**Cátia Verena Pires Calisto Viegas**

***Resolução de problemas de proporcionalidade direta no 2.º ciclo do ensino básico***

**Universidade do Algarve**

**Escola Superior de Educação e Comunicação**

**2018**

# Cátia Verena Pires Calisto Viegas


## *Resolução de problemas de proporcionalidade direta no 2.º ciclo do ensino básico*

**Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico**

**Trabalho efetuado sob a orientação de:**

**Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro**

**Mestre Luciano José Dourado Veia**


**Universidade do Algarve**

**Escola Superior de Educação e Comunicação**


**2018**

*Resolução de problemas de proporcionalidade direta no 2.º ciclo do ensino básico*

**Declaração de autoria do trabalho**

Declaro ser o autor deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Cátia Viegas

# Agradecimentos

No final deste período de aprendizagem, dedicação e empenho, gostaria de agradecer a todas as pessoas e instituições que possibilitaram a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores António Guerreiro e Luciano Veia pelo apoio prestado durante o processo de orientação desta investigação, contribuindo com os seus ensinamentos, sugestões, críticas, incentivos e acima de tudo pela disponibilidade demonstrada.

À professora Andreia Guerreiro, agradeço por me ter facultado a possibilitado de trabalhar com a sua turma, conferindo-me toda a liberdade possível para que pudesse conduzir a investigação de acordo com a metodologia por mim selecionada.

Aos alunos da turma com quem trabalhei, agradeço a sua participação, motivação e empenho para participar no estudo.

Ao meu marido, melhor amigo, colega e companheiro de todos os momentos, Rúben Viegas, estou muito grata por me acompanhar durante esta caminhada, incentivando-me, apoiando-me e motivando-me constantemente.

Aos meus queridos filhos, Leonor Viegas e Gonçalo Viegas por terem vindo completar a minha vida durante estes anos de tanto esforço, mas que me fortaleceram e motivaram para concluir esta etapa da minha vida.

A todos os meus amigos e família que sempre compreenderam a minha ausência em determinados eventos durante este período de tempo em que tive de abdicar da sua presença em detrimento dos estudos, manifestando sempre o seu grande apoio.

E a alguém muito especial, obrigado, sei que sempre me acompanhaste.

# Resumo

O presente estudo reflete a componente de investigação da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, constituinte do curso de mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico. Decorreu durante o ano letivo 2016/2017, numa escola básica do 2.º e 3.º ciclos da cidade de Faro, com alunos do 5.º ano de escolaridade. O principal objetivo deste estudo consistiu em averiguar quais as estratégias utilizadas por alunos, a frequentar o referido ano de escolaridade, na resolução de problemas de proporcionalidade direta, sem uma abordagem prévia a este domínio da matemática, em duas aulas organizadas seguindo uma abordagem de ensino exploratório. Pretendeu ainda verificar qual ou quais as estratégias de resolução que predominavam nas produções matemáticas dos alunos.

É um estudo qualitativo e interpretativo que decorreu em contexto escolar, em que as resoluções dos alunos foram interpretadas tendo em consideração as principais estratégias apresentadas no quadro teórico em estudos homólogos. Os principais resultados revelaram que os alunos envolvidos no estudo apresentavam competências de resolver tarefas matemáticas simples de comparação e de valor omisso que envolviam a proporcionalidade direta, sendo as estratégias predominantes *razão unitária*, *fator de mudança* e *algoritmo do produto cruzado*, das quais se destaca, pela frequência de utilização, a estratégia *razão unitária*.

Constatou-se também que os alunos conceberam duas estratégias diferentes das encontradas na literatura, apoiando-se em conhecimentos básicos como a adição e em conteúdos explorados no seu nível de escolaridade, no que respeita ao cálculo de percentagens, revelando a sua capacidade em mobilizar conhecimentos prévios perante novas situações. Os resultados revelaram também as principais dificuldades demonstradas pelos alunos, em que o conhecimento acerca do *algoritmo do produto cruzado* surge como sendo um fator que condiciona fortemente a criatividade dos alunos quanto à conceção de estratégias alternativas a este algoritmo.

**Palavras-chave:** Proporcionalidade direta; tarefas matemáticas; ensino exploratório; resolução de problemas; estratégias matemáticas.

# Abstract

The present study reflects the research component of the curricular unit of Supervised Teaching Practice, integrated in the Masters course in Teaching of the 1st Cycle of Basic Education and of Mathematics and Natural Sciences in the 2nd Cycle of Basic Education. It took place during the 2016/2017 school year, in a basic school of the 2nd and 3rd cycles of the city of Faro, with students of the 5th year of schooling. The main objective of this study was to investigate the strategies used by students, to attend the referred year of schooling, to solve problems of direct proportionality, without a prior approach to this domain of mathematics, in two sessions organized according to an exploratory teaching approach. It also sought to verify which solving strategies or strategies predominated in students' mathematical productions.

It is a qualitative and interpretative study that took place in a school context, in which the students' resolutions were interpreted taking into account the main strategies presented in the theoretical framework in homologous studies. The main results revealed that the students involved in the study had the ability to solve simple mathematical tasks of *comparison* and of *omission value* that involved direct proportionality, being the predominant strategies *unitary reason*, *factor of change* and *algorithm of the cross product*, by frequency of use, the unit *ratio strategy*. It was also found that the students conceived two strategies different from those found in the literature, relying on basic knowledge such as the addition and content explored in their level of education, regarding the calculation of percentages, revealing their ability to mobilize knowledge prior to new situations. The results also revealed the main difficulties demonstrated by the students, where knowledge about the cross-product algorithm emerges as a factor that strongly influences students' creativity regarding the design of alternative strategies to this algorithm



**Key words:**

Direct proportionality; mathematical tasks; exploratory teaching; problem solving; mathematical strategies.

# Índice

# Índice de figuras

# Introdução

O presente estudo foi realizado no âmbito da prática de investigação, integrada na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, que decorreu ao longo dos dois anos letivos que compõem o curso de mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, lecionada na Escola Superior da Educação e Comunicação da Universidade do Algarve. A investigação foi desenvolvida ao longo do ano letivo 2016/2017, numa escola do 2.º e 3.ºciclos do ensino básico da cidade de Faro, com uma turma do 5.º ano de escolaridade, no âmbito da matemática, tendo por conteúdos centrais a resolução de problemas e o raciocínio proporcional.

A resolução de problemas é uma competência fundamental, necessária para todos os alunos (Foshay & Kirkley, 1998). No contexto do ensino básico em Portugal, esta competência está presente no currículo de matemática desde os primeiros anos de escolaridade, progredindo em termos de complexidade e abstração ao longo da progressão escolar dos alunos, sendo esperado que, no final do 1.º ciclo do ensino básico, os alunos revelem capacidade em resolver de forma adequada situações problemáticas (Bívar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013).

Estas expectativas, segundo estudos nacionais e internacionais, nomeadamente o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), realizado em 2011, não são atingidas, uma vez que, segundo este estudo, 60% dos alunos portugueses a frequentar o 4.º ano de escolaridade não demonstram ser capazes de fornecer uma resposta correta a questões de resposta não imediata (Intermediate International Benchmark, referido por Bívar et al., 2013). No mesmo sentido, Sousa e Mendes (2017) realçam que "na área da Matemática, a resolução de problemas é a temática na qual os alunos revelam mais dificuldades" (p. 248), podendo estas dificuldades dever-se não à falta de conhecimentos matemáticos, mas sim à utilização desadequada destes.

Estes resultados estão em consonância com minha prática e experiência profissional, a qual me tem permitido, ao longo dos últimos seis anos letivos, contactar diretamente com alunos a frequentar o 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, em que tive a oportunidade de me consciencializar das grandes dificuldades que os alunos têm, em todos os níveis escolares, na interpretação e resolução de problemas. Estas dificuldades são persistentes e mantém-se ao longo do 2.º ciclo do ensino básico, aquando da abordagem a situações de proporcionalidade direta, conteúdo considerado por diversos autores como sendo um dos tópicos matemáticos mais difíceis de ensinar (Costa & Ponte, 2008; Johnson, 2010), sendo as tarefas de proporção particularmente difíceis para as crianças (Spinillo, 1993).

Foi neste contexto que surgiu a proposta de realizar a presente investigação no 5.º ano de escolaridade, com o objetivo de verificar quais as estratégias utilizadas por alunos na resolução de problemas de proporcionalidade direta, sem que tenha sido realizada anteriormente qualquer abordagem a esse tópico matemático, uma vez que este domínio apenas é abordado ao longo do 6.º ano de escolaridade (Bívar et al., 2013).

A presente investigação pretende verificar se alunos a frequentar o 5.º ano de escolaridade apresentam competências ao nível do raciocínio proporcional que lhes permita resolver de forma adequada tarefas matemáticas, que envolvem a proporcionalidade direta, nomeadamente problemas de valor omisso e de comparação, sem que este domínio tenha sido abordado anteriormente em contexto escolar. Para além deste propósito de investigação, objetiva-se também averiguar se as estratégias resultantes de estudos homólogos, apresentadas na literatura consultada, fazem parte do leque de estratégias utilizadas pelos alunos desta investigação, e se estes concebem novas estratégias não referidas pela literatura.

O trabalho está estruturado nesta introdução, em três capítulos e numa conclusão. Na introdução apresenta-se globalmente a temática e a estrutura do trabalho. No primeiro capítulo apresenta-se o enquadramento teórico considerado pertinente para o estudo em questão acerca da resolução de problemas, com destaque para o ensino da matemática através desta competência no contexto português, e ainda o conceito de proporcionalidade direta. A este nível serão referidos, com base em diversos estudos, os principais tipos de tarefas que mobilizam competências ao nível da proporcionalidade direta para o nível de escolaridade considerada, as principais estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução dessas tarefas e as dificuldades mais frequentemente presentes no raciocínio dos alunos perante esse tipo de tarefas.

Ao longo do segundo capítulo, aborda-se o enquadramento metodológico em que será descrito o *design de investigação* considerado para o estudo em questão, o grupo de alunos interveniente e ainda as tarefas e o procedimento de intervenção na sala de aula adotado pela investigadora/professora para a recolha dos dados a analisar.

Durante o último capítulo apresentam-se os principais resultados obtidos através do estudo, interpretando-os comparativamente com os estudos abordados ao longo do quadro teórico, com evidência para as estratégias predominantes nas produções dos alunos, bem como a conceção de novas estratégias. Também será dado destaque aos erros e principais dificuldades sentidas pelos alunos. Na conclusão apresenta-se uma análise global da investigação, com especial enfoque nas estratégias e limitações do estudo.

# Capítulo 1 – Enquadramento teórico

Neste capítulo apresento o enquadramento teórico, considerado pertinente, tendo em atenção o objetivo da investigação em questão, que consiste em verificar quais as estratégias utilizadas por alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de problemas de proporcionalidade direta, sem uma abordagem prévia em sala de aula desse conceito matemático. Desta forma, será abordada primeiramente uma perspetiva geral acerca do ensino de matemática em Portugal com destaque para a resolução de problemas. Posteriormente, será analisada a temática da proporcionalidade direta, fazendo referência à literatura existente acerca desta, destacando, em alguns estudos realizados, as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional.

## Resolução de problemas em Matemática

O ensino da Matemática, ao longo do ensino básico em Portugal, tem como objetivos primordiais a "estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade" (Bívar et al., 2013), sendo, portanto, a sua abordagem ao longo do currículo básico fundamental para capacitar o aluno a interpretar e a interrelacionar-se de forma adequada com o mundo que o rodeia.

No sentido de promover aprendizagens efetivas neste domínio, compete ao professor proporcionar atividades adequadas e dinâmicas que envolvam os alunos, de modo a ajudá-los no processo de construção de conhecimento matemático mediante a integração ativa de ideias e experiências, ao que Pólya denomina como sendo o *princípio da aprendizagem ativa*. De acordo com este princípio educativo o aluno tem a oportunidade de descobrir e aprender autonomamente através do seu próprio empenho, respeitando a sua maturidade cognitiva (Pólya, 1967).

É assim necessário que o ensino parta de aspetos mais concretos evoluindo para o abstrato, que a criança contacte primeiramente com uma grande diversidade de experiências, passando posteriormente para a unificação dos conceitos. Esta progressão deverá conduzir à resolução de problemas, que, segundo o mesmo autor, é "a atividade matemática que mais se aproxima do fundamental do pensamento do quotidiano"

(Polya, 1967, p. 47), consistindo ainda numa atividade essencial para a construção do conhecimento matemático dos alunos, sem a qual a utilidade e força das ideias matemáticas, conhecimento e competências estariam muito limitadas (NCTM, 2000). Corroboram com esta opinião Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) ao afirmarem que a resolução de problemas assim como a sua formulação consistem na essência da matemática.

