



**Universidade do Algarve**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

**O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ACTIVIDADES DE  
INVESTIGAÇÃO NUMA TURMA DO 5º ANO DO  
ENSINO BÁSICO**

**Isa Maria dos Reis Correia Martins**

Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Faro

2010



**Universidade do Algarve**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

**O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM ACTIVIDADES DE  
INVESTIGAÇÃO NUMA TURMA DO 5º ANO DO  
ENSINO BÁSICO**

**Isa Maria dos Reis Correia Martins**

Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Orientadora: Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

Faro

2010

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Maria da Graça Nunes da Silva Rendeiro

Marques, Professora Associada da Faculdade de

Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Vogais: Doutora Susana Paula Graça Carreira, Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, na qualidade de orientadora;

Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;

Doutora Nélia Maria Pontes Amado, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve;

Doutora Ana Maria Dias Roque Lemos Boavida, Professora Adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

## Resumo

Este estudo incide na diversidade de raciocínios matemáticos presentes nos alunos de uma turma de 5º ano – da qual sou professora – na realização de actividades de investigação.

Pretendendo evidenciar e explicar a pluralidade dos raciocínios matemáticos, formularam-se as questões de investigação: (i) Que formas diferenciadas de raciocínio matemático apresentam os alunos e quais as razões que os podem conduzir a determinado raciocínio? (ii) De que modo os raciocínios dos alunos lhes permitem chegar a resultados, com ou sem recurso aos conteúdos matemáticos tratados nas aulas? (iii) Como é que os alunos compreendem as situações propostas e de que modo essa apropriação evolui com o decorrer da prática neste tipo de actividades?

O quadro teórico apresenta conceitos e perspectivas que caracterizam a natureza e o papel das actividades de investigação na educação matemática e analisa a noção de raciocínio matemático e os seus processos fundamentais.

Adoptou-se uma abordagem qualitativa, com o *design* de estudo de caso. A recolha de dados incluiu a observação participante, entrevistas aos alunos, notas de campo e documentos produzidos pelos alunos.

Os alunos apresentam formas diferenciadas de raciocínio, que evidenciam os seguintes processos: concretização de dados; registo e organização de dados; procura de regularidades; formulação e justificação de conjecturas; teste e validação, particularização/clarificação e generalização. A diversidade foi uma evidência do estudo: alguns alunos revelam facilidade e persistência na formulação, teste e confirmação ou refutação de conjecturas, com tendência para as formalizarem algebricamente; outros limitam-se à formulação, evidenciando maior necessidade de manipulação e de experimentação, nem sempre conseguindo generalizar. Foi saliente a importância do uso de várias representações na articulação dos raciocínios dos alunos.

Durante o estudo, os alunos evoluíram em muitos aspectos: crescente envolvimento, entusiasmo e empenho na execução das tarefas, auto-confiança, criatividade, autonomia, curiosidade, persistência, mobilização de conhecimentos matemáticos e capacidade de comunicação.

**Palavras-chave:** actividades de investigação, raciocínio matemático, pensamento matemático, métodos pessoais dos alunos, representações matemáticas, estudo de caso, sala de aula.

## Abstract

This study focuses on the diversity of mathematical reasoning present in students of a 5th grade class – of which I am a teacher – in carrying out investigative activities.

Intending to highlight and explain the diversity of students' mathematical reasoning, the following research questions were undertaken: (i) What are the different forms of mathematical reasoning that students present and what are the reasons that may lead to specific reasoning? (ii) How does students' reasoning allow them to achieve results, with or without taking in the mathematical contents covered in classes? (iii) How do students understand the situations proposed and how does such ownership evolve over the course of practice in such activities?

The theoretical framework presents concepts and perspectives that set down the nature and role of investigative activities in mathematics education and provides an analysis of the concept of mathematical reasoning and its fundamental processes.

A qualitative research approach was adopted and the design of case study was applied. Data collection included participant observation, interviews with students, field notes and documents produced by students.

It was concluded that students have different ways of reasoning, highlighting the following processes: implementing data; recording and organizing data, searching for regularities; formulation and justification of conjectures; testing and validation of conjectures, particularization/clarification and generalization. Diversity was an evidence of the study: some students reveal ease and persistence in formulating, testing and confirming or refuting conjectures, with a tendency to formalize algebraically, while others limit themselves to the formulation of conjectures, showing a greater need for manipulation and experimentation, not always managing to generalize. It was clear the importance of using multiple representations in the articulation of students' reasoning.

Throughout the study, students have evolved in many ways: increasing involvement, growing enthusiasm and commitment in performing the tasks, self-confidence, creativity, autonomy, curiosity, persistence, mobilization of mathematical contents and communication skills.

**Keywords:** investigative activities, mathematical reasoning, mathematical thinking, students' personal methods, mathematical representations, case study, classroom.

## Agradecimentos

*Dedico este trabalho à minha filha, pelos beijinhos e abraços que me deu, além do tempo que lhe roubei e aos meus queridos e saudosos pai, tio Joaquim Casimiro e avô Reis que certamente ficariam bem contentes com a concretização deste meu e seus desejos em prol do meu desenvolvimento pessoal e profissional.*

Agradeço:

À minha mãe e ao meu marido, pelo carinho, compreensão e apoio nos momentos mais difíceis.

À minha colega Madalena Pinto, pelo desafio que me propôs e que eu aceitei ao inscrever-me no presente mestrado.

À Professora Doutora Susana Carreira, pela excelente eficácia e qualidade na orientação deste estudo, além da total disponibilidade manifestada e do apoio amigo em todos os domínios.

À Professora Doutora Nélia Amado, pelo estímulo, incentivo e força.

À Mestre Cristolinda Costa, pelo empenho e colaboração na acção de formação contínua de Matemática, a partir da qual consegui aguçar ainda mais o meu interesse pelos processos de raciocínio dos alunos.

Às minhas tias Graça e Isabel, pelo apoio incondicional, incentivando-me com conversas sempre animadoras, amigas e estimulantes.

Ao meu tio Alcino, pelo exemplo de boa disposição, tranquilidade e prontidão que me transmitiu em momentos de maior preocupação.

À minha prima Cláudia, ao João Carrilho, à Cláudia Nobre e à Dina Mercedes, pela ajuda nas traduções.

À minha prima Cátia, pela amizade e exemplo de profissionalismo.

À minha sogra, pelas palavras de força nos últimos momentos de maior cansaço.

À Helena Sousa, da Educação Especial, pelas conversas interessantes relativas a questões metodológicas.

À São Santos, pelo exemplo de dinamismo e qualidade no ensino da Matemática.

Aos meus colegas de mestrado, pela camaradagem e encorajamento mútuos e, em especial, à Margarida pela ajuda nas tecnologias.

Aos meus alunos, pela disponibilidade, cooperação e empenho demonstrados.



# ÍNDICE

Resumo .....	i
Agradecimentos .....	iii
Índice de figuras .....	vii
Índice de quadros .....	xiii
<b>CAPÍTULO I</b> .....	1
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1. <b>Motivações do estudo</b> .....	1
1.2. <b>O problema e as questões de investigação</b> .....	8
<b>CAPÍTULO II</b> .....	13
<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	13
2.1. <b>As actividades de investigação</b> .....	13
2.1.1. A integração das actividades de investigação na Matemática escolar .....	13
2.1.2. O papel das actividades de investigação na aprendizagem da Matemática .....	23
2.1.3. Dificuldades na/da aplicação das actividades de investigação .....	43
2.1.4. O papel do professor na realização das actividades de investigação .....	47
2.2. <b>O raciocínio/pensamento matemático</b> .....	54
2.2.1. O que se entende por raciocínio matemático .....	54
2.2.2. Processos de raciocínio matemático .....	60
2.2.3. O raciocínio matemático no currículo .....	82
<b>CAPÍTULO III</b> .....	85
<b>METODOLOGIA</b> .....	85
3.1. <b>Descrição da experiência pedagógica</b> .....	85

<b>3.2. Abordagem metodológica do estudo</b> .....	88
3.2.1. A metodologia de estudo de caso .....	88
3.2.2. O desenho do presente estudo de caso .....	98
<b>CAPÍTULO IV</b> .....	105
<b>ANÁLISE DE DADOS</b> .....	105
<b>4.1. As actividades</b> .....	105
4.1.1. <i>Os saltos das rãs</i> .....	105
4.1.2. <i>Adriana</i> .....	118
4.1.3. <i>Torres de cubos</i> .....	129
4.1.4. <i>Os Aviões</i> .....	143
<b>4.2. As entrevistas e dados dos relatórios</b> .....	160
<b>CAPÍTULO V</b> .....	175
<b>CONCLUSÕES</b> .....	175
<b>5.1. Matriz do estudo</b> .....	175
<b>5.2. Conclusões do estudo</b> .....	178
5.2.1. Diversidade de formas de raciocínio e processos matemáticos utilizados pelos alunos .....	178
5.2.2. Evolução do desempenho dos alunos em actividades de investigação e o desenvolvimento de competências matemáticas .....	189
5.2.3. Actividades de investigação como metodologia para o desenvolvimento do currículo e para a motivação dos alunos .....	193
5.2.4. Voltando ao raciocínio matemático .....	194
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	201
<b>ANEXOS</b> .....	217

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Item 6 da prova de aferição do 6º ano, 2008 .....	4
Figura 2. Resolução de um aluno com base na comparação dos rectângulos que constituem os cartões e a moldura .....	5
Figura 3. Resolução de um aluno mediante a utilização de palavras .....	5
Figura 4. Item 8 da prova de aferição do 6º ano, 2009 .....	6
Figura 5. Resolução esquemática de um aluno evidenciando a noção de fracção .....	6
Figura 6. A actividade de investigação (Oliveira, 1998, p. 15) .....	30
Figura 7. Relação entre problemas e investigações (Frobisher, 1994, p. 155, citado em Brocardo, 2001, p. 95) .....	32
Figura 8. Esquema das tarefas (Ponte, 2003c) .....	34
Figura 9. Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005) .....	35
Figura 10. Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005) .....	36
Figura 11. Processos matemáticos (Frobisher, 1994, p. 155), citado em Fonseca (2000), p. 95) .....	75
Figura 12. A descoberta das primeiras regras – «regras funcionais», Aluno 3 do Grupo 3.....	107
Figura 13. Tabela da aluna 2 do Grupo 1 com o registo do número de rãs e do número de movimentos .....	109
Figura 14. Tabela da aluna 3 do Grupo 2 com o registo do número de rãs e do número de movimentos .....	109
Figura 15. Enunciação da regra que permite determinar o número de movimentos, Aluna 2 do Grupo 1.....	111
Figura 16. Enunciação de regras e formulação de conjecturas da Aluna 3 do Grupo 2.....	112

Figura 17. Regra que estabelece a relação entre o número de rãs e o número total de movimentos (arrastamentos mais saltos), Aluna 2 do Grupo 1 .....	113
Figura 18. Regras que, além da soma de par com ímpar e da relação entre o número de rãs e o número de movimentos, enunciam qual o resultado do produto de um par com um ímpar, de dois pares e de dois ímpares, Aluna 3 do Grupo 2 .....	113
Figura 19. Esquema representativo dos movimentos a efectuar com duas rãs azuis e duas rãs verdes, Aluna 2 do Grupo 1 .....	114
Figura 20. Estratégia mais frequente na determinação da 39ª letra da escrita repetida do nome Adriana, Aluno 4 do Grupo 1 .....	119
Figura 21. Estratégia para determinação da 39ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de letras .....	119
Figura 22. Estratégia para determinação da 105ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de letras, Aluno 3 do Grupo 4 .....	119
Figura 23. Estratégia para determinação da 105ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de várias cadeias elementares .....	120
Figura 24. Estratégia para determinação do número de vezes que o nome Adriana aparece completo, com a utilização de 58 letras, Aluno 1 do Grupo 2 .....	120
Figura 25. Justificação da resposta à questão 3 .....	121
Figura 26. Formulação de uma regra que permite saber quantas letras são necessárias para que a sequência de letras termine com o nome Adriana completo, Aluna 4 do Grupo 3 .....	121
Figura 27. Generalização da regra que permite saber quantas letras são necessárias para que a sequência de letras termine com o nome Adriana completo .....	122
Figura 28. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 16 «A», Aluna 2 do Grupo 1 .....	122
Figura 29. Enunciação do entendimento de que, numa sequência com 16 «A», a última letra dessa sequência não tem de ser necessariamente um A .....	122

Figura 30. Esquema determinativo do número de vezes em que aparece a palavra Adriana numa sequência de 35 «A» com o recurso aos múltiplos de 3, Aluno 3 do Grupo 5 .....	123
Figura 31. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 35 «A» e a letra em que pode terminar a sequência (parte inicial) .....	124
Figura 32. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 35 «A» e a letra em que pode terminar a sequência (parte final) .....	124
Figura 33. Formulação de conjecturas referentes à determinação do número da posição de qualquer letra «A» na escrita repetida da palavra Adriana, Aluna 3 do Grupo 2 .....	124
Figura 34. Organização de dados com a procura de regularidades e a formulação de conjecturas da Aluna 4 do Grupo 3 .....	125
Figura 35. Organização de dados com a procura de regularidades e representação em tabela da Aluna 4 do Grupo 2 .....	125
Figura 36. Reconhecimento dos múltiplos de 7 .....	126
Figura 37. Explicação, por palavras, de uma conclusão referente ao número de «A» consecutivos na escrita repetida do nome Adriana, Aluna 2 do Grupo 1...	126
Figura 38. Organização de dados com a procura de regularidades e a formulação de conjecturas referentes ao número de «A» consecutivos, Aluna 2 do Grupo 1.....	126
Figura 39. Determinação do número de torres consoante a sua altura, Aluno 4 do Grupo 4 .....	130
Figura 40. Representação das torres utilizando as letras A e V, Aluna 2 do Grupo 4..	131
Figura 41. Representação das torres utilizando o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1 .....	131

Figura 42. Representação das torres utilizando as palavras «vermelho» e «amarelo», Aluna 3 do Grupo 2 .....	132
Figura 43. Justificação de estratégia da Aluna 2 do Grupo 1 .....	132
Figura 44. Enunciação da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 2 do Grupo 4 .....	133
Figura 45. Enunciação 2 da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 1 do Grupo 3.....	133
Figura 46. Enunciação 3 da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 2 do Grupo 1.....	134
Figura 47. Enunciação 4 da regra que permite determinar o número de torres, Aluno 2 do Grupo 2 .....	134
Figura 48. Determinação exaustiva do número de torres, Aluna 3 do Grupo 2.....	136
Figura 49. Determinação do número de torres mediante o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1.....	137
Figura 50. Legenda referente à determinação do número de torres mediante o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1 .....	137
Figura 51. Simetria com as torres, Aluna 2 do Grupo 1 .....	138
Figura 52. Evidência da compreensão do porquê do raciocínio recursivo, Grupo 1 ...	139
Figura 53. Formulação de conjecturas, determinação de regularidades e padrões na actividade torres de cubos .....	140
Figura 54. Primeiros termos da sequência dos aviões .....	144
Figura 55. Determinação dos 3º e 4º termos da sequência de aviões, Grupo 1 .....	145
Figura 56. Tabela para determinação do número de aviões, Aluna 2 do Grupo1 .....	145
Figura 57. Enunciação da primeira regularidade da actividade aviões, Grupo 1 .....	146
Figura 58. Esquema explicativo da regularidade encontrada, Grupo 1 .....	146

Figura 59. Explicação da regularidade encontrada com recurso ao raciocínio proporcional, Aluno 4 do Grupo 5 .....	147
Figura 60. Primeira conjectura da actividade <i>Os Aviões</i> , Grupo 2 .....	147
Figura 61. Resposta à questão 2 da actividade <i>Os Aviões</i> , Grupo 1 .....	148
Figura 62. Esquema justificativo do porquê do número de aviões ser ímpar, Aluna 2 do Grupo 1 .....	148
Figura 63. Enunciação do porquê do número de aviões ser ímpar, Grupo 1 .....	148
Figura 64. Enunciação e esquematização do porquê do número de aviões ser ímpar...	149
Figura 65. Refutação de conjectura, Aluna 2 do Grupo 1 .....	149
Figura 66. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 1.....	151
Figura 67. Determinação do termo geral da sequência aviões, Grupo 1 .....	151
Figura 68. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 3.....	152
Figura 69. Tabela do Grupo 3 com a indicação da ordem dos termos e dos valores correspondentes .....	153
Figura 70. Tabela do Grupo 2 com a ordem e o número de aviões correspondente ...	153
Figura 71. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 2.....	155
Figura 72. Determinação de padrões e regularidades referentes à actividade aviões, Grupo 2 .....	155
Figura 73. Determinação de regularidades na actividade «Berlindes 2», Aluna 3, Grupo 2.....	181
Figura 74. Determinação de regularidades na actividade «Aviões», Aluna 3, Grupo 2.....	182



## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (Ernest, 1996, p. 32, citado por Brocardo, 2001, p. 122) .....	36
Quadro 2. Actividades de investigação realizadas .....	86
Quadro 3. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 1.....	161
Quadro 4. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 2 .....	161
Quadro 5. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 3 .....	163
Quadro 6. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 4 .....	163
Quadro 7. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 5 .....	164
Quadro 8. Definição, objectivos e condições das actividades de investigação na perspectiva dos alunos .....	165
Quadro 9. Opiniões relativas ao trabalho em grupo .....	167
Quadro 10. Justificação do uso de tabelas e/ou materiais concretos .....	168
Quadro 11. Procedimentos adoptados .....	170

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Motivações do estudo

#### Interesse pedagógico pelas formas de resolução dos alunos

A Matemática sempre constituiu a disciplina que mais me fascinou, ao longo da minha vida pessoal e profissional, quer pelo prazer obtido na resolução de tarefas matemáticas e pelos desafios que coloca ao raciocínio, quer pela sua aplicabilidade em situações práticas do dia-a-dia. Assim, considerando-a como disciplina de eleição, a minha atitude face à Matemática sempre foi muito positiva, ficando indignada com o facto de parecer que esta é geralmente entendida como um *bicho-de-sete-cabeças*, uma disciplina *só para alguns cujas capacidades são de nível superior*.

Na realidade, a partir da minha experiência profissional, posso afirmar que os alunos são capazes de fazer Matemática com todo o entusiasmo que daí pode advir. Além disso, apresentam raciocínios bastante eficazes e criativos. Contudo, nem sempre lhes são dadas oportunidades para o experimentar, sendo claro que a natureza e a regularidade das tarefas é fundamental para despoletar tais sentimentos e capacidades (Francisco & Maher, 2005; Greer, 1997; Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999). Relativamente a este ponto, é claro que também as práticas educativas têm evoluído, ou pelo menos deseja-se que assim seja, até porque estas têm de acompanhar a permanente mudança, própria da sociedade de informação, que cada vez mais nos exige maior flexibilidade e capacidade de adaptação. Numa era de desenvolvimento tecnológico e de acelerada evolução do conhecimento, mais do que a resolução de exercícios rotineiros, baseados na repetição de técnicas, há que colocar em evidência ou enfatizar outras competências, nomeadamente o pensamento autónomo e o raciocínio matemático, a interpretação de situações novas e a capacidade crítica, a cooperação, o uso das tecnologias e a comunicação, promovendo-se, ao máximo, o potencial de cada indivíduo (Jesus, 2004; Ponte, 2005).

Com este propósito, e querendo partilhar com os alunos o meu gosto pela Matemática, tem sido minha preocupação constante o tipo de tarefas a propor-lhes, além de estar bastante atenta às suas formas de resolução. Na verdade, considero que a análise das diferentes formas de resolução dos alunos pode tornar-se uma *ferramenta* bastante útil no processo de ensino-aprendizagem, na medida em que pode proporcionar um maior à-vontade no domínio da Matemática e o sentido de fazer Matemática por parte dos alunos. Estes, confrontados com um ambiente de aprendizagem favorável, em que tenham tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, certamente que se sentirão mais estimulados e valorizados. Ademais, ao reconhecerem que, muitas vezes, não há só uma via para percorrer determinado caminho e que, para além do chegar à resposta correcta, os processos utilizados podem fazer *desabrochar* as suas capacidades e o prazer pela descoberta, certamente acabarão por revelar, naturalmente, as suas formas de pensar. É aqui que reside a riqueza de se poder dizer «eu fiz de outra maneira». Contudo, importa realçar, mais uma vez, que os alunos devem participar activamente numa prática de sala de aula em que sejam valorizados os procedimentos metacognitivos.

Além disso, a análise da diversidade de resoluções pode facilitar a construção de conexões, a partir do relacionamento dinâmico dos vários conteúdos matemáticos aprendidos ou a aprender e o desenvolvimento e consolidação de conceitos específicos e de ideias matemáticas.

Por outro lado, também pode assumir uma importância fundamental para o professor, facultando-lhe indicações relativas às melhores acções e estratégias a adoptar com os seus alunos, tendo em conta as suas especificidades (características individuais, competências e diferentes percursos escolares). Nesta perspectiva, incentiva o professor a uma reflexão e análise das suas práticas para melhor as compreender e alterar, tendo em conta o sucesso educativo dos seus alunos.

Assim, de entre o tipo de tarefas a adoptar, com o intuito de potenciarem a exploração e a descoberta matemática e o recurso a uma variedade de representações, de conjecturas e de métodos de resolução, têm especial importância a resolução de problemas e as actividades de investigação. Especialmente as últimas requerem um grande envolvimento e criatividade por parte dos alunos, daí que sobre estas tenha recaído a minha escolha para trabalhar com os meus alunos.

Além disso, autores destacados nesta área de investigação salientam que, de uma maneira geral, a actividade de investigação é caracterizada por surgir de enunciados e

objectivos pouco precisos e estruturados, envolvendo processos, como sejam, definir os objectivos, conduzir experiências, formular e testar conjecturas (Ponte & Matos, 1992). Como tal, a realização de actividades de exploração e investigação pelos alunos torna-se uma metodologia relevante já que permite aos alunos o contacto com outra parte da Matemática diferente daquela a que muitas vezes estão habituados (memorização e resolução repetitiva de exercícios). Assim, mais do que contribuir para uma visão dualista da Matemática, em termos de certo ou errado, deve-se permitir aos alunos a compreensão de que há estratégias e abordagens alternativas a muitos problemas matemáticos, contrariando-se algumas concepções erróneas acerca da Matemática (Borasi, 1991; Segurado, 1997; Segurado & Ponte, 1998). Deste modo, o envolvimento dos alunos numa verdadeira actividade matemática torna-se fundamental. Cabe ao professor proporcionar-lhes a oportunidade de exploração de problemas, o desenvolvimento de estratégias de resolução, a formulação e verificação de conjecturas, a discussão, a argumentação, a previsão e a colocação de questões, dando-lhes oportunidade para raciocinar e comunicar as suas ideias (Lappan & Schram, 1989, referidos por Menezes, 1999).

Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira (1999) também apontam algumas razões para justificar a introdução de actividades de natureza investigativa nas aulas e nos currículos de Matemática, nomeadamente, o facto de constituírem uma parte essencial do trabalho em Matemática, estarem ligadas ao processo de produção de conhecimento e contribuírem para que os alunos desenvolvam uma visão adequada desta área do saber.

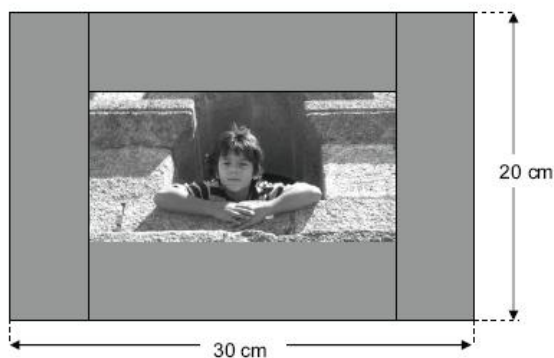
### **O gosto pela análise das respostas nas provas de aferição**

A minha experiência enquanto professora classificadora das provas de aferição de Matemática do 6º ano, em 2001 e 2002, e como supervisora da classificação das referidas provas, em 2006 e 2007, contribuiu igualmente para reforçar o meu gosto pela análise das respostas dos alunos. Estas provas, para além dos seus objectivos e do papel que podem assumir como elementos reguladores das práticas educativas, constituem fontes bastante ricas para a análise dos processos de resolução dos alunos. Um professor que tenha inclinação para este tipo de análise, ficará cativado por algumas das respostas dos alunos, as quais exibem aspectos extremamente interessantes, nomeadamente a diversidade, a criatividade, a originalidade e a genuidade. Assim, a aplicação e a análise

dos resultados das provas de aferição, permite a identificação das dificuldades dos alunos ao nível das áreas temáticas e dos diferentes aspectos da competência Matemática e dos tipos de erro e frequência dos mesmos, contribuindo para a compreensão de algumas das causas que poderão explicar os resultados, com a consequente delineação de estratégias que promovam uma melhoria dos mesmos. Mas, ao mesmo tempo, pode fornecer estimulantes objectos de análise, em particular os itens não objectivos, de composição curta ou resposta restrita ou de composição extensa ou ensaio, em que é pedido ao aluno para explicar a sua resposta ou raciocínio, com recurso a palavras, esquemas ou cálculos. De facto, seguir e procurar entender o raciocínio dos alunos, tentando enquadrá-lo em determinados níveis de desempenho, torna-se uma tarefa que implica algum desafio mental, propiciando momentos de surpresa e gosto pelo que se vislumbra na resolução de determinados alunos. Para o demonstrar, passarei a apresentar alguns exemplos que foram trabalhados a partir de documentos enviados pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) em reuniões entre supervisores e classificadores das provas de aferição.

No item 6 da prova de aferição de 2008, pode ler-se (figura 1):

6. Quando a mãe fez anos, o Ricardo ofereceu-lhe uma fotografia, numa moldura. A moldura, que está representada a seguir, é constituída por 4 cartões rectangulares, todos geometricamente iguais.



Qual é, em  $\text{cm}^2$ , a área da fotografia que está visível na moldura?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 1. Item 6 da prova de aferição do 6º ano, 2008

Duas das resoluções apresentadas são as seguintes:

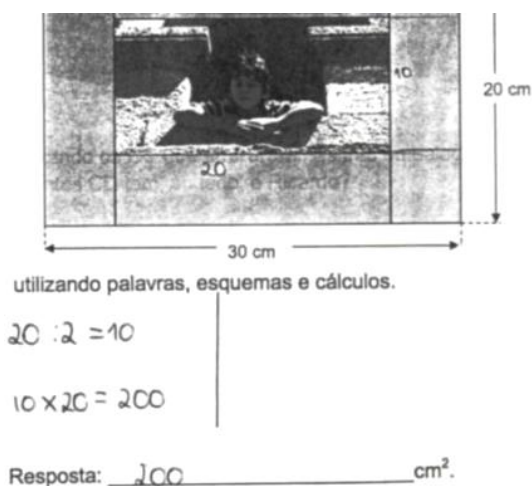


Figura 2. Resolução de um aluno com base na comparação dos rectângulos que constituem os cartões e a moldura

Nesta resolução, evidencia-se que o aluno, ao dividir 20 por 2, terá compreendido que a altura da fotografia era metade da altura da moldura. Mediante uma estimativa ou uma medição com a régua, poderá ter verificado que essa altura era igual à dos dois cartões que se encontram acima e abaixo da fotografia, o que foi reforçado pelo 10 que registou junto da fotografia. O comprimento da fotografia é o comprimento do cartão (20) que também está registado pelo aluno por baixo da fotografia.

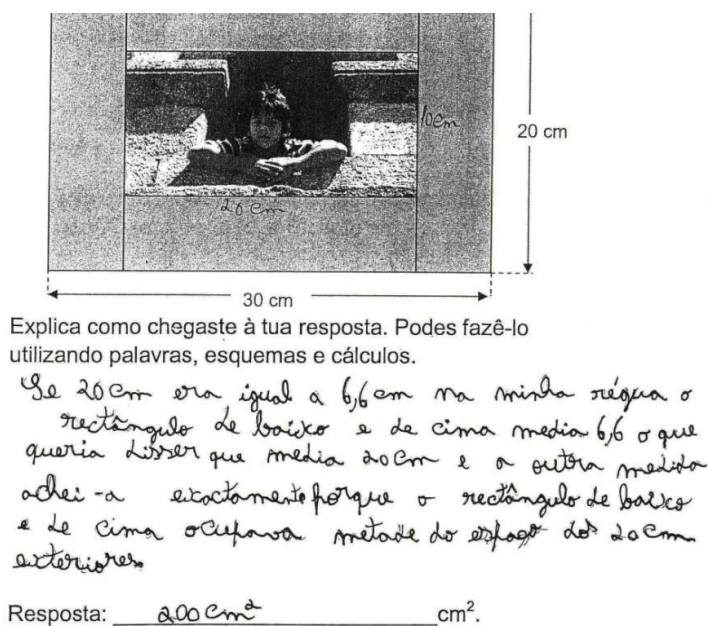


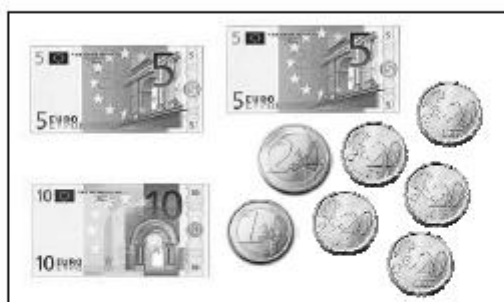
Figura 3. Resolução de um aluno mediante a utilização de palavras

Neste caso, o aluno utilizou a verbalização para explicitar o seu raciocínio. Registou os valores das medidas do comprimento e da altura da fotografia, respectivamente 20cm e 10cm, visto tê-las comparado com as dimensões (comprimento e largura) dos cartões da moldura. Referiu também que utilizou a régua para o fazer. Sem indicar a multiplicação por 10, talvez por o achar desnecessário, já que se trata de um cálculo fácil de fazer mentalmente, determinou a área da fotografia correctamente.

No item 8 da prova de aferição de 2009, pode ler-se (figura 4):

8. O António e a Maria vão comprar uma caneta para o pai.

A figura seguinte mostra o dinheiro que o António tem.



Na papelaria, viram uma caneta que custava  $\frac{3}{4}$  do dinheiro do António.

O António pagou metade do preço da caneta.

Quanto pagou o António?

Figura 4. Item 8 da prova de aferição do 6º ano, 2009

Também decorrente da análise de um documento de trabalho enviado pelo GAVE (2009) numa reunião entre supervisores e professores classificadores, uma das resoluções apresentadas por um aluno foi a seguinte (figura 5):

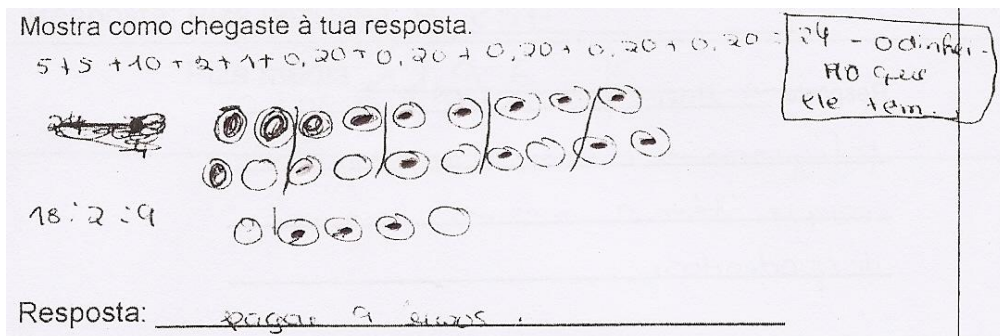


Figura 5. Resolução esquemática de um aluno evidenciando a noção de fracção

O aluno, embora seguindo uma resolução mais esquemática, não deixou de apresentar uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, chegando à resposta correcta. Não utilizou a fracção como operador mas revelou ter a noção de fracção quando agrupou os 24 euros em grupos de 4, seleccionando depois os  $\frac{3}{4}$  de cada grupo. Deste modo, chegou aos 18 euros, dos quais não teve dificuldade em determinar a metade. Trata-se de uma resolução igualmente eficaz, sem a utilização das operações com os racionais.

Do exposto, e do trabalho já realizado no âmbito das provas de aferição, pude verificar que os alunos conseguem apresentar formas de resolução bem distintas e algumas delas realmente criativas, constituindo objectos ricos para uma análise que, na minha opinião, pode ser tão interessante como agradável. Acabamos por poder partilhar e decifrar os pensamentos ou raciocínios mais elaborados ou até aqueles mais simples, mas igualmente conducentes à resolução das questões propostas. A riqueza encontra-se na diversidade das resoluções, sejam elas simples ou mais rebuscadas.

### **A prática de sala de aula**

Devo realçar que o trabalho desenvolvido nas sessões de formação da acção «Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2º Ciclo do Ensino Básico» também teve bastante influência na minha vontade de aperfeiçoamento das práticas lectivas, aumentando ainda mais o meu gosto pela análise dos desempenhos dos alunos, a partir de situações de ensino/aprendizagem significativas, tendo em conta as novas orientações curriculares. Todo o percurso feito nessa formação foi bastante favorável à valorização e ao desenvolvimento de novas práticas de sala de aula em Matemática, pautando-se pelo aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular. Em particular, foi saliente a preocupação constante com a elaboração de tarefas que permitissem o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de raciocínio e de resolução de problemas.

Com base no princípio de que ensinar, mais do que uma mera transmissão de conhecimentos, deverá ser uma forma de ajudar os alunos a construírem e a desenvolverem as suas estruturas mentais, defendo que o ensino da Matemática, em todos os níveis, deverá proporcionar aos alunos experiências diversificadas em

contextos de aprendizagem ricos e variados, constituindo, para os mesmos, uma experiência pessoal positiva, com significado e importância.

A resolução de problemas e as actividades de investigação têm um papel fundamental neste ponto, devendo ocupar uma posição central no ensino e na aprendizagem da Matemática, visto envolverem processos como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar e comunicar.

Relativamente à utilização destas estratégias, tive oportunidade de verificar a rica diversidade dos raciocínios dos alunos, alguns dos quais seriam difíceis de imaginar para muitos adultos. Foi igualmente importante, nesta acção de formação, o trabalho colaborativo dos diversos docentes, permitindo a troca de experiências e a criação de uma nova dinâmica de trabalho. A interacção e a reflexão entre os docentes e a formadora tornou-se relevante na planificação de tarefas e no questionamento sobre as práticas e mostrou a importância do aprofundamento contínuo das matérias a leccionar.

## **1.2. O problema e as questões de investigação**

### **Pertinência actual do desenvolvimento do raciocínio matemático**

Actualmente, as finalidades do ensino da Matemática englobam a interpretação e a intervenção no real, o desenvolvimento das capacidades de formular problemas, de comunicar criticamente, de adquirir e aprofundar uma cultura científica, contribuindo para uma atitude positiva face à ciência, e a promoção da realização pessoal. Neste âmbito, urge ultrapassar um modo de ensino tradicional, que incida apenas no cálculo, na memorização de regras e no uso de fichas de trabalho e/ou exercícios rotineiros, consistindo numa prática meramente expositiva e de aplicação imediata dos assuntos leccionados. Estas preocupações não são recentes. Segundo as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989/1991), o tipo de tarefas a propor aos alunos assume um papel fundamental, devendo proporcionar experiências matemáticas significativas e promotoras do seu *poder matemático*, de modo a que *saber Matemática* corresponda a *fazer Matemática*.

Nas *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*, publicadas pelo NCTM (1991/1994), defende-se que os alunos, na sua aprendizagem da Matemática, deverão «ser capazes de formular e resolver problemas, de julgar o papel do raciocínio matemático numa situação da vida real, e de comunicar matematicamente» (p. 21). Este documento faz também referência ao que se considera serem boas propostas de tarefas para os professores apresentarem aos seus alunos: as «que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições» (NCTM, 1991/1994, p. 27). Nesta óptica, nem todas as actividades são propícias a uma aprendizagem activa, de exploração, de desenvolvimento e de discussão e aplicação de ideias. Aliás, a título de exemplo, pode-se acrescentar a opinião de Ball (2002), segundo a qual, quanto mais se quer classificar ou graduar os alunos ao nível do aproveitamento, mediante a utilização de testes, menor é a sua motivação. Numa pesquisa recente da mesma investigadora, os alunos exprimiram a sua aversão acerca da ênfase nos testes, dizendo: «nós queremos ajudar-nos uns aos outros mas não podemos» (p. 17); refere, no entanto, que não há dúvida que alguns professores querem encontrar tempo para que as crianças ganhem gosto por compreender a Matemática e para que estas se sintam mais confiantes na disciplina.

Assim, tal como diz Pólya (1977), os professores têm de escolher entre *massacrar os alunos*, ou motivá-los para o trabalho em Matemática, tornando-os autónomos e capazes de pensar. Neste sentido, existem várias tarefas que permitem o desenvolvimento do pensamento matemático. Cabe, então, ao professor gerir o tipo de perguntas que deve fazer, o tipo de perguntas que deve ou não responder e o tipo de orientações que deve dar aos seus alunos.

Também Schoenfeld (1992) refere que é na sala de aula que os alunos vivem grande parte da sua experiência matemática, desenvolvendo, deste modo, o significado que dão à Matemática. Como tal, «as aulas de Matemática devem espelhar esta imagem da Matemática como uma actividade com sentido» (p. 340).

O *Currículo Nacional do Ensino Básico*, publicado em 2001, refere explicitamente que a competência matemática se desenvolve «através de uma experiência matemática rica e diversificada» (DEB, Ministério da Educação, 2001, p. 67), devendo-se proporcionar aos alunos diversos tipos de experiências de aprendizagem, nas quais se incluem as actividades de investigação. As actividades de investigação são aqui explicitamente referidas da seguinte forma:

Numa actividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de actividades de natureza investigativa. Este tipo de actividades também é favorável à ligação de matemática com outras áreas do currículo.

(DEB, 2001, p. 68)

Ainda nas actuais orientações curriculares considera-se, entre outras finalidades, que os alunos devem ter a possibilidade de desenvolver capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação. Os alunos têm de ser *matematicamente competentes*, revelando, além de muitas outras atitudes, a predisposição para raciocinar matematicamente. Como orientação metodológica, sugere-se a utilização de um raciocínio dedutivo, mediante a justificação de processos de resolução, a confirmação de conjecturas e encadeamento de raciocínios e a utilização de um raciocínio indutivo em situações de pesquisa, de modelação matemática e de investigação. Deste modo, as actividades de investigação surgem como uma metodologia com vantagens didácticas, quer para os alunos quer para os professores, como meio de inovação da sua prática de ensino.

O novo programa de Matemática do Ensino Básico também introduz alguns desafios aos professores, nomeadamente a necessidade de procederem a uma mudança de ênfase no ensino e aprendizagem da Matemática, com o objectivo primordial de proporcionar aos alunos numerosas e variadas experiências que contribuam para o desenvolvimento do seu poder matemático e para aumentar o apreço e a valorização desta disciplina. Aqui se incluem também as actividades de investigação.

Acerca das investigações matemáticas, Pirie (1987) oferece uma ideia central, baseada numa metáfora ilustrativa, quando afirma: «a ênfase está em explorar uma questão da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem, não o destino» (p. 2).

Também Dewey (1916), um autor de referência, citado por Borralho (1993, p. 34), já exaltava os raciocínios dos alunos ao afirmar: «Se todos os professores compreendessem que a qualidade do processo mental, não a produção de respostas correctas, é a medida do desenvolvimento educativo, algo de pouco menos do que uma revolução no ensino teria lugar na escola». Trata-se, assim, de uma preocupação que já

se deixava antever no início do século XX – a de se dar mais atenção aos processos mentais envolvidos nas actividades matemáticas do que ao produto final.

### **O problema do estudo**

Tendo em conta todas as considerações anteriores, o presente estudo resultou de uma experiência em contexto de sala de aula, mais precisamente da observação e da análise da diversidade dos processos de raciocínio que os alunos revelam. De facto, vários trabalhos de investigação e relatos de experiências de ensino mostram que é possível observar a existência de raciocínios distintos nos alunos, aquando da realização de actividades matemáticas, em especial actividades de investigação que não se limitam à aplicação directa de um determinado conteúdo previamente ensinado. Deste modo, a essência do meu estudo consiste na análise da diversidade de raciocínios matemáticos presentes nos alunos de uma turma de 5º ano – da qual sou professora – na realização de actividades de investigação, tendo como objectivos concretos:

- Perceber as formas de raciocínio matemático presentes em alunos do 5º ano do Ensino Básico e como é que as mesmas são explicitadas no decurso de actividades de investigação.
- Averiguar a adequação e eficácia dos métodos «pessoais» de resolução de actividades de investigação exibidos pelos alunos (nomeadamente os métodos que não se baseiam na aplicação directa de conteúdos matemáticos específicos).

Assim, o estudo tem como principais motivações evidenciar e explicar a pluralidade dos raciocínios matemáticos dos alunos de uma turma, durante a realização de actividades de investigação em sala de aula.

### **Focalização do problema em questões de investigação**

Nesta linha de trabalho, as questões específicas que norteiam a minha investigação são as seguintes:

- Que formas diferenciadas de raciocínio matemático apresentam os alunos e quais são as razões que os podem conduzir a determinado raciocínio?

- De que modo os raciocínios dos alunos lhes permitem chegar a resultados, com ou sem recurso aos conteúdos matemáticos tratados nas aulas?
- Como é que os alunos compreendem as situações propostas (as descodificam) e de que modo essa apropriação evolui com o decorrer da prática neste tipo de actividades?

# CAPÍTULO II

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. As actividades de investigação

#### 2.1.1. A integração das actividades de investigação na Matemática escolar

A integração das actividades de investigação na Matemática escolar tem vindo a ganhar terreno a partir dos anos 80/90. Neste sentido, apresenta-se aqui uma breve evolução histórica que evidencia a valorização e recomendação explícita das actividades de investigação no ensino e na aprendizagem da Matemática.

A Matemática, desde sempre, esteve associada à actividade mental e, como afirma Abrantes (1994), «a Matemática escolar desfrutou quase sempre de renome como uma disciplina do cérebro e da inteligência, e muitas vezes também como uma disciplina muito importante pela sua utilidade» (p. 15). Com efeito, no início do século XX, a Matemática gozava do estatuto de «disciplina mental», acentuando-se, no entanto, o carácter elitista do seu ensino, esperando-se unicamente promover «as capacidades intelectuais desejáveis naqueles que viessem a ocupar cargos de chefia; a formação matemática para a maioria ou não existia ou limitava-se à aritmética elementar» (Abrantes, 1994, p. 15-16).

Nos anos 30 e 40, ao nível da prática na sala de aula, também predominavam a aritmética e as capacidades rotineiras de cálculo. O professor ensinava e os alunos reproduziam e praticavam (Niss, 1996). Deste modo, até aos anos 50, e de acordo com as exigências de uma sociedade industrial, a escola deveria essencialmente proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências aritméticas e a aquisição da instrução necessária e suficiente para que estes, futuramente, pudessem trabalhar nos campos, nas fábricas e nos serviços. Pelo exposto, os estudantes limitavam-se a memorizar factos e procedimentos, não compreendendo os conceitos ou as técnicas inerentes aos mesmos (Schoenfeld, 1991).

Na década de 50, privilegiava-se, ainda, o treino das técnicas de cálculo e os programas constituíam uma listagem de conteúdos a tratar, à margem das directrizes que estabeleciam o desenvolvimento do raciocínio, da autonomia e do espírito crítico. Em finais dos anos cinquenta, surgiu uma época de modernização na Matemática, devido ao desenvolvimento da tecnologia – «Os russos lançaram o Sputnik e os americanos responderam com a Matemática moderna» (Schoenfeld, 1991, p. 5). Trata-se de uma frase que, simbolicamente, evidenciou a preocupação dos países do ocidente com o atraso científico, resultante de pressões de ordem política e social. Urgia proceder-se à modernização do ensino da Matemática e das Ciências, recuperando-se, assim, a desvantagem do ocidente em conhecimento científico. Segundo Brocardo (2001), tendo como referência as ideias de Niss (1996), «a Matemática moderna, valorizava não só a compreensão dos conceitos e métodos da Matemática mas também os fins utilitários da Matemática (em inúmeros contextos os indivíduos têm necessidade de ordenar, classificar, estruturar, abstrair, generalizar, argumentar, provar, etc.)» (Brocardo, 2001, p. 51-52).

Em Portugal, este movimento pretendia potenciar uma melhoria da compreensão ao nível da aprendizagem da Matemática e do cálculo, além de implementar mudanças metodológicas em que os alunos assumissem «um papel activo e pudessem redescobrir, por eles próprios, os conceitos» (Brocardo, 2001, p. 52).

A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

(Sebastião e Silva, 1975, p.11)

Na década de 60, Sebastião e Silva impulsionou, uma fase experimental no ensino da Matemática. A reforma da Matemática Moderna chegou a Portugal. Sebastião e Silva considerou que o papel do aluno e do professor deveriam mudar já que a «modernização» teria que ser feita «não só quanto a programas mas também quanto a métodos» (1964, p. 1). Alguns dos aspectos focados nessa mudança eram: o equilíbrio entre o concreto e o abstracto, a intuição e a lógica, a mecanização e a compreensão, o exercício rotineiro e o problema novo, sem esquecer a importância das relações da Matemática com as outras áreas do saber e da actividade humana (Guimarães, 2005). «É

preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de mais nobre e vital no ensino», dizia, então, Sebastião e Silva (1978, p. 11). Nesta linha de pensamento, considerava que a resolução de exercícios em excesso – «obsessão do exercício» – e o seu carácter rotineiro não contribuía para «estimular o bom senso e o bom gosto do aluno», «habitando o aluno a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas novos como os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente» (Silva, 1975, p. 4).

Contudo, não se caminhou favoravelmente para a valorização dos métodos de ensino, sobretudo porque as acções de formação de professores, realizadas no início dos anos 70, tinham como único objectivo a actualização científica no que diz respeito aos novos temas introduzidos no programa (Porfírio, 1998).

No início dos anos 70, acabou por surgir o movimento «back to basics», quer em Portugal quer noutros países, principalmente nos Estados Unidos da América, como reacção à Matemática Moderna. Entendia-se que os alunos estavam a perder aptidões de cálculo, sem se compreender o que podiam estar a ganhar. Como tal, dava-se prioridade ao retomar das competências básicas (Abrantes 1994). Deste modo, as potencialidades de um método de ensino mais activo deixaram de ser valorizadas. No entanto, segundo Ponte, Boavida, Graça & Abrantes (1997), este movimento não teve uma influência profunda em Portugal, até porque os programas da Matemática Moderna, embora com algumas adaptações realizadas depois de Abril de 74, se mantiveram em vigor até à reforma iniciada em 1989; as competências de cálculo também sempre foram elegidas como primordiais, inclusivamente nos exames. Em suma, pode dizer-se que «Os programas de Matemática dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional» (Ponte, 2003a, p. 30).

Na verdade, não se pode afirmar que o movimento «back to basics» tenha sido exclusivo de uma determinada época; este tipo de reacções surge em momentos cíclicos, especialmente nos períodos de incerteza, em que são despoletadas determinadas pressões no sentido de se apresentarem mais resultados das aprendizagens, seja através da realização de exames nacionais ou até de provas de aferição. É necessário, no entanto, mais do que a memorização e a mecanização do cálculo e de regras para efectuar determinados procedimentos; importa que os alunos tenham a noção e o domínio do sentido do número. De que serve aos alunos saber efectuar os algoritmos

sem que tenham ideia de qual o algoritmo necessário ou que não saibam criticar ou raciocinar sobre o resultado obtido?

A situação que se viveu no ensino (elevado insucesso na Matemática), na década de oitenta, impulsionou, em Portugal, muitos debates e vários movimentos, sendo de destacar: em 1980, o 1º Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa da Matemática; em 1985, o 1º Encontro Nacional de Professores de Matemática – *Profmat*; em 1986, o 2º Profmat e a fundação da Associação de Professores de Matemática – *APM*; em 1988, a organização, pela *APM*, de um Seminário, em Vila Nova de Milfontes, onde foram discutidos alguns dos problemas relacionados com a renovação do currículo de Matemática.

Destes movimentos surgiram determinadas orientações, das quais se destaca que as finalidades do ensino da Matemática deveriam privilegiar a valorização equilibrada dos domínios cognitivo, afectivo e social, enfatizando-se, assim, os processos e as actividades matemáticas. Neste sentido, as actividades a propor teriam de permitir a exploração, a formulação de conjecturas e a prova matemática, favorecendo o raciocínio indutivo, a comunicação oral e escrita, a discussão e a reflexão. As actividades de investigação começaram, assim, a ser referidas ainda que de uma forma implícita.

Concluiu-se, também, que o ensino da Matemática se regulava por um domínio quase absoluto dos objectivos cognitivos de níveis mais baixos (memorização de factos, algoritmos e técnicas de resolução de tipos pré-estabelecidos de exercícios...) (*APM*, 1988). Além disso, a Matemática escolar não proporcionava o desenvolvimento dos processos e estratégias de raciocínio, nem as capacidades de pesquisa, cooperação, comunicação, discussão, investigação ou produção, estando as actividades desprovidas de qualquer contexto.

Paulo Abrantes exerceu uma grande influência nestas propostas curriculares quando desenvolveu, com uma equipa de professores e de investigadores, o currículo experimental conhecido por *MAT789*, informado por uma visão sobre a aprendizagem da Matemática (construtiva), pelos métodos de ensino (alunos como participantes activos no processo de aprendizagem), pelas orientações globais do currículo (considerar não só aspectos de natureza cognitiva como também de natureza afectiva e social.) e pelos temas transversais a valorizar (resolução de problemas, aplicações da matemática e utilização das novas tecnologias).

Quando coordenou o projecto *Matemática Para Todos — Investigações na Sala de Aula*, que se desenvolveu no Centro de Investigação em Educação da FCUL, durante

cinco anos (de 1995 a 1999), promoveu a construção e experimentação de tarefas de natureza investigativa. A propósito deste projecto, num artigo subjacente à conferência apresentada *no ProfMat* de 1999, intitulada «As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática», Fonseca, Brunheira & Ponte concluem (1999):

A realização de trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor. Continuar a procurar respostas para essas questões, na formação inicial, com professores em serviço, junto de alunos dos diversos níveis de ensino, constitui um desafio extremamente aliciante - e extremamente importante - para toda a comunidade de educação matemática portuguesa (p. 15-16).

Ainda na década de 80, vários documentos de orientação curricular revelaram um sentimento de preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática nesta época, em que «tudo estava desactualizado, enquistado, obsoleto. Tudo era francamente desmotivador, árido e pobre e exigia mudanças de toda a sorte» (Carreira, 2007, p. 3). Entre esses documentos podem destacar-se: Agenda para a Acção, do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980); Relatório de Cockcroft (1982); Renovação do Currículo de Matemática (APM, 1988); Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1989), os quais davam uma importância central à resolução de problemas – *problem solving* – e ao desenvolvimento de capacidades e de atitudes.

Quando se aborda a resolução de problemas no ensino da Matemática não se pode deixar de falar de George Pólya (1967), considerado «o pai» desta grande corrente, dado que contribuiu para a ênfase que lhe foi atribuída. Pólya defendia que o conhecimento acerca de qualquer matéria inclui a informação e o *savoir-faire* e, em Matemática, este *savoir-faire* é «a capacidade para resolver problemas – não problemas meramente rotineiros mas problemas que requerem algum grau de independência, julgamento, originalidade, criatividade» (Pólya, 1967, p. x). Dada a sua centralidade e forte relação com a actividade de investigação, a resolução de problemas será desenvolvida posteriormente num outro ponto deste trabalho.

Carreira (2007), ao estabelecer um contraponto entre os 3 primeiros números (de 1987) e os 3 últimos números (de 2006) da revista *Educação e Matemática*, editada pela APM, comenta o desajustamento cada vez maior entre a Matemática escolar e as exigências sociais da época então em curso:

A viragem deveria dar lugar a mudanças expressivas e passaria por novas orientações para a Matemática escolar: um papel mais activo dos alunos, objectivos mais amplos para a Matemática na escola, uma alteração do tipo de actividades na sala de aula, a importância do recurso às tecnologias nomeadamente aos computadores, uma maior ênfase na resolução de problemas, nas aplicações e nas relações da Matemática com as outras disciplinas escolares

(Carreira, 2007, p. 4).

Referindo-se ao relatório *Mathematics Counts* (Cockcroft, 1982), elaborado por uma comissão oficial inglesa (*Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in School*), Abrantes (1994) fazia notar que este documento «sublinha a necessidade de se proporcionar aos alunos uma variedade de formas de trabalho, afirmando no parágrafo 243 (uma das suas passagens mais citadas) que o ensino da Matemática em todos os níveis deve incluir: exposição pelo professor; discussão dos alunos com os colegas e com o professor; trabalho prático apropriado, práticas de rotinas e competências fundamentais; resolução de problemas, incluindo aplicação da Matemática a situações da vida real, e trabalho de investigação» (p. 22).

A brochura *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) (já referida anteriormente), resultante das intensas reflexões do seminário de Vila Nova de Milfontes organizado pela APM, em 1988, deixou transparecer duas ideias fundamentais: a necessidade de os alunos experimentarem Matemática e o uso das novas tecnologias na concretização dessas experiências. A este respeito, João Pedro da Ponte (2003a), no artigo apresentado na Conferência sobre «O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas», realizada em Lisboa, em 2002, resume as seguintes orientações emanadas do Seminário de Milfontes: i) valorizar objectivos curriculares relativos às capacidades de resolver problemas e de raciocinar matematicamente, acompanhadas de uma atitude positiva face à Matemática; ii) tornar prioritárias, na sala de aula, tarefas que envolvam resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação; iii) olhar para o programa, bem como para os manuais escolares, como um instrumento auxiliar do trabalho do professor e não como um conjunto de prescrições a seguir de modo cego e incondicional.

Também Fonseca (2000), referindo-se ao documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), afirmou que o mesmo «enfatiza a exploração de uma situação desconhecida quando se realizam actividades de natureza exploratória (...) e que [nesse documento] as actividades de exploração e de descoberta surgem no contexto

da resolução de problemas» (p. 15), além de que a palavra explorar, no documento já mencionado é entendida como «entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões (...) investigar, procurar encontrar, procurar descobrir» (p. 59).

A partir da aprovação da Lei de Bases do Sistema Educativo, em 1986, a reorganização curricular tomou novos rumos; as metodologias e as estratégias apontavam para que o aluno fosse o agente responsável pela construção do seu conhecimento. Desta forma, e a partir da resolução de problemas, o aluno tornava-se um matemático, dotado da curiosidade e do trabalho mental que lhe são inerentes.

Assim, o principal objectivo da Matemática era conduzir o aluno a desenvolver o seu próprio *poder matemático*, tal como se pode verificar no seguinte excerto das *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989/1991, p. 5-6):

Os objectivos educacionais para os alunos devem reflectir a importância da alfabetização matemática. Com este fim (...) os objectivos gerais para todos os alunos [são]:

- a) que aprendam a dar valor à matemática,
- b) que adquiram confiança na sua capacidade de fazer matemática,
- c) que se tornem aptos a resolver problemas matemáticos,
- d) que aprendam a comunicar matematicamente,
- e) que aprendam a raciocinar matematicamente.

Sobre o *poder matemático* é afirmado o seguinte:

Este termo refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento de que a matemática é mais do que uma colecção de conceitos e capacidades a adquirir; ela inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto.

(NCTM, 1989/1991, p. 6)

Segundo Guimarães (2005), o *poder matemático* significa uma aptidão matemática ampla que envolve «capacidades matemáticas variadas (...) que incluem: a resolução e a formulação de problemas, o raciocínio lógico e a comunicação em Matemática, a capacidade de explorar situações e de identificar regularidades, a capacidade de formular e de testar conjecturas (...)» (p. 149).

Tornou-se necessário que todas estas tendências de orientação e renovação curricular fossem consideradas no ensino e na aprendizagem da Matemática, o que efectivamente veio a acontecer, pois, segundo Brocardo (2001), «é sobretudo nos anos 90, que se procura dar ênfase à concretização da linha de acção delineada nas duas décadas anteriores» (p. 59). Deste modo, «os professores são os principais protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas» (NCTM, 1994, p. 2). Cabe, assim, ao professor participar activamente na elaboração do currículo, delineando objectivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte et al., 1998).

Ainda nos anos 90, e na sequência das novas correntes que se afirmaram, surgiram novos programas de Matemática (em 1991/1992 para o ensino básico e em 1993/1994 para o ensino secundário), nos quais se enfatizou o ensino da Geometria, das Probabilidades e da Estatística. Além disso, atenuou-se a formalização na abordagem dos conceitos, dando-se importância à «ligação com o real» e recomendando-se «novas metodologias», incluindo o trabalho de grupo, o uso de calculadoras e computadores e o recurso à História da Matemática. Segundo as orientações curriculares difundidas pelo Ministério de Educação, e em vigor desde 1998, as finalidades da Matemática englobavam a interpretação e a intervenção no real, o desenvolvimento das capacidades de formular problemas, de comunicar criticamente, de adquirir e aprofundar uma cultura científica, contribuindo para uma atitude positiva face à ciência e que promovesse a realização pessoal. Como orientação metodológica, sugeria-se a utilização de um raciocínio dedutivo, mediante a justificação de processos de resolução, da confirmação de conjecturas e encadeamento de raciocínios e a utilização de um raciocínio indutivo em situações de pesquisa, de modelação matemática e de investigação.

Começam, assim, a surgir indícios ou alusões às actividades de investigação como uma metodologia com vantagens curriculares, quer para os alunos, proporcionando aos mesmos a aquisição de objectivos e competências pretendidos, quer para os professores, como meio de inovação na sua prática de ensino.

Também, em 2001, foi publicado em Portugal, o *Currículo Nacional do Ensino Básico*, resultante do movimento inicialmente chamado *Reflexão Participada sobre os Currículos* e depois *Gestão Flexível do Currículo*. A tónica do ensino passou a centrar-se no desenvolvimento de *competências e experiências de aprendizagem*, que mais do que requererem a aprendizagem de conteúdos, permitiam o desenvolvimento de atitudes, valores e capacidades associadas, que possibilitavam aos alunos a mobilização

desses mesmos conteúdos em situações concretas. Duas das finalidades apontadas para o ensino da Matemática foram:

- proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática, que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza
- desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar

(DEB, 2001, p. 58)

Estas finalidades colocaram em destaque dois aspectos relacionados entre si: o conhecimento do valor cultural da matemática, adquirido a partir do contacto com ela e o seu carácter utilitário, já que poderia servir de utensílio para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, desde que os alunos sentissem predisposição e motivação para o fazer.

Este documento referiu, ainda, explicitamente que a competência matemática se desenvolve «através de uma experiência matemática rica e diversificada» (p. 67), devendo-se proporcionar aos alunos diversos tipos de experiências de aprendizagem, nomeadamente *experiências de aprendizagem adequadas e significativas*, nas quais se incluem as actividades de investigação. As actividades de investigação foram explicitamente referidas da seguinte forma:

Numa actividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de actividades de natureza investigativa. Este tipo de actividades também é favorável à ligação de matemática com outras áreas do currículo.

(DEB, 2001, p. 68)

Embora os documentos enfatizem o desenvolvimento de actividades investigativas, em particular a partir da década de 80, implicitamente nas actividades transversais do currículo e hoje, explicitamente, temos de considerar que ainda existe um grande fosso entre o currículo enunciado e o currículo implementado.

Esse fosso é referenciado no Relatório das Provas de Aferição (Ministério da Educação, 2000):

Parece ser legítimo, a partir destes resultados, sugerir que uma maior atenção deve ser dada a estratégias de resolução de problemas não

rotineiros, a processos de argumentação, de explicitação do raciocínio e de comunicação matemática, assim como às capacidades ligadas à aprendizagem da Geometria, com suporte numa variedade de situações de aprendizagem, em particular as que assumem um carácter experimental e investigativo.

(Ministério da Educação, 2000, p. 8)

Apesar da valorização da resolução de problemas, os resultados apresentados pelos alunos portugueses em diversos estudos de comparação internacionais (SIAEP, TIMSS, PISA) não são animadores (Amaro, Cardoso & Reis, 1994; Ramalho, 1994; GAVE, 2004). Este insucesso pode dever-se, em parte, à sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos, em detrimento da experiência com problemas não rotineiros e actividades de investigação.

Em 2007, uma equipa de investigadores, entre os quais João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina & Henrique Guimarães, produziu um documento que constitui um reajustamento do programa de Matemática para os três ciclos do ensino básico; apresentaram, como justificação para a revisão do anterior programa: o facto de o currículo nacional do ensino básico ter introduzido alterações curriculares ao mesmo, particularmente no que diz respeito às finalidades e objectivos de aprendizagem, além da forma como apresentou os temas a abordar; o desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos tempos e a melhoria da articulação dos três ciclos.

De entre os objectivos gerais do ensino da Matemática, é referido (p. 5):

Os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos, isto é devem ser capazes de:

- seleccionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação;
- reconhecer e apresentar generalizações matemáticas e exemplos e contra-exemplos de uma afirmação;
- justificar os raciocínios que empreendem e as conclusões a que chegam;
- compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração;
- desenvolver e discutir argumentos matemáticos;
- formular e investigar conjecturas matemáticas.

Os alunos devem aprender a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade recorrendo a exemplos específicos. À medida que os alunos progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações

devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objectos.

Este novo programa está a ser experimentado com algumas turmas piloto, em todo o país. Os docentes também estão a receber formação, de modo a adquirirem uma adequada visão do mesmo, incluindo o papel das capacidades transversais e o tipo de tarefas e práticas de sala de aula, buscando o seu desenvolvimento profissional, aumentando a motivação e visando o sucesso educativo dos alunos. As actividades de investigação, finalmente, são contempladas implícita e explicitamente, sendo-lhes atribuída grande relevância, não só no Currículo como também no Programa da disciplina de Matemática para o Ensino Básico.

