, que se tornaram também amigas ao longo destes anos e com quem partilhei momentos importantes.

A todos os professores que me marcaram ao longo de todo o meu percurso escolar e acadêmico, e que também me inspiraram a seguir este caminho.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo interesse, dedicação e motivação demonstrados durante todas as aulas.

Ao professor doutor António Manuel da Conceição Guerreiro, que aceitou guiar-me ao longo deste longo processo, aconselhando-me sempre da melhor forma e mostrando-se paciente durante todas as etapas deste trabalho. A sua orientação e disponibilidade foram fundamentais para o desenvolvimento e concretização deste estudo.

## Resumo

O presente relatório descreve uma investigação centrada na exploração de regularidades em sequências de crescimento, recorrendo a materiais manipuláveis não estruturados. Para orientar o estudo, definiu-se a seguinte questão: “De que forma a utilização de materiais manipuláveis pode contribuir para a compreensão de regularidades em sequências de crescimento por alunos do 5.º ano de escolaridade?”. Foram também definidos três objetivos principais: (i) explorar o impacto dos materiais manipuláveis na identificação e generalização de regularidades em sequências de crescimento, (ii) compreender as estratégias desenvolvidas pelos alunos durante a resolução das tarefas propostas e (iii) analisar o contributo da discussão em turma, promovida no âmbito do ensino exploratório, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A intervenção decorreu em duas aulas de investigação implementadas numa turma do 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico de uma escola do concelho de Tavira, seguindo o ensino exploratório e o processo de estudo de aula, que envolveu o trabalho colaborativo entre professores, desde a planificação conjunta até à observação e reflexão pós-aula. Na primeira aula, explorou-se uma sequência linear recorrendo a copos, já na segunda, utilizaram-se feijões numa sequência geométrica.

A análise dos dados recolhidos nas implementações (gravações áudio, registos escritos e grelhas) evidenciou que os alunos inicialmente recorreram sobretudo a raciocínios recursivos, como o uso indevido da proporcionalidade direta. No entanto, a discussão em turma revelou-se essencial para o confronto de ideias, a construção conjunta de expressões geradoras e a superação de dificuldades, permitindo uma evolução para uma abordagem mais funcional e promotora do pensamento algébrico.

Os materiais manipuláveis facilitaram a visualização das sequências, reforçaram a motivação e favoreceram a interação entre pares. Em síntese, o estudo confirma o valor do uso de materiais manipuláveis, aliados a práticas exploratórias e colaborativas, na promoção da compreensão de regularidades e no desenvolvimento do pensamento algébrico no 5.º ano.

**Palavras-chave:** Materiais manipuláveis; Pensamento algébrico; Sequências de crescimento; Estudo de aula; 2.º ciclo do ensino básico.

## Abstract

This report describes a study focused on the exploration of regularities in growth sequences, using unstructured manipulative materials. The investigation was guided by the following research question: “In which way can the use of manipulative materials, contribute towards to fifth-grade students’ understanding of regularities in growth sequences?”.

Three primary objectives were defined: (i) Exploring the impact of manipulative material on identifying and generalizing regularities in growth sequences; (ii) Understanding the strategies students employ when solving the proposed tasks; and (iii) Analysing the contribution of entire class discussion, within an exploratory teaching framework, towards the development of algebraic thinking.

The educational intervention took place in two research lessons delivered to a fifth-grade class in a school in Tavira, following an exploratory teaching approach and the Lesson Study cycle. This process involved collaborative lesson planning among teachers, observation in-class, and post-class reflection among the teaching team. In the first lesson, students investigated a linear sequence using cups, while in the second lesson they explored a geometric sequence with beans.

Analysis of the data collected during the implementation (audio recordings, student written work, and observation grids) revealed that students initially defaulted to recursive reasoning, such as the misuse of direct proportionality. However, the class discussions proved crucial for confronting ideas, co-constructing generating expressions, and overcoming difficulties, thereby fostering a shift towards a more functional approach and supportive of algebraic thinking.

Manipulatives materials made easier the visualisation of the sequences, reinforced student motivation, and promoted peer interaction. In summary, this study confirms the value of integrating manipulatives with exploratory, collaborative practices to foster understanding of regularities and to develop algebraic thinking among fifth-grade students.

**Keywords:** Manipulatives; Algebraic thinking; Growth sequences; Lesson study; 2nd cycle of basic education.

## Índice Geral

|   |           |
|---|-----------|
| AGRADECIMENTOS .....  | IV        |
| RESUMO .....  | V         |
| ABSTRACT .....  | VI        |
| ÍNDICE GERAL .....  | VII       |
| ÍNDICE DE FIGURAS .....   | VIII      |
| ÍNDICE DE TABELAS .....   | IX        |
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>   | <b>1</b>  |
| <b>CAPÍTULO I – ENQUADRAMENTO TEÓRICO.....</b>  | <b>4</b>  |
| ESTUDO DE AULA.....   | 4         |
| A ÁLGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS ESCOLARES .....                          | 8         |
| <b>CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO .....</b>   | <b>15</b> |
| DEFINIÇÃO DA QUESTÃO DE PARTIDA E OBJETIVOS .....   | 15        |
| DESIGN DE INVESTIGAÇÃO .....  | 15        |
| PARTICIPANTES, CONTEXTO E INTERVENÇÃO EDUCATIVA .....   | 16        |
| INSTRUMENTOS DE RECOLHA E ANÁLISE DE DADOS .....  | 18        |
| PROCEDIMENTOS ÉTICOS .....  | 19        |
| <b>CAPÍTULO III – INTERVENÇÃO EDUCATIVA, APRESENTAÇÃO E<br/>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</b> | <b>20</b> |
| ESTUDO DE AULA .....  | 20        |
| PLANIFICAÇÃO DAS AULAS DE INVESTIGAÇÃO.....   | 21        |
| PRIMEIRA AULA DE INVESTIGAÇÃO .....   | 26        |
| SEGUNDA AULA DE INVESTIGAÇÃO .....  | 42        |
| REFLEXÃO SOBRE AS AULAS DE INVESTIGAÇÃO.....  | 58        |
| <b>CONCLUSÃO.....</b>   | <b>63</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>   | <b>70</b> |
| ÍNDICE DE APÊNDICES .....   | 75        |
| <b>APÊNDICES .....</b>  | <b>76</b> |

## Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 2.1.</b> – Esquema com a organização da sala de aula.....           | 18 |
| <b>Figura 3.1.</b> – Resposta da questão n.º 5 pelo grupo F.....              | 39 |
| <b>Figura 3.2.</b> – Resolução da questão n.º 2.1 pelo grupo B.....           | 45 |
| <b>Figura 3.3.</b> – Resolução da questão n.º 2.1 pelo grupo H.....           | 45 |
| <b>Figura 3.4.</b> – Resolução da questão n.º 4 pelo grupo H.....             | 49 |
| <b>Figura 3.5.</b> – Tabuleiro do jogo do grupo F.....                        | 53 |
| <b>Figura 3.6.</b> – Cálculos da questão n.º 5.1 realizados pelo grupo F..... | 53 |
| <b>Figura 3.7.</b> – Resolução das questões n.os 5 e 5.1 pelo grupo H.....    | 54 |

## Índice de tabelas

|   |    |
|---|----|
| <b>Tabela 3.1.</b> – Medição da altura das torres.....                                  | 30 |
| <b>Tabela 3.2.</b> – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da primeira aula.....    | 41 |
| <b>Tabela 3.3.</b> – Estimativas da questão 1.2 realizadas pelos diferentes grupos..... | 44 |
| <b>Tabela 3.4.</b> – Respostas dos diferentes grupos às questões n.os 2 e 2.1.....      | 47 |
| <b>Tabela 3.5.</b> – Tabela relacionada à expressão geradora da sequência.....          | 56 |
| <b>Tabela 3.6.</b> – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da segunda aula.....     | 57 |

## Introdução

Este relatório descreve e analisa o processo de desenvolvimento de um estudo de aula, realizado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico. Este estudo decorreu ao longo de aproximadamente três meses e envolveu a planificação, implementação, observação e reflexão colaborativa de duas aulas de Matemática centradas no tema das sequências numéricas, envolvendo materiais manipuláveis, numa turma do 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico de uma escola do concelho de Tavira.

O percurso até à definição do tema deste relatório foi construído de forma progressiva e fundamentada. A ideia inicial consistia em trabalhar com jogos, motivada pelo interesse pessoal em integrá-los no ensino da Matemática, pela experiência prévia no desenvolvimento de trabalhos académicos nesta área e pela perceção da elevada motivação demonstrada pelos alunos quando se envolvem em atividades lúdicas. No entanto, após a consulta de literatura relevante e em diálogo com o orientador deste relatório, surgiu a proposta de explorar o uso de materiais manipuláveis. Estes, além de partilharem com vários jogos o carácter prático e o manuseio de objetos concretos, revelam-se ferramentas importantes para apoiar a compreensão de conceitos matemáticos de forma visual e significativa. Esta mudança foi motivada pela vontade de aprofundar uma estratégia de ensino com potencial exploratório e que representasse uma abordagem nova na minha prática de ensino.

No 1.º semestre do 2.º ano deste Mestrado, no âmbito da Unidade Curricular de Didática de Matemática, estudou-se o processo do estudo de aula e foi-nos solicitado que planificássemos uma sequência de tarefas centradas num tema considerado de difícil compreensão para os alunos, discutindo com os colegas de turma e com o docente o enunciado das tarefas, as estratégias de resolução, as possíveis dificuldades dos alunos e as intervenções do professor. No entanto, essa planificação não foi implementada em contexto real de sala de aula. Já no 2.º semestre, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, surgiu a proposta de desenvolver um estudo de aula de Matemática, em colaboração com um colega do Mestrado e um docente da Escola Superior de Educação e Comunicação, permitindo colocar em prática os conhecimentos adquiridos, através das

diversas fases deste processo, incluindo as reuniões conjuntas entre professores para planificação da aula e posterior reflexão.

Perante a oportunidade de realizar o estudo de aula e a elaboração deste relatório, surgiu a ideia de articular ambos os trabalhos. Após discussão com o orientador, que também participou como docente no estudo de aula desenvolvido, optou-se por seguir essa junção e seleccionar um tema do 2.º ciclo do ensino básico que envolvesse o uso de materiais manipuláveis e fosse reconhecido como desafiante para os alunos. Assim, emergiu o tópico das regularidades em sequências de crescimento no âmbito da Álgebra do 5.º ano deste ciclo de ensino. Ao discutirmos em conjunto com a colega do estudo de aula, todos considerámos que se tratava de um tema pertinente, ideal para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático através da exploração de regularidades com materiais manipuláveis. De acordo com Winjs et al. (2019), algumas das dificuldades que os alunos têm ao estudar as sequências de crescimento, relaciona-se ao facto de estarem acostumados a desenvolverem o pensamento recursivo, através do qual recorrem a um termo anterior para descobrir um termo sucessivo. No entanto, é necessário o desenvolvimento do pensamento funcional, através do qual aprendem a generalizar uma sequência.

Posteriormente, no início da Prática de Ensino Supervisionada, ao apresentar o tópico à professora cooperante da escola básica e questionar se esta temática seria adequada a abordar, a docente confirmou que este seria um dos conteúdos em que ocorrem mais dificuldades por parte dos alunos. Desta forma, consolidou-se a escolha do tema, articulando o estudo de aula com a investigação desenvolvida neste relatório.

Durante a pesquisa literária sobre as sequências de crescimento, destacou-se um artigo de Bannister e Wilkins (2007) que propunha uma sequência de progressão aritmética recorrendo a copos, que são materiais manipuláveis não estruturados. Numa das reuniões do estudo de aula, discutiu-se a possibilidade de adaptar a sequência do artigo mencionado para a primeira aula. Em relação à segunda aula, decidiu-se que se utilizariam também outros materiais manipuláveis não estruturados, acabando por se escolher os feijões numa sequência de progressão geométrica. Assim, a primeira aula teria o carácter de recapitulação do tema das sequências numéricas estudado anteriormente pelos alunos no 1.º ciclo do ensino básico, enquanto a segunda aula teria o objetivo de introduzir os alunos à progressão geométrica que é estudada neste ano de escolaridade. Além disso,

decidiu-se seguir a abordagem do ensino exploratório da matemática que, de acordo com Duarte et al. (2023) e Menezes et al. (2015), divide a aula em diferentes fases, começando pela apresentação da tarefa, passando para o trabalho autónomo dos alunos, seguindo para a discussão em turma da tarefa, podendo ainda apresentar uma última fase que sistematiza as ideias destacadas na aula. Esta abordagem valoriza a aprendizagem ativa dos alunos e a construção conjunta do conhecimento.

O presente relatório organiza-se em cinco partes: introdução, enquadramento teórico, enquadramento metodológico, intervenção educativa, com apresentação e discussão dos resultados e conclusão. No capítulo dedicado ao enquadramento teórico, são explorados os principais conceitos e aspetos fundamentais que sustentam a investigação, nomeadamente o modelo do estudo de aula, as suas fases e o seu contributo para o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores. São ainda abordados o tema da Álgebra no ensino de Matemática, o papel dos materiais manipuláveis na aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento algébrico, a importância do estudo dos padrões e a transição do pensamento recursivo para o funcional. Depois, o capítulo do enquadramento metodológico, apresenta a questão de investigação e os objetivos do estudo, o design de investigação escolhido, os participantes envolvidos, o contexto educativo, a intervenção realizada, os instrumentos de recolha e análise de dados e os princípios éticos considerados. No capítulo seguinte, descreve-se e analisa-se o processo do estudo de aula e as aulas de investigação desenvolvidas, assim, apresentam-se detalhes das reuniões colaborativas, estratégias e respostas dos alunos, interações em grupo, bem como dos momentos de discussão coletiva. Por fim, na conclusão, destacam-se aspetos relevantes do desenvolvimento deste relatório, fazendo um balanço geral da investigação, respondem-se aos objetivos do estudo e à questão de investigação, reflete-se sobre as dificuldades sentidas e sugerem-se possíveis melhorias para investigações futuras.

## Capítulo I – Enquadramento Teórico

No presente capítulo, apresento uma base teórica que sustenta esta investigação, organizando-o em dois grandes temas fundamentais para a compreensão do estudo desenvolvido, o processo do estudo de aula e o desenvolvimento da Álgebra no ensino de Matemática nos primeiros anos escolares. Para a sua construção, analisei investigações e obras de diversos autores, de forma a reunir perspetivas e reflexões que fundamentam o trabalho realizado. Primeiro, exploro subtemas relacionados ao processo do estudo de aula, nomeadamente o seu conceito e natureza, origem e evolução, fases e organização assim como o seu contributo para o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores. De seguida, aprofundo a temática da Álgebra no ensino de Matemática nos primeiros anos, abordando a natureza e evolução do conceito de Álgebra escolar, a perspetiva das Aprendizagens Essenciais, o papel dos materiais manipuláveis, o desenvolvimento do pensamento algébrico, o estudo de padrões como base desse pensamento, bem como a evolução entre o pensamento recursivo e funcional e os desafios que lhes estão inerentes. Desta forma, este capítulo pretende contextualizar e consolidar os fundamentos teóricos que apoiam a planificação, a implementação e a análise crítica das intervenções descritas neste estudo.

### Estudo de aula

**Conceito e natureza do processo.** O estudo de aula pode ser entendido como um processo formativo, composto por diversas sessões, em que “um pequeno grupo de professores” trabalha em conjunto, planifica, executa, observa e reflete criticamente sobre as práticas letivas (Richit & Franceschi, 2025). De acordo com Scheller et al. (2019), durante todo o processo do estudo de aula, é necessário também um formador que já tenha experiência nessa dinâmica para orientar o grupo de professores. Estes autores ainda defendem que o trabalho do formador é importante visto ser o indivíduo que conduz as sessões de trabalho. Segundo Pozzobon et al. (2025), esta abordagem tem potencial para promover o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores.

Scheller et al. (2019) acrescentam ainda que o estudo de aula também assume uma dimensão investigativa. Nesta ótica, Pozzobon et al. (2025) consideram que este processo pode ser visto como um meio de intensificar o conhecimento didático dos professores, promover alterações nas práticas letivas e, conseqüentemente, contribuir para a melhoria

das aprendizagens dos alunos. Em concordância com essa perspectiva, Duarte et al. (2023) destacam que o estudo de aula pode assumir um papel relevante na formação inicial de docentes, ao permitir que futuros professores trabalhem colaborativamente com professores mais experientes. Neste contexto, planejam em conjunto a aula de investigação, partilham sugestões, discutem estratégias, preveem hipóteses de resolução, identificam as dificuldades que poderão surgir e conseqüentemente, desenvolvem respostas do professor a tais dificuldades.

Ponte et al. (2016) sublinham que um aspeto essencial do estudo de aula é o foco nas aprendizagens dos alunos, distinguindo-se assim de outros modelos de observação de aulas centrados no papel dos professores. Para além disso, destacam o facto de que este processo ocorre num contexto de colaboração, incentivando a troca de ideias e o apoio recíproco entre os professores envolvidos. Desta forma o estudo de aula articula prática e teoria e “possibilita aprofundamentos teóricos em diversos domínios – matemático, didático, curricular, educacional e organizacional” (Ponte et al., 2016, p. 870).

**Origem e evolução.** O estudo de aula surgiu, no final do século XIX, no Japão, sendo conhecido também pelo seu nome de origem como “Jugyou kenyu” ou pela tradução inglesa “Lesson study” (Fujii, 2016; Richit & Franceschi, 2025). Ainda em concordância com os autores, este estudo foi inicialmente difundido para países asiáticos e só, no início do século XXI, se expandiu para os países ocidentais. Desta forma, começou a ganhar reconhecimento a nível mundial e foi, progressivamente, adotado por professores em diferentes países (Fujii, 2016; Scheller et al., 2024).

De acordo com Fujii (2016), o estudo de aula, no seu país de origem, pode dividir-se em três níveis diferentes, consoante a sua abrangência: a nível escolar, quando envolve os alunos de uma escola específica; a nível distrital, abrangendo os alunos de um distrito; e a nível nacional, considerando alunos de todo o país. Desta forma, esta distinção relaciona-se com o alcance do estudo e o objetivo a que se propõe.

Já Scheller et al. (2019) referem que, no Japão, os professores estão habituados a desenvolver diversos estudos de aula. Uma outra diferença, apontada por estes autores, entre o modelo japonês e o praticado em vários outros países, relaciona-se à ausência, no Japão, de um formador exterior ao grupo de professores. Contudo, é frequente a presença, de investigadores especializados que acompanham apenas parte do processo. Quando

aplicado noutros países, o estudo de aula foi alvo de adaptações à sua estrutura primordial, sobretudo no que diz respeito ao número e à definição das suas fases (Fujii, 2016; Scheller et al., 2024).

**Fases e organização.** A literatura especializada no estudo de aula, apresenta diferentes perspetivas relativamente à organização deste processo em fases. Por exemplo, Murata (2011) sugere uma organização em quatro fases. Fujii (2016), por sua vez, defende a existência de cinco fases distintas. Já Stigler e Hilbert (1999), como citado por Scheller et al. (2024), apresentam uma estrutura composta por sete fases.

Considerando o modelo de quatro fases, apresentado por Murata (2011), destaca-se que na primeira fase, os professores determinam em conjunto o objetivo de aula. Conforme Fujii (2014), a escolha do objetivo pode surgir tanto como resposta à análise crítica do contexto escolar como a problemas identificados relacionados à educação. Em concordância com este autor, Richit et al. (2019) destacam que nesta fase “há grande preocupação com as necessidades e dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem do tópico curricular escolhido” (p. 58).

Na segunda fase, com base no objetivo definido na fase anterior, os professores planificam uma aula que promova a aprendizagem dos alunos. De acordo com Fujii (2016), um dos professores começa por apresentar um rascunho inicial da planificação e de seguida, discute-se em conjunto tal plano e aplicam-se adaptações enriquecendo-o. Durante esta fase, o grupo de professores também analisa os documentos orientadores como uma base para a construção da aula de investigação, ajudando a definir os objetivos de aprendizagem e garantir coerência entre a planificação e a aula de intervenção (Richit & Franceschi, 2025). Além disso, segundo os mesmos autores, a escolha das estratégias de ensino e dos materiais adequados deve ser cuidadosamente ponderada já nesta fase, de forma a promover a aprendizagem matemática dos alunos. Ao planificarem, discutem possíveis respostas e dúvidas dos alunos, aprofundam o estudo de materiais didáticos, antecipam as estratégias que os alunos poderão utilizar e planeiam como poderão comparar diferentes respostas dos alunos (Fujii, 2016; Murata, 2011). Ainda se destaca que nesta fase o mais importante é preparar a aula para testar “uma abordagem de ensino (ou investigar uma questão sobre o ensino)” (Murata, 2011, p. 3).

Já na terceira fase, ocorre a implementação da aula de investigação. Conforme Duarte et

al. (2023), durante a realização da aula de investigação por um dos docentes, os demais professores assumem um papel de observadores. Assim, os observadores registam as estratégias e diferentes formas de raciocínio dos alunos. Além disso, na implementação da aula de investigação, torna-se essencial que o professor, mesmo com uma planificação detalhada, seja capaz de adaptar a sua ação em função do que acontece na interação com os alunos. Tal como refere Ponte (2005), “a gestão curricular feita na aula não é um simples trabalho de aplicação e controlo do trabalho de acordo com o plano previsto. O trabalho do professor na aula é um trabalho eminentemente criativo” (p. 23).

Por fim, na quarta fase, realiza-se a reflexão pós-aula, na qual os professores se reúnem para analisar colaborativamente o que foi registado e observado durante a aula, especialmente no que toca à aprendizagem dos alunos (Murata, 2011). Além disso, esta fase também oferece ao professor, que lecionou a aula, a oportunidade de autorreflexão sobre a sua prática (Richit et al., 2019).

**Desenvolvimento do conhecimento didático.** Os autores Pozzobon et al. (2025) realizaram uma investigação com professores de matemática envolvidos num estudo de aula para compreenderem os conhecimentos didáticos construídos por este processo. Dois aspetos principais emergiram dessa análise: por um lado, o reconhecimento das dificuldades dos alunos e, por outro, a diversificação das estratégias de ensino. Conforme os autores, ao participarem neste processo, os professores passaram a reconhecer melhor as dificuldades dos alunos, partilharam essa informação com os outros docentes e, em conjunto, refletiram para encontrar soluções para combater tais dificuldades, trocando entre si, diferentes estratégias de ensino.

Desta forma, os autores defendem que os conhecimentos didáticos são fundamentais no ensino da matemática, para que os professores consigam identificar as dificuldades dos alunos e adequar as suas práticas de ensino. Destacam ainda o papel do professor na escolha e na adaptação de métodos de ensino que melhor respondam às necessidades de aprendizagem dos alunos.

De acordo com esta perspetiva de adequação das práticas de ensino, verifica-se que o processo de estudo de aula permite que o professor defina os objetivos didáticos “de acordo com a turma, considerando os conhecimentos, interesses e dificuldades dos alunos, além de questões relacionadas a aspectos culturais e sociais do contexto escolar”

(Richit & Franceschi, 2025, p. 23).

Salienta-se também que o processo do estudo de aula permite que os professores aprofundem os seus conhecimentos relacionados “aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e às dificuldades dos alunos e à própria dinâmica da sala de aula” (Ponte et al., 2016, p. 870). Além disso, este processo favorece aos professores o reconhecimento e a seleção de “recursos e materiais adequados para abordar tópicos específicos, levando-os a promover o desenvolvimento curricular” (Richit & Franceschi, 2025, p. 24).

Em síntese, de acordo com a literatura consultada, o estudo de aula evidencia-se como uma estratégia formativa e investigativa que, ao assentar na colaboração entre professores, na planificação detalhada, na observação e na reflexão conjunta, contribui para o aprofundamento do conhecimento didático do professor, para a melhoria contínua das práticas de ensino e para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. A sua origem remonta ao Japão, onde se consolidou como prática habitual de desenvolvimento profissional docente, evoluindo ao longo do tempo e adaptando-se a diferentes contextos educativos em vários países. Além disso, a estruturação em fases específicas, desde a definição de objetivos até à reflexão pós-aula, organiza de forma clara cada etapa, permitindo antecipar dificuldades, ajustar intervenções conforme as necessidades reais dos alunos e promover aprendizagens mais significativas. Assim, o estudo de aula destaca-se como um caminho para um ensino mais reflexivo, colaborativo e centrado no progresso dos alunos.

### **A Álgebra no Ensino de Matemática nos primeiros anos escolares**

**Natureza e evolução do conceito de Álgebra escolar.** Segundo Ponte (2017), a Álgebra pode ser entendida como um ramo da Matemática que se estrutura em torno de “duas ideias fundamentais: a noção de variável como entidade abstrata que pode ser representada de várias formas (simbólicas e não simbólicas) e a noção de estrutura envolvendo relações, operações e suas propriedades” (p. 27). Para o autor, importa salientar que, através do uso de variáveis, é possível formular generalizações sobre as estruturas matemáticas.

Historicamente, Matos et al. (2008) observaram que, em Portugal e noutros países, a Álgebra permaneceu muito tempo sendo tratada tradicionalmente como um estudo

centrado apenas na manipulação de expressões simbólicas. Durante o século XX, segundo Alexandre (2015) e Matos et al. (2008), o estudo da Álgebra quase não se evidenciou nos currículos de matemática dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, por ser vista como uma das áreas da matemática que mais provoca insucesso escolar. Matos et al. (2008) apontam ainda que, para combater tal insucesso, alguns autores defendiam uma redução do peso da Álgebra no currículo, assim como, também havia quem defendia o seu adiamento para níveis de escolaridade mais avançados.