A investigação ao nível de resolução de problemas de Matemática iniciou-se principalmente nas décadas de 70 e de 80, do século XX, a partir do trabalho de Pólya, de 1945, denominado *How to solve it,* que se debruça sobre a temática de como resolver problemas. Os principais resultados obtidos mediante os diversos estudos realizados evidenciaram que os alunos careciam substancialmente do desenvolvimento da capacidade em resolver problemas devido tanto à natureza do meio que os rodeava como à célere evolução da sociedade em que estavam inseridos (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

Investigações posteriores, que tinham em vista incorporar a resolução de problemas no currículo de matemática e explicar o raciocínio dos alunos mediante atividades de resolução de problemas, sugerem que são diversos os fatores que condicionam e influenciam o êxito ou fracasso dos alunos perante estes, nomeadamente o conhecimento e recursos básicos de matemática, as estratégias cognitivas utilizadas para explorar os problemas, as estratégias metacognitivas acerca do funcionamento cognitivo dos alunos, e ainda as crenças, atitudes e componente afetiva que os alunos têm acerca da matemática e da resolução de problemas (Schoenfeld, 2013).

Os estudos realizados por Pólya indicaram assim necessidade de promover, a par do desenvolvimento das capacidades dos alunos para resolver problemas, o desenvolvimento curricular associado que sustentasse o desenvolvimento dessas capacidades, tendo sido em 1977 reconhecida esta temática como fundamental ao nível da Educação Matemática, por parte do National Council of Teachers of Mathematics dos Estados Unidos (NCTM), que afirmou que a resolução de problemas consistia na principal razão para o estudo da matemática (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

Foi a partir desta perspetiva, que a aprendizagem da resolução de problemas passou a tornar-se o ponto central da aprendizagem em matemática. Ao longo das décadas que se seguiram, tem-se assistido, não a uma alteração da importância atribuída a esta temática ao longo dos diversos níveis de escolaridade, mas sim às perspetivas de como esta deve ser abordada (NCTM, 1977; 1980, referidos por Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

Neste sentido, estão presentes de forma recorrente na literatura as variadas propostas curriculares que têm sido concebidas ao longo do tempo com o objetivo de tornar a Resolução de Problemas o foco central do Currículo de Matemática. O NCTM (1989) aponta a resolução de problemas como um dos cinco objetivos gerais, defendendo que os alunos "se tornem aptos a resolver problemas de Matemática", e incluem a norma *Matemática como resolução de problemas*, em que o estudo da Matemática deve privilegiar a resolução de problemas. Estas ideias são retomadas mais tarde pelo NCTM (2000), com a inclusão da resolução de problemas desde o pré-escolar ao 12.º ano, devendo constituir uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática.

No que ao contexto português diz respeito, verifica-se que a partir dos anos 90, do século XX, a resolução de problemas havia passado a ter um papel de maior destaque no ensino da matemática, tendo sido considerada posteriormente como uma capacidade transversal a todos os domínios, assim como o raciocínio e a comunicação, onde esta capacidade é encarada como:

> uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber. Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas não só é um importante objetivo de aprendizagem em sim mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos (ME, 2007, p. 8).

Atualmente, nos novos programas curriculares, o foco está novamente centrado nas capacidades básicas e não ao nível da resolução de problemas, quebrando a importância que havia sido atribuída a este conteúdo da matemática nos passados vinte e cinco anos (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

Para abordar a temática da resolução de problemas, considera-se fundamental esclarecer o que é atualmente definido como sendo um problema. Vale, Pimentel e Barbosa (2015) apresentam uma definição tradicional em que um problema consiste numa “situação que envolve o aluno em atividade, mas para a qual não conhece à partida, ou não é óbvio, um caminho para chegar à solução" (p. 41). Blum e Niss (1991), acrescentam ainda que consiste numa situação que implica uma questão aberta que desafia intelectualmente o seu resolvedor que não possui de forma imediata métodos, procedimentos e algoritmos diretos suficientes que lhe permitam fornecer uma solução instantânea.

Para além das referidas características, Boavida et al (2008) acrescentam ainda que é importante que os problemas sejam "compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível; sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; possam ter mais do que um processo de resolução; possam integrar vários temas" (p.16). Importa ainda que promovam a reflexão e a comunicação, que surjam do contexto próximo dos alunos e que os desafie a conceber e testar estratégias (NCTM, 2000).

Ao processo através do qual o resolvedor lida com o problema e com as tentativas para o solucionar, designa-se por *resolução de problemas* (Blum & Niss, 1991). Este processo implica a mobilização e utilização de estratégias adequadas à situação problemática tais como "fazer um desenho, trabalhar do fim para o princípio, ou procurar um problema semelhante" (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 41).

Cai e Lester (2010 citados por Vale, Pimentel & Barbosa, 2015) acrescentam que devem ser tarefas desafiantes e contendo um nível de desafio que convida à especulação e ao trabalho, devendo ainda "orientar os alunos na investigação de ideias matemáticas e modos de pensamento importantes" (p. 43). Os mesmos autores apresentam uma lista de dez critérios que devem servir como referencial para ajudar o professor a selecionar, adaptar ou desenvolver problemas significativos para os alunos, considerando os quatro primeiros fundamentais:

> (1) tem incorporadas ideias matemáticas importantes e úteis; (2) requer pensamento de ordem elevada; (3) contribui para o desenvolvimento concetual; (4) permite ao professor avaliar a aprendizagem dos alunos; (5) permite múltiplas formas de abordagem e estratégias de resolução; (6) tem várias soluções e permite opiniões ou tomadas de decisão; (7) envolve os alunos e fomenta o seu discurso; (8) conecta-se com outras ideias matemáticas importantes; (9) desenvolve a habilidade para usar a matemática; e (10) é uma oportunidade para praticar destrezas importantes (Cai e Lester, 2010, citado por Vale, Pimentel & Barbosa, 2015, p. 43)

Atendendo a todas as características, Pólya (1967) distingue dois tipos de problemas:

problemas de rotina e problemas que não são de rotina. Segundo o mesmo, os problemas que não são de rotina implicam por parte do resolvedor um certo grau de criação e de criatividade, enquanto que os problemas de rotina se resolvem através da simples aplicação de processos, descritos por Boavida et al. (2008), como sendo "conhecidos, repetitivos ou mecanizados que conduzem directamente à solução" (p. 15), contribuindo para o desenvolvimento da prática na aplicação de regras, sendo úteis apenas quando "utilizados no momento certo e na dose apropriada" (Pólya, 1967, p. 48).

Estes últimos problemas, Ponte e Serrazina (2000) denominam de exercícios. A distinção entre problemas e exercícios não é definitiva, no sentido em que uma determinada questão ou situação pode ser assumida pelo aluno como um problema ou como um exercício, tendo em consideração os seus conhecimentos prévios que irão influenciar o trajeto que este irá percorrer durante a resolução do mesmo (Ponte & Serrazina, 2000).

Vale, Pimentel e Barbosa (2015), referem três diferentes abordagens à resolução de problemas no âmbito do currículo de matemática: ensino *acerca* da resolução de problemas, ensino *para* a resolução de problemas e ensino *através* da resolução de problemas. No âmbito da presente investigação destaca-se o ensino *através* da resolução de problemas, no qual os problemas estão na base do ensino e consistem numa via facilitadora da aprendizagem.

Antes de iniciar o processo de resolução de um problema, é necessário que os alunos leiam o enunciado ou que este lhes seja apresentado de forma clara e que compreendam as quantidades e relações envolvidas entre os dados. Em seguida, durante o processo de resolução são consideradas duas fases: a fase da exploração mediante a qual decorre a descoberta de possíveis relações com recurso ao raciocínio e processos indutivos e de estratégias que conduzam à procura da solução e a fase da confirmação em que o resolvedor testa essas relações recorrendo ao raciocínio e processos dedutivos, "incluindo apresentar contra-exemplos e justificar as generalizações" (Boavida et al, 2008 p. 14). De forma simples, Pólya, (1967) apresenta um plano de quatro fases que auxiliam o resolvedor durante o processo de resolução de um problema: a compreensão do problema, o delineamento de um plano através da seleção de estratégias a utilizar, a aplicação e desenvolvimento desse plano, e a avaliação dos resultados obtidos (Boavida et al, 2008).

Sintetizando, a resolução de problemas, devido a todas as características que esta tarefa implica, "proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana" (Boavida et. al, 2008, p. 14).

## Proporcionalidade direta

A proporcionalidade consiste num tópico que é aplicado com grande frequência no dia-a-dia dos alunos em diversas áreas, nomeadamente na Matemática, na Física, na Química, na Música, na Geografia e nas Artes entre outros, pelo que o conceito de proporcionalidade e a importância da sua aprendizagem têm sido alvo de diversos estudos ao longo do tempo (Menduni-Bortoli & Barbosa, 2017; Nasution & Lukito, 2015).

Este conceito é definido na literatura como sendo uma igualdade entre duas razões $a/b = c/d$, em que $a$ e $c$ são valores de uma variável e $b$ e $d$ de outra variável, em que as variáveis permanecem independentes e as transformações dentro ou entre variáveis mantêm relações proporcionais entre os seus valores numéricos (Nasution & Lukito, 2015; Silvestre & Ponte, 2009; 2012), implicando covariação de grandezas e invariância entre grandezas (Ponte, Silvestre, Garcia & Costa, 2010). Este tipo de julgamento implica que a criança domine as relações de primeira ordem estabelecidas entre as variáveis inerentes a cada uma das razões (a/b e c/d), e relações de segunda ordem através da comparação ente as duas razões (Spinillo, 1993).

À capacidade de a criança analisar esta relação entre grandezas, compreendendo a relação constante entre estas (invariância) e a noção de que ambas variam em conjunto (covariação), Lamon (2005, citado por Ponte et al, 2010) refere como sendo o raciocínio proporcional. O mesmo autor afirma que, para realizar este tipo de análise, os alunos devem ter a capacidade de "perceber que, na equivalência entre razões, há algo que muda (quantidades absolutas) e que, ao mesmo tempo, há algo que se mantém constante (na mesma proporção)" (p. 4).

Perante este tipo de raciocínio, as crianças têm de realizar uma profunda transição, ao nível do seu pensamento matemático, substituindo os números naturais (com os quais se relacionam mais precocemente) por números racionais e os conceitos aditivos (que são a base das relações de primeira ordem estabelecidas entre objetos contáveis) por conceitos multiplicativos (McIntosh, 2013, referido por Artut & Pelen, 2015). Necessitam assim de substituir o raciocínio aditivo e as noções de mudança absoluta pelo raciocínio multiplicativo e por noções de mudança relativa (Baxter & Junker, 2001, referido por Artut & Pelen, 2015), processo este que é muito difícil visto envolver uma estrutura mental mais complexa do que a implicada em processos de multiplicação e divisão simples.

Desta forma, Spinillo (2002) afirma que o raciocínio proporcional requer:

> a) reconhecer a equivalência entre situações distintas; b) pensar em termos relativos e não em termos absolutos; e c) estabelecer relações entre relações, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem (p. 475).

O raciocínio proporcional consiste assim na condição fundamental que permite a compreensão de situações e contextos que assentam na proporcionalidade, pelo que não pode depender da mecanização de estratégias, mas sim da “capacidade de analisar, de forma consciente, as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais” (Lamon, 2005, citado por Costa & Ponte, 2008, p. 66). Este tipo de raciocínio está frequentemente presente no quotidiano da criança, sendo o seu desenvolvimento um marco de grande importância para o progresso cognitivo da mesma (Cramer & Post, 1993). Surge, de um modo frequente, associado a situações matemáticas, contribuindo significativamente para o seu desenvolvimento neste domínio (Costa & Ponte, 2008; Silvestre & Ponte, 2012). No entanto, para além do seu caráter matemático, o raciocínio proporcional também é mobilizado para a resolução de problemas diários ao nível das ciências naturais e sociais (Post, Behr & Lesh, 1988, referidos por Silvestre & Ponte, 2012).

A idade a partir da qual as crianças dominam o raciocínio proporcional não é consensual, por parte dos diversos autores. Alguns autores, como Resnick e Singer (1993, referidos por Costa & Ponte, 2008), afirmam que as crianças apresentam desde cedo competências a este nível e que o seu desenvolvimento não depende do ensino formal em contexto escolar, mas sim das experiências diárias da criança. Um estudo realizado por Spinillo (1993), com crianças com idades compreendidas entre os 6 e os 8 anos, suporta esta ideia ao revelar que as crianças nesta faixa etária demonstram ser capazes de raciocinar proporcionalmente. Também os resultados de um estudo realizado por Costa (2007, referido por Silvestre, 2012), que analisou o desempenho de alunos do 6.º ano do ensino básico face a resolução de problemas de proporcionalidade direta, mostraram que os alunos são capazes de utilizar diversas estratégias que lhes permitem resolver os problemas propostos, mesmo antes do ensino formal do tema.

Contrariando estas opiniões, o NCTM (1989) afirma que é entre o 5.º e 8.º ano de escolaridade que as crianças desenvolvem as competências ao nível do raciocínio proporcional e que por ser uma competência de extrema importância é fundamental que esta seja cuidadosamente desenvolvida. Apoiando-se em estudos realizados em contexto de ensino português, Costa e Ponte (2008) afirmam que crianças a frequentar o 6.º ano de escolaridade do 2.º ciclo do ensino básico revelam grandes dificuldades perante a resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional, resultados estes que são partilhados por uma investigação realizada por Post, Behr e Lesh (1988, referido por Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto & Miller, 1998) que demonstrou que muitos poucos alunos entre o 5.º e 8.º ano de escolaridade apresentam de forma consistente competências adequadas ao nível do raciocínio proporcional.

