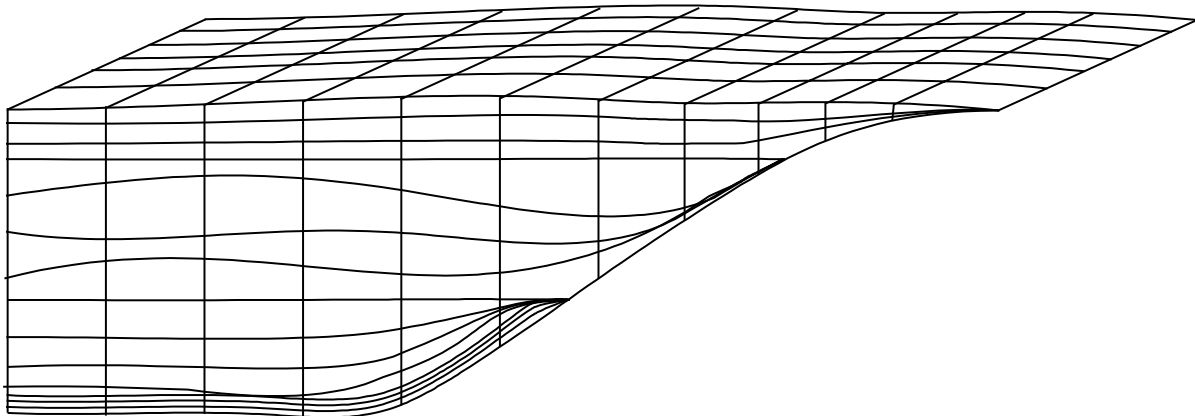




UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



**MODELAÇÃO MATEMÁTICA TRIDIMENSIONAL DE
ESCOAMENTOS COSTEIROS E ESTUARINOS USANDO UMA
ABORDAGEM DE COORDENADA VERTICAL GENÉRICA**

Flávio Augusto Bastos da Cruz Martins
(Mestre em Engenharia Mecânica pelo I.S.T.)

Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica

DOCUMENTO PROVISÓRIO

Junho 1999

À Paula, Ricardo e Afonso

RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo hidrodinâmico, baroclínico, tridimensional, para a simulação de escoamentos costeiros e estuarinos. O modelo resolve as equações primitivas com a hipótese hidrostática e a aproximação de Boussinesq. O principal objectivo deste trabalho foi o de desenvolver uma metodologia de discretização vertical genérica, que permitisse o uso simultâneo de vários tipos de coordenadas verticais. O modelo usa o método do volume finito numa célula hexaédrica genérica sem transformação de coordenadas. A discretização temporal é semi-implícita do tipo ADI. O modelo foi validado em domínios esquemáticos e em domínios reais, apresentando-se resultados para os estuários do Sado, do Tejo e para o Atlântico Norte no domínio do Projecto OMEX. A metodologia usada provou ser adequada à simulação destes escoamentos, permitindo identificar as suas principais características e o padrão tridimensional de cada domínio. Devido à sua natureza modular esta metodologia mostrou também ser apropriada a uma interacção interdisciplinar entre diversas equipas de trabalho.

ABSTRACT

In this work a tri-dimensional, baroclinic hydrodynamic model was developed for application in coastal and estuarine flows. The model solves the primitive equations with hydrostatic and Boussinesq approximations. The central target of this work was the definition of a methodology allowing the use of different vertical coordinate simultaneously. The model uses the finite volume method with a generic cell of the hexahedral type with no coordinate transformation. The Temporal discretization is semi-implicit of the ADI type. The model was validated in schematic and real domains. Model results for the Sado and Tagus estuaries and for the North Atlantic on the OMEX domain are presented. The methodology used proved adequate for this flow simulations, allowing the identification of their main characteristics and tri-dimensional patterns. The modular approach used in the model also favoured the interdisciplinary interaction between different work teams.

PALAVRAS CHAVE

Modelação matemática

Hidrodinâmica

Escoamentos costeiros

Estuários

Coordenada vertical genérica

Volume finito

KEYWORDS

Mathematical modelling

Hydrodynamics

Coastal flows

Estuaries

Generic vertical coordinate

Finite-volume

AGRADECIMENTOS

Aproximando-se o termo de este empreendimento e olhando em retrospectiva, enumerar em poucas linhas todas as pessoas que de alguma forma me suportaram e incentivaram nas várias alturas em que tudo parecia sem solução torna-se uma tarefa difícil, se não impossível. Sob pena de omitir alguém não queria no entanto deixar de referir o apoio constante, a acessibilidade e a disponibilidade que sempre mostrou o meu orientador científico, Professor Ramiro Neves. Agradeço também a toda a equipa do MARETEC, em especial ao Professor Aires dos Santos, Os Eng. Paulo Leitão, Hélder Martins, Isabel Antunes, Ricardo Miranda e o Dr. Pedro Montero da Universidade de Santiago de Compostela, pelo constante olhar crítico sobre o modelo e os intensivos testes por eles efectuados, sem os quais não teria sido possível o bom termo deste trabalho.

A realização de uma tese de doutoramento obriga sempre a grandes sacrifícios no círculo familiar. Quero por isso expressar o agradecimento à minha esposa Paula e aos meus filhos Ricardo e Afonso pela constante compreensão e apoio que me deram durante todos estes anos. Dedico por isso a eles este trabalho.

Quero por fim agradecer à Universidade do Algarve pelas facilidades de dispensa de serviço docente que me facultou, no âmbito do programa PRODEP e ao Instituto Superior Técnico pelo Acolhimento exemplar e pelas facilidades que me proporcionaram durante a minha estadia.

ÍNDICE

Resumo	V
Abstract	VII
Palavras chave	IX
Keywords	XI
Agradecimentos	XIII
Índice	XV
Notação	XXI
Símbolos	XXI
Símbolos gregos	XXIII
Sobrescritos	XXIV
Subscritos	XXIV
Introdução	1
Perspectivas da modelação Oceânica e Estuarina	1
Importância da geometria da malha	2
Motivação	4
Estrutura da tese	5
1 Equações gerais	7
1.1 Escalas relevantes em escoamentos costeiros e oceânicos	8
1.2 Equações do movimento	9
1.2.1 Formulação integral	9
1.2.2 Formulação diferencial	10
1.2.3 Mudança para um referencial solidário com a terra	14
1.2.4 Fluido newtoniano	17
1.2.5 Incompressibilidade	18
1.2.6 Fecho turbulento	21
1.2.7 Aproximação hidrostática	28
1.2.8 Elevação da superfície livre e velocidade vertical	31
1.2.9 Análise de ordens de grandeza	33

1.3	Modelos de equações simplificadas	37
1.3.1	Modelos quasi-geostróficos	37
1.3.2	Modelos com divisão de modos	41
1.4	Conclusões	45
2	Malhas computacionais	47
2.1	Divisão horizontal do domínio de cálculo	47
2.1.1	Malha cartesiana	48
2.1.1.1	Precisão associada ao uso de malhas descentradas	48
2.1.1.2	Comportamento das malhas descentradas bi-dimensionais ..	52
2.1.1.3	Propriedades conservativas dos operadores de média	60
2.1.2	Malha curvilínea.....	63
2.1.2.1	Parâmetros da transformação	64
2.1.2.1.1	Jacobiano da transformação	65
2.1.2.1.2	Tensor da métrica	67
2.1.2.1.3	Restrições para coordenadas ortogonais e conformais	69
2.1.2.2	Transformação das equações para coordenadas curvilíneas	70
2.1.2.3	Equivalência entre coordenadas curvilíneas e volumes finitos	73
2.2	Divisão vertical do domínio de cálculo	76
2.2.1	Malhas tradicionais na direcção vertical	76
2.2.1.1	Malha cartesiana	77
2.2.1.2	Malha sigma	78
2.2.1.3	Malha isopícnica	82
2.2.2	Malha vertical generalizada	84
2.2.2.1	Divisão em subdomínios.....	85
2.2.2.2	Coordenada lagrangeana	86
2.3	Conclusões	90
3	Métodos numéricos	91
3.1	Método das diferenças finitas	91
3.2	Propriedades numéricas dos métodos.....	93
3.3	Métodos de resíduos ponderados	97

3.3.1	Método dos elementos finitos	99
3.3.2	Métodos espectrais.....	100
3.4	Método dos volumes finitos	101
3.4.1	Equação da continuidade	104
3.4.1.1	Cálculo dos fluxos convectivos horizontais.....	105
3.4.1.2	Cálculo dos fluxos convectivos verticais.....	107
3.4.2	Equação de transporte da salinidade e temperatura	107
3.4.2.1	Cálculo dos fluxos difusivos horizontais	108
3.4.2.2	Cálculo dos fluxos convectivos verticais.....	108
3.4.2.3	Cálculo dos fluxos difusivos verticais.....	109
3.4.3	Equação de transporte da quantidade de movimento	111
3.4.3.1	Cálculo das forças de pressão.....	112
3.4.3.1.1	Pressão barotrópica	113
3.4.3.1.2	Pressão baroclínica.....	114
3.5	Conclusões.....	117
4	Discretização das equações.....	119
4.1	Cálculo da geometria.....	119
4.2	Discretização temporal	121
4.3	Quantidade de movimento.....	124
4.3.1	Fluxo convectivo	125
4.3.2	Pressão barotrópica.....	128
4.3.3	Pressão baroclínica	128
4.3.4	Fluxos difusivos horizontais.....	129
4.3.5	Difusão vertical	130
4.3.6	Equação resultante.....	131
4.3.7	Tensão de corte na superfície e no fundo	133
4.4	Elevação da superfície livre	135
4.5	Velocidade vertical e redefinição da geometria	139
4.5.1	Estimativa da velocidade vertical.....	139
4.5.2	Redefinição da geometria.....	140

4.5.3	Velocidade vertical final	141
4.5.4	Velocidade vertical real.....	142
4.6	Transporte da salinidade e da temperatura	144
4.7	Condições iniciais e fronteira	146
4.7.1	Condições iniciais.....	146
4.7.2	Superfície livre	147
4.7.3	Fronteira com o fundo.....	148
4.7.4	Fronteiras laterais fechadas	148
4.7.5	Fronteiras laterais abertas	149
4.7.5.1	Hidrodinâmica.....	149
4.7.5.2	Transporte de salinidade e temperatura	151
4.7.6	Fronteiras móveis	154
4.8	Conclusões	155
5	Aspectos dinâmicos em estuários e zonas costeiras	157
5.1	Caracterização da maré oceânica	157
5.2	Modificação da maré nas zonas costeiras.....	162
5.2.1	Interacção com a geometria	162
5.2.2	Interacção com outras ondas	164
5.2.3	Interacção com correntes médias.....	165
5.2.4	Efeitos baroclínicos.....	166
5.3	Interacções barotrópicas em estuários	170
5.3.1	Efeito não linear da continuidade	172
5.3.2	Efeito não linear da convecção.....	172
5.3.3	Efeito não linear da tensão de corte no fundo	172
5.3.4	Interacção entre constituintes.....	174
5.3.5	Interacção com a geometria	176
5.3.6	Interacção com correntes médias.....	176
5.3.7	Parâmetros caracterizadores da maré.....	177
5.4	Fenómenos baroclínicos em estuários	180
5.4.1	Mistura e estratificação em estuários	180

5.4.2	Assimetria interna do perfil vertical de velocidades	183
5.4.3	Frentes e plumas produzidas por fluxos de água doce	186
5.4.4	Fenómenos baroclínicos na região de influência da água doce	189
5.5	Conclusões	191
6	Aplicações	193
6.1	Escoamento barotrópico com solução analítica.....	194
6.2	Escoamento baroclínico num tanque.....	199
6.3	Estuário do Sado	202
6.3.1	Calibração barotrópica.....	206
6.3.2	Calibração baroclínica	208
6.3.3	Efeito do forçamento baroclínico	209
6.3.4	Correntes residuais.....	210
6.3.5	Estrutura tridimensional da circulação.....	211
6.3.6	conclusões.....	214
6.4	Estuário do Tejo.....	214
6.4.1	Calibração	218
6.4.2	Velocidades instantâneas.....	220
6.4.3	Velocidades residuais.....	221
6.4.4	Traçadores lagrangeanos.....	222
6.4.5	Conclusões.....	225
6.5	Atlântico Norte (OMEX)	225
6.5.1	Simulação da maré.....	228
6.5.2	Simulação baroclínica.....	233
6.6	Conclusões.....	235
7	Conclusões.....	237
7.1	Trabalho futuro	239
	Apêndice 1: Hipótese de incompressibilidade	241
	Apêndice 2: Decomposição do campo turbulento	245
	Apêndice 3: Transformação para coordenadas curvilíneas.....	251
	Referências	255