No entanto, apesar de se ter verificado uma grande evolução nos currículos e de a Matemática escolar ter *recebido uma grande lufada de ar novo*, há que pugnar para que não continuem a persistir os mesmos problemas de há 20 anos atrás, tal como sugere o artigo *Do Castelo de Marvão à Cidade do Sado – Trilhos da Matemática Escolar, 1986-2006*, de Susana Carreira (2007). De facto, há questões melindrosas e delicadas que exigem novas abordagens mas que poderão continuar a levantar interrogações. A resolução de problemas e o uso das novas tecnologias são exemplo disso, como menciona:

O discurso parece repetir-se e ressoar (...) Voltamos a chamar a atenção para a importância das estratégias, dos materiais, dos recursos e dos meios. Queremos alinhar a actividade na sala de aula com o desenvolvimento tecnológico e dar mais relevo à Matemática como instrumento de interpretação, de resolução de problemas e de promoção de formas de pensamento crítico.

(Carreira, 2007, p. 6)

## **2.1.2. O papel das actividades de investigação na aprendizagem da Matemática**

### **O que são actividades de investigação**

Investigação é, segundo o dicionário de Língua Portuguesa da Porto Editora, de 2006, «acto ou efeito de investigar; inquirição; indagação; estudo ou série de estudos aprofundados sobre determinado tema, numa área científica ou artística» e, por sua vez,

investigar é «seguir os vestígios de; indagar; pesquisar; inquirir; esquadrihar». Se pensarmos na actividade do aluno enquanto investigador e, como tal, sujeito de uma investigação numa aula de Matemática, a acepção deste termo não difere muito do que é definido pelo dicionário. Na realidade, o aluno terá como finalidade a exploração, através de experimentação, pesquisa e validação, de um conjunto de questões e conjecturas, tornando-se, deste modo, um agente activo na construção do seu próprio conhecimento, não se limitando exclusivamente à compreensão da Matemática já feita. Desta forma, é como se fosse «inundado pela paixão detectivesca indispensável à fruição da Matemática» (Braumann, 2002, p. 5). Além disso, como refere Braumann:

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (...) como aprender a fazer investigação matemática? FAZENDO! A simples repetição do que vimos fazer [ainda que com mudanças cosméticas] ou o simples «marrar» podem ajudar a consolidar certas rotinas úteis mas, só por si, não levam «a carta a Garcia

(Braumann, 2002, p. 5).

Considerações como estas devem-se ao facto de se entender a Matemática, não como uma ciência exacta, implicando conhecimentos estáticos e infalíveis, mas sim como uma ciência em evolução, em que os próprios matemáticos, aludindo à sua experiência sublinham: «a importância dos caminhos tortuosos de tentativa-erro, o papel decisivo dos processos experimentais ou semi-experimentais, em suma, o valor dos aspectos informais e da intuição na investigação matemática» (APM, 1988, p. 21);

Para Ponte, Costa, Rosendo, Maia, Figueiredo & Dionísio (2002), investigar pode implicar o trabalhar em questões que interessem ao próprio sujeito da investigação e não necessariamente o trabalhar em problemas difíceis – «Significa, isso sim, trabalhar com questões que nos interessam e que se apresentam à partida de modo confuso, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado (...) investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento (p.1).

Brocardo (2001), explicitando a forma como Pirie (1987) prefere definir o termo investigação, descreve aquilo que *não é* uma investigação:

- uma tarefa em há uma solução única e em que o caminho que leva à solução é prescrito;

- um exercício com a clara intenção de praticar repetitivamente uma técnica matemática embora possa estar disfarçado, parecendo um problema de palavras.

(p. 100-101)

Porfírio & Oliveira (1999), dissociando os termos exploração e descoberta, consideram que «explorar» implica a ênfase no processo, enquanto «descobrir» remete principalmente para o produto. Também Morgan (1997) considera que a exploração é uma etapa preparatória para a investigação, não conduzindo à produção de novo conhecimento; por outro lado, a descoberta é uma finalidade em si mesma, com o intuito de produzir novo conhecimento. Defende, no entanto, que ambas as acções fazem parte do processo de investigação.

Segundo Goldenberg (1999), a investigação de tipo «explorar» cria as condições necessárias para um trabalho posterior, facilita o estabelecimento de intuições e o desenvolvimento de «sentido» de território; a de tipo «descobrir», por outro lado, tem como finalidade «conduzir à descoberta de ideias ou factos (...) muito específicos» (p. 39).

Pelo exposto, investigar é uma actividade complexa, envolvendo não só o gosto pela exploração do desconhecido mas também a procura de novos conhecimentos. Reportando para a Matemática, esta actividade constitui a «investigação matemática», levada a cabo por matemáticos profissionais cujo trabalho contribui para o desenvolvimento da Ciência e, conseqüentemente, do conhecimento, em geral.

Na opinião de Flato (1994), a investigação matemática «consiste, por um lado em tentar descobrir novas relações entre objectos matemáticos já conhecidos e, por outro, em imaginar situações problemáticas, onde os objectos conhecidos já não são suficientes para formular os problemas» (p. 28).

Nesta linha de pensamento, pode-se afirmar que o investigador anda um pouco «às apalpadelas», sujeitando-se a uma reflexão profunda sobre algo inacessível à maioria dos cidadãos comuns ou até aos seus parceiros de investigação. Davis e Hersh (1995), ao tentarem descrever o «matemático ideal», acabam por evidenciar este facto:

É-lhe [ao investigador matemático] difícil travar uma conversa com conteúdo com a grande parte da humanidade que nunca ouviu falar de um hiperquadrado não riemanniano. Isso cria-lhe séries dificuldades; no seu departamento há dois colegas que percebem alguma coisa de hiperquadrados não riemannianos, mas um deles está de sabática e o outro está muito mais interessado em semianéis não-eulerianos (p. 50).

No entanto, é indiscutível que o investigador matemático, independentemente das dificuldades que tenha em encontrar alguém com os mesmos interesses, sente satisfação em fazer matemática, não só pelas descobertas que realiza mas também por toda a actividade que exerce, procurando sempre a harmonia e a perfeição, tal como refere Dioxiadis (2001):

Os matemáticos sentem nos seus estudos o mesmo prazer que os jogadores de xadrez encontram num jogo de xadrez. Na verdade a estrutura psicológica do verdadeiro matemático está muito próxima da do poeta ou da do compositor, musical preocupado com a criação da Beleza e a procura de Harmonia e Perfeição.

(p. 28-29)

Para Poincaré (1996), uma actividade matemática criadora só pode ser vivida pelos matemáticos e não por outras pessoas, mesmo que essas pessoas tenham alguma facilidade em compreender e aplicar a matemática. Este ponto de vista faz notar que é bastante ambicioso o querer aproximar a actividade dos alunos à dos matemáticos profissionais. Assim, e na mesma linha, Cobb, Wood & Yackel (1993), apoiando-se na teoria da actividade de Leont'ev (1978), defendem que a actividade matemática escolar e a actividade matemática desenvolvida no seio da comunidade matemática são informadas por diferentes motivos:

Por esta razão, temos vindo a usar de cautela relativamente à ideia que tem sido muito difundida de que os alunos na escola podem ser adequadamente vistos como aprendizes de Matemáticos... Na nossa perspectiva, existem necessariamente diferenças importantes entre a tradição de investigar na sala de aula e aquilo a que chamamos a tradição de investigação em Matemática. E estas diferenças reflectem as que existem entre a função da escola e a função das comunidades de investigadores na sociedade.

(Cobb et al., 1993, p. 105)

Marques e Praia (1991) também não encontram equivalência entre o trabalho do cientista e a investigação realizada na sala de aula, visto entenderem que, estruturalmente, os objectivos pretendidos são diferentes: «nem a aula é um espaço onde ocorre produção científica, nem onde, ao nível da investigação aí realizada, exista grande complexidade instrumental e metodológica» (p. 13). Deste modo, pretende-se que o aluno vivencie os processos de construção do conhecimento científico sem contudo se tornar num «pequeno cientista».

No entanto, não devemos esquecer que os alunos, ao realizar este tipo de actividades, sentem alguma limitação no tempo que lhes é imposto, o que não acontece com os verdadeiros matemáticos que dispõem de muito tempo. Além disso, embora os alunos não possam criar novo conhecimento matemático, todos os factos que conseguirem descobrir são novos para eles. Tal ideia pode ser confirmada por Braumann (2002, p.21) quando este afirma – «Não estamos a falar de descobertas novas para o capital científico da Matemática, mas sim de descobertas novas para o capital científico do estudante».

Este paralelismo entre a actividade do aluno e a do matemático profissional não é questionável para todos os matemáticos. Com efeito, Pólya (1967) considera que é possível aos alunos experienciarem uma actividade idêntica à dos matemáticos profissionais. Assim, salienta que a epistemologia e a pedagogia da Matemática devem complementar-se e que os alunos só a valorizarão se se envolverem significativamente, de tal modo que aprender matemática seja fazer matemática.

Oliveira, Segurado & Ponte (1999) referem que uma perspectiva investigativa pode criar alguns problemas de índole epistemológica, visto que se terá de ver a Matemática como «uma forma de gerar conhecimento e não como um corpo de conhecimentos» (p. 175).

Ernest (1996) salienta que aprender Matemática pode ser uma actividade criativa que não é qualitativamente diferente da actividade dos matemáticos.

Também Schoenfeld (1992) refere que é na sala de aula que os alunos vivem grande parte da sua experiência matemática, desenvolvendo, deste modo, o sentido que dão à Matemática. Como tal, «as aulas de Matemática devem espelhar este sentido da Matemática como uma actividade com significado» (p. 340).

Igualmente, Hirsh (1971) salienta que «se podem e devem proporcionar oportunidades em matemática, em todos os níveis, que conduzam à produção de trabalho que pode ser propriamente considerado original e criativo» (p. 27). Ainda na mesma linha, Hatch (1995) defende «que as crianças, pelo menos durante parte da sua aprendizagem, criem a sua própria matemática» (p. 37).

Apesar de se registarem divergências quanto aos sujeitos «aptos» para executar uma investigação matemática relevante e original, considerando-se, durante muitos anos, que esta estava apenas reservada aos matemáticos profissionais, hoje aparece incluída na matemática escolar. Não se pode esquecer, no entanto, que a investigação matemática tem de ser aliciante e *ao nível adequado a cada grau de ensino*, tal como

afirma Braumann (2002, p.5). O mesmo autor argumenta que os alunos, ao realizarem investigações, podem descobrir relações da Matemática, socorrendo-se de processos matemáticos comuns aos utilizados pelos matemáticos profissionais. Deste modo, quer os produtos resultantes das investigações dos matemáticos, quer os produtos resultantes das investigações dos alunos são considerados «novo conhecimento». Contudo, podemos distingui-los pelas implicações que originam. Assim, o conhecimento resultante da investigação dos matemáticos profissionais certamente que poderá trazer ao mundo novos resultados; por outro lado, o conhecimento resultante da investigação do aluno será um enriquecimento não só para o mesmo como também para os seus colegas de turma. Este enriquecimento pressupõe o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos quando tentam compreender os conceitos matemáticos abstractos ou demonstrar conjecturas.

Para Hiebert e Carpenter (1992), os alunos quando constroem o seu próprio conhecimento, em vez de o receber pelo professor ou pelo manual, criam as suas próprias redes de representações e são capazes de descobrir as estratégias necessárias.

Após esta breve clarificação sobre investigação em Matemática e investigação na sala de aula, passar-se-á à caracterização das actividades de investigação em contexto de sala de aula, aproximando-as ou afastando-as da resolução de problemas, e discutindo o papel que as mesmas exercem na aprendizagem e desenvolvimento dos alunos. Posteriormente, serão tratadas questões como as dificuldades e/ou resistências na e da aplicação das mesmas.

### **Caracterização das actividades de investigação**

Para muitos autores as investigações matemáticas ou actividades de investigação ou tarefas de investigação constituem parte do que referem como *actividade matemática*.

De natureza aberta, as actividades de investigação fazem referência, essencialmente, aos contextos matemáticos, conduzindo a determinados processos matemáticos como «procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar» (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998, p. 109).

No entanto, o termo actividade é bastante comum entre os professores, relacionando-se tanto com as propostas que são apresentadas aos alunos como,

igualmente, com o desenvolvimento destas pelos mesmos. É corrente afirmar-se, por exemplo, que os manuais propõem actividades. Mendes (2001) salienta que este termo «é extremamente globalizante e utilizado com sentidos vários e por vezes sem significado objectivo» (p. 36).

Ponte, Boavida, Graça & Abrantes (1997) fazem a distinção entre tarefas e actividade matemática. Na sua óptica, as tarefas propostas são exteriores ao aluno; ele tem que as interpretar e, ao interpretá-las, poderá executar algumas acções, com mais ou menos entusiasmo, consoante a sua disposição, estando, assim, a desenvolver a sua actividade matemática.

Ponte & Serrazina (2000) propõem a seguinte distinção:

As tarefas matemáticas que o professor propõe aos alunos – problemas, investigações, exercícios, projectos, construções, jogos, apresentações orais, relatórios, composições escritas, etc. – constituem o ponto de partida para o desenvolvimento da sua actividade matemática. A actividade do aluno, tanto física como mental, diz respeito ao que ele faz num dado contexto. Qualquer actividade inclui a execução de numerosas acções. O objectivo da actividade é precisamente a tarefa, algo exterior ao aluno. Uma tarefa, embora seja na maior parte dos casos proposta pelo professor, tem de ser interpretada pelo aluno e pode dar origem a actividades muito diversas – ou nenhuma actividade – conforma a disposição deste e o ambiente de aprendizagem da sala de aula. Assim, a actividade é realizada pelo aluno e constitui a base fundamental da sua aprendizagem (p. 112).

Segundo Abrantes, Leal & Ponte (1996), as investigações matemáticas:

implicam processos complexos de pensamento e requerem o envolvimento e a criatividade dos alunos. Mas, além disso, são caracterizadas por se partir de enunciados e objectivos pouco precisos e estruturados, levando a que sejam os próprios alunos a definir o objectivo, conduzir experiências, formular e testar hipóteses (p. 1).

No esquema proposto por Oliveira (1998), são indicados, concisamente, os processos matemáticos envolvidos numa actividade de investigação, muito embora, segundo a autora, seja *difícil abarcar num esquema toda a riqueza desta actividade*.

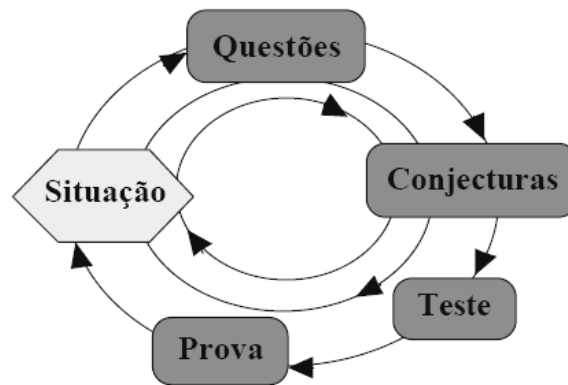


Figura 6. A actividade de investigação (Oliveira, 1998, p. 15)

Oliveira refere ainda que:

Num primeiro momento há a interrogação a uma situação, portanto há uma questão que é formulada e sobre a qual se vai trabalhar. A observação, na procura de algo que evidencie regularidade, é um elemento fundamental nesta fase. Uma ou mais conjecturas podem surgir, que são sujeitas a um teste. Passando no teste haverá que demonstrar a sua veracidade para deixar de ser ‘apenas’ uma conjectura, e tornar-se uma propriedade estabelecida pelo método matemático

(Oliveira, 1998, p. 15).

Assim, e segundo Ponte & Matos (1991), este ciclo pode ser interrompido em qualquer um dos pontos, tornando-se necessária a revisão do percurso feito até ali, além de que, obviamente, a mesma situação pode dar origem a muitas propriedades interessantes, fazendo percorrer o ciclo diversas vezes, verificando-se o que Brocardo (2001) designa por não linearidade. Efectivamente, esta autora entende que a não linearidade é uma característica das actividades de investigação e, para o explicar, salienta:

De facto, por exemplo, ao perceber-se que os testes realizados não confirmam determinada conjectura é necessário voltar *atrás* de forma a formular outra conjectura. No entanto, para isso, é importante perceber-se o que *falhou* para que a primeira conjectura não resistisse aos sucessivos testes e procurar ter em conta esse aspecto na formulação de uma nova conjectura. Deste modo, uma actividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos nela envolvidos, mas, também, pela *interacção* entre eles, ou seja, pelas relações que se devem necessariamente estabelecer entre eles (p. 99).

Desta forma, Brocardo (2001) clarifica que a interacção entre os diferentes processos se reveste de um sentido duplo, e não único ou sem retornos, tal como o

indicam as setas do esquema. Para o exemplificar refere o caso de uma conjectura que, não validada pelos testes realizados, conduzirá à formulação de uma nova conjectura, sendo necessário o voltar atrás, «olhar novamente para os dados recolhidos, decidir sobre a pertinência de recolher outros ou sobre uma nova forma de os organizar» (p. 541). Também Ponte (2003b) exemplifica o modo desordenado como ocorrem os vários momentos de uma investigação matemática: o teste de uma conjectura pode conduzir a novas questões ou, ainda, as questões e a conjectura inicial podem ocorrer em simultâneo.

Assim sendo, ambos os autores consideram que a actividade de investigação não assume um roteiro linear, visto que os diferentes processos matemáticos nela envolvidos não decorrem linearmente e ordenadamente. Contudo, segundo os dados empíricos de Brocardo (2001), os alunos acabam, em muitos casos, por seguir um processo linear, correspondente à ordem sequencial das questões enunciadas nas tarefas que lhes são apresentadas.

### **Actividades de investigação e resolução de problemas**

Considerando as características que lhes são inerentes, as actividades de investigação podem estar associadas a outras, em particular à resolução de problemas e formulação de problemas, embora essas mesmas características também possam ser motivo de alguma confusão.

Alguns autores diferenciam estes dois tipos de actividades. Orton & Frobisher (1996, p. 25) começam por definir o que é um problema:

Um problema matemático pode ser definido como sendo uma situação em que um estudante individual:

- (a) reconhece ou acredita que existe uma meta matemática a ser alcançada, normalmente uma resposta de qualquer tipo;
- (b) aceita o desafio de desempenhar algumas tarefas matemáticas para atingir a meta;
- (c) não tem nenhum procedimento matemático disponível conhecido pronto a ser aplicado ou recordado para alcançar a meta directamente.

Estas três formas de considerar o que é um problema matemático permitem fazer a distinção entre um problema e uma investigação. Assim, se uma tarefa não tiver nenhuma meta reconhecível não é um problema. A segunda forma pode-se aplicar tanto a um problema como a uma investigação, pois o aluno tem de se envolver na tarefa e

entendê-la como um desafio, caso contrário a tarefa não terá significado para o mesmo. Quanto à terceira forma, se uma investigação não tem nenhuma meta a atingir, então também não pressupõe a utilização de qualquer procedimento matemático a ser aplicado. Desta forma, terá de ser o aluno a formular as metas que exijam a aplicação de procedimentos apropriados. Como tal, a distinção entre um problema e uma investigação passa pela especificação ou não de uma meta ou objectivo na tarefa que for proposta. Esta ideia ainda pode ser evidenciada na figura seguinte que revela uma proposta de Frobisher (1994) para clarificar o que é uma investigação, partindo de um conceito geral (que denota como «problema») e subdividindo-o em dois grandes grupos: problemas e investigações.

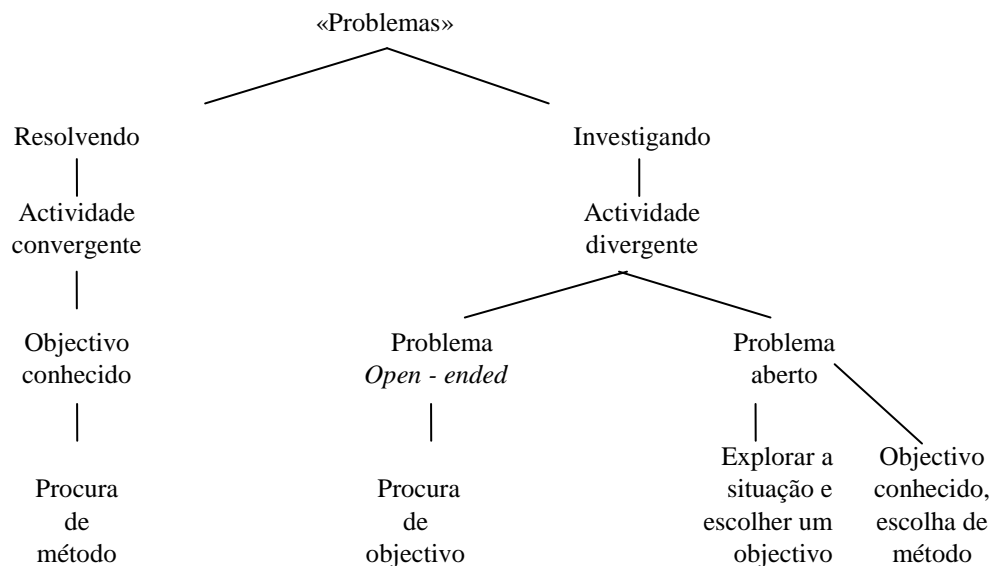


Figura 7. Relação entre problemas e investigações (Frobisher, 1994, p. 155, citado em Brocardo, 2001, p. 95)

Brocardo (2001) salienta que:

de acordo com o esquema, numa investigação, o contexto é uma situação que conduz a um objectivo que é escolhido como constituindo o resultado da exploração dessa situação. Para além disto, é o aluno que deve decidir sobre o modo de explorar a situação. Esta definição de investigação está de acordo com a sugerida por Ernest (1996) relativamente a duas características: tratar-se de uma actividade divergente e tratar-se de uma situação em que a decisão sobre o método de exploração é da responsabilidade do aluno. No entanto, o terceiro tipo de investigações considerado por Frobisher (1994) – objectivo conhecido, escolha de método – uma vez que retira o poder de decisão

ao aluno sobre o que se vai investigar, não é considerado por Ernest como constituindo uma investigação (p. 94-95).

Neste esquema, a investigação propriamente dita situa-se no que Frobisher (1994) denomina por *problema open-ended* (problemas de finalização em aberto; um problema pode dar origem a outros problemas), em que é o aluno a definir a sua própria meta ou objectivo, socorrendo-se dos seus próprios processos matemáticos;

Segundo Ernest (1991), as actividades de investigação e a resolução de problemas são conceitos que estão relacionados com a inquirição (atitude de questionar, de inquirir) matemática; nestes dois tipos de actividade, o aluno é o próprio construtor activo do conhecimento e a Matemática torna-se, assim, um produto dessas actividades. Assim, ambas as actividades são bastantes problemáticas na medida em que conduzem ao desenvolvimento ou uso processos matemáticos complexos. Realça, no entanto, que:

embora as investigações possam começar por uma situação ou questão matemática, o foco da actividade muda assim que novas questões são postas, e novas situações são geradas e exploradas. Assim, o objectivo da inquirição muda e é redefinido por aquele que a conduz.

(Ernest, 1996, p. 29)

As investigações matemáticas, resultantes de tarefas de carácter aberto, permitem a utilização de uma metáfora geográfica. Como diz Pirie (1987): «a ênfase está em explorar uma questão da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem, não o destino», ao contrário do que acontecia com a resolução de problemas (Ernest, 1996, p. 30). Pirie (1987) coloca ênfase no processo e não na procura de soluções ou do produto.

Este processo, também na visão de Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1999), pode encaminhar os alunos envolvidos numa mesma investigação para percursos totalmente distintos, dependendo da discussão e do processo de negociação dos intervenientes, como consequência da colocação de questões produtivas (que sejam pertinentes e interessantes de modo a poderem gerar conhecimento matemático). Deste modo, e tal como também constatam Ernest (1991) e Frobisher (1994), já referidos anteriormente, as investigações são divergentes, dado que poderão existir diversas formas de exploração, tornando difícil a definição de *heurísticas*, tal como Pólya (1977) estabeleceu para a resolução de problemas, que é um processo eminentemente convergente.

Propondo um modelo unificador, as quatro principais etapas da resolução de problemas estabelecidas por Pólya (1977), são:

- 1- *Compreender o problema;*
- 2- *Conceber um plano de resolução;*
- 3- *Executar o plano;*
- 4- *Reflectir sobre o trabalho realizado.*

Entretanto, segundo Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira, em 1999, as quatro etapas características de uma investigação matemática são:

- 1- *Formular a questão a investigar;*
- 2- *Formular conjecturas relativamente a essa questão;*
- 3- *Testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las;*
- 4- *Validar e comunicar os resultados.*

Portanto, nas actividades de investigação, o enunciado terá de ser pouco definido, não sendo rígidas as questões que orientem a investigação, cabendo aos alunos definir o caminho a seguir, colocando as suas próprias questões e conjecturando uma ou mais hipóteses, com vista a clarificar a questão inicial (Ponte & Matos, 1996).

Ponte (2003c) considera que uma tarefa de investigação tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Como tal, segundo este autor, pode-se adoptar o seguinte esquema:

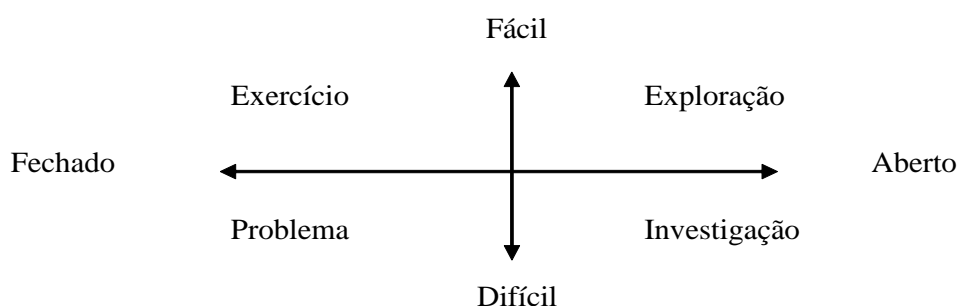


Figura 8. Esquema das tarefas (Ponte, 2003c)

Os exercícios são tarefas com dificuldade reduzida e estrutura fechada. Os problemas também têm uma estrutura fechada mas já pressupõem um grau de dificuldade maior. As investigações são tarefas com grau de dificuldade elevado e estrutura aberta. As explorações são tarefas com dificuldade reduzida mas assemelham-



Assim, as tarefas de investigação são um exemplo de uma tarefa de média duração. Quanto ao contexto, o mesmo investigador, faz a distinção entre as tarefas, tendo em conta os aspectos da realidade ou a formulação em termos puramente matemáticos (da Matemática pura). Contudo faz referência a Skovsmose (2000), o qual distingue ainda um terceiro contexto, de certa forma intermédio, designado por «semi-realidade» – «embora aparentemente estejam em causa situações reais, para o aluno estas podem não significar grande coisa (...) a atenção foca-se apenas na propriedade ou propriedades que interessam a quem enunciou o problema e é nelas que o aluno é suposto centrar-se» (Ponte, 2005, p. 19). Desta forma, Ponte apresenta o seguinte esquema:

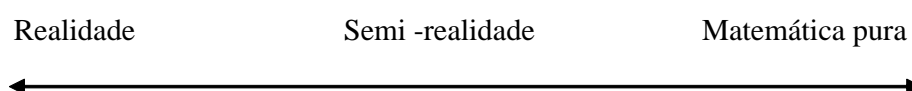


Figura 10. Diversos tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005)

As investigações, tal como os exercícios ou problemas, tanto podem surgir em contextos da realidade, como de semi-realidade ou de Matemática pura.

As abordagens e as estratégias na resolução de problemas, nas investigações e nas explorações são praticamente as mesmas – procura de regularidades, utilização de esquemas, tabelas ou diagramas, elaboração de listagens, experimentação de casos particulares ou tentativa e erro – mas as atitudes ou papéis do professor e do aluno são distintos, tal como se pode observar no quadro 1.

<b>Método</b>	<b>Papel do professor</b>	<b>Papel do aluno</b>
Descoberta guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objectivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objectivo.	Segue a orientação.
Resolução de problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Quadro 1. Comparação de métodos baseados na inquirição para o ensino da Matemática (Ernest, 1996, p. 32, citado por Brocardo, 2001, p. 122)

Ernest (1996) advoga que a abordagem investigativa, além de permitir a utilização de diferentes processos matemáticos, caracteriza-se também por «uma mudança no poder do professor que deixa de ter o controlo sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos e sobre a escolha dos conteúdos de cada aula (...) [e] por uma maior autonomia e auto-regulação do aluno» (p. 31).

Quer na descoberta guiada, quer na resolução de problemas, o professor gere a situação, já que é ele próprio que define o enunciado do problema, podendo ou não orientar o aluno. No entanto, na abordagem investigativa é o aluno que assume esse poder ou liderança, definindo, desde o início, o que quer investigar e o processo a seguir; o professor apenas escolhe uma situação de partida ou aprova as escolhas do aluno ainda que não sejam as mais adequadas. Na realidade, a abordagem investigativa permite a inversão dos papéis dos intervenientes no processo de ensino-aprendizagem mas, para que ela seja eficazmente assumida, há que permitir que os alunos errem, pois pode verificar-se uma aprendizagem muito mais significativa com o erro do aluno do que com a condução e orientação do professor; o importante é que os alunos se envolvam e sejam capazes de criar gosto pela exploração e pela descoberta, experimentando, discutindo, formulando conjecturas, generalizando, provando e comunicando as suas ideias e decisões, para que se convençam a si próprios e aos outros. Desta forma, Ernest (1996) atesta: «Isto retira ênfase à unicidade e à correcção de respostas e métodos, e em vez disso centra-se no indivíduo como criador activo do conhecimento e na natureza temporária das suas criações» (p. 31).

A terminar este ponto, é de mencionar que resolução de problemas e investigações matemáticas podem ser usados com o mesmo sentido, dado não haver unanimidade quanto às suas definições. No entanto, e na mesma linha do que foi referido acima,

mais do que distinguir problema de investigação, o que é importante é apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e onde os alunos tenham oportunidade para experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões.

(Serrazina, Vale, Fonseca & Pimentel, 2002, p. 42)

Neste estudo, opta-se pelo termo actividade de investigação, pretendendo, deste modo, incluir no mesmo não só a tarefa proposta mas também toda a actividade matemática do aluno, pressupondo um comportamento idêntico ao de um matemático

profissional e seguindo uma abordagem do tipo investigativo. Aliás, os processos matemáticos revelados pelos alunos estão associados à actividade de investigação, a qual poderá decorrer da tarefa de investigação proposta pelo professor, pelo que a primeira designação aqui mencionada assume um sentido mais amplo, reportando-se à actividade efectivamente realizada pelo aluno.

### **Razões para incluir as actividades de investigação na Matemática escolar**

Como argumentos favoráveis à inclusão das actividades de investigação na Matemática escolar, podem-se registar os apontados no «Projecto Matemática Para Todos» (1995/1999), nomeadamente: a ligação que estas têm com a actividade matemática, o envolvimento que os alunos podem ter no trabalho, o recurso a diferentes estratégias, o relacionamento de conhecimentos, o carácter transversal e o reforço de aprendizagens mais elementares. Na verdade, as experiências realizadas com os alunos evidenciaram que estas actividades desenvolvem a capacidade de comunicação, quer de raciocínios, quer de ideias matemáticas, oralmente e por escrito, a auto-confiança, a criatividade, os hábitos de trabalho e a persistência. Estas actividades permitem que os alunos contactem com uma parte fundamental da Matemática (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999) que, usualmente, não lhes é dada a conhecer mediante a prática de outro tipo de trabalho. Deste modo, os alunos vivenciam o processo de criação matemática, no qual estão presentes toda a essência da Matemática bem como a natureza do conhecimento matemático, além dos processos que lhe são característicos (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999).

Segundo o NCTM (1991), todos os alunos devem participar em numerosas e variadas experiências que lhes permitam valorizar a Matemática e desenvolver hábitos de pensamento matemático; ser encorajados a explorar, a fazer tentativas, e mesmo a errar, a fazer conjecturas, a testar, a construir argumentos sobre a validade de uma conjectura, questionando e discutindo o seu próprio raciocínio e o dos outros. A confiança na capacidade de raciocinar e justificar pensamentos desenvolve a autonomia das crianças, embora estas necessitem de muito tempo e de um grande número de experiências para desenvolver a sua capacidade de construir argumentos válidos. Além disso, no 5.º ano de escolaridade [ano a que se reporta este estudo], os alunos ainda estão num estágio de pensamento concreto, dependendo de um contexto físico ou

concreto para perceber regularidades. A autonomia cresce «à medida que as crianças aprendem que a Matemática não é uma simples memorização de regras e procedimentos, mas antes que a Matemática é relevante, lógica e agradável» (NCTM, 1989/1991, p. 37).

Numa publicação mais recente do NCTM, de 2000, com a inclusão de uma nova norma curricular, «Argumentação e Prova», as investigações matemáticas enquanto experiências de aprendizagem, desde o pré-escolar, passaram a constituir parte do currículo, defendendo-se que os alunos devem fazer e aprender a investigar conjecturas, uma vez que estas são o principal caminho para a descoberta e que «fazer matemática envolve descoberta» (NCTM, 2000, p. 57).

Também Love (1996) considera que a Matemática tem de ser entendida como uma forma de conhecimento e não como um corpo de conhecimento, daí que os alunos possam assumir uma atitude crítica relativa à sua aprendizagem, devendo, deste modo, «pensar por eles próprios em Matemática» (p. 103). Como tal, as crianças necessitam de se envolver em actividades como:

- Identificar e iniciar os seus próprios problemas para investigar;
- Expressar as suas ideias e desenvolvê-las na resolução de problemas;
- Testar as suas ideias e hipóteses, confrontando-as com experiências relevantes;
- Defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros a uma crítica razoável.

(Love, 1996, p. 103)

Fonseca (1999), citando Kissane (1988), refere que o autor aponta cinco razões importantes para se reservar espaço no currículo para as actividades de investigação, a saber:

- (1) são a natureza essencial da actividade matemática: levantar problemas, tratar situações que não são conhecidas, podendo ter uma ou várias soluções, formular e testar conjecturas;
- (2) enfatizam aspectos da disciplina menos susceptíveis de serem substituídos pela tecnologia;
- (3) estimulam a persistência;
- (4) potenciam uma melhor aprendizagem sobre a natureza da Matemática;
- (5) estimulam fortemente a motivação para a aprendizagem da Matemática (p. 32-33).

Assim, de acordo com Kissane (1988), os alunos, ao viverem experiências significativas, desenvolvem uma visão mais correcta e abrangente da Matemática, entendendo-a como algo que as pessoas fazem e não como algo que as pessoas já fizeram [conhecimento construído e não conhecimento acabado].

Mais ainda, tal como afirmam Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires (2002),

o trabalho de natureza não rotineiro, particularmente as investigações matemáticas, pode permitir, entre outros aspectos, (a) o desenvolvimento de uma competência matemática, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (b) a oportunidade de abordar e relacionar dinamicamente conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões; (c) a realização de situações de trabalho diferenciado, atendendo às características individuais dos alunos, às suas competências e aos diferentes percursos escolares; e (d) uma compreensão global da natureza da actividade matemática, nomeadamente, dos processos de fazer matemática característicos das crianças mais novas (...) (p. 74).

Goldenberg (1999) aponta razões de três tipos para a integração das investigações no currículo da Matemática e, conseqüentemente, nas aulas de Matemática: uma relacionada com a natureza da própria Ciência, considerando que, além de se conhecerem os produtos e factos já acabados, é necessário saber como se pensa matematicamente, ou seja conhecer os modos de pensamento que denomina de «hábitos matemáticos de pensamento» (p. 37); outra é a motivação que as mesmas podem proporcionar ao aluno e a última é que permitem o desenvolvimento de capacidades que contribuem para um melhor e maior conhecimento de conceitos, além de facilitarem a aprendizagem. Jaworsky (1994) e Pirie (1987) argumentam da mesma forma, se bem que esta segunda autora ainda acrescenta que as actividades de investigação podem criar um ambiente de aprendizagem vivo em que os alunos participam activamente.

Na óptica de Amorim & Matos (1990), as investigações matemáticas permitem aos alunos o desenvolvimento do seu espírito crítico, da sua autonomia, da sua confiança e da sua comunicação matemática.

Segurado (1997) refere que as actividades de exploração e de investigação, ao favorecerem contextos ricos em desafios, permitem uma estreita relação entre os conteúdos ensinados e os processos de raciocínio, contribuindo, assim, para uma melhor apropriação de conhecimentos pelos alunos. Além disso, a mesma investigadora

acrescenta que a realização de investigações favorece o desenvolvimento de um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e reconhecimento das interacções entre pares.

Cunha (1998) defende que as actividades de investigação motivam os alunos, ajudando-os a desenvolver o raciocínio e a perspicácia, para além de contribuírem para a percepção da Matemática como ciência em evolução e construção.

Também Amaral (2003), num estudo realizado com alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico, menciona que as actividades investigativas proporcionam o desenvolvimento da capacidade de explicitação do raciocínio, da autonomia e da valorização do trabalho cooperativo.

Mendes (1997), outro investigador português, salienta que a realização de investigações potencia a capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática.

Brocardo (2001), num estudo que desenvolveu com alunos do 8.º ano, concluiu que a integração progressiva de actividades de investigação na sala de aula influencia a forma como os alunos «apreciam a importância de conseguir de facto trabalhar em grupo» (p. 558) e que o ambiente cooperativo, favorecido pelo trabalho de grupo, pode ajudar os alunos a melhorar a sua capacidade de investigação. Na mesma linha, Mendes (1997) concluiu que as interacções que se estabelecem podem permitir o aumento do sentimento de tolerância e cooperação entre os alunos.

Segundo Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), a realização de actividades de investigação beneficia o desenvolvimento simultâneo de capacidades básicas (memorização, técnicas de cálculo) e de capacidades de ordem superior, uma vez que a utilização de umas apoia o aperfeiçoamento das outras, de forma continuada.

Na mesma linha, também Christiansen & Walter (1986) mencionam que a actividade investigativa apela simultaneamente a capacidades básicas – como a memorização de conceitos e técnicas de cálculo – e a capacidades de ordem superior – como conjecturar, argumentar e demonstrar.

Lakatos (1991), no domínio da Filosofia da Matemática, defende teses que apoiam a inclusão das tarefas de investigação no currículo quando, na sua perspectiva conceptual da Matemática como ciência falível, afirma que esta avança pela lógica das demonstrações e das refutações.

Ainda em torno dos porquês das actividades de investigação na sala de aula, Oliveira, Segurado, Ponte & Cunha (1999, s/p), também referem que:

- são indispensáveis para fornecer uma visão completa da Matemática, uma vez que são uma parte essencial da actividade matemática;
- estimulam o tipo de participação do aluno necessária para que ocorra aprendizagem significativa;
- fornecem pontos de entrada múltiplos para alunos com diferentes níveis de competência;
- estimulam um modo holístico de pensamento, relacionando muitos tópicos, condição essencial para o raciocínio matemático significativo.

Sem dúvida que são inúmeras as razões para se afirmar a importância do recurso às actividades de investigação, mas muitos são os investigadores que referem o facto de as mesmas desenvolverem as capacidades de comunicação e de argumentação, dado que possibilitam o debate e a reflexão acerca dos resultados obtidos, permitem a utilização de diferentes estratégias de resolução e o estabelecimento de várias conexões; os alunos têm de pensar, podendo enveredar por uma ou outra via, justificando, ou não, as suas conjecturas, evidenciando, assim, «alguma melhoria na forma de comunicar as suas ideias, quer oralmente quer por escrito» (Rocha, 2002, p. 121).

Pelo exposto, urge confrontar os alunos com actividades de investigação aquando da sua aprendizagem da Matemática, já que estas permitem o vivenciar de processos inerentes à investigação, podendo mesmo constituir desafios colocados à ciência em geral quando implicam o favorecimento do espírito inovador, de acordo com o que expõe Domingos (2001):

(...) para podermos proporcionar uma aprendizagem de conceitos matemáticos avançados com compreensão teremos que colocar os alunos em contextos onde seja possível sustentar o crescimento cognitivo, conduzindo-os à elaboração de um pensamento matemático com significado onde os conceitos mais abstractos são o resultado de uma construção por parte dos alunos (...) (p. 127).

A terminar, podemos afirmar que os argumentos que justificam a importância da inclusão das actividades de investigação na Matemática escolar são bastante fortes, podendo-se agrupar em cinco tipos, tal como menciona Brocardo (2001) no seu estudo (p. 127):

- (1) o argumento do que é a Matemática: a Matemática não é só um conjunto de conteúdos;
- (2) o argumento do que fica para a vida: saber usar processos importantes para a vida;

- (3) o argumento da motivação: as investigações motivam os alunos;
- (4) o argumento da aprendizagem: desenvolvem capacidades, contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem;
- (5) o argumento do ambiente de aprendizagem: ajudam a estabelecer um ambiente vivo em que os alunos participam activamente.

Contudo, nesta linha de trabalho e de investigação na Educação Matemática emergem naturalmente questões por resolver, algumas das quais serão abordadas no subcapítulo seguinte.

### **2.1.3. Dificuldades na/da aplicação das actividades de investigação**

Independentemente de todas as potencialidades que as actividades de investigação oferecem, a aplicação das mesmas na Matemática escolar reveste-se de algumas dificuldades, quer para os alunos, quer para os professores. Por outro lado, também poderão resultar alguns constrangimentos decorrentes da sua implementação na sala de aula.

Na verdade, existem vários factores que podem influenciar a realização de actividades de investigação na sala de aula. Muitos estão ligados ao contexto escolar e ao sistema educativo e outros prendem-se com os seus principais intervenientes – professores e alunos. Alguns deles, já relatados por Ponte, Costa, Rosendo, Maia, Figueiredo & Dionísio (2002) e que ainda se encontram por resolver, são: os relacionados com a gestão curricular – como articular estas tarefas com outras tendo em vista o conjunto dos objectivos a atingir – e com a avaliação – como avaliar o desempenho dos alunos e como integrar estes dados num sistema global de avaliação. Assim, nesta linha, cabe ao professor escolher e combinar de entre um leque variado de tarefas – exercícios, problemas, explorações, investigações e projectos – aquelas que permitem implementar a sua estratégia de ensino, encontrando a «mistura perfeita», sabendo *com que peso e medida* deve ser fornecido cada tipo de tarefa e em que momentos deve ser aplicado e de que modo (Ponte, 2005). Já no que à avaliação das actividades de investigação diz respeito, esta é ainda, segundo Santos, Brocardo, Pires & Rosendo (2002), uma área pouco estudada em Portugal. Por outro lado, Ponte et al. (2002, p. 1) apontam outros aspectos problemáticos decorrentes das contribuições

apresentadas no XI Encontro de Investigação em Educação Matemática, promovido pela Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação que teve lugar em Coimbra, em 2002 – «Qual o papel que as actividades de investigação podem assumir no ensino e na aprendizagem da Matemática?»; «Os alunos conseguem investigar questões matemáticas?»; «Os professores são capazes de promover este tipo de trabalho nas suas aulas?»; «Que condições são necessárias para que tal aconteça?»; «Como promover nos alunos (e nos professores) as atitudes e as competências necessárias para o trabalho de investigação?»; «Como evitar o risco de propostas de trabalho investigativo degenerarem na simples aplicação de um conjunto de procedimentos rotineiros (por exemplo – fazer tabelas ou procurar regularidades)?»

Segundo Ponte et al. (2002), embora as actividades de natureza investigativa possam ser realizadas desde o jardim-de-infância até ao ensino superior, por todos os alunos, independentemente do seu grau de desempenho, cabe ao professor a formulação adequada das suas propostas, articulando questões mais abertas com questões mais estruturadas e a apresentação de forma cuidada e estimulante. No entanto, há que salientar o seguinte: «Da experiência recolhida ao longo do projecto ‘Matemática para Todos’ pode afirmar-se que, numa primeira fase, é natural que os professores comecem por utilizar tarefas produzidas por outros, introduzindo-lhes pequenas alterações para as ajustarem aos seus alunos, se for caso disso e só posteriormente, com a aquisição de alguma experiência neste tipo de trabalho, é de esperar que comecem a criar novas tarefas de investigação. O grau de estruturação das tarefas tende a diminuir sucessivamente à medida que o professor vai tendo mais experiência (Brunheira, 2000)» (Santos et al, 2002, p. 90). Contudo, no meu entender, toda esta gestão pressupõe um grande à vontade por parte do professor, o que só será conseguido após uma boa prática deste tipo de trabalho, devendo o mesmo envolver-se verdadeiramente nele. Tal como refere Fonseca (2002, p. 178), reportando-se a Frobisher (1994) e Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, Segurado & Varandas (1999): «É preciso que os professores explorem e investiguem, eles próprios, os problemas e as investigações, experimentando as frustrações e as alegrias que acompanham essa experiência (...) Só desenvolvendo nos professores um espírito investigativo se conseguirá que estes consigam desenvolver nos seus alunos». No entanto, Brunheira (2002), tendo por base as ideias de Brown & Bork (1992), alerta para o facto de a investigação mostrar também que os professores principiantes não possuem um conhecimento suficientemente aprofundado em didáctica da Matemática, ainda que a sua formação integre uma forte componente de

estudos nessa área. Ainda a propósito de formação de professores, Ponte et al (2002) salientam a necessidade de sensibilizarem todos os novos professores dos diversos níveis de ensino para a natureza do trabalho investigativo em Matemática – «É preciso que eles desenvolvam uma atitude favorável à realização deste tipo de trabalho e isso só pode ser conseguido se tiverem múltiplas experiências nesse sentido ao longo de toda a sua formação inicial» (p. 2). Contudo, será que essa formação inicial é eficaz ao ponto de dar aos professores um certo conforto na orientação das aulas de cunho investigativo, ou, pelo contrário, ela é insuficiente, contribuindo para que os professores, ao se verem confrontados com situações inesperadas, revelem algum desconforto? Deste modo, tal como a perspectiva de Goldenberg (1999), a necessidade de uma formação matemática sólida parece imprescindível, de modo a apetrechar o professor de um sentido matemático indispensável para a gestão dessas aulas. Também Ruthven (2000) defende a importância da realização de projectos de investigação no desenvolvimento profissional dos professores. Na minha óptica, creio ser óbvio que o professor não pode ser visto como um profissional detentor de todo o conhecimento matemático a todos níveis, após ter terminado a formação académica inicial, devendo estar disposto a progredir, actualizando-se continuamente. No entanto, é de acrescentar que muitas das dúvidas e inquietações, face ao desenvolvimento do trabalho investigativo na aula de Matemática, também se prendem com as crenças e as concepções relacionadas com as aulas tradicionais (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999). De facto, um professor que tenha estado sujeito a um ensino tradicional terá tendência a replicá-lo da mesma forma. Além disso, sempre houve de forma recorrente a preocupação com o cumprimento do programa, tal como pode ser evidenciado por Sousa (2002):

Estes desvios em relação ao programa, traduzido no manual, provocavam atrasos no seu cumprimento e faziam crescer as minhas dúvidas e inseguranças face às dificuldades em conciliar o «dever» de o cumprir, com o sentimento de que necessitava de fazer algo diferente para criar nos alunos o gosto pela Matemática e reduzir o seu insucesso. (...) não era fácil alterá-la[a prática de ensino]e cortar com o modelo de ensino em que me tinha formado. Esta vontade de mudar e de procurar alternativas, estão na base de um percurso bastante irregular, quer em termos de escolas por onde passei, quer em termos de escolas por onde passei, quer em termos de disciplinas que leccionei (...) (p. 76).

Ficou aqui patente uma vontade clara de contrariar o ensino tradicional, o que nem sempre é «bem visto» por outros profissionais. Na verdade, a mesma autora

mencionou: «Os problemas e desafios viram-se assim relegados para aulas muito raras e especiais. Os próprios colegas, com mais experiência, assumiam este estado de coisas com naturalidade e desaconselhavam a resolução de problemas. Recordo a perplexidade e revolta que senti quando (...) o grupo decidiu que não íamos ‘perdermos tempo’» (Sousa, 2002, p. 76). Trata-se da cultura de escola que habitualmente pouco privilegia este tipo de actividades (Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira, 1999), não criando espaços de trabalho que proporcionem a troca de experiências (APM, 1998); por exemplo, Saraiva (2001), na sua investigação desenvolvida por uma equipa de dois professores e pelo próprio investigador, veio a verificar que o desenvolvimento profissional constitui um processo dinâmico, contínuo, reflexivo e estreitamente ligado às práticas profissionais. Assim, para que o mesmo possa ser promovido, tem de haver: a) uma equipa de trabalho favorável à experimentação e ao desenvolvimento profissional; b) uma reflexão efectuada ao ritmo, às necessidades e interesses dos professores, de acordo com o contexto natural da escola; c) o desejo de inovar e de fazer melhor por parte dos professores. Assim, de acordo com Saraiva (2001), o desenvolvimento profissional implica também uma mudança de concepções e práticas, além do aumento do conhecimento profissional do professor; é preciso que o próprio agente educativo tenha vontade de mudar, tendo em conta os riscos que possam estar inerentes a essa mudança. Entre outros, e em oposição às tarefas tradicionais, as actividades de investigação implicam o surgimento de um grande número de situações novas e imprevistas, nomeadamente: a organização da turma e a gestão do tempo e das inúmeras solicitações, que podem conseguir a algum sentimento de insegurança por parte do professor. Outros estudos têm também demonstrado que o modo como os alunos se envolvem na exploração das actividades de investigação é condicionado pelas próprias concepções dos mesmos sobre a Matemática e a sua aprendizagem (Abrantes, 1994; Brocardo, 2001), mas que estas relacionam-se igualmente com o tipo de actividade matemática por eles realizada (Matos, 1991).

Embora em menor grau, sobretudo devido à implementação do Plano da Matemática, criado pelo Ministério da Educação, é possível que ainda persistam dificuldades ao nível de material e recursos (basta referir, a título de exemplo, que frequentemente até o número de fotocópias permitido é limitado);

Porém, analisando todos os prós e contras relativos à implementação das actividades de investigação, no meu entender, prevalecem os prós, cabendo ao professor a capacidade de gerir e ultrapassar todas as condicionantes, de forma a propiciar aos

alunos verdadeiras oportunidades de desenvolver o seu poder matemático numa actividade matemática rica. No entanto, é preciso que os professores estejam receptivos às novas mudanças na sala de aula, ultrapassando os obstáculos que se levantam à prática frequente deste tipo de actividades, dos quais faz parte a exigência de novos requisitos nas competências do professor (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999). Efectivamente, há que ultrapassar a visão de que a Matemática «consiste essencialmente num conjunto de conteúdos e técnicas e em que a aprendizagem deve decorrer das explicações do professor e da prática das regras que ele ensina» (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002, p. 98).

#### **2.1.4. O papel do professor na realização das actividades de investigação**

A inclusão das actividades de investigação na matemática escolar e a sua valorização no currículo constitui um desafio para professores e alunos, implicando uma profunda alteração nos papéis que estes desempenham na sala de aula. Segundo Frobisher (1994), o professor deixa de ser o agente centralizador de todo o processo e de ser mero transmissor de conhecimentos. Da mesma forma, Ernest (1991/1996) menciona haver uma alteração de poderes na sala de aula, na qual o professor deixa de ter total controlo sobre a escolha dos conteúdos de cada aula e os métodos usados, dado que esta decisão passa, agora, pelos próprios alunos. É claro que este novo cenário acarreta para o professor exigências acrescidas, quer pedagogicamente, quer ao nível dos conhecimentos matemáticos (Goldenberg, 1999).

Sem dúvida que o papel do professor na realização das actividades de investigação é complexo, iniciando-se logo com o estabelecimento das prioridades curriculares e, conseqüentemente, com a exploração e selecção das tarefas, de acordo com as capacidades e interesses dos alunos.

Outra questão que se coloca ao professor é decidir sobre o modo como os alunos vão trabalhar, isto é, se individualmente, em pequenos grupos ou em grande grupo. Na verdade, a opção mais acertada recai sobre «formas mistas»; em pequenos grupos durante a maior parte da aula e em grande grupo, na altura de transmitir alguma ideia em particular. O professor terá, ainda, a seu cargo a decisão relativa à constituição dos grupos. A esse respeito, Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1999) referem

que «o papel do professor é essencial (...) na estruturação da aula, na sua condução e na negociação de significados, que é especialmente importante para a aprendizagem dos alunos» (p. 147). Segurado e Ponte (1998), Ponte et al (1999) e Santos, Brocardo, Pires & Rosendo (2002) defendem o trabalho em pequenos grupos enquanto os alunos realizam a tarefa, e em grande grupo quando estes a discutem, numa fase final. «O trabalho em pequeno grupo incentiva uma comunicação entre alunos e promove uma melhor explicitação das conjecturas e testes a realizar. O trabalho em grande grupo impõe uma formalização maior do raciocínio e incita os alunos a uma postura mais madura na discussão com o professor e os colegas» (Ponte et al., 1999, p. 147).

Relativamente à actividade do professor no decorrer da aula de trabalho investigativo, e tendo em conta as perspectivas de Chapman (1997), Christiansen e Walter (1986) e Mason (1996a), distinguem-se, de um modo geral, três etapas fundamentais: a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e o momento de síntese e conclusão final/reflexão. A este respeito, Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira (1998), referem que, «no arranque da actividade, o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a actividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representando a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes» (p.42). Os mesmos autores salientam que cabe ao professor manter o diálogo com os alunos enquanto estes vão trabalhando na tarefa, e, no final, conduzindo a discussão colectiva. Assim, o professor deverá assumir um papel meramente orientador ou de monitorização, devendo, no entanto, criar um ambiente propício à aprendizagem – «um ambiente em que todos os alunos se sintam à vontade para apresentar as suas conjecturas, argumentar contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que o seu raciocínio será valorizado» (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998, p. 47). O professor passa apenas a coordenar as actividades, assumindo-se como «um facilitador das aprendizagens, um dinamizador do trabalho, um companheiro de descoberta» (APM, 1988, p. 71). Assim, deverá estar atento e questionar sistematicamente os alunos, pretendendo, deste modo, ajudá-los a pensar, evitando dar-lhes respostas prescritivas (Pirie, 1987) e opiniões muito concretas (Ridgway, 1988); em alternativa, deve encorajar a interacção entre os alunos e incentivá-los a apresentar argumentos para defender as suas ideias (NCTM, 2000).

Como tal, um outro aspecto torna-se relevante: a estimulação da comunicação entre os alunos. No entanto, para que se estabeleçam interacções ricas para o desempenho matemático dos alunos, o professor deverá implementar o que César, Torres, Rebelo et al (2000) designam por contrato didáctico – um conjunto de regras entre os diversos sujeitos que interagem na sala de aula – visto ter em vista a adopção de formas inovadoras de trabalho. Deste modo, urge alterar o contrato didáctico mais tradicional, explicitando-se algumas regras:

... os alunos devem ajudar-se mutuamente, devem formular conjecturas e testá-las, devem saber explicar aos colegas o que pensaram e como resolveram as tarefas que lhes foram propostas, devem pôr questões aos colegas que estão a explicar as resoluções que fizeram sempre que não as tenham percebido(...) (p. 55).

Assim, e ainda referindo César et al. (2000), o professor passa de um «expositor de saber a um orientador de alunos que constroem o seu saber através de actividades que ele propõe, das questões pertinentes que coloca, dos desafios que lhes lança» (p. 55).

Yackel & Cobb (1996) também clarificam o papel do professor como facilitador das discussões matemáticas, destacando que, neste âmbito, a atitude do professor é fundamental para que os alunos partilhem activamente os seus pensamentos matemáticos entre si e o professor. O professor, após «tentar imaginar que sentido as crianças estão a dar às actividades», poderá decidir como interferir e que tipo de apoio irá prestar, podendo optar pela colocação de «questões provocatórias ou entrar num diálogo socrático» (Yackel, Cobb, Wood, Wheatley & Merckel, 1991, p. 20). Assim, pode ajudar o aluno a explicar o seu raciocínio ou simplesmente facilitar o diálogo, dando valor a todos os comentários dos alunos, percebendo-os e, caso necessário, ajudando-os a explicitá-los. Mesmo que o aluno responda incorrectamente, o professor deverá dar-lhe a possibilidade de reflectir e avaliar a sua tentativa de solução, reformulando-a. Na mesma linha Yackel et al. (1991) referem que o professor tem de ajudar as crianças a clarificarem as suas explicações, apoiando-as na verbalização do seu pensamento e encorajando-as a apresentarem outras soluções, perguntando regularmente se alguém resolveu o problema [neste caso a actividade de investigação] de um modo diferente (Yackel & Cobb, 1996). Torna-se claro que, durante qualquer aula de investigação, a forma como o professor comunica e gere o seu discurso, bem como as questões que coloca, são metodologias que, quando bem aplicadas, tornam-se

imprescindíveis para a actividade investigativa dos alunos. Seguindo a mesma perspectiva, Ponte & Serrazina (2000) atestam que é importante para o professor determinar o melhor momento para optar pelo modo expositivo (usado normalmente para expor ideias, conceitos e definições), pelo modo de discussão (que deverá ser uma constante em todo o processo de investigação) e para comunicar com a turma ou cada aluno, dependendo da situação. Os mesmos autores consideram, ainda, que é importante saber quando interromper um raciocínio através de uma questão de carácter focalizador (questões orientativas, subtis e superficiais que permitam ao aluno sair de um bloqueio momentâneo); com uma questão de carácter confirmativo (indicador rápido do conhecimento do aluno sobre uma determinada matéria ou conceito, sempre que houver necessidade de uma resposta mais directa); ou optar por uma questão de carácter inquiritivo (que tem normalmente uma resposta mais exhaustiva, tendo por objectivo a explicitação dos procedimentos e dos raciocínios). Pelo exposto, pode-se concluir que não há uma metodologia única, a aplicar sob a forma de «receita», mas várias estratégias de ensino, modos de comunicação e de organização do trabalho dos alunos a adequar à situação imediata e concreta, de acordo com o objectivo pretendido; «cabe ao professor conhecer as alternativas disponíveis e conhecer-se a si próprio, sabendo até que ponto é capaz de usar confiança e desembaraço em cada uma delas.» (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997, p. 95).

Contudo, um aspecto convém realçar: é necessário iniciar-se a tarefa de uma forma eficaz (aquela que permita ao aluno entender o pretendido de forma a que possa «agarrar» as questões e gerar Matemática interessante – para usar a expressão utilizada por Singh, 1998), especialmente quando este tipo de trabalho de cunho investigativo não constitui prática frequente dos alunos. Aliás, segundo Fonseca, Brunheira & Ponte (1999), a fase de introdução da tarefa ou «de arranque» *é bastante importante e determinante*, podendo-se optar pela distribuição do enunciado escrito, seguida de uma apresentação oral clarificadora, explicitadora do tipo de trabalho que se quer desenvolver e facilitadora de um ambiente adequado ao desenvolvimento do trabalho dos alunos ou, por outro lado, pela leitura em grande grupo, tendo em conta os alunos mais novos, com alguns comentários mais pertinentes, ou com algumas questões cujas respostas revelem se os alunos estão, ou não, a entender o que lhes é proposto. A opção de apresentação da tarefa por escrito, sem a discussão inicial das questões, poderá exigir um maior apoio do professor junto dos alunos para que estes entendam o pretendido, se bem que se o enunciado da tarefa for claro os alunos poderão trabalhar mais

autonomamente. Fonseca et al (1999) concluíram que «o aumento da experiência neste tipo de trabalho leva a que os alunos criem progressivamente uma maior independência em relação ao professor e percebam mais facilmente o que lhes é pedido» (p. 94). A tarefa também pode ser proposta apenas oralmente, cabendo ao professor, caso haja necessidade, registar no quadro algumas informações essenciais. Contudo, não se pode descuidar o facto de a tarefa poder surgir espontaneamente na aula, sem a preparação prévia do professor.

Quanto ao desenvolvimento do trabalho, o professor deverá saber dosear as suas intervenções, orientando apenas o processo dos alunos, sem os influenciar directamente, propiciando, assim, o desenvolvimento das capacidades e atitudes de investigação. Com o intuito de levar os alunos a reflectirem e a analisarem o seu trabalho, procurando o significado das suas descobertas, o professor deve colocar regularmente a pergunta «porquê» a seguir aos comentários dos alunos, de modo a «provocar o raciocínio» (NCTM, 1994). Nesta linha, Fonseca et al (1999) identificaram outras questões com que o professor também deve desafiar os alunos: «Como explicam isso? Qual a relação entre essas ideias? Porque é que dizes que não poderá ser...?»(p. 94).

