

**UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE ECONOMIA**

**ANÁLISE E MONITORIZAÇÃO DO CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS:
UMA ABORDAGEM CENTRADA NO MÉTODO DE KALMAN**

**Tese para a Obtenção do Grau de Doutor em Métodos Quantitativos
Aplicados à Economia e à Gestão na especialidade de Econometria**

RAUL FILIPE DA CONCEIÇÃO GUERREIRO

**FARO
2010**

RAUL FILIPE DA CONCEIÇÃO GUERREIRO

FACULDADE DE ECONOMIA

Orientadores:

Doutor Paulo Manuel Marques Rodrigues

Doutor Jorge Miguel Lopo Gonçalves Andraz

SETEMBRO 2010

**ANÁLISE E MONITORIZAÇÃO DO CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS: UMA
ABORDAGEM CENTRADA NO MÉTODO DE KALMAN**

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade do Algarve

Vogais: Doutor Adriano Lopes Gomes Pimpão

Doutor António Manuel Alinho Covas

Doutor Efigénio da Luz Rebelo

Doutor António Manuel Pedro Afonso

Doutor Paulo Manuel Marques Rodrigues

Doutor Rui José da Cunha Sousa Nunes

Doutor Jorge Miguel Lopo Gonçalves Andraz

Doutor António Manuel Portugal Duarte

À minha família e amigos.

*A verdadeira sabedoria está em
reconhecer a própria ignorância.*

Sócrates (470--399 a.C.)

Índice

Índice de Quadros	vii
Índice de Gráficos.....	x
Lista de Abreviaturas.....	xvi
Resumo	xviii
Abstract.....	xx
1 Introdução.....	22
1.1 Apresentação do tema.....	25
1.2 Objectivos do estudo	27
1.3 A realidade macroeconómica portuguesa do século XX.....	31
1.4 A análise quantitativa com filtros	32
1.5 A origem do filtro de Kalman	34
1.6 O filtro de Kalman na econometria.....	35
1.7 Definição e caracterização do ciclo económico	38
1.8 Indicadores cíclicos	42
1.9 Estrutura do trabalho.....	44
2 Modelação matemática, modelo estrutural e de representação em espaço de estados ..	46
2.1 Modelação matemática	47
2.2 Criação do modelo	48
2.3 Ciclo de modelação matemática.....	50
2.4 O modelo estrutural e estimação	51
2.4.1 Estimação com séries temporais económicas	53
2.4.2 Modelo estrutural na representação do ciclo económico.....	54
2.5 Teoria de controlo e conceito de estado	56

2.6	Modelo em espaço de estados	59
2.6.1	Representação em espaço de estados simplificada.....	62
2.6.2	Notação alternativa na representação em espaço de estados.....	63
2.7	Do modelo estrutural à representação em espaço de estados.....	65
2.8	Propriedades estatísticas e função de verosimilhança do modelo.....	67
2.8.1	Propriedades estatísticas do modelo.....	67
2.8.2	Função de verosimilhança.....	75
2.8.3	Distribuição do estado condicionada às observações contemporâneas	80
3	Métodos recursivos de extracção de sinal: o filtro de Kalman	84
3.1	Previsão e actualização (um período à frente)	85
3.2	Dependências funcionais do erro de previsão.....	95
3.3	Previsão do erro de estado	96
3.4	Alisamento das estimações actualizadas	99
3.4.1	Alisamento do estado	100
3.4.2	Estimativa alisada do erro de observação	105
3.4.3	Estimativa alisada do erro de medida.....	109
3.4.4	Alisamento da variância do estado	112
3.4.5	Estimativa alisada da variância do erro de observação	114
3.4.6	Estimativa alisada da variância do erro de medida	116
3.4.7	Covariância entre o estado e erros alisados	117
3.5	Estado estacionário do sistema	126
3.6	Observações perdidas.....	126
3.7	Previsão.....	130
4	Estudo do ciclo económico, a realidade portuguesa	134
4.1	Os dados.....	136
4.2	O filtro de Kalman no estudo do ciclo económico português.....	137
4.2.1	Inicialização do processo iterativo	138
4.2.2	Extracção das componentes de interesse através do filtro de Kalman	154

4.2.3	Filtro de Kalman e outros métodos para a extracção de sinal.....	159
4.2.4	Vantagens e desvantagens dos métodos em confronto.....	160
4.2.5	Correlação e sincronia entre os filtros	162
4.2.6	Variacção cíclica para os diferentes métodos de extracção de sinal.....	165
4.3	Metodologia para a datação do ciclo económico português.....	169
4.3.1	Elementos da construção de indicadores cíclicos.....	170
4.3.2	Seleccção das variáveis de referência.....	173
4.3.3	Indicadores coincidentes, adiantados e atrasados	179
4.3.4	Datação do ciclo económico português.....	191
4.4	Estudo comparativo da evoluçao cíclica de algumas economias	230
4.4.1	Inicializaçao do Filtro.....	231
4.4.2	Análise do PIB das várias economias relativamente à Portuguesa.....	232
4.4.3	Análise do PIB das várias economias relativamente à Zona Euro.....	237
4.4.4	Análise do PIB das várias economias relativamente à dos EUA.....	239
4.5	Estudo de previsao, o filtro de Kalman e os modelos ARIMA.....	242
4.5.1	Insuficiências dos modelos ARIMA	244
4.5.2	Previsao com filtro de Kalman e modelos ARIMA.....	246
4.5.3	Previsao um período à frente com filtro de Kalman e modelos ARIMA	250
5	Conclusao	253
5.1	Os resultados à luz dos objectivos do estudo	254
5.2	Limitações e apontamentos críticos desta investigao.....	258
5.3	Sugestões e propostas para o futuro da investigao	260
5.4	Considerações pessoais finais	263
Anexo A	265
Anexo B	266
Apêndice I	268
Apêndice II	271
Apêndice III	282

Apêndice IV	289
Apêndice V	295
Apêndice VI	298
Bibliografia	307

Índice de Quadros

QUADRO 2.1: DIMENSÃO DOS VECTORES E DAS MATRIZES DO MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS.....	67
QUADRO 2.2: PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DA REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	83
QUADRO 3.1: PRINCIPAIS EQUAÇÕES DE PREVISÃO (UM PERÍODO À FRENTE)	93
QUADRO 3.2: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PREVISÃO (UM PERÍODO À FRENTE) E DE ACTUALIZAÇÃO ...	94
QUADRO 3.3: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE CÁLCULO DO ERRO DE ESTADO.....	98
QUADRO 3.4: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE CÁLCULO DO ESTADO ALISADO.....	104
QUADRO 3.5: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE CÁLCULO DO ERRO OBSERVAÇÃO ALISADO	108
QUADRO 3.6: EQUAÇÃO DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE CÁLCULO DO ERRO DE MEDIDA ALISADO	111
QUADRO 3.7: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE CÁLCULO VARIÂNCIA DO ESTADO ALISADO	113
QUADRO 3.8: EQUAÇÕES ALTERNATIVAS PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA DO ESTADO ALISADO.....	114
QUADRO 3.9: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DA VARIÂNCIA DO ERRO OBSERVAÇÃO ALISADO.....	115
QUADRO 3.10: EQUAÇÕES PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DA VARIÂNCIA DO ERRO DE MEDIDA ALISADO	117
QUADRO 3.11: DIMENSÃO DOS VECTORES E MATRIZES DAS EQUAÇÕES DE ALISAMENTO.....	117
QUADRO 3.12: VALORES ESPERADOS CRUZADOS DO ESTADO E ERROS.....	118
QUADRO 3.13: VALORES ESPERADOS CRUZADOS ENTRE ERROS E ESTADO	122
QUADRO 3.14: COVARIÂNCIA CRUZADAS ENTRE ERROS E ESTADO	125
QUADRO 3.15: EQUAÇÕES DAS OBSERVAÇÕES PERDIDAS PREVISÃO (UM PERÍODO À FRENTE) E ACTUALIZAÇÃO	130
QUADRO 3.16: EQUAÇÕES DAS OBSERVAÇÕES PERDIDAS DO ESTADO ALISADO	130
QUADRO 3.17: EQUAÇÕES DAS OBSERVAÇÕES PERDIDAS DA VARIÂNCIA DO ESTADO ALISADO.....	130
QUADRO 3.18: EQUAÇÕES DO PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL DE PREVISÃO.....	132
QUADRO 4.1: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DO EMPREGO TOTAL (D=11)	150
QUADRO 4.2: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DO PIB (D=11)	150
QUADRO 4.3: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA (MV) (D=11)	154
QUADRO 4.4: CORRELAÇÃO ENTRE MODELOS DE EXTRACÇÃO DO CICLO.....	163
QUADRO 4.5: ESTATÍSTICAS DE SÍNTESE DAS VARIÁVEIS CÍCLICAS COM A VARIÁVEL DE REFERÊNCIA - TRIMESTRAL	181
QUADRO 4.6: CRONOLOGIA DAS RECESSÕES DO CICLO - BRY E BOSCHAN	204
QUADRO 4.7: CRONOLOGIA DAS EXPANSÕES DO CICLO - BRY E BOSCHAN.....	204
QUADRO 4.8: CRONOLOGIA DAS RECESSÕES DO INDICADOR ADIANTADA - BRY E BOSCHAN.....	204
QUADRO 4.9: CRONOLOGIA DAS EXPANSÕES DO INDICADOR ADIANTADA - BRY E BOSCHAN	204
QUADRO 4.10: VALORES MÉDIOS DA CRONOLOGIA DO CICLO - BRY E BOSCHAN	205

QUADRO 4.11: CRONOLOGIA DAS RECESSÕES DO CICLO - HARDING E PAGAN.....	205
QUADRO 4.12: CRONOLOGIA DAS EXPANSÕES DO CICLO - HARDING E PAGAN.....	206
QUADRO 4.13: CRONOLOGIA DAS RECESSÕES DO INDICADOR ADIANTADA - HARDING E PAGAN.....	206
QUADRO 4.14: CRONOLOGIA DAS EXPANSÕES DO INDICADOR ADIANTADA - HARDING E PAGAN.....	206
QUADRO 4.15: VALORES MÉDIOS DA CRONOLOGIA DO CICLO - HARDING E PAGAN.....	207
QUADRO 4.16: MEDIDAS MENSIS DOS PICOS (CAVAS) DE ANTECIPAÇÃO (MESES).....	207
QUADRO 4.17: PICOS (CAVAS) QUE NÃO ANTECIPAM.....	208
QUADRO 4.18: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – EMPREGO TOTAL – MENSAL - (D=11).....	211
QUADRO 4.19: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS – MENSAL - (D=11).....	212
QUADRO 4.20: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS – MENSAL - (D=11).....	212
QUADRO 4.21: DIMENSÃO DOS VECTORES E MATRIZES DO MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS - CICLO.....	217
QUADRO 4.22: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – CICLO DE DESVIO COINCIDENTE – MENSAL - (D=11).....	218
QUADRO 4.23: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – CICLO DE DESVIO ADIANTADO – MENSAL - (D=11).....	218
QUADRO 4.24: CRONOLOGIA DOS DECRÉSCIMOS DO CICLO.....	225
QUADRO 4.25: CRONOLOGIA DOS INCREMENTOS DO CICLO.....	225
QUADRO 4.26: CRONOLOGIA DOS DECRÉSCIMOS DO INDICADOR ADIANTADA.....	226
QUADRO 4.27: CRONOLOGIA DOS INCREMENTOS DO INDICADOR ADIANTADA.....	226
QUADRO 4.28: VALORES MÉDIOS DA CRONOLOGIA DO CICLO.....	227
QUADRO 4.29: MEDIDAS MENSIS DOS PICOS (CAVAS) DE ANTECIPAÇÃO (MESES).....	227
QUADRO 4.30: PICOS (CAVAS) QUE NÃO ANTECIPAM.....	228
QUADRO 4.31: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DE PORTUGAL (D=11).....	231
QUADRO 4.32: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – (D=11).....	231
QUADRO 4.33: ESTATÍSTICAS DO CICLO DO PIB DE VÁRIAS ZONAS DE REFERÊNCIA.....	232
QUADRO 4.34: ESTATÍSTICAS DO CICLO DO PIB DA ZONA EURO E DE VÁRIAS ZONAS DE REFERÊNCIA.....	237
QUADRO 4.35: ESTATÍSTICAS DO CICLO DO PIB DOS EUA E DE VÁRIAS ZONAS DE REFERÊNCIA.....	240
QUADRO 4.36: PREVISÃO DE UM PERÍODO À FRENTE - FK COM AR(1), AR(4), ARMA(1,1) E ARMA(2,2).....	250
QUADRO I 1: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DO CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) (D=11).....	268
QUADRO I 2: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DO CONSUMO PÚBLICO (D=11).....	268
QUADRO I 3: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DAS EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS (D=11).....	269
QUADRO I 4: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DA FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO (D=11).....	269
QUADRO I 5: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DAS IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS (D=11).....	270
QUADRO I 6: MÁXIMA VEROSIMILHANÇA DA TAXA DE DESEMPREGO (D=11).....	270
QUADRO III 1: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA PIB (D=11) - MENSAL.....	282
QUADRO III 2: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA IPI (D=11) - MENSAL.....	282
QUADRO III 3: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA IPI (D=11) - TRIMESTRAL.....	283
QUADRO V 1: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DA ALEMANHA (D=11).....	295

QUADRO V 2: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DA ÁREA DO EURO (D=11).....	295
QUADRO V 3: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DA ESPANHA (D=11).	296
QUADRO V 4: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DOS EUA (D=11).....	296
QUADRO V 5: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DO JAPÃO (D=11).	297
QUADRO V 6: VALORES DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA – PIB DO REINO UNIDO (D=11).	297

Índice de Gráficos

GRÁFICO 1.1: FASES DO CICLO ECONÓMICO DE DESVIOS TÍPICO	38
GRÁFICO 1.2: ZONAS DE ABRANDAMENTO DO CICLO CLÁSSICO E DO CICLO DE DESVIO	40
GRÁFICO 4.1: PIB TRIMESTRAL DO CICLO ALISADO PARA D=11 E D=21.....	151
GRÁFICO 4.2: PIB TRIMESTRAL DO CICLO ALISADO NORMALIZADO PARA D=11 E D=21	151
GRÁFICO 4.3: EMPREGO TOTAL TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	155
GRÁFICO 4.4: EMPREGO TOTAL TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	156
GRÁFICO 4.5: EMPREGO TOTAL TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	156
GRÁFICO 4.6: EMPREGO TOTAL TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	156
GRÁFICO 4.7: EMPREGO TOTAL TRIMESTRAL – ERRO ALISADO.....	157
GRÁFICO 4.8: PIB TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	157
GRÁFICO 4.9: PIB TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	157
GRÁFICO 4.10: PIB TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	158
GRÁFICO 4.11: PIB TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	158
GRÁFICO 4.12: PIB TRIMESTRAL – ERRO ALISADO.....	158
GRÁFICO 4.13: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DO CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES).....	165
GRÁFICO 4.14: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DO CONSUMO PÚBLICO	166
GRÁFICO 4.15: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DO EMPREGO TOTAL	166
GRÁFICO 4.16: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DAS EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS.....	166
GRÁFICO 4.17: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DA FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO.....	167
GRÁFICO 4.18: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DAS IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS.....	167
GRÁFICO 4.19: EVOLUÇÃO CÍCLICA NORMALIZADA DO PIB	167
GRÁFICO 4.20: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA TAXA DE DESEMPREGO	168
GRÁFICO 4.21: MODELO DO PIB MENSAL	175
GRÁFICO 4.22: TRIMESTRAIS: PIB, MODELO ALISADO PIB E PIB COM OS DADOS MENSAIS	176
GRÁFICO 4.23: IPI MENSAL	177
GRÁFICO 4.24: MODELO DO IPI TRIMESTRAL	177
GRÁFICO 4.25: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA NORMALIZADA - MENSAL – CICLO ALISADO.....	179
GRÁFICO 4.26: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA NORMALIZADA - TRIMESTRAL – CICLO ALISADO.....	179
GRÁFICO 4.27: CORRELOGRAMAS DO PIB DA FAC E FACP - TRIMESTRAL.....	184
GRÁFICO 4.28: CORRELOGRAMAS DO CONSUMO PÚBLICO DA FAC E FACP - TRIMESTRAL.....	184

GRÁFICO 4.29: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) - TRIMESTRAL.....	186
GRÁFICO 4.30: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E CONSUMO PÚBLICO - TRIMESTRAL	187
GRÁFICO 4.31: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E EMPREGO TOTAL - TRIMESTRAL	187
GRÁFICO 4.32: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - TRIMESTRAL.....	187
GRÁFICO 4.33: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO - TRIMESTRAL	188
GRÁFICO 4.34: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - TRIMESTRAL.....	188
GRÁFICO 4.35: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E IPI - TRIMESTRAL	188
GRÁFICO 4.36: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E PIB - TRIMESTRAL	189
GRÁFICO 4.37: VARIÁVEL DE REFERÊNCIA E TAXA DE DESEMPREGO - TRIMESTRAL	189
GRÁFICO 4.38: MODELO DO EMPREGO TOTAL MENSAL	192
GRÁFICO 4.39: MODELO DAS EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL.....	193
GRÁFICO 4.40: MODELO DAS IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL.....	193
GRÁFICO 4.41: INDICADOR COINCIDENTE MENSAL.....	194
GRÁFICO 4.42: INDICADOR ADIANTADO MENSAL	194
GRÁFICO 4.43: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS - BRY E BOSCHAN.....	195
GRÁFICO 4.44: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS - HARDING E PAGAN.....	196
GRÁFICO 4.45: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO INDICADOR ADIANTADO - BRY E BOSCHAN	196
GRÁFICO 4.46: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO INDICADOR ADIANTADO - HARDING E PAGAN.....	197
GRÁFICO 4.47: CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS – VALORES MÁXIMOS - BRY E BOSCHAN	197
GRÁFICO 4.48: CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS – VALORES MÁXIMOS - HARDING E PAGAN	198
GRÁFICO 4.49: INDICADOR ADIANTADO – VALORES MÁXIMOS - BRY E BOSCHAN.....	198
GRÁFICO 4.50: INDICADOR ADIANTADO – VALORES MÁXIMOS - HARDING E PAGAN.....	198
GRÁFICO 4.51: CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS – VALORES MÍNIMOS - BRY E BOSCHAN.....	199
GRÁFICO 4.52: CICLO ECONÓMICO PORTUGUÊS – VALORES MÍNIMOS - HARDING E PAGAN.....	199
GRÁFICO 4.53: INDICADOR ADIANTADO – VALORES MÍNIMOS - BRY E BOSCHAN	200
GRÁFICO 4.54: INDICADOR ADIANTADO – VALORES MÍNIMOS - HARDING E PAGAN	200
GRÁFICO 4.55: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - BRY E BOSCHAN	201
GRÁFICO 4.56: VALORES MÁXIMOS DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - BRY E BOSCHAN	201
GRÁFICO 4.57: VALORES MÍNIMOS DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - BRY E BOSCHAN	201
GRÁFICO 4.58: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - HARDING E PAGAN	202
GRÁFICO 4.59: VALORES MÁXIMOS DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - HARDING E PAGAN.....	202
GRÁFICO 4.60: VALORES MÍNIMOS DO CICLO E DO INDICADOR ADIANTADO - HARDING E PAGAN	202
GRÁFICO 4.61: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO DO CICLO - BRY E BOSCHAN VERSUS HARDING E PAGAN	203
GRÁFICO 4.62: PERÍODOS DE ABRANDAMENTO INDICADOR ADIANTADO - BRY E BOSCHAN VERSUS HARDING E PAGAN	203
GRÁFICO 4.63: TENDÊNCIA LINEAR DO ÚLTIMO PERÍODO DE EXPANSÃO - HARDING E PAGAN	209
GRÁFICO 4.64: TENDÊNCIA LINEAR DO PENÚLTIMO PERÍODO DE EXPANSÃO - HARDING E PAGAN.....	209

GRÁFICO 4.65: EMPREGO TOTAL NORMALIZADO - MENSAL – CICLO ALISADO.....	213
GRÁFICO 4.66: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS NORMALIZADO - MENSAL – CICLO ALISADO.....	213
GRÁFICO 4.67: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS NORMALIZADO - MENSAL – CICLO ALISADO.....	214
GRÁFICO 4.68: IPI NORMALIZADO - MENSAL – CICLO ALISADO	214
GRÁFICO 4.69: PIB NORMALIZADO - MENSAL – CICLO ALISADO	214
GRÁFICO 4.70: COMPONENTE CÍCLICA DE DESVIO - COINCIDENTE	219
GRÁFICO 4.71: COMPONENTE CÍCLICA DE DESVIO - ADIANTADA.....	219
GRÁFICO 4.72: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA COINCIDENTE E PREVISÃO PARA O MÊS SEGUINTE.....	220
GRÁFICO 4.73: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA ADIANTADA E PREVISÃO PARA O MÊS SEGUINTE	220
GRÁFICO 4.74: ZONAS DE DECRÉSCIMO DA COMPONENTE CÍCLICA - COINCIDENTE	221
GRÁFICO 4.75: ZONAS DE DECRÉSCIMO DA COMPONENTE CÍCLICA – ADIANTADA - BRY E BOSCHAN	221
GRÁFICO 4.76: ZONAS DE DECRÉSCIMO DA COMPONENTE CÍCLICA – ADIANTADA - HARDING E PAGAN.....	222
GRÁFICO 4.77: DECRÉSCIMO DO INDICADOR ADIANTADO – DETECTADAS EM HPA E NÃO DETECTADAS EM BB.....	222
GRÁFICO 4.78: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA COINCIDENTE - PICOS E CAVAS	223
GRÁFICO 4.79: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA ADIANTADO - PICOS E CAVAS	223
GRÁFICO 4.80: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA COINCIDENTE E ADIANTADO - PICOS E CAVAS	224
GRÁFICO 4.81: EVOLUÇÃO DA COMPONENTE CÍCLICA COINCIDENTE E ADIANTADO – ZONAS DE DECRÉSCIMO	224
GRÁFICO 4.82: COMPONENTE CÍCLICA COINCIDENTE – CICLO CLÁSSICO E CICLO DE DESVIO	229
GRÁFICO 4.83: INDICADOR CÍCLICO ADIANTADO – CICLO CLÁSSICO E CICLO DE DESVIO	229
GRÁFICO 4.84: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA ALEMANHA E PORTUGAL.....	234
GRÁFICO 4.85: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA ZONA EURO E PORTUGAL.....	234
GRÁFICO 4.86: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA ESPANHA E PORTUGAL.....	235
GRÁFICO 4.87: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA EUA E PORTUGAL	235
GRÁFICO 4.88: EVOLUÇÃO CÍCLICA DO JAPÃO E PORTUGAL	236
GRÁFICO 4.89: EVOLUÇÃO CÍCLICA DO REINO UNIDO E PORTUGAL	237
GRÁFICO 4.90: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA ZONA EURO E EUA.....	238
GRÁFICO 4.91: EVOLUÇÃO CÍCLICA DA ZONA EURO E JAPÃO.....	238
GRÁFICO 4.92: EVOLUÇÃO CÍCLICA DOS EUA E ALEMANHA.....	240
GRÁFICO 4.93: EVOLUÇÃO CÍCLICA DOS EUA E ESPANHA.....	240
GRÁFICO 4.94: EVOLUÇÃO CÍCLICA DOS EUA E JAPÃO.....	241
GRÁFICO 4.95: EVOLUÇÃO CÍCLICA DOS EUA E REINO UNIDO.....	241
GRÁFICO 4.96: EMPREGO TOTAL - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	247
GRÁFICO 4.97: EMPREGO TOTAL - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	247
GRÁFICO 4.98: REQM PARA O EMPREGO TOTAL - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	247
GRÁFICO 4.99: REQM PARA O EMPREGO TOTAL - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	248
GRÁFICO 4.100: PIB - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR.....	248

GRÁFICO 4.101: PIB - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	248
GRÁFICO 4.102: REQM PARA O PIB - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	249
GRÁFICO 4.103: REQM PARA O PIB - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA.....	249
GRÁFICO II 1: CONSUMO PRIVADO (RESIDENTES) TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	271
GRÁFICO II 2: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	271
GRÁFICO II 3: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	272
GRÁFICO II 4: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	272
GRÁFICO II 5: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) TRIMESTRAL – ERRO ALISADO	272
GRÁFICO II 6: CONSUMO PÚBLICO TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	273
GRÁFICO II 7: CONSUMO PÚBLICO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA	273
GRÁFICO II 8: CONSUMO PÚBLICO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	273
GRÁFICO II 9: CONSUMO PÚBLICO TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	274
GRÁFICO II 10: CONSUMO PÚBLICO TRIMESTRAL – ERRO ALISADO	274
GRÁFICO II 11: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	274
GRÁFICO II 12: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA	275
GRÁFICO II 13: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	275
GRÁFICO II 14: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	275
GRÁFICO II 15: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – ERRO ALISADO.....	276
GRÁFICO II 16: FORMAÇÃO BRUTA CAPITAL FIXO TRIMESTRAL E MODELO ALISADO.....	276
GRÁFICO II 17: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	276
GRÁFICO II 18: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	277
GRÁFICO II 19: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO TRIMESTRAL – CICLO ALISADO.....	277
GRÁFICO II 20: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO TRIMESTRAL – ERRO ALISADO	277
GRÁFICO II 21: IMPORTAÇÕES DE BENS SERVIÇOS TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	278
GRÁFICO II 22: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA	278
GRÁFICO II 23: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	278
GRÁFICO II 24: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	279
GRÁFICO II 25: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS TRIMESTRAL – ERRO ALISADO.....	279
GRÁFICO II 26: TAXA DE DESEMPREGO TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	279
GRÁFICO II 27: TAXA DE DESEMPREGO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA	280
GRÁFICO II 28: TAXA DE DESEMPREGO TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	280
GRÁFICO II 29: TAXA DE DESEMPREGO TRIMESTRAL – CICLO ALISADO.....	280
GRÁFICO II 30: TAXA DE DESEMPREGO TRIMESTRAL – ERRO ALISADO	281
GRÁFICO III 1: PIB MENSAL E MODELO ALISADO	283
GRÁFICO III 2: PIB MENSAL – TENDÊNCIA ALISADA	284
GRÁFICO III 3: PIB MENSAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	284

GRÁFICO III 4: PIB MENSAL – CICLO ALISADO	284
GRÁFICO III 5: PIB MENSAL – ERRO ALISADO.....	285
GRÁFICO III 6: IPI MENSAL E MODELO ALISADO	285
GRÁFICO III 7: IPI MENSAL – TENDÊNCIA ALISADA	285
GRÁFICO III 8: IPI MENSAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	286
GRÁFICO III 9: IPI MENSAL – CICLO ALISADO	286
GRÁFICO III 10: IPI MENSAL – ERRO ALISADO	286
GRÁFICO III 11: IPI TRIMESTRAL E MODELO ALISADO	287
GRÁFICO III 12: IPI TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALISADA	287
GRÁFICO III 13: IPI TRIMESTRAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	287
GRÁFICO III 14: IPI TRIMESTRAL – CICLO ALISADO	288
GRÁFICO III 15: IPI TRIMESTRAL – ERRO ALISADO	288
GRÁFICO IV 1: EMPREGO TOTAL MENSAL E MODELO ALISADO	289
GRÁFICO IV 2: EMPREGO TOTAL MENSAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	289
GRÁFICO IV 3: EMPREGO TOTAL MENSAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	290
GRÁFICO IV 4: EMPREGO TOTAL MENSAL – CICLO ALISADO	290
GRÁFICO IV 5: EMPREGO TOTAL MENSAL – ERRO ALISADO.....	290
GRÁFICO IV 6: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL E MODELO ALISADO	291
GRÁFICO IV 7: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	291
GRÁFICO IV 8: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA	291
GRÁFICO IV 9: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – CICLO ALISADO	292
GRÁFICO IV 10: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – ERRO ALISADO	292
GRÁFICO IV 11: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL E MODELO ALISADO.....	292
GRÁFICO IV 12: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – TENDÊNCIA ALISADA.....	293
GRÁFICO IV 13: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – TENDÊNCIA ALEATÓRIA ALISADA.....	293
GRÁFICO IV 14: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – CICLO ALISADO.....	293
GRÁFICO IV 15: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS MENSAL – ERRO ALISADO	294
GRÁFICO VI 1: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR.....	298
GRÁFICO VI 2: CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA.....	298
GRÁFICO VI 3: REQM - CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR.....	299
GRÁFICO VI 4: REQM - CONSUMO PRIVADO (DE RESIDENTES) - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA.....	299
GRÁFICO VI 5: CONSUMO PÚBLICO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	299
GRÁFICO VI 6: CONSUMO PÚBLICO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	300
GRÁFICO VI 7: REQM - CONSUMO PÚBLICO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	300
GRÁFICO VI 8: REQM - CONSUMO PÚBLICO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA.....	300
GRÁFICO VI 9: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR.....	301

GRÁFICO VI 10: EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	301
GRÁFICO VI 11: REQM - EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	301
GRÁFICO VI 12: REQM - EXPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	302
GRÁFICO VI 13: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	302
GRÁFICO VI 14: FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	302
GRÁFICO VI 15: REQM - FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	303
GRÁFICO VI 16: REQM - FORMAÇÃO BRUTA EM CAPITAL FIXO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	303
GRÁFICO VI 17: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	303
GRÁFICO VI 18: IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	304
GRÁFICO VI 19: REQM - IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	304
GRÁFICO VI 20: REQM - IMPORTAÇÕES DE BENS E SERVIÇOS - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	304
GRÁFICO VI 21: TAXA DE DESEMPREGO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	305
GRÁFICO VI 22: TAXA DE DESEMPREGO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	305
GRÁFICO VI 23: REQM - TAXA DE DESEMPREGO - PREVISÃO TRIMESTRAL - AR	305
GRÁFICO VI 24: REQM - TAXA DE DESEMPREGO - PREVISÃO TRIMESTRAL - ARMA	306

Lista de Abreviaturas

AR	Autoregressive Models
ARIMA	Autoregressive Integrated Moving Average
ARMA	Autoregressive Moving Average
BB	Método de datação Bry e Boschan
BCE	Banco Central Europeu
BdP	Banco de Portugal
BK	Filtro de Baxter-King
CPriv	Consumo Privado (de residentes)
CPub	Consumo Público
EBS	Exportações de Bens e Serviços
ET	Emprego Total
FBCF	Formação Bruta em Capital Fixo
FK	Filtro de Kalman
HP	Filtro de Hodrick-Prescott
HPa	Método de datação Harding e Pagan
IBS	Importações de Bens e Serviços
INE	Instituto Nacional de Estatística
IPI	Índice de Produção Industrial
MV	Valores de máxima verosimilhança
NA	Não Antecipa
NBER	National Bureau of Economic Research
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico ou Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos
PIB	Produto Interno Bruto
RN	Variável de Referência Normalizada
SAD	Sistemas de Apoio à Decisão

SARIMA	Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average
SI	Sistemas de Informação
TCB	The Conference Board
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TxD	Taxa de Desemprego
UE	União Europeia
VAR	Vector Autoregressive Models
VNV	Valor Não Viável

Resumo

Com este estudo pretende-se equacionar a temática “ciclo económico português”. Para tanto, recorreremos à modelação matemática, na qual foi adoptado um modelo estrutural e o seu correspondente modelo em espaço de estados, bem como o filtro de Kalman. Esta análise é baseada num conjunto de séries temporais representativas da economia portuguesa.

A utilização de modelos estruturais de séries temporais enquadra-se na temática mais geral da representação de modelos em espaço de estados. Esta representação é importante para o estudo de séries temporais porque nos permite explorar as qualidades do filtro de Kalman. Por outro lado, sob um ponto de vista prático, os modelos em espaço de estados possuem um enorme potencial para representar um amplo conjunto de séries temporais, particularmente em magnitudes que podem ou expressar-se como uma soma de processos estocásticos, ou que são observadas com erros de medida.

Com a aplicação dos modelos estrutural e em espaço de estados, foi possível dar ênfase ao potencial da regressão recursiva. Assim, vários passos foram dados: a inicialização dos parâmetros dos modelos; o isolamento das componentes de interesse das variáveis; a comparação de diferentes filtros; a análise da componente cíclica de um conjunto de séries do PIB de vários países e um estudo de previsão usando as variáveis representativas da economia portuguesa. Visando contribuir para a melhoria da investigação científica, propomos duas metodologias que cremos inovadoras, para a datação do ciclo económico português: uma para o “ciclo económico clássico” e a outra para o “ciclo económico de desvio”. Simultaneamente, desenvolvemos o software de aplicação, com o qual se simularam os vários cenários e se quantificaram os parâmetros-chave desta pesquisa.

Verifica-se que em estudos de análises de conjuntura, envolvendo o conhecimento do fenómeno “ciclo económico” e a sua medição estatística, é necessário examinar detalhadamente e com ferramentas adequadas, as circunstâncias específicas das variáveis, de forma a melhor se compreenderem as diferenças existentes entre o ciclo económico e a evolução cíclica média. Neste sentido, pode-se confirmar existirem características específicas do ciclo que divergem das suas características médias.

Os resultados obtidos ao longo da investigação mostram a utilidade do filtro de Kalman em gerar soluções racionais e realçam a sua grande flexibilidade para operar em diferentes ambientes. O método de Kalman, apresentado em 1960, é um instrumento particularmente útil, na produção de séries filtradas, actualizadas e alisadas, como processo de extensão de séries com observações perdidas ou desconhecidas. É também um mecanismo auxiliar de descrição, previsão, prescrição, modelação projectiva e controlo.

Considerando a necessidade de tomar medidas efectivas para mitigar o efeito dos resultados negativos do ciclo económico, pensamos que este estudo pode contribuir para aperfeiçoar os níveis de qualidade da investigação económica e, por conseguinte, melhorar os resultados globais da economia.

Palavras-chave

Ciclo Económico Português, Regressão Recursiva, Filtro de Kalman, Valores Iniciais, Metodologia de Datação, Software Aplicacional.

Abstract

This Thesis focuses on the "Portuguese business cycle". In this research, a structural model and its corresponding state space representation were used, together with a Kalman filter. The analysis is based on a set of time series representative of the Portuguese economy.

The use of structural models in time series falls under the broader theme of the representation of state space models. This representation is important for the study of time series because it allows us to explore the qualities of the Kalman filter. From a practical standpoint, state space models carry a huge potential in modelling of a wide range of time series, particularly when magnitudes are expressed either as the sum of stochastic processes or are observed with measurement errors.

The use of structural and state space models, emphasize the potential of recursive regression. Specifically, this analysis focused on: the assessment of initial values of the model parameters; the isolation of the different components of the variables; the comparison of different filters; the analysis of the cyclical component of GDP for several countries and a forecast study using variables of the Portuguese economy.

To contribute to the improvement of scientific research, we propose two methodologies that we believe to be innovative for dating the Portuguese business cycle: one for the "classic business cycle" and the other for the "deviation from trend business cycle". Concomitantly, we developed a software application, which we used to simulate a variety of scenarios and to quantify the key parameters of this research.

It appears that in studies of cyclical analysis involving the "business cycle" phenomenon and its statistical measurement, it is necessary to examine thoroughly and with the adequate tools, the specific circumstances of the variables in order to

better understand the differences between business cycle and cyclical average. In this sense, we confirm there are specific features of the cycle that differ from their average characteristics.

The results obtained in this Thesis show the usefulness of the Kalman filter to generate rational solutions and enhance its great flexibility to operate in different environments. Kalman's method introduced in 1960 is particularly useful to produce filtered, updated and smoothed series, as well as an interesting process of extension of series with missing or unknown observations. It is also an auxiliary mechanism for description, prediction, prescription, projective modelling and control.

Considering the need to take effective measures in order to mitigate the resulting negative effects of the economic cycle, we believe that this study may contribute to improve economic research and consequently improve the overall performance of the economy.

Keywords

Portuguese Business Cycle, Recursive Regression, Kalman Filter, Initial Values, Dating Methodology, Application Software.

1 Introdução

Quem estuda a teoria económica constata certamente que as economias se comportam com variações cíclicas, através de fases de crescimento acelerado às quais sucedem desacelerações e, por vezes, mesmo recuos no nível do produto agregado (Amaral, Louçã, Caetano, Santos, Ferreira e Fontáinha, 2002). Estas variações cíclicas estão associadas à combinação de choques na economia com políticas que visam reagir aos seus efeitos, tentando por um lado aproveitar oportunidades e, por outro, prevenir causas com efeitos negativos na economia e consequentemente na vida dos cidadãos.

Na evolução da actividade económica existem pois, além dos movimentos tendenciais a longo prazo, flutuações de carácter mais ou menos intenso que afectam as principais grandezas económicas. A estas flutuações, chamamos, genericamente ciclos. A sua relevância em termos dos efeitos que produzem na sociedade, na vida do dia-a-dia dos cidadãos e na condução de políticas económicas, é de tal forma elevada que se tornou um elemento indissociável dos estudos de análise de conjuntura e previsão.

O conceito de ciclo surge com relevo na literatura económica na segunda metade do século XIX, como resultado de considerações em torno do fenómeno das crises que assolaram repetidamente a economia inglesa desde a revolução industrial. A característica mais importante do conceito de ciclo, em oposição à noção de crise, até então dominante, era a hipótese de que as economias capitalistas se moviam de acordo com um padrão estruturado, o qual gerava movimentos regulares do produto agregado, observáveis empiricamente. Pelo contrário, a noção de crise baseava-se principalmente na hipótese de ruptura, de quebra de padrões.

Nos finais do século XIX e na primeira metade do século XX, a pesquisa sobre ciclos económicos seguiu dois rumos paralelos que pouco dialogaram entre si. Por um

lado, muitos investigadores estudaram teorias sobre as causas do ciclo e, por outro, o estudo centrou-se no exame exaustivo do ciclo como fenómeno empírico, tentando-se identificar, entre outros, os processos económicos que fossem sensíveis ao padrão de flutuação agregado, sua duração, profundidade e inter-relação com outros processos.

Na investigação mais recente do ciclo económico abandonou-se a percepção de duração constante a favor da ênfase na repetição de movimentos como sua característica dominante. A noção de ciclo está assim associada normalmente à ideia de repetição de determinados fenómenos, segundo uma ordem determinada, com carácter recorrente mas não periódico, sem regularidade, amplitude, ou duração. Alguns ciclos são mais curtos e outros mais longos, alguns são mais profundos, com baixas bruscas na actividade económica, e outros mais suaves.

As concepções de ciclo económico estabelecidas na literatura teórica e/ou empírica da actualidade, podem ser agrupadas em duas famílias. Por um lado, o ciclo é concebido como a forma necessária e permanente de operação de uma economia de mercado. Aqui o ciclo é concebido como intrínseco à economia capitalista e a sua ocorrência não depende de choques ou perturbações e não pode ser evitada através do aperfeiçoamento dos mercados ou pela intervenção da política económica, ainda que esta última possa, eventualmente, amenizar os seus efeitos. Nesta visão, uma economia está sempre em alguma fase do ciclo, a qual será fatalmente superada pela fase seguinte, num movimento perpétuo em que as expansões geram contracções, e estas últimas geram novas expansões.

A outra concepção de ciclo sugere que as flutuações da economia resultam dos processos de ajuste dessa economia a choques. Na ausência de choques, a economia poderia estabilizar-se numa determinada posição, ou flutuar de acordo com influências erráticas e imprevisíveis, como por exemplo as resultantes de factores meteorológicos ou crises políticas. Certos choques, contudo, são tão fortes que põem em movimento um processo de propagação e ajuste que atinge toda a economia. Além disso, esses choques podem despoletar mecanismos amplificadores do seu impacto que, ao serem revertidos ou exauridos mais tarde, explicariam o aspecto ondular do processo de ajuste (Carvalho e Hermann, 2003).

Tendo como principal referência a definição de Burns e Mitchell (1946), podemos dizer que os ciclos económicos são um tipo de flutuações que se encontram na actividade económica agregada das nações que organizam o seu trabalho principalmente em empresas mercantis. Um ciclo consiste em períodos de decrescimento que ocorrem mais ou menos em simultâneo em muitas actividades económicas, seguidos de forma similar por períodos de crescimento, também de carácter generalizado, que se unem com a fase decrescente do ciclo seguinte. Esta sequência de mudanças é recorrente mas não periódica, onde a sua duração temporal, tendo por base registos históricos, varia desde mais de um ano até dez ou doze anos (Burns e Mitchell, 1946).

A ideia básica aqui associada é a de que os ciclos derivam de movimentos comuns, identificados genericamente por períodos de desaceleração e aceleração, concentrados em zonas de recessão e recuperação em certos períodos do tempo. Portanto, o ciclo é uma espécie de movimento implícito, de factor latente na coordenação de uma ampla gama de variáveis e assim, pela mesma razão empírica, o ciclo não pode ser identificado numa única medida, mesmo que esta contenha características de agregação de várias realidades económicas (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000).

Para efectuar a modelação deste fenómeno algo complexo, é normalmente utilizado um grupo de indicadores económicos e socioeconómicos, relacionando simultaneamente o comportamento oscilatório do ciclo com numerosos âmbitos da actividade económica. Existe portanto um conjunto de características e propriedades que descrevem o ciclo, cuja compreensão é fundamental quando se pretende estudar com algum detalhe esta importante realidade económica.

Constata-se igualmente, nos últimos anos, o ressurgimento do interesse pela investigação empírica do ciclo económico entre os analistas da situação macroeconómica, especialmente aqueles que estão envolvidos na formulação de políticas económicas.

É pois importante encontrar mecanismos de detecção precoce e, se possível, uma previsão fiável das várias fases cíclicas da actividade económica. Este facto está

certamente associado à actualidade do tema, assente num complexo processo de globalização e de aprofundamento da integração económica, social, cultural e política entre as diferentes regiões e os vários países.

Por outro lado, a nível da União Europeia (UE), onde Portugal está inserido, a urgência de encontrar medidas de confiança para as flutuações cíclicas foi reforçada pela adopção da moeda única e pela centralização correspondente da política monetária, o que torna as divergências cíclicas entre os países membros da UE mais relevantes para a área como um todo.

1.1 Apresentação do tema

Dada a importância que este assunto vem assumindo desde que começou a ser equacionado até à actualidade, a investigação dos ciclos económicos tem centralizado uma parte substancial da pesquisa macroeconómica e, como seria de antever, tem sido objecto de diferentes perspectivas, sustentadas pelos diferentes estudiosos do tema.

Foi por volta do ano de 1662 que o cientista William Petty, efectuando estudos sobre rendimentos agrícolas, se deu conta da existência de variações cíclicas entre períodos de fome e períodos de abundância, transformando-se assim no pioneiro dos economistas modernos a estudar a evolução cíclica da economia. Um século mais tarde, por volta de 1776, Adam Smith associou o fenómeno ao processo de circulação de mercadorias, analisando as crises como resultado do excesso de especulação e dos erros dos empresários.

No final do século XVIII, David Ricardo deduziu as condições para a estabilidade da distribuição de longo prazo, admitido no entanto a possibilidade de crises em função do conflito gerado entre classes sociais nos processos de redistribuição do produto (Amaral, Louçã, Caetano, Santos, Ferreira e Fontáinha, 2002).

O francês Jean Baptiste Say, no início do século XIX, defendia que a economia tendia necessariamente para o equilíbrio e que portanto não haveria lugar a crises económicas. Afirmava que estas variações se limitavam a ocorrências menores,

irrelevantes no plano do equilíbrio geral da economia.

Por volta de 1860, outro francês, médico entusiasta de uma estatística muito débil à época, Clemente Juglar, afirmou em tese, estudando os dados do comércio internacional, que os ciclos eram períodos de "doença", leia-se crise, em que a sociedade caía, vítima de prosperidade anterior.

Já no século XX, John Keynes com o "estado de ânimo dos investidores", incorporou os factores subjectivos, mais difíceis de formalizar, no debate dos ciclos económicos, explicando-os como resultados de variações de expectativas e das flutuações das decisões de investimento. Um contemporâneo de Keynes, Joseph Shumpeter, apresentou uma teoria que despoletou enorme impacto no meio científico estudioso da temática. Considerou o processo cíclico como associado à substituição de tecnologia e produtos, ou seja, pelo aparecimento de novas indústrias e pelo fim de outras em decadência.

Para Shumpeter, o capitalismo é caracterizado por um processo económico associado à inovação tecnológica e organizacional. O inventor que aplica economicamente a sua descoberta beneficia provisoriamente e pode obter uma boa vantagem económica. Mais tarde, ao ser imitado por outros competidores, a sua vantagem desvanece-se provocando, deste modo, ciclos económicos ao longo do tempo. Trata-se do chamado "processo de criação destrutiva", com que explicaria a oscilação cíclica da economia.

Desde a época de Keynes e Shumpeter à actualidade, tanto no que se refere às noções de "expectativas" e de "choques", como aos mecanismos que propagam estes choques, às reacções políticas que daí advêm, muitos outros autores têm estudado a fundo esta questão, elevando-a a um patamar de inquestionável destaque na literatura da ciência económica.

Nesta controvérsia, decorrente das causas e dos efeitos da evolução cíclica nos sistemas económicos dos países, uma das questões que tem sido alvo de activa contenda entre os economistas actuais é a pertinência da interposição do Estado nas problemáticas que envolvem os ciclos económicos, sendo naturalmente estas

indissociáveis da criação de uma sociedade mais justa e equitativa.

Neste sentido, interrogarmos as diferentes perspectivas e analisarmos a sua evolução histórica, parece-nos ser um bom motivo para reflexão atenta e compreensão global das desiguais implicações económicas e sociais que este fenómeno pode produzir no comportamento das sociedades.

Da relação existente entre as imensas necessidades a satisfazer e os recursos que, embora escassos, se prestam a usos alternativos, surgem muitas vezes profundos conflitos sociais. Isto significará que hoje, tal como ontem, os recursos disponíveis continuam a ser insuficientes para satisfazer todas as necessidades e desejos e que o assunto em debate mantém toda a pertinência e actualidade.

Contribuirmos, embora que modestamente, para a possibilidade, mesmo que indirecta, de ajudar a uma afectação mais justa dos recursos entre as várias pessoas e grupos da sociedade e paralelamente conhecer melhor como funcionam os sistemas económicos, a fim de maximizar a satisfação das necessidades do indivíduo e da sociedade, é algo que nos preocupa e que nos motiva a investigar.

1.2 Objectivos do estudo

Quando o investigador, em economia aplicada, opta por estudar uma qualquer realidade económica, começa normalmente por analisar a sua evolução histórica, para depois efectuar projecções para o futuro. Com estas, elabora diagnósticos, perspectiva actuações e suas implicações no tema em análise. Estudos com estas características são genericamente apelidados de “estudos de análise de conjuntura”.

Assim, qualquer análise de conjuntura que vise interpretar fielmente uma realidade socioeconómica deve procurar enquadrar bem essa realidade, não esquecendo nenhum dos aspectos relevantes que a representa. Deve igualmente centrar-se no percurso que a aproxima dos objectivos traçados e que, em última análise, motivaram o edificar da investigação.

Dada a complexidade e as especificidades que muitas vezes encontramos nos temas que se pretende investigar, torna-se difícil, senão impossível, conhecer

profundamente todos os detalhes que os envolvem. Este problema, embora pertinente, não deverá ser desmobilizador da vontade de melhor compreender. Consideramos por isso fundamental em cada investigação concentrarmo-nos nos contributos, ainda que ínfimos, quando comparados com o todo da ciência, que esta pode proporcionar para a melhoria do saber humano, mesmo quando a investigação é muito centrada num determinado objecto. Contudo, procura-se através deste conhecimento tentar abrir portas a outras ideias e a outras investigações e o alcançar de outros novos saberes.

O conhecimento científico resulta normalmente de sucessivas aproximações e correcções com vista ao aperfeiçoamento dos modelos científicos que interpretam a nossa existência. Neste sentido, os objectivos de pesquisa aqui apresentados, são entendidos como uma tentativa de equacionar a temática em estudo, através da procura de um modelo para a análise e caracterização de comportamentos económicos da sociedade.

É evidente que um estudo desta natureza está sempre dependente das suas finalidades. No entanto não devemos encarar a formulação dos objectivos como um mecanismo limitativo da investigação, mesmo nas situações em que partimos da formulação de hipóteses e pretendemos confirmar ou não as hipóteses em tese. Assim, de acordo com o contexto teórico, esta investigação desenvolver-se-á a partir do seguinte objectivo de pesquisa:

Caracterizar, comparar e analisar as componentes do ciclo económico português, utilizando como instrumento base o filtro de Kalman, tendo em vista o desenvolvimento de diversos contributos teórico-práticos que permitam a extensão de metodologias econométricas de estudo recente, no aumento da qualidade da compreensão, caracterização, datação e previsão do referido ciclo económico.

Este objectivo subdivide-se nas seguintes etapas de pesquisa:

- a) *Identificar as principais características do ciclo económico português.*

- b) *Expor uma proposta para a inicialização do filtro de Kalman (Kalman, 1960 e Kalman e Bucy, 1961).*
- c) *Comparar os resultados do filtro de Kalman com o filtro de Hodrick-Prescott (Hodrick e Prescott, 1997) e o filtro de Baxter-King (Baxter e King, 1999) na análise da evolução cíclica portuguesa.*
- d) *Propor uma metodologia para a definição de uma datação de referência para o ciclo económico português.*
- e) *Analisar em conjunto a evolução cíclica de várias economias de referência.*
- f) *Comparar os resultados obtidos no processo de previsão, pelo filtro de Kalman e pelos modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average).*
- g) *Desenvolver uma aplicação informática para os estudiosos do ciclo económico e do filtro de Kalman que é simultaneamente a base de todas as simulações efectuadas com os dados e respectivos modelos, ao longo desta investigação.*

Na tentativa de alcançarmos o objectivo central deste estudo, concentramo-nos em três pilares básicos do percurso investigativo. O primeiro pilar, sobre o qual assenta a investigação, é o da informação adequada aos propósitos do estudo, considerado este requisito fundamental para a realização de uma qualquer investigação que se pretenda fiável. Apesar da enorme relevância do tema, dada a especificidade desta investigação, optamos por não nos debruçar sobre as particularidades associadas à aquisição de informação adequada.

O segundo pilar, sobre o qual se sustentam os estudos de análise de conjuntura, é a teoria económica. Com este, pretende-se basicamente organizar e analisar um conjunto de dados, de acordo com algum esquema conceptual, fundamentando-o com bases teóricas sólidas e credíveis. É sobre estas estruturas que se estabelece a forma como as realidades são geradas e compreendidas.

O terceiro e último pilar, é o de análise e tratamento da informação que em estudos de economia aplicada e tendo em conta todo o processo que nos propomos seguir, nos remete para uma abordagem metodológica quantitativa de estudo das variáveis. Este derradeiro ponto centra-se em duas áreas globais, os métodos econométricos e os procedimentos de extracção de sinais.

Ambicionamos aqui integrar a teoria e os métodos de extracção de sinais que, neste caso mais específico, serão aplicados ao estudo do ciclo económico. Este procedimento, denominado por “filtragem”, permite-nos isolar, a partir das correspondentes séries temporais, as diferentes variáveis de interesse à investigação. Como já foi mencionado, esta temática é complexa e terá de ser forçosamente investigada e aprofundada nesta tese.

Por outro lado, pretendemos também experimentar alguns modelos matemáticos que parecem ser mais vulgarmente utilizados nas engenharias. Nomeadamente, estudar a modelação de sucessões cronológicas e a utilização da teoria do controlo, mais concretamente, os modelos de representação em espaço de estados e o filtro de Kalman. Pretende-se ainda verificar a sua adequação e eventualmente "utilidade acrescida" para a ciência económica, na sua vertente mais restrita da modelação dos ciclos económicos.

Utilizando estas metodologias e tendo presente o objectivo da investigação tentaremos então identificar características, comparar e analisar resultados, modelando os comportamentos das grandezas macroeconómicas, comparando vários modelos e examinando com detalhe todas as variáveis que se mostrem adequadas ao enquadramento deste texto.

Após a introdução do tema e do enquadramento da realidade estudada, são apresentadas as conclusões resultantes do processo metodológico aqui avaliado e da sua posterior aplicação aos dados em termos de diagnóstico e de medidas para eventuais cenários, com o fim último de contribuir para um melhor conhecimento do ciclo económico português.

Informação estatística fiável, esquemas teóricos adequados e procedimentos de modelação correctos são os alicerces que pretendemos dar a esta investigação. Partimos neste estudo do princípio que se analisa informação estatística concreta, que tal informação resume uma realidade económica específica e que a sua interpretação é realizada tendo como suporte modelos matemáticos válidos.

1.3 A realidade macroeconómica portuguesa do século XX

A análise da evolução macroeconómica de Portugal no século XX, segundo Mateus (1998), permite destacar a existência de quatro períodos temporais, os quais não estão naturalmente dissociados da evolução da economia mundial no mesmo período (Maddison, 1995).

O primeiro período, de 1910 a 1926, sob a influência da 1ª Guerra Mundial de 1914 a 1918, é caracterizado pela instabilidade política e social vivida no país, pelos constantes desequilíbrios macroeconómicos e pela inflação elevada.

O segundo período, de 1926 a 1950, acolhe no seu seio a 2ª Guerra Mundial e a neutralidade do país perante as forças beligerantes. É caracterizado por uma certa estabilidade da economia e pelo início da época do chamado "crescimento moderno".

O terceiro período, de 1950 a 1973, constituiu uma fase de crescimento português que culmina com a forte ruptura provocada pela revolução do 25 de Abril de 1974 e as resultantes perturbações económicas e sociais, que originaram desequilíbrios macroeconómicos e inflação.

O quarto e último período, de 1973 até à actualidade é qualificado por um certo abrandamento do crescimento anterior e pelos dois choques petrolíferos da década de 70. O século XX culmina numa fase de estabilização política e social com a adesão de Portugal à Comunidade Económica Europeia, em 1986, a adopção da moeda única europeia e com o Banco Central Europeu (BCE) a ser responsável pela política monetária. Prossegue, no início do século XXI, com a tentativa de afirmação de Portugal na Europa e no Mundo, assim como o desejo de melhorar e alcançar objectivos de convergência real.

Segundo Mateus (2001) a realização mais favorável para a economia portuguesa, nas duas primeiras décadas do século XXI, seria marcada por um ritmo de convergência para os níveis de rendimento da União Europeia ou numa perspectiva mais pessimista, que parece ser aquela em que vivemos, a de uma moderação e até alguma estagnação dessa mesma convergência.

Este abrandamento está muito ligado a factores económicos externos de recessão que influenciam a nossa economia, extremamente aberta, muito vulnerável e dependente do exterior, mas também encontra-se relacionado com desequilíbrios financeiros dos agentes económicos portugueses, com a eventual falta de um adequado reforço do capital humano do país e do desenvolvimento da capacidade de inovação e criatividade, sobretudo no domínio tecnológico e institucional.

Portugal encontra-se recentemente com uma das taxas mais elevadas de desemprego da UE, muito próxima dos 11%, segundo dados do INE (Instituto Nacional de Estatística) e ainda, segundo dados publicados pelo BCE e pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico ou Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos), com um crescimento médio geral inferior a 1%, entre 2002 e 2009. Neste contexto, dadas as dificuldades presentes, encontrar caminhos para construir uma sociedade mais justa, igualitária e próspera para todos, será talvez a principal tarefa que deverá concentrar os esforços do país e dos agentes económicos.

1.4 A análise quantitativa com filtros

Para se analisar quantitativamente um comportamento como o que pretendemos investigar, com diferentes níveis de crescimento extra-anuais, tendo como base informativa sucessões cronológicas, ou seja, conjuntos de observações, associadas a determinado fenómeno aleatório, é necessário distinguir nas séries observadas as suas principais componentes: tendência temporal e ciclo. Para esse fim, são utilizados filtros (Bonfim e Neves, 2002).

Filtro é pois, um operador que, aplicado sobre uma sequência de observações Y_t , no modelo tipo $y_t = h(\alpha_t, t) + \varepsilon_t$, produz a estimação de α_t (Crato, 1990)¹. Genericamente, podemos dizer que neste tipo de estudos, encontramos uma de duas abordagens, como propostas iniciais de modelação, podendo-se considerar, que ambas são complementares e não se excluem. Por um lado, a que utiliza uma única magnitude como resumo da actividade económica e, por outro, a que considera o comportamento conjunto e simultâneo de vários indicadores.

¹ Crato (1990) distingue sequência de observações (representada por Y_t) de sequência registada de observações (não aleatória) (representada por y_t).

As técnicas de extracção de sinal, utilizando filtros, são numerosas e variadas, tanto nos seus fundamentos, como no grau de complexidade, e constituem hoje uma área activa de investigação em estudos desta natureza. Para tentar conhecer melhor o ciclo económico português, este estudo concentrou-se nas potencialidades que os métodos recursivos de extracção de sinal podem potenciar a esse conhecimento. O termo recursivo, significa que se recalcula a solução cada vez que uma nova observação ou medida é incorporada no modelo e não nos baseamos somente em amostras de dimensão fixa.

A representação deste fenómeno será baseada em dados recolhidos junto de entidades reconhecidamente credíveis, como sejam as séries fornecidas pelo Banco de Portugal (BdP), INE e OCDE. É com base nelas, que vamos estabelecer todo o processo investigativo de modelação e simulação posterior.

Apesar de termos verificado, ao longo desta investigação, pela literatura consultada, ser muitas vezes difícil encontrar padrões claros para julgar a qualidade dos trabalhos empíricos, pensamos poder afirmar com elevada convicção que muita da investigação e do discurso económico mais sólido assenta nas representações baseadas em dados. Tendo este marcante facto presente, tentamos utilizar uma abordagem metodológica que venha a produzir resultados fiáveis, dentro do enquadramento e da problemática que o estudo se propõe abordar e desenvolver.

Deste modo, parece-nos ser útil e cativante o estudo dos ciclos económicos, como processo facilitador da clarificação de conceitos e da aprendizagem mais profunda deste complexo fenómeno. Este assunto, é tanto ou mais relevante quando se sabe que as decisões de consumo, poupança, de produção e de investimento do sector privado e as decisões de política dos governos beneficiam da possibilidade de se fazer uma previsão correcta do desenvolvimento futuro das variáveis económicas.

É com uma perspectiva actual e global que pretendemos concentrar e desenvolver uma investigação, utilizando um grupo de indicadores económicos e socioeconómicos para a modelação do ciclo, analisando o seu comportamento e comparando as várias abordagens para posteriormente confrontá-las e verificar quais as valências de cada uma para o estudo destas matérias.

1.5 A origem do filtro de Kalman

A teoria de regressão de mínimos quadrados foi publicada originalmente por Adrien-Marie Legendre, em 1805, no contexto do estudo das órbitas dos cometas. No entanto, foi Karl Gauss, matemático alemão que viveu até meados do século XIX, que desenvolveu o método como instrumento estatístico, incorporando-o no estudo do tratamento probabilístico dos erros de observação (Pollock, 2003a). Este facto é aliás motivo de alguma controvérsia, pois Gauss afirmava que tinha referido a sua ideia muito antes da primeira publicação do método dos mínimos quadrados, por Legendre em 1809, e intitulada *Theoria Motus Corporum Celestium* (Stigler, 1986).

O texto, *Theoria Motus Corporum Celestium*, ligado ao estudo das órbitas elípticas de um corpo planetário e as exposições seguintes do tema, feitas por Gauss na década vinte do século XIX, deram a conhecer o famoso teorema que afirma que entre todos os estimadores lineares não enviesados, os estimadores dos mínimos quadrados, têm o menor erro quadrático médio. Este teorema é também conhecido por teorema de *Gauss-Markov* (Johnston e DiNardo, 2001).

Depois de se manter no esquecimento durante quase um século e meio, Robert Plackett, em 1950, estudou novamente o problema e tentou trazê-lo de novo ao interesse de académicos e investigadores. Contudo, o assunto não foi logo reintegrado, pois ainda não estávamos na era computacional e talvez este importante facto tenha obrigado a esperar durante mais uma década.

Foi finalmente em 1960 que Rudolf Kalman deu a conhecer, no contexto da teoria do controlo, um processo recursivo para solucionar problemas lineares relacionados com a filtragem de dados discretos. Este algoritmo permitia minimizar a norma da matriz de covariância do vector de estado, gerado pela recursão clássica. A estimação do novo estado é deduzida a partir da estimação prévia, juntando-lhe um termo de correcção proporcional ao erro de previsão. Um ano mais tarde, em 1961, Rudolf Kalman e Richard Bucy adaptaram o processo ao caso contínuo, e reiniciaram assim um percurso de extensa investigação e aplicação prática desta temática a várias áreas do saber.

Desde a divulgação deste documento original em 1960 até aos nossos dias, muitas derivações têm vindo a surgir na literatura sobre o assunto, na sua maioria tentando reduzir a terminologia da teoria ordinária de regressão dos mínimos quadrados, ou utilizando funções de máxima verosimilhança e, em alguns casos ainda, juntando-lhe um ponto de vista *bayesiana* (Durbin e Koopman, 2001).

Embora os investigadores reconheçam que existe alguma complexidade associada à derivação do filtro, este método tem mostrado ao longo de décadas um enorme potencial para a resolução de um amplo conjunto de problemas, tanto nas ciências exactas e nas engenharias, como mais recentemente na econometria (Murteira, Muller e Turkman, 1993).

Assim, e apesar de alguma lentidão dos econometristas em adoptar a proposta de Kalman, que para Pollock (2003a) pode resultar, por um lado, de uma certa relutância criada pela utilização de parâmetros que variam com o tempo e, por outro, para Crato (1990), de algum preconceito devido essencialmente à sua origem na área da engenharia e do controlo, é inegável que o tema tem vindo a ganhar cada vez mais adeptos, não só pelas ideias básicas que apresenta, como também pela utilidade prática que este parece motivar.

1.6 O filtro de Kalman na econometria

Segundo Pollock (2003a), a derivação da teoria de Kalman que despertou a primeira atenção de econometristas data do início da década de 70. Trata-se de um trabalho dos investigadores Duncan e Horn (1972). Estes cientistas exploraram o conceito de estimação desenvolvido em Theil e Goldberger (1961), e mais tarde aprofundado por Theil (1963 e 1971).

Crato (1990), acresce ao trabalho pioneiro de Duncan e Horn (1972) os artigos sobre a utilização do filtro nas vertentes de estimação, alisamento e previsão, assim como instrumento de extracção de sinal, de Harrison e Stevens (1971 e 1976) e de Morrison e Pike (1977).

Estes investigadores contribuíram para o aperfeiçoamento desta área utilizando modelos estruturais de séries temporais e abriram desta forma as portas aos seus sucessores Harvey e Todd (1983) e Gersch e Kitigawa (1983). Sensivelmente um ano mais tarde, Harvey (1984) e Durbin (1984) introduzem formal e definitivamente a temática, no corpo da econometria clássica. Este tipo de modelos tem vindo a ser aplicado desde então, na modelação de fenómenos económicos, tanto com objectivos de estimação e controlo de intervenção macroeconómica como de estimação e previsão econométrica (Crato, 1990).

Pretende-se nesses trabalhos, basicamente, estudar um conjunto de vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ que variam ao longo do tempo e que não são observáveis, relacionados, de alguma forma, com os valores observados das variáveis y_1, \dots, y_n . Na relação entre os α'_s e os y'_s utiliza-se o modelo em espaço de estados, tentando desta forma inferir as propriedades relevantes dos α'_s com base no conhecimento fornecido pelas observações y_1, \dots, y_n e das propriedades estatísticas do erro aleatório. Para isso, é preciso estabelecer ainda, uma relação entre os estados nos momentos $t + 1$ e t , quer-se dizer, entre α_{t+1} e α_t .

Esta representação em espaço de estados proporciona-nos um instrumento de enorme potencial que permite o tratamento de um amplo conjunto de modelos, particularmente na modelação de componentes não observáveis e parâmetros que variam no tempo, na representação de modelos ARIMA e no estudo de magnitudes que podem ser expressas como a soma de processos estocásticos. De referir igualmente a sua utilidade para situações onde as variáveis são observadas com erros de medida ou ainda onde o estudo é efectuado através de dados, envolvendo observações perdidas, ignoradas ou feitas com intervalos de tempo desiguais (Hamilton, 1994a).

Além dos textos referidos, numa perspectiva que aborda globalmente o assunto, salientamos os trabalhos de Harvey (1989, 1994a e 1994b), Kim e Nelson (1999) e Harvey, Koopman e Shephard (2004) e ainda uma publicação dos autores Durbin e Koopman (2001) que inclui uma abordagem de carácter *bayesiana* ao tema.

Exemplos encontrados nos textos de Gardner, Harvey e Phillips (1979) e

Mélard (1983), incluem algoritmos com dados concretos para avaliar a verosimilhança de modelos ARMA (*Autoregressive Moving Average*). Jones (1980) utiliza esta aproximação para modelos do tipo ARMA, no estudo de observações inexistentes ou perdidas. Os trabalhos de Harvey (1989) e Pollock (1999) descrevem um vasto conjunto de representações no modelo em espaço de estados onde se salientam as representações de vários modelos do tipo ARMA.

Por outro lado, podemos consultar uma metodologia alternativa explorada no método de Burman (1980), originária dos trabalhos de Cleveland e Tiao (1976), Hillmer e Tiao (1982) e Maravall (1985) e a recolha e enumeração de literatura desta temática, bastante extensa, com alternativas à proposta de Kalman, que pode ser encontrada em Pollock (2000, 2001a, 2001b e 2003b).

Outra área em desenvolvimento na utilização do filtro de Kalman é a do cálculo de funções de verosimilhança em séries temporais, como dispositivo de modelação e estimação de parâmetros. Depois de se possuir uma representação do modelo em espaço de estados, a função de verosimilhança pode ser avaliada através da decomposição do erro de previsão, como se pode averiguar em Schweppe (1965). Em Harvey, Koopman e Shephard (2004) podemos encontrar uma proposta de algoritmia do filtro de Kalman e a sugestão do software STAMP no site: <http://www.stamp-software.com>, construído pelos autores.

Clark (1987), Kim e Nelson (1999), Casals e Sotoca (2001) e Jong e Chu-Chun-Lin (2003), dão-nos pistas sobre a forma de inicializar os parâmetros do modelo, essenciais em qualquer algoritmo recursivo que, como sabemos, terá de começar a operar com algum ou alguns valores iniciais. Kim e Nelson (1999) e Durbin e Koopman (2001) expõem-nos a forma de efectuar a inicialização do filtro, depois de estimados os parâmetros do modelo.

Muitos recursos de apoio a este tema podem ser encontrados e estão livremente disponíveis no site: <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman> de Welch e Bishop que recolhem e organizam, facultando-os gratuitamente, a todos aqueles que se iniciam e também para os que pretendem aprofundar estas temáticas (Welch e Bishop, 2006).

O uso econométrico crescente do filtro de Kalman em modelos de séries temporais clássicos univariados e multivariados tem aumentado graças às facilidades concedidas pelo aparecimento, no início dos anos setenta do século XX, de pacotes de software informático de 4ª Geração, onde este algoritmo está incorporado ou pode ser construído num ambiente de desenvolvimento mais “amigável” e vocacionado para uma população mais vasta. Salientamos o software Matlab da Math Works, Inc. com o site: <http://www.mathworks.com>, por este ser o utilizado para a implementação e teste computacional dos algoritmos, desenvolvidos ao longo desta investigação.

1.7 Definição e caracterização do ciclo económico

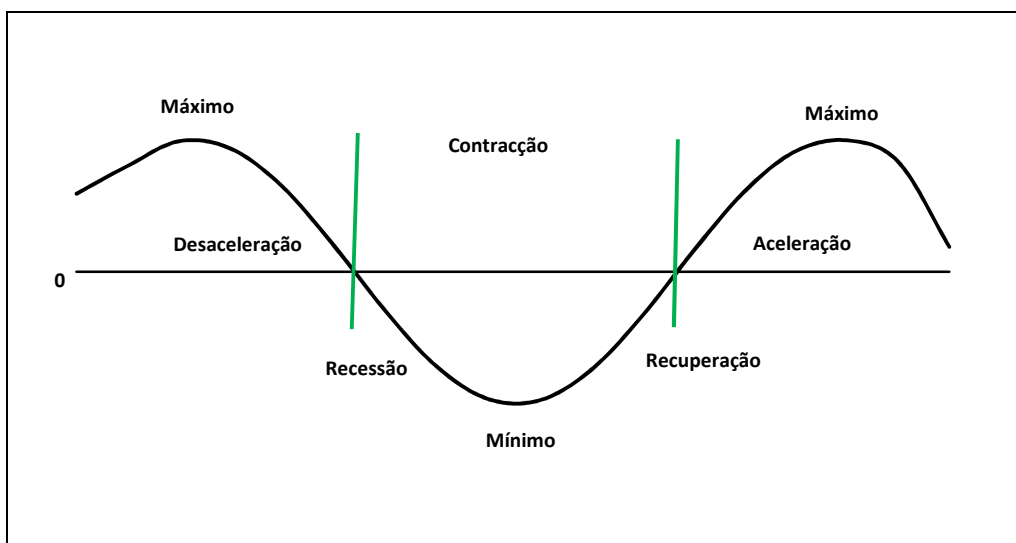
A sociedade portuguesa tem interesse em saber qual é o estado actual da economia e qual será este estado num futuro próximo. Porém, o estado da economia e respectiva fase onde o ciclo económico se encontra (decrescimento ou crescimento) não é observável directamente e não há consenso sobre a melhor forma de estimar essa variável latente.

As fases do ciclo típico apresentam-se com o aspecto genérico do Gráfico 1.1. Os pontos de inflexão, máximo (pico) e mínimo (cava), são máximos e mínimos locais, observados no nível cíclico, determinando a alteração entre fases de aceleração e desaceleração, ou seja, os momentos em que os valores deixam de aumentar (ou diminuir) para passar a baixar (ou a crescer). O número de períodos que distam entre dois máximos consecutivos define a duração total do ciclo. Analogamente a diferença em valor absoluto entre um mínimo e o máximo que o precede definem a amplitude do ciclo, ao qual esse mínimo pertence.

Associados à modelação do ciclo e a aspectos como a duração e a amplitude dos ciclos, surge muitas vezes a necessidade de se considerar a axiomática não linear como mais adequada na representação deste tipo de fenómenos. Verifica-se que estas séries temporais mostram um carácter qualitativamente preciso mas quantitativamente difuso, originado por fases distintas de crescimento e decrescimento. Tal propósito, embora muitas vezes fascinante em termos académicos, dificulta de sobremaneira a estimação e complica a previsão que se deseja efectuar e

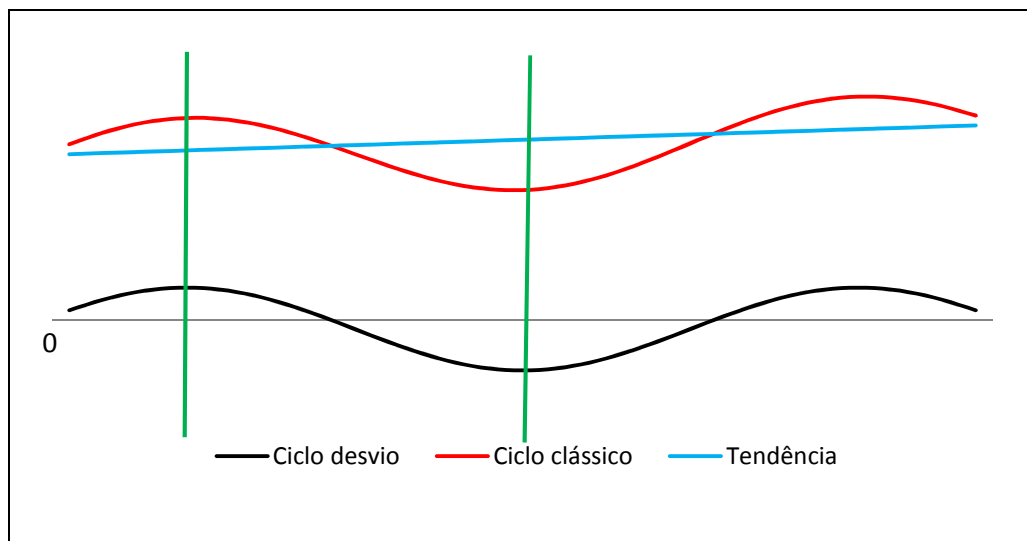
que se pretende que seja a mais fiável possível.

Gráfico 1.1: Fases do ciclo económico de desvios típico



Investigar e analisar o comportamento do ciclo económico, apesar das dificuldades expostas, pode ajudar na melhor compreensão dessas flutuações económicas, sendo importante também em termos sociais, para auxiliar na formulação de políticas e na planificação das ações, tanto no sector público como no sector privado, materializando de forma mais justa as decisões económicas que afectam toda a sociedade.

Quando se investiga o ciclo económico existe uma distinção primária entre dois conceitos diferentes, mas relacionados, que é importante clarificar. Por um lado, os “ciclos clássicos” referem-se a períodos de descidas e subidas absolutas do nível da actividade económica. Por outro lado, os “ciclos de desvio”, representados no Gráfico 1.1, denotam desvios da actividade económica em relação à sua tendência subjacente. Assim, como se observa a negro (linha mais grossa) no Gráfico 1.2, num ciclo clássico uma zona de abrandamento é sempre associada a taxas de crescimento negativas da actividade económica, enquanto num ciclo de desvio, além da zona de abrandamento, dá-se relevância ao facto de o nível da actividade económica se situar abaixo da sua tendência, o que pode ocorrer mesmo durante períodos de taxas de crescimento positivas (BCE, 2002).

Gráfico 1.2: Zonas de abrandamento do ciclo clássico e do ciclo de desvio

Ao longo desta investigação, a não ser que seja referido o contrário, o ciclo económico é entendido como o padrão, mais ou menos regular, de desaceleração, contracção e aceleração da actividade económica em torno da trajetória do crescimento tendencial (Dornbush, Fischer e Stratz, 1998) e a sua evolução temporal genérica é aquela que está representada no Gráfico 1.1.

Assim, podemos dizer que ritmos de crescimento positivos, mas de valor decrescente (desaceleração) podem eventualmente tornar-se negativos (contracção), de forma cada vez mais intensa (recessão) até se atingir o nível mínimo do ciclo. A partir desse ponto o valor continua negativo, mas de menor dimensão em valor absoluto (recuperação). Progressivamente, vão-se alcançando valores positivos cada vez mais elevados (aceleração), até que um novo máximo seja obtido e se reinicie novamente todo o percurso cíclico.

No período de aceleração, a economia caracteriza-se sumariamente por um rápido crescimento. A produção é elevada devido essencialmente à procura crescente e o desemprego é normalmente baixo. A confiança nos negócios pode ser alta, conduzindo a um maior investimento. O impulso dos consumidores pode levar a gastos adicionais. A desaceleração é um período em que a produção diminui devido essencialmente à redução na procura. A confiança dos investidores começa a descer.

A recessão, caracteriza-se por um período em que o crescimento económico abranda e o nível de produção diminui. A taxa de desemprego tende a aumentar. As empresas podem perder a confiança e reduzir os investimentos. As pessoas têm mais tendência para poupar do que para gastar. Por último, a fase de recuperação é um período em que a economia se move entre uma recessão e uma aceleração.

Como as principais propriedades do ciclo são definidas por intervalos de duração e amplitude, a estrutura do ciclo, em estatística, é analisada usualmente por uma distribuição de probabilidade. Assim sendo, torna-se relevante considerar desvios em termos médios ou medianos, dentro de determinadas variações, onde a variância de parâmetros chave do modelo e intervalo de incerteza aparecem com relevante sentido e importância neste tipo de investigações.

Considerando o aspecto vectorial, amplitude e duração do ciclo, associando um efeito difusor aos indicadores que se comportam dentro do mesmo padrão temporal evolutivo, podemos analisar por esta via, indicadores adiantados, coincidentes e atrasados, em referência comparativa às distintas observações e fases das etapas cíclicas. Este facto tem motivado, pela rápida interpretação do fenómeno, o grande relevo dado na literatura desta temática, aos pontos de inflexão do ciclo.

Centrando-nos em aspectos essenciais do estudo do ciclo económico e não sendo estes directamente observáveis, mas sim combinados, torna-se necessário dispor de algum tipo de procedimento que permita identificar esses desvios da actividade económica em relação à tendência subjacente. A exposição dos procedimentos de “extracção de sinais”, que têm como principal função isolar em variável própria a componente cíclica das observações, requer forçosamente o emprego de algum instrumental matemático, muitas vezes com um nível relativamente elevado de complexidade teórica e aplicacional.

A grande vantagem deste procedimento é a interpretação directa das componentes, devido essencialmente à forma pela qual o modelo é construído. Pressupõe-se que os movimentos característicos de uma série temporal podem ser decompostos em componentes não observáveis, como por exemplo tendência temporal, sazonalidade, componente cíclica e componente aleatória ou de erro.

1.8 Indicadores cíclicos

Os indicadores cíclicos são estatísticas de síntese que proporcionam um quadro geral da actividade económica, sendo geralmente a análise da evolução temporal de índices conjunturais e a sua consistência entre padrões cíclicos, o assunto chave para os estudiosos desta temática. Estes dão especial relevo aos elementos que interagem entre as variáveis representativas do fenómeno, equacionando-o em função de algum esquema interpretativo racionalmente fundamentado.

Tendo como referência a actividade económica, classifica-se um variado conjunto de séries temporais, mensais ou trimestrais, concentrando-nos nos desvios que estas apresentam entre si ou em relação a uma série de referência. Nesta abordagem, considera-se normalmente que a série de referência é o ciclo médio de todos os sectores da economia e portanto assume-se que esta apresenta a cronologia das cavas e dos picos da economia em investigação. Em suma, a cronologia dos ciclos que será oficialmente aceite.

Associado ao cálculo de desvios entre variáveis ou em relação a uma série de referência, de carácter muitas vezes empírico, obtêm-se normalmente três indicadores de síntese: adiantado, coincidente e atrasado. A classificação de um grande conjunto de indicadores de síntese, de acordo com o seu comportamento em termos de temporização cíclica, foi um dos principais resultados do trabalho pioneiro realizado pela equipa do *National Bureau of Economic Research* (NBER), onde cada indicador é classificado de acordo com a comparação dos seus valores com os de uma cronologia de referência (Zarnowitz, 1992).

Variáveis apresentando um tempo conjuntural muito próximo do da cronologia de referência, durante um longo período de observações, são denominadas “aproximadamente coincidentes” ou “coincidentes” e podem ser utilizadas para assinalar ou confirmar a cronologia do ciclo económico. O índice adiantado tende a avançar um ponto de viragem e assim, pode antecipar-nos o início de recessões ou recuperações no futuro imediato. Por sua vez, o índice de atraso, medido em relação à cronologia de referência, desempenha um papel relativamente menor nesta análise.

Na verdade, na tradição NBER, este índice é essencialmente usado para colectar sinais subsidiários sobre cada momento do ciclo económico e como confirmação de movimentos na cronologia de referência.

Em 1995, o “Departamento de Comércio dos Estados Unidos” transferiu para o *The Conference Board* (TCB), instituição privada e sem fins lucrativos, fundada em 1916, a responsabilidade de medição de um conjunto de variáveis relacionadas com os ciclos económicos (*Business Cycle Indicators Database*), estando paralelamente, esta instituição, associada a muitos outros países no apoio à investigação e datação do ciclo económico.

O TCB utiliza três indicadores sobre a realidade dos EUA: o indicador avançado, que é um índice composto elaborado a partir de 12 séries avançadas; o indicador de atraso, que é também um índice composto este elaborado a partir de 8 séries desfasadas; e, finalmente o indicador coincidente, que é um índice composto elaborado a partir de 4 séries coincidentes (TCB, 2001). Esta informação está disponível no site: <http://www.tcb-indicators.org>.

A literatura actual sobre as determinantes dos ciclos económicos tem-se concentrado sobretudo na investigação e análise das causas e respectiva medição do ciclo de desvios, afastando-se, por esta via, das técnicas de medição tradicionais do NBER e do TCB, que utilizam uma abordagem centrada na definição de ciclo clássico. O padrão recorrente citado é observado e estudado nessa literatura, num amplo conjunto de séries económicas, como por exemplo, indicadores de produção, procura, emprego e preços, e tem permitido o desenvolvimento de técnicas de filtragem linear e não linear comum a todos eles e com uma quantificação relativamente robusta (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000).

Por outro lado, desde a sua criação em 1920, que o NBER acumula experiência e realiza investigação sobre os ciclos e sobre a cronologia dos seus pontos de inflexão para a economia dos EUA. No trabalho pioneiro de Burns e Mitchell (1946), ambos pesquisadores do NBER, os autores desenvolveram uma lista de 487 indicadores que antecederiam, sucediam ou coincidiam com o ciclo económico. O projecto partia do princípio de que existe um ciclo de referência, que não pode ser observado

directamente, mas que pode ser medido pelo movimento constante de diversas variáveis económicas que reagem às diferentes etapas do crescimento.

O desenvolvimento de novas abordagens no estudo do ciclo, efectuada por filtros e respectivo isolamento das componentes conjunturais de cada série, tendencial e cíclica, não deu contudo origem a um quadro unificado capaz de substituir a metodologia NBER e de lidar com os diferentes aspectos de medição do ciclo económico. A cronologia NBER mantém assim um papel de referência e as metodologias alternativas que têm surgido não têm desafiado esse papel, nem questionado a sua base teórica (Stock e Watson, 1989 e Diebold e Rudebusch, 1996).

1.9 Estrutura do trabalho

Em função dos objectivos propostos e já sintetizados, a presente investigação foi estruturada conforme se apresenta de seguida. Além da Introdução (Capítulo I), onde genericamente se apresentou e enquadrou o tema e os motivos da investigação, o nosso estudo contempla mais quatro capítulos:

No Capítulo II (Modelação matemática, modelo estrutural e de representação em espaço de estados), faremos uma breve introdução à modelação matemática e às principais etapas de construção dos modelos. Em seguida aborda-se a representação dos dados nos modelos estruturais e no modelo em espaço de estados, considerando ainda a equivalência representativa destas duas representações e as propriedades estatísticas mais relevantes, associadas à representação em espaço de estados.

No Capítulo III (Métodos recursivos de extracção de sinal: o filtro de Kalman), analisaremos com detalhe todo o processo de construção, nas suas diferentes componentes, que deu origem a este algoritmo recursivo de extracção de sinal. Prepara-se simultaneamente, toda a algoritmia a implementar computacionalmente e que embora não surja escrita neste texto, foi por nós totalmente criada e encontra-se disponível informaticamente para consulta e verificação.

No Capítulo IV (Estudo do ciclo económico: a realidade portuguesa), apresentamos os dados e os resultados teórico-práticos, tendo como suporte a

aplicação informática desenvolvida nesta investigação. Essa simulação visa desenvolver e compreender a metodologia associada à inicialização dos parâmetros do modelo, caracterizar genericamente o ciclo económico através do filtro de Kalman e efectuar a comparação do filtro de Kalman (FK), com os filtros de Hodrick-Prescott (HP) (Hodrick e Prescott, 1997) e Baxter-King (BK) (Baxter e King, 1999). Posteriormente sugerimos uma metodologia para datação do ciclo económico português e realizamos o estudo comparativo da evolução cíclica portuguesa, com base nos dados do PIB, com outras economias de referência, utilizando para tal os resultados produzidos pelo filtro de Kalman. Concluiremos com a análise dos resultados obtidos no estudo de previsão, entre o filtro de Kalman e os modelos ARIMA, nomeadamente os modelos autoregressivos (*Autoregressive Models - AR*), concretamente AR(1), AR(4) e os modelos autoregressivos e de média móvel (*Autoregressive Moving Average Models - ARMA*), ARMA(1,1) e ARMA(2,2).

O Capítulo V (Conclusão) será dedicado às conclusões da tese, onde salientaremos os resultados à luz do exposto na introdução, as críticas e as justificações das razões da ocorrência de problemas metodológicos e de limites à investigação. Concluiremos a pesquisa sugerindo melhorias e/ou propondo novas formas de abordar o tema ou hipóteses de trabalho futuro.

Para concluir esta breve apresentação, referir que sempre que seja considerado relevante, este trabalho contemplará anexos e apêndices explicativos.

2 Modelação matemática, modelo estrutural e de representação em espaço de estados

A Matemática tem sido utilizada pela ciência desde que a civilização atingiu um nível mínimo de conhecimento. Descobertas de obsidiana em locais longínquos e vários selos inscritos na grafia dos povos do Vale do Indo sugerem uma rede consideravelmente extensa de comércio antigo, centrado nos limites do Golfo Pérsico. Evidências arqueológicas datam o início da civilização Suméria em meados do quarto milénio a.C., entre 3500 e 3000 a.C., mostrando que este povo usava a Matemática para o cálculo de juros de empréstimos e hipotecas (Guerreiro, 2000). Nesse tempo houve um grande florescimento cultural, e a Suméria exerceu influência sobre as áreas circunvizinhas, culminando na dinastia de Ágade, fundada em aproximadamente 2340 a.C. por Sargão I. Depois de 2000 a.C. a Suméria entrou em declínio, sendo absorvida pela Babilónia e pela Assíria (Kramer, 1997).

Passados que estão mais de 5000 anos e centrando-nos na abordagem metodológica deste texto, a aplicação da Matemática para a análise da realidade, envolvendo a construção e utilização de modelos matemáticos é uma área que tem despertado grande interesse académico, não só na ciência económica, como na generalidade dos ramos do saber. Esses modelos são úteis na medida em que podem contribuir para um melhor conhecimento dos objectos em estudo, ou até mesmo, através deles, partir-se à descoberta de novos conceitos e interpretações.

Segundo Silva (1994), o modo como a teoria e as aplicações se relacionam é normalmente designado por matematização ou modelação matemática. Isto significa que qualquer descrição matemática do mundo real é um modelo. Manipulando o modelo esperamos compreender algo da realidade. E assim já não perguntamos se o modelo é verdadeiro, perguntamos unicamente se as suas implicações podem ser

verificadas experimentalmente.

Nesta perspectiva, verificamos que uma dada situação pode ser modelada de formas diversas, consoante a visão que cada indivíduo possui da realidade e dos diferentes objectivos que se pretende atingir na sua representação modelada. Será, mesmo assim, irrealista acreditar que existirá uma realidade que se mostre uma ou verdadeiramente conhecida, para que possa ser totalmente modelada.

2.1 Modelação matemática

A noção de modelo surge na literatura segundo duas perspectivas: Edwards e Hamson (1990) salientam, o facto de um modelo ser uma representação simplificada de determinados aspectos da realidade, utilizando para isso, conceitos matemáticos.

Swetz e Hartzler (1991), Ponte (1992) e Matos (1995) acentuam, além do carácter representacional da realidade modelada, uma pluralidade de modelos capazes de representarem a mesma situação real. Estes autores consideram que o modelo criado depende da perspectiva com que cada sujeito aborda a situação a modelar. Assim, consideram que um modelo matemático oferece uma aproximação dos traços essenciais de uma determinada realidade, a realidade do sujeito, simplificando alguns dos seus aspectos de forma a clarificar ou a tornar mais salientes outros, considerados como importantes, ignorando deliberadamente os elementos tidos como secundários, sendo a sua adequação sempre avaliada em função dos objectivos com que o modelo é construído.

Para Niss (1989), o mundo real e a Matemática actuam como duas fontes que se alimentam reciprocamente na concepção e desenvolvimento de um modelo matemático. Trata-se, portanto, de valorizar o diálogo Matemática e Realidade como uma das características chave da noção de modelo matemático. O modelo matemático não será assim uma representação estática da realidade, na medida em que representa um fenómeno real, possibilita a exploração de novos aspectos da realidade e conseqüentemente das estruturas matemáticas envolvidas. No entanto, é impossível ignorar que um modelo matemático possui um objecto e terá sempre algum propósito (Guerreiro, 2000).

Verifica-se, muitas vezes que, o impacto da matemática aplicada no mundo natural ou nas actividades humanas, pode modificar a percepção do real fazendo crer que essas aplicações são efectivas e úteis. O mito de uma matematização totalmente rigorosa e completamente formalizada permanece.

Contudo, as emoções, crenças, atitudes, sonhos, intenções, ciúme, inveja, aspirações, pesar, desejo, ira, compaixão e muitas outras, nunca poderão ser matematizadas. O conflito entre estas duas perspectivas emerge na proporcionalidade directa do valor efectivo que se dá às representações que ele cria e às conclusões que a partir dele se extrapolam.

Por outro lado, o confronto entre a realidade e as representações que dela se pretendem criar levantam cada vez mais interrogações sobre a validade e as implicações da matematização do mundo. Podemos considerar um modelo bom ou mau, simplista ou sofisticado, estético ou inestético, útil ou inútil, mas ninguém está disposto a etiquetá-lo de verdadeiro ou falso (Davis e Hersh, 1995).

Apesar desta impossibilidade, parece ser hoje aceite que a modelação matemática empresta um valoroso contributo na busca de novos conhecimentos e interpretações do real, sugerindo caminhos, soluções e interpretações que podem levar a uma melhor compreensão do mundo e, conseqüentemente, a uma melhor abordagem na implementação de soluções para os problemas que afligem a Humanidade.