NOTAÇÃO

Símbolos

a	Amplitude da onda
A	Viscosidade cinemática turbulenta
B	Largura média
B	Viscosidade bi-harmónica
c	Velocidade de fase da onda
C_d	Coefficiente de atrito no fundo
C_p	Calor específico a pressão constante
C^{te}	Constante
D	Espessura
e	Energia interna
E	Energia
E_h	Número de Ekman na direcção horizontal
E_v	Número de Ekman na direcção vertical
F	Força
f	Frequência
f	Parâmetro de Coriolis ($=2\Omega \sin \phi$)
F_{bc}	Fluxo de momento associado às forças baroclínicas
F_{bt}	Fluxo de momento associado às forças barotrópicas
F_c	Fluxo convectivo
F_{dh}	Fluxo difusivo horizontal
F_{dv}	Fluxo difusivo vertical
F_p	Fluxo de momento associado às forças de pressão totais
Fr_0	Número de Froude barotrópico
Fr_i	Número de Froude interno
F_{xu}	Caudal volúmico na direcção x_1 para a célula de U_1
F_{xz}	Caudal volúmico na direcção x_1 para a célula das propriedades

F_{yu}	Caudal volúmico na direcção x_2 para a célula de U_1
F_{yz}	Caudal volúmico na direcção x_2 para a célula das propriedades
F_{zu}	Caudal volúmico na direcção x_3 para a célula de U_1
F_{zz}	Caudal volúmico na direcção x_3 para a célula das propriedades
g	Aceleração da gravidade
h	Profundidade abaixo do nível de referência
H	Altura da coluna de água ($=\eta+h$)
J	Jacobiano da transformação de coordenadas
k	Forças mássicas
K	Coeficiente de Difusão turbulenta
K	Inverso do coeficiente de expansão volumétrica
L_{R_o}	Raio de deformação de Rossby barotrópico
L_{R_i}	Raio de deformação interno de Rossby
N	Frequência de Brunt-Väisälä
p	Pressão
q	Fluxo de calor por unidade de área
Q	Caudal
R	Resíduo (na análise harmónica)
R_e	Número de Reynolds
R_i	Número de Richardson
R_o	Número de Rossby
s	Entropia
s	Variável dependente (x_i ou t)
S	Salinidade
t	Tempo
T	Dimensão do sinal medido
T	Período
T	Temperatura
u	Velocidade instantânea (média de Reynolds) na direcção x_1
U	Velocidade média na direcção x_1

u_i	Velocidade instantânea na direcção x_i
v	Velocidade instantânea (média de Reynolds) na direcção x_2
v	Volume específico
V	Velocidade média na direcção x_2
V	Volume
w	Velocidade instantânea (média de Reynolds) na direcção x_3
W	Velocidade média na direcção x_3
WR	Resolução das ondas de Kelvin
x, y	Eixos coordenadas no plano horizontal
x_1, x_2, x_3	Eixos coordenados
z	Eixo coordenado vertical

Símbolos gregos

β	Coefficiente de expansão volumétrica
∇	Diferença
ε	Eficiência de mistura
ε_{ijk}	Tensor alternante
Δ	Fase relativa
Φ	Função de dissipação
Φ	Função de estrutura vertical no modelo Q.G.
Ψ	Função elementar (na análise da maré)
ϕ	Anomalia da energia potencial
ϕ	Fase
ϕ	Latitude
η	Elevação da superfície livre acima do nível de referência
π	Número Pi
ρ	Massa específica
τ	Tensão de corte
σ	Tensão

ω	Frequência
Ω	Velocidade de rotação da Terra
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Viscosidade cinemática
κ	Condutividade térmica
ξ	Eixo coordenado genérico
ζ	Vorticidade
ψ	Função de corrente
θ	Distorção da malha curvilínea
θ_1	Ângulo do eixo x_2 com a direcção Norte

Sobrescritos

'	Variável do campo das perturbações turbulentas
θ	Referencial de inércia
-	Média na profundidade

Subscritos

θ	Valor de referência
$1,2,3$	Direcções x_1 , x_2 e x_3 respectivamente
c	Centrífuga (força)
g	Gravítica (força)
h	Horizontal
p	Evolução a pressão constante
p	Potencial
r	Resultante (força)
v	Vertical

INTRODUÇÃO

A modelação matemática de escoamentos marinhos constitui actualmente um ramo bem estabelecido da mecânica de fluidos computacional. A simulação tridimensional por modelos que resolvem as equações primitivas é uma área de investigação generalizada e progressivamente vai-se estendendo às aplicações de engenharia, substituindo os tradicionais modelos bidimensionais. A modelação de escoamentos geofísicos envolve uma gama muito larga de escalas espaciais e temporais, com os fenómenos de pequena escala a influenciar de forma importante as escalas superiores. A consideração explícita das diversas escalas tornaria as exigências computacionais demasiado elevadas, recorrendo-se em alternativa à parametrização dos processos não resolvidos. Por questões de economia de meios de cálculo os modelos especializaram-se num determinado tipo de domínio, encontrando-se tradicionalmente modelos de circulação global, costeiros e estuarinos.

Perspectivas da modelação Oceânica e Estuarina

A escala dos vórtices geostroficados no oceano é da ordem dos 30 a 100 Km ao contrário dos valores de 1000 Km característicos dos escoamentos atmosféricos. As elevadas necessidades de resolução que daí advêm forçaram a uma parametrização destes fenómenos nos primeiros modelos de circulação global. Actualmente, o elevado poder de cálculo e o recurso à paralelização massiva permitem modelos de circulação global com resolução da ordem de $1/5^\circ$ que corresponde a passos espaciais médios da ordem dos 20 Km. Assiste-se assim à incursão destes modelos em domínios costeiros. Os fenómenos de mesoescala tradicionalmente resolvidos apenas por modelos costeiros começam agora a ser resolvidos em modelos de circulação global.

No outro extremo das aplicações, os modelos tradicionalmente usados em estuários passaram a englobar no seu domínio a zona costeira adjacente, sendo frequentemente aplicados a uma zona costeira incluindo mais do que um

estuário. Torna-se assim necessária, neste tipo de modelos, a simulação correcta tanto dos fenómenos presentes no interior do estuário, como dos fenómenos próprios da região costeira adjacente. Os modelos devem permitir a incorporação de métodos comuns a esses dois tipos de aplicações e devem possuir uma arquitectura flexível de forma a facilitar a inclusão de novos processos e métodos de resolução.

O perfil do utilizador dos modelos também tem evoluído. Ao contrário dos modelos oceânicos, os modelos estuarinos e costeiros deixaram de ser usados exclusivamente com fins científicos, passando a ser ferramentas de trabalho na resolução de problemas de gestão envolvendo especialidades como engenharia, biologia, geologia e ambiente. O desafio que se coloca aos modeladores de sistemas hidrodinâmicos apresenta dois aspectos. Por um lado a inclusão de modelos específicos para a simulação de processos próprios das diversas especialidades deve ser facilitada, o que pressupõe uma modularização do código e uma uniformização das trocas de informação entre os módulos. Por outro lado a utilização do modelo hidrodinâmico por pessoas com formação em áreas tão distintas, impõe ao código padrões de robustez e de facilidade de utilização elevadas.

Importância da geometria da malha

A necessidade de resolver simultaneamente processos característicos de sistemas estuarinos e costeiros obriga a uma integração de abordagens próprias de cada um desses sistemas. Nos sistemas estuarinos, sujeitos a maré, esta domina o escoamento, sendo a importância do caudal do rio e da densidade variável de sistema para sistema e com a época do ano. O vento desempenha um papel pouco importante no interior do estuário. A grande diferença energética e as diferentes escalas de tempo entre a maré e o vento tornam este último efeito reduzido. Nestes sistemas o escoamento é fortemente estrangido pela batimetria. Nos modelos tridimensionais estuarinos a descrição precisa da batimetria com um pequeno número de camadas é por

isso um requerimento fundamental. O uso de coordenadas do tipo sigma na direcção vertical tornou-se comum nestes domínios. Este tipo de coordenada utiliza um passo vertical que se adapta em função da profundidade permitindo uma correcta descrição da batimetria e uma resolução vertical adequada em todos os pontos do domínio.

Os escoamentos costeiros apresentam uma escala espacial uma a duas ordens de grandeza superior à dos escoamentos estuarinos. Com escalas espaciais superiores ao raio de deformação de Rossby os efeitos da rotação da terra tornam-se importantes, condicionando o escoamento em todo o domínio. Do ponto de vista temporal estes escoamentos ocorrem numa escala de tempo da ordem dos vários dias. O gradiente horizontal de densidades constitui o principal forçamento nessa escala. A tensão do vento influencia também de forma marcante o escoamento na camada superficial. A maré dá origem a transportes instantâneos elevados mas o pequeno valor dos efeitos não lineares provocam um transporte médio reduzido na escala de tempos de interesse. A influência da maré nestes sistemas surge de forma directa através desse escoamento residual e de forma indirecta através da sua intervenção nos processos de mistura. Estes efeitos da maré fazem-se sentir principalmente na região da plataforma continental devido à sua pequena profundidade comparativamente ao oceano.

A utilização de coordenada sigma neste tipo de domínios apresenta diversos inconvenientes. O forçamento baroclínico, actuando no plano horizontal, torna-se oblíquo à malha em regiões com elevado declive da topografia. Daqui resultam erros de cálculo importantes nos termos convectivo, difusivo e de pressão. A minimização do erro assim produzido tem sido objecto de muitos estudos mas não se encontra resolvido. Outros tipos de coordenadas têm sido utilizados com o objectivo de minorar estes problemas. A dupla coordenada sigma, com divisão do domínio na região de maior gradiente de densidade tem sido uma forma de garantir a horizontalidade da malha na região superior do domínio. Trata-se no entanto de uma forma artificial de impor a geometria da

malha, sem ligação com os processos físicos em presença. As coordenadas isopícnicas discretizam verticalmente o domínio em camadas de densidade constante. Neste caso o escoamento tende a ser paralelo às camadas e os fluxos verticais são reduzidos, evitando a difusão numérica. Os problemas que este tipo de coordenadas apresenta em regiões pouco estratificadas e com batimetrias irregulares impedem o uso deste tipo de coordenadas em estuários e regiões pouco profundas. A coordenada cartesiana tem sido uma solução de compromisso, usando camadas perfeitamente horizontais, e apresentando vantagens computacionais devido à sua simplicidade. As dificuldades na implementação da elevação da superfície livre e a diminuição de resolução em regiões pouco profundas limitam-na no entanto a utilizações de circulação oceânica.

Motivação

Dentro do contexto apresentado a principal motivação deste trabalho foi a de criar um modelo hidrodinâmico genérico, que permita a sua utilização num vasto conjunto de domínios. Para isso é necessária uma estrutura flexível de forma que a inclusão de novos tipos de coordenada vertical seja uma tarefa simples. Pretende-se que o processo de definição de uma determinada lei de variação da malha, se resuma à adição de um pequeno módulo num ponto específico do código.

A diferente importância relativa dos processos no diferentes domínios obriga à inclusão de todos eles na formulação. Com o objectivo de rentabilizar as capacidades de cálculo, o modelo deve permitir a activação ou desactivação de cada processo (p.ex. convecção, difusão) e de cada tipo de forçamento (p.ex. vento, densidade, maré) em função da sua importância no domínio em análise. Para permitir a utilização do modelo hidrodinâmico como suporte para modelos específicos de outras disciplinas, é importante criar uma configuração modular ao nível das equações de transporte e uma definição explícita dos fluxos através do sistema.

Utiliza-se uma formulação tridimensional de equações primitivas com aproximação de Boussinesq e hipótese hidrostática. A utilização do método dos volumes finitos, no espaço real, sem transformação de coordenadas permite uma definição explícita da geometria da malha. Esta propriedade facilita a implementação de diversos tipos de geometria da malha tendo-se por isso adoptado por esse método. O cálculo explícito dos fluxos, próprio do método, facilita também a inclusão nos módulos de transporte dos processos específicos de outras disciplinas.

Estrutura da tese

A tese é composta por 6 capítulos que descrevem de forma global o contexto em que o modelo se insere, as metodologias adoptadas no seu desenvolvimento, a sua estrutura e as aplicações efectuadas. No capítulo 1 analisam-se as equações que estão na base da sua formulação com as simplificações e hipóteses adoptadas. No capítulo 2 aborda-se o problema da discretização espacial do domínio de cálculo, identificando-se as várias possibilidades e as propriedades inerentes a cada uma. No capítulo 3 analisam-se, numa perspectiva de comparação com o método dos volumes finitos, diversos métodos numéricos tradicionalmente utilizados na simulação de escoamentos geofísicos. No capítulo 4 descreve-se a discretização espacial e temporal adoptada, apresentando-se as equações resolvidas pelo modelo na sua forma discretizada. Dá-se especial ênfase à forma de implementação da coordenada vertical genérica e nas suas implicações para o método de cálculo. No capítulo 5 analisam-se os principais processos e fenómenos presentes em escoamentos costeiros e estuarinos, como forma de situar os resultados das aplicações e permitir uma análise crítica dos mesmos. Por fim no capítulo 6, apresentam-se resultados de aplicação do modelo em casos esquemáticos de teste e em problemas reais. Alguns dos resultados descritos foram obtidos por utilizadores de diferentes especialidades tanto em ambiente de investigação como empresarial. Desta cooperação obteve-se sensibilidade para problemas práticos

ligados à utilização do modelo, o que contribuiu para um maior desempenho, robustez e funcionalidade do mesmo.