Os mesmos autores consideram que os alunos, quando não estão habituados a realizar investigações, devem sentir algumas dificuldades, chamando o professor frequentemente por não encontrarem nenhuma resposta imediata, em virtude da falta de compreensão da natureza da tarefa; neste caso, o professor deve elucidá-los quanto à essência do trabalho investigativo, podendo concretizá-lo com alguns exemplos. Além disso, ainda salientam que o professor deverá apoiar os alunos no decorrer de algumas etapas do processo investigativo (compreensão da situação proposta, organização de dados, formulação de questões) de modo a que estes possam prosseguir com o levantamento de conjecturas, o teste de conjecturas e, em alguns casos, a demonstração de conjecturas. As questões a colocar deverão ser mais ou menos indirectas, de acordo com a experiência dos alunos neste tipo de tarefas, dando sempre o incentivo ao espírito crítico, à reflexão e à procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Por outro lado, o professor na tentativa de levar o aluno a examinar as suas ideias, deverá solicitar a explicação dos argumentos, colocando questões do tipo: «O que te leva a pensar isso? ou Porque não concordas com a ideia do teu colega? [Desta forma], os alunos vão aprendendo a discutir, a descobrir novas relações entre conceitos, a ter mais segurança nas suas ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio e a criatividade» (Fonseca et al, 1999, p. 95). Devem ser dadas

oportunidades aos alunos para descobrirem, eles próprios, os seus erros ou caminhos infrutíferos, sem lhes causar desmotivação (cabendo, deste modo, ao professor avançar com pistas mais directas). Um outro desafio que é colocado ao professor é o de perceber e dar continuidade às descobertas dos alunos que sigam um rumo diferente daquele que inicialmente havia previsto. Relativamente às discussões finais, o professor, na sua função de moderador e orientador, deverá valorizar todo o tipo de descobertas, sejam elas mais interessantes ou mais modestas (Mason, 1996a; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1998). A estimulação da comunicação torna-se um factor primordial, devendo os alunos explicitar as suas ideias e argumentar em defesa das suas afirmações.

Fonseca et al (1999) referem que o momento ideal para a realização das discussões é após a exploração da tarefa, embora nem sempre seja possível «devido ao horário espartilhado dos alunos (...) Frequentemente o que acontece é que o desenvolvimento da actividade de investigação decorre numa aula e a discussão apenas na aula seguinte, o que dificulta o arranque da discussão final, pois os alunos, de uma aula para a outra, já não se lembram tão bem daquilo que fizeram e, de uma maneira geral, os registos escritos não são suficientemente ricos para os ajudar» (p. 96). Assim, entendem ser conveniente realizar o trabalho com investigações em aulas de duas horas [o que actualmente corresponde a cerca de bloco e meio], esperando-se, assim, algum tempo para a discussão ainda na própria aula. Também consideram que pode ser útil um momento de discussão aquando da realização da tarefa, de forma a poder ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades, a motivá-los em fases mais críticas do trabalho ou a enriquecer a investigação. Finalmente, asseguram que a discussão final sobre a actividade também constitui um momento favorável à reflexão, além de que, tal como indicam Bishop e Goffree (1986), a aprendizagem não resulta simplesmente da actividade, mas sim da reflexão sobre a actividade. Como tal, os alunos devem usufruir de momentos onde possam pensar e reflectir, valorizando-se, deste modo, os processos de resolução em detrimento dos produtos. Esta reflexão poderá ainda permitir o estabelecimento de conexões e despoletar novas investigações. Brocardo (2001), Ponte (2003b) e Santos, Brocardo, Pires & Rosendo (2002) também sublinham a relevância deste último momento, nas aulas dedicadas à investigação matemática, para a construção dos significados partilhados e a institucionalização das aprendizagens bem como para a exploração de novos caminhos, fazendo-se valer todo o sentido da investigação. Importa, no entanto, o modo como o professor questiona os alunos, com

questões mais abertas ou com outras mais estruturadas, com o objectivo de conseguir o envolvimento dos alunos e de direccionar a discussão matemática para o seio dos alunos, conduzindo-os à argumentação (Boavida, 2005).

Pode-se afirmar que, em termos pedagógicos, o papel do professor nas aulas de cariz investigativo é mais exigente, na medida em que requer novas competências profissionais para planificar e conduzir todo o trabalho, além de pressupor um maior domínio do questionamento e acompanhamento dos alunos e da condução das discussões colectivas (Oliveira, Segurado & Ponte, 1996). Os mesmos investigadores referem também que essa exigência se situa ao nível do próprio conhecimento matemático, dado que é fundamental um maior domínio dos conteúdos matemáticos envolvidos e a capacidade de reconhecer processos e conceitos decorrentes da realização das tarefas. Mais ainda, salientam que é necessário que o próprio professor revele um forte espírito investigativo a fim de poder influenciar igualmente a atitude investigativa dos seus alunos. Consideram que o espírito investigativo consiste num questionamento constante das suas ideias e das dos outros e, principalmente, na aceitação de caminhos de exploração imprevistos, o que requer perguntar regularmente se alguém resolveu o problema de outra maneira (Yackel & Cobb, 1996).

A concluir, tal como aponta Barbosa (2007), a condução de aulas investigativas implica que os professores exerçam muitas competências, entre outras:

- perspectivar a Matemática não como uma actividade em que se memorizam definições e obtêm as respostas correctas, mas em que as acções de questionar, pensar, corrigir, confirmar são características essenciais;
- ser competentes na realização de investigações matemáticas, sentindo-se à vontade quando confrontados com situações complexas e imprevisíveis;
- valorizar um tipo diferente de objectivos curriculares, como um vasto leque de capacidades, muito para além da destreza no cálculo e do conhecimento de factos matemáticos básicos;
- desenvolver a sua criatividade curricular a fim de conceber e adaptar tarefas adequadas para os alunos;
- assumir uma perspectiva da aprendizagem dos alunos baseada na actividade, na interacção e na reflexão;
- ser capaz de conduzir uma aula com uma dinâmica muito diferente da aula usual, sem orientar os alunos de forma excessiva ou insuficiente (Mason, 1991), proporcionando-lhes uma experiência de aprendizagem mais autónoma mas também mais interactiva (tanto no trabalho do grupo como em discussões colectivas).

(Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999, p. 149)

## **2.2. O raciocínio/pensamento matemático**

### **2.2.1. O que se entende por raciocínio matemático**

O raciocínio matemático é uma capacidade transversal que todos os alunos precisam de desenvolver, independentemente dos ciclos de ensino em que se encontram. Raciocinar matematicamente não é uma habilidade exclusiva dos alunos com maior aptidão para a Matemática; a verdade é que os alunos podem apresentar processos de raciocínio distintos e, por vezes, bastante diversificados.

Semana e Santos (2008), apoiando-se em considerações de Dewey (1910/1997), mencionam que, desde há muito, a capacidade de raciocinar matematicamente é apontada como um objectivo central do ensino e da aprendizagem da Matemática. É o raciocínio que nos permite aceder à compreensão de situações matemáticas, examinar um problema sob vários ângulos e, analisando e estabelecendo relações, transformar as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjecturas. Como tal, e segundo Cuoco (2003), o raciocínio matemático envolve mais do que a compreensão de importantes ideias matemáticas e a aplicação de métodos e procedimentos úteis; envolve também a previsão de resultados, o questionamento de soluções, a procura de padrões, o recurso a representações alternativas, a análise e a síntese.

Na perspectiva de Boavida (2008), o raciocínio sempre esteve associado à Matemática e constitui um aspecto central no ensino da mesma, independentemente do tema ou do ano de escolaridade. Contudo, adverte que criar as condições para os alunos aprenderem a raciocinar matematicamente não se resume unicamente à proposta de tarefas com determinadas características, mas implica também a ajuda no desenvolvimento de um hábito de pensamento que tem a ver com o «porquê das coisas». Assim, refere que «é importante que os alunos se envolvam em actividades de formulação, teste e prova de conjecturas...» (p. 1).

Na opinião de Oliveira (2008), a expressão «raciocínio matemático designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento

prévio)» (p. 3). Considera-se que a obtenção dessas novas proposições se faz através do raciocínio dedutivo, podendo ser esquematizado na forma «se A então B». O conhecimento novo resulta de uma actividade em que se valorize a Matemática como um processo (como se gera o conhecimento) e não apenas como um produto (conhecimento organizado dedutivamente). Aliás, Oliveira (2008), referindo Sternberg (1999), numa perspectiva essencialmente psicológica, salienta que o raciocínio matemático requer pensamento analítico, criativo e prático.

De facto, muitas vezes, pensa-se que a Matemática é uma disciplina apenas interessada em obter respostas certas ou erradas; certamente, há um aspecto do trabalho em Matemática que tem a ver com a obtenção de respostas para questões particulares, mas esta é apenas uma pequena parte daquilo que é aprender Matemática – é apenas a ponte do iceberg. Tudo o que é visível à maioria dos observadores é a manifestação exterior da resposta às questões. A actividade «interior» é como se fosse a parte restante do iceberg, submersa, mas sem dúvida a parte maior e mais importante (Mason, 1999).

Moreira (2008) refere que não se encontra um conjunto de características definidoras, necessárias e suficientes, para raciocínio matemático, pois «se, por um lado, tem semelhanças com outros tipos de raciocínio, por outro, há evidência de que, por exemplo, um bom solucionador de problemas de geometria pode ser um desastre na resolução de problemas de cálculo combinatório, não tanto porque os conteúdos são diferentes, mas, essencialmente porque os processos subjacentes são completamente distintos» (p. 11).

Como se torna perceptível, apresentar uma noção de raciocínio matemático não é uma tarefa simples. Ponte, Branco & Matos (2008) afirmam que raciocinar «envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento» (p. 89). Todavia, há autores que incluem o raciocínio numa outra categoria, a do pensamento matemático. Assim, na perspectiva de Stacey (2005), o pensamento matemático é uma meta muito importante da educação e constitui, acima de tudo, um meio para aprender e ensinar Matemática que se regula por particularizações, generalizações, conjecturas e argumentos. Com base em Mason, Burton & Stacey (1982), esta autora conclui que o pensamento matemático envolve uma variedade de competências: profundo conhecimento matemático, competências gerais de raciocínio, cooperação, persistência, organização, confiança, competências de comunicação, estratégias, heurísticas e capacidade de colocar questões. Pensar matematicamente é, portanto, um processo dinâmico através do qual compreendemos melhor o mundo que nos rodeia,

possibilitando o aumento da complexidade das nossas ideias e alargando a nossa compreensão; deste modo, o pensamento matemático pode surgir da exploração de simples questões do dia-a-dia, quando observadas sob um «um ponto de vista matemático» (Schoenfeld, 1994, p. 60).

De facto, Mason, Burton & Stacey (1982) já partilhavam da mesma opinião, salientando ainda que o pensamento matemático implica, muito para além da resolução de problemas matemáticos, a própria exploração de problemas de carácter geral, conduzindo-nos a uma compreensão mais profunda de nós próprios, a uma visão mais coerente daquilo que sabemos, a uma investigação mais eficaz daquilo que queremos saber e a uma avaliação mais crítica daquilo que vemos e ouvimos.

Brousseau & Gibel (2005), tendo em conta que a palavra «raciocínio» se refere a um domínio que não é restrito a situações formais, lógicas ou matemáticas, apresentam uma definição, mais ampla, proposta por Oléron (1977): um raciocínio é um grupo ordenado de declarações, que estão ligadas, combinadas ou opostas umas às outras com um objectivo, respeitando alguns limites que se podem tornar explícitos. No entanto, um mesmo professor pode interpretar uma mesma frase, pronunciada por diferentes alunos, de uma forma distinta. Como tal, para se poder afirmar que determinado comportamento observado é sinal de um raciocínio, é necessário ir para além da definição formal e examinar as condições sob as quais o «raciocínio presumido» pode ser considerado «raciocínio real». Aliás, para os professores de hoje, como também para os psicólogos, raciocínio como actividade psicológica não é uma simples recitação das provas memorizadas, fazendo portanto sentido confrontar os alunos com problemas onde seja mais «natural» raciocinar, nomeadamente os problemas abertos.

Brousseau & Gibel (2005) ainda alertam para o facto de que, muitas vezes, os professores interpretam as afirmações dos alunos mais de acordo com a sua utilidade para o decorrer geral de uma aula do que com a (presumível) intenção inicial do aluno. Contudo, um observador de uma aula tem de pressupor que o raciocínio atribuído ao sujeito é intencional, propositado e útil do ponto de vista do sujeito, respeitante ao seu conhecimento matemático; o sujeito formula o raciocínio porque sabe ou tem consciência de algum modo, da regra ou do facto; o raciocínio é útil porque pode, por exemplo, reduzir o nível de incerteza, no caso de se ter de fazer uma escolha entre diversas premissas possíveis; o raciocínio é motivado por uma vantagem que dá ao sujeito a possibilidade [do ponto de vista do sujeito] de alterar o seu ambiente; o raciocínio é motivado por «objectivos» e razões específicas, tais como a relevância, a

coerência, a adequação e a apropriação, as quais justificam um raciocínio em particular e não qualquer outro, em oposição a razões oportunistas tais como adequar-se às perspectivas do professor.

Assim, de entre todas as circunstâncias nas quais o raciocínio é produzido, apenas as condições necessárias podem ser determinadas e justificadas. Essas circunstâncias, constituindo um conjunto coerente e não arbitrário, foram designadas, por Brousseau & Gibel (2005), como «a situação».

Os mesmos autores, tendo o cuidado de distinguir raciocínio real de recitação, e de distinguir o significado do mesmo raciocínio, sendo ele proferido por um aluno ou por um professor, definem o raciocínio como uma relação R entre dois elementos A e B, como se segue: «A» denota uma condição ou facto observado, o qual pode ser contingente em circunstâncias particulares; «B» é uma consequência, uma decisão ou facto previsível; «R» é uma relação, uma regra ou algo considerado como conhecido ou aceite. A relação R leva o sujeito activo (o «agente» do raciocínio), no caso da condição A ser aceite ou o facto A acontecer, a tomar a decisão B, a prever B ou a afirmar que B é verdadeiro. Um raciocínio real contém um agente E (aluno ou professor) que usa a relação R e um projecto determinado pela situação S, o qual requer o uso desta relação. Assim, para levar a cabo um projecto determinado por uma situação S, o sujeito usa a relação R a qual lhe permite inferir B a partir de A.

Desta forma, o raciocínio, sendo caracterizado pelo papel ou função que desempenha numa situação, pode servir para decidir sobre algo, para informar, para convencer ou para explicar; a sua função torna-se dependente do tipo de situação (acção, formulação, validação ou outras) na qual ocorre (Brousseau, 1997).

Nesta linha, Brousseau & Gibel (2005) distinguiram vários «níveis» de formas de inferência adequadas a diferentes tipos de situações:

Raciocínio de nível 3 (N3) – raciocínio completamente formal e característico de situações de validação; baseado numa sequência de inferências correctamente ligadas e com referência explícita aos elementos da situação ou ao conhecimento considerado adquirido pela turma;

Raciocínio de nível 2 (N2) – raciocínio incompleto do ponto de vista formal e característico de situações de comunicação (requer uma adaptação da linguagem a fim de se expressar o pensamento e também uma adaptação ao interlocutor); contém falhas que podem ser consideradas como implicitamente preenchidas pelas acções do sujeito numa situação onde uma formulação completa não seria exigível;

Raciocínio de nível 1 (N1) – raciocínio que não é formulado como tal mas pode ser atribuído ao sujeito tendo em conta as suas acções; pode ser construído como modelo da sua acção – «modelo implícito de acção» ou «teorema-em-acção»

Relativamente ao raciocínio, tendo em conta as suas funções didácticas em diferentes tipos de situação, Brousseau & Gibel (2005) referem que este pode ser entendido como:

- i) Uma solução para um problema clássico em que o texto apresentado pelo professor apresenta uma determinada situação de acção, real ou imaginária, e as soluções e/ou provas têm de ser validadas, havendo uma «solução padrão» – que constitui, segundo o professor «o» raciocínio correcto associado ao problema;
- ii) O verdadeiro raciocínio do aluno na resolução de um problema clássico, como o produto de uma actividade mental que pode ser diferente da solução padrão e ir para além da formulação do problema; neste caso, cabe ao professor desafiar os alunos a explicar as suas formas de raciocínio, sejam elas correctas ou não, assumindo, pelo menos implicitamente, que os alunos trabalham em suposições sobre a realidades mais amplas que as da «situação objectiva» explicitamente apresentada no enunciado do problema.
- iii) O raciocínio como causa e forma de aprendizagem autónoma, sem a intervenção do professor, baseia-se na tomada de decisões, por parte dos alunos, em «situações de acção» autónomas, ou para clarificar uma parte da informação numa comunicação simples ou como forma de convencer os colegas sobre a validade ou justificação de uma afirmação. Um novo raciocínio é aprendido quando passa de uma forma particular de resolver um problema para uma forma «universal» de resolver todos os problemas de certo tipo, integrando o conhecimento do sujeito.
- iv) O raciocínio como forma de ensino é muitas vezes utilizado pelos professores quando sublinham determinados aspectos do conhecimento que ensinam, embora os alunos também o devam saber produzir, caso contrário, só aumentam a carga de memória, em lugar de a reduzir. No entanto, a compreensão nem sempre é uma condição suficiente de aprendizagem, daí que, por vezes, os professores recorram a «razões didácticas», «causas de aprendizagem» ou «meios retóricos de didáctica», tal como são definidos por Brousseau & Gibel – as revisões, os dispositivos mnemónicos, as metáforas, as analogias e as metonímias. Estas razões didácticas permitem estabelecer ligações

artificiais entre diferentes partes do conhecimento mas não estão relacionadas com o significado científico desse conhecimento, não tendo assim qualquer relação com as «razões do conhecimento». Contudo, estando associadas a uma cultura didáctica, são necessárias aos professores e aos alunos.

Brousseau & Gibel (2005) referem que o professor, tendo o objectivo de promover a prática e a aprendizagem do raciocínio pelos alunos, deve propor problemas cujas soluções requeiram conhecimentos não institucionalizados nas aulas e que possam ser resolvidos de forma completamente autónoma pelos alunos. A parte do trabalho do professor que consiste em fazer com que os alunos aceitem o risco de não saber como resolver um problema é designada, pelos mesmos autores, por «descentralização». Esta é eticamente aceitável se for realista em assumir que os alunos serão capazes de resolver o problema por si mesmos, se o problema puder ser resolvido pelo simples uso da informação dada, do conhecimento e do raciocínio correcto e se o raciocínio puder ser explicitado e compreendido pelos alunos na altura da apresentação e discussão da solução na aula. Se a resposta do aluno não estiver relacionada com a informação dada no problema, por raciocínio inteligível, este permanece dependente do julgamento do professor, tendo o aluno, conseqüentemente, dificuldades em reutilizar o seu conhecimento num ambiente noutra situação.

Brousseau & Gibel (2005) referem ainda que, quando um aluno aprendeu um facto ou desenvolveu um comportamento, relacionando-o racionalmente com o seu conhecimento anterior, a sua aprendizagem é motivada por uma razão e que, se assim não for, é um efeito de uma causa. Assim, quando os professores, intencionalmente ou não, usam vários meios didácticos retóricos para fazer com que o aluno aprenda algumas coisas, têm de encarar o problema de relacionar estas coisas por relações culturalmente aceitáveis. O papel do raciocínio no ensino é então traduzir ou converter as causas de aprendizagem em razões de conhecimento.

### **2.2.2. Processos de raciocínio matemático**

## **Particularizar e generalizar**

Segundo Mason (1999), o erro pode ser mais vantajoso do que o sucesso; deste modo, um problema que seja um maior desafio ensina mais do que muitos problemas fáceis. O «getting stuck» (encalhar) dá uma maior oportunidade para aprender, pois quando as respostas nos surgem muito prontamente não há um ponto ao qual se possa voltar e desenvolver conexões, despoletando ou desencadeando novas ideias; particularizar e generalizar são muitas vezes a chave para o «getting unstuck» (desencalhar), constituindo, deste modo, processos que podem ser utilizados quando se está a fazer Matemática.

Para Mason (1999), particularizar e generalizar começou a fazer parte da linguagem comum dos professores de Matemática, embora ainda seja manifesta a insuficiente importância que lhes é dada. Além disso, surgem como uma sequência mecanizada: primeiro particulariza-se – «fazer uma tabela»; seguidamente conjectura-se uma generalização – «adivinhar a fórmula»; depois verificamo-lo em alguns exemplos. Tudo isto vai completamente contra a subtilidade e interligação da particularização e da generalização.

Particularizar significa observar casos ou questões específicas, uma vez que é útil observar situações que envolvam apenas objectos manipuláveis e conhecidos como diagramas, números, expressões algébricas, funções, conjuntos de funções, associando-os ao concreto e à segurança do que é conhecido; contudo, a própria particularização pode providenciar o «alimento» para o processo reverso – a generalização. Ao particularizarmos, temos o objectivo de clarificar o significado de uma questão ou afirmação, permitindo depois fornecer exemplos que possam ter algumas propriedades gerais em comum, de forma a podermos começar a ver e apreciar essas propriedades comuns – o processo de generalizar.

Assim, a particularização e a generalização são fundamentais no pensamento matemático e mesmo em qualquer tipo de pensamento; por isso, a Matemática é demasiado abstracta apenas quando usamos entidades que não nos inspiram confiança, devendo assim fazer-se uso da particularização de modo a clarificar significados e, numa fase posterior, proceder à generalização. Estes dois processos são similares, podendo caminhar muitas vezes lado a lado; generalizar refere-se à verificação de modelos ou constatação de padrões e propriedades comuns mas a própria generalização pode levar a particularizar para entender os casos que se generalizaram. As

generalizações precisam de ser verificadas em exemplos específicos antes de se procurar um argumento convincente.

Em Matemática, quando se generaliza, temos de nos distanciar daquilo que estamos a fazer para «separar o trigo do joio», tentando colocá-lo num contexto mais abrangente. No entanto, há que ter cuidado com o que poderá chamar-se «o bichinho da generalização», pois é provável que se comece rapidamente a fazer perguntas mais difíceis; generalizar é como qualquer droga – depressa podemos perder o contacto com a realidade. Mason (1999) acrescenta que, quando se pensa que se compreendeu alguma coisa ou que já se encontrou uma resposta para uma questão, os nossos argumentos têm de nos convencer a nós próprios para que posteriormente possam convencer os outros; de facto, qualquer argumento passa por muitos estágios de mudança e refinamento.

Na verdade, quando uma ideia ou técnica é confrontada pela primeira vez tende a ser turva, indistinta e imprecisa. Mesmo depois de se conseguir falar dela, é ainda muito difícil passar para o papel o que se compreende de uma forma coerente. Só gradualmente, com a experiência, toma forma até ser razoavelmente estável, quase como um cristal – a clarificação; contudo, são necessárias diversas tentativas para alcançar uma exposição razoável, além de que tentar «saltar» etapas pode conduzir a uma grande embrulhada.

Com a experiência continuada, começa-se a distinguir mais detalhes e a ver mais daquilo que nos envolve. Aliás, Mason & Pimm (1984) explicam porque é que os alunos apresentam algumas dificuldades com as representações algébricas inerentes à generalização. Assim, na exibição dos seus raciocínios, ao não terem a ideia de generalização, acabam por recorrer, muitas vezes, a exemplos genéricos como uma aproximação à generalização; o exemplo genérico, embora não seja uma situação abstracta, acaba por revelar algumas características de abstracção, constituindo, de certa forma, uma generalização abusiva. Segundo os mesmos autores, trata-se de ver o geral no particular. Para exemplificar esta questão, Mason & Pimm (1984) socorreram-se de algumas ocorrências do dia-a-dia, nomeadamente quando são feitas declarações do tipo: «Dá-me um Kleenex»; «Onde guardas o Hoover?» ou «Podes-me fazer um Xerox disto?», em que se usa Kleenex como palavra para lenço de papel, Hoover para aspirador e Xerox como fotocópia, funcionando, deste modo, como exemplos genéricos do que se quer – classes de objectos. Na sua opinião, quanto mais usada, mais a palavra ganha o significado do próprio objecto e menos da marca específica. Transferindo para a Matemática, também apresentam algumas situações análogas: as palavras

«rectângulo» e «quadrado» que assumem duas interpretações – quadrado como diferente de rectângulo ou quadrado como instância de rectângulo; o símbolo  $2/3$  – usado para se referir quer à fracção, quer ao número racional, pode conduzir a questões tais como – «Qual é o numerador do número racional  $2/3$ ?». De início, parece difícil não dar a resposta 2. Contudo, a questão refere-se ao número racional  $2/3$ , o qual é equivalente ao número racional  $4/6$ ,  $-6/-9$ , etc. Surgem assim dificuldades de interpretação de numerador, quando  $2/3$  é usado como nome para uma classe – a dos números racionais equivalentes a  $2/3$ , na qual poderá ser viável descrever o numerador do como  $2t$ , em que  $t$  é um número inteiro diferente de zero. Deste modo, a verdadeira confusão surge quando símbolos, em particular letras, são introduzidos para representar números em álgebra elementar. Por exemplo, ao escrever-se  $2n$  face à afirmação «o quadrado de um número par é par», o símbolo  $2n$  pode representar um número par em particular ou, por outro lado, todos os números pares. É particular, no sentido em que se está a tomar um número par mas não específico, ou seja, querendo dizer que é um número como 2, 4 ou 6. Relativamente às afirmações «O quadrado de um número par é par» e «A soma de dois quaisquer números pares é par», a maior parte dos matemáticos notaria pouca distinção entre o uso dos artigos «um» ou «quaisquer», porque ambos evocam o sentido de generalização do matemático sobre números. No entanto, podemos imaginar diferentes expressões, nomeadamente, e a título exemplificativo: «O número par 6»; «Um número par como 6»; «Qualquer número par (como 6)»; «O número par  $2n$ »; «Um número par  $2n$ »; «Qualquer número par  $2n$ ». O uso de «o» faz sobressair a definição, a especificação de 6, enquanto o uso de «um» sugere indefinição, na medida em que não é propriamente um número específico, como o 6, que interessa mas alguma qualidade do 6. O uso de «qualquer» remete ainda para mais generalização. O número 6, quando visto no contexto de números pares, pode ser entendido como um número par genérico mas isto requer que se acentue algumas das suas características e se ignore outras (que é um produto de dois primos, que é divisível por 3...). Quanto ao  $2n$ , talvez represente um número par ou talvez todos os números pares, tal como o mencionado no contexto do Kleenex, podendo ser visto como o nome de um número par e não o número em si mesmo. Pode funcionar como um modelo para identificar números pares, uma condição de admissão para o grupo dos escolhidos.  $2n$  para ser visto como um número par genérico requer que seja aceite como um número par, pois os exemplos genéricos têm primeiramente de ser exemplos, embora o símbolo  $2n$  seja extremamente útil porque acentua precisamente as qualidades que tornam o  $2n$  genérico dos números

pares e ignoram, escondendo no  $n$ , todas as características irrelevantes. É possível reescrever 6 como  $2 \times 3$  para enfatizar esta qualidade particular. Numa análise filosófica mais cuidadosa,  $2n$  também pode ser visto como apenas pontos no papel, não sendo assim nem específico, nem geral nem particular. Tudo tem a ver com percepção tal como a seguinte prova de que a soma de dois números pares é sempre par:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots\dots & & & \dots\dots\dots & = & \dots\dots\dots\dots & \\ & + & & & & & \\ \dots\dots & & & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots & \end{array}$$

Esta representação sugere uma imagem ou percepção de números pares como números que podem ser representados por duas linhas de pontos equivalentes. Em ambos os números os pontos correspondem-se e o mesmo acontece na soma, formada por duas linhas idênticas de pontos. No entanto, alguns alunos podem ver isto enquanto uma prova pelo exemplo, nomeadamente porque  $14 + 24 = 38$ ; o resultado demonstra algum grau de generalidade.

Do exposto, torna-se claro que a transição para a representação de qualquer número na sua forma algébrica não é fácil. Muitas vezes, os alunos socorrem-se de diagramas ou esquemas, constituindo-se estes como formas intermédias bastante úteis.

Como tal, a transição entre o exemplo genérico e a generalização assume a funcionalidade de uma antecâmara da generalização. Mason & Pimm (1984), como forma de concluir a abordagem destes aspectos no seu artigo intitulado «Exemplos genéricos: vendo o geral no particular», levantaram algumas questões que, no seu entender, merecem considerável atenção:

- Como se pode expor a generalidade de um exemplo a alguém que apenas vê a sua especificidade? Além de acentuar, ignorar e repetir a afirmação geral vezes sem conta, como pode o acto necessário de percepção, de ver o geral no particular, ser fomentado?
- Como se pode distinguir a extensão da generalização percebida por outra pessoa ao olharmos juntos para um exemplo particular?
- Porque é que damos exemplos aos alunos em aula e o que é suposto que eles entendam? Se os exemplos são sempre exemplos de algo, como é que os alunos tomam consciência de quais os exemplos que devem ser exemplificativos? (p. 287-288).

Francisco & Maher (2005) descrevem algumas visões sobre como promover o raciocínio matemático na resolução de problemas, tendo por base as experiências matemáticas resultantes de um estudo de longa duração sobre o desenvolvimento de

conceitos e de formas particulares de raciocínio, com alunos envolvidos em investigações abertas. No seu artigo referem que, embora a Matemática seja geralmente interpretada como um sistema de relações complexas que envolvem conceitos matemáticos, estando o raciocínio matemático associado à capacidade de discernir e articular essas relações, estas não são as únicas fontes de raciocínio matemático. Conceitos básicos de Matemática, como a noção de um espaço amostral, a tabuada, os múltiplos ou os pares, também podem ser cognitivamente desafiadores e promover complexas formas de raciocínio. Pode acontecer, no entanto, que os alunos, ao serem confrontados com ideias diferentes das suas, apresentem alguma instabilidade ou desequilíbrio. Porém, eles também conseguem explicar a sua solução, desde que se cultivem maneiras de trabalhar em que a compreensão seja uma norma cultural e colectiva e em que o partilhar e o justificar seja uma prática comum. Para demonstrá-lo, estes investigadores apresentaram um caso particular de um aluno que mostrou a persistência e a vontade de continuar a debater a razoabilidade das suas ideias originais, tentando ir mais além e tornando possível a construção de uma compreensão mais profunda e de esquemas mais elaborados. Em especial, consideram que a preparação das tarefas é fundamental para o envolvimento sustentado dos alunos na resolução de problemas e para promover a compreensão e o raciocínio matemático. Na sua opinião, tradicionalmente, os problemas de matemática complexos ou difíceis são divididos em peças simples ou fáceis, que são apresentadas aos alunos por ordem crescente de dificuldade cognitiva, como um «build-up» para a compreensão da tarefa complexa, de acordo com uma perspectiva epistemológica em que os alunos constroem conhecimentos cada vez mais complexos, de forma atomística, ao longo do tempo. Porém, esta abordagem depende da capacidade dos alunos em «colocar as coisas em conjunto» no final e o estudo longitudinal destes autores apresentou provas de que isso pode não acontecer. Mesmo que os alunos consigam relacionar as partes todas, no final, o conhecimento resultante nem sempre é necessariamente significativo para os alunos. O estudo longitudinal enfatizou as vantagens de uma abordagem diferente, a qual se mostrou útil na promoção da actividade matemática significativa e pensativa. Esta abordagem refere que se deve apresentar, em primeiro lugar, a tarefa complexa aos alunos, ao contrário do andaime «fácil» (peças retiradas da tarefa). A análise dos trabalhos dos alunos sobre os problemas revelou que, embora as tarefas não tivessem sido fáceis ou simples para os alunos, tendo em conta o seu nível de conhecimentos matemáticos, estes foram capazes de se desembaraçar com estratégias interessantes e

formas de pensar sobre os problemas. Por exemplo, alguns alunos organizaram os dados por casos ou exemplos, outros usaram argumentos indutivos, outros estabeleceram elementos de prova de raciocínio por contradição e alguns utilizaram o raciocínio recursivo (Maher & Martino, 1996a, 1996b).

Deste modo, e segundo a perspectiva destes investigadores relativamente à resolução de problemas, há que reconhecer o poder das crianças de construção do seu próprio conhecimento, desde que existam condições em que se enfatize a mínima intervenção na sua actividade matemática e se faça o convite à exploração de padrões, à formulação de conjecturas, ao teste de hipóteses e à reflexão sobre as extensões e as aplicações dos conceitos aprendidos, apelando-se à explicação e à justificação do raciocínio, num trabalho colaborativo. Tal visão refere-se à aprendizagem e ao raciocínio matemático como partes integrantes do processo de resolução de problemas. De realçar, mais uma vez, que os alunos só manifestam algum domínio da sua actividade matemática num contexto de valorização das suas ideias matemáticas, das suas representações, das suas justificações e das suas decisões. Uma das alunas participantes no estudo de Francisco & Maher mencionou a importância de explicar e conhecer as coisas à sua maneira, a fim de desenvolver um conhecimento pessoal e significativo, sentindo-o, mais tarde, como algo que já lhe é familiar (sentimento de pertença), permitindo-lhe um aumento da confiança e do empenho; este ponto de vista também é salientado por outro participante no mesmo estudo quando entende que o domínio da actividade matemática proporciona formas duradouras do entendimento matemático.

Como tal, torna-se claro que os alunos, independentemente dos níveis de ensino ou dos conhecimentos matemáticos que tenham, são capazes de perceber e exibir raciocínio matemático, podendo utilizar vários processos para o efeito. Contudo, é preciso dar-lhes as condições adequadas para o promover, tal como os resultados da investigação de Francisco & Maher também destacam, nomeadamente: (i) o papel das ideias ou conceitos básicos, os quais podem desafiar os alunos a evidenciar formas interessantes de raciocínio matemático; (ii) as tarefas complexas, em que trabalhar na tarefa complexa – em oposição a formular uma série de tarefas simples, extraídas de uma tarefa complexa – é crucial para estimular o raciocínio matemático e a construção de conhecimento durável, sabendo-se também que a oportunidade de trabalhar no desvendar de complexas relações matemáticas aumenta a compreensão matemática profundo; (iii) a sequência de problemas propostos; (iv) a apropriação por parte dos

alunos da sua actividade matemática e do seu poder matemático, factores que aumentam a construção do conhecimento matemático pessoalmente significativo e a confiança nas suas capacidades; (v) a justificação das ideias e o trabalho colaborativo, na medida em que os alunos, ao questionarem as suas próprias hipóteses e conclusões e as dos seus colegas, trabalham a compreensão flexível dos problemas e desenvolvem a experiência na resolução de problemas não rotineiros (Greer, 1997).

Além disso, alguns estudos também mostram que a dependência dos problemas de palavras que possam ser resolvidos de forma inequívoca através de proficiência computacional e operações aritméticas dificulta o raciocínio matemático realista, ao passo que a ênfase na modelação matemática e nas habilidades interpretativas o aumentam (Greer, 1997; Verschaffel, 1997).

Assim, em termos de «design» de tarefas, há que considerar cuidadosamente quais os estudantes envolvidos e a sua experiência anterior com o tipo de trabalho em causa, embora a investigação tenha mostrado que os alunos são mais favoráveis à construção durável do conhecimento e aos entendimentos significativos da Matemática por desvendar, por si, do que propriamente sensíveis à complexidade da tarefa. Com o tempo, os alunos, de uma forma natural, identificam os componentes fundamentais da tarefa e propõem variações interessantes e até extensões.

Mais ainda, Mason (1999) considera que uma das características do pensamento matemático é o número de vezes que se percorre a seguinte espiral: manipular objectos com confiança → pensamento → sentido de uma noção comum às generalizações → pensamento → anotação cada vez mais sucinta através de figuras, palavras e símbolos → nova confiança na manipulação dos objectos.

Contudo, a forma como a Matemática é muitas vezes apresentada ignora o esforço que, por si só, pode ser preciso para criar uma estrutura e perspectiva adequadas a partir das quais se torne possível solucionar os problemas; em vez disso, apresenta apenas uma rotina branda e suave – o produto e não o processo.

Assim, é preciso envolvermo-nos nos prazeres do pensamento matemático que provêm da energia libertada quando verificamos que as «coisas» que, aparentemente nada tinham a ver umas com as outras, estão na verdade relacionadas (Mason, 1999); há que explorar os limites de um objecto matemático, verificando como, porquê e em que condições um dado teorema se aplica ou como uma técnica em particular funciona e quando pode ou não ser apropriada. Quando estivermos bem harmonizados com estes processos básicos do pensamento matemático e entendermos o tipo de questões que a

Matemática pode resolver, iremos descobrir que a nossa forma de ver o mundo mudou para sempre.

O desenvolvimento do pensamento matemático advém da procura de ligações e da alteração de intuições como um resultado da especialização, generalização e do saber convencer, quando apoiado por uma atmosfera onde se formulam conjecturas e, o mais importante de tudo, que constitua uma fonte de prazer.

Cabe ao professor de Matemática proporcionar aos alunos uma verdadeira actividade matemática. O professor tem nas suas mãos uma grande oportunidade. Se preenche o tempo, insistindo em operações rotineiras, diminui o interesse dos alunos, impede o seu desenvolvimento intelectual e desperdiça as oportunidades. Mas se desafiar a curiosidade dos alunos, ajustando os problemas aos seus conhecimentos e ajudando-os a resolver esses problemas com questões estimulantes, pode criar-lhes gosto e alguns meios de pensamento independente (Pólya, 1977). As palavras de Pólya ainda permanecem, na opinião de Ball (2007), um desafio para os professores de Matemática de hoje. É muito fácil utilizar as aulas com questões rotineiras. Felizmente, há professores de Matemática que pensam que fazer Matemática não é só ter bons resultados nos testes de questões basicamente operatórias ou de aplicação directa de conhecimentos. De facto, a mesma autora reconhece, através da investigação existente, que quanto mais se quer graduar ou classificar as crianças ao nível do aproveitamento, menos motivadas elas estão, embora não haja dúvida de que os professores anseiam encontrar tempo para que as crianças adquiram gosto pela compreensão da Matemática. Aspiram ajudar as crianças a tirar prazer da Matemática e a compreenderem o seu poder, a desejarem saber mais, tornando-as mais confiantes acerca das suas capacidades. Então, o trabalho dos professores torna-se crucial. Como diz Pólya (1977), têm de escolher entre «matar» o interesse dos alunos ou motivá-los para gostar de Matemática, tornando-os autónomos no seu pensamento. Embora Pólya identifique várias tarefas que permitem o desenvolvimento do pensamento matemático, acredita que o comportamento do professor é fundamental, mais precisamente no tipo de perguntas que faz, no tipo de respostas que pede e no tipo de orientação que dá aos alunos.

### **Formular e validar conjecturas**

Em *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989/1991), é referido que, de entre um conjunto de sugestões para desenvolver os

objectivos educacionais, os alunos têm de conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura; além disso, o *poder matemático* é definido como as capacidades de um indivíduo explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. Relativamente ao objectivo *aprender a raciocinar matematicamente*, é mencionado o que lhe está inerente - o formular conjecturas, o procurar justificações e o construir uma argumentação em concordância - como actividades fundamentais para fazer Matemática, já que *ninguém pode fazer matemática sem raciocinar*. Segundo o mesmo documento, nos primeiros anos de escolaridade, referidos como K-4, «as crianças devem ser encorajadas a justificar as suas soluções, os seus processos de pensamento e as suas conjecturas, pelas mais variadas formas» (p.38). Para tal, muito contribui o uso de materiais manipuláveis e outros modelos físicos que permitem a integração dos processos nos esquemas conceptuais das crianças, dando-lhes a oportunidade de falar dos objectos concretos para explicar os seus raciocínios. De qualquer forma, é salientado que a norma 3 - «A Matemática como raciocínio» - não sugere que nos anos de escolaridade K4 devam ser ensinadas estratégias de raciocínio formal. O raciocínio matemático «deve envolver um tipo de raciocínio informal, de conjecturas e de justificações que ajudam as crianças a perceber que a Matemática tem sentido» (p. 37).

Ainda no que diz respeito à mesma norma, nos anos de escolaridade 5-8, salienta-se que o raciocínio deverá estar presente de modo que os alunos, além de outros procedimentos, formulem e avaliem conjecturas e argumentos matemáticos, acrescentando-se, ainda, que *fazer conjecturas e validar essas conjecturas é a essência do acto criativo que é fazer matemática*.

Na edição portuguesa de *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000/2007), destaca-se que os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano também deveriam habilitar todos os alunos para a formulação e investigação de conjecturas matemáticas e que «a conjectura, ou seja uma suposição informada, constitui uma importante via para a descoberta» (p. 62). Além disso, «formular conjecturas e tentar justificá-las é uma parte integrante da actividade matemática dos alunos» (p. 223).

Na verdade, aponta-se que os alunos do 1º Ciclo já podem aprender a formular, aperfeiçoar e testar conjecturas; para tal, podem contribuir as questões que os professores lhes poderão colocar, mais precisamente: «O que achas que vai acontecer a seguir?», «Qual é o padrão?», «Isto é sempre verdade ou só algumas vezes?» (p. 62). A própria apresentação das tarefas poderá influir na aprendizagem da formulação de

conjecturas. «Para formular conjecturas, os alunos necessitam de múltiplas oportunidades e contextos de aprendizagem enriquecedores e envolventes» (p. 62). Inicialmente, os alunos podem investigar as suas conjecturas com o recurso a materiais concretos mas, à medida que avançam, podem utilizar símbolos e representações matemáticas. É importante que os alunos trabalhem com os colegas na formulação e exploração de conjecturas, ouvindo e compreendendo as conjecturas e explicações de todos. Cabe aos professores ajudarem os alunos a verificarem se as conjecturas aplicáveis num determinado contexto poderão ser aplicadas num outro contexto diferente. Para exemplificá-lo, apresenta-se a ideia generalizada de que «a multiplicação gera sempre números maiores que os iniciais» (p. 63), a qual poderá ser trabalhada com números distintos. Contudo, é de realçar que nem sempre os alunos poderão ter os conhecimentos e as ferramentas matemáticas que apoiem as conjecturas ou os contra-exemplos que as refutem.

Nas normas para os alunos do 3º ao 5º ano, no mesmo documento, destaca-se: «a formulação de conjecturas e a sua avaliação perante as evidências deverá ser a norma. Os alunos deverão aprender que a existência de vários exemplos não é suficiente para que se estabeleça a verdade de uma conjectura, e que uma conjectura pode ser infirmada por meio de contra-exemplos» (p.220).

Em relação aos anos 6º-8º, também se entende que «os alunos deverão chegar a estes anos de escolaridade com a noção de que a Matemática exige a análise de padrões e a observação de regularidades, formulando conjecturas acerca de generalizações possíveis e validando essas conjecturas» (p.310).

A formulação de conjecturas também é identificada explicitamente por autores como Mason, Burton & Stacey (1982), Burton (1984), Pirie (1987), Kissane (1988), J. Anderson (1990), Holding (1991), Frobisher (1994), Oliveira, Segurado & Ponte (1996).

Mason, Burton & Stacey (1982) referem que os processos de formulação de conjecturas e de justificação surgem na fase de «ataque» a uma questão e estão dependentes dos processos de especialização e de generalização. A formulação de conjecturas é o processo de perceber ou de supor alguma coisa que se julga ser verdade e implica a investigação da sua veracidade. «Uma conjectura é uma afirmação que parece razoável, mas cuja verdade não está demonstrada. Por outras palavras, não está justificada convincentemente e ainda não se conhece que seja contradita por algum

contra-exemplo, nem se conhece que tenha algumas consequências falsas.» (Mason, Burton & Stacey, 1982, p. 71-72).

A formulação de conjecturas tende a ser um processo cíclico que compreende a seguinte sequência de fases: formular uma conjectura e acreditar nela aquando do seu surgimento; verificar que a conjectura cobre todos os casos conhecidos e exemplos; desconfiar da conjectura, tentando refutá-la, encontrando um contra-exemplo ou usá-la para fazer previsões que também podem ser verificadas; compreender por que razão é que a conjectura é verdadeira ou como é que tem de ser modificada.

É muito útil formular conjecturas quando se exploram questões abertas, como as que surgem nas actividades de investigação pois permite a clarificação das ideias que poderão ser analisadas mais profundamente.

Para Mason, Burton & Stacey (1982), as conjecturas surgem automaticamente a partir dos processos de especialização e generalização quando se adquire confiança proveniente de sucessos anteriores e da libertação de tensões decorrentes da confusão que é sentida no início da tarefa.

Assim, em 1999, Mason reforça que aprender Matemática, muito mais do que dominar técnicas, memorizar ou seguir definições e provas, é formular e explicar conjecturas. Segundo o mesmo autor, toda a enunciação de conjecturas é feita para sugerir ideias, para exteriorizar e depois considerar criticamente algumas noções, seja a abordagem a um problema, um argumento ou «conhecimento», ou reflexões sobre a aprendizagem e o ensino. O pensamento matemático é melhor suportado quando se adopta uma atitude de formulação de conjecturas. Como tal, assim que se formula uma conjectura, deve-se escrevê-la ou apontá-la ou então dizê-la em voz alta, de forma a se poder clarificar as ideias e se desenvolver o raciocínio.

Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1998), tendo em conta um trabalho realizado com alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico, referem que a formulação de conjecturas parece não constituir um aspecto problemático para os alunos envolvidos no trabalho de investigação. Na verdade, os alunos em questão demonstraram capacidades para chegar a conjecturas, adoptando estratégias geométricas e aritméticas e usando estratégias de variação e de generalização. Também foram capazes de alterar e adaptar conjecturas a partir de contra-exemplos. Contudo, Brocardo (2001) menciona que os alunos, embora explicitem conjecturas com facilidade, demoram, com frequência, a compreender o seu estatuto, tomando-as como conclusões:

...é muito forte nos alunos a ideia de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objecto de um trabalho explícito por parte do professor. (p. 540)

Relativamente ao teste de conjecturas – verificação de que cada conjectura se aplica a todos os exemplos e casos conhecidos e não apenas a um número reduzido de casos – vários autores (Fonseca, 2000; Brocardo, 2001 e Ponte, Brocardo & Oliveira 2006) salientam que este processo se revela difícil para os alunos, já que os mesmos têm dificuldade em assumir uma atitude crítica face às conjecturas formuladas, uma vez que estas resultam do seu esforço e envolvimento em o conseguir. Assim, a tendência habitual entre os alunos é considerar apenas um número reduzido de casos para testar as suas conjecturas. Mais uma vez, cabe ao professor insistir na realização de testes sucessivos da mesma conjectura, a fim de que a mesma ganhe alguma credibilidade.

Brocardo (2001), a partir dos dados «resultantes da sua investigação, refere que numa fase inicial os alunos da turma encararam a prova das suas conjecturas como uma «complicação» desnecessária introduzida pela professora» (p. 544). No entender dos alunos, uma conjectura que resiste a vários testes é certamente verdadeira, não havendo necessidade de a provar. Numa segunda fase, alguns dos alunos vão percebendo o que significa justificar uma conjectura, embora encarando-o como algo exterior à investigação e, finalmente, nas últimas tarefas, «a grande maioria dos alunos tinha a clara noção de que se deveria pensar na prova das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho» (p. 544).

No entanto, há que prever que, muitas vezes, o teste de conjecturas, nega a sua veracidade, o que poderá conduzir os alunos a alguma situação de impasse, podendo contribuir para a diminuição da sua auto-confiança. Mason (1999) menciona que, sempre que isto acontece, é possível recuperar a confiança voltando atrás e explorando a situação noutros sentidos. É natural que, depois de um grande esforço para formular uma conjectura razoável, se torne difícil não acreditar nela, acabando por se ser pouco crítico na altura da testagem e, conseqüentemente, na justificação. Por esta razão, é necessário verificar se a justificação dada é convincente. Além disso, o processo de convencimento tem de passar primeiro por convencer-se a si próprio e depois tornar-se convincente para o «mundo exterior» (Mason, Burton & Stacey, 1982; Burton, 1984).

Segundo Mason, Burton & Stacey (1982), o primeiro nível atinge-se muito facilmente, embora todo o indivíduo deva ter algum cepticismo nas suas conjecturas, procurando exemplos que as refutem e aprendendo a ser crítico dos seus próprios argumentos e também dos dos outros. O segundo pode passar por convencer um amigo ou um «inimigo». Convencer um amigo não será muito difícil, já que basta clarificar a verdade e justificar todos os passos do argumento com razões convincentes, o que parece óbvio para quem resolveu a questão. Convencer um «inimigo» será muito mais difícil, pois este certamente irá colocar uma infindável lista de porquês. Assim,

como nem sempre é fácil arranjar alguém que faça o papel de inimigo, é necessário aprender a desempenhar esse papel para si próprio, o papel de inimigo interno. Para isso, deverão ser desenvolvidos três hábitos: i) tratar as afirmações como conjecturas, para alterar a perspectiva da Matemática como uma disciplina em que tudo é certo ou errado, para uma Matemática como uma disciplina em que se modificam e se testam as afirmações até ser encontrada uma justificação convincente; ii) adquirir o hábito de testar conjecturas bem como de procurar uma justificação para elas; iii) ganhar o hábito de olhar criticamente para os argumentos de outras pessoas.

(Fonseca, 2000, p. 32-33)

Em todo o caso, importa compreender-se que, embora a validade das conjecturas esteja relacionada com a resistência a sucessivos testes, o teste, só por si, não confere estatuto de conclusão aos seus resultados, ou seja não é possível generalizá-los como verdades matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). Para o efeito, seria necessário demonstrá-los tendo em conta resultados já conhecidos e devidamente provados. Esta ideia de «prova matemática» está associada, claramente, à actividade desenvolvida pelos matemáticos profissionais, assumindo uma formalidade que não é própria da Matemática escolar. Por este motivo, Ponte, Brocardo & Oliveira (2006) salientam que a «prova matemática» deve ser introduzida gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial, «à procura de uma justificação aceitável que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem» (p. 38).

Embora possa ser fácil formular uma conjectura, não é igualmente fácil justificá-la, encontrando-se uma razão que explique aquilo que se conjecturou.

Mason, Burton & Stacey (1982), citados por Fonseca (2000), defendem que para *justificar* é necessário procurar alguma razão ou alguma estrutura que enquadre o argumento, ou seja, justificar é procurar uma cadeia que ligue aquilo que se sabe àquilo que se quer justificar ou, por outras palavras, àquilo que se conjecturou.

Ponte, Brocardo & Oliveira (2006) consideram que a formulação de conjecturas pode decorrer de três situações diferentes: da observação directa dos dados, na sequência da manipulação dos dados iniciais ou por analogia com outras conjecturas. Contudo, os mesmos investigadores, salientam que nem sempre as conjecturas surgem de forma explícita, ficando confinadas ao pensamento matemático dos alunos, sem serem verbalizadas. Neste caso, o professor deverá assumir um papel relevante no contorno desta situação. Todavia, tendo em conta que nem sempre as conjecturas formuladas pelos alunos são correctas ou bastante significativas, é fundamental que estes compreendam o carácter provisório de uma conjectura.

No que diz respeito à validação das conjecturas, Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1999) referem que esta situação conduz a dois problemas: *como se validam* as ideias apresentadas pelos alunos e *quem valida* essas ideias. Quanto ao primeiro problema importa ter em consideração o nível etário dos alunos. Na verdade, no caso de alunos do 1º Ciclo, tal como já foi mencionado atrás, não se pode esperar que façam demonstrações formais, mas que possam apresentar razões/justificações organizadas com base num raciocínio lógico, ou pelo menos plausível, que justifiquem um determinado resultado. Considerando o fraco domínio que estes alunos têm dos conceitos e símbolos matemáticos utilizados na linguagem formal, é natural que as suas justificações sejam pouco precisas, sendo necessário dar-lhes a oportunidade de utilizarem os seus próprios meios de expressão, com o recurso, ou não, a contra-exemplos. Relativamente a *quem valida* as ideias expressas pelos alunos no seu processo de argumentação, tal como se passa com os matemáticos profissionais, em que a validade das ideias está dependente da sua aceitação por parte de determinada comunidade, as suas ideias também serão validadas se forem compreendidas e aceites pelos elementos da turma. Deste modo, é fundamental a partilha de ideias, contribuindo-se não só para a modificação, a consolidação e o aprofundamento das mesmas, como também para o aumento do conhecimento matemático dos elementos que compõem uma determinada comunidade.

Putnam, Lampert & Peterson (1990) consideram que habitualmente se dá bastante importância à demonstração de uma conjectura em detrimento da valorização do processo que conduziu à sua formulação, não se pensando sequer no que ele significa em termos de compreensão. Na verdade, qualquer que seja o nível da criação matemática, mais elevado ou mais elementar, quando se consegue formular uma conjectura, esta parece muitas vezes tão óbvia para quem a propôs que a necessidade de

a provar é sentida como secundária. Por exemplo, Poincaré (1996), citado por Brocardo (2001), ao reflectir sobre o seu próprio trabalho como matemático, valoriza a intuição e o papel do inconsciente e Pólya (1968), também citado por Brocardo (2001), salienta a importância da especulação (guessing, no original):

Para um matemático activamente envolvido na investigação, a Matemática pode parecer um jogo de especulação: tem que se especular sobre um teorema antes de o provar, tem que se especular acerca da ideia da sua demonstração antes de a desenvolver detalhadamente (p. 158).

Ora, a formulação de uma conjectura não corresponde propriamente ao adivinhar; antes de o fazer, é necessário aprofundar a compreensão da situação que se explora e conseguir imaginar uma generalização a partir de exemplos significativos (Brocardo, 2001). Bell (1979) também considera que a formulação de conjecturas deve ser valorizada, já que se trata de uma forma de pensar característica da Matemática.

Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas (1998) mencionam que os alunos, muitas vezes, apresentam o máximo de conjecturas possível, não reflectindo na sua eventual trivialidade; tal pode ser explicado pela dificuldade em perceber a ideia global da tarefa. Também consideram que os alunos tendem a atribuir rapidamente o estatuto de conclusão às conjecturas, comunicando-as rapidamente ao professor. Brocardo (2001) refere que, segundo estes autores, «esta atitude pode ser explicada como reflectindo uma preocupação em obter crédito junto do professor pelas descobertas realizadas e, também, procurar que este confirme a sua validade» (p. 113).

Frobisher (1994), estabeleceu uma ligação entre os processos que considera únicos da matemática, tendo em conta que todos eles podem estar inter-relacionados quando se investigam ou exploram problemas. O seguinte esquema pretende traduzir então essas ligações.



Figura 11. Processos matemáticos (Frobisher, 1994, p. 155), citado em Fonseca (2000), p. 95)

Segundo o mesmo autor, citado em Fonseca (2000), existem outros processos que são independentes dos conteúdos matemáticos e que são úteis na resolução de problemas de outras disciplinas, mais precisamente: os processos de comunicação (explicar, falar, concordar, questionar...); os processos de raciocínio (recolher, clarificar, analisar, compreender ...); os processos de registo (desenhar, escrever, listar, traçar gráficos...) e os processos operacionais (recolher, classificar, ordenar, mudar...). É importante que os alunos «aprendam» a utilizar determinados processos e que, perante uma determinada situação, sejam capazes de escolher os mais adequados. Para o efeito, os alunos devem ter uma ampla experiência de uso dos processos em diferentes situações e conhecer as relações existentes entre eles. Deste modo, seria bom que os alunos pudessem ser familiarizados gradualmente com os vários processos ao longo de toda a sua escolaridade. Entretanto, ressalta como dúvida se os processos podem ser aprendidos ou se eles são apenas assimilados depois de utilizados durante um longo período de tempo (Frobisher, 1994). Para já, e «enquanto não se souber mais acerca da forma como os alunos aprendem os processos, e do modo como os aplicam e quando, cabe ao professor fazer tudo para que os seus alunos explorem problemas e investigações com sucesso» (Fonseca, 2000, p. 37).

### **A descoberta de regularidades e padrões**

Embora seja fácil compreender o conceito de padrão, a sua definição torna-se complicada, tendo em conta a sua natureza multifacetada, assim como as suas variadas

utilizações, mesmo em Matemática. Segundo Smith (2003), o conceito de padrão não se encontra muito bem definido na literatura nem há registos específicos do mesmo na História da Matemática, o que, em parte, explica a perspectiva de Palhares & Mamede (2002), na qual se regista um empobrecimento do conceito, dada a visão restritiva ou, por outro lado, o seu esvaziamento, por se criar uma visão demasiado abrangente.

Vale, Palhares, Cabrita & Borralho (2006), citados em Alvarenga (2006), indicam alguns exemplos de situações do dia-a-dia, em diferentes áreas, onde o conceito de padrão é utilizado: o padrão cultural – utilizado na Sociologia, o padrão visto como repetição de curtas passagens rítmicas ou melódicas numa composição – utilizado na Música, o padrão detectado em poemas, o padrão do movimento – utilizado na Educação Física, os padrões espaciais e os padrões de distribuição – utilizados na Geografia, etc. Os mesmos autores referem outros padrões também relacionados com o conceito matemático de padrão, a saber: o «padrão estrelar», o «padrão das nuvens», o «padrão do dia e da noite», o «padrão das marés», o «padrão das dunas», o «padrão dos vegetais», o «padrão dos componentes do DNA animal», etc. Referem ainda alguns fenómenos que podem ser explicados através de padrões matemáticos, nomeadamente: a pelagem dos animais, a disposição das folhas no caule de algumas plantas que respeitam os números de Fibonacci, ou das asas das borboletas ou das células de uma colmeia onde podem ser identificados padrões geométricos.

O termo padrão pode ser usado simplesmente em relação a uma disposição ou arranjo particular de formas, cores ou sons ou, pode ser exigido que esse arranjo possua algum tipo de regularidade evidente, quer através da simetria ou da repetição (Orton, 1999).

Embora o conceito de padrão apresente «definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida» (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006, p. 195), na opinião de Smith (2003), um padrão é identificado quando «vemos repetição ou imaginamos a possibilidade dessa repetição» (p. 137). Além da ideia de repetição, Orton (1999) refere que o conceito de padrão em geometria inclui também ideias relacionadas com o reconhecimento de formas, congruência e semelhança.

Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel (2009) alertam para o facto de que o conceito de padrão não se esgota apenas em exemplos como os padrões visuais vistos em tecidos, papel de parede ou peças de arte, podendo ser alargado à disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se destacam

regularidades. Embora muitas vezes sejamos atraídos para as regularidades, poucas vezes tentamos interpretar situações, procurando ou evidenciando os padrões.

Assim, segundo a opinião de vários autores, o conceito de padrão está associado a outros termos, nomeadamente regularidade(s), sequência, regra e ordem.

Apesar da importância que os padrões têm em Matemática, e nos diferentes temas que lhe estão ligados, foi sobretudo nas últimas décadas que se privilegiou a exploração dos mesmos, atendendo também a uma definição mais actual de Matemática como a «ciência dos padrões». Esta definição relaciona a Matemática com a ideia de beleza, abstracção e procura de união (Alvarenga, 2006). Deste modo, a valorização da exploração de padrões permite não só o desenvolvimento da competência matemática, como também a apreciação estética da disciplina.

Nesta linha, Vale et al (2009) referem que:

os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informações e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem (p. 8).

Tal como esclarece Devlin (2002), o trabalho do matemático consiste em examinar esses padrões abstractos, que tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais:

O que o matemático faz é examinar *padrões* abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das actividades mais ocultas da mente humana (p. 9).

Em *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989/1991), entende-se que a exploração de padrões ajuda os alunos não só a apreciar a beleza da Matemática mas, essencialmente, a desenvolver o seu poder matemático.

Também, segundo os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000/2007), os programas educativos de todos os níveis de ensino têm obrigação de conseguir que todos os estudantes entendam padrões, relações e funções.

Em Portugal, no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), entre outros aspectos, a competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica inclui *a predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica* (p. 57).

Assim, mais especificamente, uma das competências a desenvolver no domínio temático dos Números e Cálculo é *a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas...* (p. 67); no domínio da Geometria, uma das competências transversais também é *a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos...* (p. 62). Finalmente, no domínio temático Álgebra e Funções, a competência matemática que todos devem desenvolver é *a predisposição para procurar padrões e regularidades ...*(p. 67).

Nas orientações curriculares em vigor, a importância dos padrões é salientada desde a Educação Pré-escolar como forma de desenvolver o raciocínio lógico (ME-DEB, 1977).

Também o novo programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) prevê o tratamento da temática dos padrões e das regularidades, de forma explícita, atravessando todos os níveis escolares, desde o Pré-Escolar, passando pelo Ensino Básico, até ao Ensino Secundário.

Ao nível do Ensino Básico, os padrões são um tema transversal que ajuda a criar uma base para a aprendizagem da Álgebra (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006). Segundo Orton & Orton (1999), os padrões:

- Contribuem para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática;
- Atraem e motivam os alunos, porque apelam à sua criatividade;
- Permitem o estabelecimento de conexões matemáticas;
- Ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação;
- Permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive;
- Promovem o desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos.

Trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar (Vale Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009). Além disso, permite o desenvolvimento de conceitos matemáticos, a preparação dos alunos para aprendizagens posteriores e o desenvolvimento das

capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. Também, dada a variedade de conexões que possibilita com todos os temas da Matemática, pode ser considerado como transversal dentro do currículo ao nível do Ensino Básico.

Contudo, tal como ainda é explicitado por Vale et al (2009, p. 8), o professor deverá proporcionar aos alunos oportunidades de:

- usar múltiplas representações de um padrão – concreta, pictórica e simbólica de uma representação para outra;
- averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- descobrir o padrão numa sequência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma sequência;
- prever termos numa sequência;
- generalizar;
- construir uma sequência.

Para o efeito, os mesmos autores sugerem a resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais como um «poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formalização de padrões, levando-os a conjecturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar» (p. 10).

A partir do exposto, pode-se concluir que o trabalho envolvendo os padrões está profundamente relacionado com a compreensão de muitos conceitos matemáticos e assume uma importância fundamental no desenvolvimento do poder matemático dos alunos, devendo, deste modo, fazer parte das práticas da aula de Matemática, em qualquer nível de ensino.

### **Relações numéricas e algébricas**

Segundo Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel (2009) «trabalhar a Álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões é uma possível abordagem ao desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico» (p. 10).

Tendo em conta que o pensamento algébrico envolve a capacidade de representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos, a compreensão de relações e funções e a modelação, torna-se imprescindível que o objecto de estudo fundamental da Álgebra não se reduza à resolução de equações, mas

antes ao desenvolvimento do sentido do símbolo, a fim de se poder proceder, posteriormente, a uma aplicação mais automática das regras.

A observação de padrões, a sua descrição e generalização tem sido considerada uma abordagem relevante na transição da aritmética para Álgebra (Mason, 1996b).