2.2 Criação do modelo

De acordo com Davis (1991), as aplicações matemáticas desempenham nos nossos dias pelo menos três grandes funções: a descrição, a previsão e a prescrição. De uma forma simplificada, o que se faz quando se recorre à Matemática para resolver um problema da realidade, é perguntar: o que é isto ? o que será isto ? e o que fazer em relação a isto ?

Além destes aspectos, outro muito relevante, associado à previsão, é o da modelação projectiva, muita retractada pela questão “o que acontecerá se ...? “ Este

tipo de modelação é utilizado para se tentar saber o que esperar como resultado de uma dada alteração num sistema físico ou para se saber o que aconteceria se uma dada ideia fosse adoptada. Afinal o que está em jogo é analisar um cenário de implicações.

No contexto mais específico da análise de séries temporais, a descrição envolve o cálculo de estatísticas sumárias da série, a representação gráfica dos dados e o ajustamento de características simples da série, como por exemplo o valor esperado e a variância. A previsão resume-se à estimação de valores futuros de uma série temporal, dando pistas sobre a sua evolução provável.

Associados directamente ao processo de prescrição e modelação projectiva, surge todo o processo genérico de modelação, numa tentativa de exposição de um conjunto de dados como tendo sido gerados a partir de um certo modelo. Este processo, no contexto das séries temporais (Lutkepohl, 1993), envolve genericamente a estimação de parâmetros do modelo e a tentativa de avaliação da qualidade dos valores estimados.

Por outro lado, o controlo que consiste na monitorização dos valores da série tendo em vista a detecção de alterações nas suas características, as quais podem indiciar que o modelo proposto não é válido ou que o que estava a ser usado deixou de ser válido, sugerindo eventualmente um voltar à fase de modelação.

Das funções atrás mencionadas, a vertente prescritiva sobressai, quando se reconhece que muitos modelos procuram conformar os objectos reais a um conjunto de sistemas matemáticos poderosos. A qualidade predictiva, por seu turno, assume especial importância num contexto em que a simulação de fenómenos reais constitui um instrumento privilegiado para a exploração do mundo real.

Seja qual for a sua função e até o objectivo, a criação de modelos matemáticos adequados, poderá constituir valioso instrumento de apoio à decisão²,

² De realçar o contributo para o processo de decisão, dos Sistemas de Apoio à Decisão (SAD), baseados em modelos matemáticos, que são genericamente Sistemas de Informação (SI) informáticos que fornecem apoio informativo interactivo, durante o processo de tomada de decisão (Turban, Aronson e Liang, 2005).

designadamente pela verificação da exequibilidade das soluções ou da determinação de indicadores de qualidade e sua adequação, na geração de soluções racionais ou ainda como complemento das soluções parcialmente definidas, por quem tem em última instância, o poder de decidir.

2.3 Ciclo de modelação matemática

A modelação matemática é entendida como um processo que tem origem num dado fragmento da realidade e que culmina na construção de um modelo matemático relativo a essa realidade. Este processo tende a ser visto como um percurso bem definido cujos passos são delimitados e dispostos numa ordem sequencial, vulgarmente conhecida por ciclo de modelação matemática (Matos, 1995).

Dando especial ênfase ao encadeamento sequencial das várias etapas, Niss (1989) entende a modelação matemática como um processo pelo qual um fragmento da realidade é traduzido por um modelo matemático. Para tal, aborda um ciclo de modelação que envolve em si um processo dinâmico constituído com o propósito de produzir novo conhecimento, bem como corrigir e integrar conhecimentos pré-existentes. Na sua descrição, evidencia grande preocupação com o encadeamento das várias etapas e com a qualidade do modelo obtido.

Também para Edwards e Hamson (1990), a modelação matemática deve possuir em si uma actividade cíclica que tem como objectivo a transposição de uma situação real para a matemática. Assim, indicam como fases essenciais no processo de modelação matemática, os seguintes passos:

- a) Identificação de uma situação real;*
- b) Tradução dos aspectos relevantes da situação para um modelo matemático;*
- c) Investigação sobre o modelo matemático;*
- d) Obtenção de novas informações acerca da situação através da tradução dos resultados (obtidos sobre o modelo) para a situação real;*
- e) Avaliação da adequação e ajustamento dos resultados à situação real.*

Sejam modelos determinísticos ou estocásticos, discretos ou contínuos, lineares ou não lineares, diferenciais ou integrais, o processo completo de modelação mais adequado a cada caso, nem sempre é um assunto fácil de abordar. Nem poderia eventualmente ser de outra forma, já que a modelação não tem regras preestabelecidas e fórmulas únicas como solução dos problemas que o investigador encontra na natureza individual, do seu percurso de modelação.

Por outro lado o investigador, ao orientar determinado processo sob condições operativas, de forma a produzir resultados considerados satisfatórios para os objectivos da investigação, depara-se muitas vezes com a necessidade de dados dispendiosos ou indisponíveis, resultados fora do leque de parâmetros de interesse específico do estudo e até a necessidade de introdução de parâmetros simples, para que estes possam ser determinados experimentalmente.

Um modelo matemático bem definido dependerá muito daquilo que se pretende equacionar e assim sendo, a matemática utilizada não pode ser tratada isolada e fora do contexto do modelo e das problemáticas que envolvem a representação ou interpretação modelada da realidade.

2.4 O modelo estrutural e estimação

Um modelo estrutural elementar, escalar ou vectorial, utilizado na representação de séries temporais, baseado na decomposição em movimentos ou forças componentes, é o modelo aditivo, representado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_t + \mathbf{S}_t + \mathbf{C}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \text{ com } t = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_t$ representa a tendência temporal, \mathbf{S}_t a componente sazonal, \mathbf{C}_t os movimentos cíclicos e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ a componente errática, irregular, aleatória ou de ruído.

A tendência $\mathbf{\Gamma}_t$ interpreta o aumento ou declínio gradual nos valores das observações de uma série temporal. A componente sazonal \mathbf{S}_t descreve as variações em relação à tendência que ocorrem, em geral, no decorrer de um ano. Os movimentos cíclicos \mathbf{C}_t associam-se às fases alternadas de crescimento e

decrecimento que afectam o sistema económico e, embora recorrentes, não apresentam qualquer periodicidade definida³. A componente de ruído ε_t surge associada a movimentos aleatórios decorrentes de factores de natureza imprevisível (Murteira, Muller e Turkman, 1993).

Em muitas das aplicações, particularmente na economia, as componentes do modelo combinam-se de forma multiplicativa e vêm expressas por,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_t \times \mathbf{S}_t \times \mathbf{C}_t \times \varepsilon_t \text{ com } t = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Contudo, logaritmando os valores do modelo, na forma multiplicativa (2.2), podemos quase sempre aproximá-lo do modelo (2.1), pelo que, utilizaremos o modelo aditivo no decorrer desta investigação. Em alguns casos utiliza-se também uma abordagem mista e geralmente com a seguinte configuração,

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{\Gamma}_t + \mathbf{C}_t) \times \mathbf{S}_t + \varepsilon_t \text{ com } t = 1, \dots, n$$

ou

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_t \times \mathbf{S}_t \times \mathbf{C}_t + \varepsilon_t \text{ com } t = 1, \dots, n.$$

Segundo Murteira, Muller e Turkman (1993), o modelo que melhor se ajusta aos valores de cada série temporal varia de sucessão para sucessão e, quando nos propomos efectuar a decomposição de uma série em forças componentes, a melhor opção passará por eleger aquele modelo que reduz ao máximo a componente de ruído sem prejuízo da respectiva aleatoriedade.

³ É justamente pelo facto de não apresentar duração uniforme que a identificação da componente cíclica é mais problemática.

2.4.1 Estimação com séries temporais económicas

A regularidade das séries temporais económicas é, em geral, estocástica e não determinística, por outras palavras, essa regularidade não admite uma formulação funcional determinista, mas é função de variáveis aleatórias (estocásticas), como por exemplo os próprios valores passados da variável económica em questão.

Se considerarmos possuir duas sucessões de variáveis, \mathbf{y}_t e $\boldsymbol{\alpha}_t$, escalares ou vectoriais, indexadas pelo índice t , discreto, que representa o tempo e admitindo que estas variáveis estão relacionadas de alguma forma conhecida, possivelmente dependente do índice t , e ainda que se lhe soma uma perturbação aleatória, escalar ou vectorial $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, de valor esperado nulo, podemos dizer que,

$$\mathbf{y}_t = h(\boldsymbol{\alpha}_t, t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.3)$$

onde para cada valor do índice t se assume conhecido \mathbf{y}_t e a função $h(\cdot, t)$. Contudo, tanto $\boldsymbol{\alpha}_t$ como $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ representam variáveis de valor desconhecido.

O problema da estimação tendo como base o modelo (2.3), consiste na procura de um operador (estimador) a ser aplicado sobre os elementos conhecidos de \mathbf{y}_t e que determine um valor considerado provavelmente próximo, por algum critério de optimização previamente formulado e para um dado índice τ , do verdadeiro $\boldsymbol{\alpha}_\tau$. A estimativa de $\boldsymbol{\alpha}_\tau$, representa-se normalmente por $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\tau$ (Crato, 1990).

O problema da estimação de $\boldsymbol{\alpha}_t$ até ao momento t , com base na sequência das observações aleatória finita $\mathbf{Y}_t = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t]$, ou infinita⁴ $\mathbf{Y}_t = [\dots, \mathbf{y}_{t-n}, \dots, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_t]$, terá diferentes significados, conforme $t < \tau$, $t = \tau$ ou $t > \tau$. O primeiro problema é o da previsão, o segundo denomina-se de actualização e o terceiro de alisamento.

O problema da previsão não é mais do que um caso particular do problema de estimação onde se pretende encontrar uma estimativa de um valor futuro $\boldsymbol{\alpha}_\tau$. Assim considerar-se-á que previsão é uma estimativa de $\boldsymbol{\alpha}_\tau$, designada por $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\tau$ ou por $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau t}$,

⁴ Recorde-se que Crato (1990) distingue sequência de observações (representado por \mathbf{Y}_t) de sequência registada de observações (não aleatória) (representado por \mathbf{y}_t).

elaborada com o conhecimento da sequência das observações Y_t , sendo $t < \tau$. O erro de previsão é a variável aleatória $\tilde{\alpha}_\tau = \alpha_\tau - \hat{\alpha}_\tau$ (Crato, 1990).

A solução do problema de previsão oferecerá estimações que são extrapolações para o futuro das componentes do estado, a da actualização permitirá ajustar as estimações do estado não observado à medida que se dispõe de uma nova observação da magnitude observável, relacionada com este, finalmente, a do alisamento oferece-nos uma melhor estimacão do estado em qualquer instante de tempo com base em toda a informação da amostra.

2.4.2 Modelo estrutural na representação do ciclo económico

Considere-se o seguinte modelo estrutural aditivo, onde a variável escalar⁵ dependente y_t representa os valores observados da série temporal de interesse⁶, assim,

$$y_t = \Gamma_t + C_t + \varepsilon_t. \quad (2.4)$$

Como se pode verificar, esta representação faz a decomposição na componente não estacionária (tendência) e estacionária (ciclo), dispostas como variáveis não observadas (Clark, 1987).

Assim, na equação (2.4), Γ_t representa a função tendência e C_t a componente cíclica. A componente de ruído ε_t surge na equação (2.4) porque os sistemas dinâmicos não são comandados só por entradas sujeitas ao nosso controlo, mas também por perturbações que não podemos controlar nem modelar deterministicamente (Maybeck, 1979). Por outro lado, ε_t representa igualmente um erro aleatório de medida, ou seja, a diferença entre o “verdadeiro valor” de y_t e aquele que é medido e nos é “dado a conhecer” nos valores da sucessão cronológica.

A modelação da componente tendência e da componente cíclica no modelo estrutural (2.4) pode ser efectuada de diferentes formas e com diferentes modelos

⁵ Se y_t fosse um vector o raciocínio matemático era semelhante, tendo-se unicamente de adaptar as igualdades às dimensões vectoriais adequadas.

⁶ Para uma maior adequação ao modelo os valores da série temporal devem estar dessazonalizados.

representativos. Contudo, segundo Clark (1987) e Wada e Perron (2006), o modelo estrutural mais frequentemente utilizado, entre as classes de modelos encontrados em estudos que envolvem o ciclo económico, é o modelo (2.4) com a seguinte configuração:

$$\begin{cases} \Gamma_t = \Gamma_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ \phi(L)C_t = \omega_t \end{cases} .$$

A tendência utiliza a formulação conhecida de Theil e Wega (Crato, 1990), em que a variável segue um crescimento esperado linear. Mas tanto a tendência (β_t) como o nível (Γ_t) evoluem sobre um “passeio aleatório” contínuo (Gilchrist, 1976). $\phi(L)$ é um polinómio finito no operador de desfasamento temporal L que neste caso, adoptando as propostas de Clark (1987) e Wada e Perron (2006), é autoregressivo de segunda ordem, AR(2). Ou seja:

$$\phi(L) = I - \phi_1 L - \phi_2 L^2.$$

Consequentemente, a componente cíclica C_t , segue um processo autoregressivo de segunda ordem. A representação completa das equações do modelo estrutural, será definida por,

$$\begin{cases} y_t = \Gamma_t + C_t + \varepsilon_t \\ \Gamma_t = \Gamma_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ C_t = \phi_1 C_{t-1} + \phi_2 C_{t-2} + \omega_t \end{cases} . \quad (2.5)$$

O modelo (2.5) constitui-se como o modelo base desta investigação, utilizado para a representação dos dados observados y_t e para as suas componentes não observadas (tendência, ciclo e erro). Posteriormente, será representado na formulação em espaço de estados, para que seja possível a subsequente aplicação do filtro de Kalman, tendo como principal objectivo a extracção dos sinais (valores) de cada uma das suas componentes (variáveis de interesse).

2.5 Teoria de controlo e conceito de estado

Uma das principais áreas que envolve a modelação de sucessões cronológicas é a da teoria do controlo. Pela sua natureza, o problema do controlo carece de métodos adaptativos ou recursivos através dos quais as novas observações vão sendo incorporadas no modelo, actualizando-o e tornando-o capaz de conduzir a melhores estimativas e a melhores previsões (Murteira, Muller e Turkman, 1993).

Por outro lado, a necessidade de atender às crescentes e rigorosas exigências de desempenho dos sistemas de controlo, ao seu aumento de complexidade e ao acesso fácil, e em larga escala, aos computadores, originou desde os anos 60 do século XX, um desenvolvimento sem precedentes na teoria do controlo (Ogata, 2003). Esta nova etapa provocou o nascimento da teoria de controlo moderno, tendo como base principal, o conceito de estado.

A teoria de controlo moderno contrasta com a teoria de controlo convencional porque a primeira é aplicada a sistemas de entradas e saídas múltiplas, que podem ser lineares⁷ ou não lineares, enquanto que a última é aplicável somente a sistemas lineares, invariantes no tempo, de entradas e saídas únicas (Ogata, 1987, Franklin, Powell e Workman, 1990, Vaccaro, 1995 e Ogata, 2003).

A teoria de controlo moderno é, também, essencialmente uma abordagem no domínio do tempo, a teoria de controlo convencional por seu turno é uma abordagem no domínio da frequência complexa.

Centremo-nos na definição de estado, variáveis de estado, vector de estado e espaço de estados (Ogata, 2003). O estado de um sistema dinâmico, é o menor conjunto de variáveis, designadas de variáveis de estado, tais que o conhecimento dessas variáveis em $t = \tau$, juntamente com o conhecimento da entrada para $t \geq \tau$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq \tau$.

Um sistema diz-se dinâmico quando evolui em função do tempo ou, alternativamente, quando uma ou mais variáveis fazem depender os seus valores dos

⁷ Onde a condição de linearidade indica que as variáveis que fazem parte do sistema se relacionam entre si, através de relações lineares.

valores em outro instante de tempo. As variáveis de estado de um sistema dinâmico, são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado desse sistema dinâmico. Se pelo menos n variáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são necessárias para descrever todo o comportamento de um sistema dinâmico, então essas n variáveis formam um conjunto de variáveis de estado.

Se forem necessárias n variáveis de estado para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então essas n variáveis de estado poderão ser consideradas as n componentes de um vector α . Esse vector designa-se vector de estado. Assim, um vector de estado é aquele que determina univocamente o estado do sistema α_t para qualquer instante $t \geq \tau$, dado o estado em $t = \tau$ e especificada a entrada μ_t para $t \geq \tau$.

O espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são variáveis de estado, é chamado de espaço de estados, sendo que qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

A representação de um dado sistema no espaço de estados⁸ não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema, no espaço de estados. Existem assim, muitas formas equivalentes para expressar um sistema na representação em variáveis de estados, e em que cada uma representa os mesmos valores da função de verosimilhança e, portanto, as mesmas predições do sistema (Ogata, 2003).

Todavia, é desejável definir α_t para que contenha toda a informação relevante do sistema no momento t , com o menor número de elementos. Trata-se de uma realização mínima, ou seja, aquela que minimiza a longitude do vector de estado, tendo simultaneamente presente que qualquer problema que se pretende formular não tem de ter necessariamente uma representação única.

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelação de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de

⁸ Também conhecido por *Markoviana* (Murteira, Muller e Turkman, 1993).

saída e variáveis de estado. Estas últimas variáveis tentam captar a parte dinâmica do sistema no vector de estado, formado eventualmente por um conjunto de variáveis não observadas.

Se se pretende estimar o valor do estado α_t , magnitude que evolui no tempo e não se observa directamente, mas sim, contaminada pela componente do ruído, poderíamos em princípio utilizar os resultados gerais da teoria das probabilidades (Anderson, 1984), sem recorrer aos denominados filtros adaptativos. Contudo, dada a existência de correlação entre as observações y_t , o processo de cálculo complica-se substancialmente, quando aumentamos o número de leituras nas variáveis.

Utilizando filtros adaptativos e porque possuem características de auto-ajuste, podemos, a partir dos valores observados, da magnitude relacionada com o estado e do conhecimento das propriedades estatísticas do ruído, construir algoritmos computacionais eficientes na obtenção dos mesmos resultados, dos resultados obtidos pelo emprego da teoria clássica das probabilidades (Durbin e Koopman, 2001).

Através de um sistema definido por um modelo estrutural adequado e formulado o seu correspondente modelo na representação em espaço de estados, com a posterior aplicação de um filtro adaptativo, podemos estimar o estado não observável, a partir de alguma magnitude observável relacionada com este. O estimador do estado não observável do vector no instante t , baseia-se assim na informação obtida até ao instante t e na sua actualização, cada vez que se dispõe de uma nova observação.

A validade dos procedimentos de inferência, aqui referidos, depende obviamente da exactidão dos pressupostos estipulados e assim sendo, será responsável pela qualidade dos resultados produzidos. Podemos pois eleger vários algoritmos recursivos desenvolvidos pelos diferentes investigadores da temática, entre eles, alguns que constituem extensões da formulação original descrita por Kalman (1960), para se obter uma estimação óptima do estado em qualquer ponto da amostra, tentando assim encontrar o método que mais se adequa aos objectivos de cada investigação.

2.6 Modelo em espaço de estados

Segundo Murteira, Muller e Turkman (1993), os modelos em espaço de estados, envolvem várias terminologias e tipos de notação em virtude de serem aplicados tanto por engenheiros como por estatísticos. Enquanto os engenheiros falam de filtros de Kalman, os estatísticos falam de modelos lineares dinâmicos (Harrison e Stevens, 1976 e West e Harrison, 1989) ou de regressões lineares dinâmicas (Duncan e Horn, 1972).

Nesta investigação utiliza-se o termo espaço de estados no contexto da formulação de modelos e o termo filtro de Kalman no contexto da técnica usada no quadro de tais modelos. Considere-se um sistema descrito por um vector, vector de estado, de dimensão $m \times 1$, α_t , nos instantes de tempo $t = 1, \dots, n$, e seja o vector y_t de dimensão $p \times 1$ de variáveis observáveis.

Partindo do suposto que o estado segue um processo de Markov de primeira ordem, a equação de transição estabelece uma relação entre o estado actual e o estado no instante anterior. Assim, a formulação para o modelo em espaço de estados terá a equação de estado ou transição,

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

onde:

α_t é um vector de estado de dimensão $m \times 1$;

T_t é uma matriz de dimensão $m \times m$;

c_t é um vector de dimensão $m \times 1$;

R_t é uma matriz de dimensão $m \times r$;

η_t é um vector de dimensão $r \times 1$ de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula e matriz de variâncias/covariâncias Q_t ;

Q_t é uma matriz de dimensão $r \times r$.

Dado que o estado não é observável, é preciso estabelecer uma relação entre o vector $p \times 1$ de variáveis observáveis e o vector de estado $m \times 1$, que se define aqui através da equação de observação ou medida,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

onde:

\mathbf{y}_t é um vector de dimensão $p \times 1$;

\mathbf{Z}_t é uma matriz de dimensão $p \times m$;

\mathbf{d}_t é um vector de dimensão $p \times 1$;

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um vector de dimensão $p \times 1$ de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula e matriz de variância/covariância \mathbf{H}_t ;

\mathbf{H}_t é uma matriz de dimensão $p \times p$.

Esta formulação requer alguns pressupostos adicionais. No que diz respeito às condições iniciais do sistema, assume-se (Harvey, 1989),

$$E(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{a}_1 \quad (2.8)$$

e

$$Var(\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{P}_1. \quad (2.9)$$

Os termos das perturbações da equação de medida e da equação de transição não estão correlacionados entre si e com o vector de estado inicial, em qualquer momento de tempo, ou seja,

$$\begin{aligned}
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\eta}_s') &= 0, \forall s, t = 1, \dots, n, \\
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\alpha}_1') &= 0, \quad t = 1, \dots, n, \\
 E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\alpha}_1') &= 0, \quad t = 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

As matrizes \mathbf{Z}_t , \mathbf{d}_t , \mathbf{H}_t , \mathbf{T}_t , \mathbf{c}_t , \mathbf{R}_t e \mathbf{Q}_t denominam-se por matrizes de sistema e, a menos que seja dito o contrário, consideram-se não estocásticas ou não probabilísticas, ainda que possam mudar ao longo do tempo de forma predeterminada⁹. Se considerarmos que o sistema é linear, então em qualquer momento do tempo, o vector de variáveis observáveis \mathbf{y}_t pode expressar-se como uma combinação linear de valores presentes e passados das perturbações, $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, e do vector de estado inicial, \mathbf{a}_1 .

Se as matrizes de sistema, não se modificam ao longo do tempo, o modelo denomina-se homogéneo ou invariante no tempo. Num modelo homogéneo, a equação de transição segue um processo vector autoregressivo (*Vector Autoregressive Models* - VAR), mais concretamente um vector autoregressivo de ordem de defasamento igual a 1, VAR(1).

Os modelos não estacionários (Marques, 1998), apresentam-se como casos particulares que, sendo invariantes no tempo, transformam-se em estacionários ao se lhes aplicar o operador diferença (Murteira, 1990). Por outro lado, um modelo não tem de ser autoregressivo para que possa ser representado em espaço de estados. Pelo contrário, qualquer processo estocástico admite essa representação.

As matrizes do sistema \mathbf{Z}_t , \mathbf{H}_t , \mathbf{T}_t , \mathbf{R}_t e \mathbf{Q}_t podem depender de um conjunto de parâmetros desconhecidos que determinam as propriedades estocásticas do modelo, denominando-se hiperparâmetros, para os distinguir dos que intervêm nos vectores \mathbf{d}_t e \mathbf{c}_t que só afectarão o valor esperado do estado e as observações de forma determinística. Contudo se \mathbf{d}_t é função de valores desfasados de \mathbf{y}_t , esta conclusão não é válida.

⁹ Sempre que se considere que as matrizes são constantes ao longo do tempo, serão representadas sem o índice t .

Os vectores \mathbf{d}_t e \mathbf{c}_t contêm componentes fixas e são usados para incorporar efeitos conhecidos ou componentes conhecidas do modelo, caso contrário são considerados de valor nulo (Koopman, Wang e Zivot, 2004).

Na prática, as variáveis de estado individuais de um sistema dinâmico não são determinadas directamente. Logo, a sua medição realiza-se por meio de processos estocásticos que contêm algum grau de incerteza. Supõe-se assim que o modelo pode ser descrito através de uma representação estocástica linear, onde os erros associados, assim como a informação adicional que se lhe vai incorporando, têm uma distribuição normal com média zero e variância determinada.

2.6.1 Representação em espaço de estados simplificada

Tendo em conta a adequação do modelo às situações a modelar, construída a partir das igualdades descritas em (2.6) a (2.10), a representação de modelos em espaço de estados (Hamilton, 1994b), em estudos que equacionam realidades económicas, surge-nos usualmente na literatura econométrica de forma simplificada. A equação de observação ou medida simplificada é dada por,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

onde:

\mathbf{y}_t é um vector de dimensão $p \times 1$;

\mathbf{Z}_t é uma matriz de dimensão $p \times m$;

$\boldsymbol{\alpha}_t$ é um vector de estado de dimensão $m \times 1$;

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um vector de dimensão $p \times 1$ de perturbações, tal que, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i. i. d. N_p(0, \mathbf{H}_t)$;

\mathbf{H}_t é uma matriz de dimensão $p \times p$.

A equação de estado ou transição é,

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

onde:

T_t é uma matriz de dimensão $m \times m$;

R_t é uma matriz de dimensão $m \times r$;

η_t é um vector de dimensão $r \times 1$ de perturbações, tal que, $\eta_t \sim i. i. d. N_r(0, Q_t)$;

Q_t é uma matriz de dimensão $r \times r$.

Mantêm-se os pressupostos referidos em (2.8), (2.9) e (2.10) e as equações de observação e de estado simplificadas (2.11) e (2.12), serão as adoptadas ao longo desta investigação, como representação do modelo em espaço de estados. Tal facto prende-se principalmente à constatação de que em estudos desta natureza considera-se normalmente que os vectores d_t e c_t são nulos, ou seja, não existem componentes conhecidas associadas ao modelo (Harvey, 1989, Kim e Nelson, 1999, Durbin e Koopman, 2001, Koopman, Wang e Zivot, 2004 e Wada e Perron, 2006).

2.6.2 Notação alternativa na representação em espaço de estados

Definindo as matrizes do sistema, T e R , como constantes ao longo do tempo, vamos apresentar uma notação alternativa (Kim e Nelson, 1999), para a representação em (2.11) e (2.12). Esta notação é utilizada no estudo das principais propriedades estatísticas associadas à representação em espaço de estados. Seja então,

$$\alpha_{t+1} = T \alpha_t + R \eta_t$$

ou por substituição recursiva vem,

$$\alpha_{t+1} = T^t \alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-1} T^i \eta_{t-i}^* \quad (2.13)$$

com $\eta_{t-i}^* = R \eta_{t-i}$.

Assim, considerando com base em (2.13) que,

$$\alpha_t = T^{t-1} \alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-2} T^i \eta_{t-1-i}^* \quad (2.14)$$

e substituindo em (2.11) vem,

$$y_t = Z_t \left(T^{t-1} \alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-2} T^i \eta_{t-1-i}^* \right) + \varepsilon_t. \quad (2.15)$$

Dado (2.14) podemos calcular os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}$ em função de α_t e $\eta_{t-1}^*, \eta_{t-2}^*, \dots$, onde em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} \\ \alpha_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-t+1} \alpha_t - (T^{-1} \eta_1^* + T^{-2} \eta_2^* + \dots + T^{-t+1} \eta_{t-1}^*) \\ T^{-t+2} \alpha_t - (T^{-1} \eta_2^* + T^{-2} \eta_3^* + \dots + T^{-t+2} \eta_{t-1}^*) \\ \vdots \\ T^{-1} \alpha_t - T^{-1} \eta_{t-1}^* \\ \alpha_t \end{bmatrix}.$$

Ora neste caso,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} \\ \alpha_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-t+1} \alpha_t \\ T^{-t+2} \alpha_t \\ \vdots \\ T^{-1} \alpha_t \\ \alpha_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (T^{-1} \eta_1^* + T^{-2} \eta_2^* + \dots + T^{-t+1} \eta_{t-1}^*) \\ (T^{-1} \eta_2^* + T^{-2} \eta_3^* + \dots + T^{-t+2} \eta_{t-1}^*) \\ \vdots \\ T^{-1} \eta_{t-1}^* \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Utilizando (2.16), vemos que (2.11) pode ser representado da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \mathbf{T}^{-t+1} \\ \mathbf{Z}_2 \mathbf{T}^{-t+2} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{Z}_t \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t - \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{T}^{-2} \dots \mathbf{Z}_1 \mathbf{T}^{-t+1} \\ 0 & \mathbf{Z}_2 \mathbf{T}^{-1} \dots \mathbf{Z}_2 \mathbf{T}^{-t+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}_{t-1} \mathbf{T}^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^* \\ \boldsymbol{\eta}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

obtendo-se as representações matriciais para a equação de estado (2.16) e para a equação de observação (2.17).

2.7 Do modelo estrutural à representação em espaço de estados

Tendo em conta a representação adoptada para o modelo estrutural escalar (2.5) e a sua correspondente em espaço de estados para equação de medida em (2.11) temos que,

$$y_t = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \Gamma_t \\ C_t \\ C_{t-1} \\ \beta_t \end{bmatrix} + \varepsilon_t. \quad (2.18)$$

Considerando \mathbf{Z}_t , como sendo constante ao longo do tempo, ou seja, $\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}$, temos que,

$$y_t = \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}_t + \varepsilon_t,$$

onde,

$$\mathbf{Z} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

e o vector de estado é,

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \Gamma_t \\ C_t \\ C_{t-1} \\ \beta_t \end{bmatrix}.$$

No que se refere à equação de estado representada em (2.12) vem,

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{t+1} \\ C_{t+1} \\ C_t \\ \beta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_t \\ C_t \\ C_{t-1} \\ \beta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_t \\ \omega_t \\ \theta_t \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são parâmetros constantes a estimar e, assim sendo, as matrizes de sistema, T_t e R_t , são também constantes, ou seja, $T_t = T$ e $R_t = R$. Logo,

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$$

onde,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, por fim,

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \delta_t \\ \omega_t \\ \theta_t \end{bmatrix}.$$

O Quadro 2.1 resume as dimensões dos vectores e matrizes do nosso modelo em espaço de estados, caso se considere que o vector y_t representa uma única realidade económica.

Quadro 2.1: Dimensão dos vectores e das matrizes do modelo em espaço de estados

Vectores		Matrizes	
y_t	1×1	Z	1×4
α_t	4×1	T	4×4
ε_t	1×1	H	1×1
η_t	3×1	R	4×3
a_1	4×1	Q	3×3
		P_1	4×4

É com esta representação em espaço de estados que iremos arquitectar a algoritmia de Kalman e a aplicação informática para efectuar as respectivas simulações posteriores.

2.8 Propriedades estatísticas e função de verosimilhança do modelo

A exposição efectuada em 1960 por Kalman tem como base de representação o modelo em espaço de estados e, por esse facto, parece justificar-se nesta investigação referir um conjunto de propriedades estatísticas afectas à representação em espaço de estados. Com o enunciar destas propriedades, pensamos contribuir para melhor compreender os procedimentos matemáticos associados à construção do filtro de Kalman que serão realizados no capítulo seguinte.

2.8.1 Propriedades estatísticas do modelo

Tendo em conta os pressupostos (2.8) a (2.10) associados ao modelo representado em (2.14) e (2.15), considerando sem qualquer prejuízo adicional e para simplificação da notação que $\eta_t^* = R\eta_t$ e utilizando algumas das propriedades gerais dos operadores estatísticos, temos por (P2)¹⁰,

¹⁰ As propriedades estatísticas identificadas ao longo do texto pela letra P seguida de um número estão listadas em anexo, vide Anexo A.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\alpha}_t) &= E\left(\mathbf{T}^{t-1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \sum_{i=0}^{t-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^*\right) \\ &= \mathbf{T}^{t-1}E(\boldsymbol{\alpha}_1) + \sum_{i=0}^{t-2} \mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^*). \end{aligned}$$

Dado (2.8) e como $\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^*$ por definição em (2.12) tem média zero, o valor esperado do estado será definido por,

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{T}^{t-1}\mathbf{a}_1 \quad (2.20)$$

e o das observações, utilizando (2.11), virá dado por, $E(\mathbf{y}_t) = \mathbf{Z}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t) + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$.

Assim, como $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ por definição em (2.11) tem média zero e considerando (2.20) temos,

$$E(\mathbf{y}_t) = \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1. \quad (2.21)$$

Para o cálculo da covariância entre os estados em períodos de tempo não contemporâneos, por definição de covariância (Johnston e DiNardo, 2001), teremos que a covariância do estado vem dada por,

$$Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-k}) = E\left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_{t-k} - E(\boldsymbol{\alpha}_{t-k}))'\right). \quad (2.22)$$

Com base em (2.13) verificamos que,

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}^k \boldsymbol{\alpha}_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^*. \quad (2.23)$$

Logo, substituindo (2.23) em (2.22) e dado (P2) virá,

$$\begin{aligned}
 E \left((\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) &= \\
 &= E \left(\begin{pmatrix} \mathbf{T}^k \alpha_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \eta_{t-1-i}^* \\ -E \left(\mathbf{T}^k \alpha_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \eta_{t-1-i}^* \right) \end{pmatrix} (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) \\
 &= E \left(\begin{pmatrix} \mathbf{T}^k (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k})) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \eta_{t-1-i}^* \\ -E \left(\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \eta_{t-1-i}^* \right) \end{pmatrix} (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right)
 \end{aligned}$$

η_{t-1-i}^* por definição em (2.12) tem média zero, logo,

$$\begin{aligned}
 E \left((\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) &= \\
 &= E \left(\begin{pmatrix} \mathbf{T}^k (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k})) (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \eta_{t-1-i}^* (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \end{pmatrix} \right). \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Utilizando (2.23), dado (P2) e como η_{t-1-i}^* tem média zero, temos,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}) &= \\
 &= \mathbf{T}^{t-k-1} \alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \eta_{t-k-1-i}^* - E \left(\mathbf{T}^{t-k-1} \alpha_1 + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \eta_{t-k-1-i}^* \right)
 \end{aligned}$$

$$= \mathbf{T}^{t-k-1} \boldsymbol{\alpha}_1 + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* - \mathbf{T}^{t-k-1} E(\boldsymbol{\alpha}_1).$$

Logo, utilizando (2.8) virá,

$$\boldsymbol{\alpha}_{t-k} - E(\boldsymbol{\alpha}_{t-k}) = \mathbf{T}^{t-k-1}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1) + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^*. \quad (2.25)$$

Utilizando (2.24) e (2.25) verificamos que,

$$E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t)) (\boldsymbol{\alpha}_{t-k} - E(\boldsymbol{\alpha}_{t-k}))' \right) =$$

$$= E \left(\begin{array}{c} \mathbf{T}^k \left(\mathbf{T}^{t-k-1}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1) + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \right) \\ \left(\mathbf{T}^{t-k-1}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1) + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \right)' \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^* \left(\mathbf{T}^{t-k-1}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1) + \sum_{i=0}^{t-k-2} \mathbf{T}^i \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \right)' \end{array} \right). \quad (2.26)$$

Pelas propriedades da multiplicação de matrizes resulta que (2.26) é,

$$\begin{aligned}
 & E \left((\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) = \\
 & = \mathbf{T}^{t-1} E \left((\alpha_1 - \mathbf{a}_1)(\alpha_1 - \mathbf{a}_1)' \right) (\mathbf{T}^{t-k-1})' \\
 & + \mathbf{T}^k \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* (\alpha_1 - \mathbf{a}_1)') (\mathbf{T}^{t-k-1})' \right) \\
 & + \mathbf{T}^{t-1} \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(E((\alpha_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^*)') (\mathbf{T}^i)' \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\sum_{j=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^{k+i} E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-j}^*) (\mathbf{T}^j)') \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^* (\alpha_1 - \mathbf{a}_1)') (\mathbf{T}^{t-k-1})' \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-j}^*) (\mathbf{T}^j)') \right).
 \end{aligned}$$

Manipulando matematicamente podemos ver que,

$$\begin{aligned}
 & E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_{t-k} - E(\boldsymbol{\alpha}_{t-k}))' \right) = \\
 & = \mathbf{T}^{t-1} E \left((\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)' \right) (\mathbf{T}^{t-k-1})' \\
 & + \mathbf{T}^k \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* (\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)') (\mathbf{T}^{t-k-1})' \right) \\
 & + \mathbf{T}^{t-1} \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(E((\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^*)') (\mathbf{T}^i)' \right) \\
 & + \left(\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^{k+i} E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^{\prime*}) (\mathbf{T}^i)' \right) \\ & + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^{k+i} E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-j}^{\prime*}) (\mathbf{T}^j)' \right) \end{aligned} \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^* (\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)') (\mathbf{T}^{t-k-1})' \right) \\
 & + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^i E(\boldsymbol{\eta}_{t-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-j}^{\prime*}) (\mathbf{T}^j)' \right) \right).
 \end{aligned}$$

Considerando (2.12), a definição de $Var(\boldsymbol{\alpha}_1)$ e como $\boldsymbol{\eta}_t$ é um vector de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula, simplificando a expressão obtém-se,

$$\begin{aligned}
 & E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_{t-k} - E(\boldsymbol{\alpha}_{t-k}))' \right) = \\
 & = \mathbf{T}^{t-1} Var(\boldsymbol{\alpha}_1) (\mathbf{T}^{t-k-1})' + \sum_{i=0}^{t-k-2} \left(\mathbf{T}^{k+i} E(\boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^* \boldsymbol{\eta}_{t-k-1-i}^{\prime*}) (\mathbf{T}^i)' \right)
 \end{aligned}$$

e assim por (2.9), como definiu-se $\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{\eta}_t^*$ e também como em (2.12) $\boldsymbol{\eta}_t \sim i. i. d. N_r(0, \mathbf{Q})$, vem,

$$\begin{aligned} E \left((\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) &= \\ &= T^{t-1} P_1 (T^{t-k-1})' + \sum_{i=0}^{t-k-2} (T^{k+i} R Q R' (T^i)'). \end{aligned}$$

Definindo a covariância do estado em momentos temporais não contemporâneos por $P_{t,t-k}$, temos,

$$P_{t,t-k} = E \left((\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' \right) \quad (2.27)$$

quer dizer que,

$$P_{t,t-k} = T^{t-1} P_1 (T^{t-k-1})' + \sum_{i=0}^{t-k-2} (T^{k+i} R Q R' (T^i)'). \quad (2.28)$$

Relativamente à covariância das observações y_t do modelo (2.11), como ε_t por definição tem média zero e dado (P2) temos,

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t-k}) &= E \left((y_t - E(y_t))(y_{t-k} - E(y_{t-k}))' \right) = \\ &= E \left((Z_t \alpha_t + \varepsilon_t - Z_t E(\alpha_t))(Z_{t-k} \alpha_{t-k} + \varepsilon_{t-k} - Z_{t-k} E(\alpha_{t-k}))' \right) \\ &= E \left((Z_t (\alpha_t - E(\alpha_t)) + \varepsilon_t)(Z_{t-k} E(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k})) + \varepsilon_{t-k})' \right) \\ &= E(Z_t (\alpha_t - E(\alpha_t))(\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' Z_{t-k}') \\ &\quad + E(\varepsilon_t (\alpha_{t-k} - E(\alpha_{t-k}))' Z_{t-k}') \\ &\quad + E(Z_t (\alpha_t - E(\alpha_t)) \varepsilon_{t-k}') + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}'). \end{aligned}$$

Considerando (2.27), (P2) e ainda que $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um vector de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula, obtém-se,

$$Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) = E\left((\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))(\mathbf{y}_{t-k} - E(\mathbf{y}_{t-k}))'\right) = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t-k} \mathbf{Z}'_{t-k}$$

onde por (2,28) resulta que,

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) &= E\left((\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))(\mathbf{y}_{t-k} - E(\mathbf{y}_{t-k}))'\right) = \\ &= \mathbf{Z}_t \left(\mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{T}^{t-k-1})' + \sum_{i=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^{k+i} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}' (\mathbf{T}^i)') \right) \mathbf{Z}'_{t-k} \quad (2.29) \\ &= \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{T}^{t-k-1})' + \mathbf{Z}_t \sum_{i=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^{k+i} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}') (\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{T}^i)'. \end{aligned}$$

Considerando a variância das observações \mathbf{y}_t do modelo (2.11), com $Var(\mathbf{y}_t) = Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t)$ e utilizando as mesmas igualdades e propriedades de $Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k})$, só que desta feita com $k = 0$, temos,

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{y}_t) &= Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) = E\left((\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))(\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))'\right) = \\ &= E\left((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t))'\right) \\ &= E\left((\mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t)) + \boldsymbol{\varepsilon}_t)(\mathbf{Z}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t)) + \boldsymbol{\varepsilon}_t)'\right) \\ &= E(\mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \mathbf{Z}_t) \\ &\quad + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \mathbf{Z}_t) \\ &\quad + E(\mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t)) \boldsymbol{\varepsilon}_t') + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') \end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{P}_{t,t} = E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \right)$, por (P2) e como $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i. i. d. N_p(0, \mathbf{H})$ conclui-se que,

$$\text{Var}(\mathbf{y}_t) = E \left((\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))(\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))' \right) = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}. \quad (2.30)$$

Considerando $\mathbf{P}_{t,t}$ de acordo com (2.28), ou seja, $\mathbf{P}_{t,t-k}$ com $k = 0$, verifica-se ainda que,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{y}_t) &= E \left((\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))(\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))' \right) = \\ &= \mathbf{Z}_t \left(\mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{T}^{t-1})' + \sum_{i=0}^{t-2} (\mathbf{T}^i \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}' (\mathbf{T}^i)') \right) \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H} \end{aligned}$$

e então,

$$\text{Var}(\mathbf{y}_t) = \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1})' + \mathbf{Z}_t \sum_{i=0}^{t-2} (\mathbf{T}^i \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}') (\mathbf{Z}_t \mathbf{T}^i)' + \mathbf{H}. \quad (2.31)$$

Segundo Steyn (1996), a estacionaridade em média do estado observa-se se $\boldsymbol{\alpha}_1 = 0$, ou então se \mathbf{T} possui algum valor próprio¹¹ unitário tal que $\mathbf{T}^{t-1} \boldsymbol{\alpha}_1$ é constante. Ainda segundo o mesmo autor pode-se demonstrar que os momentos de segunda ordem são invariantes com respeito a t se e só se todos os autovalores de \mathbf{T} estão dentro do círculo de raio unitário.

2.8.2 Função de verosimilhança

Considere-se que se pretende obter a função de verosimilhança de j vectores de observação. Para tal define-se a representação em espaço de estados, tendo em conta as equações (2.11) e (2.12) e respectivas dimensões das matrizes e dos vectores. Seja então \mathbf{y} o vector de observação,

¹¹ Seja então uma qualquer matriz \mathbf{A} quadrada de ordem n sobre um corpo K . Se existe um escalar $\xi \in K$ e um vector $\mathbf{v} \neq 0$, tal que, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \xi\mathbf{v}$, este escalar ξ é denominado um autovalor (valor próprio ou valor característico) de \mathbf{A} e \mathbf{v} é um autovector associado a este escalar ξ .

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \text{ de dimensão } pj \times 1,$$

α o vector de estado, dado por,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{j+1} \end{bmatrix} \text{ de dimensão } mj \times 1$$

e ε o vector de erro aleatório, dado por,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_j \end{bmatrix} \text{ de dimensão } pj \times 1.$$

Considere-se também a matriz de sistema \mathbf{Z} , tal que,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \mathbf{Z}_j \end{bmatrix} \text{ diagonal, de dimensão } pj \times mj$$

e assim,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\alpha + \varepsilon. \tag{2.32}$$

Defina-se agora o produto Kronecker de duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} . Seja então uma qualquer matriz \mathbf{A} ($m \times p$) e \mathbf{B} ($p \times q$), o produto Kronecker de \mathbf{A} com \mathbf{B} é definido pela matriz $(mp) \times (pq)$ tal que (Hamilton, 1994a),

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_{pj}(\mathbf{0}, (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H})),$$

onde \otimes define o produto de Kronecker e $Var(\boldsymbol{\varepsilon})$ é uma matriz $j \times j$ de matrizes de ordem $p \times p$ definida por,

$$Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, com $\boldsymbol{\eta}^* = \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}$ e se por definição considerar que,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) + \mathbf{T}_2\boldsymbol{\eta}^* \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{T}_1 = \text{diag}(\mathbf{T}, \mathbf{T}^2, \dots, \mathbf{T}^j)$, \mathbf{i}_j é um vector $j \times 1$ unitário,

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{T} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}^{j-1} & \mathbf{T}^{j-2} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\eta}^* \sim N_{mj}(\mathbf{0}, (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{Q})).$$

Considere-se agora $\boldsymbol{\alpha}_1$ como sendo o estado inicial e $\boldsymbol{\eta}_t^* = \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_t$, com $\boldsymbol{\eta}_t^*$ de dimensão $mj \times 1$. Assim,

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\eta}_1^*$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{T}^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\eta}_2^* + \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}_1^*$$

$$= \cdots =$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{j+1} = \mathbf{T}^j\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\eta}_j^* + \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^* + \cdots + \mathbf{T}^{j-1}\boldsymbol{\eta}_1^*$$

como ε tem média zero vem,

$$E(\mathbf{y}) = E(\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{Z}E(\boldsymbol{\alpha}).$$

Utilizando (2.33) virá que,

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}E(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}E(\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) + \mathbf{T}_2\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}).$$

Por analogia a (2.8) e considerando como em (2.33) que $E(\boldsymbol{\eta}^*) = E(\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}E(\boldsymbol{\eta}) = E(\boldsymbol{\eta}) = 0$, vem,

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}E(\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1)) = \mathbf{Z}\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1). \quad (2.34)$$

Logo, como $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{j+1} \end{bmatrix}$, por (2.33), como $E(\boldsymbol{\eta}^*) = 0$ e por (2.34) podemos

concluir que,

$$\mathbf{Z}E(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Z}E(\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) + \mathbf{T}_2\boldsymbol{\eta}^*) = \mathbf{Z}\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1). \quad (2.35)$$

Ora por (2.35) $\mathbf{Z}E(\boldsymbol{\alpha}) = E(\mathbf{y})$, se considerarmos $\boldsymbol{\mu} \equiv E(\mathbf{y})$, por (2.20) temos,

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{Z} \left((\mathbf{T}\mathbf{a}_1)', \dots, (\mathbf{T}^j\mathbf{a}_1)' \right)' \quad (2.36)$$

considerando ainda (2.32) e (2.35) vem,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{y}) &= E \left((\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))' \right) = E \left((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \right) \\ &= E \left((\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Z}\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1))(\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Z}\mathbf{T}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1))' \right) \end{aligned}$$

por (2.33) temos,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\mathbf{y}) &= E\left((\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))'\right) = E((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})') \\
 &= E\left(\begin{pmatrix} (\mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) + \mathbf{ZT}_2\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1)) \\ (\mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) + \mathbf{ZT}_2\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1))' \end{pmatrix}\right) \\
 &= E\left(\begin{pmatrix} (\mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) - \mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1) + \mathbf{ZT}_2\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}) \\ (\mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \boldsymbol{\alpha}_1) - \mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{a}_1) + \mathbf{ZT}_2\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\varepsilon})' \end{pmatrix}\right)
 \end{aligned}$$

manipulando algebricamente e com $\mathbf{R}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$, obtém-se,

$$\begin{aligned}
 &E((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})') = \\
 &= E(\mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \mathbf{i}_j' \otimes (\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)')\mathbf{T}_1'\mathbf{Z}') \\
 &+ E(\mathbf{ZT}_2\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}'\mathbf{R}'\mathbf{T}_2'\mathbf{Z}') + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') \\
 &= \mathbf{ZT}_1\left(\mathbf{i}_j \mathbf{i}_j' \otimes E((\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)')\right)\mathbf{T}_1'\mathbf{Z}' \\
 &+ \mathbf{ZT}_2\mathbf{R}E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}')\mathbf{R}'\mathbf{T}_2'\mathbf{Z}' + E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}').
 \end{aligned}$$

Por definição de variância e por analogia a (2.9) onde $\mathbf{P}_1 = E((\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_1)')$ e como sabemos que $\boldsymbol{\eta} \sim N_{mj}(\mathbf{0}, (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{Q}))$ e que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_{pj}(0, (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}))$, vem,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\mathbf{y}) &= E((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})') = \\
 &= \mathbf{ZT}_1(\mathbf{i}_j \mathbf{i}_j' \otimes \mathbf{P}_1)\mathbf{T}_1'\mathbf{Z}' + \mathbf{ZT}_2\mathbf{R}(\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{Q})\mathbf{R}'\mathbf{T}_2'\mathbf{Z}' + (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}).
 \end{aligned}$$

Podemos dizer, se considerarmos $Var(\mathbf{y}) \equiv \Sigma$, que,

$$\Sigma \equiv ZT_1(\mathbf{i}_j \mathbf{i}'_j \otimes \mathbf{P}_1)T_1'Z' + ZT_2R(\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{Q})R'T_2'Z' + (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H}). \quad (2.37)$$

Como \mathbf{y} é normal multivariante de dimensão $pj \times 1$, com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância Σ , a função de verosimilhança vem dada por (Reis, 2001),

$$L(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pj}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

e o logaritmo neperiano será (Kim e Nelson, 1999 e Reis, 2001),

$$\ln L(\mathbf{y}) = -\frac{pj}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Sigma| - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}). \quad (2.38)$$

A partir da função de verosimilhança pode-se derivar estimações de máxima verosimilhança dos parâmetros do modelo, ainda que possam surgir problemas de identificação (Stejn, 1996). Se não se impuserem restrições às matrizes do sistema, os parâmetros da representação no espaço de estados podem não ser identificados, ou seja, pode ocorrer que mais de um conjunto de valores dos parâmetros dêem lugar a idêntico valor da função de verosimilhança e os dados não nos permitirem fazer a escolha de tais valores (Hamilton, 1994a).

2.8.3 Distribuição do estado condicionada às observações contemporâneas

Considere-se a distribuição do estado condicionada às observações contemporâneas $p(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_t)$. Assim, se,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} E(\boldsymbol{\alpha}_t) \\ E(\mathbf{y}_t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Var(\boldsymbol{\alpha}_t) & Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) \\ Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t)' & Var(\mathbf{y}_t) \end{bmatrix} \right),$$

tendo em conta que por definição de covariância,

$$Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) = E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t))' \right)$$

virá por (2.11) e (2.21) que,

$$Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) = E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1)' \right)$$

e que por (2.20),

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) &= E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t)) + \boldsymbol{\varepsilon}_t)' \right) = \\ &= E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \mathbf{Z}_t' \right) + E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))\boldsymbol{\varepsilon}_t' \right). \end{aligned}$$

Pelas propriedades da multiplicação de matrizes e pela pressuposto em (2.11) sobre o valor esperado zero de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, temos que,

$$Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) = E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \mathbf{Z}_t' \right).$$

Como já sabemos, $\mathbf{P}_{t,t} = E \left((\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))(\boldsymbol{\alpha}_t - E(\boldsymbol{\alpha}_t))' \right)$, podemos dizer que,

$$Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) = \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t'. \quad (2.39)$$

Por (2.20), (2.21), $\mathbf{P}_{t,t} = Var(\boldsymbol{\alpha}_t)$, (2.30) e por (2.39) a matriz de variância/covariância é,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t,t} & \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' \\ \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} & \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H} \end{bmatrix} \right). \quad (2.40)$$

Considere-se a seguinte igualdade (veja-se Anderson, 1984 e Durbin e Koopman, 2001),

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_t) = E(\boldsymbol{\alpha}_t) + Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) Var(\mathbf{y}_t)^{-1} (\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t)). \quad (2.41)$$

Substituindo com as igualdades de (2.40) vem,

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_t) = \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}'_t (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}'_t + \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1). \quad (2.42)$$

Por outro lado para o cálculo da variância, temos (veja-se Anderson, 1984 e Durbin e Koopman, 2001),

$$Var(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_t) = Var(\boldsymbol{\alpha}_t) - Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t) Var(\mathbf{y}_t)^{-1} Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{y}_t)'. \quad (2.43)$$

Logo podemos dizer que por (2.40) vem,

$$Var(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_t) = \mathbf{P}_{t,t} + \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}'_t (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}'_t + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t}. \quad (2.44)$$

O Quadro 2.2 resume e agrupa as propriedades estatísticas anteriores.

Quadro 2.2: Propriedades estatísticas da representação em espaço de estados

$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$	(2.11)
$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t^*$	(2.12)
$E(\boldsymbol{\alpha}_t) = \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1$	(2.20)
$E(\mathbf{y}_t) = \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1$	(2.21)
$\mathbf{P}_{t,t-k} = \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{T}^{t-k-1})' + \sum_{i=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^{k+i} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}' (\mathbf{T}^i)')$	(2.28)
$Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-k}) =$ $= \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{T}^{t-k-1})' + \mathbf{Z}_t \sum_{i=0}^{t-k-2} (\mathbf{T}^{k+i} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}') (\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{T}^i)'$	(2.29)
$Var(\mathbf{y}_t) =$ $= \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{P}_1 (\mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1})' + \mathbf{Z}_t \sum_{i=0}^{t-2} (\mathbf{T}^i \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}') (\mathbf{Z}_t \mathbf{T}^i)' + \mathbf{H}$	(2.31)
$E(\mathbf{y}) \equiv \boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{Z} \left((\mathbf{T} \mathbf{a}_1)', \dots, (\mathbf{T}^j \mathbf{a}_1)' \right)'$	(2.36)
$Var(\mathbf{y}) \equiv \boldsymbol{\Sigma} \equiv$ $\equiv \mathbf{Z} \mathbf{T}_1 (\mathbf{i}_j \mathbf{i}_j' \otimes \mathbf{P}_1) \mathbf{T}_1' \mathbf{Z}' + \mathbf{Z} \mathbf{T}_2 \mathbf{R} (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{Q}) \mathbf{R}' \mathbf{T}_2' \mathbf{Z}' + (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{H})$	(2.37)
$\ln L(\mathbf{y}) = -\frac{pj}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$	(2.38)
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{y}_t) =$ $= \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{T}^{t-1} \mathbf{a}_1)$	(2.42)
$Var(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{y}_t) = \mathbf{P}_{t,t} + \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t,t}$	(2.44)

Este conjunto de propriedades vai possibilitar um melhor enquadramento e compreensão da estrutura do algoritmo que arquitecta o filtro de Kalman (1960) nas suas variadas aplicações.

3 Métodos recursivos de extracção de sinal: o filtro de Kalman

A investigação efectuada por Kalman (1960) constituiu provavelmente, um dos contributos mais importantes para o estudo de modelos em espaço de estados. Kalman estuda o modelo $\mathbf{y}_t = h(\boldsymbol{\alpha}_t, t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ no caso linear, mas generaliza-o, assumindo que $\boldsymbol{\alpha}_t$ segue uma evolução estocástica. Com esta análise, obtém resultados extraordinariamente gerais e potentes e concluiu que a melhor estimação para o estado $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}$ pode ser obtida recursivamente a partir da melhor estimação de $\boldsymbol{\alpha}_t$ e da sua matriz de covariâncias.

Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961) conceberam um procedimento computacional recursivo que se pode aplicar tanto a magnitudes estacionárias como não estacionárias, efectuando com ele a estimação das componentes não observadas até ao instante t , com base na informação disponível relacionada com aquela, até ao mesmo instante de tempo t .

Embora se possa afirmar que este algoritmo tem como núcleo central o algoritmo de Gauss-Plackett de estimação dos mínimos quadrados recursivos, Kalman formulou-o com parâmetros que variam ao longo do tempo e deu-lhe uma base teórica assente na teoria das probabilidades, mais especificamente, sobre as propriedades da condicionalidade gaussiana (distribuição normal) de variáveis aleatórias (Johnson e Wichern, 1992). Por outro lado, não só introduziu a referida abordagem, como concedeu-lhe simultaneamente três importantes traços distintivos (Crato, 1990). O primeiro, centrou-se no estudo dos processos estocásticos¹² e das suas relações numa perspectiva sistémica, impondo o emprego de modelos probabilísticos. Considera-se pois a existência de entradas, aleatórias e

¹² Processos evoluem no tempo de forma aleatória.

determinísticas¹³, que são transformadas no interior do sistema, dando origem a um processo observado. O segundo traço distintivo da teoria de Kalman é o carácter dinâmico do sistema. Os parâmetros que definem as relações entre os processos e das suas próprias características de segunda ordem variam no tempo¹⁴. Um terceiro traço característico da formulação é o carácter finito e linear do sistema. As variáveis são de dimensão finita, tal como a sequência de observações, sendo que a linearidade é um atributo essencial à manuseabilidade matemática e universalidade das propriedades do modelo (Kalman, 1982).

Enumere-se e construa-se então o procedimento completo de formulação efectuado por Kalman que se inicia no instante em que o modelo é formulado em espaço de estados e lhe é atribuído um conjunto inicial de parâmetros, conduzindo-nos até aos erros de previsão do modelo que são gerados através do filtro. Estes mesmos erros serão posteriormente utilizados, com a chegada de novos valores (observações) para avaliar recursivamente os resultados obtidos, considerando um critério de optimização, operando o filtro com procedimentos matemáticos, com base nos mecanismos de previsão e actualização formulados na proposta do autor.

3.1 Previsão e actualização (um período à frente)

Considere-se conhecido o conjunto com a sequência das observações $\mathbf{Y}_{t-1} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{t-1}]$ e assumase que a distribuição condicional de α_t , dado \mathbf{Y}_{t-1} , é $N(\mathbf{a}_t, \mathbf{P}_t)$ onde \mathbf{a}_t e \mathbf{P}_t são também conhecidos.

O modelo adoptado nesta investigação, sem perda de generalidade, segue de perto as propostas de Clark (1987), Harvey (1989), Hamilton (1994a, 1994b), Chang e Nelson (1999), Durbin e Koopman (2001), Zivot, Wang e Koopman (2004) e Wada e Perron (2006). Qualquer outra representação em espaço de estados, nas equações de medida e de transição, obrigaria a uma adaptação à nova realidade matemática. Essas manipulações, embora necessárias, não trariam maior dificuldade matemática, comparativamente às manipulações expostas neste texto.

¹³ Nas entradas determinísticas se conhecemos o estado inicial e a sequência de entrada então toda a trajectória de estados e a sequência de saída pode ser determinada.

¹⁴ Para um aprofundamento desta temática recomenda-se a consulta do método do lugar das raízes na teoria do controlo (Ogata, 2003).

Sendo o filtro de Kalman um processo recursivo, necessitará de alguns valores iniciais que possibilitem o desencadear do procedimento de cálculo, necessitando o investigador de adoptar algum mecanismo que os defina. Considere-se por ora, o modelo em espaço de estados representado em (2.11) e (2.12) e defina-se como condição inicial do valor esperado e da variância, \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 , respectivamente. Assim sendo, $\boldsymbol{\alpha}_1 \sim i. i. d. N(\mathbf{a}_1, \mathbf{P}_1)$.

Uma vez formulado o modelo em espaço de estados, a sua aplicação a séries temporais reais exige o cálculo das médias e variâncias condicionadas às observações das variáveis de estado $\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}$, $\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t$ e $\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$ (previsão, actualização e alisamento), bem como ajustar o modelo aos dados, obtendo estimações de máxima verosimilhança dos parâmetros desconhecidos e calcular as variâncias dos termos de perturbação das diferentes equações (Crato, 1990).

Inicie-se o estudo pela previsão de \mathbf{a}_{t+1} e \mathbf{P}_{t+1} , conhecidos \mathbf{a}_t e \mathbf{P}_t e a observação \mathbf{y}_t . Note-se que a previsão e a filtragem são consideradas simultaneamente porque os processos recursivos de ambas as derivações estão relacionados. Seja então,

$$\mathbf{a}_t = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \quad (3.1)$$

e

$$\mathbf{P}_t = Var(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}). \quad (3.2)$$

Considere-se agora,

$$\mathbf{a}_{t+1} = E(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{Y}_t).$$

Utilizando (2.12) obtemos,

$$\mathbf{a}_{t+1} = E(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t).$$

Pela adaptação da propriedade (P2) em anexo¹⁵ temos,

$$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) + \mathbf{R}_t E(\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t).$$

Dado que, por definição, em (2.12) o valor esperado de $\boldsymbol{\eta}_t$ é zero, logo,

$$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t). \quad (3.3)$$

Por outro lado, utilizando (2.12) obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{Y}_t) = \text{Var}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t).$$

Pela propriedade (P5) vem,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \text{Var}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) + \text{Var}(\mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t) + 2\text{Cov}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t).$$

Como $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ por definição em (2.10) são independentes, por (P9) temos,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \text{Var}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) + \text{Var}(\mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t),$$

donde, por (P6) e novamente por (2.12) onde $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t | \mathbf{Y}_t) = \mathbf{Q}_t$, vem,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'. \quad (3.4)$$

¹⁵ As propriedades estatísticas identificadas ao longo do texto estão listadas no anexo, Anexo A.

Defina-se agora o erro de previsão \mathbf{v}_t , quantidade calculada pela diferença entre o valor observado \mathbf{y}_t e o seu valor esperado, condicionado ao conjunto de observações \mathbf{Y}_{t-1} , assim,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}). \quad (3.5)$$

Por (2.11) e utilizando (P2) temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{y}_t - E(\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{y}_t - E(\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &= \mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}). \end{aligned}$$

Por definição em (2.11), temos $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$ e como $E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{a}_t$, vem,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t. \quad (3.6)$$

Utilizando (3.6) e (2.11) verifica-se que,

$$E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = E(\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = E(\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t | \mathbf{Y}_{t-1}).$$

Ora por (P2) e por definição $E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{a}_t$ e $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$, vem,

$$E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t = \mathbf{0}.$$

Assim, e com base em (P3) podemos dizer que,

$$E(\mathbf{v}_t) = E(E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1})) = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Considere-se agora, a covariância entre as variáveis \mathbf{v}_t e \mathbf{y}_j , erros de previsão e valores observados, respectivamente, com $j = 1, \dots, t - 1$. Utilizando (P10) e como por (3.7) considera-se que $E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$, bem como $\mathbf{v}_t = E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$, obtém-se,

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{y}_j, \mathbf{v}_t) &= E(\mathbf{y}_j \mathbf{v}_t') - E(\mathbf{y}_j)E(\mathbf{v}_t) = E(\mathbf{y}_j \mathbf{v}_t') \\ &= E(\mathbf{y}_j E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1})') = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Quando \mathbf{Y}_t é conhecido, \mathbf{Y}_{t-1} e \mathbf{y}_t são conhecidos, então \mathbf{Y}_{t-1} e \mathbf{v}_t são conhecidos e vice-versa. Consequentemente, $E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t)$ e $Var(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) = Var(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t)$ (Durbin e Koopman, 2001). Pelo exposto, o valor esperado do estado $\boldsymbol{\alpha}_t$, condicionado ao conjunto de observações \mathbf{Y}_t , poderá ser dado por,

$$\mathbf{a}_{t|t} = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t). \quad (3.9)$$

Ao valor $\mathbf{a}_{t|t}$ chamamos valor filtrado ou actualizado, e o seu valor é calculado quando a observação \mathbf{y}_t é conhecida. Considere-se a igualdade (veja-se Durbin e Koopman (2001)),

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) + Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_t) Var(\mathbf{v}_t)^{-1} \mathbf{v}_t. \quad (3.10)$$

Temos então, utilizando (3.1), (3.9) e (3.10) que,

$$\mathbf{a}_{t|t} = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = \mathbf{a}_t + \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t, \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{M}_t = Cov(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_t)$, $\mathbf{F}_t = Var(\mathbf{v}_t)$.

Utilizando (P3), (P10), como $E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$ e utilizando (3.8) vem,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &= E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}_t') - E(\boldsymbol{\alpha}_t)E(\mathbf{v}_t') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}_t') = E(\boldsymbol{\alpha}_t E(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1})') \\ &= E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}_t' | \mathbf{Y}_{t-1}). \end{aligned}$$

Por (2.11), (3.6), e por (P2) vem que,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &= E(\boldsymbol{\alpha}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) = E(\boldsymbol{\alpha}_t(\mathbf{Z}_t\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &= E(\boldsymbol{\alpha}_t(\mathbf{Z}_t\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) + E(\boldsymbol{\alpha}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t' | \mathbf{Y}_{t-1}). \end{aligned}$$

Como por (2.10) $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ são independentes, por (P4) e ainda por definição em (2.11) sabemos que $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t' | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$, logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &= E(\boldsymbol{\alpha}_t(\mathbf{Z}_t\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1})E(\boldsymbol{\varepsilon}_t' | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &= E(\boldsymbol{\alpha}_t(\mathbf{Z}_t\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}). \end{aligned}$$

que pelas propriedades da multiplicação de matrizes, da matriz transposta e por (P2) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &= E(\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t)' \mathbf{Z}_t' | \mathbf{Y}_{t-1}) = E(\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) \mathbf{Z}_t' \\ &= E((\boldsymbol{\alpha}_t^2 - \boldsymbol{\alpha}_t\mathbf{a}_t)' | \mathbf{Y}_{t-1}) \mathbf{Z}_t' = (E(\boldsymbol{\alpha}_t^2 | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\alpha}_t\mathbf{a}_t | \mathbf{Y}_{t-1}))' \mathbf{Z}_t'. \end{aligned}$$

Por definição de \mathbf{a}_t em (3.1), por (P7) e por as matrizes variância serem simétricas, observa-se ainda que,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &= (E(\boldsymbol{\alpha}_t^2 | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\alpha}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) | \mathbf{Y}_{t-1}))' \mathbf{Z}_t' \\ &= (E(\boldsymbol{\alpha}_t^2 | \mathbf{Y}_{t-1}) - E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1})^2)' \mathbf{Z}_t' = \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1})' \mathbf{Z}_t' \\ &= \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \mathbf{Z}_t', \end{aligned}$$

donde, por definição de $\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1})$ em (3.2) vem,

$$\mathbf{M}_t = \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_t) = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t'. \quad (3.12)$$

Seja \mathbf{F}_t a variância do erro de previsão, assim por (2.11), (3.6) e (P5) vem que,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_t &= \text{Var}(\mathbf{v}_t) = \text{Var}(\mathbf{v}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \text{Var}((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &= \text{Var}(((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &= \text{Var}((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) + \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \\ &\quad + 2\text{Cov}((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t), \boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}).\end{aligned}$$

Por definição de $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1})$ em (2.11) e como $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ por (2.10) são independentes logo $\text{Cov}((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t), \boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$, assim,

$$\mathbf{F}_t = \text{Var}((\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) + \mathbf{H}_t = \text{Var}(\mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) + \mathbf{H}_t,$$

onde por (P6) temos,

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \text{Var}((\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t) | \mathbf{Y}_{t-1}) \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t = \mathbf{Z}_t \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t.$$

logo com base na definição em (3.2) de $\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1})$, vem,

$$\mathbf{F}_t = \text{Var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t. \quad (3.13)$$

Podemos pois dizer por (3.3) e (3.11) que,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{t+1} &= \mathbf{T}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_t) = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_{t|t} = \mathbf{T}_t (\mathbf{a}_t + \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t) \\ &= \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{T}_t \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t.\end{aligned}$$

Logo se definir,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{T}_t \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1}, \quad (3.14)$$

obtemos α_{t+1} como função linear dos valores de \mathbf{a}_t e \mathbf{v}_t . Ou seja,

$$\alpha_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t \quad \text{com } t = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Considere-se a igualdade (veja-se Durbin e Koopman (2001)),

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t) &= \\ &= \text{Var}(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) - \text{Cov}(\alpha_t, \mathbf{v}_t) \text{Var}(\mathbf{v}_t)^{-1} \text{Cov}(\alpha_t, \mathbf{v}_t)'. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim, pelo exposto podemos dizer por (3.2), (3.11) e (3.12) que,

$$\text{Var}(\alpha_t | \mathbf{Y}_t) = \text{Var}(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t) = \mathbf{P}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{M}_t' = \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t'.$$

Como \mathbf{P}_t é uma matriz de variância, $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t'$, logo,

$$\text{Var}(\alpha_t | \mathbf{Y}_t) = \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t. \quad (3.17)$$

Considerando (3.4) e (3.17), por manipulação da equação e pelas propriedades da multiplicação de matrizes e da matriz transposta, obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1} &= \mathbf{T}_t (\mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t) \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \\ &= \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t (\mathbf{I}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t) \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \\ &= \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t (\mathbf{T}_t - \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t)' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'. \end{aligned}$$

Se definirmos a igualdade e por (3.12) e (3.14) temos,

$$L_t = T_t - T_t P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t = T_t - K_t Z_t, \quad (3.18)$$

então, obtém-se o resultado dado por,

$$P_{t+1} = T_t P_t L_t' + R_t Q_t R_t'. \quad (3.19)$$

Obtivemos assim o conjunto das relações fundamentais, listadas no Quadro 3.1, para $t = 1, \dots, n$, onde se assume que \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 são conhecidos e a dimensão concreta dos vectores e das matrizes depende da dimensão do vector das observações e do modelo estrutural adoptado. De referir ainda que a abordagem utilizada para o filtro de Kalman neste texto é recursiva. Contudo esta forma de cálculo das várias igualdades não é única (Durbin e Koopman, 2001).

Quadro 3.1: Principais equações de previsão (um período à frente)

$\mathbf{a}_t = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{Y}_{t-1})$	(3.1)
$\mathbf{P}_t = \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{Y}_{t-1})$	(3.2)
$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}_t E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{Y}_t)$	(3.3)
$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{Y}_t) \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'$	(3.4)
$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t$	(3.6)
$\mathbf{a}_{t t} = \mathbf{a}_t + \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t$	(3.11)
$\mathbf{M}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t'$	(3.12)
$\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t$	(3.13)
$\mathbf{K}_t = \mathbf{T}_t \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1}$	(3.14)
$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t$	(3.15)
$L_t = \mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t$	(3.18)
$P_{t+1} = \mathbf{T}_t P_t L_t' + \mathbf{R}_t Q_t R_t'$	(3.19)

O conjunto de equações a construir no procedimento computacional é a que consta no Quadro 3.2¹⁶.

Quadro 3.2: Equações do procedimento computacional previsão (um período à frente) e de actualização

Previsão (um período à frente)	Filtragem ou actualizações
$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{a}_{t t}$	$\mathbf{a}_{t+1 t+1} = \mathbf{a}_{t+1} + \mathbf{M}_{t+1}\mathbf{F}_{t+1}^{-1}\mathbf{v}_{t+1}$
$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{t t}\mathbf{T}' + \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}'$	$\mathbf{P}_{t+1 t+1} = \mathbf{P}_{t+1} - \mathbf{M}_{t+1}\mathbf{F}_{t+1}^{-1}\mathbf{M}'_{t+1}$
$\mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1}$	$\mathbf{v}_{t+1 t+1} = \mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1 t+1}$
$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1}$	$\hat{\mathbf{y}}_{t+1 t+1} = \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1 t+1}$
$\mathbf{F}_{t+1} = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{t+1}\mathbf{Z}' + \mathbf{H}$	
$\mathbf{M}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1}\mathbf{Z}'$	

Este algoritmo é executado em duas fases. Numa primeira fase faz-se a previsão do estado em $t + 1$ (um período à frente) a partir da estimação filtrada do estado em t . Na segunda fase, actualiza-se a previsão incorporando a observação \mathbf{y}_t e obtém-se a estimação filtrada do estado. Assim, os passos a seguir no algoritmo computacional são as seguintes:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando $t = 1$;
- 2) Efectuamos a previsão, um período à frente;

Previsão do estado	\mathbf{a}_{t+1}
Variância do estado	\mathbf{P}_{t+1}
Erro de previsão	\mathbf{v}_{t+1}
Estimação	$\hat{\mathbf{y}}_{t+1}$
Cálculo de F	\mathbf{F}_{t+1}
Cálculo de M	\mathbf{M}_{t+1}

¹⁶ Considera-se que as matrizes do sistema são constantes e conhecidas.

3) Obtenção da observação \mathbf{y}_{t+1} , efectuando a filtragem se $t < n$;

Filtro - Previsão do estado	$\mathbf{a}_{t+1 t+1}$
Filtro - Variância do estado	$\mathbf{P}_{t+1 t+1}$
Filtro - Erro de previsão	$\mathbf{v}_{t+1 t+1}$
Estimação actualizada	$\hat{\mathbf{y}}_{t+1 t+1}$

4) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;

5) Concluir o processo de cálculo.

Em resumo, o problema da previsão e da filtragem resolvem-se recursivamente, com o suposto de normalidade, através das equações de previsão do estado que permitem projectar para o futuro o estado actual e estimar a variância da previsão e as equações de actualização. Estas vão incorporar a nova observação na estimação do estado com o objectivo de obter melhorias nessa mesma estimação.

3.2 Dependências funcionais do erro de previsão

Os erros de previsão, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, são muitas vezes chamados inovações, pois representam a nova parte de \mathbf{y}_t que não pode ser prevista. Quando se analisa a versão recursiva para o cálculo do erro de previsão \mathbf{v}_n , verifica-se que este é função linear de \mathbf{a}_1 , das observações, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, e naturalmente, tendo em conta a definição adoptada para representação em espaço de estados, (2.8) a (2.10), (2.11) e (2.12), das matrizes do sistema. Considere-se então a equação (3.6): para $t = 1$, temos,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_1.$$

Para $t = 2$, e tendo em conta (3.6) e (3.15) vem,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_1)) = \mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{K}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_2 (\mathbf{T}_1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{Z}_1) \mathbf{a}_1. \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para calcular \mathbf{v}_3 , obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_3 &= \mathbf{y}_3 - \mathbf{Z}_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{y}_3 - \mathbf{Z}_3 (\mathbf{T}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{K}_2 (\mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{a}_2)) \\
 &= \mathbf{y}_3 - \mathbf{Z}_3 (\mathbf{T}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1) + \mathbf{K}_2 (\mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1))) \\
 &= \mathbf{y}_3 - \mathbf{Z}_3 \left(\begin{array}{c} \mathbf{T}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_1)) \\ + \mathbf{K}_2 (\mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_2 (\mathbf{T}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_1 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_1))) \end{array} \right) \\
 &= \mathbf{y}_3 - \mathbf{Z}_3 \mathbf{K}_2 \mathbf{y}_2 - \mathbf{Z}_3 (\mathbf{T}_2 \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 \mathbf{Z}_2 \mathbf{K}_1) \mathbf{y}_1 \\
 &\quad - \mathbf{Z}_3 (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{K}_2 \mathbf{Z}_2 \mathbf{T}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{Z}_2 \mathbf{K}_1 \mathbf{Z}_1) \mathbf{a}_1
 \end{aligned}$$

e assim por diante, generalizando até $t = n$.

Concluimos, por esta via, que os valores adoptados para \mathbf{a}_1 e para as matrizes do sistema, em (2.11) e (2.12), influenciam as magnitudes dos erros de previsão, \mathbf{v}_t , com $t = 1, \dots, n$.

3.3 Previsão do erro de estado

Defina-se o erro de estado, com $Var(\mathbf{x}_t) = \mathbf{P}_t$, como sendo,

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t. \quad (3.20)$$

Considere-se (3.5), (3.6) e (2.11) então,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{y}_t - \mathbf{Z} \mathbf{a}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t = \mathbf{Z}_t (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Por (3.20) virá,

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.21)$$

E como,

$$\mathbf{x}_{t+1} = \boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1}$$

por (2.12) e (3.15), com $t = 1, \dots, n$, utilizando também (3.20) e (3.21) temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t \\ &= \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t - \mathbf{K}_t (\mathbf{Z}_t \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t) \\ &= \mathbf{T}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t = (\mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t) \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t. \end{aligned}$$

Por (3.18) pode-se dizer ainda que,

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.22)$$

Podemos reformular o método de cálculo de \mathbf{P}_{t+1} , considerando (3.20), (P8) e (P11) do seguinte modo,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \text{Var}(\mathbf{x}_{t+1}) = \text{Cov}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_{t+1}) = \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{x}_{t+1}).$$

Por (2.12), (3.22), (P11) e (P12) vem,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1} &= \text{Cov}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) + \text{Cov}(\mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) \\ &= \mathbf{T}_t (\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{x}_t) \mathbf{L}_t' + \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\eta}_t) \mathbf{R}_t' - \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t) \mathbf{K}_t') \\ &\quad + \text{Cov}(\mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t). \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ são por definição em (2.10) independentes entre si, bem como, $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, utilizando (3.20) e ainda a definição $\text{Var}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{P}_t$, temos,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T}_t(\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{x}_t)\mathbf{L}'_t + \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\eta}_t)\mathbf{R}'_t - \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t)\mathbf{K}'_t) = \mathbf{T}_t\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{x}_t)\mathbf{L}'_t \\
 & = \mathbf{T}_t\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t)\mathbf{L}'_t \\
 & = \mathbf{T}_t\text{Var}(\mathbf{x}_t)\mathbf{L}'_t = \mathbf{T}_t\mathbf{P}_t\mathbf{L}'_t.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, por (P11) e (P12) vem,

$$\text{Cov}(\mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{L}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{R}_t \begin{pmatrix} \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{x}_t)\mathbf{L}'_t + \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\eta}_t)\mathbf{R}'_t \\ -\text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t)\mathbf{K}'_t \end{pmatrix}.$$

Como $\boldsymbol{\alpha}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ são independentes, de acordo com (2.10), $\boldsymbol{\eta}_t$ e \mathbf{x}_t são independentes dado (3.20), considerando o resultado em (2.12) e ainda que $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{Q}_t$, obtém-se,

$$\text{Cov}(\mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{L}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{R}_t\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t)\mathbf{R}'_t = \mathbf{R}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{R}'_t.$$

Donde podemos dizer que,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t\mathbf{P}_t\mathbf{L}'_t + \mathbf{R}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{R}'_t \quad (3.23)$$

igualdade esta que já tinha sido apresentada em (3.19).

O conjunto de equações a construir no procedimento computacional, serão as constantes no Quadro 3.3.

Quadro 3.3: Equações do procedimento computacional de cálculo do erro de estado

Cálculo do erro de estado
$\mathbf{M}_{t t} = \mathbf{P}_{t t}\mathbf{Z}'$
$\mathbf{F}_{t t} = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{t t}\mathbf{Z}' + \mathbf{H}$
$\mathbf{K}_{t t} = \mathbf{T}\mathbf{M}_{t t}\mathbf{F}_{t t}^{-1}$
$\mathbf{L}_{t t} = \mathbf{T} - \mathbf{K}_{t t}\mathbf{Z}$
$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{L}_{t t}\mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_{t t}\boldsymbol{\varepsilon}_t$

Os passos a seguir serão:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = 1$;
- 2) Efectuamos a previsão do erro de estado, um período à frente;

Filtro do M	$M_{t t}$
Filtro do F	$F_{t t}$
Filtro do K	$K_{t t}$
Filtro do L	$L_{t t}$
Previsão do erro de estado	x_{t+1}

- 3) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

O erro de estado será novamente abordado quando efectuarmos o alisamento da estimativa filtrada do estado, nomeadamente pela necessidade de se calcular estimativas para as perturbações ε_t e η_t .

3.4 Alisamento das estimações actualizadas

É nosso objectivo fazer a estimação de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dando a conhecer todo o conjunto de observações $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_n = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}'$. Através do alisamento das estimações actualizadas vamos tentar ajustar a estimação do estado em qualquer instante de tempo, com base em toda a informação da amostra. Considera-se que a nossa melhor estimação, com base num conjunto de n observações, será a estimação alisada e não a estimação de α_t obtida através do processo de actualização e denotada por $\mathbf{a}_{t|t}$.

Como as distribuições são normais, a distribuição condicional de α_t dado \mathbf{y} também é normal. Defina-se então,

$$\alpha_t \sim N(\hat{\alpha}_t, \mathbf{V}_t)$$

onde temos,

$$\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t | \mathbf{y}) \text{ e } \mathbf{V}_t = \text{Var}(\alpha_t | \mathbf{y}).$$

Chamamos a $\hat{\alpha}_t$ o estado alisado, a \mathbf{V}_t a variância do estado alisado e às operações para calcular o valor das estimativas $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$, alisamento do estado.

3.4.1 Alisamento do estado

Já vimos anteriormente que os erros de previsão $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são mutuamente independentes e a transformação linear de $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ e $\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n$ são independentes de $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}$ com média zero. Logo, quando os valores de $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ são conhecidos, \mathbf{Y}_{t-1} e $\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n$ são também conhecidos e vice-versa (Durbin e Koopman, 2001). Tendo em conta estas premissas, utilizando (3.10), com $t = 1, \dots, n$, vem,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_t &= E(\alpha_t | \mathbf{y}) = E(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= E(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) + \text{Cov}(\alpha_t, (\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n)') \text{Var}((\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n)')^{-1} (\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n)'. \end{aligned}$$

Numa notação alternativa tendo em conta (3.1) e (3.11) obtém-se,

$$\hat{\alpha}_t = \mathbf{a}_t + \begin{bmatrix} \text{Cov}(\alpha_t, \mathbf{v}_t) \\ \vdots \\ \text{Cov}(\alpha_t, \mathbf{v}_n) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{F}_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

que se pode ainda representar por,

$$\hat{\alpha}_t = \mathbf{a}_t + \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\alpha_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j. \quad (3.24)$$

Considere-se as seguintes expressões no cálculo da $Cov(\alpha_t, v_j)$, para os vários valores de j . Por (3.20) e por (P11), para $j = t, \dots, n$, temos,

$$Cov(\alpha_t, v_j) = Cov(x_t + a_t, v_j) = Cov(x_t, v_j). \quad (3.25)$$

Utilizando (3.21), para $j = t$, por (P8), (P11) e pela independência existente entre x_t e ε_t , temos que,

$$Cov(x_t, v_j) = Cov(x_t, Z_t x_t + \varepsilon_t) = Cov(x_t, x_t) Z_t' = Var(x_t) Z_t'.$$

Assim, por definição de $Var(x_t)$, vem,

$$Cov(x_t, v_j) = P_t Z_t'.$$

Utilize-se (3.21), agora com $j = t + 1$, temos,

$$Cov(x_t, v_{t+1}) = Cov(x_t, Z_{t+1} x_{t+1} + \varepsilon_{t+1}).$$

Ora por (P11), (P12) e utilizando (3.22) vem,

$$\begin{aligned} Cov(x_t, v_{t+1}) &= Cov(x_t, x_{t+1}) Z_{t+1}' = Cov(x_t, L_t x_t + R_t \eta_t - K_t \varepsilon_t) Z_{t+1}' \\ &= (Cov(x_t, L_t x_t) + Cov(x_t, R_t \eta_t) - Cov(x_t, K_t \varepsilon_t)) Z_{t+1}'. \end{aligned}$$

Como x_t e η_t , e x_t e ε_t são independentes, temos,

$$Cov(x_t, v_{t+1}) = Cov(x_t, L_t x_t) Z_{t+1}' = Cov(x_t, x_t) L_t' Z_{t+1}'.$$

Como $\text{Var}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{P}_t$, vem que,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_{t+1}) = \text{Var}(\mathbf{x}_t) \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} = \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio e generalizamos para $t = n - 2, \dots, 1$, com $j = n$, isto é¹⁷,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_n) = \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n.$$

Substituindo, tendo em conta (3.24) observa-se com $t = n - 2, \dots, 1$, que,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t \frac{\mathbf{v}_t}{\mathbf{F}_t} + \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} \frac{\mathbf{v}_{t+1}}{\mathbf{F}_{t+1}} + \dots + \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \frac{\mathbf{v}_n}{\mathbf{F}_n}$$

que é,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{P}_t \mathbf{r}_{t-1}, \quad (3.26)$$

onde temos,

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{Z}'_t \frac{\mathbf{v}_t}{\mathbf{F}_t} + \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} \frac{\mathbf{v}_{t+1}}{\mathbf{F}_{t+1}} + \dots + \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \frac{\mathbf{v}_n}{\mathbf{F}_n}. \quad (3.27)$$

O vector \mathbf{r}_{t-1} é um somatório envolvendo \mathbf{v}_j que ocorre depois de $t - 1$, isto é, $j = t, \dots, n$. O valor de \mathbf{r} no instante t é portanto dado por,

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Z}'_{t+1} \frac{\mathbf{v}_{t+1}}{\mathbf{F}_{t+1}} + \dots + \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \frac{\mathbf{v}_n}{\mathbf{F}_n}.$$

¹⁷ $\mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{n-1}$ representa a notação adoptada em (Durbin e Koopman, 2001) para o produto das matrizes $\mathbf{L}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \mathbf{L}'_{t+2} \dots$, com $t = n - 2, \dots, 1$, até se chegar à ultima matriz \mathbf{L}'_{n-1} .

e define-se $\mathbf{r}_n = \mathbf{0}$ ¹⁸, assim sendo, com $\mathbf{r}_n = \mathbf{0}$ e $t = n, \dots, 1$, vem,

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t + \mathbf{L}'_t \mathbf{r}_t. \quad (3.28)$$

O estado alisado pode ser finalmente calculado recursivamente, com $\mathbf{r}_n = \mathbf{0}$ e $t = n, \dots, 1$, através das equações (3.26) e (3.28)¹⁹. Por outro lado, podemos utilizar o raciocínio seguinte, utilizando (P10), (3.25) e como em (3.7) $E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$, vem,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_j) = \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}'_j) - E(\boldsymbol{\alpha}_t)E(\mathbf{v}'_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}'_j).$$

Ora utilizando (2.11) e (3.6), utilizando as propriedades da multiplicação vectorial e como $E(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \mathbf{0}$, por (3.20) temos,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_j) &= \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t (\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j \mathbf{a}_j)') \\ &= E(\boldsymbol{\alpha}_t (\mathbf{Z}_j \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j - \mathbf{Z}_j \mathbf{a}_j)') = E(\boldsymbol{\alpha}_t (\boldsymbol{\alpha}_j - \mathbf{a}_j)') \mathbf{Z}'_j = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{x}'_j) \mathbf{Z}'_j. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim podemos dizer que com $j = t$ e tendo em conta em (3.12) que $\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_j) = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t$, ou seja,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_j) = \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{x}'_j) \mathbf{Z}'_j = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t \quad (3.30)$$

e que com $j = t + 1, \dots, n$, temos,

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_j) = \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}'_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{x}'_j) \mathbf{Z}'_j.$$

¹⁸ Segundo a igualdade, o cálculo de \mathbf{r}_n depende de valores que não existem no instante $n + 1$.

¹⁹ Estas equações são apelidadas de equações recursivas do estado alisado, o facto do valor de t ser iterado de forma decrescente, compreende-se por \mathbf{r}_{t-1} aparecer expresso em função de \mathbf{r}_t .

Então para $j = t$,

$$E(\alpha_t x'_t) = P_t \quad (3.31)$$

para $j = t + 1, \dots, n$, virá,

$$E(\alpha_t x'_j) = P_t L'_t \dots L'_{j-1}. \quad (3.32)$$

O conjunto de equações a construir no procedimento computacional serão as indicadas no Quadro 3.4.