Em contrapartida, os autores destacam que alguns investigadores, nos últimos anos, têm procurado aprofundar a compreensão do pensamento algébrico, propondo uma visão mais abrangente do que apenas o conceito conhecido tradicionalmente, restrito à manipulação de expressões simbólicas. Assim, Cyrino e Oliveira (2011) complementam esta perspetiva ao caracterizarem o pensamento algébrico enquanto instrumento para “descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos” (p. 103). Esta definição salienta que a Álgebra não se limita à manipulação de expressões simbólicas.

**A Álgebra segundo as Aprendizagens Essenciais.** De acordo com os documentos das Aprendizagens Essenciais da Matemática (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d, 2021e, 2021f), no 1.º ciclo do ensino básico, a Álgebra é apresentada como um tema matemático autónomo, mas estritamente articulado com outros domínios, nomeadamente com o tema dos Números, numa lógica de aritmética generalizada. Além disso, os referidos documentos destacam a valorização do desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo do ensino básico e o respetivo aprofundamento no 2.º ciclo do ensino básico. Ao analisar esses documentos referentes, aos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, observa-se que o ensino da Álgebra se assenta sobretudo na identificação de regularidades em sequências e no estudo de expressões e relações numéricas e algébricas.

De acordo com os mesmos documentos, o ensino de regularidades em sequências constitui uma componente estruturante no desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. No 1.º ciclo do ensino básico, as sequências de repetição são exploradas desde o 1.º ano, prolongando-se até ao 3.º ano. Por outro lado, as sequências de crescimento surgem no 2.º ano, estendendo-se por todo o 1.º ciclo do

ensino básico, com um grau de complexidade crescente, nomeadamente na formulação de regras de formação (em linguagem natural). Já no 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, o estudo de regularidades aprofunda-se com a introdução das sequências geométricas e com a análise das leis de formação, sendo exploradas não só em linguagem natural, como também pictórica e simbólica. Por fim, no 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, exploram-se as leis de formação de sequências numéricas decrescentes.

Em relação às expressões e relações numéricas e algébricas, tais documentos mostram que, ao longo do 1.º ciclo do ensino básico, são estudadas igualdades aritméticas, começando pela adição no 1.º ano, envolvendo a subtração no 2.º ano, a multiplicação no 3.º ano e a divisão no 4.º ano. Durante todos os quatro anos do ciclo de ensino, estudam-se progressivamente relações numéricas e algébricas, assim como as propriedades das operações. Passando para o 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, são introduzidas as letras nas expressões algébricas, bem como estudadas expressões algébricas equivalentes. Já no 6.º ano deste ciclo de ensino, os alunos aprofundam as propriedades das operações e é introduzida a proporcionalidade direta.

**O uso de materiais manipuláveis no ensino de Álgebra.** A utilização de materiais manipuláveis no ensino da Álgebra tem vindo a revelar-se uma estratégia didática fundamental para promover uma aprendizagem ativa e significativa. Em concordância com Borrallho et al. (2007), é fundamental que os alunos tenham oportunidades para realizar tarefas de natureza exploratória, usando diversos materiais manipuláveis, visto que essa abordagem facilita a "identificar, criar e continuar padrões e lidar com as diferentes propriedades das relações" (p. 6).

A importância dos materiais manipuláveis no ensino de padrões evidencia-se pelo seu destaque nas Aprendizagens Essenciais da Matemática do 4.º ano do 1.º ciclo do ensino básico: "a exploração de padrões com recurso a materiais manipuláveis, proporciona frequentes oportunidades para as crianças reconhecerem e trabalharem com regularidades" (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021d, p. 10). No documento referente ao 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, este recurso também é salientado: "os materiais manipuláveis devem ser utilizados sempre que favoreçam a compreensão de conhecimentos matemáticos e a conexão entre diferentes representações matemáticas" (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021e, p. 6).

Alsina e Bosch (2022) referem que a seleção de materiais para o ensino deve respeitar critérios relacionados com os conteúdos abordados, os objetivos de aprendizagem e as características do próprio material. Na sua investigação, os autores sublinham que o critério mais relevante é que “o mesmo material possa ser utilizado para criar propostas educativas que permitam não só praticar conceitos, mas também descobri-los através da experimentação; visualizá-los para referência; criar ligações; e pesquisar” (p. 143).

Importa referir também que os materiais manipuláveis podem ser considerados estruturados ou não estruturados. De acordo com Espinoza e Moreira (2021), os materiais estruturados têm um objetivo específico e as possibilidades de uso são restritas a esse objetivo, já os não estruturados, não seguem um objetivo específico, pois utilizam-se “segundo a criatividade de os docentes e estudantes, permitindo a exploração de novos conhecimentos fortalecendo a memória, atenção, associação em particular” (p. 317).

**O pensamento algébrico desde os primeiros anos.** Segundo Ponte (2017), nos últimos anos, têm-se vindo a defender uma abordagem que propõe que o pensamento algébrico seja promovido desde os primeiros anos de escolaridade, mesmo sem ainda recorrer a uma linguagem simbólica formal. Esta perspetiva é conhecida internacionalmente como “Early Algebra”. Alsina e Bosch (2024) complementam esta perspetiva ao mostrar que a Álgebra, introduzida desde os primeiros anos de escolaridade, favorece o desenvolvimento de capacidades de raciocínio que facilitam uma visão mais ampla não apenas da Matemática, mas também de tudo o que nos rodeia.

Da mesma forma, Alexandre (2015) apoia esta introdução precoce ao defender que a exploração do pensamento algébrico e a sua interligação com o pensamento aritmético, desde os primeiros anos de escolaridade, permite aos alunos desenvolverem conceitos que se tornam uma base sólida para aprendizagens mais avançadas, especialmente no domínio da Álgebra. Além disso, importa reconhecer que a forma como se explora o pensamento algébrico pode contribuir significativamente para o seu desenvolvimento. Neste sentido, Infante (2014) reforça que “a introdução de tarefas de carácter investigativo e exploratório potenciam, em grande parte, o desenvolvimento do pensamento algébrico e contribuem para uma aprendizagem com ênfase na construção dos significados” (p. 18).

**Padrões como base do pensamento algébrico.** Borrallho et al. (2007) salientam que “os

alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões” (p. 5). Esta abordagem confirma que a exploração de regularidades é uma estratégia didática eficaz para construir as bases do pensamento algébrico e combater a visão restrita da Álgebra.

Ponte (2017) destaca a importância do estudo de regularidades em sequências, sublinhando a relevância de articular as diferentes formas de representação (numéricas, visuais e expressas em linguagem natural), de modo a facilitar a compreensão e a generalização de padrões. Assim, trabalhar com múltiplas representações torna-se um aspecto essencial para promover uma aprendizagem mais significativa.

Borrvalho et al. (2007) também consideram que os padrões sejam uma via eficaz para introduzir o estudo da Álgebra e apoiar o desenvolvimento do raciocínio pré-algébrico. Estes autores recordam que, para muitos, o termo Álgebra ainda é entendido de forma restrita, limitando-se geralmente a incógnitas, operações e equações. No entanto, defendem que o pensamento algébrico pode começar a ser desenvolvido logo no Jardim de Infância e no 1.º ciclo do ensino básico, através da exploração de padrões e regularidades.

Conforme Alexandre (2015), “o estudo de padrões permite que os alunos estabeleçam relações, conexões, formulem conjecturas e que as testem e também, que façam generalizações” (p. 15). Para o autor, os padrões constituem um tópico valioso que possibilita estabelecer ligações entre diversos temas matemáticos.

De acordo com Winjs et al. (2019), o trabalho com padrões é reconhecido há várias décadas, por vários investigadores, como um elemento essencial da aprendizagem matemática. Os autores destacam que, ao propor tarefas de padrões, é fundamental considerar dois fatores que moldam a sua complexidade: por um lado, o tipo de padrão trabalhado, como é o caso do repetitivo ou de crescimento; por outro lado, a natureza da tarefa, como copiar, continuar ou interpolar um padrão. Estes aspetos, entre outros, influenciam diretamente o nível de complexidade cognitiva exigida aos alunos, podendo facilitar ou dificultar a identificação de regularidades e a sua generalização.

Conforme Winjs et al. (2019), para promover o estudo de padrões relacionado a crianças dos primeiros anos escolares, devem-se envolver tarefas de naturezas diferentes (já

mencionadas) com materiais disponíveis no seu dia a dia. Neste contexto, Fox (2005) sublinha o papel do professor como mediador, defendendo que este deve fornecer materiais diversificados, questionar as crianças, e encorajá-las a criarem padrões livremente. Estes procedimentos contribuem para estimular o pensamento algébrico de forma natural.

A motivação para preparar tarefas relacionadas a padrões para crianças, no contexto mencionado, parece ser evidente, pois, segundo Fox (2005) e Winjs et al. (2019), as próprias crianças tendem a criar padrões espontaneamente enquanto brincam. Assim, esta vertente lúdica fortalece o envolvimento e o interesse, tornando o estudo de padrões uma base apelativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Borrvalho et al. (2007) apontam que através dessa liberdade ao explorar padrões, também se gera um vínculo emocional, visto que “existe a sensação de entusiasmo na descoberta de uma ordem, de uma previsão, da relação funcional que antes estava escondida” (p. 14). Além disso, ao abordar a generalização na Álgebra, estes autores destacam que “os padrões lineares são normalmente os mais utilizados nesta abordagem com alunos do ensino básico, podendo ser utilizados também padrões não lineares, como por exemplo os que envolvam quadrados de números” (p. 6). Esta diversidade de padrões amplia as possibilidades de exploração didática e a articulação com outros conteúdos matemáticos.

Conforme Borrvalho et al. (2007), outra dimensão relevante do estudo de padrões, relaciona-se com a resolução de problemas baseada no trabalho investigativo, sendo esta considerada uma via eficaz de “exploração da álgebra, sobretudo se se utilizarem problemas significativos para os alunos onde o uso da álgebra seja relevante” (p. 7). Os mesmos autores destacam que esta prática, além de ser vista como uma oportunidade para desenvolver tarefas de natureza investigativa, também permite estabelecer conexões e formar explicações para fenómenos e relações que surgem durante a resolução da tarefa. Além disso, os mesmos autores afirmam ainda “que os padrões no ensino básico são um tema transversal a vários níveis de escolaridade e servem propósitos imediatos de diferentes conteúdos e em particular os propósitos de criação de uma base para a aprendizagem da Álgebra” (p. 14).

Assim, como sublinham Borrvalho et al. (2007), “encontrar termos numa sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à álgebra. A questão é saber se os alunos

conseguem encontrar a regra que conduz ao termo geral e como o fazem” (p. 6). Este processo desafia os alunos a irem além da repetição, incentivando-os a compreender e expressar a estrutura que sustenta o padrão.

**Pensamento recursivo, pensamento funcional e respetivos desafios.** No processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, é fundamental compreender os diferentes níveis de raciocínio que os alunos apresentam ao lidar com sequências e padrões. Winjs et al. (2019) identificam dois níveis principais de pensamento: o pensamento recursivo e o pensamento funcional. Os autores mostram que a transição de uma forma de pensar mais local, centrada na relação entre termos consecutivos (pensamento recursivo), para uma perspetiva global, relacionada à compreensão da estrutura subjacente do padrão (pensamento funcional) é considerado um passo fundamental no desenvolvimento das capacidades de trabalho com sequências. Os autores referem também que, em muitas situações, os alunos podem recorrer à compreensão da unidade de repetição para resolver tarefas como copiar, prolongar ou interpolar padrões, sem que isso implique, necessariamente, um pensamento funcional mais desenvolvido.

Complementando essa perspetiva, Tall (1992) alerta para as dificuldades que uma abordagem excessivamente recursiva pode trazer para a aprendizagem da Álgebra. Segundo o autor, “uma visão procedimental da aritmética pode levar à interpretação de uma expressão algébrica como um processo que não pode ser realizado e causar um obstáculo conceptual considerável” (p. 17). Desta forma, o autor reforça que tal visão pode dificultar a descoberta da lei de formação de uma sequência.

Em síntese, a literatura analisada evidencia que o desenvolvimento da Álgebra nos primeiros anos escolares destaca a importância de uma abordagem progressiva e contextualizada, alinhada com as orientações das Aprendizagens Essenciais, que valorize o desenvolvimento do pensamento algébrico desde cedo. Destaca-se o papel do professor na criação de práticas didáticas que incentivem a descoberta e a generalização através da exploração de padrões, regularidades e do uso de materiais manipuláveis. Este percurso favorece a transição do pensamento recursivo para o funcional, superando os desafios inerentes a esta evolução e promovendo aprendizagens mais significativas.

## **Capítulo II – Enquadramento metodológico**

Ao longo deste capítulo, apresento as opções metodológicas que orientaram o desenvolvimento do presente estudo. Inicialmente, é definida a questão de partida e são enumerados os objetivos da investigação. De seguida, é descrito o design de investigação adotado, justificando a sua adequação ao estudo. Seguidamente, caracterizo os participantes, o contexto educativo e a intervenção desenvolvida. Posteriormente, detallo os instrumentos utilizados na recolha e análise de dados, bem como os procedimentos seguidos. Por fim, abordo os princípios éticos que sustentaram todo o processo investigativo.

### **Definição da questão de partida e objetivos**

Este estudo teve como ponto de partida a seguinte questão de investigação: “De que forma a utilização de materiais manipuláveis pode contribuir para a compreensão de regularidades em sequências de crescimento por alunos do 5.º ano de escolaridade?”.

Com base na questão de investigação defini os seguintes objetivos:

1. Explorar o impacto da utilização de materiais manipuláveis na identificação e generalização de regularidades em sequências de crescimento;
2. Compreender as estratégias desenvolvidas pelos alunos durante a resolução das tarefas propostas;
3. Analisar o contributo da discussão em turma, promovida no âmbito do ensino exploratório, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

### **Design de Investigação**

Este estudo, segue uma perspetiva de investigação qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklan (1999), visto apresentar dados qualitativos, que integram vários detalhes descritivos. Além do mais, estes autores, destacam outras características dessa investigação tais como: as questões investigativas procuram analisar os fenómenos tal como ocorrem no seu contexto natural; dá-se primazia à compreensão de comportamentos a partir da visão dos próprios participantes, dando menos ênfase a fatores externos; a recolha de dados acontece geralmente através de uma convivência próxima com os

participantes, no ambiente onde normalmente interagem; a observação participante por parte do investigador é uma das estratégias que melhor traduz esta abordagem.

### **Participantes, contexto e intervenção educativa**

Este estudo, decorreu no ano letivo 2024/25, numa turma do 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, de uma escola do concelho de Tavira. A turma é composta por dezassete alunos, dos quais nove do sexo feminino e oito do sexo masculino, com idades compreendidas entre dez e doze anos. Trata-se de uma turma com elevada diversidade multicultural, sendo que treze alunos têm pelo menos um dos progenitores com nacionalidade estrangeira. Além do mais, cinco destes alunos frequentam aulas de Português Língua Não Materna.

Importa referir o enquadramento legal das medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão, conforme previsto no Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, alterado pela Lei 116/2019, de 13 de setembro, que estabelece os princípios da educação inclusiva. Tal documento define três níveis de medidas aplicadas em função das necessidades de cada aluno: universais, seletivas e adicionais. Na turma em estudo, foi identificado um aluno que beneficia de medidas seletivas. No caso específico deste aluno, foram implementadas as seguintes alíneas: “b) As adaptações curriculares não significativas; c) O apoio psicopedagógico; d) A antecipação e o reforço das aprendizagens”.

A intervenção educativa desenvolveu-se ao longo de duas aulas de cem minutos estruturadas com base no ensino exploratório, um modelo que promoveu a construção ativa das aprendizagens pelos alunos, em que os alunos trabalharam em pequenos grupos. Segundo Guerreiro et al. (2015), este modelo exige que o professor escute atentamente os alunos para compreender os seus raciocínios e dificuldades. Já de acordo com Menezes et al. (2015), este método divide a aula em quatro fases fundamentais: introdução da tarefa, exploração da tarefa, discussão em turma e sistematização das aprendizagens matemáticas. No entanto, alguns autores, como Duarte et al. (2023), defendem que se possa considerar apenas três fases no ensino exploratório, começando pelas duas fases iguais às mencionadas e juntando assim a discussão em turma com a sistematização das aprendizagens numa só fase.

Conforme Menezes et al. (2015) e Guerreiro et al. (2015), durante a introdução da tarefa, o professor confirma que todos os alunos percebem o que lhes é proposto. Já na segunda

fase, na exploração da tarefa, os alunos trabalham autonomamente, normalmente em pequenos grupos, enquanto o professor observa tal trabalho autónomo, confirmando que todos se envolvam na tarefa e interagindo com os alunos quando necessário, mas sem comprometer o nível de complexidade cognitiva da tarefa. Além disso, o professor seleciona as estratégias para serem apresentadas na discussão e a respetiva ordem. Passando para a discussão em turma, o professor conduz a discussão de modo a proporcionar a comparação entre diferentes estratégias e promove a participação dos alunos. Finalmente, na última fase de aula, o professor resume as aprendizagens matemáticas mais destacadas durante a discussão em turma. Nas planificações realizadas, deste estudo, optou-se por seguir o modelo das quatro fases, no entanto, no decorrer das aulas, decidiu-se juntar as duas últimas fases desse modelo, seguindo assim o modelo de três fases. Além disso, achou-se pertinente acrescentar uma pequena fase final, não prevista no processo de estudo de aula, dedicada às autoavaliações e heteroavaliações.

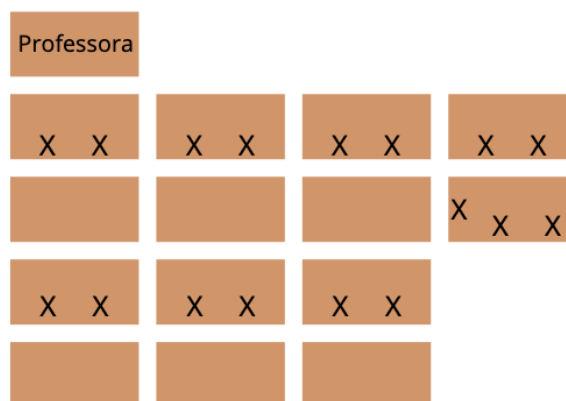
Em relação às aulas de investigação, foi desenvolvida uma tarefa para cada aula, ambas recorrendo a materiais manipuláveis não estruturados. A primeira tarefa (Apêndice A) centrou-se na utilização de copos para representar uma sequência de progressão aritmética, inspirada no artigo de Bannister e Wilkins (2007). Por sua vez, a segunda tarefa (Apêndice B), baseou-se numa adaptação da lenda do xadrez apresentada no documento de Santos et al. (2022) e utilizando feijões para representar uma sequência de progressão geométrica. Importa referir que a primeira aula teve como um dos seus objetivos, a recapitulação das sequências numéricas abordadas em anos anteriores, enquanto a segunda pretendia iniciar o estudo de progressões geométricas que é previsto para este ano de escolaridade de acordo com as Aprendizagens Essenciais da Matemática (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021e).

A sala de aula onde decorreu a investigação encontrava-se organizada em quatro filas de mesas. Cada fila dispunha de três a quatro mesas, estando cada uma equipada com duas cadeiras para os alunos, como se observa na Figura 2.1. A secretária da professora estava posicionada na parte da frente da sala, de forma a ser visível para todos os grupos, apesar de não ter sido utilizada nas intervenções. Com o objetivo de minimizar o ruído durante o trabalho autónomo em grupo e favorecer a concentração dos alunos, optou-se por intercalar as filas ocupadas com uma fila de mesas sem ninguém, criando um maior espaço entre os grupos. No entanto, foi necessário utilizar uma mesa adicional na fila intermédia, devido à ausência de mesas suficientes numa das filas ocupadas. Esta

disposição permitiu também uma circulação mais fluida pela sala, promovendo um ambiente propício à observação.

**Figura 2.1.**

*Esquema com a organização da sala de aula*



*Nota.* Cada retângulo representa uma mesa, cada “X” indica um lugar ocupado por um aluno e o retângulo superior esquerdo assinala a posição da secretária da professora.

### **Instrumentos de recolha e análise de dados**

Nesta investigação, foram utilizados instrumentos relacionados especificamente com o processo do estudo de aula, tais como os registos em formato de vídeo e áudio de todas as reuniões realizadas, desde as planificações iniciais até às análises e reflexões conjuntas. Para além destes, incluíram-se ainda registos escritos das observações realizadas pelos outros elementos do estudo de aula durante as aulas de investigação. Estes instrumentos foram posteriormente analisados, permitindo evidenciar como foram antecipadas as dificuldades dos alunos, de que modo se construíram as intervenções ajustadas ao contexto real da turma, bem como outros aspetos relevantes.

As gravações áudio das interações dos alunos, realizadas com o auxílio de oito gravadores de voz (um por grupo), em ambas as aulas lecionadas, foram um dos principais instrumentos utilizados na recolha de dados. Estes dispositivos foram distribuídos pelas mesas dos alunos com o objetivo de registar as interações verbais entre os alunos de cada grupo durante a resolução das tarefas, bem como as interações de toda a turma durante a discussão coletiva. Este instrumento permitiu-me aceder posteriormente às discussões dos alunos, identificar raciocínios, dúvidas e argumentos utilizados no trabalho a pares e em

coletivo com a turma, fornecendo informações relevantes para a análise das aprendizagens dos alunos. Foram igualmente recolhidos os registos escritos dos alunos, nomeadamente as folhas de enunciado e as folhas de rascunho utilizadas durante as aulas, com o objetivo de analisar as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas.

Um outro instrumento de recolha de dados utilizado foi uma grelha de registo de observação, construída especificamente para observar e registar, durante a aula, as estratégias utilizadas pelos alunos durante a realização das tarefas propostas. Esta grelha permitiu-me acompanhar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, identificar dificuldades, bem como recolher exemplos significativos para análise durante a fase de discussão em turma. O uso deste instrumento insere-se na abordagem da observação participante, uma vez que, enquanto a professora/investigadora orientava a aula, observava simultaneamente o comportamento e as interações dos alunos. Além disso, após a realização das aulas, os alunos preencheram grelhas de autoavaliação e heteroavaliação, as quais permitiram recolher informação sobre as suas perceções relativamente às atitudes, procedimentos e conceitos trabalhados.

Os dados provenientes dos diferentes instrumentos de recolha foram analisados através da identificação de padrões de raciocínio, dificuldades e evidências de aprendizagem. Assim, selecionei excertos das transcrições e produções escritas que ilustrassem as aprendizagens em análise. O cruzamento de dados de diferentes fontes, numa lógica de triangulação, contribuiu para reforçar a validade das interpretações.

Os resultados desta análise, organizados por cada uma das aulas, descrevem as atividades realizadas pelos alunos nas diferentes alíneas de cada uma das tarefas, individualmente ou agrupadas, conforme se revelou mais adequado. Para cada alínea, destacou-se o trabalho de alguns grupos cuja resolução se considerou particularmente relevante, sendo também apresentada a respetiva discussão em turma.

### **Procedimentos éticos**

O estudo respeitou os princípios éticos perante uma investigação com alunos menores. Foi entregue um documento de consentimento informado (Apêndice C) aos encarregados de educação dos alunos participantes. Todos os dados recolhidos foram tratados com confidencialidade e anonimato, sendo utilizados exclusivamente para fins académicos. Para preservar a identidade dos alunos, atribuíram-se nomes fictícios aos mesmos.

## **Capítulo III – Intervenção educativa, apresentação e discussão dos resultados**

O presente capítulo pormenoriza a intervenção educativa realizada no âmbito deste estudo, bem como a análise e discussão dos dados recolhidos. O capítulo está organizado em quatro subcapítulos, sendo que no primeiro, descrevo o processo do estudo de aula, evidenciando a colaboração entre os intervenientes e a estrutura geral deste modelo. No segundo, apresento o processo de planificação das aulas de investigação. No terceiro subcapítulo, analiso as duas aulas implementadas, organizando os dados recolhidos em função de cada tarefa, com destaque para os raciocínios dos alunos e as interações em turma. Por fim, no último subcapítulo, reflito sobre as aprendizagens promovidas e os desafios enfrentados ao longo de todo este processo. Importa referir que ao longo deste capítulo, ao ser mencionada uma professora, especialmente nos diálogos transcritos, refere-se à professora/investigadora, autora deste relatório.

### **Estudo de Aula**

A intervenção educativa desenvolveu-se ao longo de duas aulas de cem minutos, seguindo o modelo do estudo de aula, com foco nas regularidades em sequências de crescimento, em articulação com o tema da Álgebra definido nas Aprendizagens Essenciais da Matemática para o 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021e). Em ambas as aulas, foram propostas tarefas que recorreram a materiais manipuláveis não estruturados (copos na primeira aula e feijões na segunda).

O estudo de aula foi desenvolvido por três elementos: por mim, futura professora/investigadora, por uma colega do mesmo mestrado, também futura professora e por um docente da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve na área da Matemática. O trabalho colaborativo entre os três foi fundamental para a elaboração, análise, reformulação das tarefas propostas e reflexão conjunta sobre as intervenções.

Durante o processo do estudo de aula, foram realizadas cinco reuniões principais: três antes da primeira aula (dedicadas à planificação e elaboração das tarefas), uma após a implementação da primeira aula e antes da segunda (para análise da 1.ª aula e

reformulação da 2.<sup>a</sup>), e uma reunião final, após a implementação da segunda aula, destinada à reflexão global sobre o processo deste estudo.