Costa e Ponte (2008) afirmam que as crianças em contexto do seu dia-a-dia apresentam a capacidade de resolver situações problemáticas que envolvem a proporcionalidade direta, recorrendo a estratégias intuitivas, enquanto que em contexto escolar aplicam frequentemente estratégias formais, sem compreenderem a sua essência, o que os leva a aplicar essas estratégias a situações inapropriadas, não recorrendo ao seu conhecimento intuitivo. Corroborando com esta opinião, Smith (2002, referido por Johnson, 2010) afirma que não existe nenhuma área ao nível da matemática no ensino básico que seja tão rica do ponto de vista matemático, cognitivo e tão complicada e difícil de ensinar como a proporcionalidade. Cramer e Post (1993) e Cramer, Post e Currier (1993), referidos por Silvestre & Ponte (2009), afirmam que o processo de desenvolvimento do raciocínio proporcional é lento e é influenciado por diversos fatores nomeadamente o grau de complexidade inerente ao conceito de proporcionalidade, "à experiência escolar do aluno, e ainda à sua vivência pessoal" (p. 1).

No que respeita ao conceito de proporcionalidade, segundo Silvestre e Ponte (2009), este não é definido de forma clara na literatura, sendo apresentado de uma forma ambígua para se referir a proporções, razões, proporcionalidade direta e raciocínio proporcional. Apoiando-se nas diversas investigações com base em diferentes perspetivas que têm sido realizadas ao nível do raciocínio proporcional, surgem na literatura essencialmente duas perspetivas através das quais se podem abordar as relações de proporcionalidade, nomeadamente uma perspetiva psicológica e uma matemática. Segundo a abordagem psicológica, o conceito de proporcionalidade refere-se às características de estrutura, invariância e equivalência que lhe estão inerentes, enquanto que sob o ponto de vista matemático, as relações de proporcionalidade direta entre duas variáveis podem ser representadas como uma igualdade entre duas razões ou como uma função linear $y = m.x$, em que $m \neq 0$ (Silvestre & Ponte, 2009; Silvestre & Ponte, 2012).

Quanto à experiência escolar dos alunos, Greer (2007) e Nescher (1980), referidos por Silvestre e Ponte (2009), afirmam que a repetição de procedimentos e regras, sem que os alunos compreendam a estrutura matemática das relações de proporcionalidade, conduz à dificuldade em reconhecer as situações em que esta relação está presente ou não, aplicando estes procedimentos de forma indiscriminada, o que condiciona posteriores aprendizagens no domínio da matemática. Em relação às vivências pessoais dos alunos, uma vez que situações de proporcionalidade são corriqueiras no seu quotidiano, estas deveriam contribuir como facilitador de aprendizagens, o que de acordo com Lamon (2007, citado por Silvestre & Ponte, 2009), parece não se verificar. O autor justifica este facto com a existência de diversos contextos "dos mais comuns (por exemplo, preços) aos mais estruturados (por exemplo, densidade), pela dificuldade em reconhecer que a estrutura matemática se mantém independentemente do contexto e consequente incapacidade operar sobre esta estrutura" (p. 2).

Assim, de acordo com Silvestre e Ponte (2009),

> [O] raciocínio proporcional envolve três condições: (i) distinções de relações de natureza proporcional de relações que não o são (Cramer et al., 1993; Lamon, 1995); (ii) compreensão da natureza matemática das relações proporcionais (Cramer et al., 1993); e (iii) capacidade de resolução vários de tipos de problemas (Carpenter et al., 1999; Cramer et al., 1993; Heller, Ahlgren, Post, Behr & Lesh, 1989; Karplus et al., 1983; Lamon, 1993; Post, Behr & Lesh, 1988; Steinthorsdottir, 2003), revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens aos problemas sem ser afectado pelos seus dados numéricos e contexto (Post et al., 1988) e pela forma como os problemas são apresentados (texto, gráficos, tabelas, razões) (p. 2).

No âmbito do Programa de Matemática para o 2.º ciclo do ensino básico, os alunos, ao longo do 5.º e 6.º ano de escolaridade, devem compreender a noção de proporção e desenvolver competências no que respeita ao raciocínio proporcional (Silvestre & Ponte, 2012), mediante a "resolução de situações que envolvam a proporcionalidade direta" (Bívar et al., 2013, p. 14). O seu ensino formal surge no 2.º ciclo do ensino básico, ao nível do 6.º ano de escolaridade, em que se pretende que os alunos adquiram diversas competências de entre as quais se destaca a aprendizagem da "noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta (…) regra de três simples; (…) Problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes" (Bívar et al., 2013, p. 18).

São diversos os tipos de problemas que envolvem o raciocínio de proporcionalidade direta, assim como as estratégias utilizadas pelos alunos para os solucionarem. De acordo com Silvestre (2006, referido por Costa & Ponte, 2008), a seleção da estratégia a utilizar perante uma situação problema, depende da interpretação que o aluno faz desta, do seu conhecimento acerca dos números implicados e ainda das relações imediatas que consegue estabelecer entre eles. Post, Behr e Lesh (1988) e Heller et al. (1990), referidos por Cramer e Post (1993), apresentam três tipos de tarefas para avaliar as competências de proporcionalidade: *valor omisso, comparação numérica* e *previsão e comparação qualitativa*.

Nos problemas de *valor omisso* ou tarefas de incógnita são apresentados três valores numéricos e é pedido que os alunos descubram o quarto valor (Silvestre & Ponte, 2012; Spinillo, 1993). É exemplo de um problema de valor omisso o referido por Karplus, Pulos e Stage (1983): "um carro percorreu 175 km em 3 horas. Qual a distância que irá percorrer em 12 horas à mesma velocidade?" (p. 220). Nos *problemas de comparação* são apresentados dois ou mais pares de valores numéricos e pede-se aos alunos que os comparem (Silvestre & Ponte, 2012), como "o carro A percorreu 180 km em 3 horas. O carro B percorreu 400 km em 7 horas. Qual foi o carro que estava a andar com maior velocidade? (Karplus, Pulos, Stage, 1983, p. 220).

Para estes tipos de problemas, Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993), referidos por Silvestre e Ponte (2009), evidenciam a utilização, por parte dos alunos, de cinco estratégias, nomeadamente, a *razão unitária*, *factor de mudança ou factor escalar* (Hart, 1983, referido por Silvestre & Ponte, 2009), *comparação das razões*, *algoritmo do produto cruzado*, *interpretação gráfica* (Post, Behr & Lesh, 1988, referido por

Silvestre & Ponte, 2009).

Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993), referidos por Silvestre e Ponte (2009), afirmam que a estratégia que os alunos utilizam, desde os primeiros níveis de escolaridade, e por isso, de caráter intuitivo, consiste na *razão unitária*. Esta estratégia está presente, segundo os autores, nas resoluções dos alunos em problemas de divisão e de multiplicação mediante o cálculo de razões unitárias e no cálculo de múltiplos de razões unitárias. É uma estratégia que é caracterizada pela descoberta da relação multiplicativa entre medidas, sendo a razão unitária descoberta através da divisão. Por exemplo, perante a situação problema: se 3 maçãs custam 60 cêntimos, quanto custam 6 maçãs? O preço de uma maçã será descoberto através da divisão de 60 cêntimos por 3 maçãs, obtendo o valor de 20 cêntimos por maçã. A razão unitária é o fator constante que relaciona o número de maçãs e o seu custo. Para descobrir o preço de 6 maçãs, é necessário apenas multiplicar as 6 maçãs por 20 cêntimos (Cramer, Post & Currier, 1993).

Os resultados obtidos através de um estudo realizado por Cramer, Post e Currier (1993), em que comparavam as estratégias utilizadas por dois grupos de alunos (7.º e 8.º ano de escolaridade), demonstraram que na ausência do conhecimento da estratégia do *algoritmo do produto cruzado* os alunos recorreram maioritariamente à estratégia *razão unitária* para resolver problemas de valor omisso e de comparação. Segundo os mesmos autores, a prevalência desta estratégia não é surpreendente, uma vez que no seu dia-a-dia as crianças têm a oportunidade de fazer compras e, assim, realizar frequentemente cálculos de preços unitários, sendo, portanto, uma estratégia natural para abordar este tipo de problemas.

No que respeita à estratégia *factor de mudança ou factor escalar* esta está presente no leque de estratégias apresentadas pelos alunos, surgindo de forma condicionada a aspetos numéricos dos problemas. Inerente a esta estratégia está o pensamento de *quantas vezes mais*, ou seja, *se eu quero o dobro de maçãs, o preço também será o dobro*, implicando também a descoberta da relação multiplicativa de medidas (Cramer, Post & Currier, 1993). Os resultados obtidos através de um estudo realizado por Artut e Pelen (2015), contrastam com os obtidos mediante o referido estudo realizado por Cramer, Post e Currier (1993), demonstrando que, perante problemas de valor omisso, alunos do 6.º ano de escolaridade recorrem com maior frequência à estratégia *factor de* *mudança* (22,2%) comparativamente à estratégia da *razão unitária* (12,88%).

Quanto à estratégia de *comparação de razões* esta surge relacionada com problemas de comparação, através da qual os alunos comparam razões unitárias mediante duas divisões. Esta mesma estratégia é descrita por Karplus, Pulos e Stage (1983), para este tipo de problemas, sendo designada como comparação de razões *entre* grandezas, ou seja, para o problema de comparação de velocidades anteriormente referido, os alunos através das razões 180/3 km/h e 400/7km/h, iriam comparar os resultados obtidos para obter uma resposta.

O *algoritmo do produto cruzado,* frequentemente conhecido como *regra de três simples* é uma estratégia que, segundo Menduni-Bortoli e Barbosa (2017), é ensinada pelos professores de forma prioritária ao abordar a proporcionalidade direta, estratégia esta que apesar de ser muito eficaz, consiste num "processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas" (Silvestre & Ponte, 2009, p. 3). Sustentando esta opinião, Cramer, Post e Currier (1993) afirmam que ser capaz de aplicar operações mecânicas em situações de proporcionalidade, não implica obrigatoriamente que os alunos compreendem as bases subjacentes ao pensamento proporcional, sendo que a capacidade para compreender claramente a proporcionalidade, consiste num marco de grande importância no desenvolvimento mental dos alunos.

Hull (2000, referido por Stanley, McGowan & Hull, 2003) afirma que, quando os professores apresentam problemas de proporcionalidade direta a alunos, que os resolvem com base no algoritmo do produto cruzado, apesar de o aplicarem corretamente, um significativo número dos alunos não é capaz de interpretar as suas respostas, porque as unidades de medida não foram tidas em consideração durante o processo de resolução, dado que, para Menduni-Bortoli e Barbosa, (2017), recorrendo a esta estratégia desprezam-se as relações existentes entre as grandezas implicadas. No mesmo estudo, anteriormente referido, desenvolvido por Cramer, Post e Currier (1993), constatou-se que, mediante problemas de valor omisso, no grupo de alunos que haviam abordado a estratégia do algoritmo do produto cruzado, esta estratégia foi utilizada com maior frequência face às estratégias de razão unitária, fator de mudança e comparação de frações.

Silvestre e Ponte (2012) acrescentam ainda que os alunos aprendem primeiramente a resolver as situações problemáticas que implicam a utilização de igualdades entre razões com duas variáveis (como no caso do algoritmo do produto cruzado), recorrendo posteriormente à função linear, não estabelecendo, no entanto, qualquer relação entre essas duas representações, o que revela falta de compreensão sobre os procedimentos por estes adotados.

Relativamente à estratégia da *interpretação gráfica*, esta consiste na análise de gráficos para identificar "razões equivalentes ou para identificar a parte omissa em problemas de proporcionalidade direta" (Post, Behr e Lesh, 1988, citado por Silvestre & Ponte, 2009, p.29).

Para além das referidas estratégias, Silvestre (2012) acrescenta ainda que, nalguns casos de problemas de comparação, os alunos necessitam de realizar uma análise qualitativa acerca dos dados. Nasution, Amin e Lukito (2014) referem também a importância da utilização de modelos para a resolução de problemas que envolvem proporcionalidade uma vez que lhes permite visualizar de forma concreta o seu pensamento e a construção do sentido de proporcionalidade.

Estas representações dos alunos são intuitivas e individuais, consistindo em métodos próprios de aprendizagem autónoma (Matos, 1994, referido por Valério 2005), pelo que o NCTM (2000) defende que tanto os programas como os professores do 1.º ciclo do ensino básico devem proporcionar aos alunos a oportunidade de criar e utilizar representações com o objetivo de selecionar, aplicar e transformar representações matemáticas.

Perante situações problemáticas que envolvem o raciocínio proporcional, são diversas as dificuldades reveladas pelos alunos, pelo que, é possível encontrar na literatura diversos estudos que objetivavam verificar quais as principais dificuldades manifestadas. Spinillo (1993) aponta duas possíveis razões para explicar as dificuldades sentidas pelas crianças face a resolução de problemas de proporcionalidade: a incapacidade em estabelecer relações de segunda-ordem e a dificuldade em estabelecer relações iniciais de primeira-ordem. Costa e Ponte (2008) afirmam também que as principais dificuldades incidem na capacidade dos alunos em interpretar os enunciados, de forma a distinguir situações que envolvem proporcionalidade direta das que não a implicam, e na aquisição de forma mecânica de algoritmos sem que os compreendam, aplicando-os em situações desadequadas

Cramer, Post e Currier (1993) acrescentam ainda a dificuldade em compreender a relação multiplicativa que existe entre as quantidades que representam a situação. Nasution et. al, (2014) corroboram com esta opinião, ao referirem que, para resolver problemas de proporcionalidade direta, os alunos têm de dominar a relação existente entre uma unidade e as outras unidades (como o número de camisolas e o seu preço). Apontam a necessidade de compreender esta relação como uma possível causa da dificuldade dos alunos em lidarem com este tipo de problemas, pelo que consideram ser imprescindível um ensino formal acerca desse tema.