1 EQUAÇÕES GERAIS

Os escoamentos em zonas costeiras são governados pelas leis gerais de conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia, tomando por base a hipótese de meio contínuo. A natureza dinamicamente instável do escoamento turbulento e as limitações analíticas e numéricas para a resolução do problema geral exigem a introdução de hipóteses simplificativas, baseadas em argumentos de natureza física, que tornam possível a obtenção de uma solução, mas que restringem o domínio de aplicabilidade do modelo.

Neste capítulo são apresentadas as equações gerais do movimento e as simplificações normalmente utilizadas para a análise de escoamentos de mesoescala em águas pouco profundas. Tradicionalmente este tema é abordado de forma diferente por físicos e por engenheiros. Numa perspectiva física analisam-se normalmente processos de grande escala dando-se ênfase a efeitos como a rotação da terra e a estratificação. Na perspectiva da engenharia (mecânica dos fluidos) as escalas espaciais e temporais envolvidas são normalmente muito pequenas, tornando particularmente importante a modelação da turbulência. Estas diferenças dão origem a abordagens distintas. Neste capítulo procura-se estabelecer uma ligação entre estes dois tipos de aproximação ao problema. As equações gerais são inicialmente apresentadas numa formulação integral independente do tipo de coordenada. Efectua-se depois a passagem para uma formulação diferencial, função do tipo de coordenada. Mostra-se assim a capacidade da formulação integral produzir equações válidas para qualquer tipo de coordenada. Esta característica é utilizada em capítulos posteriores, associada ao método dos volumes finitos.

As equações gerais são depois simplificadas. As simplificações apresentadas, apesar de serem sempre obtidas por um processo de análise da importância dos processos físicos, são divididas em dois grupos: Um primeiro conjunto de simplificações produz um sistema de equações com um domínio de

aplicabilidade suficientemente genérico, dentro da hidrodinâmica dos escoamentos geofísicos, para poderem ser usadas na simulação de escoamentos reais. Um segundo conjunto de simplificações conduz a equações úteis para o estudo de processos em geometrias esquemáticas com forçamento simples. Estas equações possuem no entanto demasiadas aproximações não sendo adequadas para a simulação de escoamentos reais. Foram por isso denominadas "equações simplificadas".

1.1 Escalas relevantes em escoamentos costeiros e oceânicos

O escoamento no oceano desenvolve-se numa larga gama de escalas temporais e espaciais que interagem entre si de forma complexa. A análise de um espectro típico de energia cinética no oceano permite identificar regiões de maior densidade energética em três gamas distintas de frequências. Na gama de frequências mais baixas encontra-se a circulação oceânica quase-permanente. Este escoamento, denominado de macroescala, é o equivalente oceânico do clima na atmosfera e possui uma escala temporal de variabilidade com períodos da ordem dos meses e escalas espaciais de variabilidade da ordem das centenas de quilómetros. No outro extremo do espectro identificam-se os fenómenos de microescala com escalas de tempo e dimensões características que descem até ao limite da dissipação viscosa. No caso do escoamento estratificado característico do oceano uma frequência particularmente energética na microescala é a frequência de Brunt-Vaisalla (secção 1.2.9) que produz oscilações com períodos da ordem dos 10 minutos. Entre estas duas escalas identifica-se uma escala intermédia denominada mesoescala onde ocorrem processos como a maré, as oscilações de inércia e os vórtices de mesoescala. A maré e as oscilações de inércia possuem picos de energia marcados nas suas frequências características (semi diurna e diurna no caso da maré e frequência de Coriolis no caso das oscilações de inércia). Os vórtices de mesoescala apresentam escalas temporais da ordem dos 3 a 5 dias e dimensões características da ordem dos 100 Km. Estas estruturas são o

equivalente oceânico das estruturas ciclônicas atmosféricas e pensa-se que englobam mais de 90% da energia cinética do oceano. Uma particularidade deste tipo de turbulência é a sua capacidade de fornecer energia cinética ao escoamento médio, ao contrário do que é comum na microescala (Gill, 1982).

1.2 Equações do movimento

Admitindo a hipótese de meio contínuo a dinâmica do escoamento fica completamente definida pela solução das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia juntamente com as leis constitutivas.

1.2.1 Formulação integral

Considerando um volume de dimensões finitas num espaço definido por um sistema de coordenadas ortogonal genérico ξ_1, ξ_2, ξ_3 a conservação de uma propriedade α pode ser traduzida por:

$$[\text{Variação de } \alpha \text{ em } V] = [\text{Fluxos de } \alpha \text{ pelas faces}] + [\text{Fontes de } \alpha] - [\text{Poços de } \alpha] \quad 1.1$$

Esta proposição é válida para qualquer volume independentemente da sua forma ou orientação relativamente aos eixos coordenados. A formulação diferencial é obtida a partir de um volume com faces perpendiculares aos eixos coordenados. Esta diferença fundamental entre as duas abordagens tem repercussões ao nível do método numérico. O método das diferenças finitas aproxima as equações na sua forma diferencial sendo por isso intimamente dependente do sistema de coordenadas que estas usam. O método dos volumes finitos baseia-se numa formulação integral sendo por isso intimamente dependente das formas das células e não do sistema de coordenadas. Os dois métodos são equivalentes quando se usam os volumes com faces perpendiculares aos eixos coordenados. Considerando o volume de dimensões finitas $\delta V = \delta \xi_1 \delta \xi_2 \delta \xi_3$ da figura 1.1 a equação de conservação da propriedade

genérica por unidade de volume α é obtida igualando a variação temporal de α no interior do volume ao balanço dos fluxos para cada direcção:

$$\frac{\delta(\alpha V)}{\delta t} = -\frac{\delta(\alpha u_{\xi_1} A_{\xi_1})}{\delta \xi_1} \delta \xi_1 - \frac{\delta(\alpha u_{\xi_2} A_{\xi_2})}{\delta \xi_2} \delta \xi_2 - \frac{\delta(\alpha u_{\xi_3} A_{\xi_3})}{\delta \xi_3} \delta \xi_3 + \left[\begin{array}{c} \text{Fluxos} \\ \text{difusivos} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Fontes} \\ - \text{Poços} \end{array} \right] \quad 1.2$$

onde, u_{ξ_i} é a velocidade na direcção coordenada ξ_i e A_{ξ_i} a área da face do volume de controlo perpendicular a essa direcção. Esta forma é válida mesmo quando as variáveis dependentes não são funções contínuas no interior do volume. Esta característica da abordagem do método integral permite obter equações de transporte mesmo em situações de choque como acontece para o caso de salto hidráulico (Chippada et al., 1997).

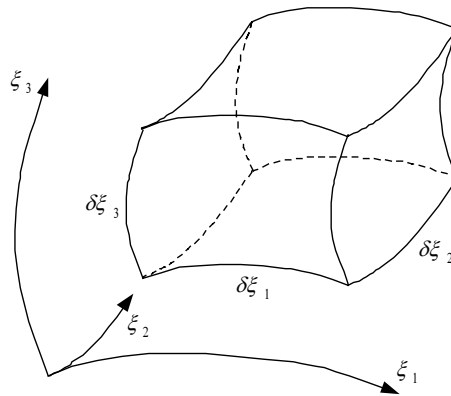


Figura 1.1: Volume finito num referencial ortogonal genérico.

A formulação diferencial é obtida no limite quando se fazem tender as dimensões do volume para zero.

1.2.2 Formulação diferencial

Para o caso de coordenadas cartesianas, fazendo tender o volume para zero obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_1 &\equiv \delta x_1 \rightarrow \partial x_1 & \delta A_{\xi_1} &\equiv \delta x_2 \delta x_3 \rightarrow \partial x_2 \partial x_3 \\
 \delta\xi_2 &\equiv \delta x_2 \rightarrow \partial x_2 & \delta A_{\xi_2} &\equiv \delta x_1 \delta x_3 \rightarrow \partial x_1 \partial x_3 & \delta V &\equiv \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \rightarrow \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \\
 \delta\xi_3 &\equiv \delta x_3 \rightarrow \partial x_3 & \delta A_{\xi_3} &\equiv \delta x_1 \delta x_2 \rightarrow \partial x_1 \partial x_2
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Considerando variação de volume nula a equação 1.2 fica:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\alpha u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\alpha u_3)}{\partial x_3} = \left[\begin{array}{c} Fluxos \\ difusivos \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} Fontes \\ - Poços \end{array} \right] \tag{1.4}$$

Para o caso da massa volúmica $\alpha = \rho$ obtendo-se a equação da continuidade (conservação da massa) em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} = 0 \tag{1.5}$$

Em escoamentos geofísicos é usual utilizarem-se coordenadas esféricas para descrever o escoamento em situações onde a curvatura da terra é importante.

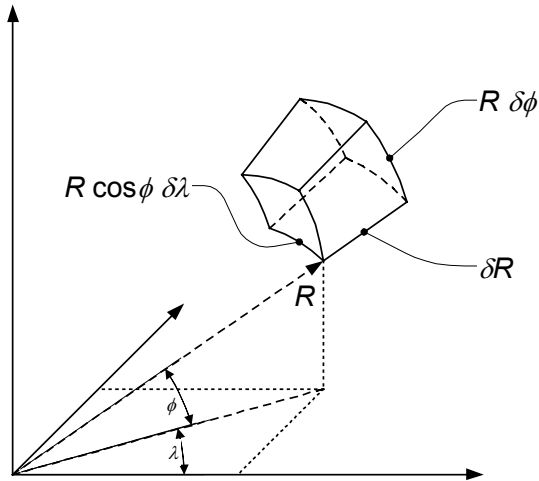


Figura 1.2: Volume finito num referencial esférico.

Utilizando a formulação integral este tipo de coordenada introduz alterações apenas na forma como os parâmetros geométricos são calculados. Utilizando o volume finito da figura 1.2 tem-se a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_1 &\equiv R \cos \phi \delta\lambda \rightarrow R \cos \phi \partial\lambda \\
 \delta\xi_2 &\equiv R \delta\phi \rightarrow R \partial\phi \\
 \delta\xi_3 &\equiv \delta R \rightarrow \partial R \\
 \delta A_{\xi_1} &\equiv R \delta\phi \delta R \rightarrow R \partial\phi \partial R \\
 \delta A_{\xi_2} &\equiv R \cos \phi \delta\lambda \delta R \rightarrow R \cos \phi \partial\lambda \partial R \\
 \delta A_{\xi_3} &\equiv R^2 \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \rightarrow R^2 \cos \phi \partial\lambda \partial\phi \\
 \delta V &\equiv R^2 \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \delta R \rightarrow R^2 \cos \phi \partial\lambda \partial\phi \partial R
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

A equação da continuidade na formulação integral obtém-se por substituição na equação 1.2 ficando:

$$\begin{aligned}
 R^2 \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \delta R \frac{\delta\rho}{\delta t} &= -R^2 \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \delta R \frac{\delta(\rho u_\lambda)}{R \cos \phi \delta\lambda} - R^2 \delta\lambda \delta\phi \delta R \frac{\delta(\rho u_\phi \cos \phi)}{R \delta\phi} \\
 &- \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \delta R \frac{\delta(\rho u_R R^2)}{\delta R}
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

O último termo é:

$$\frac{\delta(\rho u_R R^2)}{\delta R} = R^2 \frac{\delta(\rho u_R)}{\delta R} + 2R \rho u_R
 \tag{1.8}$$

Como $R \gg \delta R$ o termo $2R \rho u_R$ pode-se desprezar. Pela mesma razão considera-se normalmente para coordenada vertical $z = R - R_0$ onde R_0 é o raio da terra.

Dividindo pelo volume a equação 1.7 fica:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \frac{1}{R_0 \cos \phi} \frac{\delta(\rho u_\lambda)}{\delta\lambda} + \frac{1}{R_0 \cos \phi} \frac{\delta(\rho u_\phi \cos \phi)}{\delta\phi} + \frac{\delta(\rho u_z)}{\delta z} = 0
 \tag{1.9}$$

Fazendo tender o volume para zero obtém-se a equação diferencial da continuidade em coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{R_0 \cos \phi} \frac{\partial(\rho u_\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{1}{R_0 \cos \phi} \frac{\partial(\rho u_\phi \cos \phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0
 \tag{1.10}$$

Na abordagem dos volumes finitos as equações são discretizadas no espaço real, sendo os parâmetros geométricos incluídos explicitamente. Por esse motivo é irrelevante qual o sistema de coordenadas utilizado. No resto deste capítulo optou-se pelo sistema cartesiano de coordenadas devido à sua maior simplicidade. Os resultados obtidos podem-se no entanto aplicar à discretização das equações noutra referencial desde que se considerem os parâmetros geométricos adequados.

Considerando o referencial cartesiano fixo no espaço x_1^0, x_2^0, x_3^0 da figura 1.3 a equação 1.5 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i^0} = 0 \quad 1.11$$

Onde u_i são as componentes da velocidade nas direcções coordenadas x_i^0 e onde se considera a soma de termos com índices repetidos segundo a convenção de Einstein. A equação de conservação da quantidade de movimento obtém-se especificando $\alpha = \rho u_i$ ficando:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j^0} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j^0} \quad 1.12$$

onde g_i é a força mássica na direcção x_i^0 e σ_{ji} é a componente das forças de superfície - pressão e viscosas - actuando na direcção x_i^0 sobre uma face elementar perpendicular a x_j^0 .