Durante estas reuniões, analisámos e discutimos, não apenas as aulas, por mim lecionadas, como também as da minha colega, que desenvolveu duas aulas sobre o mesmo tema, numa turma do 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico. Importa referir que, ao contrário de mim, a minha colega não utilizou materiais manipuláveis nas suas intervenções.

Através deste processo do estudo de aula, tive também a oportunidade de observar as aulas lecionadas pela minha colega e ela observou as minhas. Desta forma, na reflexão sobre as aulas de investigação, refleti também sobre o meu papel como observadora.

### **Planificação das Aulas de Investigação**

Na primeira reunião, realizada no dia 27 de fevereiro de 2025, começou-se por analisar as ideias iniciais para a primeira tarefa, centrada na utilização de copos para representar uma progressão aritmética. Foram discutidos aspetos como o tempo estimado para a implementação da tarefa em sala de aula, a organização da turma (em pares) e o enunciado de algumas questões.

Durante a reunião, debateu-se a possibilidade de estruturar duas aulas: a primeira relacionada a uma progressão aritmética (com os copos) e a segunda relativa à exploração de uma progressão geométrica. Para esta segunda aula, surgiram duas ideias principais: por um lado, a proposta de dobrar sucessivamente um guardanapo, observando o número de partes resultantes; por outro, a adaptação da lenda do xadrez, recorrendo a materiais manipuláveis.

Discutiu-se a hipótese de simular a recompensa da lenda, isto é, o crescimento exponencial de grãos de trigo, utilizando feijões ou grãos-de-bico, que poderiam ser colocados nos copos utilizados na primeira aula, estabelecendo assim uma ligação entre as duas tarefas. Foi também sugerida a criação de um tabuleiro de jogo, inspirado no tabuleiro de xadrez, mas com menos casas, onde os alunos poderiam representar o crescimento da sequência colocando os grãos casa a casa. Após esta reunião, desenvolveram-se os enunciados das tarefas para cada uma das duas aulas previstas.

A segunda reunião do estudo de aula realizou-se no dia 20 de março e teve como principal objetivo analisar e reformular o enunciado das tarefas propostas para as duas aulas. No início da reunião, apresentei o possível enunciado da tarefa dos copos. Este enunciado incluía uma figura ilustrativa com três torres de copos: a 1.<sup>a</sup> torre apresentava dois copos, a 2.<sup>a</sup> quatro copos e a 3.<sup>a</sup> seis copos.

A primeira questão proposta aos alunos consistia em construir torres iguais às da figura, utilizando copos. Em seguida, era apresentada uma tabela com os números de copos (2, 4, 6, 8 e 10) e um espaço para preencherem com a correspondente altura a ser medida pelos próprios alunos com uma régua.

Durante a discussão colaborativa, foi sugerido que se acrescentasse uma nova linha na tabela que apresentasse o número da torre correspondente a cada conjunto de copos, facilitando assim a organização dos dados. Desta forma, a tabela final passou a ter três linhas: uma com o número da torre (já preenchida), uma com o número de copos (a preencher pelos alunos) e outra com a altura da torre (também por preencher).

A terceira questão do enunciado que pedia aos alunos que calculassem a altura de uma torre constituída por 20 copos, foi mantida sem alterações. No entanto, foi proposta uma nova questão, dando seguimento à questão anterior, que desafiava os alunos a determinarem a altura da torre número 16.

A questão final do enunciado pedia aos alunos que descobrissem o “segredo das torres dos copos”, ou seja, que encontrassem uma forma geral de calcular a altura de qualquer torre. Após apresentação aos restantes elementos do estudo de aula, esta questão foi considerada pertinente e manteve-se tal como inicialmente proposta.

Durante esta reunião, discutiu-se a possibilidade de alguns alunos utilizarem as régua a 90°, de forma perpendicular à mesa, e outros inclinarem as régua, o que resultaria em medições diferentes. Outro aspeto debatido foi a importância de não prolongar demasiado o tempo dedicado ao trabalho autónomo, de modo a assegurar que houvesse tempo suficiente para a discussão em grande grupo. Discutiram-se as fases da aula e os tempos atribuídos a cada momento, bem como a hipótese de se realizar a leitura conjunta do enunciado no início da aula, com o objetivo de esclarecer desde o início eventuais questões relacionadas ao vocabulário.

Posteriormente, apresentei o possível enunciado das questões da segunda aula. O enunciado começava com uma versão resumida da lenda. Em seguida, era proposto aos alunos que imaginassem a criação de um jogo de tabuleiro com nove casas, no qual receberiam feijões, seguindo um esquema de recompensa semelhante ao da lenda, ou seja, começando com um feijão na primeira casa, dois na segunda, quatro na terceira, e assim sucessivamente.

As primeiras questões colocadas aos alunos, tinham o objetivo de reconhecer as suas ideias prévias relacionadas ao crescimento exponencial, perguntando-lhes se achavam que o número de feijões cresceria lentamente ou rapidamente e quantos feijões estimavam receber no total.

De seguida, apresentavam-se questões sobre a recompensa em feijões, sendo que, numa delas, os alunos deveriam calcular quantos feijões receberiam apenas pela 2.<sup>a</sup> casa e apenas pela 5.<sup>a</sup> casa. Numa outra questão, eram apresentados alguns valores de uma recompensa até uma determinada casa (3 e 15 feijões) e pedia-se aos alunos que determinassem até que casa teriam sido pagos.

Estas questões pretendiam promover a compreensão da progressão geométrica, tanto no número de feijões recebido em cada casa individualmente como na soma acumulada de feijões ao longo de várias casas do tabuleiro. Ambas as questões foram mantidas no enunciado, tendo apenas sido reformuladas em termos de linguagem, com pequenas alterações para tornar a sua interpretação mais acessível aos alunos.

A 4.<sup>a</sup> questão apresentava a hipótese de os alunos receberem 32 feijões e perguntava se já teriam sido pagos pelas seis primeiras casas do tabuleiro. O objetivo desta questão era verificar se os alunos conseguiam distinguir entre o número de feijões recebido numa única casa e a quantidade acumulada ao longo de várias casas. Esta questão manteve-se inalterada.

A 5.<sup>a</sup> questão propunha a generalização do padrão, tanto para o número de feijões recebidos apenas pela 9.<sup>a</sup> casa como para o total de feijões recebidos por todas as 9 casas. Esta questão também não sofreu alterações no seu enunciado.

Na 6.<sup>a</sup> questão, era perguntado aos alunos como poderiam determinar quantos feijões receberiam por qualquer casa do tabuleiro e quantos receberiam até uma determinada

casa. Durante a reunião, foi discutida a adequação desta questão ao nível de escolaridade dos alunos e concluiu-se que a parte relacionada à soma acumulada seria demasiado complexa. Assim, manteve-se só a primeira parte desta questão.

Foram ainda consideradas duas questões adicionais, relacionadas à possibilidade de o tabuleiro ter mais casas. No entanto, por seguirem um raciocínio semelhante ao de questões já incluídas no enunciado, estas acabaram por ser não consideradas.

Entre a segunda e a terceira reunião, desenvolvi as planificações das duas aulas, tendo em conta os objetivos de aprendizagem, a estratégia geral, a estrutura da aula e os recursos a utilizar. A estrutura das planificações, baseou-se no esquema apresentado em Ponte et al. (2015), assim, incluíram-se as fases da aula e a duração prevista para cada uma, a atividade dos alunos, as possíveis dificuldades, as respostas do professor e os objetivos específicos de avaliação dos alunos. Para motivar ainda mais os alunos, decidi colocar os enunciados das tarefas em formatos distintos: o da primeira aula com o formato de um copo (Apêndice A) e o da segunda aula com o formato de um feijão (Apêndice B).

Na terceira reunião, partilhei com os restantes elementos do estudo de aula o plano da 1.<sup>a</sup> aula (Apêndice D), bem como as possíveis resoluções previstas para cada questão (Apêndice E). Voltou a discutir-se a gestão do tempo em cada fase de aula e todos nós defendemos que seria essencial reservar bastante tempo de aula para a fase da discussão em grande grupo.

Debateu-se a possibilidade de alguns alunos realizarem medições incorretas das torres de copos, seja com a régua inclinada, seja por não começarem a medição no zero da régua, começando, por exemplo, uns milímetros antes, na borda de plástico da régua. Perante este caso, colocaram-se as hipóteses de ser necessário corrigi-los logo no início da aula, ou permitir que fizessem as medições de forma totalmente autónoma, abordando este aspeto apenas na discussão final em grande grupo. Todos concordaram que seria melhor permitir que os alunos fizessem as medições autonomamente, pois desta forma não se influenciaria o desenvolvimento da tarefa. Se necessário, discutir-se-ia esse aspeto em grande grupo.

Debateu-se também a possibilidade de os alunos aplicarem indevidamente a proporcionalidade direta, como, por exemplo, pensarem que a torre de vinte copos teria o dobro da altura da torre de dez copos. Foi sugerido que, nesse caso, durante a discussão

da tarefa, se apresentasse um contraexemplo, como, pedir para os alunos verificarem com os próprios copos se a torre de quatro copos tinha o dobro da altura da torre de dois copos. Assim, os alunos perceberiam que o dobro do número de copos não corresponde ao dobro de altura, visto estes estarem empilhados.

Discutiu-se também o tipo de autoavaliação a aplicar, sendo que apresentei duas hipóteses: uma grelha de autoavaliação com diversos parâmetros relacionados aos procedimentos, atitudes e conceitos, ou uma autoavaliação mais visual, na qual cada aluno escolhia uma peça circular verde, amarela ou vermelha, que representaria, respetivamente, “gostei muito da aula”, “gostei mais ou menos da aula” e “não gostei da aula”.

No caso da opção das peças circulares, reconheceu-se que os alunos poderiam não ser totalmente honestos na escolha, visto que seriam observados pelos colegas ao escolher a peça e poderiam não querer demonstrar que não gostaram da aula. Assim, a grelha, ao ser preenchida individualmente sem que ninguém visse, pareceu ser a hipótese mais fidedigna. Desta forma, todos concluímos que seria mais benéfica a utilização da grelha (Apêndice F), uma vez que esta englobava vários parâmetros e garantia maior privacidade e sinceridade na resposta. Além disso, também decidimos acrescentar à grelha dois parâmetros sobre a heteroavaliação, para que os alunos pudessem apresentar a sua opinião sobre a participação dos colegas de grupo na resolução da tarefa, e também sobre a apresentação de ideias pelos colegas de turma durante a discussão em grande grupo.

Nesta reunião, partilhei também as possíveis resoluções da tarefa para cada questão e decidimos acrescentar uma hipótese de resolução incorreta, relacionada à aplicação indevida da proporcionalidade direta. Além disso, foi-me sugerido que preparasse uma grelha de registo para anotar, durante a aula, as estratégias utilizadas pelos diferentes grupos em cada questão da tarefa. Desta forma, durante a discussão, poderia, assim, sugerir que algum grupo específico partilhasse estratégias utilizadas. Após esta reunião, preparei a grelha de registo (Apêndice G) para a primeira aula tendo em conta as possíveis resoluções da tarefa para cada questão. Atendendo à diversidade cultural da turma, os materiais foram traduzidos para nepalês (Apêndice H) e mandarim (Apêndice I).

Após a primeira aula, realizou-se no dia 2 de maio a quarta reunião do estudo de aula, com o objetivo de analisar a primeira aula e esclarecer dúvidas relativas à aula seguinte.

Mostrei o plano da 2.<sup>a</sup> aula (Apêndice J), bem como as hipóteses de resolução dos alunos (Apêndice K). Apresentei uma dúvida relativamente à possibilidade de os alunos confundirem o número de feijões recebidos numa determinada casa com o total acumulado até essa mesma casa. Procurava, assim, encontrar uma forma de esclarecer essa questão sem comprometer a autonomia dos alunos, nem revelar diretamente as respostas às questões.

Sugeriram-me recorrer a um exemplo paralelo, que não envolvesse uma sequência geométrica, mas que permitisse distinguir claramente os dois tipos de raciocínios, isto é, o valor recebido por uma só casa e a soma acumulada de várias casas, aplicados a situações diferentes e com números distintos, assim, sem relação direta com a tarefa dos feijões.

De seguida, questioneei se seria adequado apresentar diferentes expressões no quadro, caso os alunos não conseguissem chegar ao termo geral da sequência, permitindo-lhes identificá-la por tentativa e erro. Todos validaram essa estratégia, mas propuseram uma alternativa com base numa ilustração: representar a sequência no quadro através de círculos, sendo que cada círculo simbolizaria um feijão.

Para esta aula também se preparou uma grelha de autoavaliação e heteroavaliação (Apêndice L), uma grelha de registo (Apêndice M) e também se traduziram os materiais para nepalês (Apêndice N) e mandarim (Apêndice O).

### **Primeira Aula de Investigação**

No dia 29 de abril de 2025, a aula teve início às 10h10. Comecei por distribuir os alunos pelas mesas, de acordo com os grupos (pares) previamente definidos. Cinco minutos depois, apresentei aos alunos os elementos que não conheciam na sala de aula, nomeadamente o docente da universidade e a minha colega, futura professora. Em seguida, expliquei que seriam utilizados gravadores de som, relacionando esse facto com o documento de consentimento informado, anteriormente enviado para casa dos alunos. Depois, solicitei a um aluno que distribuísse os enunciados da tarefa pelos diferentes grupos (um por grupo).

**Apresentação da Tarefa.** Com os enunciados em mãos, passou-se à leitura coletiva. Primeiro, pedi a um aluno que iniciasse a leitura em voz alta, sendo a leitura continuada

por outro colega. Depois, perguntei aos alunos se havia alguma dúvida inicial relacionada com o enunciado, tendo os alunos respondido que não. De seguida, distribuí doze copos por grupo e pedi a uma aluna que distribuisse uma régua por mesa.

**Trabalho Autónomo.** Iniciou-se o trabalho autónomo às 10h20. Todos os alunos começaram por empilhar os copos, de modo a reproduzir a sequência representada na figura e mediram as torres com o auxílio da régua. Durante esta fase, circulei pelos grupos e observei que alguns alunos mediam as torres com a régua inclinada, enquanto outros utilizavam-na de forma perpendicular à mesa. Para além da observação direta das ações dos alunos, acompanhei o diálogo entre os elementos de cada grupo e observei as respostas escritas nos enunciados, com o objetivo de compreender as estratégias utilizadas e registá-las na grelha de observação previamente preparada.

**Apresentação e Discussão.** De seguida, na fase de apresentação e discussão, passou-se à análise das questões do enunciado, sendo esta realizada questão a questão, à exceção da primeira e segunda, que foram analisadas em conjunto. Em cada questão, destacam-se interações relevantes entre os alunos, bem como interações entre a professora/investigadora e os alunos. Essas interações são apresentadas a seguir, organizadas por questão. Para cada uma, descrevem-se, primeiramente, as interações ocorridas durante a fase de trabalho autónomo e, posteriormente, as que surgiram na discussão entre toda a turma. Importa referir ainda que a fase da discussão coletiva teve início apenas após todos os grupos concluírem o trabalho autónomo, o que ocorreu às 11h09.

**Questões n.º 1 e n.º 2 – Trabalho Autónomo.** Em relação à primeira questão, todos os grupos construíram corretamente a sequência de torres solicitada, recorrendo a dois copos para a primeira torre, quatro para a segunda e seis para a terceira. Na segunda questão, era pedido que medissem as torres e preenchessem uma tabela com os dados referentes às cinco primeiras torres, nomeadamente o número de copos e a altura de cada torre.

Todos os grupos, à exceção do grupo G, construíram as cinco torres com o número de copos correto, respeitando a sequência apresentada, e preencheram os respetivos valores nas tabelas. Apesar de utilizarem copos iguais e seguirem a mesma sequência numérica (à exceção do grupo G) obtiveram alturas diferentes nas mesmas torres.

**Grupo A.** Poucos segundos após o início do trabalho autónomo, o João observou a figura

e identificou imediatamente que o número de copos correspondia ao dobro do número da torre. Este momento foi registado numa das gravações:

João: – Isto [o número de copos] é o dobro da torre. Imagina, a torre quatro vai ter quantos copos?

Sara: – Oito!

**Grupo D.** Os dois alunos deste grupo dialogaram entre si, identificando a relação entre o número da torre e o número de copos, bem como o que lhes era pedido nas duas linhas por preencher da tabela:

Elena: – É a tabuada do dois.

Leonardo: – Sim, é vezes dois.

Elena: – Então, é: dois, quatro, seis, oito e dez.

Leonardo: – E o de baixo [a última linha da tabela] é em centímetros.

**Grupo G.** Os alunos deste grupo, embora já compreendam diversas palavras em português, têm o espanhol como língua materna, o que pode ter provocado algumas dificuldades de interpretação. Construíram corretamente as três primeiras torres representadas na figura e mediram-nas com a régua. Ao chegarem à torre número quatro, um dos alunos dirigiu-se à professora para esclarecer como deveria preencher o resto da tabela. Estabeleceu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Pensem como podem responder a isso. Têm de arranjar uma solução para responder. Podem fazer como quiserem.

Kauhê: – Ah! Como quisermos.

Professora: – Sim, como quiserem.

A minha intenção neste momento era transmitir aos alunos a ideia de que poderiam utilizar estratégias diferentes para preencher a tabela, como, por exemplo, construir fisicamente as torres e medi-las, ou realizar cálculos com base na regularidade da sequência. No entanto, ao ouvirem a expressão “como quiserem”, os alunos interpretaram que as torres número quatro e cinco poderiam ser construídas com o número de copos que

eles quisessem. Assim, optaram por utilizar todos os doze copos disponíveis na construção da torre número quatro e dez copos na torre número cinco.

Quando comecei a circular novamente pela sala, os alunos conversavam entre si e destacou-se o seguinte comentário relativo à torre número quatro:

Kauhê: – Vamos usar todos [os copos] para ver quanto medem todos.

**Questões n.º 1 e n.º 2 – Apresentação e Discussão.** Iniciei a apresentação e discussão em turma referindo o seguinte:

Professora: – Agora vamos perceber o que é que cada grupo fez, quais os métodos que utilizaram, o que fizeram de diferente (...) eu já vi que vocês usaram estratégias diferentes para descobrir as respostas.

Além disso, solicitei aos alunos que não alterassem os registos na folha do enunciado. Apesar de ter observado todos os grupos a construírem as torres durante a fase de trabalho autónomo, questionei a turma se todos os grupos tinham realmente construído as três torres. Vários alunos afirmaram que sim, mas um aluno referiu o seguinte:

João: – Eu não, eu não fiz a torre.

Professora: – Então, foi a Sara que fez?

João: – A Sara fez [as torres], mas eu calculei na minha cabeça [o número de copos]. Eu percebi logo aquilo.

Através desta interação, o João demonstrou rapidez no seu raciocínio, ao identificar a relação entre o número da torre e o respetivo número de copos.

De seguida, confirmei com a turma se todos tinham medido as cinco torres para preencherem a tabela, ao que todos os grupos responderam que sim. Assim, pedi a uma aluna, a Francisca, do grupo B, que escrevesse no quadro os valores da sua tabela. Após a Francisca escrever as alturas das torres, questionei a turma:

Professora: – Vocês têm as tabelas parecidas ou nem por isso?

Marco (grupo E): – Está parecida, as primeiras duas [alturas] estão iguais e as outras estão diferentes. Só tem uma diferença pequena.

João (grupo A): – A minha [torre] número três está muito diferente.

Henrique (grupo C): – Para nós está muito diferente!

Carlos (grupo F): – Para nós está tudo diferente menos a segunda [torre].

Elena (grupo D): – Professora, eu tenho diferente!

Vanessa (grupo F): – Nós também!

Leonor (grupo H): – É tudo diferente.

Assim, vários alunos participaram nesta fase da discussão, demonstrando que tinham valores diferentes nas medições, com exceção de uma ou duas medidas por grupo. Perante esta diversidade, solicitei que o João, do grupo A, fosse também ao quadro escrever os seus valores. Enquanto o João anotava os seus dados, alguns alunos começaram a dizer que também tinham valores diferentes e seguiu-se o seguinte diálogo:

João (grupo A): – Todos têm diferente.

Marco (grupo E): – É normal estar diferente.

Pedi então a mais quatro grupos que escrevessem os seus valores no quadro. Apenas os grupos E e F não o fizeram, devido aos seus valores serem semelhantes aos já apresentados.

Na Tabela 3.1 apresentam-se as medições das alturas das cinco torres de cada grupo, incluindo os dois grupos que não apontaram os valores no quadro.

**Tabela 3. 1.**

*Medição da altura das torres*

| Torre n.º          |         | 1    | 2  | 3    | 4    | 5    |
|--------------------|---------|------|----|------|------|------|
| N.º de copos       |         | 2    | 4  | 6    | 8    | 10   |
| Altura da torre em | Grupo A | 16,5 | 20 | 24   | 27,5 | 31   |
|                    | Grupo B | 16   | 20 | 23,3 | 28   | 31,8 |

|             |         |      |      |      |      |      |
|-------------|---------|------|------|------|------|------|
| centímetros | Grupo C | 16   | 19,7 | 23,4 | 27,1 | 30,8 |
|             | Grupo D | 16   | 20   | 23,5 | 27,5 | 31,1 |
|             | Grupo E | 16   | 20   | 23,5 | 27,2 | 31   |
|             | Grupo F | 16,5 | 20   | 23,6 | 27,3 | 31,2 |
|             | Grupo G | 16,7 | 20,3 | 23,8 | –    | 31,2 |
|             | Grupo H | 16,5 | 20,2 | 24,1 | 27,9 | 31,6 |

*Nota.* O valor da torre número quatro do grupo G não foi incluído na tabela, uma vez que o grupo construiu uma torre com doze copos (medindo 35 centímetros), devido a um mal-entendido.

Depois dos alunos registarem as medições, questionei a turma:

Professora: – Vocês perceberam que, desde o início, os vossos resultados podiam estar diferentes uns dos outros?

Vários alunos responderam que sim e a discussão continuou:

Professora: – Porquê?

João (grupo A): – Porque, por exemplo, assim [encaixando um copo dentro de outro], se fizer muita força para dentro vai ficar de uma altura diferente, mas se fizer assim só [encaixando um copo noutra, sem pressioná-lo tanto], ficam menos juntos.

Professora: – Pois é, isso é logo uma das coisas. Dependendo da força que usam para encaixar os copos, podem ficar com alturas diferentes. Muito bem, João!

Este comentário mostrou que o João compreendeu um dos fatores que influenciam a medição: a força (pressão) aplicada no encaixe dos copos. Este aspeto não havia sido mencionado anteriormente, por nenhum dos professores aquando da planificação da tarefa. Contudo, outros fatores de variação foram previstos e discutidos nas reuniões anteriores à aula. Tendo em conta estes fatores, prossegui com a discussão:

Professora: – E outra coisa que também poderia ter mudado de uns de vocês para

os outros? O que é que vocês acham que pode ter mudado logo na primeira torre?

Carlos (grupo F): – A maneira que usamos a régua!

Professora: – A maneira como usam a régua? Como assim, Carlos?

Carlos (grupo F): – Tipo, assim [inclinando os copos] ...

Professora: – Espera, eu dou-te uma régua para mostrares melhor.

Carlos (grupo F): – Se estamos a fazer assim vai ficar diferente [colocou a régua perpendicular à mesa], mas se estamos a fazer assim, vai também ficar diferente [inclinou a régua de modo a tocar em todos os copos]. Da maneira que a gente fez, deitámos [os copos] e fizemos assim [aproximou a régua dos copos sem incliná-la] na última torre.

Assim, repliquei a demonstração do Carlos para todos verem e concluí:

Professora: – Isso tem a ver com a inclinação da régua. Se a régua está assim, a tocar na mesa [perpendicular à mesa], não vai tocar em todos os copos. Estão a ver? Não vai tocar nesta parte aqui mais inferior do copo. Conseguem ver este espaço [apontando para base da torre]?

A esta questão vários alunos responderam que sim, e a discussão continuou:

Professora: – Isto quer dizer o quê? Que vocês têm a régua direitinha, a noventa graus. Como o Carlos disse e muito bem, a maneira como usam a régua vai mudar os vossos resultados. Mas, mesmo usando a régua de diferentes formas, os resultados teriam de ser parecidos.

João (grupo A): – Não pode ser dezassete centímetros [a medição de um grupo] e o outro [grupo] dezanove.

Professora: – Pois é. E também temos de ter em atenção o que o João disse sobre a força que vocês usaram para encaixar os copos uns dentro dos outros.

Vocês empurraram os copos até ao fundo [de outro copo], ou só os encaixaram sem os empurrar?

Mariana (grupo C): – Só encaixámos.

João (grupo A): – Às vezes, só encaixámos. E eu fui aproximando mais ou menos o valor.

Professora: – Ok. Então, também há outra coisa a ter em atenção: as aproximações e os arredondamentos.

De seguida, coloquei mais uma questão à turma:

Professora: – Sabem mais uma coisa que pode ter mudado de uns para os outros?

[Nenhum aluno respondeu]

Professora: – As réguas. O número zero de algumas réguas começa mesmo perto da borda de plástico [mostra uma régua]. Já esta [mostra outra régua] tem um espaço maior [entre o zero e a borda]. Vejam lá a diferença.

[A professora circula pela sala e mostra a diferença entre as réguas a cada grupo]

Carlos (grupo F): – É por isso que nós usámos os copos deitados, para pôr [os copos] no zero [da régua].

Desta forma, compreendeu-se que diferentes fatores influenciam os resultados dos grupos, nomeadamente: a força de encaixe dos copos, a inclinação da régua, os arredondamentos utilizados nas medições e o local exato da régua onde se iniciou a medição (zero da régua ou a borda de plástico).