Warren & Cooper (2008), citados também em Vale et al (2009), defendem a introdução precoce do pensamento algébrico através de padrões, tendo em conta que os alunos, desde muito novos, podem envolver-se em conversações acerca de generalizações e exprimir essas generalizações utilizando sistemas de notação.

Contudo, estes autores consideram que o professor, a fim de desenvolver o pensamento algébrico, para além de acreditar nas capacidades dos alunos, tem de:

usar materiais que concretizam as ideias matemáticas a ser exploradas; escolher actividades adequadas ao domínio cognitivo dos alunos com quem trabalha; encorajar os alunos a partilhar e defender os seus entendimentos com colegas; colocar questões directivas que atinjam o centro da matemática envolvida na actividade; introduzir linguagem explícita que ajude os alunos a formular respostas verbais; usar uma variedade de representações para ilustrar a mesma ideia matemática; encorajar os alunos a visualizar os padrões de mais de uma maneira; e aceitar que os alunos errem.

(Warren & Cooper, 2008, citados em Vale et al , 2009, p. 10)

Porém, na opinião de Vale et al (2009), este processo envolve *tempo, paciência, energia e muita perseverança*.

A fim de se revalorizar a Álgebra no currículo da matemática escolar, há que trabalhá-la desde o pré-escolar até ao 12º ano (NCTM, 2000/2007) não na base do recurso a exercícios rotineiros através dos quais os alunos «decoram» regras isoladas e sem sentido, mas tendo em conta uma visão mais alargada e multifacetada da mesma.

Uma das dificuldades no entendimento da Álgebra é a «passagem» da utilização escrita dos números para a utilização de símbolos.

A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o «sentido do símbolo» (symbol sense), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na discricção de situações e na resolução de problemas (Ponte, 2006, p.12).

Ponte, Brocardo & Oliveira (2006) afirmam que «muitas afirmações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos bem

como a utilização de conceitos geométricos para simplificar a recolha de dados e facilitar a compreensão de determinadas relações numéricas» (p. 65).

O aluno competente algebricamente percebe a relação existente entre objectos e consegue raciocinar sobre essas relações de uma forma geral e abstracta (Ponte, 2006).

Com a finalidade de ter alunos algebricamente competentes é recomendado, pelo NCTM (2000/2007), que todos os alunos do pré-escolar ao 12º ano de escolaridade:

- Compreendam padrões e regularidades, relações e funções;
- Usem símbolos algébricos para representar e analisar «situações e estruturas matemáticas»;
- Usem modelos matemáticos;
- Analisem «alterações em diferentes contextos.

Na opinião de Barbosa (2007), uma das possíveis vias para se promover o raciocínio algébrico é a realização de tarefas de investigação que envolvam padrões e regularidades. «Para compreender os aspectos essenciais da Álgebra, é importante todo um percurso em que os alunos têm contacto com um grande número de experiências algébricas informais que envolvem a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos» (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006, p.69).

Na verdade, «os alunos, antes mesmo de tomar contacto com os tópicos formais no domínio da Álgebra, já pensam algebricamente e já desenvolveram diversas estratégias de pensamento. Cabe, então, ao professor adoptar metodologias que, partindo das estratégias informais dos alunos, proporcionem o desenvolvimento e a mobilização do pensamento algébrico com vista a uma apropriação significativa das aprendizagens mais formais da Álgebra» (Branco, 2008, p.42).

### 2.2.3. O raciocínio matemático no currículo

Segundo as actuais orientações curriculares, o desenvolvimento do raciocínio matemático constitui um objectivo central do ensino da Matemática, sendo necessário desenvolvê-lo de forma consistente, recorrendo-se à sua utilização sistemática numa variedade de contextos (NCTM, 2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007).

Em *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989/1991), relativamente à norma 3 – *A Matemática como Raciocínio*, pode ler-se que nos primeiros anos de escolaridade, referenciados por K4, o ensino da Matemática deve dar importância ao raciocínio de tal forma que os alunos:

- formulem conclusões lógicas;
- usem modelos, factos conhecidos, propriedades e relações para explicar o raciocínio;
- justifiquem as suas respostas e processos usados para obter a solução;
- usem padrões e relações para analisar situações matemáticas;
- acreditem que a Matemática faz sentido. (p. 37)

A confiança na capacidade de raciocinar e justificar pensamentos desenvolve a autonomia na criança, a qual cresce também à medida que os alunos aprendem que a Matemática não é uma simples memorização de regras e procedimentos mas é relevante, lógica e agradável.

No mesmo documento, e quanto à mesma norma, mas relativa aos anos de escolaridade 5-8, entende-se que o raciocínio deverá estar presente ao longo do currículo de Matemática de modo a que os alunos:

- reconheçam e apliquem raciocínio indutivo e dedutivo;
- compreendam e apliquem processos de raciocínio, com especial atenção ao raciocínio espacial e ao raciocínio com proporções e gráficos;
- formulem e avaliem conjecturas e argumentos matemáticos;
- validem o seu próprio pensamento;
- apreciem o uso e poder do raciocínio como parte da Matemática (p. 97).

Contudo, é referido que «os alunos necessitam de uma grande quantidade de tempo e de um grande número de experiências para desenvolver a sua capacidade de

construir argumentos válidos na formulação de problemas e avaliação dos argumentos dos outros» (p.97).

Por outro lado, também é considerada a ligação entre o desenvolvimento do raciocínio lógico e o desenvolvimento intelectual e da linguagem dos alunos. Na verdade, enquanto que a maior parte dos alunos do 5º ano está num estágio de pensamento concreto, necessitando de um contexto físico ou concreto para perceber regularidades e relações, muitos alunos do 8º ano são capazes de uma maior abstracção e raciocínio formal.

O documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM 2000/2007) destaca a importância de todos os alunos reconhecerem o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da Matemática, de formularem e investigarem conjecturas matemáticas, de desenvolverem e avaliarem argumentos e provas matemáticas, além de seleccionarem e usarem diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração. Deste modo, «o raciocínio e a demonstração deverão constituir uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos, desde o Pré-escolar ao 12º ano. O raciocínio matemático é um hábito mental que, como todos os hábitos, deverá ser desenvolvido através da sua utilização consistente numa diversidade de contextos» (p.61).

No mesmo documento, entende-se que o raciocínio matemático só se desenvolve nas aulas onde os alunos possam ser encorajados a exporem as suas ideias para serem verificadas por terceiros.

Nas aulas onde o raciocínio é privilegiado, os alunos envolvem-se, efectivamente, em processos de raciocínio e, ao fazê-lo, conseguem entender o que constitui uma explicação matemática aceitável (Lampert, 1990; Yackel & Cobb, 1994, 1996).

Também no Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães et al, 2007), o raciocínio apresenta-se como uma capacidade transversal a desenvolver ao longo dos três ciclos, devendo estar presente em todos os temas. Assim, os alunos devem raciocinar matematicamente usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos.



# CAPÍTULO III

## METODOLOGIA

### 3.1 Descrição da experiência pedagógica

O presente estudo decorreu numa turma do 5.º ano de escolaridade, de uma escola dos 2.º e 3.º ciclos do Algarve, inserida num meio suburbano relativamente recente e com grande heterogeneidade, do qual fazem parte, não só os alunos oriundos do meio piscatório, como também os alunos provenientes do meio rural e das zonas urbanizadas de elevado nível sócio-económico. Desenvolvi este trabalho de investigação numa das minhas turmas de Matemática deste nível de escolaridade porque era o único nível que eu estava a leccionar no ano em que realizei o estudo.

A turma era constituída por 20 alunos (11 rapazes e 9 raparigas) com idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos, cuja média de idades era de 10 anos. Estes alunos eram procedentes do mesmo grupo-turma do 4.º ano de escolaridade, à excepção de uma aluna que era repetente do 5.º ano de escolaridade. Apresentavam um nível sócio-económico heterogéneo, havendo Encarregados de Educação de profissões diversas, desde pedreiros, carpinteiros, motoristas e empregados de comércio, até controladores de tráfico aéreo e guias-intérpretes.

Dois dos alunos eram de nacionalidade Moldava. Outros dois alunos eram do Regime Educativo Especial, um por revelar dislexia de causa postural e outro por ter grandes dificuldades de aprendizagem.

A turma era boa ao nível do comportamento, à excepção de três alunos que manifestavam algumas dificuldades no cumprimento das regras, recusando-se a fazer os trabalhos e criando conflitos com os colegas, dentro e fora da sala de aula. De uma maneira geral, eram alunos participativos e empenhados na realização das tarefas.

Num questionário efectuado pela Directora de Turma, no início do ano lectivo, verificou-se que a disciplina preferida por um maior número de alunos era a Matemática, embora também fosse aquela a disciplina em que um maior número indicou sentir mais dificuldades. Cinco alunos obtiveram nível 2 a Matemática no

primeiro período, beneficiando, posteriormente, de aulas de apoio pedagógico acrescido. No terceiro período, apenas dois alunos obtiveram nível 2 a Matemática, por sinal os mesmos que ficaram retidos no final do ano lectivo. Duas alunas tiveram nível 5 a Matemática, no primeiro período, e três tiveram nível 5, no terceiro período.

Ao longo do ano lectivo, os alunos realizaram 9 actividades de investigação, enquadradas nos domínios temáticos da Geometria e Números e Cálculo, tal como se apresenta no quadro seguinte.

<b>Actividades de Investigação</b>	<b>Momento de realização</b>	<b>Duração</b>
Vamos unir hexágonos regulares (Anexo 1)	26/11/2008 - Matemática	90 minutos
	28/11/2008 - Matemática	90 minutos
	28/11/2008 - Estudo Acompanhado	45 minutos
	12/12/2008 - Estudo Acompanhado	45 minutos
Os saltos das rãs (Anexo 2)	16/01/2009 - Estudo Acompanhado	45 minutos
	23/01/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	30/01/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	06/02/2009 - Estudo Acompanhado	45 minutos
Adriana (Anexo 3)	03/03/2009 - Matemática	90 minutos
	06/03/2009 - Matemática	45 minutos
Berlindes I (Anexo 4)	06/03/2009 - Matemática	90 minutos
	06/03/2009 - Estudo Acompanhado	45 minutos
Berlindes II (Anexo 5)	17/04/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	15/05/2009 - Matemática	45 minutos
As escadas (Anexo 6)	15/05/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	22/05/2009 - Matemática	90 minutos
Fósforos na construção de triângulos (Anexo 7)	29/05/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
Torres de cubos (Anexo 8)	05/06/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	09/06/2009 - Matemática	45 minutos
Os Aviões (Anexo 9)	09/06/2009 - Estudo Acompanhado	90 minutos
	12/06/2009 - Matemática	45 minutos

Quadro 2. Actividades de investigação realizadas

As actividades propostas resultaram de um processo de pesquisa, quer em livros, quer em sites da Internet. A escolha e selecção das actividades foi algo demorada, pois houve o cuidado de se poder contemplar conteúdos diversificados, contribuindo, eventualmente, para uma diversificação de estratégias e raciocínios, além de se ter em conta o ano de escolaridade e o facto de estes alunos não terem qualquer experiência anterior com actividades de investigação.

Todas as actividades de investigação foram desenvolvidas em grupo, nas aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado. Para o efeito, constituíram-se 5 grupos heterogéneos de 4 alunos (quanto ao sexo, às preferências e às capacidades cognitivas evidenciadas) que se mantiveram inalteráveis ao longo do estudo. Nas quatro últimas actividades pedi aos alunos para elaborarem o respectivo relatório. Na parte final deste relatório cada aluno teria de fazer uma reflexão individual correspondente à sua opinião sobre o desenrolar da actividade e sobre os resultados atingidos.

As actividades desenvolveram-se sempre numa sequência de 3 fases: introdução, desenvolvimento e reflexão/discussão (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006).

No decorrer das actividades iniciais, os alunos foram esclarecidos quanto à essência das actividades de investigação e suas características e familiarizados com os termos inerentes às mesmas: formulação de conjecturas, teste de conjecturas, validação de conjecturas, contra-exemplos, regularidades, padrões. Assim, assumi um papel orientador nas primeiras aulas com actividades de investigação, ajudando os alunos a compreender o que significa investigar e a aprender a fazê-lo, tal como sugerem Ponte, Brocardo & Oliveira (2006). No início da realização das actividades – o *arranque da aula* – era sempre lido, em voz alta, o enunciado das mesmas, de modo a que os alunos entendessem o que se propunha e o que se esperava deles no decurso da sua realização. Durante o desenvolvimento das actividades, em grupo, o meu papel foi de mediador/suporte, questionando, esclarecendo as dúvidas que surgiam e orientando os alunos, sem no entanto ser demasiado directiva, de modo a não condicionar a sua exploração. Contudo, em alguns momentos, tendo em conta que o rumo seguido pelos alunos não era exactamente aquele em que tinha pensado, acabei por me envolver, com eles, na elaboração de raciocínios matemáticos. No final das actividades, era feito, em grande grupo, um balanço do trabalho realizado, com a apresentação, pelos grupos, das suas conjecturas, justificações, conclusões e estratégias. Estes momentos revelaram-se muito importantes para a partilha de ideias e para o desenvolvimento das capacidades de comunicação matemática, de reflexão sobre o trabalho desenvolvido e de argumentação,

dado o facto de os alunos terem de explicar os seus raciocínios, as estratégias seguidas e as suas descobertas, questionando também os colegas sobre os resultados apresentados.

Assim, no que diz respeito ao papel dos alunos, estes tinham de explorar questões, conjecturar em torno dessas questões, elaborar plano(s) para o teste da(s) conjectura(s), testar e justificar essa(s) conjectura(s), seguindo os seus próprios caminhos, identificar regularidades e padrões e comunicar os resultados obtidos. Dado que os alunos não tinham qualquer experiência na elaboração de um relatório, forneci-lhes indicações escritas que incluíam o pedido de uma reflexão individual (anexo 10), apoiadas por algumas sugestões orais, onde ia reforçando a necessidade de os alunos descreverem como pensavam e o que faziam.

De acordo com G. Anderson (1990), os princípios éticos numa investigação que envolve seres humanos foram respeitados. Assim, e tendo em conta o princípio a que este autor confere maior relevância, todos os intervenientes deste estudo deram o seu consentimento para nele participarem. De notar, no entanto, que o pedido aos Encarregados de Educação e ao Conselho Executivo foi efectuado por escrito e o pedido aos alunos foi feito oralmente.

Através de documentos próprios (anexos 11 e 12), os primeiros foram informados da natureza e do propósito do presente estudo, além dos procedimentos adoptados. Foi igualmente garantido o anonimato dos alunos participantes neste estudo.

## **3.2. Abordagem metodológica do estudo**

### **3.2.1. A metodologia de estudo de caso**

Tendo em conta os objectivos do estudo e o tipo de questões a que procurei responder, segui uma abordagem metodológica de carácter qualitativo que assentou na análise dos diversos processos de raciocínio dos alunos da turma e na compreensão da forma como os mesmos processos de raciocínio surgiram no decorrer das actividades de investigação desenvolvidas. Aliás, Bogdan & Biklen (1994) consideram que as questões do estudo são formuladas com o objectivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e no seu contexto natural, afirmando também que os indivíduos que

fazem investigação qualitativa «privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação» (p. 16).

Além disso, de acordo com a perspectiva de Neves (1996), não me propus seguir um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas ou na selecção de variáveis que seriam objecto de definição operacional), tentando enumerar ou medir relações; pelo contrário, pretendi obter dados descritivos mediante o contacto directo e interactivo com a situação que foi objecto de estudo – os raciocínios dos alunos – de forma a entender os fenómenos em jogo (as razões que conduziram os alunos a seguir determinado raciocínio), segundo a perspectiva dos participantes na situação estudada.

Considerando que só gradualmente é que me fui apercebendo das características dos processos de raciocínio dos alunos envolvidos no estudo, observando alguns traços particulares, em termos dos processos surgidos, de modo a agrupá-los em determinadas «categorias», procedi a um afinamento, tendo analisado mais profundamente as particularidades, especificidades ou características mais significativas que foram evidenciadas, isto é, raciocínios mais distintos e originais. Assim, ao compreendermos algo específico, sem a intenção de generalizar os resultados mas estudando em profundidade o seu «como» e os seus «porquês» (Matos & Carreira, 1994; Ponte, 1994) e pretendendo descrever detalhadamente e interpretar os fenómenos (Stake, 1999), optei pela metodologia de *estudo de caso*.

Esta opção metodológica (Yin, 1994; Punch, 1998) também se deveu ao facto de permitir uma análise intensiva e uma observação detalhada do fenómeno no seu contexto real (Coutinho & Chaves, 2002), com vista a organizar os dados e compreendê-los, preservando, no entanto, o seu carácter unitário.

Ponte (1994), quando se refere ao *estudo de caso*, e com base nas perspectivas de Merriam (1988) e Yin (1994), afirma que este tipo de investigação não é experimental, usando-se preferencialmente quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é, sendo essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo livre os acontecimentos.

Abrantes (1994), considerando a perspectiva de Yin (1994), sublinha que «...o *estudo de caso* é uma estratégia adequada quando, ao mesmo tempo, se verifica que (a) as principais questões são «como» e «porquê», em vez de «quem», «quando», «o quê» ou «quantos»; (b) não é possível controlar variáveis ou acontecimentos presentes na situação; e (c) o foco do estudo diz respeito a acontecimentos contemporâneos» (p.

206). Deste modo, o *estudo de caso* afasta-se da investigação experimental, já que não permite a separação entre o fenómeno e o contexto.

Também na perspectiva de Cavaye (1996), a pesquisa de estudo de caso investiga fenómenos pré-definidos mas não envolve um controlo explícito ou manipulação de variáveis: o foco incide na compreensão profunda do fenómeno e do seu contexto. Como lembram Kardos & Smith (1979), já que os casos reflectem situações da vida real, podem representar boas e más práticas, falhanços ou sucessos.

Merseth (1994) definiu um caso como um documento de pesquisa descritivo, geralmente apresentado numa forma narrativa, baseado numa situação ou acontecimento real. Um caso tenta transmitir uma representação equilibrada, multidimensional do contexto, dos participantes e da realidade da situação. Os casos são criados para produzirem discussão e procuram incluir detalhes e informações suficientes para elucidar a análise e interpretação activa pelos leitores, o que implica três elementos essenciais: serem reais; basearem-se em pesquisa e estudo cuidadoso e promoverem o uso de múltiplas perspectivas pelos seus utilizadores.

Duarte (2008), tendo em conta as referências sugeridas por Miallaret (1985), menciona que o estudo de caso pode constituir uma contribuição importante para o desenvolvimento científico, ao permitir uma *visão em profundidade* de processos educacionais na sua complexidade contextual. Nesta linha, o mesmo autor considera que o estudo de caso pode constituir um interessante modo de pesquisa para a prática docente, incluindo a investigação de cada professor nas suas aulas, o que exige simultaneamente um enquadramento teórico adequado, o domínio de instrumentos e a disponibilidade do investigador. Porém, salienta que se verifica alguma resistência ao estudo de caso, como metodologia de investigação, mercê de um conceito ideal de generalização, tendo por base critérios estatísticos. Também Stake (2005) sublinha que, tendo em conta algumas situações do quotidiano, certos «casos» se impõem irrecusavelmente ao profissional de educação, nomeadamente: um aluno em dificuldades, um grupo de alunos problemático, um problema sentido pelos professores, a curiosidade por novos procedimentos ou um programa de reforma. Segundo o mesmo autor, estes são *estudos intrínsecos* de caso. Contudo, para Stake (2005), noutras situações, um caso particular pode ser estudado para oferecer esclarecimento sobre uma problemática ou teoria, tratando-se de um *estudo instrumental*, no qual podem ser escolhidas vários casos, procurando-se uma *boa coordenação* entre os mesmos. É o que chama de estudo colectivo de casos. Torna-se, no entanto, fundamental perceber quais

são os *casos que nos ajudam a compreender um problema* que temos em mente. Na sua opinião, «a investigação com estudos de caso não é uma investigação de amostras. Por vezes um caso típico funciona bem, mas frequentemente um caso pouco habitual torna-se ilustrativo de circunstâncias que passam despercebidas nos casos típicos». (p. 17).

Dooley (2002), baseado nas definições de Yin (1994), refere que a pesquisa de estudo de caso pode empregar vários processos de recolha de informação, tais como observação participante, análise de documentos, sondagens, questionários, entrevistas, e outros; acrescenta também que o poder da metodologia de estudo de caso é a capacidade de usar todas as ferramentas no processo de recolha de informação e comparar casos para validação da pesquisa.

Stake (2005) menciona que a descrição aprofundada de casos opera generalizações. Assim, aponta:

i) *generalizações menores, generalizações inconscientes* ou *generalizações naturalistas*, quando «não se chega a uma compreensão inteiramente nova, mas a uma compreensão mais precisa» (p. 20). Num estudo de caso, o que está fundamentalmente em causa é o que «se aprende com um caso acerca de alguma classe de coisas» (p. 89);

ii) *generalizações maiores* ou *generalizações proposicionais*, que define como asserções ou propostas assumidas explicitamente pelo autor de um estudo a partir do(s) caso(s) analisados.

Quanto aos passos da concepção de estudos de caso, Duarte (2008) regista três: o primeiro passo é definir o caso que se vai estudar, ou seja, o «tópico» ou a «unidade de análise» e o seu subtópico ou contexto, mediante o apoio em perguntas de pesquisa e literatura adequada. Depois de se compilarem os primeiros dados, pode *redefinir-se o caso*, implicando ou não a revisão das perguntas e da literatura de apoio; o segundo passo é optar por um *estudo singular de caso* (single study) ou por um *estudo múltiplo de casos* (multiple-case study). Porém, há que decidir se o caso singular é holístico ou tem *incluídos* sub-casos dentro do caso holístico. Na opinião de Yin (2005), enquanto «focar um caso singular obriga a devotar cuidadosa atenção a esse caso... ter casos múltiplos pode ajudar a reforçar os achados de todo o estudo – porque os casos múltiplos podem ser escolhidos como replicações de cada caso, como comparações deliberadas e contrastantes, ou variações com base em hipóteses» (p. 384); são, respectivamente, *casos confirmatórios*, *casos contrastantes* ou *casos diferentes*; o terceiro passo é «decidir usar ou não desenvolvimento teórico (*theory development*) para ajudar a seleccionar o caso, desenvolver o protocolo de recolha de dados e

organizar as estratégias iniciais de análise de dados». Realça, ainda, que a escolha das pessoas, grupos ou lugares é um dos passos mais críticos da pesquisa de estudo de caso, já que há uma falsa ideia de que um estudo de caso deve obedecer a uma *amostra* de um universo em que o que está em causa é uma generalização estatística e não uma visão analítica. No seu entender, ao optar-se por um estudo singular de caso, pode escolher-se um caso *extremo ou único*, ou mesmo um caso *revelador*, como por exemplo a actividade de um determinado grupo de pessoas sedado na escola.

Duarte (2008) salienta que um estudo de caso pode tentar construir, alargar ou desafiar a perspectiva teórica inicial. Desta forma, propõe o conceito de «desenvolvimento teórico», implicando, na sua opinião, algo mais do que o enquadramento teórico, já que envolve mais claramente a questionação da teoria de apoio a um estudo ao permitir construir, alargar ou desafiar teorias. Nesta linha, também Dooley (2002) afirma que cada pesquisa de estudo de caso pode contribuir para elaborar uma teoria nas disciplinas aplicadas, dado que se trata de um método que pode levar-nos a compreender um assunto complexo, podendo dar mais força ao que já é conhecido através da pesquisa prévia. Dá ênfase à análise contextual detalhada de um número limitado de acontecimentos e das suas relações. Contudo, o mesmo autor considera que a passagem da pesquisa de estudo de caso para a elaboração de teorias constitui um processo árduo, pois, geralmente, a perspectiva de investigação de estudo de caso não se coaduna bem com generalização ou previsão.

Dooley (2002), considerando que a pesquisa de estudo de caso pode englobar casos múltiplos, informação quantitativa e qualitativa e múltiplos processos de pesquisa, aponta o facto de esta poder contribuir, de uma forma holística, para todas as fases de desenvolvimento da teoria.

Assim, salienta várias perspectivas sobre a natureza da pesquisa de estudo de caso:

- i) A pesquisa de estudo de caso é um tipo de pesquisa legítimo;
- ii) A pesquisa de estudo de caso pode englobar um ou mais casos;
- iii) A pesquisa de estudo de estudo pode basear-se em informação quantitativa, qualitativa ou ambas;
- iv) A pesquisa de estudo de caso pode englobar paradigmas múltiplos de pesquisa num único ou em múltiplos casos;
- v) A pesquisa de estudo de caso pode ser aplicada à elaboração de teorias.

Salienta também que uma nova teoria não emerge rapidamente mas ir-se-á desenvolver à medida que a pesquisa se estender de um caso para o próximo e mais informações forem recolhidas e analisadas. Trata-se de uma forma de reiteração e refinamento contínuo que ocorre durante um grande período de tempo. Só «após o pesquisador ter observado fenómenos semelhantes em múltiplos cenários é que a confirmação ou não da nova teoria começará a tomar forma e ganhará substância» (p. 336). Utilizando uma metáfora, destaca a ideia de que a elaboração de uma nova teoria constitui uma «escadaria» que se tem de subir «degrau a degrau»; assim, cada investigação poderá ser sempre mais uma achega ou um contributo para o desenvolvimento da teoria, podendo depois ser prosseguido com futuros trabalhos do próprio investigador ou de outros investigadores.

Também Eisenhardt (1989) sugeriu que «o desenvolvimento da teoria da pesquisa do estudo de caso terá provavelmente forças importantes tais como novidade, testabilidade e validação empírica» (p. 548). Assim, a possibilidade de generalizar novas teorias aumenta com a pesquisa de estudo de caso devido ao contexto de aplicação no qual a pesquisa é conduzida e porque «visões criativas geralmente surgem da justaposição de provas contraditórias e paradoxais» e «esta constante justaposição e realidades em conflito (diferenças nos casos, diferentes tipos de informação e diferentes investigadores) têm tendência a gerar pensamento» (p. 546).

Apesar de alguns investigadores terem confirmado a utilidade da pesquisa de estudo de caso como forma de elaborar teorias, parece não ser claro o papel que esta desempenha no processo de elaboração de teorias. Dooley (2002) apresenta uma proposta da seguinte forma:

- i) Papéis específicos: a pesquisa de estudo de caso como método para cumprir fases específicas do método geral da elaboração de teorias em disciplinas aplicadas;
- ii) Papel global: a pesquisa de estudo de caso como estratégia para reunir múltiplos métodos com o objectivo de cumprir todas as fases do método geral de elaboração de teorias nas disciplinas aplicadas.

Relativamente aos papéis específicos, de acordo com Lynham (2002), aponta quatro:

- 1 - A aplicação do caso (único ou vários casos) a uma teoria já conceptualizada e operacionalizada. O objectivo é colocar a teoria em prática ou aplicação, dando assim um contributo à teoria. Um resultado importante desta aplicação é permitir

ao teórico usar a experiência e a aprendizagem da aplicação real da teoria para melhor documentar, desenvolver e refinar a teoria.

2 - Confirmação ou não de uma teoria já conceptualizada e operacionalizada (caso único ou múltiplos). Esta fase envolve o planeamento, desenho, implementação e avaliação do estudo de caso para confirmar ou rejeitar o quadro teórico central do estudo. Consiste essencialmente em recolher informação, analisá-la, procurar as conclusões e avaliar os resultados.

3 - Aplicação do caso (único ou múltiplos) com o objectivo de criar ou progredir na conceptualização e operacionalização de uma teoria. Neste papel, a pesquisa de estudo de caso aproxima-se do objectivo e da metodologia de uma pesquisa fundamental – desenvolvimento conceptual e operacionalização de uma nova teoria.

4 - Refinamento contínuo e desenvolvimento de uma teoria completamente desenvolvida (caso único ou múltiplos). A pesquisa de estudo de caso pode ser usada, com outras ferramentas de pesquisa, para dar refinamento e contínuo desenvolvimento à teoria. Este é também o momento para múltiplos casos em contextos semelhantes e não-semelhantes com o objectivo de realizar a extensão da aplicação e verificar a utilidade da teoria.

Na presente investigação, julgo possível afirmar que a pesquisa de estudo de caso desempenha essencialmente os papéis 2 e 3. Por um lado, está disponível uma teoria em Educação Matemática suficientemente desenvolvida sobre o trabalho em sala de aula com actividades de investigação que permite planear e levar à prática experiências de ensino fundamentadas; por outro lado, a teoria acerca da natureza do raciocínio matemático, da sua conceptualização e caracterização, designadamente com alunos em fases precoces de escolaridade é ainda incompleta e susceptível de enriquecimento.

Dooley (2002) salienta que a pesquisa de estudo de caso deve preocupar-se com o rigor metodológico, a validação e a confiança, o que é conseguido através dos seguintes parâmetros:

- i) Determinar e definir as questões de pesquisa – o foco ou objectivo do projecto é estabelecido logo que uma revisão intensiva da literatura esteja completa e o problema bem identificado. O objecto de um estudo de caso é, muitas vezes, um programa, um grupo, uma equipa ou até uma pessoa e, tal

como já foi referido por outros autores, procura-se responder às questões do «porquê» e do «como».

- ii) Seleccionar os casos e determinar as técnicas de recolha e análise de informação – casos individuais ou múltiplos que reflectam as questões de pesquisa, instrumentos e outras estratégias de recolha de informação, destacando-se o facto de se poderem usar fontes e técnicas múltiplas. Segundo Herling et al (2000), para passar os testes de validação e fiabilidade, deve ser tomada uma atenção explícita ao desenho do estudo de caso e aos processos usados na recolha e análise de informação e no relatar das descobertas;
- iii) Preparar a recolha de informação – devido à natureza da metodologia de estudo de caso, o investigador gerará grandes quantidades de informação de fontes múltiplas. O tempo dedicado a planear à priori permitirá a organização de muitas bases de dados e criação de categorias para divisão e manuseamento da informação. Outro aspecto relevante é que não há regras demasiado firmes sobre quanto envolvimento pessoal ou quanta apresentação de dados por parte do pesquisador são apropriados (Gall et al, 1996);
- iv) Recolher informação no campo – o investigador deve recolher e armazenar múltiplos registos de informação de forma sistemática. O armazenamento da informação é crítico de forma a permitir a emergência de padrões e temas. A decisão de quando terminar a fase de recolha de informação envolve considerações práticas e teóricas. Gall et al (1996) apontam para as limitações de tempo e de orçamento ou a observação do cansaço dos participantes. Por outro lado, Lincoln e Guba (1985) referem: a exaustão das fontes, a saturação das categorias, a emergência de regularidades e a demasiada extensão;
- v) Avaliar e analisar a informação – o método do caso de estudo, com as suas muitas técnicas de recolha de informação e análise, dá aos pesquisadores oportunidades de triangular informação para fortalecer as descobertas. É importante esquadrihar a informação de várias formas diferentes para procurar resultados não esperados que possam não ser aparentes no início. Quando uma variedade de observações converge, a força das conclusões aumenta e a confiança é estabelecida;
- vi) Preparar o relatório – com o objectivo de apresentar as conclusões, dois tipos de relatórios são comuns: o relatório reflexivo, em que o autor utiliza

mecanismos literários para tornar o caso vivo e a presença da voz do pesquisador é saliente, e o relatório analítico, que denota um estilo de escrita distante (a voz do investigador é silenciada ou subjugada). Em qualquer caso, é importante fornecer evidências suficientes para convencer o leitor das conclusões. Segundo Gall et al (1996), o estudo de caso tem, geralmente, uma organização convencional: introdução, revisão da literatura, metodologia, resultados e discussão.

Apesar da clara pertinência da metodologia de estudo de caso na investigação em educação, Flyvbjerg (2004) debruçou-se sobre alguns dos mal-entendidos que persistem acerca da pesquisa de estudo de caso. Estes são:

1 - O conhecimento geral teórico (independente do contexto) é mais valioso que o conhecimento concreto prático (dependente do contexto);

2 - Não se pode generalizar com base num caso individual; como tal, o estudo de caso não pode contribuir para o desenvolvimento científico;

3 - O estudo de caso é mais útil para gerar hipóteses, isto é, como primeira fase de um processo de investigação mais alargado, enquanto outros métodos são mais apropriados para testar hipóteses e elaboração de teorias;

4 - O caso de estudo é tendencioso em relação à verificação, ou seja, há uma tendência para confirmar as noções pré-estabelecidas do investigador;

5 - É muitas vezes difícil sumariar e desenvolver proposições e teorias gerais com base em estudos de caso específicos.

As referidas fraquezas do estudo de caso indicam que a questão se concentra na teoria, fiabilidade e validade, ou seja, no próprio *status* do estudo de caso enquanto método científico.

Assim, Flyvbjerg (2004), relativamente ao primeiro mal-entendido – o conhecimento geral teórico (independente do contexto) é mais valioso que o conhecimento concreto prático (dependente do contexto), esclarece: «Teorias preditivas e universais não podem ser encontradas no estudo dos assuntos humanos. O conhecimento concreto, dependente do contexto, é assim mais valioso que a busca vã de teorias preditivas e universais» (p. 423).

Quanto ao segundo mal-entendido – não se pode generalizar com base num caso individual – lembra que o experimentalismo de Galileu foi uma questão de uma única experiência, isto é, um estudo de caso, não envolvendo uma grande amostra aleatória de tentativas; bastou um caso único devido à inteligência da escolha dos extremos: chumbo

e pena. Nota, igualmente, que as experiências escolhidas cuidadosamente também foram decisivas para o desenvolvimento da Física de Newton, Einstein e Bohr, tal como o estudo de caso ocupou um papel central nos trabalhos de Darwin, Marx e Freud.

Assim, Flyvbjerg (2004) contesta: «Pode-se muitas vezes generalizar com base num único caso, e o estudo de caso pode ser central no desenvolvimento científico através da generalização como suplemento ou alternativa a outros métodos. Mas a generalização formal é sobrevalorizada como fonte de desenvolvimento científico, enquanto *a força do exemplo* é subestimada» (p. 425).

No que diz respeito ao terceiro mal-entendido – o estudo de caso é mais útil para gerar hipóteses, isto é, como primeira fase de um processo de pesquisa – refere que este deriva do mal-entendido anterior de que não se pode generalizar com base em casos individuais. Deste modo, corrige-o nos seguintes termos: «O estudo de caso é útil para a generalização e teste de hipóteses mas não está limitado apenas a estas actividades de pesquisa» (p. 425).

No que concerne ao quarto mal-entendido – o estudo de caso sofre da tendência para confirmar as noções pré-estabelecidas do investigador – Flyvbjerg (2004) indica que a tendência para a verificação é geral e que a suposta deficiência do estudo de caso e de outros métodos qualitativos é levantada porque estes, ostensivamente, dão mais espaço à subjectividade do investigador do que outros métodos, sendo vistos como menos rigorosos que os métodos quantitativos e hipotético-dedutivos. Esta crítica é falaciosa porque o estudo de caso tem o seu próprio rigor. A vantagem do estudo de caso é a de poder *aproximar-se* de situações reais e testar pontos de vista directamente relacionados com o fenómeno, tal como ele se desenrola na prática. A proximidade da realidade que o estudo de caso implica e o processo de aprendizagem que gera para o investigador constituirão, muitas vezes, um pré-requisito para a compreensão avançada, existindo mais descobertas decorrentes do estudo de caso do que de estatísticas aplicadas a grandes grupos. Assim, o quarto mal-entendido é revisto da seguinte forma: «O estudo de caso não contém maiores influências em relação à verificação das noções pré-concebidas do pesquisador do que outros métodos de investigação. Pelo contrário, a experiência indica que o estudo de caso contém uma maior influência em relação à falsificação de noções pré-concebidas do que em relação à verificação» (p. 429).

Relativamente ao quinto mal-entendido – é muitas vezes difícil sumariar e desenvolver proposições e teorias gerais com base em estudos de caso específicos – os investigadores de estudo de caso entendem que uma narrativa especialmente *espessa* e

difícil de resumir não é problema. Pelo contrário, é muitas vezes um sinal de que o estudo tocou uma problemática particularmente rica. O objectivo do estudo de caso, na perspectiva do autor é que este seja coisas diferentes para pessoas diferentes, podendo constituir-se numa *realidade virtual*. As narrativas não começam por assunções teóricas explícitas. Em vez disso, começam com um interesse por um fenómeno particular que é melhor compreendido narrativamente. As narrativas desenvolvem então descrições e interpretações do fenómeno, da perspectiva dos participantes, do investigador e outros. Por outras palavras: «É correcto que resumir os estudos de caso é muitas vezes difícil, especialmente no que toca ao processo do caso. É menos correcto no que se refere aos resultados do caso. Os problemas, ao resumir os estudos de caso, no entanto, devem-se mais frequentemente às propriedades da realidade estudada do que ao estudo de caso como método de pesquisa. Muitas vezes não é desejável resumir e generalizar os estudos de caso. Bons estudos devem ser lidos como narrativas na sua plenitude» (p. 431-432).

Flyvbjerg (2004) advoga, por fim, que a negação dos cinco mal-entendidos sobre a investigação de estudo de caso não deve ser interpretada como uma rejeição da pesquisa que se foca em amostras aleatórias grandes ou populações inteiras, como por exemplo a sondagem por questionário com análise quantitativa. A questão é que uma separação mordaz, muitas vezes presente na literatura, entre métodos quantitativos e qualitativos é ilegítima.

### **3.2.2 O desenho do presente estudo de caso**

De acordo com os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994), podemos afirmar que esta investigação é um estudo de caso observacional, visto centrar-se num aspecto particular (o raciocínio matemático dos alunos de uma turma) de uma organização particular (a sala de aula de Matemática), utilizando para tal a observação participante. Também, tendo em conta as ideias de Bogdan & Biklen (1994), há uma «fragmentação do todo», tendo o investigador de delimitar a matéria de estudo, a fim de poder controlar a investigação, o que poderá, de certa forma, conduzir a uma certa distorção (aspecto que poderá ser minimizado). Na verdade, neste estudo, seguiu-se uma orientação do geral para o particular, na medida em que se começou por analisar a turma no seu todo,

tendo naturalmente em pano de fundo as questões de investigação e, a partir daí, particularizaram-se os casos que surgiram. Simultaneamente, para se apurarem os porquês, foram realizadas entrevistas espontâneas, semi-estruturadas e centradas nas tarefas, ao longo da resolução das mesmas, sendo os seus dados registados em áudio ou através de notas de campo da professora/investigadora. Aliás, em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000/2007), pode ler-se: «Desde as suas primeiras experiências no campo da matemática, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas. Questões como ‘Por que é que pensas que isto é verdade?’ e ‘Alguém aqui acha que a resposta é diferente, e porquê?’ ajudam-nas a compreender que as afirmações necessitam de ser suportadas ou refutadas pelas evidências» (p. 61). Na mesma linha de pensamento, e ainda no mesmo documento, afirma-se: «Desde os primeiros anos, os professores poderão ajudar os alunos a formular conjecturas por meio de questões: O que achas que vai acontecer a seguir? Qual é o padrão? Isto é sempre verdade ou só algumas vezes? Alterações simples no modo como as tarefas são apresentadas aos alunos poderão ajudá-los na aprendizagem de formulação de conjecturas» (p. 62).

Além disso, a recolha dos dados também foi feita com base na observação participante, como já referido, no registo áudio das entrevistas finais e nos registos escritos dos alunos no desenrolar das actividades, nos relatórios de grupo e nas reflexões individuais que produziram.

## **A recolha de dados**

Neste estudo foram utilizados diversos métodos de recolha de dados que podem ser agrupados em quatro tipos principais: observações, entrevistas, gravações em áudio de entrevistas semi-estruturadas ao longo da realização de tarefas (anexo 13), bem como de uma entrevista final (anexo 14) e recolha de registos dos alunos sob a forma de relatórios e trabalhos.

Procedeu-se à observação participante, incidente nas aulas e nos grupos de alunos no decurso da realização das actividades de investigação. A recolha documental incluiu os trabalhos produzidos pelos alunos, nomeadamente os relatórios, as próprias resoluções das actividades de investigação e as minhas notas de campo. Observei mas também fui participante activa, acompanhando o trabalho dos alunos na sala de aula. Ao

fazer esse acompanhamento, e durante a observação, realizei entrevistas espontâneas, centradas nas tarefas que foram registadas em áudio. As entrevistas, de acordo com Bogdan & Biklen (1994), devem ser utilizadas para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito. Neste caso, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas que tiveram como objectivo recolher elementos sobre a forma como os alunos entrevistados raciocinaram.

A recolha de dados foi efectuada durante todo o ano lectivo de 2008/2009 e centrou-se em nove actividades de investigação, das quais quatro foram alvo de uma análise mais pormenorizada. Tendo por base uma das questões de investigação, o perceber como é que os alunos compreendem as situações propostas e de que forma essa apropriação evolui com o decorrer da prática neste tipo de actividades, as actividades para análise foram escolhidas consoante a altura ou a fase da investigação em que foram aplicadas. Assim, optei por analisar uma actividade inicial – «Os saltos das rãs», que foi realizada com o recurso ao computador, permitindo ver o desempenho dos alunos em situações diferentes das habituais; escolhi outra que decorreu entre uma fase inicial e uma fase intermédia – «Adriana», onde também foi bastante evidente a diversificação de raciocínios e estratégias de resolução; considerei mais duas da fase final – «Torres com cubos», por ser semelhante a uma outra realizada anteriormente, e «Os aviões», por ser a última a ser desenvolvida e mostrar claramente os progressos efectuados pelos alunos. Não senti a necessidade de integrar outras actividades na narrativa do caso por verificar a exaustão da maioria dos resultados a que já havia chegado, considerando que não acrescentariam mais ou melhores elementos para a análise.

## **A análise de dados**

A forma de codificação e interpretação dos dados prendeu-se com as próprias questões de investigação. Deste modo, os dados sujeitos a codificação foram os tipos de raciocínios exibidos pelos alunos, tendo em conta a natureza das actividades de investigação, as características dos alunos em termos de actividade matemática (se são mais «visuais», esquematizando e experimentando os procedimentos, ou «verbais», explicando por suas palavras os procedimentos adoptados). Os dados seleccionados para análise foram sujeitos inicialmente a uma fase de organização e selecção. O caso começou então a assumir o processo narrativo, incluindo uma componente descritiva considerável, em que se incluem transcrições de diálogos, apresentação de produtos dos

alunos e respectiva análise comentada. Finalmente, o trabalho interpretativo foi desenvolvido, tendo como pontos de apoio os conceitos e asserções do quadro teórico definido para esta investigação e as evidências colhidas nos dados, daquilo que os alunos fizeram e disseram.

Depois de seleccionadas as actividades, a sua análise incluiu sempre a identificação da diversidade de processos de resolução e o agrupamento em classes segundo os processos de raciocínio matemático ou estratégias dos alunos: generalizações, conjecturação, identificação de regularidades ou padrões, particularizações com o recurso a exemplos genéricos, esquematizações ou verbalizações e a súpula dos processos de raciocínio mais salientes, bem como o surgimento de casos especiais tendo em conta a especificidade dos raciocínios.

A partir da análise das entrevistas semi-estruturadas e finais, dos relatórios dos alunos e das suas reflexões individuais, encontraram-se alguns aspectos mais frequentes no que diz respeito à realização das actividades de investigação, a saber: o gosto/interesse, as dificuldades, a definição e seus objectivos ou condições necessárias, a realização do trabalho em grupo, a utilização de tabelas e/ou outros materiais, os procedimentos adoptados, a evolução que foi sentida, as preferidas, as menos apreciadas e a continuidade deste tipo de trabalho. Todos estes aspectos foram transcritos e registados em quadros (a maioria deles).

Os grupos foram identificados por números de 1 a 5. Em cada grupo, cada aluno foi identificado com um número de 1 a 4, respeitando-se o género; assim, a resposta de cada aluno é identificada pelo número do seu grupo e pelo seu número dentro do grupo, garantindo-se assim o anonimato dos intervenientes.

### **A professora como investigadora**

Segundo Ponte (2002), os principais requisitos para que uma investigação possa ser reconhecida como tal são: i) produzir conhecimentos novos; ii) ter uma metodologia rigorosa e iii) ser pública. Se, por um lado, o primeiro requisito não constitui uma dificuldade frequente nos estudos desenvolvidos por professores, pois cada situação experimentada com alunos e comunidades escolares tende a ser única e, como tal, com aspectos muito específicos que a podem caracterizar, por outro lado, toda a investigação, para ser credível, tem de obedecer a critérios metódicos sistemáticos, que

lhe garantam qualidade e fidelidade. Assim, Ponte (2002) refere que tais critérios consistem em garantir:

...vínculo com a prática, pois o problema explorado tem de ser vivido pelo professor/investigador, autenticidade da investigação, pois esta tem de exprimir um ponto de vista próprio dos actores, enquadrado num contexto social, económico, político e cultural; novidade, pois a investigação tem de conter algum elemento novo, na formação das questões, na metodologia usada, ou na interpretação que é feita dos resultados (p. 22).

Mais ainda, o mesmo autor, considera que o critério da qualidade metodológica passa também pela referência, de forma explícita, a questões e procedimentos de recolha de dados e à apresentação das conclusões com base na evidência obtida. Contudo, alerta para o facto de não podermos esquecer a presença da subjectividade do investigador, o qual não poderá deixar de interpretar os dados segundo o seu próprio ponto de vista. Tendo em conta esta subjectividade Eisenhart (1988), citado em Ponte (1994), refere que «o investigador deve estar envolvido na actividade como um insider e ser capaz de reflectir sobre ela como um outsider» (p. 9).

Lüdke & André (1986), apesar de considerarem que é complicado para o investigador, que opta por trabalhar num assunto no qual se insere emocionalmente, estabelecer a distância correcta, quer de preocupações pessoais, quer do conhecimento prévio que tem de certas situações, são da opinião que há vantagens nos estudos em ambientes conhecidos e da convivência pessoal do investigador. Para o justificarem referem que, deste modo, o próprio investigador usufrui da oportunidade de aprender a não transferir a sua personalidade, nem se deixar influenciar por opiniões e atitudes de colegas, ou pelo próprio ambiente que o rodeia.

Como tal, as questões de validade, de fidelidade e de credibilidade não foram esquecidas.

Quanto à validade, tive o cuidado de fazer corresponder os resultados com a realidade e mantive presente a necessidade de garantir que os resultados traduzissem a realidade estudada. A triangulação – vários investigadores, várias fontes de recolha de dados e diferentes procedimentos metodológicos – foi feita, verificando se os dados correspondem ao que os alunos disseram e fizeram, mantendo uma observação do fenómeno em estudo, por um período longo de tempo, com o envolvimento dos alunos

em todas as fases da investigação, e promovendo a discussão dos resultados com outros investigadores, num debate contínuo.

Relativamente à fidelidade, esta foi garantida sobretudo através de uma descrição pormenorizada e rigorosa da forma como o estudo foi realizado, o que implica a explicitação dos pressupostos e da teoria subjacente ao estudo, bem como uma descrição do processo de recolha de dados e da forma como foram obtidos os resultados.

A fim de assegurar a credibilidade, apresentei o esclarecimento dos procedimentos utilizados na recolha de dados, a análise repetida dos dados recolhidos, o relato das ocorrências negativas ao longo do processo, o reconhecimento das variáveis parasitas e a documentação do campo de análise.

Enquanto investigadora, o principal foco do meu estudo incidiu sobre o trabalho dos alunos e não sobre o meu próprio trabalho. Contudo, enquanto professora não foi possível (nem desejável) desligar-me da minha própria prática, cumprindo-me acompanhar e orientar os alunos no decorrer do seu trabalho, não me limitando a ser uma mera espectadora.

As aulas decorreram de acordo com o meu modo habitual de trabalhar, envolvendo uma preocupação constante em saber se os alunos compreendiam as questões e um questionamento frequente numa atitude desafiadora. Os alunos, apesar de terem sido alvo de registos áudio, com o decorrer do tempo, acabaram por se alhear da presença do gravador, tendo-se empenhado, de uma maneira geral, entusiasticamente na realização das actividades.



# CAPÍTULO IV

## ANÁLISE DE DADOS

### 4.1. As actividades

#### 4.1.1. *Os saltos das rãs*

Tratando-se de uma actividade interactiva, (disponível em <http://www.mathsnet.net/puzzles/leapfrog/index.html>), a actividade *Os saltos das rãs* (anexo 2) veio a desenvolver-se em 6 aulas. Estando integrada no domínio temático *Números e Operações*, pretendia-se, com a resolução da mesma, além de se verificar e analisar a diversidade dos processos de raciocínio e de resolução dos alunos, abordar ou explorar alguns tópicos matemáticos, a saber: relações numéricas, operações, representações, números pares e ímpares, sentido de variável e manipulação de representações algébricas.

Assim, na primeira aula com esta actividade, após uma certa agitação inicial, resultante da organização dos alunos em grupo e da distribuição dos computadores portáteis (note-se que poucas vezes os utilizaram), analisámos, em grande grupo, o enunciado da actividade. Esta ocasião contribuiu também para a introdução gradual, esclarecimento e familiarização com alguns conceitos, nomeadamente os de *actividade de investigação e suas características, regularidade, padrão, formulação de conjecturas, teste de conjecturas, validação de conjecturas, contra-exemplos*. Considerando a inexperiência que os alunos tinham, a noção de conjectura era-lhes completamente desconhecida (saliente-se que esta foi a segunda actividade de investigação realizada; na primeira, não houve a preocupação de tornar logo esclarecidos estes conceitos; o intuito era apenas observar os seus desempenhos, não se realçando ou explicitando as características particulares do tipo de trabalho que era proposto). Assim, passaram a entendê-la como uma «hipótese», um «palpite» ou «uma intuição» que carece de validação ou prova, o que, para o efeito, precisa de resistir a vários testes.

## As resoluções dos alunos

A actividade *Os saltos das rãs* consistia em encontrar uma regra para determinar o número mínimo de movimentos para conseguir trocar a posição de um certo número de rãs azuis e verdes, sendo que as azuis, que inicialmente se encontravam à esquerda, tinham de passar todas para a direita e as verdes, que inicialmente se encontravam todas à direita, tinham de passar para a esquerda. Havia, ainda, que obedecer às regras: as azuis só se podiam mover para direita e as verdes para a esquerda; cada rã só se podia mover para o lugar que estivesse desocupado imediatamente a seguir; cada rã só podia saltar por cima de uma outra e não de mais do que uma.

Os alunos podiam experimentar com vários números de rãs, embora lhes tivesse sugerido que começassem por experimentar apenas com uma rã azul e uma rã verde, aumentando depois progressivamente o número de rãs, com o intuito de promover o processo de generalização. Disse-lhes também para procurarem fazer registos de cada caso, mediante a eventual utilização de uma tabela. O facto do ambiente de aprendizagem ser mediado pelo computador criou grande entusiasmo nos alunos. Numa fase inicial, a tarefa passou por um momento mais lúdico ou «de brincadeira». Contudo, a certa altura, os alunos começaram a sentir algumas dificuldades – «já não dá professora...», diziam alguns (isto porque a própria aplicação não o permitia, «encravava»). Surgia então o momento ideal para os fazer pensar – «Então, descobre lá porque é que não dá?»; «Experimenta outra vez.» Os alunos experimentavam e, sempre que a situação dava origem a um movimento errado, nos diversos grupos, eram alertados mediante a afirmação «Pára, pára... Pensa lá ...». Isto feito repetidamente conduziu à descoberta de que nunca se poderia efectuar um movimento que aproximasse duas rãs da mesma cor; o segredo era que as rãs deveriam estar em posição alternada azul - verde - azul - verde... Diziam alguns alunos: «Já sei, professora. Nunca podemos juntar duas rãs da mesma cor, ou duas azuis ou duas verdes; tem que ser sempre uma rã azul e uma rã verde, uma rã azul e uma rã verde.» Estavam descobertas as primeiras regras, permitindo-se, deste modo, que os alunos se inteirassem e apropriassem da essência da tarefa, podendo avançar para uma abordagem mais profunda, com a formulação e o teste de conjecturas. De qualquer forma, já tinham descoberto o primeiro padrão não numérico: rã azul – rã verde – rã azul – rã verde ...

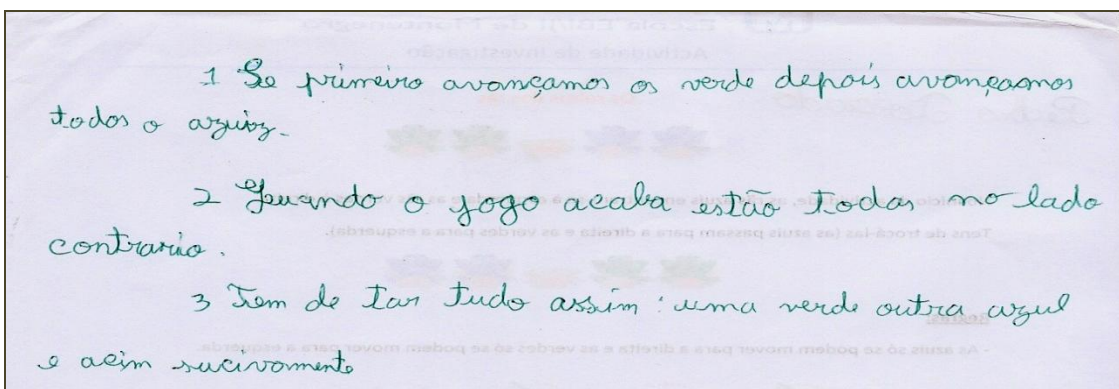


Figura 12. A descoberta das primeiras regras – «regras funcionais», Aluno 3 do Grupo 3

Sendo necessário perceber mais alguma coisa, e até porque ainda não sabiam como determinar o número mínimo de movimentos para recolocar as rãs, reforcei a ideia da utilização da tabela onde registassem o número de rãs e os movimentos a fazer, além de sugerir a experimentação com a utilização de, por exemplo, uma rã verde e cinco rãs azuis, a fim de notar a distinção e a relação entre *saltos* e *arrastamentos*, ambos englobados nos movimentos. Note-se que, neste caso, foi bastante importante a minha intervenção ao assumir um papel mediador/de suporte, visto, tal como já foi referido, a actividade ser uma das iniciais, e haver ainda pouca experiência dos alunos neste campo. Verificou-se, deste modo, uma certa condução/orientação da investigação pela minha parte, promovendo a partilha de ideias e as descobertas entre os elementos dos grupos face às «dicas» que dava.

Aliás, Fonseca et al (1999), tal como atrás referido, também consideram que os alunos, quando não estão habituados a realizar investigações, devem sentir algumas dificuldades, chamando o professor frequentemente por não encontrarem nenhuma resposta imediata, decorrente da falta de compreensão da natureza da tarefa; deste modo, a atitude do professor deverá ser a de clarificar os alunos quanto à essência do trabalho investigativo, podendo concretizá-lo com alguns exemplos; o professor deverá apoiar os alunos no decorrer de algumas etapas do processo investigativo (compreensão da situação proposta, organização de dados, formulação de questões) de modo a que estes possam prosseguir com o levantamento de conjecturas, o teste de conjecturas e, em alguns casos, a demonstração de conjecturas. As questões a colocar deverão ser mais ou menos indirectas, de acordo com a experiência dos alunos neste tipo de tarefas, permitindo aguçar o espírito crítico, fazer uso da reflexão e da procura de argumentos e razões que permitam confirmar ou não as conjecturas.

Como já foi visto anteriormente, Yackel, Cobb, Wood, Wheatley & Merckel (1991) também clarificam o papel do professor como facilitador das discussões matemáticas que, ao «tentar imaginar que sentido as crianças estão a dar às actividades», poderá decidir como interferir e que tipo de apoio irá prestar, podendo optar pela colocação de «questões provocatórias ou entrar num diálogo socrático». Referem ainda que o professor tem de ajudar as crianças a clarificarem as suas explicações, apoiando-as na verbalização do seu pensamento e encorajando-as a apresentarem outras soluções, perguntando regularmente se alguém resolveu o problema de um modo diferente.

Como tal, da sugestão emitida por mim, resultou:

**Eu:** Bem, sempre que iam juntar duas rãs da mesma cor, eu dizia: parem, é para pensar... isto porque uma rã não podia passar por cima de duas da mesma cor, não é?

**Aluno 1:** Oh professora mas... uma... por exemplo, se fosse 5 e uma, a verde só arrastava e as rãs..., as azuis é que saltavam.

**Eu:** Exactamente... Só que havia outra coisa... que é...

**Aluna 2:** Que é a rã... ah... quando tava a rã verde era só uma e as 5 azuis é que saltavam, a rã verde só arrastava.

**Aluna 3:** Cada rã azul só saltava uma vez por cima de cada verde, não podia andar para trás.

**Aluno 1:** As azuis, cada uma só saltava uma vez e não andava para trás.

**Eu:** Muito bem, então vocês experimentaram com cinco verdes e uma azul e viram que todas [as verdes] saltavam uma vez por cima da azul, e se fosse com duas azuis como acham que seria?

**Aluna 3:** Cada uma verde saltava duas vezes por cima da azul, ah... não, saltava duas vezes, uma vez uma e depois outra.

**Eu:** Exactamente. Cada uma delas saltava uma vez por cima de uma azul, elas eram cinco, e depois outra vez as cinco...

**Aluna 3:** Dava 10.

**Aluna 2:** Isso dava mais ou menos uma regra, é sempre um número de rãs de uma cor vezes o outro número de rãs da outra cor.

**Eu:** Então o número de saltos correspondia a quê?

**Aluna 3:** Posso dizer professora? O número de saltos é o produto das rãs azuis e das rãs verdes.

Surgiu, desta forma, a formulação de uma primeira conjectura, procedimento este que suscitou a necessidade de prova, mediante a experimentação. Assim, e tendo-os incitado a verificar mais casos, inclusivamente com o cuidado de contabilizar também os arrastamentos e registá-los em tabela, os alunos elaboraram tabelas onde especificaram o número de rãs de cada cor, o número de saltos, o número de arrastamentos e o total de movimentos, tal como nos exemplos que se seguem.

Rãs azuis	Rãs verdes	Nº de movimentos		
m:	m:	Salto	Atacando	Total
1	1	1	2	3
2	1	2	3	5
2	2	4	4	8
3	2	6	5	11
3	3	9	6	15
4	3	11	8	19
4	1	4	5	9
4	4	16	8	24

Figura 13. Tabela da aluna 2 do Grupo 1 com o registo do número de rãs e do número de movimentos

Verifica-se na tabela anterior, com um tamanho de letra mais pequeno, uma tentativa de encontrar alguma regularidade relativa ao total de movimentos: 2, 3,3, 4,4... mas que falhou quando surge um número de movimentos menor do que o anterior.

Rãs azuis	Rãs verdes	Número de movimentos		
		Atacando (soma)	Salto (ponto)	Total
1	1	2	1	3
2	2	4	4	8
2	1	3	2	5
2	3	5	6	11
2	4	6	8	14
3	3	6	9	15
3	1	4	3	7
3	4	7	12	19
3	5	8	15	23
4	1	5	4	9
4	5	9	20	29
5	1	6	5	11
5	2	7	10	17
5	5	10	25	35

Figura 14. Tabela da aluna 3 do Grupo 2 com o registo do número de rãs e do número de movimentos

Neste caso, a Aluna 3 já tem o cuidado de associar os arrastamentos à soma e os saltos ao produto. Pode observar-se uma certa organização embora não totalmente ordenada, não se esgotando ainda todas as hipóteses possíveis para o número de rãs permitido pela aplicação.

Preenchida a tabela e estabelecida a sua análise, mais propriamente na parte referente ao número de rãs e aos arrastamentos, a Aluna 3 depressa percebeu a regra para determinar o número de arrastamentos, tendo proferido, com determinação, uma nova conjectura: «O número de arrastamentos é a soma das rãs azuis com as rãs verdes», ao que a questioneei da seguinte forma – «Como é que tens a certeza?». «Porque experimentei várias vezes» foi a resposta da aluna, o que proporcionou a explicação do que era o trabalho de um matemático, envolvendo o teste, a validação e a prova de conjecturas e o esclarecimento da importância de se testar as previsões, utilizando diferentes valores.

Assim, tendo-os incitado a apresentar mais alguns casos, desencadeou-se o seguinte diálogo:

**Eu:** *Lembram-se de começar a experimentar com o menor número de rãs? Então com uma rã azul e uma rã verde como é que foi?*

**Aluna 3:** *Com uma rã azul e uma rã verde é... , o número de saltos é um vezes um que é um.*

**Eu:** *E o número de arrastamentos?*

**Aluna 3:** *É um mais um.*

**Eu:** *Então, e como é que chegaram ao número de movimentos?*

**Aluno 1:** *Dá três. Um vezes um é igual a um, e um mais um é igual a dois, e um mais dois é igual a três.*

**Eu:** *Vá, outro exemplo.*

**Aluno 1:** *Com quatro azuis e duas verdes. Quatro vezes dois é oito.*

**Eu:** *E o que é oito?*

**Aluno 1:** *É o número de saltos.*

**Eu:** *E os arrastamentos?*

**Aluna 3:** *É quatro mais dois.*

**Eu:** *Então e qual é o número de movimentos?*

**Aluna 3:** *É catorze. Oito mais seis.*

A determinação da regra foi enunciada pelo grupo da seguinte maneira:

3.<sup>a</sup> regra - temos de fazer sempre um número de rãs vezes o outro número de rãs e depois somar um número de rãs com o outro número de rãs e por fim somar a conta que nos deu em primeiro com a conta que nos deu depois.

Figura 15. Enunciação da regra que permite determinar o número de movimentos, Aluna 2 do Grupo 1.