A equação de conservação da energia mecânica e interna do fluido é:

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho \frac{u_i u_i}{2} + e \right) = \rho g_i u_i + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j^0} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j^0} \quad 1.13$$

onde $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ é a derivada material, e é a energia interna e q_i é a componente do vector do fluxo de calor na direcção x_i^0 . O termo $\rho g_i u_i$ representa o trabalho das forças mássicas (Spurk, 1997).

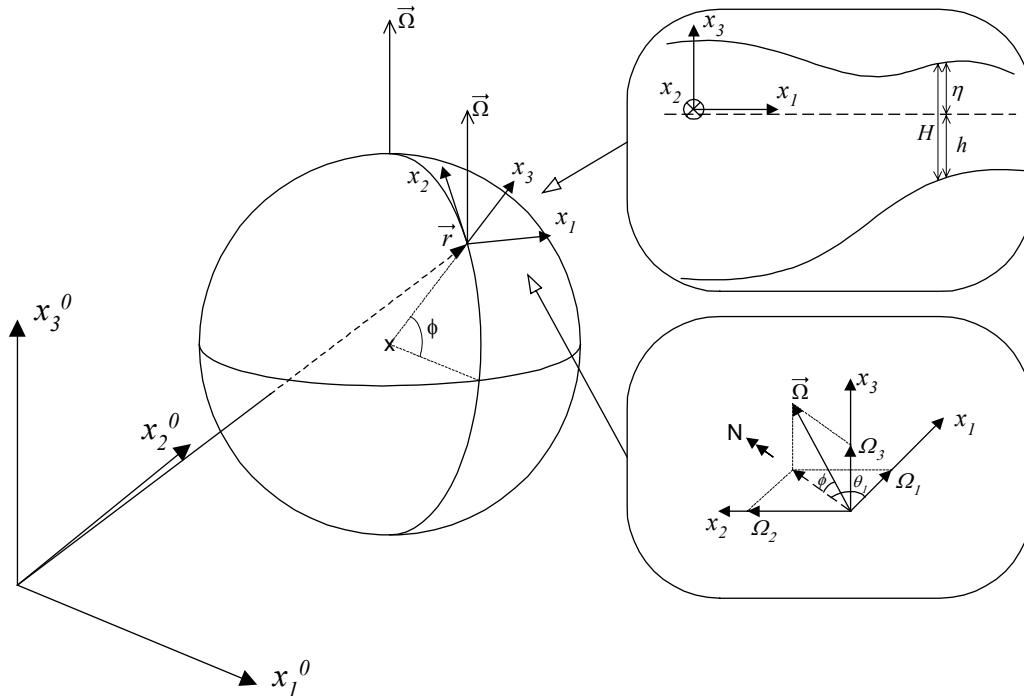


Figura 1.3: Referenciais utilizados.

As equações anteriores são balanços às grandezas instantâneas não tendo sido ainda feita qualquer hipótese quanto à natureza turbulenta do escoamento. Trata-se de um sistema de 7 equações a 17 incógnitas (ρ , u_i , σ_{ij} , q_i , e). Considerando a simetria do tensor das tensões $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ as incógnitas independentes reduzem-se a 14. As leis constitutivas permitem fechar o problema. As hipóteses de incompressibilidade, equilíbrio hidrostático e a aproximação de Boussinesq permitem a simplificação das equações tendo em consideração os processos relevantes em escoamentos geofísicos. Antes de se proceder a estas simplificações é no entanto conveniente escrever as equações num referencial fixo na superfície da Terra.

1.2.3 Mudança para um referencial solidário com a terra.

Do ponto de vista prático é de maior utilidade usarem-se variáveis relativas a um referencial solidário com a terra, como é o caso do referencial x_1, x_2, x_3 da figura

1.3. Este referencial é não inercial pois possui velocidade de rotação $\vec{\Omega}$ em relação ao referencial fixo e a sua origem desloca-se com movimento acelerado devido á sua translação.

A equação da continuidade não sofre alteração na passagem para este referencial uma vez que traduz apenas balanços de massa. Fica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad 1.14$$

onde \vec{x} é o vector posição no referencial acelerado. A passagem da equação de conservação da quantidade de movimento para um referencial acelerado faz aparecer explicitamente as forças de inércia. Para o caso geral de um referencial acelerado A com origem \vec{r} e velocidade de rotação $\vec{\Omega}$ relativamente ao referencial de inércia I a aceleração de um ponto material nos dois referenciais está relacionada por:

$$\left[\frac{D\vec{u}^0}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{u}}{Dt} \right]_A + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{x} + \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{D\vec{r}}{Dt} \right) \right]_I \quad 1.15$$

onde \vec{u}^0 é o vector velocidade do ponto material no referencial de inércia. Os últimos quatro termos representam acelerações aparentes que surgem quando se utiliza o referencial acelerado. O último termo contabiliza a aceleração linear do referencial A , que no caso do referencial x_1, x_2, x_3 é devida apenas à translação da Terra não se fazer com velocidade linear constante podendo ser desprezado. O penúltimo termo é nulo devido à velocidade de rotação da terra ser constante. O antepenúltimo termo representa a aceleração centrípeta. Este termo pode ser escrito na forma de um potencial sendo usualmente englobado na aceleração da gravidade (Pedlosky, 1987). O valor de g sofre assim uma alteração máxima no equador da ordem dos 0.3% passando a estar dirigido perpendicularmente ao geóide. Em termos práticos para a modelação hidrodinâmica pode considerar-se o valor de g constante. O termo $2\vec{\Omega} \times \vec{u}$ é a

aceleração de Coriolis devendo ser incluída explicitamente nas equações de balanço de quantidade de movimento quando escritas no referencial x_1, x_2, x_3 onde actua como uma força mássica.

Em escoamentos oceânicos, para além da força aparente devida à aceleração de Coriolis, as únicas forças mássicas que influenciam o escoamento de forma significativa são, a força gravítica terrestre e o potencial de maré. A gravidade produz a aceleração $g_i = -g\delta_{3i}$ apenas com componente na direcção vertical. O potencial de maré é na realidade a resultante de um equilíbrio entre as forças mássicas de atracção da Terra, da Lua e do Sol e da força centrífuga aparente produzida pela rotação dos pares Terra-Lua e Terra-Sol em torno dos seus centros de massa como indicado no capítulo 5. A resultante destas forças produz acelerações da ordem de 10^{-7} m/s^2 podendo-se por isso desprezar a componente vertical face à aceleração da gravidade. As componentes horizontais devem ser consideradas para a simulação da maré em escalas globais, sendo aí o principal forçamento, mas podem-se desprezar quando a dimensão do domínio é muito inferior ao comprimento de onda do forçamento que é aproximadamente metade do perímetro da Terra. A equação 1.12 escrita num referencial solidário com a Terra fica assim:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad 1.16$$

onde ε_{ijk} é o tensor alternante.

Denominando ϕ a latitude e θ_1 o ângulo do versor \vec{e}_1 com a direcção Norte como esquematizado na figura 1.3, as componentes do vector velocidade de rotação $\vec{\Omega}$ são:

$$\vec{\Omega} = (\Omega \cos \phi \cos \theta_1) \vec{e}_1 + (\Omega \cos \phi \sin \theta_1) \vec{e}_2 + (\Omega \sin \phi) \vec{e}_3 \quad 1.17$$

Admitindo que o eixo \vec{e}_2 se encontra alinhado com a direcção Norte ($\theta_1 = \pi/2$) o último termo da equação 1.16 fica:

$$2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k = 2(\Omega \cos \phi \cdot u_3 - \Omega \sin \phi \cdot u_2)\vec{e}_1 + 2(\Omega \sin \phi \cdot u_1)\vec{e}_2 + 2(-\Omega \cos \phi \cdot u_1)\vec{e}_3 \quad 1.18$$

onde $\Omega = |\vec{\Omega}|$. No oceano a componente vertical da velocidade é usualmente três ordens de grandeza inferior às componentes horizontais, podendo-se por esse motivo desprezar o primeiro termo da equação 1.18 relativamente aos restantes. A Terra efectua uma revolução em 86164 segundos (um dia sideral) pelo que se tem $|\vec{\Omega}| = 2\pi/86164 = 7.29 \times 10^{-5} s^{-1}$. Considerando as componentes horizontais da velocidade da ordem de 1 m/s a aceleração de Coriolis tem, para latitudes médias, uma ordem de grandeza de $10^{-5} m/s^2$. Este valor é seis ordens de grandeza inferior à aceleração da gravidade pelo que se despreza usualmente o último termo da equação 1.18. As acelerações horizontais são no entanto desta ordem de grandeza justificando-se a permanência das componentes horizontais. Introduzindo o parâmetro de Coriolis $f = 2\Omega \sin \phi$ a equação 1.18 fica:

$$2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k = -fu_2\vec{e}_1 + fu_1\vec{e}_2 \quad 1.19$$

1.2.4 Fluido newtoniano

Para a grande maioria dos fluidos, onde se inclui a água do mar, pode-se utilizar uma lei constitutiva que relaciona o tensor das tensões σ_{ij} de forma linear com o tensor das deformações e_{ij} definido por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.20$$

A forma mais geral de impor essa dependência linear é pela lei de Cauchy-Poisson:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad 1.21$$

onde δ_{ij} é o operador delta de Kronecker, p é a pressão e onde λ^* e μ são viscosidades moleculares dependentes do estado termodinâmico do fluido. Para o caso de fluido incompressível tem-se, $e_{kk} = \partial u_i / \partial x_i = 0$ e a relação constitutiva fica:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.22$$

Para fluidos compressíveis a relação 1.22 só é válida se a hipótese de Stokes: $\eta_B = \lambda^* + 2/3\mu = 0$ for válida. Substituindo esta expressão na equação 1.16 obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad 1.23$$

O penúltimo termo é nulo para fluido incompressível e o antepenúltimo termo pode-se normalmente desprezar.

1.2.5 Incompressibilidade

Quando o fluido é um líquido, admite-se usualmente que se comporta de forma incompressível. Com esta hipótese as equações 1.12 e 1.13 deixam de estar acopladas.

Para que a hipótese seja válida, de uma forma geral, não basta apenas que o número de Mach seja reduzido. Escolhendo para variáveis independentes a entropia e a massa volúmica, a pressão numa substância pura é dada por $p = p(s, \rho)$. A variação de pressão de um elemento de fluido num referencial Lagrangeano é:

$$\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \quad 1.24$$

onde $(\partial p / \partial \rho)_s = a^2$ é o quadrado da velocidade do som no meio. Colocando $D\rho/Dt$ em evidência e multiplicando por $L/\rho U$ para tornar a expressão adimensional obtêm-se:

$$\frac{L}{\rho U} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \quad 1.25$$

onde L e U são respectivamente um comprimento e uma velocidade característica do escoamento. A hipótese da incompressibilidade é válida quando $D\rho/Dt \ll 1$. Esta condição obriga, no caso geral, a que ambos os termos do lado direito da equação 1.25 sejam pequenos.

Na análise de grandezas que se segue consideram-se as seguintes dimensões características dos escoamentos de mesoescala:

$$L \approx 10^4 \text{ m} ; U \approx 1 \text{ m/s} ; a \approx 10^3 \text{ m/s} ; \rho \approx 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

O segundo termo do segundo membro da equação 1.25 tem uma ordem de grandeza de:

$$O\left(\frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \right) \approx \frac{10^4}{10^3} \frac{1}{10^6} 10^4 10^{-8} = 10^{-9} \quad 1.26$$

como indicado no Apêndice 1.

O primeiro termo da equação 1.25 tem a seguinte ordem de grandeza (Spurk, 1997):

$$O\left(\frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt} \right) = O\left(\frac{gL}{a^2} + M^2 + \frac{L^2 f^2}{a^2} \right) \quad 1.27$$

onde f é uma frequência característica do escoamento no caso de este não ser estacionário e $M=U/a$ é o número de Mach. Para o presente caso, considerando como frequência típica dos fenómenos de mesoescala $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ têm-se:

$$O\left(\frac{gL}{a^2}\right) \approx \frac{10 \cdot 10^4}{10^6} = 10^{-1} \quad 1.28$$

$$O(M^2) \approx \frac{1}{10^6} = 10^{-6} \quad 1.29$$

$$O\left(\frac{L^2 f^2}{a^2}\right) \approx \frac{10^8 \cdot 10^{-8}}{10^6} = 10^{-6} \quad 1.30$$

Todos estes termos são muito superiores ao da equação 1.26 pelo que se conclui que o termo Dp/Dt controla a compressibilidade. Para escoamentos de gases a alta velocidade o termo da equação 1.29 é o mais importante sendo superior à unidade para velocidades superiores à velocidade do som. No estudo da acústica tem-se $f=a/L$ tornando-se o termo da equação 1.30 unitário. No caso de fluidos geofísicos o termo da equação 1.28 é o mais importante, mostrando que no caso de escoamentos hidrodinâmicos onde $a^2/g \approx 230 \text{ Km}$ a hipótese de fluido incompressível pode ser considerada, mas que por exemplo em escoamento atmosférico onde $a^2/g \approx 11 \text{ Km}$ a compressibilidade necessita, em certos casos, de ser tomada em consideração.