Outros fatores considerados por Vergnaud (1988, citado por Costa & Ponte, 2008), que condicionam a complexidade das tarefas, consiste no tipo de "valores numéricos presentados (números decimais inferiores a 1, razões escalares "pequenas" e "grandes", coeficientes constantes pequenos ou grandes, numerais decimais, fracções próprias) e os contextos (preços, produção, consumo, velocidade, geometria, densidade)" (p. 68). Hart (1988, citado por Costa & Ponte, 2008) afirma que, ao propor uma tarefa aos alunos, os professores devem ter em consideração os números utilizados, "uma vez que estes têm tendência a usar o seu sentido do "parece certo", resistindo, por vezes, à manipulação de números que lhes são pouco familiares" (p.68).

# Capítulo 2 – Enquadramento metodológico

Neste capítulo apresento o *design* da presente investigação, o grupo de alunos que participou no projeto, a estratégia de intervenção educativa concebida e a metodologia utilizada durante as sessões de recolha de dados. A investigação decorreu no seguimento do período de trabalho de campo no âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, pelo que a minha presença não foi encarada pelos alunos como sendo estranha no ambiente da sala de aula. Este facto permitiu uma dinâmica harmoniosa, fluente e de colaboração entre os alunos e a professora/investigadora (autora deste relatório) durante todo o processo de recolha de dados.

## Design de investigação e intervenção educativa

A presente investigação objetiva verificar quais as estratégias utilizadas por alunos na resolução de problemas de proporcionalidade direta, sem que tenha sido realizada anteriormente qualquer abordagem a esse tópico matemático, pelo que foi desenvolvida uma metodologia de caráter qualitativo em contexto escolar.

Este tipo de abordagem foi selecionado considerando as diversas características que lhe são inerentes, das quais se destacam, segundo Bogdan e Biklen (1994), a fonte de dados que consiste no ambiente natural, onde os participantes se inserem, ser de caráter descritivo recorrendo a citações "com base nos dados para ilustrar e substanciar"(p.48) os resultados, o interesse do investigador no processo e não nos resultados ou produtos e a análise indutiva dos dados recolhidos, onde os dados não são recolhidos com "o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente" (p.50), sendo as conclusões construídas à medida que os dados recolhidos vão sendo analisados e agrupados.

Neste âmbito, são diversos os estudos realizados ao longo do tempo que se debruçaram em examinar as diferentes estratégias utilizadas para a resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional. A grande maioria, de acordo com Tourniaire e

Pulos (1985), consistia na aplicação de um mesmo problema com o propósito de analisar os diferentes conhecimentos e estratégias mobilizados pelos alunos para o resolver. O presente estudo baseia-se nesta metodologia, no sentido em que pretende identificar a existência das estratégias mais comuns referidas na literatura aquando da resolução de problemas de proporcionalidade direta mediante a aplicação do mesmo problema (seis problemas diferentes) a todos os grupos de alunos, alunos do 5.º ano de escolaridade.

Atendendo às características referidas, a recolha dos dados utilizados para o presente estudo foi realizada em contexto natural de sala de aula durante o decorrer de duas aulas de matemática, através da aplicação de seis tarefas matemáticas, com o grupo de vinte e três alunos organizados em grupos de três ou quatro alunos. As produções dos alunos foram devidamente registadas, nomeadamente através da fotografia e gravações áudio que permitiram a transcrição detalhada de alguns momentos de intervenção dos alunos, informação essa considerada fundamental para compreender os processos de raciocínio utilizados pelos alunos perante as tarefas matemáticas. A análise dos dados recolhidos foi realizada de um modo interpretativo permitindo o agrupamento e categorização das estratégias de resolução dos alunos em quatro categorias distintas atendendo à literatura explorada no âmbito da resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade direta.

A intervenção educativa seguiu o modelo apresentado por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), no qual a estrutura da aula consiste em cinco fases: *antecipação*, *monitorização do trabalho autónomo* dos alunos durante a fase de exploração das tarefas, *seleção de resoluções* a apresentar durante a fase de discussão, *sequenciação das resoluções* selecionadas e *discussão coletiva* com o objetivo de ajudar os alunos a realizar conexões matemáticas entre as diferentes ideias e respostas fornecidas.

A esta organização do trabalho a desenvolver, denominada por *ensino exploratório* (Canavarro, 2011), baseada na promoção de tarefas desafiantes, previamente selecionadas e preparadas, a autora refere que os alunos desenvolvem autonomamente ideias matemáticas que são sistematizadas através de uma discussão coletiva, o que gera aprendizagens significativas que deverão ser utilizadas pelos alunos em diversas situações do seu quotidiano. Perante este tipo de abordagem, "os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p. 11).

De entre as fases referidas por Stein et al. (2008), a fase de *antecipação,* que consiste na previsão por parte da professora/investigadora de quais as estratégias de resolução que poderão surgir através da atividade dos alunos, não ocorreu em contexto de sala de aula, mas sim previamente atendendo à literatura e estudos realizados anteriormente no âmbito das tarefas selecionadas e adaptadas, o que permitiu à professora/investigadora selecionar algumas das estratégias mais recorrentemente utilizadas pelos alunos perante a resolução de problemas de proporcionalidade direta, nomeadamente *razão unitária, factor de mudança, comparação de frações, algoritmo do produto cruzado e interpretação gráfica*.

Stein et al. (2008) referem que a fase de *monitorização* permite ao professor não apenas reconhecer se o nível de dificuldade da tarefa é adequado ou não ou se a resposta alcançada está correta ou incorreta, mas também prever a forma como os alunos podem interpretar matematicamente a tarefa, bem como o leque de possíveis estratégias (tanto corretas como incorretas) que podem ser utilizadas, tendo em atenção os conceitos matemáticos, representações e procedimentos matemáticos que o professor pretende que os seus alunos aprendam (Stein et al., 2008).

Durante a fase de *monitorização*, Stein et al. (2008) referem a importância de o professor prestar uma atenção detalhada ao pensamento matemático dos alunos envolvido na fase de exploração da tarefa, o que ocorre, segundo os autores, através da circulação pelo espaço da sala de aula. O objetivo desta fase é o de identificar o potencial de aprendizagem inerente a cada uma das estratégias ou representações utilizadas pelos alunos, constatando quais as estratégias de resolução que terão interesse matemático em serem partilhadas durante a fase de partilha e discussão (Brendehur & Frykholm, 2000; Lampert, 2001 referidos por Stein et al, 2008).

Após a apropriação por parte do professor das estratégias utilizadas pelos alunos, seguem-se as fases de *seleção e sequenciação das estratégias* a partilhar, ou seja, uma planificação do momento de partilha e discussão coletiva. Stein et al. (2008) referem que cabe ao professor selecionar as estratégias que considera envolverem ideias matemáticas mais importantes e relevantes para a aprendizagem coletiva. A escolha da ordem através da qual estas estratégias vão ser apresentadas durante o momento de discussão deve ser realizada com um objetivo de ensino claro de modo a maximizar as hipóteses de atingir os objetivos de ensino que pretende alcançar durante a discussão (Stein et al., 2008).

Por fim, através da fase de *discussão,* pretende-se que, com a ajuda do professor, os alunos desenvolvam conexões entre as ideias matemáticas que estão implicadas nas estratégias e representações que utilizaram (Ball, 2001; Boaler & Humphreys, 2005; Brendehur & Frykholm, 2000, referidos por Stein, et al., 2008).

## Participantes

Este estudo envolveu a participação de uma turma do 5.º ano de escolaridade do 2.º ciclo do ensino básico de uma Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclos, localizada na cidade de Faro, composta por um total de vinte e três alunos, dos quais dez do sexo feminino e treze do sexo masculino. Integrado no grupo de alunos encontravam-se dois alunos referenciados como tendo necessidades educativas especiais (um aluno com diagnóstico de Dislexia e um aluno com diagnóstico de Síndrome de Asperger), cinco alunos repetentes e um aluno de nacionalidade cabo-verdiana em fase de aquisição do português-europeu. Os alunos trabalharam em cinco grupos de quatro alunos e um grupo de três alunos (designados Grupo A a Grupo F, em que os alunos assumem nomes fictícios).

## Tarefas matemáticas e intervenção na sala de aula

O tipo de tarefas selecionadas para a recolha dos dados foram essencialmente problemas de *valor omisso* e foram escolhidos por consistirem num tipo de problemas de proporcionalidade simples, assumindo que nem todos as situações problemáticas de proporção são inacessíveis às crianças, podendo uns ser mais fáceis do que outros, e de que as crianças apresentam diferentes níveis de compreensão perante tarefas simples que implicam o raciocínio proporcional (Spinillo, 1993).

Nesta investigação utilizaram-se cinco problemas de *valor omisso* e um problema de *comparação* sem a presença de valores numéricos. Após a seleção das tarefas, com o objetivo de averiguar se os enunciados se encontravam adequados à faixa etária em questão, a professora/investigadora aplicou previamente as situações problemáticas selecionadas a um grupo de quatro alunos pertencentes à mesma faixa etária dos alunos, a frequentar a mesma escola destes. Os problemas de valor omisso implicavam a utilização de diferentes grandezas, valores numéricos e contextos. Os problemas apresentados aos alunos neste estudo foram:

**Tarefa 1**. Fizeram-se dois sumos de laranja (A e B) de tal modo que o sumo A tem mais sabor a laranja que o sumo B e a quantidade de concentrado utilizado no sumo A é menor que a quantidade de concentrado utilizado no sumo B. Qual dos sumos levou mais água, ou será que levaram a mesma quantidade? (Adaptado de Noelting's, 1980, citado por Cramer & Post, 1993).

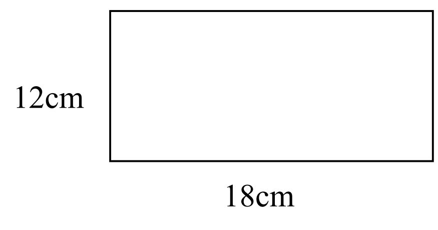
**Tarefa 2**. Uma turma precisa de 5 folhas para alimentar 2 lagartas por dia. De quantas folhas irá precisar por dia para alimentar 12 lagartas? (Adaptado de Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008)

**Tarefa 3.** O carrinho do irmão mais novo do Miguel dá 3 voltas à pista em 57 segundos. Sabendo que o carrinho anda sempre à mesma velocidade, quanto tempo demora a dar 12 voltas à pista?

**Tarefa 4.** Um automóvel que se descoloca sempre à mesma velocidade percorre 210 Km em 3 horas. Que distância percorre em 2 horas? (Adaptado de Silvestre & Ponte, 2012)

**Tarefa 5.** O Duarte quer comprar um telemóvel cujo preço é 112€. No catálogo de promoções do mês seguinte, o telemóvel aparece com 25% de desconto. Qual será o preço do telemóvel com desconto?

**Tarefa 6.** A Mariana quis ampliar uma fotografia onde estava com o seu cão. Se quiser ampliar a fotografia de modo a que o comprimento seja igual a 45cm, qual será a largura?




A ordem pela qual os problemas foram organizados e apresentados aos alunos seguiu uma lógica de complexidade, pelo que a primeira tarefa apresentada, por ser considerada por Spinillo (1993) um dos tipos de problemas mais simples que envolvem a proporcionalidade, consistiu num problema direto envolvendo a comparação entre quantidades relativas de água em dois recipientes.

Em seguida foram apresentadas três tarefas de valor omisso semelhantes, variando apenas as grandezas implicadas. A Tarefa 5 considerou-se ter um nível de complexidade superior às anteriores por envolver a utilização de números racionais sob a forma de percentagem e não apenas números naturais como as tarefas anteriores, assim como a Tarefa 6 que, por implicar números decimais, também foi considerada ter um grau de dificuldade superior às restantes.

A organização da aula seguiu o modelo de ensino exploratório acima referido, desta forma, para cada tarefa a explorar seguiu-se o mesmo procedimento: primeiramente uma fase de apresentação da tarefa com a duração de 5 minutos, seguida da fase de trabalho autónomo e acompanhamento do mesmo (10 minutos), e por fim, um período de discussão coletiva (10 minutos). O período de discussão coletiva foi gravado, em formato áudio, e foram fotografadas as resoluções dos alunos, assim como os registos efetuados por estes no quadro, durante a fase de discussão. As fases de seleção e sequenciação das estratégias a apresentar durante o momento de análise e discussão decorreram durante a fase de trabalho autónomo dos alunos.

Para introduzir cada uma das tarefas, a professora/investigadora realizou uma leitura conjunta do enunciado com todo o grupo de alunos esclarecendo potenciais dúvidas acerca do seu conteúdo de modo a dissipar possíveis dificuldades relacionadas com a compreensão do enunciado.