Quadro 3.4: Equações do procedimento computacional de cálculo do estado alisado

Cálculo do estado alisado	
$r_{t-1} = Z' F_{t t}^{-1} v_{t t} + L'_{t t} r_t$	
$\hat{\alpha}_t = a_{t t} + P_{t t} r_{t-1}$	
$\hat{v}_t = y_t - Z \hat{\alpha}_t$	
$\hat{y}_t = Z \hat{\alpha}_t$	

Como passos do procedimento computacional, temos:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = n$ e $r_n = \mathbf{0}$;
- 2) Efectuamos os cálculos do estado alisado e da previsão alisada;

Cálculo recursivo de r	r_{t-1}
Alisamento do estado	$\hat{\alpha}_t$
Erro alisado do modelo	\hat{v}_t
Previsão alisada	\hat{y}_t

- 3) $t = t - 1$ e voltar a 2) até $t = 2$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

3.4.2 Estimativa alisada do erro de observação

Considere-se a estimativa do erro de alisamento de observação,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Por (3.10), com $t = 1, \dots, n$, vem que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) + \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j.$$

Como por definição em (2.11), $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{0}$, com $t = 1, \dots, n$, temos,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j. \quad (3.33)$$

Por outro lado, por (P10) e como por definição em (2.11) sabemos que $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, temos então,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}_j') - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) E(\mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}_j').$$

Ora utilizando (3.19), por (P2) e utilizando as propriedades da matriz transposta vem,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}_j') = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t (\mathbf{Z}_j \mathbf{x}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j)') \\ &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}_j') \mathbf{Z}_j' + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_j'). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Considerando $j = t$, temos,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}'_t) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_t) \mathbf{Z}'_t + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t).$$

Como $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e \mathbf{x}_t são independentes para $t = 1, \dots, n$ e $j = t, \dots, n$ e por definição em (2.11) sabemos que $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, verifica-se que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_t) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) E(\mathbf{x}'_t) = \mathbf{0}.$$

Por (P7) e sabendo que $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ e ainda que $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t$, observa-se que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}'_t) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t) = \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t. \quad (3.35)$$

Considerando agora $j = t + 1$ e como os erros em instantes diferentes são considerados independentes, temos por (3.21) e (P2) que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}'_{t+1}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_{t+1}) \mathbf{Z}'_{t+1} + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+1}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_{t+1}) \mathbf{Z}'_{t+1}.$$

Generalizando para $j = t, \dots, n$, podemos então dizer que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}'_j) = \begin{cases} \mathbf{H}_t & \text{para } j = t \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_j) \mathbf{Z}'_j & \text{para } j = t + 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.36)$$

Utilizando (3.22) e por (P2) obtém-se,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_{t+1}) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t (\mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t)') \\ &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}'_t) \mathbf{L}'_t + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\eta}'_t) \mathbf{R}'_t - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t) \mathbf{K}'_t. \end{aligned}$$

Ora $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e \boldsymbol{x}_t , assim como, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ são independentes e $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, logo como $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$, por definição em (2.11) temos,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_{t+1}) = -E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') \boldsymbol{K}'_t = -\boldsymbol{H}_t \boldsymbol{K}'_t. \quad (3.37)$$

Utilizando raciocínio semelhante, como $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_{t+1}$, bem como, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ são independentes, por (3.37) virá que,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_{t+2}) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_{t+1}) \boldsymbol{L}'_{t+1} + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\eta}'_{t+1}) \boldsymbol{R}'_{t+1} - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+1}) \boldsymbol{K}'_{t+1} \\ &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_{t+1}) \boldsymbol{L}'_{t+1} = -\boldsymbol{H}_t \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{L}'_{t+1} \end{aligned}$$

e assim por diante, até $j = n$, com $t = 1, \dots, n - 1$, temos,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_n) = -\boldsymbol{H}_t \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{L}'_{t+1} \dots \boldsymbol{L}'_{n-1}. \quad (3.38)$$

Podemos verificar utilizando as equações de (3.33) a (3.38) que,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t &= \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{v}_j) \boldsymbol{F}_j^{-1} \boldsymbol{v}_j \\ &= \boldsymbol{H}_t (\boldsymbol{F}_t^{-1} \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{Z}'_{t+1} \boldsymbol{F}_{t+1}^{-1} \boldsymbol{v}_{t+1} - \dots - \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{L}'_{t+1} \dots \boldsymbol{L}'_{n-1} \boldsymbol{Z}'_n \boldsymbol{F}_n^{-1} \boldsymbol{v}_n). \end{aligned}$$

Por (3.28) e se considerar novamente $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{F}_t^{-1} \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{r}_t$, com $t = n, \dots, 1$, vem,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \boldsymbol{H}_t (\boldsymbol{F}_t^{-1} \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{K}'_t \boldsymbol{r}_t) = \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{\mu}_t. \quad (3.39)$$

O conjunto de equações a construir serão as indicadas no Quadro 3.5.

Quadro 3.5: Equações do procedimento computacional de cálculo do erro observação alisado

Estimativa alisada do erro de observação
$\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{F}_{t t}^{-1} \mathbf{v}_{t t} - \mathbf{K}'_{t t} \mathbf{r}_t$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}_t$

Como procedimento computacional, temos:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, com $t = 1$;
- 2) Efectuamos os cálculos do erro de observação alisado;

Cálculo de $\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\mu}_t$
Erro de observação alisado	$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$

- 3) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

Repare-se ainda que de (3.18) com $\mathbf{L}_t = \mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t$ e definindo $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - \mathbf{K}'_t \mathbf{r}_t$, com $t = n, \dots, 1$, podemos dizer, manipulando algebricamente (3.28) que,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{t-1} &= \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t + \mathbf{L}'_t \mathbf{r}_t = \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t + (\mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t)' \mathbf{r}_t \\
 &= \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - (\mathbf{Z}'_t \mathbf{K}'_t - \mathbf{T}'_t) \mathbf{r}_t \\
 &= \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - \mathbf{Z}'_t \mathbf{K}'_t \mathbf{r}_t + \mathbf{T}'_t \mathbf{r}_t \\
 &= \mathbf{Z}'_t (\mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - \mathbf{K}'_t \mathbf{r}_t) + \mathbf{T}'_t \mathbf{r}_t.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{Z}'_t \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{T}'_t \mathbf{r}_t.$$

3.4.3 Estimativa alisada do erro de medida

Para $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$ utilizando uma abordagem algébrica similar à utilizada no cálculo de $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ diremos, com $t = 1, \dots, n$, que,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t = \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j = \sum_{j=t}^n E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_j') \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j. \quad (3.40)$$

Se considerarmos $j = t + 1$, podemos dizer que,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_{t+1}') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_{t+1}') \mathbf{Z}_{t+1}' + E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}').$$

Como os erros em instantes diferentes, são considerados independentes, $E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}') = \mathbf{0}$, temos por (3.22) e (P2) que,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_{t+1}') &= E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_{t+1}') \mathbf{Z}_{t+1}' = E(\boldsymbol{\eta}_t (\mathbf{L}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t)') \mathbf{Z}_{t+1}' \\ &= E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_t') \mathbf{L}_t' \mathbf{Z}_{t+1}' + E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t') \mathbf{R}_t' \mathbf{Z}_{t+1}' - E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') \mathbf{K}_t' \mathbf{Z}_{t+1}'. \end{aligned}$$

Dado que $\boldsymbol{\eta}_t$ e \mathbf{x}_t , assim como, $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ são independentes e $E(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0}$, vem por definição de $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t)$, em (2.12) que,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_{t+1}') &= E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_{t+1}') \mathbf{Z}_{t+1}' = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t') \mathbf{R}_t' \mathbf{Z}_{t+1}' \\ &= \text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) \mathbf{R}_t' \mathbf{Z}_{t+1}' = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \mathbf{Z}_{t+1}'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pelo mesmo raciocínio, para $j = t + 2$, como os erros em instantes diferentes são considerados independentes temos,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_{t+2}') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_{t+2}') \mathbf{Z}_{t+2}' + E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2}') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_{t+2}') \mathbf{Z}_{t+2}'.$$

Generalizando para $j = t + 1, \dots, n$, podemos dizer que,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}'_j) = \begin{cases} \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} & \text{para } j = t + 1 \\ E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_j) \mathbf{Z}'_j & \text{para } j = t + 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.42)$$

Ora (3.22) e (P2) permitem-nos estabelecer que,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_{t+2}) \mathbf{Z}'_{t+2} &= E(\boldsymbol{\eta}_t (\mathbf{L}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1} \boldsymbol{\eta}_{t+1} - \mathbf{K}_{t+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}))' \mathbf{Z}'_{t+2} \\ &= E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_{t+1}) \mathbf{L}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2} + E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}'_{t+1}) \mathbf{R}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2} - E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+1}) \mathbf{K}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2}. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_{t+1}$, assim como, $\boldsymbol{\eta}_t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ são, por definição, independentes e $E(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0}$, logo por (3.41) temos,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_{t+2}) \mathbf{Z}'_{t+2} = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_{t+1}) \mathbf{L}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2} = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2}. \quad (3.43)$$

Pelo mesmo raciocínio, até $j = n$, com $t = 1, \dots, n - 1$, virá que,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}'_n) = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}'_n) \mathbf{Z}'_n = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n. \quad (3.44)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_t &= \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{v}_j \\ &= \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t (\mathbf{Z}'_{t+1} \mathbf{F}_{t+1}^{-1} \mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{L}'_{t+1} \mathbf{Z}'_{t+2} \mathbf{F}_{t+2}^{-1} \mathbf{v}_{t+2} \dots + \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

que é pela igualdade (3.27), com $t = n, \dots, 1$,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{r}_t. \quad (3.45)$$

Daqui resulta portanto a equação que consta do Quadro 3.6.

Quadro 3.6: Equação do procedimento computacional de cálculo do erro de medida alisado

Estimativa alisada do erro de medida
$\hat{\eta}_t = QR'r_t$

Como procedimento computacional, temos:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, com $t = 1$;
- 2) Efectuamos os cálculos do erro de medida alisado;

Erro de observação alisado	$\hat{\eta}_t$
----------------------------	----------------

- 3) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

Considere-se ainda a equação de transição (2.12). e os valores alisados de modo que,

$$\hat{\alpha}_{t+1} = T_t \hat{\alpha}_t + R_t \hat{\eta}_t,$$

Assim por (3.45), com $t = 1, \dots, n$, constata-se que,

$$\hat{\alpha}_{t+1} = T_t \hat{\alpha}_t + R_t Q_t R_t' r_t. \tag{3.46}$$

Este processo pode ser considerado útil para o cálculo computacional recursivo de $\hat{\alpha}_t$, podendo ser inicializado utilizando em conjunto (3.26) e (3.27). Ou seja, a equação de inicialização do processo será,

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + P_1 r_0 \tag{3.47}$$

3.4.4 Alisamento da variância do estado

Seja então,

$$\mathbf{V}_t = \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Para o cálculo do alisamento da variância do estado, baseando-nos em (3.16) podemos dizer que,

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{P}_t - \sum_{j=t}^n \text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \left(\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j) \right)' \quad (3.48)$$

sendo que $\mathbf{v}_t, \dots, \mathbf{v}_n$ são independentes entre si e com \mathbf{Y}_{t-1} , com média zero.

Para o cálculo das diferentes $\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathbf{v}_j)$ seguimos o raciocínio já desenvolvido anteriormente para o cálculo do alisamento do estado. Assim, consideramos,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t &= \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} \mathbf{F}_{t+1}^{-1} \mathbf{Z}_{t+1} \mathbf{L}_t \mathbf{P}_t \\ &- \dots - \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{Z}_n \mathbf{L}_{n-1} \dots \mathbf{L}_{t+1} \mathbf{L}_t \mathbf{P}_t \\ &= \mathbf{P}_t - \mathbf{P}_t \mathbf{N}_{t-1} \mathbf{P}_t, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde se,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{t-1} &= \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t + \mathbf{L}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} \mathbf{F}_{t+1}^{-1} \mathbf{Z}_{t+1} \mathbf{L}_t \\ &+ \dots + \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{n-1} \mathbf{Z}'_n \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{Z}_n \mathbf{L}_{n-1} \dots \mathbf{L}_t. \end{aligned}$$

Substituindo, com $t = n, \dots, 1$, temos,

$$N_t = Z'_{t+1} F_{t+1}^{-1} Z_{t+1} + L'_{t+1} Z'_{t+2} F_{t+2}^{-1} Z_{t+2} L_{t+1} \\ + \dots + L'_{t+1} \dots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{t+1}.$$

Assim,

$$N_{t-1} = Z'_t F_t^{-1} Z_t + L'_t N_t L_t. \quad (3.50)$$

A matriz da variância do estado alisado, pode assim ser calculado por recursão, com $N_n = \mathbf{0}$ e $t = n, \dots, 1$, através dos resultados constantes do Quadro 3.7.

Quadro 3.7: Equações do procedimento computacional de cálculo variância do estado alisado

Cálculo da variância do estado alisado	
$N_{t-1} = Z' F_{t t}^{-1} Z + L'_{t t} N_t L_{t t}$	
$V_t = P_{t t} - P_{t t} N_{t-1} P_{t t}$	

Como passos do procedimento computacional, temos:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = n$ e $N_n = \mathbf{0}$;
- 2) Efectuamos os cálculos do estado alisado e da previsão alisada;

Cálculo recursivo de N	N_{t-1}
Alisamento da variância do estado	V_t

- 3) $t = t - 1$ e voltar a 2) até $t = 2$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

A formulação a apresentar de seguida é em muitos casos considerada mais eficiente quando tratada computacionalmente do que a formulação anterior. Esse facto está intimamente ligado às matrizes Z_t e T_t que contêm usualmente muitos

termos nulos e unitários. Considere-se (3.50) e seja então, como já havia sido definido em (3.18), $L_t = T_t - K_t Z_t$. Assim,

$$\begin{aligned} N_{t-1} &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + (T_t - K_t Z_t)' N_t (T_t - K_t Z_t) \\ &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + (T_t' N_t - Z_t' K_t' N_t) (T_t - K_t Z_t) \\ &= Z_t' F_t^{-1} Z_t + T_t' N_t T_t - Z_t' K_t' N_t T_t - T_t' N_t K_t Z_t + Z_t' K_t' N_t K_t Z_t \\ &= Z_t' (F_t^{-1} + K_t' N_t K_t) Z_t + T_t' N_t T_t - Z_t' K_t' N_t T_t - T_t' N_t K_t Z_t. \end{aligned}$$

Se se considerar $D_t = F_t^{-1} + K_t' N_t K_t$, então,

$$N_{t-1} = Z_t' D_t Z_t + T_t' N_t T_t - Z_t' K_t' N_t T_t - T_t' N_t K_t Z_t. \quad (3.51)$$

Teríamos então finalmente com $N_n = \mathbf{0}$ e $t = n, \dots, 1$, os resultados do Quadro 3.8.

Quadro 3.8: Equações alternativas para o cálculo da variância do estado alisado

Cálculo da variância do estado alisado
$N_{t-1} = Z_t' D_t Z_t + T_t' N_t T_t - Z_t' K_t' N_t T_t - T_t' N_t K_t Z_t$
$V_t = P_{t t} - P_{t t} N_{t-1} P_{t t}$

3.4.5 Estimativa alisada da variância do erro de observação

Considere-se (3.16) e tendo em conta que $Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{H}_t$, então podemos dizer que,

$$Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y}) = \mathbf{H}_t - \sum_{j=t}^n Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) F_j^{-1} (Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j))', \quad (3.52)$$

onde por (P10) e como $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ em (2.11), vem que,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}_j').$$

Por (3.21) e utilizando (3.36), substituindo em (3.52) e também por adaptação de (3.50), podemos então reescrever a variância da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y}) &= \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t \left(\mathbf{F}_t^{-1} + \mathbf{K}'_t \mathbf{Z}'_{t+1} \mathbf{F}_{t+1}^{-1} \mathbf{Z}_{t+1} \mathbf{K}_t + \dots + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{K}'_t \mathbf{Z}'_n \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{Z}_n \mathbf{L}_{n-1} \dots \mathbf{L}_{t+1} \mathbf{K}_t \right) \mathbf{H}'_t \\ &= \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t (\mathbf{F}_t^{-1} + \mathbf{K}'_t \mathbf{N}_t \mathbf{K}_t) \mathbf{H}'_t. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{D}_t = \mathbf{F}_t^{-1} + \mathbf{K}'_t \mathbf{N}_t \mathbf{K}_t$ e como \mathbf{H}_t em (2.11) é uma matriz de variância/covariância considerada simétrica ($\mathbf{H}_t = \mathbf{H}'_t$) virá,

$$\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y}) = \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{D}_t \mathbf{H}'_t = \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{D}_t \mathbf{H}_t. \quad (3.53)$$

O conjunto de equações a construir no procedimento computacional é apresentado seguidamente no Quadro 3.9.

Quadro 3.9: Equações do procedimento computacional da variância do erro observação alisado

Variância do erro de observação alisado
$\mathbf{D}_t = \mathbf{F}_{t t}^{-1} + \mathbf{K}'_{t t} \mathbf{N}_t \mathbf{K}_{t t}$
$\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{y}) = \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{D}_t \mathbf{H}$

O procedimento computacional:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = 1$;

2) Efectuamos os cálculos do estado alisado e da previsão alisada;

Cálculo recursivo de D	D_t
Var do erro de observação alisado	$Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{y})$

3) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;

4) Concluir o processo de cálculo.

3.4.6 Estimativa alisada da variância do erro de medida

Considere-se (3.16) e como por definição em (2.12) $Var(\boldsymbol{\eta}_t|Y_{t-1}) = \mathbf{Q}_t$, logo temos,

$$Var(\boldsymbol{\eta}_t|\mathbf{y}) = \mathbf{Q}_t - \sum_{j=t}^n Cov(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{v}_j) \mathbf{F}_j^{-1} \left(Cov(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{v}_j) \right)', \quad (3.54)$$

onde por (P10) e como por (2.12) $E(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0}$,

$$Cov(\boldsymbol{\eta}_t, \mathbf{v}_j) = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_j').$$

Por (3.21) e utilizando (3.42), substituindo em (3.54) e por adaptação de (3.50) vem,

$$\begin{aligned} Var(\boldsymbol{\eta}_t|\mathbf{y}) &= \mathbf{Q}_t - \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \left(\begin{array}{c} \mathbf{Z}_{t+1}' \mathbf{F}_{t+1}^{-1} \mathbf{Z}_{t+1} + \dots + \\ \mathbf{L}_{t+1}' \dots \mathbf{L}_{n-1}' \mathbf{Z}_n' \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{Z}_n \mathbf{L}_{n-1} \dots \mathbf{L}_{t+1} \end{array} \right) \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t' \\ &= \mathbf{Q}_t - \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \mathbf{N}_t \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t'. \end{aligned}$$

Como \mathbf{Q}_t de (2.12) é uma matriz de variância/covariância considerada simétrica, ($\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_t'$) podemos concluir que,

$$Var(\boldsymbol{\eta}_t|\mathbf{y}) = \mathbf{Q}_t - \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t' \mathbf{N}_t \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t. \quad (3.55)$$

A equação a construir no procedimento computacional é o que consta no Quadro 3.10.

Quadro 3.10: Equações procedimento computacional da variância do erro de medida alisado

Variância do erro de medida alisado
$Var(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{y}) = \mathbf{Q} - \mathbf{QR}'\mathbf{N}_t\mathbf{RQ}$

O procedimento computacional:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = 1$;
- 2) Efectuamos os cálculos do estado alisado e da previsão alisada;

Var do erro de medida alisado	$Var(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{y})$
-------------------------------	---------------------------------------

- 3) $t = t + 1$ e voltar a 2) até $t = n$;
- 4) Concluir o processo de cálculo.

As dimensões dos vectores e das matrizes das novas variáveis nas equações de alisamento, tendo em conta o modelo representado nas equações (2.11) e (2.12) serão as apresentadas no Quadro 3.11.

Quadro 3.11: Dimensão dos vectores e matrizes das equações de alisamento

Vectores		Matrizes	
\mathbf{r}_t	$m \times 1$	\mathbf{N}_t	$m \times m$
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t$	$m \times 1$	\mathbf{V}_t	$m \times m$
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$	$p \times 1$		
$\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$	$r \times 1$		

3.4.7 Covariância entre o estado e erros alisados

Tendo como suporte a representação em espaço de estados (2.11) e (2.12) e as igualdades de (2.8) a (2.10), vamos iniciar o estudo da covariância entre o estado e os erros, nomeadamente dos estimadores alisados $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$. Por outro lado, no desenvolvimento destas operações de cálculo, encontraremos também as expressões necessárias ao cálculo dos valores esperados cruzados $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\mathbf{r}'_j)$, $E(\boldsymbol{\eta}_t\mathbf{r}'_j)$ e $E(\boldsymbol{\alpha}_t\mathbf{r}'_j)$.

Considerando $j = t + 1, \dots, n$, podemos dizer que (Jong e Mackinnon, 1988, Koopman, 1993 e Durbin e Koopman, 2001),

Quadro 3.12: Valores esperados cruzados do estado e erros

Equações
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_t) = \mathbf{0}$
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_j) = -\mathbf{H}_t \mathbf{K}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1}$
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{v}'_t) = \mathbf{H}_t$
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{v}'_j) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}'_j) \mathbf{Z}'_j$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{x}'_t) = \mathbf{0}$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{x}'_j) = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1}$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{v}'_t) = \mathbf{0}$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{v}'_j) = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{x}'_j) \mathbf{Z}'_j$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{x}'_t) = \mathbf{P}_t$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{x}'_j) = \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1}$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{v}'_t) = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{v}'_j) = E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{x}'_j) \mathbf{Z}'_j$

Verifica-se assim por adaptação de (3.28) que,

$$\boldsymbol{r}_j = \sum_{k=j+1}^n \mathbf{L}'_{j+1} \dots \mathbf{L}'_{k-1} \mathbf{Z}'_k \mathbf{F}_k^{-1} \boldsymbol{v}_k, \quad (3.56)$$

tendo em conta que no caso $j = t + 1$, substituímos $\mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_t$ pela matriz identidade \mathbf{I}_m (Durbin e Koopman, 2001).

Se se considerar (3.50) então,

$$\mathbf{N}_j = \sum_{k=j+1}^n \mathbf{L}'_{j+1} \dots \mathbf{L}'_{k-1} \mathbf{Z}'_k \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{Z}_k \mathbf{L}_{k-1} \dots \mathbf{L}_{j+1}. \quad (3.57)$$

Se se considerar novamente para $j = t + 1$ que $L'_{t+1} \dots L'_t$ e $L_t \dots L_{t+1}$ são matrizes identidade I_m . Utilizando as propriedades da matriz transposta, por (P2), (3.36) e (3.38) e finalmente (3.50), obtemos para $j = t, \dots, n$, que,

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon_t r'_j) &= E\left(\varepsilon_t (Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} v_{j+1} + \dots + L'_{j+1} \dots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} v_n)\right)' \\
 &= E\left(\varepsilon_t (v'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} + \dots + v'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1})\right) \\
 &= E(\varepsilon_t v'_{j+1}) F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} + \dots + E(\varepsilon_t v'_n) F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= E(\varepsilon_t x'_{j+1}) Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} + \dots + E(\varepsilon_t x'_n) Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \quad (3.58) \\
 &= -H_t K'_t L'_{t+1} \dots L'_j Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} \\
 &\quad - \dots - H_t K'_t L'_{t+1} \dots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= -H_t K'_t L'_{t+1} \dots L'_j N_j = E(\varepsilon_t x'_{j+1}) N_{t+1,j}.
 \end{aligned}$$

Definindo $N_{t+1,j} = L'_{t+1} \dots L'_j N_j$ e utilizando um raciocínio semelhante, por (3.44) e (3.50), para $j = t, \dots, n$, obtém-se que,

$$\begin{aligned}
 E(\eta_t r'_j) &= E(\eta_t x'_{j+1}) Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} \\
 &\quad + \dots + E(\eta_t x'_n) Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= Q_t R'_t L'_{t+1} \dots L'_j Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} \quad (3.59) \\
 &\quad + \dots + Q_t R'_t L'_{t+1} \dots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= Q_t R'_t L'_{t+1} \dots L'_j N_j = E(\eta_t x'_{j+1}) N_{t+1,j}.
 \end{aligned}$$

Para $E(\alpha_t r'_j)$, teremos por (3.32) e (3.50), para $j = t, \dots, n$, com $N_{t,j} = L'_t \dots L'_j N_j$, o seguinte resultado,

$$\begin{aligned}
 E(\alpha_t r'_j) &= E(\alpha_t x'_{j+1}) Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} \\
 &+ \dots + E(\alpha_t x'_n) Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= P_t L'_t \dots L'_j Z'_{j+1} F_{j+1}^{-1} Z_{j+1} + \dots + P_t L'_t \dots L'_{n-1} Z'_n F_n^{-1} Z_n L_{n-1} \dots L_{j+1} \\
 &= P_t L'_t \dots L'_j N_j = E(\alpha_t x'_{j+1}) N_{t,j}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Calculam-se as estimações cruzadas de ε_t , η_t e α_t . Tendo em conta (3.39), diremos que para ε_t pelas propriedades da soma e da matriz transposta e como H_j é uma matriz simétrica de variância/covariância dada em (2.11) temos,

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon_t \hat{\varepsilon}'_j) &= E\left(\varepsilon_t \left(H_j (F_j^{-1} v_j - K'_j r_j)\right)'\right) = E(\varepsilon_t v'_j) F_j^{-1} H_j - E(\varepsilon_t r'_j) K_j H_j \\
 &= E(\varepsilon_t v'_j) F_j^{-1} H_j - E(\varepsilon_t r'_j) K_j H_j.
 \end{aligned}$$

Considerando agora (3.45) e como Q_j é uma matriz simétrica de variância/covariância (veja (2.12)), diremos que,

$$E(\varepsilon_t \hat{\eta}'_j) = E\left(\varepsilon_t (Q_j R'_j r_j)'\right) = E(\varepsilon_t r'_j) R_j Q'_j = E(\varepsilon_t r'_j) R_j Q_j.$$

Considerando (3.20) e (3.26) temos,

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_t = \mathbf{a}_t + P_t \mathbf{r}_{t-1} \\ \mathbf{x}_t = \alpha_t - \mathbf{a}_t \end{cases} = \begin{cases} \hat{\alpha}_t = \mathbf{a}_t + P_t \mathbf{r}_{t-1} \\ \alpha_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{a}_t \end{cases}$$

donde,

$$\alpha_t - \hat{\alpha}_t = \mathbf{x}_t - P_t \mathbf{r}_{t-1}. \tag{3.61}$$

Então,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\alpha}_j - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j)') = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{x}_j') - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{r}'_{j-1}) \boldsymbol{P}_j.$$

Para $\boldsymbol{\eta}_t$, temos por (3.39) que,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{v}_j') \boldsymbol{F}_j^{-1} \boldsymbol{H}_j - E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{r}'_j) \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{H}_j$$

e ainda por (3.45) e como \boldsymbol{Q}_j é a matriz de variância/covariância dada em (2.12) virá,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_j') = E(\boldsymbol{\eta}_t (\boldsymbol{Q}_j \boldsymbol{R}'_j \boldsymbol{r}_j)') = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{r}'_j) \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{Q}'_j = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{r}'_j) \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{Q}_j$$

e ainda,

$$E(\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t)') = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{x}_j') - E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{r}'_{j-1}) \boldsymbol{P}_j.$$

Para $\boldsymbol{\alpha}_t$, temos por (3.39) que,

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{v}_j') \boldsymbol{F}_j^{-1} \boldsymbol{H}_j - E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{r}'_j) \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{H}_j.$$

Com (3.45) obtemos,

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_j') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{r}'_j) \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{Q}_j$$

e também,

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t)') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{x}_j') - E(\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{r}'_{j-1}) \boldsymbol{P}_j.$$

Obtém-se assim os resultados do Quadro 3.13.

Quadro 3.13: Valores esperados cruzados entre erros e estado

Equações
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{v}_j') \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{H}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{K}_j \mathbf{H}_j$
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_j') = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j$
$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t (\boldsymbol{\alpha}_j - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j)') = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{x}_j') - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{r}_{j-1}') \mathbf{P}_j$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{v}_j') \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{H}_j - E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{K}_j \mathbf{H}_j$
$E(\boldsymbol{\eta}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_j') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j$
$E(\boldsymbol{\eta}_t (\boldsymbol{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t)') = E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{x}_j') - E(\boldsymbol{\eta}_t \mathbf{r}_{j-1}') \mathbf{P}_j$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{v}_j') \mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{H}_j - E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{K}_j \mathbf{H}_j$
$E(\boldsymbol{\alpha}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_j') = E(\boldsymbol{\alpha}_t \mathbf{r}_j') \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j$

Calcule-se agora a covariância das estimativas alisadas em diferentes momentos de tempo e inicie-se a nossa abordagem pela covariância do vector $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$. Considere-se $t = 1, \dots, n$ e $j = t + 1, \dots, n$, e por (P10) diremos que,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) = E\left((\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) + E(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)E(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j).$$

Tendo em conta que por definição em (2.11), temos $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ e como $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y})$, então considerando (P3) podemos dizer que,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = E(E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{y})) = E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Consequentemente, por (P2) concluímos que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) &= E\left((\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) \\ &+ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t)E(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) - E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)E(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j). \end{aligned}$$

Como $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ e $E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \mathbf{0}$ então,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) &= E\left((\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) \\ &= E\left((\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) = E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)' - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right). \end{aligned}$$

Dado que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t|\mathbf{y})$, virá,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)' - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t|\mathbf{y})(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) \\ &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) - E\left(E(\boldsymbol{\varepsilon}_t|\mathbf{y})(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) \\ &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t|\mathbf{y})\left(E(\boldsymbol{\varepsilon}_j) - E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)\right). \end{aligned}$$

Assim, como $E(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \mathbf{0}$, $E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) = \mathbf{0}$ e como os erros em instantes de tempo diferentes são independentes, por definição em (P4) podemos simplificar a covariância como se segue,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) &= E\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j)'\right) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_j') - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') \\ &= E(\boldsymbol{\varepsilon}_t)E(\boldsymbol{\varepsilon}_j') - E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j') = -E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j'). \end{aligned}$$

Utilizando as igualdades referenciadas nos Quadros 3. 12 e 3.13 e a equação (3.58) virá,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) &= \mathbf{H}_t\mathbf{K}'_t\mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1}\mathbf{Z}'_j\mathbf{F}_j^{-1}\mathbf{H}_j + \mathbf{H}_t\mathbf{K}'_t\mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_j\mathbf{N}_j\mathbf{K}_j\mathbf{H}_j \\ &= \mathbf{H}_t\mathbf{K}'_t\mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1}\mathbf{W}'_j, \end{aligned}$$

com $\mathbf{W}_j = \mathbf{H}_t(\mathbf{F}_j^{-1}\mathbf{Z}_j - \mathbf{K}'_j\mathbf{N}_j\mathbf{L}_j)$ e $j = t + 1, \dots, n$.

Seguindo o mesmo raciocínio, apoiados nos Quadros 3.12 e 3.13 e nas igualdades (3.59) e (3.60), podemos dizer considerando $j = t + 1, \dots, n$, que,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t - \hat{\boldsymbol{\eta}}_t, \boldsymbol{\eta}_j - \hat{\boldsymbol{\eta}}_j) = -\mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_j \mathbf{N}_j \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j$$

e que,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t, \boldsymbol{\alpha}_j - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j) = \mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{j-1} (\mathbf{I}_m - \mathbf{N}_{j-1} \mathbf{P}_j).$$

As matrizes cruzadas, com $j = t + 1, \dots, n$, utilizando as definições das médias de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ em (2.11) e (2.12), o Quadro 3.13 e (3,58) vêm dadas por,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \boldsymbol{\eta}_j - \hat{\boldsymbol{\eta}}_j) = -E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \hat{\boldsymbol{\eta}}'_j) = \mathbf{H}_t \mathbf{K}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_j \mathbf{N}_j \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j.$$

Para $\boldsymbol{\eta}_t$, com $j = t + 1, \dots, n$, utilizando as definições das médias de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ em (2.11) e (2.12), pelas igualdades dos Quadros 3.12 e 3.13, e por (3.59), temos com $\mathbf{W}_j = \mathbf{H}_t (\mathbf{F}_j^{-1} \mathbf{Z}_j - \mathbf{K}'_j \mathbf{N}_j \mathbf{L}_j)$ que,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t - \hat{\boldsymbol{\eta}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) = -E(\boldsymbol{\eta}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_j) = -\mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \mathbf{L}'_{t+1} \dots \mathbf{L}'_{j-1} \mathbf{W}'_j.$$

E também, utilizando as definições das médias de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ em (2.11) e (2.12), pelas igualdades dos Quadros 3.12 e 3.13, por (3.60) e (3.61), com $j = t + 1, \dots, n$, temos,

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\alpha}_t - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_j - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j) = -E(\boldsymbol{\alpha}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_j) = -\mathbf{P}_t \mathbf{L}'_t \dots \mathbf{L}'_{j-1} \mathbf{W}'_j.$$

Por outro lado, utilizando as definições das médias de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ em (2.11) e (2.12), pelas igualdades do Quadro 3.13, por (3.60) e (3.61) vem,

$$\text{Cov}(\alpha_t - \hat{\alpha}_t, \eta_j - \hat{\eta}_j) = -E(\alpha_t \hat{\eta}_j') = -P_t L_t' \dots L_j' N_j R_j Q_j.$$

Verifica-se ainda, utilizando as definições das médias de ε_t e η_t em (2.11) e (2.12), pelo Quadro 3.12, (3.58), (3.60) e (3.62) que para $j = t + 1, \dots, n$, temos,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t, \alpha_j - \hat{\alpha}_j) &= -E(\varepsilon_t (\alpha_j - \hat{\alpha}_j)') \\ &= -H_t K_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' (I_m - N_{j-1} P_j). \end{aligned}$$

Mais ainda, utilizando as definições das médias de ε_t e η_t em (2.11) e (2.12), pelo Quadro 3.12, (3.59), (3.60) e (3.62), também para $j = t + 1, \dots, n$, que,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\eta_t - \hat{\eta}_t, \alpha_j - \hat{\alpha}_j) &= -E(\eta_t (\alpha_j - \hat{\alpha}_j)') \\ &= Q_t R_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' (I_m - N_{j-1} P_j). \end{aligned}$$

Obtém-se assim, para $t = 1, \dots, n$, os resultados apresentados no Quadro 3.14.

Quadro 3.14: Covariância cruzadas entre erros e estado

Equações			
$\hat{\varepsilon}_t$	$\hat{\varepsilon}_j$	$H_t K_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' W_j'$	$j > t$
	$\hat{\eta}_j$	$H_t K_t' L_{t+1}' \dots L_j' N_j R_j Q_j$	$j \geq t$
	$\hat{\alpha}_j$	$-H_t K_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' (I_m - N_{j-1} P_j)$	$j > t$
$\hat{\eta}_t$	$\hat{\varepsilon}_j$	$-Q_t R_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' W_j'$	$j > t$
	$\hat{\eta}_j$	$-Q_t R_t' L_{t+1}' \dots L_j' N_j R_j Q_j$	$j > t$
	$\hat{\alpha}_j$	$Q_t R_t' L_{t+1}' \dots L_{j-1}' (I_m - N_{j-1} P_j)$	$j > t$
$\hat{\alpha}_t$	$\hat{\varepsilon}_j$	$-P_t L_t' \dots L_{j-1}' W_j'$	$j \geq t$
	$\hat{\eta}_j$	$-P_t L_t' \dots L_j' N_j R_j Q_j$	$j \geq t$
	$\hat{\alpha}_j$	$P_t L_t' \dots L_{j-1}' (I_m - N_{j-1} P_j)$	$j \geq t$

3.5 Estado estacionário do sistema

Quando o modelo em espaço de estados é invariante no tempo, as matrizes do sistema são constantes. A abordagem de Kalman (1960) refere que nestes casos \mathbf{P}_{t+1} converge para a matriz constante $\bar{\mathbf{P}}$, dando origem à solução do filtro de Kalman em estado estacionário. Considere-se então (3.4) temos,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{T}'_t + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t.$$

Ora por (3.12) e (3.17) $\mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{M}'_t$ e pela multiplicação das matrizes obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1} &= \mathbf{T}_t (\mathbf{P}_t - \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{M}'_t) \mathbf{T}'_t + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \\ &= \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{T}'_t - \mathbf{T}_t \mathbf{M}_t \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{M}'_t \mathbf{T}'_t + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t \end{aligned}$$

como em (3.12) $\mathbf{M}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t$, vem,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{T}'_t - \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t \mathbf{F}_t^{-1} (\mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t)' \mathbf{T}'_t + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}'_t.$$

Recorde-se que, por definição, \mathbf{P}_t é simétrica, logo $(\mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t)' = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t$ e em (3.13) $\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}'_t + \mathbf{H}_t$. Assim, no estado estacionário $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{Z}' + \mathbf{H}$ e então,

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}' - \mathbf{T} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{Z} \bar{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{Z}' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}' + \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}'. \quad (3.63)$$

Na prática, a vantagem da solução em estado estacionário é que depois de \mathbf{P}_t convergir para $\bar{\mathbf{P}}$, já não nos é requerido o cálculo computacional de \mathbf{F}_t , \mathbf{K}_t e \mathbf{P}_{t+1} .

3.6 Observações perdidas

Uma das vantagens apontadas ao filtro de Kalman é a forma como é abordada a questão das observações perdidas. Suponhamos que temos em nossa posse um conjunto de observações \mathbf{y}_t e que quando $t = i, \dots, k - 1$, essas mesmas observações

não existem ou “estão perdidas”, ou seja, só temos observações quando $1 \leq t < i$ e quando $k \leq t < n$ onde t é um número inteiro (refere-se ao índice temporal).

Nesta situação, efectuando uma adaptação da escala temporal podemos dizer que,

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t^* = \mathbf{y}_t & \text{com } t = 1, \dots, i - 1 \\ \mathbf{y}_t^* = \mathbf{y}_{t+k-i} & \text{com } k = 1, \dots, n^* \text{ onde } n^* = n - (k - i) \end{cases}$$

Se, no entanto, considerarmos mais transparente o uso da escala temporal original, ou seja, o intervalo $t = 1, \dots, n$, teremos de ponderar alguma adaptação, nomeadamente quando $t = i, \dots, k - 1$.

Desta forma poderemos verificar que a consequência imediata de não se possuir observações num determinado intervalo temporal vai ser, se quisermos manter a escala temporal original, a de considerar $\mathbf{K}_t = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$ e $\mathbf{F}_t^{-1} = \mathbf{0}$ nos pontos onde as observações foram perdidas, mantendo todo o restante raciocínio e algoritmia semelhante ao já desenvolvido anteriormente (Durbin e Koopman, 2001).

Assim sendo, vamos considerar por (3.15) e $t = 1, \dots, n$, então temos,

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t.$$

Ora para $t = i, \dots, k - 1$, $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$, logo,

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_t.$$

Por (3.19) com $t = 1, \dots, n$, vem,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{L}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'.$$

Como para $t = i, \dots, k - 1$, $\mathbf{K}_t = \mathbf{0}$, virá que,

$$\mathbf{L}_t = \mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t = \mathbf{T}_t.$$

Logo,

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_t \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'.$$

Recordando (3.28), para $t = n, \dots, 1$, obtém-se,

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t + \mathbf{L}_t' \mathbf{r}_t.$$

Como para $t = i, \dots, k - 1$, $\mathbf{K}_t = \mathbf{0}$ e assim $\mathbf{L}_t = \mathbf{T}_t$ e como $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$, vem,

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{T}_t' \mathbf{r}_t.$$

Por (3.50), com $t = n, \dots, 1$, temos,

$$\mathbf{N}_{t-1} = \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t + \mathbf{L}_t' \mathbf{N}_t \mathbf{L}_t.$$

Como se considera $\mathbf{F}_t^{-1} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{L}_t = \mathbf{T}_t$, para $t = i, \dots, k - 1$, então,

$$\mathbf{N}_{t-1} = \mathbf{T}_t' \mathbf{N}_t \mathbf{T}_t.$$

Considere-se novamente que na sequência de observações \mathbf{y}_t , com $t = 1, \dots, n$, somente algumas observações do vector foram perdidas. Seja pois \mathbf{y}_t^* o vector dos valores observados. Se definirmos,

$$\mathbf{y}_t^* = \mathbf{W}_t \mathbf{y}_t,$$

onde a matriz \mathbf{W}_t representa as linhas onde existe observação, ou seja, \mathbf{W}_t será um subconjunto da matriz \mathbf{I}_p . Consequentemente, por (2.11), obtém-se,

$$\mathbf{y}_t^* = \mathbf{Z}_t^* \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \text{ com } \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \sim i.i.d.N(0, \mathbf{H}_t^*)$$

Sendo que,

$$\mathbf{Z}_t^* = \mathbf{W}_t \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^* = \mathbf{W}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t \text{ e com } \mathbf{H}_t^* = \mathbf{W}_t \mathbf{H}_t \mathbf{W}_t'$$

Efectuaríamos posteriormente com o filtro as mesmas manipulações algébricas que as realizadas com a escala temporal original.

Verifica-se ainda que a dimensão do vector de observação é variável no tempo, mas este facto não afecta a validade da formulação, ou seja, quando unicamente alguns elementos do vector de observação são desconhecidos, as equações onde o vector de observação \mathbf{y}_t aparece, permanecem inalteradas, excepto claro está, ajustadas ao facto de $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_t = \mathbf{0}$ e $\mathbf{F}_t^{-1} = \mathbf{0}$.

Repare-se ainda que nas abordagens feitas nos pontos anteriores, sempre se considerou a dimensão de \mathbf{y}_t como sendo fixa e igual a p . Contudo estas hipóteses continuam inteiramente válidas para o caso onde a dimensão do vector vai sofrendo alterações. Basta para isso adaptá-las a este novo pressuposto. A forma de o fazer, embora não seja única, pode ser a mesma que é adoptada para a simulação nos intervalos onde existem as observações perdidas.

O conjunto de equações das séries que têm no seu seio algumas observações perdidas, a construir no procedimento computacional, é apresentado seguidamente nos Quadros 3.15, 3.16 e 3.17.

Quadro 3.15: Equações das observações perdidas previsão (um período à frente) e actualização

Previsão (um período à frente)	Filtragem ou actualizações
$\mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{a}_{t t}$	$\mathbf{a}_{t+1 t+1} = \mathbf{a}_{t+1}$
$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{t t}\mathbf{T}' + \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}'$	$\mathbf{P}_{t+1 t+1} = \mathbf{P}_{t+1}$
$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1}$	$\hat{\mathbf{y}}_{t+1 t+1} = \mathbf{Z}\mathbf{a}_{t+1 t+1}$

Quadro 3.16: Equações das observações perdidas do estado alisado

Cálculo do estado alisado
$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{T}\mathbf{r}_t$
$\hat{\mathbf{a}}_t = \mathbf{a}_{t t} + \mathbf{P}_{t t}\mathbf{r}_{t-1}$
$\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{a}}_t$

Quadro 3.17: Equações das observações perdidas da variância do estado alisado

Cálculo da variância do estado alisado
$\mathbf{N}_{t-1} = \mathbf{T}'\mathbf{N}_t\mathbf{T}$
$\mathbf{V}_t = \mathbf{P}_{t t} - \mathbf{P}_{t t}\mathbf{N}_{t-1}\mathbf{P}_{t t}$

Os algoritmos computacionais são iguais aos já abordados anteriormente no processo de cálculo de previsão (um período à frente), actualização e alisamento.

3.7 Previsão

Suponhamos que temos em nossa posse as observações $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ e pretende-se fazer uma previsão para \mathbf{y}_{n+j} , onde $j = 1, \dots, J$. Com este propósito vamos estimar $\bar{\mathbf{y}}_{n+j}$, utilizando o erro quadrado médio mínimo, proposto por Kalman (1960). Assim sendo considere-se,

$$\bar{\mathbf{y}}_{n+j} = E(\mathbf{y}_{n+j} | \mathbf{Y}_n).$$

Com base em (2.11), para $j = 1$ a previsão é,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{Z}_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}.$$

Utilizando (P2) e por definição em (2.11), temos,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}_{n+1} &= E(\mathbf{Z}_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \\ &= \mathbf{Z}_{n+1}E(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) + E(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) = \mathbf{Z}_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}\end{aligned}\tag{3.64}$$

onde \mathbf{a}_{n+1} pode ser encontrada, utilizando (3.15).

Para a variância, por (2.11) e por (P6) temos,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{n+1} &= \text{Var}(\mathbf{y}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) = \text{Var}(\mathbf{Z}_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) \\ &= \mathbf{Z}_{n+1}\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}|\mathbf{Y}_n)\mathbf{Z}'_{n+1} + \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}|\mathbf{Y}_n) = \\ &= \mathbf{Z}_{n+1}\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{Z}'_{n+1} + \mathbf{H}_{n+1}.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Genericamente, para $j = 2, \dots, J$, teremos,

$$\bar{\mathbf{y}}_{n+j} = \mathbf{Z}_{n+j}\bar{\mathbf{a}}_{n+j}\tag{3.66}$$

e para a variância verifica-se que,

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+j} = \mathbf{Z}_{n+j}\bar{\mathbf{P}}_{n+j}\mathbf{Z}'_{n+j} + \mathbf{H}_{n+j}.\tag{3.67}$$

Por (2.12), poderemos dizer ainda que,

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+j+1} = \mathbf{T}_{n+j}\boldsymbol{\alpha}_{n+j} + \mathbf{R}_{n+j}\boldsymbol{\eta}_{n+j}$$

e que por (3.3) que,

$$\alpha_{n+j+1} = T_{n+j}E(\alpha_{n+j}|Y_n).$$

Se considerarmos uma abordagem semelhante à utilizada quando se estudou as observações perdidas, podemos considerar que não existem observações no período, $n + 1, \dots, n + J$ e assim pela igualdade $\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t$, temos,

$$\bar{\mathbf{a}}_{n+j+1} = T_{n+j} \bar{\mathbf{a}}_{n+j} \quad (3.68)$$

com $j = 1, \dots, J - 1$ e $\bar{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}$.

Para \mathbf{P}_{n+j+1} , com $j = 1, \dots, J - 1$ e considerando (3.4) vem,

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+j+1} = T_{n+j} \bar{\mathbf{P}}_{n+j} T'_{n+j} + R_{n+j} Q_{n+j} R'_{n+j}. \quad (3.69)$$

Podemos verificar que o processo para o calculo de $\bar{\mathbf{a}}_{n+j}$ e $\bar{\mathbf{P}}_{n+j}$ é o mesmo que utilizamos no calculo de \mathbf{a}_{n+j} e \mathbf{P}_{n+j} em (3.15) e (3.19) só que neste caso $\mathbf{K}_{n+j} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_{n+j} = \mathbf{0}$, com $j = 1, \dots, J - 1$.

O conjunto de equações a construir no procedimento computacional, serão pois, para $t = n + 1, \dots, n + j - 1$ as constantes do Quadro 3.18.

Quadro 3.18: Equações do procedimento computacional de previsão

Previsão
$\bar{\mathbf{a}}_{t+1} = T \bar{\mathbf{a}}_t$
$\bar{\mathbf{P}}_{t+1} = T \bar{\mathbf{P}}_t T' + R Q R'$
$\bar{\mathbf{y}}_{t+1} = Z \bar{\mathbf{a}}_{t+1}$

Assim temos:

- 1) Inicializa-se os parâmetros necessários ao arranque do processo iterativo, considerando-se $t = n$;

Previsão estado	$\bar{\mathbf{a}}_t = \mathbf{a}_{t t}$
Previsão variância	$\bar{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_{t t}$

- 2) Inicializa-se os parâmetros considerando-se $t = n + 1$;

Previsão do estado	$\bar{\mathbf{a}}_{t+1} = \mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{a}_{t t}$
Previsão da variância	$\bar{\mathbf{P}}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{t t}\mathbf{T}' + \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}'$
Previsão do modelo	$\bar{\mathbf{y}}_{t+1} = \hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{Z}\bar{\mathbf{a}}_{t+1}$

- 3) Considere-se agora a previsão para $t = n + 2$ até $t = n + J - 1$;

Previsão do estado	$\bar{\mathbf{a}}_{t+1}$
Previsão da variância	$\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$
Previsão do modelo	$\bar{\mathbf{y}}_{t+1}$

- 4) $t = t + 1$ e voltar a 3);

- 5) Concluir o processo de cálculo.

Em resumo, a manipulação dos dados será executada considerando o tratamento efectuado a quando o estudo das observações perdidas para os instantes $t = n + 1, \dots, n + J$, este facto leva-nos a considerar $\mathbf{K}_t = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$ e quando $t = n$ que $\bar{\mathbf{a}}_t = \mathbf{a}_{t|t}$ e $\bar{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_{t|t}$.

4 Estudo do ciclo económico, a realidade portuguesa

A economia portuguesa, como todas as outras economias, está sujeita ao longo dos anos a flutuações na sua actividade económica a que chamamos genericamente de ciclos. Os ciclos referidos têm habitualmente características comuns e simultaneamente distintas de onde decorre que investigar as suas regularidades e especificidades é de extrema importância para os estudos de análise de conjuntura e previsão. Assim sendo, tendo em vista compreender melhor a evolução cíclica da actividade económica portuguesa, efectuou-se uma investigação centrada na definição de ciclo de desvio, ou seja, nos desvios extra-anuais de uma qualquer actividade económica em relação à sua tendência temporal e nas potencialidades oferecidas pelos filtros recursivos na interpretação deste fenómeno.

Nos capítulos antecedentes apresentámos a fundamentação teórica e a metodologia a utilizar na aplicação prática. Surge o momento de se efectuar os estudos propostos para esta investigação, envolvendo neles as realidades reflectidas pelos dados e as aplicações informáticas desenvolvidas para a sua análise e simulação.

Tendo como epicentro a algoritmia do filtro proposta por Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961), realizou-se a construção do correspondente modelo matemático representativo da realidade em estudo. Consequentemente, não sendo a tendência dos dados directamente observável, ela tem de ser estimada. Efectuámos a necessária extracção da componente tendencial e, a partir dela, elaborámos os procedimentos para se captar a evolução temporal da componente cíclica. Nesta situação, é fundamental possuir mecanismos que possam auxiliar a extracção dessas componentes, isolando-as dos dados do modelo.

O mecanismo utilizado, como já foi referido anteriormente, é o da filtragem, efectuada por um filtro que possibilitará genericamente extrair do sinal original, série

de dados, algumas das suas componentes com relevo para o estudo, neste caso a tendência temporal e o ciclo.

Essa necessidade de extracção (isolamento) direccionou-nos para o desenho do modelo estrutural (2.5) representativo da evolução temporal dos dados e considerado adequado aos nossos propósitos (Clark, 1987 e Wada e Perron, 2006), isolando na sua formulação, em variável própria, a tendência dos dados associada a esse modelo e, noutra variável, a sua componente cíclica.

Construído o modelo estrutural (2.5) e pretendendo-se testar a utilização do filtro de Kalman, derivou-se este modelo na sua correspondente representação em espaço de estados (2.11) e (2.12). De seguida, desenvolveram-se todos os mecanismos para que a extracção das componentes individuais, tendência e ciclo, fosse realizada de forma eficiente e adequada aos objectivos da investigação.

Os fundamentos de base teórica que sustentam a argumentação que apresentamos agora, têm associados os raciocínios enunciados nos capítulos anteriores, onde se considerou não só a sua formulação e a algoritmia que será posta em prática, como também a criação e o desenvolvimento das várias relações existentes entre os modelos a utilizar, ou sejam, o modelo estrutural e o modelo em espaço de estados.

Assim, podemos dizer, de forma sucinta, que com este estudo, efectuado a partir dos dados e respectivos modelos, projectamos genericamente quatro abordagens. Uma primeira que analisará um conjunto de séries temporais representativas da realidade macroeconómica portuguesa. Esta abordagem tem como principal objectivo, descrever o mecanismo de inicialização do filtro de Kalman a aplicar aos dados das séries em estudo e extrair dos dados as várias componentes de interesse, de forma individual em cada uma das séries analisadas. Efectua-se posteriormente a comparação dos resultados obtidos pelo filtro de Kalman (Kalman, 1960 e Kalman e Bucy, 1961) com o filtro Hodrick-Prescott (Hodrick e Prescott, 1997) e o filtro Baxter-King (Baxter e King, 1999) pela análise comparativa da componente cíclica das séries em estudo.

Uma segunda, onde efectuaremos a exposição de uma proposta de metodologia para a datação do ciclo, centrada em duas versões: uma assente na definição de ciclo clássico e outra assente na definição de ciclo de desvio. Utilizando como instrumento central a metodologia TCB e o filtro de Kalman, tentamos identificar as principais características do ciclo económico e a adequação da metodologia em análise na datação de um ciclo português de referência.

Uma terceira abordagem efectuará a análise da evolução cíclica das séries do Produto Interno Bruto (PIB) representativas de várias economias de referência através do filtro de Kalman, com o intuito de verificar o grau relativo de associação existente entre elas. São consideradas a Zona Euro e seis países, nomeadamente Alemanha, EUA, Espanha, Japão, Portugal e Reino Unido.

Por último, uma quarta abordagem tem como objectivo analisar a qualidade da previsão do ciclo económico português, com base na comparação dos resultados obtidos, pelo filtro de Kalman e pelos modelos ARIMA. Mais concretamente, utiliza-se os modelos AR(1), AR(4), ARMA(1,1) e ARMA(2,2), e um conjunto de séries temporais representativas da realidade macroeconómica portuguesa.

É pela investigação do ciclo económico português e de matérias com ele relacionadas que vamos tentar encontrar formas e propor metodologias para descrever características, investigar causas e modelar comportamentos, tendo em vista analisar a sua evolução passada, projectar a evolução futura e por outro lado, desenhar métodos e abrir caminhos para outras investigações capazes de sugerir formas de actuação e antecipar cenários.

4.1 Os dados

A evolução do ciclo económico, como foi referido, pode ser observada num amplo conjunto de séries económicas. Neste estudo vamos considerar os dados fornecidos pelo Banco de Portugal (2008), sazonalmente ajustados, relativos à evolução trimestral de 1978-1T a 2007-4T, das principais componentes do produto e do mercado de trabalho: consideramos, para além do PIB, as suas componentes de Consumo Privado (de residentes), Consumo Público, Exportações de Bens e Serviços,

Formação Bruta em Capital Fixo, Importações de Bens e Serviços e ainda o Emprego Total e a Taxa de Desemprego. Todos os valores, com excepção dos relativos ao Emprego Total e à Taxa de Desemprego, encontram-se em milhões de euros e a preços constantes (2000:01=100). Os valores das séries foram logaritmicados, com excepção dos da Taxa de Desemprego.

No que se refere à proposta metodológica para a datação do ciclo económico português, utilizou-se além dos dados anteriores, os dados sazonalmente ajustados (2000:01=100), da evolução mensal de Janeiro de 1978 a Dezembro 2007 do Índice de Produção Industrial (IPI), para Portugal, disponibilizados no site da OCDE em: <http://www.oecd.org>.

Para a comparação das várias economias de referência (Alemanha, Zona Euro, Espanha, EUA, Japão e Reino Unido) com Portugal, utilizaram-se os dados do PIB em milhões de euros, logaritmicados, a preços constantes (2000:02=100), sazonalmente ajustados, da evolução trimestral de 1995-1T a 2007-4T, disponibilizados no site da OCDE.

4.2 O filtro de Kalman no estudo do ciclo económico português

Utilizando o filtro de Kalman e os dados das variáveis em análise no período entre 1978-1T a 2007-4T, efectuou-se um estudo envolvendo as componentes isoladas dos dados, descritas no modelo estrutural (2.5) e na respectiva representação em espaço de estados (2.11) e (2.12) tentando associar esta pesquisa à dinâmica global do ciclo económico.

Neste ponto, começamos por enumerar os procedimentos necessários à inicialização do filtro, para depois se isolar em variável própria as várias componentes de cada uma das séries do modelo estrutural (2.5). Efectua-se de seguida a comparação dos resultados obtidos pelo filtro de Kalman com o filtro Hodrick-Prescott e o filtro Baxter-King, tentando-se identificar as semelhanças e diferenças de cada um dos métodos.

4.2.1 Inicialização do processo iterativo

O carácter recursivo do filtro de Kalman exige a obtenção de uma distribuição inicial para α_1 , ou pelo menos a determinação da sua média \mathbf{a}_1 e variância \mathbf{P}_1 , para que o processo iterativo possa ser iniciado (Harvey, 1989). Este procedimento, denominado inicialização, é extremamente relevante, sobretudo em termos computacionais, pois as estimações finais são sensíveis às condições iniciais do filtro, especialmente em modelos com sinais de ruído elevados, modelos sazonais e modelos com séries de dados curtas (Hamilton, 1994b).

A utilização do filtro de Kalman nas engenharias não atribui muita relevância à questão da inicialização deste processo, provavelmente porque na maioria dos sistemas físicos podemos supor, com muita segurança, que estes são determinísticos ou controláveis (Ogata, 2003). Contudo, esta questão é muito relevante quando se pretende modelar séries temporais económicas onde a computação de condições iniciais adequadas depende essencialmente de duas condições, nomeadamente a estacionaridade do modelo em espaço de estados (Marques, 1998) e a natureza estocástica dos sinais de entrada no modelo (Casals e Sotoca, 2001).

A situação mais simplificadora seria aquela em que tanto o tipo de distribuição como os parâmetros são conhecidos, ou seja, considerando o modelo representado em (2.11) e (2.12), partiríamos do princípio de que $\alpha_1 \sim N(\mathbf{a}_1, \mathbf{P}_1)$, com \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 conhecidos (Kim e Nelson, 1999). Contudo, em geral esta situação quase nunca sucede, ou seja, na maioria das aplicações práticas verifica-se que alguns elementos de \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 são desconhecidos.

Uma outra hipótese considera que o estudo de inicialização pode ser feito por suposição, baseando-se no facto do filtro se actualizar rapidamente, fazendo com que as escolhas iniciais sejam dominadas pelos dados (Ogata, 2003). Esta situação só poderá ter alguma utilidade em séries de dados de grande dimensão, as quais não são frequentes em economia.

Todavia, a estratégia de inicialização mais regularmente referida na literatura (Wada e Perron, 2006), obriga-nos a examinar algum plano de estimação para os

valores iniciais desconhecidos de α_1 , \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 . Neste caso, posicionamo-nos entre duas opções. Uma primeira opção realiza-se pela análise de informações externas ao modelo, com base nas quais se efectua a estimação dos parâmetros iniciais. Se considerarmos, como exemplo, um modelo estacionário ARMA e a sua representação em espaço de estados, verificamos que quando todos os elementos do vector de estado α_t são estacionários, a média inicial, a variância e a covariância podem ser derivadas através dos parâmetros do respectivo modelo.

A segunda opção considera que não possuímos qualquer informação externa e, neste caso, será necessário definir um critério de estimação e estabelecer uma determinada distribuição *à priori*. Esta última opção apresenta alguma afinidade com a forma em que a estimação dos parâmetros é realizada por suposição.

Se considerarmos a primeira opção e pretendermos impor restrições de estacionaridade sobre o estado, podemos considerar $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ e \mathbf{P}_1 determinado a partir da equação de transição, operando sobre ela até se atingir o estado estacionário do sistema e se alcançar a convergência (Kim e Nelson, 1999). Contudo, quando algum dos componentes do vector de estado é potencialmente não estacionário não podemos utilizar a técnica anterior para inicializar todos os componentes do vector e a sua matriz de covariâncias (Wada e Perron, 2006).

Assim sendo, tanto no caso em que alguns dos componentes do vector de estado são potencialmente não estacionários, como no caso onde alguns elementos de \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 são desconhecidos, somos forçados a optar pela segunda opção e, nesta situação, o mecanismo de inicialização mais frequentemente utilizado, tanto na literatura económica como nas aplicações práticas, envolvendo o filtro de Kalman e a representação em espaço de estados, é o da inicialização difusa (Durbin e Koopman, 2001, Jong e Chu-Chun-Lin, 2003, Koopman, Wang, e Zivot, 2004 e Wada e Perron, 2006). A técnica de inicialização difusa, em termos matemáticos, é semelhante àquela que efectuaríamos se a distribuição, não de parte, mas de todos os elementos do modelo, fosse por nós ignorada.

Genericamente este processo considera um valor arbitrário para \mathbf{a}_1 e um $k \rightarrow \infty$ de modo que $\mathbf{P}_1 \rightarrow \infty$, declarando-se α_1 como tendo uma distribuição *à priori*

difusa, em que a dependência do valor escolhido para k , em termos computacionais, pode ser anulada através da transformação das variáveis do filtro (Casals e Sotoca, 2001).

Embora este método seja muito utilizado como mecanismo de inicialização do filtro, existem contudo algumas críticas à técnica de inicialização difusa, basicamente por esta associar uma variância infinita ao estado inicial e tal ser incongruente com o facto dos valores das magnitudes observadas serem finitos. Uma proposta alternativa, para atenuar este problema, foi desenvolvida por Rosenberg (1973), utilizando o pressuposto de que $\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$ e então considerar-se-ia que α_1 é um parâmetro que pode ser estimado por máxima verosimilhança.

De facto, segundo Durbin e Koopman (2001), pode-se demonstrar que as duas abordagens referidas, a inicialização difusa e a sugerida por Rosenberg (1973), produzem na prática as mesmas respostas, ou seja, cumprem as duas os mesmos objectivos se se partir de uma hipótese de distribuição *à priori* difusa.

Uma derradeira possibilidade a considerar, como mecanismo de inicialização, seria a de se utilizar os dados de uma ou mais observações e com estes calcular a distribuição inicial $\mathbf{y}_1 | \alpha_1 \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{P}_1)$ sendo $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \mathbf{y}_1$ e $Var(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1) = \mathbf{P}_1$, obtendo assim uma distribuição de α_1 e, por esta via, continuar de forma sucessiva o processo recursivo, ou então, optar-se por estimar esses valores utilizando a técnica dos mínimos quadrados sobre os dados das primeiras observações da série (Pollock, 2003a).

Seja qual for a técnica de inicialização que se escolha, a nossa opção estará sempre intimamente ligada ao conhecimento que se tem do modelo e dos dados disponíveis para o estudo, tendo presente a sua proximidade aos objectivos que nos propomos alcançar e à fiabilidade dos resultados que desejamos ver obtidos.

4.2.1.1 Inicialização difusa

Considerando a informação de que dispomos, tal como as características do modelo representativo da realidade em estudo, será então necessário definir um critério de estimação, optando-se nesta investigação, tendo em conta as suas

características, por estabelecermos uma determinada distribuição *à priori*.

Genericamente, a representação em espaço de estados (2.11) e (2.12) pode ser estacionária, não estacionária, ou parcialmente estacionária, dependendo dos valores próprios da matriz T_t (Agudo, 1992) no modelo (2.12). Também uma entrada u_t , a existir, na representação do modelo em espaço de estados, pode incluir uma parte determinística e/ou estocástica (Ogata, 2003). Estas duas condições, estacionaridade e natureza estocástica das entradas, afectam de sobremaneira o cálculo dos valores iniciais.

Na nossa representação será contudo necessário concentrarmo-nos unicamente na estacionaridade, pois como podemos observar no modelo representado em (2.11) e (2.12) este não inclui entradas, o que acontece normalmente quando se trabalha com séries económicas (Hamilton, 1994a) e não com sistemas físicos, onde a recepção de novos dados é uma componente muito dinâmica e quase sempre presente no modelo (Vacaro, 1995).

A técnica de inicialização, a utilizar neste estudo, supõe que alguns dos componentes do vector de estado podem ser potencialmente não estacionários, ou ainda, considera que alguns elementos de α_1 podem ter uma distribuição conhecida enquanto a distribuição dos restantes elementos é, por nós, completamente ignorada. Nesta perspectiva, o método de inicialização considerado mais adequado, e utilizado também neste estudo, é o da inicialização difusa (Koopman, Wang e Zivot, 2004 e Wada e Perron, 2006).

Considerando a representação em espaço de estados (2.11) e (2.12), e adoptando a proposta de Durbin e Koopman (2001), o cálculo de α_1 , pelo método da inicialização difusa, poderá ser determinado através da seguinte expressão,

$$\alpha_1 = c + A\delta + R_1\eta_1 \quad \text{com } \eta_1 \sim N(\mathbf{0}, Q_1) \quad (4.1)$$

em que o vector c , de dimensão $m \times 1$, é conhecido; δ é um vector de dimensão $q \times 1$ das quantidades desconhecidas; a matriz A , de dimensão $m \times q$, e a matriz R_1 , de

dimensão $m \times (m - q)$, são seleccionadas e constituídas por colunas da matriz identidade I_m de forma que, quando operadas, as suas colunas constituem um conjunto de g colunas de I_m com $g \leq m$ e $A'R_1 = \mathbf{0}$.

A matriz Q_1 é definida positiva e será considerada nesta abordagem como conhecida. Na maioria dos casos o vector c pode ser considerado um vector nulo, a não ser que alguns dos elementos do vector de estado inicial sejam constantes e conhecidos.

Como se trata de realizar uma inicialização difusa e tendo em conta que $\mathbf{a}_1 = E(\alpha_1)$ e $P_1 = Var(\alpha_1)$, vamos adoptar a relação seguinte (Durbin e Koopman, 2001),

$$P_1 = kP_\infty + P_*, \quad (4.2)$$

em que $k \rightarrow \infty$, e onde em termos de implementação computacional define-se k como tendo um valor imensamente grande, por exemplo, $k = 10^7$ (Koopman, Wang e Zivot, 2004 e Wada e Perron, 2006).

Tendo em conta a equação (4.1) considera-se $P_\infty = AA'$ e $P_* = R_1Q_1R_1'$, sendo a matriz A composta por colunas de I_m , de modo que P_∞ será uma matriz diagonal $m \times m$ com q elementos da diagonal iguais à unidade e os restantes iguais a zero. Sem perda de generalidade, quando um elemento de P_∞ é diferente de zero atribuímos ao elemento correspondente de c o valor zero. O vector δ em (4.1), com distribuição $N(\mathbf{0}, kI_q)$ quando $k \rightarrow \infty$ poderá ser difuso.

Segundo Durbin e Koopman (2001), a técnica de aproximar k a um valor arbitrariamente grande²⁰, pode ser aplicada em trabalhos exploratórios mas não se recomenda como uso geral, desde que se esteja a tratar de erros aleatórios de grande dimensão. Este facto torna-se relevante em investigações com estas características. Quando existem erros aleatórios (ruídos) de grande dimensão, Durbin e Koopman (2001) sugerem que se utilize uma técnica que intitulam de inicialização exacta do

²⁰ Utilizada também nos trabalhos de Harvey e Philips (1979), Koopman, Wang, e Zivot (2004) e Wada e Perron (2006).

filtro de Kalman, para que se possa distinguir facilmente daquela em que k é um número arbitrariamente grande.

Este processo é descrito em Durbin e Koopman (2001), onde podemos observar que para contrariar a dificuldade apresentada pelos erros aleatórios de grande dimensão, podemos por alteração da equação (4.2) efectuar a decomposição da matriz \mathbf{P}_t com a seguinte formulação,

$$\mathbf{P}_t = k\mathbf{P}_{\infty,t} + \mathbf{P}_{*,t} + \mathbf{O}(k^{-1}), \quad t = 2, \dots, n,$$

em que $\mathbf{P}_{\infty,t}$ e $\mathbf{P}_{*,t}$ não dependem de k e onde $\mathbf{O}(k^{-1})$ é a notação que representa uma função $f(k)$ tal que o limite de $k^j f(k)$ com $k \rightarrow \infty$ é finito para $j = 1, 2$ (Durbin e Koopman, 2001).

Durbin e Koopman (2001) afirmam igualmente poder-se demonstrar que $\mathbf{P}_{\infty,t} = \mathbf{0}$ para $t > d$ em que d é um inteiro positivo e, em circunstâncias normais, muito pequeno relativamente ao número total de observações n .

Na sequência desta demonstração, e por se considerar tratar-se de um facto relevante, nomeadamente em termos computacionais, decorre que se aplique o filtro sem efectuar alterações para $t = d + 1, \dots, n$ e com $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{\infty,t}$. Ou seja, remete-nos para a situação em que a inicialização difusa considera que os erros aleatórios não são de grande dimensão.

Note-se ainda que se todos os elementos do estado inicial têm distribuição conhecida ou são fixos, e se é conhecida a matriz $\mathbf{P}_{\infty} = \mathbf{0}$, então $d = 0$ e, assim sendo, também aqui existirá a possibilidade de se aplicar o filtro sem efectuar quaisquer alterações, utilizando, por esta via, todos os dados da série.

Em suma, tendo em conta o modelo em espaço de estados (2.11) a (2.12), e a respectiva representação (2.18) e (2.19) representativas do fenómeno em estudo, para a construção do processo de inicialização difusa adoptado e operacionalizado computacionalmente nesta investigação, teremos o seguinte (Wada e Perron, 2006),

$$\mathbf{a}_1 = [y_1 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta y_2]'$$

e

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P} & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 \end{bmatrix},$$

em que os valores de \mathbf{P} são obtidos utilizando o produto de *Kronecker*, ou seja,

$$\text{vec}(\mathbf{P}) = [\mathbf{I}_s - \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1]^{-1} \text{vec}(\mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}'_1)$$

$$\text{com } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que se \mathbf{P} é uma matriz de variâncias/covariâncias de dimensão $s \times s$, $\text{vec}(\mathbf{P})$ é um vector $s^s \times 1$ em que os primeiros s elementos são a primeira coluna de \mathbf{P} e os seguintes s elementos são a segunda coluna de \mathbf{P} e assim sucessivamente (Hamilton, 1994a). No caso em estudo s tem o valor 2.

4.2.1.2 Inicialização das matrizes de sistema

As técnicas de inicialização apresentadas no ponto anterior, descrevem como efectuar a inicialização de \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 . Contudo, tendo em conta (2.11) e (2.12) temos ainda de considerar os valores iniciais para as matrizes $\mathbf{Z}_t, \mathbf{T}_t$ e \mathbf{R}_t , bem como \mathbf{H}_t e \mathbf{Q}_t , caso estas não sejam conhecidas na sua totalidade, para finalmente se puder dar início ao processo recursivo que o filtro de Kalman sugere.

Formulados o modelo em espaço de estados (2.11) e (2.12) e a algoritmia associada ao filtro de Kalman, será então necessário estimar o vector dos parâmetros desconhecidos, definido neste estudo por $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\delta^2 \quad \sigma_\omega^2 \quad \sigma_\theta^2 \quad \phi_1 \quad \phi_2]$. Esta estimação servirá para se efectuar a inicialização das matrizes $\mathbf{Z}_t, \mathbf{T}_t, \mathbf{R}_t, \mathbf{H}_t$ e \mathbf{Q}_t ²¹, e dará posteriormente lugar à técnica da inicialização difusa, referida no ponto anterior,

²¹ Caso as matrizes não sejam conhecidas.

para o cálculo dos valores iniciais $\mathbf{a}_1 = E(\boldsymbol{\alpha}_1)$ e $\mathbf{P}_1 = Var(\boldsymbol{\alpha}_1)$ do modelo.

Assumindo-se a distribuição normal dos termos do erro, as igualdades (2.8) a (2.10), a proposta no modelo (2.11) e (2.12), a formulação utilizada no filtro de Kalman, e as equações (3.5) e (3.11), a estimação de $\boldsymbol{\theta}$ utilizará a função de máxima verosimilhança difusa, definida por,

$$\log L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \sum_{T=d+1}^n (\log(2\pi|\mathbf{F}_t| + \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t)) \quad (4.3)$$

em que se considera que a função de verosimilhança é avaliada a partir de $d + 1$, sendo d um número inteiro positivo muito pequeno²² relativamente ao número total de observações n ; (veja-se Clark, 1987, Harvey, 1989, Kim e Nelson, 1999 e Durbin e Koopman, 2001).

Este facto realça-nos a importância de possuir séries de dados de razoável dimensão que permitam encontrar um valor de d muito menor que n e com dimensão ainda suficiente para que os resultados obtidos, pela função de máxima verosimilhança, facultem boas estimativas do vector $\boldsymbol{\theta}$.

A estimação dos valores, tendo como objectivo encontrar um determinado vector $\boldsymbol{\theta}$ que forneça resultados de máxima verosimilhança, será realizada por uma pesquisa não linear sobre o espaço de soluções dos parâmetros de $\boldsymbol{\theta}$. Será também necessário encontrar, entre as múltiplas possibilidades combinatórias, uma forma de inicializar os algoritmos de pesquisa não linear, ou seja, os valores do vector $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\delta^2 \quad \sigma_\omega^2 \quad \sigma_\theta^2 \quad \phi_1 \quad \phi_2]$ para se poder dar início no nosso modelo ao processo de cálculo computacional.

²² Chang Kim recomenda que esse valor seja pelo menos maior do que 10 e especificando uma matriz definida positiva grande (por exemplo no caso em estudo $\mathbf{P} = 100 * \mathbf{I}_4$) para a matriz de covariância inicial e o vector estado inicial com valor zero (no caso em estudo $\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$). Nestes casos o valor da função de máxima verosimilhança é afectado pelo valor escolhido e, assim sendo, é usual avaliar a função a partir do valor escolhido para d (por exemplo 11, nos casos onde a série temporal dos valores observados não é de grande dimensão).

Para a escolha dos valores de θ poderíamos utilizar um leque relativamente variado de estratégias e métodos de pesquisa não linear (Casals e Sotoca, 2001 e Jong e Chu-Chun-Lin, 2003). Optou-se, no entanto, por se adoptar as propostas dos trabalhos de Clark (1987) e de Kim e Nelson (1999) como a base de estimação dos parâmetros de θ em estudo²³.

Apurou-se também, depois de testadas nesta investigação, que as pesquisas computacionais não lineares²⁴ não são insensíveis a séries de dimensão reduzida e que, nesse caso, a pesquisa poderá ter dificuldade em encontrar uma solução (caminho aceitável) para os valores dos parâmetros do vector θ .

Este facto, a verificar-se e a ser ignorado pela investigação, poderá provocar alguns enviesamentos no cálculo posterior dos valores iniciais de \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 , tendo necessariamente de existir alguma medida de erro que permita verificar a dimensão desse enviesamento. Por outro lado, ao se constatar a existência de soluções não aceitáveis, deve existir a possibilidade do investigador efectuar uma outra inicialização aos valores de θ , repetindo este processo até que possa encontrar alguma solução considerada satisfatória aos seus propósitos, e assim poder concluir o processo de inicialização do filtro.

Quando a optimização numérica é utilizada para maximizar o logaritmo da função de verosimilhança relativamente a um qualquer θ , o algoritmo computacional efectua a sua busca no espaço dos parâmetros, utilizando todas as possíveis combinações de valores como domínio para esses parâmetros.

Contudo, em certas situações, esses valores devem ser limitados dentro de um determinado intervalo de menor dimensão, optimizando por esta via e tornando

²³ Modelos de busca não linear computacionais, como o método de Newton (ou método de Newton-Raphson), (Nocedal e Wright, 1999, Dennis e Schnabel, 1983 e Casals, Sotoca, e Jerez, 1999), ou Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), medium-scale: quasi-Newton line search, (Shanno, 1970, Fletcher, 2000 e Durbin e Koopman, 2001), utilizados por Kim e Nelson (1999), ou ainda, Nelder-Mead Simplex direct search (Nelder e Mead, 1965 e Lagarias, Reeds, e Wright, 1998), utilizado por Clark (1987), foram testados computacionalmente com este propósito, não se verificando, diferenças relevantes nos valores dos parâmetros obtidos, entre os diferentes processos de busca.

²⁴ Estas funções estão implementadas e disponibilizadas para o software Matlab no site: <http://www.mathworks.com>, através das funções `fminunc` e `fminsearch` e nas rotinas Matlab disponibilizadas pelos autores a esta investigação, por E4 no site: <http://www.ucm.es/info/icae/e4> nas funções `e4min` e `e4preest`.

possível, em tempo útil, o concluir da busca de soluções aceitáveis.

Geralmente, este tipo de restrições pode ser imposto pela transformação do vector Ψ num outro vector definido num outro domínio, ou seja,

$$\theta = g(\Psi)$$

em que g é uma função contínua.

No caso aqui em estudo, tendo em conta o vector de parâmetros θ temos²⁵,

$$\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6]$$

que será transformado em $\theta = g(\Psi)$ onde,

$$\theta = [\sigma_\varepsilon^2 \ \sigma_\delta^2 \ \sigma_\omega^2 \ \sigma_\theta^2 \ \phi_1 \ \phi_2] = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \phi_1 \ \phi_2].$$

Com este propósito, Box, Jenkins e Reinsel (1994) e Kim e Nelson (1999) sugerem que nos casos em que se utiliza uma representação de modelo estrutural (2.5) e a consequente representação matricial em espaço de estados (2.18) e (2.19) com as respectivas dimensões dos vectores e das matrizes, se execute as seguintes transformações para as variâncias iniciais,

$$\theta_i = \exp\left(-\frac{\psi_i}{10}\right) \quad \text{com } i = 1, \dots, 4$$

em que se obriga, por esta via, a que $\theta_i > 0$.

²⁵ Note-se que a dimensão do vector de outro modelo pode ser diferente e nesse caso teríamos de adaptar as equações à nova situação.

Para $\phi = [\phi_1 \phi_2]$, em que ϕ_1 e ϕ_2 são os coeficientes autoregressivos do modelo AR(2), uma forma de restringir os valores de ϕ_1 e ϕ_2 dentro da região estacionária (raízes de $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = 0$ fora do círculo unitário), é efectuar a transformação sugerida por Kim e Nelson (1999),

$$z_1 = \frac{\psi_5}{1 + |\psi_5|} \text{ e } z_2 = \frac{\psi_6}{1 + |\psi_6|}.$$

Assim,

$$\phi_1 = z_1 + z_2 \text{ e } \phi_2 = -1 * z_1 * z_2,$$

de onde decorre que $-2 < \phi_1 < 2$ e $-1 < \phi_2 < 1$.

A região estacionária para os valores de $\phi = [\phi_1 \phi_2]$ pode ser encontrada desde que se respeite a condição necessária e suficiente de estacionaridade para AR(2), ou seja (Box, Jenkins e Reinsel, 1994),

$$\phi_2 + \phi_1 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1 \text{ e } -1 < \phi_2 < 1.$$

Esta restrição, no domínio de ϕ_1 e ϕ_2 , define o plano (ϕ_1, ϕ_2) onde no seu interior podemos desenhar o triângulo que corresponde à área dos processos estacionários (Harvey, 1989 e Marques, 1998). Verificou-se ainda que a transformação apresentada impõe que as raízes do polinómio sejam reais, o que nos vai obrigar a averiguar unicamente se $\phi_2 + \phi_1 < 1$ e $\phi_2 - \phi_1 < 1$, como condições necessárias e suficientes de estacionaridade.

Como se trata de obter raízes de um polinómio de segundo grau, o facto de se impor que todas as raízes sejam reais evita que o estado transitório, estado que depende das condições iniciais ou é provocado por alguma perturbação vinda do exterior e incorporada na dinâmica do processo, possua uma componente sinusoidal muito prolongada no tempo, ou seja, dificulte e retarde o atingir da fase de

estabilidade do sistema (veja-se Nise, 2007, Lathi, 2007 e Haykin e Veen, 1999).

Esta situação pode ser bastante relevante se a série em estudo não for de grande dimensão. Por outro lado, como se trata de uma equação estocástica de diferenças, a condição de estabilidade é uma condição necessária para que a série temporal seja estacionária (Enders, 2003).

Dadas as dificuldades de processamento informático, motivadas essencialmente pela complexidade e morosidade dos cálculos a realizar e pelas múltiplas combinações possíveis de valores a atribuir ao vector Ψ no caso em estudo²⁶, considerou-se como regra de simulação que γ seria um número inteiro positivo, inferior ou igual a 10, ou seja, $\gamma = 1, \dots, 10$, onde,

$$\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6] = [\gamma \ \gamma \ \gamma \ \gamma \ \gamma \ \frac{\gamma}{2}].$$

Calculou-se as diferentes soluções da função de máxima verosimilhança difusa (4.3), utilizando os algoritmos de busca não linear, seguindo a proposta de restrição ao domínio dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \phi_1$ e ϕ_2 . Posteriormente, com a melhor solução para a função de máxima verosimilhança difusa (4.3), deu-se início ao processo de simulação e inicialização das matrizes do sistema.

O Quadro 4.1 e o Quadro 4.2 mostram os valores das simulações, sobre o seu espaço dos parâmetros, com $d = 11$, para o Emprego Total e o PIB português de 1978-1T a 2007-4T²⁷. Verifica-se também, como exemplo ilustrativo, no Gráfico 4.1 que os testes por nós efectuados para dois valores próximos de d , que as oscilações cíclicas mantêm uma fisionomia semelhante ao longo do tempo, variando no entanto as amplitudes das suas oscilações.

Este facto é relevante para esta investigação, pois interessa-nos mais analisar as formas cíclicas das variações ao longo do tempo do que a amplitude de variação em

²⁶ Recorde-se que não existe à partida nenhuma referência sobre a melhor combinação inicial de valores.

²⁷ Os quadros para o Consumo privado (de residentes), Consumo público, Exportações de bens e serviços, Formação bruta em capital fixo, Importações de bens e serviços e Taxa de desemprego, poderão ser consultados no Apêndice I.

torno do eixo das abcissas e, assim, a escolha do valor de d a partir de determinado valor parece-nos ser pouco relevante para os objectivos do estudo.

Quadro 4.1: Valores de máxima verosimilhança do Emprego Total (d=11)

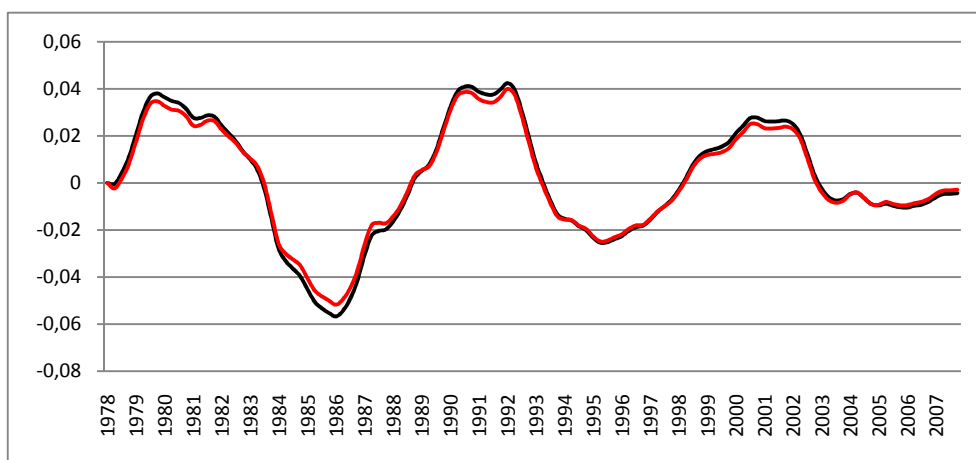
K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	420,67	423,42	423,42
2	421,88	423,42	423,42
3	423,42	423,42	423,42
4	423,42	423,42	423,42
5	423,42	423,42	423,42
6	423,77	423,42	423,42
7	421,16	423,42	423,77
8	423,31	419,04	420,41
9	419,04	423,53	419,02
10	VNV	VNV	VNV

Quadro 4.2: Valores de máxima verosimilhança do PIB (d=11)

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	356,38	357,47	357,47
2	357,47	356,50	357,47
3	357,47	356,50	356,55
4	356,50	356,50	356,50
5	356,50	357,47	356,44
6	357,47	357,47	356,44
7	356,50	353,71	356,50
8	353,72	350,38	356,50
9	357,10	352,95	VNV
10	347,45	VNV	VNV

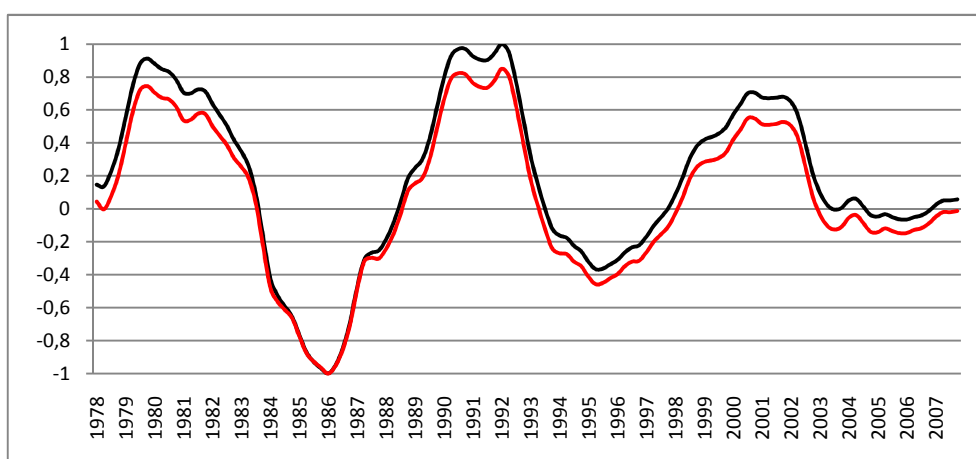
Nota: Nos quadros com listagem de valores de máxima verosimilhança difusa, sempre que se obteve um valor grosseiro ou não viável, assinalamos a situação com a sigla VNV (Valor Não Viável).

Gráfico 4.1: PIB Trimestral do Ciclo Alisado para d=11 e d=21 (-)



Para melhor comparar as variações cíclicas e a leitura agrupada das séries em cada gráfico utilizou-se ao longo desta investigação, sempre que for necessário comparar mais de uma realidade, uma representação normalizada, como a que se pode observar no Gráfico 4.2.

Gráfico 4.2: PIB Trimestral do Ciclo Alisado Normalizado para d=11 e d=21 (-)



Para a normalização dos valores da série optou-se por adoptar dois métodos, considerando x_t como sendo o valor da série de dados no momento t e antes de se efectuar qualquer normalização. Se estamos a analisar características associadas à definição de ciclo de desvio e se pretendermos normalizar os valores em torno do eixo das abcissas, com $t = 1, \dots, n$, considera-se,

$$Norx_t = \frac{(x_t - x_{Mínimo})(Norx_{Máximo} - Norx_{Mínimo})}{x_{Máximo} - x_{Mínimo}} + Norx_{Mínimo},$$

onde $Norx_{Máximo}$ e $Norx_{Mínimo}$ são definidos, respectivamente, como sendo o valor máximo e o valor mínimo dos valores normalizados e, $Norx_t$ o valor normalizado de x_t .

Quando se optar por analisar características relacionadas com a definição de ciclo clássico, a normalização é dada por,

$$Norx_t = \frac{x_t}{x_1} \times 100 \quad \text{com } t = 1, \dots, n.$$

Como se pode observar, esta última forma de normalizar a variável x_t permite-nos analisar de forma directa os valores do crescimento e diminuição em termos percentuais, sendo que o primeiro valor da série será sempre 100. Os valores normalizados para o ciclo de desvio serão definidos nesta investigação dentro do intervalo fechado de -1 a 1, ou seja, $Norx_{Máximo} = 1$ e $Norx_{Mínimo} = -1$.

Pela análise dos Quadro 4.1 e Quadro 4.2, verificamos que o valor de γ que maximiza a função de verosimilhança difusa (4.3), arredondada às centésimas, utilizando o método Newton-Raphson, método BFGS e o método Nelder-Mead, é em muitos casos semelhante. Optámos assim, por eleger a proposta de Kim e Nelson (1999), utilizando, de agora em diante, o método de busca não linear BFGS (*medium-scale: quasi-Newton line search*), como algoritmo de optimização, na busca dos valores de inicialização dos parâmetros, nesta investigação.

A razão deste facto prende-se não só com a actualidade dos dois documentos aqui analisados, que utilizam os modelos de busca não linear, (Clark, 1987 e Kim e Nelson, 1999), bem como com a facilidade e a possibilidade, testada por nós, em comprovar a fiabilidade dos valores obtidos com os nossos algoritmos computacionais, através dos dados disponibilizados em Kim e Nelson (1999).

Esta capacidade é sem dúvida relevante, pois permitiu-nos efectuar a comprovação dos resultados destes autores com os seus dados e, naturalmente, testar a implementação do filtro de Kalman e de todo o programa informático criado especificamente para esta investigação, verificando em simultâneo que este correspondia integralmente aos propósitos que motivaram a sua criação.

A escolha do método BFGS (*medium-scale: quasi-Newton line search*), não invalida a possibilidade de utilização de outro método. Pensamos contudo que as diferenças obtidas, por não produzirem resultados finais muito diferenciados, não serão relevantes tendo em conta os objectivos globais desta investigação. Todavia, existem algumas dificuldades associadas a estes métodos de busca não linear que devemos desde logo realçar.

Em primeiro lugar, a convergência global não é assegurada e a direcção de busca pode não ser uma direcção viável (Jong e Chu-Chun-Lin, 2000). Em segundo lugar, a necessidade de encontrar a hessiana da função (Stewart, 2005), na maioria das vezes transforma-se num processo computacionalmente pesado e muito moroso, ao ponto de se tornar inexecutável, se o número de variáveis for muito grande.

Para evitar que o processo de busca se prolongue muito no tempo, é usual utilizar-se critérios de finalização. Por exemplo, a convergência da função objectivo considera que o procedimento deve ser encerrado quando o algoritmo não é capaz de causar mudanças significativas no valor da função, ou seja, quando a distância percorrida naquela iteração for menor do que alguma tolerância, definida pelo calibrador. Podemos também considerar um número máximo de iterações que o algoritmo pode realizar, sendo que este pode ser finalizado antes, desde que o critério da convergência da função objectivo seja atingido.

O Quadro 4.3 apresenta-nos, em resumo, os valores que maximizam a função de máxima verosimilhança, obtidos em cada variável, entre os três métodos, o método Newton-Raphson, método BFGS e o método Nelder-Mead.

Quadro 4.3: Valores de máxima verosimilhança (MV) (d=11)

	<i>CPriv</i>	<i>CPub</i>	<i>ET</i>	<i>EBS</i>	<i>FBCF</i>	<i>IBS</i>	<i>IPI</i>	<i>TxD</i>
MV	367,42	460,31	423,77	259,47	237,27	263,50	357,47	24,86

Nota: As siglas do cabeçalho das colunas representam, CPriv (Consumo Privado de residentes), CPub (Consumo Público), ET (Emprego Total), EBS (Exportações de Bens e Serviços), FBCF (Formação Bruta em Capital Fixo), IBS (Importações de Bens e Serviços), IPI (Índice de Produção Industrial), PIB (Produto Interno Bruto) e TxD (Taxa de Desemprego).