Durante a discussão, um aluno ainda notou uma inconsistência nas medições do grupo G:

Vasco (grupo E): – Professora, como é que a torre número quatro, com oito copos dá 35 centímetros e a número cinco que tem dez copos dá 31,2 centímetros?

Professora: – Isso aconteceu porque talvez se enganaram a medir. Kauhê e Yara, aqui [apontando para os valores desse grupo no quadro], a vossa torre quatro, que tem menos copos, tem maior altura que a torre cinco (...) vocês só mediram [as torres] ou tentaram calcular [as alturas]?

Kauhê (Grupo G): – Medimos.

Professora: – Então, deve ter havido algum engano na medição, porque a torre quatro é maior que a torre cinco.

Kauhê (Grupo G): – Acho que fizemos ao contrário.

Professora: – Ah! Então trocaram os valores [entre as duas torres], por isso é que está errado.

Após este diálogo, assumi que estes alunos tinham trocado os valores das alturas entre a quarta e a quinta torre. No entanto, só mais tarde, ao ouvir as gravações de áudio, é que me apercebi de que o erro se devia a uma má interpretação durante o trabalho autónomo.

**Questões n.º 3 – Trabalho Autónomo.** Na terceira questão, solicitava-se aos alunos que determinassem, a altura de uma torre composta por vinte copos. Todos os grupos, à exceção do grupo D, resolveram a tarefa somando duas vezes a altura de uma torre de dez copos que já tinha sido medida anteriormente.

**Grupo A.** Este grupo considerou que o número de copos estaria diretamente relacionado com a altura da torre:

João: – Com vinte copos? Como é que fazemos uma torre com vinte copos?

Sara: – Temos de fazer cálculos! Então, espera, se uma torre de dez [copos] tem trinta e um centímetros, então é trinta e um mais trinta e um.

João: – Que é sessenta e dois!

**Grupo D.** O Leonardo iniciou a resolução ao identificar que a borda de cada copo media um centímetro e meio, e começou a adicionar esse valor de forma sucessiva ao que parecia ser uma altura inicial:

Leonardo: – Já que esta parte [a borda] vale um e meio (...) tem de ser vinte copos.

Estou a contar com os dedos (...) doze (...) treze e meio (...) quinze (...)  
dezasseis e meio (...) dezoito (...)

Contudo, o seu raciocínio foi interrompido pela sua colega Elena, que sugeriu uma abordagem alternativa. Ambos optaram então por multiplicar a altura de um único copo por vinte. Assim, tal como o restante da turma, reproduziram um raciocínio incorreto: a utilização indevida da proporcionalidade direta.

Importa referir que o Leonardo, que é precisamente o aluno com medidas seletivas na turma, foi o único que inicialmente revelou compreender corretamente a lógica da sequência, ao reconhecer que, a cada copo adicional, se somava apenas a altura da borda. Apesar disso, abandonou essa estratégia sem explicar o motivo de iniciar as adições no valor doze, o que poderá ser explicado com a resolução da questão seguinte (número quatro), onde esse valor foi efetivamente assumido como a altura de um copo.

**Questões n.º 3 – Apresentação e Discussão.** Durante a apresentação e discussão conjunta, ficou claro que todos os alunos acabaram por resolver a questão com base na proporcionalidade direta. Para contrariar esse raciocínio, apresentei um contraexemplo:

Professora: – Vejam lá na tabela os valores da torre número um e número dois. A torre número um tem dois copos e a número dois tem quatro copos, não é? Então, a torre número dois tem o dobro de copos da torre número um. Depende das vossas medições, mas vamos assumir que a torre número um com dois copos tem dezasseis vírgula seis centímetros e a torre número dois com quatro copos tem vinte vírgula quatro centímetros. E agora eu pergunto-vos: vinte vírgula quatro é o dobro de dezasseis vírgula seis?

O João, a Mariana e o Henrique responderam que não.

Professora: – Não é, pois não? Então, porque é que será que vocês pensaram que o dobro de [não terminou de falar] ...

Henrique (grupo C): – Porque um dos copos fica inteiro, diferente dos outros que ficam só a ponta!

Professora: – Ok, o Henrique disse muito bem. Um dos copos apresenta-se inteiro, nos outros é só a ponta, só a borda (...) muito bem, Henrique!

Neste momento, procurei esclarecer a estrutura da sequência, reforçando que apenas um copo contribui com a sua altura total, enquanto os restantes adicionam apenas a altura da borda. E a discussão continuou:

Professora: – Então, se tivermos vinte copos, quantas bordas teremos?

Vários alunos: – Dezanove.

Professora: – E quantos copos inteiros?

Carlos (grupo F): – Um.

Professora: – E como é que podemos descobrir a altura dessa torre?

Marco (grupo E): – Medimos o copo inteiro e as bordas.

Professora: – Será que precisamos de medir as dezanove bordas?

Carlos (grupo F): – Podemos multiplicar [uma borda] por dezanove.

Para verificar a compreensão deste raciocínio pelos alunos, coloquei outra questão:

Professora: – Se utilizarmos a altura da torre número cinco, quantas bordas teríamos de acrescentar para saber o valor da altura da torre com vinte copos?

Marco (grupo E): – Temos de acrescentar dez!

Professora: – Podes explicar aos teus colegas?

Marco (grupo E): – Se a torre cinco é de dez copos, um copo é inteiro e o resto dos copos só mostra a borda, então temos de adicionar mais dez bordas.

Vasco (grupo E): – Ah!

**Questões n.º 4 – Trabalho Autónomo.** Na quarta questão, solicitava-se aos alunos que

determinassem a altura da torre número dezasseis. Mais uma vez, vários alunos assumiram uma relação de proporcionalidade direta entre o número de copos e a altura de diferentes torres, aplicando métodos semelhantes aos utilizados na resolução da questão anterior. Além disso, os grupos C e D assumiram incorretamente que a torre número dezasseis teria dezasseis copos. Por outro lado, os grupos G e H limitaram-se a indicar o número de copos da 16.<sup>a</sup> torre, sem efetuar cálculos relativos à sua altura. Dado as respostas observadas, considerou-se mais pertinente apresentar apenas a discussão em turma relativa a esta questão.

**Questões n.º 4 – Apresentação e Discussão.** Depois da análise da questão número três, centrada na importância da consideração das bordas dos copos, passou-se à discussão da 4.<sup>a</sup> questão. Convidei o grupo F a partilhar o seu raciocínio com a turma:

Vanessa (grupo F): – Eu acho que está errada. Nós multiplicámos cinco vezes três e deu quinze e depois fizemos quinze mais um e deu dezasseis. Então, a altura da torre número cinco é trinta e um vírgula dois, vezes três, que é igual a noventa e três vírgula seis, mais dezasseis vírgula cinco [altura da torre número um].

Professora: – Ok, então o vosso raciocínio também estaria certo se os copos não estivessem encaixados?

Vanessa (grupo F): – Sim.

Com base nesta explicação, percebeu-se que este grupo multiplicou três vezes a altura da 5.<sup>a</sup> torre (com dez copos), obtendo a altura correspondente a trinta copos (15.<sup>a</sup> torre). Em seguida, acrescentaram a altura da torre número um (com dois copos), totalizando a altura correspondente a trinta e dois copos. Nota-se que este raciocínio estaria correto apenas no caso de os copos não estarem encaixados uns nos outros, o que não corresponde à situação real da tarefa. Depois, procurei guiar os alunos para uma abordagem correta:

Professora: – Então, agora que vocês já perceberam melhor esta tarefa, como é que poderiam responder à questão número quatro?

Mariana (grupo C): – Contando as bordas e depois um copo [inteiro].

(...)

Professora: – E quantos copos tem a torre número dezasseis?

Vanessa (grupo F): – Trinta e dois.

Professora: – Então, precisamos de trinta e dois copos... e agora, para calcular a altura dessa torre, precisamos do quê?

Mariana (grupo C): – De medir as bordas.

Professora: – E são quantas bordas?

Mariana (grupo C): – Trinta e uma.

Professora: – E precisas só da altura de trinta e uma bordas ou de algo mais?

Henrique (grupo C): – Algo mais, mais um copo (...) Precisamos de medir a altura de uma borda, multiplicar por trinta e um e adicionar a altura de um copo.

**Questões n.º 5 – Trabalho Autónomo.** De seguida, passou-se à quinta questão, na qual os alunos eram desafiados a descobrir o “segredo” da torre de copos, ou seja, encontrar uma forma de calcular a altura de qualquer torre. Alguns grupos interpretaram esse “segredo” apenas como a possibilidade de descobrir o número de copos de uma torre calculando o dobro do número da respetiva torre. Por esse motivo, esses grupos não fizeram qualquer referência à altura das torres nas suas respostas. No entanto, o objetivo da questão era generalizar o padrão observado, determinando uma expressão que permitisse calcular a altura de uma torre com qualquer número de copos. Ao contrário do resto da turma, os grupos F e H aprofundaram as suas respostas.

**Grupo F.** Os alunos deste grupo trabalharam de forma colaborativa e debateram diversas hipóteses para resolver esta questão:

Vanessa: – Só se medirmos um copo sozinho.

[A medição resultou em 14,2 centímetros]

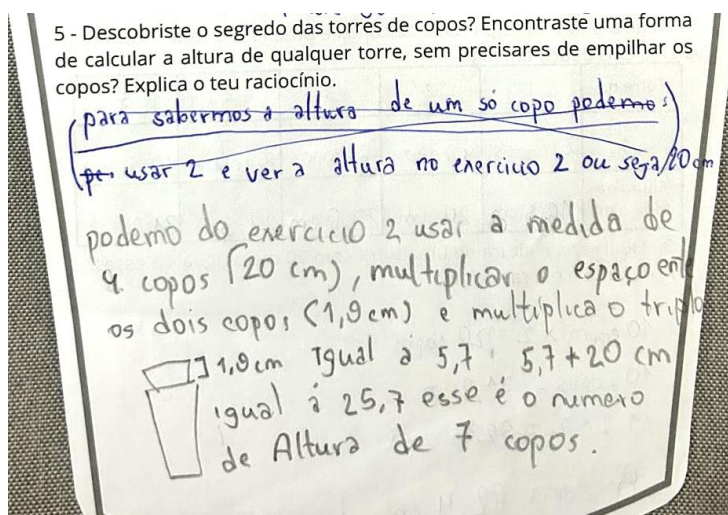
Carlos: – Agora, medimos esta parte pequena [a borda do copo].

[A medição resultou em 1,9 centímetros]

De seguida, chegaram a uma estratégia adequada, ao adicionar sempre o valor da altura de uma borda por cada copo adicionado. Demonstraram este raciocínio com um exemplo, como apresentado na Figura 3.1, utilizando um valor já trabalhado anteriormente (vinte centímetros correspondente à altura de quatro copos) e multiplicando a altura da borda (1,9 centímetros) pelo número de copos adicionados (três). O cálculo resultou em 5,7 centímetros, que, somados aos 20 centímetros, totalizou a altura de uma torre com sete copos. Depois, construíram essa torre e verificaram que a medição correspondia à previsão.

**Figura 3.1.**

*Resposta da questão n.º 5 pelo grupo F*



[Podemo(s) do exercício 2 usar a medida de 4 copos (20 cm), multiplicar o espaço entre os dois copos (1,9 cm) e multiplicar o triplo igual a 5,7. 5,7 + 20 cm igual a 25,7 cm esse é o número de altura de 7 copos.]

*Nota:* Importa referir que, embora uma torre com sete copos não existisse na sequência apresentada, o raciocínio aplicado foi correto.

**Grupo H.** Este grupo apresentou algumas dificuldades de comunicação, uma vez que uma das alunas era de origem chinesa e possuía um domínio limitado da língua portuguesa. Apesar desse aspeto, as alunas conseguiram comunicar-se entre si em português e inglês ao longo da tarefa. Nesta questão, a Leonor, explicou o seu raciocínio às colegas e notou que se devia ter em conta, de um termo para o outro, as duas bordas de copos que mediam 3,7 centímetros:

Leonor: – Pões isto [uns copos dentro de outros] e tens isto [as bordas].

Sabrina: – Ah!

Leonor: – E se tu fizeres mais dois copos, tu fazes mais isto [3,7 centímetros]. Já sabes?

Sabrina: – Sim.

Leonor: – É fácil, fácil!

**Questões n.º 5 – Apresentação e Discussão.** Depois da discussão da quarta questão, passou-se para a quinta. Devido à proximidade do final da aula, esta parte teve de ser mais breve. Como nenhum grupo tinha ainda formalizado uma fórmula para calcular a altura de qualquer torre, isto é, uma expressão geradora da sequência, mas já tinham compreendido a necessidade de considerar a altura de uma borda e de um copo inteiro, decidi propor a construção conjunta dessa expressão:

Professora: – Da mesma forma que vocês viram aqui, para responder à pergunta três (...) se fizermos a altura do número de copos menos um, vezes a altura de uma borda temos de adicionar o quê?

Ana (grupo H): – Um copo.

Professora: – Muito bem!

Após este diálogo, escrevi no quadro a expressão geradora:

“(n.º de copos – 1) x altura de uma borda + altura de 1 copo”.

Ao substituí-la pelos valores medidos, obtém-se:

“(n – 1) x 1,9 + 14,7”,

em que “n” representa o número de copos da torre, “1,9” corresponde à altura de uma borda (em centímetros) e “14,7” à altura de um copo inteiro (em centímetros).

Após a apresentação desta expressão, a aula foi encerrada.

**Autoavaliação e heteroavaliação dos alunos.** É importante referir que não houve tempo

suficiente para o preenchimento das autoavaliações e heteroavaliações durante a aula em questão, tendo sido realizadas numa aula seguinte.

Apresenta-se a Tabela 3.2, que contém a grelha utilizada nesse momento de avaliação, bem como os resultados das respostas fornecidas pelos próprios alunos. Cada aluno preencheu a grelha individualmente, avaliando o seu próprio desempenho (autoavaliação) e o desempenho do colega de grupo (heteroavaliação), de acordo com quatro níveis de apreciação.

**Tabela 3.2.**

*Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da primeira aula*

|  |  Muito bem |  Bem |  Mais ou menos |  Mal |
|--|---|---|---|---|
| Construí corretamente as torres dos copos seguindo a regra.                        | 7   | 6   | 3   | 0   |
| Medi as alturas das torres com cuidado, usando a régua corretamente.               | 6   | 5   | 5   | 0   |
| Consegui prever a altura das torres pedidas.                                       | 3   | 7   | 6   | 0   |
| Identifiquei um padrão ou regra para calcular a altura de qualquer torre de copos. | 4   | 10  | 2   | 0   |
| Partilhei ideias com o meu colega de grupo e fiz-me entender.                      | 9   | 5   | 2   | 0   |
| O meu colega de grupo foi claro na partilha das suas ideias comigo.                | 6   | 7   | 3   | 0   |
| Participei com atenção no momento de reflexão com toda a turma.                    | 5   | 9   | 2   | 0   |
| Os meus colegas da turma foram claros na apresentação dos seus trabalhos.          | 10  | 5   | 1   | 0   |

*Nota.* Os valores registados na tabela representam o número de alunos que escolheram cada nível de apreciação para cada parâmetro, exceto um aluno que faltou à aula em que se preencheu a grelha.

De modo geral, a análise da grelha revela que os alunos avaliaram de forma positiva o seu desempenho na aula, bem como o dos colegas. Em relação à construção correta das torres, o nível mais assinalado foi o “Muito bem”, já na identificação de uma regra para

calcular a altura de uma torre, a maioria dos alunos assinalou “Bem”. Ainda assim, os resultados mostram que cerca de um terço dos alunos sentiu dificuldades na medição correta das alturas das torres e na respetiva previsão desses valores. Relativamente à partilha de ideias com o colega do grupo, a maioria assinalou “Muito bem”, no entanto, na heteroavaliação em relação à comunicação por parte do colega de grupo, o nível mais indicado foi o “Bem”. Na participação do aluno no momento de discussão coletiva, a maioria assinalou “Bem”. Por último, na heteroavaliação da clareza na apresentação dos colegas da turma, a maioria assinalou “Muito bem”. Assim, percebe-se que os alunos usaram os copos de forma eficaz na construção das torres, reconheceram algumas dificuldades relacionadas com o trabalho autónomo e valorizaram o trabalho colaborativo com os colegas.

### **Segunda Aula de Investigação**

A segunda aula de investigação iniciou-se no dia 6 de maio de 2025, pelas 10h10. Comecei por solicitar aos alunos para se sentarem nos mesmos lugares que na aula anterior, à exceção de uma aluna, a Sabrina, que foi para o grupo G visto que um elemento deste grupo, o Kauhê faltou a esta aula. Depois dos alunos se sentarem, expliquei à turma que a estrutura desta aula se assemelhava com a da aula anterior, visto que primeiro trabalhariam em grupo (pares) e depois haveria uma discussão entre toda a turma.

**Apresentação da Tarefa.** De seguida, solicitei a um aluno que distribuísse as folhas de enunciado e a uma aluna que comesasse a ler a lenda do xadrez. Terminada a leitura, perguntei se os alunos tinham percebido como funcionava a recompensa mencionada na lenda do xadrez, ao que alguns alunos responderam que não, assim, solicitei a mais um aluno que lesse a lenda. Depois, os alunos disseram que já tinham percebido como funcionava a recompensa.

**Trabalho Autónomo.** Assim, pelas 10h24, pedi que lessem a tarefa em grupo e resolvessem as questões 1.1 e 1.2, que se relacionavam com as previsões de grupo. Por volta das 10h33, com as previsões preenchidas por todos os grupos solicitei que uma aluna distribuísse os tabuleiros de jogo enquanto eu, a professora, distribuía os feijões. Além disso, decidi que os feijões e os tabuleiros de jogo só seriam distribuídos neste momento para que não influenciassem nenhuma previsão dos alunos. Enquanto os alunos realizavam o trabalho autónomo, circulei pelos grupos para observar as estratégias

desenvolvidas ao investigarem as diferentes questões.

**Apresentação e Discussão.** A seguir analisa-se as resoluções dos alunos à tarefa proposta. As questões foram agrupadas na sua análise de acordo com o seu conteúdo: as previsões (1.1 e 1.2), os valores recebidos por casa (2 e 2.1), os valores acumulados (3, 3.1 e 4), a nona casa isolada e acumulada (5 e 5.1) e o termo geral da sequência (6). Durante esta análise, destacam-se algumas estratégias e interações dos alunos, tanto durante o trabalho autónomo como na fase de discussão coletiva.

**Questões n.ºs 1.1 e 1.2 – Trabalho Autónomo.** As questões n.ºs 1.1 e 1.2 destinavam-se unicamente à formulação de previsões por parte dos alunos, sendo que a questão n.º 1.1 perguntava aos alunos se o número de feijões cresceria devagar ou depressa. Já a questão n.º 1.2 pretendia apenas uma estimativa de quantos feijões os alunos receberiam no total como recompensa pela criação do jogo, sem a realização de nenhum cálculo. Contudo, alguns grupos fizeram cálculos nesta questão.

**Grupos A e G.** Ao ouvir as gravações, verifica-se que os grupos A e G realizaram as estimativas sem recorrer a cálculos.

**Grupos C, F e H.** Estes três grupos efetuaram cálculos e perceberam que, na última casa, receberiam duzentos e cinquenta e seis feijões, assim, optaram por indicar esse valor.

**Grupo D.** Estes alunos pensaram que receberiam dois feijões por cada casa:

Elena: – Recebemos de dois em dois.

Leonardo: – Então, se são nove casas, são dezoito [feijões].

**Grupo E.** O grupo E, relacionou não só esta questão, como toda a tarefa, com a tabuada do três. Desse modo, utilizaram apenas múltiplos de três em todas as questões, pensando que, em cada casa, acrescentariam três feijões ao valor da recompensa. Destaca-se o seguinte diálogo, através do qual se percebe que a razão para associarem a tarefa à tabuada do três poderá estar relacionada com o facto de o tabuleiro ter nove casas e este número ser um múltiplo de três:

Marco: – É a tabuada do três...

Vasco: – Estás a brincar?

Marco: – Não, não estou. É uma tabuada do três.

Vasco: – Porque se não, não estava o nove [nove casas]?

Marco: – Pois!

**Questões n.ºs 1.1 e 1.2 – Apresentação e Discussão.** Pelas 11h10, sugeri que se começasse a discussão de grupo, alertei os alunos a não alterarem nada das suas respostas, e solicitei aos dois grupos que não terminaram de responder às questões (grupos B e D) para não continuarem naquele momento, de modo a poderem participar na discussão.

Primeiro, expliquei aos alunos que as questões n.ºs 1.1 e 1.2, permitiam que fizessem estimativas relacionadas com o desenvolvimento da tarefa. De seguida, confirmei com os alunos que alguns haviam respondido que o número de feijões da recompensa cresceria devagar, enquanto outros afirmaram que cresceria depressa. Verifica-se que apenas três grupos, nomeadamente, os grupos A, B e G, consideraram que o crescimento seria lento, enquanto os restantes cinco grupos indicaram que seria rápido.

Em relação à questão n.º 1.2, as estimativas realizadas pelos alunos não foram discutidas em turma, porém foram recolhidas através das respostas realizadas nas folhas de enunciado e encontram-se expressas na Tabela 3.3.

**Tabela 3.3.**

*Estimativas da questão 1.2 realizadas pelos diferentes grupos*

| <b>Grupo</b>      | A  | B | C   | D  | E  | F   | G | H   |
|-------------------|----|---|-----|----|----|-----|---|-----|
| <b>Estimativa</b> | 70 | – | 256 | 18 | 27 | 256 | 8 | 256 |

*Nota.* O grupo B não respondeu a esta questão.

**Questões n.ºs 2 e 2.1 – Trabalho Autónomo.** Em relação às questões n.ºs 2 e 2.1, era pedido aos alunos que descobrissem o número de feijões recebidos apenas pela segunda casa e apenas pela quinta casa, respetivamente.

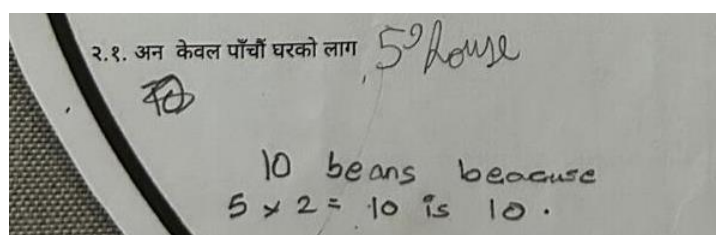
**Grupos B e D.** Nota-se que os grupos B e D assumiram que o número de feijões recebidos por uma casa seria o dobro do número dessa casa e, mais uma vez, à semelhança do que

ocorreu na primeira aula, pensaram que se tratava de uma situação de proporcionalidade direta.

Destaca-se a resolução da questão n.º 2.1, pelo grupo B, que multiplicou o número da casa (cinco) por dois (feijões), assumindo que o produto corresponderia ao número de feijões atribuídos à quinta casa, como se observa na Figura 3.2.

### Figura 3.2.

*Resolução da questão n.º 2.1 pelo grupo B*



*Nota.* Este grupo escreveu as respostas em inglês. A tradução para português é a seguinte: “10 feijões porque  $5 \times 2 = 10$  é 10”.

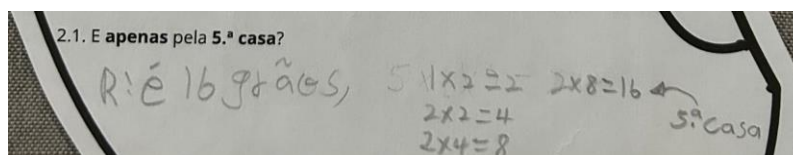
**Grupo E.** Este grupo seguiu um raciocínio semelhante ao dos grupos B e D, mas em vez de multiplicar o número da casa por dois, fê-lo por três devido à associação com a tabuada do três.

**Grupo G.** Estes alunos começaram por utilizar os valores indicados no enunciado para as três primeiras casas, respetivamente, um, dois e quatro feijões. Para as restantes casas, adicionavam dois feijões por cada casa adicional. Percebe-se que aplicaram este raciocínio na resolução de toda a tarefa.

**Grupo H.** Ao resolver a questão 2.1, este grupo duplicou sempre o número de feijões da casa anterior, como demonstrado na Figura 3.3.

### Figura 3.3.

*Resolução da questão n.º 2.1 pelo grupo H*



**Questões n.ºs 2 e 2.1 – Apresentação e Discussão.** Durante a apresentação e discussão relativa a esta questão, verificou-se que alguns alunos optaram por colocar fisicamente os feijões no tabuleiro e contá-los, enquanto outros recorreram inicialmente a estratégias de cálculo, utilizando o tabuleiro apenas numa fase posterior para confirmar os resultados.

Depois, desenhei o tabuleiro do jogo no quadro, perguntei à turma quantos feijões tinham colocado na primeira e na segunda casa. Vários alunos responderam, respetivamente, um e dois. Assim, desenhei um círculo na primeira casa e dois na segunda. Para representar a quantidade de feijões da quinta casa, sugeri que uma aluna do grupo G fosse ao quadro. Esta aluna desenhou oito círculos na quinta casa. Ao ser questionada sobre como chegou a essa conclusão, respondeu:

Sabrina (grupo G): – Pusemos mais dois [feijões] em cada casa.

De seguida, em conjunto com este grupo, li o trecho da lenda do xadrez que explicava o método da recompensa, donde resultou o seguinte diálogo:

Professora: – (...) sempre duplicando o número de grãos. O que é duplicar?