Os alunos do grupo 1 evidenciaram alguma dificuldade na comunicação matemática escrita, sendo perceptível um registo decorrente da utilização de um «mecanismo» muito algorítmico. Relativamente à explicação da regra, um dos alunos (Aluna 2) mencionou: «Ó professora, nós conseguimos pensar, mas depois escrevermos é mais difícil». No entanto, não é de descuidar o facto de conseguiram «dar o salto» para a generalização, verbalizando a regra que permite determinar o número de movimentos.

Num outro grupo (grupo 2), a enunciação da regra resultou mais facilmente porque estabeleceram enunciados parcelares (primeiro como se obtém o número de arrastamentos e depois como se obtém o número de saltos) a partir dos quais explicaram a regra de formação. Registou-se também a preocupação em atribuir significado aos resultados obtidos, considerando o contexto em causa e exemplificando o porquê do produto do número de rãs. Aliás, tal como Hung (1998) refere, apesar de reconhecermos que existem excepções, tais como os conceitos matemáticos abstractos, símbolos e afirmações matemáticas geralmente têm significados referenciais-conceptuais (concept-referential meanings, no original) do mundo real. Expressões numéricas geralmente referem-se a números: entidades abstractas que, por sua vez, se encontram em alguma relação regular com entidades físicas reais ou acontecimentos enumeráveis. Além disso, segundo Brown (1994), citado em Hung (2000), estes significados referenciais-conceptuais de afirmações matemáticas são o que permite à Matemática ter significado e utilidade no mundo real, verificando-se, deste modo, uma forma de dialéctica ou interacção constante entre o aluno e significados referenciais-conceptuais do problema, semelhante a um processo hermenêutico de compreensão de significados.

Assim, pode analisar-se o seguinte:

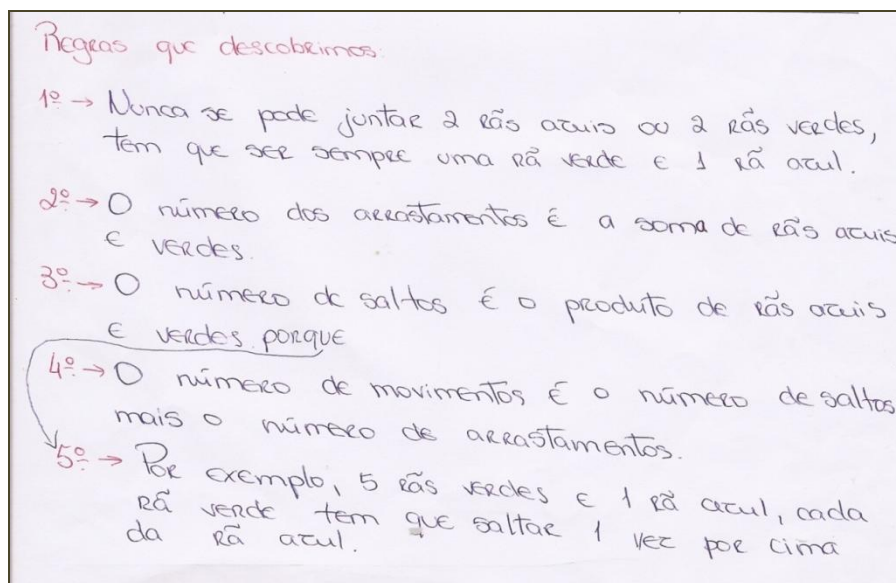


Figura 16. Enunciação de regras e formulação de conjecturas da Aluna 3 do Grupo 2

Mediante a solicitação de uma análise mais atenta das várias colunas da tabela, a fim de verificarem algo de especial com os números, a Aluna 2 indicou:

**Eu:** *Vejam lá se não encontram nada de especial com os números; observem as várias colunas...*

**Aluna 2:** *Ah... [passado algum tempo...] Descobri! Quando temos os dois números pares, dá par, quando temos os dois números ímpares dá ímpar...*

**Aluna 3:** *Não, dá par!*

**Eu:** *Então, dá par ou ímpar? São capazes de explicar? Têm de se entender.*

**Aluna 2:** *Dá ímpar, com um número de rãs azuis ímpar e um número de rãs verdes ímpar, dá ímpar.*

**Eu:** *Mas o que é que é ímpar?*

**Aluna 2:** *O número total de movimentos.*

**Eu:** *Ah! Estás a relacionar o número de rãs de cada cor com o número de movimentos.*

**Aluna 2:** *Pois, por exemplo com uma rã azul e uma rã verde, dá três, um vezes um é um e um mais um é dois e um mais dois dá três; com três rãs azuis e três rãs verdes dá quinze que também é ímpar.*

**Eu:** *Então e têm de ser sempre dois números iguais?*

**Aluna 2:** *Não, por exemplo com três rãs azuis e cinco rãs verdes dá vinte e três.*

**Eu:** *Muito bem, mas então tu [Aluna 3], porque é que dizias que dava par?*

**Aluna 3:** *Ó professora, um número ímpar mais outro número ímpar dá sempre um número ímpar.*

**Eu:** *Ah... E neste caso, a soma dos números ímpares o que dá?*

**Aluna 3:** *Dá o número de arrastamentos. O número de rãs azuis mais o número de rãs verdes dá os arrastamentos e se for dois números ímpares a soma dá outro número ímpar.*

**Eu:** *Já percebi, ambos tinham razão apenas referiam-se a situações distintas. A Aluna 2 relacionava o número de rãs com o número total de movimentos, que resulta do quê?*

**Alunos** [em coro] da soma do número de rãs com o produto do número de rãs.

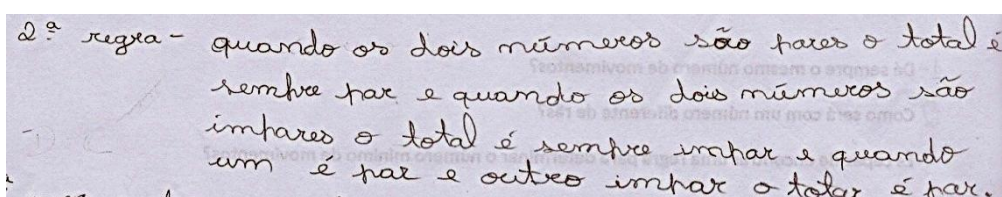
**Eu:** Fantástico, mas olhem lá, a aluna 3 então também estava certa porque relacionava cada número de rãs de uma cor com o seu total, ou seja o número de arrastamentos, rãs azuis mais rãs verdes. Bem, mas vamos lá tentar saber porque é que a Aluna 2 terá chegado ao resultado ímpar.

**Aluna 3:** Porque enquanto a soma de dois números ímpares é par (o número de arrastamentos), o produto de dois números ímpares é ímpar (o número de saltos), depois somando um par com um ímpar (arrastamentos com saltos) dá um ímpar.

**Eu:** Fabuloso, Aluna 3!

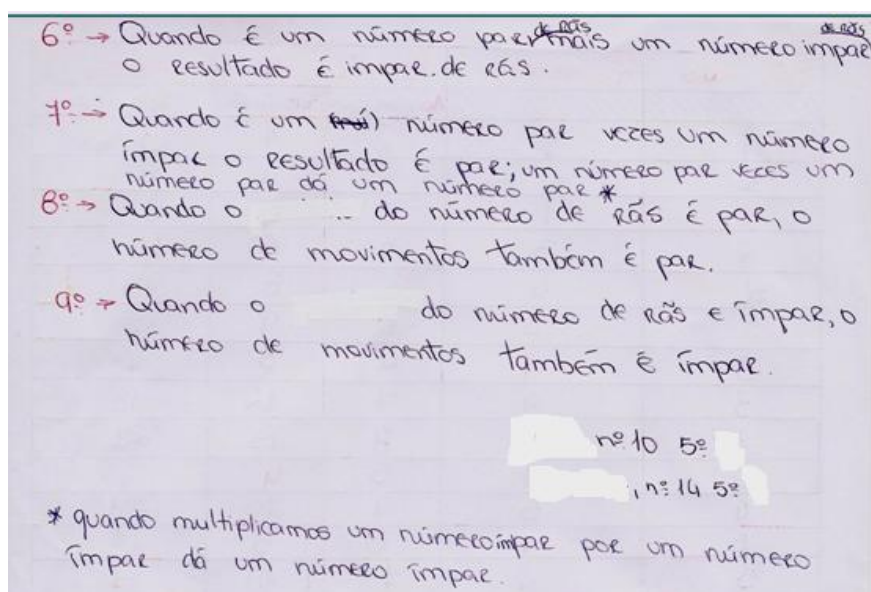
Todo este diálogo permitiu uma abordagem mais aprofundada, em grande grupo, da soma e do produto de dois números ímpares, de um ímpar com um par e de dois números pares. Os alunos identificaram vários exemplos e, em uníssono, respondiam acertadamente aos resultados, estabelecendo um paralelo simultâneo com o contexto da actividade.

Alguns dos registos foram os que se seguem:



2ª regra - quando os dois números são pares o total é sempre par e quando os dois números são ímpares o total é sempre ímpar e quando um é par e outro ímpar o total é par.

Figura 17. Regra que estabelece a relação entre o número de rãs e o número total de movimentos (arrastamentos mais saltos), Aluna 2 do Grupo 1



6º -> Quando é um número par <sup>de rãs</sup> mais um número ímpar <sup>de rãs</sup> o resultado é ímpar de rãs.

7º -> Quando é um ~~par~~ número par vezes um número ímpar o resultado é par; um número par vezes um número par dá um número par \*

8º -> Quando o ... do número de rãs é par, o número de movimentos também é par.

9º -> Quando o ... do número de rãs é ímpar, o número de movimentos também é ímpar.

nº 10 5º

nº 14 5º

\* quando multiplicamos um número ímpar por um número ímpar dá um número ímpar.

Figura 18. Regras que, além da soma de par com ímpar e da relação entre o número de rãs e o número de movimentos, enunciam qual o resultado do produto de um par com um ímpar, de dois pares e de dois ímpares, Aluna 3 do Grupo 2

Verifica-se uma certa desorganização no enunciado das regras, facto que decorreu da minha intervenção no intuito de a aluna desenvolver mais casos resultantes de outras situações além das já identificadas pelos alunos: «Então vê lá..., e se fosse com dois números pares ou dois números ímpares, como seria o produto?».

Posto isto, e aquando da discussão colectiva dos resultados, com a apresentação das descobertas mais relevantes, o Aluno 4, do Grupo 5, afirmou querer fazer um esquema e eu pedi-lhe para ir ao quadro, solicitando, ao mesmo tempo, a colaboração dos seus colegas. Assim, os alunos entenderam representar as rãs azuis pela letra A e as rãs verdes pela letra V. Um dos esquemas copiados para o caderno por uma aluna foi:

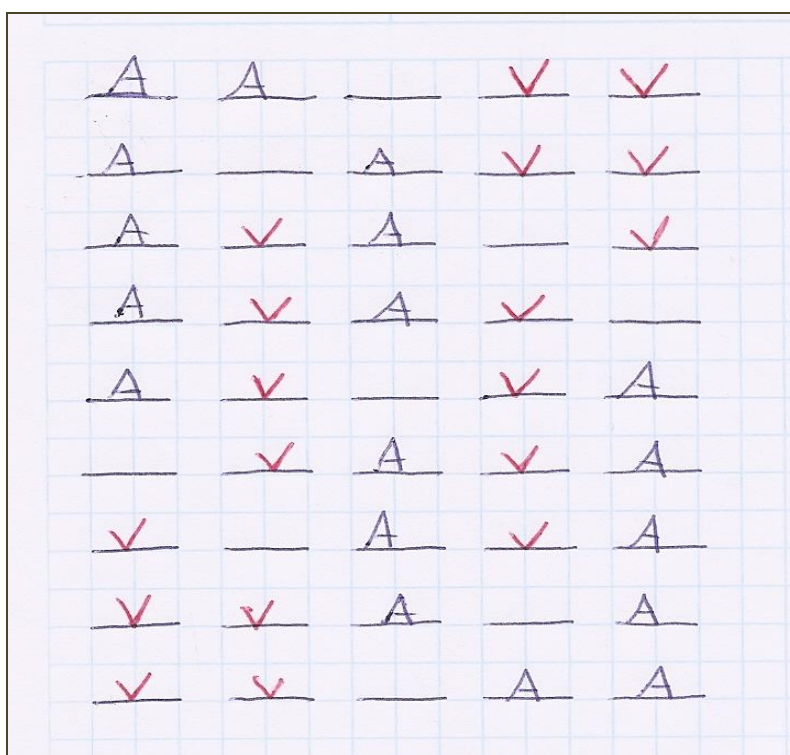


Figura 19. Esquema representativo dos movimentos a efectuar com duas rãs azuis e duas rãs verdes, Aluna 2 do Grupo 1

Finalmente, foi verificada a regra de formação neste exemplo, com a identificação dos arrastamentos e dos saltos, e foram sintetizadas, oralmente, as descobertas efectuadas pela turma.

## **A diversidade e a classificação**

Da análise global do desenrolar da tarefa, pode mencionar-se que nem todos os alunos conseguiram formular conjecturas, limitando-se aos aspectos lúdico e funcional da tarefa – não juntar duas rãs da mesma cor. Desta forma, e segundo a perspectiva de Hung (1998), os alunos apenas atingiram a «cobertura» de nível simbólico (ou equilíbrio, envolvendo uma mera compreensão numérica ou de cálculo, o que, neste caso, significa chegar ao número de movimentos sem entender o porquê da situação que o originou); tendo em conta as referências dos mesmos autores, a «cobertura» ao nível do problema (problema como um todo) e ao nível da situação (relação de problemas com outros problemas e conceitos matemáticos) não foram atingidos. Aliás, é de notar que estes alunos também evidenciaram dificuldades iniciais na movimentação das rãs revelando alguns passos incoerentes e inconsistentes, conduzindo à junção de duas rãs da mesma cor. Contudo, posteriormente, entenderam as conjecturas formuladas pelos seus colegas e até as conseguiram testar, trabalhando, no entanto, mais ao nível simbólico, envolvendo as operações e as relações numéricas. Assim, o trabalho cooperativo entre os alunos foi eficaz. Em todos os grupos, houve alunos que efectuaram generalizações, chegando à forma de determinar o número de movimentos. O processo de resolução da tarefa, por parte destes alunos, desde o início, indicou uma perspectiva clara do seu objectivo e da compreensão da situação, sabendo exactamente o que estavam a fazer e conseguindo direccionar as suas acções no sentido de determinar o número de movimentos e, conseqüentemente, derivar a sua «fórmula», procedendo à particularização de variados casos. Aliás, segundo Dewey (1933), citado em Hung (2000), saber matemática envolve descobrir significados e relações em conceitos matemáticos. Também na opinião de Schoenfeld (1992), os alunos precisam de desenvolver uma predilecção para analisar e compreender, para entender estrutura e relações estruturais, para ver como as coisas se encaixem e a capacidade para raciocinar em longas cadeias de argumentos. Conjecturando ou tentando adivinhar (como é evidente nos processos de resolução de alguns alunos deste estudo), é o que muitos matemáticos vêm como envolver-se em «fazer matemática» (Lakatos, 1991; Schoenfeld, 1985). Para o efeito, e na perspectiva de Hung (2000), é preciso que os alunos:

- procurem amplamente significados matemáticos e relações nos níveis de problema e situacionais;

- conjecturem aproximações possíveis e ideias relacionadas com a tarefa;
- negociem (consigo e com os outros) a fiabilidade da sua conjectura;
- experimentem as suas ideias e resoluções ao longo do problema;
- organizem as descobertas, talvez em tabelas, gráficos e outras estruturas epistémicas ao longo do processo;
- concretizem a sua compreensão através da formulação de hipóteses e
- tirem cobertura conceptual da sua compreensão.

Tudo isto foi possível observar em alguns alunos, os quais fizeram conjecturas porque compreenderam as condições da tarefa e não se limitaram a aplicar cegamente procedimentos mecânicos, embora também tivessem revelado competência na execução dos cálculos numéricos requeridos de forma a dar continuidade às suas conceptualizações. Na verdade, é necessário que os alunos percebam as dimensões conceptuais que envolvem o problema (neste caso a actividade de investigação) e não apliquem apenas heurísticas e procedimentos próprios de tipos de problemas particulares. Além disso, toda a formulação e teste de conjecturas estiveram intimamente relacionadas com a recolha e organização de dados nas tabelas. A análise dos dados nas tabelas permitiu, ainda, que um grupo tivesse encontrado uma regularidade, embora esta tenha falhado dada a disposição dos dados. De facto, embora os dados recolhidos possam conduzir à formulação de conjecturas, determinação de padrões e de regularidades, estes, ao serem testados, podem levantar a necessidade de recolher mais dados ou clarificar a pertinência de uma reorganização dos mesmos ou das explorações feitas.

Nesta actividade verificou-se também, em todos os grupos, a determinação de um padrão não numérico – azul-verde-azul-verde... no processo de distribuição das rãs.

A tentativa de representar fisicamente as rãs e os movimentos mediante um esquema também foi evidente em alguns alunos (Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5).

Houve alunos (Grupo 1 e Grupo 2) que conseguiram estabelecer a relação entre a tarefa e as operações multiplicação e adição de dois números pares, dois números ímpares ou um número par e um número ímpar.

Contudo, o número de casos a estudar não era demasiado elevado, verificando-se, assim, uma certa tendência para explorar poucos casos. Deste modo, e na perspectiva de Brocardo (2001), os alunos seguiram um processo linear. O raciocínio que usaram

evidenciou poucas características de raciocínio de investigação: as conjecturas eram explicitadas por serem consideradas como possíveis conclusões; poucos testes chegaram para as considerarem como verdadeiras para todos os casos. A testagem de conjecturas nem sempre implicou a formulação de novas conjecturas, com a necessidade de analisar qual o tipo de dados de que dispunham, que outros dados deveriam recolher e de que forma eles poderiam ser organizados. Assim, e ainda de acordo com a mesma autora, os alunos, de certa forma, desenvolveram uma actividade linear composta por três fases:

1ª Recolha de um conjunto de dados;

2ª Organização dos dados;

3ª Análise dos dados de modo a tirar conclusões.

Poucos alunos tomaram a iniciativa de procurar argumentos que pudessem validar as conjecturas.

## **Súmula**

A actividade de investigação *Os saltos das rãs* despertou grande entusiasmo e empenho nos alunos (talvez pelo facto de não ser muito frequente trabalhar com o computador na aula de Matemática), tendo gerado situações de aprendizagem interessantes. Contudo, originou um maior consumo de tempo, quer pelo prazer em manusear o computador, quer pelas preocupações com os registos escritos que iam elaborando a partir das várias experiências. Suscitou igualmente alguns momentos de discussão onde os alunos puderam esclarecer as suas ideias e os seus argumentos, podendo desenvolver a sua capacidade de comunicação.

A formulação e o teste de conjecturas foram os processos matemáticos que mais se destacaram ao longo da actividade, embora a professora tivesse tido um papel influente nesta situação. Estes processos resultaram essencialmente da recolha, organização e análise dos dados em tabelas. Esta forma diversificada de exprimirem os seus raciocínios não era habitual nos alunos. A generalização e a particularização constituíram processos com alguma expressão no decorrer da actividade. Contudo, a argumentação nem sempre foi conseguida; muito poucos alunos se envolveram neste processo e, para o efeito, foi bastante importante a intervenção da professora.

Ainda assim, os alunos revelaram uma nítida predisposição para pensar matematicamente, procurando compreender o propósito da tarefa e assumindo o espírito de cooperação entre eles.

Também foi possível a identificação ou tentativa de descoberta de regularidades e padrões e a mobilização de conhecimentos matemáticos como a paridade da soma e do produto de dois números, além da utilização da linguagem matemática. A diversidade situa-se ao nível da representação, em que houve o registo das situações mediante a utilização de esquemas ou tabelas e a verbalização [embora mais difícil] segundo a opinião dos alunos. É de registar também que nem todos os alunos evidenciaram os vários processos matemáticos de raciocínio ou pensamento matemático.

#### **4.1.2. Adriana**

Adaptada do livro «Petiscos Matemáticos», de Jon Millington (2003), e integrada no domínio temático *Números e Operações*, a actividade *Adriana* (anexo 3) veio a desenvolver-se em 3 aulas. À semelhança do que se passou na actividade anterior, entreguei e analisei, em grande grupo, o enunciado da mesma. Intervim pontualmente a fim de clarificar aspectos relacionados com a compreensão do enunciado ou situações decorrentes das solicitações de alguns alunos.

Com a resolução desta actividade, pretendia, além de verificar e analisar a diversidade dos processos de raciocínio e de resolução dos alunos, abordar ou explorar alguns tópicos matemáticos, a saber: relações numéricas, operações e seus termos, representações, múltiplos, regularidades.

#### **As resoluções dos alunos**

Feita a apresentação da actividade, que incide na descoberta de regras e regularidades face à escrita repetida do nome Adriana, e esclarecidas as dúvidas, os alunos passaram à acção. Como tal, perante a questão 1, «Qual é a 39.<sup>a</sup> letra?», surgiram respostas como a seguinte:



Figura 20. Estratégia mais frequente na determinação da 39ª letra da escrita repetida do nome Adriana, Aluno 4 do Grupo 1

Esta estratégia foi utilizada pela maior parte dos alunos. Percebe-se a necessidade de concretizarem a situação, atribuindo a cada letra sucessiva um número consecutivo. Mas uma outra resposta surgida torna visível a capacidade de proceder por agrupamentos de letras (Adriana tem 7 letras), em que a Aluna 1 do Grupo 3 usa o resto da divisão por 7 para a descoberta da letra pretendida:

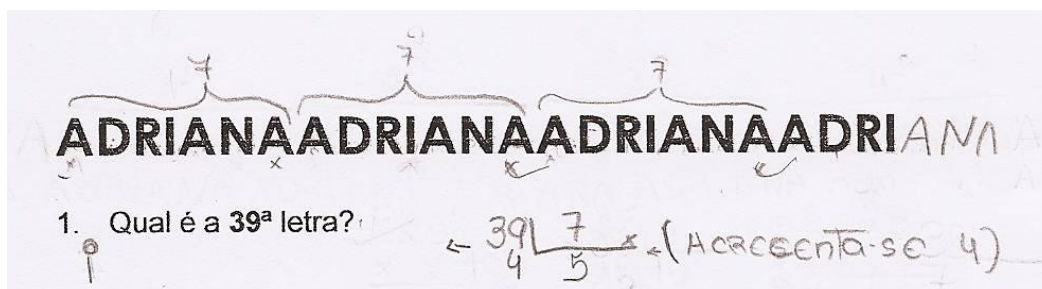


Figura 21. Estratégia para determinação da 39ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de letras

Na questão 2, relativa à determinação da 105ª letra, as estratégias seguidas também tiveram por base o agrupamento de letras.

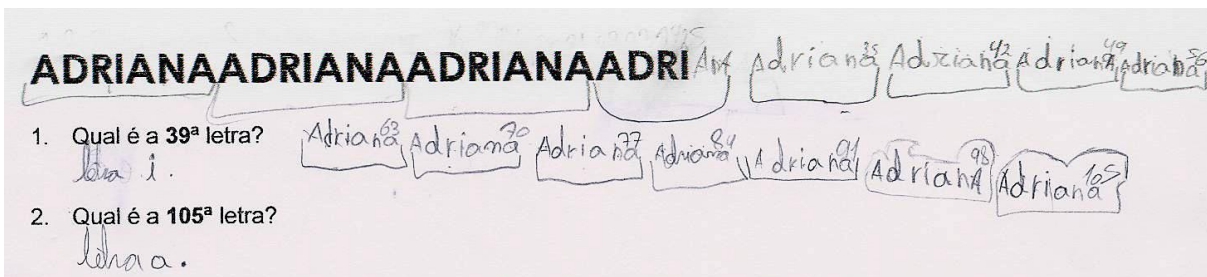


Figura 22. Estratégia para determinação da 105ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de letras, Aluno 3 do Grupo 4

Nesta situação, e dependendo-se que o Aluno 4 do Grupo 3 entendeu que a palavra Adriana continha 7 letras, constata-se o agrupamento das respectivas letras com o registo sistemático dos resultados numéricos referentes à letra final de cada grupo, os quais foram identificados pelos alunos como «a tabuada do 7». Deste modo, embora o aluno tenha escrito várias vezes a palavra Adriana, não procedeu à contagem letra a letra, como em alguns casos anteriores; para a contagem «socorreu-se» dos múltiplos de 7.

Noutros casos, houve agrupamentos com várias cadeias elementares. Um dos alunos (Aluna 2 do Grupo 1) aproveitou as letras já escritas, tendo o cuidado de verificar que uma cadeia de quatro palavras Adriana correspondia a 28 letras. Então, para chegar às 105 letras, adicionou 3 parcelas de 28 porque se apercebeu que se adicionasse uma quarta parcela de 28 ultrapassaria o número pretendido. De seguida, recorreu à subtração, de forma a obter o número de letras que lhe faltava para as 105. Finalmente, contou as 21 letras, concluindo que a 21ª letra seria a mesma do que a 105ª.

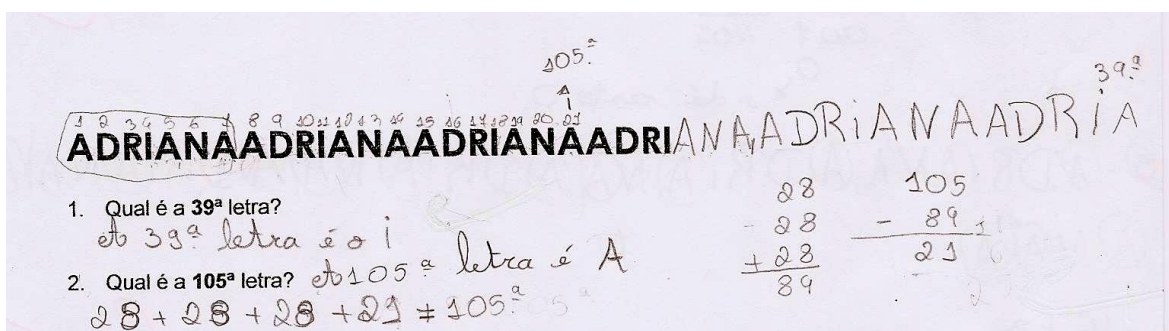


Figura 23. Estratégia para determinação da 105ª letra da escrita repetida do nome Adriana com o agrupamento de várias cadeias elementares

Relativamente à questão 3, a qual consistia na determinação do número de vezes que o nome Adriana aparecia completo, com a utilização de 58 letras, alguns alunos recorreram ao algoritmo da divisão por 7, visto reconhecerem que a palavra «Adriana» requer 7 letras.

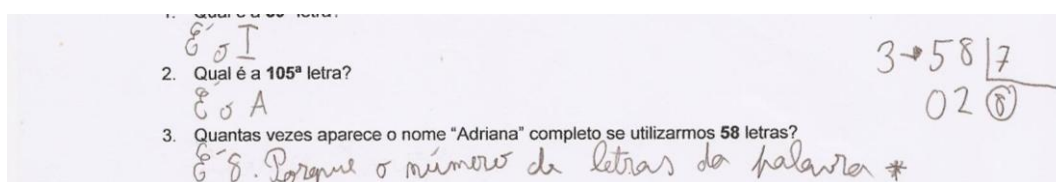


Figura 24. Estratégia para determinação do número de vezes que o nome Adriana aparece completo, com a utilização de 58 letras, Aluno 1 do Grupo 2

Neste caso, o Aluno 2 associa o resto da divisão ao número de letras que sobra após a escrita repetida da palavra Adriana oito vezes.

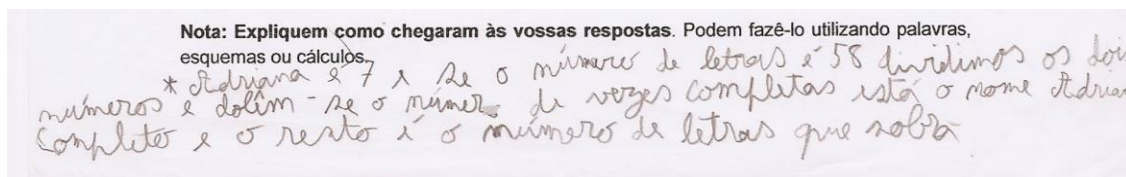


Figura 25. Justificação da resposta à questão 3

Há uma clara compreensão do contexto real da actividade, a qual poderá ser evidenciada no enunciado anterior, enunciado este que, por sua vez, também denota alguma capacidade de comunicação matemática.

Quando procuram uma regra que permita saber quantas letras são necessárias para que a sequência de letras termine com o nome completo, as respostas dos alunos, mais uma vez, revelam a sua consciência de estarem perante os múltiplos de 7, para alguns identificados com a tabuada do 7:

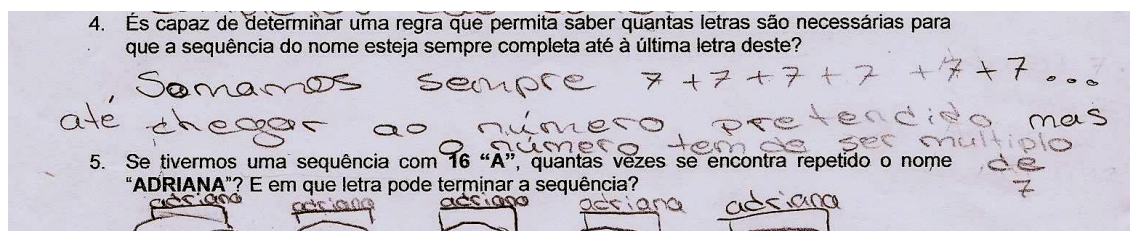


Figura 26. Formulação de uma regra que permite saber quantas letras são necessárias para que a sequência de letras termine com o nome Adriana completo, Aluna 4 do Grupo 3

Esta situação pode também ser evidenciada a partir do seguinte diálogo:

**Eu:** Então já responderam à questão 4? Já sabem qual é a regra?

**Aluna 4:** Sim, professora.

**Eu:** Então digam lá.

**Aluna 4:** É que para o nome Adriana estar completo tem de ter sempre 7 letras, então pode ter 7, mais 7, mais 7, sempre mais 7 do que o número anterior.

**Eu:** Então poderá ter 6, 13, 20, 27? É isso? Vão de 7 em 7, não é?

**Aluno 3:** É, mas não começam em 7 e o nome Adriana tem 7 letras. Tem que ser números da tabuada do 7! Para termos sempre o nome completo temos de ter resultados da tabuada do 7.

**Eu:** Ora muito bem, mas o que é esses números têm de especial? Que nome lhes podemos dar? 7, 14, 21, 28, até não puseram, mas podiam também pôr o «0», numa situação em que não aparecesse o nome Adriana escrito.

**Aluna 4:** Já sei, são os múltiplos de 7.

**Eu:** Excelente, então podem completar a vossa regra.

A resposta seguinte mostra a capacidade de generalização que permite à Aluna 2 do Grupo 1 exibir um exemplo de um número de letras possível nas condições pretendidas:

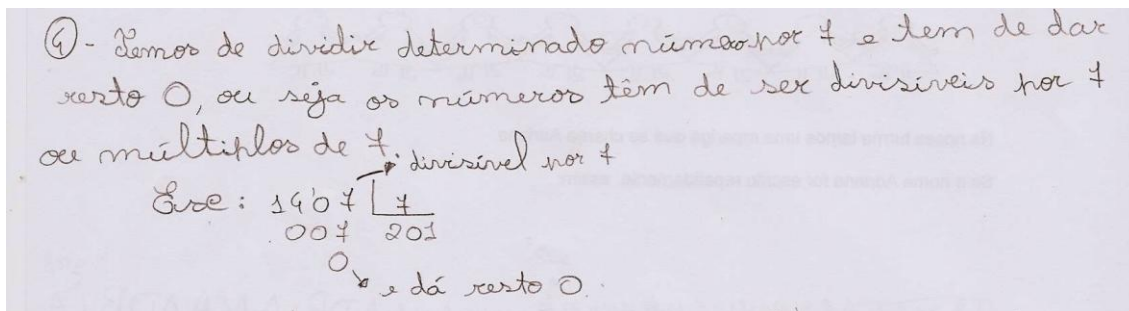


Figura 27. Generalização da regra que permite saber quantas letras são necessárias para que a sequência de letras termine com o nome Adriana completo

Na busca de uma sequência que contivesse 16 «A», vários alunos reconheceram que a palavra «Adriana» requer 3 «A» e este facto conduziu-os à divisão por 3.

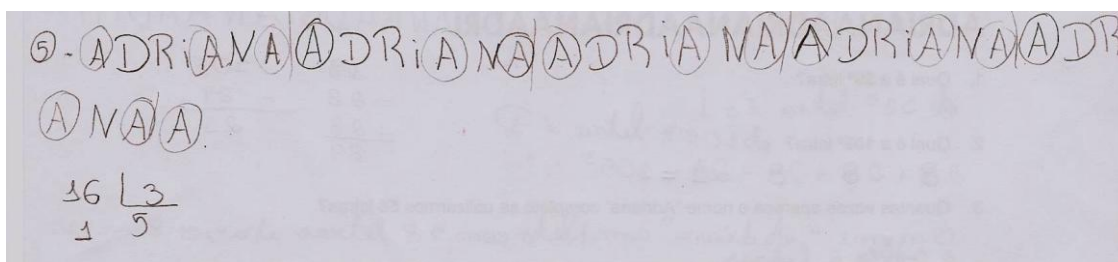


Figura 28. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 16 «A», Aluna 2 do Grupo 1

No registo que se segue, a Aluna 3 do Grupo 2 entendeu também que a sequência podia não terminar obrigatoriamente na letra A.

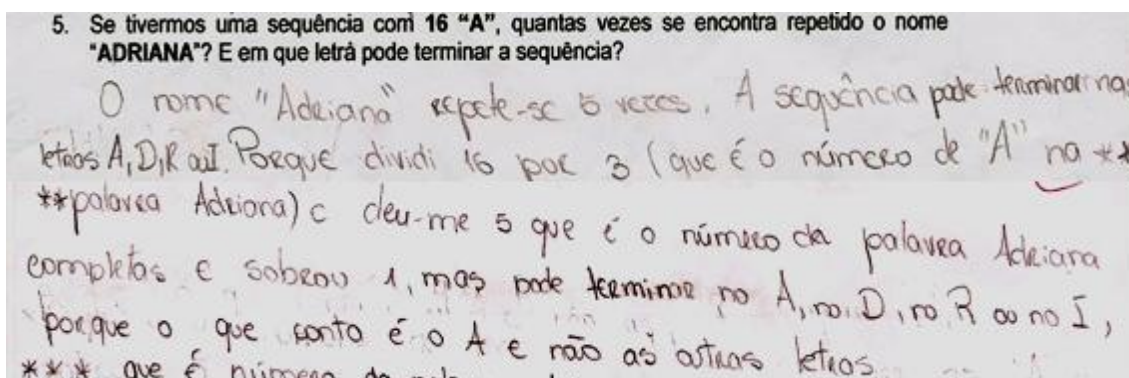


Figura 29. Enunciação do entendimento de que, numa sequência com 16 «A», a última letra dessa sequência não tem de ser necessariamente um A.

Na questão 6, da procura de uma sequência que contivesse 35 «A», encontrando-se o número de vezes em que aparece a palavra Adriana completa e a letra em que pode terminar a sequência, houve um aluno que recorreu a um esquema e ao registo do número de «A», tomando os múltiplos de 3 e aproveitando, para o efeito, a sequência já existente do nome de Adriana:

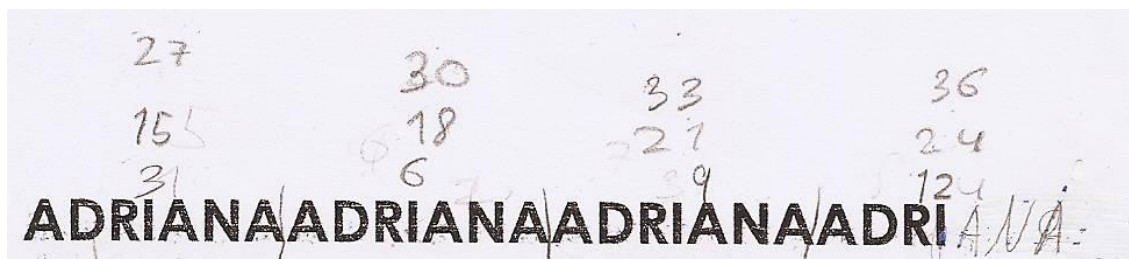


Figura 30. Esquema determinativo do número de vezes em que aparece a palavra Adriana numa sequência de 35 «A» com o recurso aos múltiplos de 3, Aluno 3 do Grupo 5

Na tentativa de o Aluno 3 explicar o que tinha feito, desencadeou-se o seguinte diálogo:

**Eu:** Então, Aluno 3, diz-me lá o que é que estás a fazer.

**Aluno 3:** Tenho aqui o nome Adriana escrito e leva 3 «A», pus um 3, depois volta a ter o nome Adriana escrito vão mais 3 «A» e eu já pus 6 (3+3), depois outra vez mais três e pus 9, depois 12, depois aproveitei o que já estava escrito e pus 15 por cima (12+3), e é sempre de 3 em 3 para saber o número de «A» nas palavras Adriana.

**Eu:** Estou a ver que consegues saber o número de «A», tendo a palavra Adriana escrita repetidamente, mas e para saber por exemplo, quantas vezes aparece a palavra Adriana escrita se tiveres os 35 «A»?

**Aluno 3:** Ah... para isso vou contar cada número que tenho lá.

**Eu:** Como é...?

**Aluno 3:** Então, quer saber quantas vezes aparece a palavra Adriana havendo 35 «A», é fácil, [começou a contar cada um dos números que tinha registado 3,6,9,12,15...até ao 36] é 12.

**Eu:** Ora mas vê lá, quando registas o número 36 o que é que significa?

**Aluno 3:** Que tenho 36 «A».

**Eu:** Então e ter 36 «A», quer dizer o quê?

**Aluno 3:** Que a última palavra Adriana está completa, o 36 é o último «A».

**Eu:** Sim, senhor mas quantos «A» é que eu disse?

**Aluno 3:** 35.

**Eu:** Então será que com 35 «A» a última palavra Adriana estava completa?

**Aluno 3:** Ah, pois não...

**Eu:** Então quantas vezes aparece a palavra Adriana completa?

**Aluno 3:** Assim são só 11.

**Eu:** Muito bem, mas... já agora em que letra termina a última palavra Adriana?

**Aluno 3:** Em A, são 35 «A».

**Aluno 1:** Não, também pode terminar em N, não deixa de ter 35 «A», já não pode é terminar no último «A» senão passava a ter 36 «A».

**Aluno 3:** Pois é.

**Eu:** Ora que ricos alunos! Gostei! Vá, continuem!

Outra aluna (Aluna 3 do Grupo 2) apresentou uma resolução com o recurso ao algoritmo da divisão por 3, compreendendo que as duas letras que sobram na divisão de 35 por 3 são os 2 «A» de um outro grupo de 3 «A» que poderia estar completo; são exactamente o 1º e o 2º «A» de Adriana; a sequência poderia acabar em A (o 2º «A» de Adriana) ou N.

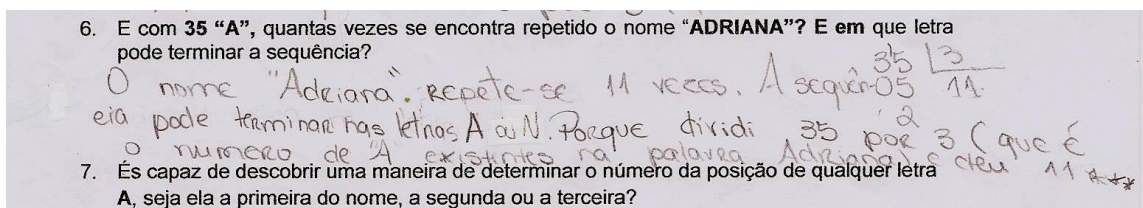


Figura 31. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 35 «A» e a letra em que pode terminar a sequência (parte inicial)

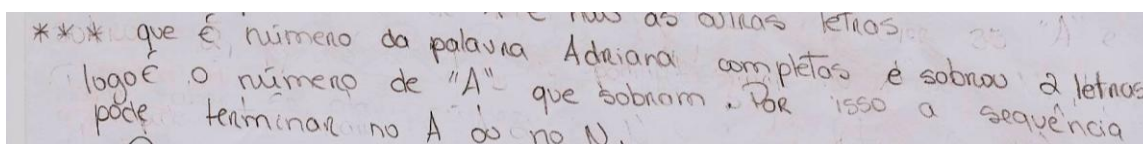


Figura 32. Estratégia para encontrar o número de vezes que se encontra repetido o nome Adriana numa sequência com 35 «A» e a letra em que pode terminar a sequência (parte final)

Quanto à questão 7, cujo grau de generalização é claramente superior, já se observa uma maior ênfase na organização de dados, a procura deliberada de regularidades e a formulação de conjecturas.

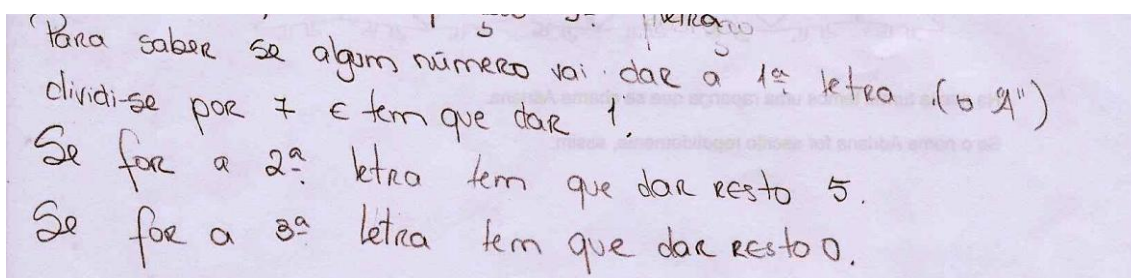


Figura 33. Formulação de conjecturas referentes à determinação do número da posição de qualquer letra «A» na escrita repetida da palavra Adriana, Aluna 3 do Grupo 2

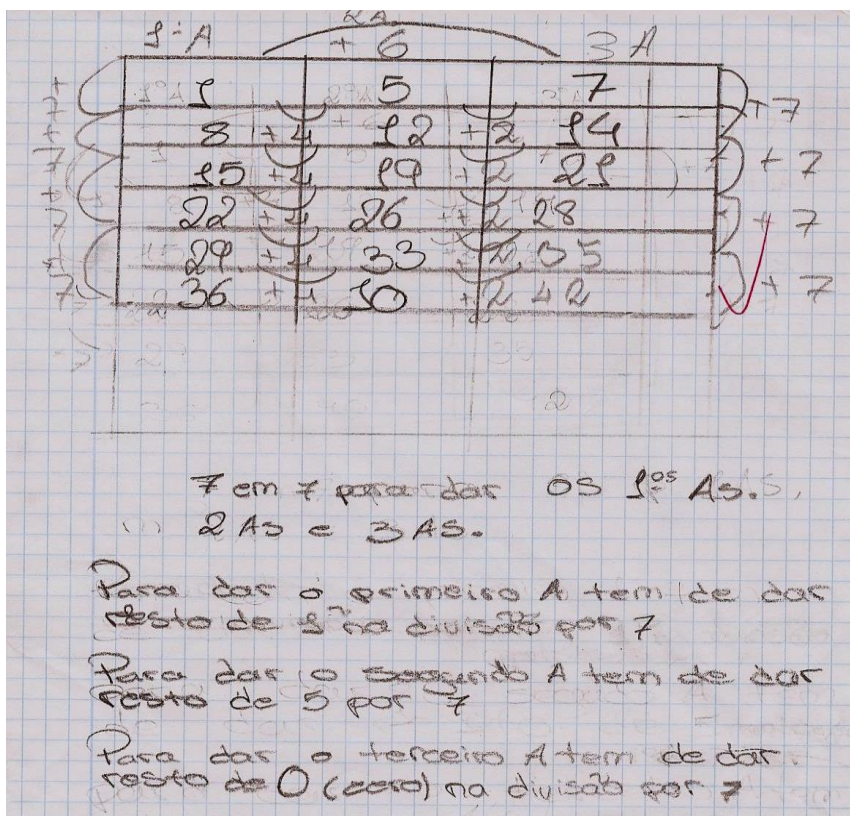


Figura 34. Organização de dados com a procura de regularidades e a formulação de conjecturas da Aluna 4 do Grupo 3

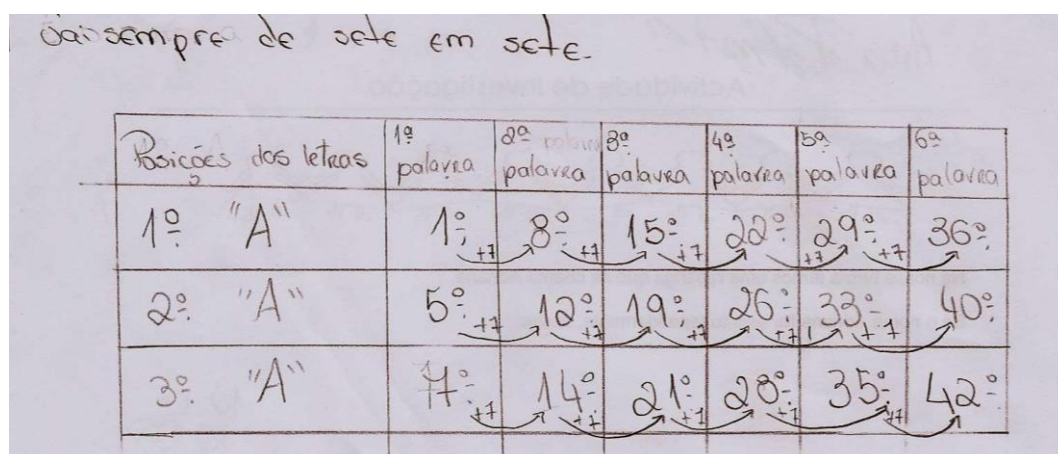


Figura 35. Organização de dados com a procura de regularidades e representação em tabela da Aluna 4 do Grupo 2

Numa outra resolução curiosa, a Aluna 3 do Grupo 1 diz que, para o terceiro A, «vai mesmo de 7 em 7», ou seja, reconhece que, neste caso, estão efectivamente os múltiplos de 7.

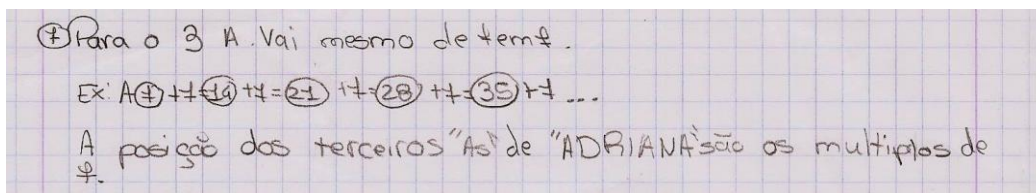


Figura 36. Reconhecimento dos múltiplos de 7

Na resolução da questão 8, acerca da presença de dois «A» consecutivos na sequência, encontraram-se diversos tipos de respostas. Ao trabalhar neste tipo de tarefas, os alunos recorrem realmente a processos diversificados, nomeadamente a construção de tabelas, a contagem exaustiva, a aplicação de relações numéricas e, em menor número, a explicação por palavras. A resposta que se segue denota a consciência de que o aparecimento de 2 «A» consecutivos implica a repetição da palavra «Adriana», pelo que o primeiro A da sequência não pode fazer parte dos pares de «A» consecutivos.

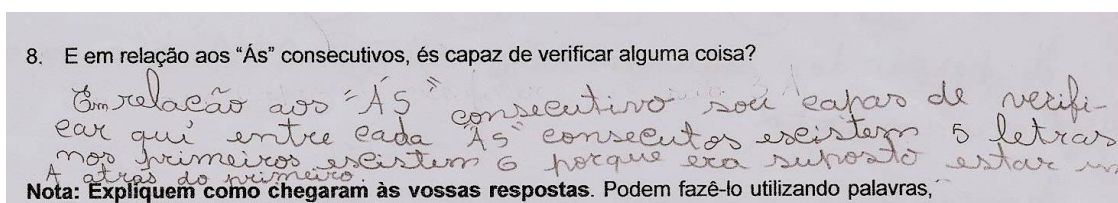


Figura 37. Explicação, por palavras, de uma conclusão referente ao número de «A» consecutivos na escrita repetida do nome Adriana, Aluna 2 do Grupo 1

No exemplo seguinte, observa-se o registo e a organização de dados, a procura de regularidades e a formulação de conjecturas.

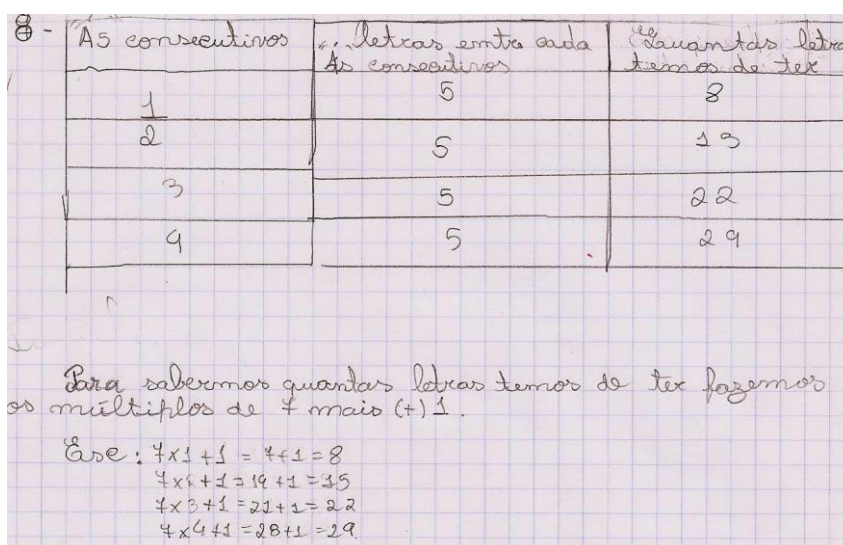


Figura 38. Organização de dados com a procura de regularidades e a formulação de conjecturas referentes ao número de «A» consecutivos, Aluna 2 do Grupo 1

## **A diversidade e a classificação**

Enquanto alguns alunos sentiram necessidade de concretizar os dados, até de uma forma exaustiva, apoiando-se em contagens e na descoberta de padrões, como meios para a obtenção de conclusões mais genéricas, outros apresentaram raciocínios que envolveram o conhecimento das operações aritméticas e a sua relação com a exploração das sequências tratadas, conseguindo, deste modo, extrair do contexto relações gerais. Os primeiros alunos recorreram a representações mais esquemáticas; os outros conseguiram ser mais «descritivos», mas igualmente eficazes na sua forma de raciocínio matemático, demonstrando a capacidade de traduzir verbalmente (utilizando palavras) as suas conclusões e a sua compreensão das questões.

Alguns alunos conseguiram fazer a passagem do particular para o geral, a partir da construção de tabelas, em que a disposição dos dados lhes permitiu identificar relações entre as entradas, quer por linhas quer por colunas, identificando regularidades, formulando, testando e validando conjecturas, se bem que, como já foi mencionado na análise da actividade anterior, a formulação de conjecturas tenha sido o processo matemático mais frequente.

## **Súmula**

Da resolução da tarefa, podemos referir que os alunos reagiram com bastante gosto e persistência. Constatou-se que ganharam confiança e «espírito de investigador», resultados que outros estudos têm igualmente encontrado (Abrantes et al, 1999). O desempenho dos alunos também pode estar condicionado pelo grau de estruturação da tarefa, verificando-se, assim, uma maior ou menor solicitação da presença do professor em função dessa circunstância. Contudo, e considerando o próprio carácter aberto das actividades de investigação, a minha orientação foi apenas no sentido de ajudar os alunos a entenderem o pretendido, não influenciando directamente o processo. Com o decorrer do tempo, verificou-se que os alunos adquiriram maior autonomia, até porque confrontaram as suas ideias com as dos seus colegas de grupo. Assim, à medida que o estudo progride, a maioria dos alunos assume, cada vez mais, uma atitude crítica e investigativa, tal como sugere Braumann (2002).

Quanto aos processos matemáticos utilizados pelos alunos, é de mencionar o registo e a organização de dados, a procura de regularidades, a formulação, o teste e a validação de conjecturas, com maior destaque para a formulação de conjecturas.

Relativamente aos processos de raciocínio evidenciados, destacam-se algumas características – a necessidade de os alunos concretizarem os dados (por vezes de uma forma exaustiva), antes de conseguirem alguma abstracção. Embora cheguem a encontrar regularidades, optam por representações essencialmente esquemáticas ou descritivas, embora as duas formas se complementem, em vários casos. Esta evidência está em consonância com as ideias de Mason (1999), visto que se verifica a necessidade de particularização como forma de os alunos ganharem confiança nos seus raciocínios e representações, no momento anterior ao «salto» para a generalização. Muitas vezes, este salto não acontece abruptamente, necessitando de um processo «em espiral», tal como é referido por este autor ao caracterizar o próprio pensamento matemático.

A progressiva evolução para a generalização está patente em muitas das respostas obtidas, notando-se, contudo, que muitos alunos se apoiam em contagens e na descoberta de padrões, como meios para a obtenção de conclusões mais genéricas. A presença de raciocínios que envolvem o conhecimento das operações aritméticas, e a sua relação com a exploração das sequências tratadas, foi igualmente visível em muitas das respostas, levando a concluir que a capacidade de extrair do contexto relações gerais está presente no raciocínio dos alunos. Em particular, foi notória a utilização do significado do resto da divisão inteira no contexto da actividade proposta.

A passagem do particular para o geral acentua-se com a construção de representações mais poderosas, nomeadamente de tabelas, em que a disposição dos dados permite aos alunos identificar relações entre as entradas, quer por linhas quer por colunas.

Em todo o caso, muitos dos alunos mais «descritivos» conseguem ser igualmente eficazes na sua forma de raciocínio matemático, demonstrando a capacidade de traduzir verbalmente (utilizando palavras) as suas conclusões e a sua compreensão das questões resolvidas: «fazemos os múltiplos de 7 mais 1», «vai mesmo de 7 em 7», «pode terminar no A, no D, no R ou no I porque o que conta é o A e não as outras letras».

Raciocinar matematicamente passa, inquestionavelmente, por lidar com o particular e com o geral, mas esta interacção, que alguns autores descrevem como um pensamento em espiral, pode assumir múltiplas variantes – a não linearidade, referida

por Brocardo (2001) e as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999). Dos resultados obtidos, infere-se que a diversidade dos raciocínios matemáticos está associada à forma como se processa a referida interacção, assim como ao modo de lidar com as representações que permitem passar de objectos para *objectos matemáticos* (Mason 1999).

#### **4.1.3. Torres de cubos**

A actividade *Torres de cubos* (anexo 8), adaptada de «La Magie du Carré», de René Descombes (2004), foi uma das actividades finais trabalhadas neste estudo. Talvez devido ao facto de os alunos já possuírem alguma experiência neste campo, e também porque a mesma actividade visava, entre outros objectivos, a determinação de uma regra já encontrada numa outra proposta – a *sequência de Fibonacci*, desenvolveu-se em apenas duas aulas para alguns alunos e três aulas para outros.

Tal como as actividades anteriores, estava integrada no domínio temático *Números e Operações*. Com a resolução da mesma, eram nossos objectivos, além verificar e analisar a diversidade dos processos de raciocínio e de resolução dos alunos, abordar ou explorar alguns tópicos matemáticos, a saber: relações numéricas, simetria, representações, regularidades, padrões.

#### **As resoluções dos alunos**

A actividade consistia em encontrar uma regra ou um padrão para determinar o número de torres possíveis de construir, com qualquer altura (cujas unidades eram a altura de um cubo), a partir do empilhamento de cubos vermelhos e amarelos atendendo à única condição de que nunca poderiam estar dois cubos amarelos juntos. Inicialmente, pedi aos alunos para determinarem o número de torres com um de altura, dois de altura, três de altura, quatro de altura, cinco de altura e vinte de altura. Como sempre, distribuí pelos grupos os enunciados. Além disso, como também seria de esperar nesta actividade, entreguei vários cubos de encaixe, vermelhos e amarelos. Após a leitura, em

grande grupo, do enunciado e o esclarecimento das dúvidas emergentes, os alunos deram início à actividade. De realçar, no entanto, que fiz notar a necessidade de os alunos registarem todas as descobertas e as estratégias de resolução, a fim de poderem elaborar o seu relatório, relembrando, ainda, os itens que o constituíam.

Face talvez ao facto do material utilizado ser manipulável, verificou-se uma certa tendência inicial da maioria dos alunos para o aspecto lúdico, sem darem grande importância ao teor da actividade. Contudo, esta situação depressa foi ultrapassada, não diminuindo, por isso, o grau de entusiasmo dos alunos. Assim, ao interpretarem o enunciado, começaram por construir as primeiras torres procedendo ao seu registo no papel, chegando, sem dificuldades, às seguintes conclusões:

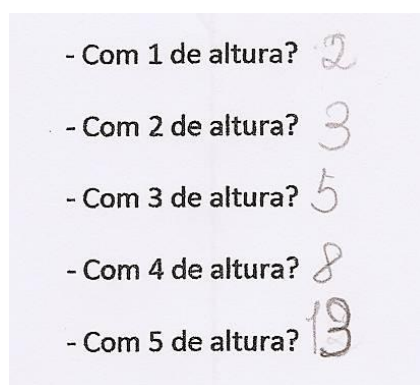


Figura 39. Determinação do número de torres consoante a sua altura, Aluno 4 do Grupo 4

Para o efeito, o trabalho colaborativo revelou-se bastante eficaz, tendo todos os alunos dado o seu contributo de uma forma empenhada e interessada, tal como comprovam algumas afirmações dos alunos: «Nesta actividade não houve discussões, nem desentendimentos, adorei trabalhar com eles, desta vez mais do que das outras»; «Eu achei que a actividade foi interessante porque desenvolveu em grupo, e de um modo geral toda a gente colaborou». Aliás, quanto a este ponto, Segurado (1997) refere que, entre outras características, as actividades de exploração e de investigação favorecem a valorização e reconhecimento das interacções entre pares. Também Amaral (2003), num estudo realizado com alunos do 1º Ciclo, menciona que as actividades investigativas proporcionam a valorização do trabalho cooperativo.

O manuseamento dos cubos assumiu um papel importante na determinação do número de torres, tal como o afirmam alguns alunos na elaboração do seu relatório - «Para elaborarmos este trabalho utilizámos os seguintes materiais: o lápis, a borracha, a

régua para fazermos tabelas, gráficos, esquemas (...), utilizamos também uma folha de rascunho para escrevermos as nossas conjecturas e principalmente os cubinhos amarelos e vermelhos». Contudo, embora tivesse permitido a concretização da situação, rapidamente os alunos «os abandonaram», partindo para algumas formas de os representar, nomeadamente: recorrendo às letras A e V, os cubos amarelos e os cubos vermelhos, respectivamente; desenhando e pintando quadrados com as cores em causa; verbalizando, com a utilização das palavras vermelho e amarelo, tal como se pode verificar a seguir.

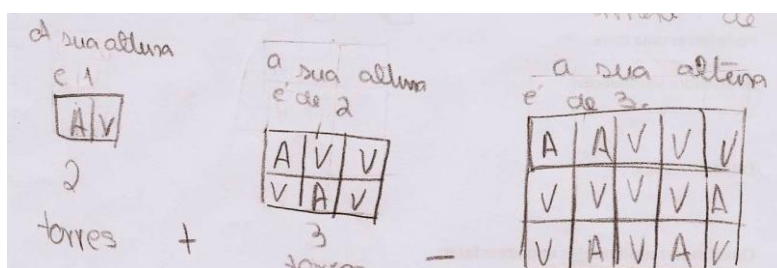


Figura 40. Representação das torres utilizando as letras A e V, Aluna 2 do Grupo 4

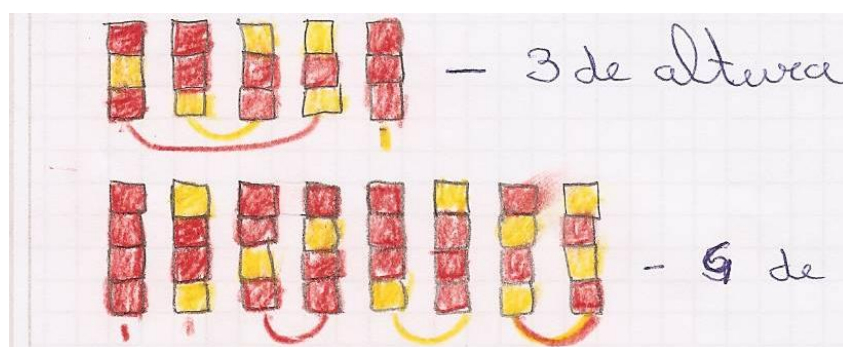


Figura 41. Representação das torres utilizando o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1

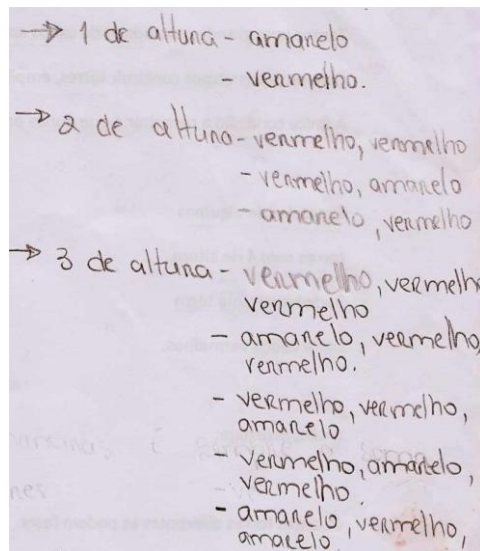


Figura 42. Representação das torres utilizando as palavras «vermelho» e «amarelo», Aluna 3 do Grupo 2

A partir do manuseamento dos cubos, alguns alunos começaram por fazer uma tabela mas facilmente reconheceram a utilidade da representação esquemática para a conseguirem completar, tal como é evidenciado pelas seguintes afirmações:

«Começámos por fazer uma tabela, mas depois não a acabámos porque achámos que fazendo em esquema era mais fácil descobrir as maneiras que faltavam, também escrevemos passo a passo o nosso raciocínio, porque assim íamos descobrindo mais conjecturas»; «Utilizei um esquema e torres porque me ajuda a conseguir raciocinar e a obter os meus resultados».