4.2.2 Extracção das componentes de interesse através do filtro de Kalman

Com base no software desenvolvido em exclusivo para esta investigação, construíram-se os Gráficos 4.3 a 4.12 representativos dos dados e do modelo alisado, da tendência alisada, da componente de tendência aleatória alisada, do ciclo alisado e do erro alisado, para o Emprego Total e o PIB português de 1978-1T a 2007-4T²⁸. Os Gráficos apresentados parecem-nos confirmar a utilidade do filtro de Kalman, como instrumento de extracção e de isolamento das componentes de interesse das séries em estudo, definidas em (2.5).

A tendência aleatória, nos Gráficos 4.5 e 4.10, ajuda-nos a compreender melhor o percurso de evolução desta variável, formulada como componente do nível da tendência, dos Gráficos 4.4 e 4.9 e representada no modelo estrutural (2.5). Pode-se ainda observar, mais claramente nos Gráficos 4.5 e 4.10, devido essencialmente à amplitude do intervalo na escala de ordenadas, que a inicialização difusa impõe um breve período, no início das abcissas, de ajuste nos valores ao seu “normal percurso”, um regime transitório que antecede o designado regime permanente (Ogata, 2003).

Após o isolamento da componente cíclica, nos Gráficos 4.6 e 4.11 verifica-se que as características gráficas e a amplitude dos valores dessas flutuações, em relação à encontrada nos valores logaritmitizados dos dados e também, da variável tendência, nos Gráficos 4.4 e 4.9, do Emprego Total e PIB, é muito reduzida e dificilmente

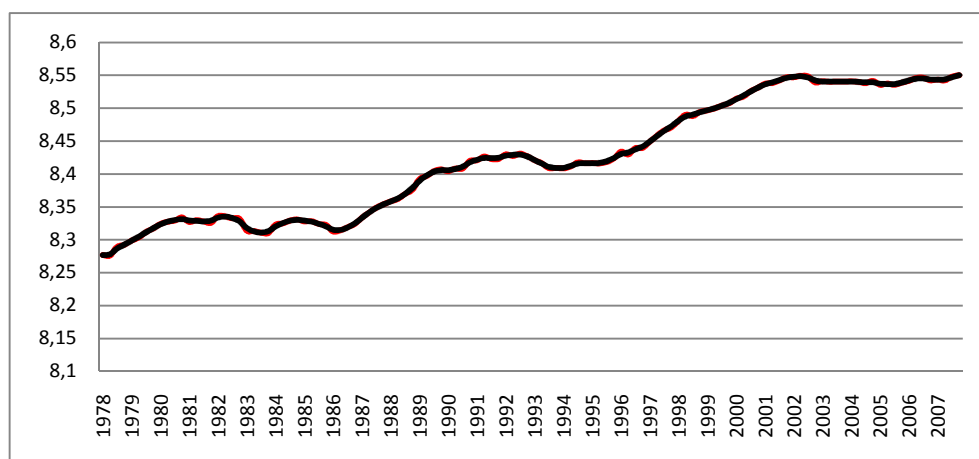
²⁸ Os gráficos para o Consumo privado (de residentes), Consumo público, Exportações de bens e serviços, Formação bruta em capital fixo, Importações de bens e serviços e Taxa de desemprego, poderão ser consultados em apêndice, Apêndice II.

identificável, caso não fosse extraída e isolada.

A amplitude dos erros alisados do modelo, nos Gráficos 4.7 e 4.12, fazem-nos admitir que o peso desses valores não é muito relevante em relação à dimensão dos valores logaritmicados da série²⁹. Este facto é útil pois permite-nos aferir algo sobre a validade da técnica utilizada na inicialização do filtro (referimo-nos à inicialização difusa e à sua condição de aplicabilidade em erros de pequena dimensão).

Nos Gráficos 4.3 e 4.8, observa-se que dada a dimensão do desenho aqui exposto, as duas linhas, série de dados e modelo alisado, encontram-se sobrepostas, podendo dar a ideia errada que só existe registada a evolução temporal de uma das séries ou que estas linhas são absolutamente coincidentes.

Gráfico 4.3: Emprego Total Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)



²⁹ Os únicos valores que não foram logaritmicados são naturalmente os da Taxa do desemprego.

Gráfico 4.4: Emprego Total Trimestral – Tendência Alisada

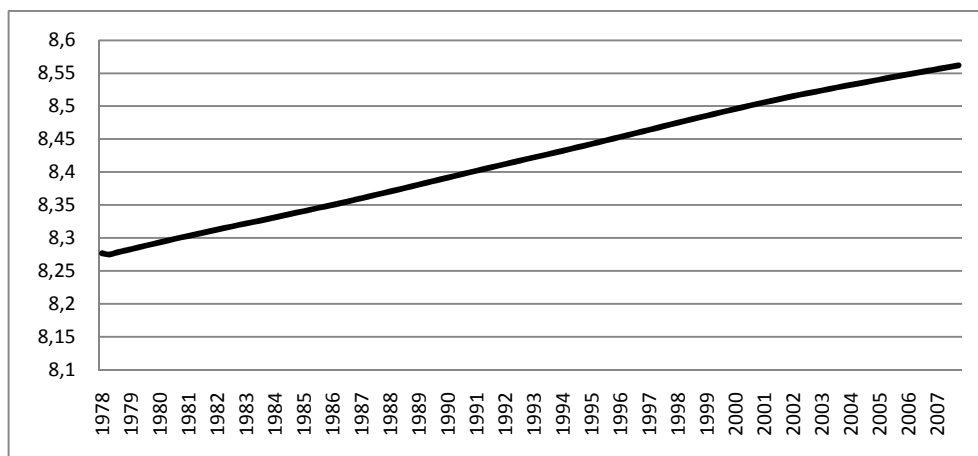


Gráfico 4.5: Emprego Total Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

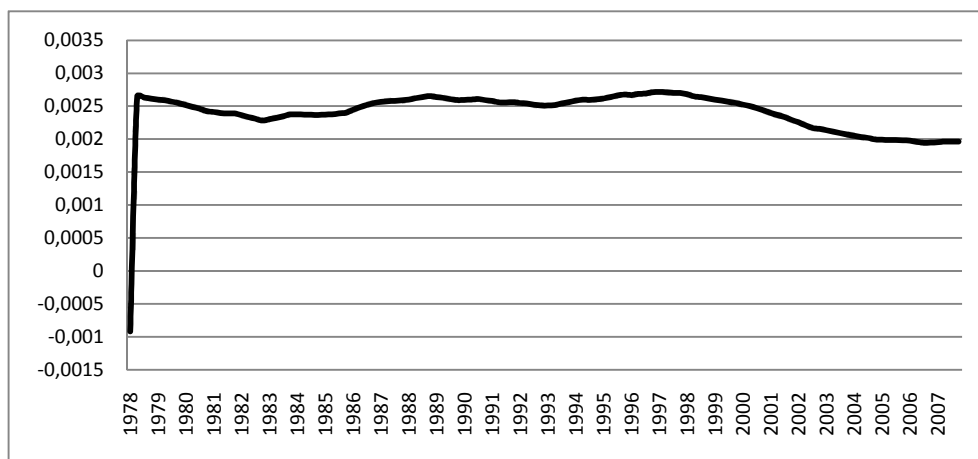


Gráfico 4.6: Emprego Total Trimestral – Ciclo Alisado

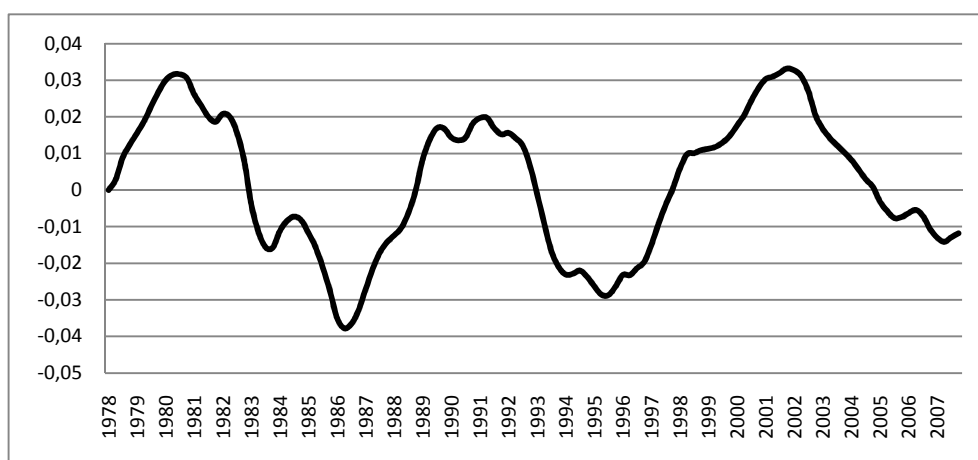


Gráfico 4.7: Emprego Total Trimestral – Erro Alisado

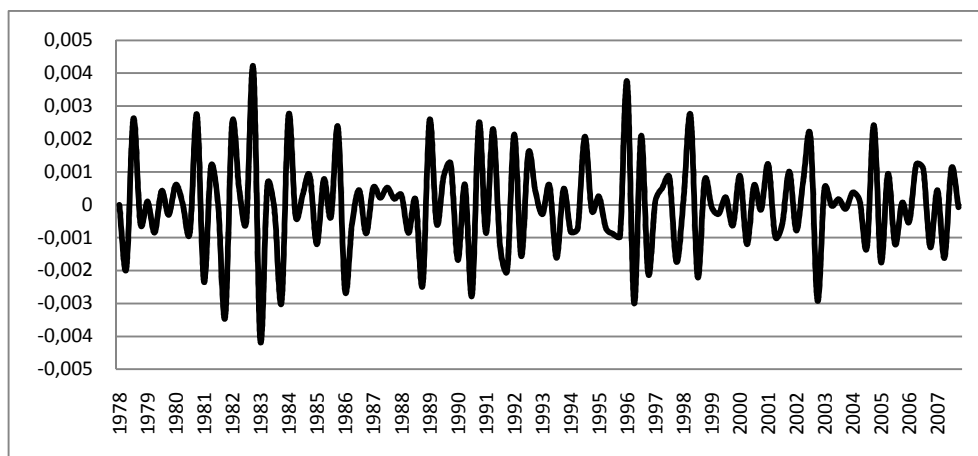


Gráfico 4.8: PIB Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

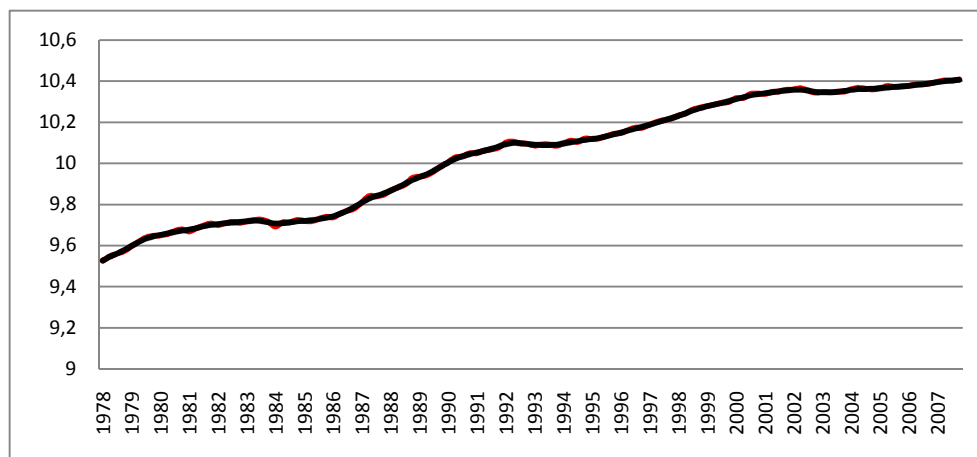


Gráfico 4.9: PIB Trimestral – Tendência Alisada

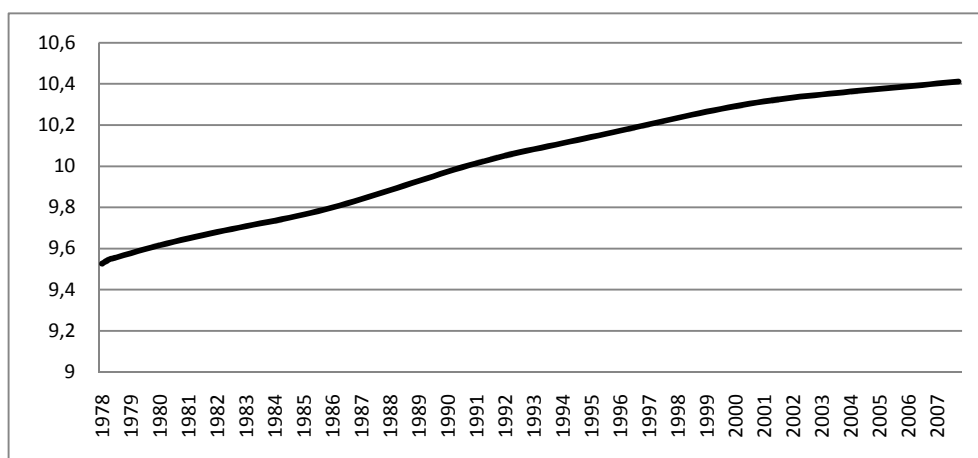


Gráfico 4.10: PIB Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

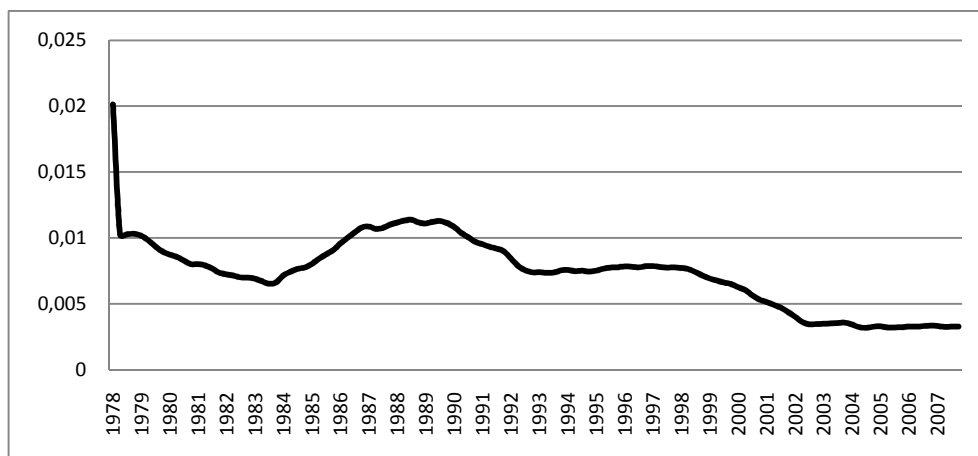


Gráfico 4.11: PIB Trimestral – Ciclo Alisado

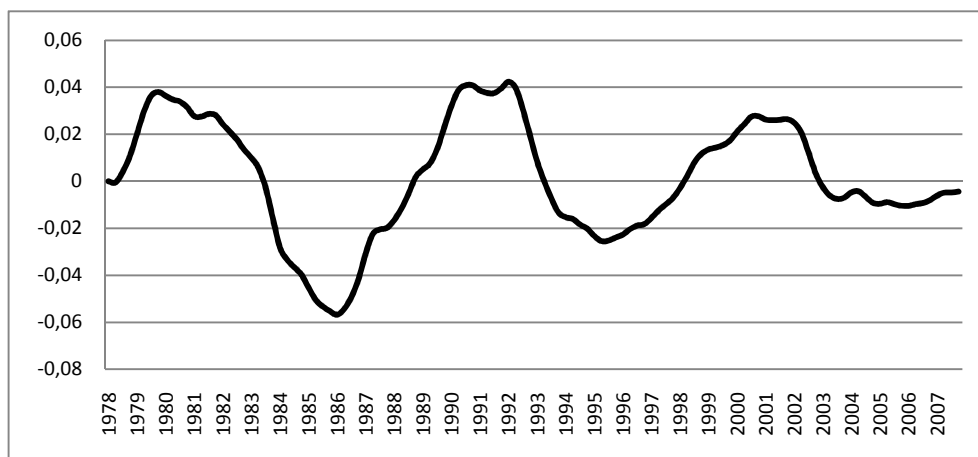
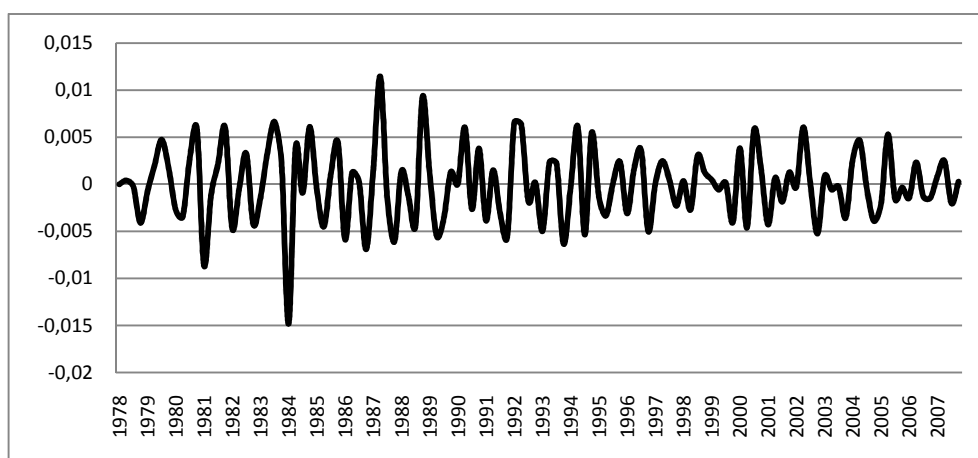


Gráfico 4.12: PIB Trimestral – Erro Alisado



4.2.3 Filtro de Kalman e outros métodos para a extracção de sinal

Pretendemos efectuar a confrontação do filtro de Kalman (Kalman, 1960) com outros importantes métodos, utilizados na literatura económica/econométrica para extracção de sinal, nomeadamente o filtro Hodrick-Prescott (Hodrick e Prescott, 1997) e o filtro Baxter-King (Baxter e King, 1999), com o propósito de verificar da adequação e semelhanças, nos valores que estes dois métodos estatísticos produzem no estudo da evolução cíclica das variáveis em estudo, sugerida pelo filtro de Kalman e baseadas no modelo estrutural (2.5).

A opção feita pelo filtro de Hodrick-Prescott e pelo filtro de Baxter-King deve-se sobretudo ao facto de estes filtros serem muito utilizados na literatura económica para efectuar extracção da componente tendência temporal e cíclica de um sinal, ou se preferirmos de uma série de dados (Harvey e Trimbur, 2003).

A escolha do parâmetro λ do método Hodrick-Prescott é, em larga medida, discricionária, não existindo um consenso quanto ao melhor valor a adoptar para diferentes frequências dos dados (Almeida e Felix, 2006). Neste estudo, tendo em conta a periodicidade das séries temporais, utilizou-se o valor original proposto por Hodrick e Prescott (1997), parâmetro de ajustamento de 1600, para dados trimestrais, ou seja, remove as variações associadas com ciclos de períodos inferiores a 32 trimestres (8 anos). De notar também, tal como descrevemos aquando da referência ao valor de d na função de máxima verosimilhança difusa no processo de inicialização do filtro de Kalman, a escolha de vários valores para λ no filtro de Hodrick-Prescott, testada nesta investigação, afecta apenas a amplitude do ciclo económico, mantendo quase inalterados os pontos de viragem de cada ciclo.

No caso do método Baxter-King, tendo também em conta a periodicidade das séries temporais, utilizamos os valores dos parâmetros $pl = 6$ e $pu = 32$. O filtro Baxter-King elimina das variáveis em estudo muitas componentes de movimento lento e de frequência baixa, com periodicidade maior que 32 trimestres (8 anos) e muitas componentes de frequência alta, com periodicidade menor do que 6 trimestres (1,5 anos) retendo no entanto componentes intermédias a esses limites de tempo, 6 e 32

trimestres (Baxter e King, 1999), isolando desta forma a variável tendência temporal³⁰. Tanto no filtro de Hodrick-Prescott, como no filtro Baxter-King, a componente cíclica da variável é obtida pela diferença entre os valores da série em estudo e os valores da sua tendência temporal.

As opções tomadas para os valores dos parâmetros do filtro de Hodrick-Prescott e do filtro de Baxter-King estão inseridas no intervalo temporal e em linha com a definição de ciclo de Burns e Mitchell (1946), onde se considera que o ciclo económico tem uma duração temporal superior um ano e que pode ir até dez ou doze anos.

4.2.4 Vantagens e desvantagens dos métodos em confronto

O filtro de Kalman (Kalman, 1960 e Kalman e Bucy, 1961) consiste num conjunto de equações que produzem uma solução recursiva óptima pelo método dos mínimos quadrados (Johnston e DiNardo, 2001), para um sistema dinâmico linear (Durbin e Koopman, 2001). Considera-se ser relevante enumerar as principais diferenças existentes entre o filtro de Kalman e os filtros de Hodrick-Prescott e Baxter-King, sabendo-se que estes últimos constituem também uma ferramenta útil para a análise dos ciclos económicos e para a extracção da tendência.

4.2.4.1 As vantagens do filtro de Kalman

Na enumeração das principais vantagens do filtro de Kalman, quando comparado com o filtro de Hodrick-Prescott e o filtro de Baxter-King, é usual considerar-se que ele acautela a influência de possíveis mudanças estruturais na estimação dos parâmetros envolvidos no modelo. A estimação recursiva parte de uma amostra inicial e actualiza as suas estimações incorporando sucessivamente as novas observações até se cobrir a totalidade dos dados. Este facto evita que a estimação mais recente dos coeficientes esteja afectada pela história mais longínqua da série de dados, a qual, em presença de mudanças estruturais, pode enviesar muito os seus valores de estimação.

³⁰ A frequência baixa está associada às variáveis tendência, a frequência alta associada a movimentos estacionários e irregulares de curto prazo e as componentes intermédias ao ciclo.

Embora este inconveniente possa ser corrigido noutro tipo de modelos através de estimações sequenciais, ou seja, dada uma série temporal para a qual se dispõe de n observações, a estimação sequencial de um modelo é simplesmente uma sucessão de estimações para o conjunto de amostras de dimensão fixa, p , tal que a primeira amostra contém as observações de 1 até p , a seguinte de 2 até $p + 1$, e assim sucessivamente, até que a última amostra contém a observação $n - p + 1$ até n (com $p < n$).

Este facto implica uma sequência de $(n - p + 1)$ estimadores e permite uma análise exploratória da evolução de qualquer estatística associada ao modelo. A estimação sequencial mantém assim o tamanho da amostra constante mas também a possibilidade de um maior erro nas estimações sequenciais realizadas por janelas de tamanho p . O filtro de Kalman, com o seu método recursivo de estimação, utiliza toda a história da série mas com a vantagem de se tentar estimar uma trajectória estocástica dos coeficientes em vez de uma estratégia determinística.

Quando se pretende comparar as estimações dos dois tipos de modelos, a estimação que utiliza janelas de tamanho p é associada ao último mês do período em análise, dado que o filtro de Kalman localiza o coeficiente estimado no mês correspondente à última observação incorporada na amostra. Tentamos por esta via, através do filtro de Kalman, solucionar o possível desvio da estimação perante a presença de mudanças estruturais.

O filtro de Kalman utiliza o método dos mínimos quadrados para gerar recursivamente um estimador do estado no momento t . Por outro lado, o filtro Kalman está em concordância com o teorema de Gauss-Markov (Johnston e DiNardo, 2001), sendo que esta importante característica o converte numa ferramenta poderosa para solucionar um conjunto amplo de problemas de inferência estatística (Harvey, 1989 e Murteira, Muller e Turkman, 1993).

O filtro de Kalman distingue-se ainda pela sua habilidade para prever o estado de um modelo, no passado, presente e futuro, mesmo quando a natureza precisa do sistema modelado é desconhecida.

A modelação dinâmica de um sistema é uma das características-chave que distingue o método de Kalman. Os modelos lineares dinâmicos são modelos com uma transição linear desde um período ao seguinte, as quais podem descrever a maioria dos modelos comumente utilizados em estudos envolvendo séries temporais. Daqui resulta um amplo conjunto de aplicações práticas onde o filtro pode ser empregue e prestar assim o seu contributo para a clarificação de conceitos e para a solução deste padrão de problemas.

4.2.4.2 As desvantagens do filtro de Kalman

Entre as grandes desvantagens do filtro de Kalman menciona-se normalmente a dificuldade em encontrar condições iniciais para a média e variância do vector de estado que optimizem o processo de estimação, sendo estas indispensáveis para se iniciar o processo recursivo do filtro.

Quando se aplica esta teoria a modelos autoregressivos, os resultados estão condicionados à informação passada das variáveis em estudo. Nesse sentido, a previsão utilizando séries temporais representa também a força ou inércia presentes no sistema. Este facto vai levar a que as análises devam ser de curto prazo para se conseguir uma maior eficiência do filtro.

Associado ao desenvolvimento do filtro de Kalman, tal como se encontra no documento original, existe muitas vezes a suposição de que o leitor possui algum conhecimento da teoria das probabilidades (Murteira, 1990). Este facto pode, por vezes, originar alguma limitação para se efectuar o seu estudo e para se construir o respectivo software informático de simulação.

4.2.5 Correlação e sincronia entre os filtros

Uma ideia subjacente a este estudo é a de tentar compreender a relevância da selecção de um determinado modelo de extracção de sinal, em relação a um outro, neste caso utilizando a título meramente exploratório medidas de correlação entre as variáveis cíclicas normalizadas, produzidas pelos três modelos e apresentadas no Quadros 4.4. Por esta via vamos investigar o seu possível relacionamento médio quantitativo e analisar os períodos comuns de sincronia, ou seja, os pontos onde os

filtros crescem e decrescem em simultâneo.

Quadro 4.4: Correlação entre modelos de extracção do ciclo

		FK versus HP	Atraso ou Avanço	S em %	FK versus BK	Atraso ou Avanço	S em %	HP versus BK	Atraso ou Avanço	S em %
Correlação (Pearson)	Consumo Privado (de residentes)	0,98	0	80,67	0,74	0	83,19	0,70	0	73,95
	Consumo Público	0,64	0	81,51	0,78	0	87,39	0,73	0	84,03
	Emprego Total	0,81	0	78,15	0,30	0	73,95	0,62	0	70,59
	Exportações de Bens e Serviços	0,81	0	86,55	0,70	1	87,39	0,62	0	77,31
	Formação Bruta em Capital Fixo	0,86	0	75,63	0,57	0	81,51	0,74	0	67,23
	Importações de Bens e Serviços	0,86	0	84,03	0,52	0	80,67	0,77	0	74,79
	PIB	0,87	0	61,34	0,29	0	57,14	0,53	0	62,18
	Taxa de Desemprego	0,67	0	73,95	0,28	0	65,55	0,65	0	68,07

Nota: FK significa filtro de Kalman, HP significa filtro de Hodrick-Prescott, BK significa filtro de Baxter-King e S em % significa Sincronia em %.

Tendo em conta as várias situações possíveis, é habitual considerar-se que uma pequena correlação positiva acontece entre 0,1 e 0,3 (negativa entre -0,3 e -0,1), moderada de 0,3 a 0,5 (negativa de -0,5 a -0,3) e alta entre 0,5 e 1 (-1 e -0,5)³¹.

Comparando o valor da correlação entre duas variáveis, X e Y , de uma qualquer evolução cíclica, $correlação(X_t, Y_{t+k})$, se esse valor for mais elevado para $k = 0$, significa que o ciclo médio dessas duas variáveis é coincidente, se for mais elevado para $k > 0$, a série X antecipa, tem um avanço (sinal positivo) em média k períodos em relação à série Y . Finalmente, se a correlação for mais elevada para $k < 0$, a série X apresenta um atraso (sinal negativo) em média de k períodos em relação

³¹ Regra empírica discutível, por exemplo, alguns estudos consideram o valor mínimo de correlação alta como sendo o de 0,7 (ou -0,7).

ao ciclo da série Y .

No Quadro 4.4, os valores de atraso (ou de avanço) indicam o número médio de trimestres de atraso (ou de avanço) do filtro de Kalman (ou do Hodrick-Prescott quando se compara com o Baxter-King) em relação aos outros filtros, entre -12 e 12 trimestres, nos quais se observa a correlação máxima.

Os aspectos da correlação e atraso/avanço deverão ser avaliados em conjunto. Por exemplo, considerando-se o caso em que as duas variáveis X e Y são caracterizadas por coeficientes de correlação máxima relativamente próximos de 1 se se verificar que estas estão desfasadas 3 anos, ou seja, 12 trimestres, este desfasamento pode ser considerado demasiado longo em comparação com a duração média do ciclo e assim sendo é difícil associar a evolução cíclica de uma variável com a outra. Por outro lado, se o desfasamento fosse de um trimestre, para a mesma correlação máxima, seríamos levados a considerar a existência de uma forte relação média entre o ciclo das duas variáveis.

Os valores de “Sincronia” (S em %) no Quadro 4.4 definem a percentagem de pontos comuns (no tempo) de crescimento e decrescimento nas respectivas séries, entre os filtros em cada uma das situações de comparação.

Podemos verificar no Quadro 4.4, tendo em conta os parâmetros escolhidos nos vários modelos de extracção de sinal e o período temporal em análise, de 1978-1T a 2007-4T, que todas as variáveis cíclicas, têm entre o filtro de Kalman e os filtros de Hodrick-Prescott e Baxter-King e entre o filtro de Hodrick-Prescott e Baxter-King, uma correlação média contemporânea moderada/forte, excepto no caso da correlação entre o filtro de Kalman e o filtro Baxter-King, para as Exportações de Bens e Serviços onde existe um desfasamento (avanço no filtro de Kalman) de um trimestre.

Por outro lado, verifica-se que, embora com diferentes intensidades nas várias variáveis em análise, o relacionamento médio da correlação cíclica seja sempre positivo, não apresenta um padrão uniforme nos vários métodos de extracção de sinal.

No que se refere à Sincronia em Percentagem, podemos observar que a menor

sincronização acontece no PIB, na ordem dos 60%. Nos outros casos, esta sincronização acontece num intervalo que, em termos gerais, vai dos 70% aos 85%.

Este facto faz-nos conjecturar que cada ciclo individual tem associado factores específicos que as características médias detectam de forma diferenciada nos diferentes métodos de extracção de sinal e que os diferentes movimentos individuais de cada variável podem eventualmente ser interpretados de forma divergente das suas características médias, em cada um dos métodos analisados neste estudo.

4.2.6 Variação cíclica para os diferentes métodos de extracção de sinal

Tendo como objectivo observar as semelhanças existentes na evolução cíclica normalizada de cada uma das variáveis representativas das grandezas em análise, no período de 1978-1T a 2007-4T, entre o filtro de Kalman e os filtros de Hodrick-Prescott e Baxter-King, elaboraram-se os Gráficos 4.13 a 4.20.

Gráfico 4.13: Evolução cíclica normalizada do Consumo Privado (de residentes)

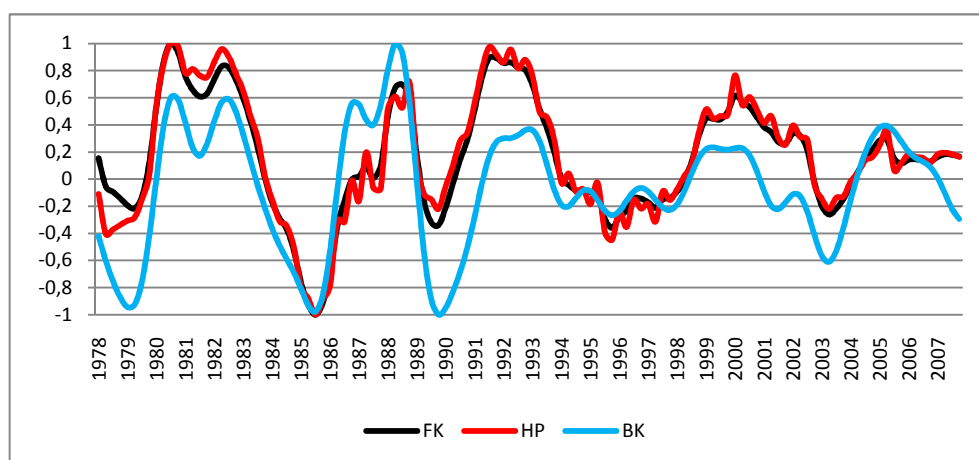


Gráfico 4.14: Evolução cíclica normalizada do Consumo Público

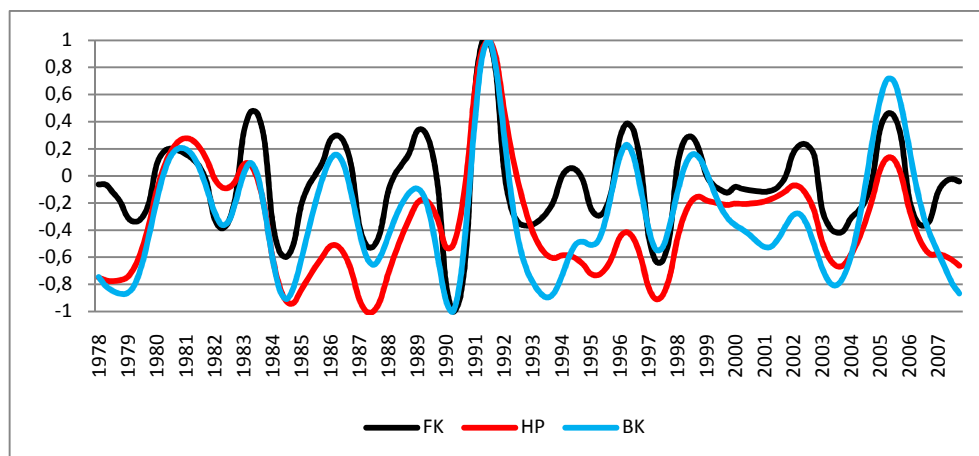


Gráfico 4.15: Evolução cíclica normalizada do Emprego Total

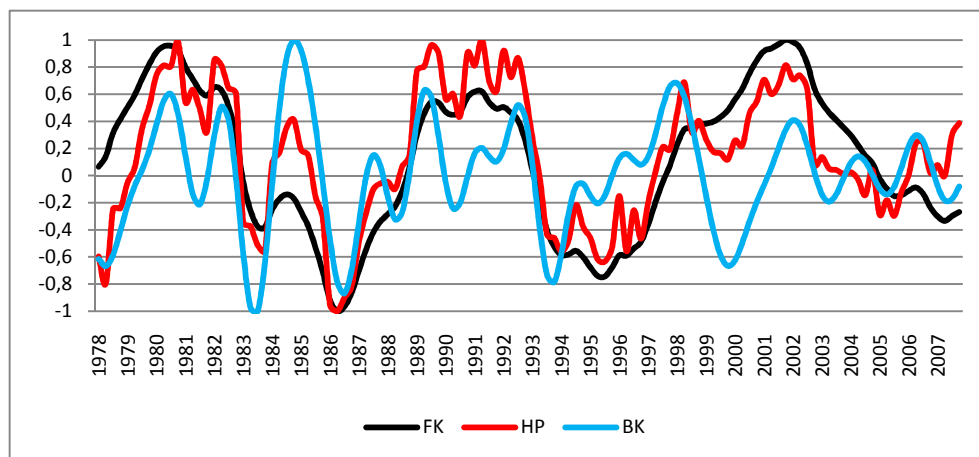


Gráfico 4.16: Evolução cíclica normalizada das Exportações de Bens e Serviços

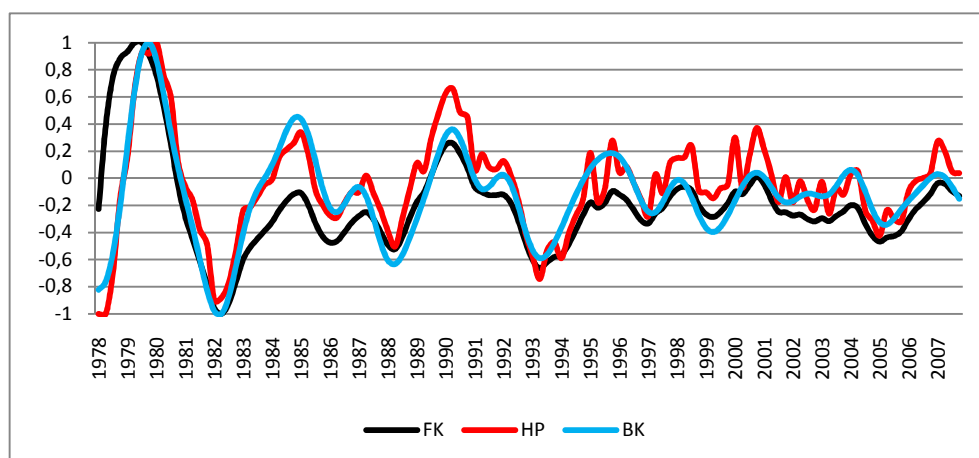


Gráfico 4.17: Evolução cíclica normalizada da Formação Bruta em Capital Fixo

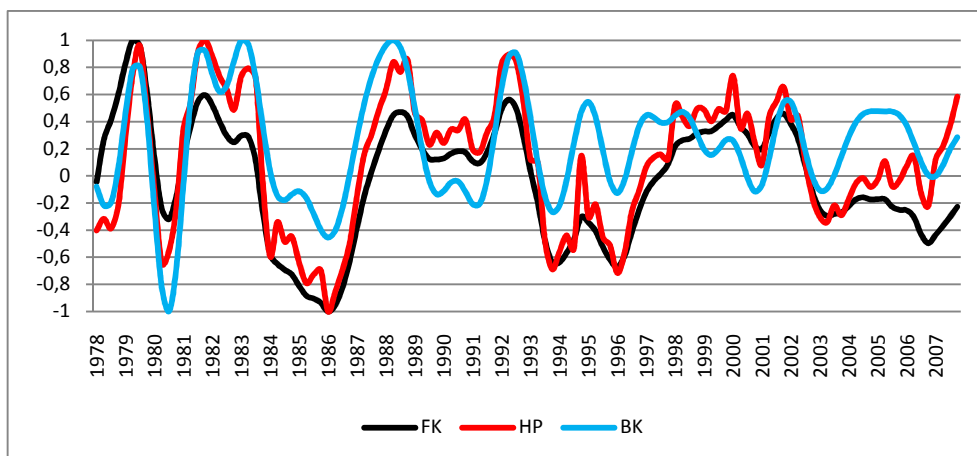


Gráfico 4.18: Evolução cíclica normalizada das Importações de Bens e Serviços

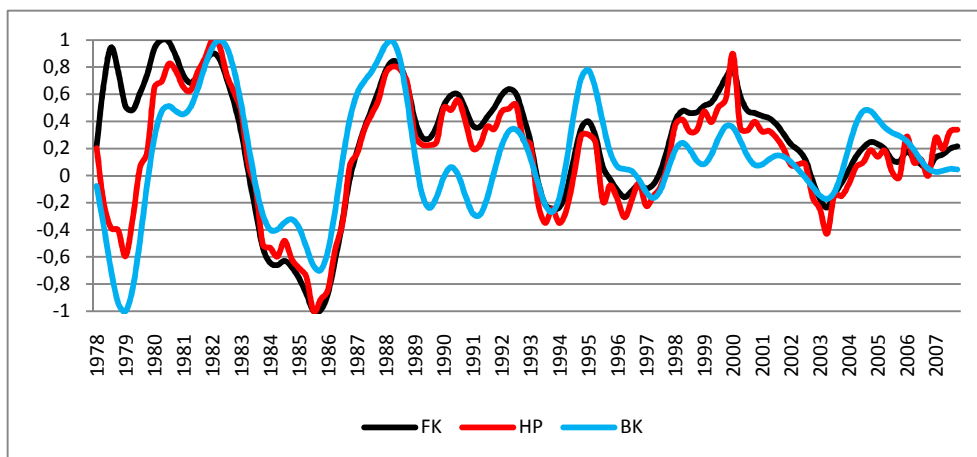


Gráfico 4.19: Evolução cíclica normalizada do PIB

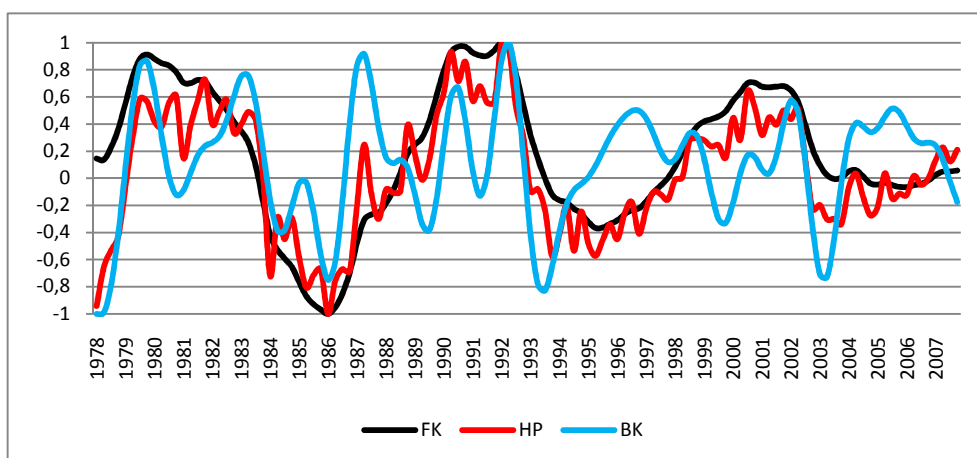
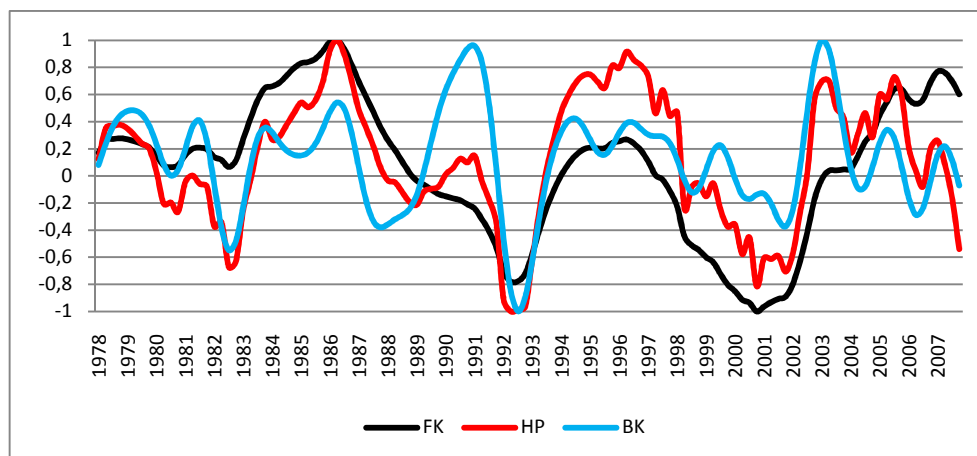


Gráfico 4.20: Evolução cíclica da Taxa de Desemprego



Observa-se que a fisionomia da evolução temporal do ciclo individual de cada variável, nos vários métodos de extração de sinal, parece possuir bastantes semelhanças. Contudo existem algumas diferenças no que respeita essencialmente aos pontos de inflexão e aos valores que cruzam a origem dos eixos das ordenadas.

Os resultados apresentados são algo discricionários, não permitindo ideias completamente claras sobre as conclusões que vamos apresentando, podendo estas estar sempre sujeitas ao enviesamento que os modelos produzem em confronto com a realidade sugerida pelos dados. Esse facto poderá estar muito associado às características de extração do filtro e aos valores adoptados nos parâmetros de cada modelo de extração. Assim sendo, não nos permite afirmar com toda a clareza, não existindo qualquer medida comparativa com a realidade concreta e aquela representada nas variáveis do modelo, sobre a vantagem da opção de um filtro em detrimento de um outro.

Sugere-se assim que a maior importância do filtro de Kalman, além das faculdades semelhantes na extração do sinal, com o filtro de Hodrick-Prescott e ao filtro de Baxter-King, prende-se mais com a sua maior flexibilidade e com a múltipla capacidade, única neste caso entre os três modelos, para simultaneamente extrair dados, adoptar variadas tipologias e dimensões das matrizes e vectores de modelos representados em espaço de estados, prever e lidar com situações em que existem observações perdidas ou desconhecidas sem efectuar modificações relevantes no

processo de implementação e na construção da algoritmia computacional. Por outro lado, parece realista dizer que qualquer dos filtros mencionados poderia produzir resultados satisfatórios no isolamento da componente cíclica das variáveis em estudo.

Estas conclusões reforçam a ideia da urgência de criação de uma datação cíclica de referência para a realidade económica portuguesa, não só como instrumento valioso na orientação e no apoio à elaboração de políticas económicas, mas também como mecanismo auxiliador e de suporte referencial a estudos que pretendam investigar e melhor compreender esta temática.

4.3 Metodologia para a datação do ciclo económico português

A falta de medidas de um ciclo económico aceite e reconhecida como a referência para Portugal poderia ajudar os economistas, quer no controlo das actuais condições económicas como na previsão da sua evolução a curto prazo, foi a principal motivação para este ponto da investigação. É pois nosso objectivo sugerir uma metodologia para a criação de uma datação do ciclo económico português, utilizando como instrumento central o filtro de Kalman. Esta investigação pretende tornar-se uma referência útil para o estudo de cenários cíclicos, de modo a auxiliar a avaliação da consistência global das projecções macroeconómicas para a economia portuguesa.

Devemos realçar que a maior ou menor eficiência de algum método para a datação do ciclo económico está ligada à possibilidade de se efectuar o seu teste com algum mecanismo referencial considerado verdadeiro e representativo dessa mesma realidade. Caso não existam medidas de datação do ciclo, aceites cientificamente como fiáveis, dificilmente poderemos garantir a maximização na justaposição, para além da especulação da aproximação e a minimização do respectivo erro dos modelos em relação aos vários valores datados.

Assim sendo, só possuindo uma cronologia de referência é que poderíamos tentar efectuar alguns ajustes aos parâmetros do modelo de forma a tentar reflectir com a maior exactidão possível a evolução cíclica e a conseqüente datação. Parece-nos importante destacar esta limitação, pois ao contrário de muitos estudos que envolvem o ciclo económico, nomeadamente sobre a realidade dos EUA em que se encontra

uma datação de referência quase sempre fornecida pelo NBER ou mais recentemente pelo TCB, para Portugal ainda não se conhece essa medida de datação de referência³², pelo menos que se encontre acessível para investigações neste domínio da economia.

4.3.1 Elementos da construção de indicadores cíclicos

O ponto de partida para a análise do ciclo económico é o reconhecimento de uma variável de referência, a qual deve registar a evolução conjunta da actividade económica³³. Normalmente utiliza-se nestes casos, uma medida de produto agregado, como o PIB (Rua, 2004) ou, na ausência de dados mensais, alguma outra série mensal que seja significativa para representar o ciclo (Carvalho e Hermanny, 2003) e que simultaneamente possa servir de base a algum mecanismo de aferição de sincronia. Um indicador sintético será uma qualquer combinação de indicadores individuais, aos quais nos referimos como indicadores compostos ou compósitos (Stock e Watson, 1990).

Dada a complexidade do tema, ciclo económico, nas abordagens mais recentes, o papel da variável de referência tem sido não só interpretado por medidas agregadas da actividade económica, mas também pela simultaneidade de variáveis (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000).

O indicador compósito coincidente, seguindo a tradição do TCB, é uma combinação linear (o seu centro de gravidade) simples (pesos idênticos) de quatro séries (Farinha e Reis, 1998), escolhidas como representativas e simultaneamente como referência cíclica (TCB, 2001).

O nível de rendimento, emprego e produção industrial são exemplos de variáveis que podem construir uma cronologia coincidente (Burns e Mitchell, 1946). Concretamente, o TCB utiliza a variável produção industrial, o emprego em actividades não-agrícolas, as vendas da indústria e comércio e o rendimento das famílias excluindo

³² O Banco de Portugal, a Direcção-Geral de Estudos do Ministério das Finanças, o Instituto Nacional de Estatística e o Ministério da Economia, têm produzido documentos, com Indicadores da Actividade Económica da Economia Portuguesa. Contudo, nenhum parece ser reconhecido e aceite como sendo a referência para Portugal.

³³ Este é um dos pontos onde é difícil encontrar consensos e eventualmente uma das maiores dificuldades para um estudo de datação.

as transferências do estado (tais como os pagamentos da segurança social) (TCB, 2001). Os indicadores construídos em Stock e Watson (1988, 1989 e 1993) utilizam também estas séries como componentes do indicador composto coincidente.

A equivalência empírica desse conceito foi identificado pela tradição do NBER, tendo como suporte a construção de indicadores coincidentes, adiantados e atrasados, para a economia dos EUA. Assim, por exemplo, os indicadores coincidentes da actividade económica têm correlação contemporânea com o estado da economia, ou seja, crescem em expansão e decrescem em contracção.

Estes indicadores cíclicos surgiram sobretudo para simplificar o entendimento das flutuações económicas. A ideia subjacente é a de reunir, numa única variável, as informações contidas nas séries que têm o mesmo comportamento temporal. Espera-se que a variável resultante expresse o comportamento da economia ou do sector de interesse e que esteja disponível com uma periodicidade que proporcione uma informação útil aos agentes económicos. Tal indicador pode ser interpretado como uma técnica desenhada para extrair uma medida de alguma característica subjacente, não observada, de variáveis altamente correlacionadas.

Os indicadores sintéticos estão contudo sujeitos a algumas críticas. A principal é talvez o facto de constituírem uma aproximação puramente empírica ao problema da medição do nível e do ritmo da actividade económica. Entre as suas vantagens destacamos a sua destreza, a qual em termos da pouca complexidade teórica e de informação necessária ao seu estudo permite realizar estimações e previsões de forma rápida e bastante efectiva, comparada com os resultados de outros métodos alternativos (Jiménez e Vargas, 2008).

O sistema de construção de indicadores propõe a existência, na sua versão completa, de quatro elementos: série de referência, indicadores adiantados, coincidentes e atrasados. Todos os indicadores são compostos, isto é, são construídos a partir da combinação de indicadores individuais³⁴. A preferência por indicadores compostos deve-se à tentativa de minimização dos erros que podem resultar da

³⁴ Veja-se por exemplo as combinações de indicadores adiantados, coincidentes e atrasados propostos pelo TCB para a economia dos EUA (TCB, 2001).

concentração excessiva de atenção no comportamento de apenas uma única variável.

As variáveis que compõem estes indicadores são também seleccionadas por critérios descritivos, não teóricos (Carvalho e Hermann, 2003). Em resultado, nem sempre a relação entre alguma variável com a série de referência é clara ou percebida como robusta. Além disso, a não sincronização entre os dados das séries em comparação pode ser incerta, por influência essencialmente de variáveis aleatórias.

Uma informação frequentemente desprezada na criação destes indicadores é a informação trimestral, o que pode ser extremamente ineficiente, já que várias séries que apresentam alta correlação com o estado da economia não se encontram disponíveis em frequência mensal (Stock e Watson, 1989).

Um bom exemplo é o PIB que, em Portugal, como na maioria dos países, é medido trimestralmente. O PIB constitui um dos principais indicadores de bem-estar das economias desenvolvidas, sendo seguramente o mais utilizado quando se pretende avaliar a prosperidade económica de um país (Almeida e Felix, 2006). No entanto, esta grandeza apresenta alguns inconvenientes. Em particular, ela é afectada por erros de medida, está disponível apenas numa periodicidade trimestral e, em Portugal a primeira estimativa, geralmente sujeita a revisões, é divulgada 70 dias após o fim do trimestre de referência (Rua, 2004).

É então necessário recorrer à restante informação disponível para se ter uma percepção clara e atempada da evolução da economia numa frequência mais elevada (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000). Outra limitação é a de que o comportamento do PIB não expressa por si só necessariamente o padrão cíclico de todos os sectores da economia. Nada impede, por exemplo, que determinado sector se encontre numa recessão enquanto o PIB se expande.

O acompanhamento do comportamento cíclico da economia (Azevedo, Koopman e Rua, 2003), ou de um sector económico específico, pode ser algo complexo nomeadamente por este envolver uma grande quantidade de séries económicas que nem sempre se movimentam na mesma direcção. Por outro lado, a leitura de um qualquer indicador deste tipo é muito dificultada dada a sua elevada subjectividade.

Nestas condições, nos juízos baseados na informação gerada pelos indicadores compostos deve existir sempre alguma prudência e bom senso. Uma forma de se tentar solucionar este problema é construir algoritmos centrados em dois factores. O primeiro consiste em classificar correctamente os estados económicos ao longo da série e o segundo consiste em oferecer a possibilidade de detecção dos futuros estados da economia.

O processo de desenvolvimento da metodologia de datação, aqui proposto, pode ser dividido nos seguintes passos:

- a) Selecção das variáveis em estudo³⁵.*
- b) Extracção da componente de tendência temporal e ciclo com o filtro de Kalman.*
- c) Estruturação da variável de referência (mensal e trimestral).*
- d) Agregação dos indicadores parciais (variáveis mensais e trimestrais).*
- e) Elaboração de um mecanismo de datação mensal para a definição de ciclo clássico e outro para a definição de ciclo de desvio.*

Sempre que se adicionam novas variáveis ao processo, estas devem ser avaliadas de forma a verificar-se da sua adequação para incorporar algum dos indicadores compostos, previamente estabelecidos. Paralelamente, deve-se analisar o contributo dessas novas variáveis ao processo de datação.

4.3.2 Selecção das variáveis de referência

A selecção da variável de referência é feita de acordo com critérios de razoabilidade, frequência temporal e disponibilidade de dados para a realização de tratamento estatístico. Conforme a metodologia utilizada pelo NBER e pelo TCB, uma recessão caracteriza-se pelo movimento de queda, sincronizado, de diversas variáveis macroeconómicas. Esta sincronia tem motivado alguns estudos a adoptarem metodologias que aglomerem uma quantidade maior de séries económicas, em vez da

³⁵ Neste caso resume-se (eventualmente aquém do desejável numa aplicação real e não numa metodologia como a que aqui apresentamos) às séries do Consumo privado (de residentes), Consumo público, Emprego total, Exportações de bens e serviços, Formação bruta em capital fixo, Importações de bens e serviços, IPI, PIB e Taxa de desemprego. Estas séries podem eventualmente ter de ser sujeitas a algum tratamento estatístico prévio, por exemplo, à remoção da sua componente sazonal.

observação única de quedas consecutivas do PIB. Por outro lado, considerando que cada sector e cada economia apresentam uma dinâmica própria, diferentes aspectos das contracções sectoriais podem não ser captados pelo movimento do PIB trimestral.

A observação isolada do PIB não atende assim aos requisitos necessários, o que justifica a selecção de outras variáveis de referência, como forma de tentar captar os aspectos mais relevantes para a caracterização do ciclo económico (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000).

O modelo de datação a construir produz dados mensais e, portanto, foi necessário seleccionar como série de referência um indicador que estivesse disponível mensalmente (Mariano e Murasawa, 2003). Por esta razão, além de aspectos ligados à qualidade da informação e à longevidade das séries, esta investigação utilizou como série de referência, além do PIB, disponível apenas trimestralmente, os dados mensais do IPI para actividade económica portuguesa.

Como já foi referenciado, esta escolha é fortemente empírica. Contudo pensamos que uma ponderação entre o PIB trimestral e uma série mensal representativa, neste caso o IPI, poderá gerar uma referência mensal mais efectiva da actividade económica portuguesa.

4.3.2.1 Criação de séries mensais e trimestrais

O presente estudo de datação será realizado em frequência mensal. Como os dados da variável PIB são trimestrais temos de adoptar algum mecanismo que possa converter a nossa série trimestral numa correspondente mensal. Uma opção seria reconstruir a evolução da série em termos mensais pela extrapolação de crescimentos constantes dentro de cada trimestre (Altissimo, Marchetti e Oneto, 2000).

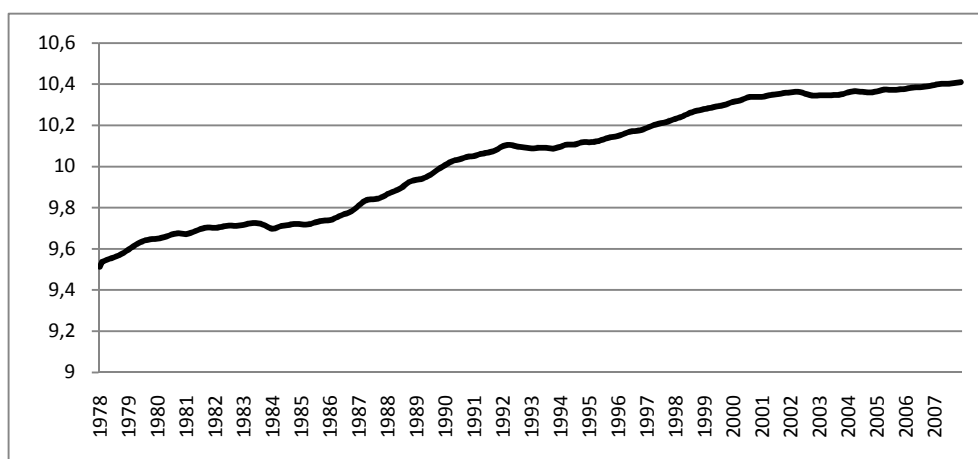
No entanto, dado o facto de se estar a utilizar uma abordagem metodológica centrada na proposta de Kalman (1960), utilizou-se a técnica e o algoritmo computacional já exposto neste texto para o estudo das observações perdidas,

transformando por esta via, a série trimestral do PIB na sua correspondente mensal³⁶.

O Gráfico 4.21 representa a evolução mensal, de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, do logaritmo do PIB, considerando valores alisados, construído com base nos dados trimestrais do PIB e utilizando a proposta de Kalman (1960) na abordagem das observações perdidas.

Considerou-se que o dado representando o 1º Trimestre correspondia ao mês de Março, o dado representando o 2º Trimestre correspondia ao mês de Junho, o dado representando o 3º Trimestre correspondia ao mês de Setembro e o dado representando o 4º Trimestre correspondia ao mês de Dezembro. O tratamento dos dados nos meses do ano em falta foi efectuado como se de observações perdidas se tratassem.

Gráfico 4.21: Modelo do PIB Mensal



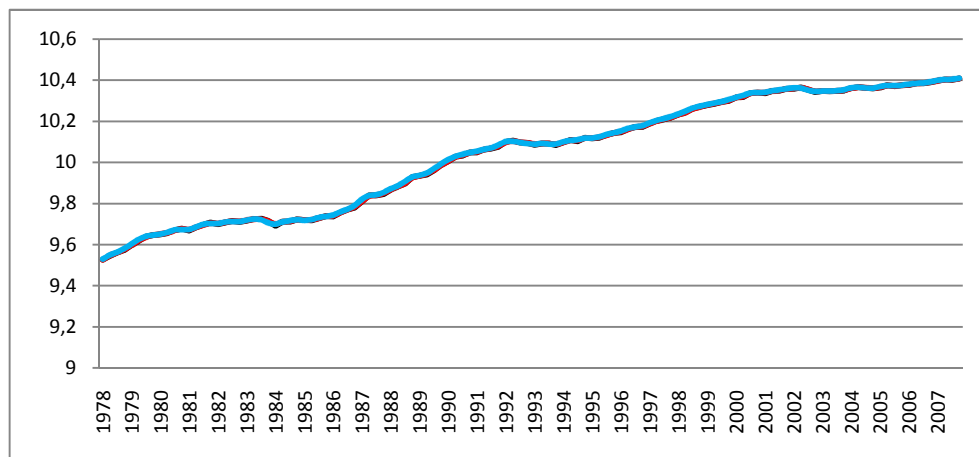
O Gráfico 4.22 representa a evolução trimestral, de 1978-1T a 2007-4T, do logaritmo do PIB, o modelo de valores alisados utilizando o filtro de Kalman, construído com base nos dados trimestrais do PIB e também, a evolução trimestral, de 1978-1T a 2007-4T, dos valores alisados do logaritmo PIB, construído com base nos dados mensais do PIB, representados no Gráfico 4.21.

O valor associado ao 1º trimestre corresponde à média dos meses Janeiro,

³⁶ Este procedimento servirá para transformar ao longo desta investigação as séries trimestrais em mensais.

Fevereiro e Março, o 2º trimestre corresponde à média dos meses Abril, Maio e Junho, 3º trimestre corresponde à média dos meses Julho, Agosto e Setembro e finalmente o 4º trimestre corresponde à média dos meses Outubro, Novembro e Dezembro³⁷.

Gráfico 4.22: Trimestrais: PIB (—), Modelo alisado PIB (—) e PIB com os dados Mensais (—)



Verificou-se ainda que os dados das séries representadas no Gráfico 4.22 têm entre si um valor de R^2 igual a 99,98% e que o rácio da amplitude dos erros (modelo de valores alisados trimestral *menos* valores alisados trimestrais construído com base nos dados mensais), com a amplitude dos valores dos dados trimestrais é de 0,0119. Este facto sugere-nos que as transformações temporais das séries do PIB poderão estar adequadas aos objectivos do estudo.

O Gráfico 4.23 representa a evolução mensal, de 1978-1T a 2007-4T, do logaritmo IPI, e o Gráfico 4.24 representa a evolução trimestral, de 1978-1T a 2007-4T, do logaritmo IPI. Construído com base nos dados mensais do IPI, considerou-se que o valor associado ao 1º trimestre dessa série corresponde à média dos meses Janeiro, Fevereiro e Março, o 2º trimestre corresponde à média dos meses Abril, Maio e Junho, 3º trimestre corresponde à média dos meses Julho, Agosto e Setembro e finalmente o 4º trimestre corresponde à média dos meses Outubro, Novembro e Dezembro.

³⁷ Este procedimento servirá para transformar, ao longo desta investigação, as séries mensais em trimestrais.

Gráfico 4.23: IPI Mensal

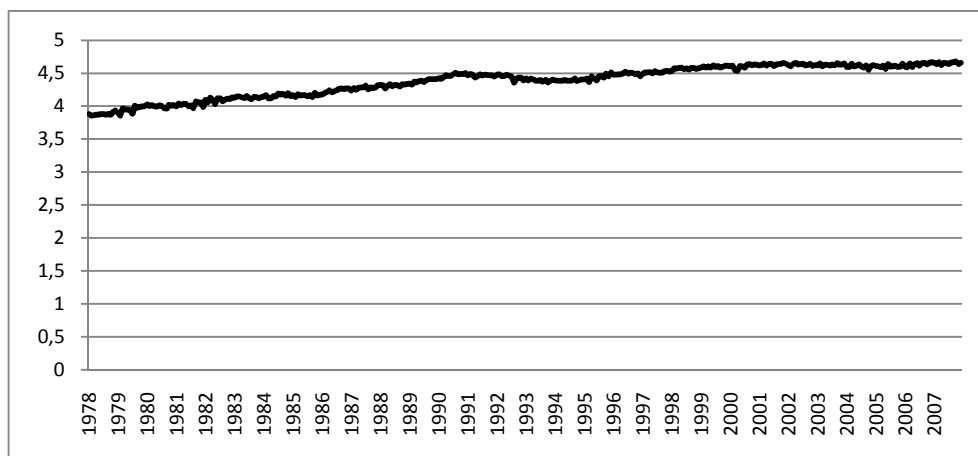
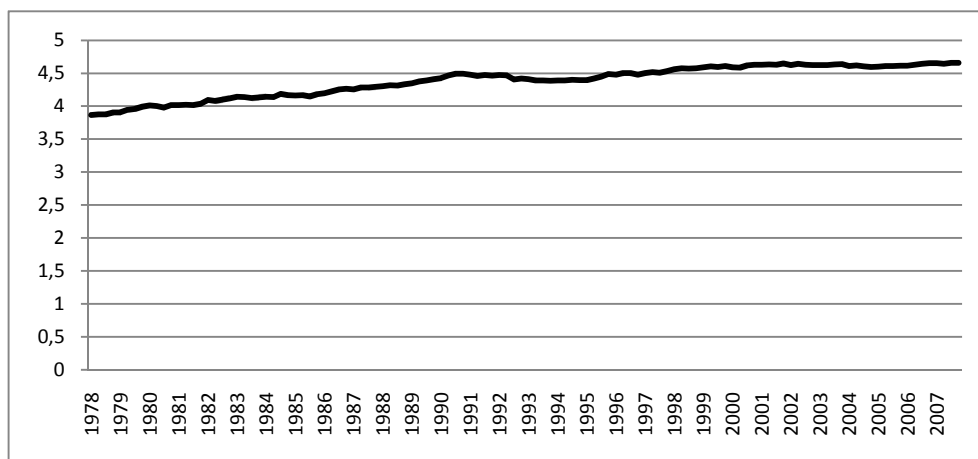


Gráfico 4.24: Modelo do IPI Trimestral



O ciclo de cada série, além do PIB e IPI³⁸, dos dados das componentes do produto e do mercado de trabalho analisadas nesta investigação, será comparado com o ciclo da variável de referência em termos dos seus co-movimentos. Os dados das séries em comparação são eventualmente mensais ou trimestrais³⁹. Este facto obriga-nos a construir uma série de referência de base mensal e outra de base trimestral.

³⁸ Os valores da função de máxima verosimilhança difusa para as condições iniciais dos dados mensais do PIB e mensais e trimestrais do IPI e o filtro de Kalman, como instrumento de extracção das componentes de interesse, das variáveis mensais e do modelo alisado, da tendência alisada, da componente de tendência aleatória alisada, do ciclo alisado e do erro alisado de previsão (um período à frente), poderão ser consultados em apêndice, Apêndice III.

³⁹ No caso em análise as séries candidatas ao indicador composto, são todas trimestrais.

4.3.2.2 Procedimento de estruturação da série de referência

Identificadas as séries que compõem a referência com base mensal e trimestral, segue-se a fase de sua associação numa única variável, de acordo com os seguintes passos:

- a) *Reconstrução das séries trimestrais em mensais, neste caso o PIB, com a técnica proposta pelo filtro de Kalman no estudo de observações perdidas;*
- b) *Reconstrução das séries mensais em trimestrais, neste caso o IPI, por média simples dos meses, em cada trimestre;*
- c) *Extracção das componentes cíclicas das séries utilizando o filtro de Kalman;*
- d) *Criação da variável referência pela média simples⁴⁰ dos valores das séries que a compõem.*

4.3.2.3 Componente cíclica normalizada da série de referência.

Para efectuar o estudo comparativo da componente cíclica da série de referência com as variáveis cíclicas candidatas ao indicador composto utilizou-se a metodologia proposta por Kalman de isolamento das componentes de interesse em variáveis próprias.

O Gráfico 4.25 e o Gráfico 4.26 apresentam a evolução cíclica da referência normalizada mensal e trimestral.

⁴⁰ Podíamos utilizar uma outra técnica de agregação das variáveis que compõem a referência (Jiménez e Vargas, 2008), por exemplo, um valor de correlação. Mas nesse caso teríamos sempre de considerar uma das magnitudes como sendo a referência. Por outro lado, não temos qualquer informação que nos permita atribuir pesos diferenciados às diferentes componentes da referência.

Gráfico 4.25: Variável de referência normalizada - Mensal – Ciclo Alisado

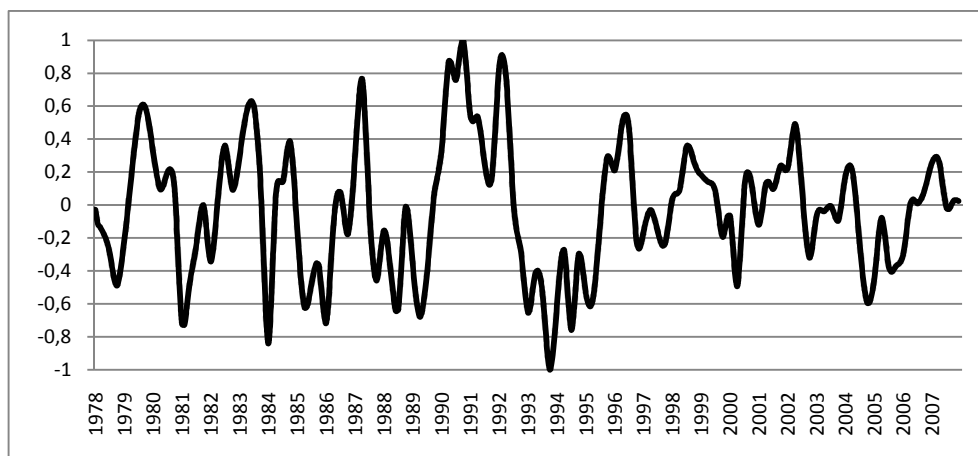
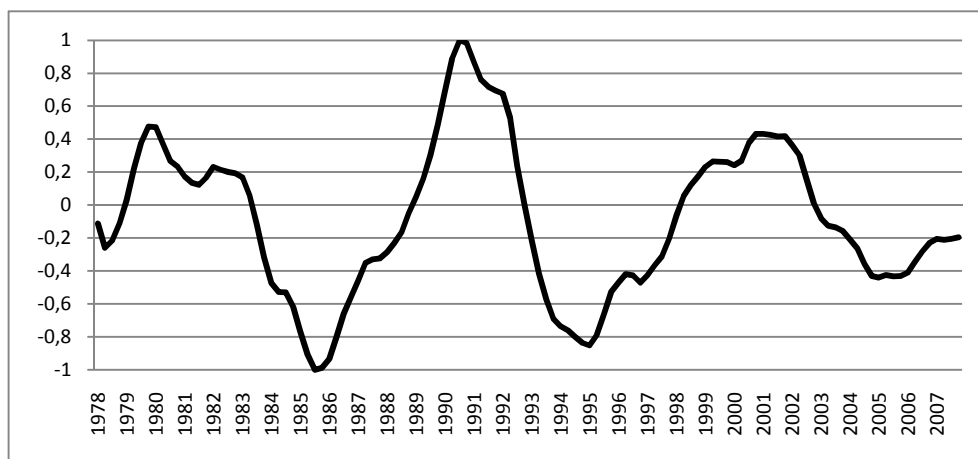


Gráfico 4.26: Variável de referência normalizada - Trimestral – Ciclo Alisado



4.3.3 Indicadores coincidentes, adiantados e atrasados

O primeiro passo a tomar para a construção de um indicador composto é a determinação das séries económicas que irão ser usadas como variáveis componentes desse indicador⁴¹. A escolha das séries é difícil e depende de algum bom senso e de extensiva análise estatística de correlações e causalidade. A sua selecção passa normalmente pela análise dos seguintes critérios:

⁴¹ É importante realçar que a escolha do indicador tem quase sempre um carácter fortemente heurístico.

- a) *O tamanho da amostra deve ser extenso o suficiente para que inclua uma quantidade razoável de expansões e recessões. Isto implicaria uma maior aprendizagem do modelo;*
- b) *A frequência dos dados deve ser a maior possível, preferencialmente mensal, e de rápida divulgação. Esta não teria utilidade se a economia já tivesse no entretanto mudado o seu estado⁴²;*
- c) *As séries devem ser representativas da economia de interesse;*
- d) *O conjunto de séries deve ser o mais abrangente possível, estando assim representados os diversos aspectos da economia ou do sector em estudo.*

Nesta proposta metodológica para a datação do ciclo económico português, as séries utilizadas na estruturação dos indicadores compostos foram limitadas, às variáveis disponíveis⁴³. Referimo-nos, além do PIB e do IPI, aos dados das componentes do produto e do mercado de trabalho já enumeradas nesta investigação.

Considerou-se importante, verificar se os movimentos cíclicos de cada variável têm alguma afinidade com a proposta de referência para a economia portuguesa e comparar as várias evoluções, analisando-as também através de algumas propriedades estatísticas médias⁴⁴.

4.3.3.1 Estatísticas de síntese da referência e das variáveis cíclicas

Dada a periodicidade trimestral das variáveis o nosso estudo limitou-se a uma análise comparativa com frequência trimestral⁴⁵. No Quadro 4.5, os valores de atraso (ou de avanço), indicam o número médio de trimestres atrasados (ou avançados), da variável cíclica de referência normalizada, quando se compara esta com as outras variáveis cíclicas normalizadas, entre -12 e 12 trimestres, nos quais se observa a correlação máxima.

⁴² As variáveis disponíveis nesta investigação, à excepção do IPI, são trimestrais.

⁴³ Para uma abordagem mais alargada teríamos certamente de confrontar um leque bastante mais abrangente de séries económicas, e considerar o uso de variáveis mensais. Rua (2004) começa por utilizar quase mil variáveis, para depois considerar apenas trezentas e acaba finalmente por incluir somente 8 séries no indicador composto coincidente.

⁴⁴ Embora se reconheça que os critérios definidos para se pertencer ao indicador não sejam totalmente cumpridos pelas séries aqui estudadas, trata-se contudo de uma proposta metodológica.

⁴⁵ Se existissem outras séries mensais, a análise seria semelhante e efectuada também em termos mensais.

Os valores de correlação máxima normalizada (valores entre -1 e 1, com a amplitude do ciclo da referência) eliminam a dependência dos valores absolutos dos sinais e reduzem a sensibilidade às variações da amplitude (Lewis, 1995). Esta medida corresponde ao coeficiente absoluto mais elevado das variações de referência com a variável de interesse em análise, entre -12 e 12 trimestres. A Sincronia (*em %*) define a percentagem de pontos comuns (no tempo) de crescimento e decrescimento da referência com a variável de interesse.

Quadro 4.5: Estatísticas de síntese das variáveis cíclicas com a variável de referência - Trimestral

	<i>CPriv</i>	<i>C Pub</i>	<i>ET</i>	<i>EBS</i>	<i>FBCF</i>	<i>IBS</i>	<i>IPI</i>	<i>PIB</i>	<i>Referência</i>	<i>TxD</i>
<i>Correlação (Pearson)</i>	0,60	0,07	0,84	0,32	0,74	0,66	0,88	0,93		-0,65
<i>Avanço (+)</i> <i>Atraso (-)</i>	3	3	1	-4	-1	-2	0	1		2
<i>Correlação Máxima Absoluta Normalizada</i>	0,65	0,18	0,84	0,43	0,74	0,67	0,88	0,93		0,66
<i>Sincronia (%)</i>	58,82	47,06	71,43	54,62	56,30	57,14	84,87	82,35		28,57
<i>Desvio padrão</i>	0,42	0,34	0,53	0,36	0,44	0,45	0,39	0,50	0,46	0,51
<i>Rácio do desvio padrão</i>	0,92	0,73	1,15	0,79	1,02	0,97	0,84	1,09	1,00	1,11
<i>Autocorrelação $x(t) - x(t - 1)$</i>	0,95	0,79	0,98	0,95	0,95	0,95	0,96	0,98	0,98	0,98
<i>Autocorrelação $x(t) - x(t - 2)$</i>	0,81	0,30	0,92	0,83	0,82	0,85	0,87	0,93	0,92	0,94
<i>Autocorrelação $x(t) - x(t - 3)$</i>	0,64	-0,24	0,85	0,68	0,65	0,71	0,76	0,86	0,83	0,88

Nota: As siglas do cabeçalho das colunas do quadro representam, CPriv (Consumo Privado de residentes), C Pub (Consumo Público), ET (Emprego Total), EBS (Exportações de Bens e Serviços), FBCF (Formação Bruta em Capital Fixo), IBS (Importações de Bens e Serviços), IPI (Índice de Produção Industrial), PIB (Produto Interno Bruto) e TxD (Taxa de Desemprego).

Verifica-se no Quadro 4.5 que existe uma aparente correlação moderada/forte, ao nível do ciclo, entre as variáveis Consumo Privado (de residentes), Emprego Total, Formação Bruta em Capital Fixo, Importações de Bens e Serviços, IPI e o PIB. Esta

constatação leva-nos a pensar que a influência cíclica mais forte em Portugal estará muito correlacionada a variáveis exteriores à economia portuguesa e também à variável, mercado de trabalho, onde existe a maior correlação. O IPI e o PIB têm a correlação mais alta, facto este que se deve à presença destas grandezas na variável de referência. A Taxa de desemprego apresenta movimentos cíclicos em direcção oposta aos da referência.

As variáveis que não fazem parte do indicador de referência e que apresentam atraso em relação à referência, ou seja, subsidiárias e simultaneamente confirmadora das fases do ciclo económico, são o Consumo Privado (de residentes), Consumo Público, Emprego Total e Taxa de Desemprego. Este facto parece ser reflexo das alterações provocadas pelas famílias e empresas, ocorrerem *à posteriori*, quando se constata que a economia global está a melhorar e, por conseguinte, a confiança aumenta.

No Quadro 4.5 as variáveis que antecipam a referência cíclica são as Exportações de Bens e Serviços, a Formação Bruta em Capital Fixo e as Importações de Bens e Serviços. Estas séries poderiam eventualmente ser escolhidas para fazer parte de um indicador adiantado da economia, dando uma ajuda no antecipar do estado futuro do ciclo económico. Analisando estes resultados, a antecipação considerada com mais significado, 4 trimestres em média, é das Exportações de Bens e Serviços. Esta variável poderá dar-nos uma boa indicação do estado futuro da nossa economia, nomeadamente a percepção que temos da forte dependência de Portugal em relação a outras economias, onde assumem principal relevo as da União Europeia⁴⁶.

A relação fraca com o ciclo do Consumo público pode ser explicado pelo facto de as alterações da orientação da despesa pública, no ciclo económico, levarem algum tempo a serem executadas, em particular devido a procedimentos orçamentais legais (BCE, 2002).

⁴⁶ Naturalmente em conjunto com outras variáveis também com características de antecipação, e que aqui não foram analisadas, veja-se, por exemplo, os indicadores adiantados adoptados pelo TCB (TCB, 2001).

A sincronia entre variáveis cíclicas e referência, fases de crescimento e decrescimento em simultâneo, oscilam entre os 50% e 60% em todas elas, excepto nas variáveis que fazem parte da referência, no Emprego Total, cerca de 71%, e na Taxa de Desemprego, cerca de 29%.

No Quadro 4.5 o desvio padrão com a menor amplitude acontece no Consumo Público, nas Exportações de Bens e Serviços e no IPI. Contudo é notória alguma uniformidade na volatilidade normalizada das variáveis.

O rácio entre o desvio padrão da componente cíclica normalizado da variável de interesse e o da variável de referência indica se o intervalo de flutuação na variável é mais largo ou mais estreito do que o da variável de referência. Um valor muito elevado pode sinalizar variações muito mais significativas que as da variável de referência, enquanto que um valor próximo de zero indica variações muito menos significativas.

No caso em análise, os itens com variações mais significativas que as da Referência são o Emprego Total, a Formação Bruta em Capital Fixo, o PIB e a Taxa de Desemprego. Os outros itens apresentam características de flutuação inferiores às da Referência. Este facto sugere que a reacção provocada por choques na economia, nestas variáveis, terá um impacto inferior ao que esse mesmo choque produz na variável de referência.

Uma outra medida, a autocorrelação, pode ainda complementar a análise da evolução cíclica das variáveis económicas. Se uma variável apresenta variações erráticas de um trimestre para o seguinte, a correlação entre os valores que ocorrem em diferentes momentos de tempo será relativamente baixa. O Quadro 4.5 apresenta os resultados para a correlação entre valores desfasados de um, dois e três trimestres. Assim considera-se que quanto mais elevado for o valor das autocorrelações (persistências), mais regular ou persistente é uma variável. Tendo como base os valores de autocorrelação da variável de referência, verificamos que só os valores do Emprego Total, PIB e Taxa de Desemprego parecem tornar estas variáveis ligeiramente mais persistentes.

Por outro lado, apuramos que os valores de autocorrelação do PIB, no Gráfico 4.27, parecem não tender rapidamente para zero, sugerindo que a série possa não ser estacionária. Se as autocorrelações tendem para zero lentamente ou não tendem para zero, como parecem sugerir, por exemplo, os valores da autocorrelação do Consumo Público no Gráfico 4.28, a série é não estacionária e como a teoria que envolve a função de autocorrelação funciona para modelos estacionários, então esta mesma teoria não pode ser aplicada directamente a séries não estacionárias (Hamilton, 1994a). No Gráfico 4.27 e Gráfico 4.28 podemos observar, como exemplo meramente ilustrativo, os correlogramas de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) da variável cíclica do PIB e do Consumo Público.

Gráfico 4.27: Correlogramas do PIB da FAC e FACP - Trimestral

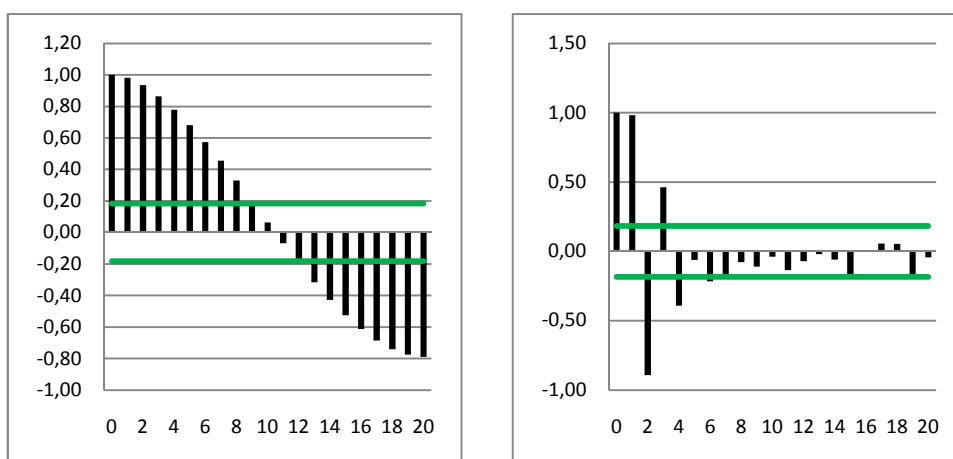
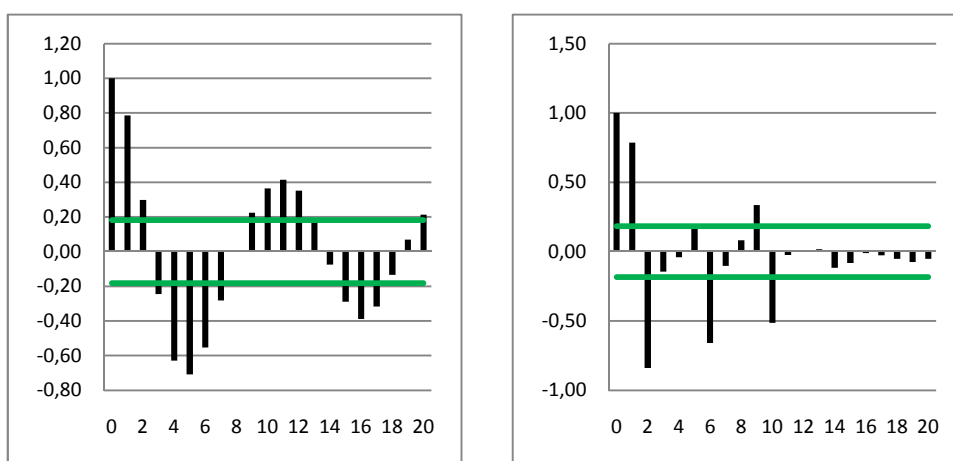


Gráfico 4.28: Correlogramas do Consumo Público da FAC e FACP - Trimestral



Os desvios-padrão e as autocorrelações deverão também ser avaliados em conjunto, já que as variáveis voláteis caracterizam-se por desvios padrões relativamente elevados e por autocorrelações baixas (BCE, 2002). Nas situações em que existe o desvio padrão mais elevado, existe simultaneamente uma maior autocorrelação. Estes são os casos do Emprego Total, PIB e da Taxa de Desemprego. Tal situação sugere uma certa uniformidade na volatilidade individual das variáveis em estudo.

Em resumo podemos dizer que o Consumo Privado (de residentes), sendo a principal componente da despesa, aparece desfasado do ciclo de referência em três trimestres, reagindo tarde ao ciclo da referência e mostra um grau elevado de persistência. As famílias parecem tentar ajustar as suas poupanças para compensar o impacto das variações a curto prazo no rendimento (BCE, 2002).

As Exportações de Bens e Serviços, Formação Bruta em Capital Fixo e Importações de Bens e Serviços apresentam um padrão de antecipação do ciclo da referência, com um grau de correlação normalizado máximo aproximado a 0,43, 0,74 e 0,67. A pequena economia portuguesa está muito dependente das transacções que efectua com outras economias e os efeitos de um aumento/diminuição das exportações ou das importações não são imediatos mas fornecem bons indicadores para o futuro no curto prazo.

A baixa de volatilidade do Consumo Público em relação à referência relaciona-se, segundo o BCE (2002), em parte, com o facto de o número de funcionários públicos ter tendência a evoluir de forma bastante estável ao longo do ciclo. A persistência das Exportações de Bens e Serviços é ligeiramente mais baixa e quase idêntica à das Importações de Bens e Serviços.

As variáveis do mercado de trabalho apresentam um desvio padrão semelhante e ambas apresentam um maior grau de persistência do que a referência. Essa maior persistência deriva normalmente do facto das empresas aguardarem por informação concreta sobre o sentido da evolução cíclica antes de efectuarem ajustamentos no número de trabalhadores.

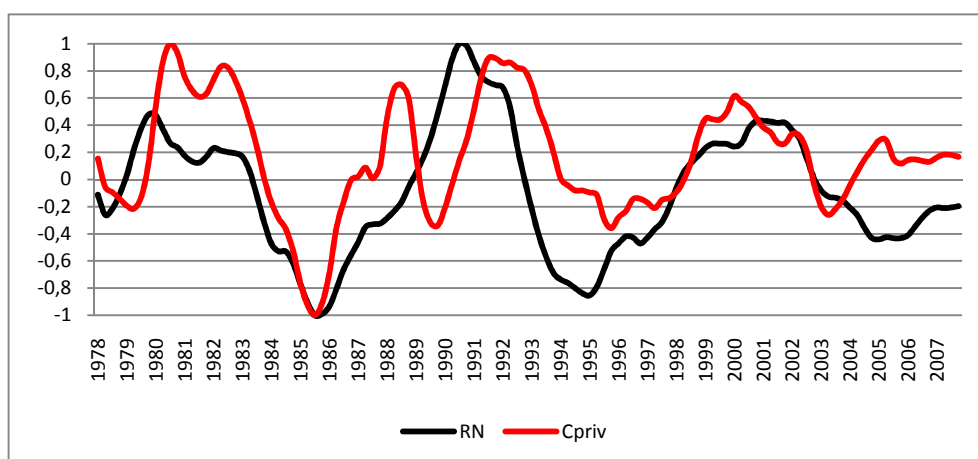
O reforço da persistência na Taxa de Desemprego e os movimentos cíclicos em direcção oposta estarão provavelmente relacionados com os mecanismos, não coincidentes no tempo, associados à transição das pessoas para a população activa ou para o desemprego. A maior similitude média do ciclo no período de 1978-1T a 2007-4T, embora superada pelas variáveis que compõem a variável referência, é a do Emprego Total.

4.3.3.2 Comparação da referência cíclica com as componentes cíclicas do produto e do mercado de trabalho

Como se referiu, trata-se de expor uma metodologia de datação do ciclo económico português baseada num conjunto de séries económicas. Assim, além do estudo da evolução cíclica média passada, será também relevante que se tenha algum conhecimento do grau de concordância da evolução cíclica, em cada variável ao longo do tempo, quando comparado com a variável de referência normalizada (RN).

Por esse motivo, vamos observar e comparar, nos Gráficos 4.29 a 4.37, as regularidades no tempo e características evolutivas da variável cíclica de referência, utilizando o filtro de Kalman, com as características associadas aos dados das variáveis em análise no período entre 1978-1T a 2007-4T⁴⁷.

Gráfico 4.29: Variável de referência e Consumo Privado (de residentes) - Trimestral



⁴⁷ Como estas variáveis são todas trimestrais (excepto o IPI) os gráficos só serão os referentes à evolução temporal trimestral das séries.