No que respeita à fase de trabalho autónomo dos alunos, à semelhança da metodologia descrita por Stein et al. (2008), a professora/investigadora informou previamente os alunos que poderiam resolver as tarefas matemáticas seguindo o procedimento que quisessem, salientando que posteriormente teriam de explicar o seu raciocínio e os registos efetuados para chegar à resposta, aos restantes colegas. Os alunos trabalharam colaborativamente em grupos de três ou quatro elementos, pelo que, para garantir o envolvimento de todos os alunos na resolução das tarefas, a professora/investigadora circulou constantemente pelo espaço da sala de aula acompanhando o trabalho dos alunos.

Assim, durante a fase de acompanhamento do trabalho autónomo dos alunos, a professora/investigadora não interveio nas estratégias que estes estavam a utilizar de modo a validá-las ou refutá-las. O seu apoio baseou-se no esclarecimento de possíveis dúvidas no que respeitava à interpretação dos enunciados. Simultaneamente foi durante esse período que a professora/investigadora, ao identificar as estratégias utilizadas pelos alunos, organizou o momento de exposição e debate de modo a que fosse o mais proveitoso possível para a turma.

A seleção das estratégias de resolução a serem apresentadas durante a fase de discussão não foi ao acaso. Seguindo Canavarro (2011), a professora/investigadora procurou identificar os grupos que apresentavam resoluções de maior interesse matemático para a discussão coletiva. Foram assim utilizados diversos critérios para selecionar as resoluções, nomeadamente aquelas que não estando totalmente corretas, sejam acessíveis a todos os alunos, e que permita esclarecer conceitos básicos implicados na tarefa, que sejam fundamentais para progredir no raciocínio matemático; outras resoluções que, seguindo o mesmo raciocínio matemático, apresentavam estratégias diferentes que permitiam melhor compreender o raciocínio realizado e ainda outras resoluções que apresentavam a utilização de diferentes estratégias. Outros critérios tidos em conta foram: partir de resoluções mais informais para mais formais quanto às representações matemáticas utilizadas e progredir para resoluções que permitam realizar generalizações.

A ordem pela qual as resoluções foram apresentadas e discutidas seguiu a ordem apresentada quanto aos critérios de seleção, iniciando-se com a apresentação de estratégias mais simples e/ou com erros (menos formais), em seguida, estratégias que ainda que não estivessem corretas fossem mais complexas e descritivas, finalizando com a apresentação de estratégias adequadas e matematicamente válidas (mais formais que permitissem a realização de generalizações). Salienta-se que, no caso da existência de estratégias semelhantes, a professora procedeu apenas à seleção de uma delas para ser exposta em grande grupo. O momento de apresentação e discussão coletiva foi planeado, uma vez que, atendendo à literatura abordada, era esperado que surgissem diferentes estratégias de resoluções por parte dos alunos, considerando o afirmado por Stein et al., (2008) de que os percursos percorridos até às soluções das tarefas problemáticas não são específicos e predeterminados.

No final de cada momento de discussão coletiva, pretendeu-se estabelecer pontes, conexões entre as diferentes estratégias de resolução apresentadas, através da análise, comparação e confronto de ideias, no sentido de promover o desenvolvimento coletivo de ideias e conceitos matemáticos por parte dos alunos (Canavarro, 2011). Não se objetivava apenas uma exposição das estratégias utilizadas pelos alunos, mas sim o estabelecimento de diálogo entre os alunos e entre estes e a professora/investigadora, no sentido de promover aprendizagens.

Durante esta mesma fase de apresentação e análise das diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, pretendeu-se também atender aos erros presentes nas resoluções, encarando o erro como uma estratégia didática. As produções dos alunos foram posteriormente analisadas e categorizadas pela investigadora através do registo fotográfico das resoluções dos alunos e da gravação áudio da fase de apresentação e discussão das estratégias selecionadas.

# Capítulo 3 – Resultados e discussão

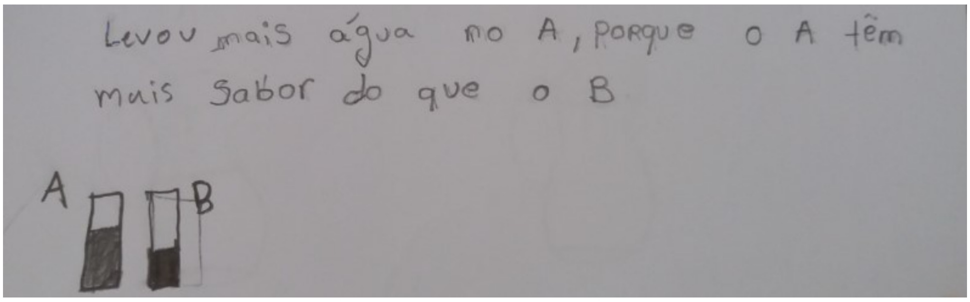
Neste capítulo apresento os resultados obtidos através da aplicação das seis tarefas propostas aos alunos. A apresentação dos resultados será realizada em duas fases tendo em atenção as características e tipologia das tarefas apresentadas aos alunos. Desta forma, primeiramente serão analisadas as estratégias utilizadas pelos alunos para dar resposta à primeira tarefa proposta, que consistia num problema de comparação sem valores numéricos, e em seguida, serão analisadas as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as tarefas de valor omisso.

Para estes últimos serão consideradas como matriz de análise as estratégias descritas na literatura e referidas anteriormente, atentando também para a criatividade dos alunos e para a elaboração de estratégias inovadoras não mencionadas na pesquisa realizada. Será também abordada de forma sucinta os erros presentes nas resoluções dos alunos de modo a promover aprendizagens. Para abordar os resultados serão transcritas e apresentadas fotografias dos registos dos alunos, assim como transcritos alguns momentos do diálogo decorrido na fase de apresentação e discussão utilizando nomes fictícios para os alunos envolvidos.

## Comparação sem valores numéricos

Para a Tarefa 1, constatou-se que todos os grupos recorreram a modelos visuais para representar de forma concreta a informação contida no enunciado de forma a clarificá-lo, sendo, no entanto, algumas representações mais completas e mais complexas do ponto de vista matemático do que outras.

A primeira resolução apresentada à turma foi selecionada pela professora/investigadora por ser, entre todas as resoluções, a que estava mais incompleta no que respeita à representação dos dados, uma vez que apenas fazia referência à quantidade de água, como se pode verificar na figura 3.1., ignorando as restantes informações. Face à falta de informação presente no registo realizado pelos alunos e pelo facto da resposta obtida estar incorreta, a professora/investigadora considerou fundamental iniciar o momento de discussão com a resolução em questão para compreender e debater a estratégia e raciocínio dos alunos em grande grupo.




[Levou mais água no A, porque o A têm [tem] mais sabor do que o B]

Figura 3.1. Estratégia de resolução do Grupo C para a Tarefa 1.

Durante a fase de apresentação e discussão das produções dos alunos, o Grupo C afirmava que:

> Manuel: – … o sumo A levou mais água do que o sumo B.
>
> Professora: – Então vocês acham que o sumo A levou mais água. Porquê?
>
> Manuel: – Porque o A tem mais sabor do que o B.
>
> Professora: – Eles dizem que o sumo A tem mais água do que o sumo B, porque o A tem mais sabor do que o B. Todos vocês concordam?
>
> Colegas: – Não.
>
> Professora: – Explica lá porque é que não concordas.
>
> Manuel: – Porque tinha colocado menos no B e no A mais um bocado.
>
> Professora: – Um bocado de quê?
>
> Manuel: – de sumo [sabor] e depois pôs-se menos água no A e mais água no B. [Aula]

A tarefa pretendia que os alunos compreendessem que, para que o sumo A tivesse mais sabor a laranja, apesar de ter menor quantidade de concentrado, a quantidade de água utilizada teria de ser proporcionalmente inferior à quantidade de água utilizada no sumo B, ou seja, menor quantidade de concentrado e de água no sumo A e maior quantidade de concentrado e ainda maior quantidade de água no sumo B, para satisfazer as condições do problema.

Perante a afirmação do aluno em que refere que o sumo A levou mais água do que o sumo B porque "o A tem mais sabor do que o B", verifica-se que o grupo não compreendeu a relação de proporcionalidade implicada entre a quantidade de concentrado e de água relacionada com a intensidade de sabor do sumo. Perante as afirmações do aluno, subentende-se que o grupo tinha relacionado, de forma errada, a quantidade de água com a quantidade de sabor, assumindo que para o sumo ter mais sabor teria de ter mais quantidade de água. Outra resolução selecionada para análise e discussão coletiva foi a resolução do Grupo B, presente na figura 3.2.:

[R: O sumo B tem mais água.]

Figura 3.2. Estratégia de resolução do Grupo E para a Tarefa 1.

Durante a fase de análise e discussão, o grupo explicou de forma clara à restante turma o seu raciocínio:

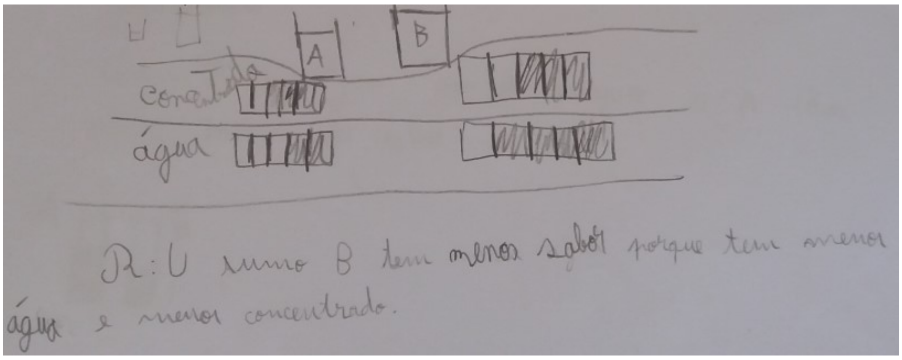
> Raquel: – Nós primeiro desenhamos o sumo A e o sumo B, depois fizemos um esquema de acordo com o que vinha no problema e depois chegamos à conclusão que o B tem mais concentrado e menos sabor a laranja pois para ficar mais líquido (diluído) teve de levar mais água. [Aula]

Confrontando as estratégias utilizadas pelos dois grupos, verifica-se que o Grupo E concebeu um esquema completo, incluindo todos os dados fornecidos pelo enunciado, obtendo uma resposta correta, comparativamente com o esquema incompleto do Grupo B que conduziu a uma resposta errada.

Considera-se que o facto de os alunos não terem atendido a todos os dados, presentes no enunciado do problema, foi crucial para que não o compreendessem. Corroborando com esta opinião, Tourniaire e Pulos (1995, referidos por Ben-Chaim et al., 1998), referem que uma das causas que conduz à obtenção de respostas erradas perante problemas de proporcionalidade consiste no facto dos alunos omitirem alguns dados importantes no contexto do mesmo.

Mediante as estratégias de resolução a que todos os grupos recorreram, a conceção de modelos visuais, verifica-se que os resultados obtidos corroboram com os referidos por Nasution et. al (2014), que demonstraram que a realização de modelos visuais por parte dos alunos, os ajuda na resolução de problemas de proporcionalidade.

Foi também selecionada para análise a estratégia utilizada por outro grupo de alunos (Grupo A), onde se verifica uma tentativa de conceber uma estratégia mais elaborada do ponto de vista matemático, como se pode verificar na figura 3.3.




[R: O sumo B tem menos sabor porque tem menos água e menor concentrado.]

Figura 3.3. Estratégia de resolução do Grupo A para a Tarefa 1.

O grupo de alunos representou as quantidades de água e de concentrado utilizadas para a confeção de cada sumo (A e B), dividindo uma unidade contínua em cinco partes iguais. Através da resposta fornecida pelo grupo, verificou-se que apesar da tentativa por parte dos alunos em realizar um raciocínio utilizando representações matemáticas mais complexas abordando os números racionais, não obtiveram a resposta correta. Considera-se que tal aconteceu pelo facto da sua representação não ter sido tão clara como as concebidas pelos restantes grupos, o que dificultou a compreensão da relação de proporcionalidade entre a quantidade de água e a intensidade do sabor do sumo.

Sintetizando, do ponto de vista da investigação, constatou-se que a maioria dos grupos de alunos conseguiu elaborar uma estratégia válida e clara para solucionar a tarefa proposta, sendo comum a todos os grupos a construção de estratégias visuais que os auxiliaram no processo de raciocínio inerente à resolução desta tarefa matemática.