Sabrina (grupo G): – É vezes dois.

Professora: – Sim, é multiplicar por dois. Então, em vez de fazerem o dobro, vocês somaram dois, não foi?

Sabrina (grupo G): – Sim.

Após este diálogo, pedi à Mariana, do grupo C, que fosse ao quadro corrigir a resposta. A Mariana confirmou que tinha feito o dobro da casa anterior.

De seguida, confirmei com os restantes grupos se tinham percebido que o número de feijões duplicava de uma casa para a seguinte, e passou-se à análise da questão n.º 3.

Apesar de não se ter falado na discussão de turma sobre as resoluções de todos os grupos relacionadas a estas duas questões, apresenta-se na Tabela 3.4, os valores respondidos por todos os grupos.

#### **Tabela 3.4.**

*Respostas dos diferentes grupos às questões n.ºs 2 e 2.1*

| <b>Grupo</b>               | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G | H  |
|----------------------------|----|----|----|----|----|----|---|----|
| <b>2.<sup>a</sup> casa</b> | 2  | 4  | 2  | 4  | 6  | 2  | 2 | 2  |
| <b>5.<sup>a</sup> casa</b> | 16 | 10 | 16 | 10 | 15 | 16 | 8 | 16 |

**Questões n.ºs 3, 3.1 e 4 – Trabalho Autónomo.** Em todas estas três questões, os alunos deveriam considerar a soma acumulada do valor da recompensa de feijões até uma determinada casa. Nas questões n.ºs 3 e 3.1, era apresentado o número de feijões recebidos (três e quinze, respetivamente), pretendendo-se que descobrissem até que casa já teriam sido pagos. Já na questão n.º 4, os alunos deveriam colocar os feijões no tabuleiro até à sexta casa, sendo apresentado o valor de trinta e dois feijões, com o objetivo de perceberem se esse valor era suficiente para terem sido pagos pelas seis primeiras casas do tabuleiro.

**Grupo A.** Na resolução das questões n.ºs 3 e 3.1, os alunos não tiveram em conta a soma acumulada. Verificaram que não recebiam exatamente nem três nem quinze feijões por nenhuma casa do tabuleiro, assim, optaram pela casa mais próxima que ultrapassasse esse valor: a terceira casa com quatro feijões e a quinta casa com dezasseis feijões. Desta forma, responderam incorretamente em ambas as questões. No entanto, ao chegarem à questão n.º 4, começaram por colocar os feijões no tabuleiro até à sexta casa e procederam à sua contagem, o que evidenciou o desenvolvimento do raciocínio relacionado à soma acumulada:

Sara: – Até à 5.<sup>a</sup> casa já temos trinta [feijões], a sexta casa vai ultrapassar os trinta e dois (...)

João: – Se juntarmos a casa número um, número dois, três, quatro e cinco, chega a trinta feijões e se chegarmos a esta [sexta casa] vai fazer sessenta e dois feijões.

Recorrendo à manipulação dos feijões, os alunos começaram a compreender melhor o enunciado da tarefa e conseguiram responder à questão, tendo apenas errado por um feijão, provavelmente este erro ocorreu devido à contagem dos feijões no tabuleiro.

**Grupo C.** Este grupo apresentou um percurso oposto ao do grupo A. Nas questões n.ºs 3

e 3.1, recorreram à soma acumulada e responderam corretamente, mas na questão n.º 4, calcularam apenas o valor isolado da sexta casa, resultando numa resposta incorreta. Reconheceram que trinta e dois feijões era o valor exato da sexta casa, mas ignoraram o valor acumulado até essa casa.

**Grupo E.** Como referido anteriormente, este grupo baseou o seu raciocínio na tabuada do três. Assim, nas questões n.ºs 3 e 3.1, atribuíram como respostas, respetivamente, a 1.<sup>a</sup> e a 5.<sup>a</sup> casas. Este raciocínio decorreu do facto de terem dividido o três por três, obtendo um, e o quinze por três, obtendo cinco. Verifica-se que mesmo pensando que a recompensa por cada casa seria de três feijões, não consideraram a soma acumulada, respondendo incorretamente às questões.

Na questão seguinte, observou-se que os alunos identificaram que o número trinta e dois não é múltiplo de três, o que os levou a concluir que esse valor não se enquadrava no padrão de recompensas que tinham assumido até então:

Marco: Se é na tabuada do três, como é que o trinta e dois vai caber na tabuada do três?

**Grupo F.** Ao lerem inicialmente a questão n.º 3, estes alunos demonstraram dificuldade em compreendê-la, mas após uma segunda leitura, a Vanessa fez a seguinte interpretação:

Vanessa: – Ah! Segunda casa! Um mais dois é três.

Na questão seguinte, explicou ao colega:

Vanessa: – Três (...) sete (...) sete mais oito? Quinze (...) então, é até à quarta [casa].

Carlos: – Até à quarta?

Vanessa: – Sim, porque olha [mostrando com os feijões] um mais dois, mais quatro, já dá sete (...) e depois ainda mais oito (...) [conta os feijões] quinze, sim, dá certo.

Assim, esta aluna demonstrou reconhecer a soma acumulada. No entanto, na questão n.º 4, à semelhança do grupo C, este grupo interpretou a pergunta como sendo pedido o valor

isolado da sexta casa.

**Grupo H.** Nas questões n.ºs 3 e 3.1, as alunas ainda não tinham notado a existência da recompensa acumulada, assim, ficaram confusas em relação ao número de feijões apresentado nas questões:

Leonor: – Isto não dá [...] não tem três [feijões].

Ana: – Então, é dois e meio.

Adotaram como resposta valores correspondentes a casas intermédias, mantendo essa estratégia também na questão seguinte:

Ana: – Quinze feijões é a casa cinco!

Leonor: – Não, a casa cinco é dezasseis feijões e a casa quatro tem oito. Então, é a casa quatro e meio.

Ao continuar a refletir sobre estas questões, a Leonor identificou uma incongruência:

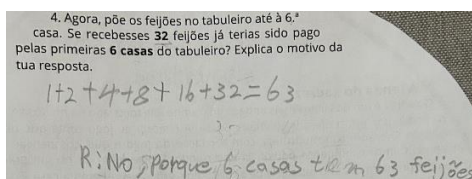
Leonor: – É quatro. Como fizemos o quatro e meio? Quatro e meio de casa?

Porém, mesmo percebendo que tal casa não existisse, mantiveram as respostas com vírgulas e sem considerar a acumulação.

Já na questão 4, decidi reformular o enunciado com palavras mais acessíveis e li lentamente para a Leonor, cuja língua materna é o mandarim. Após a leitura, a Leonor compreendeu o que era solicitado e identificou corretamente o conceito de recompensa acumulada. Assim, a resolução deste grupo, como apresentada na Figura 3.4, encontra-se correta.

### Figura 3.4.

#### Resolução da questão n.º 4 pelo grupo H



4. Agora, põe os feijões no tabuleiro até à 6.ª casa. Se recebesse 32 feijões já terias sido pago pelas primeiras 6 casas do tabuleiro? Explica o motivo da tua resposta.

$$1+2+4+8+16+32=63$$

R: Não, porque 6 casas têm 63 feijões.

[No (Não), porque 6 casa têm 63 feijões.]

**Questões n.ºs 3, 3.1 e 4 – Apresentação e Discussão.** Primeiro, pedi a todos os grupos que partilhassem as suas respostas relacionadas com a questão n.º 3. Ao verificar respostas diferentes, esclareci um aspeto fundamental da tarefa: a distinção entre o valor da recompensa recebido apenas por uma casa (valor isolado) e o valor da recompensa acumulado até certa casa (valor total desde a primeira casa até à casa em questão). Para isso, recorri a um exemplo que já havia apresentado a dois grupos:

Professora: – Se eu vos desse uma moeda de um euro hoje, outra amanhã e outra depois de amanhã. E ao fim dos três dias eu vos perguntasse quantas moedas é que receberam ao longo dos três dias (...)

Vários alunos: – Três.

Professora: – Sim, isso é diferente do que eu vos perguntar quantas é que receberam apenas pelo primeiro dia, apenas pelo segundo, ou apenas pelo terceiro, não é?

Vários alunos: – Sim.

Professora: – Então, quantas moedas vocês receberiam apenas pelo primeiro dia?

Vários alunos: – Uma.

Professora: – E apenas pelo segundo dia?

Vários alunos: – Uma.

Ana (grupo H): – Duas.

Professora: – Apenas quer dizer só (...) só pelo segundo dia (...)

Vários alunos: – Uma.

Ana (grupo H): – Duas.

Mariana (grupo C): – Só daria um euro!

Como a Ana ainda não tinha compreendido, reformulei o exemplo:

Professora: – Se eu vos desse hoje um euro, amanhã dois euros e depois de amanhã

cinco euros (...) Ana, quantos euros é que receberias apenas no segundo dia?

Ana (grupo H): – Dois!

Professora: – Muito bem! E apenas no terceiro dia?

Ana (grupo H): – Cinco!

Professora: – E ao longo dos três dias?

Ana (grupo H): – Oito!

Professora: – Muito bem! Perceberam?

Vários alunos: – Sim.

Professora: – Então, isto acontece também com os feijões (...). Em algumas questões perguntei-vos quantos feijões vocês recebiam apenas por uma casa e noutras perguntei-vos até uma certa casa, ou seja, todas as casas até à casa indicada.

Mariana (grupo C): – Sim!

Professora: – Então, quantos feijões recebem apenas pela terceira casa?

Alguns alunos: – Quatro.

Professora: – Elena e Leonardo, concordam?

Elena e Leonardo (grupo D): – Sim.

Professora: – E quantos feijões receberiam até à terceira casa? (...) Ou seja, ao longo das três casas?

Elena (grupo D): – Sete.

Professora: – Muito bem!

Depois, passou-se concretamente à resposta da questão número três, o João, do grupo A, respondeu que era a segunda casa, mostrou no quadro a resolução com os círculos a representar os feijões e explicou o seguinte:

João (grupo A): – A casa um tem um [feijão], a casa dois tem dois [feijões], a casa

um com a casa dois dá três [feijões].

De seguida, o Henrique, do grupo C, resolveu a questão n.º 3.1 no quadro, escrevendo: “ $1+2+4+8=15$  R: Até à 4.<sup>a</sup> [casa]”.

Passando para a questão n.º.4, solicitei que o grupo F mostrasse aos colegas como a resolveu:

Vanessa (grupo F): – Nós pusemos mal (...), mas não porque os trinta e dois feijões são só da sexta casa e era preciso somar os que estavam antes também (...) teria sido paga só pela sexta casa.

Professora: – Então, faltaria seres paga por quais casas?

Vanessa (grupo F): – Pela quinta, quarta, terceira, segunda e primeira.

Este momento evidenciou que a Vanessa compreendeu a distinção entre o valor isolado e o valor acumulado, mesmo tendo respondido incorretamente à questão durante o trabalho autónomo.

Por fim, solicitei ao grupo H que partilhasse a sua resolução com os colegas, visto esta ser diferente da anteriormente explicada. Desta forma, a Leonor, apontou no quadro a solução realizada anteriormente.

**Questões n.ºs 5 e 5.1 – Trabalho Autónomo.** Na questão 5, era pedido aos alunos que calculassem o valor de feijões recebidos apenas pela nona casa (valor isolado), já na 5.1, deveriam calcular o valor correspondente a todas as nove casas (valor acumulado).

**Grupo C.** Este grupo apresentou a resposta correta às duas questões, no entanto não apresentou os cálculos na folha do enunciado.

**Grupo E.** Estes alunos basearam-se num esquema de recompensas fundamentado na tabuada do três, assumindo que o valor da recompensa corresponderia sempre ao triplo do número da casa. Tendo em conta esse raciocínio, responderam de forma quase totalmente correta às questões analisadas. Na questão n.º 5, multiplicaram o número da casa (nove) por três, obtendo vinte e sete; na questão n.º 5.1, somaram os valores atribuídos a cada casa até à nona, obtendo o total de cento e trinta e oito feijões. Contudo,

verifica-se, um pequeno erro de cálculo, uma vez que a soma correta dos múltiplos de três até ao vinte e sete é cento e trinta e cinco. Apesar desse erro, é evidente que os alunos foram capazes de distinguir entre o valor isolado e o valor acumulado, revelando compreender estes conceitos.

**Grupo F.** Estes alunos colocaram os valores recebidos por casa em todas as casas do tabuleiro do jogo, como demonstra a Figura 3.5, deste modo, no que toca à questão n.º 5, na folha do enunciado apresentaram apenas a resposta final dos 256 feijões.

**Figura 3.5.**

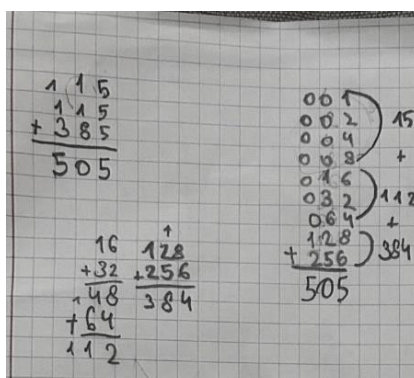
*Tabuleiro do jogo do grupo F*

| Tabuleiro do jogo |          |          |
|-------------------|----------|----------|
| 1.ª casa          | 2.ª casa | 3.ª casa |
| 1                 | 2        | 3        |
| 4.ª casa          | 5.ª casa | 6.ª casa |
| 8                 | 16       | 32       |
| 7.ª casa          | 8.ª casa | 9.ª casa |
| 64                | 128      | 256      |

Por outro lado, em relação à questão seguinte, realizaram os cálculos numa folha de rascunho, como se pode observar na Figura 3.6, e apresentaram apenas o valor final na folha do enunciado. Verifica-se que se enganaram na resolução dos cálculos, resultando em 505, em vez de 511 feijões.

**Figura 3.6.**

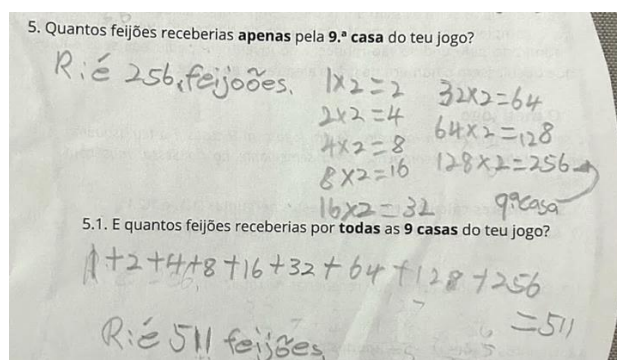
*Cálculos da questão n.º 5.1 realizados pelo grupo F*



**Grupo H.** Estas alunas, para calcular o valor recebido pela nona casa, seguiram a regra de duplicar o valor de cada casa anterior. Já para descobrir o valor acumulado das nove casas, somaram os valores recebidos por cada casa. Assim, demonstraram compreender a diferença entre o valor isolado e o acumulado, respondendo corretamente às perguntas, como se observa na Figura 3.7.

**Figura 3.7.**

*Resolução das questões n.ºs 5 e 5.1 pelo grupo H*



**Questões n.ºs 5 e 5.1 – Apresentação e Discussão.** Em relação à questão n.º 5, que pedia o número de feijões recebidos apenas pela nona casa, perguntei aos alunos se tinham feijões suficientes para contar até à casa pedida e os alunos respondem que não.

O meu objetivo era solicitar ao grupo C ou ao grupo F que fossem ao quadro apresentar as suas respostas, que estavam corretas, no entanto, ambos os grupos já haviam apagado os cálculos, sendo que apresentavam apenas os valores finais. Desta forma, solicitei novamente que o grupo H apresentasse a sua resposta. A Leonor, dirigiu-se ao quadro e anotou a resolução que já havia feito no enunciado, como demonstrado anteriormente. Para que os alunos pudessem visualizar a resposta de uma forma mais simples, solicitei que a aluna preenchesse também o tabuleiro do jogo que se encontrava no quadro.

Passando para a questão n.º 5.1, perguntei aos alunos:

Professora: – Será que esta resposta também é duzentos e cinquenta e seis?

João (grupo A): – Não, é mais! Porque como são todas as casas temos de somar a primeira casa, segunda casa, terceira casa, quarta, quinta, sexta, sétima, oitava e nona!

Assim, solicitei que o João fosse ao quadro mostrar o seu raciocínio, sendo que escreveu: “ $1+2+4+8+16+32+64+128+256 = 500$ ”. Depois, perguntei qual foi o resultado do grupo F, sendo que foi 505. Desta forma, expliquei que o raciocínio destes dois grupos estava correto, mas enganaram-se nos cálculos. Decidi também perguntar ao grupo C qual foi o seu resultado, sendo que foi 511 ao que afirmei estar correto.

**Questões n.º 6 – Trabalho Autónomo.** Nesta questão perguntava-se aos alunos se teriam descoberto o segredo da recompensa dos feijões, isto é, uma forma de calcular o número de feijões recebidos por uma casa qualquer.

**Grupos A, C, F e H.** Todos estes quatro grupos relacionaram o segredo dos feijões ao duplicar o número de feijões de uma casa para a outra.

**Grupos B e D.** Os alunos destes grupos não responderam a esta questão.

**Grupo E.** Este grupo pensou que a resposta seria usar o tabuleiro de jogo e a tabuada do três.

**Grupo G.** As alunas deste grupo pensaram que o segredo seria somar dois feijões por cada casa.

**Questões n.º 6 – Apresentação e Discussão.** Na resolução desta questão, como vários alunos responderam que o segredo dos feijões era multiplicar os feijões por dois (de uma casa para a seguinte), expliquei que isso era só uma parte do segredo e afirmei que, depois, apresentaria a outra parte.

Fiz uma tabela no quadro com três linhas que correspondiam, nomeadamente, ao número da casa, ao número de feijões recebidos por uma casa e ao número de feijões recebidos por uma casa em potência de base dois. Preenchi os valores da primeira e segunda linha visto que já tinham sido discutidos e deixei a terceira linha por preencher com a ajuda dos alunos. Expliquei aos alunos o significado de “expressão geradora”, visto que ainda não conheciam este conceito. E expliquei que ao descobrirem que o valor da recompensa duplicava sempre de uma casa para a outra já saberiam que a expressão geradora seria de potência de base dois. Assim, bastava descobrir qual seria o expoente.

Para tal, em relação à segunda casa, coloquei a potência de base dois e perguntei aos alunos qual poderia ser o expoente desta potência para que o resultado fosse dois feijões.

Ao que alguns alunos responderam que dois elevado a um é dois, assim, perguntei qual seria o expoente da seguinte potência de base dois e responderam corretamente que seria o dois. Desta forma, continuou-se com o mesmo raciocínio das próximas casas até à nona. Faltando só a primeira casa, que os alunos não sabiam qual seria o expoente correspondente à potência de base dois que resultasse em um. Assim, expliquei que qualquer potência (diferente de zero) com expoente zero, tem o resultado de um e terminou de se preencher a tabela, como se pode observar na Tabela 3.5.

**Tabela 3.5.**

*Tabela relacionada à expressão geradora da sequência*

|                            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n.º da casa                | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| n.º de feijões             | 1     | 2     | 4     | 8     | 16    | 32    | 64    | 128   | 256   |
| n.º de feijões $2^{(n-1)}$ | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ |

*Nota.* A última linha da tabela, relacionada à potência de base dois apresentava um espaço vazio no lugar do expoente para os alunos o descobrirem.

Faltando só descobrir a expressão geradora, perguntei aos alunos:

Professora: – Que relação é que vocês encontram entre o número da casa e este número [apontando para um expoente]? (...) por exemplo, o número da casa é três e o número de feijões é dois elevado a dois (...) aqui, o número da casa é quatro e o número de feijões é dois elevado a três.

Mariana (grupo C): – É menos um!

Professora: – É menos um, onde?

Depois, a Mariana mostrou que se estava a referir ao expoente, ao que respondi:

Professora: – O número da casa é sempre um a mais que o número de feijões.





Depois, conseguiu-se construir a expressão geradora para descobrir o número de feijões recebidos por uma determinada casa:  $2^{n-1}$ , onde “n” representa o número da casa. A aula

terminou depois da construção da expressão geradora, ficando a ficha de autoavaliação e heteroavaliação para uma aula seguinte.

**Autoavaliação e heteroavaliação dos alunos.** A seguir, apresenta-se a Tabela 3.6, na qual se encontram os registos da avaliação realizada pelos alunos, que preencheram individualmente a grelha, expressando tanto a sua autoavaliação como uma breve heteroavaliação.

**Tabela 3.6.**

*Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da segunda aula*

|  |  Muito bem |  Bem |  Mais ou menos |  Mal |
|--|---|---|---|---|
| Organizei os feijões no tabuleiro seguindo a sequência correta.  | 6   | 7   | 3   | 0   |
| Usei corretamente os feijões, sem brincar com eles nem os atirar.                                      | 6   | 8   | 2   | 0   |
| Consegui prever o número de feijões nas casas pedidas.   | 3   | 10  | 3   | 0   |
| Identifiquei um padrão ou regra para calcular o número de feijões que receberia por uma casa qualquer. | 5   | 10  | 1   | 0   |
| Partilhei ideias com o meu colega de grupo e também soube ouvi-lo.                                     | 9   | 7   | 0   | 0   |
| O meu colega de grupo foi claro na partilha das suas ideias comigo.                                    | 8   | 6   | 2   | 0   |
| Participei com atenção no momento de reflexão com toda a turma.  | 4   | 10  | 2   | 0   |
| Os meus colegas da turma foram claros na apresentação dos seus trabalhos.                              | 8   | 6   | 2   | 0   |

*Nota.* Os valores registados na tabela representam o número de alunos que escolheram cada nível de apreciação para cada parâmetro.

Os resultados da grelha mostram que, de forma geral, os alunos avaliaram positivamente o seu desempenho na aula, bem como o dos colegas. Nos parâmetros correspondentes a procedimentos, conceitos e atitudes durante o trabalho autónomo, o nível “Bem” foi o

mais assinalado pelos alunos, à exceção do parâmetro relacionado à partilha de ideias com o colega de grupo, neste, a maioria assinalou “Muito bem”. Já nos parâmetros relacionados à heteroavaliação, seja à comunicação do colega de grupo ou à apresentação dos colegas de turma, metade da turma assinalou o nível “Muito bem”. Por último, em relação à própria participação do aluno no momento da discussão, a maioria dos alunos assinalou o nível “Bem”. No geral, os resultados indicam que os alunos valorizaram o trabalho em grupo, sentiram-se capazes de usar os materiais e identificar padrões, reconhecendo, no entanto, alguns desafios na previsão de resultados.

### **Reflexão sobre as Aulas de Investigação**

Após a primeira aula, realizou-se no dia 2 de maio a quarta reunião do estudo de aula, com o objetivo de analisar a primeira aula e esclarecer dúvidas relativas à aula seguinte. Discutiu-se sobre o facto de que os alunos aplicaram sempre um raciocínio por recorrência, tendo em conta termos anteriores da sequência para descobrirem um termo seguinte, em vez de generalizarem uma fórmula que lhes permitisse determinar qualquer termo. Todos salientámos o notável envolvimento dos alunos e o trabalho cooperativo evidenciado em todos os grupos. Destacou-se, em particular, o grupo D, no qual o Leonardo contava em voz alta os valores das bordas dos copos, enquanto a Elena tentava alcançar a resposta recorrendo a uma estratégia diferente. Foi também referido o envolvimento do grupo F, que testou diferentes formas de posicionar a régua para medir as torres.

A 5.<sup>a</sup> e última reunião do estudo de aula, realizada no dia 12 de maio de 2025, teve como objetivo principal a análise e reflexão conjunta sobre as aulas. Nesta reunião, abordaram-se aspetos relativos à gestão do tempo, às aprendizagens dos alunos, ao papel da professora e à adequação dos materiais utilizados.

Os elementos do estudo de aula partilharam vários comentários pertinentes comigo. Em primeiro lugar, relatou-se que os alunos revelaram mais dificuldades em compreender a progressão geométrica do que a progressão aritmética, o que exigiu um maior esforço de mediação da minha parte. Além disso, destacou-se o papel positivo dos materiais manipuláveis, bem como o impacto visual das fichas com formatos de copos e feijões, das duas aulas, que promoveram o interesse dos alunos.

Relativamente ao meu desempenho como professora, um dos elementos destacou

melhorias da primeira aula para a segunda, relacionadas à coordenação do tempo e à dinamização da discussão coletiva. Como sugestão de melhoria, indicou que poderia ter sido dada oportunidade de fala a grupos cujas respostas estavam incorretas, incentivando o debate em torno dos erros como oportunidade de aprendizagem.

Por sua vez, outro elemento do estudo de aula frisou que as aulas decorreram de forma positiva, com elevado envolvimento dos alunos e tarefas ajustadas aos objetivos de aprendizagem. Sublinhou ainda a nossa dedicação, que preparámos as aulas com bastante profundidade, tendo sido realizadas mais reuniões do que inicialmente previsto. Essa construção detalhada refletiu-se na qualidade dos materiais e na discussão das diferentes possibilidades de resolução.

No entanto, também foi identificada uma oportunidade de melhoria. Apesar de termos previsto corretamente que os alunos poderiam ter dificuldades em distinguir o valor isolado do valor acumulado, a resposta que pensámos inicialmente para lidar com essa questão revelou-se limitada. O exemplo utilizado durante a aula, que envolvia a atribuição do mesmo valor de moedas por cada dia, não se revelou totalmente eficaz para todos os alunos, uma vez que não incluía uma progressão crescente nos valores. Por esse motivo, já durante a própria aula, foi necessário introduzir um segundo exemplo, com valores crescentes, o qual se mostrou mais eficaz para explicar a diferença entre estes dois raciocínios, permitindo que uma das alunas que demonstrava maior dificuldade compreendesse estes conceitos.