Gráfico 4.30: Variável de referência e Consumo Público - Trimestral

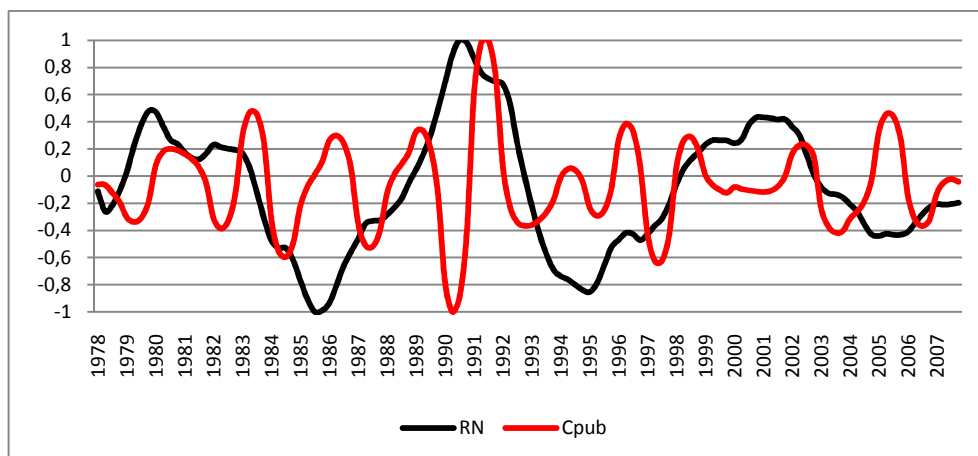


Gráfico 4.31: Variável de referência e Emprego Total - Trimestral

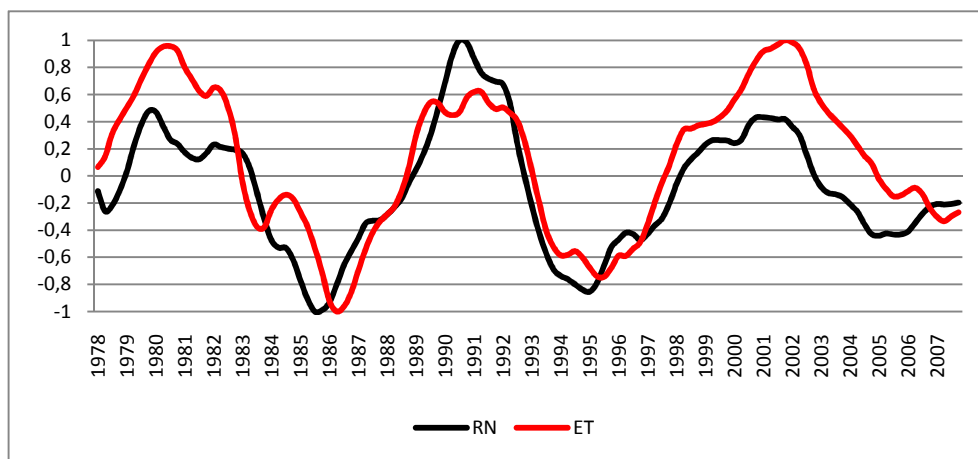


Gráfico 4.32: Variável de referência e Exportações de Bens e Serviços - Trimestral

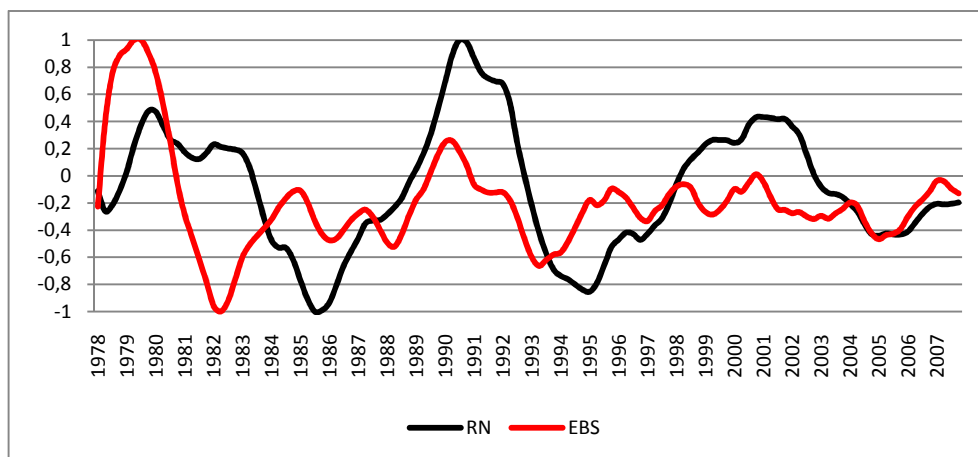


Gráfico 4.33: Variável de referência e Formação Bruta em Capital Fixo - Trimestral

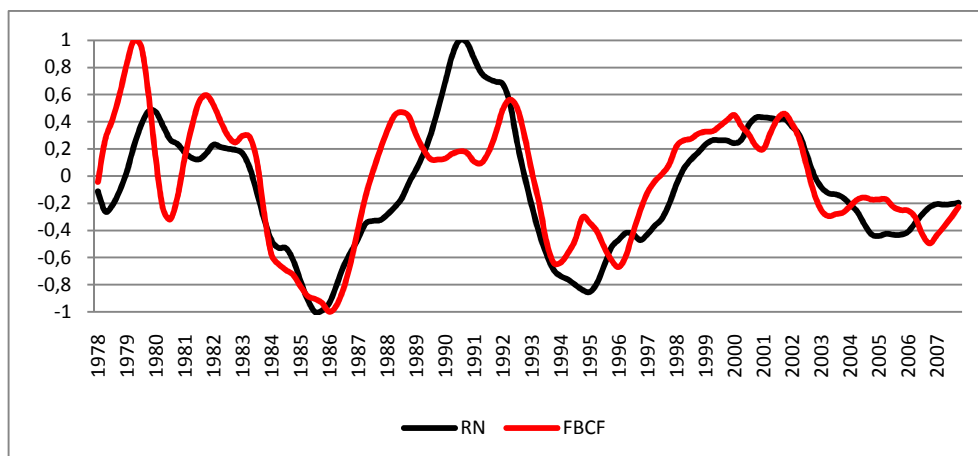


Gráfico 4.34: Variável de referência e Importações de Bens e Serviços - Trimestral

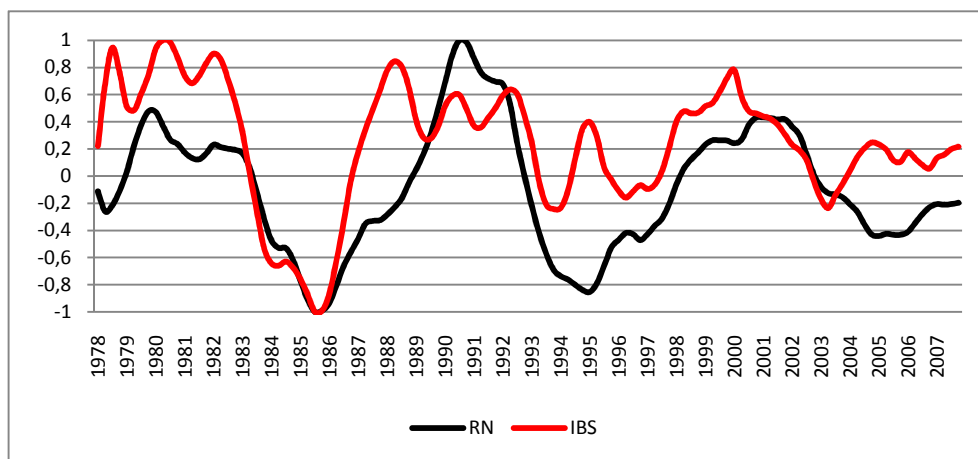


Gráfico 4.35: Variável de referência e IPI - Trimestral

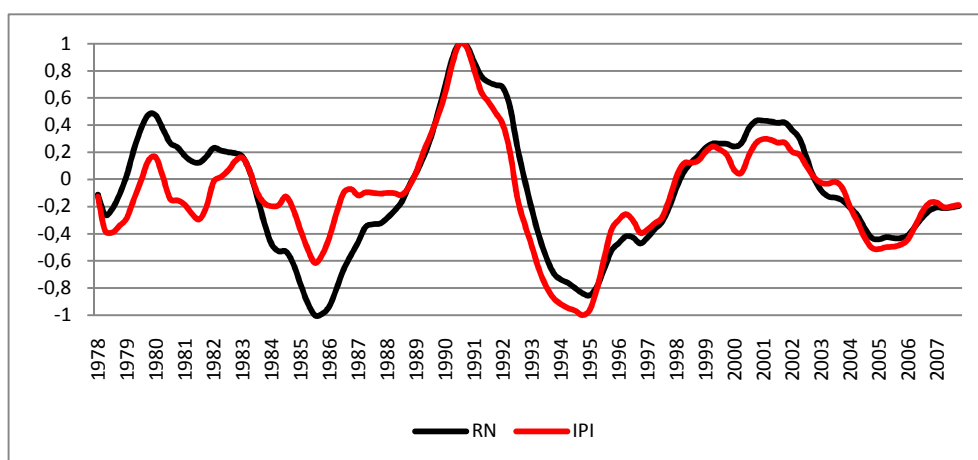


Gráfico 4.36: Variável de referência e PIB - Trimestral

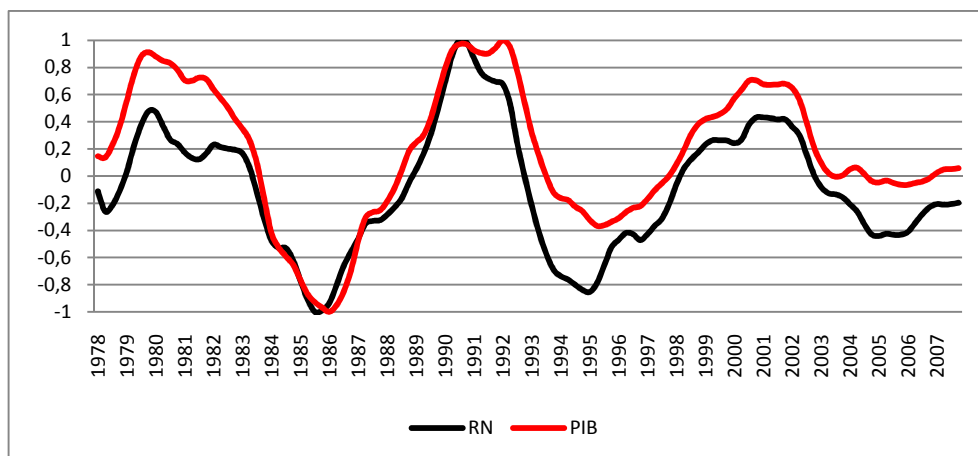
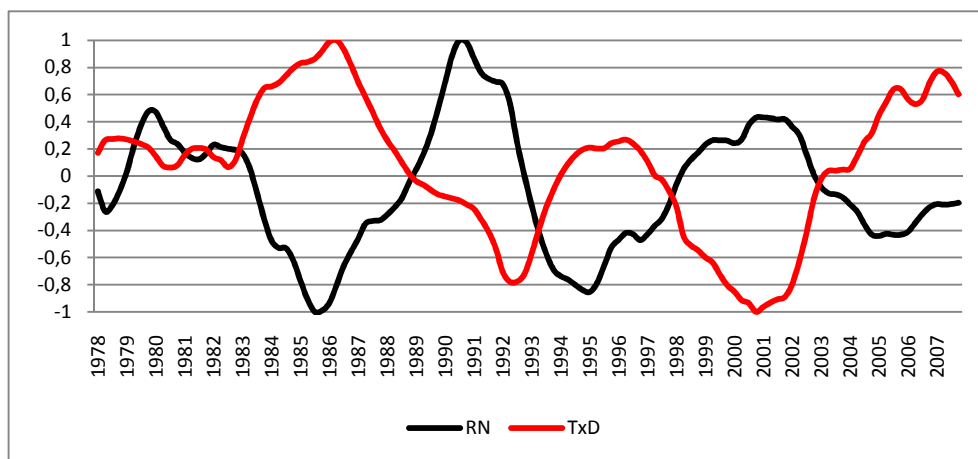


Gráfico 4.37: Variável de referência e Taxa de Desemprego - Trimestral



Os co-movimentos cíclicos das variáveis Exportações de Bens e Serviços, Formação Bruta em Capital Fixo e Importações de Bens e Serviços, embora antecipem em média a variável de referência, essa antecipação não é sempre uniforme e muito clara em todo o período temporal em análise.

A variável Emprego Total, atrasada em média um trimestre e com uma correlação forte, mostra uma sincronia ao longo do tempo quase perfeita com a referência. A variável Consumo Privado (de residentes), atrasada em média três trimestres, indica coincidência temporal no início da amostra e só no fim da amostra parece detectar-se a não sincronização com a referência.

A variável Consumo Público atrasada em média três trimestres, mostra-nos uma evolução muito oscilante e algo volátil, sugerindo que existe alguma dificuldade em inicializar adequadamente os parâmetros do modelo e em efectuar uma extracção mais estável da sua componente cíclica⁴⁸. Contudo, admitindo os resultados produzidos pelo filtro de Kalman, parece existir algum grau de independência de movimentos com o ciclo de referência.

A variável Taxa de Desemprego mostrou na sua evolução temporal cíclica bastante coerência com o comportamento de duas variáveis que têm entre si uma correlação negativa. Ou seja, basicamente nos períodos em que a variável RN crescia a variável Taxa de Desemprego decrescia e vice-versa.

Em resumo, podemos dizer que cada ciclo individual tem associado factores específicos, ou seja, pode verificar-se que embora as características médias encontradas sejam orientadores da afinidade das variáveis, estas não impedem que os diferentes movimentos individuais ao longo do tempo possam ser diferenciados das características médias.

Além disso, mostra-nos que muito embora as características médias possam ser uma referência útil, não anulam a possibilidade de acontecimentos variados na economia afectarem de diferentes formas as variáveis cíclicas individuais, realçando o facto do ciclo actual nem sempre seguir a evolução cíclica média das variáveis de referência.

Tendo em conta o exposto, esta investigação e esta proposta de metodologia de datação vai utilizar as variáveis Emprego Total, IPI e PIB, como variáveis que compõem o indicador coincidente e as variáveis Exportações de Bens e Serviços e Importações de Bens e Serviços, como indicadores adiantados⁴⁹.

⁴⁸ Eventualmente motivada também pela forma como é construída a série que se utiliza nesta investigação.

⁴⁹ Trata-se de apresentar uma metodologia de datação. O conjunto de variáveis adiantadas deve eventualmente incorporar um leque mais vasto e representativo de séries que antecipam a referência. Veja-se, por exemplo, os indicadores adiantados adoptados pelo TCB (TCB, 2001).

4.3.4 Datação do ciclo económico português

As técnicas de datação do ciclo económico e respectiva composição de indicadores sintéticos representativos do comportamento cíclico são variadas tanto em número como em complexidade matemática. Neste estudo optamos por construir duas propostas de datação, uma assente na definição de ciclo clássico e outra suportada pela definição de ciclo de desvio.

Na primeira proposta, os indicadores sintéticos são construídos através da metodologia sugerida pelo TCB (2001) e como mecanismo para a datação do ciclo económico português foram testados e comparados dois métodos, um proposto por Bry e Boschan (1971) e outro sugerido por Harding e Pagan (2002).

Para a segunda, adoptamos também como mecanismo de datação, as propostas de Bry e Boschan (1971) e de Harding e Pagan (2002). O modelo utilizado é o da representação em espaço de estados e a extracção da componente cíclica é efectuada pelo filtro de Kalman (1960). Como forma de agregação das variáveis em indicadores compostos, consideramos a correlação existente, ao longo do tempo, entre a variável cíclica de referência e as variáveis que compõem o indicador coincidente.

O mecanismo de previsão da evolução cíclica portuguesa, para a proposta assente na definição de ciclo clássico, é feito com base no estudo do indicador adiantado. Para a previsão suportada pela definição de ciclo de desvio, além do indicador adiantado, utilizamos as potencialidades recursivas do filtro de Kalman que, como sabemos, vai determinando a previsão (um período à frente) e actualizando essa mesma previsão sempre que é conhecido um novo dado observável da realidade contemporânea em estudo. Os dois métodos de datação são organizados numa periodicidade mensal.

Utilizando o software desenvolvido para esta investigação, depois de definidas as séries que compõem os indicadores, coincidente e adiantado, procedeu-se ao cálculo dos indicadores compostos e respectivos estudos de datação.

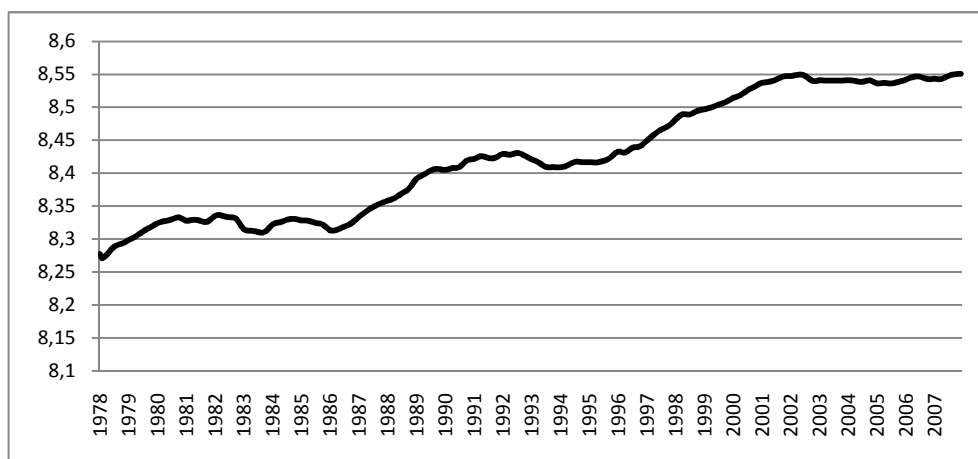
4.3.4.1 Datação do ciclo português - Ciclo clássico

A datação assente na definição de ciclo clássico foi construída seguindo as seguintes etapas:

- a) *Transformação das séries trimestrais, envolvidas nos indicadores, em mensais (1978-M1 a 2007-M12);*
- b) *Normalização das séries (1978-M1=100);*
- c) *Cálculo do indicador composto coincidente e do indicador composto adiantado, pelo método proposto pelo TCB (2001)⁵⁰;*
- d) *Análise e datação do ciclo clássico, proposta de Bry e Boschan (1971) e de Harding e Pagan (2002).*

A série trimestral que faz parte do indicador coincidente, que ainda não foi transformada em mensal, é a do Emprego Total, enquanto que as séries trimestrais que fazem parte do indicador adiantado que serão transformadas em mensais pelo filtro de Kalman, utilizando a abordagem das observações perdidas, são as Exportações de Bens e Serviços e as Importações de Bens e Serviços. Os Gráficos 4.38, 4.39 e 4.40 mostram a evolução mensal, de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007.

Gráfico 4.38: Modelo do Emprego Total Mensal



⁵⁰ O procedimento de cálculo da metodologia proposta pelo TCB (2001) pode ser consultado em anexo, Anexo B.

Gráfico 4.39: Modelo das Exportações de Bens e Serviços Mensal

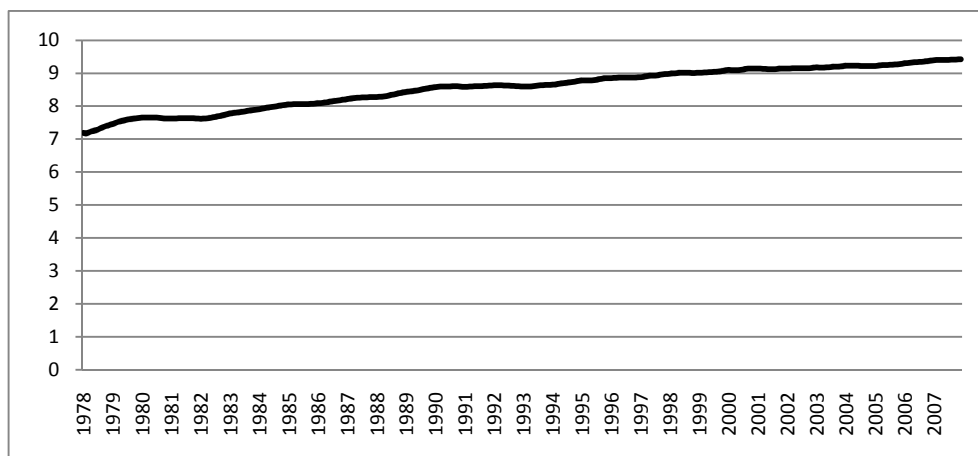
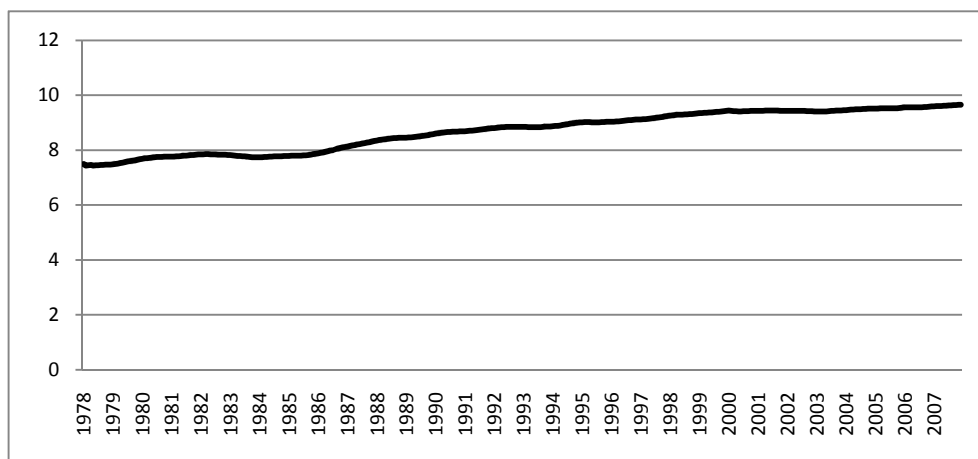


Gráfico 4.40: Modelo das Importações de Bens e Serviços Mensal



Os Gráficos 4.41 e 4.42 representam a evolução temporal mensal do indicador coincidente e adiantado normalizados (1978-M2=100)⁵¹, construídos com base na proposta do TCB (2001)⁵².

⁵¹ Neste procedimento de cálculo (TCB, 2001), o valor do primeiro indicador é “perdido”. Consideramos que será igual a 100, ou seja, igual ao segundo valor da série normalizada.

⁵² Refira-se que o indicador coincidente é uma medida adimensional e que por isso só tem comparação com ela mesma.

Gráfico 4.41: Indicador coincidente Mensal

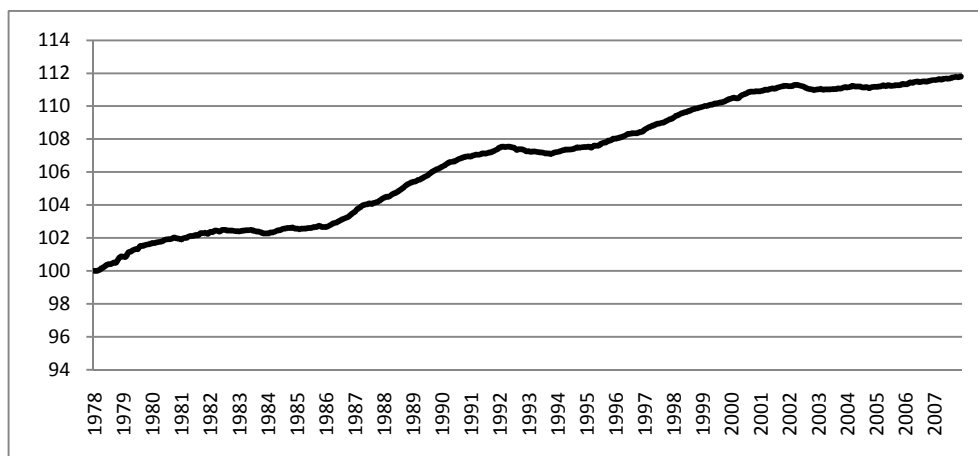
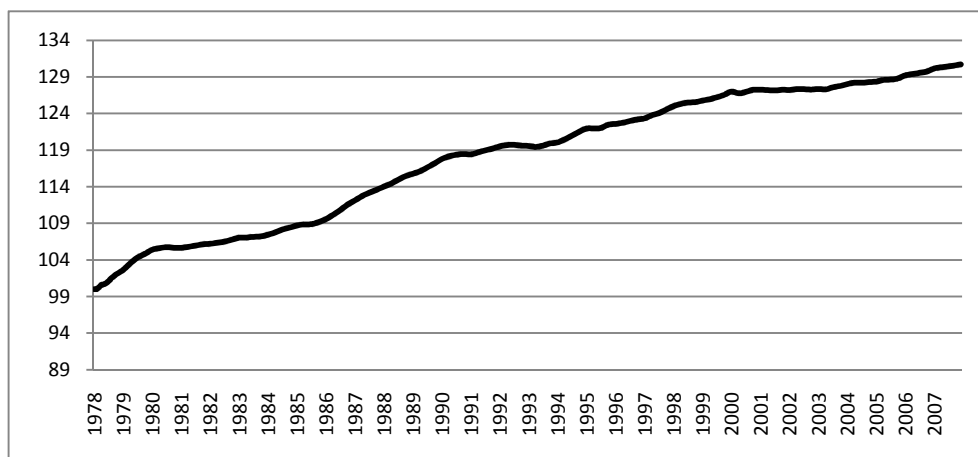


Gráfico 4.42: Indicador adiantado Mensal



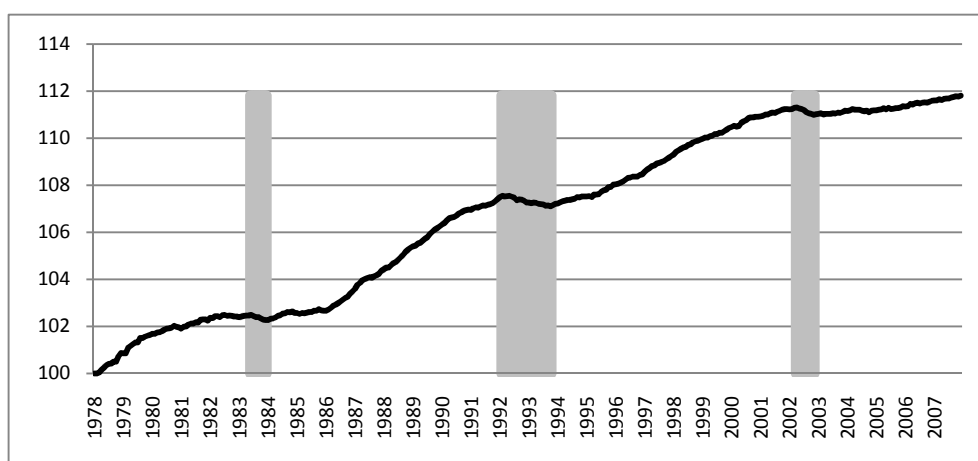
Na utilização da técnica proposta pelo TCB para a criação de um indicador composto, um dos pontos a salientar no algoritmo computacional é o facto de este incorporar o cálculo dos “factores de padronização”. Ou seja, podemos verificar em cada mudança temporal, neste caso mensal, qual a contribuição percentual de cada componente do indicador, para a sua variação global (TCB, 2001).

A caracterização não-paramétrica dos pontos de início (pico) e fim de recessão (cava), teve origem no começo dos anos 1970 (Duarte, Issler e Spacov, 2004), a partir do trabalho de Bry e Boschan (1971) para dados mensais e mais tarde acrescido com a adaptação deste método por Harding e Pagan (2002 e 2003) para dados trimestrais (Harding e Pagan, 2006).

Nesta investigação, efectuou-se a datação do ciclo económico português utilizando estes métodos para os valores mensais (de 1978-1M a 2007-12M)⁵³. Realizadas as devidas simulações informáticas, tanto pelo método proposto por Bry e Boschan (1971), como pelo método de Harding e Pagan (2002), para a evolução mensal do indicador coincidente e adiantado (pico a cava (recessão), com um mínimo de cinco meses e com pico a pico (ciclo) ou cava a cava (ciclo), de quinze meses no mínimo)⁵⁴, obtiveram-se os Gráficos 4.43 a 4.62.

As zonas a sombreado nos Gráficos 4.43 e 4.44 indicam as zonas de abrandamento do indicador coincidente, ou seja, do ciclo económico português de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, utilizando o método de Bry e Boschan e o método de Harding e Pagan.

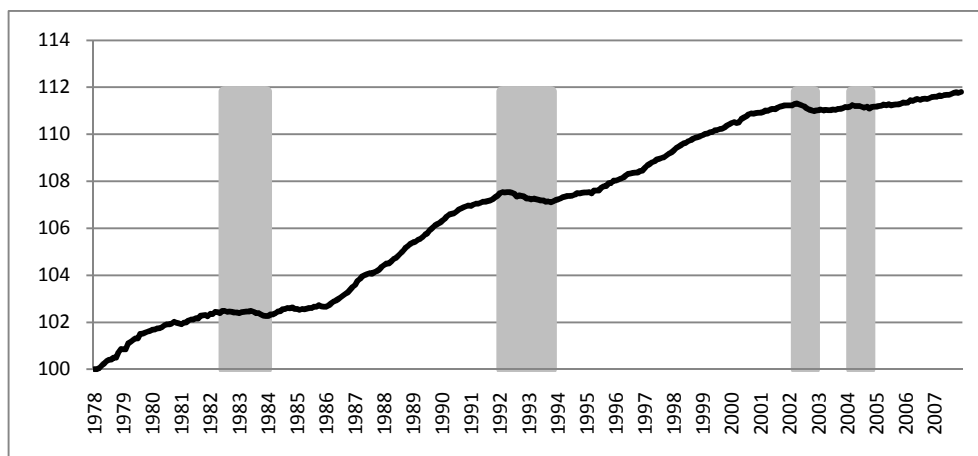
Gráfico 4.43: Períodos de abrandamento do Ciclo económico português - Bry e Boschan



⁵³ O software Matlab que implementa o método de Bry e Boschan (1971) é disponibilizado por Robert Inklaar e encontra-se disponível no site: <http://www.rug.nl/staff/r.c.inklaar/research>, o método Harding e Pagan (2002) é disponibilizado por James Engel e encontra-se disponível no site: <http://www.ncer.edu.au/data/>

⁵⁴ Os valores mínimos são os propostos pelos autores em linha com a proposta original do NBER e mais recentemente do TCB.

Gráfico 4.44: Períodos de abrandamento do Ciclo económico português - Harding e Pagan



As zonas a sombreado nos Gráficos 4.45 e 4.46 indicam as zonas de abrandamento do indicador adiantado, utilizando o método de Bry e Boschan e o método de Harding e Pagan. Como se pode verificar, estes dois métodos não consideram os mesmos períodos de abrandamento, os mesmos picos e as mesmas cavas, apesar de efectuarem, em cada situação, simulações com base nos mesmos valores e considerarem ambos as mesmas amplitudes mínimas de abrandamento e de ciclo.

Gráfico 4.45: Períodos de abrandamento do indicador adiantado - Bry e Boschan

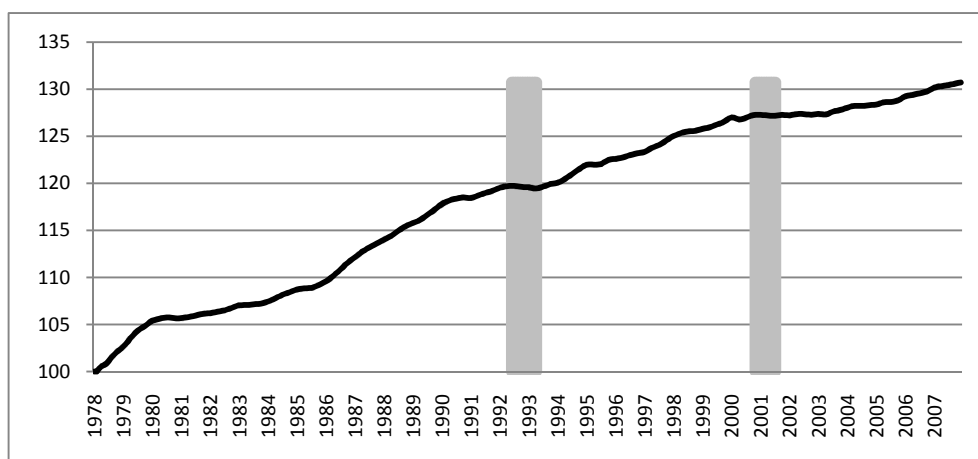
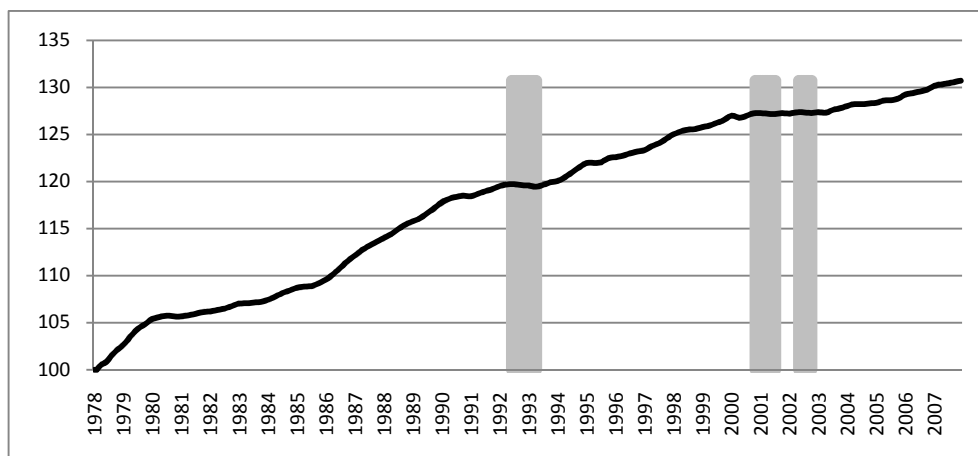


Gráfico 4.46: Períodos de abrandamento do indicador adiantado - Harding e Pagan



As barras verticais nos Gráficos 4.47, 4.48 e 4.49, 4.50 assinalam os pontos máximos locais (picos) do indicador coincidente e do adiantado, utilizando o método de Bry e Boschan e o método de Harding e Pagan.

Gráfico 4.47: Ciclo económico português – Valores máximos - Bry e Boschan

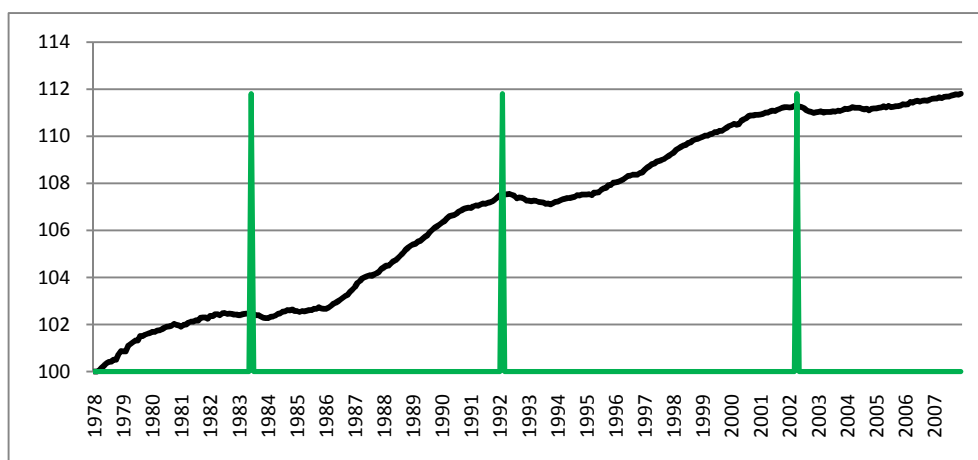


Gráfico 4.48: Ciclo económico português – Valores máximos - Harding e Pagan

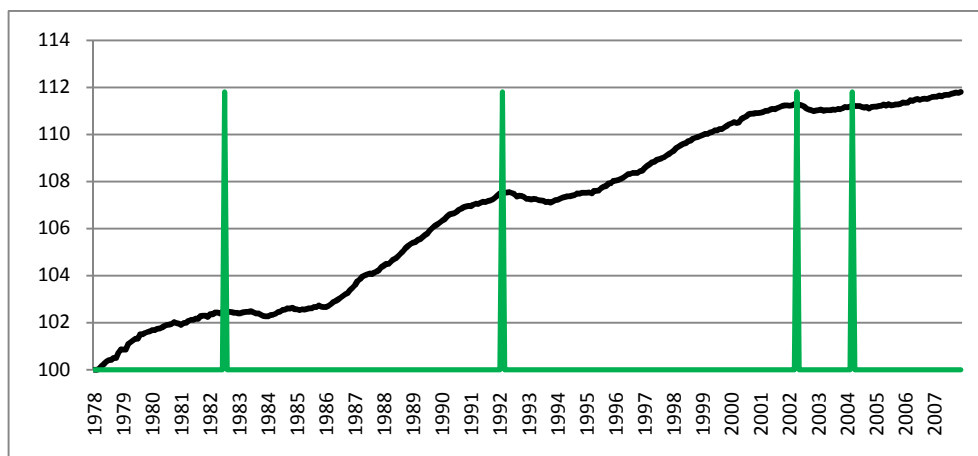


Gráfico 4.49: Indicador adiantado – Valores máximos - Bry e Boschan

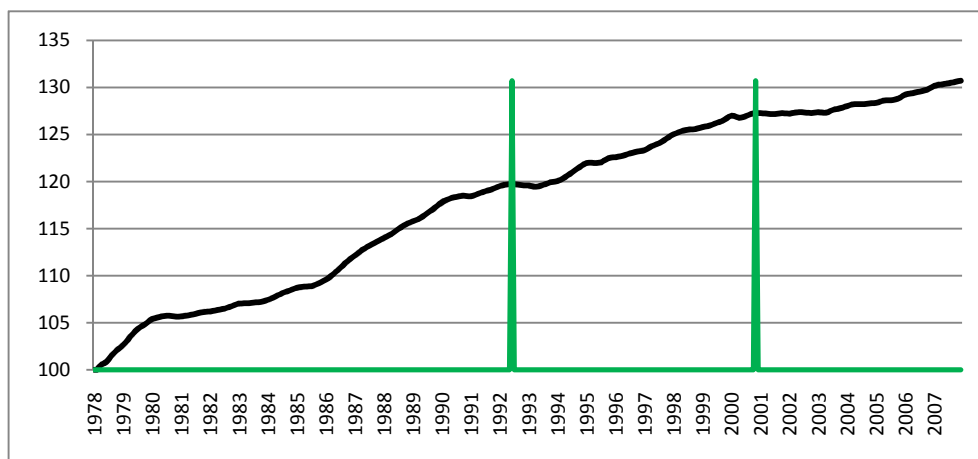
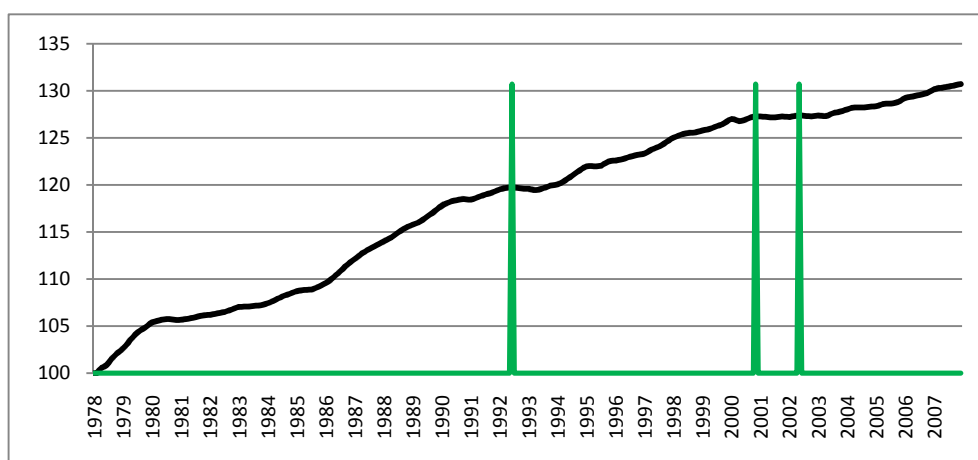


Gráfico 4.50: Indicador adiantado – Valores máximos - Harding e Pagan



As barras verticais nos Gráficos 4.51, 4.52 e 4.53, 4.54 assinalam os pontos mínimos locais (cavas) do indicador coincidente e do adiantado, utilizando também o método de Bry e Boschan e o método de Harding e Pagan.

Gráfico 4.51: Ciclo económico português – Valores mínimos - Bry e Boschan

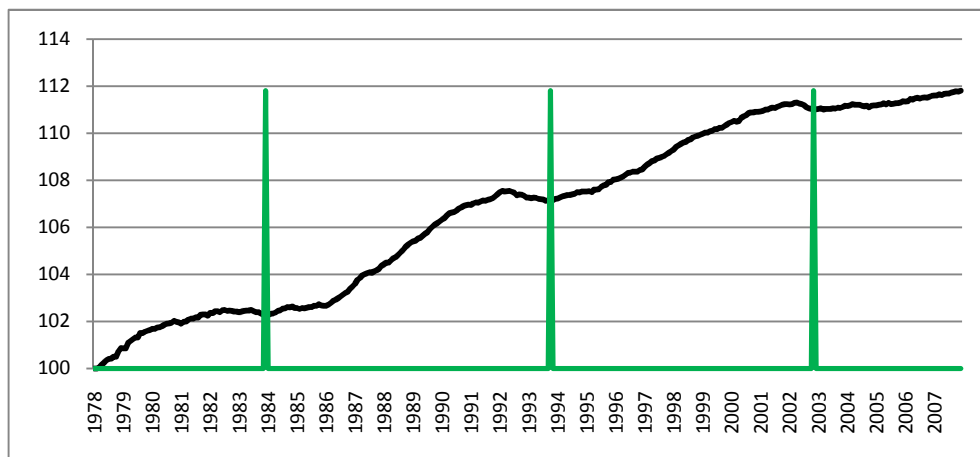


Gráfico 4.52: Ciclo económico português – Valores mínimos - Harding e Pagan

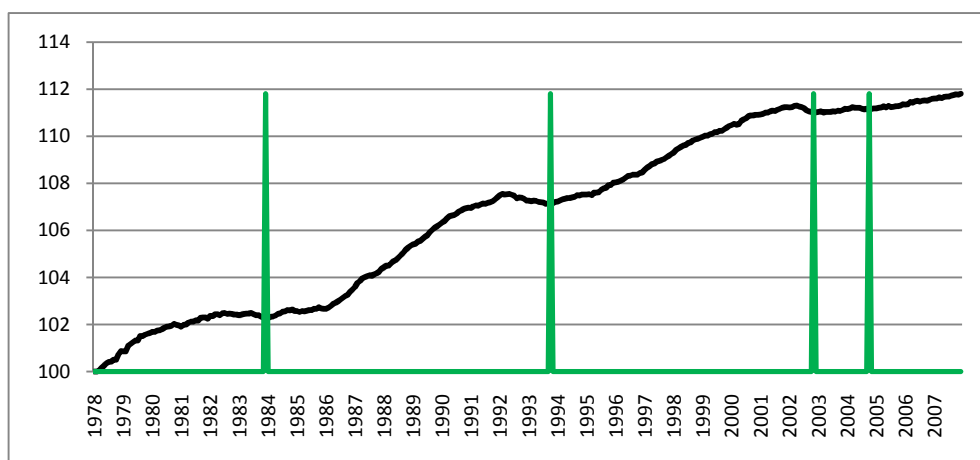


Gráfico 4.53: Indicador adiantado – Valores mínimos - Bry e Boschan

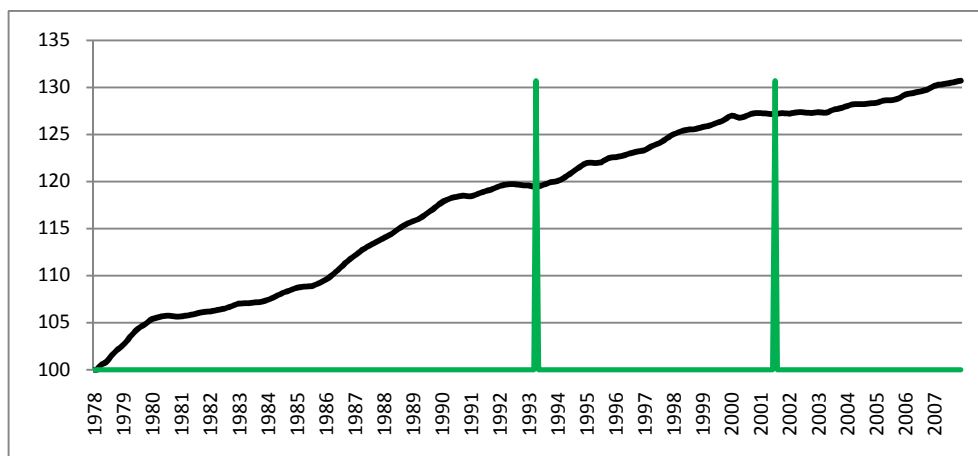
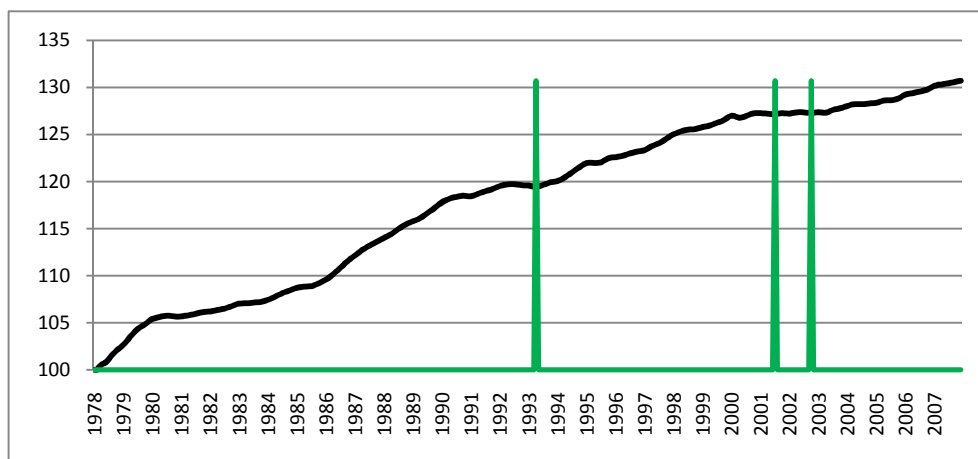


Gráfico 4.54: Indicador adiantado – Valores mínimos - Harding e Pagan



Os Gráficos 4.55, 4.56 e 4.57 comparam os resultados obtidos pelo método proposto por Bry e Boschan para o indicador coincidente e adiantado. Os Gráficos 4.58, 4.59 e 4.60 comparam os resultados obtidos pelo método proposto por Harding e Pagan para o indicador coincidente e adiantado. Os Gráficos 4.61, 4.62 comparam as faixas de abrandamento propostas pelo método Bry e Boschan (BB) e pelo método de Harding e Pagan (HPa) para o indicador coincidente e adiantado.

Gráfico 4.55: Períodos de abrandamento do ciclo e do indicador adiantado - Bry e Boschan

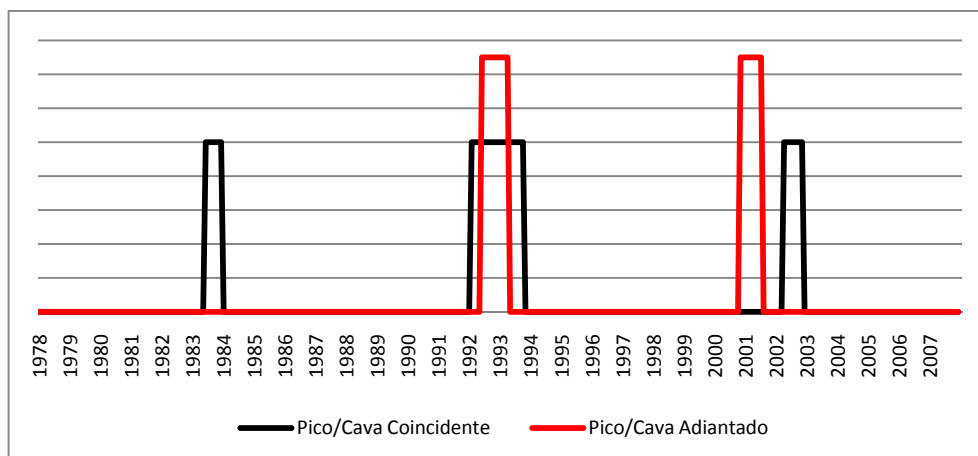


Gráfico 4.56: Valores máximos do ciclo e do indicador adiantado - Bry e Boschan

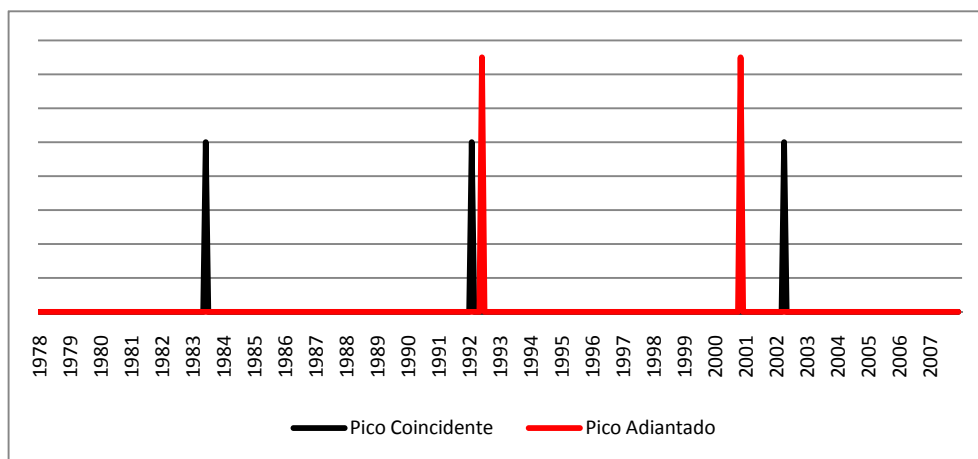


Gráfico 4.57: Valores mínimos do ciclo e do indicador adiantado - Bry e Boschan

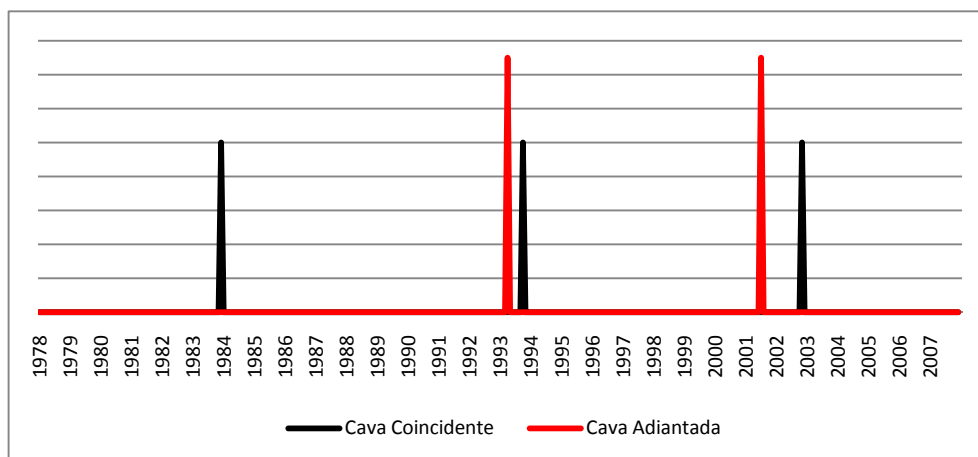


Gráfico 4.58: Períodos de abrandamento do ciclo e do indicador adiantado - Harding e Pagan

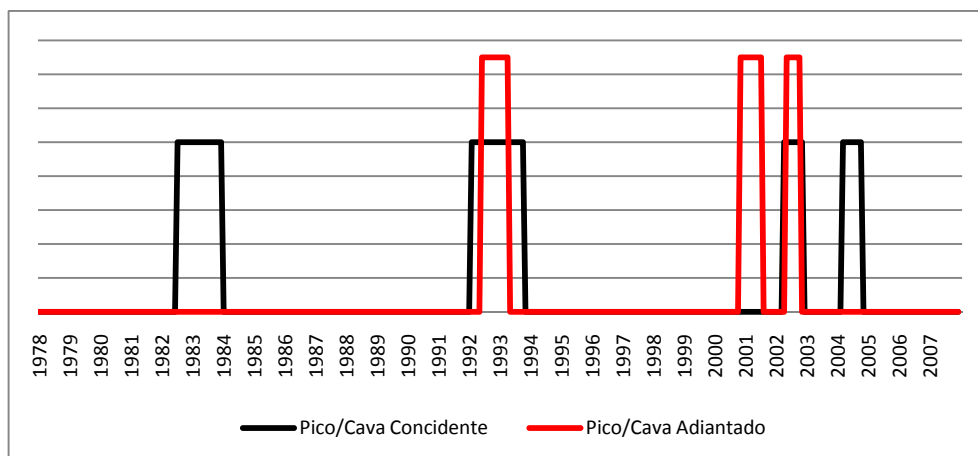


Gráfico 4.59: Valores máximos do ciclo e do indicador adiantado - Harding e Pagan

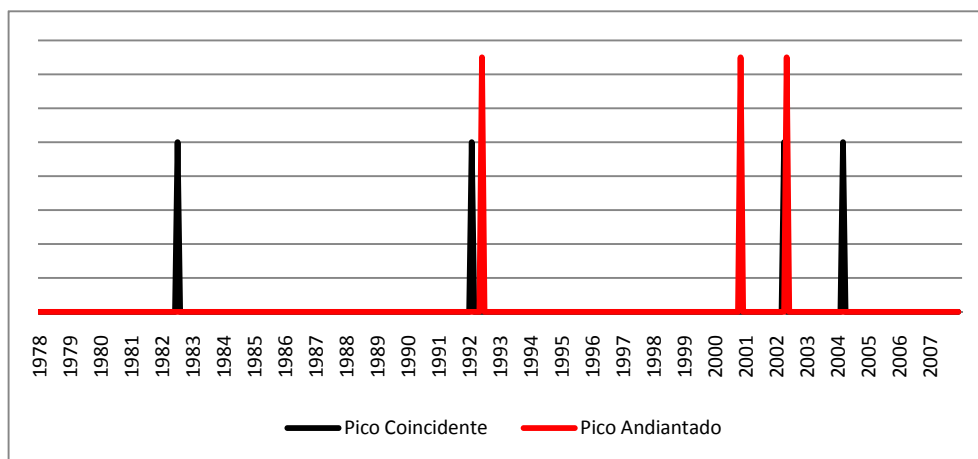


Gráfico 4.60: Valores mínimos do ciclo e do indicador adiantado - Harding e Pagan

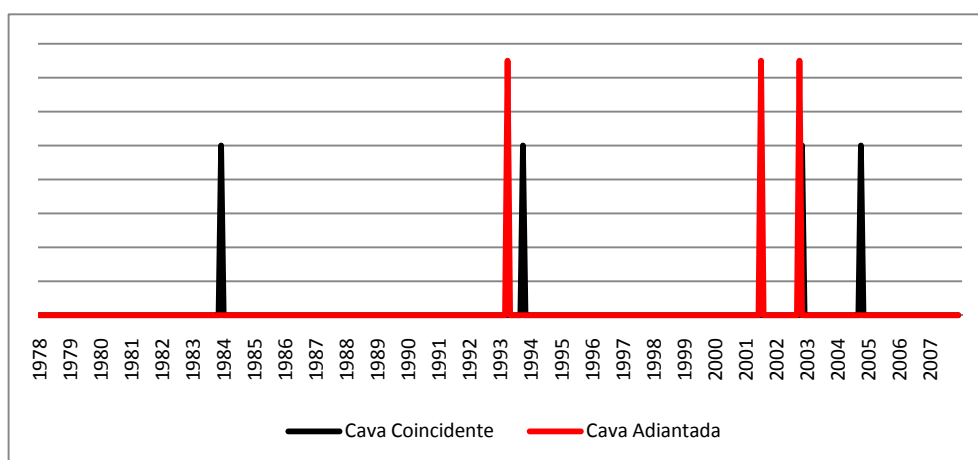


Gráfico 4.61: Períodos de abrandamento do ciclo - Bry e Boschan versus Harding e Pagan

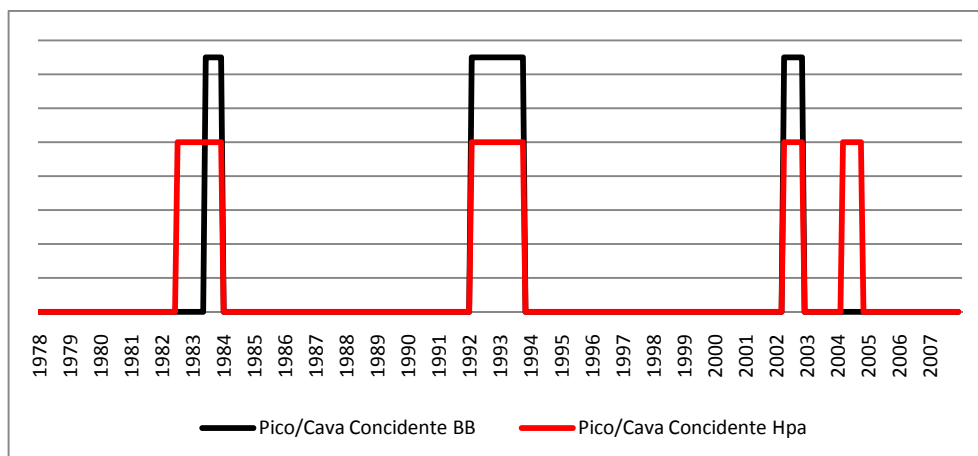
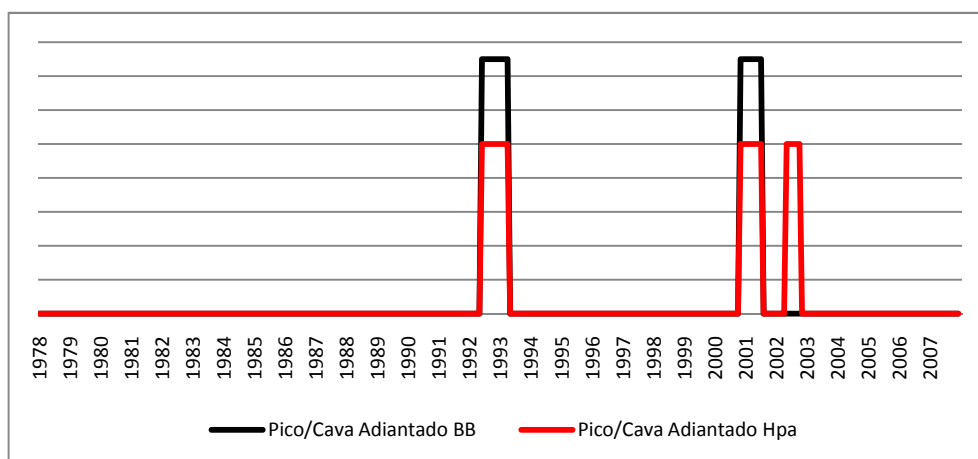


Gráfico 4.62: Períodos de abrandamento indicador adiantado - Bry e Boschan versus Harding e Pagan



Verificamos que o método proposto por Bry e Boschan detecta um período de abrandamento mais curto para o ciclo de Junho de 1983 a Dezembro de 1983, enquanto que o método proposto por Harding e Pagan detecta uma zona mais longa de abrandamento de Julho de 1982 a Dezembro de 1983. O método proposto por Bry e Boschan não detecta também, ao contrário do método proposto por Harding e Pagan, qualquer zona de abrandamento no ciclo em 2004 e do indicador adiantado no ano de 2002. Nenhuma das propostas de datação tem identificado alguma zona mensal de indicador adiantado, antes do primeiro período de abrandamento do ciclo que se iniciou segundo o método proposto por Harding e Pagan, em Julho de 1982.

Os Quadros 4.6 e 4.7 identificam algumas medidas associadas à evolução mensal do indicador coincidente (ciclo clássico) e os Quadros 4.8 e 4.9 do indicador adiantado, nos períodos de recessão (pico a cava) e expansão (cava a pico), de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, utilizando a proposta de datação de Bry e Boschan.

Quadro 4.6: Cronologia das recessões do ciclo - Bry e Boschan

Pico	Cava	Duração ⁵⁵	Amplitude ⁵⁶
Junho de 1983	Dezembro de 1983	6,0	0,018
Fevereiro de 1992	Outubro de 1993	20,0	0,038
Abril de 2002	Novembro de 2002	7,0	0,027

Quadro 4.7: Cronologia das expansões do ciclo - Bry e Boschan

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Janeiro de 1978 ⁵⁷	Junho de 1983	X	X
Dezembro de 1983	Fevereiro de 1992	98,0	0,447
Outubro de 1993	Abril de 2002	102,0	0,357
Novembro de 2002	Dezembro de 2007 ⁵⁸	X	X

Quadro 4.8: Cronologia das recessões do indicador adiantada - Bry e Boschan

Pico	Cava	Duração	Amplitude
Junho de 1992	Abril de 1993	10,0	0,010
Novembro de 2000	Julho de 2001	8,0	0,004

Quadro 4.9: Cronologia das expansões do indicador adiantada - Bry e Boschan

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Janeiro de 1978	Junho de 1992	X	X
Abril de 1993	Novembro de 2000	91,0	0,255
Julho de 2001	Dezembro de 2007	X	X

⁵⁵ O valor Duração representa em todos os quadros um valor mensal.

⁵⁶ O valor Amplitude representa em todos os quadros o rácio de variação absoluta da amplitude do intervalo com a amplitude de toda a série em estudo.

⁵⁷ Referência temporal do primeiro dado da série.

⁵⁸ Referência temporal do ultimo dado da série.

O Quadro 4.10 expõe medidas médias mensais do ciclo económico em estudo, utilizando a proposta de datação de Bry e Boschan.

Quadro 4.10: Valores médios da cronologia do ciclo - Bry e Boschan

	Coincidente	Adiantado
Duração média de pico para pico (ciclo)	113,0	101,0
Duração média de cava para cava (ciclo)	113,5	99,0
Amplitude média de pico para pico (ciclo)	0,374	0,245
Amplitude média de cava para cava (ciclo)	0,369	0,251
Duração média de pico para cava (recessão)	11,0	9,0
Duração média de cava para pico (expansão)	100,0	91,0
Amplitude média de pico para cava (recessão)	0,028	0,007
Amplitude média de cava para pico (expansão)	0,402	0,255

Também os Quadros 4.11 e 4.12 identificam algumas medidas associadas à evolução mensal do indicador coincidente (ciclo clássico), e os Quadros 4.13 e 4.14 do indicador adiantado, nos períodos de recessão (pico a cava) e expansão (cava a pico), de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, utilizando desta feita a proposta de datação de Harding e Pagan.

Quadro 4.11: Cronologia das recessões do ciclo - Harding e Pagan

Pico	Cava	Duração	Amplitude
Julho de 1982	Dezembro de 1983	17,0	0,019
Fevereiro de 1992	Outubro de 1993	20,0	0,038
Abril de 2002	Novembro de 2002	7,0	0,027
Março de 2004	Outubro de 2004	7,0	0,012

Quadro 4.12: Cronologia das expansões do ciclo - Harding e Pagan

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Janeiro de 1978	Julho de 1982	X	X
Dezembro de 1983	Fevereiro de 1992	98,0	0,447
Outubro de 1993	Abril de 2002	102,0	0,357
Novembro de 2002	Março de 2004	16,0	0,021
Outubro de 2004	Dezembro de 2007	X	X

Quadro 4.13: Cronologia das recessões do indicador adiantada - Harding e Pagan

Pico	Cava	Duração	Amplitude
Junho de 1992	Abril de 1993	10,0	0,010
Novembro de 2000	Julho de 2001	8,0	0,004
Maio de 2002	Outubro de 2002	5,0	0,003

Quadro 4.14: Cronologia das expansões do indicador adiantada - Harding e Pagan

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Janeiro de 1978	Junho de 1992	X	X
Abril de 1993	Novembro de 2000	91,0	0,255
Julho de 2001	Maio de 2002	10,0	0,007
Outubro de 2002	Dezembro de 2007	X	X

O Quadro 4.15 expõe medidas médias mensais do ciclo económico em estudo, utilizando igualmente a proposta de datação de Harding e Pagan.

Quadro 4.15: Valores médios da cronologia do ciclo - Harding e Pagan

	Coincidente	Adiantado
Duração média de pico para pico (ciclo)	86,7	59,5
Duração média de cava para cava (ciclo)	83,3	57,0
Amplitude média de pico para pico (ciclo)	0,251	0,124
Amplitude média de cava para cava (ciclo)	0,249	0,128
Duração média de pico para cava (recessão)	12,8	7,7
Duração média de cava para pico (expansão)	72,0	50,5
Amplitude média de pico para cava (recessão)	0,024	0,006
Amplitude média de cava para pico (expansão)	0,275	0,131

O Quadro 4.16 expõe medidas mensais dos picos (cavas) de antecipação, pelo método proposto por Bry e Boschan e pelo método proposto por Harding e Pagan. O Quadro 4.17 mostra os picos (cavas) do indicador adiantado que não anteciparam nenhum dos picos (cavas) do indicador coincidente.

Quadro 4.16: Medidas mensais dos picos (cavas) de antecipação (meses)

	Pico	Antecipa o Pico	Cava	Antecipa a Cava
Bry e Boschan	Junho de 1983	NA	Dezembro de 1983	NA
	Fevereiro de 1992	NA	Outubro de 1993	6
	Abril de 2002	17	Novembro de 2002	16
	Média	17	Média	11
Harding e Pagan	Julho de 1982	NA	Dezembro de 1983	NA
	Fevereiro de 1992	NA	Outubro de 1993	6
	Abril de 2002	17	Novembro de 2002	16
	Março de 2004	22	Outubro de 2004	24
	Média	19,5	Média	15,3

Nota: A sigla NA (Não Antecipa) significa nos diferentes quadros que a cava ou o pico não é antecipada ou antecipado.

Quadro 4.17: Picos (cavas) que não antecipam

	Pico Adiantado	Antecipa o Pico	Cava Adiantada	Antecipa a Cava
Bry e Boschan	Junho de 1992	NA	X	
Harding e Pagan	Junho de 1992	NA	X	

Pela análise dos resultados obtidos podemos estudar os movimentos passados e extrapolar algumas considerações sobre o futuro imediato do ciclo económico português.

A duração média de uma expansão pelo método de Harding e Pagan, é de 72 meses. No final da amostra, em Dezembro de 2007, encontrávamo-nos numa expansão que decorria há 38 meses, faltando 34 meses para se atingir um pico. Esse pico ocorreria portanto em Outubro de 2010 e o indicador adiantado iria alertar-nos para esse facto em Fevereiro de 2009, cerca de 19,5 meses antes.

De Outubro de 2004 ao final da amostra, Dezembro de 2007, o indicador coincidente cresceu numa amplitude⁵⁹ de 0,06. A manter-se este ritmo, em Outubro de 2010 o indicador atingiria o patamar aproximado de 112,44 e a expansão de Outubro de 2004 a Outubro de 2010 apresentaria uma amplitude de 0,113. Esta amplitude seria inferior à média das amplitudes das expansões passadas, que é de 0,275.

Outro tipo de análise, com os números propostos pelo método de Harding e Pagan, será supor que a actual expansão, de Outubro de 2004 a Dezembro de 2007, teria uma amplitude similar à média das anteriores, ou seja, cerca de 0,275 no indicador coincidente. Assim sendo, em Dezembro de 2010 atingiríamos 114,34.

Mantendo o crescimento do último período, de Outubro de 2004 a Dezembro de 2007, cerca de 0,706 em 38 meses, para se atingir um valor de 114,34 no indicador coincidente, necessitaríamos de um crescimento de 3,245 desde de Outubro de 2004 até ao próximo Pico, o que nos levaria para o mês de Abril do ano de 2019. Uma

⁵⁹ O valor Amplitude representa o rácio de variação absoluta da amplitude do intervalo com a amplitude de toda a série em estudo.

expansão de 174 meses muito acima do valor médio de 72 meses.

Pela análise da tendência linear de crescimento da expansão, no indicador coincidente de Outubro de 2004 a Dezembro de 2007, no Gráfico 4.63, verificamos que o coeficiente angular da recta de tendência, de 0,0178, é superior ao do período de Novembro de 2002 a Março de 2004 com 0,0123, representado no Gráfico 4.64. O último período de expansão é mais intenso que o anterior. Pode-se ainda considerar que o último período de expansão é mais estável, ou seja, com comportamento mais linear que o período anterior, uma vez que o valor de R^2 é superior.

Gráfico 4.63: Tendência linear do último período de expansão - Harding e Pagan

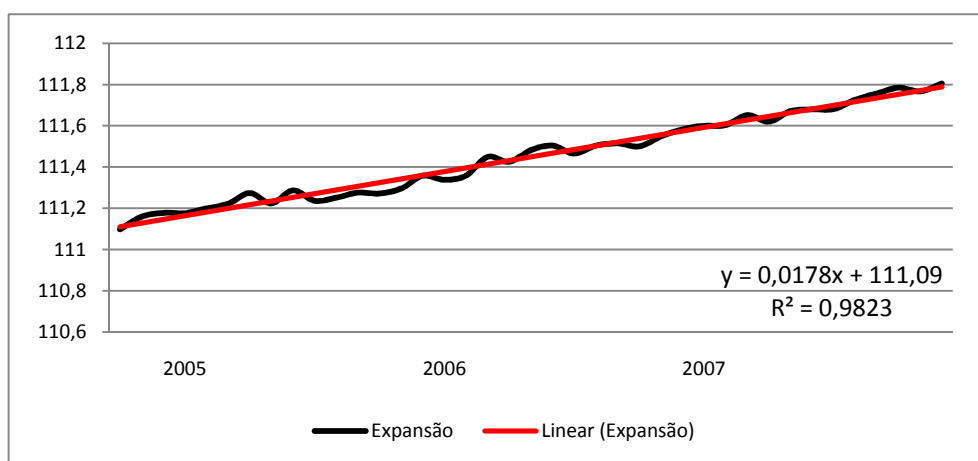
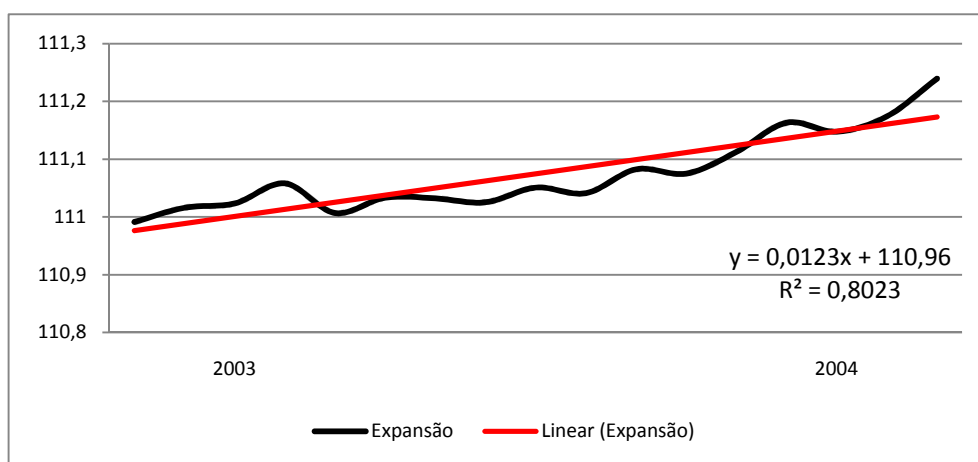


Gráfico 4.64: Tendência linear do penúltimo período de expansão - Harding e Pagan



4.3.4.2 Datação do ciclo português - Ciclo de desvio

A metodologia de datação sugerida, consentânea com a definição de ciclo de desvio, foi desenvolvida seguindo as seguintes fases:

- a) Transformação das séries trimestrais, candidatas aos indicadores compostos, em mensais (1978-M1 a 2007-M12);*
- b) Inicialização do filtro de Kalman e extracção das componentes de interesse de cada série, tendência temporal e ciclo;*
- c) Normalização da componente cíclica de cada série e construção dos indicadores compostos (coincidente e adiantado);*
- d) Definição do modelo e respectiva representação em espaço de estados;*
- e) Extracção da componente cíclica comum coincidente e adiantada com o filtro de Kalman;*
- f) Previsão a um período (mês);*
- g) Análise e datação do ciclo desvio, proposta de Bry e Boschan (1971) e de Harding e Pagan (2002).*

Para se obter alguma uniformização com a metodologia de datação do ciclo clássico considerou-se nesta abordagem, assente no ciclo de desvio, que o indicador composto coincidente e o indicador composto adiantado seriam construídos com base nas mesmas séries, ou seja, Emprego Total, IPI e PIB, para o indicador coincidente e, Exportações de Bens e Serviços e Importações de Bens e Serviços, para o indicador adiantado.

A selecção das variáveis que compõem os indicadores compostos, caso não existisse qualquer estudo de datação anterior, poderia ser determinada por comparação da referência cíclica com as componentes cíclicas das variáveis em estudo. Assim, depois de convertidas para uma periodicidade mensal, extraídas as componentes cíclicas pelo filtro de Kalman e normalizadas, os valores de correlação, atraso e avanço, sincronia, bem como da evolução temporal conjunta, das componentes cíclicas e da referência, iriam facultar-nos indicação sobre a incorporação, ou não, dessas mesmas variáveis em um dos indicadores compostos.

As séries que fazem parte do indicador coincidente e do indicador adiantado nesta investigação já foram anteriormente transformadas numa frequência mensal pelo filtro de Kalman, utilizando a abordagem das observações perdidas. Com todas as séries envolvidas no processo de modelação e simulação com uma periodicidade mensal, de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, utilizou-se a técnica de inicialização difusa dos parâmetros do modelo e testou-se o método Newton-Raphson, o método BFGS e o método Nelder-Mead, na inicialização das matrizes de sistema. Os Quadros 4.18, 4.19 e 4.20 expõem os resultados obtidos para o Emprego Total, Exportações de Bens e Serviços e Importações de Bens e Serviços⁶⁰.

Quadro 4.18: Valores de máxima verosimilhança – Emprego Total – Mensal - (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	2019,91	2030,78	2024,71
2	2030,63	2030,43	2027,17
3	2030,83	2029,72	2027,03
4	2030,89	2027,39	2027,56
5	2030,89	2027,24	2025,32
6	2030,86	2027,72	2028,88
7	2030,91	2019,86	2028,61
8	2030,59	2019,96	2016,44
9	2030,90	2017,04	VNV
10	2030,58	2030,55	VNV

⁶⁰ Os valores para o IPI e PIB já foram calculados quando se construiu a variável de referência do ciclo clássico e encontram-se listados em apêndice, Apêndice III.

Quadro 4.19: Máxima verosimilhança – Exportações de Bens e Serviços – Mensal - (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	1616,70	1616,87	1616,05
2	1616,93	1616,76	1616,58
3	1616,91	1617,05	1617,86
4	1616,93	1617,44	1616,59
5	1618,48	1617,04	1617,50
6	1618,48	1618,47	1617,89
7	1618,48	1617,57	1617,84
8	1618,47	1617,15	1617,94
9	1618,44	1616,86	VNV
10	1618,48	1606,62	VNV

Quadro 4.20: Máxima verosimilhança – Importações de Bens e Serviços – Mensal - (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	1648,83	1646,49	1644,54
2	1648,83	1646,61	1649,82
3	1649,96	1646,61	1649,80
4	1648,83	1646,61	1649,67
5	1649,99	1650,06	1649,53
6	1649,99	1649,93	1649,96
7	1649,98	1649,63	1649,93
8	1649,99	1649,98	1649,88
9	1649,99	VNV	VNV
10	1648,35	1647,10	VNV

Utilizando o software desenvolvido para esta investigação, após o isolamento e a subsequente normalização da componente cíclica, listou-se os resultados mensais obtidos para o Emprego Total, Exportações de Bens e Serviços, Importações de Bens e

Serviços, IPI e PIB, de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, nos Gráficos 4.65 a 4.69⁶¹.

Gráfico 4.65: Emprego Total normalizado - Mensal – Ciclo alisado

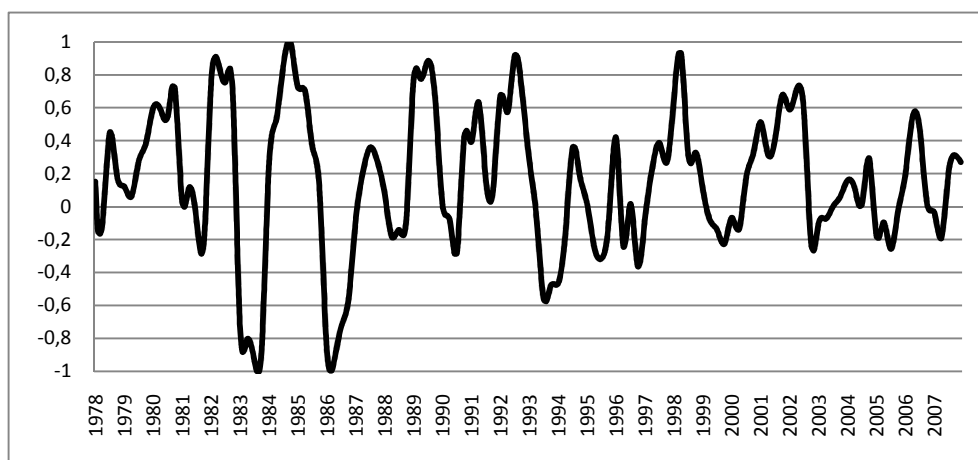
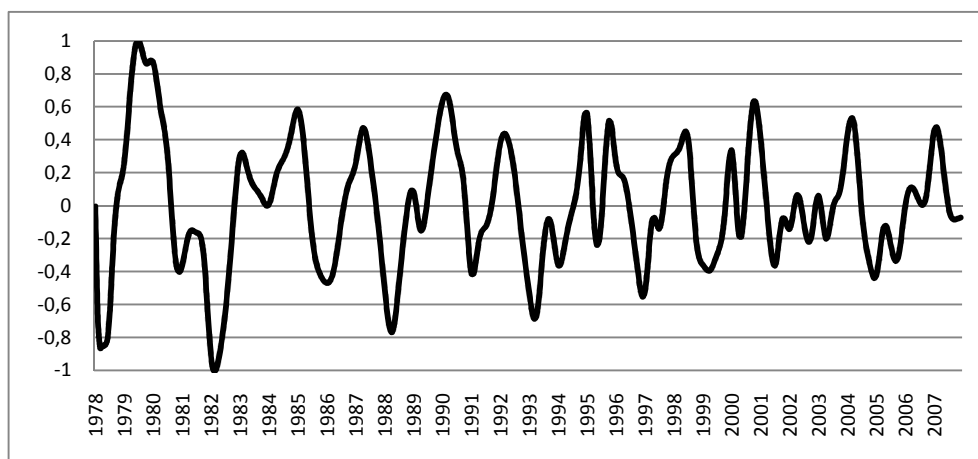


Gráfico 4.66: Exportações de Bens e Serviços normalizado - Mensal – Ciclo alisado



⁶¹ Os gráficos representativos das variáveis mensais e do modelo alisado, da tendência alisada, da componente de tendência aleatória alisada, do ciclo alisado e do erro alisado de previsão, para o Emprego Total, Exportações de Bens e Serviços e Importações de Bens e Serviços, poderão ser consultados em apêndice, Apêndice IV. As mesmas realidades gráficas para o IPI e PIB poderão ser consultados em apêndice, Apêndice III.

Gráfico 4.67: Importações de Bens e Serviços normalizado - Mensal – Ciclo alisado

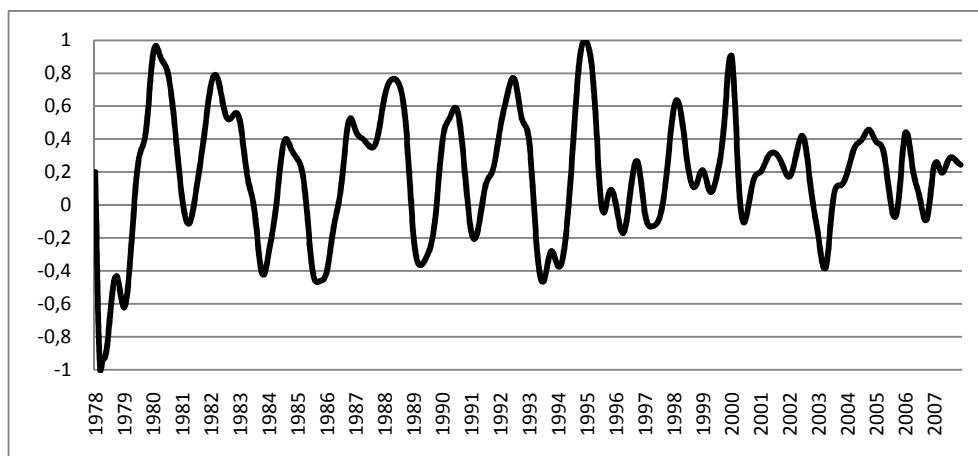


Gráfico 4.68: IPI normalizado - Mensal – Ciclo alisado

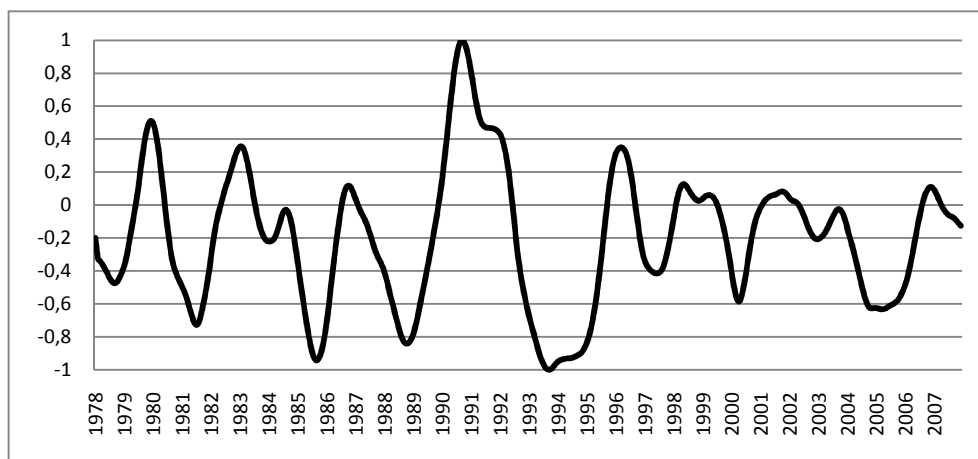
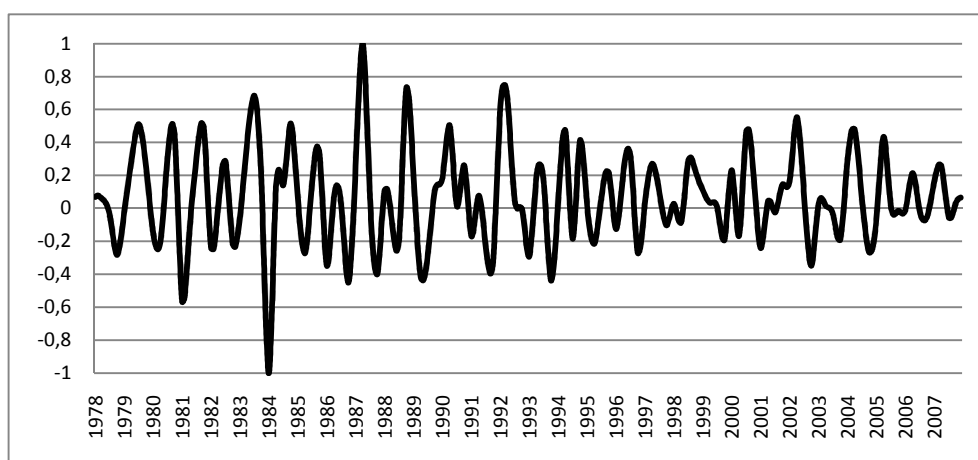


Gráfico 4.69: PIB normalizado - Mensal – Ciclo alisado



A obtenção de um indicador sintético como média ponderada de indicadores parciais baseia-se, além da selecção dos elementos que compõem o indicador, na determinação dos pesos relativos. Será expectável que os indicadores parciais não apresentem um comportamento independente, mas que o mesmo seja influenciado pela evolução geral da macromagnitude estudada (Jiménez e Vargas, 2008).

O estudo deste factor de evolução geral é o objectivo dos indicadores sintéticos, mediante a combinação linear ponderada dos indicadores parciais. Pode-se assim interpretar o indicador sintético como um factor comum ao comportamento do conjunto de indicadores parciais, cuja evolução condiciona, com certa intensidade, a de estes últimos. É com base neste princípio que se apresenta a modelação conjunta de indicadores na representação em espaço de estados.

Considerando o modelo representado por (2.11) e (2.12), podemos considerar que \mathbf{y}_t é o vector de indicadores parciais e o vector de estado α_t é o factor de evolução geral, o indicador sintético cuja estimação se pretende efectuar.

Neste caso, esta estimação não necessita de recorrer a uma média ponderada dos indicadores parciais, podendo-se modelar a correlação da variável referência⁶² e cada um dos elementos que compõem o indicador⁶³, reflectidos na matriz Z_t da equação (2.11).

A construção de indicadores compostos pela metodologia de representação em espaço de estados e pela aplicação posterior do algoritmo do filtro de Kalman, detém também a capacidade de adiantar os pontos de viragem um período antes (um período à frente). Esta característica de antecipação do cenário económico é muito apreciada pelos agentes de planificação e ainda como mecanismo de previsão a curto prazo.

Se a correlação entre componentes cíclicas apresenta um grau de correlação contemporânea significativamente inferior à correlação máxima, tal deve-se

⁶² Com os dados disponíveis, considerou-se nesta proposta metodológica que a variável de referência do ciclo coincidente seria a média simples da componente cíclica do PIB e do IPI e a do ciclo adiantado a média simples das Exportações de Bens e Serviços com as Importações de Bens e Serviços.

⁶³ Esta correlação poderá ser construída com base em toda a série e ir sendo actualizada ao longo do tempo, à medida que nos chegam novas observações.

normalmente ao facto de existirem atrasos (ou avanços) entre as variáveis cíclicas em confronto. Pode-se contudo tentar melhorar os resultados deste procedimento de cálculo se considerarmos a correlação corrigida por períodos temporais (Jiménez e Vargas, 2008). A utilização da representação em espaço de estados e do filtro de Kalman poderá ser uma alternativa útil para a obtenção do indicador sintético.

Seja então C_t o indicador composto coincidente e C_{it} o i -ésimo indicador parcial do indicador composto, já obtido pelo filtro de Kalman nesta investigação. Neste sentido podemos considerar o modelo de combinação linear,

$$C_t = \sum_{i=1}^n \beta_i C_{it} + \psi_t \quad \text{com } t = 1 \dots N$$

e

$$C_{1t} = \delta_{1t} C_t + \varepsilon_{1t}$$

⋮

$$C_{nt} = \delta_{nt} C_t + \varepsilon_{nt},$$

onde $\psi_t, \varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt}$, são perturbações aleatórias de valor esperado nulo. Adaptando à representação em espaço de estados (2.11) e (2.12), podemos considerar a equação de observação,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \alpha_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i. i. d. N_n(0, \mathbf{H}_t)$$

onde,

$$\begin{bmatrix} C_{1t} \\ \vdots \\ C_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1t} \\ \vdots \\ \delta_{nt} \end{bmatrix} C_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e a equação de estado,

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \quad \eta_t \sim i.i.d. N_1(0, Q_t);$$

que é,

$$C_{t+1} = \phi C_t + \mu_t \tag{4.4}$$

onde ϕ é um parâmetro constante a estimar⁶⁴ e μ_t uma perturbação aleatória de valor esperado nulo.

O Quadro 4.21 resume, as dimensões dos vectores e matrizes do modelo em espaço de estados.

Quadro 4. 21: Dimensão dos vectores e matrizes do modelo em espaço de estados - Ciclo

\mathbf{y}_t	$n \times 1$	\mathbf{Z}_t	$n \times 1$
α_t	1×1	T_t	1×1
$\boldsymbol{\varepsilon}_t$	$n \times 1$	\mathbf{H}_t	$n \times n$
η_t	1×1	R_t	1×1
$\bar{\mathbb{E}}_1$	1×1	Q_t	1×1
		P_1	1×1

Com base na representação em espaço de estados (4.3) e (4.4) e na simulação informática com o filtro de Kalman, estimamos o indicador composto coincidente e adiantado com uma periodicidade mensal, de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007. Utilizou-se simultaneamente a técnica de inicialização difusa para os parâmetros do modelo e efectuou-se a inicialização das matrizes de sistema pelo método Newton-Raphson, BFGS e Nelder-Mead. Os Quadros 4.22 e 4.23 mostram os valores obtidos pela função de máxima verosimilhança difusa.

⁶⁴ Considerou-se que este valor teria seu domínio entre zero e um.

Quadro 4.22: Máxima verosimilhança – Ciclo de desvio coincidente – Mensal - (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	276,44	689,33	689,33
2	689,33	276,44	276,44
3	136,14	689,33	276,44
4	689,33	689,33	276,44
5	276,44	689,33	276,44
6	673,80	689,33	276,44
7	587,58	689,33	276,44
8	587,29	276,44	276,44
9	276,44	276,44	276,44
10	550,43	689,33	276,44

Quadro 4.23: Máxima verosimilhança – Ciclo de desvio adiantado – Mensal - (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	405,29	385,43	385,43
2	405,29	385,43	385,43
3	385,43	385,43	385,43
4	385,33	385,43	385,43
5	405,29	405,29	405,29
6	385,43	385,43	385,43
7	385,43	405,29	385,43
8	405,29	385,43	385,43
9	385,43	405,29	385,43
10	385,43	385,43	385,43

Após o isolamento e a subsequente normalização da componente cíclica coincidente e adiantada, apresentam-se os resultados mensais obtidos no período temporal de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007, nos Gráficos 4.70 e 4.71.