## Razão unitária

A estratégia *razão unitária* foi utilizada para a resolução das Tarefas 2, 3 e 4, num total de oito vezes, tendo sido a Tarefa 4 a que mobilizou a utilização desta estratégia com maior frequência (4 em 5 situações). Este resultado era o esperado, uma vez que Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993), referidos por Silvestre e Ponte (2009), afirmam que esta estratégia por ser de caráter intuitivo é utilizada pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade. Este resultado é ainda reforçado pelos resultados do estudo realizado por Cramer, Post e Currier (1993), que demonstrou que, perante problemas de valor omisso e de comparação, alunos do 7.º ano que não tinham abordado a estratégia do algoritmo cruzado, utilizavam predominantemente a estratégia da *razão unitária*. As representações utilizadas pelos grupos de alunos para a aplicação desta estratégia foram bastante diversificadas, como se pode verificar nos exemplos a seguir apresentados. Os alunos do Grupo E apresentaram a seguinte resolução para a Tarefa 2:

> Cada duas lagartas comiam 5 folhas    12:2 = 6
> 6 pares de 2 lagartas comia 30 folhas    5 x 6 = 30
> R.: Para alimentar 12 lagartas é preciso 30 folhas

E explicaram o seu raciocínio ao grupo turma, durante a fase de apresentação e discussão das produções dos alunos:

> Vasco: – Nós descobrimos que cada duas lagartas comiam cinco folhas. Então fizemos doze a dividir por dois que deu seis.
>
> Professora: – Seis quê?
>
> Vasco: – Cada seis pares de duas lagartas…
>
> Professora: – Descobriram que há seis pares de lagartas.
>
> Vasco: – …sim. Se um par come cinco folhas, seis pares comem trinta folhas. [Aula]

Mediante a resolução apresentada, verifica-se que os alunos não procederam da forma descrita na literatura para determinar a relação unitária entre uma lagarta e a quantidade de folhas que esta comia por dia. Considera-se que tal aconteceu uma vez que os alunos tentaram evitar a realização de uma operação de divisão onde iriam obter um número decimal (se duas lagartas comem cinco folhas, uma lagarta comeria duas folhas e meia). Assim, optaram por abordar o problema não considerando cada lagarta individualmente, mas sim agrupando-as a pares, pelo que determinaram primeiramente o número de pares de lagartas que se pode formar com 12 lagartas. Em seguida, multiplicaram a quantidade de folhas que cada par de lagarta comia pelo total de pares de lagartas existentes. Através do discurso do aluno representante do grupo verificou-se que os alunos compreenderam o procedimento inerente ao seu raciocínio para a resolução do problema.

Outro exemplo onde foi utilizada a estratégia da *razão unitári*a está presente na resolução da Tarefa 3 pelo Grupo C:

Tempo que demora a dar uma volta: *57:3=19*

Quanto tempo demora a dar 12 voltas? 19x12=328 segundos.

(…)

R.: Demora 228 segundos.

Aquando da apresentação e discussão das resoluções ao grupo turma, os alunos clarificaram a sua resolução e detetaram a incorreção do cálculo do produto:

André: – Eu fiz cinquenta e sete a dividir por três e deu-me dezanove.

Professora: – Para saberes o quê?

André: – Quanto tempo demora uma volta.

Professora: – Então obtiveste dezanove quê?

André: – Dezanove segundos … Depois fiz dezanove vezes doze e deu trezentos e vinte e oito segundos.

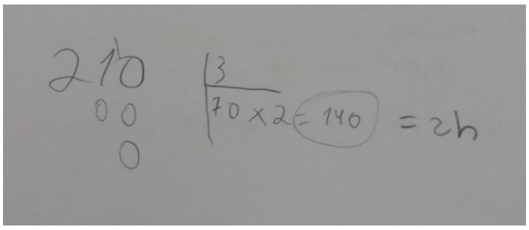
Turma: – Está errado. A conta está malfeita.

Professora: – Vamos então fazer a operação em conjunto.

(…)

Turma: – Deu 228 segundos. [Aula]

De acordo com a resolução apresentada, constata-se que o procedimento dos alunos partiu da descoberta do tempo que o carro demoraria a completar uma volta à pista, determinando a relação unitária como descrito na literatura. Apesar da utilização adequada da estratégia, verifica-se na operação de multiplicação que os alunos cometeram um erro de cálculo, descrito por Spnillo, Soares, Moro e Lautert, (2016) como sendo um *erro procedimental.* Segundo os mesmos autores, esse tipo de erros não se relaciona diretamente com a falta de compreensão por parte do aluno em relação ao conceito matemático implicado no problema, mas sim à aplicação das regras algorítmicas. O mesmo tipo de registo foi observado para a resolução da Tarefa 4 pelo Grupo D (figura 3.4.) e pelo Grupo A (figura 3.5.):




[Algoritmo da divisão de 210 por 3, com o produto de 70 por 2 e a relação entre 140 e 2 h]

Figura 3.4. Razão unitária – Registo do Grupo D para a Tarefa 4.

No âmbito da apresentação e discussão das resoluções em grupo turma, os alunos apresentaram a sua estratégia:

> Mário: – Primeiro fizemos o 210 a dividir por 3.
>
> Professora: – Para quê?
>
> Mário: – Para saber quanto é que o automóvel se deslocava numa hora, que dá setenta. E depois como é para ver quando ele percorre em duas horas, fizemos vezes dois, que dá cento e quarenta que é igual a duas horas.
>
> Professora: – Cento e quarenta quê? O que é que falta?
>
> Tomás: – Cento e quarenta quilómetros, professora. [Aula]

Os alunos do Grupo A apresentaram um registo similar para a Tarefa 4 (figura 3.5.):

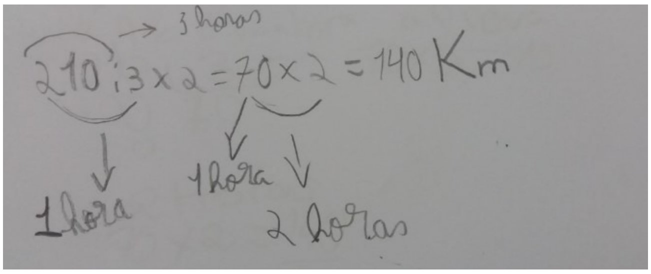
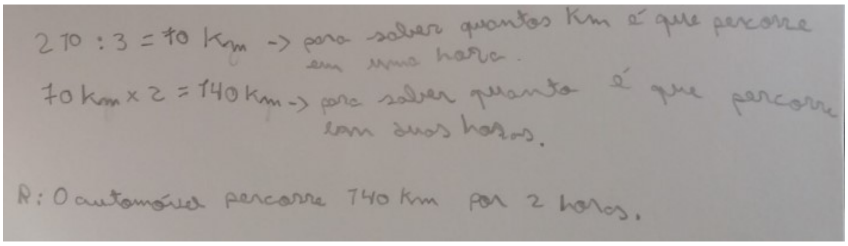



Figura 3.5. Razão unitária – Registo do Grupo A para a Tarefa 4.

As duas resoluções são equivalentes no que respeita à ordem e organização das operações realizadas, no entanto constata-se que no registo da figura 3.5., os alunos identificaram cada um dos valores apresentados o que demonstra uma compreensão detalhada da tarefa matemática. Quanto à resolução anterior, os alunos omitiram todas as grandezas implicadas, nomeadamente no resultado final. Foi possível verificar que os alunos haviam compreendido todo o procedimento que tinham realizado, através da explicação oral, que prestada perante a turma, acerca da sua estratégia de resolução. O registo considerado mais completo e organizado para a estratégia *razão unitária* está presente na figura 3.6.



210 : 3 = 70 Km -> para saber quantos Km é que percorre em uma hora.
70 Km x 2 = 140 Km -> para saber quanto é que percorre em duas horas.
R: O automóvel percorre 140 Km por 2 horas.

[210:3=70 Km → para saber quantos Km é que percorre em uma hora. 70 Km x 2 = 140 Km → para saber quanto é que percorre em duas horas. R: O automóvel percorre 140 Km por 2 horas.]

Figura 3.6. Razão unitária – Registo do Grupo B para a Tarefa 4.

A estratégia apresentada na figura 3.6. revela que os alunos compreenderam claramente o procedimento que estavam a efetuar. Para o registo utilizaram de forma simples e correta as operações matemáticas implicadas, explicando de forma descritiva a razão pela qual realizaram cada uma das operações.

Analisando todas as respostas obtidas através da utilização da estratégia *razão unitária*, verificou-se que em sete de oito utilizações, esta conduziu à obtenção de uma resposta correta. Estes resultados estão em conformidade com os obtidos por Bem-Chaim et al. (1998) que afirmam que esta estratégia resulta frequentemente em respostas corretas.

Atendendo aos resultados apresentados para esta estratégia, no estudo em questão, pode-se afirmar que alunos do 5.º ano de escolaridade utilizam intuitivamente, frequentemente e de forma maioritariamente correta, a estratégia *razão unitária* ainda que as suas representações variem do ponto de vista de complexidade e clareza matemática.

## Fator de mudança

A estratégia *fator de mudança* foi utilizada num total de cinco vezes tendo sido mobilizada quase exclusivamente pelos alunos para a resolução da Tarefa 3 (4 utilizações em 5 oportunidades). Os alunos que conceberam o registo presente na figura 3.7., não estabeleceram *à priori* a relação multiplicativa existente entre o número de voltas, como referido na literatura, tendo realizado um cálculo intermédio.

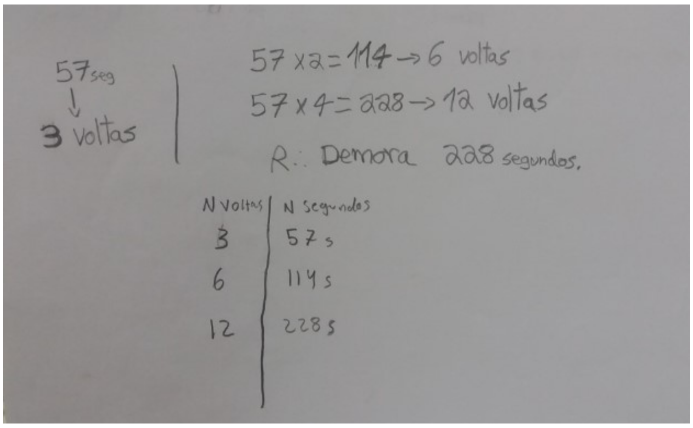
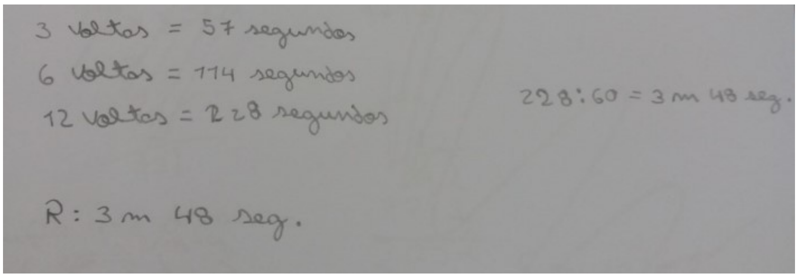



Figura 3.7. Fator de mudança – Registo do Grupo D para a Tarefa 3.

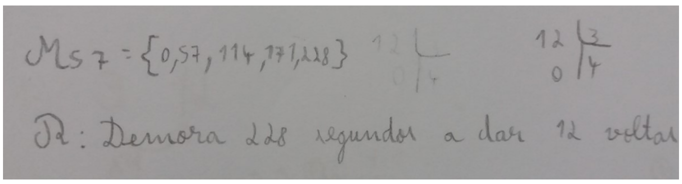
Ao analisar o registo dos alunos observa-se que estes utilizaram duas formas de organização do raciocínio, nomeadamente operações numéricas e uma tabela. Neste caso, os alunos realizaram um passo intermédio entre o número inicial de voltas percorridas (3 voltas) e o número final de voltas percorridas (12 voltas), realizando duas duplicações sucessivas. O mesmo tipo de procedimento foi utilizado por outro grupo para a mesma tarefa (figura 3.8.).



[3 voltas = 57 segundos/ 6 voltas = 114 segundos / 12 voltas = 228 segundos /228:60 = 3 m 48 seg.  R: 3 m 48 seg.]

Figura 3.8. Fator de mudança – Registo do Grupo B para a Tarefa 3.

Destaca-se a resolução presente na figura 3.7., pelo facto dos alunos, que conceberam este registo, fornecerem uma resposta mais detalhada uma vez que apresentaram o resultado em horas e minutos, conteúdo abordado ao nível do 3.º ano do 1.º ciclo do ensino básico (Bívar, Grosso, Oliveira e Timóteo, 2012). Os alunos do Grupo E apresentaram a seguinte resolução para a Tarefa 3 (figura 3.9.):



[R: Demora 228 segundos a dar 12 voltas]

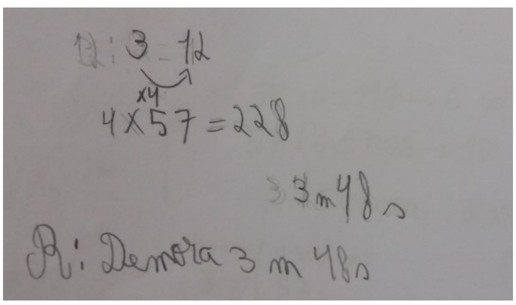
Figura 3.9. Fator de mudança – Registo do Grupo E para a Tarefa 3.