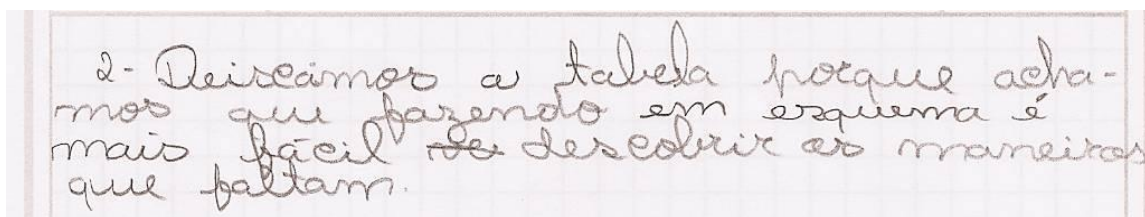
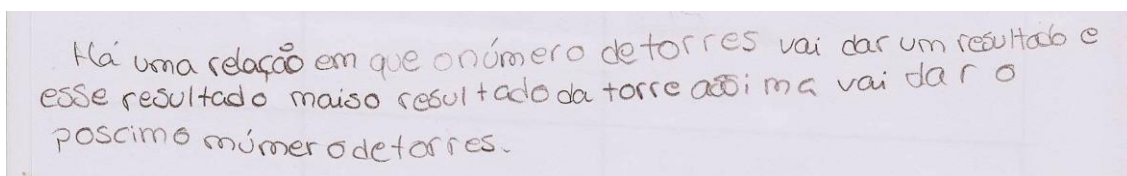


Figura 43. Justificação de estratégia da Aluna 2 do Grupo 1

De qualquer forma, a utilização da tabela não ficou de todo abandonada, até porque alertei os alunos para o facto de terem de apresentar uma regra. Assim, tendo organizado os dados em tabela e procedido à sua análise, a partir dos primeiros dados, alguns alunos reconheceram rapidamente que esta actividade era idêntica à das escadas (uma outra actividade realizada anteriormente), dizendo: «Ah, esta é a das escadas».

Como tal, verificou-se o que Hung (1998) designa por «cobertura» a nível de situação, o que implica conseguir estabelecer a relação de problemas com outros problemas ou conceitos matemáticos; esta situação denota, assim, segundo a perspectiva do mesmo autor, que os alunos tiveram de atingir uma «cobertura» de nível simbólico, com a compreensão numérica e de cálculo, e uma compreensão de nível de problema, entendendo o problema, como um todo.

Posto isto, a regra foi descoberta imediatamente e enunciada da seguinte forma:

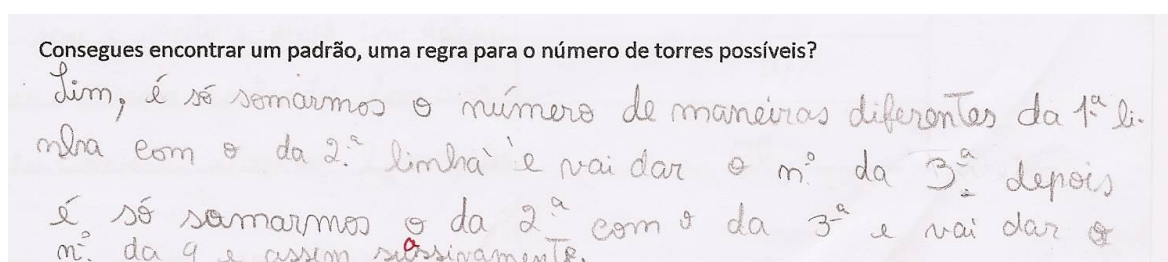


Há uma relação em que o número de torres vai dar um resultado e esse resultado mais o resultado da torre acima vai dar o próximo número de torres.

Figura 44. Enunciação da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 2 do Grupo 4

De notar que este enunciado é o de uma aluna com nível 2 em Matemática que, no entanto, neste tipo de tarefas evidenciou maiores capacidades e interesse, tendo conseguido determinar o pretendido. Na verdade, destaca-se o que Oliveira, Segurado, Ponte & Cunha (1999) defendem quando referem que, entre outros aspectos, as actividades de investigação fornecem pontos de entrada múltiplos para alunos com diferentes níveis de competência.

Outras formas de registo foram:



Consegues encontrar um padrão, uma regra para o número de torres possíveis?  
Sim, é só somarmos o número de maneiras diferentes da 1ª linha com a 2ª linha e vai dar o nº da 3ª depois é só somarmos o da 2ª com a 3ª e vai dar o nº da 4 e assim sucessivamente.

Figura 45. Enunciação 2 da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 1 do Grupo

3

Este enunciado denota alguma capacidade de generalização embora com o recurso a alguns exemplos, registando-se, deste modo, a transição entre o exemplo genérico e a generalização que, segundo Mason & Pimm (1984), assume a função de uma antecâmara da generalização; a aluna acaba por ver o geral no particular.

. conjecturas

1- Descobri novamente a mesma regra que a das escadas que é a sequência de Fibonacci: somando o número de maneiras do primeiro com o do segundo vai dar o número de maneiras do terceiro e somando o número de maneiras do segundo com o do terceiro vai dar o número de maneiras do quarto... e daí em diante a regra vai ser sempre a mesma. ( $2+3=5$ ,  $3+5=8$ ,  $5+8=13$ ...)

Figura 46. Enunciação 3 da regra que permite determinar o número de torres, Aluna 2 do Grupo 1

A aluna enunciou a regra, recorrendo também à exemplificação dos casos, não deixando de indicar a relação que estabeleceu com uma actividade anterior, a das escadas, e a identificação da mesma com a sequência de Fibonacci.

→ Para sabermos o número temos que ter sempre os dois números anteriores pois o número que queremos saber é sempre a soma dos dois números anteriores.

Figura 47. Enunciação 4 da regra que permite determinar o número de torres, Aluno 2 do Grupo 2

Neste último enunciado já se verifica uma notória capacidade de generalização. Descoberta a regra, o preenchimento da tabela revelou-se bastante fácil, tendo alguns alunos procedido ao seu preenchimento exaustivamente, tal como o exemplo que se segue.

A disposição dos dados patenteia uma organização sistemática dos mesmos, os quais não aparecem ao acaso; como tal, em cada situação, a Aluna 3 começa por indicar a torre construída com todos os cubos vermelhos, seguindo-se a inclusão de um amarelo e restantes vermelhos, esgotando todas as hipóteses e tendo o cuidado de fazer corresponder a cada torre a sua simétrica, imediatamente a seguir; depois, vai

aumentando progressivamente o número de cubos amarelos, obedecendo ao mesmo procedimento.

Além disso, a aluna revela persistência no registo de dados, capacidade essa já mencionada por Fonseca (1999), ao citar Kissane (1988), tendo em conta algumas das razões importantes para se reservar espaço no currículo para as actividades de investigação.

Um outro facto curioso é a escrita lateral de «raciocínio por recorrência» (ver figura 48), o que decorreu de uma intervenção da professora no sentido de clarificar a forma utilizada pelos alunos para determinar a regra. Estes, sabendo que tinham de elaborar o relatório escrito, com o registo de todas as descobertas, entenderam, também enquanto alunos bastante aplicados, não deixar de registar o comentário.

Altura	Maneiras
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987
15	1597
16	2584
17	4181
18	6765
19	11946
20	18711

→ Para sabermos o número temos que ter sempre os dois números anteriores pois o número que queremos saber é sempre a soma dos 2 números anteriores.

→ 1 de altura - amarelo  
- vermelho.

→ 2 de altura - vermelho, vermelho  
- vermelho, amarelo  
- amarelo, vermelho

→ 3 de altura - vermelho, vermelho, vermelho  
- amarelo, vermelho, vermelho.  
- vermelho, vermelho, amarelo  
- vermelho, amarelo, vermelho.  
- amarelo, vermelho, amarelo

→ 4 de altura - vermelho, vermelho, vermelho, vermelho.  
- amarelo, vermelho, vermelho, vermelho!  
- vermelho, vermelho, vermelho, amarelo!  
- vermelho, amarelo, vermelho, vermelho.  
- vermelho, vermelho, amarelo, vermelho.  
- vermelho, vermelho, amarelo, amarelo.  
- amarelo, vermelho, amarelo, vermelho.  
- amarelo, vermelho, amarelo, amarelo.  
- amarelo, vermelho, amarelo, vermelho.

5 de altura - vermelho, vermelho, vermelho, vermelho, vermelho.  
- amarelo, vermelho, vermelho, vermelho, vermelho.  
- vermelho, vermelho, vermelho, vermelho, amarelo.  
- vermelho, amarelo, vermelho, vermelho, amarelo.  
- vermelho, vermelho, vermelho, amarelo, vermelho.  
- vermelho, vermelho, amarelo, vermelho, vermelho.  
- vermelho, amarelo, vermelho, amarelo, vermelho.

5 de altura (continuações) - amarelo, vermelho, amarelo, vermelho, amarelo.  
- amarelo, vermelho, vermelho, amarelo, vermelho.  
- vermelho, amarelo, vermelho, vermelho, amarelo.  
- vermelho, amarelo, vermelho, vermelho, amarelo.  
- amarelo, vermelho, amarelo, vermelho, vermelho.  
- vermelho, vermelho, amarelo, vermelho, amarelo

Figura 48. Determinação exaustiva do número de torres, Aluna 3 do Grupo 2

Num outro grupo (Grupo 1), em lugar de explorarem as várias hipóteses com o registo verbal das cores, desenharam e pintaram as torres, tal como se apresenta a seguir.

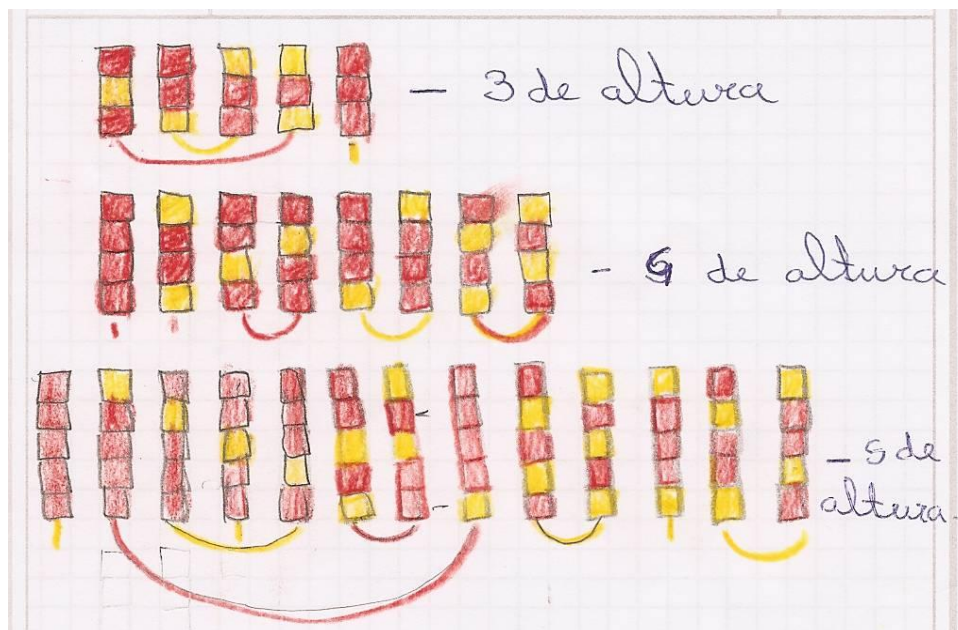


Figura 49. Determinação do número de torres mediante o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1

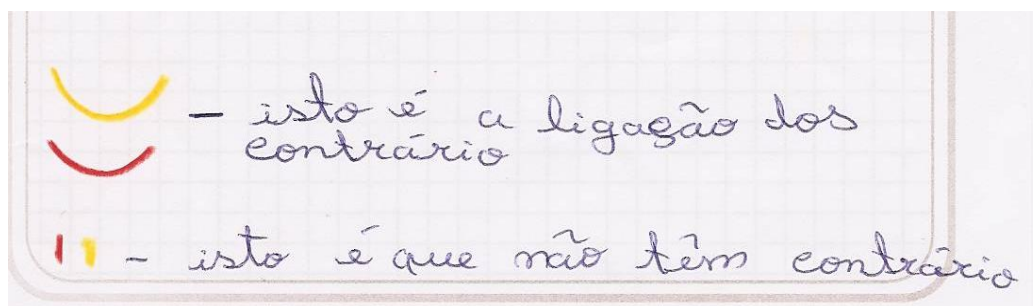


Figura 50. Legenda referente à determinação do número de torres mediante o desenho e a pintura de quadrados, Aluna 2 do Grupo 1

Neste caso, verifica-se também uma certa organização dos dados com o cuidado de indicar as torres simétricas, que inicialmente foram entendidas como aquelas que tinham contrários. Nesta base, e ainda a partir do manuseamento dos cubos, tentando atribuir algum «embelezamento» às várias torres alinhadas e esgotando todas as hipóteses de colocar o cubo amarelo juntamente com os cinco vermelhos, conseguiram desenhar a seguinte figura:

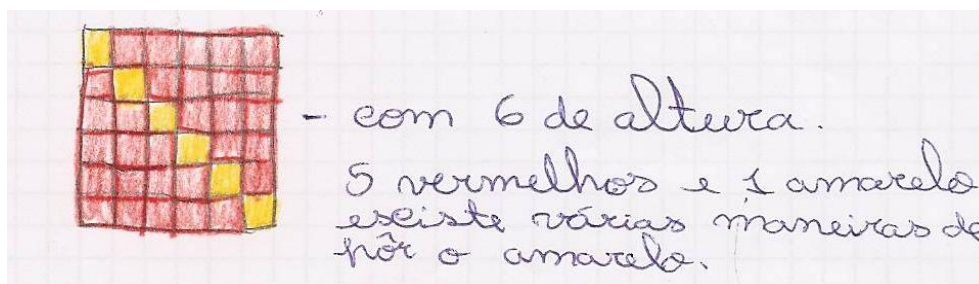


Figura 51. Simetria com as torres, Aluna 2 do Grupo 1

Tendo-me aproximado do Grupo 1 e verificado a elaboração da figura anterior questionei os alunos, desencadeando-se o seguinte diálogo:

**Eu:** Então, digam-me lá, o que é que estão a fazer?

**Alunos do Grupo 1:** [em coro] Estamos a desenhar as torres com 6 cubinhos de altura.

**Eu:** Calma, um de cada vez... [fazendo-me de intrigada] Mas afinal, ainda não percebi... Porque é que as estão a dispor dessa forma?

**Aluna 2:** É assim professora, nós para fazermos as torres começávamos por pôr sempre as vermelhas primeiro. Depois...

**Eu:** E porquê?

**Aluna 3:** Para nos organizarmos ao registar as torres. Primeiro até começámos a pô-las de qualquer maneira, mas depois vimos que era mais fácil se começássemos pelas vermelhas e depois íamos acrescentando as amarelas.

**Aluna 2:** Ah, mas não se esqueçam, as amarelas fazemos primeiro com uma e as vermelhas, depois com duas e as vermelhas e sempre assim, aumentamos as amarelas e as vermelhas.

**Aluno 4:** E ainda há outra coisa, nós quando fazíamos uma torre, fazíamos logo a outra ao contrário para ajudar e não nos esquecermos das várias maneiras.

**Eu:** Então e o que vos parece que seja isso das torres ao contrário?

**Aluna 2:** São as torres simétricas.

**Eu:** Muito bem! Estou a ver que se lembram de alguns conteúdos que já tínhamos falado. Mas ainda não me explicaram o que estão a fazer.

**Aluna 2:** Pois tem mesmo a ver com a simetria, professora.

**Eu:** Ai é, então digam lá como é que fizeram.

**Aluna 2:** É assim: nós já fizemos as torres de um de altura, de dois, de três, de quatro e de cinco, agora estávamos a fazer as de 6 de altura; todos estávamos a fazer e seguíamos aquela regra, primeiro todas as vermelhas, e depois amarelas e vermelhas, mas quando experimentámos com uma amarela e as cinco vermelhas começámos a juntá-las e a ver como é que ficava, achámos esta forma gira. E até ficava com simetria. Então resolvemos desenhá-la.

**Eu:** E fizeram muito bem. Estou a adorar. Continuem!

Houve alguns alunos (Grupo 1) que conseguiram entender o porquê da regra, tendo por base o raciocínio recursivo, quando conseguiram contextualizar parte da

situação. Mais uma vez, e na perspectiva de Hung (1998), foi possível atribuir àquela situação um significado referencial-conceitual do mundo real, em que entidades abstractas (a determinação do número de torres, segundo a sequência de Fibonacci) encontram uma relação com uma entidade física real, o que poderá ser ilustrado no seguinte diálogo:

- Eu:** Então, está tudo a correr bem? Estão com alguma dificuldade?
- Alunos do Grupo 1:** Não, esta actividade está a ser muito fácil.
- Eu:** Deve ser porque é parecida com a das escadas, não é?
- Aluna 2:** Sim, e nós até já descobrimos porque é que a regra é a mesma.
- Eu:** Então e digam lá outra vez qual é a regra.
- Aluno 1:** É a sequência de Fibonacci.
- Eu:** Ora muito bem, estou a ver que se lembram, mas em que é que consiste essa regra?
- Aluna 2:** É que somando o nº de maneiras do 1º com o do 2º vai dar o nº de maneiras do 3º e somando o nº de maneiras do 2º com o 3º vai dar o 4º e daí em diante.
- Eu:** Ora está muito certo, mas o que é que é aqui o 1º, o 2º e o 3º?
- Aluno 1:** É o número de torres de cada altura.
- Eu:** Sim senhor, gostei! Mas então, digam-me lá qual tinha sido a vossa descoberta.
- Aluna 2:** Ah, é que nós percebemos porque é que o número de maneiras tem sempre a ver com as anteriores.
- Eu:** Então porquê?
- Aluna 2:** Porque nós para fazermos por exemplo as sequências de quatro (as torres de quatro de altura), íamos buscar as de três, era só acrescentar mais cubinhos.
- Eu:** Ora que interessante. Estou a ver que os meus meninos estão a perceber. Que bom! Vá, sigam.

Pelo exposto, pode-se concluir que alunos do Grupo 1 conseguiram atribuir uma explicação para a utilização do raciocínio recursivo, a partir da experimentação. Tal evidência também foi explicitada do seguinte modo:

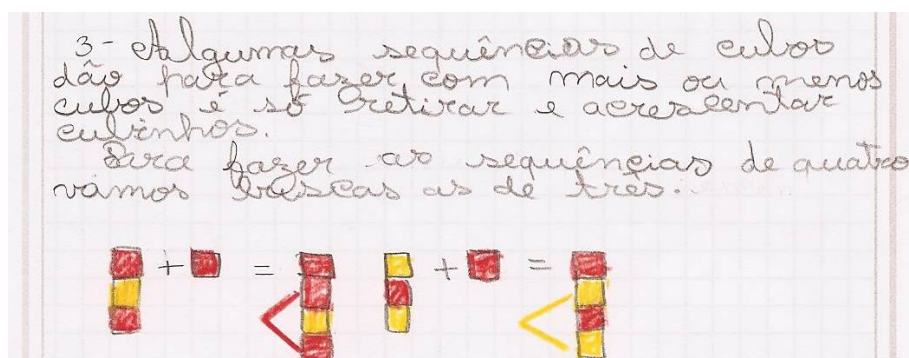


Figura 52. Evidência da compreensão do porquê do raciocínio recursivo, Grupo 1

O grupo que conseguiu verbalizar todos os casos possíveis de torres com várias alturas (Grupo 2), ainda tentou detectar regularidades e padrões, revelando já um franco domínio do vocabulário inerente às actividades de investigação.

→ Vimos que em relação ao número de maneiras é que a soma para o número a seguir é sempre mais um do que o número anteriormente somado, mas esta regularidade não estava certa, ou seja, a nossa conjectura não era válida porque tinha um contra exemplo que era quando o número de maneiras, passava do oito para o número a seguir era mais quatro, e não era <sup>era</sup> mais cinco.

→ Os padrões destes números são:

- Em relação ao número de maneiras vai sempre assim: par, ímpar, ímpar e vai se repetindo.
- Em relação ao número de altura e ao número de maneiras vai sempre assim: par ímpar, ímpar par, par ímpar, ímpar ímpar, par par, ímpar ímpar e assim sucessivamente.

Figura 53. Formulação de conjecturas, determinação de regularidades e padrões na actividade torres de cubos

Formularam uma conjectura inicial que depressa refutaram tendo em conta o contra-exemplo encontrado. Assim, relativamente às maneiras (o número de torres), verificaram que, se de dois para três, aumentava 1, de três para cinco, aumentava 2, de cinco para oito, aumentava 3, então o número seguinte deveria ser doze, visto ter de aumentar 4. Contudo, ao verificar que o número seguinte era 13, concluíram que a conjectura estava errada, identificando o contra-exemplo, o que pode ser evidenciado no seguinte diálogo:

**Aluna 3:** Ó professora, pode vir aqui?

**Eu:** Vou já. [passados segundos] Ora digam lá, o que é?

**Aluna 3:** Pensávamos que tínhamos encontrado uma regularidade, olhe aqui [apontando para a coluna da tabela referente ao número de maneiras], dois, depois para três, vai um, depois de três para cinco vão dois, depois cinco

*para oito, vão três, mas agora deviam ir quatro e dar doze, mas não, vão cinco e dá treze, oito mais cinco.*

**Eu:** *Muito bem. Já viram que falhou. Lembra-se como é que chamamos a estes exemplos?*

**Alunos do grupo 1:** *São contra-exemplos.*

**Eu:** *Excelente, o vocabulário das actividades de investigação não está esquecido! Já agora, por falar em vocabulário, conseguiram detectar mais alguma coisa?*

**Aluna 3:** *Sim, também vimos padrões.*

**Eu:** *Então mostrem-me lá.*

**Aluna 3:** *É assim, professora: em relação ao número de maneiras temos 2, 3, 5, é par, ímpar, ímpar, e volta outra vez, par, ímpar, ímpar, porque é 8, 13, 21 e vai dar sempre assim.*

**Eu:** *Muito bem, e quais são os outros?*

**Aluna 3:** *É em relação ao número da altura e ao número de maneiras.*

**Eu:** *Então como é?*

**Aluna 3:** *É assim: par ímpar, ímpar par, par ímpar, ímpar ímpar, par par, ímpar ímpar.*

**Eu:** *Então mas começamos com 1 de altura a que corresponde 2 maneiras, ou seja é ímpar par, e tu dizes par ímpar...*

**Aluna 3:** *Faltava-lhe o «0» de altura que correspondia a 1 maneira, de resto bate tudo certo até nova repetição.*

**Eu:** *Então explica-te lá melhor.*

**Aluna 3:** *Eu vi assim: 6, 21 [fazendo a correspondência altura, maneiras, em cada linha] é par ímpar, depois 7, 34, é ímpar par, depois 8, 55, é par ímpar, depois 9, 89, é ímpar ímpar, depois 10, 144, é par par, depois 11, 233, é ímpar ímpar e depois volta tudo ao mesmo, 12, 377, par ímpar, 13, 610, ímpar par, 14, 987, par ímpar, 15, 1597, ímpar ímpar, 16, 2584, par par e 17, 4181, ímpar ímpar e repete sempre assim.*

**Eu:** *És fabulosa, Aluna 3.*

Assim, conseguiram ainda detectar padrões numéricos a partir do número de maneiras e relacionando a altura com o número de possibilidades.

## **A diversidade e a classificação**

A partir do desenvolvimento da presente actividade, pode-se concluir que os alunos ainda sentiram alguma necessidade de concretizar os dados, tendo procedido ao manuseamento das torres antes de conseguirem alguma abstracção, como ilustram algumas afirmações: «Ao princípio começámos por experimentar com os cubos, não para ver como era a actividade mas também para termos dados suficientes para construir uma tabela». No entanto, esta situação depressa foi ultrapassada pela maioria dos alunos, os quais optaram por representações esquemáticas ou descritivas, que, por sua vez, facilitaram a organização dos dados em tabelas. A escolha das tabelas foi assim

justificada por alguns alunos: «Escolhemos a tabela e não outra maneira porque nos permite facilitar a descoberta da regra, de regularidades e de conjecturas».

A maioria dos alunos revelou uma organização lógica e pertinente dos dados, recorrendo, ainda, às torres simétricas. Um dos alunos dizia: «Se tivéssemos achado uma maneira da disposição da torre já sabíamos que outra maneira era o contrário».

A determinação das últimas maneiras, correspondentes ao número de torres, já se constituiu uma tarefa mais fácil, pois os alunos identificaram a regra por semelhança com outra actividade – a das escadas, realizada anteriormente.

A formulação e o teste de conjecturas decorreram da recolha e organização dos dados. Os alunos não se limitaram a investigar o que se passava em poucos casos particulares e não partiram logo para uma espécie de conclusão sem o questionamento da sua validade; pelo contrário, testaram um elevado número de dados de forma exaustiva, procedendo à generalização e justificação da regra posteriormente. Alguns deles, conseguiram refutar conjecturas mediante a apresentação de contra-exemplos, libertando-se, assim, da tal linearidade do processo investigativo focada por Brocardo (2001).

A maior parte dos alunos conseguiu formalizar o resultado verbalmente usando a recorrência. Outros fizeram-no com o recurso a exemplos particulares.

## **Súmula**

A actividade *Torres de cubos*, embora semelhante a outra realizada anteriormente, não deixou de entusiasmar e envolver os alunos, até porque não se revestiu de dificuldades de maior, tal como as seguintes frases ilustram. «Eu gostei desta actividade foi engraçada mas foi fácil e rápida, em relação com as outras que fizemos, esta era uma «formiguinha»»; «...esta foi a mais pequenina de todas que fizemos até agora, esta actividade fizemos só numa aula de Estudo Acompanhado»; «Esta actividade de investigação foi mais fácil pois era parecida à actividade das escadas».

A utilização dos diferentes cubos também terá sido um aspecto que contribuiu para cativar os alunos.

Verificou-se uma atitude de experimentação aliada à tentativa de compreensão do que se estava a encontrar e que lhes permitiu formular e testar conjecturas. A

solicitação do meu apoio foi pouco frequente, constatando-se, deste modo, uma maior capacidade de autonomia, o que pode ser evidenciado não só pelo seu desempenho na realização da tarefa como também pelo vocabulário utilizado. À medida que concluíam as torres e expunham os dados, iam-me mostrando (quando passava junto dos alunos) o que tinham feito.

Os alunos evidenciaram necessidade de articular os raciocínios entre as várias representações feitas em torno da situação (esquemas, desenhos, verbalização e tabelas), antes de procederem a qualquer tipo de formalização.

Foi possível estabelecerem-se conexões com outros tópicos matemáticos.

Surgiram tentativas de formulação de conjecturas a partir da descoberta de possíveis regularidades envolvendo as operações aritméticas.

Também ocorreu a determinação de padrões.

Alguns alunos demonstraram empenho e preocupação em se aperceberem globalmente do foco da investigação, tentando esclarecer o porquê de algumas situações.

Não foram só os alunos classificados com níveis iguais ou maiores do que 3 que tiveram melhor desempenho. Vários dos alunos que obtiveram classificação inferior a 3 envolveram-se na actividade, conseguindo atingir os objectivos pretendidos.

Um outro factor relevante foi o facto de a actividade de investigação proporcionar o desenvolvimento da capacidade de comunicação, com todo o vocabulário inerente às actividades de investigação, quer oralmente, no decorrer da aula, quer por escrito, tanto no decorrer da aula como na elaboração do respectivo relatório. De notar, no entanto, que esta situação não ocorreu por acaso nesta actividade, resultando, certamente, de uma progressiva evolução desta capacidade ao longo do tempo em que os alunos realizaram actividades de investigação, que abrangeu todo o ano lectivo 2008/2009.

#### **4.1.4. *Os Aviões***

A actividade *Os Aviões* (anexo 9), adaptada de uma outra, apresentada numa reunião de acompanhamento do Plano da Matemática, em Março de 2009, subordinada ao tema *Pensamento Algébrico*, foi a última tarefa trabalhada neste

estudo. Desenvolveu-se em três aulas (duas de estudo Acompanhado e uma de Matemática).

À semelhança das actividades anteriores, estava integrada no domínio temático *Números e Operações*. Com a resolução da mesma, pretendia-se, além de se verificar e analisar a diversidade dos processos de raciocínio e de resolução dos alunos, abordar ou explorar alguns tópicos matemáticos, a saber: relações numéricas, operações, expressões algébricas, múltiplos, representações, regularidades, padrões.

### As resoluções dos alunos

A actividade *Os Aviões* consistia na descoberta de uma regra que permitisse saber o número necessário de aviões para dispô-los em  $w$ . Inicialmente, era proposto aos alunos que desenhassem o 3º e o 4º termos duma sequência de aviões, onde tinham sido apresentados os 1º e 2º termos, e determinassem o número de aviões necessários em cada caso. Numa segunda questão, também tinham de saber, justificando, se era possível dispor 30 aviões em  $w$ .

Assim, e seguindo o tipo de metodologia usado até ao momento, fez-se a leitura e a interpretação do enunciado, em grande grupo, com os naturais esclarecimentos. Passada esta fase, tal como era frequente, entendi deixar os alunos trabalhar de forma autónoma. Estes, imediatamente, passaram à acção com todo o entusiasmo que lhes era característico.

Eram dados os dois primeiros termos da sequência:

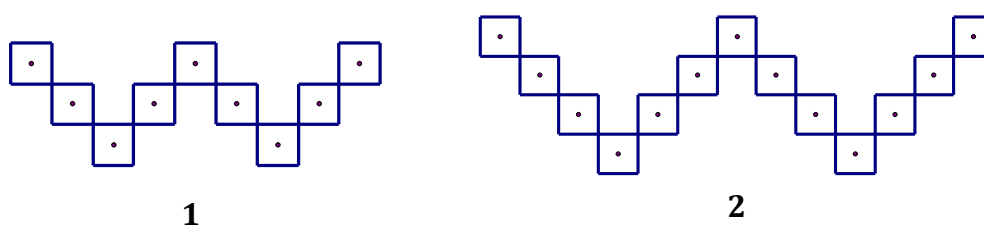


Figura 54. Primeiros termos da sequência dos aviões

Sem qualquer dificuldade, desenharam o 3º e 4º termos da sequência e determinaram o número de aviões neles representados, da seguinte forma:

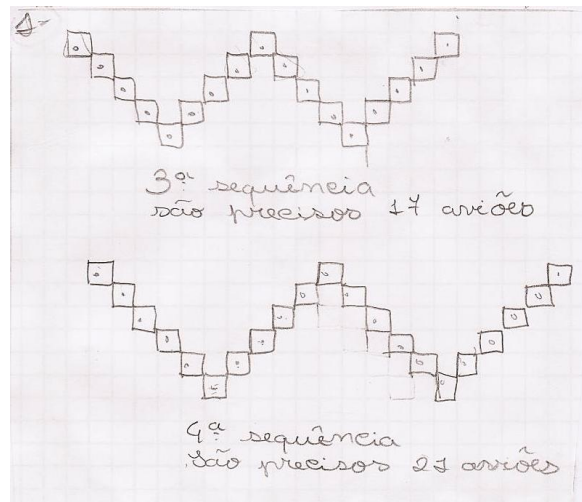


Figura 55. Determinação dos 3º e 4º termos da sequência de aviões, Grupo 1

Feita a contagem dos aviões, e procedendo ao preenchimento das primeiras linhas da seguinte tabela, encontraram muito facilmente a primeira regularidade: «o número de aviões vai sempre de 4 em 4», tal como diziam alguns (Grupos 1, 2 e 5).

número da sequência	número de aviões
1	9 } +4
2	13 } +4
3	17 } +4
4	21 } +4
5	25 } ...
6	29
7	33
8	37
9	41
10	45
11	49
12	53

Figura 56. Tabela para determinação do número de aviões, Aluna 2 do Grupo1

Importa, no entanto, realçar que os alunos sentiram, ainda, a necessidade inicial de concretizar a situação, mediante o desenho dos aviões, até porque queriam perceber e

comprovar o que se estava a passar. Isto é evidenciado no seguinte comentário efectuado na aula: «Precisamos de desenhar os aviões, é mais fácil para confirmar, pelo menos por enquanto...» (Aluna 3 do Grupo 2). Já sabiam, por experiência própria, que após uma primeira apropriação da actividade, fosse manuseando o material ou fosse esquematizando de diversas formas, conseguiam facilmente libertar-se destas representações e explorar a actividade mais formalmente.

A regularidade encontrada também foi apresentada assim:

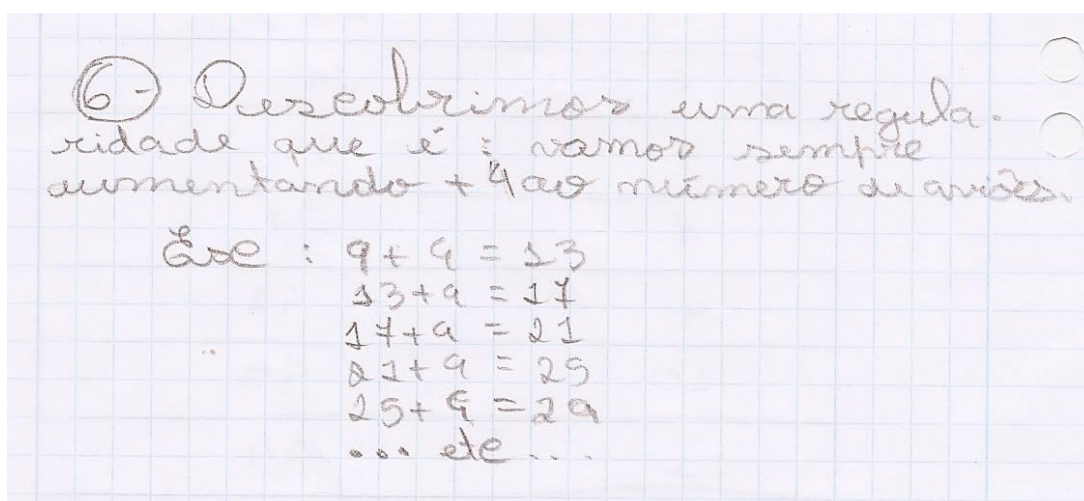


Figura 57. Enunciação da primeira regularidade da actividade aviões, Grupo 1

Verificou-se uma preocupação em apresentar exemplos que comprovassem o enunciado. Mas, mais ainda, quiseram perceber o porquê do número de aviões ir aumentando sempre 4, o que foi feito com a elaboração de um esquema.

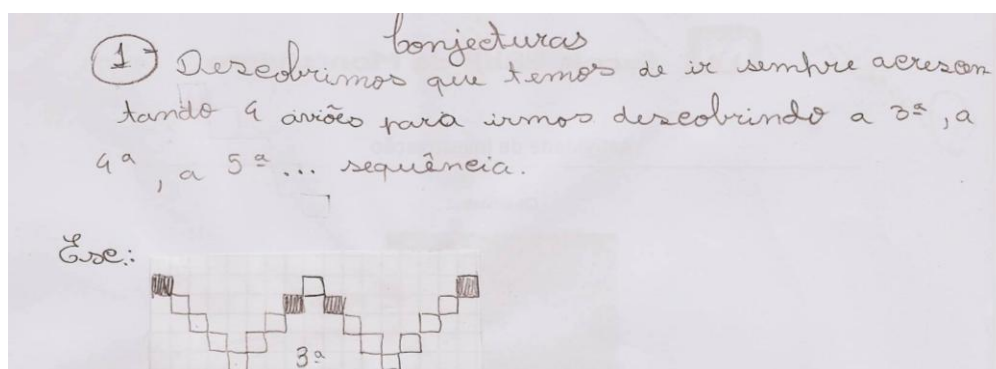
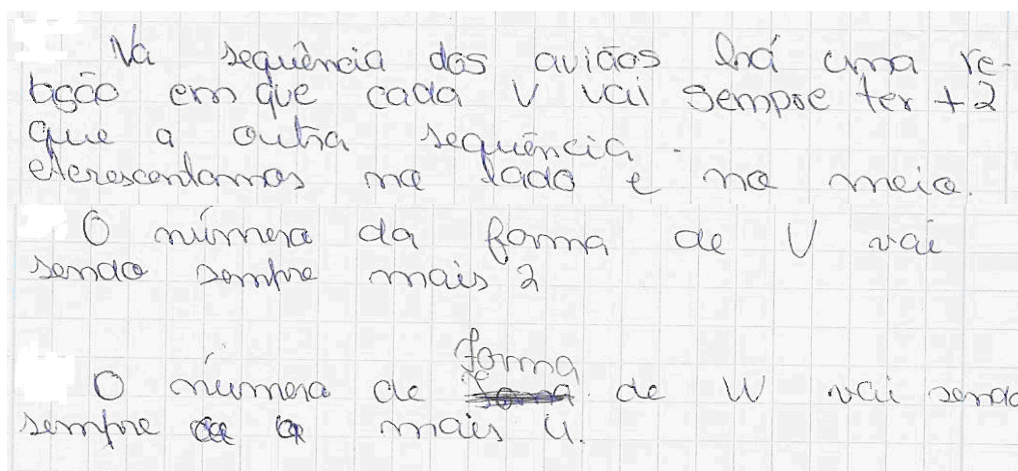


Figura 58. Esquema explicativo da regularidade encontrada, Grupo 1

Houve alunos que tentaram explicar esta situação por palavras suas, afirmando: «De cada lado de fora, acrescenta-se sempre mais um e, por dentro, também de cada lado, mais um e há sempre um que fica em cima, o do meio» (Aluno 4 do Grupo 4).

Ou ainda – tal como foi visto por alguns alunos que revelam algumas dificuldades na disciplina – com a disposição parcial dos aviões, primeiro em V e depois em W, entendendo que se  $w$  é um duplo V e se com a disposição em V aumentava 2, então com  $w$  teria de aumentar 4 – um raciocínio proporcional, tal como pode ser evidenciado a seguir:



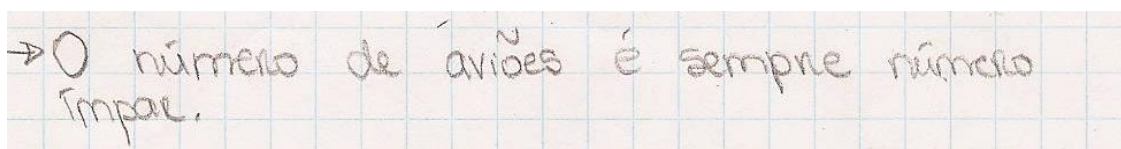
Na sequência dos aviões há uma regularidade em que cada V vai sempre ter +2 que a outra sequência - e acrescentamos na total e na meia.

O número da forma de V vai sendo sempre mais 2

O número de ~~forma~~ de W vai sendo sempre ~~de~~ mais 4.

Figura 59. Explicação da regularidade encontrada com recurso ao raciocínio proporcional, Aluno 4 do Grupo 5

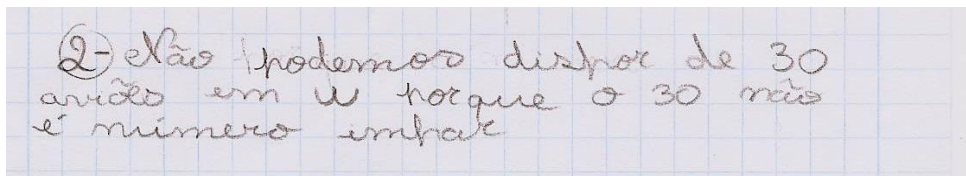
Face à análise dos dados da tabela, a primeira conjectura surgiu muito naturalmente e imediatamente foi registada assim:



→ O número de aviões é sempre número ímpar.

Figura 60. Primeira conjectura da actividade *Os Aviões*, Grupo 2

Como tal, a questão 2 não suscitou dúvida alguma, tendo os alunos respondido logo, muito peremptoriamente:



2) Não podemos dispor de 30 aviões em W porque o 30 não é número ímpar

Figura 61. Resposta à questão 2 da actividade *Os Aviões*, Grupo 1

Mas a verdade é que os alunos já não se contentavam apenas com a descoberta das conjecturas, queriam prová-las e entendê-las no contexto da actividade. Surgiam, deste modo, as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999). Nesta linha, apareceram algumas afirmações e esquemas:

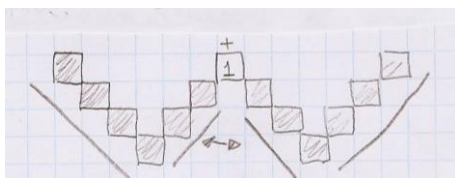
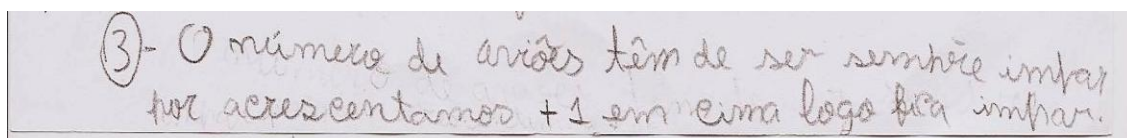


Figura 62. Esquema justificativo do porquê do número de aviões ser ímpar, Aluna 2 do Grupo 1

Através da simetria da figura, a Aluna 2 percebeu que se o número de aviões «internos», 3 dum lado e três do outro, era par e os restantes aviões «externos», dum lado e de outro, também constituíam um número par, então sobrava o avião de cima que tornava sempre o número total ímpar. Esta situação foi enunciada por alguns alunos assim:



3) O número de aviões têm de ser sempre ímpar por acrescentamos +1 em cima logo fica ímpar.

Figura 63. Enunciação do porquê do número de aviões ser ímpar, Grupo 1

Os restantes grupos chegaram à mesma conclusão, tendo um deles (Grupo 2) registado o seu raciocínio da seguinte forma, no relatório da actividade:

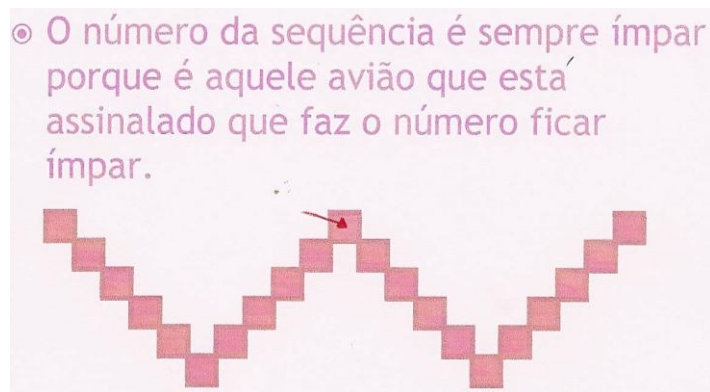


Figura 64. Enunciação e esquematização do porquê do número de aviões ser ímpar

Relativamente à 3ª questão, descoberta de uma regra que permitisse saber o número necessário de aviões para dispô-los em  $w$ , surgiram algumas conjecturas mas que foram refutadas porque, embora traduzissem uma situação no contexto da actividade, não permitiam determinar a regra.

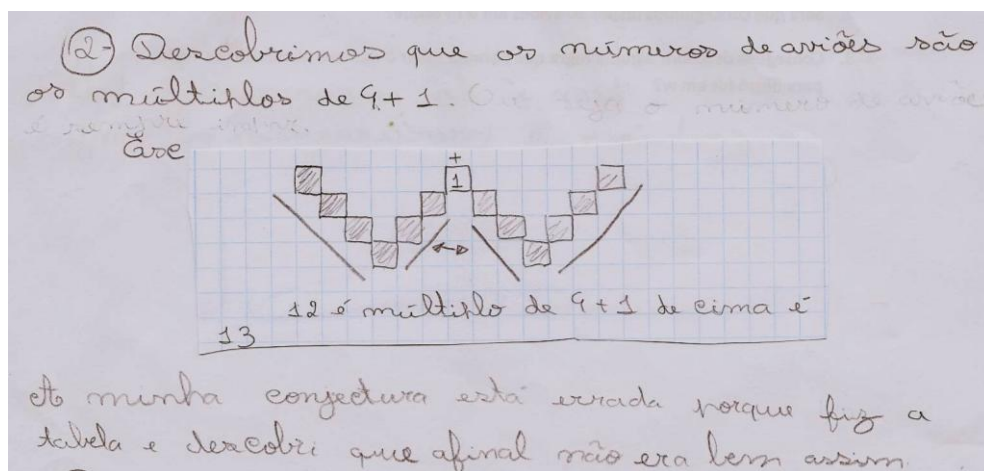


Figura 65. Refutação de conjectura, Aluna 2 do Grupo 1

Desta situação, resultou o seguinte diálogo:

**Eu:** Parece-me que descobriram alguma coisa... Ora então digam lá.

**Aluna 2:** Ó professora, vimos que o número de aviões é sempre os múltiplos de 4 mais um.

**Eu:** Ai é? Então digam lá quais são.

**Alunos do Grupo 1:** 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33...

**Eu:** Pois são, mas como é chegaram lá?

**Aluna 2:** *Então, professora, fizemos 2 vezes 4 é oito, mais 1, dá nove, depois, 3 vezes quatro é 12, mais 1, dá 13, depois 4 vezes 4 é 16, mais 1, é 17 e é sempre assim.*

**Eu:** *Realmente é verdade, mas parece-me que vocês não chegaram a um acordo pois não?*

**Aluna 2:** *Chegámos, nós vimos é que a minha conjectura estava errada.*

**Eu:** *Então porquê?*

**Aluna 2:** *Porque nós fizemos a tabela e vimos que para determinarmos o número de aviões da sequência não podia ser essa a regra, porque, por exemplo, o número de aviões do número 1 da sequência tinha de ser 1 vezes 4 mais 1, e isto dava 5, e não era, o número de aviões era 9. Também no número 2 da sequência tinha de ser 2 vezes 4 mais 1 que é 9, mas não, dava 13.*

**Eu:** *Bem, ao que me parece, a conjectura não estava propriamente errada, não se referia era ao que pretendiam, é isso?*

**Alunos do Grupo 1:** *Sim. Era só para o número de aviões.*

**Eu:** *É mesmo isso. Mas então vão lá tentar encontrar a regra, mas registem tudo o que descobrirem, não se esqueçam, tudo é importante, desde que bem explicado, de maneira a que todos consigamos entender.*

**Aluna 2:** *Mas ó professora a regra até dá na mesma. Fazemos assim: se quisermos saber o número de aviões por exemplo do número 3 da sequência fazemos 3 vezes 4 mais 1, dá treze, mas já sabemos que treze é o número anterior da sequência e como os aviões vão sempre de 4 em 4 então tinha de ser 17 (13 + 4).*

**Eu:** *Adorei, também se pode chegar lá assim. Então exemplifiquem-me com um número maior para ver se percebemos bem.*

**Aluna 2:** *Então, por exemplo, o número 100 da sequência é 100 vezes quatro mais 1 que dá 401, mas mais 4 dá 405.*

**Aluno 1:** *Ó pá, mas se somas mais 1 e depois tens de somar mais quatro, não podias logo somar mais cinco?*

**Aluna 1:** *Acho que sim.*

**Eu:** *Então, experimentem lá.*

**Aluna 2:** *Então, para o primeiro número da sequência ficava 1 vezes quatro que dá 4 mais 5 dá 9, serve. Para o segundo ficava, 2 vezes 4 que dá oito, mais 5 dá treze, também serve... é isso, professora, é a regra!*

**Eu:** *Maravilhoso! Que ricas cabecinhas. Registem tudo.*

Realmente, o número de aviões pode ser dado pelos múltiplos de 4 mais um, isto é, 9, 13, 17, 21..., mas esta situação acabava por ser uma regularidade que permitia apenas determinar o número de aviões por recorrência e não o número de aviões de qualquer termo da sequência, em função da sua ordem. Assim, percebida a situação, os alunos do Grupo 1 não ficaram satisfeitos e iniciaram um novo processo. Mais uma vez, ultrapassaram a linearidade focada por Brocardo (2001), apresentando um processo «em espiral», defendido por Mason (1999) quando caracteriza o próprio pensamento matemático. A enunciação da regra foi efectuada pelo Grupo 1, tal como é ilustrada a seguir.

④ - Sabendo o número da sequência  $x \times 9 + 5$  vamos saber o número de aviões.

Ex:  $1 \times 9 + 5 = 9$   
 $2 \times 9 + 5 = 13$   
 $3 \times 9 + 5 = 17$   
 $4 \times 9 + 5 = 21$   
 $5 \times 9 + 5 = 25 \dots$

Figura 66. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 1

Mais uma vez, verifica-se o cuidado dos alunos de exemplificar o que é enunciado. Desta forma, e como é referido por Lannin (2005), quando os estudantes justificam as suas estratégias, em grupo, conseguem demonstrar o seu poder matemático, o que poderá ser através de exemplos, como é o caso. Além disso, segundo Dienes (1961), citado também por Lannin (2005), «A generalização necessita de muito tempo [para os estudantes a desenvolverem], considerando primeiro números familiares e pequenos até se chegar a «qualquer número». Se esta generalização não for feita é impossível compreender a Álgebra» (pp.289-290). Nesta perspectiva, o mesmo grupo, quando confrontado com a possibilidade de apresentar os resultados a partir de uma expressão geral, mediante a utilização de «n», fez:

⑤ Em forma geral pode ser:

$$\begin{aligned} & m \times 9 + 5 \\ & 9 \times m + 5 \\ & \dots 9m + 5 \end{aligned}$$

Figura 67. Determinação do termo geral da sequência aviões, Grupo 1

É de notar que os alunos já tinham determinado o termo geral de sequências noutras actividades. Isto não surgiu «espontaneamente», aliás, para entenderem este procedimento, os alunos elaboraram uma outra actividade (anexo 15), que, embora não propriamente de investigação, remetia para a formulação de uma expressão algébrica

com o recurso à variável «n», além de permitir a familiarização dos alunos com os termos *sequência, termos, expressão algébrica, termo geral*.

Do exposto, pode-se verificar que alguns alunos, neste caso os do Grupo 1, partiram de uma primeira representação, que resultou da forma como pensaram, e exemplificaram as suas descobertas, chegando a  $n \times 4 + 5$ ; depois aplicaram a propriedade comutativa no produto de n por 4 e escreveram algebricamente  $4n + 5$ .

Este procedimento também foi evidenciado noutro grupo (Grupo 4), como se percebe do seguinte diálogo:

**Eu:** Então o que é que verificaram em relação aos aviões?

**Alunos do Grupo 4:** Vão sempre de 4 em 4.

**Eu:** Esperem lá, então, se vão de 4 em 4, será que temos os múltiplos de 4, é isso?

**Alunos do Grupo 4:** Sim!

**Eu:** Sim? Então temos 4, 8, 12... aviões.

**Aluna 1:** Não.

**Eu:** Então tem de haver mais qualquer coisa, não é? O que é?

**Aluna 1:** Sim, por exemplo pode ser  $1 + 4$ , não,  $1 \times 4$  é igual a  $4 + 4$  é igual a 8, não pode ser, já sei é  $1 \times 4$  é igual a  $4 + 5$  é igual a 9.

**Eu:** Bem, mas tens de ver se dá para todos os casos.

**Aluna 1:**  $2 \times 4$  é igual a 8, mais 5 é igual a 13, dá;  $3 \times 4$  é igual a 12, mais 5 é igual a 17, dá;  $4 \times 4$  é igual a 16, mais 5 é igual a 21, dá;  $5 \times 4$  é igual a 20, mais 5 é igual a 25, dá...

**Eu:** Então a regra está a confirmar-se ou não?

**Alunos do Grupo 4:** Sim!

**Eu:** Então, qual é?

**Aluna 1:** É sabendo o número da sequência vezes 4, mais 5, vai dar o número de aviões.

**Eu:** Então e a fórmula geral, com «n», como é que podia ser?

**Aluna 1:** Podia ser  $n \times 4 + 5$ , ou  $4 \times n + 5$ , ou  $4n + 5$ .

**Eu:** Muito bem!

Num outro grupo (Grupo 3), a regra foi enunciada da seguinte forma:

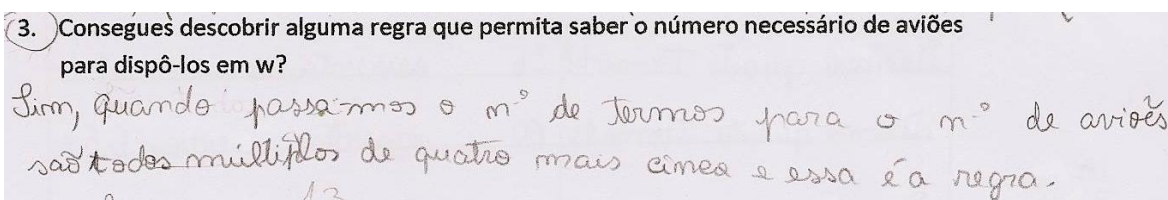


Figura 68. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 3

Embora sem recurso ao termo geral, os alunos não deixam de proceder à generalização, conseguindo determinar a regra a partir dos múltiplos de 4. De realçar

que estes alunos também partiram da análise da sua tabela para determinarem a regra, o que poderá ser evidenciado a seguir.

N.º de Termos	N.º de Aviões
Primeiro termo = 1.º	4 (nãõ 5) nove = 9
Segundo termo = 2.º	8 (nãõ 5) treze = 13
Terceiro termo = 3.º	12 (nãõ 5) dezasete = 17
Quarto termo = 4.º	16 (nãõ 5) vinte e um = 21
Quinto termo = 5.º	20 vinte e cinco = 25
Sexto termo = 6.º	24 vinte e nove = 29
Sétimo termo = 7.º	28 trinta e três = 33
Oitavo termo = 8.º	32 trinta e sete = 37
Nono termo = 9.º	36 quarenta e um = 41
Décimo termo = 10.º	40 quarenta e cinco = 45

Figura 69. Tabela do Grupo 3 com a indicação da ordem dos termos e dos valores correspondentes

O grupo 2 também utilizou uma tabela para determinar a regra, como a seguir se apresenta.

Sequência	Aviões
1	9
2	13
3	17
4	21
5	25

$2 \times 9 - 5 = 13$   
 $3 \times 9 - 10 = 17$   
 $4 \times 9 - 15 = 21$   
 $5 \times 9 - 20 = 25$

$\downarrow +4$   
 $\downarrow +4$   
 $\downarrow +4$   
 $\downarrow +4$

Figura 70. Tabela do Grupo 2 com a ordem e o número de aviões correspondente

Contudo, convém lembrar que a determinação dessa regra não surgiu somente da análise da tabela, mas também a partir de um diálogo estabelecido entre mim e os alunos do respectivo grupo. Assim, pode-se ilustrar:

**Aluna 3:** Professora, acho que já descobri...

**Eu:** Então diz lá.

**Aluna 3:** Acho que é assim: Aqui [apontando para a primeira linha da coluna referente ao número de aviões] é  $3 \times 3 + 0$ , que dá 9, depois é  $4 \times 3 + 1$ , que dá 13, depois é  $5 \times 3 + 2$ , que dá 17, depois é  $6 \times 3 + 3$ , que dá 21, depois é  $7 \times 3 + 4$ , que dá 25, depois ...

**Eu:** Então, o que é que se está a passar?

**Aluna 3:** É sempre o número vezes 3 mais um número que é sempre mais um do que o que se somava anteriormente.

**Eu:** Muito bem, encontraram uma regularidade relativa ao número de aviões, mas será que descobriram a regra, conseguem logo determinar o número de aviões de qualquer número da sequência?

**Alunos do Grupo 2:** Assim não, temos de saber sempre os anteriores.

**Eu:** Então tentem lá descobrir a regra de modo a não necessitarem dos termos anteriores. Vou dar uma ajuda. Olhem lá a vossa tabela e digam-me qual é o número de aviões que corresponde ao 10º termo.

**Alunos do Grupo 2:** É 45.

**Eu:** Muito bem. Mas também já tinham descoberto que o número de aviões ia sempre de 4 em 4, certo?

**Aluna 3:** Sim, são os múltiplos de 4... Já sei, professora! Descobri! É multiplicar por 4 e somar 5.  $10 \times 4$  é igual a 40, mais 5 dá os 45. Nos outros é:  $1 \times 4 + 5$ , que é igual a 9;  $2 \times 4 + 5$ , que é igual a 13;  $3 \times 4 + 5$ , que é igual a 17...

**Eu:** Então se quisermos a fórmula geral, como é que fica?

**Aluna 3:** Ah...?

**Eu:** Então o que é que muda?

**Aluna 3:** É o número da sequência.

**Eu:** Que vai então ser o teu...

**Aluna 3:** O teu «n».

**Eu:** Ora muito bem, e o que é sabes mais?

**Aluna 3:** Que são os múltiplos de 4.

**Eu:** Então...o que fazes mais?

**Aluna 3:** É multiplicar o n por 4.

**Eu:** Mas ainda tem de acontecer mais alguma coisa, não é?

**Alunos do Grupo 2:** É mais 5.

**Eu:** Então, como é que fica a fórmula?

**Aluna 3:** É  $n \times 4 + 5$ .

**Eu:** De outra forma como é que podia ser?

**Aluna 3:**  $4 \times n + 5$  ou só  $4n + 5$ .

**Eu:** É isso mesmo! Muito bem!

No relatório da actividade, registaram a regra da seguinte forma:

⊙  $N$  (número da sequência)  $\times 4 + 5$  é a regra.

Figura 71. Enunciação da regra que permite determinar o número de aviões, Grupo 2

No mesmo grupo, a análise da tabela, além de contribuir para a determinação da regra, também permitiu a descoberta de padrões e de outras regularidades, tal como é exposto a seguir:

→ Do número de aviões para o seguinte é sempre mais 4.

→ Descobrimos os seguintes padrões:

- O número da sequência e o dos aviões vai sempre: ímpar ímpar, par ímpar e sempre assim.

→ Vimos também esta situação

Número da sequência	2	$\times 9$	$- 5$	$= 13$
	3	$\times 9$	$- 10$	$= 17$
	4	$\times 9$	$- 15$	$= 21$
	5	$\times 9$	$- 20$	$= 25$

Figura 72. Determinação de padrões e regularidades referentes à actividade aviões, Grupo 2

Os alunos verificaram que a cada dois pares de linhas da tabela, com a correspondência entre a ordem do termo e o número de aviões, havia o padrão ímpar-ímpar, par-ímpar (1-9, 2- 13; 3-17, 4-21; 5- 25, 6-29; 7-33....).

Uma outra situação, apelidada por mim de «simplesmente fantástica», isto porque nem eu própria a tinha previsto, foi aquela em que os alunos verificaram haver uma relação algébrica entre o número da sequência e o número de aviões, dada pela diferença entre o produto do número da sequência por 9 e o múltiplo de 5 respectivamente correspondente, a qual permite determinar o número de aviões. Assim,

se se pretender, por exemplo, obter o número de aviões correspondente ao 10º termo, faz-se:  $10 \times 9 - 9 \times 5$  (note-se que  $9 \times 5$  corresponde ao 10º múltiplo de 5) e dá 45.

Esta situação foi enunciada pelos alunos, no seu relatório, da seguinte forma:

- ⊙ *Outra conjectura que vimos foi que é sempre o número da sequência vezes nove menos cinco que dá o número de aviões e no número a seguir do número cinco é mais cinco, ou seja, dez e assim sucessivamente.*

### **A diversidade e a classificação**

Feita a apresentação das resoluções dos alunos, pode-se verificar que, embora inicialmente estes ainda tivessem revelado alguma tendência para a concretização da situação, sentindo a necessidade de desenhar/esquematizar os aviões, depressa a puseram de lado, partindo para a elaboração organizada de tabelas e posterior análise das mesmas, com o propósito de determinar regras, regularidades e padrões, tal como é ilustrado pelo seguinte extracto do relatório do Grupo 2:

- ⊙ *Em seguida, a partir destes desenhos fizemos uma tabela para nos facilitar descobrir uma regra, regularidades e se possível alguns padrões.*

Todos os grupos depressa concluíram que o número de aviões tinha de ser ímpar, além de que obedecia à regularidade de 4 em 4, o que foi relacionado com os múltiplos de 4. Contudo, neste ponto, destacou-se alguma diversidade, já que nem todos os grupos entenderam o porquê do número de aviões ser de 4 em 4. Os que o conseguiram (Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 4), fizeram-no a partir da análise da simetria na figura, com a verbalização ou esquematização da situação, tendo, deste modo, procedido a conexões entre *Números* e *Geometria*. Estes alunos, além de formularem as conjecturas, queriam prová-las e entendê-las no contexto da actividade, conseguindo, desta forma, uma *transição da manipulação para a clarificação e para a representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente, tal como é defendido por Mason (1999). Também na perspectiva de Hung (1998), estes alunos, além de atingirem a «cobertura» de nível simbólico (ou equilíbrio, envolvendo uma mera compreensão numérica ou de cálculo, o que, neste caso, significou perceber que o número de aviões vai de 4 em 4), também alcançaram a «cobertura» ao nível do problema (problema

como um todo) e ao nível da situação (relação de problemas com outros problemas e conceitos matemáticos – neste caso as conexões com a simetria).