Para o caso de fluido incompressível as equações 1.14 e 1.23 simplificam-se para:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad 1.31$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad 1.32$$

passando a estar desacopladas da equação 1.13.

A água do mar não é uma substância pura, sendo uma mistura essencialmente de água e sais minerais. A sua densidade é por isso também função da salinidade que é uma medida da concentração desses sais na água. A equação internacional de estado para a água do mar IES80 (Unesco, 1981) tem a seguinte forma:

$$\rho(S, T, p) = \rho(S, T, p = 0) \frac{1}{(1 - p/K(S, T, p))} \quad 1.33$$

onde p é a pressão relativa, S a salinidade e K é o inverso do coeficiente de expansão volumétrica que é calculado aproximadamente por:

$$K = \frac{v_0}{v_0 - v_p} p = K_0(S, T) + A(S, T) \cdot p + B(S, T) \cdot p^2 \quad 1.34$$

onde v é o volume específico e K_0 , A e B são funções polinomiais de S e T .

No oceano as variações na densidade são pequenas. Devido ao estado hidrostático de pressões a sua influência faz-se sentir apenas no termo gravítico como se mostra na secção seguinte.

Neste modelo foi implementada a expressão (Leendertse e Liu, 1978):

$$\rho = \left(5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S \right) / \left((1779.5 + 11.25T - 0.0745T^2) - (3.8 + 0.01T)S + 0.698(5890 + 38T - 0.375T^2 + 3S) \right) \quad 1.35$$

1.2.6 Fecho turbulento

As equações 1.31 e 1.32 formam um sistema de 4 equações que permitem, em teoria, a determinação das 4 variáveis u_i , p . Estas variáveis são grandezas instantâneas, contínuas no espaço e no tempo de acordo com a hipótese de

meio contínuo. Em termos práticos a solução directa deste sistema não é possível nem do ponto de vista analítico nem numérico. Analiticamente a natureza turbulenta (caótica) das equações faz com que uma solução determinística para as equações não seja possível, pelo menos para alguns tipos de sistemas (Mohammadi e Pironneau, 1994). Do ponto de vista numérico a capacidade de cálculo restringe a quantidade de informação possível de processar, limitando por isso os processos que podem ser resolvidos no modelo numérico. Para a simulação directa de escoamentos turbulentos (sem fecho turbulento) a resolução deve ser suficiente para descrever os turbilhões de menores dimensões que são da ordem da microescala de Kolmogorov. Desta forma são necessárias discretizações com um passo espacial de 10 μm a 100 μm e um passo temporal da ordem dos 100 μs . Para a solução de domínios reais estas discretizações obrigariam a uma capacidade de cálculo alguns milhões de vezes superior à disponível nos actuais supercomputadores (Speziale, 1987).

A forma de contornar estas limitações consiste em considerar que o escoamento pode ser separado em duas partes: uma parte U_i, P , que varia de uma forma relativamente lenta sendo economicamente possível a sua análise, e uma parte u'_i, p' , sobreposta a esta na forma de uma perturbação, com uma variação tão rápida que não é economicamente possível ou desejável a sua resolução:

Tradicionalmente essa divisão é efectuada pela decomposição à Reynolds:

$$u_i(x_i, t) = U_i(x_i, t) + u'_i(x_i, t) \quad 1.36$$

$$p(x_i, t) = P(x_i, t) + p'(x_i, t) \quad 1.37$$

Devido à natureza não linear das equações a aplicação desta decomposição não produz dois conjuntos separados de equações: As equações das grandezas resolvidas possuem termos onde figuram variáveis das perturbações e vice versa. É através desses termos que o campo das grandezas resolvidas interage

com o campo das perturbações. O objectivo principal dos modelos de turbulência é o de descrever de uma forma simples, a partir das variáveis do campo resolvido, as interacções entre estes dois campos de propriedades.

Define-se para isso uma operação de média que é aplicada às equações do movimento juntamente com a decomposição anterior. Essa média toma usualmente a forma de uma média no tempo para um ponto fixo no espaço. Na técnica LES (*Large Eddy Simulation*) usam-se no entanto médias no espaço para um determinado instante de tempo. Neste método obtém-se operadores com melhores características de filtragem que permitem definir qual a maior dimensão de turbilhão filtrado (Abbott e Basco, 1989).

Uma forma genérica de efectuar uma média temporal a uma função $f(x_i, t)$ num ponto x_i pode ser obtida pelo processo de convolução:

$$\bar{f}(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon, \lambda) f(t + \varepsilon) d\varepsilon \quad 1.38$$

onde W é uma função peso dependente do parâmetro λ e com a propriedade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon, \lambda) d\varepsilon = 1 \quad 1.39$$

para qualquer valor do parâmetro λ .

A tradicional média de Reynolds dada por:

$$\bar{f}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad 1.40$$

é um caso particular desta operação de convolução para uma função de peso da forma:

$$W(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{para } |\varepsilon| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{para } |\varepsilon| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad 1.41$$

sendo neste caso o parâmetro $\lambda = 1/T$. Para o caso de escoamento transiente este processo de média tem de ser encarado como uma média de conjunto, resultado de vários processos idênticos de média. A função de peso 1.41 origina uma álgebra simples, sendo essa a principal razão da sua utilização. Não possui no entanto as propriedades mais adequadas do ponto de vista do processo de filtragem, não conseguindo anular totalmente a energia das perturbações filtradas, provocando uma redistribuição dessa energia pelo campo resolvido. Este facto foi reconhecido por Leonard (1974) que sugere uma filtragem do tipo Gaussiana para o caso de médias espaciais associadas a modelos de turbulência do tipo LES.

Aplicando a decomposição 1.36, 1.37 às equações 1.31, 1.32 e efectuando uma média do tipo 1.38 com uma função de peso dada por 1.41 obtêm-se as equações (ver Apêndice 2):

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad 1.42$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_j U_i)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad 1.43$$

para o campo resolvido e as equações:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad 1.44$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial U_j u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k + \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} \quad 1.45$$

Para o campo das perturbações.

A equação da continuidade pôde ser totalmente separada numa equação para o campo resolvido, onde só existem variáveis desse campo e uma equação para o campo das perturbações, igualmente onde só figuram perturbações. Esta separação é possível devido à natureza linear da equação 1.31. Na decomposição da equação de balanço de quantidade de movimento obteve-se uma equação para o campo resolvido que é idêntica à equação das grandezas instantâneas com um termo adicional onde figuram grandezas do campo das flutuações. Os termos $\overline{u'_i u'_j}$ actuam no sentido de redistribuírem a quantidade de movimento do campo resolvido sendo por esse motivo o tensor $R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$ denominado tensor das tensões de Reynolds. Na equação do campo das perturbações surge um termo simétrico a este e também termos de convecção de perturbações pelo campo resolvido e de convecção de variáveis do campo resolvido pelo campo das perturbações.

As equações 1.42 e 1.43 formam um sistema de quatro equações a dez incógnitas: As quatro incógnitas U_i, P e as seis componentes independentes do tensor das tensões de Reynolds. O problema do fecho turbulento deste sistema é resolvido tradicionalmente de duas formas distintas: através da solução de equações de transporte adicionais para as seis tensões de Reynolds ou através de relações simples entre as tensões de Reynolds e as variáveis do campo resolvido. Esta última metodologia foi proposta por Boussinesq em 1877 definindo uma viscosidade dinâmica turbulenta, μ_t :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.46$$

Esta equação é similar à equação constitutiva 1.22 para fluido Newtoniano e considera que a difusão turbulenta é isotrópica. No oceano, devido à estratificação e à grande diferença entre as escalas vertical e horizontal a difusão é um processo fortemente anisotrópico, sendo prática corrente considerar viscosidades turbulentas diferentes nessas duas direcções. Mesmo em situações onde a turbulência é um processo fisicamente isotrópico, a diferença no passo espacial da malha usada pelo modelo, entre a direcção vertical e horizontal produz uma filtragem diferente nessas duas direcções, originando viscosidades turbulentas diferentes.

O último termo da equação 1.43 fica:

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) (1 - \delta_{j3}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_v \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \delta_{j3} \quad 1.47$$

onde A_h e A_v são as viscosidades cinemáticas calculadas pelo modelo de turbulência. O termo da difusão horizontal é por vezes substituído por um operador bi-harmónico da forma:

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j} (1 - \delta_{j3}) = -B \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\Delta_h U_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\Delta_h U_i) \right) \quad 1.48$$

onde B é a viscosidade bi-harmónica e $\Delta_h = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ é o operador Laplaciano nas direcções horizontais. Esta forma pode ser preferível na modelação de escoamentos de grande escala pois actua de forma selectiva, dissipando mais rapidamente as escalas de menor dimensão, preservando os grandes turbilhões (O'Brien, 1986).

Com a adopção da equação 1.47 e agrupando os termos de dissipação viscosa e turbulenta, a equação de transporte de quantidade de movimento do campo resolvido toma uma forma análoga à equação 1.32 para o campo instantâneo. Como na prática apenas se calculam variáveis do campo resolvido, utiliza-se normalmente letra minúscula para as definir, ficando:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad 1.49$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_h \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) (1 - \delta_{j3}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta_{j3} \quad 1.50$$

A análise da equação de transporte de energia cinética mostra como a energia transita entre os dois campos. O balanço de energia cinética do campo resolvido é dado por (ver apêndice 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^2/2}{\partial t} + \frac{\partial(U_j U_i^2/2)}{\partial x_j} &= g_i U_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A \frac{\partial U_i^2/2}{\partial x_j} \right) - \\ \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j U_i})}{\partial x_i} - A \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 &+ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad 1.51$$

e, para o campo das perturbações:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_j k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u'_k u'_i} + A \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'_j k}}{\partial x_j} - A \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad 1.52$$

onde $k = \overline{u_i'^2}/2$ é a energia cinética do campo das perturbações.

Os termos do lado esquerdo da equação 1.51 representam a variação local e o transporte convectivo da energia cinética do campo médio. Os termos do lado direito representam fluxos de energia cinética: O primeiro termo quantifica a conversão de energia cinética em energia potencial associada ao trabalho das forças gravíticas. No caso do oceano este termo é importante não se podendo desprezar. O segundo termo representa o trabalho efectuado pelas forças de pressão no escoamento. O terceiro termo representa o trabalho da força de Coriolis sendo nulo pois $\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k \perp U_i$. Os quarto e quinto termos representam o transporte difusivo de energia cinética pelas tensões viscosas e de Reynolds,

respectivamente. Os dois últimos termos representam a dissipação viscosa e turbulenta da energia cinética do campo médio. Em escoamentos turbulentos os termos de transporte e de dissipação viscosa são várias ordens de grandeza inferiores aos turbulentos podendo-se por isso desprezar.

A equação 1.52 contém termos equivalentes aos da equação 1.51 mas referentes ao campo das perturbações. O termo de conversão entre energia cinética e potencial não está presente nas equações das perturbações pois não se consideraram perturbações turbulentas do campo de densidades, esta simplificação justifica-se em geral no oceano uma vez que nas regiões de forte estratificação vertical as perturbações turbulentas se encontram inibidas (Kowalik e Murty, 1993). O último termo da equação 1.51 que representa a dissipação turbulenta da energia cinética do campo médio é simétrico do último termo da equação 1.52 onde actua como termo de produção de energia cinética do campo das perturbações. Como $\overline{u'_i u'_j} \partial U_i / \partial x_j$ é uma grandeza negativa o fluxo de energia dá-se sempre no sentido do campo médio para o campo das perturbações, dando origem a uma cascata de energia que transfere energia das maiores escalas para as menores. No oceano esta transferência de energia não se faz numa sub-banda de inércia única pois podem identificar-se três bandas de números de onda onde é injectada energia. Este processo é analisado em pormenor em (Coelho, 1996)

1.2.7 Aproximação hidrostática

No oceano a dimensão característica horizontal é várias ordens de grandeza superior à dimensão vertical, fazendo com que a componente vertical da velocidade seja usualmente três ordens de grandeza inferior às horizontais. Se a aceleração vertical for pequena, o que acontece na maioria das situações, o balanço de quantidade de movimento na direcção vertical pode simplificar-se tomando a forma de um equilíbrio hidrostático.

Efectuando uma análise de ordens de grandeza aos termos da equação 1.50 para $i=3$ obtém-se:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial(u_3 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_3 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 u_3)}{\partial x_3} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) + 2\Omega \cos \phi u_1 \quad 1.53$$

$10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10 \quad O(\) \quad 10^{-7} \quad 10^{-4}$

As ordens de grandeza indicadas por baixo de cada termo foram obtidas considerando as dimensões características de escoamentos costeiros:

$$L_h \approx 10^4 \text{ m} ; L_v \approx 10 \text{ m} ; U_h \approx 1 \text{ m/s} ; U_v \approx 10^{-3} \text{ m/s} ; g \approx 10 \text{ m/s}^2 ; \rho \approx 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$t \approx L_h/U_h \approx L_v/U_v \approx 10^4 \text{ s} ; 2\Omega \cos \phi \approx 10^{-4} \text{ (latitude média)}$$

tendo-se igualmente admitido que os termos de atrito são da mesma ordem de grandeza dos termos de inércia.