Este exemplo ilustra a importância de não só antecipar as dificuldades dos alunos, mas também de preparar profundamente, as respostas a apresentar quando estas dificuldades surgirem. Desta forma, deve-se pensar em mais do que uma abordagem para cada possível dificuldade, de modo, a garantir a compreensão do conceito por parte de todos os alunos.

O estudo de aula constituiu, para mim, um processo de aprendizagem profundamente enriquecedor. Ao longo das cinco reuniões realizadas, tive a oportunidade de desenvolver um trabalho colaborativo com a minha colega de mestrado e o docente da universidade. Estas reuniões revelaram-se momentos fundamentais para a planificação detalhada das aulas, a construção e reformulação das tarefas, a antecipação das dificuldades dos alunos e a reflexão conjunta sobre todo o processo. A discussão entre nós os três permitiu-nos analisar criticamente as propostas, debater diferentes perspetivas e construir soluções

mais adequadas para promover aprendizagens significativas.

No âmbito deste processo, assumi também o papel de observadora, uma vez que assisti às aulas lecionadas pela minha colega, tal como ela observou as minhas. Durante a observação, registei aspetos relevantes relacionados com o seu desempenho como professora, as estratégias adotadas pelos alunos e possíveis sugestões de melhoria, que posteriormente partilhei com ela. Este processo de observação mútua foi extremamente significativo, pois proporcionou uma oportunidade de reflexão sobre a minha própria prática ao observar uma colega na mesma fase de formação. Além disso, fomentou uma partilha reflexiva e uma escuta ativa, que contribuíram para o enriquecimento das práticas de ambas. A postura adotada pela minha colega, as decisões tomadas em tempo real, a gestão da aula, as interações desenvolvidas e a forma como conduziu a discussão coletiva, nomeadamente a seleção dos grupos e a ordem das apresentações de acordo com as estratégias de resolução, levaram-me a repensar várias decisões que tomei nas minhas próprias intervenções.

De forma mais ampla, o processo do estudo de aula permitiu-me reconhecer o valor desta metodologia enquanto estratégia de desenvolvimento profissional. As fases de planificação, observação e reflexão conjunta promoveram uma abordagem contínua à prática docente, centrada na aprendizagem dos alunos. Esta experiência permitiu-me consolidar uma visão mais profunda sobre a importância do trabalho colaborativo, da escuta crítica entre pares e da análise cuidada das interações em sala de aula, contribuindo significativamente para o meu crescimento como futura professora.

A planificação das duas intervenções seguiu os princípios do ensino exploratório. Deste modo, as tarefas propostas revelaram-se investigativas e desafiantes, promovendo o envolvimento ativo dos alunos na construção do conhecimento.

A primeira aula, dedicada à exploração de uma progressão aritmética com copos, permitiu-me aplicar uma abordagem prática e lúdica para introduzir as sequências numéricas. Apesar da intervenção ter decorrido de forma positiva, a reflexão seguinte a esta aula evidenciou a necessidade de uma melhor gestão do tempo, uma vez que aguardei que todos os grupos terminassem a tarefa antes de se iniciar a discussão coletiva, o que reduziu significativamente o tempo disponível para este momento essencial.

Destacou-se, nesta aula, um aspeto particularmente revelador, em que o único aluno da

turma que beneficia de medidas seletivas, foi precisamente aquele que adotou um raciocínio correto, baseado na adição sucessiva de bordas, para explorar a altura de uma torre maior. Este facto é significativo, pois pode indicar que, ao contrário dos seus colegas, este aluno não se condicionou a uma Matemática mais formal, centrada em várias regras fixas. Pelo contrário, recorreu a uma abordagem mais intuitiva e investigativa, explorando o material manipulável de forma autónoma, sem se limitar a instruções prévias ou padrões habituais. Esta situação ilustra não só o potencial inclusivo dos materiais manipuláveis e das tarefas de natureza investigativa, como também evidencia a importância de proporcionar a todos os alunos tarefas que se afastem do ensino tradicional e incentivem formas de pensar mais criativas e autónomas. Desta forma, este acontecimento sublinha o carácter universal da proposta, ao permitir diferentes formas de acesso ao conhecimento matemático, por todos os alunos. Além disso, reforça-se a percepção de que os alunos, de um modo geral, ainda não estão habituados a resolver tarefas de carácter investigativo, nas quais são desafiados a construir o conhecimento com base na exploração.

A segunda aula, centrou-se na construção de uma sequência geométrica com a manipulação de feijões. Nesta intervenção, tive a oportunidade de aplicar a aprendizagem relacionada à gestão do tempo. Assim, a discussão em turma iniciou-se antes da conclusão da tarefa por todos os grupos e, através desta, os alunos puderam apresentar as suas estratégias, ouvir os colegas e refletir sobre as suas resoluções. Este momento revelou-se particularmente importante para a consolidação da distinção entre o valor isolado e o valor acumulado da recompensa ao longo das casas.

Nesta aula, destacaram-se ainda os raciocínios diferentes de dois grupos. Por um lado, o grupo E, que associou toda a tarefa à tabuada do três, visto ter percebido que o tabuleiro do jogo tinha nove casas e este número é múltiplo de três. Este raciocínio levou o grupo a moldar toda a tarefa de forma diferente. No entanto, em algumas questões ainda conseguiram perceber alguns raciocínios da tarefa, como distinguir o valor isolado do acumulado, apesar de o relacionarem à tabuada do três. Por outro lado, o grupo G, que em vez de multiplicar o número de feijões de uma casa anterior para a seguinte, optou por adicionar dois feijões por cada casa adicionada, o que também moldou a resolução da tarefa. Este raciocínio poderá ter ocorrido porque os alunos interpretam a sequência como tendo uma razão constante, associando-a, por isso, a uma progressão aritmética. Esta confusão revela a dificuldade em distinguir padrões lineares (sequências aritméticas) de

não lineares (sequências geométricas), o que poderá relacionar-se com o facto de esta ter sido a primeira sequência geométrica estudada pela turma.

Em relação às duas aulas de investigação, durante o trabalho autónomo, os alunos apresentaram maioritariamente raciocínios recursivos, determinando cada termo da sequência a partir de termos anteriores. Contudo, na primeira aula, vários alunos revelaram indícios de pensamento funcional, ao perceberem que o número de copos podia ser calculado diretamente, duplicando o número da torre, generalizando assim a fórmula correta.

Ao longo de todo o processo de estudo de aula, tornou-se evidente o impacto positivo desta metodologia na minha formação. Este percurso proporcionou um trabalho colaborativo entre mim, a minha colega e o professor, promovendo momentos de discussão, que permitiram analisar detalhadamente a planificação das tarefas e até mesmo antecipar com rigor as possíveis dificuldades dos alunos. Para além disso, a reflexão conjunta, permitiu a partilha de diferentes perspetivas, que se revelaram fundamentais para o meu desenvolvimento pessoal e profissional, ajudando-me a construir uma prática mais reflexiva, fundamentada e consciente das necessidades dos alunos.

## Conclusão

Este estudo teve como propósito investigar de que forma a utilização de materiais manipuláveis poderia contribuir para a compreensão de regularidades em sequências de crescimento por alunos do 5.º ano de escolaridade do 2.º ciclo do ensino básico. Para isso, segui o processo do estudo de aula e desenvolvi duas intervenções exploratórias com recurso a copos e a feijões, articuladas com o domínio da Álgebra definido nas Aprendizagens Essenciais da Matemática (Direção Geral de Educação, Ministério da Educação, 2021e).

Através da literatura consultada e do desenvolvimento da fundamentação teórica, tive a oportunidade de reconhecer, por um lado, o potencial do estudo de aula enquanto processo formativo e investigativo, aprofundar a compreensão das fases deste processo e constatar que este promove não só o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores, como também as aprendizagens dos alunos. Por outro lado, tive a oportunidade de estudar a evolução da Álgebra escolar, identificar aspetos relevantes sobre o uso de materiais manipuláveis neste contexto, aprofundar a importância dos padrões como base do pensamento algébrico e distinguir o pensamento recursivo do funcional.

Ao seguir a estrutura do processo de estudo de aula, tive a oportunidade de participar em reuniões com a minha colega de mestrado e o docente da universidade, nas quais planificámos as aulas de investigação, desenvolvendo as fases de aula ao pormenor, tanto as minhas como as da minha colega, preparámos os enunciados, discutimos sobre as possíveis dificuldades dos alunos e como responder a tais dificuldades. No decorrer das aulas, notámos que as dificuldades dos alunos antecipadas por nós, aconteceram de facto, destacando-se, na primeira aula, o uso indevido da proporcionalidade direta e a utilização incorreta da régua, já na segunda aula, a diferenciação entre o valor isolado e o valor acumulado. Depois das aulas, partilhámos anotações das observações realizadas, refletimos em conjunto sobre o decorrer das intervenções, o trabalho dos alunos, os raciocínios apresentados e possíveis melhorias.

Desta forma, o processo do estudo de aula promoveu uma planificação detalhada, a construção colaborativa de soluções para as dificuldades previstas e uma análise crítica fundamentada nas observações partilhadas. Todo este trabalho conjunto contribuiu para melhorar práticas letivas e aprofundar o conhecimento didático do professor, o que

promove o seu desenvolvimento profissional. Além disso, ao antecipar diferentes estratégias e ajustar as intervenções de acordo com as dificuldades previstas, este processo potencia uma aprendizagem mais significativa por parte dos alunos.

De seguida, apresentam-se algumas observações sobre o impacto específico dos materiais manipuláveis utilizados em cada aula. Na primeira intervenção, os alunos utilizaram os copos desde o início da aula para construir a sequência pedida e preencher a tabela apresentada. Nas questões seguintes, alguns alunos optaram por não recorrer aos copos, respondendo diretamente às questões através de uma aplicação indevida da proporcionalidade direta. Ainda assim, verificaram-se vários casos em que os copos foram utilizados para explicitar raciocínios ao colega de grupo ou para os medir novamente. Já na discussão coletiva, os copos revelaram-se bastante úteis para ilustrar diferentes aspetos das medições e realçar o detalhe importante das bordas, o que ajudou a aprofundar a compreensão da sequência.

Na segunda intervenção, os feijões foram utilizados pelos alunos como suporte para desenvolverem diferentes raciocínios relacionados com a tarefa. O seu uso permitiu-lhes investigar o crescimento da sequência relativa à recompensa de cada casa, bem como da sequência acumulada ao longo de várias casas, observando a diferença entre valores isolados e acumulados. Desde as primeiras questões, alguns alunos colocaram os feijões imediatamente no tabuleiro, criando uma representação visual clara da sequência. Destaca-se ainda a questão quatro, na qual os alunos colocaram os feijões no tabuleiro até uma determinada casa e, através da manipulação dos feijões nessa questão e, conseqüentemente na seguinte, vários alunos perceberam a distinção entre os raciocínios relacionados aos valores isolados e acumulados. Além disso, alguns alunos recorreram aos feijões para explicarem os seus raciocínios ao colega de grupo.

A manipulação tanto dos copos como dos feijões, promoveu também o envolvimento dos alunos, uma vez que não estão habituados a recorrer a materiais manipuláveis nas aulas de Matemática. Desde o início de cada aula, demonstraram elevado interesse e motivação para desenvolver as tarefas em colaboração com o colega de grupo, lendo os enunciados com atenção e trabalhando de forma colaborativa. Por sua vez, essa motivação refletiu-se numa postura mais focada e num comportamento bastante positivo durante as aulas, o que contrasta com o habitual comportamento mais agitado desta turma nas aulas de Matemática, onde por vezes se verificam situações de desrespeito entre colegas. Porém,

nas aulas de investigação observou-se um respeito mútuo constante por parte de todos os alunos. Importa ainda destacar que, em ambas as aulas, surgiram vários momentos em que os alunos do mesmo grupo discutiram diferentes hipóteses de resolução, partilhando estratégias distintas, e conseguiram, de forma colaborativa, chegar sempre a um consenso sobre a estratégia a seguir.

Desta forma, a análise das aulas de investigação permitiu constatar que a utilização de materiais manipuláveis, como os copos e os feijões, contribuiu significativamente para a compreensão de regularidades em sequências de crescimento por parte dos alunos do 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico. Estes materiais favoreceram a construção de representações visuais das sequências, ajudando os alunos a observar padrões, a distinguir valores isolados de acumulados e a relacionar diferentes formas de raciocínio. Além disso, o recurso aos materiais promoveu a motivação, o que impulsionou o envolvimento e a interação entre os alunos na partilha de estratégias e raciocínios. Assim, os resultados evidenciam que o uso de materiais manipuláveis apoiou a identificação e, em alguns casos, a generalização das regularidades trabalhadas, indo ao encontro do primeiro objetivo definido neste estudo.

Relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, na primeira aula, começaram por recorrer a diferentes abordagens para medir a altura das torres construídas, como o uso da régua inclinada, perpendicular à mesa ou até mesmo deitar a torre de copos na mesa para a medir, o que demonstra a existência de diferentes interpretações práticas para a mesma questão. De seguida, ao calcular a altura de torres maiores, todos os grupos acabaram por recorrer a termos anteriores e aplicar indevidamente a proporcionalidade direta, mostrando um raciocínio recursivo, o que, de acordo com Tall (1992), pode representar um sério obstáculo à descoberta da regra geral ou da fórmula. No entanto, o raciocínio de um aluno destacou-se, visto que optou por adicionar bordas sucessivas a um copo, correspondendo a uma estratégia válida para a resolução da tarefa, embora tenha abandonado essa abordagem posteriormente. Este aluno, que é o único da turma com medidas seletivas, adotou uma estratégia que evidencia uma abordagem mais intuitiva e investigativa, não se deixando limitar por instruções formais ou padrões previamente ensinados, tal facto revela o carácter inclusivo e universal da tarefa proposta. Já quando lhes foi solicitado para encontrar uma forma de descobrir a altura de qualquer torre, alguns explicaram apenas que bastaria duplicar o número da torre para descobrir o número de

copos, mas não relacionaram essa resposta com o cálculo da altura. Por outro lado, dois grupos, ao refletirem sobre esta questão, perceberam que, de um termo para o seguinte, se deve adicionar apenas a altura das bordas dos copos. Apesar de não terem conseguido realizar uma expressão geradora, exemplificaram a adição de bordas com um caso específico, o que, de acordo com Ponte et al. (2017) é expectável no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em relação à segunda aula, desde o início, os alunos demonstraram recorrer a estratégias diferentes. Nas questões das estimativas, apesar de lhes ter sido solicitado que não realizassem cálculos, alguns alunos calcularam a quantidade de feijões recebida por cada casa, seguindo corretamente a regra da sequência e determinando o valor correspondente à última casa. Importa destacar que, ao longo de várias questões, alguns alunos optaram por colocar fisicamente os feijões no tabuleiro para os contar, enquanto outros utilizaram estratégias baseadas em diversos cálculos. Alguns grupos aplicaram corretamente a regra de duplicar o valor da recompensa de uma casa para obter o valor da casa seguinte, demonstrando terem compreendido o padrão geométrico. No entanto, verificaram-se outras abordagens: dois grupos multiplicaram o número da casa por dois para calcular a recompensa, enquanto um grupo multiplicou o número da casa por três, por ter associado o tabuleiro, com nove casas, à tabuada do três e outro grupo realizou adições sucessivas, acrescentando dois feijões de uma casa para a seguinte, o que evidencia, perante um padrão não linear, uma estratégia aditiva, algo que, segundo Ponte et al. (2017), é expectável, já que sequências não lineares representam uma maior dificuldade para os alunos. Ao perceberem a existência de um valor acumulado, vários alunos somaram os valores isolados das casas anteriores para chegarem ao total. Já na questão em que se solicitava uma forma de determinar o número de feijões recebidos por qualquer casa, pretendia-se que elaborassem uma expressão geradora da sequência, no entanto, metade da turma indicou apenas que bastaria duplicar o número de feijões da casa anterior. Ocorreram ainda outras estratégias para responder à última questão, como um grupo que continuou a basear-se na tabuada do três e outro que manteve o raciocínio aditivo da soma de dois feijões entre casas consecutivas.

Desta forma, relativamente ao segundo objetivo, considero que foi possível compreender profundamente as estratégias desenvolvidas pelos alunos durante a realização das tarefas, através da análise das interações gravadas em áudio e dos registos escritos.

No âmbito do ensino exploratório, foi promovida a discussão em turma no final de cada aula. Na primeira aula, destacam-se alguns momentos desta discussão, começando pela percepção de vários aspetos que influenciam as medidas das alturas das torres, em que vários alunos contribuíram ativamente para os identificar. Seguiu-se a apresentação de um contraexemplo, o que permitiu à turma abandonar o raciocínio relacionado com o uso indevido da proporcionalidade direta. Depois, vários alunos participaram na discussão que resultou na construção conjunta de conhecimento relativo à importância das bordas e, a partir deste momento, os alunos começaram a compreender corretamente a estrutura da sequência. Desta forma, ao abordar as questões seguintes, perceberam que tinham realizado algumas respostas incorretas e, em conjunto, conseguiram construir hipóteses de resolução mais adequadas. Destaca-se que, embora nenhum grupo tenha desenvolvido autonomamente uma expressão geradora da sequência, esta acabou por ser construída colaborativamente.

Na segunda aula, os momentos mais relevantes da discussão relacionaram-se, primeiramente, com a confrontação de respostas diferentes, nomeadamente quando um grupo apresentou uma resolução incorreta baseada em adições sucessivas da recompensa de feijões, sendo corrigido por outro grupo que aplicou multiplicações sucessivas adequadamente. De seguida, foi apresentado um exemplo para que os alunos distinguíssem valores isolados de acumulados, o que se revelou essencial para a continuação da discussão da tarefa. Além disso, após este momento, alguns alunos reconheceram que as suas estratégias estavam incorretas e sabiam como corrigi-las. Tal como na aula anterior, nenhum grupo desenvolveu uma expressão geradora de forma autónoma, pelo que esta foi construída em conjunto.

Verifica-se que, ao promover a apresentação de estratégias diversas, o confronto de raciocínios distintos e a construção conjunta de respostas corretas, a fase da discussão em turma permitiu, em parte, que os alunos evoluíssem do raciocínio recursivo para uma compreensão mais funcional das sequências. Assim, os dados analisados permitem concluir que a discussão em turma, enquanto fase essencial do ensino exploratório, contribuiu significativamente para ampliar o pensamento algébrico dos alunos, o que responde ao terceiro objetivo deste estudo.

Assim, face aos objetivos específicos definidos terem sido atingidos, considero que a questão de investigação “De que forma a utilização de materiais manipuláveis pode

contribuir para a compreensão de regularidades em sequências de crescimento por alunos do 5.º ano de escolaridade?” foi devidamente respondida ao longo do desenvolvimento dos três objetivos, demonstrando que a utilização de materiais manipuláveis contribuiu significativamente para a compreensão de tais regularidades. Estes materiais não só facilitaram a visualização da estrutura das sequências, como também promoveram o envolvimento e a motivação dos alunos. Este impacto evidenciou-se num comentário espontâneo, durante a segunda aula, quando o Vasco afirmou “Eu estou a gostar de Matemática” e o Marco respondeu “Eu também!”, ao que Vasco completou “Mostra a nossa criatividade!”. Além disso, na aula seguinte às intervenções, alguns alunos perguntaram-me se aquela aula seria igual às anteriores, isto é, de exploração com materiais manipuláveis em grupo, mostrando-se desapontados quando perceberam que não seria. Estes momentos refletem o entusiasmo e a perceção do valor deste tipo de trabalho, reforçando a relevância de práticas exploratórias, colaborativas, centradas no aluno e que recorram a materiais manipuláveis.

Durante o desenvolvimento do estudo, destacaram-se algumas dificuldades, sendo que uma delas se relacionou à gestão do tempo na primeira intervenção. Nessa aula, optou-se por aguardar que todos os alunos concluíssem completamente a tarefa antes de iniciar a discussão coletiva, o que limitou o tempo disponível para esta fase, que, de acordo com Guerreiro et al. (2015), é considerada essencial no âmbito do ensino exploratório da Matemática. Contudo, na aula seguinte, esta dificuldade foi superada, pois, assim que a maioria dos grupos terminou a tarefa, avançou-se para a discussão em turma, permitindo uma análise mais aprofundada de cada questão e uma maior participação dos alunos. Por outro lado, notou-se que faltou aprofundar as respostas às dificuldades previstas dos alunos. Apesar de estas terem sido antecipadas detalhadamente durante as reuniões de planificação, ao ser apresentado um exemplo para mostrar a diferença entre os valores isolados e acumulados, uma aluna continuava sem perceber o raciocínio pretendido. Assim, durante a aula, foi necessário elaborar um novo exemplo que apresentasse uma sequência crescente, o que se revelou eficaz para a compreensão da aluna. Percebe-se, portanto, que durante a planificação deveria ter sido aprofundada de forma mais rigorosa a resposta às dificuldades antecipadas dos alunos.

Ao refletir sobre possíveis melhorias para investigações futuras, considero que, no que se refere à tarefa dos feijões, seria importante solicitar explicitamente aos alunos, numa das questões iniciais, que calculem o número de feijões recebidos por cada casa e os coloquem

fisicamente no tabuleiro. Isto porque se verificou que os alunos que seguiram essa estratégia conseguiram compreender mais facilmente a sequência de crescimento e até mesmo distinguir entre os valores isolados e acumulados. Outra melhoria que considero importante seria planificar diferentes formas de resposta para uma mesma dificuldade prevista, reconhecendo que uma abordagem pode ser eficaz para alguns, mas não para outros. Assim, ao diversificar as estratégias ou os exemplos apresentados, o professor poderá adaptar a intervenção em função das necessidades específicas dos alunos, garantindo uma maior compreensão dos conceitos explorados.

O desenvolvimento deste estudo e a respetiva elaboração deste relatório permitiram-me aprofundar a consciência sobre a importância de promover uma aprendizagem ativa, centrada nos alunos, que valorize o uso de materiais manipuláveis como facilitadores do pensamento algébrico. Por sua vez, o desenvolvimento do processo do estudo de aula reforçou a valorização de trabalhar colaborativamente na planificação e reflexão das aulas, antecipar possíveis dificuldades e estratégias de resolução por parte dos alunos e preparar diversas abordagens para responder a essas dificuldades. Desta forma, diversos aspetos relevantes relacionados com as metodologias, que aprofundei através deste estudo, serão aplicados de forma consistente na minha futura prática docente, contribuindo para um ensino da Matemática mais exploratório, significativo e motivador para os alunos.