Quanto à formulação da regra geral, também se verificou alguma diversidade: os Grupos 3 e 5 que, embora tenham revelado uma certa capacidade de generalização, não determinaram a expressão algébrica com o recurso a «n», limitando-se a enunciar a regra como a soma de qualquer múltiplo de 4 com 5. Para estes alunos, os múltiplos de 4 constituem os *exemplos genéricos*, o que poderá fazer a transição para a generalização, assumindo a função da antecâmara, segundo a visão de Mason & Pimm (1984); estes alunos, em lugar de utilizarem a expressão  $4n$ , utilizam a expressão «os múltiplos de 4», acabando assim por ver o geral ( $4n$ ) no particular (múltiplos de 4), o que aliás já foi notório noutras actividades efectuadas pelos mesmos. Os restantes grupos (Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 4), já conseguiram determinar a regra geral ( $4n+5$ ). Contudo, há que valorizar igualmente as conclusões dos outros grupos, até porque, segundo Kaput (1999), Mason (1996b) e Lee (1996), citados por Lannin (2005), as declarações de carácter geral e as descobertas gerais são o núcleo (*core*, no original) da actividade matemática e situações de generalizações numéricas são vistas como um meio para levar os estudantes até à álgebra formal. Também investigadores como Kenney, Zawojewski & Silver (1998), Stacey (1989) e Swafford e Langrall (2000), citados por Lannin (2005), demonstraram que este tipo de actividades (investigativas) encorajam os estudantes a construir uma variedade de generalizações. Importa notar, no entanto, que, segundo Stacey (1989), as generalizações de muitos estudantes representam um *raciocínio falso*, com a aplicação incorrecta de conceitos de multiplicação/razão/relação/proporção ou o uso da estratégia de formulação e validação de conjecturas para construir a generalização – «adivinhar e verificar» (guess and check, no original) (Healy & Hoyles, 1999). Esta estratégia pode conduzir ao uso do que Mason (1996b) descreve como «tácticas locais» (local tactics, no original), para encontrar a regra para cada situação particular, determinando a relação geral na situação problema. Esta estratégia consiste no adivinhar uma regra que poderá ou não resultar, o que normalmente envolve experimentação, utilizando as várias operações e números numa situação problema. De realçar, no entanto, que embora os alunos participantes neste estudo tenham procedido à experimentação, com base nas operações e nos números em causa, não se «socorreram» propriamente desta estratégia, até porque as operações efectuadas decorriam da compreensão do contexto da actividade, não surgindo propriamente ao acaso. Assim, e na perspectiva dos mesmos autores, usaram

estratégias não explícitas como a contagem do número de aviões, recursiva, construindo termo a termo o número de aviões, e também estratégias explícitas como a contextual, a qual permite a construção de uma regra baseada na informação inserida em cada situação, relacionando a regra com uma técnica de contagem.

Alguns alunos (Grupo 2), entendendo que o raciocínio recursivo não seria útil, conseguiram explicar a importância de elaborarem uma nova regra ou expressão geral explícita para a determinação do número de aviões, tal como a seguir se apresenta.

- ⊙ *Porque se a sequência fosse por exemplo duzentos não tínhamos maneira de achar o número de aviões. Só sabendo o número anterior que era mais quatro que foi uma das conjecturas que descobrimos. Mas era muito doloroso estar a fazer uma tabela com duzentas sequências, então tínhamos que achar uma outra regra.*
- ⊙ *Depois a professora disse assim: na sequência dez o número de aviões é?*
- ⊙ *E a partir daí a [Aluna 3] começou a experimentar fazendo o número da sequência vezes quatro mais cinco pois  $10 \times 4 + 5 = 45$  e era essa a regra.*

A representação dos aviões com o recurso a esquemas geométricos permitiu conectar a regra com a sua representação visual; aliás, Mason (1996b) também defende que os estudantes conseguem generalizar melhor se conseguirem ver uma relação entre o seu conhecimento particular e o seu conhecimento geral.

A análise da tabela veio permitir a descoberta de regularidades e de padrões, o que, por sua vez, e segundo Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel (2009) contribui para o desenvolvimento da abstracção e de outras capacidades matemáticas como o pensamento algébrico.

Algumas regularidades decorreram da procura de relações entre a ordem e o termo da sequência. Na determinação destas regularidades, os alunos trabalharam e reforçaram o domínio das operações aritméticas, dos números pares e ímpares e dos múltiplos de um número.

## Súmula

Verificou-se um grande empenho e interesse dos alunos na resolução desta actividade, o que facilmente pode ser evidenciado pelas seguintes afirmações recolhidas dos relatórios dos alunos (Grupo 2):

- *Eu achei esta actividade de investigação muito interessante, pois foi feita com aviões e eu adorava andar um dia de avião.*
- *Achei curioso haver uma actividade de investigação com aviões, mas como todos sabemos, pelo que temos feito, podem ser feitas actividades de investigação com muitas situações. O que aconteceu aqui com os aviões, em vez de aviões também podia ter sido com uma coreografia de dança ou ainda outra situação.*
- *Eu gostei deste trabalho porque mais uma vez foi de investigação, e esses trabalhos eu adoro e desta vez não fizemos com materiais, mas sim com uma sequência.*

Os alunos, após uma primeira familiarização com a actividade, fazendo a sua representação mediante a utilização de um desenho ou de um esquema, também com o intuito de perceberem o seu contexto, facilmente partiram para a elaboração de tabelas com todos os dados organizados. Talvez pela sua experiência, os alunos já haviam entendido que a análise de tabelas facilitava as descobertas, tal como se pode verificar pelo seguinte extracto recolhido de um relatório.

- *Utilizámos tabelas e descrevemos passo a passo o nosso raciocínio, porque através de tabelas chegamos mais facilmente a determinadas conclusões.*  
(Grupo 1)

Todos os grupos formularam e testaram as suas conjecturas (o número de aviões é sempre ímpar; o número de aviões vai sempre de 4 em 4). A generalização também foi uma capacidade evidenciada por todos os grupos, embora alguns deles recorrendo a exemplos genéricos (os múltiplos de 4 mais 5) e outros à expressão algébrica  $(4n+5)$ . Alguns grupos justificaram as suas conjecturas, partindo do próprio contexto da actividade. Além de estratégias de contagem do número de aviões, os alunos

«socorreram-se» do raciocínio recursivo e de estratégias explícitas como a do contexto da actividade (Healy & Hoyles, 1999).

A determinação de regularidades e de padrões resultou muito naturalmente e com situações muito interessantes, envolvendo algumas operações aritméticas com os números, os números pares e ímpares e os múltiplos de um número, tal como assim o diz a Aluna 3.

- ☉ *Gostei muito da regra desta actividade investigação pois exige a multiplicação e a adição.*

Os termos inerentes às actividades de investigação acabaram por integrar o vocabulário dos alunos, surgindo muito espontaneamente e reforçando a sua comunicação matemática, quer oralmente, quer por escrito.

#### **4.2. As entrevistas e dados dos relatórios**

Feita a análise das entrevistas (anexos 13 e 14) e dos relatórios, ressaltam alguns aspectos que foram agrupados em várias categorias e associados aos respectivos alunos. Deste modo, apresentam-se a seguir alguns quadros resumo com excertos dos relatórios ou dos comentários proferidos pelos alunos nas entrevistas semi-estruturadas ou nas entrevistas finais.

Relativamente ao gosto/interesse e dificuldades inerentes à resolução de actividades de investigação, pode-se registar o seguinte:

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>☉ <i>Gostei muito de realizar esta actividade porque aprendi muitas coisas novas.</i> (Aluna 2 e Aluno 1, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>☉ <i>Vimos a disciplina de Matemática de uma forma diferente e mais fácil.</i> (Aluno 4, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>☉ <i>Gostei muito desta actividade, foi engraçada, divertida e o principal é que serviu para desenvolver o meu raciocínio.</i> (Aluna 3, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>☉ <i>Não gostei muito desta actividade porque era muito parecida à das escadas; tinha as mesmas conjecturas, mas foi uma forma de relembrar algumas coisas.</i> (Aluna 2, em relação à actividade «Torres com cubos»)</li> </ul>

Actividades de Investigação	
Dificuldades	
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>☉ <i>Perceber o conteúdo [matemático] da actividade;</i></li> <li>☉ <i>Descobrir e interpretar algumas regras;</i></li> <li>☉ <i>Utilizar a linguagem matemática.</i> (Todos, em relação às actividades «As escadas» e «Os fósforos»)</li> <li>☉ <i>Dificuldades em descobrir regras;</i> (Aluno 1, em relação à actividade «As escadas»)</li> </ul>

Quadro 3. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 1

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>☉ <i>Eu antes não sabia que existia actividades de investigação mas desde que comecei a fazê-las acho que é um vício que eu tenho dentro de mim, pois cada vez que recebo uma folha com uma nova actividade fico logo ansiosa por descobrir a regra;</i></li> <li>☉ <i>Achei curioso haver uma actividade de investigação com aviões, mas como todos sabemos, pelo que temos feito, podem ser feitas actividades de investigação com muitas situações. O que aconteceu aqui com os aviões em vez de aviões também podia ter sido com uma coreografia de dança ou ainda outra situação.</i></li> <li>☉ <i>Acho que as actividades de investigação são como uma corrida, uma corrida que temos que ir treinando e treinando até que cada vez vamos conseguindo percorrer mais distância e as actividades de investigação quanto mais fazemos, mais facilidade temos para descobrir.</i> (Aluna 3, em relação às actividades de investigação em geral)</li> </ul>

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 2 (Continuação)	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Gostei muito deste trabalho porque foi engraçado desenhar os quadrados nas folhas.</i> (Aluna 4, em relação à actividade «Aviões»)</li> <li>⊙ <i>Muito interessante, pois foi feita com aviões e eu adorava andar um dia de avião.</i> (Aluna 3, em relação à actividade «Aviões»)</li> <li>⊙ <i>Eu gostei deste trabalho porque mais uma vez foi de investigação, e esses trabalhos eu adoro...</i> (Aluno 2, em relação à actividade «Aviões»)</li> <li>⊙ <i>Gostei do trabalho porque foi interessante e fizemos no exterior, nas escadas da escola.</i> (Aluno 1, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>⊙ <i>Aprendi que a Matemática está presente no que nos rodeia e nas mais variadas situações do dia -a -dia;</i></li> <li>⊙ <i>Foi uma aula diferente porque saímos da sala de aula e fomos para a rua fazer a actividade.</i> (Aluno 2, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>⊙ <i>Foi muito interessante porque pode acontecer no dia-a-dia e acho que as actividades de investigação são boas para a nossa vida.</i> (Aluna 4, em relação à actividade «As escadas»)</li> <li>⊙ <i>Interessante, porque é diferente do que costumamos fazer em Matemática, é como um jogo, onde aprendemos as noções matemáticas a brincar.</i> (Aluno 2, em relação à actividade «Os fósforos»)</li> <li>⊙ <i>Gosto de descobrir novas regras e maneiras para descobrir coisas novas.</i> (Aluno 1, em relação à actividade «Os fósforos»)</li> <li>⊙ <i>Adoro as actividades de investigação, pois acho interessante descobrir novas regras e maneiras de fazê-las;</i></li> <li>⊙ <i>Utilizamos a Matemática todos os dias, até nas menores situações em que nós não nos apercebemos que a estamos a utilizar;</i></li> </ul>

Actividades de Investigação	
Dificuldades	
Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>As dificuldades que sentimos foi descobrir a regra mas como sempre descobrimos a regra; quando descobríamos uma o nosso cérebro começava a trabalhar e conseguíamos descobrir mais coisas.</i> (Todos, em relação às actividades «Aviões» e «Os fósforos»)</li> <li>⊙ <i>Precisávamos de pensar, às vezes não dava, as conjecturas não estavam certas, havia contra-exemplos.</i> (Aluna 3, em relação às actividades de investigação em geral)</li> </ul>

Quadro 4. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 2

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b>Actividade interessante porque foi desenvolvida em grupo.</b> (Aluna 1, em relação à actividade «As Escadas»);</li> <li>⊙ <b>... mas a tarefa era interessante.</b> (Aluno 2, em relação à actividade «As Escadas»)</li> </ul>

Actividades de Investigação	
Dificuldades	
Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b>Dificuldades porque não estavam todas as cabecinhas do grupo a pensar mas quando o Aluno 2 pôs a cabeça em ordem chegou a uma conclusão que ajudou muito para descobrir a regra principal.</b> (Aluna 1, em relação à actividade «Os fósforos»)</li> <li>⊙ <b>Trabalho difícil porque às vezes havia desentendimentos comigo e com o Aluno 3</b> (Aluno 2, em relação à actividade «As Escadas»)</li> </ul>

Quadro 5. Gosto/Interesse e Dificuldades nas actividades de investigação, Grupo 3

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b>Actividade muito divertida e boa para treinar a mente.</b> (Aluno 4, em relação à actividade «Os fósforos»)</li> <li>⊙ <b>Actividade engraçada e fácil;</b></li> <li>⊙ <b>Eu gostei desta actividade foi engraçada mas foi fácil e rápida, em relação com as outras que fizemos, esta era uma «formiguinha».</b> (Aluna 1, em relação à actividade «Torres com cubos»)</li> <li>⊙ <b>...esta foi a mais pequenina de todas que fizemos até agora, esta actividade fizemos só numa aula de Estudo Acompanhado.</b> (Aluna 2, em relação à actividade «Torres com cubos»)</li> </ul>

Actividades de Investigação	
Dificuldades	
Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b>Dificuldades em explicar algumas descobertas.</b> (Todos, em relação à actividade «Os fósforos»)</li> </ul>

Quadro 6. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 4

Actividades de Investigação	
Gosto / Interesse	
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b><i>A actividade era engraçada.</i></b> (Aluno 4, em relação à actividade «Aviões»)</li> <li>⊙ <b><i>O trabalho sobre as escadas foi a aula que eu mas gostei.</i></b> (Aluna 2, em relação à actividade «As escadas»)</li> </ul>

Actividades de Investigação	
Dificuldades	
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <b><i>Dificuldades em descobrir regras;</i></b> (Todos, em relação às actividades de investigação em geral)</li> </ul>

Quadro 7. Gosto/Interesse e Dificuldades na realização das actividades de investigação, Grupo 5

A partir da leitura dos quadros anteriores, pode-se concluir que os alunos deste estudo consideram as actividades de investigação bastante interessantes, engraçadas e divertidas; com elas, são capazes de ver a Matemática de uma forma mais fácil e lúdica, associando-a a um jogo ou até a uma corrida, que, como tal, tem de ser treinada. A sua realização até pode despoletar o «sonho» – *e eu adorava um dia andar de avião* – ou tornar-se um *vício* que cria a *ansiedade da descoberta de novas regras*. A única actividade que foi apontada como a menos interessante foi a das «Torres de cubos», em consequência da sua semelhança com outra actividade já realizada anteriormente, «As escadas».

Nota-se a atribuição de importância às actividades de investigação como forma de descoberta de resultados novos, daí que os alunos tenham considerado menos interessante uma actividade que incluía aspectos comuns a outra realizada antes.

Contudo, apontam algumas dificuldades na resolução destas actividades, nomeadamente a descoberta das regras, a explicação das descobertas, com a consequente utilização da linguagem matemática, o entendimento do próprio conteúdo matemático ou da situação proposta na actividade (por vezes) e a falta de atenção/concentração ou empenho de alguns elementos do grupo.

No que diz respeito à própria definição do que é uma actividade de investigação e os objectivos ou condições para a sua realização, surgiram alguns comentários relevantes, que se apresentam:

Actividades de Investigação		
	Definição	Objectivos/ Condições
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>É a professora pôr-nos um desafio e nós tentarmos resolvê-lo da melhor maneira possível, fazendo conjecturas e descobrindo regularidades e regras.</i> (Aluna 2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Permitem desenvolver o cálculo mental;</i></li> <li>⊙ <i>Aprender e relembrar algumas matérias;</i></li> <li>⊙ <i>Aprendermos a utilizar a linguagem matemática e desenvolvermos o nosso raciocínio porque às vezes chegamos a muitas conjecturas;</i></li> <li>⊙ <i>Podemos aprender coisas novas, como a sequência de Fibonacci;</i></li> <li>⊙ <i>Precisamos de estar concentrados, precisamos de alguns materiais; é necessário escrever o que estamos a pensar para não nos perdermos.</i> (Aluna 2)</li> </ul>
Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>É uma actividade em que temos que descobrir regras e várias conjecturas, regularidades e padrões.</i> (Aluna 3)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Temos de ter um bom raciocínio; temos de resolver e descobrir alguma coisa;</i></li> <li>⊙ <i>É estarmos concentrados na actividade e pensarmos.</i> (Aluna 3)</li> </ul>
Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>É uma actividade em que temos de descobrir regras e utilizar a cabeça.</i> (Aluno 3)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Aprender a trabalhar em grupo;</i></li> <li>⊙ <i>Calcular mais rápido; existem maneiras mais rápidas e diferentes de calcular que nem sequer nos passava pela cabeça;</i></li> <li>⊙ <i>Raciocinar, explicar bem as coisas e tentar aprender com isso;</i></li> <li>⊙ <i>É preciso o cérebro, saber fazer contas e descobrirmos regras senão não conseguimos chegar a lado nenhum;</i></li> <li>⊙ <i>Esses trabalhos exigem atenção e concentração para saírem bem e não haver disparates.</i></li> <li>⊙ (Aluno 3)</li> </ul>

Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Actividades em que temos de descobrir regras, regularidades e temos de fazer tabelas senão não conseguimos avançar.</i> (Aluno 4)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Temos de exigir da nossa cabeça, pensarmos e termos um bom raciocínio e capacidades de matéria;</i></li> <li>⊙ <i>A palavra chave para conseguirmos resolver as actividades é pensar e ler com muita atenção e estar com a cabeça no lugar.</i> (Aluna 1)</li> <li>⊙ <i>Ao descobrirmos regras estamos a treinar a mente;</i></li> <li>⊙ <i>Temos de ter capacidades para descobrir as coisas (regras, regularidades), cálculo e concentração.</i> (Aluno 4)</li> </ul>
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Actividades para descobrirmos regras e desenvolvermos a mente e aprendermos ou relembrarmos as matérias.</i> (Aluno 1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Fazer cálculos de cabeça e desenvolver a mente;</i></li> <li>⊙ <i>Aprender e relembrar as matérias.</i> (Aluno 1)</li> </ul>

Quadro 8. Definição, objectivos e condições das actividades de investigação na perspectiva dos alunos

A partir da análise dos anteriores excertos das entrevistas finais e relatórios, pode-se destacar que os alunos vêem as actividades de investigação como aquelas em que fazem conjecturas e que lhes permitem a descoberta de regras, regularidades e padrões. Entendem também que estas, apesar de constituírem desafios que promovem o desenvolvimento do raciocínio e do cálculo mental, a aprendizagem ou o reforço de algumas matérias e a melhoria da capacidade de trabalhar em grupo, exigem grande concentração e capacidade de comunicação matemática (*conseguirmos escrever o que estamos a pensar e explicarmos bem as coisas*).

Ainda no que diz respeito ao trabalho de grupo, os alunos indicaram o seguinte:

Actividades de Investigação	
Trabalho em Grupo	
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>É uma forma de começarmos a trabalhar melhor em grupo;</i></li> <li>⊙ <i>Trabalhei muito bem em grupo; às vezes havia uns contratempos ou discussões no grupo mas nada que não se resolvesse; gostei muito de trabalhar com eles.</i> (Aluna 2)</li> <li>⊙ <i>Realizei bem esta actividade com a orientação da professora e dos colegas.</i> (Aluno 1)</li> <li>⊙ <i>Pensámos, conversámos, raciocinámos e discutimos em grupo para chegarmos às conclusões; trabalhámos em conjunto com a opinião de todos os colegas do nosso grupo.</i> (Aluno 4)</li> <li>⊙ <i>Umhas vezes trabalhava mais, outras vezes menos.</i> (Aluna 3)</li> </ul>
Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Trabalhámos muito bem em grupo, todos se empenharam.</i> (Aluna 3)</li> </ul>
Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Colaborei na tarefa apesar de alguns conflitos;</i></li> <li>⊙ <i>Com o grupo que tenho consegui aprender quase o dobro do que já tinha aprendido; Colaborei e fiz a minha parte que era ajudar o meu grupo; sei que não fui perfeito e estive um bocadinho longe disso mas tentei ajudar.</i> (Aluno 2)</li> <li>⊙ <i>De um modo geral toda a gente colaborou; aprendi a trabalhar melhor em grupo.</i> (Aluna 1)</li> <li>⊙ <i>Tivemos algumas discussões mas todos se empenharam e deram a sua opinião.</i> (Aluno 3)</li> </ul>
Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Todos colaboraram; para termos estes resultados todos tiveram de trabalhar.</i> (Aluna 1)</li> </ul>
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Em conjunto é mais fácil descobrirmos as coisas porque todos dão a sua opinião.</i> (Aluno 1)</li> </ul>

Quadro 9. Opiniões relativas ao trabalho em grupo

Q

Pelo exposto, depreende-se que, apesar de terem existido alguns conflitos ou discussões nos grupos, em especial no Grupo 3, os alunos reconheceram a potencialidade do trabalho em grupo, o qual foi sempre adoptado nas actividades de investigação. O trabalho de grupo foi entendido pelos alunos como uma forma de promover a sua aprendizagem. Por outro lado, reconheceram que este tipo de trabalho é frutífero, visto todos contribuírem com ideias, sugestões, opiniões ou dicas, a fim de

encontrarem diversas estratégias propícias ao desenvolvimento da actividade, tornando mais ricas as descobertas ou as refutações.

Quanto à utilização de tabelas ou de alguns materiais, em concreto, os alunos expuseram o seguinte:

		Actividades de Investigação	
		Uso de Tabelas	Outros Materiais
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Utilizámos a tabela e descrevemos passo a passo o nosso raciocínio porque através de tabelas chegamos mais facilmente a determinadas conclusões e ao descrevermos o nosso raciocínio é mais fácil perceber o conteúdo do trabalho.</i></li> <li>⊙ <i>Começámos por fazer uma tabela mas depois tivemos de fazer um esquema porque era mais fácil descobrir as maneiras que faltavam para a completar.</i> (Aluna 2)</li> <li>⊙ <i>Utilizei uma tabela porque ajuda-me no meu raciocínio e para descobrir as maneiras (as descobertas); as tabelas são uma óptima ajuda para mim, com elas faço tudo o que quero, acrescento-lhe e tiro-lhe.</i> <i>São elas que conduzem ao resultado final.</i> (Aluno 1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Utilizámos os seguintes materiais: o lápis, a borracha, a régua para fazermos tabelas, uma folha de rascunho e principalmente os fósforos que as senhoras da cozinha nos emprestaram;</i></li> <li>⊙ <i>Utilizámos o lápis, a borracha, a régua para fazermos tabelas, gráficos, esquemas(...), utilizamos também uma folha de rascunho para escrevermos as nossas conjecturas e principalmente os cubinhos amarelos e vermelhos.</i> (Aluna 2)</li> </ul>	
	Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Fizemos uma tabela para nos facilitar descobrir uma regra, regularidades e se possível alguns padrões; tal como nas outras actividades facilitava as descobertas;</i></li> <li>⊙ <i>Facilitava mais do que se utilizássemos outras estratégias.</i> (Aluna 3)</li> <li>⊙ <i>Fizemos uma tabela e não um esquema ou um desenho porque nos facilitava mais utilizar a tabela.</i> (Aluno 2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Lápis, canetas, borrachas, folhas e principalmente os nossos cérebros para pensar.</i> (Aluna 3)</li> </ul>

Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Usámos a tabela para facilitar as descobertas e depois de a usarmos foi mais fácil calcular.</i> (Aluna 1)</li> <li>⊙ <i>Utilizámos a tabela porque achámos que seria mais fácil do que por exemplo estarmos a experimentar nas escadas até ao 6º degrau;</i></li> <li>⊙ <i>Começámos por fazer com tabelas e depois com palavras porque destas duas maneiras dava para descobrir algumas regras importantes.</i> (Aluno 2)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Utilizámos escadas, uma tabela e o material que se usa para escrever.</i> (Aluna 1)</li> </ul>
Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Fizemos uma tabela porque nessa tabela verificámos que existia várias maneiras de descobrirmos o perímetro e o número de fósforos; depois de descobrirmos a primeira e a segunda descoberta já conseguíamos saber o perímetro e o número de fósforos sem contas e sem fazer as figuras.</i> (Aluna 1)</li> <li>⊙ <i>Descobri com a ajuda dos elementos do meu grupo e da professora mas principalmente com a ajuda de uma tabela.</i> (Aluno 4)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Com os fósforos que nos foram entregues, tínhamos que ver o perímetro das figuras (triângulos).</i> (Aluna 1)</li> </ul>
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Utilizámos os cubinhos mas como os cubinhos não chegavam fizemos tabelas.</i> (Aluno 1)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Utilizámos os cubinhos mas como os cubinhos não chegavam fizemos tabelas.</i> (Aluno 1)</li> <li>⊙ <i>E os aviões tinham que voar em “w” e descobrimos a primeira regra contando os quadradinhos esses quadradinhos eram os aviões.</i> (Aluno 4)</li> </ul>

Quadro 10. Justificação do uso de tabelas e/ou materiais concretos

De uma maneira global, os alunos vêem as tabelas como algo facilitador das suas descobertas. A tabela foi sentida como um elemento organizador e estruturante do raciocínio matemático que iam desenvolvendo. A sua construção funciona como uma estratégia para trabalhar em actividades de investigação. Por outro lado, numa fase anterior à produção de conclusões, os alunos sentem necessidade e valorizam a manipulação dos materiais e o recurso a situações concretas e particulares, estabelecendo a ponte ou antecâmara para a generalização Mason & Pimm (1984).

Relativamente a alguns procedimentos adoptados no desenrolar de algumas

actividades, foram salientados os seguintes:

Actividades de Investigação	
Procedimentos	
Grupo 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Até chegarmos às conclusões finais fizemos conjecturas, umas verdadeiras e outras falsas; quando as conjecturas não eram verdadeiras era porque encontrávamos um contra-exemplo.</i></li> <li>⊙ <i>Quando tínhamos ideias escrevíamos logo para não perdermos os nossos pensamentos.</i></li> </ul>
Grupo 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Começámos por experimentar nas escadas para vermos como era a actividade... depois começámos a fazer mentalmente; à medida que íamos descobrindo as maneiras de subir as escadas, começámos a fazer tabelas com a descrição das maneiras, primeiro em esquema mas vimos que não dava resultado e optámos por fazer a descrição das maneiras por palavras;</i></li> <li>⊙ <i>O nosso grupo descobria uma regra a cada minuto que passava e conseguíamos descobrir novas regras já sem utilizarmos as escadas;</i></li> <li>⊙ <i>Começámos por experimentar com os fósforos, formando as figuras pretendidas, para ver como era a actividade e também para termos dados suficientes para fazermos uma tabela; começámos a observar e descobrimos várias conjecturas, regularidades e padrões.</i></li> </ul>
Grupo 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Até chegarmos a conjecturas verdadeiras passámos por várias falsas, às vezes pensávamos uma coisa e depois percebíamos que estava errada porque encontrávamos um contra-exemplo;</i></li> <li>⊙ <i>Tínhamos várias maneiras de chegar aos resultados, fazendo tabelas, pensando, fazendo experiências com os materiais, fazendo figuras ou desenhos.</i></li> </ul>
Grupo 4	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Foi muito divertido, pois a certa altura já fazíamos sem as escadas;</i></li> <li>⊙ <i>Neste trabalho tivemos várias fases: começámos a fazer o exercício e no princípio fizemos uma descoberta, a principal, mas não foi a única, mas aquela era a mais preciosa; fiz um esquema para me ajudar nos raciocínios, para perceber melhor e obter os meus resultados;</i></li> </ul>
Grupo 5	<ul style="list-style-type: none"> <li>⊙ <i>Experimentávamos sempre primeiro com objectos ou sem objectos. Depois fazíamos tabelas descobríamos algumas regras.</i></li> </ul>

Quadro 11. Procedimentos adoptados

Da análise do quadro, pode-se verificar que, de uma maneira geral, os alunos reconhecem a necessidade de passarem por uma fase de experimentação, seja com o manuseamento dos materiais, seja com a elaboração de figuras ou esquemas. Perceberam também que é a partir da observação e análise das tabelas que melhor formulam, testam e validam ou refutam as suas conjecturas, determinando as regras, as regularidades e os padrões. De referir, no entanto, que nem todos os grupos conseguiram passar eficazmente por todas estas fases, sendo o Grupo 5 aquele que evidenciou mais dificuldades no processo de generalização.

No que concerne à evolução sentida pelos alunos na realização das actividades de investigação, alguns deles referiram o seguinte:

- ⊙ *Houve evolução para melhor (Grupo 5);*
- ⊙ *Evoluímos porque a Matemática e as actividades de investigação são como a Educação Física ou a Ginástica, estamos a treinar para fazermos uma melhor corrida e conseguirmos resistir mais tempo, é como aqui na Matemática, estamos a treinar o nosso cérebro e cada vez conseguimos fazer mais actividades e mais difíceis (Grupo 2);*

Não houve da parte dos alunos a percepção de que a dificuldade na resolução das tarefas tivesse aumentado; estes, à medida que as iam resolvendo, conseguiam, cada vez mais, descobrir regras, formular conjecturas e encontrar regularidades e padrões mais «sofisticados» ou elaborados, tendo achado, portanto, que a sua preparação para desenvolver actividades de investigação ia sendo maior. Os alunos parecem estar cientes da sua evolução no decorrer da realização das actividades de investigação.

- ⊙ *Estamos mais aptos porque treinámos mais o cérebro (Grupo 1);*
- ⊙ *Evoluímos muito, porque nas primeiras actividades começámos a aprender e nas outras já conseguíamos fazer bem melhor (Grupo 4);*
- ⊙ *Sim, evoluímos porque aprendemos a trabalhar em grupo e a raciocinar (Grupo 3)*

Sendo interrogados quanto às actividades de investigação de que mais gostaram, alguns deles responderam:

- ⊙ *A dos fósforos, porque havia muitas coisas para descobrir; houve mesmo muitas coisas e gostei muito de estar a pensar, será que é assim, será que não é assim (Aluna 3, Grupo 2);*
- ⊙ *A das escadas, porque fomos lá para fora, estivemos a subir as escadas, foi uma actividade diferente e utilizámos materiais diferentes (Aluna 2, Grupo 1);*
- ⊙ *A dos fósforos, porque aprendemos mais coisas (Aluno 3, Grupo 3);*
- ⊙ *A das escadas, porque fomos para a rua e subimos as escadas (Aluna 1, Grupo 4);*

- ⊙ *A das escadas, porque fomos lá para fora, foi muito divertido e diferente (Aluno 4, Grupo 5).*

As actividades preferidas foram «As escadas» e «Fósforos na construção de triângulos», a primeira porque os alunos a consideraram diferente, gostando do facto de terem ido para a rua, e a segunda porque deu azo a muitas descobertas.

Quanto às actividades de que gostaram menos, mencionaram:

- ⊙ *Não sei, acho que as actividades de investigação... talvez a dos cubinhos porque foi com a recorrência do raciocínio e a regra era igual à das escadas (Aluna 3, Grupo 2);*
- ⊙ *A dos cubos, porque era mais fácil, era igual à das escadas (Aluna 2, Grupo 1);*
- ⊙ *As dos berlindes, porque envolvia cabeças mais inteligentes e eu ainda não estava muito habituado a resolver as actividades de investigação (Aluno 3, Grupo 3);*
- ⊙ *A dos cubinhos, porque não tínhamos de pensar muito, era igual à outra das escadas (Aluna 1, Grupo 4);*
- ⊙ *A dos berlindes 2, porque era idêntica à dos berlindes 1 (Aluno 4, Grupo 5).*

As actividades menos apreciadas pelos alunos foram «Torres de cubos» e «Berlindes» pelo facto de serem semelhantes a outras realizadas anteriormente ou por serem das primeiras que fizeram, como é o caso dos «Berlindes», e não estarem ainda muito habituados à realização deste tipo de trabalho.

A finalizar, os alunos foram interrogados quanto à continuidade deste trabalho no próximo ano, deixando expressas as seguintes mensagens:

- ⊙ *Gostávamos que houvesse sempre aulas de Matemática com actividades de investigação, entre fichas, exercícios e resolução de problemas, preferimos as actividades de investigação (Grupo 2);*
- ⊙ *Gostávamos de continuar com este tipo de trabalho porque é uma forma lúdica e divertida de aprendermos e praticarmos o nosso raciocínio; também podemos enriquecer mais o que aprendemos (Grupo 1);*
- ⊙ *Devíamos ter mais trabalhos desta forma (Grupo 5);*
- ⊙ *Devíamos fazer mais actividades destas (Grupo 4);*

- ⊙ *Devíamos continuar a fazer estas actividades para o ano porque vemos a Matemática de maneira diferente e divertida.*

Não restam dúvidas de que os alunos gostaram de realizar actividades de investigação, reconhecendo-lhes potencialidades para o desenvolvimento do seu raciocínio. Assim, a opinião global é a de que desejam continuar com este trabalho no próximo ano lectivo.



# CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES

### 5.1. Matriz do estudo

O presente estudo teve como principais motivações evidenciar e explicar a pluralidade dos raciocínios matemáticos dos alunos de uma turma do 5º ano de escolaridade, durante a realização de actividades de investigação em sala de aula. Deste modo, procurou-se perceber as formas de raciocínio matemático produzido pelos alunos e como é que as mesmas foram explicitadas no decurso de actividades de investigação, bem como averiguar a adequação e eficácia dos métodos «pessoais» de resolução exibidos pelos alunos (nomeadamente os métodos que não se basearam na aplicação directa de conteúdos matemáticos específicos). Para o efeito, foi desenvolvido um trabalho, em sala de aula, nas áreas curriculares de Matemática e Estudo Acompanhado, o qual consistiu na realização de nove actividades de investigação ao longo de todo o ano lectivo 2008/2009. Os alunos trabalharam sempre em grupo, tendo sido mantidos os mesmos grupos heterogéneos durante toda a fase de implementação do projecto na sala de aula.

A recolha de dados teve por base a observação participante, as entrevistas espontâneas, as entrevistas semi-estruturadas e centradas nas tarefas e as entrevistas finais, tendo os dados sido registados em áudio ou através de notas de campo da professora/investigadora, incluindo-se ainda os registos escritos dos alunos no desenrolar das actividades, os relatórios de grupo e as reflexões individuais dos alunos também apresentadas por escrito.

Como pilares teóricos do estudo, foram estudados e discutidos a natureza, o papel e as características das actividades de investigação na educação matemática e aprofundado o conceito de raciocínio/pensamento matemático, tendo em vista o significado teórico que lhe é atribuído, a identificação e análise de múltiplos processos de raciocínio e, ainda, a relação entre as actividades de investigação e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

No que diz respeito aos propósitos e características das actividades de investigação, e tendo em conta as orientações curriculares actuais, podemos afirmar que a sua realização oferece oportunidades aos alunos para explorarem determinadas situações abertas, mediante a procura de regularidades, a formulação e o teste de conjecturas, a argumentação e a comunicação de conclusões, quer oralmente, quer por escrito. Assim, numa actividade de investigação, o aluno terá como finalidade a exploração matemática, através da experimentação, da pesquisa, da construção de hipóteses e da sua validação ou refutação. Verifica-se uma valorização dos processos matemáticos, muito para além da preocupação imediata de que os alunos alcancem «a resposta correcta»; importa sim que explorem possibilidades, formulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas.

Como argumentos favoráveis à inclusão destas actividades na Matemática escolar, muitos trabalhos realizados neste domínio apontam: a ligação que estas têm com a actividade matemática genuína, o envolvimento que os alunos podem ter no trabalho, o recurso a diferentes estratégias de resolução, o estabelecimento de relações entre conhecimentos matemáticos, o carácter transversal, o reforço de aprendizagens mais elementares, o desenvolvimento das capacidades de comunicação e de raciocínio, a auto-confiança, a criatividade, os hábitos de trabalho e a persistência.

O raciocínio matemático, ou pensamento matemático, tal como é referido por alguns autores, é uma capacidade transversal que todos os alunos precisam de desenvolver, independentemente dos ciclos de ensino em que se encontram. Como tal, não se trata de uma habilidade exclusiva dos alunos com maior aptidão para a Matemática. Contudo, é importante criar as condições para os alunos evidenciarem o seu raciocínio matemático, o que passa não só pela proposta de actividades de investigação como também pela ajuda no desenvolvimento de um hábito de pensamento que tem a ver com o «porquê das coisas». Por outras palavras, é possível e desejável a aprendizagem da capacidade de raciocinar matematicamente.

Dos vários processos envolvidos no raciocínio matemático, Mason, Burton & Stacey (1982) atribuem uma especial importância à particularização/clarificação e à generalização, os quais são entendidos como a chave para o «getting unstuck» – «desencalhar», segundo a perspectiva de Mason (1999).

Na particularização, observam-se casos ou questões específicas com o objectivo de se clarificarem os seus significados, podendo-se, simultaneamente, providenciar o «alimento» do processo reverso – a generalização. Quando clarificamos uma questão ou

uma situação, poderemos reconhecer e seleccionar exemplos que permitirão isolar algumas propriedades gerais, de modo a conseguirmos ver e apreciar essas propriedades – o processo de generalizar. A Matemática é abstracta apenas quando usamos entidades que não nos inspiram confiança, devendo portanto fazer-se uso da particularização para clarificar significados e, numa fase posterior, proceder à generalização. Estes dois processos são similares, podendo caminhar muitas vezes lado a lado; generalizar refere-se à verificação de modelos ou constatação de padrões e propriedades comuns mas a própria generalização pode-se particularizar para produzir os casos que a generalizaram. As generalizações precisam de ser verificadas em exemplos específicos antes de se procurar um argumento convincente (Mason, 1999).

Além disso, quando uma ideia ou técnica é encontrada pela primeira vez tende a ser turva, indistinta e imprecisa. Mesmo depois de se conseguir falar dela, é ainda muito difícil passar para o papel o que se compreende de uma forma coerente. Só gradualmente, com a experiência, toma forma até ser razoavelmente estável, quase cristalina – a clarificação; os alunos, na exibição dos seus raciocínios, ainda na ausência de uma clara generalização, acabam por recorrer, muitas vezes, a exemplos genéricos como uma aproximação à generalização; na transição entre o exemplo genérico e a generalização, o primeiro assume a funcionalidade de uma antecâmara da generalização (Mason & Pimm, 1984).

Uma das características do pensamento matemático consiste no número de vezes que se atravessa uma determinada espiral: manipular objectos com confiança → pensamento → sentido de uma noção geral comum às generalizações → pensamento → anotação cada vez mais sucinta através de figuras, palavras e símbolos → nova confiança na manipulação dos objectos (Mason, 1999). Deste modo, raciocinar matematicamente passa, inquestionavelmente, por lidar com o particular e com o geral, mas esta interacção pode assumir múltiplas variantes – a não linearidade, referida por Brocardo (2001) e as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999).

Os alunos, independentemente dos níveis de ensino ou dos conhecimentos matemáticos que possuam, são capazes de perceber e exhibir raciocínio matemático, podendo utilizar vários processos para o efeito (Francisco & Maher, 2005).

Assim, as conclusões resultantes deste estudo, para além de irem ao encontro dos objectivos centrais da investigação e de procurarem responder às questões que norteiam a investigação, estando intimamente relacionadas com o raciocínio e

respectivos processos evidenciados, permitem abordar outros aspectos relacionados com a própria essência das actividades de investigação e o seu impacto na actividade dos alunos e na minha prática pedagógica enquanto professora/investigadora. Deste modo, as conclusões foram organizadas e apresentadas em quatro pontos:

- Diversidade de formas de raciocínio e processos matemáticos utilizados pelos alunos;
- Evolução do desempenho dos alunos em actividades de investigação e o desenvolvimento de competências matemáticas;
- Actividades de investigação como metodologia para o desenvolvimento do currículo e para a motivação dos alunos;
- Voltando ao raciocínio matemático.

## **5.2. Conclusões do estudo**

### **5.2.1. Diversidade de formas de raciocínio e processos matemáticos utilizados pelos alunos**

#### **Processo de concretização de dados**

Relativamente aos processos de raciocínio evidenciados, destacaram-se algumas evidências – a necessidade de os alunos concretizarem os dados (por vezes de uma forma exaustiva), antes de conseguirem alcançar alguma forma de abstracção. Numa fase inicial, as tarefas envolveram momentos mais livres, mais informais ou mesmo «de brincadeira», que permitiram, além de criar uma certa motivação – geralmente através do manuseamento dos materiais ou da experimentação a partir da situação proposta – a apropriação da actividade e das suas características essenciais pelos alunos. Posteriormente, avançou-se para uma abordagem mais profunda, até porque era necessário que os alunos percebessem e ganhassem familiaridade com os conceitos matemáticos envolvidos não se limitando à aplicação de heurísticas e procedimentos próprios de determinados tipos de problemas (Hung, 2000). Contudo, esta necessidade de concretização da situação foi sentida em graus diferentes. Enquanto alguns alunos «se socorreram» desta possibilidade, em todas as actividades, despendendo bastante tempo com a manipulação dos materiais e demorando a concentrar-se nos aspectos

importantes da investigação, outros houve que depressa a ultrapassaram, nomeadamente, recorrendo a formas de representação diversas: a utilização de letras, o recurso a palavras, a elaboração de tabelas, o desenho e pintura de figuras, a elaboração de esquemas ou os registos algorítmicos. Aliás, segundo Ponte & Serrazina (2000), embora os alunos realizem variadas experiências, que permitem a familiarização com o sentido da tarefa, muitos não se preocupam em registar os dados por iniciativa própria e, se o fazem, frequentemente utilizam modos de representação não convencionais, como desenhos ou notações pessoais.

Neste estudo, também foi notória a necessidade de os alunos articularem os seus raciocínios mediante as várias representações feitas em torno da situação (esquemas, desenhos, verbalização), antes de procederem a qualquer tipo de formalização. Contudo, importa salientar que, com o decorrer da realização das actividades de investigação, essa tendência foi diminuindo gradualmente. A dada altura, os alunos depressa partiam para o registo sistemático e para formas de organização dos dados, em particular através da construção de tabelas.

### **Processo de registo e organização de dados**

Todos os grupos envolvidos neste estudo utilizaram tabelas para registarem e organizarem os dados recolhidos, embora nas actividades iniciais este facto tenha surgido por sugestão minha. De uma maneira geral, o recurso às tabelas foi assim justificado pelos alunos: *«Fizemos uma tabela para nos facilitar descobrir uma regra, regularidades e se possível alguns padrões; tal como nas outras actividades facilitava as descobertas»; «as tabelas são uma óptima ajuda para mim, com elas faço tudo o que quero, acrescento-lhe e tiro-lhe. São elas que conduzem ao resultado final».*

A maioria dos alunos revelou uma organização lógica, sistemática e pertinente dos dados representados nas tabelas. No entanto, é de notar que este procedimento veio a ser aperfeiçoado ao longo do tempo. Inicialmente, os dados registados não se encontravam totalmente organizados ou ordenados, limitando-se ainda a poucas hipóteses ou situações decorrentes das questões iniciais propostas nas actividades.

Outra questão que importa aqui referir é a persistência no registo de dados que foi evidenciada por alguns alunos, capacidade essa que é mencionada por Fonseca

(1999), ao citar Kissane (1988), tendo em conta algumas das razões importantes para se reservar espaço no currículo para as actividades de investigação.

No entanto, relativamente ao uso de tabelas, é de salientar que um dos grupos (Grupo 5) tirou pouco proveito deste procedimento, utilizando apenas as tabelas porque os materiais manipuláveis não eram suficientes para visualizarem o pretendido e avançarem para casos mais gerais. De qualquer forma, tiveram de analisá-las a fim de determinarem as regras, ainda que as enunciassem com o recurso a exemplos muito particulares.

O registo e a organização dos dados resultantes das experiências permitiu aos alunos a possibilidade de estabelecerem relações entre eles, muitas vezes com o recurso aos algoritmos, e facilitou-lhes a formulação das primeiras conjecturas, nalguns casos com a minha intervenção e noutros autonomamente.

### **Processo de procura de regularidades e padrões**

Nem todos os alunos funcionaram da mesma maneira na procura de regularidades ao longo de todo o trabalho investigativo. Para alguns alunos foi uma preocupação constante e uma intenção deliberada, enquanto que para outros foi surgindo pontualmente. De qualquer forma, todos o fizeram, ainda que alguns tenham ficado apenas pela descoberta de casos mais simples, como o dos múltiplos de um número ou os «resultados da tabuada», ou aumenta 1, depois 2, depois 3, depois 4..., ainda que tenham conseguido ser igualmente produtivos nas suas respostas. Noutros casos, este processo foi mais usual e muito mais rico, tendo os alunos estabelecido algumas regularidades decorrentes da procura de relações entre a ordem e o termo da sequência com grande espontaneidade, perspicácia e flexibilidade. Na determinação dessas regularidades, os alunos trabalharam e reforçaram principalmente o domínio das operações aritméticas e de algumas propriedades dessas operações, como é o caso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, aquando da realização da actividade «Berlindes 2». Contudo, é de reforçar, mais uma vez, que nem todos os alunos conseguiram chegar às mesmas ideias, talvez pela falta de domínio de alguns procedimentos matemáticos, nomeadamente a divisão, em alguns casos. Isto foi referido por alguns alunos, por exemplo, ao afirmarem que «...já envolvia cabeças mais inteligentes». Em todo o caso, todos os alunos foram capazes de identificar

regularidades. Aliás, tal como referem Francisco & Maher (2005), os alunos, independentemente dos níveis de ensino ou dos conhecimentos matemáticos que tenham, são capazes de perceber e exibir raciocínio matemático, podendo utilizar vários processos para o efeito. Importa, no entanto, dar-lhes as condições necessárias para o promover. Neste caso, o trabalho em grupo e as discussões colectivas, em grande grupo, permitiram a partilha de descobertas e o entendimento de diversos processos de raciocínio.

Algumas regularidades encontradas, por exibirem raciocínios tão interessantes, até por serem inesperadas, para mim, e por demonstrarem a capacidade de os alunos verem e explicarem estruturas matemáticas para além dos dados nas tabelas, passam aqui a ser apresentadas ou relembradas.

Handwritten mathematical work showing multiplication patterns and a verbal explanation of the pattern.

Handwritten multiplication problems:

13 × 11 = 143	23 × 11 = 253	33 × 11 = 363
14 × 11 = 154	24 × 11 = 264	34 × 11 = 374
15 × 11 = 165	25 × 11 = 275	35 × 11 = 385
16 × 11 = 176	26 × 11 = 286	36 × 11 = 396
17 × 11 = 187	27 × 11 = 297	37 × 11 = 407
18 × 11 = 198	28 × 11 = 308	38 × 11 = 418
19 × 11 = 209	29 × 11 = 319	39 × 11 = 429

Sim, porque por exemplo  $23 \times 11$  é igual a 23 dezenas mais 23 unidades, ou seja,  $23 \times (10 + 1)$  que é igual  $23 \times 10$  (23 dezenas) +  $23 \times 1$  (23 unidades) =  $230 + 23 = 253$ , também se pode fazer de  $13 \times 11 = 143$ , do 13 o 1 passa para as centenas e o três para as unidades e depois  $3 + 1 = 4$  que é o número das dezenas

Figura73. Determinação de regularidades na actividade «Berlindes 2», Aluna 3, Grupo 2

Seqüência	Aviões
1	9
2	13
3	17
4	21
5	25

$2 \times 9 - 5 = 13$   
 $3 \times 9 - 10 = 17$   
 $4 \times 9 - 15 = 21$   
 $5 \times 9 - 20 = 25$

Número seqüência  
 $2 \times 9 - 5 = 13$   
 $3 \times 9 - 10 = 17$   
 $4 \times 9 - 15 = 21$   
 $5 \times 9 - 20 = 25$

Figura74. Determinação de regularidades na actividade «Aviões», Aluna 3, Grupo 2

**Aluna 3:** *Acho que é assim: Aqui [apontando para a primeira linha da coluna referente ao número de aviões] é  $3 \times 3 + 0$ , que dá 9, depois é  $4 \times 3 + 1$ , que dá 13, depois é  $5 \times 3 + 2$ , que dá 17, depois é  $6 \times 3 + 3$ , que dá 21, depois é  $7 \times 3 + 4$ , que dá 25, depois ...*

**Eu:** *Então, o que é que se está a passar?*

**Aluna 3:** *É sempre o número vezes 3 mais um número que é sempre mais um do que o que se somava anteriormente.*

Esta aluna revelou grande facilidade em explorar casos particulares, organizando-os e procurando encontrar regularidades, aspectos do raciocínio indutivo sublinhados por Pólya (1977) como de grande importância para a aprendizagem da Matemática.

Também, como é mencionado por Ponte (2006), os dados mostram que o estudo de regularidades conduziu os alunos a raciocinar sobre os objectos matemáticos e as relações entre eles.

A análise dos dados nas tabelas, além de permitir aos alunos a descoberta de regularidades, também facilitou a determinação de padrões, processo este que, por sua vez, decorreu do estabelecimento de conexões (neste caso mais precisamente com os números pares e ímpares), tal como outros estudos já o evidenciaram (Alvarenga, 2006 e Barbosa, 2007) e outros investigadores o afirmaram (Vale, Barbosa, Borralho,

Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009; Orton & Orton, 1999; Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006; Arcavi, 2006).

Convém, no entanto, realçar que a determinação de padrões, além do aspecto numérico, também assumiu o aspecto visual, de repetição, como por exemplo na actividade «Os saltos das Rãs» ou mesmo algébrico, como no caso das actividades «Berlindes» e «Os Aviões», em que alguns alunos determinaram a lei de formação.

Ao longo das diferentes actividades os alunos evidenciaram bastante gosto por explorar padrões, embora esta situação tenha sido mais notória em alguns alunos, os quais queriam descobrir cada vez mais, tendo podido, deste modo, não só apreciar a beleza da Matemática mas essencialmente desenvolver o seu poder matemático (NCTM, 1989). Além disso, os alunos puderam diminuir a imagem redutora e dualista, em termos de certo-errado, da Matemática e obter uma imagem mais positiva da mesma, visto sentirem grande atracção e motivação por este tipo de tarefas, como também se verificou em estudos anteriores (Orton & Orton, 1999; Vale & Pimentel, 2005 e Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006).

### **Processo de formulação e justificação de conjecturas**

A análise dos dados das tabelas, com o conseqüente reconhecimento de regularidades ou analogias entre as questões a investigar e outros assuntos já conhecidos dos alunos, com base em estratégias geométricas (elaboração de desenhos ou esquemas, verificação de simetrias) em estratégias aritméticas (contagem, experimentação algorítmica) ou em estratégias verbais (elaboração de listagens, explicação, justificação), permitiu o surgimento das primeiras conjecturas.

Contudo, é de mencionar o papel que assumi, aquando da resolução das primeiras actividades, já que muitas vezes essas conjecturas não eram formuladas inicialmente pelos alunos, traduziam-se apenas de forma implícita ou eram parcialmente verbalizadas, tal como outros estudos anteriormente corroboraram (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006).

Em todo o caso, e com o decorrer do tempo, o processo de formulação de conjecturas foi aquele que adquiriu maior relevo no conjunto de actividades realizadas, o que é coincidente com os resultados obtidos por Fonseca (2000) e Rocha (2003), em estudos nesta linha de trabalho, com alunos de anos de escolaridade mais avançados.

Assim, e segundo a perspectiva de Semana & Santos (2008), apoiando-se em considerações de Dewey (1910/1997), os alunos ao acederam à compreensão de situações matemáticas e ao examinarem um problema sob vários ângulos, analisando e estabelecendo relações, de modo a transformarem as ideias iniciais em hipóteses que levaram à formulação de conjecturas, evidenciaram claramente a capacidade de raciocinar matematicamente.

De notar, contudo, que nem todos os alunos estabeleceram autonomamente relações entre os aspectos matemáticos do problema e o seu contexto, conseguindo justificar as suas conjecturas. Esses, segundo a perspectiva de Hung (1998), apenas atingiram a «cobertura» de nível simbólico ou equilíbrio, envolvendo uma mera compreensão numérica ou de cálculo, não entendendo realmente o porquê da(s) situação(ões), embora posteriormente, e de uma maneira geral, tenham vindo a entender o contexto das actividades, quer por explicação dos colegas do grupo ou através das discussões colectivas na turma. Assim, o trabalho cooperativo entre os alunos foi eficaz na obtenção de justificações e de fundamentação de conclusões.

Os alunos que fizeram conjecturas porque compreenderam as condições da tarefa e não se limitaram a aplicar cegamente procedimentos mecânicos, embora também tivessem revelado competência na execução dos cálculos numéricos requeridos, atingiram a «cobertura» ao nível do problema (problema como um todo) e/ou ao nível da situação (relação de problemas com outros problemas e conceitos matemáticos) (Hung, 1998). Deste modo, estes alunos perceberam as dimensões conceptuais envolvidas na situação que estavam a investigar. Envolveram-se numa actividade a que vários autores se referem como «fazer matemática» (Lakatos, 1991; Schoenfeld, 1985). Ao mesmo tempo, e na perspectiva de Hung (2000), também procuraram significados matemáticos nos níveis de problema e situacionais, conjecturaram aproximações possíveis e ideias relacionadas com a tarefa, negociaram (consigo e com os outros) a fiabilidade das suas conjecturas, experimentaram as suas ideias e resoluções ao longo da actividade, organizaram as descobertas em tabelas, esquemas, listagens ou registos algorítmicos, concretizaram a sua compreensão através da formulação de hipóteses e obtiveram cobertura conceptual da sua compreensão.

Muitas vezes, alguns alunos, por não dominarem bem a linguagem específica da Matemática, recorriam a outros termos – nomeadamente um que foi muito frequente, o da «tabuada» – conseguindo, no entanto, formular as suas conjecturas, ainda que apenas através da experimentação de alguns casos e da procura de regularidades entre eles.

## **Processo de teste e validação de conjecturas**

Numa primeira fase, a formulação de conjecturas pelos alunos assumiu um modo imediato de aprovação ou rejeição/refutação, quer através da colocação de questões entre eles, com a fundamentação das mesmas, quer com a apresentação de contra-exemplos. Na realidade, o número de casos a estudar não era demasiado elevado, sendo as conjecturas consideradas como possíveis conclusões; poucos testes chegavam para as considerarem como verdadeiras para todos os casos, talvez porque a sua formulação resultou do esforço e do envolvimento dos alunos, sendo difícil para os mesmos assumir uma atitude crítica, tal como outros estudos o registam (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006; Fonseca, 2000; Brocardo, 2001). Deste modo, e na perspectiva de Brocardo (2001), os alunos seguiam um processo linear, além de que o seu raciocínio evidenciava poucas características de raciocínio de investigação. Também a testagem de conjecturas nem sempre implicou a formulação de novas conjecturas, com a necessidade de analisar qual o tipo de dados de que dispunham, que outros dados deveriam recolher e de que forma eles poderiam ser organizados. Assim, e ainda de acordo com Brocardo (2001), inicialmente, os alunos desenvolveram uma actividade linear composta por três fases:

- 1ª Recolha de um conjunto de dados;
- 2ª Organização dos dados;
- 3ª Análise dos dados de modo a tirar conclusões.

Poucos alunos tomaram a iniciativa de procurar argumentos que pudessem validar as conjecturas. Contudo, com a minha ajuda, estimulando os alunos a testarem as suas conjecturas e a procurarem contra-exemplos, a maioria deles ultrapassou esta situação, não se limitando a investigar o que se passava em poucos casos particulares e não partindo logo para uma espécie de conclusão sem o questionamento da sua validade; pelo contrário, testavam um elevado número de dados, de forma exaustiva, procedendo à generalização e justificação da regra posteriormente. Deste modo, alguns alunos, ao conseguirem refutar as conjecturas mediante a apresentação de contra-exemplos, libertaram-se, assim, da linearidade do processo investigativo focada por Brocardo (2001) e exibindo um processo «em espiral», referido por Mason (1999) quando caracteriza o próprio pensamento matemático.

Aliás, ocorreram casos em que eu própria fui exteriorizando o raciocínio matemático, pensando em voz alta com os alunos, considerando conjecturas formuladas

pelos alunos em que não tinha pensado anteriormente e que, no momento, não me pareciam evidentes. Verificou-se, assim, uma intenção deliberada de manifestar o meu raciocínio perante os alunos, tratando-se também de uma ocasião privilegiada para evidenciar e reforçar a forma como se aborda o teste de conjecturas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006).

A maior parte dos alunos conseguiu formalizar os resultados verbalmente, usando muitas vezes uma definição por recorrência, embora outros o tenham feito a partir da manipulação ou experimentação dos dados, com o recurso a exemplos particulares e mais simples (particularização ou especialização) e à geração de mais exemplos; em alguns casos, até usaram o teste por exaustão, conseguindo ser igualmente eficazes, tornando evidente uma estreita relação entre o teste de conjecturas e a especialização.

Na verdade, com o decorrer do tempo, os alunos não se contentavam apenas com a descoberta das conjecturas, queriam prová-las, reformulá-las ou refiná-las e entendê-las no contexto da actividade. Surgiram, deste modo, as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999).

Os alunos revelaram facilidade em testar as suas conjecturas e, sempre que encontravam contra-exemplos, conseguiam formular novas conjecturas, «voltando atrás» e explorando a situação noutros sentidos (Mason 1999), com vista ao «olhar novamente para os dados recolhidos, decidir sobre a pertinência de recolher outros ou sobre uma nova forma de os organizar» (Brocardo, 2001, p. 541). Observou-se, desta forma, um movimento desordenado entre os vários momentos da investigação matemática, como refere Ponte (2003b); os testes de uma conjectura puderam conduzir a novas questões ou, ainda, as questões e a conjectura inicial surgiram em simultâneo.

Considerando que um dos objectivos da actividade investigativa é conduzir os alunos a graus progressivos de generalização e abstracção (Oliveira, 1998), pode dizer-se que a validação das conjecturas formuladas ao longo da investigação constituíram a fase final deste processo (Mestre, 2005). A seguir, serão especificados os processos de raciocínio demonstrados que concorreram para este momento final. Além disso, foi mediante a discussão e partilha colectiva e o confronto de ideias nos grupos que os alunos colocaram à prova as suas conjecturas, percebendo que elas eram compreendidas e aceites pelos colegas. Neste sentido, a sua actividade matemática assumiu uma dimensão social, dado que a validação das suas ideias esteve dependente da aceitação

dos elementos da comunidade onde estão inseridos (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999; Ponte & Serrazina, 2000). Contudo, é de salientar que no processo de validação não foram apresentadas demonstrações formais e rigorosas mas sim justificações organizadas, com base em raciocínios lógicos e de acordo com o contexto das actividades, até porque a ideia de «prova matemática» está associada claramente a um carácter de formalidade que não é trivial no contexto da matemática escolar, pelo que Ponte, Brocardo & Oliveira (2006) consideram que esta ideia deve ser introduzida gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial, «à procura de uma justificação aceitável que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem». Foi isto que se tornou visível nesta investigação, com alguns alunos a conseguirem validar adequadamente as suas conjecturas, manifestando a essência do pensamento lógico-dedutivo. Importa mencionar, no entanto, que inicialmente os alunos não sentiram logo a necessidade de provar as suas conjecturas; esta prova, tal como refere Brocardo (2001) na sua investigação, era entendida como uma *complicação desnecessária introduzida pela professor; só mais tarde é que os alunos consideraram a prova como parte integrante da actividade de investigação*, o que poderá dever-se, e ainda segundo a mesma autora, *ao trabalho continuado*, ao longo de um ano lectivo.

### **Processos de particularização/clarificação e generalização**

Como já foi referido anteriormente, alguns alunos, para testarem as suas conjecturas ou para tentarem algum grau de generalização, de modo a extrair do contexto algumas relações gerais, «socorreram-se», muitas vezes, de alguns exemplos particulares ou especiais (particularização/especialização). Assim, conseguiram fazer a transição entre o exemplo genérico e a generalização. Segundo Mason & Pimm (1984), é assim que o exemplo genérico assume a função de antecâmara da generalização; os alunos acabaram por ver o geral no particular. Esta evidência também está em consonância com as ideias de Mason (1999), pois a necessidade de particularização é uma forma de os alunos ganharem confiança nos seus raciocínios e representações, no momento anterior ao «salto» para a generalização. Muitas vezes, este salto não acontece abruptamente, necessitando de um processo «em espiral», tal como é referido por este autor ao caracterizar o próprio pensamento matemático.

A progressiva evolução para a generalização acentuou-se com a construção de representações mais poderosas, nomeadamente de tabelas, em que a disposição dos

dados permitiu aos alunos identificar relações entre as entradas, quer por linhas quer por colunas. Contudo, muitos alunos sentiram a necessidade de concretizar os dados, até de uma forma exaustiva, apoiando-se em listagens ou contagens e na descoberta de padrões como meios para a obtenção de conclusões mais genéricas. Assim, na perspectiva de Healy & Hoyles (1999), usaram estratégias não explícitas, como a contagem, mas também o modelo recursivo, construindo cada termo com base no anterior, e estratégias explícitas, como a contextual, a partir da construção de uma regra baseada na informação inserida em cada situação, relacionando a regra com uma técnica de contagem.