Durante a apresentação e discussão das resoluções no grupo turma, os alunos explicitaram a estratégia utilizada:

> Samuel: – Como três voltas eram cinquenta e sete segundos, eu optei por fazer doze a dividir por três.
>
> Professora: – Para saber o quê?
>
> Samuel: – Que o tempo vai também ser quatro vezes mais. Depois fiz o cinquenta e sete vezes um, vezes dois que deu centro e catorze, vezes três que deu cento e setenta e um e vezes quatro que deu duzentos e vinte e oito.
>
> Professora: – Porque é que ele só fez até ao cento e vinte e oito?
>
> Tomás: – Ele contou quatro vezes.
>
> Professora: – Porquê?
>
> Tomás: – Porque três vezes quatro dá doze. [Aula]

Para o registo da estratégia utilizada, o grupo de alunos determinou primeiramente a relação multiplicativa existente entre o número de voltas, assim como descrito por Cramer, Post e Currier (1993). Seguindo o raciocínio apresentado pelos autores de *quantas vezes mais,* verifica-se que os alunos compreenderam que se o número de voltas era quatro vezes maior, o tempo que iria demorar a completar as doze voltas também seria quatro vezes maior. Para determinar o tempo que o carro demoraria a completar as doze voltas, os alunos recorreram aos múltiplos do número cinquenta e quatro, mobilizando um tipo de representação matemático com que estavam familiarizados através dos conteúdos no âmbito dos múltiplos e divisores abordados ao longo do 5.º ano de escolaridade (Bívar et al., 2013).

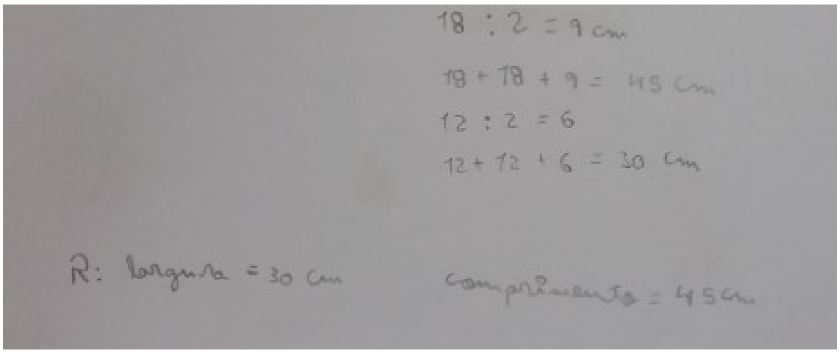
O mesmo se verificou no registo utilizado por outro grupo (figura 3.10.), para a resolução da mesma tarefa, tendo, no entanto, o grupo em questão recorrido exclusivamente a duas operações matemáticas. Este registo é aquele que mais se aproxima do descrito na literatura para esta estratégia.




[R: Demora 3 m 48 s]

Figura 3.10. Fator de mudança – Registo do Grupo A para a Tarefa 3.

A estratégia *fator de mudança* foi também utilizada para a resolução da Tarefa 5, como se pode observar na figura 3.11.




[R: largura = 30 cm comprimento = 45 cm]

Figura 3.11. Fator de mudança – Registo do Grupo B para a Tarefa 5.

Para a tarefa em questão, a relação multiplicativa existente entre o comprimento inicial (18 cm) e o comprimento final (45 cm) da fotografia não era um número natural, correspondendo a uma ampliação de duas vezes e meia. Verificou-se assim, que os alunos primeiramente determinaram o *fator de mudança* através da realização da adição *18 + 18 + 9*, para em seguida aplicarem este mesmo fator à medida correspondente à largura da fotografia *12 + 12 + 6*.

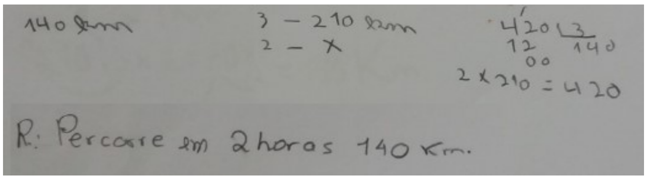
Ao analisar todas as situações em que foi aplicada a estratégia *fator de mudança*, num total de cinco vezes, verificou-se que em quatro dessas situações se obteve uma resposta correta. Comparando a quantidade de vezes que esta estratégia foi utilizada (cinco vezes) em relação à estratégia *razão unitária* (8 vezes), verifica-se que os alunos optaram com mais frequência pela última. Estes resultados contrariam os obtidos por Post e Currier (1993) num estudo realizado com alunos do 6.º ano de escolaridade onde a estratégia *fator de mudança* foi utilizado com mais frequência do que a estratégia *razão unitária*.

Considerando o desempenho dos alunos através da mobilização espontânea da estratégia *fator de mudança*, para resolver as diversas tarefas matemáticas apresentadas no âmbito do estudo, pode-se afirmar que esta está presente no leque de estratégias que alunos do 5.º ano de escolaridade possuem para resolver tarefas de proporcionalidade direta, conduzindo a respostas corretas, assim como apresentado na literatura consultada.

Salienta-se ainda que a grande diversidade de representações e operações matemáticas inerentes a esta estratégia apresentada pelos alunos para a mesma tarefa, revela que a mesma é utilizada por diversos alunos com níveis de conhecimento e abstração matemática variável.

## Algoritmo do produto cruzado

A estratégia *algoritmo do produto cruzado* também conhecida como *regra dos três simples*, foi apenas utilizada pelo grupo C em três tarefas diferentes (Tarefas 2, 4 e 5). Uma vez que esta estratégia foi sempre apresentada com recurso ao mesmo tipo de registo, apresentar-se-á apenas um dos registos do Grupo C (figura 3.12.):




[R: Percorre em 2 horas 140 Km]

Figura 3.12. Algoritmo do produto cruzado – Registo do Grupo C para a Tarefa 4.

Durante a apresentação e discussão das resoluções no grupo turma, os alunos explicitaram a utilização da regra dos três simples:

> Artur: – Nós aplicamos a regra dos três simples. Fizemos três para duzentos e dez quilómetros.
>
> Artur: – Três menos duzentos e dez?
>
> Professora: – Não, tens de explicar o que fizeste.
>
> Artur: – Não é menos! Então nós fizemos dois vezes duzentos e dez, igual a quatrocentos e vinte. Depois dividi por três. Já está!
>
> Professora: – Explica então aos teus colegas o que é que fizeste.
>
> Artur: – Isto é a regra dos três simples. Se em três horas percorreu duzentos e dez quilómetros, em duas horas quanto tempo é que percorreu? Então pomos um x. Depois faço dois vezes duzentos e dez e divido por três! [Aula]

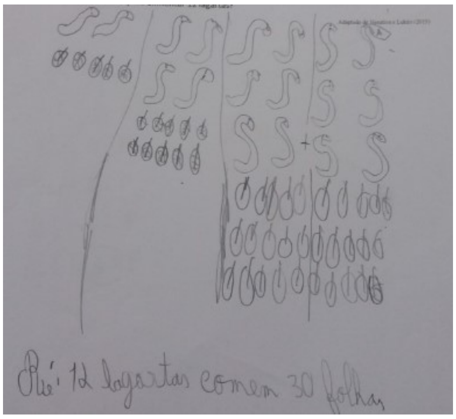
Ao verificar a utilização desta estratégia, a professora solicitou que os alunos que a utilizaram explicassem à turma como haviam procedido, constatando-se que apenas um dos elementos do grupo conhecia a estratégia, elaborando autonomamente a resolução da tarefa. Mediante a explicação fornecida pelo aluno, observou-se que o aluno não compreendia as relações multiplicativas e de divisão inerentes à tarefa, realizando apenas uma descrição memorizada sobre o procedimento implicado. Este resultado é corroborado por Hull (2000, referido por Stanley, McGowan & Hull, 2003) ao afirmar que grande parte dos alunos que utiliza a estratégia do *algoritmo do produto cruzado* não é capaz de interpretar as respostas que obtém.

Em síntese, do ponto de vista da investigação, constata-se que a estratégia *algoritmo do produto cruzado*, assim como descrito na literatura, não surge de forma intuitiva no raciocínio dos alunos, dependendo do ensino formal dos processos matemáticos nela implicados. Desta forma pode-se afirmar que esta estratégia não faz parte do repertório de estratégias intuitivas dos alunos para a resolução de tarefas que envolvem a proporcionalidade direta, e ainda que, uma vez utilizada, os alunos não têm a capacidade de explicar a natureza das relações matemáticas nela implicadas.

## Outras estratégias utilizadas pelos alunos

Ao categorizar as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos perante as tarefas propostas, constatou-se que algumas destas não consistiam em nenhuma das estratégias referidas na literatura abordada. Ao analisá-las foi possível agrupá-las em duas categorias: estratégia de adições sucessivas e estratégia do cálculo de uma parte da unidade. Ambas as estratégias foram consideradas válidas no sentido que permitiram a obtenção da resposta correta, assim como explicadas adequadamente pelos alunos à turma.

*Adições sucessivas.* Para a Tarefa 2, verificou-se que os Grupos A e B utilizaram uma estratégia de adições sucessivas para obter a resposta. Na figura 3.13. é apresentado o registo realizado pelo Grupo B para resolver a Tarefa 2, recorrendo a uma estratégia de adições sucessivas até alcançarem o número de lagartas pretendido, utilizando um esquema visual com recurso a desenhos:




[R: A lagarta comeu 30 folhas]

Figura 3.13. Adições sucessivas – Registo do Grupo A para a Tarefa 2.

Esta mesma estratégia foi observada no registo do Grupo B, sendo, no entanto, a representação utilizada mais formal do que a anterior (figura 3. 14):

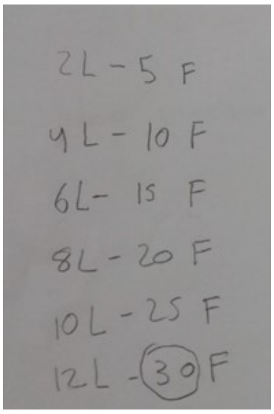



Figura 3.14. Adições sucessivas – Registo do Grupo B para a Tarefa 2.

Considera-se que a utilização desta estratégia, por implicar apenas operações de adição é instintiva por parte dos alunos, uma vez que desde cedo são desafiados a realizar cálculos de adição. Silvestre (2012) reforça esta ideia ao referir que, para a resolução de problemas de valor omisso, os alunos utilizam espontaneamente procedimentos apenas aditivos ou aditivos conjugados com multiplicativos associados a tabelas simples, como se pode verificar no registo do grupo B.

*Cálculo de uma parte da unidade.* Perante a Tarefa 5, que implicava percentagens, todos os grupos, à exceção do que utilizou a estratégia do algoritmo do produto cruzado e de um grupo que não apresentou resposta, resolveram corretamente a situação problemática recorrendo ao cálculo da parte da unidade, ou seja, 25% de 112 euros, subtraindo em seguida o valor obtido (28€) ao valor inicial (112€). Esta estratégia terá sido utilizada pelos alunos de forma frequente e correta pelo facto deste conteúdo ter sido abordado e explorado previamente em contexto de sala de aula por consistir num tópico a trabalhar no âmbito do 5.º ano de escolaridade ao nível da *resolução de problemas* com a utilização de *números racionais não negativos* (Bívar et al., 2012).

## Principais dificuldades dos alunos

As principais dificuldades dos alunos surgiram maioritariamente associadas à Tarefa 6 (três respostas incorretas em cinco respostas), em que os alunos tinham de descobrir a relação de proporcionalidade direta de duas vezes e meia entre o comprimento e a largura de uma fotografia ampliada. Ao analisar o procedimento adotado pelo grupo E, verificou-se que estes primeiramente calcularam a diferença existente entre o comprimento e a largura inicial da fotografia (18cm -12cm= 6cm), diferença essa que mantiveram para calcular a medida da largura da fotografia após a ampliação (45cm – 6cm = 39cm) obtendo assim o valor de 39cm para a largura da fotografia. De acordo com esta resolução, os alunos assumiram que a diferença entre o comprimento e a largura da fotografia se mantinha constante antes e após a ampliação.

Considera-se ser relevante para o estudo em questão analisar de uma forma mais detalhada as dificuldades reveladas pelo grupo C, grupo esse que de entre as seis tarefas apresentadas, recorreu à estratégia do *algoritmo do produto cruzado* para a resolução de três delas, não conseguindo resolver as restantes duas tarefas que envolviam valores numéricos.

Ao analisar o produto do trabalho autónomo deste grupo para a Tarefa 6 (figura 3.15), é possível observar no registo do grupo a intervenção dos diversos elementos que o integravam.

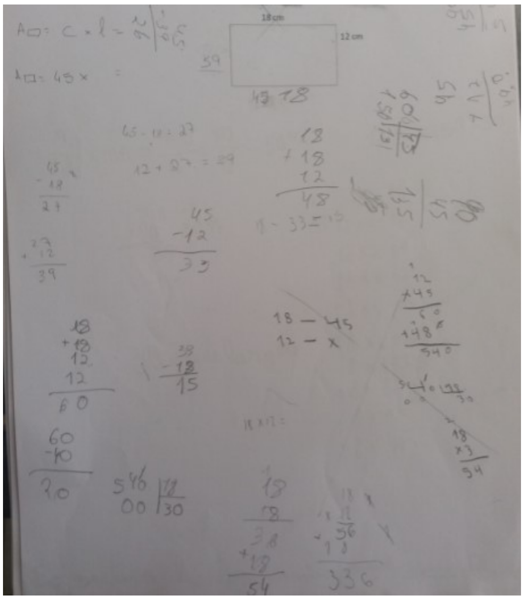



Figura 3.14. Registo do Grupo C para a Tarefa 6.