Gráfico 4.70: Componente cíclica de desvio - coincidente

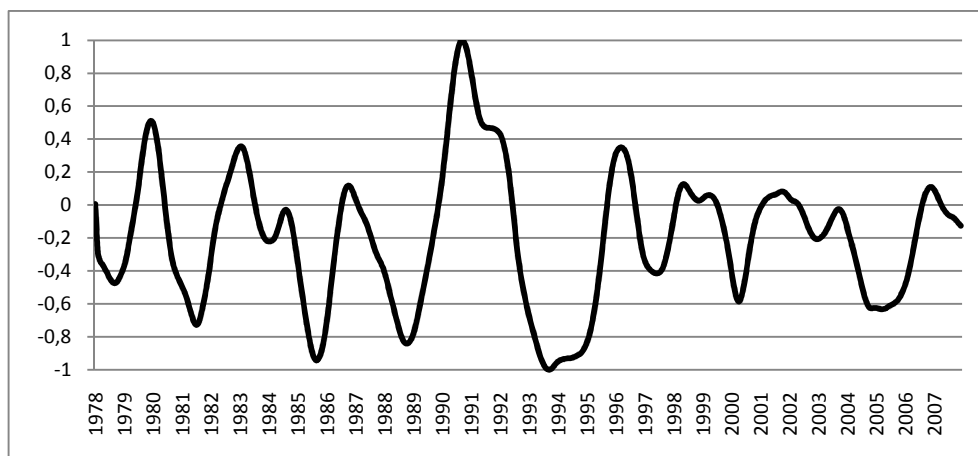
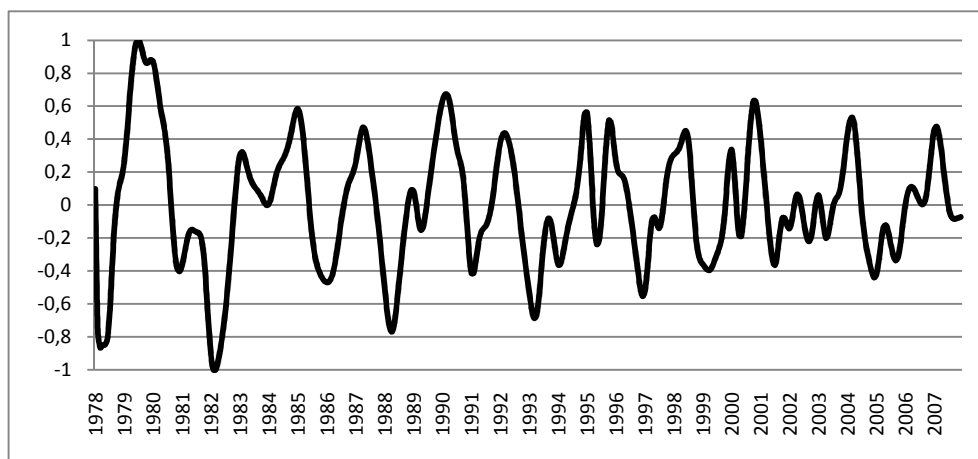


Gráfico 4.71: Componente cíclica de desvio - adiantada



Nos Gráficos 4.72 e 4.73 podemos verificar a evolução do ciclo durante o ano de 2007 e um mês de previsão, para Janeiro de 2008, da componente coincidente e adiantada. Pelo valor obtido, o filtro sugere que a componente cíclica coincidente permanecerá em fase de decrescimento, sendo que esta fase é mais acentuada nos últimos três meses.

No Gráfico 4.73 verificamos que a componente cíclica adiantada sugere que em Janeiro de 2008 exista um ligeiro crescimento que irá reflectir-se, alguns meses mais tarde, no ciclo económico.

Gráfico 4.72: Evolução da componente cíclica coincidente e previsão para o mês seguinte

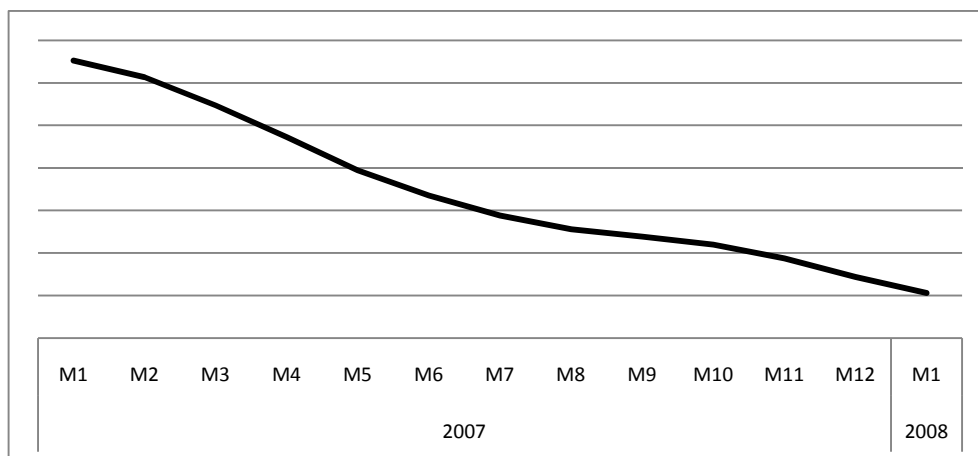
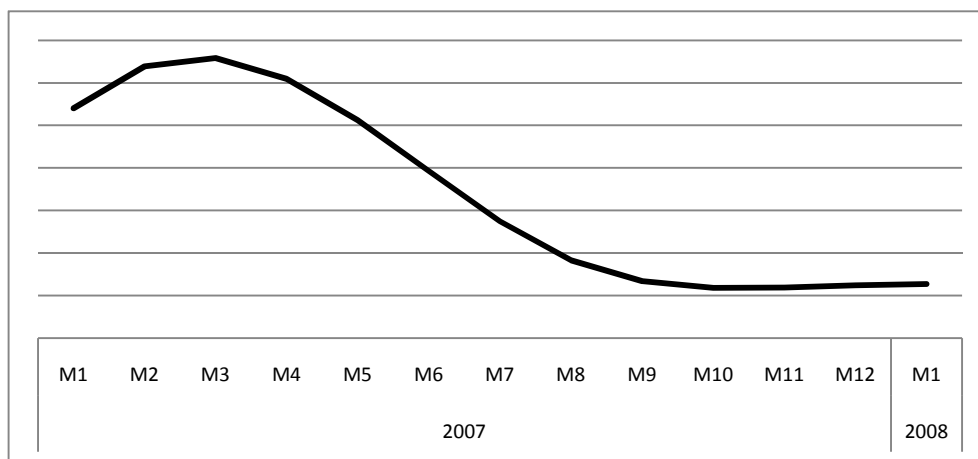


Gráfico 4.73: Evolução da componente cíclica adiantada e previsão para o mês seguinte



Efectuadas as devidas simulações, tanto pelo método proposto por Bry e Boschan (1971), como pelo método de Harding e Pagan (2002), para a evolução mensal do indicador coincidente e adiantado (pico a cava (recessão) com um mínimo de cinco meses e com pico a pico (ciclo) ou cava a cava (ciclo), de quinze meses no mínimo), obteve-se os mesmos resultados para o indicador coincidente, nos dois métodos. No indicador adiantado quer para os picos, quer para as cavas, os dois métodos detectaram zonas diferenciadas.

Assim, no Gráfico 4.74 as zonas a sombreado indicam as zonas de decréscimo do valor do indicador coincidente, ou seja, do ciclo económico português (de 1978-1M a 2007-12M), utilizando o método de Bry e Boschan e o método de Harding e Pagan. Nos Gráficos 4.75 e 4.76, temos a mesma representação, só que desta feita para o

indicador adiantado, pelo método proposto por Bry e Boschan e do método de Harding e Pagan, respectivamente. O Gráfico 4.77 mostra-nos as zonas de decréscimo do valor do indicador adiantado que são referenciadas pelo método de Harding e Pagan, mas que não aparecem referenciadas no método proposto por Bry e Boschan⁶⁵.

Gráfico 4.74: Zonas de decréscimo da componente cíclica - coincidente

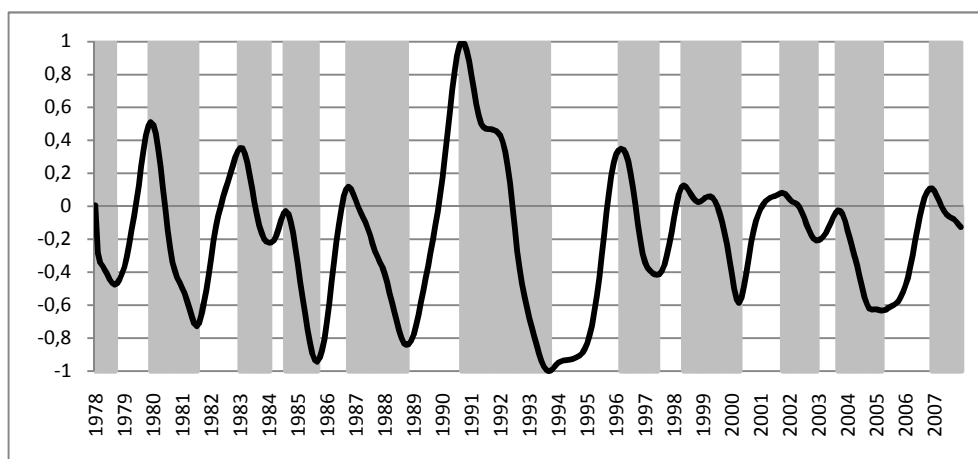
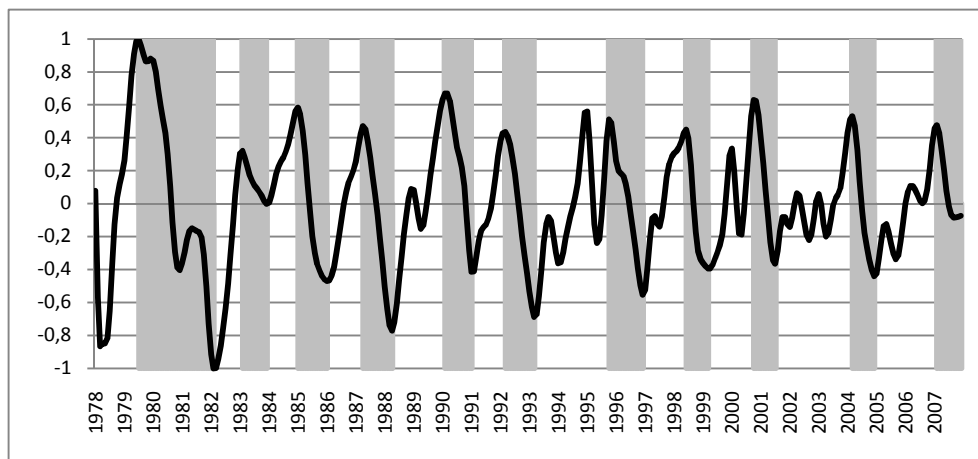


Gráfico 4.75: Zonas de decréscimo da componente cíclica – adiantada - Bry e Boschan



⁶⁵ A partir deste momento, nesta investigação sem perda de generalidade, o indicador adiantado será representado pelo método de Harding e Pagan.

Gráfico 4.76: Zonas de decréscimo da componente cíclica – adiutada - Harding e Pagan

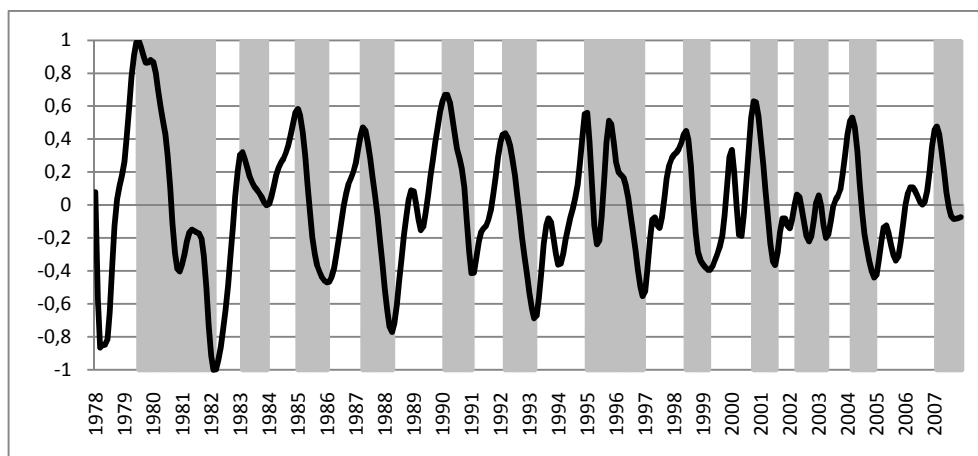
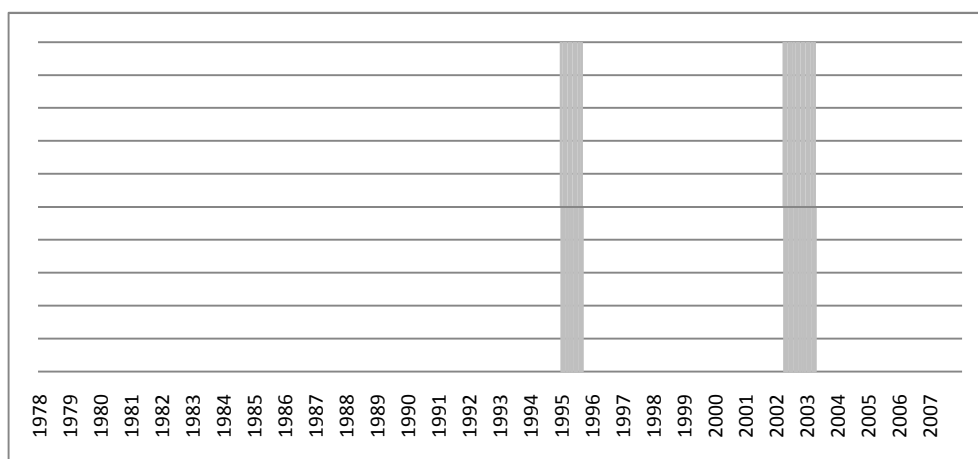


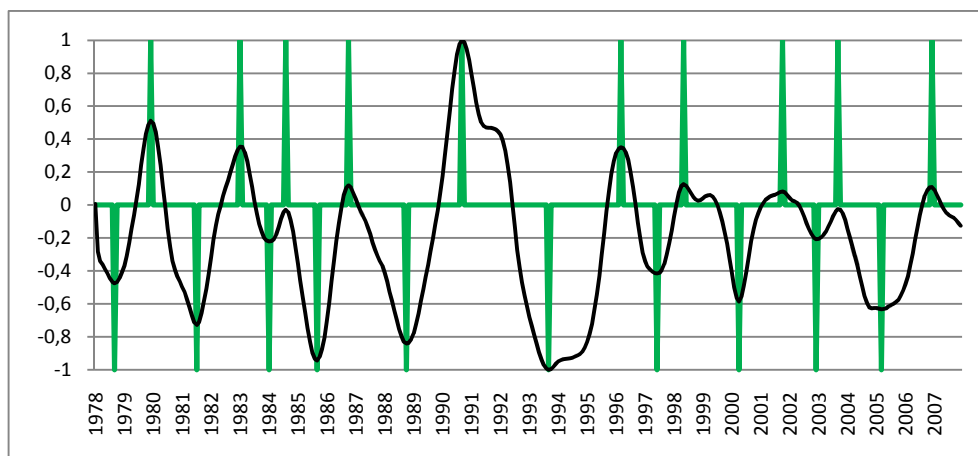
Gráfico 4.77: Decréscimo do indicador adiutada – detectadas em Harding e Pagan e não detectadas em Bry e Boschan



Verificamos no Gráfico 4.77 que o método proposto por Bry e Boschan detecta um período de decréscimo mais curto de Outubro de 1995 a Dezembro de 1996, enquanto o método proposto por Harding e Pagan detecta uma zona mais longa de decréscimo de Janeiro de 1995 a Dezembro de 1996. O método proposto por Bry e Boschan não detecta também, ao contrário do método proposto por Harding e Pagan, qualquer zona de decréscimo de Abril de 2002 a Abril de 2003.

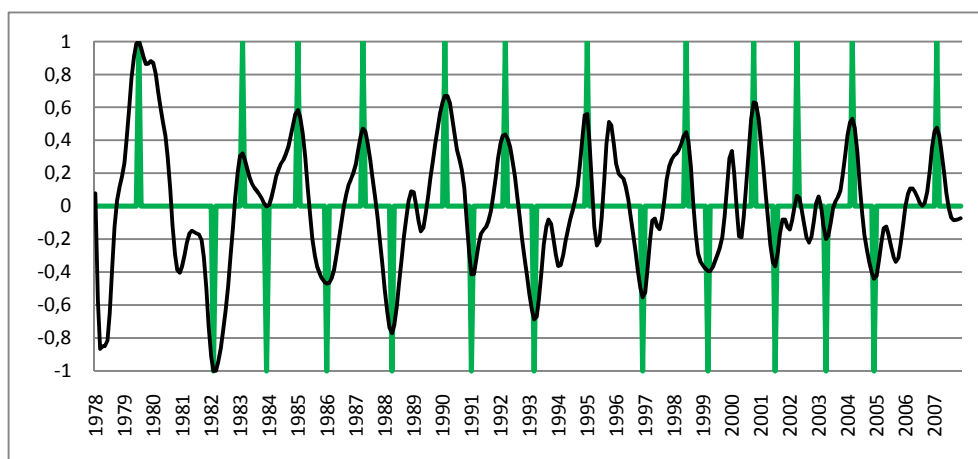
As barras verticais no Gráfico 4.78 representa os picos e cavas do indicador coincidente, utilizando a proposta de Bry e Boschan e a proposta de Harding e Pagan.

Gráfico 4.78: Evolução da componente cíclica coincidente - picos e cavas



O Gráfico 4.79 representa os picos e cavas do indicador adiantado, utilizando a proposta de Harding e Pagan.

Gráfico 4.79: Evolução da componente cíclica adiantado - picos e cavas



Os Gráficos 4.80 e 4.81 representam os picos e cavas do indicador coincidente e adiantado e as zonas de decréscimo do indicador coincidente e adiantado.

Gráfico 4.80: Evolução da componente cíclica coincidente e adiantado - picos e cavas

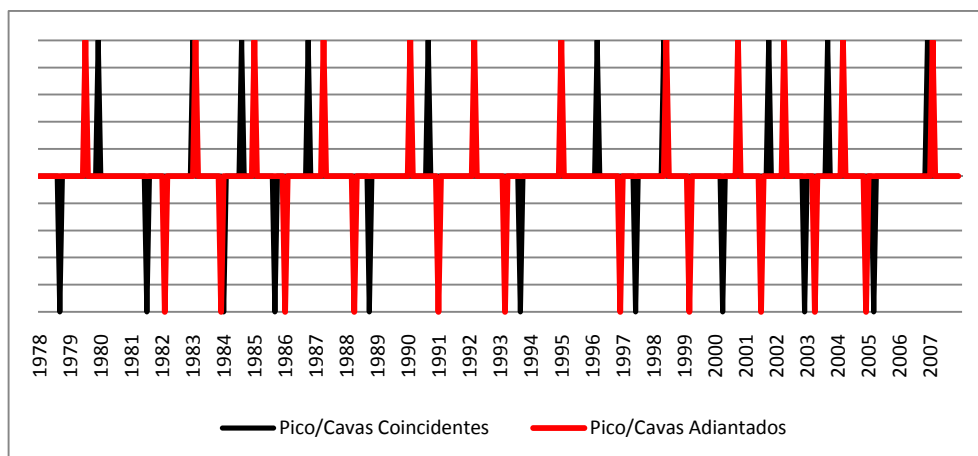
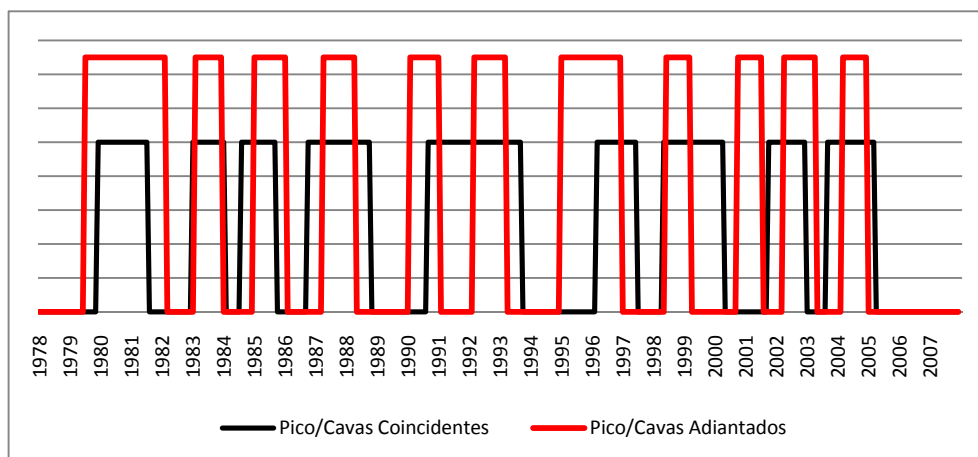


Gráfico 4.81: Evolução da componente cíclica coincidente e adiantado – zonas de decréscimo



Os Quadros 4.24 e 4.25 identificam medidas associadas à evolução mensal do indicador coincidente (ciclo desvio), os Quadros 4.26 e 4.27 do indicador adiantado, nos períodos de decréscimo (pico a cava) e incremento (cava a pico), de Janeiro de 1978 a Dezembro de 2007.

Quadro 4.24: Cronologia dos decréscimos do ciclo

Pico	Cava	Duração	Amplitude
Janeiro de 1978 ⁶⁶	Setembro de 1978	X	X
Dezembro de 1979	Julho de 1981	19,0	1,240
Janeiro de 1983	Janeiro de 1984	12,0	0,576
Agosto de 1984	Setembro de 1985	13,0	0,915
Outubro de 1986	Outubro de 1988	24,0	0,960
Setembro de 1990	Setembro de 1993	36,0	2,000
Março de 1996	Junho de 1997	15,0	0,765
Mai de 1998	Abril de 2000	23,0	0,714
Outubro de 2001	Dezembro de 2002	14,0	0,290
Setembro de 2003	Março de 2005	18,0	0,608
Dezembro de 2006	Dezembro de 2007 ⁶⁷	X	X

Quadro 4.25: Cronologia dos incrementos do ciclo

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Setembro de 1978	Dezembro de 1979	15,0	0,986
Julho de 1981	Janeiro de 1983	18,0	1,083
Janeiro de 1984	Agosto de 1984	7,0	0,193
Setembro de 1985	Outubro de 1986	13,0	1,062
Outubro de 1988	Setembro de 1990	23,0	1,842
Setembro de 1993	Março de 1996	30,0	1,350
Junho de 1997	Mai de 1998	11,0	0,543
Abril de 2000	Outubro de 2001	18,0	0,669
Dezembro de 2002	Setembro de 2003	9,0	0,182
Março de 2005	Dezembro de 2006	21,0	0,741

⁶⁶ Primeiro valor da série.

⁶⁷ Ultimo valor da série.

Quadro 4.26: Cronologia dos decréscimos do indicador adiandada

Pico	Cava	Duração	Amplitude
Julho de 1979	Fevereiro de 1982	31,0	0,337
Fevereiro de 1983	Dezembro de 1983	10,0	0,568
Janeiro de 1985	Janeiro de 1986	12,0	0,354
Abril de 1987	Abril de 1988	12,0	0,517
Fevereiro de 1990	Janeiro de 1991	11,0	0,499
Março de 1992	Março de 1993	12,0	1,118
Janeiro de 1995	Dezembro de 1996	23,0	0,542
Junho de 1998	Março de 1999	9,0	0,058
Outubro de 2000	Julho de 2001	9,0	0,208
Abril de 2002	Abril de 2003	12,0	0,174
Março de 2004	Dezembro de 2004	9,0	0,375
Fevereiro de 2007	Dezembro de 2007	X	X

Quadro 4.27: Cronologia dos incrementos do indicador adiandada

Cava	Pico	Duração	Amplitude
Fevereiro de 1982	Fevereiro de 1983	12,0	0,564
Dezembro de 1983	Janeiro de 1985	13,0	0,139
Janeiro de 1986	Abril de 1987	15,0	0,642
Abril de 1988	Fevereiro de 1990	22,0	0,882
Janeiro de 1991	Março de 1992	14,0	0,468
Março de 1993	Janeiro de 1995	22,0	0,042
Dezembro de 1996	Junho de 1998	18,0	0,407
Março de 1999	Outubro de 2000	19,0	0,205
Julho de 2001	Abril de 2002	9,0	0,048
Abril de 2003	Março de 2004	11,0	0,091
Dezembro de 2004	Fevereiro de 2007	26,0	0,689

O Quadro 4.28 apresenta medidas médias mensais do ciclo económico, utilizando a proposta de datação de Harding e Pagan.

Quadro 4.28: Valores médios da cronologia do ciclo

	Coincidente	Adiantado
Duração média de pico para pico (ciclo)	36,0	30,1
Duração média de cava para cava (ciclo)	35,3	27,4
Amplitude média de pico para pico (ciclo)	0,303	0,430
Amplitude média de cava para cava (ciclo)	0,367	0,513
Duração média de pico para cava (decrécimo)	19,3	13,6
Duração média de cava para pico (acrécimo)	16,5	16,5
Amplitude média de pico para cava (decrécimo)	0,896	0,432
Amplitude média de cava para pico (acrécimo)	0,865	0,380

O Quadro 4.29 mostra medidas mensais dos picos (cavas) de antecipação e o Quadro 4.30 mostra os picos (cavas) do indicador adiantado que não anteciparam nenhum dos picos (cavas) do indicador coincidente.

Quadro 4.29: Medidas mensais dos picos (cavas) de antecipação (meses)

Pico	Antecipa o Pico	Cava	Antecipa a Cava
Dezembro de 1979	5	Setembro de 1978	NA
Janeiro de 1983	NA	Julho de 1981	NA
Agosto de 1984	18	Janeiro de 1984	1
Outubro de 1986	21	Setembro de 1985	NA
Setembro de 1990	7	Outubro de 1988	6
Março de 1996	14	Setembro de 1993	6
Maio de 1998	NA	Junho de 1997	6
Outubro de 2001	12	Abril de 2000	13
Setembro de 2003	17	Dezembro de 2002	17
Dezembro de 2006	33	Março de 2005	3
Média	15,9	Média	7,4

Quadro 4.30: Picos (cavas) que não antecipam

Pico Adiantado	Antecipa o Pico	Cava Adiantada	Antecipa a Cava
Abril de 1987	NA	Fevereiro de 1982	NA
Março de 1992	NA	Janeiro de 1986	NA
Junho de 1998	NA	Janeiro de 1991	NA
		Abril de 2003	NA

Dos resultados obtidos podemos considerar os movimentos passados e extrapolar algumas reflexões sobre o futuro imediato do ciclo económico português.

A duração média de um decréscimo, pelo método de Harding e Pagan, é de 19,3 meses no indicador coincidente. No final da amostra do indicador coincidente, em Dezembro de 2007, encontrávamos num decréscimo que decorria há 12 meses, faltando cerca de 7,3 meses para se atingir uma cava. Esta cava ocorreria portanto em Julho de 2008 e o indicador adiantado iria conter uma cava em Março de 2008, desde que respeitasse o número médio de meses pico a cava, de 13,6. Como as cavas são antecipadas em média 7,4 meses, este indicador sugere a existência de uma cava no indicador coincidente em Outubro de 2008.

No mesmo período temporal, último pico que ocorre em Dezembro de 2006 ao final da amostra, em Dezembro de 2007, o indicador coincidente decresceu numa amplitude de 0,235. Mantendo-se este ritmo, em Setembro de 2010 o indicador atingiria a amplitude média de 0,896 de pico a cava, bastante depois de Julho de 2008 e de Outubro de 2008, onde se tinha considerado poder vir a existir a cava seguinte.

No que se refere ao indicador adiantado, pelo ritmo de decréscimo no último período, de Fevereiro de 2007 a Dezembro de 2007, com uma amplitude de 0,136, a próxima cava, considerando a amplitude média de 0,432 de pico a cava, teria lugar em Setembro de 2009. Pelos valores da média de antecipação da cava do indicador adiantado, 7,4 meses, em Abril de 2010 iria provavelmente existir uma cava no indicador coincidente.

No Gráfico 4.82 comparamos a datação do ciclo clássico com a datação do ciclo de desvio para o indicador coincidente. As zonas a sombreado indicam as zonas de

abrandamento do indicador no ciclo clássico. No Gráfico 4.83 comparamos a datação do ciclo clássico com a datação do ciclo de desvio para o indicador adiantado. As zonas a sombreado indicam as zonas de abrandamento do indicador no ciclo clássico. O método de datação, nos dois casos, foi o método de Harding e Pagan.

Gráfico 4.82: Componente cíclica coincidente – Ciclo clássico e ciclo de desvio

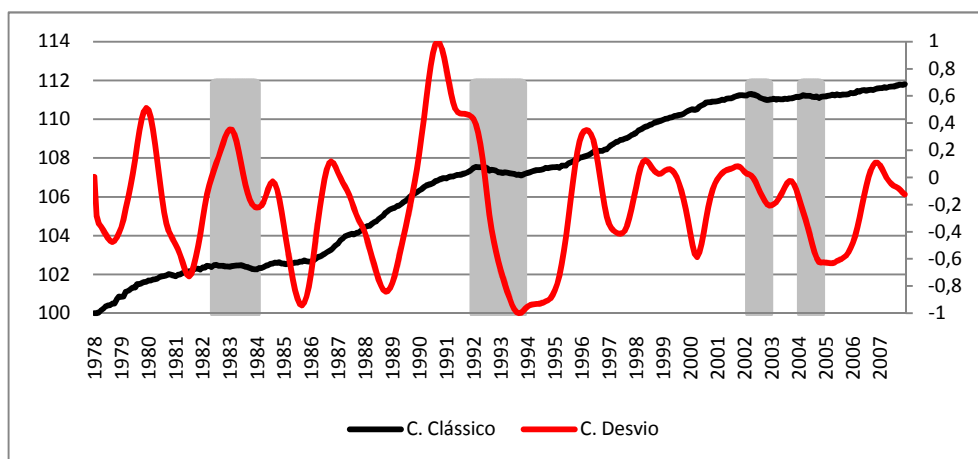
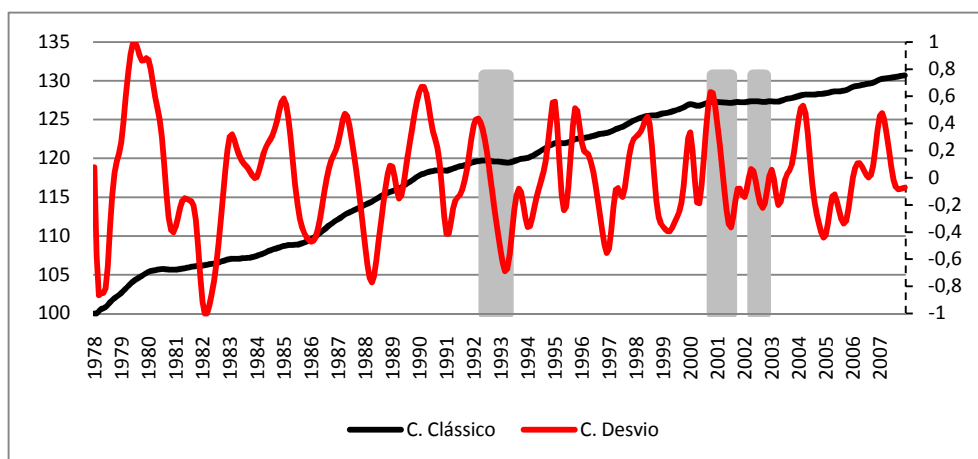


Gráfico 4.83: Indicador cíclico adiantado – Ciclo clássico e ciclo de desvio



Pensamos que apesar das insuficiências, nomeadamente em termos de variáveis analisadas neste estudo, todos os elementos que possam mostrar potencial para melhorar a qualidade de análise e compreensão do ciclo económico, quer sejam assentes na definição de ciclo clássico ou de ciclo de desvio, podem proporcionar um importante instrumento na avaliação de políticas anti-cíclicas mais ajustadas às diferentes realidades económicas.

4.4 Estudo comparativo da evolução cíclica de algumas economias

Neste estudo vamos elaborar a análise conjunta da evolução cíclica, utilizando o filtro de Kalman, das séries do PIB representativas de várias economias de referência, tentando verificar o grau relativo de associação existente entre elas, utilizando neste caso os dados do PIB da Zona Euro e de seis países, Alemanha, Espanha, EUA, Japão, Portugal e Reino Unido.

Para a comparação de várias zonas de referência com Portugal utilizou-se os dados do PIB em milhões de euros, logaritmizados, a preços constantes (2000:02=100), sazonalmente ajustados, da evolução trimestral de 1995-1T a 2007-4T, disponibilizados no site da OCDE. Neste ponto da investigação referimos algumas vezes o termo “economia” para se mencionar a evolução cíclica do PIB.

Embora se reconheça que as séries disponíveis não são de grande dimensão, não foi possível encontrar séries de referência de maior extensão que reflectissem a evolução do PIB, nas economias em estudo. Esta dificuldade, entre outras razões, não será alheia ao facto de estes dados estarem uniformemente expressos em euros e de algumas economias em análise estarem muito agregadas a um processo de integração europeia bem definido no tempo.

As perspectivas sobre o alargamento da UE e o conseqüente aumento da dimensão geográfica e populacional da Zona Euro têm estimulado investigadores a analisar as principais características dos ciclos económicos nos novos estados membros e a sincronia dos ciclos entre estes países e a Zona Euro como um todo. Por outro lado, as determinantes dos co-movimentos cíclicos e a possibilidade de existência de um “ciclo comum europeu” têm motivado o interesse de cientistas e de políticos. Um levantamento exaustivo de literatura recente, com contribuições relevantes ao tema, invocando vários tipos de abordagem teórica e metodológica, pode ser encontrado em Artis (2003), Artis, Krolzig e Toro (2004) e Woźniak e Paczyński (2007).

4.4.1 Inicialização do Filtro

Utilizando o filtro de Kalman e os dados das várias zonas de referência, representativos do PIB, efectuou-se um estudo envolvendo o modelo estrutural (2.5), as igualdades (2.8) a (2.10) e a respectiva representação em espaço de estados (2.11) e (2.12).

A técnica de inicialização utilizada pelo filtro de Kalman foi a da inicialização difusa e os valores de máxima verosimilhança para os parâmetros do modelo, obtidos entre os três métodos, o método Newton-Raphson, o método BFGS e o método Nelder-Mead, podem ser observados no Quadro 4.31⁶⁸ e, de forma resumida, no Quadro 4.32, onde se apresenta os valores de máxima verosimilhança para as várias economias em estudo.

Quadro 4.31: Valores de máxima verosimilhança – PIB de Portugal (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	146,79	146,85	146,82
2	146,85	146,85	146,85
3	146,82	146,85	146,82
4	146,82	146,73	146,85
5	146,38	146,85	146,82
6	146,59	146,82	146,85
7	146,37	146,64	146,73
8	146,47	146,22	146,73
9	146,38	121,30	VNV
10	146,22	VNV	VNV

Quadro 4.32: Valores de máxima verosimilhança – (d=11).

	Alemanha	Zona Euro	Espanha	EUA	Japão	Portugal	Reino Unido
MV	159,98	182,55	191,17	160,50	145,59	146,85	187,61

⁶⁸ Os quadros para a Alemanha, Zona Euro, Espanha, EUA, Japão e Reino Unido, poderão ser consultados em apêndice, Apêndice V.

4.4.2 Análise do PIB das várias economias relativamente à Portuguesa

O Quadro 4.33 expõe um conjunto de resultados síntese com base em medidas estatísticas, já anteriormente analisadas, que equacionam e analisam as características dos ciclos económicos utilizando, para o cálculo da componente cíclica, o filtro de Kalman aplicado desta feita aos dados trimestrais do PIB de várias zonas em análise de 1995-1T a 2007-4T.

Quadro 4.33: Estatísticas do ciclo do PIB de várias zonas de referência

	Alemanha	Zona Euro	Espanha	EUA	Japão	Portugal	Reino Unido
Correlação (Pearson)	0,68	0,79	0,49	0,79	-0,58		0,84
Avanço (+) Atraso (-)	0	0	0	-1	4		0
Sincronia (%)	47,07	52,94	45,10	50,98	52,94		50,98
Desvio padrão	0,56	0,55	0,51	0,53	0,50	0,66	0,55
Rácio do desvio padrão com PIB	0,85	0,83	0,78	0,80	0,76	1,00	0,84
Autocorrelação $x(t) - x(t - 1)$	0,96	0,97	0,92	0,95	0,92	0,96	0,95
Autocorrelação $x(t) - x(t - 2)$	0,86	0,89	0,73	0,87	0,78	0,90	0,83
Autocorrelação $x(t) - x(t - 3)$	0,71	0,78	0,51	0,75	0,62	0,83	0,68

Verifica-se no Quadro 4.33 que existe uma aparente correlação moderada/alta contemporânea, entre Portugal e os países da União Europeia, bem como com a Zona Euro. Sobre a correlação entre Portugal e os EUA, constata-se que esta é alta sendo que os EUA antecipam em média o ciclo português em um trimestre. Este facto, pode proporcionar um valioso instrumento de carácter previsional, ou seja, oferecer-nos, pela análise actual da fase cíclica dos EUA, indicações sobre a fase cíclica seguinte da economia portuguesa. No caso do Japão parece existir uma relação em direcção oposta e bastante desfasada, cerca de um ano em média, com o ciclo do PIB português.

A sincronia, períodos comuns de subidas e descidas nos valores das variáveis cíclicas, mostra-nos que a maior sincronia acontece entre Portugal e a Zona Euro⁶⁹, 52,94%, seguido de perto pelas outras variáveis. Este item mostra também uma certa uniformidade nos seus valores, sendo o valor mínimo de 45,10%. Assim sendo, os valores desde mínimo ao máximo, encontram-se num intervalo de variação de 8% de sincronia.

Os valores do desvio padrão mostram que a variável mais volátil em estudo é a portuguesa, 0,66, pelo que o impacto de um choque na economia Portuguesa terá eventualmente efeitos superiores aos das outras variáveis em estudo.

O rácio entre o desvio padrão da componente cíclica de uma determinada economia e a de Portugal, indica que a flutuação na variável cíclica é mais larga ou mais estreita do que em Portugal. Podemos confirmar no Quadro 4.33 que todas as economias têm valores de flutuação inferiores à Portuguesa, entre os 76% e 85%.

A autocorrelação, nas várias zonas, sugere um grau de persistência elevado em todas elas e os valores apresentados fornecem também a indicação da capacidade autónoma das economias.

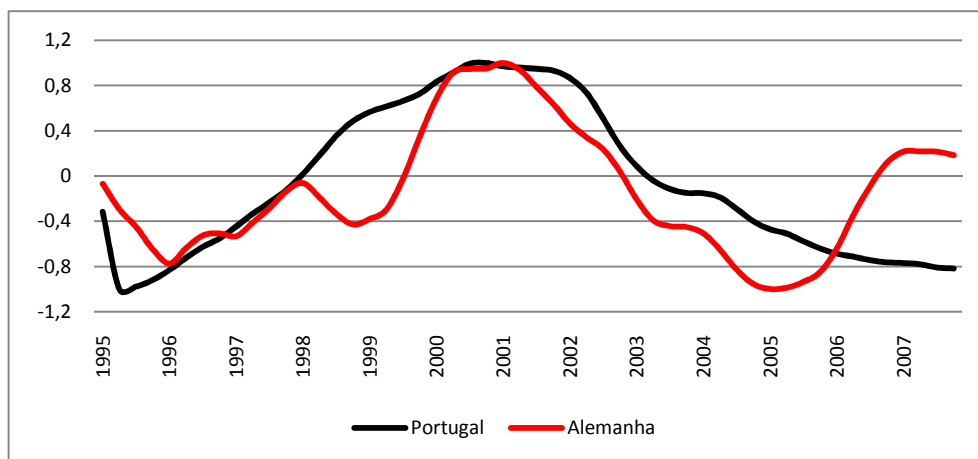
Factos históricos entre economias (por exemplo, EUA e Reino Unido), proximidade geográfica (por exemplo, Portugal e Espanha), assim como efeitos associados à integração na Zona Euro de algumas economias em estudo e a dimensão das economias individuais, entre outros, serão factores importantes a avaliar e a equacionar, tendo em mente a investigação das várias influências cíclicas nas diferentes zonas económicas.

Utilizando unicamente valores médios de síntese, como os obtidos no Quadro 4.33, constata-se que em certas circunstâncias estes podem mostrar-se menos úteis do que a informação imediata e contemporânea sobre as actuais relações económicas existentes nos países. Assim sendo, parece-nos útil avaliar a evolução temporal conjunta das variáveis.

⁶⁹ Não se refere o Japão pelo facto da correlação ser de direcção oposta.

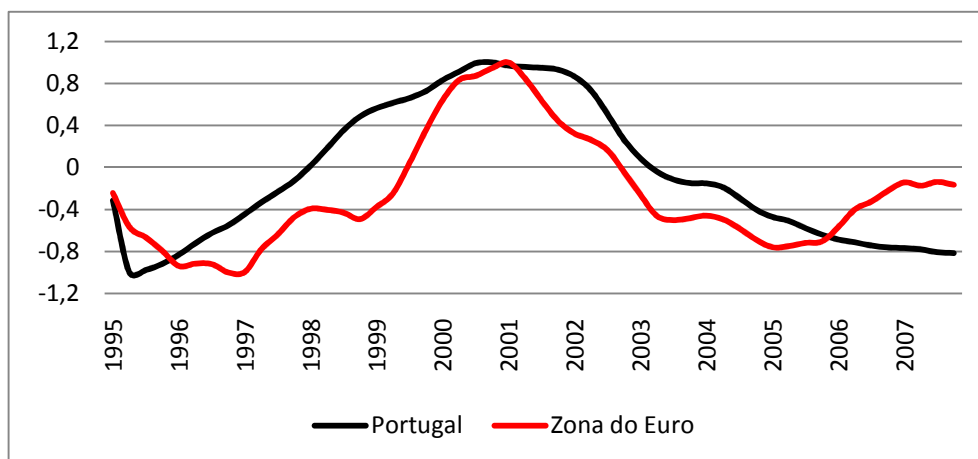
Observe-se então o Gráfico 4.84, representando a evolução cíclica da Alemanha e de Portugal. Como podemos verificar, existe sincronização cíclica no período temporal da amostra, sendo talvez de realçar o facto de ao contrário da economia alemã a economia portuguesa não ter registado um período de crescimento de 2005 a 2007.

Gráfico 4.84: Evolução cíclica da Alemanha e Portugal



O Gráfico 4.85 apresenta a evolução cíclica da Zona Euro e de Portugal.

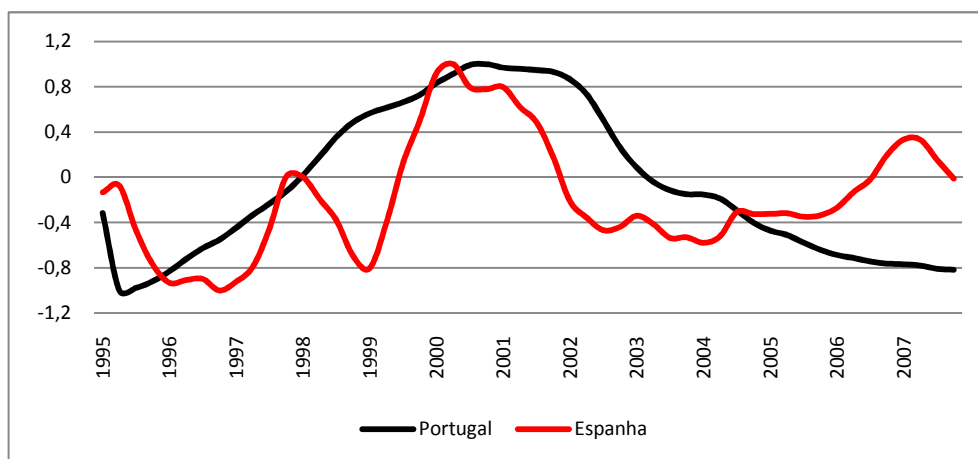
Gráfico 4.85: Evolução cíclica da Zona Euro e Portugal



No período em estudo, a evolução económica da Zona Euro é similar à da Alemanha. Assim as conclusões a recolher sobre a relação existente entre a evolução económica de Portugal e da Zona Euro, Gráfico 4.85, são similares às de Portugal e da Alemanha, Gráfico 4.84.

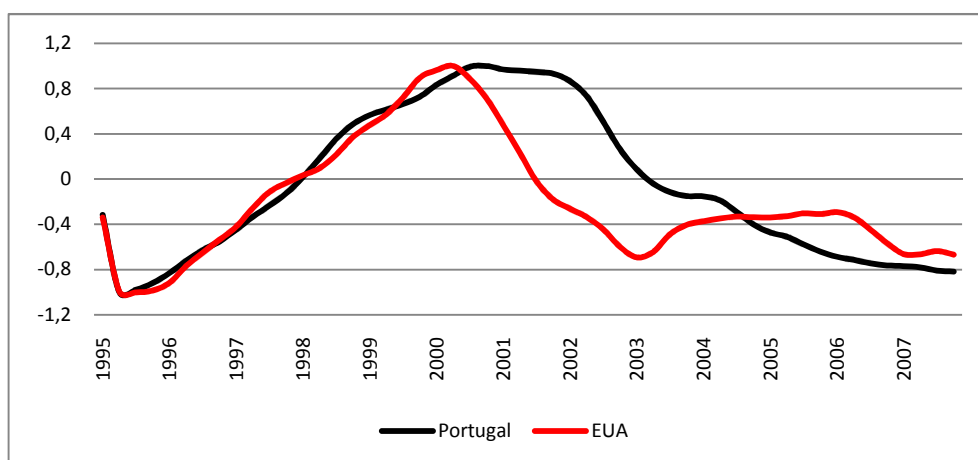
Observe-se agora o Gráfico 4.86, representando a evolução cíclica da Espanha e de Portugal.

Gráfico 4.86: Evolução cíclica da Espanha e Portugal



A vizinhança destes dois países, as dimensões e relações das respectivas economias dar-nos-iam talvez a ideia de uma forte coincidência cíclica e alguma sincronização. Contudo verifica-se que existem alguns períodos contemporâneos de movimentos contrários, os quais reflectem genericamente a antecipação do movimento cíclico espanhol em relação ao português e a sincronia da economia espanhola em relação à da Zona Euro, nomeadamente depois de 2005.

Gráfico 4.87: Evolução cíclica da EUA e Portugal

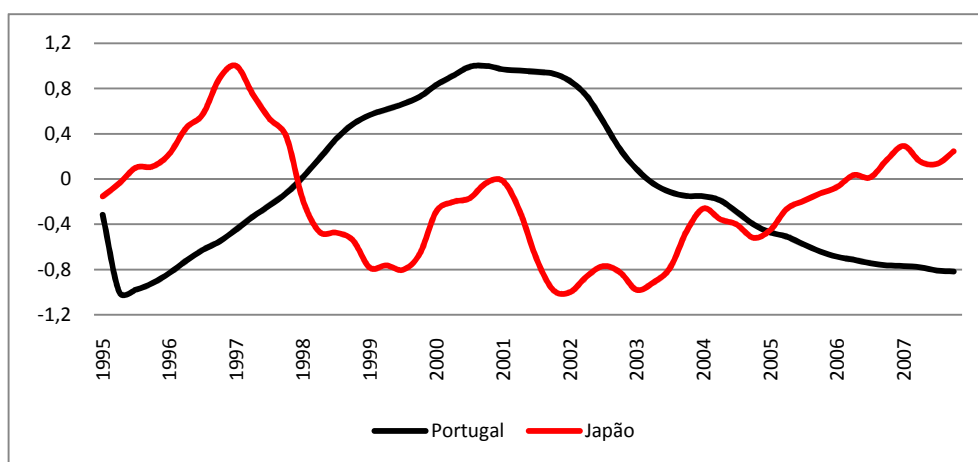


O gráfico anterior, Gráfico 4.87, representa a evolução cíclica dos EUA e de Portugal. Ressalta-nos à vista uma sincronia quase perfeita até 2000 e uma

antecipação de valores na fase posterior até 2005. Depois desta data a economia dos EUA parece antecipar ligeiramente a da Zona Euro e por conseguinte todas as que têm um comportamento similar ao de esta última.

Observe-se o Gráfico 4.88, representando a evolução cíclica do Japão e de Portugal.

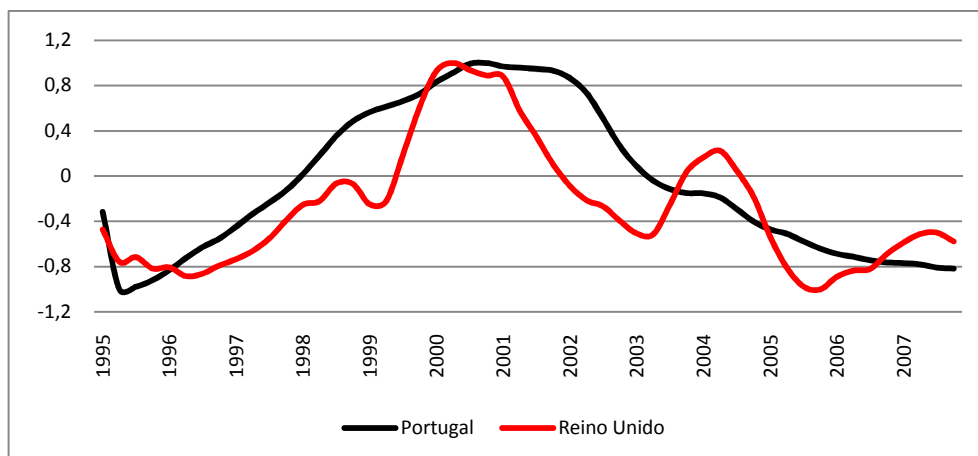
Gráfico 4.88: Evolução cíclica do Japão e Portugal



A economia asiática mostra, em termos de evolução cíclica uma fraca afinidade, incluindo fases não síncronas de crescimento/decrescimento, com a economia portuguesa.

Por último, o Gráfico 4.89, representando a evolução cíclica do Reino Unido e de Portugal, sugere alguma afinidade cíclica das duas economias, conforme já se tinha constatado com as outras economias da Zona Euro. Contudo parece mais uma vez existir uma maior similitude entre a economia do Reino Unido e da Zona Euro do que do em relação a Portugal.

Gráfico 4.89: Evolução cíclica do Reino Unido e Portugal



Os factos observados sugerem uma certa uniformidade entre as várias economias dos países da Zona Euro estudados e onde Portugal se realça por ser entre estas economias aquela que, naturalmente pelas suas características específicas, possui um comportamento mais dessíncrono.

4.4.3 Análise do PIB das várias economias relativamente à Zona Euro

Tendo em consideração a disposição geográfica e a sua dimensão económica, optou-se também por desenhar e averiguar as coincidências cíclicas entre os EUA e o Japão com a Zona Euro. Assim sendo construiu-se o Quadro 4.34 e os Gráficos 4.90 e 4.91.

Quadro 4.34: Estatísticas do ciclo do PIB da Zona Euro e de várias zonas de referência

	Zona Euro	EUA	Japão
Correlação (Pearson)		0,64	-0,39
Avanço (+) Atraso (-)		-3	-12
Sincronia (%)		50,98	52,94
Desvio padrão	0,55	0,53	0,50
Rácio do desvio padrão com Zona Euro	1,00	0,96	0,90

Gráfico 4.90: Evolução cíclica da Zona Euro e EUA

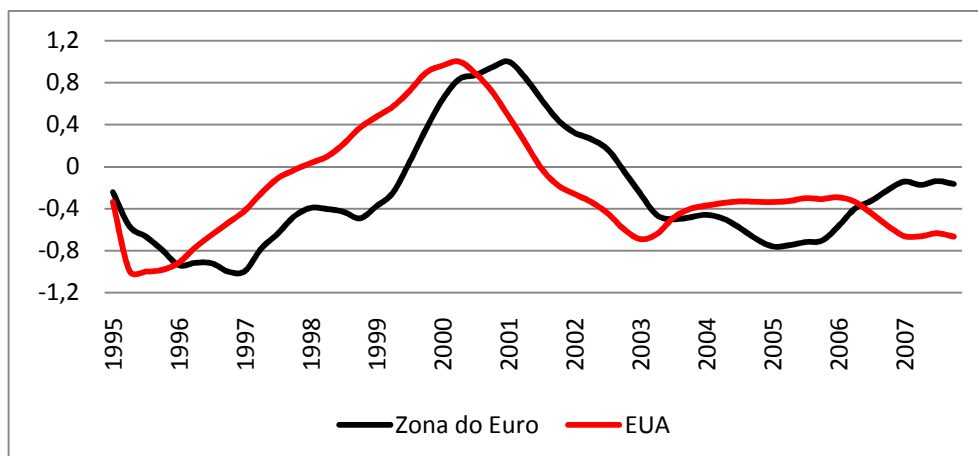
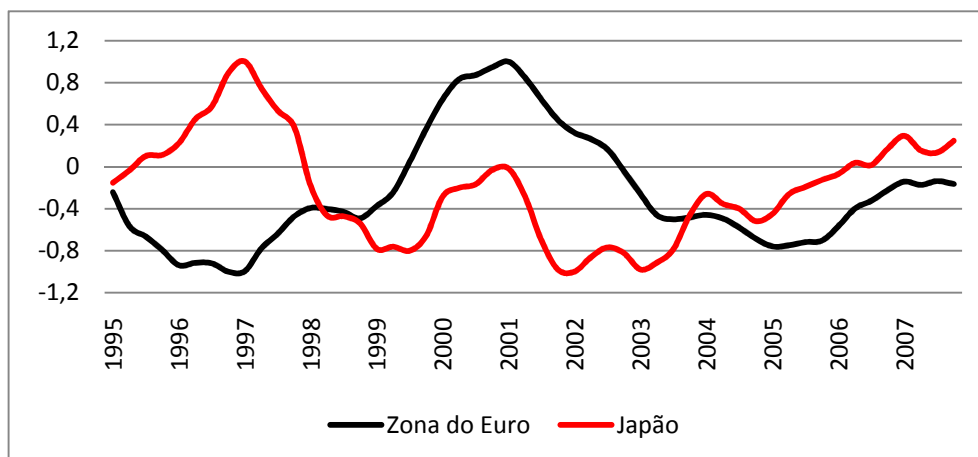


Gráfico 4.91: Evolução cíclica da Zona Euro e Japão



O Quadro 4.34 apresenta uma correlação moderada/alta entre a Zona Euro e os EUA, onde se realça o facto do ciclo dos EUA antecipar em média o fenómeno cíclico da Zona Euro em 3 trimestres. Por outro lado, observa-se a fraca influência da economia japonesa na da Zona Euro e vice-versa. A volatilidade das variáveis é muito similar sendo a da Zona Euro ligeiramente mais volátil.

Dadas as similitudes existentes entre a evolução cíclica portuguesa e a Zona Euro, como seria de esperar, as conclusões a verificar são, neste sentido, extrapoladas às referidas aquando da análise de Portugal com o ciclo dos EUA e do Japão.

Observando o Gráfico 4.90, podíamos ser conduzidos a dizer que o ciclo dos EUA e da Zona Euro, mostram afinidade. Por outro lado se nos concentrarmos

unicamente nas fases ascendentes e descendentes das duas realidades, podemos considerar existir antecipação cíclica por parte dos EUA.

É também de realçar, segundo o Gráfico 4.90 e as características de antecipação da economia dos EUA, que no ano de 2006, enquanto a economia da Zona Euro crescia a economia dos EUA decrescia e simultaneamente previa um decrescimento no futuro próximo na economia da Zona Euro. A economia, representada pela evolução cíclica do PIB do Japão, observada no Gráfico 4.91, mostra algumas dessincronias com a economia da Zona Euro. Contudo, a partir dos finais de 2003, parece que estas economias tendem a acompanhar-se nos movimentos de subida e descida do ciclo.

4.4.4 Análise do PIB das várias economias relativamente à dos EUA

Tendo em consideração a importância da economia dos EUA para a economia global à escala planetária, optou-se por verificar o grau de similitude cíclica com os outros países em estudo, nomeadamente Alemanha, Espanha, Japão e Reino Unido.

Como se verificou na comparação do ciclo dos EUA, de Portugal e da Zona Euro, tendo em atenção as semelhanças/diferenças existentes, certamente poderíamos tecer algumas considerações. Contudo entendemos tentar confirmar o referido anteriormente e também, dadas as afinidades da relação económica/histórica existente entre os países, por exemplo, EUA e Reino Unido, verificar directamente as suas similitudes ou dissimilitudes cíclicas.

O Quadro 4.35 apresenta uma correlação moderada/alta entre EUA e a Alemanha, Espanha e Reino Unido, onde se pode constatar que o ciclo dos EUA antecipa em média o fenómeno cíclico em 3 trimestres, 2 trimestres e 1 trimestre, respectivamente. Os valores da correlação, atraso/avanço e sincronia, parecem reflectir a maior influência económica dos EUA com o Reino Unido, seguido de Espanha e por último com a Alemanha. Em termos médios existe uma fraca influência da economia dos EUA na economia do Japão. A volatilidade das variáveis é muito similar sendo a da Alemanha e Reino Unido, ligeiramente mais voláteis.

Quadro 4.35: Estatísticas do ciclo do PIB dos EUA e de várias zonas de referência

	Alemanha	Espanha	EUA	Japão	Reino Unido
Correlação (Pearson)	0,52	0,58		-0,28	0,79
Avanço (+) Atraso (-)	3	2		-12	1
Sincronia (%)	47,06	45,10		52,94	50,98
Desvio padrão	0,56	0,51	0,53	0,50	0,55
Rácio do desvio padrão com EUA	1,06	0,96	1,00	0,94	1,04

Gráfico 4.92: Evolução cíclica dos EUA e Alemanha

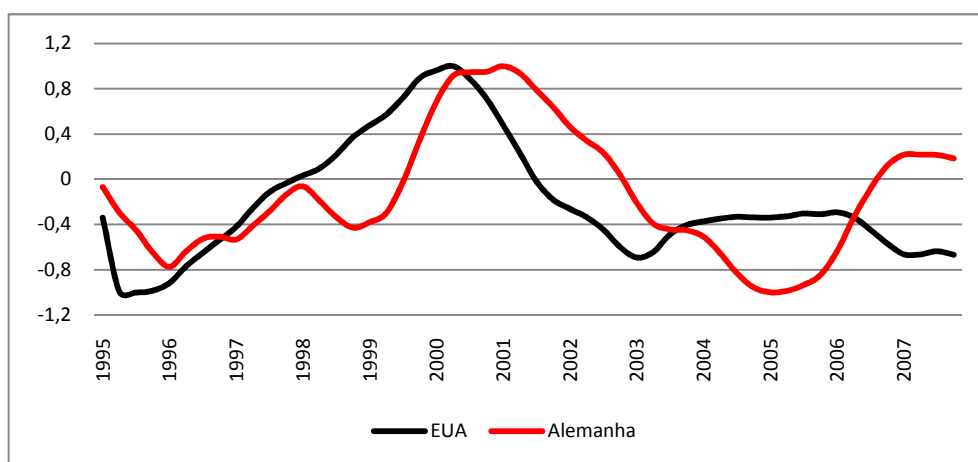


Gráfico 4.93: Evolução cíclica dos EUA e Espanha

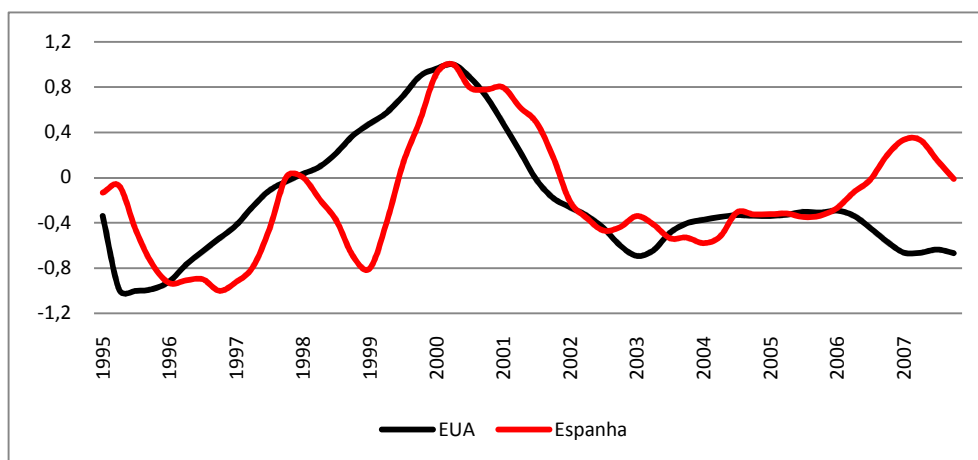


Gráfico 4.94: Evolução cíclica dos EUA e Japão

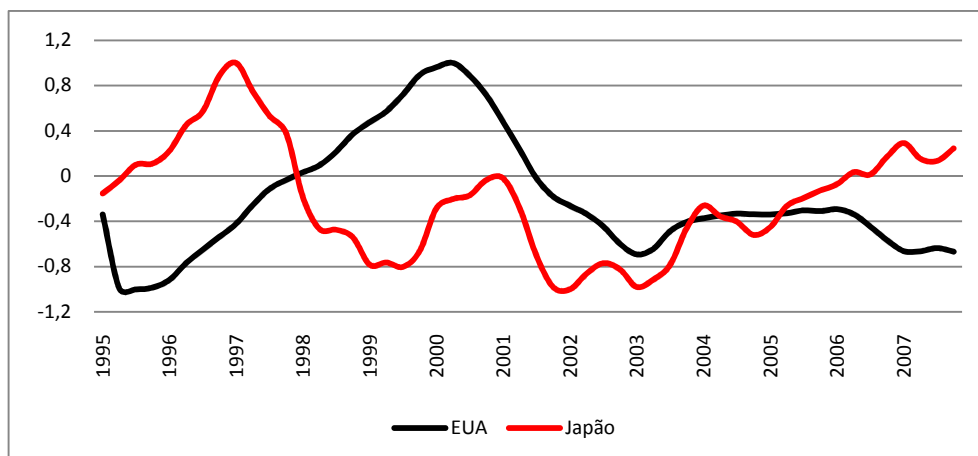
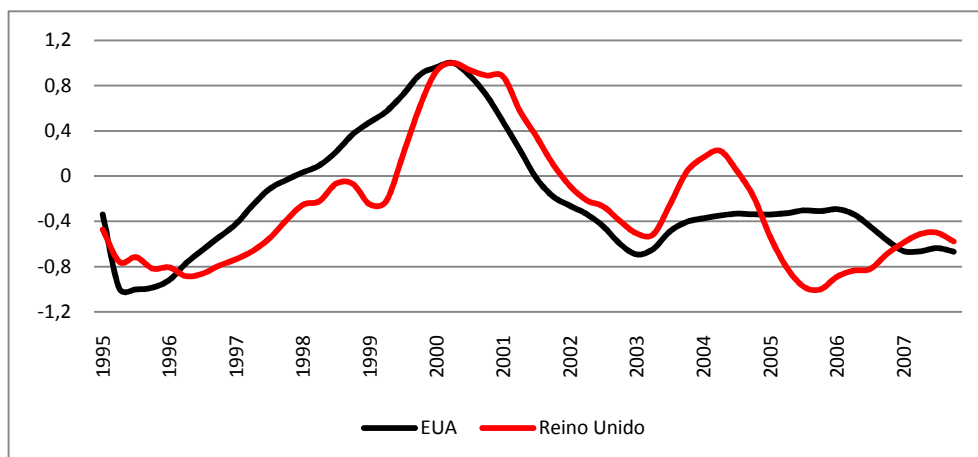


Gráfico 4.95: Evolução cíclica dos EUA e Reino Unido



Observando os Gráficos 4.92 a 4.95 verificamos, de forma muito genérica, a confirmação do que havia sido concluído pelos estudos cíclicos anteriores. Realça-se a capacidade antecipativa do ciclo dos EUA em relação aos países em análise, a sua grande sincronia com a Alemanha, Espanha e Reino Unido até 2005 e as não sincronizações posteriores.

O Gráfico 4.94 mostra-nos que a partir de 2006 o decrescimento do ciclo dos EUA foi acompanhado por um crescimento do ciclo do Japão. Nos finais de 2007 o ciclo dos EUA parece iniciar um processo de descida que é acompanhado pela Alemanha, Espanha e Reino Unido.

O Filtro de Kalman e a sua capacidade extractiva, nomeadamente da componente cíclica, parece ser útil para se comparar as características principais do ciclo do PIB português com o ciclo de várias zonas de referência.

Os gráficos examinados mostraram bastante coerência com o facto da relação existente entre as economias, escolhidas para análise, mostrarem uma forte interligação ao desenvolvimento e condicionamento do movimento cíclico português.

Portugal, sendo uma economia aberta, pequena, periférica e inserida num espaço muito maior, a Zona Euro, tem os resultados da sua actividade económica muito dependentes dos resultados económicos dos restantes países pertencentes à moeda única. Por outro lado, parece que não existe uma alta sincronização em relação ao país vizinho de Portugal, a Espanha, ao contrário do que se verifica em relação, por exemplo à Alemanha ou à Zona Euro.

A antecipação cíclica dos EUA, bem como a não sincronização com a evolução cíclica do Japão, são igualmente factores de realce para investigações destas temáticas que tentamos apreender e melhor compreender.

A justificação mais aprofundada de todos estes comportamentos e interligações, passaria certamente por uma outra investigação das razões e implicações, individuais e colectivas, que originaram as oscilações cíclicas ao longo da história económica de cada uma das economias em análise e eventualmente até da introdução no estudo de outras economias que contribuíssem para melhor compreender este fenómeno complexo e extremamente relevante à vida dos países e das regiões onde estes estão inseridos.

4.5 Estudo de previsão, o filtro de Kalman e os modelos ARIMA

Este estudo tem como objectivo analisar a qualidade dos resultados obtidos no processo de previsão, pelo filtro de Kalman e pelas previsões de alguns modelos de referência. Empregando a formulação de previsão proposta pelo filtro de Kalman, o modelo estrutural (2.5), as igualdades (2.8) a (2.10) e a respectiva representação em espaço de estados (2.11) e (2.12), efectuou-se a previsão para 6 trimestres das várias

séries em análise. Simultaneamente efectuou-se também a previsão utilizando alguns modelos ARIMA, mais concretamente, AR(1), AR(4), ARMA(1,1) e ARMA(2,2), para o mesmo período temporal.

A nossa opção pelos métodos ARIMA centrou-se no facto de estes serem bastante utilizados na literatura para se efectuar previsões com séries temporais. Decidiu-se assim eleger estes métodos como sendo adequados ao confronto com o método de previsão sugerido pelo filtro de Kalman.

O facto de se utilizar o filtro de Kalman e as suas capacidades recursivas para se efectuar a recolha dos valores da actualidade e incorporá-los nos cálculos do modelo, produzindo-se novas estimativas e actualizando e corrigindo de forma dinâmica os respectivos erros de previsão, permite evitar que a estimação mais recente dos coeficientes esteja demasiado afectada pela história mais longínqua da série temporal, a qual em presença de mudanças estruturais, como já foi anteriormente referido, pode enviesar muito os valores calculados. Nestes casos é possível ainda manipular modelos de dimensão elevada sem um incremento desproporcionado das tarefas computacionais.

Num modelo estrutural de séries temporais, como o modelo (2.5), cada um dos componentes relevantes da série, tendência temporal, ciclo e erro é formulado explicitamente e, portanto, é possível obter informação específica sobre eles. Como refere Harvey (1985), um modelo estrutural não tem por objecto reproduzir o processo gerador de dados, mas sim obter as características presentes na série temporal e nos seus termos componentes.

A metodologia ARIMA constitui uma espécie de caixa negra em que o modelo adoptado depende unicamente dos dados, sem análise *à priori* da estrutura do sistema que o gerou. Os modelos estruturais são, desde este ponto de vista, mais transparentes, já que permitem comprovar se o comportamento previsto pelo modelo e para cada componente da série corresponde ao esperado. O estudo das componentes individuais, tendência temporal, ciclo e erro, pode ter interesse em si mesmo e assim não nos limitamos unicamente a efectuar a previsão dos valores da série.

Os dados utilizados neste estudo são as séries fornecidas pelo Banco de Portugal do Consumo Privado (de residentes), Consumo Público, Emprego Total, Exportações de Bens e Serviços, Formação Bruta em Capital Fixo, Importações de Bens e Serviços, PIB e Taxa de Desemprego, já utilizadas nesta investigação, no período de 1978-1T a 2006-2T. Com elas efectuou-se a previsão para o período, compreendido entre 2006-3T e 2007-4T. A técnica de inicialização do filtro é o da inicialização difusa e os valores de máxima verosimilhança são os que foram obtidos, quando se analisou estas séries, com os métodos, método Newton-Raphson, método BFGS e método Nelder-Mead.

Como os vários dados das séries, entre 2006-3T e 2007-4T, eram conhecidos⁷⁰, efectuou-se de seguida o cálculo da Raiz do Erro Quadrado Médio da previsão *ex-post*, para os vários modelos, com os valores reais das respectivas séries, em cada trimestre de previsão, de acordo com a seguinte expressão:

$$REQM = \sqrt{\sum \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}} \quad \text{com } i = 1, \dots, n$$

em que y representa o vector dos valores da série, \hat{y} representa o vector dos valores produzidos pelo modelo e o n é o número de períodos de previsão, neste caso 6.

Concluiu-se depois de analisados os resultados que embora se verifique, em algumas situações, melhores previsões com o filtro de Kalman em relação aos modelos ARIMA testados, a maior eficiência do filtro de Kalman parece ser quando este é utilizado na previsão um período à frente.

4.5.1 Insuficiências dos modelos ARIMA

Na literatura econométrica incluem-se com relevo os chamados modelos Box-Jenkins (Box, Jenkins e Reinsel, 1994), que homenageiam desta forma os investigadores ingleses George Box e Gwilym Jenkins. Estes modelos são denominados

⁷⁰ Recorde-se que os dados, fornecidos pelo Banco de Portugal, referem-se à evolução trimestral de 1978-1T a 2007-4T.

também de ARIMA, referindo-se neste caso, ao facto de poderem possuir termos autorregressivos.

A relevância dada à estimação destes modelos reside na sua natureza extrapolativa ou previsional e no facto de nos modelos ARIMA as extrapolações efectuadas não acumularem os erros de outras variáveis explicativas. Quando se faz uma previsão com um modelo, do tipo,

$$z = f(x, y)$$

estimam-se valores futuros de x e y , no intuito de prever o valor de z , o que faz com que a previsão, em cada momento, acumule os erros associados às variáveis de x e y . Contudo, no caso dos modelos ARIMA, de tipo,

$$y_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}, e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-n}),$$

este facto já não ocorre, ou seja, a variável endógena num determinado período de tempo t , é explicada pelas suas próprias observações em períodos de tempo anteriores, somando-se, como normalmente acontece nos modelos estruturais, um termo de erro. A sua grande vantagem radica no facto de não necessitar de distintas séries de dados (distintas variáveis) e o grande inconveniente é o de se estar a renunciar à inclusão de um conjunto mais amplo de variáveis explicativas, perdendo-se desta forma as relações que existem entre diferentes variáveis económicas.

Apesar da sua reconhecida utilidade, a modelação utilizando modelos da classe ARIMA e suas extensões aos modelos sazonais SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average), não se tem contudo mostrado suficiente para estudar e compreender todas as situações. Por exemplo, os modelos ARIMA mostram-se insuficientes para lidar com os problemas de controlo, devido essencialmente ao facto de trabalharem com base em amostras de dimensão fixa (Murteira, Muller e Turkman, 1993).

Nos modelos ARIMA os parâmetros são estimados a partir do conjunto de dados observados, em vez das estimativas serem adaptadas recursivamente à medida que as novas observações vão sendo consumadas. Consequentemente, a teoria que se ocupa das sucessões cronológicas tem vindo a ser progressivamente ampliada e de forma cada vez mais eficiente, com técnicas de modelação capazes de tratar características específicas dos dados, onde assumem especial realce aquelas que incorporam a recursividade e a adaptabilidade no cálculo.

Por outro lado, numa abordagem recursiva com um modelo estrutural, representação em espaço de estados e filtro de Kalman, o método de previsão é bastante directo e as “observações perdidas” são mais fáceis de tratar do que na abordagem utilizando modelos ARIMA.

A incorporação de variáveis explicativas, efeitos de calendário e mudanças estruturais é também mais imediata na representação em espaço de estados, o que pode eventualmente associar uma mais-valia a este tipo de modelos.

4.5.2 Previsão com filtro de Kalman e modelos ARIMA

Construiu-se e analisou-se os Gráficos 4.96 a 4.103, representativos dos seis trimestres de previsão, bem como os respectivos gráficos representativos da Raiz do Erro Quadrado Médio, para o Emprego Total e PIB português, respectivamente⁷¹.

⁷¹ As restantes situações, envolvendo Consumo Privado (de residentes), Consumo Público, Exportações de Bens e Serviços, Formação Bruta em Capital Fixo, Importações de Bens e Serviços e Taxa de Desemprego, poderão ser consultados apêndice, Apêndice VI.

Gráfico 4.96: Emprego Total - Previsão Trimestral - AR

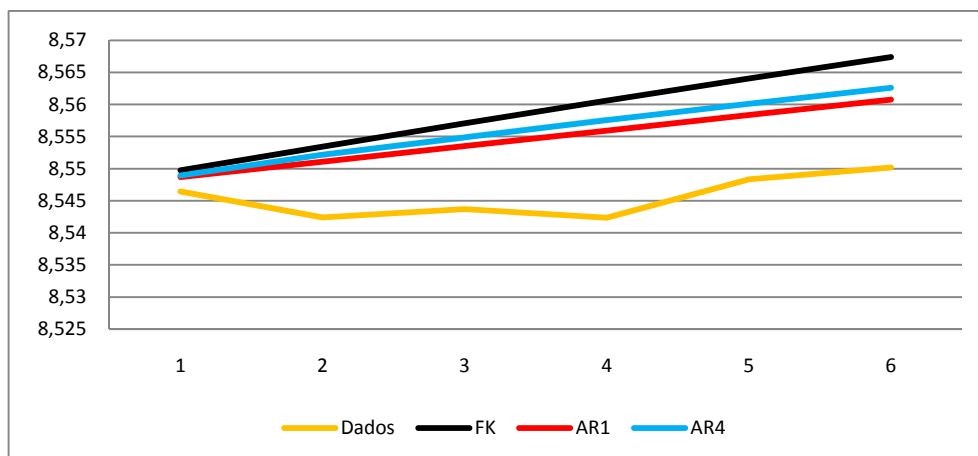


Gráfico 4.97: Emprego Total - Previsão Trimestral - ARMA

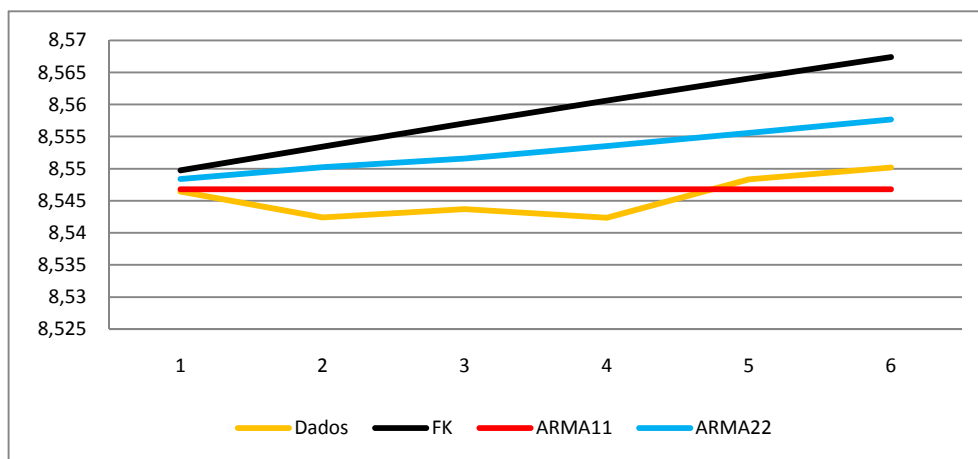


Gráfico 4.98: REQM para o Emprego Total - Previsão Trimestral - AR

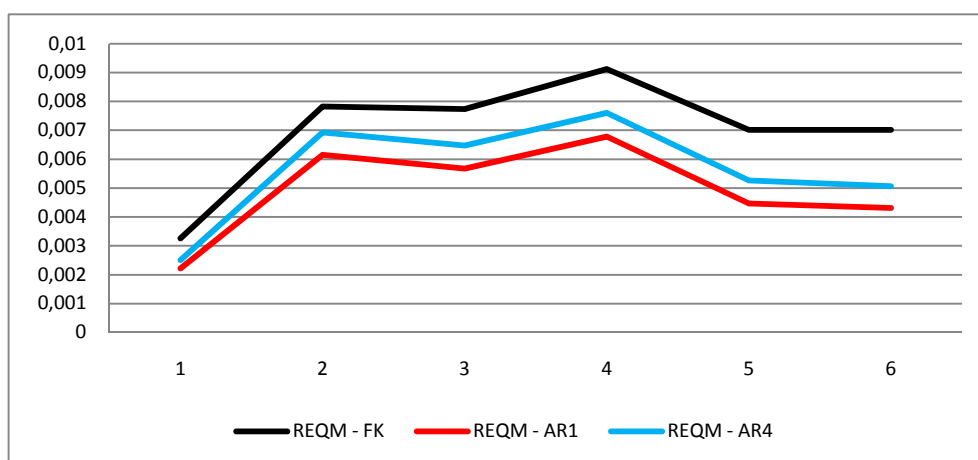


Gráfico 4.99: REQM para o Emprego Total - Previsão Trimestral - ARMA

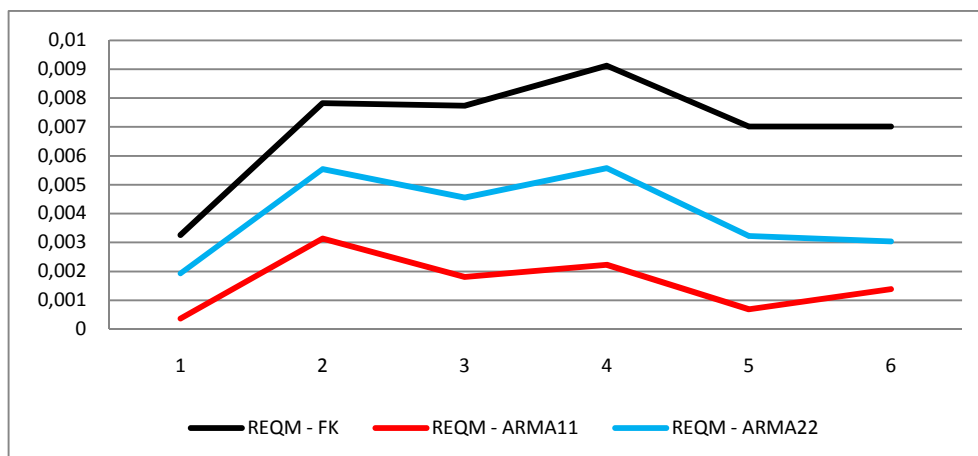


Gráfico 4.100: PIB - Previsão Trimestral - AR

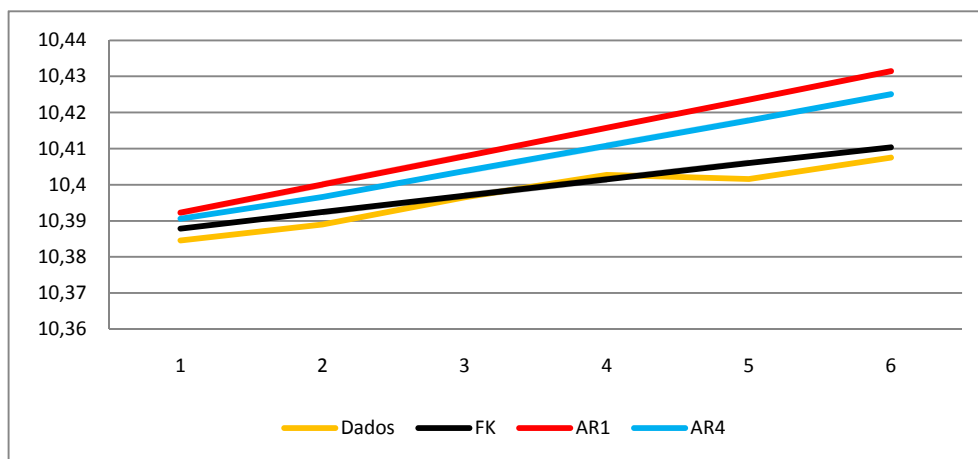


Gráfico 4.101: PIB - Previsão Trimestral - ARMA

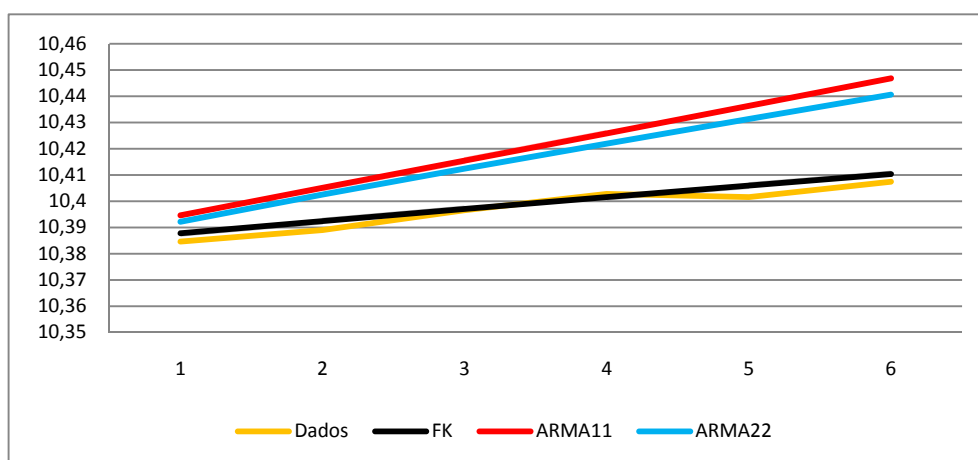


Gráfico 4.102: REQM para o PIB - Previsão Trimestral - AR

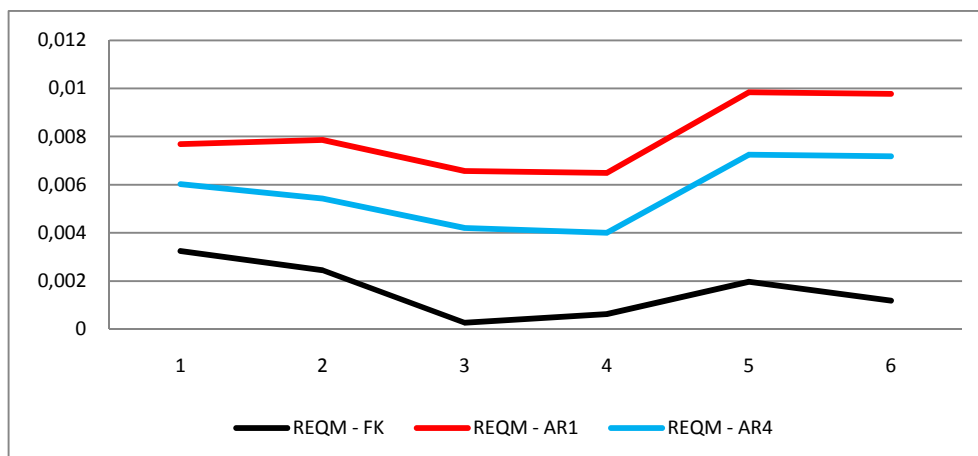
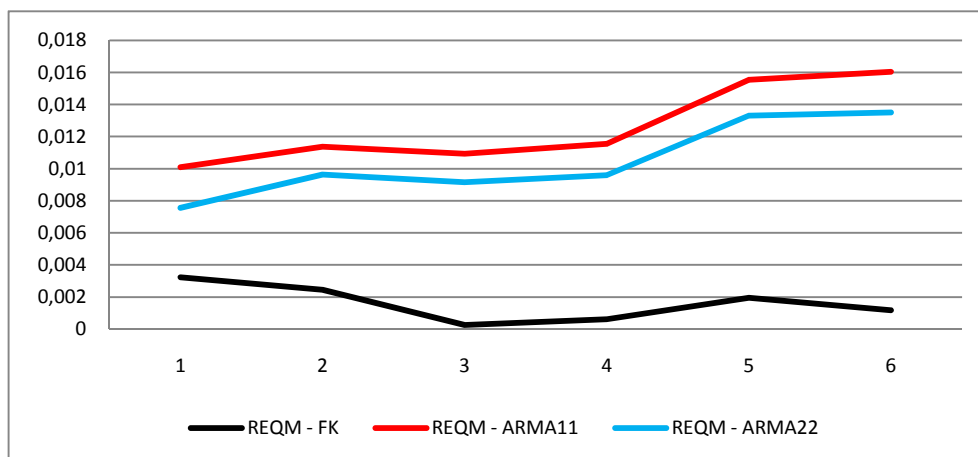


Gráfico 4.103: REQM para o PIB - Previsão Trimestral - ARMA



Os resultados obtidos sugerem que o filtro de Kalman parece fornecer melhores previsões relativamente às séries que apresentam uma evolução temporal mais próxima da tendência (linear). Nos casos em que existem maiores oscilações no período de previsão, os modelos ARIMA captam melhor essas variações e assim sendo fornecem melhores previsões, confirmadas quando se analisa os valores da Raiz do Erro Quadrado Médio.

Não devemos contudo ignorar que o método de previsão proposto por Kalman e aqui testado, para seis trimestres, nunca actualiza os valores da previsão e não utiliza também as suas capacidades de cálculo recursivas. Esta situação só acontece quando o filtro efectua previsões um período à frente e actualiza recursivamente essa mesma previsão quando é conhecido e incorporado no modelo o seu verdadeiro valor.

4.5.3 Previsão um período à frente com filtro de Kalman e modelos ARIMA

Para efectuar uma análise a curto prazo (um trimestre) e tentando verificar de forma muito restrita e resumidas as potencialidades do algoritmo recursivo do filtro de Kalman no processo de previsão um período à frente, em relação aos modelos ARIMA, construiu-se os Quadros 4.36, onde podemos observar, pela utilização da equação da Raiz do Erro Quadrado Médio (REQM), em que métodos se obtém o menor erro na previsão de 2006-3T⁷².

Quadro 4.36: Previsão de um período à frente - FK com AR(1), AR(4), ARMA(1,1) e ARMA(2,2)

Componentes portuguesas	Menor erro (REQM)
Consumo Privado (de residentes)	Filtro de Kalman
Consumo Público	Filtro de Kalman
Emprego Total	ARMA(1,1)
Exportações de Bens e Serviços	ARMA(1,1)
Formação Bruta em Capital Fixo	ARMA(2,2)
Importações de Bens e Serviços	Filtro de Kalman
PIB	Filtro de Kalman
Taxa de Desemprego	AR(1)

Além da vantagem já mencionada do filtro de Kalman que incorpora recursivamente no cálculo desta previsão as novas observações à medida que estas vão ficando disponíveis, tentando desta forma minimizar erros e actualizar valores, sem alterar a algoritmia computacional e sem necessidade de recalcular a previsão através de todos os dados da amostra, verificamos no caso em estudo que, o modelo AR(4) nunca forneceu a melhor previsão. Por outro lado, embora o filtro de Kalman seja o maioritário na minimização do erro, não nos mostra a evidência de este ser inequivocamente o melhor método de previsão para todas as situações.

Este facto estará certamente associado à variabilidade do valor real em relação ao seu valor anterior, ou seja, se ele progredir linearmente ou próximo disso, o filtro

⁷² Eventualmente com outro ano/trimestre os resultados seriam diferentes, aproveitou-se a previsão já efectuada anteriormente e escolheu-se para o cálculo REQM o dado do 3º Trimestre de 2006 e respectiva previsão para a mesma data.

de Kalman é mais eficaz. Caso este facto não aconteça, os modelos ARIMA testados poderão ser mais adequados. A hipótese elementar de qualquer técnica de previsão de séries temporais é que o valor observado na série fica determinado por um padrão que se repete no tempo e por alguma influência aleatória. Isto significa que mesmo quando o padrão exacto que caracteriza o comportamento da série temporal é isolado, algum desvio ainda existirá entre os valores da previsão e os valores realmente observados.