## Referências Bibliográficas

- Alexandre, M. R. S. R. (2015). *Desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 1.º Ciclo do ensino básico* [Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais]. Repositório Institucional de Informação Científica do Instituto Politécnico de Leiria. <http://hdl.handle.net/10400.8/1831>
- Alsina, Á., & Bosch, E. (2022). Numeración y cálculo en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 5(3), 132–167. <https://doi.org/10.30612/tangram.v5i3.16420>
- Alsina, Á., & Bosch, E. (2024). Álgebra en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido algebraico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 7(3), 2–31. <https://doi.org/10.30612/tangram.v7i3.18851>
- Bannister, V. R. P., & Wilkins, J. L. M. (2007). “I Can't Write All the Way to 100”: Recognizing Students' Emerging Algebraic Strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(5), 278–282.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193–211). Lisboa: SEM-SPCE. <https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/1416>
- Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. M. (2011). Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. *Bolema*, 24(38), 97–126. [https://www.researchgate.net/publication/272487824\\_Pensamento\\_Algebrico\\_ao\\_longo\\_do\\_Ensino\\_Basico\\_em\\_Portugal\\_Algebraic\\_Thinking\\_through\\_the\\_Basic\\_Education\\_in\\_Portugal](https://www.researchgate.net/publication/272487824_Pensamento_Algebrico_ao_longo_do_Ensino_Basico_em_Portugal_Algebraic_Thinking_through_the_Basic_Education_in_Portugal)
- Decreto-Lei nº 54/2018 de 6 de julho do Ministério da Educação (2018). Diário da

República: I série, n.º 129. <https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/54-2018-115652961>

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021a). *Aprendizagens Essenciais: 1.º ano, 1.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/ae\\_mat\\_1.o\\_ano.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_1.o_ano.pdf)

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021b). *Aprendizagens Essenciais: 2.º ano, 1.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/ae\\_mat\\_2.o\\_ano.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_2.o_ano.pdf)

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021c). *Aprendizagens Essenciais: 3.º ano, 1.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/ae\\_mat\\_3.o\\_ano.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_3.o_ano.pdf)

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021d). *Aprendizagens Essenciais: 4.º ano, 1.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/ae\\_mat\\_4.o\\_ano.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/ae_mat_4.o_ano.pdf)

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021e). *Aprendizagens Essenciais: 5.º ano, 2.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/ae\\_mat\\_5.o\\_ano.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_5.o_ano.pdf)

Direção Geral de Educação, Ministério da Educação (2021f). *Aprendizagens Essenciais: 6.º ano, 2.º Ciclo do ensino básico, Matemática*. Direcção-Geral da Educação. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/ae\\_mat\\_6.o\\_ano.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_6.o_ano.pdf)

Duarte, N. G., Ponte, J. P. M., & Pinto, H. G. (2023). O contributo do estudo de aula na preparação e condução da discussão coletiva: perspetivas e dificuldades de duas futuras professoras dos anos iniciais. *Bolema*, 37(77), 1192–1213. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a13>

- Espinoza, M. E. C., & Moreira, F. S. M. (2021). El material didáctico de apoyo en adaptaciones curriculares de matemáticas para personas con discapacidad intelectual. *Revista Conrado*, 17(80), 312–320. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1849>
- Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 313–320). PME. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9)
- Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development*, 16, 65-83. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1046666>
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*, 48, 411–423. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3>
- Guerreiro, A., Ferreira, R. A., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23 (44), 279-295. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539>
- Infante, M. L. C. V. (2014). *Desenvolvendo o pensamento algébrico no 2.º ciclo do ensino básico: o sentido dos símbolos e da generalização* [Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa]. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10400.21/4117>
- Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín, & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505–516). SEIEM. <http://hdl.handle.net/10451/4528>
- Menezes, L., Oliveira, H., Canavarro, A.P. (2015). Inquiry-Based Mathematics Teaching: The Case of Célia. In U. Gellert, J. G. Rodríguez, C. Hahn, & S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp.305–321). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-15410-7\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-319-15410-7_20)

- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart, A. Alston, & A. Murata. (Eds.). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 1–12). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1)
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM Associação de Professores de Matemática. <http://hdl.handle.net/10451/3008>
- Ponte, J. P. (2017). A aprendizagem da Álgebra: Resultados de estudos portugueses. *Educação e Matemática*, 144–145, 27–32. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2451>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 133, 26–35. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2292>
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. *Bolema*, 30(56), 868–891. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01>
- Pozzobon, M. C. C., Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2025). Conhecimento didático de professores de matemática em estudo de aula: Dificuldades dos alunos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, 27, 312–335. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2025v27i1p312-335>
- Richit, A., & Franceschi, L. (2025). Desenvolvimento Curricular da Matemática em um Estudo de Aula Centrado no Tópico Divisão. *Bolema*, 39, 1–30. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v39a240120>
- Richit, A., Ponte, J. P., & Tomkelski, M. L. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54–81. <http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3961>
- Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., Serra, S., & Martins, C. (2022). *Coletânea de tarefas - 5.º ano de escolaridade*. Direção-Geral da Educação. [https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea\\_5ano.pdf](https://aem.dge.mec.pt/sites/default/files/resources/coletanea_5ano.pdf)

- Scheller, M., Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2019). O Formador na Condução de Sessões de um Estudo de Aula. *Educere et Educare*, 14(32). <https://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/21792>
- Scheller, M., Zabel, M., Voigt, J. F., Fiamoncini, P. S., Hackbarth, R., & Girardi, N. B. (2024). *Pelos caminhos do estudo de aula: vivências e experiências do ciclo 2022. Extensão Tecnológica: Revista De Extensão do Instituto Federal Catarinense*, 11(21), 124–157. <https://doi.org/10.21166/rext.v11i21.4136>
- Tall D. (1992, setembro 2-3). *The Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns, or Proceptual Programming?* [Sessão em conferência]. Research Workshop on Mathematics Teaching and Learning “From Numeracy to Algebra”, Brisbane.  
[https://www.researchgate.net/publication/248040364\\_The\\_Transition\\_from\\_Arithmetic\\_to\\_Algebra\\_Number\\_Patterns\\_or\\_Proceptual\\_Programming](https://www.researchgate.net/publication/248040364_The_Transition_from_Arithmetic_to_Algebra_Number_Patterns_or_Proceptual_Programming)
- Wijns, N., Torbeyns, J., Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Young Children’s Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. In K. Robinson, H. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9)

## Índice de apêndices


|  |     |
|--|-----|
| <b>Apêndice A</b> – Tarefa da primeira aula “O segredo das torres de copos” .....      | 76  |
| <b>Apêndice B</b> – Tarefa da segunda aula “O segredo da recompensa dos feijões” ..... | 78  |
| <b>Apêndice C</b> – Declaração de Consentimento Informado .....                        | 81  |
| <b>Apêndice D</b> – Plano da primeira aula .....                                       | 82  |
| <b>Apêndice E</b> – Possíveis resoluções previstas para a primeira aula.....           | 84  |
| <b>Apêndice F</b> – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da primeira aula .....   | 87  |
| <b>Apêndice G</b> – Grelha de registo da primeira aula.....                            | 88  |
| <b>Apêndice H</b> – Materiais da primeira aula em nepalês .....                        | 90  |
| <b>Apêndice I</b> – Materiais da primeira aula em mandarim .....                       | 93  |
| <b>Apêndice J</b> – Plano da segunda aula.....   | 96  |
| <b>Apêndice K</b> – Possíveis resoluções previstas para a segunda aula.....            | 98  |
| <b>Apêndice L</b> – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da segunda aula.....     | 100 |
| <b>Apêndice M</b> – Grelha de registo da segunda aula .....                            | 101 |
| <b>Apêndice N</b> – Materiais da segunda aula em nepalês.....                          | 103 |
| <b>Apêndice O</b> – Materiais da segunda aula em mandarim .....                        | 107 |

# Apêndices

## Apêndice A – Tarefa da primeira aula “O segredo das torres de copos”

Nomes: \_\_\_\_\_

### O segredo das torres de copos



Torre n.º 1  
2 copos

Torre n.º 2  
4 copos

Torre n.º 3  
6 copos

1 - Utiliza os copos para fazeres uma sequência igual à da figura.

2 - Mede a altura de cada torre de copos e preenche a tabela com esses valores e os dados em falta.

|                      |   |   |   |   |   |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| Torre n.º            | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| N.º de copos         |   |   |   |   |   |
| Altura da torre (cm) |   |   |   |   |   |

3 - Qual seria a altura de uma torre com 20 copos iguais a esses? Apresenta o teu raciocínio.

## O segredo das torres de copos

4 - Qual seria a altura da torre n.º 16? Apresenta o teu raciocínio.

5 - Descobriste o segredo das torres de copos? Encontraste uma forma de calcular a altura de qualquer torre, sem precisares de empilhar os copos? Explica o teu raciocínio.

## Apêndice B – Tarefa da segunda aula “O segredo da recompensa dos feijões”

Nomes: \_\_\_\_\_

### ○ segredo da recompensa dos feijões

#### A lenda do xadrez

O xadrez é um dos jogos mais antigos do mundo. Ele foi criado há muitos séculos na Índia, por um professor chamado Sessa. A história do jogo conta que um rei chamado Sheram ficou muito feliz com a criação do jogo e quis compensar o seu inventor. Como recompensa por ter criado o jogo, Sessa pediu ao rei um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira e assim por diante, sempre duplicando o número de grãos, até completar as 64 casas do tabuleiro de xadrez. O Rei Sheram ficou admirado pelo pedido tão modesto do inventor e pediu aos seus sábios que calculassem o número de grãos a entregar ao inventor.

#### O meu jogo

*E se tu inventasses um tabuleiro de um jogo com 9 casas e o teu esquema para receber uma recompensa seria semelhante ao do Sessa, mas com feijões?*

1. **Sem fazeres cálculos**, responde a estas perguntas (1.1. e 1.2.):

1.1. Achas que o número de feijões cresce devagar ou depressa?

1.2. Quantos feijões achas que receberias no total?

2. Quantos feijões recebes **apenas** pela **2.ª casa**?

2.1. E **apenas** pela **5.ª casa**?

3. Recebeste **3 feijões**. Quer dizer que já foste pago até à \_\_\_\_\_ casa do tabuleiro.

3.1. E se receberes **15 feijões**, até que casa foste pago?

4. Agora, põe os feijões no tabuleiro até à 6.<sup>a</sup> casa. Se recebesses **32** feijões já terias sido pago pelas primeiras **6 casas** do tabuleiro? Explica o motivo da tua resposta.

5. Quantos feijões receberias **apenas** pela **9.<sup>a</sup> casa** do teu jogo?

5.1. E quantos feijões receberias por **todas** as **9 casas** do teu jogo?

6 - Descobriste o segredo da recompensa dos feijões? Encontraste uma forma de calcular o n.º de feijões que receberias **de uma casa qualquer**, sem precisares de contar os feijões? Explica o teu raciocínio.

Nomes: \_\_\_\_\_

## Tabuleiro do jogo

|                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>1.<sup>a</sup> casa</b> | <b>2.<sup>a</sup> casa</b> | <b>3.<sup>a</sup> casa</b> |
| <b>4.<sup>a</sup> casa</b> | <b>5.<sup>a</sup> casa</b> | <b>6.<sup>a</sup> casa</b> |
| <b>7.<sup>a</sup> casa</b> | <b>8.<sup>a</sup> casa</b> | <b>9.<sup>a</sup> casa</b> |

## Apêndice C – Declaração de Consentimento Informado

### Declaração de Consentimento Informado

Eu, Encarregado de Educação do/a aluno/a \_\_\_\_\_,  
n.º \_\_\_\_\_, da turma \_\_\_\_\_ do 5.º ano da Escola \_\_\_\_\_ autorizo  
o meu educando a participar num estudo académico sobre regularidades em sequências  
de crescimento, através da captação de áudio do meu educando durante algumas aulas de  
matemática.

Esta recolha de dados faz parte de um projeto de investigação com vista à elaboração do  
relatório da prática de ensino supervisionada, sobre “Regularidades em sequências de  
crescimento no 5.º ano de escolaridade: uma abordagem com materiais manipuláveis”,  
orientado pelo professor António Guerreiro da Universidade do Algarve. Toda a  
informação recolhida será anónima e destina-se exclusivamente para fins académicos.

Muito obrigada pela sua colaboração.

A investigadora,

Tatiana Souza

---

Tavira, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2025

O Encarregado de Educação

---

## Apêndice D – Plano da primeira aula

### Plano de aula “O segredo das torres de copos”

#### A. Aspectos gerais da aula

1. **Objetivo(s) de aprendizagem:** Explorar regularidades em sequências de crescimento; continuar uma sequência dada; identificar e descrever uma possível lei de formação; desenvolver competências de comunicação e argumentação; promover valores como o respeito e a autonomia; refletir sobre o próprio desempenho.
2. **Estratégia geral:** Proposta de uma tarefa com cinco questões.
3. **Estrutura da aula:** A estrutura da aula comporta cinco segmentos: introdução, resolução das 5 questões (período de trabalho autónomo em grupos de 2 alunos), discussão sobre a resolução da tarefa, síntese final e autoavaliação.
4. **Recursos a usar:** material manipulável (copos de plástico), fichas de trabalho com a tarefa, réguas e grelhas de autoavaliação e heteroavaliação.

#### B. Desenvolvimento da aula

| Tarefas e atividades de aprendizagem (a)                      | Duração esperada (b) | Atividade dos alunos e possíveis dificuldades (c)   | Respostas do professor e aspetos a ter em atenção (d)   | Objetivos e avaliação (e)   |
|---|----------------------|---|---|---|
| 1. Introdução (em coletivo)                                   | 20 min               | <ul style="list-style-type: none"><li>Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das tarefas.</li></ul>  | <ul style="list-style-type: none"><li>A professora divide a turma em pequenos grupos;</li><li>Distribui as fichas de trabalho, os copos e as réguas;</li><li>Apresenta o enunciado das tarefas e esclarece dúvidas.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>Perceber o que é pedido nas tarefas.</li></ul>  |
| 2. Resolução das cinco questões (trabalho autónomo em duplas) | 30 min               | <ul style="list-style-type: none"><li>Os alunos constroem uma sequência com os copos igual à da figura apresentada;</li><li>Medem as alturas das torres com a régua e preenchem a tabela com os dados correspondentes;</li><li>Respondem às questões da ficha relacionadas com a generalização da sequência;</li><li>Podem se confundir com a diferença de altura do primeiro copo e dos seguintes (encaixe);</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>A professora circula pela sala e observa as interações entre os alunos e as suas estratégias;</li><li>Incentiva os alunos a apresentarem sempre o seu raciocínio.</li></ul>             | <ul style="list-style-type: none"><li>Explorar regularidades em sequências de crescimento;</li><li>Continuar uma sequência dada;</li><li>Identificar e descrever uma possível lei de formação;</li><li>Desenvolver a autonomia.</li></ul> |

|  |        |  |   |   |
|--|--------|--|---|---|
|  |        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Podem ter dificuldades ao generalizar a sequência ou ao expressar algum raciocínio.</li> </ul>  |   |   |
| 3. Discussão sobre a resolução da tarefa (em coletivo) | 40 min | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos participam numa discussão coletiva;</li> <li>• Partilham as estratégias utilizadas na resolução das tarefas;</li> <li>• Podem ter dificuldades a expressar os seus raciocínios ou hesitar em questionar os colegas;</li> <li>• Utilização da proporcionalidade direta indevidamente.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora orienta a discussão;</li> <li>• Elabora perguntas para encorajar as explicações;</li> <li>• Incentiva a participação de todos os alunos;</li> <li>• Valoriza a diversidade de abordagens;</li> <li>• Incentiva o esclarecimento das questões;</li> <li>• Apresenta contraexemplos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender que há diferentes formas de resolver a mesma tarefa;</li> <li>• Desenvolver competências de comunicação e argumentação;</li> <li>• Promover o respeito e a aprendizagem colaborativa.</li> </ul> |
| 4. Síntese final (em coletivo)                         | 5 min  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos sintetizam as descobertas feitas durante a aula;</li> <li>• Podem ter dúvidas sobre algum aspeto da tarefa.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora reforça algum ponto que pode ter passado despercebido.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Consolidar os conhecimentos explorados durante a aula.</li> </ul>  |
| 5. Autoavaliação e heteroavaliação (individual)        | 5 min  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos refletem sobre o seu próprio desempenho ao longo da aula;</li> <li>• Refletem também sobre a participação dos colegas;</li> <li>• Preenchem uma grelha de autoavaliação.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora incentiva a reflexão de cada aluno.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Refletir sobre o próprio desempenho e identificar pontos fortes e a melhorar;</li> <li>• Refletir sobre a participação dos colegas;</li> <li>• Promover a autonomia.</li> </ul>                              |

## Apêndice E – Possíveis resoluções previstas para a primeira aula

### Tarefa “O segredo das torres de copos”

#### Questão 1

##### Hipótese 1

Os alunos constroem as torres iguais à da figura apresentada, utilizando 2 copos na 1.ª torre, 4 copos na 2.ª torre e 6 copos na 3.ª torre.

#### Questão 2

##### Hipótese 1

Os alunos medem a altura das torres de copos já construídas e apontam os valores das alturas na tabela. Desconstroem essas torres, utilizam os copos para construir a torre n.º 4 medem-na e repetem o processo para a torre n.º 5.

| Torre n.º            | 1    | 2    | 3    | 4  | 5    |
|----------------------|------|------|------|----|------|
| N.º de copos         | 2    | 4    | 6    | 8  | 10   |
| Altura da torre (cm) | 16,6 | 20,4 | 24,2 | 28 | 31,8 |

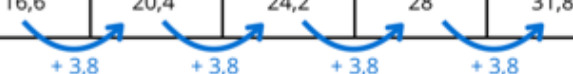
##### Hipótese 2

Os alunos medem a altura das torres de copos já construídas e apontam os valores das alturas na tabela. Percebem que para saber o valor da altura de uma torre basta adicionar 3,8 cm ao valor da altura da torre anterior. Assim, calculam o valor da torre n.º 4 e consequentemente o da torre n.º 5.

Torre n.º 4:  $24,2 + 3,8 = 28$  cm

Torre n.º 5:  $28 + 3,8 = 31,8$  cm

| Torre n.º            | 1    | 2    | 3    | 4  | 5    |
|----------------------|------|------|------|----|------|
| N.º de copos         | 2    | 4    | 6    | 8  | 10   |
| Altura da torre (cm) | 16,6 | 20,4 | 24,2 | 28 | 31,8 |



#### Questão 3

##### Hipótese 1

Os alunos multiplicam a altura da borda do copo por 19 e adicionam a altura de um copo inteiro.

$19 \times$  altura de uma borda + altura de um copo

$$= 19 \times 1,9 + 14,7$$

$$= 36,1 + 14,7$$

$$= 50,8 \text{ cm}$$

**Hipótese 2**

Os alunos observam o valor da tabela que representa a altura de 10 copos e adicionam a altura correspondente a mais 10 bordas de copos.

$$\begin{aligned} & \text{Altura de 10 copos} + 10 \times \text{altura de uma borda} \\ & = 31,8 + 10 \times 1,9 \\ & = 31,8 + 19 \\ & = 50,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 3**

Os alunos observam o valor da tabela que representa a altura de 10 copos e fazem 10 adições sucessivas da altura de uma borda de copo.

$$\begin{aligned} & \text{Altura da torre de 10 copos} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \\ & \text{borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} \\ & = 31,8 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 \\ & = 50,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 4**

Os alunos observam o valor da tabela que representa a altura de 10 copos e fazem 5 adições sucessivas de duas bordas de copos.

$$\begin{aligned} & \text{Altura da torre de 10 copos} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} \\ & = 31,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 \\ & = 50,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 5 (errada)**

Proporcionalidade direta partindo da torre de 10 copos para o cálculo da torre de 20 copos.

**Questão 4****Hipótese 1**

Primeiro, os alunos percebem que o n.º de copos é sempre o dobro do n.º da torre, assim, calculam o n.º de copos.

$$n.º \text{ da torre} \times 2 = n.º \text{ de copos}$$

$$16 \times 2 = 32$$

Depois, ao n.º de copos subtraem um copo e multiplicam esse valor pela altura da borda de copos. Finalmente, adicionam a altura de um copo.

$$\begin{aligned} & (n.º \text{ de copos} - 1) \times \text{altura de uma borda} + \text{altura de um copo} \\ & = (32 - 1) \times 1,9 + 14,7 \\ & = 31 \times 1,9 + 14,7 \\ & = 58,9 + 14,7 \\ & = 73,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 2**

Na alínea anterior calcularam a altura da 10.ª torre e a este valor fazem 12 adições sucessivas de uma borda de copo.

$$\begin{aligned} & \text{Altura da 10.ª torre} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \\ & \text{borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} + 1 \text{ borda} \\ & = 50,8 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 + 1,9 \\ & = 73,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 3**

Na alínea anterior calcularam a altura da 10.<sup>a</sup> torre e a este valor fazem 6 adições sucessivas de duas bordas de copos.

$$\begin{aligned} \text{Altura da 10.ª torre} &+ 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} + 2 \text{ bordas} \\ &= 50,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 + 3,8 \\ &= 73,6 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Hipótese 4**

Os alunos decidem observar a tabela inicial e estendem-na até à torre n.º 16, adicionando sempre 3,8 cm à altura da torre (duas bordas de copos).

|                      |      |      |      |    |      |      |      |      |    |      |      |      |      |    |      |      |
|----------------------|------|------|------|----|------|------|------|------|----|------|------|------|------|----|------|------|
| Torre n.º            | 1    | 2    | 3    | 4  | 5    | 6    | 7    | 8    | 9  | 10   | 11   | 12   | 13   | 14 | 15   | 16   |
| N.º de copos         | 2    | 4    | 6    | 8  | 10   | 12   | 14   | 16   | 18 | 20   | 22   | 24   | 26   | 28 | 30   | 32   |
| Altura da torre (cm) | 16,6 | 20,4 | 24,2 | 28 | 31,8 | 35,6 | 39,4 | 43,2 | 47 | 50,8 | 54,6 | 58,4 | 62,2 | 66 | 69,8 | 73,6 |

**Questão 5****Hipótese 1**

Os alunos conseguem construir uma regra geral do tipo:

Altura da torre = altura de 1 copo inteiro + (número de copos – 1) × altura da borda do copo

$$\text{Altura da torre} = 14,7 + (\text{n.º de copos} - 1) \times 1,9$$

**Hipótese 2**





Os alunos explicam o raciocínio em palavras, escrevem algo como:

“Para saber a altura de qualquer torre, multiplico o número de copos menos um pela altura de uma borda (1,9 cm). Ao resultado da multiplicação adiciono a altura do primeiro copo (14,7 cm).”

**Apêndice F** – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da primeira aula

Nome \_\_\_\_\_

**Autoavaliação e heteroavaliação**

|  | <br>Muito bem | <br>Bem | <br>Mais ou menos | <br>Mal |
|--|--|--|--|--|
| Construí corretamente as torres dos copos seguindo a regra.                        |  |  |  |  |
| Medi as alturas das torres com cuidado, usando a régua corretamente.               |  |  |  |  |
| Consegui prever a altura das torres pedidas.                                       |  |  |  |  |
| Identifiquei um padrão ou regra para calcular a altura de qualquer torre de copos. |  |  |  |  |
| Partilhei ideias com o meu colega de grupo e fiz-me entender.                      |  |  |  |  |
| O meu colega de grupo foi claro na partilha das suas ideias comigo.                |  |  |  |  |
| Participei com atenção no momento de reflexão com toda a turma.                    |  |  |  |  |
| Os meus colegas da turma foram claros na apresentação dos seus trabalhos.          |  |  |  |  |

## Apêndice G – Grelha de registo da primeira aula


| N.º |   | Grupo A | Grupo B | Grupo C | Grupo D              | Grupo E | Grupo F | Grupo G | Grupo H |
|-----|---|---------|---------|---------|----------------------|---------|---------|---------|---------|
| 1   | Fazer a sequência de copos  | ✓       | ✓       | ✓       | ✓                    | ✓       | ✓       | ✓       | ✓       |
| 2   | Medir a altura dos copos com a régua a 90° ou inclinada               | 90°     | 90°     |         | 90°                  |         | 90°     | incli.  | incli.  |
|     | Construir a 4.ª e 5.ª torres ou calcular a altura dessas torres       | co.     | co.     | co.     | co.                  | co.     | co.     | co.     | co.     |
| 3   | Calcular 19 x altura de uma borda + altura de um copo                 |         |         |         |                      |         |         |         |         |
|     | Fazer adições sucessivas de bordas                                    |         |         |         | ✓<br>1m 20cm<br>alta |         |         |         |         |
|     | Adicionar 10 bordas à altura do 5.º termo                             |         |         |         |                      |         |         |         |         |
|     | Recorrer à proporcionalidade direta (errado)                          | ✓       | ✓       | ✓       | ✓                    | ✓       | ✓       | ✓       | ✓       |
|     | Outra estratégia  |         |         |         |                      |         |         |         |         |
| 4   | Mostrar que o n.º da torre x 2 = n.º de copos                         | ✓       | ×       | ×       | ×                    | ×       | ✓       | ✓       | ✓       |
|     | Calcular (n.º de copos - 1) x altura de uma borda + altura de um copo |         |         |         |                      |         |         |         |         |

|                  |   |  |  |   |           |   |  |       |
|------------------|---|--|--|---|-----------|---|--|-------|
|                  | Fazer adições sucessivas de bordas  |  |  |   |           |   |  |       |
|                  | Outra estratégia  | $R_{2 \text{ copos}} + R_{12 \text{ copos}}$   | $16 \times$<br>$R_{12 \text{ copos}} + R_{12 \text{ copos}}$ | $16 \times$<br>$R_{12 \text{ copos}}$       |           | $R_{12 \text{ copos}}$<br>$n^{\circ} 5 \times 3$<br>$+ R_{12 \text{ copos}}$<br>$m^{\circ} ?$ |  |       |
| 5                | Perceber que o $n^{\circ}$ torre $\times 2 = n^{\circ}$ copos   | ✓  | ✓  | ✓   |           | ✓   |  | ✓     |
|                  | Escrever uma regra geral: Altura da torre = altura de 1 copo inteiro + (número de copos - 1) $\times$ altura da borda do copo ;<br>Altura da torre = $14,7 + (n^{\circ}$ de copos - 1) $\times$ 1,9 |  |  |   |           |   |  |       |
|                  | Explicar o raciocínio por palavras  |  |  |   |           |   |  |       |
|                  | Outra estratégia  | $220 \text{ cm} \times 1,9$<br>$\text{carada}$ | $22.$  |   |           | $22.$   |  | $22.$ |
| Erro a explorar? | P.D<br>Q3   | P.D<br>Q3                                      | P.D<br>Q3<br>Q4  | $16 \times$<br>$R_{12 \text{ copos}}$<br>Q4 | P.D<br>Q3 | Q4  |  |       |
| Quadro?          | Q3  |  |  | Q3  |           | Q4  |  |       |


Apêndice H – Materiais da primeira aula em nepalês

नामहर \_\_\_\_\_


## O segredo das torres de copos



टावर नम्बर १  
२ कप



टावर नम्बर २  
४ ग लास



टावर नम्बर ३  
६ ग लास

१ च त्रमा देखाइएको जस्तै अनुक्रम बनाउन कपहरु प्रयोग गर्नुहोस्।

२ प्रत्येक च माको टावरको उचाइ नाप्नुहोस् र यी कुराहरु ले ताल का भर्नुहोस्।  
मानहर रहराएको डेटा।

| टावर नं.          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|---|---|---|---|---|
| संख्या            |   |   |   |   |   |
| चस्मा             |   |   |   |   |   |
| उचाइ<br>टोरे सेमी |   |   |   |   |   |

३ यस्ता २० वटा चस्मा भएको टावर कत अग्लो हुनेछ आफ्नो तर्क प्रस्तुत गर्नुहोस्।





## O segredo das torres de copos

४ टावर नम्बर कत अग्लो हुनेछ १६ होला आफ्नो तर्क प्रस्तुत गर्नुहोस्।

के तपा ले कप टावरहर को रहस्य पत्ता लगाउनुभएको छ तपा ले बाटो फेला पार्नुभयो।  
कुनै पन टावरको उचाइ गणना गर्न स्ट्याक नगरीकन  
चस्मा आफ्नो तर्क व्याख्या गर्नुहोस्।