Verifica-se que o grupo testou diversas tentativas para resolver a tarefa, apresentando primeiramente, um raciocínio semelhante ao do grupo E através do cálculo da diferença entre o comprimento final e o comprimento inicial (45cm – 18cm = 27cm), utilizando o valor de 27cm para determinar a largura final acrescentando-o à largura inicial (12cm + 27cm = 39cm), obtendo a mesma dimensão para a largura que o grupo E. Em seguida, observou-se a tentativa de resolver a tarefa com recurso à estratégia *produto do algoritmo cruzado* não considerando, no entanto, como válida a resposta obtida através dessa estratégia.

Perante a Tarefa 5, verifica-se uma tentativa por parte dos alunos em manipularem os valores numéricos fornecidos pelo enunciado, fazendo-o, no entanto, de forma errada e confusa, apesar do conteúdo implicado na tarefa, como anteriormente referido, ter sido abordado previamente pela professora titular (figura 3.15).

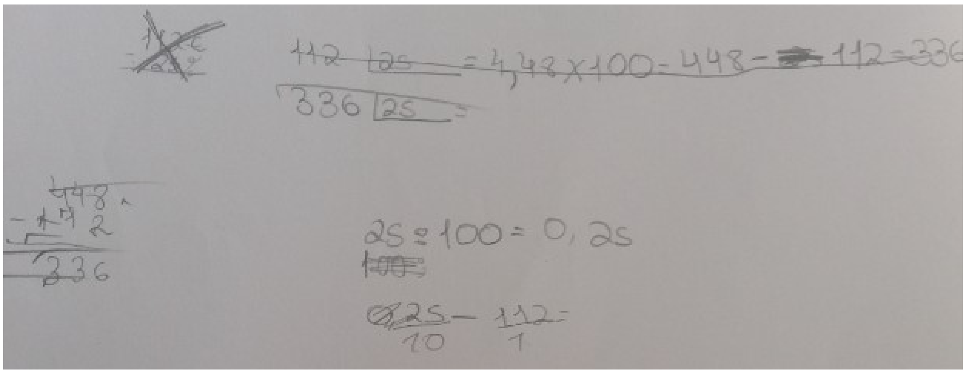



Figura 3.15. Registo do Grupo C para a Tarefa 5.

Considerando o desempenho deste grupo, face ao conjunto de tarefas propostas, constatou-se que foi o grupo que apresentou maiores dificuldades, não podendo esse facto ser justificado pelo fraco desempenho individual no domínio da matemática dos elementos que o compunham, visto que integrados neste grupo havia dois alunos de nível *Muito Bom*, um aluno de nível *Bom,* e um aluno de nível *Suficiente*. Assume-se que as dificuldades sentidas por este grupo de alunos, se deveu ao facto do seu pensamento estar condicionado para a utilização da estratégia *algoritmo do produto cruzado,* não lhes permitindo conceber estratégias alternativas adequadas que lhes permitissem a obtenção de uma resposta correta.

A prevalência da utilização desta estratégia relativamente a outros processos de raciocínio corrobora com os resultados obtidos por Cramer, Post e Currier (1993), em que a utilização da estratégia *algoritmo do produto cruzado*, pelo grupo de alunos que conheciam esta estratégia, dominou face às estratégias de *razão unitária*, *fator de mudança* e comparação de frações.

Ao dialogar com os elementos do grupo, a investigadora/professora propôs que este se aplicasse em tentar descortinar estratégias alternativas à estratégia do *algoritmo do* *produto cruzado* ao que um dos elementos respondeu imediatamente não conseguir. Estes resultados permitem inferir que a apresentação de um algoritmo mecânico e desprovido de significado como o *algoritmo do produto cruzado* condiciona fortemente as formas de raciocínio alternativo por parte dos alunos, comprometendo o seu desempenho.

Ao analisar o conjunto das seis tarefas propostas a todo o grupo de alunos, constatou-se que a tarefa em que sentiram maiores dificuldades foi a Tarefa 6 que envolvia a utilização do fator de mudança de um aumento de duas vezes e meia. Estes resultados concordam com as evidências referidas por Bell, Fischbein e Greer (1984, referidos por Silvestre, 2012), de que um dos fatores que influencia o desempenho dos alunos face a resolução de problemas relaciona-se diretamente com o tipo de números envolvido, manipulando mais facilmente números inteiros do que números não inteiros.

# Conclusões

Os resultados obtidos através da presente investigação permitem inferir que alunos a frequentar o 5.º ano de escolaridade, apresentam competências ao nível do raciocínio proporcional que lhes permite resolver de forma adequada problemas de comparação e de valor omisso, envolvendo proporcionalidade direta, sem que este domínio tenha sido abordado anteriormente em contexto escolar.

Analisando de forma global as resoluções apresentadas pelos alunos, assim como as suas explicações orais perante as seis tarefas que lhes foram propostas, no âmbito do presente estudo, pode-se observar que, para o grupo de alunos em questão, estão presentes, no seu leque de estratégias intuitivas, duas das estratégias predominantes, referidas ao longo da literatura abordada, nomeadamente *razão unitária* e *fator de mudança*. Para além destas, alguns alunos demonstraram ter a capacidade de resolver as mesmas tarefas matemáticas mobilizando outras formas de raciocínio, recorrendo a conhecimentos matemáticos previamente explorados, aplicando-os de forma adequada ao contexto dos problemas em questão. Atendendo a estes resultados, no âmbito do estudo em questão, pode-se afirmar que alunos do 5.º ano de escolaridade apresentam de forma consistente estratégias intuitivas de resolução matemática que lhes permitem resolver, de forma eficaz, tarefas simples que implicam a mobilização do conceito de proporcionalidade direta.

Considerando o ensino exploratório, adotado pela professora nas duas aulas de recolha de dados, constatou-se que este tipo de estratégia de ensino é uma mais valia para todos os alunos envolvidos, uma vez que todas as etapas pelas quais decorre o ensino exploratório permite uma partilha constante de informação entre os alunos e entre estes e o professor, o que permite que este último contacte com informação dificilmente acessível, implicada nos processos mentais de resoluções matemáticas dos alunos, o que lhe permite compreender as ideias e conceitos inerentes às estratégias e dificuldades dos alunos. Os momentos de trabalho autónomo dos alunos em grupo e de discussão coletiva contribuíram, assim como esperado e pretendido pela professora/investigadora, para a construção coletiva dos conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos, ajudando para o enriquecimento matemático coletivo através da partilha e análise da produção dos mesmos.

Tendo em atenção todos os aspetos referidos, considera-se que foram atingidos, através da investigação em questão, os objetivos a que a investigadora se propôs, obtendo dados claros que permitem afirmar que alunos do 5.º ano de escolaridade têm a capacidade de resolver intuitivamente tarefas matemáticas de proporcionalidade direta, e que as estratégias mais frequentemente por eles adotadas corroboram as utilizadas em estudos homólogos.

A análise das produções dos alunos revelou que, face às tarefas propostas, se obteve um total de vinte e cinco respostas corretas em trinta e duas respostas recolhidas, sendo as restantes respostas incorretas. Estes resultados estão em concordância com os resultados obtidos através de estudos realizados por Resnick e Singer (1993, referidos por Costa & Ponte, 2008), Spinillo (1993) e Costa (2007, referido por Silvestre, 2012), que também demonstraram que as crianças apresentam a capacidade de resolver problemas de proporcionalidade direta, não dependendo esta capacidade do ensino formal deste domínio matemático.

Ao confrontar os resultados obtidos, mediante a investigação em questão, com estudos homólogos, realizados por Costa e Ponte (2008), que afirmam que alunos a frequentar o 6.º ano de escolaridade apresentam muitas dificuldades em resolver problemas de proporcionalidade, considera-se que a descontinuidade dos resultados obtidos entre estes dois estudos poder-se-á dever à natureza das tarefas propostas, ou seja, o seu grau de complexidade. Vergnaud (1988, referido por Costa & Ponte, 2008) refere este mesmo aspeto em relação ao diferente tipo de tarefas que se podem propor aos alunos.

Esta evidência levanta uma primeira limitação da investigação em questão relacionada com a complexidade e variedade do tipo de problemas apresentados, que consistiam na sua grande maioria em problemas simples de valor omisso, o que poderá ter conduzido a um maior número de respostas corretas do que estudos semelhantes como os desenvolvidos por Costa e Ponte (2008) e Post, Behr e Lesh (1988). Neste sentido, os resultados obtidos na investigação em questão apenas podem ser considerados tendo em atenção a complexidade das tarefas de valor omisso utilizadas não sendo extrapolados para todos os tipos de problemas que envolvem proporcionalidade direta referidos ao longo da literatura.

Uma segunda limitação da investigação surge ao comparar os resultados obtidos com a afirmação de Post, Behr e Lesh (1988, referido por Ben-Chaim et al., 1998), ao referirem que são poucos os alunos que entre o 5.º e 8.º anos de escolaridade demonstram dominar o raciocínio proporcional. Considera-se que esta discordância de resultados relaciona-se com a natureza de aula de ensino exploratório, que a professora/investigadora adotou, nomeadamente ao nível do contributo individual de cada participante face às tarefas apresentadas, em que, o facto dos alunos terem trabalhado em grupo, não permitiu uma análise individual do desempenho de cada um, o que poderá ter uma influência direta nos resultados obtidos e nas observações realizadas, dado que é possível que muitos dos alunos, mesmo não tendo a capacidade de resolver as tarefas, tenham obtido uma resposta correta pelo facto de um dos elementos do grupo conseguir resolver as tarefas individualmente.

Atendendo a estas limitações, pode-se, no entanto, afirmar claramente que, em contexto de trabalho colaborativo, face a problemas simples de comparação e de omissão, alunos do 5.º ano de escolaridade têm a capacidade de solucionar de forma adequada e intuitiva tarefas que envolvem a proporcionalidade direta, apresentando de forma clara e coerente o seu raciocínio tanto ao nível do registo escrito como através da expressão verbal oral.

# Referências Bibliográficas


Artut, P. & Pelen, M., (2015). 6th Grade Students' Solution Strategies on Proportional Reasoning Problems. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 197, 113 – 119.

Bem-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C., Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics.* 36, 247-273.

Bívar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática – Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Bívar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. (2012). *Metas Curriculares de Matemática – Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Blum, W., Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics.* 22(1), 37-68.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. 1.ª ed. Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A., (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. *Educação e Matemática.* 115, 11-16.

Costa, S., Ponte, J. (2008). O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. *Revista da Educação.* (XVI)2, 65-100.

Cramer, K., Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*. (86)5, 404.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas For the Classroom* (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company.

Foshay, R. & Kirkley, J. (1998) *Principles for teaching problema solving.* Technical Paper 4, Plato Learning, Inc.

Gusmão, T., Cajaravill, J., Font, V., Godino, J. (2014). Case Study "Victor": metacognitive difficulties in problem solving. *Bolema.* 28(48), 255-275.

Johnson, J. (2010), *Proportionality in middle-school mathematics textbooks*, Doctor of Philosophy, Department of Secondary Education College of Education, University of South Florid – disponível online em https://search.proquest.com/openview/ee93827e2da08d25fcd39fda1e75e8d4/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y.

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on ‘rate’ problems. *Educational Studies in Mathematics.* 14, 219-233.

ME, (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Menduni-Bortoloti, R., Barbosa, J. (2017). A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Bolema*. 31(59), 947-967.

Nasution A., Lukito, A. (2015). Developing student’s proportional reasoning through informal way. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia.* (38)1, 77-101.

Nasution, A., Amin, S., Lukito, A., Abels, M., Dolk, M. (2014). Educational design research: supporting fifth-grade students to learn about proportion. *Magister of Mahematics Education Department.* 43-50.

NCTM (1989). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (Tradução portuguesa da APM). Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (Tradução portuguesa da APM). Lisboa: APM.

Pólya (1967) O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática,* 130, 45-50 (reprodução em 2014).

Ponte, J., Silvestre, G., Garcia, C., Costa, S. (2010). O desenvolvimento de conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades: tarefas para o 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, materiais de apoio ao professor. *Projeto IMLNA*. Lisboa: Instituto de Educação.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). Práticas profissionais dos professors de matemática. *Quadrante.* 13(2), 51-74.

Post, T. & Currier, K. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher.* 86:404–407.

Schoenfeld, A. (2013) Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast.* 10(1,2), 9-34.

Serrazina, L. (2002) Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. *Educação e Matemática.* 60, 57-60.

Silvestre, A. (2012) *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Silvestre, A., Ponte, J. (2009). Resolução de problemas de valor omisso: análise das estratégias dos alunos. *Actas do XIXEIEM*, 1-14.

Silvestre, A., Ponte, J. (2012) Missing value and comparison problems: what pupils know before the teaching of proportion. *PNA,* 6(3), 73-83.

Sousa, C. & Mendes, F. (2017). Aprender a resolver problemas no 2.º ano do ensino básico. *Bolema* 31(57), 243-265.

Spinillo, A. (1993). As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 2(9), 349-364.

Spinillo, A. (2002) O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia, Reflexão e Crítica.* 15(3), 475-487.

Spinillo, A., Soares, M., Moro, M., Lautert, S. (2016). Como professores e futuros professores interpretam erros de alunos ao resolverem problemas de estrutura multiplicativa? *Bolema.*30(56), 1188-1206.

Stanley, D., McGowan, D., Hull, S. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, 11(1), 9-11.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.

Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics.* 16, 181-204.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante.* Vol. XXIV (2), 39-60.

Valério, N. (2005) Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo. *Quadrante.* Vol. XIV (1), 37-65.