Conservando-se apenas os termos de maior ordem de grandeza a equação 1.53 simplifica para:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -g \quad 1.54$$

obtendo-se a ordem de grandeza do gradiente vertical de pressão:

$$O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}\right) \approx 10 \quad 1.55$$

A equação de balanço de quantidade de movimento na direcção vertical fica assim reduzida ao balanço hidrostático de forças:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad 1.56$$

A aproximação hidrostática permite que o termo de pressão na equação 1.50 seja determinado por integração da equação 1.56.

Como se referiu na secção anterior as variações de massa específica só afectam de forma significativa esse termo. Define-se assim um estado de

referência hidrostático e decompõe-se a densidade num valor de referência e numa flutuação em torno desse valor (decomposição de Boussinesq):

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0 + \rho'(x_1, x_2, x_3, t) \quad 1.57$$

No oceano as ordens de grandeza destas componentes são $\rho \approx 10^3$ $\rho' \approx 1$ (Gill, 1989).

Integrando a equação 1.56 na direcção vertical e usando a decomposição de Boussinesq para a densidade tem-se:

$$\int_{x_3}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_3} dx_3 = - \int_{x_3}^{\eta} (\rho_0 + \rho') g dx_3 \quad 1.58$$

Ignorando a tensão superficial a pressão na superfície livre é igual à pressão atmosférica ficando:

$$p(x_3) = p_{atm} + \rho_0 g (\eta - x_3) + g \int_{x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \quad 1.59$$

Pode-se assim obter o gradiente horizontal de pressões:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{atm}}{\partial x_i} + \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \quad i = 1, 2 \quad 1.60$$

ou, utilizando a regra de Leibnitz¹:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_{atm}}{\partial x_i} + g[\rho_0 + \rho'(\eta)] \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + g \int_{x_3}^{\eta} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} dx_3 \quad i = 1, 2 \quad 1.61$$

¹ $\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy + f(x, \beta) \frac{\partial \beta}{\partial x} - f(x, \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}$

onde $\rho_0 + \rho'(\eta) = \rho(\eta)$. Usando as dimensões características da equação 1.53 mostra-se que o termo baroclínico da equação anterior (integração das flutuações de densidade) possui a mesma ordem de grandeza do termo barotrópico (gradiente de η) para profundidades da ordem de 10^3 . Explica-se assim a importância do forçamento baroclínico em escoamentos costeiros e oceânicos. A análise de ordem de grandeza permite também escrever:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{(\rho_0 + \rho')} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho'}{\rho_0^2} + \frac{\rho'^2}{\rho_0^3} \dots \right) \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad 1.62$$

onde se expandiu a fracção em série binomial. O termo de pressão pode ser substituído nas componentes horizontais da equação 1.50 que ficam:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x_i} - g \frac{\rho(\eta)}{\rho_0} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{g}{\rho_0} \int_{x_3}^{\eta} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad 1.63$$

onde $i = 1, 2$. Estas equações permitem o cálculo das componentes horizontais da velocidade, conhecida a elevação da superfície livre e a distribuição de massa volúmica.

1.2.8 Elevação da superfície livre e velocidade vertical

A elevação da superfície livre pode ser obtida da equação da continuidade 1.49 por Integração na direcção vertical em toda a coluna de água. Tem-se:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad 1.64$$

O último termo é idêntico a:

$$u_3(\eta) - u_3(-h) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} - u_1(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_1} - u_2(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_2} \quad 1.65$$

Com o auxílio da regra de Leibnitz a equação 1.64 fica:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} u_1 dx_3 - u_1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_1(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_1} + \\
 & \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^{\eta} u_2 dx_3 - u_2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + u_2(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_2} + \qquad \qquad \qquad 1.66 \\
 & \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_2} - u_1(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_1} - u_2(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_2} = 0
 \end{aligned}$$

Anulando os termos comuns resulta:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{\eta} u_1 dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^{\eta} u_2 dx_3 \qquad \qquad \qquad 1.67$$

Esta expressão representa a conservação de massa na coluna de água e permite o cálculo da elevação da superfície livre.

Integrando de forma semelhante a equação 1.49 do fundo até à cota x_3 obtém-se uma expressão para o cálculo da velocidade vertical:

$$\int_{-h}^{x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h}^{x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h}^{x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = 0 \qquad \qquad \qquad 1.68$$

$$u_3(x_3) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^{x_3} u_1 dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^{x_3} u_2 dx_3 \qquad \qquad \qquad 1.69$$

A distribuição de massa volúmica necessária na equação 1.63 pode ser obtida da equação de estado 1.35 sendo a salinidade e a temperatura transportadas pela equação:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right) + FP \qquad \qquad \qquad 1.70$$

onde α é a propriedade transportada (salinidade ou temperatura), K o coeficiente de difusividade turbulenta e FP o termo de produção interna da propriedade.

As equações 1.63, 1.67, 1.69, 1.70 com a equação de estado 1.35 e as equações de fecho turbulento, formam o sistema que é resolvido pelo modelo hidrodinâmico.

1.2.9 Análise de ordens de grandeza

Como se referiu no início do capítulo podem-se identificar várias escalas características nas quais ocorrem processos oceânicos de interesse. Como as equações do movimento não têm, na sua forma completa, solução analítica, pode-se optar por uma das metodologias: Simplificar as equações originais de forma a obter um sistema susceptível de ser tratado analiticamente e que descreve de uma forma relativamente completa os fenómenos de uma determinada escala, ou enveredar por uma solução numérica do sistema original restringida, devido ao método e às capacidade de cálculo, à resolução de fenómenos de uma determinada escala, ou conjunto de escalas. Em qualquer destas abordagens é necessário analisar a importância relativa dos vários termos das equações. Uma metodologia normalmente seguida é a de comparar pares de termos, criando números adimensionais que quantificam a importância relativa dos fenómenos que esses termos representam.

Denominando U , L , H , F , G e A as grandezas características respectivamente para a velocidade horizontal, para o comprimento característico nas direcções horizontal e vertical, para o parâmetro de Coriolis, para a aceleração da gravidade e para a viscosidade cinemática, pode-se deduzir uma grandeza característica para a escala de tempos dada por $T=L/U$ e, recorrendo à equação 1.49, uma grandeza característica para a velocidade vertical dada por $W=HU/L$.

Numerando os termos da equação de balanço de momento da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{atm}}{\partial x_i} - g \frac{\rho(\eta)}{\rho_0} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{g}{\rho_0} \int_{x_3}^{\eta} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)

A importância relativa entre o termo convectivo (2) e o termo difusivo (6) é dada por:

$$\frac{\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j}}{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \approx \frac{\frac{U^2}{L}}{A \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{A} = Re \tag{1.72}$$

que é o número de Reynolds. Para que esta grandeza seja uma medida da importância relativa entre os fenómenos convectivos e difusivos A deve ser da ordem de grandeza da viscosidade molecular do fluido. Este número adimensional caracteriza a natureza laminar ou turbulenta do escoamento, mostrando que os escoamentos oceânicos são fortemente turbulentos. Por esse motivo pode-se normalmente desprezar os efeitos da difusão molecular. Em escoamentos oceânicos o termo de difusão turbulenta é usualmente da mesma ordem de grandeza do termo convectivo (Pond e Pickard, 1989). Para escoamento estacionário de fluido homogéneo, sem efeitos de rotação e confinado (sem superfície livre) este número adimensional caracteriza completamente o escoamento. Para o caso geral dos escoamentos geofísicos o fluido é não homogéneo, sujeito a rotação e com superfície livre surgindo para cada um desses efeitos um novo número adimensional.

O efeito da superfície livre surge do termo de pressão barotrópica (4). Esse termo é produzido pela acção das forças mássicas como se viu na secção 1.2.6.

A importância relativa entre as forças de inércia e as forças mássicas é assim:

$$\frac{\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j}}{g \frac{\rho(\eta)}{\rho_0} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}} \approx \frac{\frac{U^2}{L}}{G \frac{H}{L}} = \frac{U^2}{GH} = Fr_0^2 \quad 1.73$$

Que é o quadrado do número de Froude barotrópico. A grandeza adimensional $Fr_0 = U/\sqrt{GH}$ indica a relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de fase das ondas gravíticas barotrópicas.

O efeito da rotação é traduzido pelo termo da aceleração de Coriolis. A razão entre esse termo e o termo convectivo é:

$$\frac{\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j}}{2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k} \approx \frac{\frac{U^2}{L}}{FU} = \frac{U}{FL} = R_o \quad 1.74$$

que é o Número de Rossby. Este número adimensional indica a importância relativa da aceleração convectiva e da aceleração de Coriolis. Tendo em consideração que $U/L=1/T$ onde T é da ordem de grandeza do tempo que uma partícula de fluido necessita para percorrer a distância característica L o número de Rossby pode ser interpretado, do ponto de vista cinemático, como a razão entre a ordem de grandeza do tempo que uma partícula despende a percorrer a distância característica L e a ordem de grandeza do período de rotação da Terra. Desta forma, para escoamentos com número de Rossby inferior à unidade a velocidade é suficientemente baixa, ou o comprimento característico suficientemente elevado, para a partícula sentir os efeitos da rotação da terra. Em vez da velocidade do escoamento é por vezes de maior utilidade considerar a velocidade de propagação das ondas de superfície $c = \sqrt{GH}$. Nesse caso a distância característica acima da qual as ondas de superfície sentem os efeitos da rotação da Terra é:

$$L_{R_o} = \frac{c}{F} = \frac{\sqrt{GH}}{F} \quad 1.75$$

que é o raio de deformação de Rossby barotrópico.

A importância relativa entre o termo dissipativo turbulento e o termo de Coriolis é estimada pelos parâmetros:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_h \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}{2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k} \approx \frac{A_h \frac{U}{L^2}}{FU} = \frac{A_h}{FL^2} = E_x \quad 1.76$$

que é o número de Ekman horizontal e:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}{2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k} \approx \frac{A_v \frac{U}{H^2}}{FU} = \frac{A_v}{FH^2} = E_v \quad 1.77$$

que é o número de Ekman vertical. Este último número adimensional pode fornecer uma ordem de grandeza para a dimensão vertical característica das camadas de Ekman da superfície e do fundo. No interior da camada de Ekman os efeitos dissipativos e de rotação estão em equilíbrio sendo por isso o número de Ekman de ordem 1, obtém-se:

$$E_v \approx 1 \Rightarrow H \approx \sqrt{\frac{A_v}{F}} \quad 1.78$$

pelo que, para valores usuais de A_v no oceano da ordem de $10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ as camadas de Ekman tem uma espessura característica da ordem da centena de metros.

A eficiência da estratificação vertical como mecanismo inibidor da turbulência pode ser quantificada comparando a estabilidade da coluna de água com a sua tendência para amplificar as perturbações. Uma medida da estabilidade da coluna de água é dada pelo quadrado da frequência de Brunt-Väisälä:

$$N^2 = \frac{\partial b}{\partial x_3} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \quad 1.79$$

que é a frequência com que uma partícula de fluido oscila quando afastada da sua posição de equilíbrio numa coluna de água estável.

A amplificação das perturbações é obtida por extracção de energia ao escoamento resolvido o que só é possível quando existem gradientes espaciais de velocidade no campo resolvido. Utilizando $(\partial u / \partial x_3)^2$ como medida da tendência que o escoamento possui para amplificar pequenas perturbações. A razão entre estas duas tendências:

$$R_i = \frac{N^2}{(\partial u / \partial x_3)^2} \quad 1.80$$

é o número de Richardson. Normalmente para valores de $R_i > 1/4$ o escoamento é verticalmente estável amortecendo as perturbações na direcção vertical (LeBlond e Mysak, 1978).

1.3 Modelos de equações simplificadas

Analisa-se nesta secção duas abordagens normalmente adoptadas no estudo de processos à escala global: A formulação quasi-geostrófica com a linearização das equações e a sua solução por uma equação de vorticidade e o método da divisão de modos com a separação entre o modo barotrópico e os modos internos. Estas formulações produzem soluções aproximadas com custos computacionais reduzidos mas não incluem todos os efeitos presentes nos escoamentos reais.

1.3.1 Modelos quasi-geostróficos

Os escoamentos de macroescala apresentam uma dinâmica aproximadamente geostrófica. Este facto tem sido usado com o objectivo de simplificar as equações primitivas, obtendo-se um modelo com um comportamento dinâmico compreensível, que representa adequadamente os fenómenos da macroescala

com uma solução mais económica do ponto de vista computacional (Norton et *al.*, 1986).

Toma-se como ponto de partida as equações primitivas tridimensionais, adimensionais, tendo-se desprezado os termos de atrito. Considera-se que para os escoamentos de interesse se tem:

$$R_o = \frac{U}{FL} \ll 1 \quad ; \quad \delta = \frac{H}{L} \ll 1 \quad ; \quad \frac{L}{R_o} \ll 1 \quad \text{e} \quad F_r^2 = \frac{f_0^2 L^2}{gH} \ll 1 \quad 1.81$$

onde R_o é o número de Rossby, R_o é o raio da terra e F_r^2 é o quadrado de um numero de Froude.