नाम \_\_\_\_\_

आत्म-मूल्याङ्कन र विषम-मूल्याङ्कन

|  |  |  |  |  |
|--|---|--|---|---|
|  | धेरै राम्रो   | राम्रो   | बढी वा कम   | नराम्रो   |
| मैले नियम पालना गर्दै कप टावरहरू सही तरिकाले बनाएँ।                        |   |  |   |   |
| रुलरको सही प्रयोग गरेर टावरहरूको उचाइ सावधानीपूर्वक नाप्नुहोस्।            |   |  |   |   |
| म अनुरोध गरिएका टावरहरूको उचाइ अनुमान गर्न सक्षम थिएँ।                     |   |  |   |   |
| मैले कुनै पनि सिसाको टावरको उचाइ गणना गर्ने ढाँचा वा नियम पहिचान गरेको छु। |   |  |   |   |
| मैले मेरो समूह साथीसँग विचारहरू साझा गरे र आफूलाई बुझाएँ।                  |   |  |   |   |
| मेरो समूह साथीले मसँग आफ्ना विचारहरू साझा गर्न स्पष्ट थियो।                |   |  |   |   |
| मैले सम्पूर्ण कक्षासँगै चिन्तनको क्षणमा ध्यानपूर्वक भाग लिएँ।              |   |  |   |   |
| मेरा सहपाठीहरू आफ्नो काम प्रस्तुत गर्न स्पष्ट थिए।                         |   |  |   |   |

Apêndice I – Materiais da primeira aula em mandarim

姓名: \_\_\_\_\_

# O segredo das torres de copos



1号塔  
2杯

2号塔  
4个玻璃杯

3号塔  
6个玻璃杯

- 1 - 使用杯子做出如图所示的序列。
- 2 - 测量每座玻璃塔的高度，并在表格中填写这些值和缺失数据。

| 塔号     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|---|---|---|---|---|
| 数量     |   |   |   |   |   |
| 眼睛     |   |   |   |   |   |
| 高度     |   |   |   |   |   |
| 塔 (厘米) |   |   |   |   |   |

- 3 - 如果用 20 个这样的玻璃杯，那么塔会有多高？  
提出你的理由。

## O segredo das torres de copos

4-塔号有多高？16是吗？提出你的理由。

5-你发现了杯塔的秘密吗？你找到了方法 计算任何塔的高度，而不必堆叠 眼镜？解释你的理由。

姓名\_\_\_\_\_

自我评估和异质评估

|                        | <br>非常好 | <br>好的 | <br>或多或少 | <br>坏的 |
|------------------------|--|--|---|---|
| 我按照规则正确地建造了杯子塔。        |  |  |   |   |
| 正确使用尺子仔细测量塔的高度。        |  |  |   |   |
| 我能够预测所要求的塔的高度。         |  |  |   |   |
| 我已经确定了计算任何玻璃塔高度的模式或规则。 |  |  |   |   |
| 我与小组成员分享了想法并让他们理解我的想法。 |  |  |   |   |
| 我的小组伙伴清楚地与我分享了他的想法。    |  |  |   |   |
| 我全心全意地与全班同学一起参与了反思。    |  |  |   |   |
| 我的同学们清楚地展示了他们的工作。      |  |  |   |   |

## Apêndice J – Plano da segunda aula

### Plano de aula “O segredo da recompensa dos feijões”

#### A. Aspectos gerais da aula

1. **Objetivo(s) de aprendizagem:** Explorar regularidades em seqüências de crescimento; continuar uma seqüência dada; identificar e descrever uma possível lei de formação; desenvolver competências de comunicação e argumentação; promover valores como o respeito e a autonomia; refletir sobre o próprio desempenho.
2. **Estratégia geral:** Proposta de uma tarefa com seis questões.
3. **Estrutura da aula:** A estrutura da aula comporta cinco segmentos: introdução, resolução das 6 questões (período de trabalho autónomo em grupos de 2 alunos), discussão sobre a resolução da tarefa, síntese final e autoavaliação.
4. **Recursos a usar:** material manipulável (feijões), fichas de trabalho com a tarefa, tabuleiro do jogo e grelhas de autoavaliação e heteroavaliação.

#### B. Desenvolvimento da aula

| Tarefas e atividades de aprendizagem (a)                     | Duração esperada (b) | Atividade dos alunos e possíveis dificuldades (c)  | Respostas do professor e aspetos a ter em atenção (d)   | Objetivos e avaliação (e)   |
|--|----------------------|--|---|---|
| 1. Introdução (em coletivo)                                  | 20 min               | <ul style="list-style-type: none"><li>Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das tarefas.</li></ul>   | <ul style="list-style-type: none"><li>A professora divide a turma em pequenos grupos;</li><li>Distribui as fichas de trabalho, os feijões e os tabuleiros de jogo;</li><li>Apresenta o enunciado das tarefas e esclarece dúvidas.</li></ul>   | <ul style="list-style-type: none"><li>Perceber o que é pedido nas tarefas.</li></ul>  |
| 2. Resolução das seis questões (trabalho autónomo em duplas) | 40 min               | <ul style="list-style-type: none"><li>Os alunos mostram as suas previsões respondendo à primeira questão;</li><li>Colocam os feijões no tabuleiro para responder às questões n.ºs 2, 3 e 4, relacionando os feijões recebidos aos números das casas do tabuleiro;</li><li>Na quinta questão investigam quantos feijões receberiam pela última casa do seu tabuleiro e por todas as casas do tabuleiro;</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>A professora circula pela sala e observa as interações entre os alunos e as suas estratégias;</li><li>Incentiva os alunos a apresentarem sempre o seu raciocínio;</li><li>Esclarece que o número de feijões recebidos por uma única casa é diferente do número de feijões</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>Explorar regularidades em seqüências de crescimento;</li><li>Continuar uma seqüência dada;</li><li>Identificar e descrever uma possível lei de formação;</li><li>Desenvolver a autonomia.</li></ul> |

|  |        |   |  |   |
|--|--------|---|--|---|
|  |        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Na sexta questão, demonstram o padrão da sequência;</li> <li>• Podem ter dificuldades ao generalizar a sequência ou ao expressar algum raciocínio;</li> <li>• Podem se confundir entre o número de feijões recebidos por uma única casa com o número de feijões recebidos até uma determinada casa.</li> </ul> | recebidos até uma determinada casa sem relacionar diretamente com a tarefa.  |   |
| 3. Discussão sobre a resolução da tarefa (em coletivo) | 30 min | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos participam numa discussão coletiva;</li> <li>• Partilham as estratégias utilizadas na resolução das tarefas;</li> <li>• Podem ter dificuldades a expressar os seus raciocínios ou hesitar em expor dúvidas.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora orienta a discussão;</li> <li>• Elabora perguntas para encorajar as explicações;</li> <li>• Incentiva a participação de todos os alunos;</li> <li>• Valoriza a diversidade de abordagens;</li> <li>• Esclarece dúvidas.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender que há diferentes formas de resolver a mesma tarefa;</li> <li>• Desenvolver competências de comunicação e argumentação;</li> <li>• Promover o respeito e a aprendizagem colaborativa.</li> </ul> |
| 4. Síntese final (em coletivo)                         | 5 min  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos sintetizam as descobertas feitas durante a aula;</li> <li>• Podem ter dúvidas sobre algum aspeto da tarefa.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora reforça algum ponto que pode ter passado despercebido.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Consolidar os conhecimentos explorados durante a aula.</li> </ul>  |
| 4. Autoavaliação e heteroavaliação (individual)        | 5 min  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos refletem sobre o seu próprio desempenho ao longo da aula;</li> <li>• Refletem também sobre a participação dos colegas;</li> <li>• Preenchem uma grelha de autoavaliação.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• A professora incentiva a reflexão de cada aluno.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Refletir sobre o próprio desempenho e identificar pontos fortes e a melhorar;</li> <li>• Refletir sobre a participação dos colegas;</li> <li>• Promover a autonomia.</li> </ul>                              |

## Apêndice K – Possíveis resoluções previstas para a segunda aula

### Tarefa “O segredo da recompensa dos feijões”

#### Questão 2

##### Hipótese 1

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo seguindo a regra e observam que pela 2.<sup>a</sup> casa receberiam 2 feijões.

##### Hipótese 2

Os alunos seguem a regra, multiplicam 1 por 2 e percebem que receberiam 2 feijões.  
 $1 \times 2 = 2$  feijões

#### Questão 2.1

##### Hipótese 1

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo seguindo a regra e observam que pela 5.<sup>a</sup> casa receberiam 16 feijões.

##### Hipótese 2

Os alunos seguem a regra e calculam a recompensa sempre duplicando os feijões.  
 $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  feijões

#### Questão 3

##### Hipótese 1

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo seguindo a regra e observam que foram pagos até à 2.<sup>a</sup> casa do tabuleiro.

##### Hipótese 2

Os alunos somam a recompensa das duas primeiras casas e percebem que foram pagos até à 2.<sup>a</sup> casa do tabuleiro.  
 $1 + 2 = 3$  feijões

#### Questão 3.1

##### Hipótese 1

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo seguindo a regra. Contam os feijões no tabuleiro e observam que foram pagos até à 4.<sup>a</sup> casa do tabuleiro.

##### Hipótese 2

Os alunos vão somando as recompensas das diversas casas até chegar aos 15 feijões.  
Até à 1.<sup>a</sup> casa: 1 feijão  
Até à 2.<sup>a</sup> casa:  $1 + 2 = 3$  feijões  
Até à 3.<sup>a</sup> casa:  $3 + 4 = 7$  feijões  
Até à 4.<sup>a</sup> casa:  $7 + 8 = 15$  feijões  
Assim, percebem que foram pagos até à 4.<sup>a</sup> casa do tabuleiro.

#### Questão 4

##### Hipótese 1

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo seguindo a regra. Contam os feijões no tabuleiro e observam que o 32.<sup>o</sup> feijão é o primeiro feijão da 6.<sup>a</sup> casa, sendo que ainda faltaria pagar outros 31 feijões pela 6.<sup>a</sup> casa ( $32 - 1 = 31$ ). Assim, só teriam sido pagos pelas primeiras 5 casas do jogo e ainda precisaram de receber mais 31 feijões para serem pagos pelas primeiras 6 casas.

**Hipótese 2**

Os alunos colocam os feijões no tabuleiro de jogo até à 6.<sup>a</sup> casa. Contam os feijões e observam que o n.º total das 6 casas é 63 feijões. Deste modo, percebem que não foram pagos por todas as 6 casas.

**Hipótese 3**

Os alunos percebem tanto pela contagem dos feijões como por cálculos que os 32 feijões correspondem apenas à 6.<sup>a</sup> casa. Assim, este valor não poderia corresponder às 6 primeiras casas.

**Hipótese 4**

Os alunos explicam que para receber os feijões correspondentes às 6 primeiras casas, teriam de somar todos os feijões que receberiam por cada uma dessas 6 casas.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 \text{ feijões}$$

Assim, 32 feijões não correspondem ao total das 6 casas, mas só ao valor da 6.<sup>a</sup> casa.

**Questão 5****Hipótese 1**

Os alunos já sabem que receberiam 32 feijões pela 6.<sup>a</sup> casa e duplicam esse valor até chegar à 9.<sup>a</sup> casa.

6.<sup>a</sup> casa: 32 feijões

7.<sup>a</sup> casa:  $32 \times 2 = 64$  feijões

8.<sup>a</sup> casa:  $64 \times 2 = 128$  feijões

9.<sup>a</sup> casa:  $128 \times 2 = 256$  feijões

**Hipótese 2**

Os alunos seguem a regra e calculam a recompensa sempre duplicando os feijões.

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256 \text{ feijões}$$

**Questão 5.1****Hipótese 1**

Os alunos somam as recompensas de todas as casas.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511 \text{ feijões}$$

**Hipótese 2**

Os alunos já sabem que receberiam 63 feijões por todas as casas até à 6.<sup>a</sup> (incluindo) e adicionam os valores das 7.<sup>a</sup>, 8.<sup>a</sup> e 9.<sup>a</sup> casas.

$$63 + 64 + 128 + 256 = 511 \text{ feijões}$$

**Questão 6****Hipótese 1**

Os alunos encontram a expressão geradora da sequência.

$$2^{(n-1)}$$

**Hipótese 2**

Os alunos escrevem algo como "Recebemos sempre o dobro de feijões da casa anterior".





**Hipótese 3**

Os alunos explicam recorrendo a exemplos: "Na 1.<sup>a</sup> casa recebemos 1 feijão, na 2.<sup>a</sup> recebemos 2, na 3.<sup>a</sup> recebemos 4 e na 4.<sup>a</sup> recebemos 8. O número de feijões sempre duplica".

## Apêndice L – Grelha de autoavaliação e heteroavaliação da segunda aula

Nome \_\_\_\_\_

### Autoavaliação e heteroavaliação

|  |  Muito bem |  Bem |  Mais ou menos |  Mal |
|--|---|---|---|---|
| Organizei os feijões no tabuleiro seguindo a sequência correta.  |   |   |   |   |
| Usei corretamente os feijões, sem brincar com eles nem os atirar.                                      |   |   |   |   |
| Consegui prever o número de feijões nas casas pedidas.   |   |   |   |   |
| Identifiquei um padrão ou regra para calcular o número de feijões que receberia por uma casa qualquer. |   |   |   |   |
| Partilhei ideias com o meu colega de grupo e também soube ouvi-lo.                                     |   |   |   |   |
| O meu colega de grupo foi claro na partilha das suas ideias comigo.                                    |   |   |   |   |
| Participei com atenção no momento de reflexão com toda a turma.  |   |   |   |   |
| Os meus colegas da turma foram claros na apresentação dos seus trabalhos.                              |   |   |   |   |

Apêndice M – Grelha de registo da segunda aula

| N.º |  | Grupo A      | Grupo B                              | Grupo C       | Grupo D      | Grupo E          | Grupo F       | Grupo G                  | Grupo H       |
|-----|--|--------------|--------------------------------------|---------------|--------------|------------------|---------------|--------------------------|---------------|
| 1   | Pensar que o n.º de feijões cresce devagar ou depressa                     | devoa.<br>70 | devoa.                               | depre.<br>256 | depre.<br>78 | depre.<br>27     | depre.<br>256 | devoa.<br>8              | depre.<br>256 |
| 2   | Colocam os feijões no tabuleiro ou multiplicam 1 x 2                       |              |                                      | CO.           | CO.          |                  | CO.           | CO.                      | CO.           |
|     | Outra estratégia   |              |                                      |               |              | 3x mº<br>da casa |               |                          |               |
| 2.1 | Colocam os feijões no tabuleiro seguindo a regra                           |              |                                      | CO.           | CO.          |                  | CO.           | CO.                      | CO.           |
|     | Duplicam sempre os feijões:<br>$1 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$         | ✓            |                                      | ✓             |              |                  | ✓             |                          | ✓             |
|     | Outra estratégia   |              | colocam em cada linha: 1, 2, 3, 4, 5 |               |              | 3x mº do caso    |               |                          |               |
| 3   | Respondem corretamente (2.ª casa)  |              |                                      | ✓             |              |                  | ✓             | ✓                        |               |
| 3.1 | Colocam os feijões no tabuleiro para os contar                             |              |                                      | ✓             |              |                  |               |                          |               |
|     | Fazem adições sucessivas das recompensas até à 4.ª casa                    |              |                                      | ✓             |              |                  | ✓             |                          |               |
|     | Outra estratégia   |              |                                      |               |              | 3x mº da casa    |               | ✓                        |               |
| 4   | Colocam os feijões no tabuleiro  | ✓            |                                      |               | ✓            |                  |               |                          |               |
|     | Explicam que o 32.º feijão é o 1.º da 6.ª casa e falta receber 31 feijões  | ✗            |                                      |               |              |                  |               |                          |               |
|     | Através de cálculos percebem que 32 feijões correspondem apenas à 6.ª casa |              |                                      |               |              |                  |               |                          |               |
|     | Através de cálculos percebem que devem receber 63 feijões pelas 6 casas    |              |                                      |               |              |                  |               |                          | ✓             |
|     | Outra estratégia   |              |                                      | ✓             |              |                  |               | Notam 2 feijões por casa |               |

| N.º              | Grupo A   | Grupo B            | Grupo C | Grupo D                         | Grupo E | Grupo F     | Grupo G | Grupo H |
|------------------|---|--------------------|---------|---------------------------------|---------|-------------|---------|---------|
| 5                | Duplicam sempre os feijões desde a 1.ª casa até à 9.ª casa                      |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Duplicam o valor desde a 6.ª casa até chegar à 9.ª casa                         |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Outra estratégia  |                    |         |                                 |         |             |         |         |
| 5.1              | Somam as recompensas de todas as casas, começando na 1.ª casa                   |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Começam com o valor de 63 já calculado até à 6.ª casa e somam as próximas casas |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Outra estratégia  |                    |         |                                 |         |             |         |         |
| 6                | Percebem que a quantidade de feijões sempre duplica                             |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Recorrem a exemplos para mostrar que o valor duplica                            |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Encontram a expressão geradora da sequência $2^{(n-1)}$                         |                    |         |                                 |         |             |         |         |
|                  | Outra estratégia  |                    |         |                                 |         |             |         |         |
| Erro a explorar? |   | mka<br>casa<br>x 2 |         | valor<br>da<br>tabuada<br>do 3' |         | soma<br>+ 2 |         |         |
| Quadro?          |   |                    | 2.1     |                                 |         | 3.1<br>5    | 2.1     | 5.1     |

नामहरू \_\_\_\_\_

◎ **segredo da recompensa dos feijões**

चेसको क वंदन्ती  
चेस संसारको सबैभन्दा पुरानो खेल मध्ये एक हो। यो धेरै शताब्दी अघि स र्जना गरिएको थियो  
भारतमा सेसा नामको शब्द काठ्यादा। खेलको कथाले बताउँछ कि शेराम नामका राजा खेलको स र्जनाबाट धेरै खुसी  
थिए र आफ्नो गल्तीको कृत्त पूरुत गर्न चाहन्थे।  
आव कृारक। खेल स र्जना गरेको पुरस्कारको रूपमा सेसाले राजासँग एक दाना मागे  
चेसबोर्डको पहिलो वर्गको गहुँ गहुँ दोस्रो वर्गको लागि दुई दाना चार  
तेस्रोको लागि रयस्ते सधैं अन्नको संख्या दोब्बर गर्दै  
अन्न पूरुत ान भएसम्म चेसबोर्डमा ६४ वर्गहरू। राजा शेराम उभिए  
आव कृारकको ब नम्र अनुरोधबाट उनी र आफ्ना ज्ञानी मान सहरूलाई सोधे  
आव कृारकलाई पुरु याउनुपर्ने अन्नको संख्या गणना गर्न।

**मेरो खेल**  
यदि तपाईंले ९ वर्ग र यसको लेआउट भएको खेल बोर्ड आविष्कार गर्नुभयो भने के हुन्छ?  
पुरस्कार पाउनु सेसा जस्तै हुनेछ, तर सिमी?

१. कुनै पान गणना नगरी यी प्रश्नहरूको उत्तर दनुहोस् १.१. २१.२.

१.१. के तपाईंलाई लाग्छ स मीको संख्या ब स्तारै बढ्छ वा छटो

१.२. तपाईंलाई जम्मा कति सिमी मिल्छ जस्तो लाग्छ?

२. दोस्रो घरको लागि तपाईंले कत स मी पाउनुहुन्छ

२.१. अन केवल पाँचौँ घरको लागि

३. यदि मलाई ३ वटा सिमी मिल्थो भने, मैले कति वर्ग बनाएँ? \_\_\_\_\_

३.१. अनि यदि तपाईंले १५ सिमी जित्नुभयो भने, तपाईंलाई कुन वर्गसम्म भुक्तानी गरिनेछ?

४. अब, सिमीहरूलाई ट्रेमा वर्ग ६ राख्नुहोस्।  
घर यदि तपाईंसँग ३२ वटा सिमी भएको भए, के तपाईंले बोर्डमा भएका पहिलो  
६ वर्गहरूको भुक्तानी पहिले नै पाउनुभएको थियो? तपाईंको उत्तरको कारण  
व्याख्या गर्नुहोस्।

५. तपाईंको खेलको ९ औं घरको लागि तपाईंले कति सिमी पाउनुहुनेछ?

५.१. तपाईंको खेलमा सबै घरहरूको लागि तपाईंले कति सिमी कमाउनुहुनेछ?

६. के तपाईंले सिमी इनामको रहस्य पत्ता लगाउनुभएको छ? के तपाईंले कहिल्यै घरबाट प्राप्त  
सिमीहरूको संख्या गणना गर्ने तरिका फेला पार्नुभएको छ? सिमी गन्न नपर्ने गरी आफ्नो तर्क  
व्याख्या गर्नुहोस्।





नामहरू \_\_\_\_\_

## खेल बोर्ड

|          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| पह लो घर | दोस्रो घर | तेस्रो घर |
| चौथो घर  | पाँचौं घर | छैटौं घर  |
| सातौं घर | आठौं घर   | नवौं घर   |

नाम \_\_\_\_\_

आत्म-मूल्याङ्कन र विषम-मूल्याङ्कन

|  |  धेरै राम्रो |  राम्रो |  बढी वा कम |  नराम्रो |
|--|---|---|---|---|
| मैले बोर्डमा सिमीहरूलाई सही क्रममा मिलाएको छु।   |   |   |   |   |
| मैले सिमीहरू सही तरिकाले प्रयोग गरेँ, तिनीहरूसँग नखेली वा फर्कोकेर।                          |   |   |   |   |
| अनुरोध गरिएका ठाउँहरूमा सिमीहरूको संख्या मैले अनुमान गर्न सकें।                              |   |   |   |   |
| मैले कुनै पनि घरको लागि प्राप्त गर्ने सिमीहरूको संख्या गणना गर्ने ढोँचा वा नियम पहिचान गरेँ। |   |   |   |   |
| मैले मेरो समूह साथीसँग विचारहरू साझा गरेँ र मलाई उसको कुरा कसरी सुन्ने भनेर पनि थाहा थियो।   |   |   |   |   |
| मेरो समूह साथीले मसँग आफ्ना विचारहरू साझा गर्न स्पष्ट थियो।                                  |   |   |   |   |
| मैले सम्पूर्ण कक्षासँगै चिन्तनको क्षणमा ध्यानपूर्वक भाग लिएँ।                                |   |   |   |   |
| मेरा सहपाठीहरू आफ्नो काम प्रस्तुत गर्न स्पष्ट थिए।   |   |   |   |   |

## Apêndice O – Materiais da segunda aula em mandarim

姓名： \_\_\_\_\_

### ◎ segredo da recompensa dos feijões

#### 國際象棋傳奇

國際象棋是世界上最古老的遊戲之一。它是幾個世紀前由一位名叫塞薩 (Sesa) 的印度老師創建的。故事是這樣的，一位名叫謝拉姆 (Sheram) 的國王對這個遊戲的創造感到非常高興，並想獎勵塞薩 (Sesa)。塞薩向國王要了一粒麥粒放在棋盤的第一個方格中，要兩粒放在第二個方格中，要四粒放在第三個方格中，以此類推，麥粒的數量總是加倍。謝拉姆國王對發明家的謙虛要求感到驚訝，並要求他的智者計算出要向發明家交付多少穀物。

#### 我的遊戲

如果您發明了一個具有 9 個方格的遊戲板，並且其佈局以與 Sessa 類似的方式提供獎勵，但使用豆子，會怎麼樣？

1. 無需進行任何計算，回答以下問題 (1.1. 和 1.2.)：

1.1. 你認為豆子的數量成長得慢還是快？

1.2. 您認為您總共能得到多少顆豆子？

2. 僅第二棟房子你能得到幾顆豆子？

2.1. 僅從第五宮就能得到多少豆子？

3. 當你收到 3 顆豆子時，你的報酬已經支付到哪一格了？ \_\_\_\_\_

3.1. 如果給你 15 顆豆子，你會得到幾個格的報酬？

4. 現在，將豆子放在棋盤上的第 6 個方格內。  
如果您收到了 32 顆 豆子，您是否已經獲得了棋盤上前  
6 個方格的報酬？解釋你答案的原因

5. 在你的遊戲中，僅僅第 9 個 方格你能收到多少顆豆子？

5.1. 那麼，您在遊戲中的所有 9 棟 房子中會得到多少顆豆子呢？

6-你發現豆子獎勵的秘密了嗎？  
您是否找到了一種方法來計算從任何給定房屋收到的 豆子數量，而無需計算豆子的  
數量？解釋你的理由。

姓名： \_\_\_\_\_

## 遊戲板

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 第一宮 | 第二宮 | 第三宮 |
| 第四宮 | 第五宮 | 第六宮 |
| 第七宮 | 第八宮 | 第九宮 |

姓名 \_\_\_\_\_

自我評估和異質評估

|                                   |  非常好 |  好的 |  或多或少 |  壞的 |
|-----------------------------------|---|--|--|--|
| 我把豆子按照正確的順序排列在板上。                 |   |  |  |  |
| 我正確地使用了豆子，沒有玩它們或扔它們。              |   |  |  |  |
| 我能夠預測所請求空間中的豆子數量。                 |   |  |  |  |
| 我確定了一種模式或規則，用於計算我將從任何給定房屋收到的豆子數量。 |   |  |  |  |
| 我與我的小組夥伴分享想法並且我也知道如何傾聽他的意見。       |   |  |  |  |
| 我的小組夥伴清楚地與我分享了他的想法。               |   |  |  |  |
| 我全心全意地與全班一起參與了反思。                 |   |  |  |  |
| 我的同學們清楚地展示了他們的工作。                 |   |  |  |  |