A presença de raciocínios que envolveram o conhecimento das operações aritméticas e a sua relação com a exploração das sequências tratadas foi igualmente visível em muitas situações. Em particular, foi notória a utilização do significado do resto da divisão inteira no contexto da situação tratada (nas actividades «Adriana» e «Fósforos na construção de triângulos»), a utilização dos múltiplos de um número (nas actividades «Berlindes»), a paridade (nas actividades «Os saltos das rãs» e «Os Aviões»). Enquanto alguns alunos recorreram a representações mais esquemáticas, outros mostraram ser mais «descritivos», mas igualmente hábeis na sua forma de raciocínio matemático, demonstrando a capacidade de traduzir verbalmente (utilizando palavras) as suas conclusões e a sua compreensão das questões; em algumas situações, estas duas formas de actuação complementaram-se. Acima de tudo, importa realçar as palavras de Dienes (1961), citado por Lannin (2005), «a generalização necessita de muito tempo [para os estudantes a desenvolverem], considerando-se primeiro números familiares e pequenos até se chegar a ‘qualquer número’. Se esta generalização não for feita é impossível compreender a Álgebra» (pp.289-290). Realmente, a determinação do termo ou expressão geral não surgiu logo inicialmente, além de que não foi conseguida por todos os alunos. Os que o fizeram também recorreram a esquemas geométricos, permitindo conectar as regras com a sua representação visual; aliás, Mason (1996b) também defende que os estudantes conseguem generalizar melhor se conseguirem ver uma relação entre o seu conhecimento particular e o seu conhecimento geral.

A realização de todas as actividades de investigação veio permitir o desenvolvimento da capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar essas generalizações. Verificou-se uma significativa evolução dos alunos na compreensão da linguagem algébrica relativa aos diferentes significados dos símbolos em diferentes contextos.

Posto isto, é evidente que parecem estar presentes na maior parte destes alunos os quatro aspectos fundamentais no pensamento matemático, sugeridos por Mason, Burton & Stacey (1982): especialização ou particularização, formulação de conjecturas, teste e justificação (argumentação) e generalização.

Contudo, convém frisar que, à semelhança do que acontece no pensamento matemático, existiram muitos outros processos envolvidos, mas que não são exclusivos da actividade matemática, como por exemplo o processo de comunicação (falar, escrever, explicar, concordar, questionar), de raciocínio (analisar, reflectir, classificar, compreender, criticar), de registo (desenhar, escrever, listar) ou de operacionalização (recolher, ordenar, classificar) (Mestre & Matos, 2005, citando Frobisher, 1994).

### **5.2.2. Evolução do desempenho em actividades de investigação e o desenvolvimento de competências matemáticas**

Verificou-se uma franca evolução dos alunos perante a realização das actividades de investigação, os quais mostraram compreender, de uma forma progressiva, o seu papel neste tipo de actividade, libertando-se da linearidade do processo investigativo (Brocardo 2001), apropriando-se de alguns processos matemáticos essenciais e desenvolvendo algumas atitudes e capacidades fundamentais.

Assim, ao nível dos processos matemáticos, os alunos cada vez mais, organizavam os dados, particularizavam, generalizavam, encontravam regularidades e padrões, formulavam conjecturas e validavam ou refutavam conjecturas através de contra-exemplos, embora evidenciando sempre alguma diversidade no raciocínio e, conseqüentemente, nas estratégias de resolução, tal como foi focado anteriormente. Desta forma, os alunos puderam estimular a sua actividade matemática e *raciocinar matematicamente* (Pólya, 1967) ou *pensar matematicamente* (Schoenfeld, 1994; Mason, Burton & Stacey, 1982), a partir das suas próprias redes de representações e das suas descobertas de estratégias (Hiebert & Carpenter, 1992).

Importa salientar que inicialmente optei por intervir mediante a utilização de um método de descoberta guiada, segundo a perspectiva de Ernest (1996), em que os alunos seguiam determinadas orientações. Mas depressa notei que estes passaram a assumir o poder ou liderança, definindo, desde o início, o que queriam investigar e o processo a seguir, envolvendo-se numa abordagem investigativa, em que eu apenas escolhia a

situação de partida ou aprovava as escolhas deles; como tal, foi criado um ambiente em que todos os alunos se sentiram à vontade para apresentar conjecturas, argumentar contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que o seu raciocínio era valorizado (Ponte, Oliveira, Brunheira & Varandas, 1998).

Ressaltam ainda muitos outros aspectos que foram reforçados ao longo do tempo em decorreu o presente estudo, nomeadamente: o envolvimento cada vez maior dos alunos, manifestando um crescente entusiasmo e empenho na execução das tarefas, a auto-confiança, a criatividade, a autonomia (a dependência da professora foi gradualmente atenuada), a curiosidade (querer descobrir cada vez mais regras, regularidades ou padrões), os hábitos de trabalho e a persistência, tal como outros projectos já o demonstraram anteriormente (por exemplo, Projecto Matemática Para Todos, 1995/1999). Além disso, verificou-se uma diminuição no tempo de realização das actividades de investigação pelos alunos, derivada da maior familiarização destes com a dinâmica deste tipo de tarefas e, conseqüentemente, do aumento da sua autonomia.

Houve também grande mobilização dos conhecimentos matemáticos adquiridos, os quais tomaram valor para os alunos, quando estes sentiram que precisavam deles para realizarem as actividades que lhe eram propostas, à semelhança do que demonstraram outros estudos anteriores (Segurado, 1997). Deste modo, foi possível aos alunos melhorarem as aprendizagens mais elementares ou os conhecimentos mais básicos e estabelecer conexões com conhecimentos anteriores (números/operações), conhecimentos novos (transformações geométricas) ou outras áreas do conhecimento em geral, mais precisamente:

- Números pares e números ímpares
- Operações aritméticas básicas e seus termos
- Múltiplos de um número
- Propriedade distributiva
- Sequências
- Perímetros
- Áreas
- Polígonos regulares
- Simetria
- Figuras geometricamente iguais
- Translações/Rotações

- Sequência de Fibonacci

Assim, os alunos além de reconhecerem os conhecimentos já obtidos e de perceberem como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os «hábitos matemáticos de pensamento», adquiriram motivação e desenvolveram as capacidades que contribuem para um melhor e maior conhecimento de conceitos, facilitando as aprendizagens (Goldenberg, 1999; Jaworsky, 1994 e Pirie, 1987), tendo em conta o ambiente de aprendizagem vivo em que participaram activamente (Pirie, 1987). Os alunos experimentaram simultaneamente as capacidades básicas – como a memorização de conceitos e técnicas de cálculo e as capacidades de ordem superior – como conjecturar, argumentar e demonstrar, tal como afirmam Christiansen e Walter (1986).

Outra situação bastante relevante, e também focada pelos alunos do presente estudo, foi o desenvolvimento da capacidade de comunicação, quer de raciocínios, quer de ideias matemáticas, oralmente e por escrito, o que foi possível devido às discussões contínuas nos grupos e na turma bem como à realização continuada dos relatórios escritos das actividades realizadas. Na verdade, os alunos ao reflectirem sobre o trabalho desenvolvido, resumindo os dados recolhidos, trocando impressões sobre as experiências realizadas e sintetizando as conclusões resultantes, na forma de generalização, também puderam desenvolver um processo de metacognição, analisando de forma consciente o que fizeram e porque é que o fizeram, pondo em uso, mais uma vez, a sua capacidade de comunicação e de argumentação; o mesmo foi concluído nos estudos de Brunheira (2000), Fonseca (2000) e Oliveira (1998).

A qualidade na elaboração dos relatórios de investigação melhorou ao longo do tempo em que decorreu o trabalho com as actividades de investigação, já que inicialmente, talvez devido à falta de experiência dos alunos neste campo, valorizavam sobretudo os produtos dando pouco ênfase aos processos, incluindo somente algumas enumerações das descobertas feitas e poucas explicações das mesmas. É de considerar, mais uma vez, o papel de orientação que fui desempenhando, não interferindo nas descobertas e nas produções dos alunos, mas facilitando as discussões matemáticas de modo a ajudar o aluno a explicar o seu raciocínio (Yackel & Cobb, 1996); assumi uma presença essencialmente questionadora e voltada para o incentivo à promoção dos processos menos evidenciados pelos alunos – a justificação ou a prova. Contudo, a comunicação ainda constitui um aspecto a reforçar e a desenvolver neste grupo de estudo.

Os alunos também conseguiram progredir na sua capacidade de cooperação, no trabalho em grupo, entendendo que têm de trocar ideias uns com os outros, pois trabalhar em grupo não é apenas mudar a disposição dos elementos no espaço; verificaram-se mudanças nas atitudes de alguns alunos, tal como eles próprios indicaram:

- ⊙ *De um modo geral toda a gente colaborou; aprendi a trabalhar melhor em grupo.*
- ⊙ *Tivemos algumas discussões mas todos se empenharam e deram a sua opinião.*
- ⊙ *Em conjunto é mais fácil descobrirmos as coisas porque todos dão a sua opinião.*

É de destacar o espírito de entreajuda e a reflexão crítica que se estabeleceu entre todos os alunos. Não foram só os alunos com melhores classificações na disciplina que tiveram melhor desempenho. Vários dos alunos com maiores dificuldades envolveram-se nas actividades, conseguindo atingir os objectivos pretendidos.

Em alguns casos, modificaram as suas concepções relativas à Matemática, demonstrando um crescente interesse pela disciplina, evidenciado pelo seu empenho na realização das actividades de investigação e explicitado em algumas entrevistas:

- ⊙ *Vimos a disciplina de Matemática de uma forma diferente e mais fácil.*
- ⊙ *Eu gostei deste trabalho porque mais uma vez foi de investigação, e esses trabalhos eu adoro...*
- ⊙ *Aprendi que a Matemática está presente no que nos rodeia e nas mais variadas situações do dia-a-dia;*
- ⊙ *Interessante, porque é diferente do que costumamos fazer em Matemática, é como um jogo, onde aprendemos as noções matemáticas a brincar.*
- ⊙ *Eu antes não sabia que existia actividades de investigação mas desde que comecei a fazê-las acho que é um vício que eu tenho dentro de mim, pois cada vez que recebo uma folha com uma nova actividade fico logo ansiosa por descobrir a regra.*
- ⊙ *Acho que as actividades de investigação são como uma corrida, uma corrida que temos que ir treinando e treinando até que, cada vez, vamos conseguindo percorrer mais distância e as actividades de investigação quanto mais fazemos, mais facilidade temos para descobrir.*

A finalizar este ponto, pode afirmar-se que estes alunos conseguiram entrar no espírito do trabalho de investigação, envolvendo-se cada vez mais nas actividades desenvolvidas, além de que as suas descobertas já não surgiam apenas nas aulas em que realizavam actividades de investigação, transbordavam para outras situações, mesmo em aulas que mereceram um trabalho mais rotineiro, como a resolução de exercícios ou de outro tipo de questões. Como tal, e fazendo eco do último comentário dos alunos atrás registado, estou perfeitamente convicta de que estes alunos «ganharam a corrida» e

que esta corrida «não foi pequena». O prémio traduziu-se certamente na sua aquisição de *poder matemático*.

### **5.2.3. Actividades de investigação como metodologia para o desenvolvimento do currículo e para a motivação dos alunos**

As actividades de investigação permitiram aos alunos contactar com uma parte fundamental da Matemática (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999) que, usualmente, não lhes é dada a conhecer mediante a prática de outro tipo de actividades. Permitiu-lhes vivenciar o processo de criação matemática, no qual estiveram presentes uma actividade matemática genuína bem como os processos de produção do conhecimento que lhe são característicos (Silva, Veloso, Porfírio & Abrantes, 1999). Para além de toda a motivação e empenho que proporcionaram aos alunos participantes no presente estudo, a sua inclusão na prática pedagógica torna-se uma prioridade metodológica fundamental para o desenvolvimento do currículo.

Na verdade, alguns alunos participantes, ao trabalharem nas actividades de investigação, experimentaram momentos de prazer que lhes permitiram apreciar a Matemática, proporcionar-lhes uma maior confiança na abordagem dos problemas e dotá-los de maior flexibilidade no recurso aos conhecimentos já adquiridos. O mesmo foi observado por Matos (1991) num estudo realizado com alunos do 8º ano.

Da experiência feita, verificou-se ser possível explorar uma grande variedade de temas matemáticos, num ambiente de aprendizagem bastante favorável, com a valorização e o envolvimento pleno dos alunos. Através da actividade matemática investigativa, foi possível aos alunos construírem conceitos e adquirirem e/ou aprofundarem conhecimentos, estreitando, deste modo, a relação entre conteúdos e processos. Além disso, através desta metodologia, estes alunos também puderam desenvolver o seu poder de reflexão/argumentação e o seu raciocínio matemático, experimentando, de acordo com o seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais. Compreenderam, assim, que a Matemática vai além da aprendizagem de conceitos, procedimentos e suas aplicações e que, mais do que produzir respostas curtas e exactas, o trabalho em Matemática envolve muita reflexão, procura e análise de caminhos diferentes que possam conduzir à descoberta de relações, contrariando a visão dualista da Matemática do certo-ou-errado (Borasi, 1991). Deve, no entanto, salientar-se

que este estudo não se confinou a algumas experiências esporádicas com actividades de investigação; pelo contrário, envolveu um trabalho continuado, ao longo de um ano lectivo. Com efeito, a realização destas actividades de forma isolada e dispersa, apesar de ser interessante e enriquecedora, não abala por si só concepções e práticas já enraizadas (Abrantes, Ponte, Fonseca, & Brunheira, 1999).

Por outro lado, tal como outros autores já concluíram (Oliveira, Ponte, Cunha & Segurado, 1997), as tarefas de exploração e de investigação estão ao alcance de todos os alunos e não apenas dos melhores, o que se tornou evidente também com alguns alunos que participaram neste estudo.

Convém, no entanto, assinalar que o professor exerce um papel influente neste tipo de trabalho, mais precisamente na forma como o conduz, orientando os alunos com uma atitude questionadora, mas deixando-os livres na procura das suas descobertas, de modo a criar um ambiente propício à aprendizagem em que o raciocínio é francamente valorizado (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998). O professor deixa de ter o controlo total sobre a condução da aula (Ernest, 1991/1996), um cenário que acarreta exigências acrescidas, quer pedagogicamente, quer ao nível dos conhecimentos matemáticos (Goldenberg, 1999). Ainda assim, com a realização deste estudo, foi possível à professora/investigadora desenvolver uma intensa reflexão e investigação sobre a sua prática pedagógica que promoveu o crescimento do seu conhecimento profissional. Encontrei formas e oportunidades de mudança e de inovação ao integrar as actividades de investigação na minha prática lectiva e ao proporcionar aos meus alunos momentos de entusiasmo, motivação e de verdadeira actividade matemática com todos os processos de raciocínio que lhe estão inerentes.

### **5.2.3. Voltando ao raciocínio matemático**

Face às conclusões apresentadas, e dando resposta às questões de investigação, considero possível afirmar que os alunos apresentam formas diferenciadas de raciocínio, que evidenciam os seguintes processos: concretização de dados; registo e organização de dados; procura de regularidades e padrões; formulação e justificação de conjecturas; teste e validação de conjecturas, particularização/clarificação e generalização. De notar que, embora estes processos se enunciem aqui de forma isolada, muitas vezes ocorreram em simultâneo no decurso das actividades (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006). Porém,

nem todos os alunos funcionaram da mesma maneira ao longo de todo este trabalho investigativo. Para alguns, a execução de determinados processos foi uma preocupação constante e uma intenção deliberada, enquanto para outros surgiu pontualmente. Assim, se alguns alunos revelaram grande facilidade, regularidade e persistência na formulação, teste e confirmação ou refutação de conjecturas, além de uma tendência para as formalizar algebricamente, justificando o seu raciocínio, houve outros que se restringiram à formulação de algumas conjecturas, acompanhando e compreendendo, no entanto, os processos dos seus colegas. De notar que estes últimos alunos também foram aqueles que evidenciaram maior necessidade de manuseamento dos materiais e de experimentação da situação no processo de concretização dos dados, nem sempre conseguindo libertar-se deste processo e fazer o salto para a generalização, tal como sugere Mason (1999). Se o faziam, socorriam-se, muitas vezes, de exemplos genéricos ou particulares (Mason & Pimm, 1984). Os alunos que conseguiram ultrapassar o processo de concretização dos dados, recorreram a algumas formas de representação, nomeadamente: a escrita simbólica, o recurso a palavras, a elaboração de listagens, o desenho e pintura de figuras, a elaboração de esquemas e os registos algorítmicos.

O processo de registo e organização de dados foi usual em todos os grupos, embora numa fase inicial da investigação tenha sido sugerido e incentivado por mim. De realçar, no entanto, que veio a ser aperfeiçoado ao longo do tempo; deste modo, se inicialmente os dados surgiam um pouco ao acaso, posteriormente, passaram a ser registados de uma forma lógica, sistemática e pertinente, revelando uma apropriação da actividade, a partir do estabelecimento autónomo das relações entre os aspectos matemáticos do problema e o seu contexto (Hung 1998).

Verificou-se, contudo, que no desenrolar da investigação nem todos os alunos adoptaram este processo pelas mesmas razões. Como tal, embora a maioria deles o utilizasse por reconhecer a sua importância na descoberta de regras, outros tiraram pouco proveito dele, utilizando apenas as tabelas porque os materiais manipuláveis não eram suficientes para visualizarem o pretendido.

A procura de regularidades e padrões ao longo de todo este trabalho investigativo também não resultou da mesma forma; enquanto alguns alunos, esporadicamente, apenas descobriam casos mais simples (talvez pela falta de domínio de alguns procedimentos ou conhecimentos matemáticos, nomeadamente a divisão ou as propriedades das operações) outros, ao analisar as relações entre a ordem e o termo das seqüências, estabeleceram algumas regularidades e padrões com grande

espontaneidade, perspicácia e flexibilidade, num processo que se tornou bastante frequente e rico. Houve mesmo alunos que exibiram raciocínios bastante originais e mesmo inesperados, demonstrando a capacidade de ver e explicar estruturas matemáticas para além dos dados nas tabelas.

Muitos alunos não se contentaram apenas com a descoberta das conjecturas, quiseram prová-las, reformulá-las ou refiná-las e entendê-las no contexto da actividade, verificando-se, deste modo, as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999). No entanto, a justificação e a prova de conjecturas parecem precisar de mais tempo para serem interiorizadas pelos alunos, visto não surgirem tão frequentemente e regularmente com alguns alunos do que com outros.

Como já foi salientado, certos alunos, ao tentarem atingir algum grau de generalização, «socorreram-se», muitas vezes, de exemplos particulares ou especiais (particularização/especialização), conseguindo fazer a transição entre o exemplo genérico e a generalização. Por outro lado, houve alunos que, com a construção de representações mais poderosas, nomeadamente de tabelas, em que a disposição dos dados lhes permitiu identificar relações entre as entradas, quer por linhas quer por colunas, conseguiram evoluir nitidamente no processo de generalização.

Quanto ao modo como os raciocínios dos alunos lhes permitiram chegar a resultados, podemos referir que nem sempre recorreram a conteúdos matemáticos tratados nas aulas, surgindo, inclusivamente, a oportunidade de abordar novos conteúdos face às descobertas dos alunos, nomeadamente as rotações e as translações, as simetrias e as sequências, incluindo a sequência de Fibonacci. No que diz respeito aos conteúdos tratados nas aulas, salientarei os mais utilizados, que foram: os números pares e ímpares, os múltiplos de um número (ou as tabuadas, como eram referidos por alguns alunos) e as operações aritméticas básicas e os seus termos. Mesmo na obtenção dos resultados, com o recurso ou não aos conteúdos tratados nas aulas, verificou-se grande diversidade nas formas de resposta dos alunos. Assim, como já foi referido, enquanto alguns alunos conseguiram ser mais «esquemáticos», outros conseguiram ser mais «descritivos», demonstrando a capacidade de traduzir verbalmente (utilizando palavras) as suas conclusões e a sua compreensão das questões; outros ainda, embora em menor número, mostraram resultados mais «formais» ou «algébricos», apresentando maior capacidade de abstracção e passando a uma fase mais imediata de determinação do termo ou expressão algébrica relativa às situações em causa; contudo, em algumas

situações, as diversas formas de representação citadas complementaram-se na elaboração de resultados.

No que diz respeito à(s) forma(s) como os alunos compreendem as situações propostas (as descodificam) e de que modo essa apropriação evolui com o decorrer da prática neste tipo de actividades, poderei mencionar que os alunos passaram sempre por uma fase inicial de experimentação, fosse com a manipulação dos materiais e realização de contagens, fosse com a concretização da situação, como por exemplo o subir escadas; globalmente, estiveram muito presentes as estratégias não explícitas, referidas por Healy & Hoyles (1999), que tiveram um papel preponderante na apropriação da actividade pelos alunos. Saliento igualmente que nem todos os alunos demoraram o mesmo tempo a perceber o sentido e a obter uma compreensão efectiva das situações propostas. Outra forma de familiarização com o sentido da tarefa foi o registo de dados, quer em tabelas, quer com o recurso a representações menos convencionais, como desenhos ou notações pessoais, tal como referem Ponte & Serrazina (2000).

Com o decorrer da realização das actividades de investigação, a tendência de experimentação foi diminuindo gradualmente. Em muitos casos, os alunos depressa partiam para o registo e organização dos dados em tabelas, procurando extrair dos mesmos relações que conduzissem a conclusões.

Além disso, os alunos cada vez mais estabeleciam uma interacção entre a particularização e a generalização, raciocinando matematicamente através de uma forma que alguns autores descrevem como um pensamento em espiral, o qual pode assumir múltiplas variantes – a não linearidade, referida por Brocardo (2001) e as transições da *manipulação* para a *clarificação* e para a *representação*, com vista a uma nova manipulação mais convincente (Mason, 1999). Assim, pelos resultados obtidos, infere-se também que a diversidade dos raciocínios matemáticos está associada à forma como se processa a referida interacção, bem como ao modo de lidar com as representações que permitem passar de objectos para *objectos matemáticos* (Mason 1999).

Deste modo, e pela diversidade de raciocínios apresentada, podemos afirmar que não há «o» raciocínio matemático, mas sim uma multiplicidade de formas de raciocinar ou de raciocínios. Embora alguns raciocínios apresentem formas mais «avançadas», com o recurso a estruturas algébricas que evidenciam maior capacidade de abstracção, não é possível escamotear o facto de que muitos outros modos de pensar matematicamente têm um papel legítimo e importante, constituindo modos eficazes de desenvolver trabalho investigativo para muitos alunos. Mais do que propor uma

hierarquização de raciocínios matemáticos, interessa considerar e valorizar a sua diversidade e analisar a sua presença num todo complexo. Utilizando uma metáfora da Física, parece útil pensar nesse todo como se fosse um espectro solar (o raciocínio na sua complexidade) que se decompõe em múltiplas radiações diferenciadas (os diferentes raciocínios matemáticos).

Face à evolução do desempenho dos alunos na realização das actividades de investigação, podemos concluir que foram particularmente propícias ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Aliás, Tanner & Jones (1997) defendem que as capacidades de pensamento matemático se aprendem sobretudo num contexto de problemas abertos. Na mesma linha, Pirie (1987) considera que uma boa investigação faculta a exploração e a exposição do pensamento matemático. Para esta autora, as investigações matemáticas desenvolvem a aprendizagem de processos matemáticos, ou seja, dos modos de pensar que são independentes das tarefas ou dos conteúdos.

Mais ainda, conforme exprime Cunha (1998), citado em Santos, Brocardo, Pires & Rosendo (2002), as investigações, no geral, e em particular a investigação matemática, motiva os alunos, ajudando-os a desenvolver o seu raciocínio.

A finalizar este ponto, e cruzando a investigação relevante neste campo com a minha própria investigação, destacarei que o raciocínio matemático também se aprende e se constrói em grupo, não sendo um fenómeno estritamente cognitivo. Efectivamente, numa fase inicial, era evidente que os alunos não sabiam o que era fazer conjecturas, nem tão pouco estavam despertos para a descoberta de regularidades ou padrões ou mesmo para a determinação de uma expressão algébrica. Com a prática neste tipo de actividades, começaram e continuaram a formular variadas conjecturas, percebendo também a utilidade do uso de tabelas ou de outras formas de representação dos dados. Efectivamente, posso concluir que os alunos são capazes de pensar matematicamente; cabe ao professor desafiá-los adequadamente e apostar nesse objectivo com toda a convicção.

Na verdade, há que compreender que os alunos, embora não enveredem todos pelo mesmo caminho, conseguem ser eficazes nos seus processos de resolução, sejam eles mais «esquemáticos», mais «verbais» ou mais «algébricos», recorrendo ou não aos conteúdos leccionados ou já aprendidos. Além disso, as discussões e as reflexões individuais ou conjuntas sobre as actividades desenvolvidas também contribuem para a clarificação do pensamento matemático e para a sua formalização e abstracção.

Competirá ao professor assumir o desafio de dinamizar aulas com actividades de investigação, estando preparado para enfrentar situações imprevistas e adoptando uma atitude flexível e confiante, quer no domínio dos conteúdos e processos matemáticos, quer na gestão das diferentes interacções e fases do processo investigativo. Também é preciso envolvermo-nos nos prazeres do pensamento matemático que provêm da energia libertada quando verificamos que as «coisas» que, aparentemente nada tinham a ver umas com as outras, estão na verdade relacionadas (Mason, 1999).



## REFERÊNCIAS

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Abrantes, P. et al. (1996). *Investigar para Aprender Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Leal, L. & Ponte, J. P. (1996). Introdução. In P. Abrantes, L. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 1-4). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H. & Brunheira, L. (1999). Introdução. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp. 1-12). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J.P., Fonseca, H. & Brunheira, L. (Orgs.) (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica (DEB).
- Alvarenga, D. L. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.
- Amaral, H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática no 1º Ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Amaro, G., Cardoso, F. & Reis, P. (1994). *Terceiro Estudo Internacional de Matemática e Ciências, Relatório Internacional, Desempenho de alunos em Matemática e Ciências: 7º e 8º anos*. Lisboa: IIE.
- Amorim, I. & Matos, J. F. (1990). Actividades Investigativas em Matemática: Porquê, Para Quê, Como?. In P. Abrantes & A. Silva (Orgs.). *PROFMAT 90 – Actas*, vol. I, (p. 155-172). Lisboa: APM
- Anderson, G. (1990). *Fundamentals of educational research*. London: The Falmer Press.
- Anderson, J. (1990). Coin-turning: anatomy of an investigation – part 1. *Mathematics teaching*, nº 131, pp. 8-11.
- APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14(3), pp. 24-35.
- Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ball, B. (2007). What is Mathematical Thinking?. *Mathematics Teaching*, Nº 181, pp. 17-19.
- Barbosa, E. M. (2007). *A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM.
- Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 10, pp. 361-387.
- Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*, (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender para raciocinar. *Educação e Matemática*, nº 100, p. 1.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borasi, R. (1991). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Borrvalho, A. (1993). Matemática e resolução de problemas. In L. S. Almeida, J.A. Fernandes & A.P. Mourão (Orgs.), *Ensino-Aprendizagem da Matemática: Recuperação de alunos com baixo desempenho*, (pp. 33-42). Braga: Didáxis.
- Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.
- Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação na*

- Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, (pp. 5-24). Lisboa: SPCE.
- Brocardo, J. (2001) *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students's reasoning processes in problem solving situations. In C. Laborde, M-J. Perrin-Glorian & A. Sierpinska (Eds). *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom*, (pp. 13-58). Dordrecht: Springer.
- Brown, T. (1994). Towards a hermeneutical understanding of mathematics and mathematical learning. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education* (pp. 141-150), London: The Falmer Press.
- Brown, C. A. & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grows (Org.), *Handbook of research on teaching and learning mathematics*, (pp.209 - 239). New York, NY: Macmillan.
- Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professoras estagiárias face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Brunheira, L. (2002). O estágio e o projecto de formação em didáctica da Matemática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (pp.189-213). Lisboa: APM, GTI.
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), pp. 35-49.
- Carreira, S. (2007). Do Castelo de Marvão à Cidade do Sado – Trilhos da Matemática Escolar. *Educação e Matemática*, nº 92, pp. 3-9.
- Cavaye, A. L. M. (1996). Case study research: a multi-faceted research approach for IS. *Information Systems Journal*, 6, pp. 227-242.
- César, M., Torres, M., Rebelo, M., Castelhana, A., Candeias, N., Candeias, A., Caçador, F., Coração, R., Gonçalves, C., Sousa, R., Malheiro, L., Fonseca, S., Martins, H. & Costa, C. (2000). Interacções na aula de Matemática. Em C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J.P. Ponte, J. Matos e J.L. Menezes (Orgs), *Interacções sociais e Matemática: ventos de mudança nas práticas de sala de aula*, (pp. 47-83) Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.
- Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 32, nº 3, pp. 201-228.

- Christiansen, B. e Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Cobb, P., Wood, T. & Yackel (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E.A. Forman, N. Minick e C.A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO
- Coutinho, C. & Chaves, J. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, Vol. 15, nº 1, pp. 221-243.
- Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de Matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. (Col. Ciência Aberta). Lisboa: Gradiva.
- DEB (2000). *Provas de Aferição do Ensino Básico 4º Ano – Relatório Nacional*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Descombes, R. (2004). *La magie du carré: le carré dans tous ses éclats*. Paris: Vuibert.
- Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Dewey, J. (1910/1997). *How we think*. New York : Dover Publications, Inc.
- Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: an introduction to the philosophy of education*. London: Mac Millan.
- Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: D.C. Heath and Company.
- Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, 3, pp. 289-301.
- Dioxiadis, A. (2001). *O Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*. Lisboa: Publicações Europa-América.

- Domingos, A. (2001). *Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado*. In D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos & I. L. Vicente (Eds.), *Matemática e Comunidades: a diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática* (Actas do X Encontro de Investigação em Educação Matemática), (pp. 113-128). Lisboa: SPCE e IIE
- Dooley, L.M. (2002). Case Study Research and Theory Building. In *Advances in Developing Human Resources*, Vol. 4, nº 3, pp. 335-354.
- Duarte, J. B. (2008). Estudos de caso em educação. Investigação em profundidade com recursos reduzidos e outro modo de generalização. *Revista Lusófona de Educação*, nº 11, pp. 113-132.
- Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, 14(4), pp. 532-550.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-48). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Flato, M (1994). *O poder da Matemática*. Lisboa: Terramar.
- Flyvbjerg, B. (2004). Five misunderstandings about case-study research. In C. Seale, G. Gobo, J. F. Gubrium & D. Silverman (Eds). *Qualitative Research Practice*, (pp. 420-434). London: Sage Publications.
- Fonseca, C. (1999). *Interações em pequenos grupos em resolução de problemas e actividades investigativas na aula de Matemática: uma experiência no 8º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa. APM.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Fonseca, H (2002). Aprender a ensinar investigando. In GTI (Org.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.177-188). Lisboa: APM, GTI.
- Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. In APM (Ed). *Actas do ProfMat99*, (pp. 91-101). Lisboa: APM.
- Francisco, J.M. e Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 24, pp. 361-372.
- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A. Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics*, (pp. 150-173). London: Cassel.

- Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction* (6<sup>th</sup> ed.). White Plains, NY: Longman.
- GAVE (2004). *Resultados do estudo internacional Pisa 2003*. Lisboa: Ministério da Educação.
- GAVE (2008). Documento de trabalho para reunião entre supervisores e professores classificadores. (Documento não publicado).
- GAVE (2009). Documento de trabalho para reunião entre supervisores e professores classificadores. (Documento não publicado).
- Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp. 35-49). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projecto Matemática Para Todos.
- Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, n° 7 (4), pp. 293-307.
- Guimarães, H. M. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas. Actas do Encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes*, (pp. 145-166). Lisboa: APM.
- Hatch, G. (1995). If not investigations – What?. *Mathematics Teaching*, n° 151, pp. 36-39.
- Healy, L. & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 1, pp. 59-84.
- Herling, R. W., Weinberger, L. & Harris, L. (2000). *Case study research: Defined for application in the field of HRD*. St. Paul: University of Minnesota, Human Resource Development Research Center.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.67-97). New York: Macmillan.
- Hirsh, K. (1971). Creativity in classroom: A discussion of the place of original work in a mathematical education. *International Journal for Mathematics Education, Science and Technology*, Vol.2, pp.21-29.
- Holding, J. (1991). *The investigations book*. Cambridge: University Press.
- Hung, D. (1998). Meanings, contexts, and mathematical thinking: the meaning – context model. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (3), 311-344.
- Hung, D. (2000). Some insights into the generalizing of mathematical meanings. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.19, pp. 63-82.

- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry*. London: Falmer Press.
- Jesus, A. M. (2004). *As actividades matemáticas de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. Perspectivas e envolvimento dos alunos*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new álgebra. In T. Romberg & E. Fennema (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Kardos, G. & Smith, C. O. (1979). On writing engineering cases. *Proceedings of the American Society for Engineering Education National Conference on Engineering Case Studies*. Ottawa, Ontario, Canada.
- Kenney, P. A., Zawojewski, J. S. & Silver, E. A. (1998). Marcy's dot pattern. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, pp. 474-477.
- Kissane, B. V. (1988). Mathematical investigation: description, rationale, and example. *Mathematics Teacher*, October 1988, pp. 520-528.
- Lakatos, I. (1991). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solutions is not the answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal* 27, nº 1, Spring: pp. 29-63.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), pp. 231-258.
- Lappan, G. & Schram, P. (1989). *Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics*. In P. R. Trafton e A. P. Shulte (Eds.). *New directions for elementary school Mathematics: 1989 Yearbook* (pp. 14-30). Reston, VA: NCTM.
- Lee, L. (1996). Initiation into algebraic culture: Generalization. In L. Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. New Jersey: Prentice Hall.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.

- Love (1996). Avaliando a actividade matemática. In P.Abrantes, L.C. Leal & J.P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados* (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT & APM. (Texto original em inglês de 1988).
- Lüdke, M. & André, M. E. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Lynham, S. A. (2002). The general method of theory-building research in applied disciplines. *Advances in Developing Human Resources*, 4(3), pp. 221-241.
- Maher, C.A. & Martino, A.M. (1996a). The development of the idea of mathematical proof: A 5 –year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), pp. 194-214.
- Maher, C.A. & Martino, A.M. (1996b). Young children invent methods of proof: The «Gang of Four». In P. Nesher, L.P. Steffe, P. Cobb, B. Greer & J. Goldin (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431-447). Mahwah, N.J: Lawrence E. Erlbaum Associates.
- Marques, L. & Praia, J. (1991). Ensino-aprendizagem das Ciências: Possíveis contributos para reflexão. *Aprender*, 14, pp. 11-18.
- Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I. & Pires, M. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. In J. P. Ponte., C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, (pp. 59-81). Lisboa: SPCE.
- Mason, J. (1996a). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados, e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Mason, J. (1996b). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Mason, J. (1999). *Learning and Doing Mathematics* (2<sup>nd</sup> edition). York: QED.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.
- Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 15, pp. 277-289.
- Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

- Matos, J. F. & Carreira, S (1994). Estudos de casos em educação matemática: problemas actuais. *Quadrante*, 3(1), pp. 19-53.
- ME-DEB (1977). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Mendes, E. (1997). *A actividade escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula: Implicações para a aprendizagem* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Mendes, E. (2001). A propósito de actividade. *Educação Matemática*, n.º 61, pp.36-39.
- Menezes, L. (1999). Matemática, linguagem e comunicação, *Actas do ProfMat 99* (pp.71-81). Lisboa: APM.
- Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education – a qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Merseeth, K. K. (1994). *Cases, case methods, and the professional development of educators*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED401272).
- Mestre, R. F. (2005). *As actividades de investigação na formação de alunos matematicamente competentes – Um estudo no 1º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.
- Mestre, R. & Matos, J. F. (2005). As actividades de investigação na formação de alunos matematicamente competentes – uma experiência no 1º ciclo. In J. Brocardo, F. Mendes & A.M. Boavida (Orgs.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas*. (pp 205-218). Lisboa: GTI, APM.
- Miallaret, G. (1985). *Introduction aux sciences de l'éducation*. Lausanne: Unesco-Delachaux e Niestlé.
- Millington, J. (2003). *Petiscos matemáticos*. Lisboa: Replicação.
- Ministério da Educação (1986). *Lei de Bases do Sistema Educativo*.
- Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem – 2º ciclo do ensino básico* (volume II). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem – 3º ciclo do ensino básico* (volume II). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Ministério da Educação (1993/94). *Matemática: programas (ensino secundário)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Ministério da Educação (1997). *Matemática: Programas – 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

- Ministério de Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.
- Moreira, L. (2008). Resolvo problemas, logo penso. *Educação e Matemática*, nº 100, pp. 11-17.
- Morgan, C. (1997). The institutionalization of open-ended investigation: some lessons from the U.K. experience. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 49-62). Helsinki: University of Helsinki.
- NCTM (1980/1985). Agenda para acção: recomendações para o ensino da matemática nos anos 80. Lisboa: APM (Trabalho original em Inglês, publicado em 1980).
- NCTM (1989/1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989).
- NCTM (1991/1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1991).
- NCTM (2000/2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000).
- Neves, J. L. (1996). Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. *Caderno de pesquisas em administração*, Vol.1, nº 3, 2º Sem, pp. 1-5.
- Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11- 47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Presses Universitaires de France.
- Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: aspectos da prática do professor* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, nº 100, pp. 3-9.
- Oliveira, H., Ponte, J. P., Cunha, M. H. & Segurado, I., (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. In V. Zack, J. Mousley & C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teacher's inquiry and educational change*, (pp. 135-142). Geeolng: Centre for the Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.
- Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L. & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: APM.

- Oliveira, H. M., Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1996). Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp.207-213). Lisboa: APM.
- Oliveira, H. M., Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1998). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da sala de aula. In SPCE (Ed.), *Desenvolvimento Curricular em Matemática*, (pp. 107-125). Portalegre: SPCE.
- Oliveira, H. M., Segurado, M. I. & Ponte, J. P. (1999). Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp. 175-182). Lisboa. Projecto MPT e APM.
- Oliveira, H., Segurado, M.I., Ponte, J.P. & Cunha, M.H. (1999). Investigações Matemáticas na sala de aula: Um projecto colaborativo. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp.121-131). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Orton, A. (1999) (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.
- Orton, A. & Frobisher, L. (1996). *Insights into Teaching Mathematics*. London: Cassell.
- Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). Londres: Cassel.
- Palhares, P. & Mamede, E. (2002). Os padrões na Matemática do Pré-escolar. *Educare-Educere*, 10, pp. 107-123.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom*. London: The Open University.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. Cunha Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 7-13). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projecto Matemática Para Todos. (Trabalho original em Francês, publicado em 1908).
- Pólya, G. (1967). *La Découverte des Mathématiques* (Tome 2). Paris: Dunod.
- Pólya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: patterns of plausible inference* (vol II). Princeton: Princeton University Press.
- Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- Ponte, J. P. (1994). O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3(1), pp. 3-18.

- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. In GTI (Org.), (pp. 5-28). Lisboa: APM., GTI.
- Ponte, J. P. (2003a). O Ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In CNE (Org.), *O Ensino da Matemática: situações e perspectivas*, (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Ponte, J. P. (2003b). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.
- Ponte, J. P. (2003c). Investigar, ensinar e aprender. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do Profmat 2003*, (pp. 25-39). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp.11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A.P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.
- Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, nº 100, pp. 89-96.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Ponte, J. P., Costa C., Rosendo, A. I., Maia, E., Figueiredo, N. & Dionísio, A. F. (2002). Introdução. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.) *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, (pp. 1-4). Lisboa: SPCE.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfírio & M. Baía (Orgs.). *Proceedings of CIEAEM 49*, (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1991). Cognitive Processes and Social Interactions in Mathematical Investigations. In J. Ponte (Ed.), *Problem Solving: Research in Context of Practice* (pp. 239-254). New York: Springer-Verlag.
- Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 119-137). Lisboa: Projecto MPT e APM. (Publicado originalmente em inglês em 1992).
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, Vol.7, nº2, pp. 41-70.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A. Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática: como têm evoluído. *Educação e matemática*, nº 50, pp. 32-38.
- Porfírio, J. & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111- 118). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Projecto Matemática Para Todos.
- Punch, K. (1998). *Introduction to Social Research: Quantitative & Qualitative Approaches*. London: SAGE Publications.
- Putnam, R., Lampert, M. & Peterson, P. L. (1990). Alternative perspectives of knowing mathematics in elementary schools. *Review of research in education*, 16, 57-143.
- Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a Matemática. Caracterização da participação dos alunos portugueses no «Second International Assessment of Educational Progress»*. Lisboa: DEPGEF.
- Ridgway, J. (1988). *Assessing mathematical attainment*. Windsor: NFER-NELSON.
- Rocha, A. (2002). Os alunos de Matemática e o trabalho investigativo. In GTI (Org.). (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (pp. 99-124). Lisboa: APM.
- Rocha, A. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática: competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado, Universidade do Porto.

- Ruthven, K. (2000). Mathematics teaching, teacher education and educational research: Developing «practical theorizing» in initial teacher education. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Orgs.). *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 165-184). Dordrecht: Kluwer.
- Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte., C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio, (Orgs.), *Actividades de Investigação na aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, (pp. 83-106). Lisboa: SPCE.
- Saraiva, M. J. (2001). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Um projecto colaborativo*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, Vol. 23, nº1, pp. 4-8.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Segurado, M. I. (1997) *A investigação matemática como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Segurado, I. & Ponte, J.P. (1998). Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), pp. 5-40.
- Semana, S. & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática*, nº 100, p. 51-60
- Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In J. P. Ponte., C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*. (pp. 41-57). Lisboa: SPCE.
- Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. & Abrantes, P. (1999). O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 69-86). Lisboa: APM.

- Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 1º volume*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento.
- Silva, J. S. (1978). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (Vol. 2 e 3)*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.
- Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, pp. 66-91.
- Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout the K12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (Eds.). *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.
- Sousa, M.O. (2002). Investigações estatísticas no 6ºano. In GTI (Orgs.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 147-164.
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behaviour*, Vol. 24, Nº (3-4), pp. 341-350.
- Stake, R. E. (2005). *Investigación com estudio de casos*. (Tradução do original de 1995). Madrid: Morata
- Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, (pp. 37-44). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tanner, H. & Jones, S. (1995). Teaching mathematical thinking skills to accelerate cognitive development, *Proceedings of PME-19*, Vol. 3, pp. 121-128. Recife, Brasil.
- Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., Segurado, I. & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J.P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A.Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavaro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE, Secção de Educação e Matemática.
- Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática – Propostas*

*curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Projecto Padrões.

- Verschaffel, L.A. (1997). Teaching realistic mathematics modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), pp. 577-601.
- Warren, E. & Cooper, T. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In I. Vale, A. Barbosa, A. Borralho, E. Barbosa, I. Cabrita, L. Fonseca & T. Pimentel. (Eds). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática – Propostas curriculares para o ensino básico* (pp. 6-11). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Projecto Padrões.
- Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. & Merckel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática*, Nº 18, pp. 17-21.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding of mathematical argumentation*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), pp. 458-477.
- Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2ª Ed). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.
- Yin, R. K. (2005) (Ed). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Sítios da Internet consultados:

<http://www.mathsnet.net/puzzles/leapfrog/index.html>

[http://www.cijm.org/index.php?Itemid=12&id=182&option=com\\_content&task=view](http://www.cijm.org/index.php?Itemid=12&id=182&option=com_content&task=view)

## **ANEXOS**

### Actividade de Investigação

---

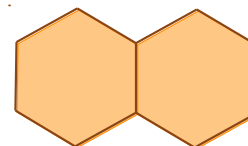


#### «Vamos unir hexágonos regulares»

Os hexágonos regulares são figuras já tuas conhecidas. Podes lembrar-te, por exemplo, dos favos das abelhas e reparar que parecem hexágonos regulares unidos uns aos outros pelos seus lados.

Hoje também vais unir hexágonos, fazer medições e algumas descobertas.

Na figura ao lado, unimos dois hexágonos, regulares pelos seus lados.



Se quisermos enfeitar a figura que obtivemos, contornando-a com uma fita

bem juntinha aos seus lados, vamos precisar de uma fita com comprimento igual a 10 lados do hexágono regular.

1. Constrói uma figura unindo quatro hexágonos regulares pelos seus lados.
2. Para enfeitar da mesma forma a figura que construístes, que tamanho deve ter a fita?
3. Existirão figuras, formadas por quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados, que possam ser enfeitadas, por fitas com o mesmo tamanho? **Investiga.**

Regista as figuras que construístes na malha hexagonal e comenta as tuas descobertas.

Actividade de Investigação

Os saltos das rãs



No início da actividade, as rãs azuis encontram-se à esquerda e as rãs verdes à direita.

Tens de trocá-las (as azuis passam para a direita e as verdes para a esquerda).



**Regras:**

- As azuis só se podem mover para a direita e as verdes só se podem mover para a esquerda.



- Cada rã só pode mover-se para o lugar que estiver desocupado imediatamente a seguir.



- Cada rã só pode saltar por cima de uma outra e não mais do que uma.



Experimenta com 3 rãs azuis e 3 rãs verdes. Para tal, podes utilizar o applet (aplicação interactiva)

existente no seguinte site da internet: <http://www.mathsnet.net/puzzles/leapfrog/index.html>

Dá sempre o mesmo número de movimentos?

Como será com um número diferente de rãs?

És capaz de encontrar uma regra para determinar o número mínimo de movimentos?

Investiga.

### Actividade de Investigação

---



Na nossa turma temos uma rapariga que se chama Adriana.

Se o nome Adriana for escrito repetidamente, assim:

### **ADRIANAADRIANAADRIANAADRI**

1. Qual é a **39<sup>a</sup>** letra?
2. Qual é a **105<sup>a</sup>** letra?
3. Quantas vezes aparece o nome “Adriana” completo se utilizarmos **58** letras?
4. És capaz de determinar uma regra que permita saber quantas letras são necessárias para que a sequência do nome esteja sempre completa até à última letra deste?
5. Se tivermos uma sequência com **16 “A”**, quantas vezes se encontra repetido o nome “**ADRIANA**”? E em que letra pode terminar a sequência?
6. E com **35 “A”**, quantas vezes se encontra repetido o nome “**ADRIANA**”? E em que letra pode terminar a sequência?
7. És capaz de descobrir uma maneira de determinar o número da posição de qualquer letra **A**, seja ela a primeira do nome, a segunda ou a terceira?
8. E em relação aos “**Ás**” consecutivos, és capaz de verificar alguma coisa?

**Nota: Expliquem como chegaram às vossas respostas.** Podem fazê-lo utilizando palavras, esquemas ou cálculos.

Actividade de Investigação

---

**BERLINDES I**



Um saco de berlindes contém berlindes azuis, verdes e brancos.

O número de berlindes brancos é o dobro do número de azuis.

O número de azuis é o triplo do número de verdes.

Cria 4 sacos de berlindes diferentes que estejam de acordo com estas informações.



Agora, observa os teus sacos de berlindes.

1. Encontras alguma relação entre os totais de berlindes dos quatro sacos? Qual?
2. E entre o número de berlindes brancos e o número de berlindes verdes, encontras alguma relação?
3. Será que um saco destes poderia ter um total de 100 berlindes? E de 150 berlindes? E de 13? E de 55? Justifica as tuas respostas.
4. Procura uma forma de dares TODOS os totais de berlindes possíveis.
5. Será que consegues descobrir uma propriedade para todos os números possíveis de berlindes AZUIS?
6. Será que consegues descobrir uma propriedade para todos os números possíveis de berlindes BRANCOS?

Actividade de Investigação

---

**BERLINDES II**



Um saco de berlindes contém berlindes roxos, azuis, verdes e brancos.

O número de roxos é igual ao número de verdes.

O número de berlindes brancos é o dobro do número de azuis.

O número de azuis é o triplo do número de verdes.

Cria 4 sacos de berlindes diferentes que estejam de acordo com estas informações.



1. Encontras alguma relação entre os totais de berlindes dos quatro sacos? Qual?
2. Será que um saco destes poderia ter um total 100? E de 111? E de 121? E de 132?
3. Consegues determinar o nº total de berlindes imediatamente a seguir a 132? Explica como fizeste.
4. Procura uma forma de dares todos os totais de berlindes possíveis.

## Actividade de Investigação

---

### As escadas

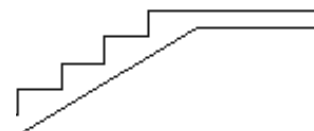
A casa do Paulo tem uma escadaria com 4 degraus. O Paulo sobe-a de diversas maneiras, dando passos simples (de um degrau) ou duplos (de dois degraus - saltando por cima de um degrau).



Passos simples



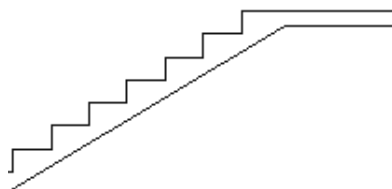
Passos duplos



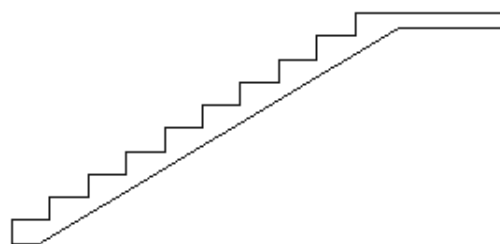
Escadaria do Paulo

1. De quantas maneiras diferentes pode o João subir as escadas nestas circunstâncias?

2. E se a escadaria tivesse 7 degraus? Quantas maneiras diferentes haveria?



3. E se a escadaria tivesse 10 degraus?



4. Consegues descobrir alguma regra ou regularidade?

## Actividade de Investigação

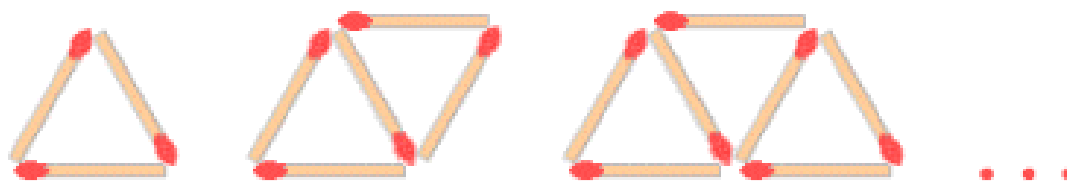
---

### Fósforos na construção de triângulos

Com 3 fósforos podes construir um triângulo de perímetro 3.

Com 5 fósforos podes construir uma figura, formada por dois triângulos, com perímetro 4.

Com 7 fósforos podes construir...



1. Quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por 10 triângulos?
2. Por quantos triângulos é formada a figura que se contrói com 51 fósforos? Qual é o perímetro dessa figura?
3. Se o número de fósforos for muito maior, haverá alguma regra que facilite a descoberta do número de triângulos e do perímetro da figura correspondente? Explica como encontraste essa regra.

## Anexo 8

### Actividade de Investigação

---

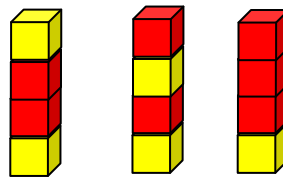
#### Torres de Cubos

Temos uma grande quantidade de cubos amarelos e de cubos vermelhos.

Com os cubos vamos construir torres, empilhando um cubo sobre outro cubo.

A única condição a respeitar é que nunca poderão estar dois cubos amarelos juntos.

Exemplos de algumas  
torres com 4 de altura.



Pode haver uma torre  
só de cubos vermelhos.

Então, investiga:

Quantas torres diferentes se podem fazer:

- Com 1 de altura?

- Com 2 de altura?

- Com 3 de altura?

- Com 4 de altura?

- Com 5 de altura?

....

- Com 20 de altura?

Consegues encontrar um padrão, uma regra para o número de torres possíveis?

## Actividade de Investigação

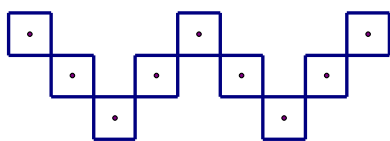
---

### Os aviões

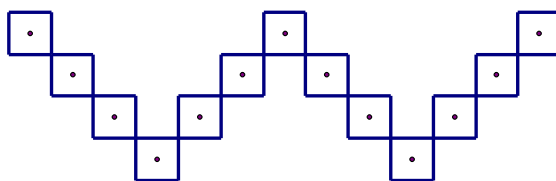


Os aviões quando voam em esquadrilha costumam fazê-lo em V, para poupar energia embora existam outras formas de o fazer, como é o da disposição em w.

Observa a sequência de aviões que se segue.



1



2

1. Desenha o 3º e o 4º termos dessa sequência. Quantos aviões são necessários em cada caso?
2. Será que conseguimos dispor 30 aviões em w? Porquê?
3. Consegues descobrir alguma regra que permita saber o número necessário de aviões para dispô-los em w?

## Anexo 10

### - Guião de elaboração do relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve e critica toda actividade desenvolvida na exploração de uma tarefa.

#### Um relatório para quê?

Desenvolver a tua capacidade de comunicar matematicamente, por escrito.

Desenvolver o teu pensamento crítico sobre o trabalho feito.

Contribuir para aprofundar a tua compreensão sobre os vários assuntos estudados.

#### Pistas para elaborares um relatório:

- tira apontamentos durante a realização da tarefa;
- descreve o que fizeste de uma forma limpa, clara e organizada;
- não te esqueças de apresentar os teus raciocínios e descobertas e descrever todas as tentativas que realizaste até chegar às conclusões finais, não deves pensar “o professor já sabe isto, por isso não vale a pena eu escrever”;
- identifica devidamente o teu relatório;
- estrutura o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

Neste ano lectivas, as tarefas vão ser exploradas em grupo e o relatório vai ser dividido em duas partes: a primeira será feita em grupo e deve incluir a introdução e o desenvolvimento do relatório e a outra será feita individualmente e deve compreender a conclusão.

#### • *Introdução* (realizada em grupo)

Apresentem a tarefa proposta e indiquem qual o seu objectivo, usando as vossas próprias palavras. Indiquem os materiais utilizados.

#### • *Desenvolvimento* (realizada em grupo)

Relatem os passos do trabalho realizado, explicando como pensaram e as estratégias usadas.

Descrevam as dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.

Apresentem as conclusões obtidas, devidamente fundamentadas.

Podem recorrer a tabelas, representações gráficas ou esquemas.

#### • *Conclusão* (realizada individualmente)

Faz um comentário global sobre o trabalho desenvolvido.

Auto-avalia o teu trabalho.

Resume o que aprendeste.

Comenta o interesse da tarefa.

## Anexo 11

Exmo. (a) Senhor (a) Encarregado(a) de Educação:

Tendo concluído, com aproveitamento, o primeiro ano do Curso de Especialização em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências – ramo da Matemática, encontro-me, no presente ano lectivo, a desenvolver um estudo de investigação a fim de realizar a respectiva Dissertação de Mestrado.

O trabalho está subordinado ao tema «O raciocínio matemático no 2º Ciclo do Ensino Básico e as actividades de investigação» e irá ser orientado pela Professora Doutora Susana Carreira, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Para o efeito, torna-se imprescindível que, além de se proceder às observações e à recolha documental dos trabalhos produzidos pelos alunos, nomeadamente relatórios, textos e próprias resoluções, se efectue o registo, em áudio, das entrevistas, aquando da realização das tarefas.

As gravações só serão usadas no trabalho que irei desenvolver, comprometendo-me a manter o anonimato dos intervenientes.

Assim, agradeço que se pronuncie quanto a este procedimento.

A Professora,

17/02/2009 \_\_\_\_\_

(Isa Martins)

- Autorizo que o(a) meu (minha) educando(a) seja sujeito(a) a gravações áudio, em contexto de sala de aula, com a turma.
- Não autorizo que o(a) meu (minha) educando(a) seja sujeito(a) a gravações áudio, em contexto de sala de aula, com a turma.

Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

Assinatura Enc de Educação: \_\_\_\_\_

## Anexo 12

Isa Maria dos Reis Correia Martins

Exma. Sra. Presidente do Conselho Executivo da  
Escola E.B.I./JI .....

Assunto: Pedido de autorização para o desenvolvimento de um trabalho de dissertação.

Tendo concluído, com aproveitamento, o primeiro ano do Curso de Especialização em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências – ramo da Matemática, encontro-me, no presente ano lectivo, a desenvolver um estudo de investigação a fim de realizar a respectiva Dissertação de Mestrado.

O trabalho está subordinado ao tema «O raciocínio matemático no 2º Ciclo do Ensino Básico e as actividades de investigação» e irá ser orientado pela Professora Doutora Susana Carreira, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Neste sentido, pretendo evidenciar e explicar a diversidade do raciocínio matemático presente nos alunos de uma turma do 2º Ciclo do Ensino Básico, perante a realização de actividades de investigação, adoptando uma metodologia de natureza qualitativa, com a vertente de estudo de caso. Só alguns alunos é que serão alvo deste estudo, mais precisamente aqueles que revelem particularidades, especificidades ou características mais significativas, isto é, que apresentem raciocínios mais distintos e originais.

Já iniciei parte do enquadramento teórico, pretendendo, agora, proceder à recolha e à análise de dados. Como tal, é minha intenção propor, aos alunos das minhas turmas do 5º ano, a realização de tarefas de investigação, não só na disciplina de Matemática mas também na Área Curricular Não Disciplinar de Estudo Acompanhado, de forma a não comprometer o normal desenvolvimento das actividades da escola.

Com o intuito de perceber a diversidade de raciocínios e como é que os mesmos são explicitados no decurso das actividades de investigação, de averiguar a adequação dos métodos «pessoais» de resolução exibidos pelos alunos e de verificar a influência do enunciado das questões propostas, será necessária uma análise aprofundada dos dados, o que só será conseguido se estes forem recolhidos em número suficiente. Nesta linha, torna-se imprescindível que, além de se proceder às observações e à recolha documental dos trabalhos produzidos pelos alunos, nomeadamente relatórios, textos e próprias resoluções, se efectue o registo, em áudio, das entrevistas, aquando da realização das tarefas.

Irei também realizar um pedido formal aos Encarregados de Educação para a implementação das entrevistas aos seus educandos possibilitando a sua gravação e posterior transcrição para análise.

Como docente do quadro de nomeação definitiva, do grupo 230, solicito a V. Exa. a autorização para o desenvolvimento deste trabalho, nesta escola, comprometendo-me a manter o anonimato dos intervenientes sempre que esse interesse seja manifestado.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

....., 17 de Fevereiro de 2009

Isa Maria dos Reis Correia Martins

## **Entrevistas semi-estruturadas**

Distribuídos os enunciados pelos grupos, lida a actividade em grande grupo, colocadas algumas questões-chave, para verificar a compreensão da proposta de trabalho e esclarecidas as dúvidas iniciais, o desenvolvimento do trabalho e principalmente a ordem e o tipo de questões colocadas dependerá das produções dos alunos. Contudo, a professora/investigadora (entrevistadora) terá sempre a preocupação de focar alguns aspectos, procurando obter resposta às seguintes questões:

- O que estás a tentar fazer?
- Por que estás a fazer isso?
- O que tentaste?
- Viste alguma coisa parecida de algum modo com esta?
- Já tentaste alguns casos mais simples?
- Porque é que estão a utilizar uma tabela?
- Como é que fizeram?
- Conseguem dizer-me o que está a acontecer?
- Verificaste se funciona?
- Será que é sempre assim? Experimentem, investiguem.
- E se fosse assim...?
- Porquê?
- Como explicam isso?
- Qual a relação entre essas ideias?
- Porque é que dizes que não poderá ser...?
- O que te leva a pensar isso?
- Porque não concordas com a ideia do teu colega?
- Encontraram alguma regularidade?
- Consegues ver algum padrão?
- Chegaram a alguma (s) conclusão (ões)? Quais? Expliquem lá.

## **Entrevista Final**

1. O que é para ti uma actividade de investigação?
2. Quais foram as dificuldades que sentiste na resolução de actividades de investigação?
3. Notaste alguma evolução no teu desempenho ao realizar as actividades de investigação ao longo deste ano?
4. O que é que achas que é preciso ou é fundamental para se fazer uma actividade de investigação?
5. Qual foi a actividade que gostaste mais? Porquê?
6. Qual foi a actividade que gostaste mais? Porquê?
7. Para o ano, como é que gostarias que fossem as aulas de Matemática? Achas que este tipo de trabalho deve continuar?
8. Achas que podes aprender Matemática a partir das actividades de investigação? Aprendeste alguma coisa? Matérias ou conteúdos?
9. Lembras-te de algum vocabulário, termos, expressões ou palavras que fazem parte das actividades de investigação?

# Anexo 15

## Actividade sobre Sequências

1. Observa a sequência com as estrelas.

1.1. Completa o preenchimento do respectivo quadro atendendo ao número de pontas de cada estrela.

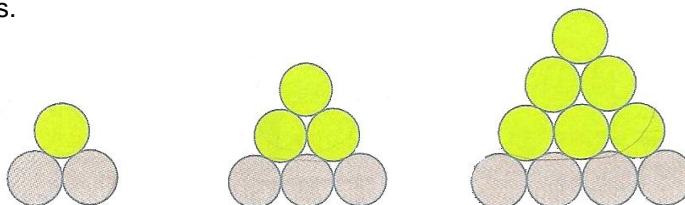


Ordem do termo	1	2	3	4	...	n
Valor do Termo	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 2 = 10$			...	$\_ \times \_$

2. Observa a sequência com as bolas.

2.1. Desenha o quarto e o quinto termo.

Explica as regularidades encontradas nesta sequência. Podes usar palavras, desenhos, tabelas ou esquemas.



## Actividade sobre Sequências

1. Observa a sequência com as estrelas.

1.2. Completa o preenchimento do respectivo quadro atendendo ao número de pontas de cada estrela.



Ordem do termo	1	2	3	4	...	n
Valor do Termo	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 2 = 10$			...	$\_ \times \_$

2. Observa a sequência com as bolas.

2.1. Desenha o quarto e o quinto termo.

Explica as regularidades encontradas nesta sequência. Podes usar palavras, desenhos, tabelas ou esquemas.