Essa aleatoriedade não pode ser prevista. Contudo, se isolada, a sua magnitude pode ser estimada e usada para determinar a variação ou erro entre as observações e previsões realizadas (Wheelwright e Makridakis, 1985 e Makridakis, Wheelwright e Hyndman, 1998). A forma pela qual o investigador constrói o modelo estrutural pode ser mais efectiva para se realizar a extracção da componente cíclica e menos efectiva como modelo de previsão. Pode-se assim testar vários tipos de modelos e construir as respectivas representações em espaço de estados⁷³, utilizando posteriormente o filtro de Kalman e com cada representação tentar melhorar os resultados obtidos no processo de previsão.

Com uma representação do modelo estrutural, eventualmente mais adequada ao método de previsão, que o modelo estrutural (2.5), Hafer, Hein e Kool (1985) compararam o filtro de Kalman e o modelo ARIMA e concluíram que na generalidade dos testes por eles efectuados, o filtro de Kalman produz melhores resultados. Harvey e Tood (1983) confrontaram também as previsões realizadas a partir de modelos ARIMA e de modelos estruturais e chegaram à conclusão que existem fortes indícios, de um ponto de vista prático, a favor de uma abordagem estrutural.

Cabrero, Camba-Méndez, Hirsch e Nieto (2002) também realizaram comparações preditivas em séries com estacionaridade e afirmaram que é necessário complementar as previsões ARIMA, melhores em alguns dos horizontes temporais, mas inábeis em certos movimentos periódicos. Os modelos ARIMA parecem prever razoavelmente bem a curto prazo, mas podem ser incapazes de gerar os comportamentos cíclicos que caracterizam algumas das séries económicas

⁷³ Os próprios modelos ARIMA admitem representação em espaço de estados (Harvey, 1989).

reais (Harvey e Jaeger, 1993 e Harvey, 1997).

Como referem Durbin e Koopman (2001), a principal desvantagem dos modelos estruturais em confronto com os modelos ARIMA radica no facto dos primeiros serem ensinados num reduzido número de universidades, existir escassa bibliografia no campo estatístico/econométrico e também uma grande dificuldade em encontrar software adequado e específico, o que como sabemos não ocorre em relação à metodologia de Box-Jenkins (Box, Jenkins e Reinsel, 1994).

O nosso quase completo desconhecimento do futuro é efectivamente uma das maiores dificuldades da previsão. Esta ignorância nunca nos dará a certeza da efectividade das nossas suposições e, associando este importante facto a um mundo em rápida e constante mudança, torna-se hoje difícil e cada vez mais complexo avaliar realidades futuras com base em comportamentos históricos, mesmo que muito próximos da actualidade. Todavia, os mecanismos de previsão aqui investigados e testados poderão ser úteis e constituir um elemento orientador para nos auxiliar em outros processos complementares e certamente importantes na geração e análise de cenários vindouros, indispensáveis na organização eficiente das economias e dos países.

5 Conclusão

Através deste estudo pretendemos aprofundar a investigação do ciclo económico português, examinando as potencialidades do filtro de Kalman, para a aquisição desse conhecimento e os contributos que poderia proporcionar, como instrumento de pesquisa, de um fenómeno algo complexo, mas do ponto de vista científico apaixonante.

A teoria de Kalman apresentada é sustentada por um conjunto de equações para actualizar recursivamente as estimativas de um processo desconhecido, combinando observações relacionadas com este processo e o conhecimento disponível sobre a sua evolução temporal.

Tais equações foram dadas a conhecer em 1960, pelo engenheiro húngaro-americano Rudolf Emil Kalman e estudadas com carácter aplicacional em 1969, no contexto do programa espacial norte-americano “Projecto Apolo”. Desde essa data, muito impulsionada pelas facilidades concedidas pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), a teoria de Kalman tem vindo a ser ampliada e estudada em muitas outras áreas e ramos do saber.

O algoritmo de Kalman foi traduzido, nesta investigação, por um conjunto de equações computacionalmente implementáveis e possui na sua fisionomia a vantagem de efectuar a previsão do instante $t - 1$ até o instante t e de, simultaneamente, actualizar essa previsão, sempre que a observação no instante t passa a ser do nosso conhecimento.

A solução para o problema de previsão segue a teoria da propagação da covariância em relação à média da variável, supondo que existe um conjunto de dados sobre o intervalo de tempo $0 < k \leq N$. O alisamento do estado é uma operação efectuada posteriormente à actualização e que envolve a estimação do estado x_k para

$0 < k \leq N$, usando todos os dados disponíveis, da série ou séries em estudo.

Os resultados numéricos sustentaram-se num conjunto de aplicações informáticas, desenvolvidas em exclusivo para esta investigação no software MATLAB, com o objectivo de simular cenários e implementar os respectivos modelos. Estas aplicações informáticas visam igualmente proporcionar um instrumento de utilidade para investigações futuras, as quais poderão ser utilizadas, adaptadas ou, eventualmente, complementar o software construído e nesta investigação já testado.

Pensamos ser importante deixar claro que foi nosso objectivo isolar do estudo outros factores, como por exemplo as causas e os efeitos do fenómeno cíclico na economia dos países, bem como as medidas contra-cíclicas que podem ser utilizadas nas variadas fases da fisionomia cíclica que, entre outras, apesar de não serem considerados nesta investigação, contribuem certamente para um mais aprofundado conhecimento do ciclo económico português.

As opções relativamente ao quadro teórico e metodológico desta investigação influíram na opção e construção do modelo matemático, na teoria escolhida e que o suporta, bem como nas manipulações matemáticas desenvolvidas. A nossa atenção centrou-se todavia, quase sempre, em desenvolver uma análise quantitativa de cariz comparativo e projectivo, com base no modelo matemático adoptado. Contudo, o desenvolvimento do estudo extravasou, por vezes, o enquadramento teórico desta pesquisa.

Consciente de que este estudo pode ser o início de um longo processo de pesquisa, análise, reflexão e reformulação, encaramos porém as linhas de investigação aqui descritas como um quadro de propostas e de referência inicial delineador, mas não limitador, do desenvolvimento científico que esta pesquisa se propôs realizar, ampliar e aprofundar.

5.1 Os resultados à luz dos objectivos do estudo

Ao iniciarmos este estudo, pretendemos conhecer melhor algumas das problemáticas que rodeiam o ciclo económico, centrando-nos no caso português. Em

virtude deste facto, optámos por perspectivar a análise do referido ciclo, segundo dados fornecidos pelo Banco de Portugal, INE e pela OCDE, porque estes são considerados elementos credíveis para estudos com estas características. Partindo deste pressuposto, e desenvolvendo esta pesquisa, tentámos conhecer e desencadear alguma reflexão a propósito do desenvolvimento teórico e/ou prático desta temática e que, de alguma forma, pudesse contribuir para melhor entender e quantificar este fenómeno.

Depois de enquadrado o tema e descrito o procedimento para a realização do estudo, a primeira opção de pesquisa, de cariz aplicacional, debruçou-se sobre os mecanismos de inicialização do filtro de Kalman e a forma de se extrair dos dados as várias componentes de interesse das séries em investigação, ou seja, o modelo representativo dos dados da série, a sua tendência temporal, a sua componente cíclica e o seu erro de previsão.

Desta abordagem realça-se o facto do filtro de Kalman adequar-se a mecanismos de inicialização que possibilitam, apesar do desconhecimento dos valores iniciais dos parâmetros do modelo e das condições iniciais de estado e variância na correspondente representação em espaço de estados, encontrar os valores numéricos que nos facultam, em cada uma das séries analisadas, a possibilidade de desencadear o processo de cálculo recursivo que o filtro de Kalman propõe.

Obtidos os valores iniciais, e também as componentes isoladas das variáveis em estudo que nos permitem identificar as suas principais características, efectuámos posteriormente a comparação dos resultados numéricos da componente cíclica das séries, obtidos pelo filtro de Kalman, com os resultados alcançados nas simulações efectuadas, com as mesmas séries, pelo filtro Hodrick-Prescott e pelo filtro Baxter-King. Desta análise comparativa, podemos verificar a existência de valores de correlação média contemporânea moderada/forte, valores de sincronia no intervalo de 70% a 85% e mostrar que os valores estimados para a componente tendência temporal e para a componente cíclica com o filtro de Kalman estavam em linha com os valores obtidos pelos outros dois métodos de extracção de sinal, filtro Hodrick-Prescott e pelo filtro Baxter-King.

Assim, extrapolámos que a estimação desenvolvida cumpria com os objectivos propostos inicialmente no estudo, ou seja, pensamos poder justificar-se uma abordagem quantitativa apurada do fenómeno cíclico, tendo como instrumento central de análise o filtro recursivo proposto por Kalman.

Simultaneamente, verificámos que o algoritmo de Kalman, computacionalmente criado nesta investigação, era credível e poderia constituir-se como um instrumento útil e também uma possível mais-valia para investigações futuras com estas características.

Confirmada a adequação do filtro de Kalman, bem como dos modelos estruturais e em espaço de estados representativos da realidade investigada, realizámos uma segunda opção de investigação onde expomos uma proposta de metodologia para a datação do ciclo económico português, concentrada em duas versões: uma assente na definição de ciclo clássico e outra na definição de ciclo de desvio.

Os vários indicadores, coincidente, adiantado e atrasado, foram definidos por um subconjunto das séries estudadas, agrupadas por afinidades, auferidas em medidas estatísticas de síntese, utilizando para tal as suas componentes cíclicas previamente isoladas, com o filtro de Kalman.

O mecanismo de datação do ciclo clássico utilizou a técnica proposta pelo TCB. Neste processo, a variável de referência, bem como os indicadores coincidente, adiantado e atrasado, foram também estruturados com base no filtro de Kalman. O mesmo filtro foi ainda utilizado para a transformação das variáveis trimestrais na sua correspondente periodicidade mensal.

No que se refere à datação do ciclo de desvio, utilizou-se um modelo linear composto pelas diferentes componentes dos indicadores cíclicos e transformou-se posteriormente este modelo na sua correspondente representação em espaço de estados.

Aproveitando o software construído nesta investigação, desenvolveu-se um estudo exploratório de datação do ciclo económico, centrado mais uma vez nas potencialidades oferecidas pelo filtro de Kalman como mecanismos de extracção de sinal, de extrapolação e de previsão.

Como técnica que identifica os diferentes períodos cíclicos, tanto para a datação do ciclo clássico como para o ciclo de desvio, foram testados dois métodos, a proposta de Bry e Boschan e a proposta de Harding e Pagan. Analisada a metodologia descrita, a algoritmia sugerida e os valores numéricos obtidos, pensamos que esta proposta de datação do ciclo económico português, possui condições e potencialidades para ser aprofundada e desenvolvida como cronologia de referência.

A terceira opção de estudo centrou-se na análise da evolução cíclica, utilizando o filtro de Kalman, das séries do PIB, representativas da economia Portuguesa e de várias economias de referência, nomeadamente a Zona Euro, a Alemanha, a Espanha, o Reino Unido, os EUA e o Japão, com o intuito de verificar o grau relativo de associação existente entre elas. Obtidos os resultados numéricos, este estudo veio a fundamentar um conjunto de ideias muito referenciadas na literatura em relação às cumplicidades cíclicas, existentes nas economias investigadas. A correlação média contemporânea é moderada/alta, entre Portugal e os países da Zona Euro e Reino Unido e o ciclo dos EUA antecipa em média o ciclo português e também o dos países da Zona Euro e o Reino Unido. Por outro lado, entre todas as economias analisadas, a economia portuguesa é a mais volátil, sugerindo que o impacto de um choque na economia portuguesa terá uma amplificação superior e eventualmente provocará maiores consequências para a economia do país.

Existe uma forte sincronização cíclica no período temporal da amostra, entre Portugal e a Zona do Euro, mas ao contrário das economias da Zona Euro, Alemanha, Espanha e do Reino Unido, a economia Portuguesa não registou um período de crescimento de 2005 a 2007. A economia Japonesa mostra uma fraca afinidade cíclica com a economia portuguesa incluindo fases não síncronas.

Verifica-se também a capacidade dos EUA em antecipar o ciclo dos países da Zona Euro, a sua grande sincronia com essas economias até 2005 e as não

sincronizações posteriores. Nos finais de 2007 o ciclo dos EUA parece iniciar um processo de descida que é acompanhado pela Alemanha, Espanha, Portugal e Reino Unido.

Finalmente, uma quarta abordagem, teve como objectivo central analisar a qualidade dos resultados de previsão obtidos pelo filtro de Kalman e pelos modelos *ARIMA*, mais especificamente os modelos *AR(1)*, *AR(4)*, *ARMA(1,1)* e *ARMA(2,2)*. Pelos valores encontrados na comparação dos resultados oferecidos pelos vários modelos, consideramos que o filtro de Kalman poderá intervir positivamente na elaboração e no estudo de cenários económicos futuros.

Embora se reconheça que o filtro de Kalman é maioritário na minimização da Raiz do Erro Quadrado Médio, não podemos concluir que este é o melhor método de previsão. Contudo, possuindo-se uma representação do modelo estrutural ajustada ao método de previsão, parecem existir alguns indícios, de um ponto de vista prático, a favor de uma abordagem estrutural em relação aos modelos *AR(1)*, *AR(4)*, *ARMA(1,1)* e *ARMA(2,2)*.

Depois de analisada em profundidade no seu todo, pensamos que esta investigação confirmou a utilidade do filtro de Kalman e a sua flexibilidade para operar em diferentes realidades, ou seja, como instrumento de modelação, produzindo séries filtradas, actualizadas e alisadas, como processo de extensão de séries com observações perdidas ou desconhecidas dentro do seu intervalo temporal de referência e como instrumento auxiliar de previsão.

5.2 Limitações e apontamentos críticos desta investigação

Este estudo tentou explorar os conteúdos numéricos representativos da variação temporal no fenómeno ciclo económico português, mas não se concentrou na teoria económica que o sustenta e nas consequências que este provoca no desenvolvimento económico do país. Após termos decidido investigar os conteúdos numéricos do ciclo económico, algumas das opções tomadas relativas aos dados disponíveis, vieram, desde logo, gerar limitações neste trabalho. Nomeadamente, a necessidade de conhecer um conjunto longo de séries que representasse fielmente a

economia portuguesa. Assim, a quantidade de séries em estudo nesta investigação poderá ter delimitado uma análise mais generalizada e eventualmente mais precisa da economia portuguesa.

A falta de uma datação de referência do ciclo português aceite como representativa da realidade portuguesa, que nos permita averiguar melhor a agregação dos nossos resultados à realidade da referência portuguesa, tal como um conjunto mais alargado de séries com periodicidade mensal, não nos permitiu ter uma ideia mais efectiva, completamente clara e totalmente segura da operacionalidade do método de datação aqui proposto, como candidato a objecto de referência no processo de datação do ciclo económico português.

Este facto reflectiu-se na necessidade de elaborar, numa primeira fase, a construção do modelo matemático, com base unicamente nas séries trimestrais disponíveis, condicionando desde logo o seu desenvolvimento, na medida em que nunca se pôde verificar a adequação do modelo e do método à realidade de referência. Assim fomos forçados, através da observação empírica da realidade, a considerar que o comportamento sugerido por esta investigação se assemelha formologicamente ao comportamento do ciclo económico português.

Um outro aspecto, algo crítico, que nos parece ser de realçar, decorre da dificuldade em obter mais estudos de características semelhantes às que aqui equacionamos e, por essa via, permitir conhecer melhor as realidades investigadas. Como este obstáculo nunca foi ultrapassado, veio a limitar sobremaneira toda a análise posterior, tendo obrigado a construir um conjunto de cenários para quantificar hipoteticamente as diferentes realidades.

Por outro lado, este estudo, não valorizou as especificidades das séries. Devido a esta limitação, optou-se por considerar as várias realidades e a sua influência no ciclo económico de forma indiferenciada, provocando provavelmente alguns desvios, nas abordagens quantitativas deste estudo. A agravar este problema, foram também ignoradas as particularidades de cada zona geográfica, considerando-se estas como sendo uniformes o que certamente, mesmo que representadas pelos dados normalizados do PIB, não será completamente rigoroso, devido, entre outros, aos

diferentes contextos económicos de cada país ou zona geográfica do globo.

Uma outra limitação de relevo, é o facto de computacionalmente ser necessário concentrar a pesquisa dos parâmetros iniciais do modelo a um conjunto não muito abrangente de testes. Em particular, referimo-nos à busca não linear de parâmetros óptimos, pelo método Newton-Raphson, pelo método BFGS e pelo método Nelder-Mead, com base na função de máxima verosimilhança difusa adoptada nesta investigação.

Sem esta limitação, teríamos um conjunto eventualmente infinito de combinações candidatas a solução óptima da função de máxima verosimilhança difusa. Não seria operacional computacionalmente executar esse conjunto de combinações de parâmetros em busca duma combinação de valores que nos fornecesse, caso existisse, a melhor solução.

Apesar destas dificuldades, inerentes aos modelos e ao conjunto de possíveis soluções candidatas, associadas ainda a alguma subjectividade nos valores iniciais seleccionados em cada modelo, puderem influenciar a qualidade final deste estudo, pensamos que as soluções aqui adoptadas mostraram-se aceitáveis aos nossos propósitos e objectivos iniciais da investigação.

Estamos convictos que, com esta pesquisa, abre-se uma nova, ainda que discutível, perspectiva para o estudo do ciclo económico português e desejamos fortemente que no futuro todos os que optarem por estudar este tema ultrapassem as principais dificuldades que este percurso nos impôs. Entre elas a dificuldade de conseguir informação estatística em quantidade e dimensão temporal adequadas, a falta de um ciclo económico de referência, amplamente aceite para Portugal, e um software que permita de forma expedita e confiável executar as todas as simulações informáticas com os dados estatísticos que se opte por utilizar.

5.3 Sugestões e propostas para o futuro da investigação

O ciclo económico é um fenómeno com um comportamento matemático algo incerto e com particularidades próprias muito abrangentes e complexas,

nomeadamente do ponto de vista das causas e dos efeitos na economia e na vida quotidiana das sociedades.

Tendo consciência deste facto e de que é necessário tomar medidas que atenuem os seus efeitos negativos, parece-nos fundamental que os decisores políticos tenham o conhecimento que lhes permita ter ideias claras e propostas bastante concretas para aperfeiçoar a sua actuação no presente e simultaneamente concretizar linhas de rumo e de governo para melhorar a vida futura dos países.

Para tal, seria de grande utilidade que as várias instituições públicas e privadas participassem e unissem esforços em torno de medidas que pudessem antecipar e precaver os efeitos cíclicos, tanto a nível económico como a nível social. Estas acções devem ter em conta as especificidades dos países e simultaneamente promover a melhoria da sua organização e da gestão dos seus mais variados recursos, de forma a poder-se aumentar os níveis de eficiência económica e potenciar a eficácia das medidas contra-cíclicas que possam vir a ser adoptadas.

A implementação de programas de acção ambiciosos, com o conhecimento mais exacto sobre a verdadeira realidade económica dos países, pode ser um factor importante, se não mesmo fundamental, para a melhoria do desempenho das economias, numa sociedade contemporânea onde existe ainda muitos problemas por resolver e desigualdades por minorar.

Nesta investigação sugere-se a necessidade de dispormos de uma referência cíclica portuguesa que, desenvolvida de forma adequada, poderá ser factor importante para o antecipar e para relançar atempadamente medidas assertivas e ajustar adequadamente objectivos para as diferentes situações que os países vão atravessando ao longo dos tempos. Esse conhecimento passa também, nesta era de globalização económica, pelo saber mais efectivo das cumplicidades cíclicas entre as economias que se interligam e desta forma se influenciam mutuamente.

Neste estudo pretendeu-se ainda desenvolver alguns instrumentos informáticos que podem ser valiosos a todos aqueles que partilhem das preocupações abordadas ao longo desta investigação e, simultaneamente, um instrumento útil para

o acompanhamento prático da evolução temporal das variáveis que cada modelo monitoriza.

Contudo, esta pesquisa não contemplou, no decorrer de sua evolução e desenvolvimento, alguns temas considerados como interessantes, dentro do âmbito dos assuntos aqui estudados. Com o intuito de incentivar os investigadores interessados, salientamos seguidamente alguns desses temas.

Sob uma perspectiva de se tentar resolver o problema da necessidade de imposição de restrições na procura dos parâmetros iniciais do modelo, representado em espaço de estados, pensamos ser interessante um estudo mais aprofundado do tema. Apesar da eficiência computacional, oferecida pelos métodos de busca não linear testados neste estudo, há eventuais problemas de identificação, não deduzidos matematicamente, observados na experiência prática desta pesquisa, os quais induzem a dificuldades em se obterem máximos globais da função de máxima verosimilhança difusa.

Como sendo candidatos potencialmente qualificados para a realização de estudos mais aprofundados ao tema, consideramos também a adopção de modelos matemáticos univariados e multivariados com diferentes estruturas, que pudessem envolver matrizes de sistema variáveis ao longo do tempo, com evolução temporal não linear nas suas variáveis, tentando desta forma, desenvolver e descobrir outras abordagens e diferentes visões úteis ao tema.

A análise e teste em outras formulações de modelos representativos dos dados e das suas correspondentes representações em espaço de estados, mais adequado ao processo de previsão, bem como a utilização do filtro de Kalman como instrumento complementar a outros métodos de previsão, poderia eventualmente ter diferenciado os resultados obtidos.

Pensamos convictamente que o modelo estrutural adoptado, com o objectivo de isolar as componentes de interesse das séries em estudo, não tem de ser forçosamente o mesmo modelo que tem como objectivo principal auxiliar o processo de previsão, como neste estudo acabámos por considerar e de certa forma descobrir.

Examinar um conjunto mais amplo de séries representativas e com periodicidade temporal mensal ou, na impossibilidade de séries temporais mensais, a utilização da sua correspondente trimestral, poderia ampliar o processo aqui examinado com carácter puramente metodológico.

Tendo como factor central a proposta de Kalman e a operacionalidade e versatilidade deste filtro é para nós manifesto que sendo o modelo de reprodução dos dados e a sua respectiva representação em espaço de estados, especificados adequadamente e tendo em nossa posse as aplicações informáticas adequadas, este filtro poderá certamente auxiliar a melhor caracterizar, comparar e apreender e, simultaneamente, aumentar o potencial da qualidade da análise e compreensão do ciclo económico, quer este seja abordado, ajustado à definição de “ciclo clássico”, quer seja abordado, conforme a definição de “ciclo de desvio”.

5.4 Considerações pessoais finais

Gostaria de referir como nota final, personalizando um pouco, que o facto de ter como formação de licenciatura, Engenharia Informática e mestrado em Ciências Económicas e Empresariais, influiu com a prática desenvolvida no trabalho, de um modo global, com as opções seguidas no seu desenvolvimento.

Assim sendo, a interpretação dos dados e as manipulações com o modelo poderá ter sido influenciada pela minha vivência académica anterior. Por outro lado, pode paralelamente ter-me facilitado a construção do modelo matemático e os algoritmos computacionais, pois estou familiarizado com os conceitos aí desenvolvidos.

Os resultados deste estudo estão condicionados pela minha vivência e pelas minhas representações dado que, enquanto aluno universitário, identifico-me com os conceitos matemáticos desenvolvidos e, enquanto mestre e doutorando, sinto afinidades com algumas das teorias económicas referidas neste estudo.

Por conseguinte, sinto que desenvolvemos uma abordagem quantitativa deste fenómeno conscientes do seu múltiplo carácter limitativo mas, por outro lado

também, impulsionado pelos seus aspectos inovadores, pela transversalidade que acredito útil ao saber académico, pela disponibilidade inextinguível dos meus orientadores, pela sua receptividade e incentivo, desde a primeira hora, em colaborar e me ajudar com entusiasmo neste percurso de investigação, pelo apoio da minha família e amigos e pela minha grande vontade de conhecer e quem sabe até, algo puder construir para melhorar e para contribuir positivamente em investigações futuras.

Esta investigação é pois o nosso contributo, com um conjunto de ideias e propostas, que não pretende esgotar nem as questões abordadas, nem a problemática global do ciclo económico. Pretende-se simplesmente proporcionar o conhecimento que se espera válido e enriquecido com estes pequenos contributos.

Anexo A

P1	$E(c X) = c, c \text{ constante}$
P2	$E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2)$
P3	$E(X) = E(E(X Y))$
P4	$E(XY) = E(X)E(Y)$ se X e Y são independentes
P5	$Var(A_1X_1 \pm A_2X_2) =$ $= A_1Var(X_1)A_1' + A_2Var(X_2)A_2' + 2A_1Cov(X_1, X_2)A_2'$
P6	$Var(AX + b) = AVar(X)A'$
P7	$Var(X Y) = E(X^2 Y) - (E(X Y))^2$
P8	$Var(AX) = Cov(AX, AX)$
P9	$Cov(X, Y) = \mathbf{0}$ se X e Y são independentes
P10	$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
P11	$Cov(AX + b, CY + d) = ACov(X, Y)C'$
P12	$Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

Nota: Para uma melhor compreensão destas propriedades estatísticas consultar, (Murteira, Ribeiro, Silva e Pimenta, 2002; Johnston e DiNardo, 2001; Reis, 2001; Murteira, 1990).

Anexo B

O procedimento computacional para se calcular o Índice composto, aqui adaptado, utilizando a metodologia proposta pelo TCB, é o seguinte (TCB, 2001):

- a) *Calculam-se as diferenças mensais das séries (y_{it}) que compõe o índice, utilizando a fórmula da diferença simétrica, com $i = 1, \dots, k$, onde k é o número de séries que fazem parte do índice,*

$$x_{it} = 200 \frac{(y_{it} - y_{it-1})}{(y_{it} + y_{it-1})} \text{ com } t = 1, \dots, n;$$

- b) *Calcule-se o desvio padrão (s_i) das diferenças mensais (x_{it});*
 c) *Calcule-se a seguinte igualdade, representando a taxa de crescimento do índice,*

$$C_t = \sum_{i=1}^k \beta_i x_{it} \text{ com } t = 1, \dots, n$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^k \frac{1}{s_i} \text{ e } \beta_i = \frac{1}{W};$$

- d) *Finalmente o Índice composto é calculado usando-se a fórmula das diferenças simétricas,*

$$I_t = I_{t-1} \frac{(200 + C_t)}{(200 - C_t)} \text{ com } t = 2, \dots, n,$$

para $t = 1$, utiliza-se,

$$I_1 = \frac{(200 + C_1)}{(200 - C_1)}.$$

Após a primeira computação, envolvendo toda a amostra, a cada novo dado que nos chega, os desvios padrão são actualizados e a série inteira é recalculada.

Apêndice I

Quadro I 1: Máxima verosimilhança do Consumo Privado (de residentes) (d=11)

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	366,30	366,74	367,42
2	366,74	367,42	367,42
3	367,42	367,42	367,42
4	367,42	367,42	367,42
5	367,39	367,42	367,42
6	367,30	367,42	367,42
7	367,42	365,87	367,42
8	365,87	365,87	365,89
9	365,60	365,79	VNV
10	365,52	340,81	VNV

Quadro I 2: Máxima verosimilhança do Consumo Público (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	459,86	460,27	460,19
2	460,31	460,25	460,21
3	460,27	460,15	460,20
4	460,31	460,20	460,12
5	460,31	460,22	460,17
6	460,30	460,00	460,20
7	460,09	460,21	460,20
8	460,23	459,90	460,04
9	460,23	458,13	VNV
10	459,94	459,49	VNV

Quadro I 3: Máxima verosimilhança das Exportações de Bens e Serviços (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	256,88	257,70	257,12
2	257,70	257,12	257,12
3	257,12	257,12	257,12
4	257,12	257,12	257,12
5	255,42	254,07	257,12
6	254,07	254,07	257,70
7	255,37	254,07	255,86
8	259,08	259,47	257,69
9	255,33	256,57	VNV
10	252,92	250,03	VNV

Quadro I 4: Máxima verosimilhança da Formação Bruta em Capital Fixo (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	232,12	234,03	235,03
2	237,27	235,03	235,03
3	235,03	235,03	235,03
4	235,03	235,03	235,03
5	234,04	235,03	235,03
6	234,04	234,97	235,03
7	232,03	227,98	235,03
8	234,99	228,33	234,93
9	73,95	231,35	VNV
10	237,27	219,00	VNV

Quadro I 5: Máxima verosimilhança das Importações de Bens e Serviços (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	261,66	262,66	262,66
2	262,66	262,66	262,66
3	262,66	262,66	262,66
4	262,66	262,66	262,66
5	262,66	262,66	262,66
6	262,66	259,51	262,66
7	262,35	259,51	261,88
8	263,50	262,71	262,66
9	261,76	261,91	VNV
10	262,37	181,69	VNV

Quadro I 6: Máxima verosimilhança da Taxa de Desemprego (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	21,03	24,62	24,86
2	24,86	24,75	24,81
3	24,86	24,82	24,79
4	24,86	19,59	24,65
5	19,97	19,59	24,59
6	19,95	19,59	24,86
7	19,43	19,58	24,77
8	19,56	19,46	24,86
9	5,39	12,80	VNV
10	19,90	VNV	VNV

Apêndice II

Gráfico II 1: Consumo Privado (residentes) Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

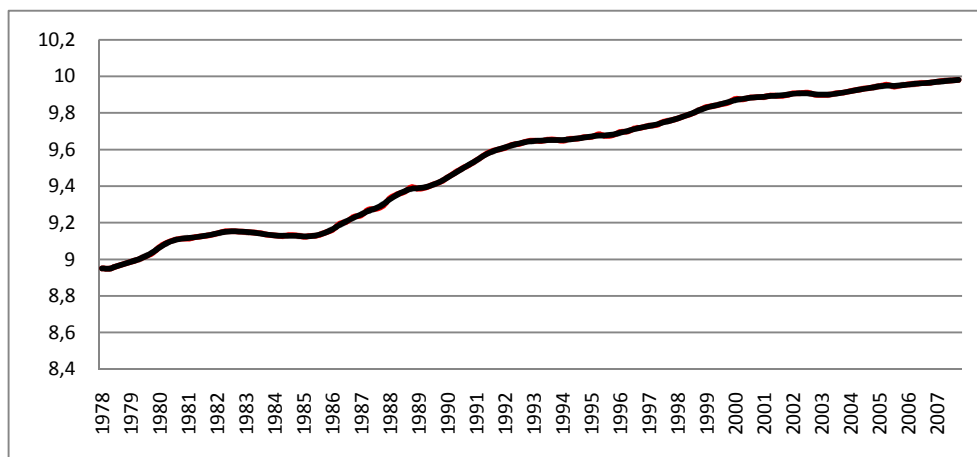


Gráfico II 2: Consumo Privado (de residentes) Trimestral – Tendência Alisada

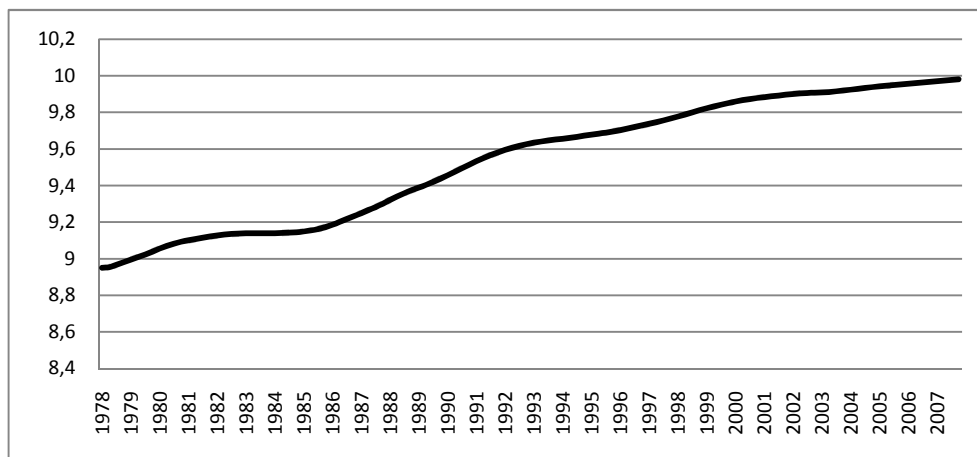


Gráfico II 3: Consumo Privado (de residentes) Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

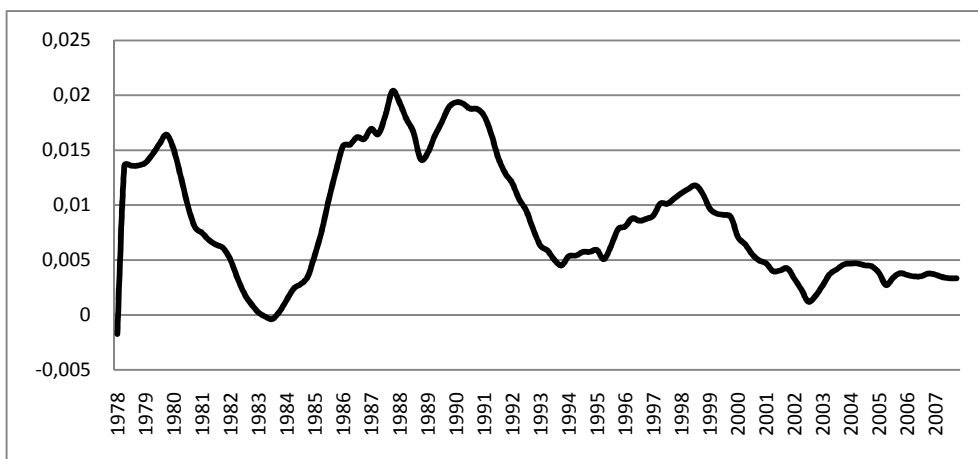


Gráfico II 4: Consumo Privado (de residentes) Trimestral – Ciclo Alisado

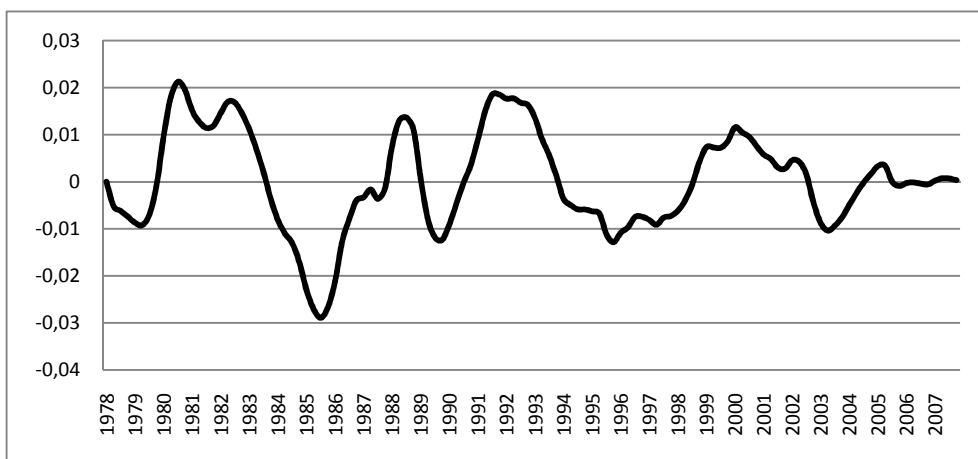


Gráfico II 5: Consumo Privado (de residentes) Trimestral – Erro Alisado

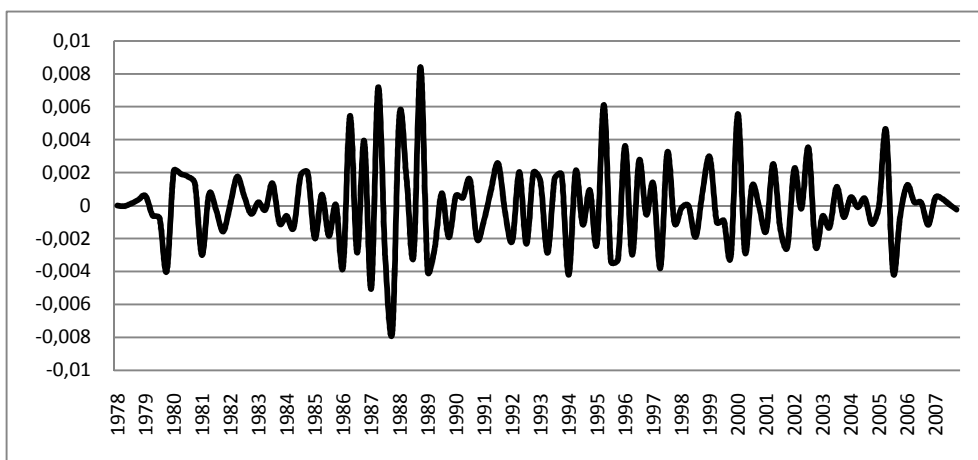


Gráfico II 6: Consumo Público Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

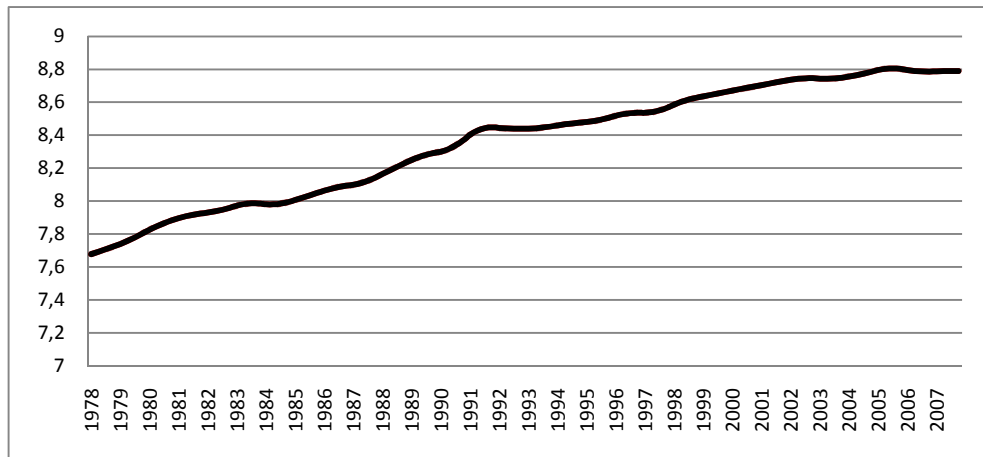


Gráfico II 7: Consumo Público Trimestral – Tendência Alisada

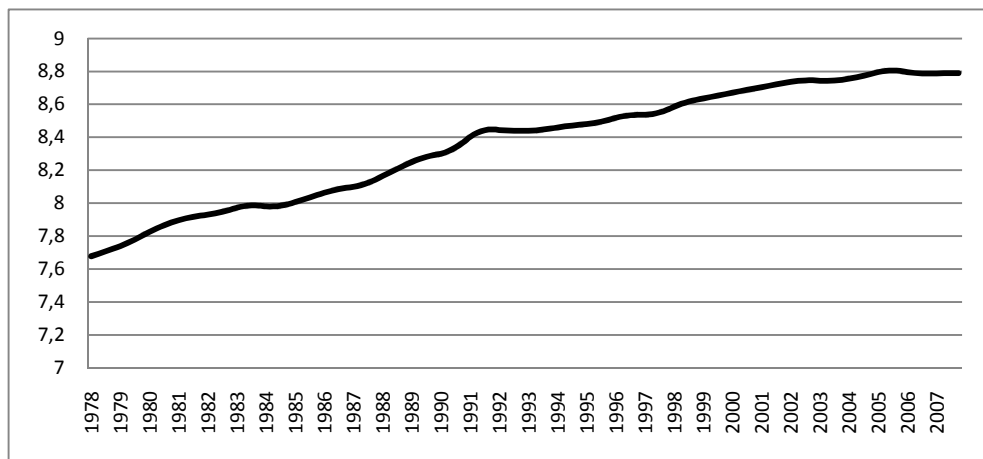


Gráfico II 8: Consumo Público Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

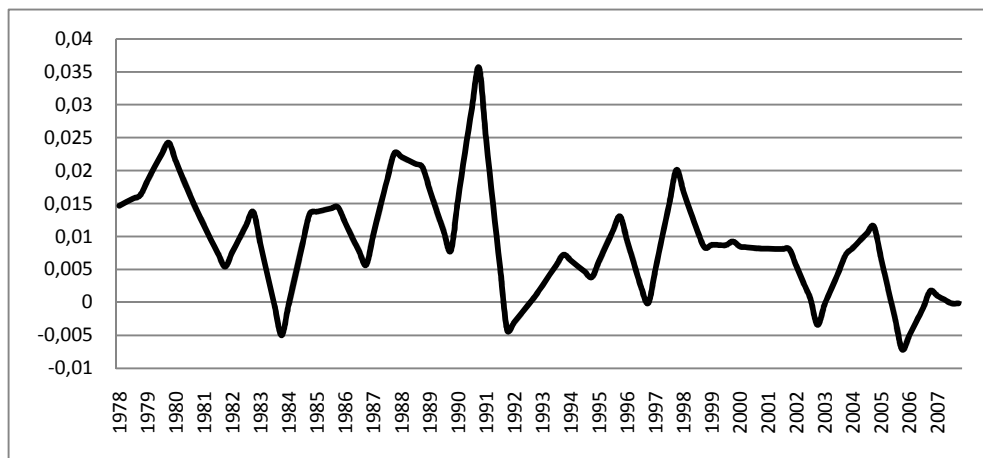


Gráfico II 9: Consumo Público Trimestral – Ciclo Alisado

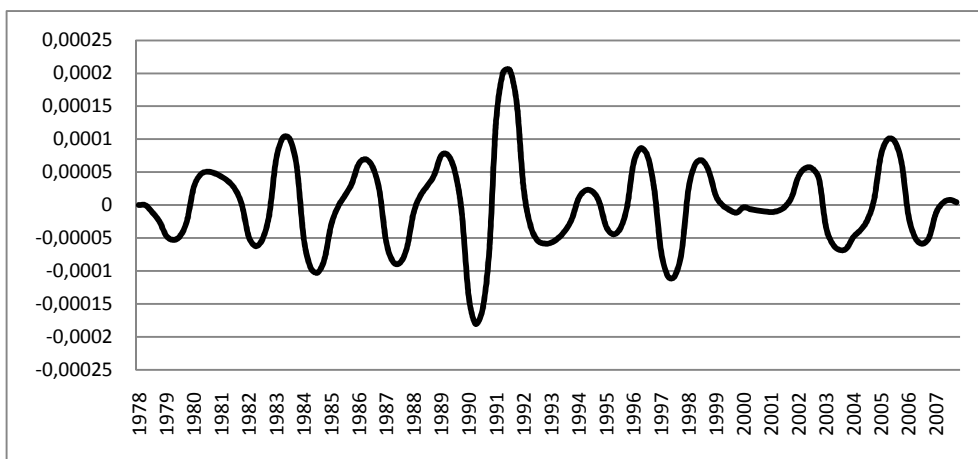


Gráfico II 10: Consumo Público Trimestral – Erro Alisado

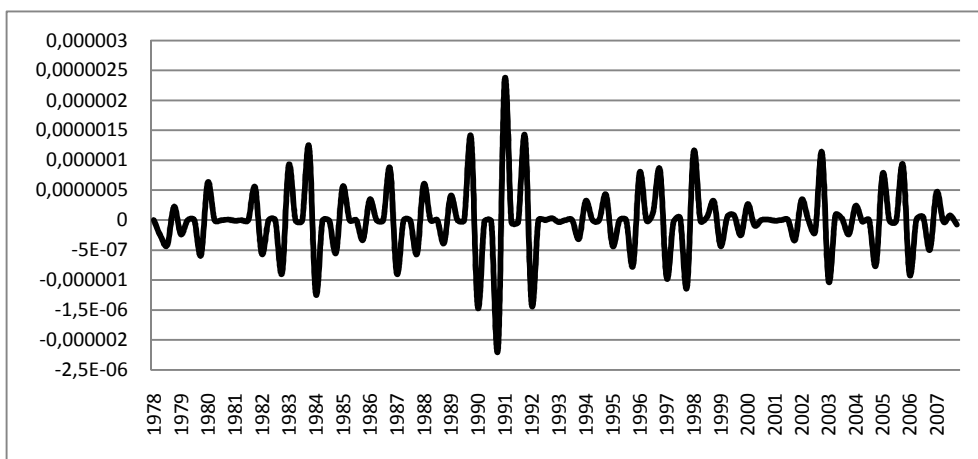


Gráfico II 11: Exportações de Bens e Serviços Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

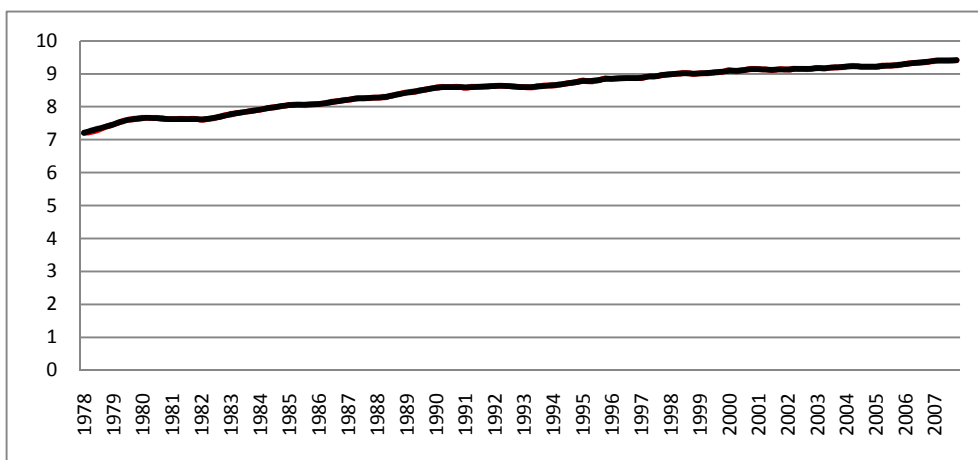


Gráfico II 12: Exportações de Bens e Serviços Trimestral – Tendência Alisada

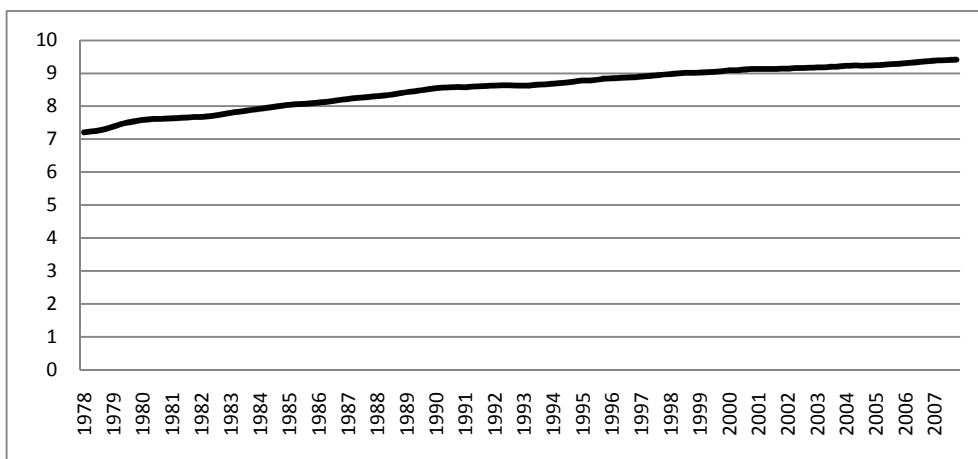


Gráfico II 13: Exportações de Bens e Serviços Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

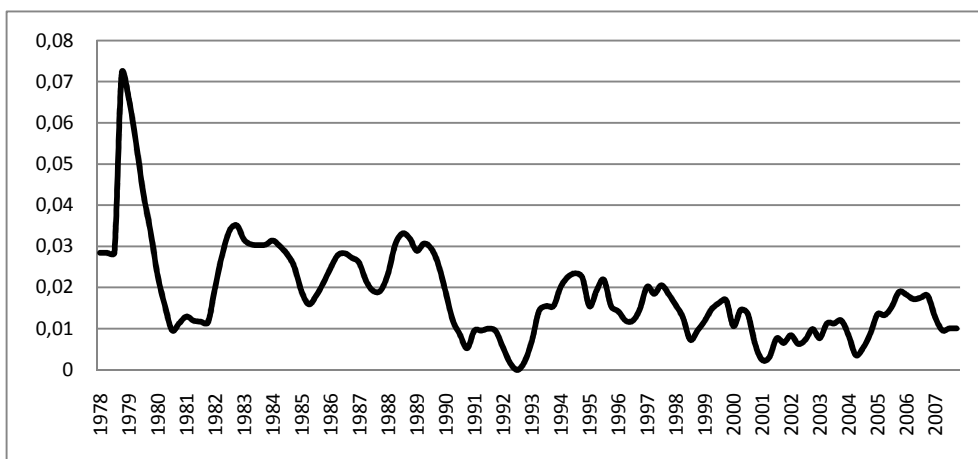


Gráfico II 14: Exportações de Bens e Serviços Trimestral – Ciclo Alisado

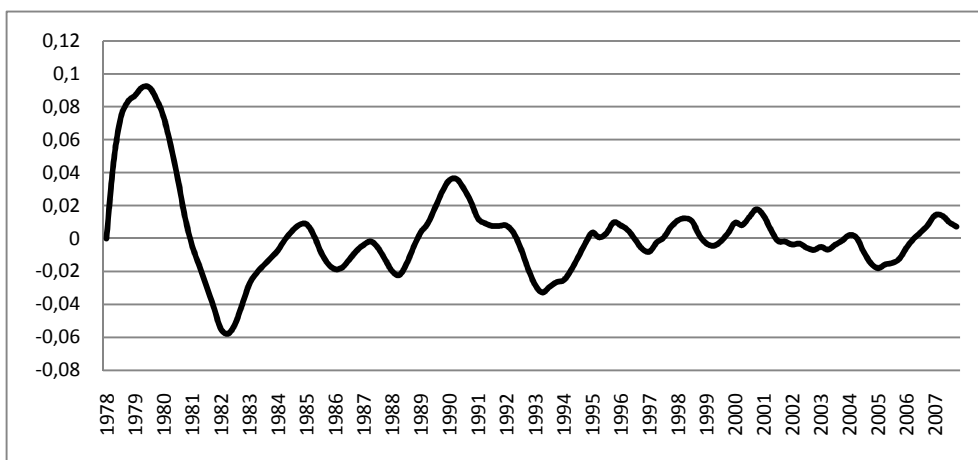


Gráfico II 15: Exportações de Bens e Serviços Trimestral – Erro Alisado

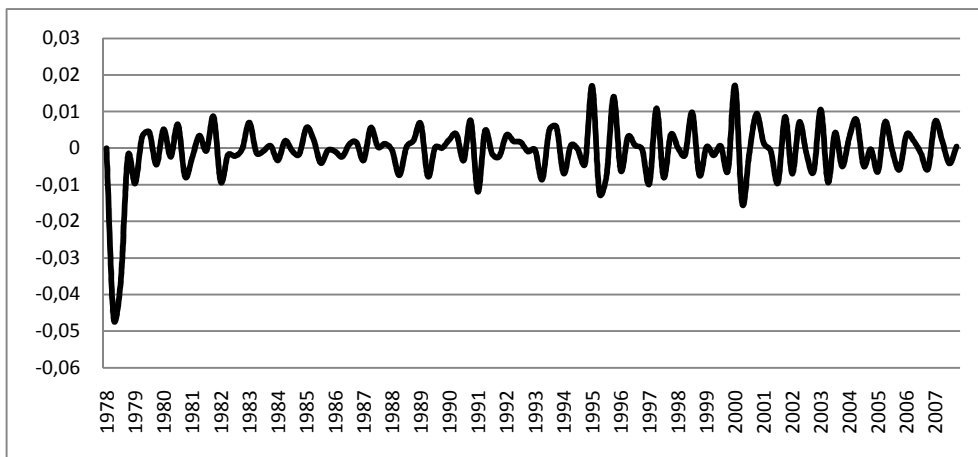


Gráfico II 16: Formação Bruta Capital Fixo Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

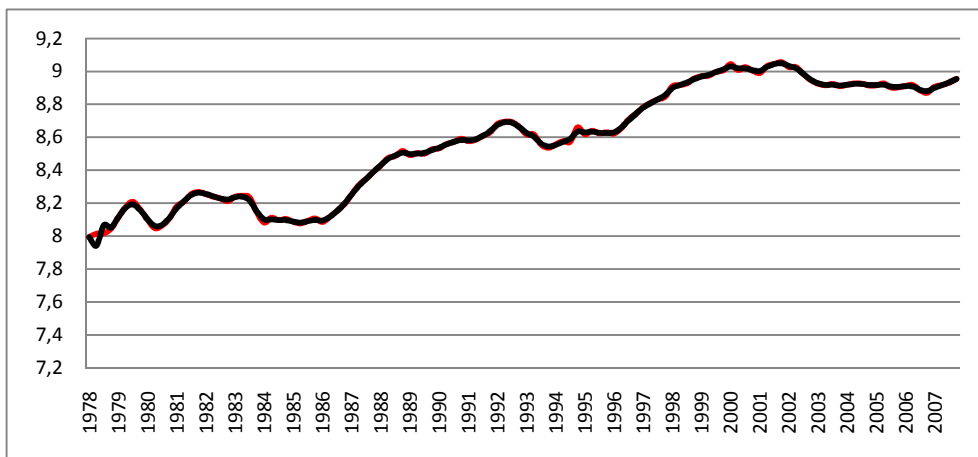


Gráfico II 17: Formação Bruta em Capital Fixo Trimestral – Tendência Alisada

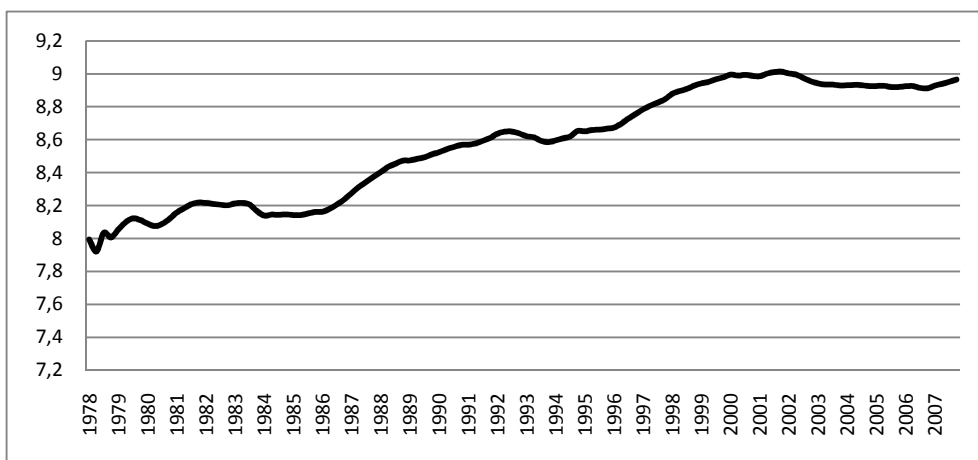


Gráfico II 18: Formação Bruta em Capital Fixo Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

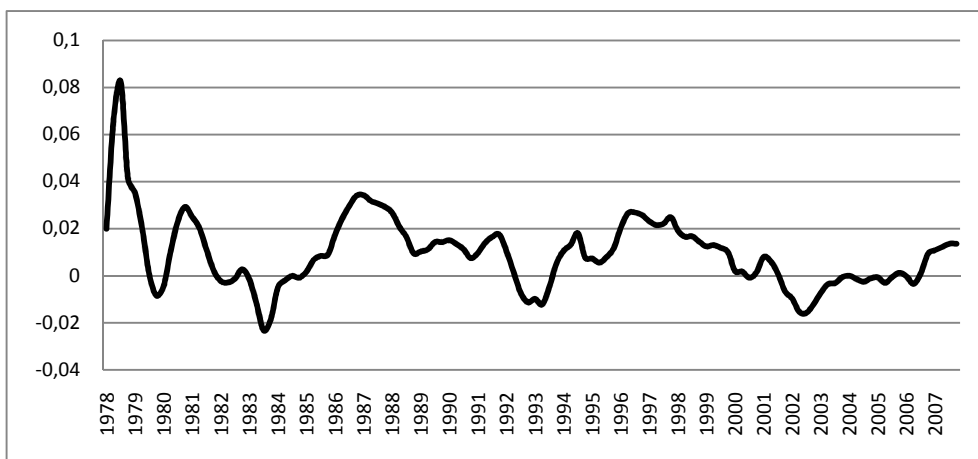


Gráfico II 19: Formação Bruta em Capital Fixo Trimestral – Ciclo Alisado



Gráfico II 20: Formação Bruta em Capital Fixo Trimestral – Erro Alisado

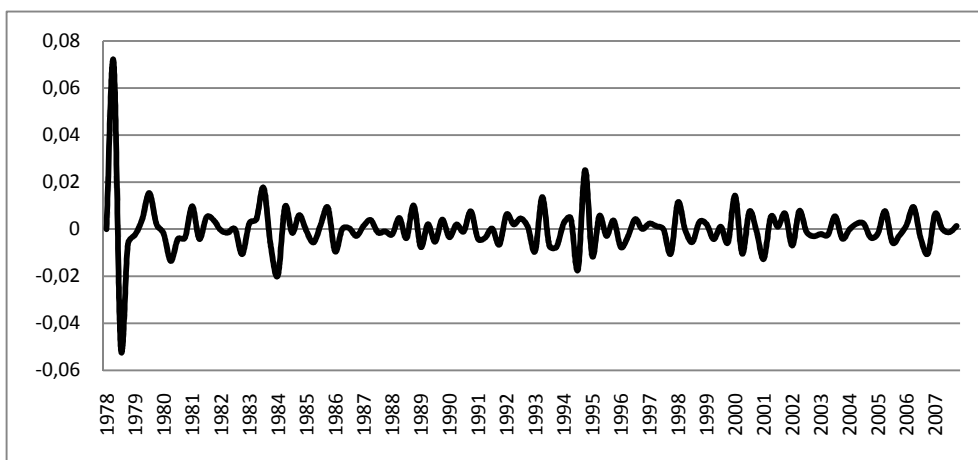


Gráfico II 21: Importações de Bens Serviços Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

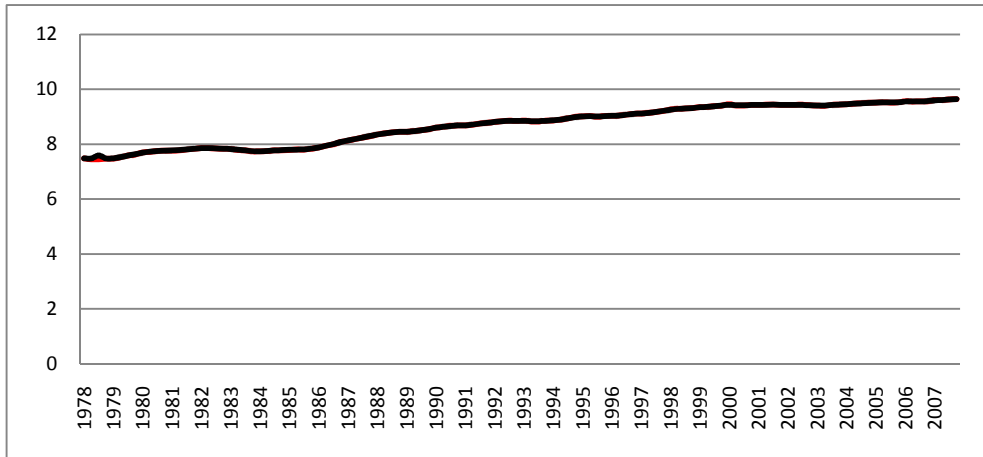


Gráfico II 22: Importações de Bens e Serviços Trimestral – Tendência Alisada

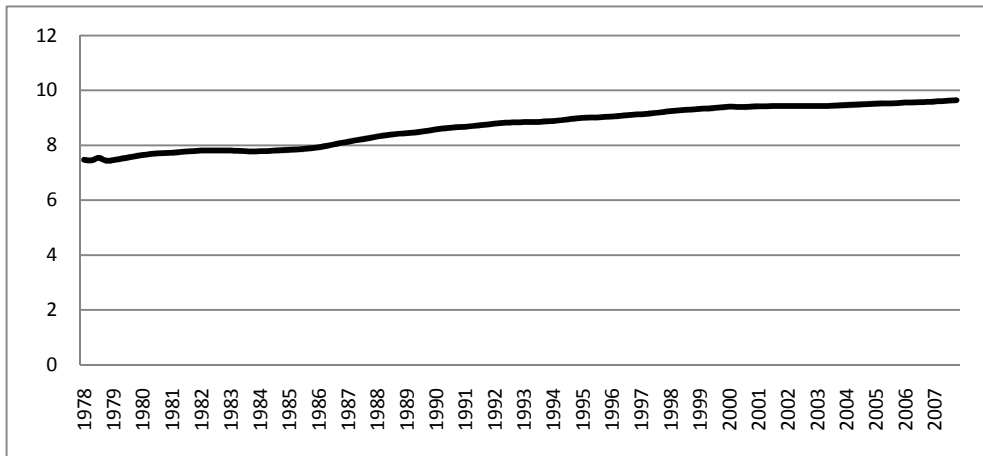


Gráfico II 23: Importações de Bens e Serviços Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

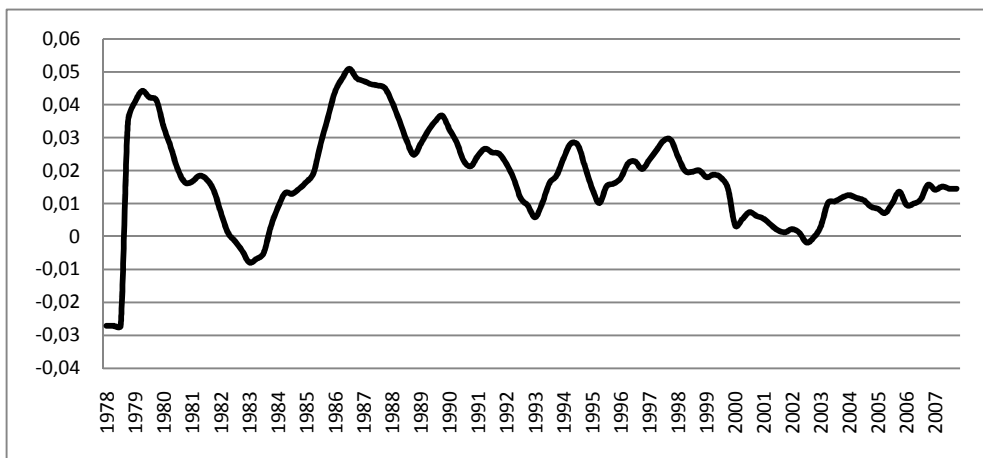


Gráfico II 24: Importações de Bens e Serviços Trimestral – Ciclo Alisado

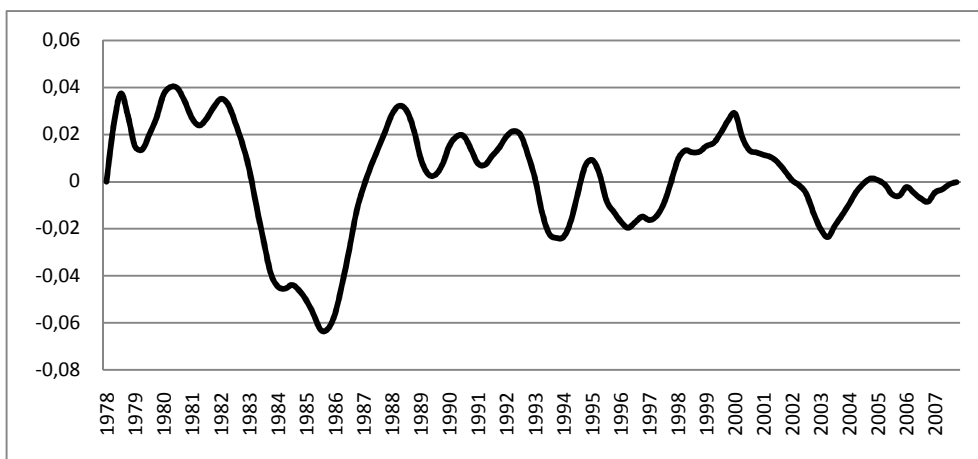


Gráfico II 25: Importações de Bens e Serviços Trimestral – Erro Alisado

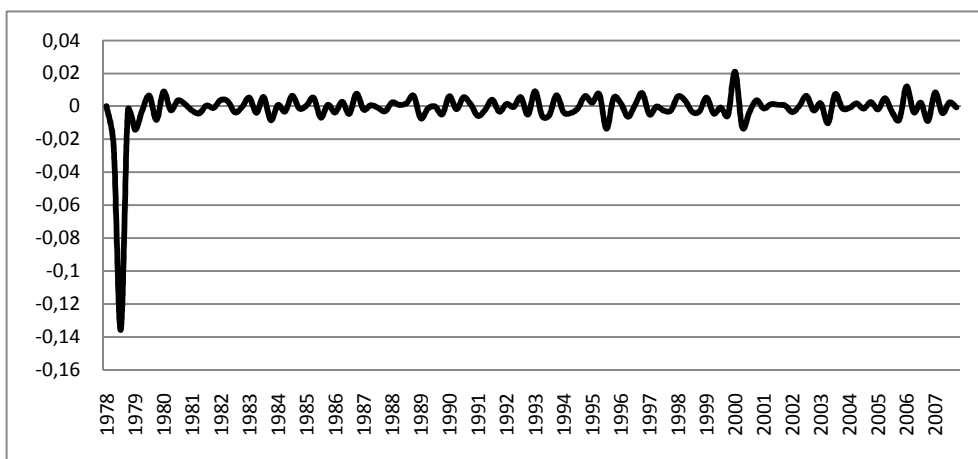


Gráfico II 26: Taxa de Desemprego Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

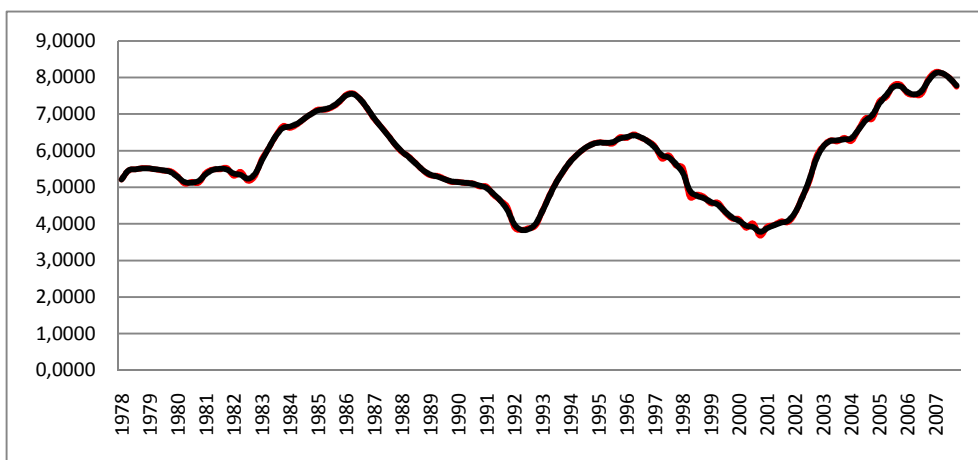


Gráfico II 27: Taxa de Desemprego Trimestral – Tendência Alisada

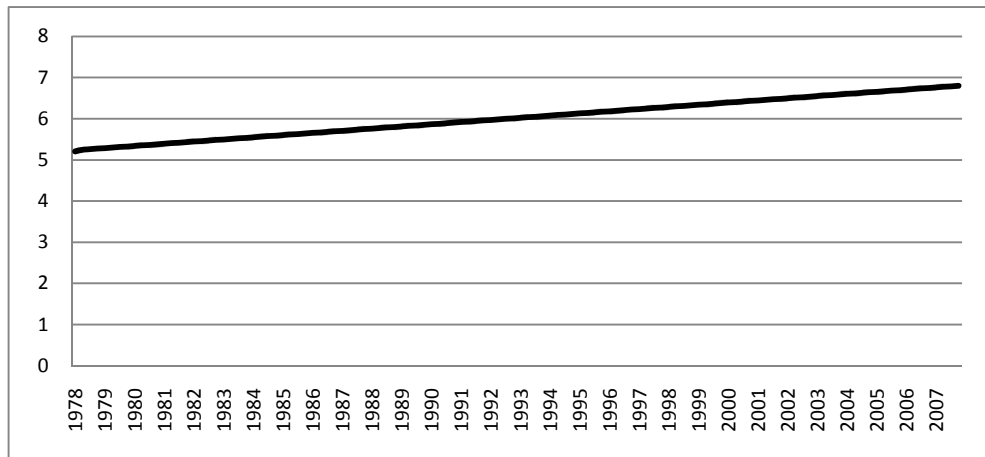


Gráfico II 28: Taxa de Desemprego Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

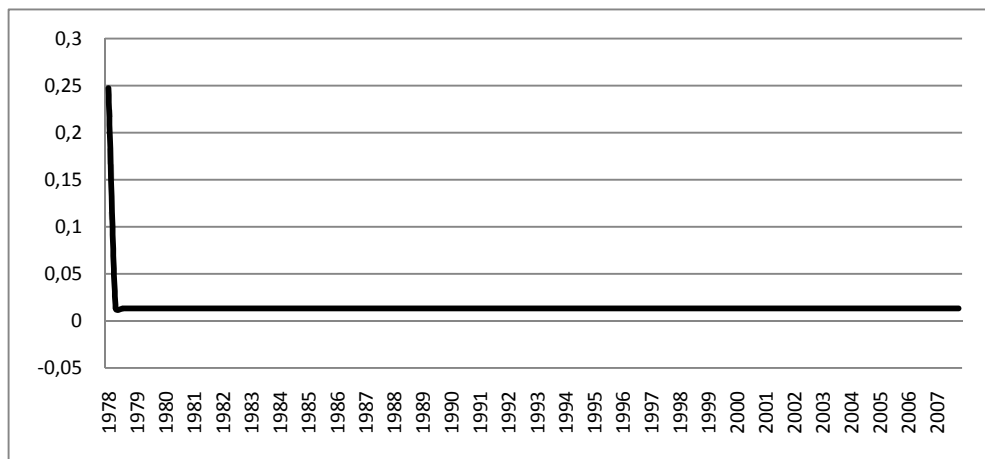


Gráfico II 29: Taxa de Desemprego Trimestral – Ciclo Alisado

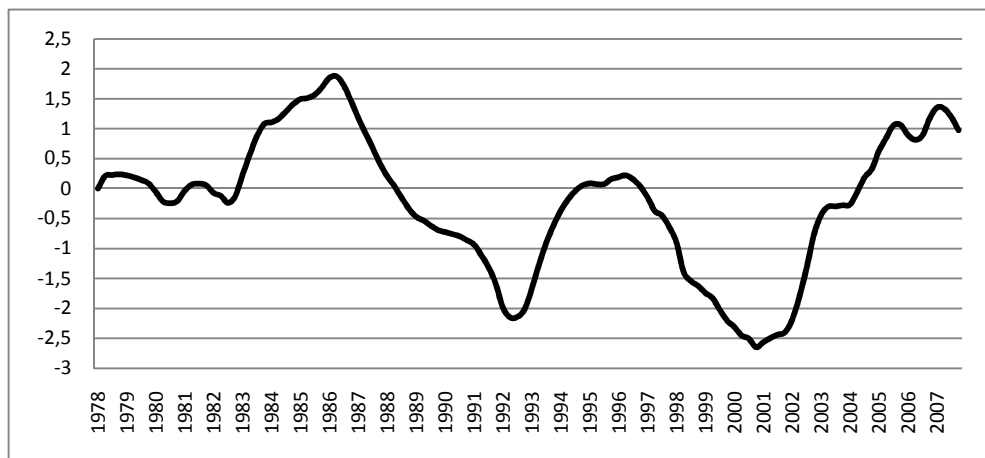
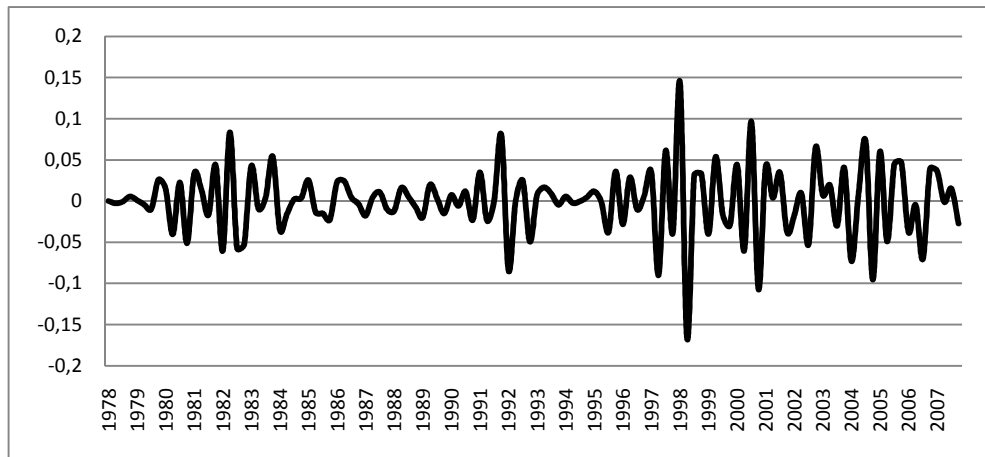


Gráfico II 30: Taxa de Desemprego Trimestral – Erro Alisado



Apêndice III

Quadro III 1: Valores de máxima verosimilhança PIB (d=11) - Mensal

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	1729,75	1727,12	1727,18
2	1728,84	1727,31	1729,32
3	1728,58	1729,47	1729,21
4	1728,85	1729,48	1729,32
5	1729,48	1729,46	1729,39
6	1729,13	1729,46	1728,87
7	1727,33	1729,36	1728,55
8	1729,44	1727,71	1728,34
9	1729,48	1722,96	1727,38
10	1729,48	1713,82	VNV

Quadro III 2: Valores de máxima verosimilhança IPI (d=11) - Mensal

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	287,30	287,26	287,26
2	287,30	287,30	287,15
3	287,26	287,30	287,26
4	287,24	287,26	285,54
5	287,93	285,55	287,26
6	280,99	281,57	287,35
7	287,34	285,55	285,54
8	285,86	286,20	287,35
9	286,16	283,63	VNV
10	287,48	282,61	VNV

Quadro III 3: Valores de máxima verosimilhança IPI (d=11) - Trimestral

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	286,86	286,86	286,81
2	286,81	286,86	286,81
3	286,86	286,86	286,81
4	285,93	286,81	285,10
5	287,61	285,11	286,91
6	281,17	281,13	286,86
7	281,13	285,11	286,86
8	285,94	281,13	284,32
9	285,57	285,29	VNV
10	286,75	247,02	VNV

Gráfico III 1: PIB Mensal (-) e Modelo Alisado (-)

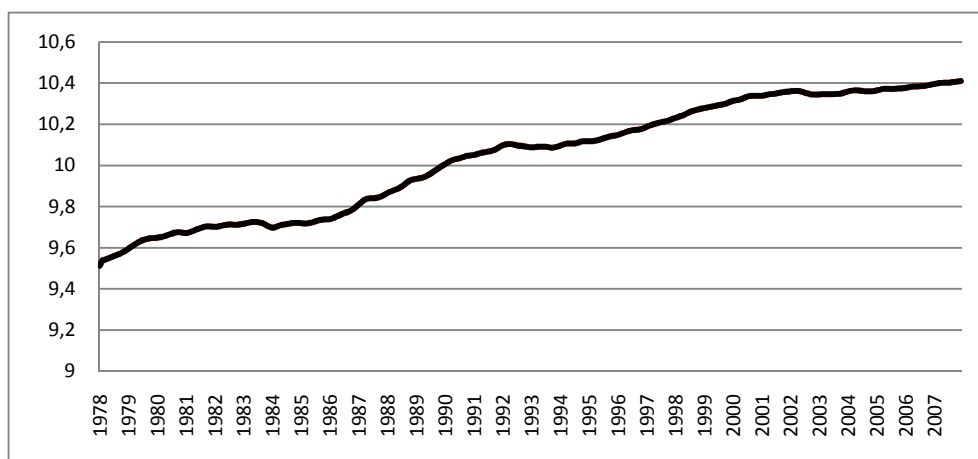


Gráfico III 2: PIB Mensal – Tendência Alisada

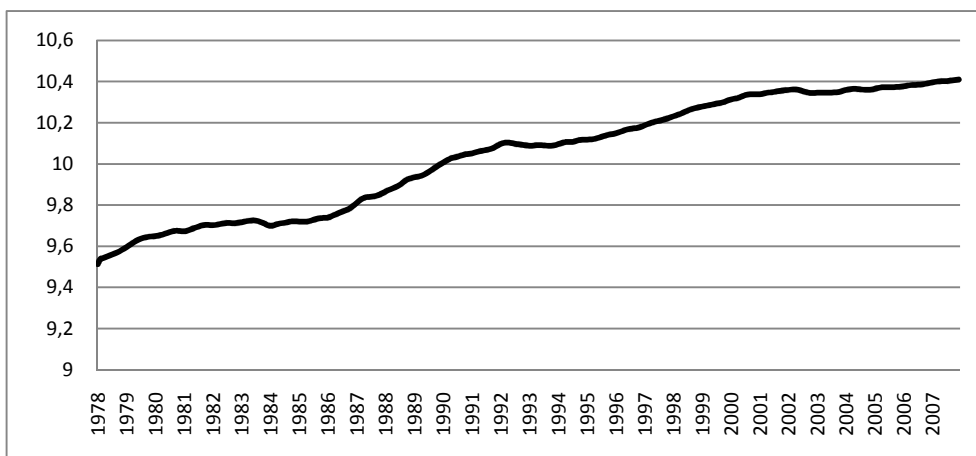


Gráfico III 3: PIB Mensal – Tendência Aleatória Alisada

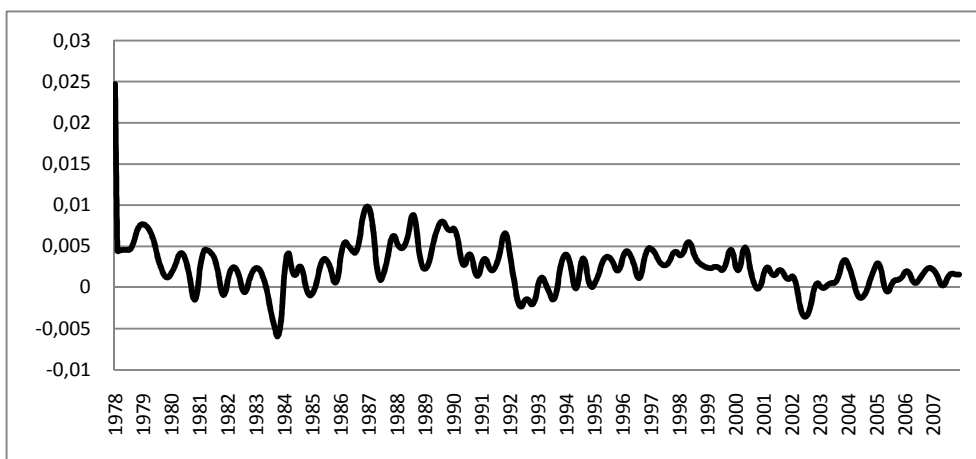


Gráfico III 4: PIB Mensal – Ciclo Alisado

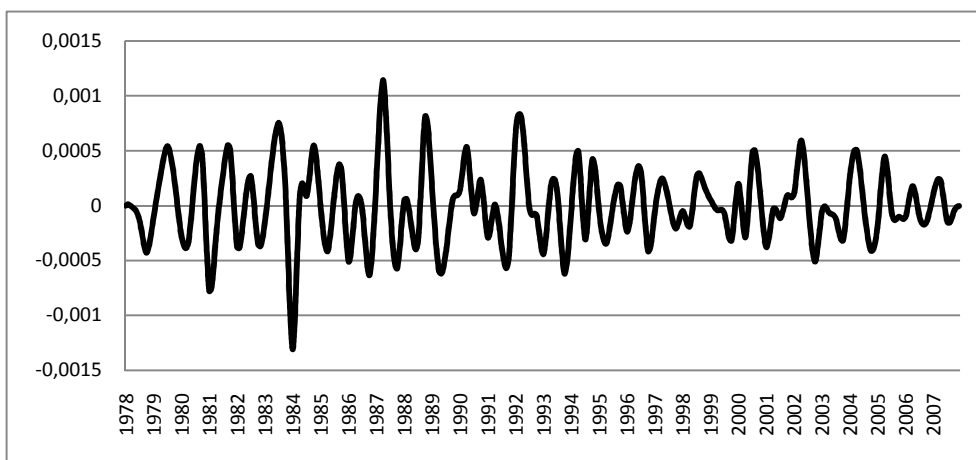


Gráfico III 5: PIB Mensal – Erro Alisado

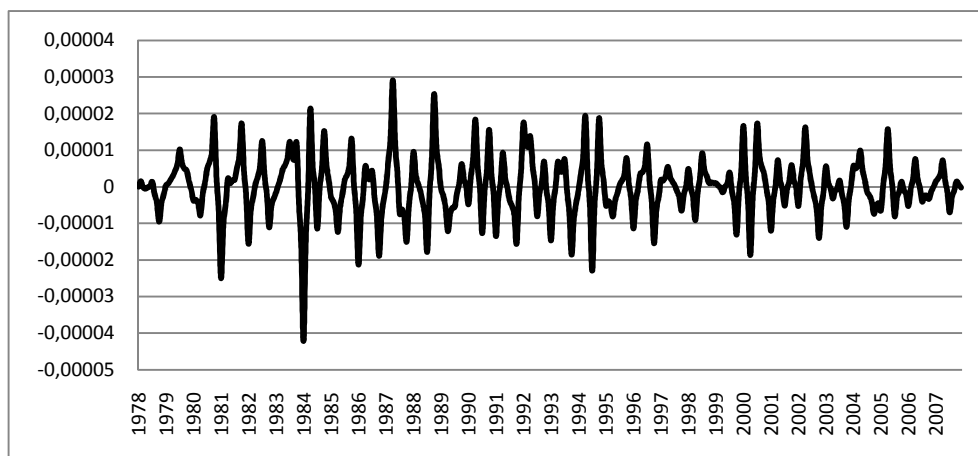


Gráfico III 6: IPI Mensal (-) e Modelo Alisado (-)

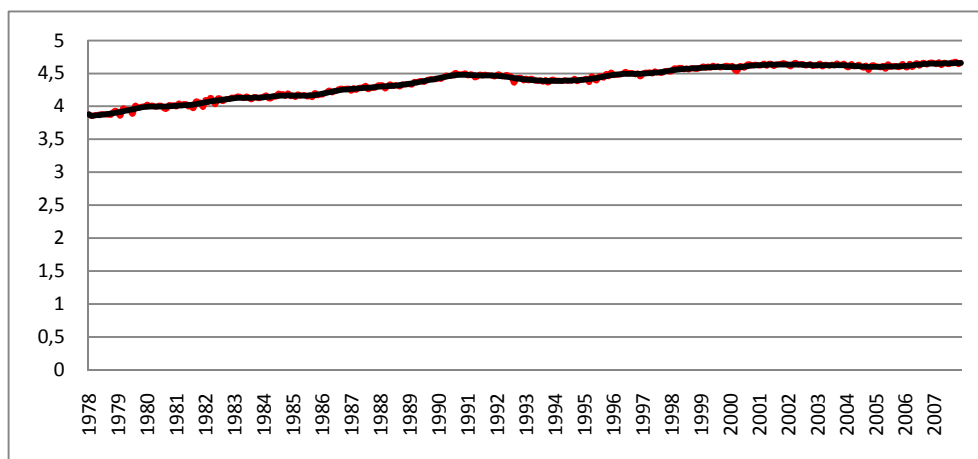


Gráfico III 7: IPI Mensal – Tendência Alisada

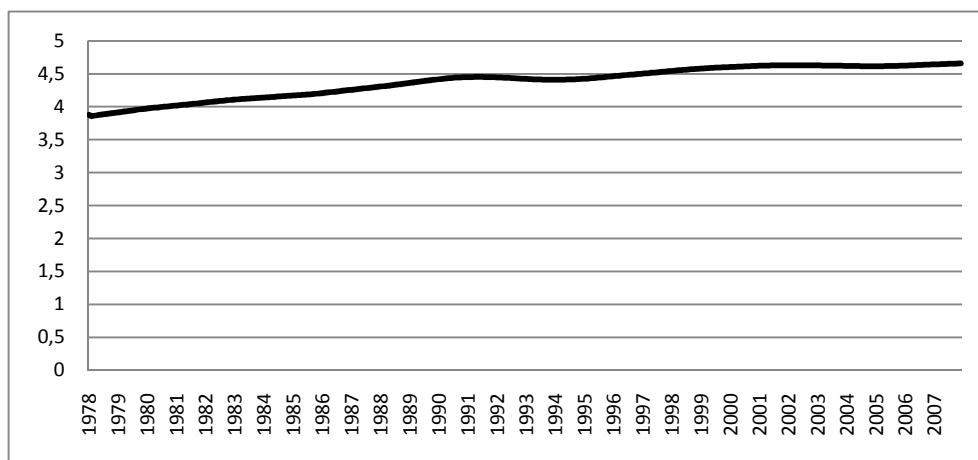


Gráfico III 8: IPI Mensal – Tendência Aleatória Alisada

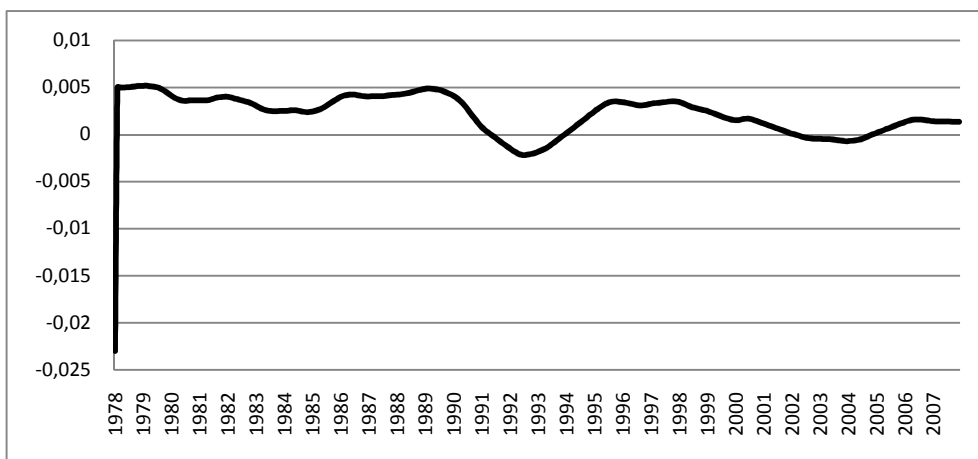


Gráfico III 9: IPI Mensal – Ciclo Alisado

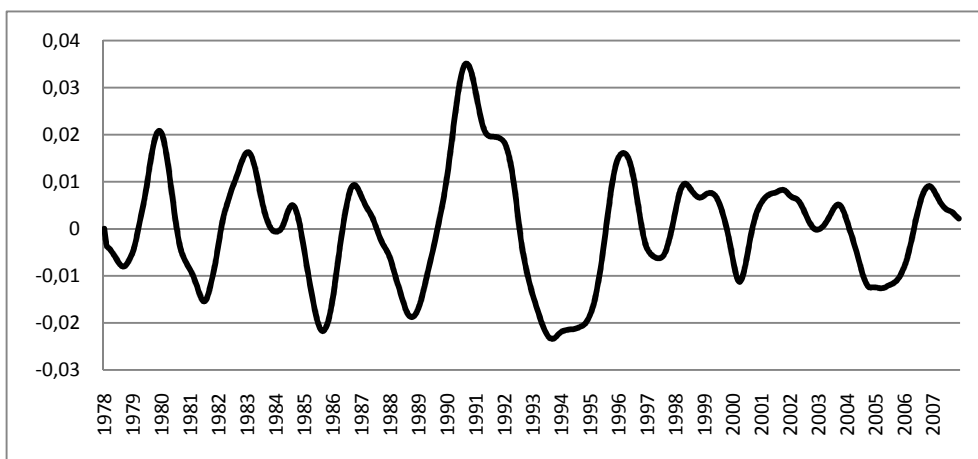


Gráfico III 10: IPI Mensal – Erro Alisado

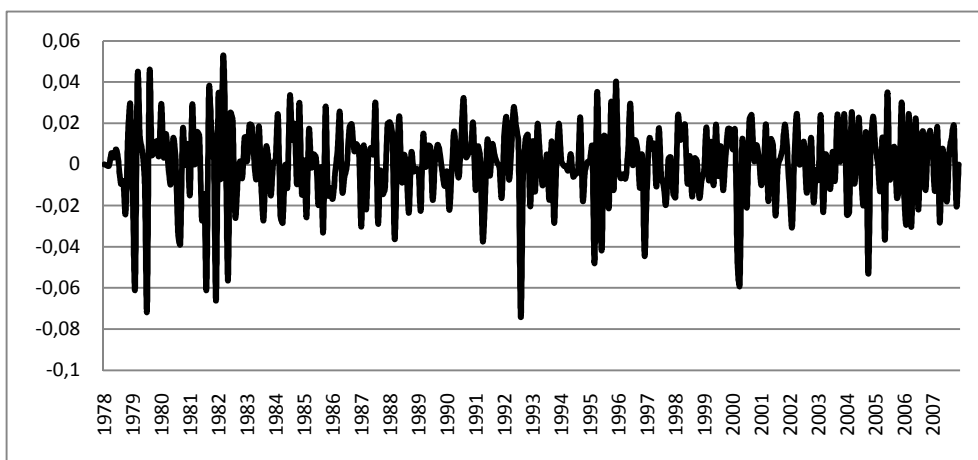


Gráfico III 11: IPI Trimestral (-) e Modelo Alisado (-)