As variáveis dependentes são expandidas em série de potências:

$$u_i(x_i, t, R_o) = u_{0i}(x_i, t) + R_o u_{1i}(x_i, t) + R_o^2 u_{2i}(x_i, t) + \dots \quad 1.82$$

e utiliza-se a decomposição de Boussinesq (equação 1.57) para a pressão e para a massa volúmica. Adimensionalizando as equações do movimento e aplicando estas decomposições obtém-se, para o campo de velocidades de ordem 1 (u_{0i}):

$$u_{02} = \frac{\partial p'_0}{\partial x_1} \quad ; \quad u_{01} = -\frac{\partial p'_0}{\partial x_2} \quad ; \quad \rho'_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho_0 p'_0) \quad 1.83$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_3} (u_{03} \rho_0) + \frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} = 0 \quad 1.84$$

Diferenciando as duas primeiras expressões obtém-se:

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2} = 0 \quad 1.85$$

pelo que o campo de velocidades horizontal de ordem 1 é geostrófico e não divergente. Substituindo este resultado na equação da continuidade 1.84 e

utilizando a condição fronteira de velocidade nula no fundo conclui-se que a velocidade vertical de ordem 1 é nula em todo o domínio.

O valor de p'_0 é obtido das equações de ordem R_0 . Aplicando derivadas cruzadas às equações do momento de ordem R_0 obtém-se a equação de conservação da vorticidade:

$$\frac{d_0}{dt}(\zeta_0 + \beta x_2) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho_0 u_{13}) \quad 1.86$$

onde $\zeta_0 = \frac{\partial u_{02}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial x_2}$ é a vorticidade do campo de ordem 1 e

$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{01} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{02} \frac{\partial}{\partial x_2}$ é a derivada total quasi-geostrófica. Desta forma

retirou-se a não linearidade do termo convectivo. A velocidade vertical de ordem R_0 u_{13} é obtida da primeira lei da termodinâmica, que para o caso da água se pode escrever (Pedlosky, 1987):

$$-\frac{d_0 \rho'_0}{dt} + u_{13} S = \aleph \quad 1.87$$

onde S é um parâmetro de estratificação proporcional ao quadrado da frequência de Brunt-Väisälä e \aleph representa o aquecimento da partícula de fluido provocado pela condução e efeitos viscosos. Recorrendo às equações 1.83 pode-se escrever:

$$\zeta_0 = \frac{\partial^2 p'_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p'_0}{\partial x_2^2} \quad 1.88$$

a equação 1.86 pode ser escrita completamente em termos de $\psi = p'_0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta x_2 \right] = 0 \quad 1.89$$

a versão linearizada desta equação é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \quad 1.90$$

que admite soluções separáveis da forma: $\psi = \text{Re} e^{i(kx_1 + lx_2 - \sigma t)} \Phi(x_3)$ onde Φ é uma função que define a estrutura vertical. A determinação de Φ sujeita às condições fronteira verticais obtém-se a partir da solução de um problema de valores próprios dando origem à família de funções (Pedlosky, 1987):

$$\Phi_n(x_3) \quad n = 0, 1, \dots$$

O modo $n=0$ é o modo barotrópico: $\Phi_0(x_3)=1$ que dá origem a variáveis independentes de x_3 e produz $u_3=0$. Os restantes modos são os modos baroclínicos, que satisfazem a condição:

$$\int_0^1 \rho_0 \Phi_n(x_3) dx_3 = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad 1.91$$

estes modos não produzem assim fluxos de massa integrados na vertical mas dão origem a velocidades verticais e o perfil vertical das velocidades horizontais depende da deformação das isobáricas através de ψ .

Os tradicionais modelos de duas camadas e de gravidade reduzida podem ser obtidos por esta metodologia, considerando apenas o modo barotrópico e o primeiro modo interno, tendo em atenção as condições fronteira na direcção vertical.

Os modelos quasi-geostróficos tem sido usada para identificar processos e características físicas de escoamentos à escala global (Holland, 1986) não sendo no entanto adequados como modelos de circulação global devido às suas excessivas aproximações (McWilliams, 1996).

As equações quasi-geostróficas conduzem a uma separação do escoamento num modo externo e num número infinito de modos internos. Uma abordagem semelhante a esta consiste em dividir o domínio na vertical num determinado número de camadas, resolvendo as equações quasi-geostróficas integradas para cada camada. Para aplicações oceânicas faz-se usualmente coincidir as camadas com superfícies isopícnicas obtendo-se um modelo do tipo isopícnico. Esta classe de modelos é conhecida como modelos de camadas (Wallcraft, 89) permitindo a simulação eficiente de escoamentos onde o gradiente baroclínico constitui o principal forçamento. Devido à grande diferença de massa volúmica entre o ar e a água a inclinação da superfície livre é várias ordens de grandeza inferior à inclinação das camadas interiores. Por esse motivo é usual considerar a condição de tampa rígida para a superfície livre, filtrando as ondas de superfície. Esta condição não é no entanto necessária à aplicação deste método. As hipóteses admitidas quanto às escalas temporais e espaciais fazem no entanto com que este tipo de modelos não sejam aplicáveis em escoamentos de mesoescala.

1.3.2 Modelos com divisão de modos

Outra abordagem possível consiste em utilizar as equações primitivas e separar apenas o modo barotrópico que é resolvido por um esquema numérico próprio. Os outros modos são resolvidos simultaneamente pelas equações 3D resultantes. Este método é conhecido por divisão de modos "*Mode Splitting*" (Madala e Piacsek, 1977), (Blumberg e Mellor, 1983), (Hedström, 1997).

O modo externo deve ser capaz de resolver as ondas gravíticas da superfície livre que possuem uma celeridade muito superior às dos modos internos. Considerando ordens de grandeza típicas para um problema oceânico:

$$H \approx 10^3 \text{ m} ; \Delta\rho \approx 1 \text{ Kg/m}^3 ; \Delta x \approx 10^5 \text{ m}$$

a celeridade das ondas de superfície para águas pouco profundas é da ordem:

$$c \approx \sqrt{gH} = 100 \text{ m/s} \quad 1.92$$

e o passo de tempo associado a um número de Courant unitário é:
 $\Delta t = \Delta x/c = 10^3 \text{ s}$. A celeridade do primeiro modo interno é:

$$c' \approx \sqrt{g'H} = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} H} = 1 \text{ m/s} \quad 1.93$$

e o passo de tempo para Courant unitário é $\Delta t' = \Delta x/c' \approx 10^5 \text{ s}$.

Devido à diferença de celeridade destes dois modos as suas necessidades computacionais são diferentes justificando a separação das equações numa parte barotrópica e outra baroclínica.

Para ilustrar esta metodologia decompõe-se as velocidades horizontais na seguinte forma:

$$u_i(x, y, z, t) = \bar{u}_i(x, y, t) + u'_i(x, y, z, t) \quad 1.94$$

onde

$$\bar{u}_i = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u_i dx_3 \quad 1.95$$

é a velocidade integrada na profundidade. Integrando as equações 1.49 e 1.63 na profundidade obtêm-se as equações bidimensionais, onde se mantiveram os termos relativos ao gradiente horizontal de densidade:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (H\bar{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (H\bar{u}_2)}{\partial x_2} = 0 \quad 1.96$$

Os termos convectivos das equações do modo barotrópico surgem também no modo baroclínico necessitando de tratamento adicional:

Utilizando a decomposição 1.94 tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} uu \, dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u}^2 H + \int_{-h}^{\zeta} u'^2 \, dz + 2\bar{u} \int_{-h}^{\zeta} u' \, dz \right) \quad 1.99$$

com o auxílio da equação 1.95 o integral da componente baroclínica fica:

$$\int_{-h}^{\zeta} u' \, dz = \int_{-h}^{\zeta} u - \bar{u} \, dz = H\bar{u} - H\bar{u} = 0 \quad 1.100$$

podendo-se por isso decompor os termos convectivos comuns às equações 1.97 e 1.98 nas suas contribuições barotrópica e baroclínica:

$$\frac{1}{H} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u_1 u_1 \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} u_1 u_2 \, dz \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u}_1^2 H + \int_{-h}^{\zeta} u_1'^2 \, dz \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{u}_1 \bar{u}_2 H + \int_{-h}^{\zeta} u_1' u_2' \, dz \right) \quad 1.101$$

estas contribuições tem escalas temporais de variação diferentes pelo que podem ser actualizadas em intervalos diferentes: A contribuição barotrópica é actualizada com o passo de tempo Δt enquanto que a contribuição baroclínica é actualizada com o passo de tempo $\Delta t'$. No fim de cada cálculo baroclínico os resultados são adicionados de acordo com 1.94, sendo necessário compatibilizar os resultados dos dois modos de forma a obter um campo de velocidades não divergente (Deleersnijder, 1993).

O campo de massa volúmica é calculado por uma função de estado em função dos campos de temperatura e salinidade. Como estas variáveis variam de forma bastante lenta as suas equações de transporte não necessitam de decomposição podendo ser resolvidas com o passo de tempo baroclínico.

Uma das desvantagens apontadas neste método é a impossibilidade de tratar o termo de tensão de corte no fundo de forma implícita, uma vez que, da mesma forma que o termo convectivo, dependem tanto da componente barotrópica

como da componente baroclínica da velocidade. Uma solução possível é considerar:

$$\tau_i^f = c|\bar{u}| \cdot (\bar{u}_i + u_i') \quad 1.102$$

e implementar tanto na equação do modo barotrópico como na equação do modo baroclínico a velocidade correspondente de forma implícita, mantendo a velocidade do outro modo explícita.

Outra dificuldade frequentemente apontada a este tipo de métodos está relacionada com a implementação das condições fronteira (Yanenko, 1971).

Em escoamentos costeiros e estuarinos onde a profundidade é da ordem da centena de metros a diferença entre o passo de tempo do modo barotrópico e do modo baroclínico é pequena não se justificando este tipo de abordagem.

1.4 Conclusões

Neste capítulo utilizaram-se os princípios fundamentais de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia para derivar as equações que regem os escoamentos hidrodinâmicos. As ordens de grandeza dos fenómenos em estudo e as particularidades dos escoamentos em ambientes marinhos foram usadas no estabelecimento de hipótese que permitiram a simplificação das equações originais. As equações obtidas são utilizadas para introduzir alguns números adimensionais normalmente usados na dinâmica dos fluidos geofísicos.

Neste capítulo são ainda analisados dois tipos de simplificações que são normalmente usadas em oceanografia para o estudo de problemas à escala global: As equações quasi-geostóficas e a divisão de modos. Mostra-se que este tipo de aproximações é útil na compreensão dos fenómenos físicos. Esta abordagem não é no entanto adequada para a modelação de escoamentos costeiros e estuarinos reais devido às excessivas simplificações admitidas.

2 MALHAS COMPUTACIONAIS

Para a resolução numérica das equações do capítulo anterior é necessário definir uma malha computacional na qual essas equações são discretizadas e resolvidas. Neste capítulo são analisados vários tipos de malha. O capítulo está organizado em duas partes: Na primeira parte analisa-se a representação horizontal do domínio, recorrendo a diversos tipos de malha cartesiana e curvilínea. As vantagens e inconvenientes de cada metodologia são identificados. Na segunda parte descrevem-se diversos tipos de coordenada vertical utilizados em modelação hidrodinâmica, tornando-se claras as vantagens da opção tomada neste modelo de utilizar uma formulação genérica para a discretização nessa direcção. O capítulo é escrito na perspectiva do método do volume finito, identificando-se em várias situações a equivalência entre este método e outras abordagens mais tradicionais de definição da malha computacional.

2.1 Divisão horizontal do domínio de cálculo

Para que a aplicação do método numérico seja possível, é necessário dividir o domínio de estudo em regiões elementares, ou definir posições discretas onde as variáveis dependentes são calculadas. Estas duas alternativas dão origem a malhas com características diferentes: malhas primárias e malhas secundárias. As malhas primárias unem os pontos de cálculo do domínio por linhas ao longo das quais as propriedades variam segundo uma lei pressuposta. Esta lei é função do método numérico utilizado, podendo ser identificada com as funções de forma no caso dos elementos finitos ou ser um valor constante no caso dos volumes finitos. No caso das diferenças finitas não é necessário identificar explicitamente nenhuma função, sendo o valor das propriedades apenas conhecido nos pontos de cálculo. As malhas secundárias dividem o domínio em regiões (células) no interior das quais os balanços das propriedades se devem

verificar. Em função do método de cálculo usado pode ser necessário a utilização de uma ou das duas malhas simultaneamente.

As malhas podem ser estruturadas ou não estruturadas em função da forma como os nós ou elementos estão ordenados. Numa malha estruturada as células e os pontos são definidos pela intersecção de superfícies iso-coordenadas enquanto que numa malha não estruturada os pontos são definidos por qualquer vector posição sendo as ligações identificadas por uma matriz de conectividades.