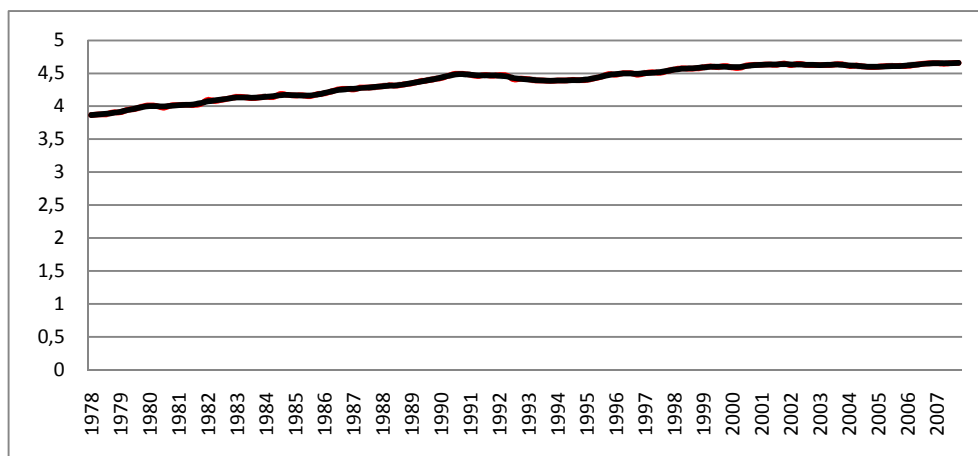


Gráfico III 12: IPI Trimestral – Tendência Alisada

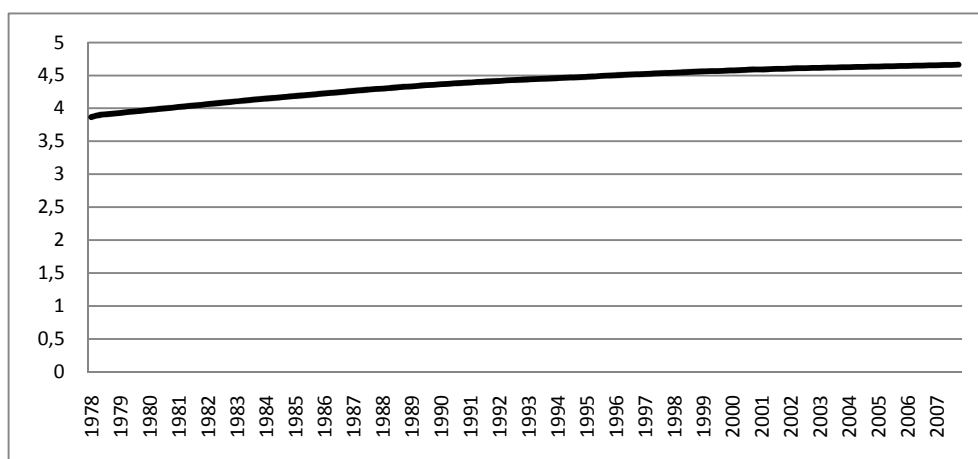


Gráfico III 13: IPI Trimestral – Tendência Aleatória Alisada

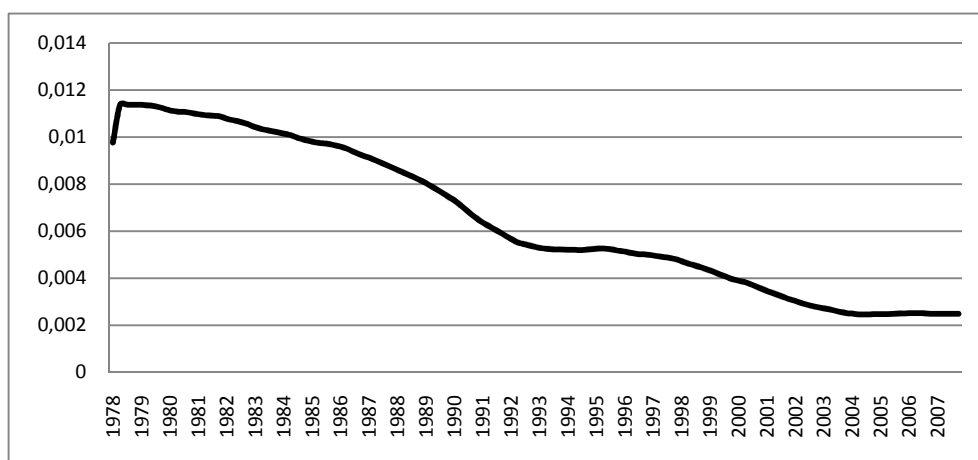


Gráfico III 14: IPI Trimestral – Ciclo Alisado

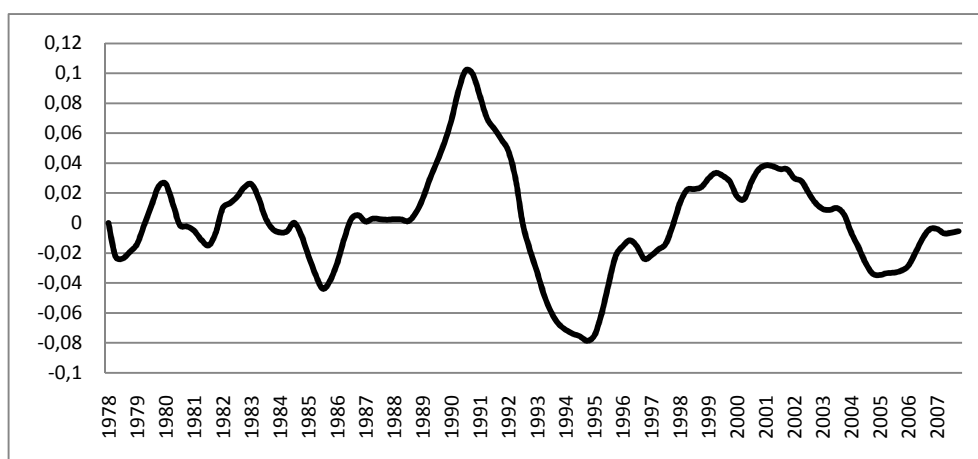
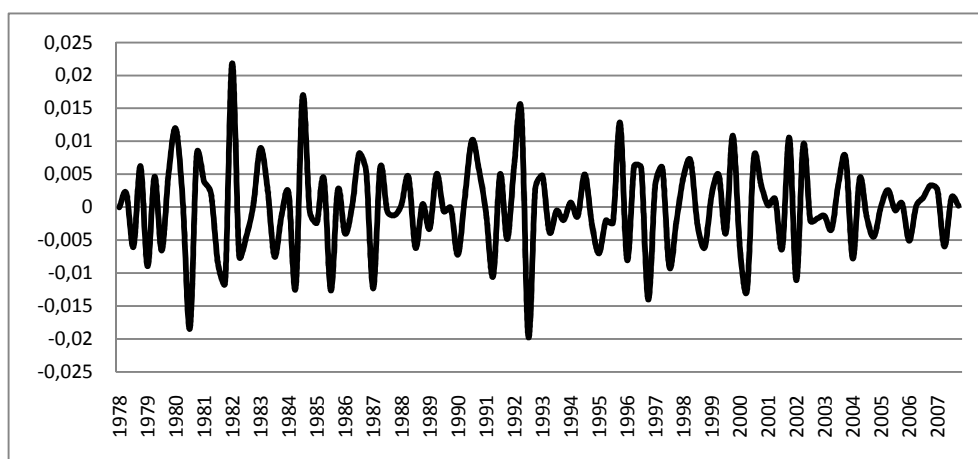


Gráfico III 15: IPI Trimestral – Erro Alisado



Apêndice IV

Gráfico IV 1: Emprego Total Mensal (-) e Modelo Alisado (-)

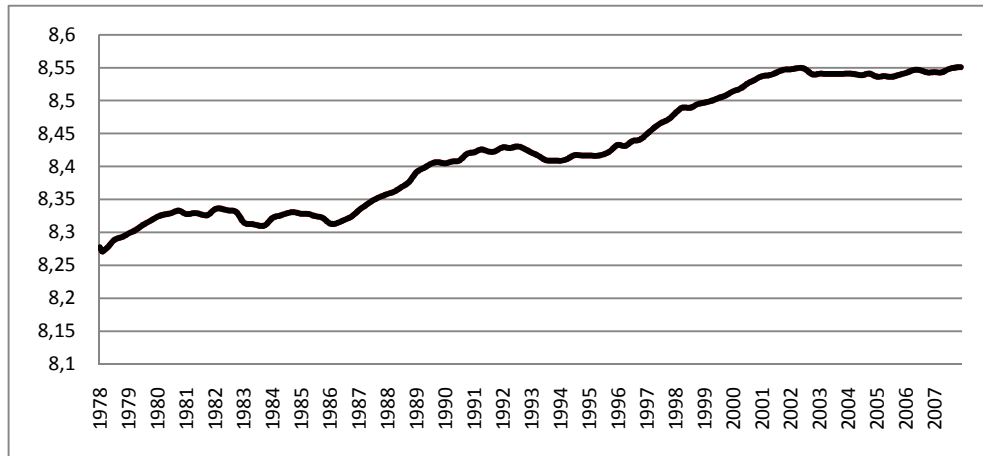


Gráfico IV 2: Emprego Total Mensal – Tendência Alisada

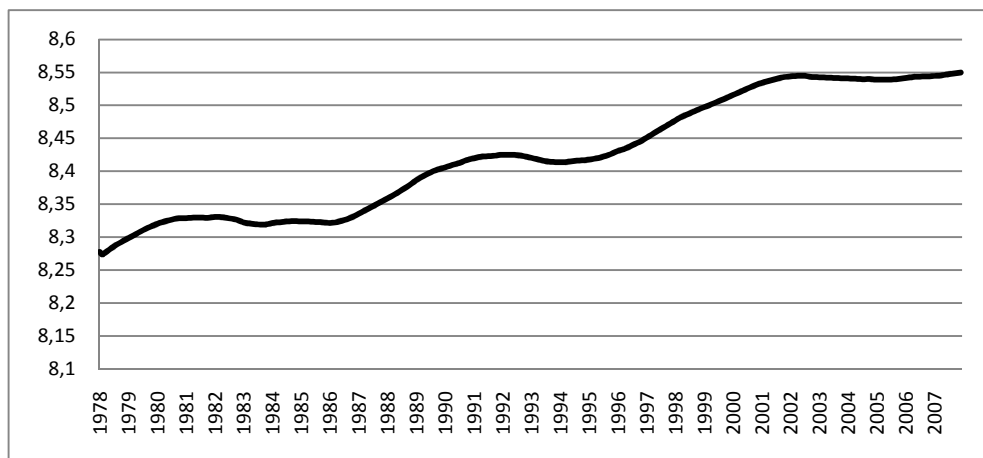


Gráfico IV 3: Emprego Total Mensal – Tendência Aleatória Alisada

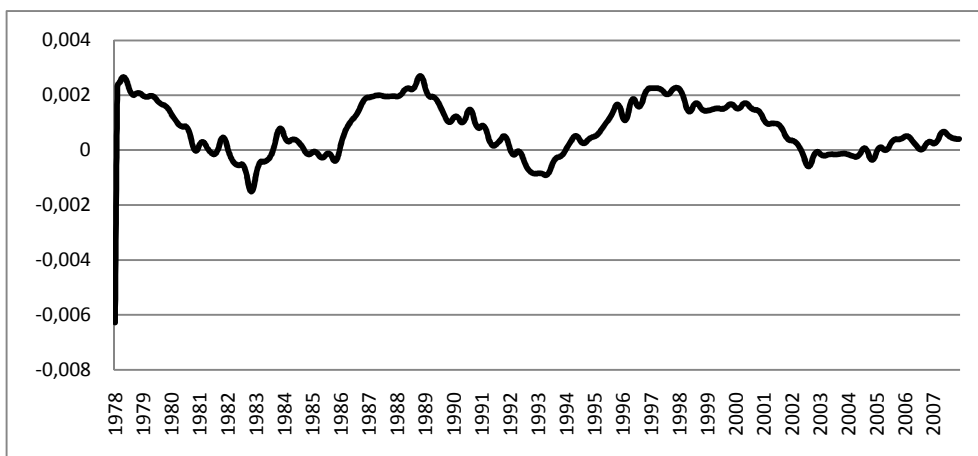


Gráfico IV 4: Emprego Total Mensal – Ciclo Alisado

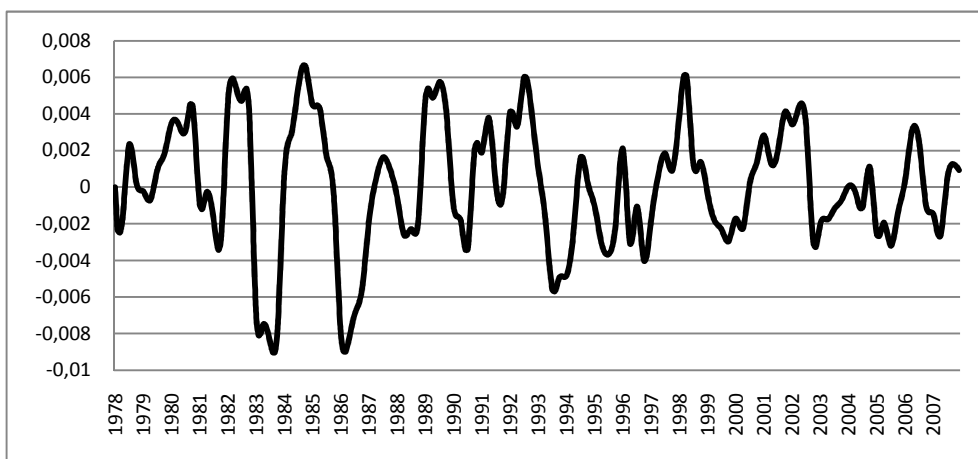


Gráfico IV 5: Emprego Total Mensal – Erro Alisado

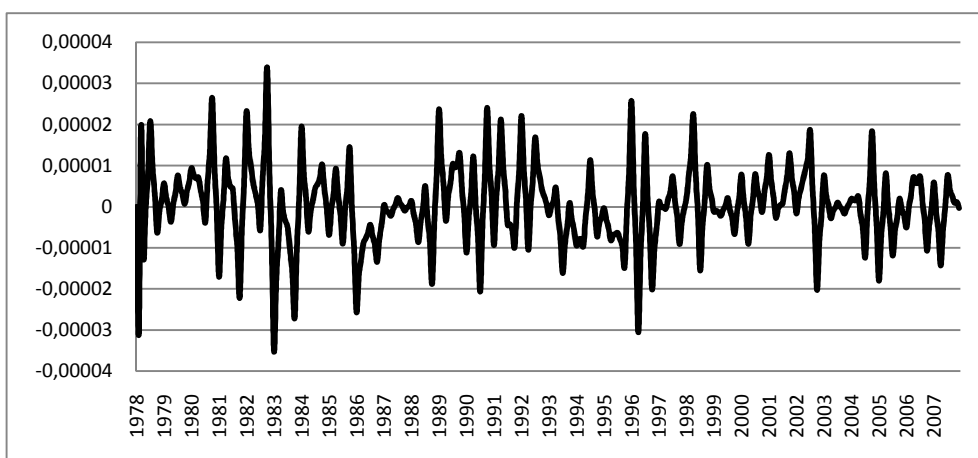


Gráfico IV 6: Exportações de Bens e Serviços Mensal (-) e Modelo Alisado (-)

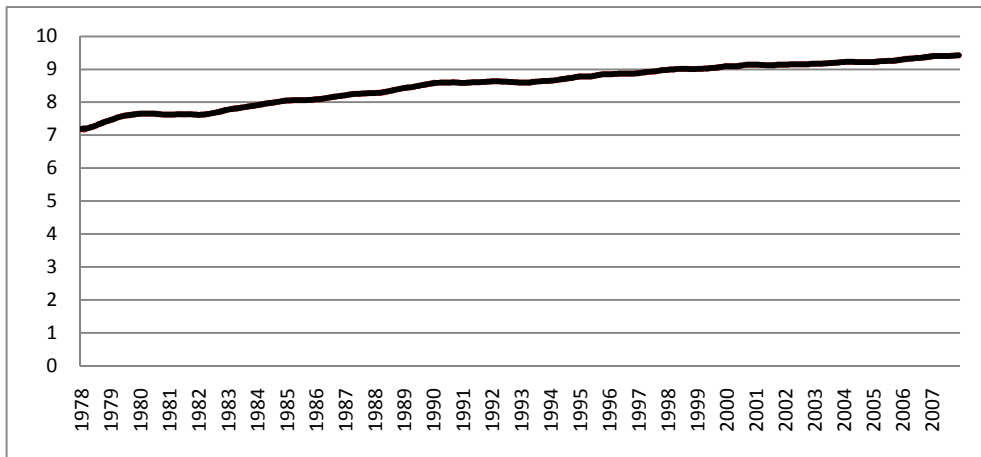


Gráfico IV 7: Exportações de Bens e Serviços Mensal – Tendência Alisada

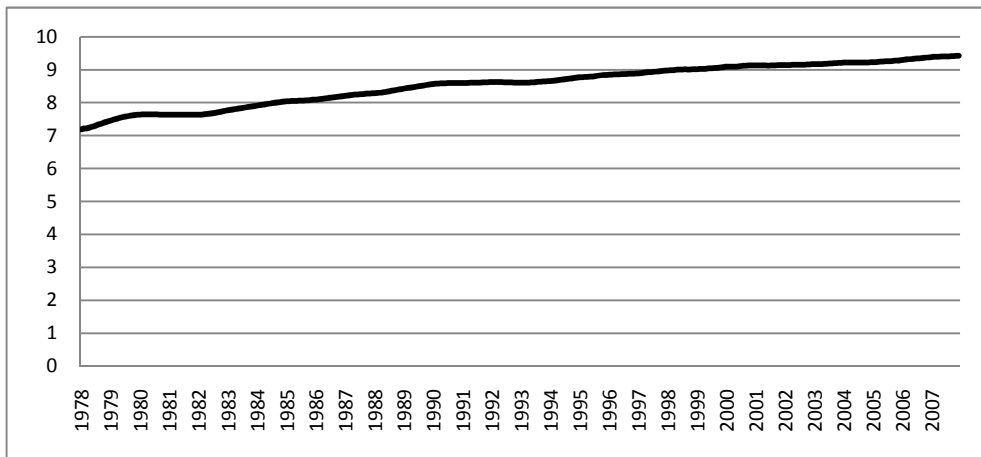


Gráfico IV 8: Exportações de Bens e Serviços Mensal – Tendência Aleatória Alisada

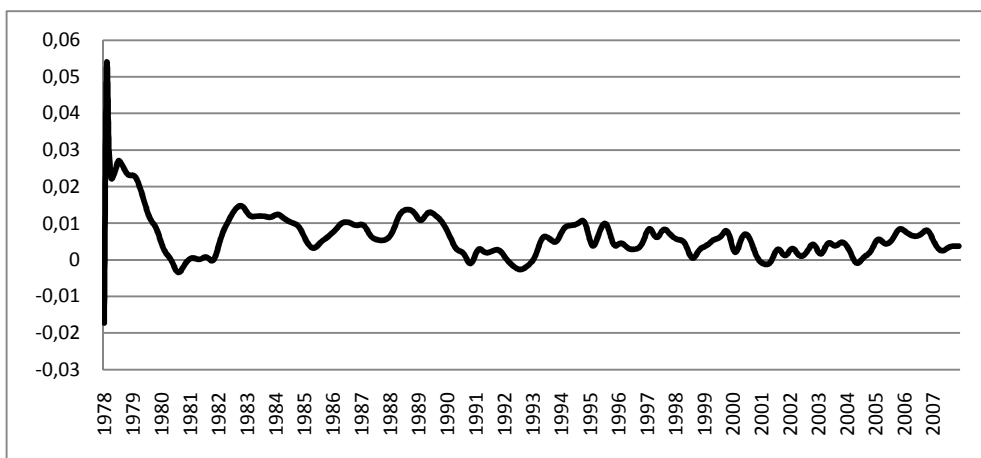


Gráfico IV 9: Exportações de Bens e Serviços Mensal – Ciclo Alisado

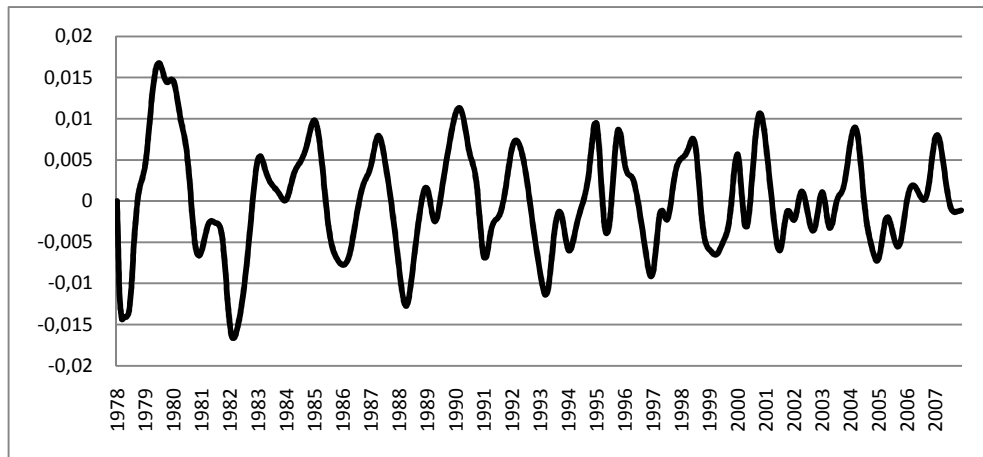


Gráfico IV 10: Exportações de Bens e Serviços Mensal – Erro Alisado

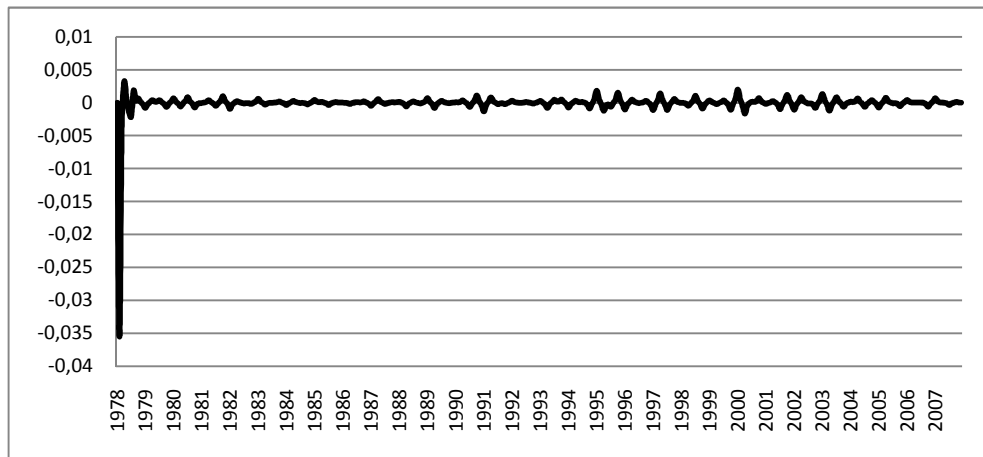


Gráfico IV 11: Importações de Bens e Serviços Mensal (-) e Modelo Alisado (-)

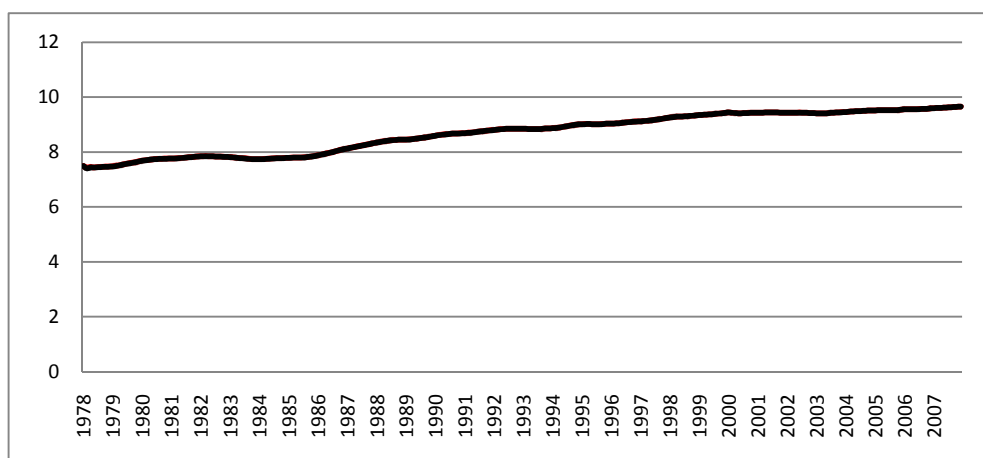


Gráfico IV 12: Importações de Bens e Serviços Mensal – Tendência Alisada

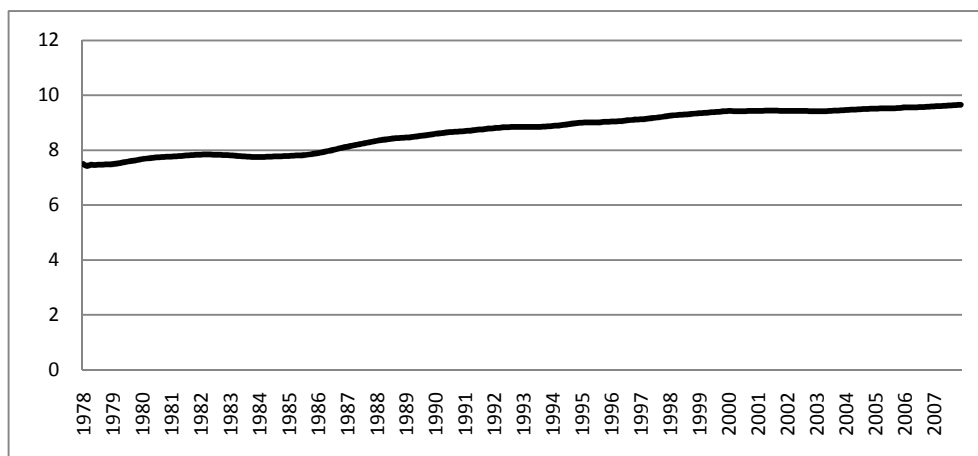


Gráfico IV 13: Importações de Bens e Serviços Mensal – Tendência Aleatória Alisada

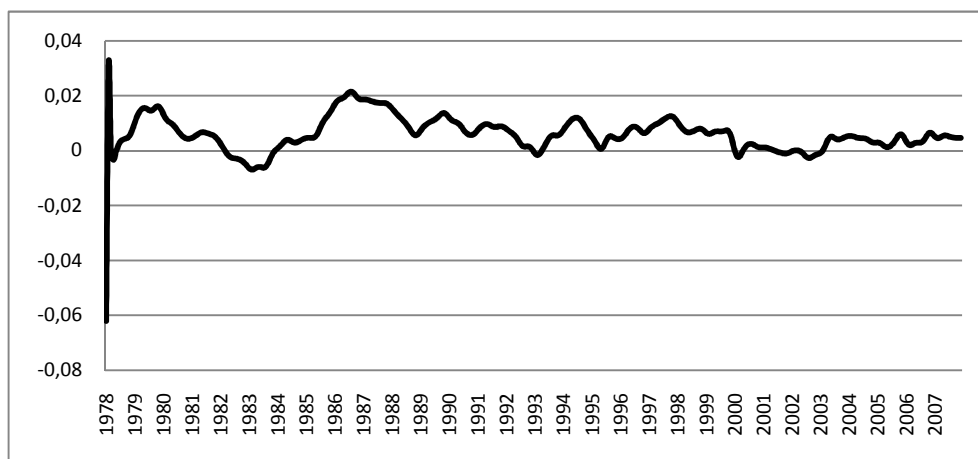


Gráfico IV 14: Importações de Bens e Serviços Mensal – Ciclo Alisado

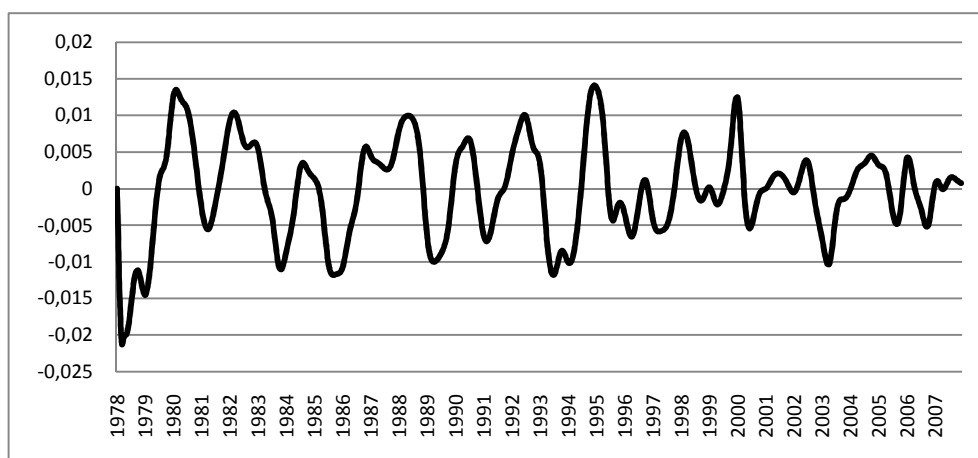
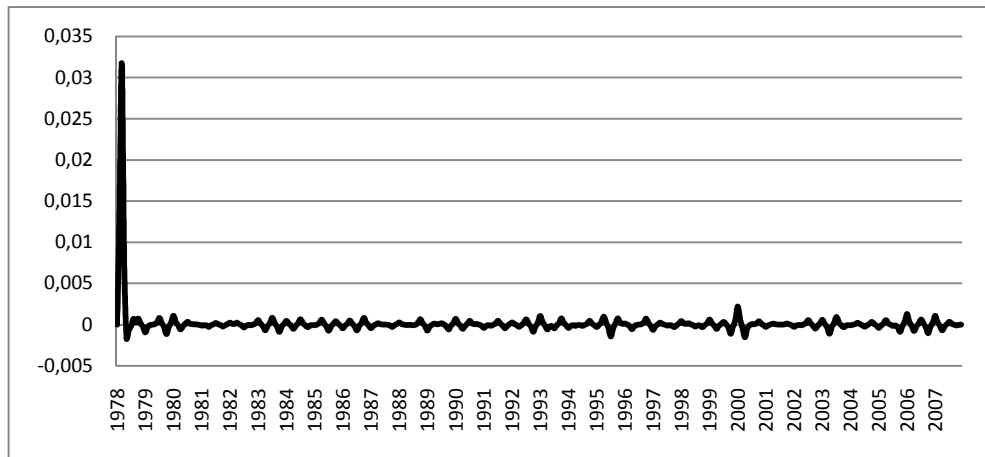


Gráfico IV 15: Importações de Bens e Serviços Mensal – Erro Alisado



Apêndice V

Quadro V 1: Valores de máxima verosimilhança – PIB da Alemanha (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	159,97	159,98	159,92
2	159,97	159,92	159,92
3	159,98	159,92	159,92
4	159,92	159,98	159,92
5	159,20	159,92	159,92
6	159,98	159,92	159,92
7	159,23	158,65	159,98
8	159,23	158,61	159,23
9	159,18	158,99	VNV
10	159,97	VNV	VNV

Quadro V 2: Valores de máxima verosimilhança – PIB da Área do Euro (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	182,20	182,55	182,55
2	182,28	182,55	182,55
3	182,28	182,55	182,55
4	182,55	182,55	182,55
5	182,55	182,55	182,55
6	181,99	182,55	182,55
7	182,02	181,99	182,03
8	182,02	173,60	VNV
9	181,96	180,94	VNV
10	181,99	178,12	VNV

Quadro V 3: Valores de máxima verosimilhança – PIB da Espanha (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	191,17	191,17	191,17
2	191,17	191,17	191,17
3	191,16	191,17	191,17
4	191,17	191,17	191,17
5	191,08	191,17	191,17
6	190,56	191,05	191,17
7	190,57	191,05	191,08
8	191,07	190,20	190,92
9	190,31	190,56	VNV
10	191,17	VNV	VNV

Quadro V 4: Valores de máxima verosimilhança – PIB dos EUA (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	159,98	159,49	159,96
2	159,98	159,49	159,98
3	159,98	160,50	160,50
4	160,50	160,50	160,50
5	160,50	160,50	160,50
6	160,50	159,24	160,50
7	159,49	158,82	160,50
8	160,50	158,99	160,50
9	158,79	158,66	VNV
10	158,86	157,30	VNV

Quadro V 5: Valores de máxima verosimilhança – PIB do Japão (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	144,49	145,59	145,59
2	144,41	145,59	145,59
3	145,59	145,59	145,59
4	145,59	145,59	145,59
5	145,59	145,59	145,59
6	145,59	145,59	145,59
7	145,59	145,59	144,40
8	143,95	143,02	VNV
9	144,71	143,65	VNV
10	126,69	124,69	VNV

Quadro V 6: Valores de máxima verosimilhança – PIB do Reino Unido (d=11).

K	Newton-Raphson	BFGS	Nelder-Mead
1	186,77	187,61	187,61
2	186,77	187,61	187,61
3	186,79	187,61	187,61
4	187,61	187,55	187,61
5	187,61	187,55	187,61
6	187,61	187,61	187,61
7	187,55	187,61	187,61
8	187,55	186,77	187,61
9	187,55	187,45	187,16
10	187,53	182,46	VNV

Apêndice VI

Gráfico VI 1: Consumo Privado (de residentes) - Previsão Trimestral - AR

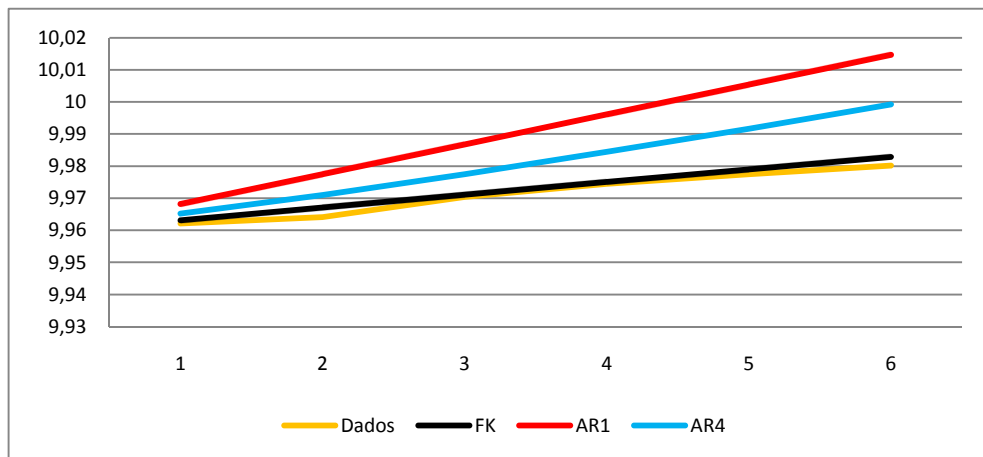


Gráfico VI 2: Consumo Privado (de residentes) - Previsão Trimestral - ARMA

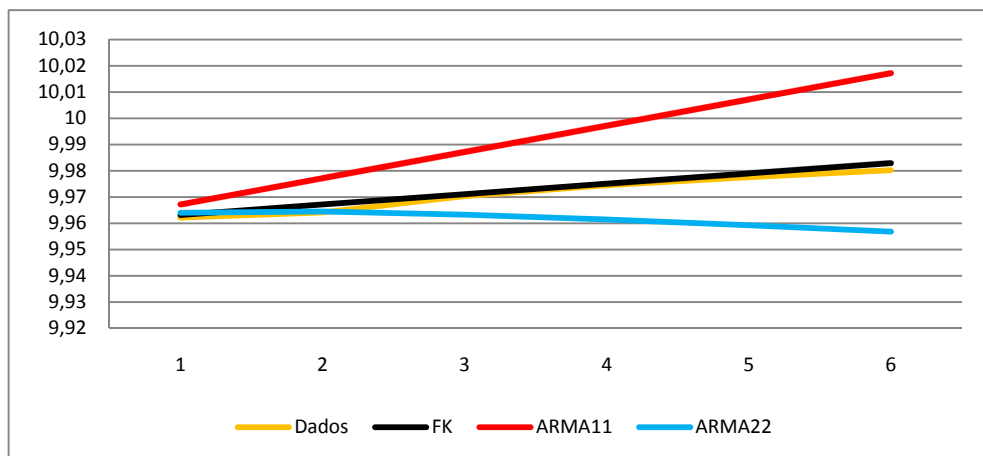


Gráfico VI 3: REQM - Consumo Privado (de residentes) - Previsão Trimestral - AR

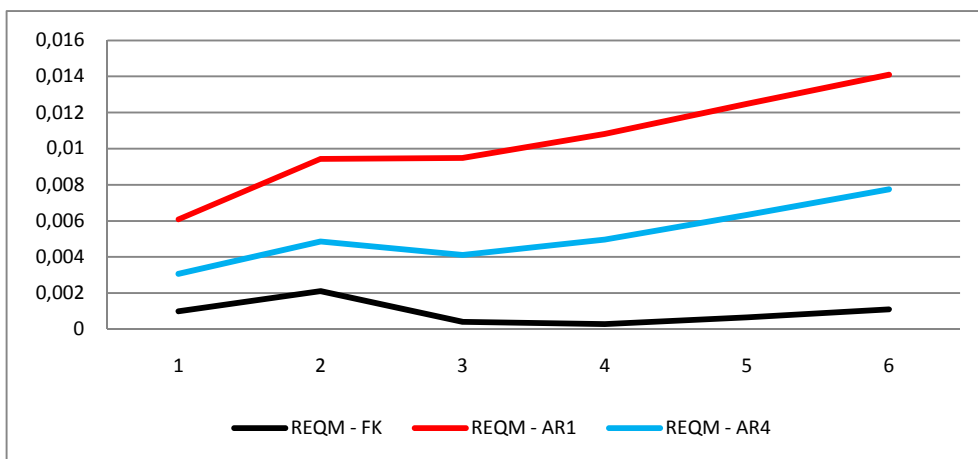


Gráfico VI 4: REQM - Consumo Privado (de residentes) - Previsão Trimestral - ARMA

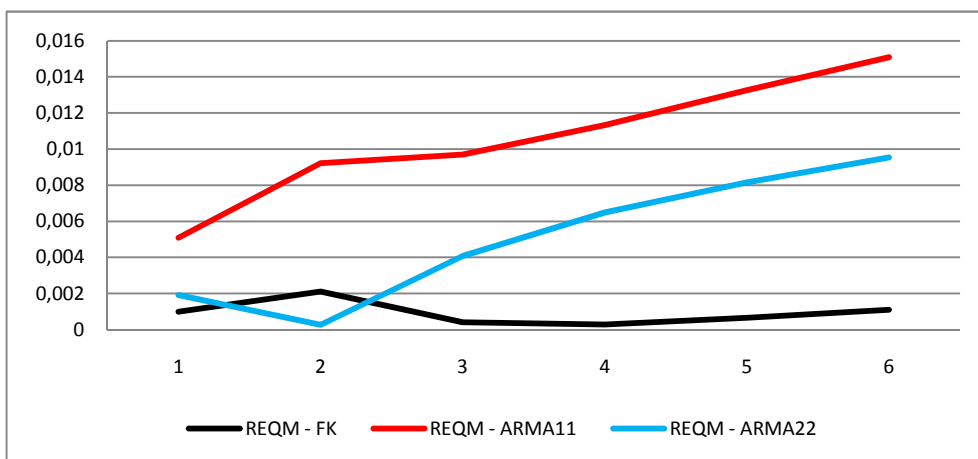


Gráfico VI 5: Consumo Público - Previsão Trimestral - AR

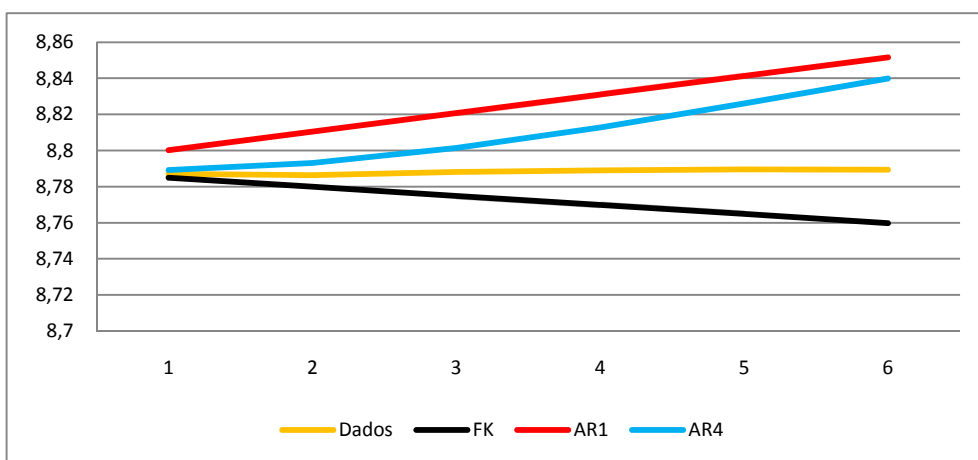


Gráfico VI 6: Consumo Público - Previsão Trimestral - ARMA

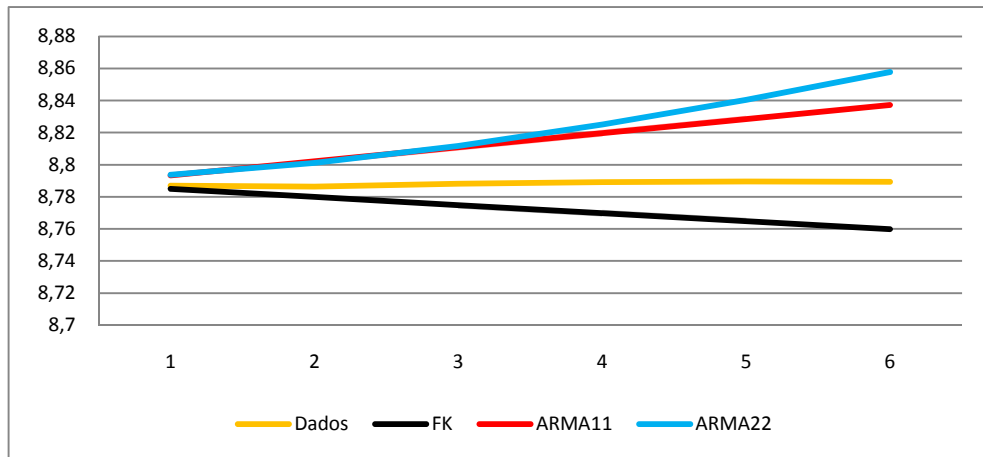


Gráfico VI 7: REQM - Consumo Público - Previsão Trimestral - AR

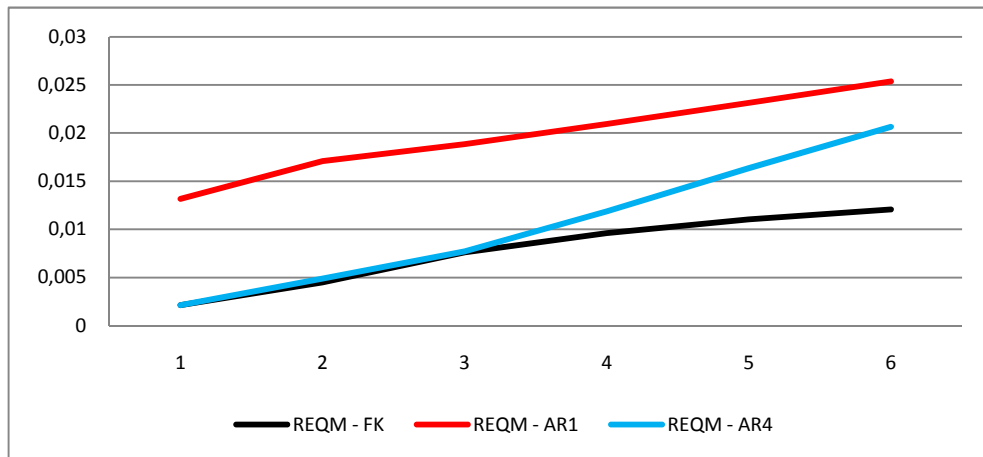


Gráfico VI 8: REQM - Consumo Público - Previsão Trimestral - ARMA

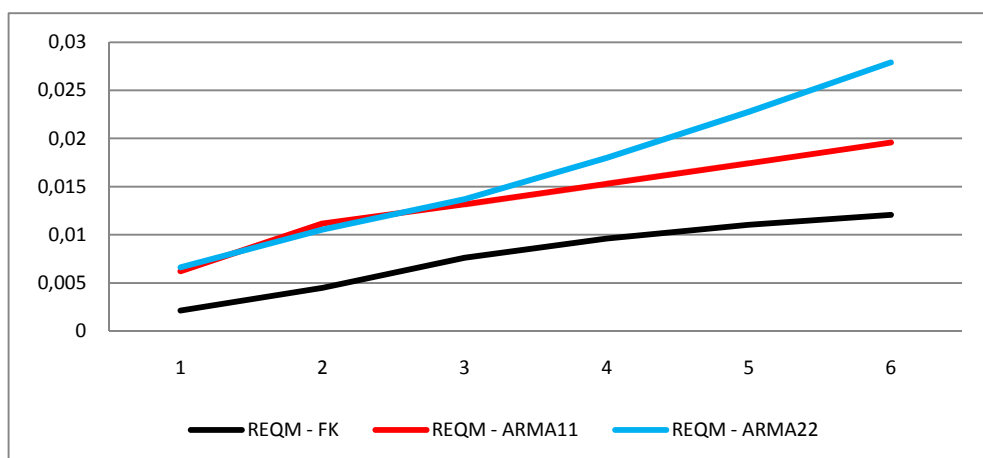


Gráfico VI 9: Exportações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - AR

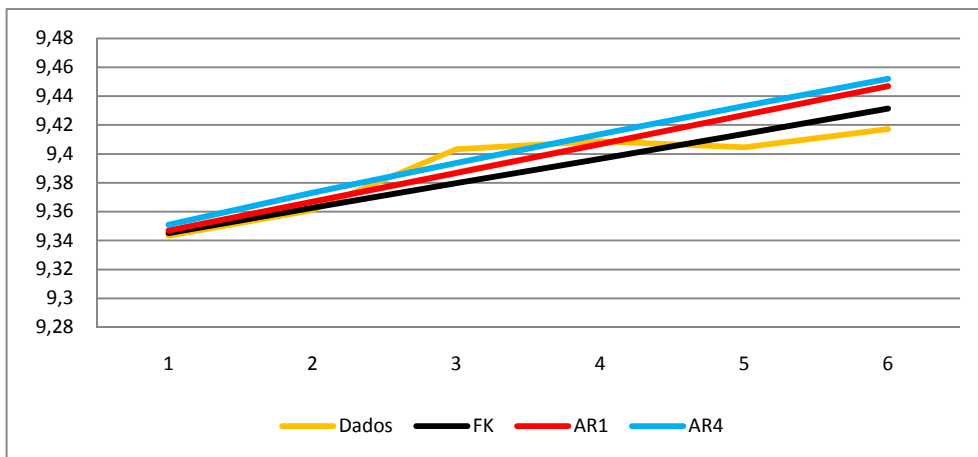


Gráfico VI 10: Exportações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - ARMA

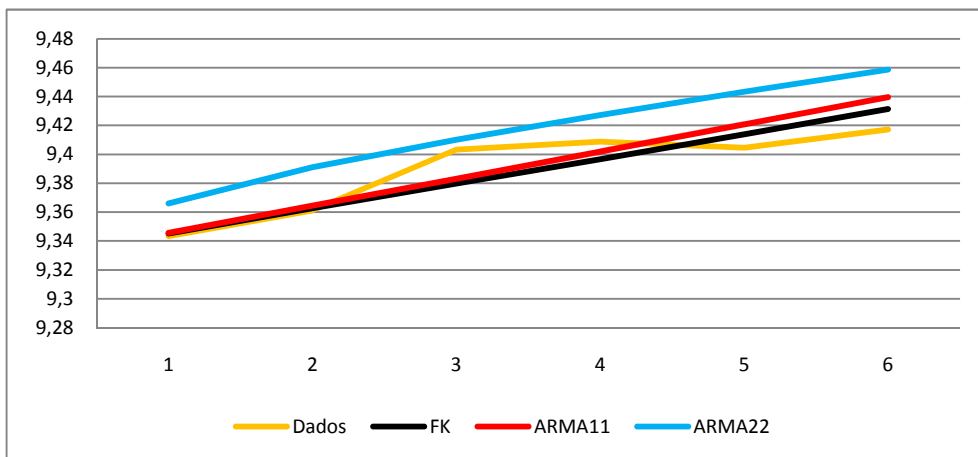


Gráfico VI 11: REQM - Exportações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - AR

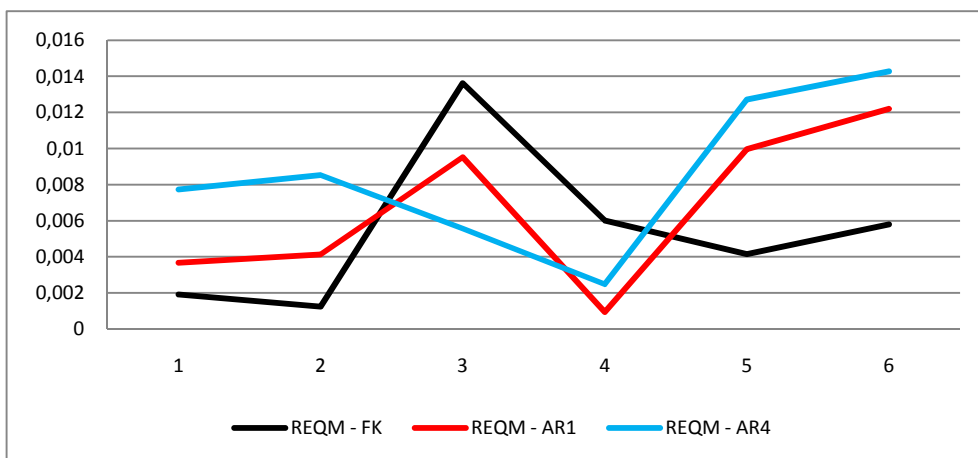


Gráfico VI 12: REQM - Exportações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - ARMA

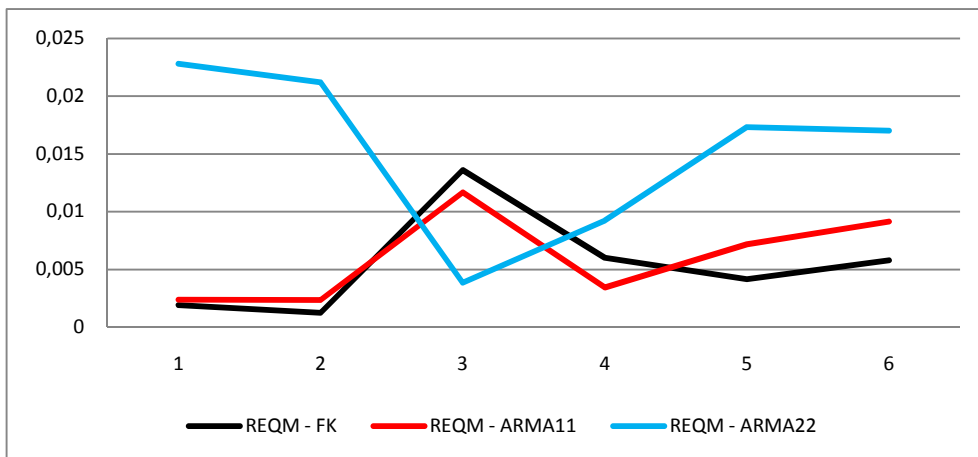


Gráfico VI 13: Formação Bruta em Capital Fixo - Previsão Trimestral - AR

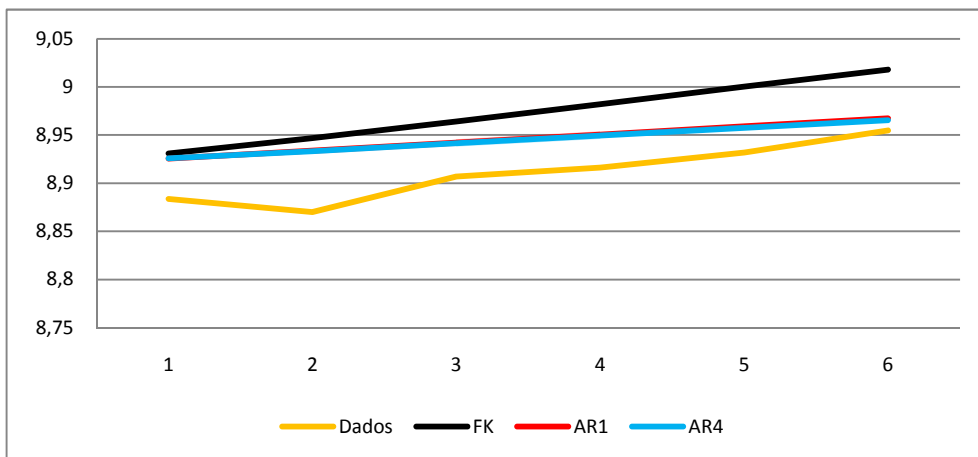


Gráfico VI 14: Formação Bruta em Capital Fixo - Previsão Trimestral - ARMA

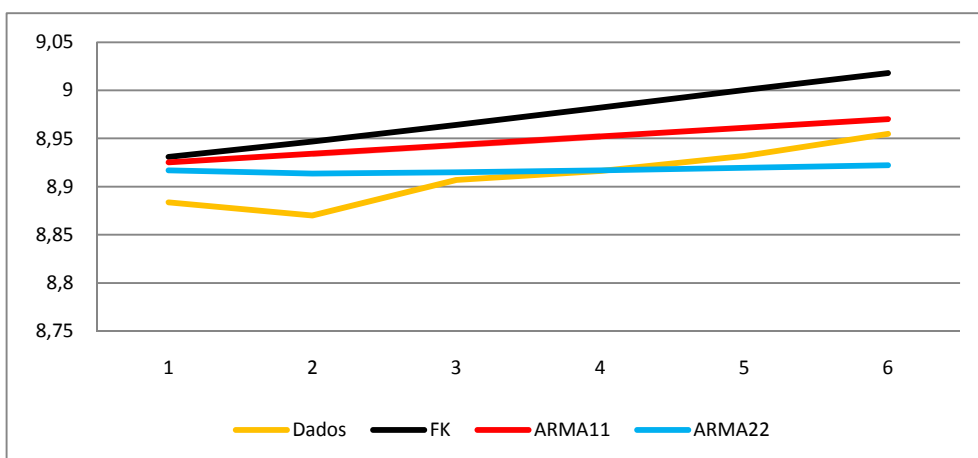


Gráfico VI 15: REQM - Formação Bruta em Capital Fixo - Previsão Trimestral - AR

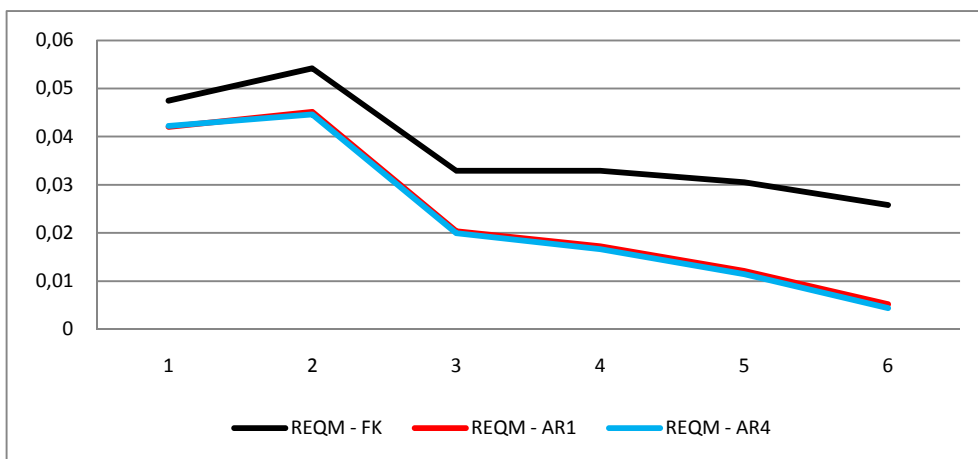


Gráfico VI 16: REQM - Formação Bruta em Capital Fixo - Previsão Trimestral - ARMA

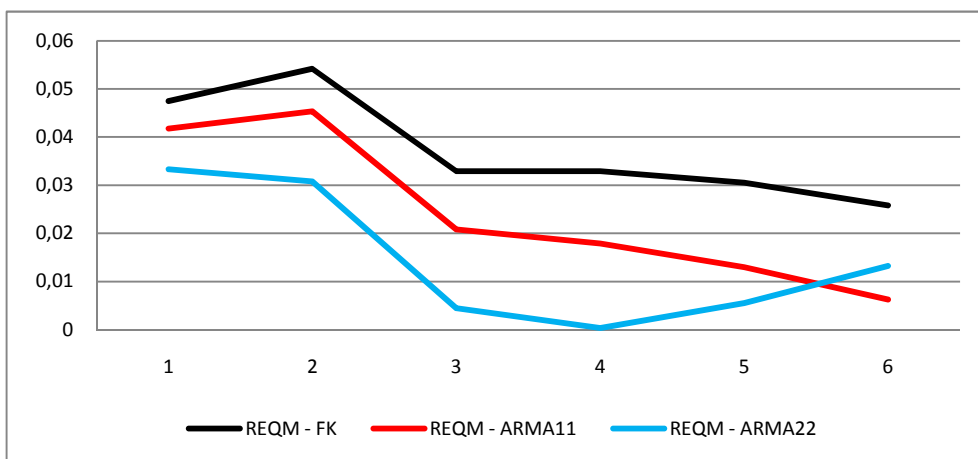


Gráfico VI 17: Importações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - AR

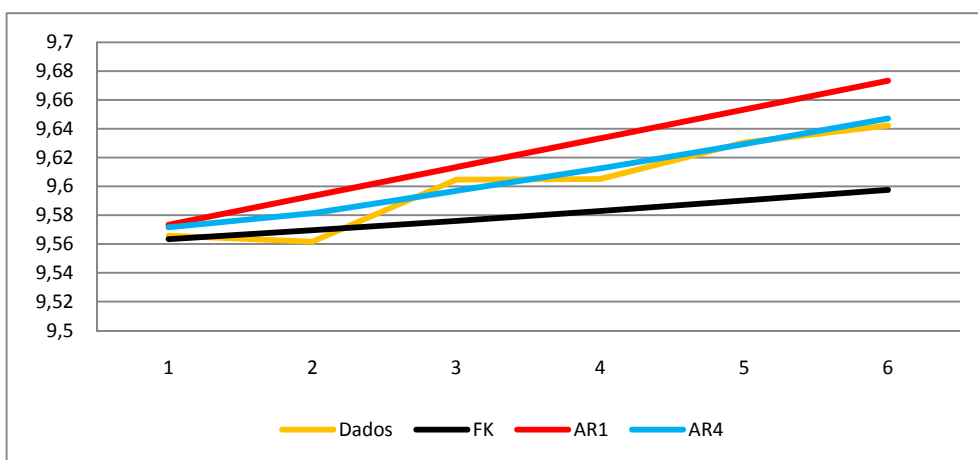


Gráfico VI 18: Importações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - ARMA

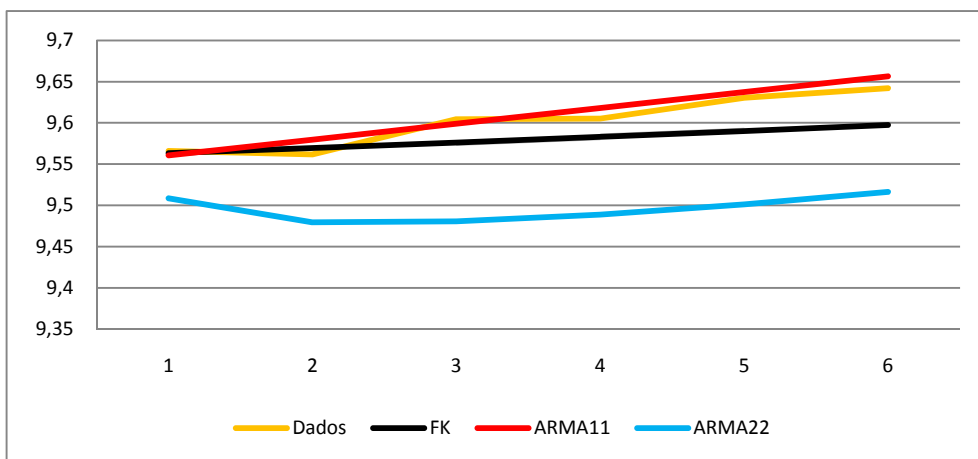


Gráfico VI 19: REQM - Importações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - AR

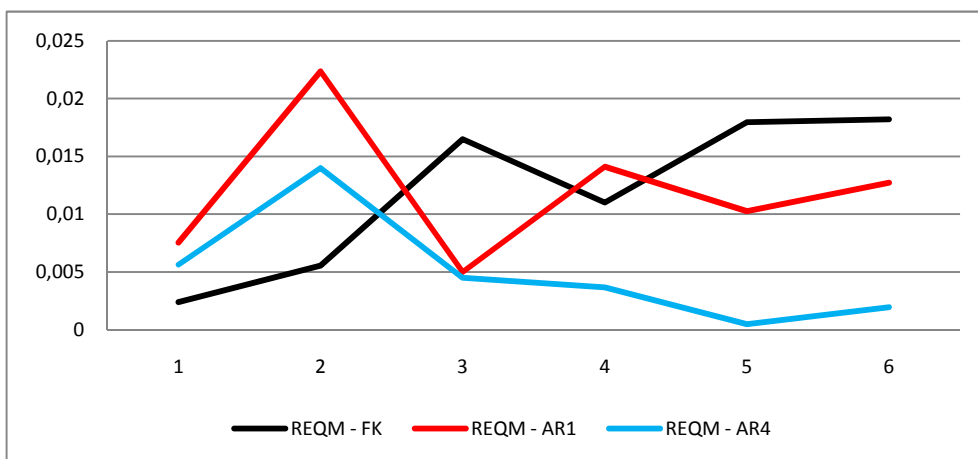


Gráfico VI 20: REQM - Importações de Bens e Serviços - Previsão Trimestral - ARMA

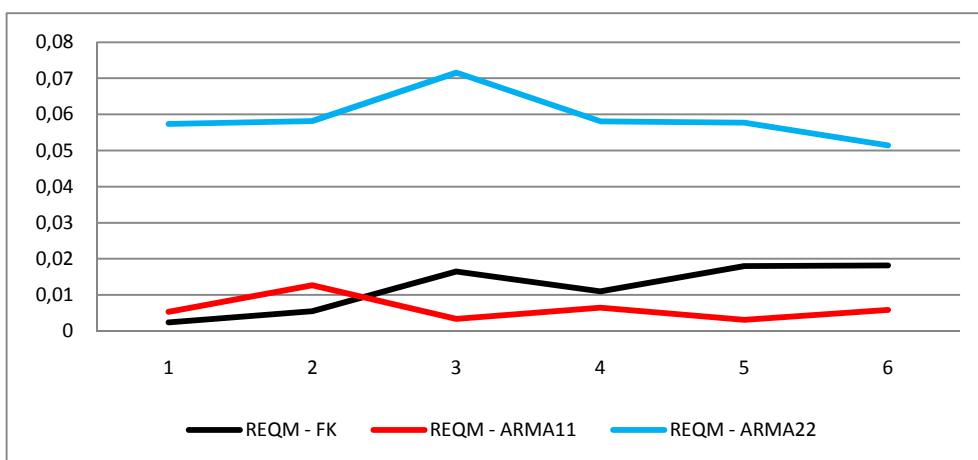


Gráfico VI 21: Taxa de Desemprego - Previsão Trimestral - AR

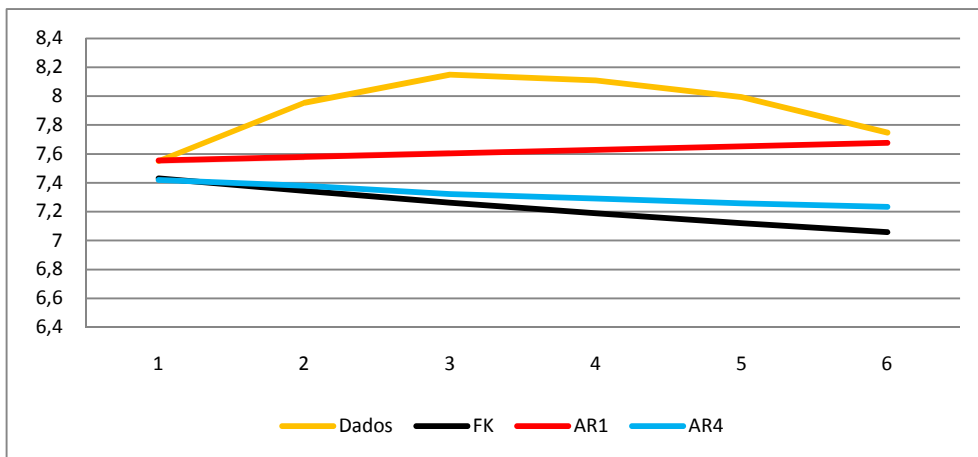


Gráfico VI 22: Taxa de Desemprego - Previsão Trimestral - ARMA

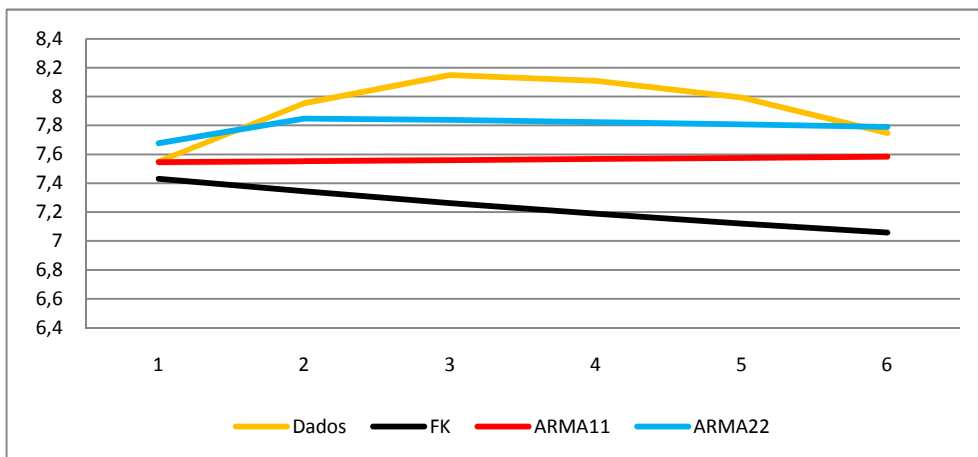


Gráfico VI 23: REQM - Taxa de Desemprego - Previsão Trimestral - AR

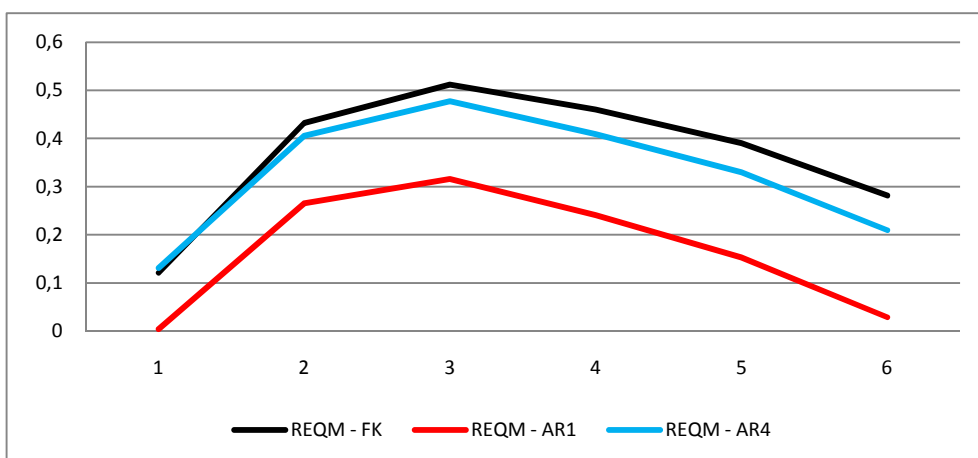
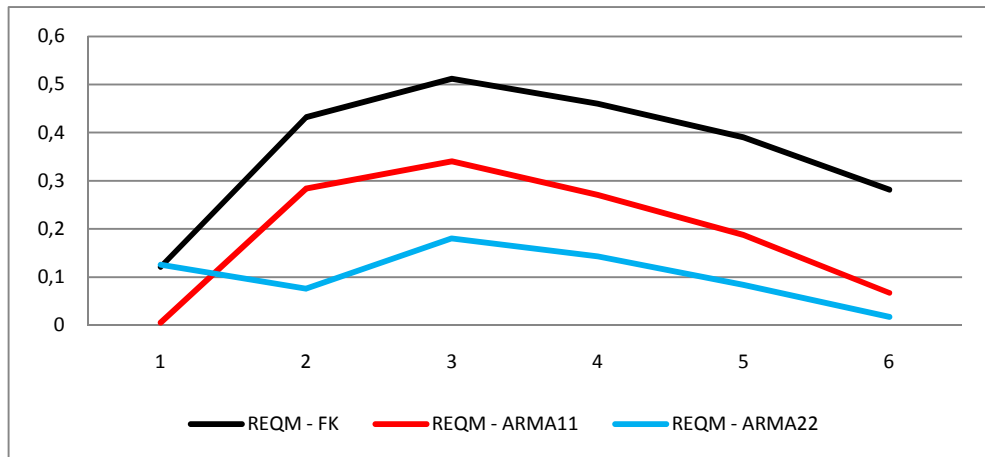


Gráfico VI 24: REQM - Taxa de Desemprego - Previsão Trimestral - ARMA



Bibliografia

- Agudo, F. (1992) *Introdução Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Escolar Editora.
- Almeida, V. e R. Félix (2006) Cálculo do Produto Potencial e do Hiato do Produto para a Economia Portuguesa. *Boletim Económico do Banco de Portugal*, Outubro, 75-92.
- Altissimo, F., D. Marchetti e G. Oneto (2000) The Italian Business Cycle: Coincident and Leading Indicators and Some Stylized Facts. *Temi di Discussione del Servizio Studi Banca d'Italia*, 377, Outubro.
- Amaral, J., F. Louçã, G. Caetano, S. Santos, M. Ferreira e E. Fontáinha (2002) *Introdução à Macroeconomia*, Escolar Editora.
- Anderson, T. (1984) *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2ª edição, New York, John Wiley & Sons.
- Artis, M. (2003) Analysis of European and UK Business Cycles and Shocks, *Study for HM Treasury*.
- Artis, M., H. Krolzig e J. Toro (2004) The European Business Cycle, *Oxford Economic Papers*, 56, Janeiro, 1-44.
- Azevedo, J., S. Koopman e A. Rua (2003) Tracking Growth and the Business Cycle: a Stochastic Common Cycle Model for the Euro Area, *WP 16-03 do Banco de Portugal*, Novembro.
- Banco de Portugal (2008) *Boletim Económico do Banco de Portugal*, 14, 2, Verão.

Baxter, M. e R. King (1999) Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series, *Review of Economic and Statistics*, 81, 573-593.

BCE (2002) Características do Ciclo Económico da Área do Euro na Década de 90, *Boletim Mensal do Banco Central Europeu*, Julho, 41-51.

Bonfim, D. e P. Neves (2002) Comportamento Cíclico da Economia Portuguesa: 1953-1995, *Boletim Económico do Banco de Portugal*, Julho, 23-40.

Box, G., G. Jenkins e G. Reinsel (1994) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3ª edição, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

Bry, G. e C. Boschan (1971) Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Programs, *National Bureau of Economic Research, Inc*, 7-63.

Burman, J. (1980) Seasonal Adjustment by Signal Extraction, *Journal of the Royal Statistical Society, Série A*, 143, 321-337.

Burns, A. e W. Mitchell (1946) *Measuring Business Cycles*. New York, National Bureau of Economic Research.

Cabrero, A., G. Camba-Méndez, A. Hirsch e F. Nieto (2009) Modelling the Daily Banknotes in Circulation in the Context of the Liquidity Management of the European Central Bank, *Journal of Forecasting*, 28, 194-217.

Carvalho, F. e P. Hermanny (2003) Ciclos e Previsão Cíclica: O Debate Teórico e um Modelo de Indicadores Antecedentes para a Economia Brasileira, *Revista de Análise Económica da Faculdade de Ciências Económicas da UFRGS*, 21, 39, Março, 43-64.

Casals, J. e S. Sotoca (2001) The Exact Likelihood for a State Space Model with Stochastic Inputs, *Computers & Mathematics with Applications*, 42, 199-209.

Casals, J., S. Sotoca e M. Jerez (1999) A Fast and Stable Method to Compute the Likelihood of Time Invariant State-Space Models, *Economics Letters*, 65, 329-337.

Clark, P. (1987) The Cyclical Component of U.S. Economic Activity, *Quarterly Journal of Economics*, 102, 4, Novembro, 797-814.

Cleveland, W. e G. Tiao (1976) Decomposition of Seasonal Time Series: a Model for the X-11 Program, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 581-587.

Crato, N. (1990) Modelização Econométrica em Espaço de Estados: Estimação e Previsão com Filtro de Kalman, *Estudos de Economia*, 10, 3, Abril-Junho, 315-348.

Davis, P. (1991) Applied Mathematics as a Social Instrument, in Niss, M., W. Blum e I. Huntley (eds.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Chichester, UK, Ellis Horwood, 10-29.

Davis, P. e R. Hersh (1995) *A Experiência Matemática*, Lisboa, Editorial Gradiva.

Dennis, J. e R. Schnabel (1983) *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc.

Diebold, F. e G. Rudebusch (1996) Measuring Business Cycles: A Modern Perspective, *Review of Economic and Statistics*, 78, 67-77.

Dornbush, R., S. Fischer e R. Stratz (1998) *Macroeconomia*, 7ª edição, Lisboa, McGraw-Hill de Portugal, Lda.

Duarte, A., J. Issler e A. Spacov (2004) Indicadores Coincidentes de Actividade Económica e uma Cronologia de Recessões para o Brasil, *Ensaios Económicos da Fundação Getúlio Vargas*, Fevereiro.

Duncan, D. e S. Horn (1972) Linear Dynamic Recursive Estimation from the viewpoint of Regression Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 815-821.

Durbin, J. (1984) Present Position and Potential Developments: Some Personal Views Time Series Analysis, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 147, 2, 161-173.

Durbin, J. e S. Koopman (2001) *Time Series Analysis by State Space Models*, Oxford University Press.

Edwards, D. e M. Hamson (2001) *Guide to Mathematical Modeling*, 2ª edição. Londres, Palgrave Macmillan.

Enders, W. (2003) *Applied Econometric Time Series*, 2ª edição, John Wiley & Sons.

Farinha, J. e A. Reis (1998) *Tabelas Técnicas*, Edições Técnicas E.T.L.

Fletcher, R. (2000) *Practical Methods of Optimisation*, 2ª edição, John Wiley & Sons.

Franklin, J., J. Powell e M. Workman (1998) *Digital Control of Dynamic Systems*, 3ª edição, Prentice Hall.

Gardner, G., A. Harvey e G. Phillips (1980) Algorithm AS 154: An Algorithm for Exact Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive-Moving Average Models by Means of Kalman Filtering, *Applied Statistics*, 29, 3, 311-322.

Gersch, W. e G. Kitagawa (1983) The Prediction of Time Series with Trends and Seasonalities, *Journal of Business and Economic Statistics*, 1, 3, Julho, 253-264.

Gilchrist, W. (1976) *Statistical Forecasting*, London, Wiley.

Guerreiro, R. (2000) *Definição de Metodologia para a Diminuição do Desemprego Sazonal no Sector Hoteleiro Algarvio*, Tese de Mestrado, Unidade de Ciências Económicas e Empresariais da Universidade do Algarve e Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

Hafer, R., S. Hein e C. Kool (1985) Comparing Multi-State Kalman Filter and ARIMA Forecasts: An Application to the Money Multiplier, *Working Papers Series, Federal Reserve Bank of St. Louis*.

Hamilton, J. (1994a) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

Hamilton, J. (1994b) State-Space Models, In R. Engle e D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Cap. 50, North-Holland, 3039-3080.

Harding, D. e A. Pagan (2002) Dissecting the Cycle: A Methodological Investigation, *Journal of Monetary Economics*, 49, 2, 365-381.

Harding, D. e A. Pagan (2003) A Comparison of Two Business Cycle Dating Methods, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 9, 1681-1690.

Harding, D. e A. Pagan (2006) Measurement of Business Cycles. *Department of Economics University of Melbourne*, 966, Junho.

Harrison, P. e C. Stevens (1971) A Bayesian Approach to Short-Term Forecasting, *Operational Research Quarterly*, 22, 4, Dezembro, 341-362.

Harrison, P. e C. Stevens, C. (1976) Bayesian Forecasting, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 38, 246-257.

Harvey, A. (1984) A Unified view of Statistical Forecasting Procedures, (with discussion), *Journal of Forecasting*, 3, 245-275.

Harvey, A. (1985) Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series, *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 216-227.

Harvey, A. (1989) *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman filter*, Cambridge University Press.

Harvey, A. (1994a) *Time Series: The International Library of Critical Writings in Econometrics*, Vol. 1, Edward Elgar Publishing.

Harvey, A. (1994b) *Time Series: The International Library of Critical Writings in Econometrics*, Vol. 2, Edward Elgar Publishing.

Harvey, A. (1997) Trend, Cycles and Autoregressions, *The Economic Journal*, 107, 192-201.

Harvey, A. e A. Jaeger (1993) Detrending, Stylized Facts and the Business Cycles, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 231-247.

Harvey, A. e G. Philips (1979) Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with Autoregressive-Moving Average Disturbances, *Biometrika*, 66, 49-58.

Harvey, A. e P. Tood (1983) Forecasting Economic Time Series with Structural and Box-Jenkins Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 1, 4, 299-307.

Harvey, A. e T. Trimbur (2003) General Model-Based Filters for Extracting Cycles and Trends in Economic Time Series, *Review of Economics and Statistics*, 85, 244-255.

Harvey, A. S. Koopman e N. Shephard (2004) *State Space and Unobserved Component Models: Theory and Applications*, Cambridge University Press.

Haykin, S. e B. Veen (1999) *Sinais e Sistemas*, John Wiley & Sons.

Hillmer, S. e G. Tiao (1982) An ARIMA-Model Based Approach to Seasonal Adjustment, *Journal of American Statistical Association*, 77, 377, 63-70.

Hodrick, R. e E. Prescott (1997) Postwar U. S. Business Cycles: An Empirical Investigation, *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1, 1-16.

Jiménez, J. e M. Vargas (2008) Indicadores Sintéticos: Una Revisión de los Métodos de Agregación, *Economía, Sociedad y Territorio*, 8, 27, 565-585.

Johnson, R. e D. Wichern (2007) *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6ª edição, Prentice-Hall.

Johnston, J. e J. DiNardo (2001) *Métodos, Econométricos*, 6ª edição, McGraw-Hill de Portugal.

Jones, R. (1980) Maximum Likelihood Fitting of ARMA Models to Time Series with Missing Observations, *Technometrics*, 22, 3, Agosto, 389-395.

Jong, P. e S. Chu-Chun-Lin (2003) Smoothing with an Unknown Initial Condition, *Journal of Time Series Analysis*, 24, 2, Março, 141-148.

Jong, P. e M. Mackinnon (1988) Covariances for Smoothed Estimates in State Space Models, *Biometrika*, 75, 601-602.

Kalman, R. (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, Série D*, 82, 35-45.

Kalman, R. (1982) Identifiability and Problems of Model Selection in Econometrics, In W. Hildebrand (eds.), *Advances in Econometrics: Invited Paper for the Fourth World Congress of the Econometrics Society at Aix-en-provence, Setembro, 1980*, Cambridge University Press, 169-207.

Kalman, R. e R. Bucy (1961) New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering, Série D*, 83, 95-107.

Kim, C. e C. Nelson (1999) *State-Space Models with Regime Switching*, Cambridge, MA, MIT Press.

Koopman, S. (1993) Disturbance Smoother for State Space Models, *Biometrika*, 80, 117-126.

Koopman, S., J. Wang e E. Zivot (2004) State Space Modelling in Macroeconomics and Finance using SsfPack in S+Finmetrics, In Harvey, A., S. Koopman e N. Shephard (eds.), *State Space and Unobserved Component Models: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 284-335.

Kramer, S. (1997) *A História Começa na Suméria*, Mem Martins, Europa América.

Lagarias, J., J. Reeds e M. Wright (1998) Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method, *SIAM Journal of Optimization*, 9, 1, 112-147.

Lathi, P. (2007) *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª edição, Bookman.

Lewis, J. (1995). Fast Template Matching, *Vision Interface 95, Canadian Image Processing and Pattern Recognition Society*, Maio, 120-123.

Lutkepohl, H. (1993) *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, 2ª edição, Springer-Verlag.

Maddison, A. (1995) *Monitoring the World Economy: 1820-1992*, Paris, OECD Development Centre.

Makridakis, S., S. Wheelwright e R. Hyndman (1998) *Forecasting Methods and Applications*, 3ª edição, New York, John Wiley & Sons.

Maravall, A. (1985) On Structural Time Series Models and the Characterization of Components *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 350-355.

Mariano, R. e Y. Murasawa (2003) A New Coincident Index of Business Cycles based on Monthly and Quarterly Series, *Journal of Applied Econometrics*, 18, 4, 427-443.

Marques, C. (1998) *Modelos Dinâmicos Raízes Unitárias e Cointegração*, Lisboa, Edinova.

Mateus, A. (1998) *Economia Portuguesa desde 1910*, Editorial Verbo.

Mateus, A. (2001) *Economia Portuguesa*, 2ª edição, Editorial Verbo.

Matos, J. (1995) *Modelação Matemática*, Lisboa, Universidade Aberta.

Maybeck, P. (1979) *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Vol. 1, New York, Academic Press.

Morrison, G. e D. Pike (1977) Kalman Filtering Applied to Statistical Forecasting, *Management Science*, 23, 7, Março, 768-774.

Murteira, B. (1990) *Probabilidades e Estatística*, 2ª edição, Vol. 1, McGraw-Hill Portugal.

Murteira, B., D. Muller e K. Turkman (1993) *Análise de Sucessões Cronológicas*, McGraw-Hill de Portugal.

Murteira, B., C. Ribeiro, J. Silva e C. Pimenta (2002) *Introdução à Estatística*, McGraw-Hill de Portugal.

Nelder, J. e R. Mead (1965) A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal*, 7, 308-313.

Nise, N. (2007) *Control Systems Engineering*, 5ª edição, John Wiley & Sons, Inc.

Niss, M. (1989) Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula, In Blum, W., J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messmer e L. Profke (Eds.), *Applications and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*, Chichester, Ellis Horwood, 22-31.

Nocedal, J. e S. Wright (1999) *Numerical Optimization*, New York, Springer-Verlag Inc.

Ogata, K. (1987) *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall.

Ogata, K. (2003) *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Prentice-Hall Brasil.

Plackett, R. (1950) Some Theorems in Least Squares, *Biometrika*, 37, 1, 149-157.

Pollock, D. (1999) *A Handbook of Time Series Analysis, Signal Processing and Dynamics*, London, Academic Press.

Pollock, D. (2000) Trend Estimation and Detrending Via Rational Square Wave Filters, *Journal of Econometrics*, 99, 317-334.

Pollock, D. (2001a) Filters for Short Nonstationary Sequences *Journal of Forecasting*, 20, 341-355.

Pollock, D. (2001b) The Methodology for Trend Estimation, *Economic Modelling*, 18, 75-96.

Pollock, D. (2003a) Recursive Estimation in Econometrics, *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*, 44, Julho, 35-75.

Pollock, D. (2003b) Improved Frequency-Selective Filters, *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*, 42, 279-297.

Ponte, J. (1992) Problemas de Matemática e Situações da Vida Real, *Revista de Educação do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*, 2, Outubro, 95-108.

Reis, E. (2001) *Estatística Multivariada Aplicada*, 2ª edição, Edições Silabo.

Rosenberg, B. (1973) Random Coefficients Models: The Analysis of a Cross-Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression, *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, 399-428.

Rua, A. (2004) Um novo Indicador Coincidente para a Economia Portuguesa. *Boletim Económico Banco de Portugal*, Junho, 21-29.

Schweppe, F. (1965) Evaluation of Likelihood Functions for Gaussian Signals, *IEEE Transactions on Information Theory*, 11, 61-70.

Shanno, D. (1970) Conditioning of Quasi-Newton methods for function minimization, *Mathematics of Computing*, 24, 647-656.

Silva, J. (1994) *Princípios de Análise Matemática Aplicada*, Lisboa, McGraw-Hill de Portugal.

Stewart, J. (2005) *Cálculo*, 4ª edição, Vol. 1, São Paulo, Pioneira Thomson Learning.

Steyn, I. (1996) *State Space Models in Econometrics: A Field Guide*, Amsterdam, Vrije Universiteit.

Stigler, S. (1986) *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Stock, J. e M. Watson (1988) A Probability Model of The Coincident Economic Indicator, *NBER Working Paper*, 2772, Novembro.

Stock, J. e M. Watson (1989) New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators, In J. Blanchard e S. Fischer (Eds.), Vol. 4, *NBER Macroeconomic Annual*, Cambridge, MIT Press, 351-409.

Stock, J. e M. Watson (1990). Business Cycle Properties of Selected U.S. Economic Time Series, *NBER Working Paper*, 3376, Junho, 1959-1988.

Stock, J. e M. Watson (1993) Business Cycles, Indicators, and Forecasting, In Stock, J. e M. Watson (Eds.), Vol. 28, *NBER Studies in Business Cycles*.

Swetz, F. e J. Hartzler (1991) *Mathematical Modeling in the Secondary Scholl Curriculum*, Reston, NCTM.

TCB (2001) Components and Construction of Composite Indexes, *Business Cycle Indicators Handbook*, New York, The Conference Board, 95-111.

Theil, H. (1963) On the Use of Incomplete Prior Information in Regression, *Journal of American Statistical Association*, 58, 401-414.

Theil, H. (1971) *Principles of Econometrics*, New York, John Wiley and Sons.

Theil, H. e A. Goldberger (1961) On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics, *International Economic Review*, 2, 65-78.

Turban, E., E. Aronson e T. Liang (2005) *Decision Support Systems and Intelligent Systems*, 7ª edição, Prentice Hall.

Vaccaro, R. (1995) *Digital Control: A State-Space Approach*, New York, McGraw-Hill, Inc.

Wada, T. e P Perron (2006) An Alternative Trend-Cycle Decomposition using a State Space Model with Mixtures of Normals: Specifications and Applications to Internacional Data, *Department of Economics Boston University*, Setembro.

Welch, G. e G. Bishop (2006) An Introduction to the Kalman Filter. *Department of Computer Science University of North Carolina, Chapel Hill, NC 27599-3175*, Julho.

West, M. e J. Harrison (1989) *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, New York, Springer-Verlag.

Wheelwright, S. e S. Makridakis (1985) *Forecasting Methods for Management*, 4ª edição, New York, John Wiley & Sons Inc.

Woźniak, P. e W. Paczyński (2007) A Time-Frequency Analysis of Business Cycle Coherence Between the Euro Area and the EU New Member States, *CERGE-EI Foundation and Global Development Network*, Julho.

Zarnowitz, V. (1992) Business Cycles: Theory, History, Indicators, and Forecasting. In *Studies in business cycles (Eds.)*, Vol. 27, University of Chicago Press.