Na modelação oceânica e costeira é normal utilizar arranjos diferentes da malha para as direcções horizontal e vertical. Esta abordagem justifica-se devido às diferenças nas dimensões características e nos processos que ocorrem nessas duas direcções. Para estas aplicações os tipos de malha mais utilizados na direcção horizontal são as malhas estruturadas cartesianas ou curvilíneas e as malhas não estruturadas com células triangulares.

Nos parágrafos seguintes analisam-se as vantagens e inconvenientes de vários tipos de malha estruturadas.

2.1.1 Malha cartesiana

Neste tipo de malha as linhas que unem os pontos são do tipo $x_i = C^{te}$. Onde x_i é um referencial cartesiano alinhado com a malha. Esta malha dá assim origem a células de forma rectangular no plano horizontal. Devido à sua simplicidade e menor exigência computacional a opção de malha cartesiana na direcção horizontal tem sido a mais utilizada na modelação de escoamentos oceânicos e costeiros (Arakawa e Lamb, 1977). Do ponto de vista operacional esta malha tem também a vantagem de uma maior facilidade de implementação sendo possível, num curto espaço de tempo, a criação de uma malha computacional eficiente incluindo batimetria e condições fronteira realísticas.

2.1.1.1 *Precisão associada ao uso de malhas descentradas*

No caso das equações primitivas é usual utilizar malhas descentradas onde se calculam diferentes propriedades em diferentes pontos do espaço. Isto equivale

a definir uma malha primária para cada conjunto de propriedades ou diferentes células da malha secundária para diferentes propriedades. Com esta metodologia é possível obter precisão de segunda ordem na discretização das equações, como se mostra de seguida.

Considerando a malha centrada 1D com passo variável da figura 2.1.

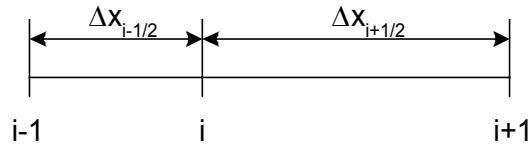


Figura 2.1: Malha 1D centrada.

A expansão em série de Taylor de uma função continuamente diferenciável f em torno do ponto i é:

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \Delta x_{i\pm 1/2} + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{\Delta x_{i\pm 1/2}^2}{2!} \pm \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} \frac{\Delta x_{i\pm 1/2}^3}{3!} + \dots \quad 2.1$$

Colocando a derivada em evidência obtém-se as aproximações de primeira ordem:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_{i+1/2}} - \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1/2}}{2!} - \dots \quad 2.2$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{\Delta x_{i-1/2}}{2!} - \dots \quad 2.3$$

com erro de truncatura de ordem $O(\Delta x/2)$. A aproximação por diferenças centrais para esta malha de passo variável obtém-se da equação 2.1 fazendo:

$$\frac{f_{i+1}}{\Delta x_{i+1/2}^2} - \frac{f_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}^2} \quad 2.4$$

e colocando a primeira derivada em evidência. Obtém-se:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{\frac{\Delta x_{i-1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} f_{i+1} + \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} - \frac{\Delta x_{i-1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) f_i - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} f_{i-1}}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} - \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1/2} \Delta x_{i-1/2}}{3!} - \dots \quad 2.5$$

com uma ordem de truncatura $O(\Delta x_{i+1/2} \Delta x_{i-1/2}/6)$. Conclui-se que a aproximação por diferenças centrais numa malha não uniforme garante precisão de segunda ordem mas obriga ao cálculo da função em três pontos. Apenas para malha de passo uniforme a aproximação por diferenças centrais dispensa o cálculo no ponto central.

Considere-se agora a malha descentrada da figura 2.2. Nesta malha as propriedades não são todas calculadas nos mesmos pontos. Admite-se que o ponto de cálculo da primeira derivada de f é o ponto x , intermédio entre os nós i e $i+1$.

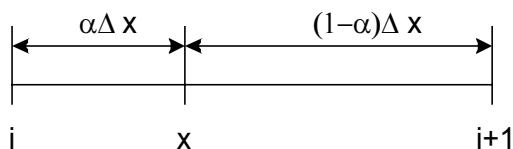


Figura 2.2: Malha 1D descentrada.

Expandindo novamente em série de Taylor tem-se:

$$f_{i+1} = f_x + \left. \frac{df}{dx} \right|_x (1-\alpha)\Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x \frac{[(1-\alpha)\Delta x]^2}{2!} + \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_x \frac{[(1-\alpha)\Delta x]^3}{3!} + \dots \quad 2.6$$

$$f_i = f_x - \left. \frac{df}{dx} \right|_x \alpha \Delta x + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x \frac{(\alpha \Delta x)^2}{2!} - \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_x \frac{(\alpha \Delta x)^3}{3!} + \dots \quad 2.7$$

Fazendo $f_{i+1} = f_i$ e colocando a primeira derivada em evidência fica:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{(1-2\alpha)\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x - \frac{(1-3\alpha+3\alpha^2)\Delta x^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_x - \dots \quad 2.8$$

Para o caso $\alpha \neq 0.5$ o erro de truncatura é de primeira ordem. Para o caso $\alpha = 0.5$ o erro de truncatura é de segunda ordem: $O(0.25 \Delta x^2/6)$ sendo a formulação equivalente à da equação 2.5 com a vantagem de ser obtida com o dobro do passo espacial. A função necessita em todas as situações de ser calculada em apenas dois pontos. A malha continua a ser não uniforme com $\Delta x \neq \Delta x_{i+1/2} \neq \Delta x_{i-1/2}$ definindo α a posição das variáveis descentradas. Deste ponto de vista a melhor localização para os pontos da malha secundária é a meia distância entre os pontos da malha primária. A figura 2.3 representa uma malha 2D com as alternativas $\alpha = 0.5$ e $\alpha \neq 0.5$ para as mesmas posições da variável primária f .

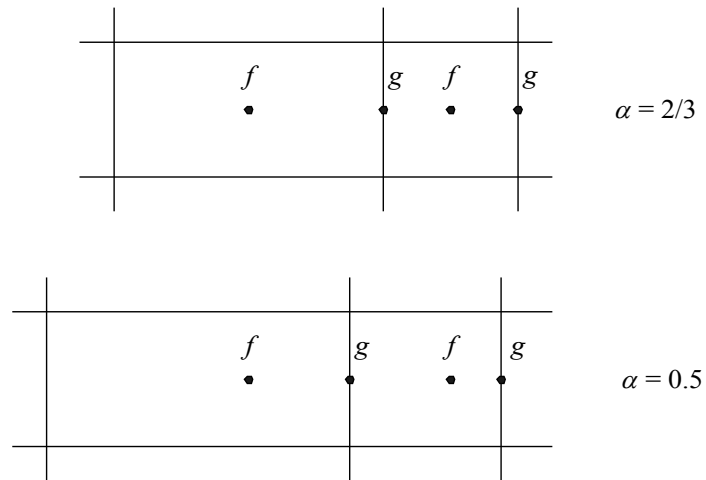


Figura 2.3: Malha 2D Descentrada.

Para o cálculo de df/dx no ponto g a malha $\alpha = 0.5$ é a mais indicada mas o cálculo de dg/dx no ponto f tem apenas precisão de primeira ordem. A malha $\alpha = 0.5$ apresenta ainda a desvantagem de o ponto f não ser representativo do valor médio da propriedade no interior da célula. Este último facto revela-se de grande importância para o método dos volumes finitos onde a propriedade é

representativa da célula e não de um ponto. Nesse caso é preferível o uso de uma malha com $\alpha \neq 0.5$ e propriedades centradas.

2.1.1.2 Comportamento das malhas descentradas bi-dimensionais

Para o caso bi-dimensional Arakawa e Lamb (1977) analisaram as propriedades numéricas das 5 malhas descentradas da figura 2.4 na solução das equações linearizadas para águas pouco profundas.

Para aplicações de hidrodinâmica oceânica e costeira as malhas B e C são as mais utilizadas pelo que se vai analisar apenas estas duas possibilidades.

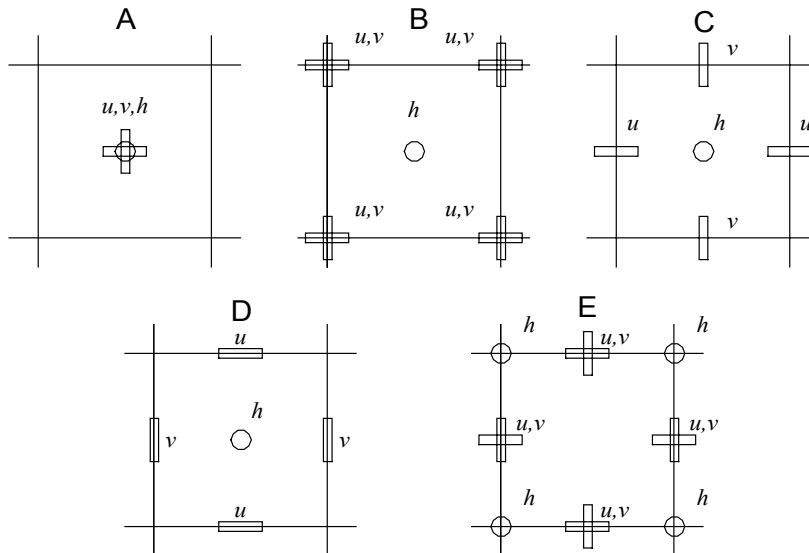


Figura 2.4: Malha 2D segundo classificação (Arakawa e Lamb, 1977).

Consideram-se as equações para águas pouco profundas sem termo viscoso nem convectivo e com variação linear do termo de Coriolis com a latitude (aproximação do plano β):

$$\nabla_h \vec{u}_h + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - f_0 \left(1 + \frac{\beta x_2}{f_0} \right) u_2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad 2.10$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + f_0 \left(1 + \frac{\beta x_2}{f_0} \right) u_1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad 2.11$$

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad 2.12$$

Integrando estas equações para as duas camadas da figura 2.5 e subtraindo

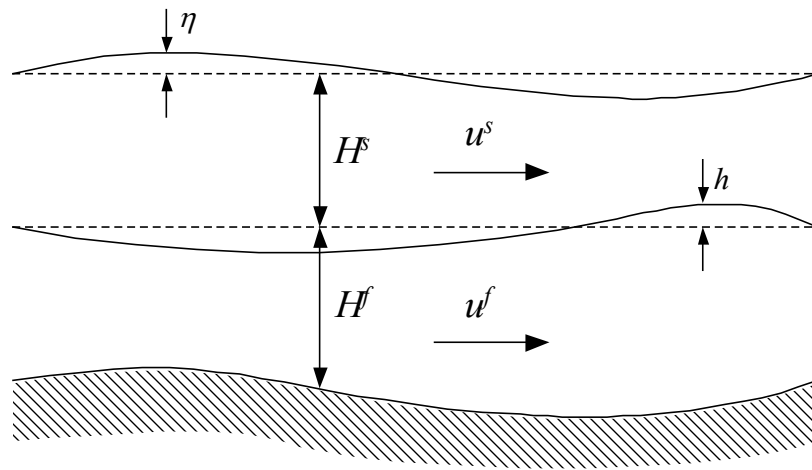


Figura 2.5: Divisão vertical do domínio para o modelo de duas camadas.

obtêm-se as equações para o primeiro modo baroclínico $\hat{u} = \vec{u}^s - \vec{u}^f$:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + f_0 \left(1 + \frac{\beta x_2}{f_0} \right) \vec{e}_3 \times \hat{u} + g' \nabla h = 0 \quad 2.13$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H^* \nabla \hat{u} = 0 \quad 2.14$$

onde $g' = g(\rho^f - \rho^s)/\rho_0$ e $H^* = H^f H^s / (H^f + H^s)$.

Utilizando as dimensões características L , h_0 , $T=1/f_0$, $U=L/T$, as equações anteriores podem ser escritas na forma adimensional (Adcroft, 1997):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \vec{e}_3 \times \mathbf{u} + \nabla h = 0 \quad 2.15$$

$$S^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} = 0 \quad 2.16$$

onde o parâmetro adimensional $S = R_i R_o^2 = g'H^*/(f_0^2 L^2) = L_{R_i}^2 / L^2$ é o número de Burger. Considerando uma malha de passo real ΔX e passo adimensional $\Delta x = \Delta X / L$ o parâmetro $WR = 4S / \Delta x^2 = 4L_{R_i}^2 / \Delta X^2$ determina a capacidade da malha para resolver as ondas inerciais-gravíticas pois estas possuem um dimensão característica da ordem do raio de deformação interno de Rossby $L_{R_i} = g'H^*/f_0^2$.

Nestas equações considerou-se que a dimensão horizontal característica é suficientemente pequena para que se possam ignorar variações no parâmetro de Coriolis (aproximação do plano f) filtrando-se por isso as ondas de Rossby.

Aplicando o operador divergência à equação 2.15, diferenciando ambas as equações em ordem ao tempo e eliminando o termo de vorticidade entre ambas obtém-se a equação de onda que descreve as ondas inerciais-gravíticas:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + D - S \nabla^2 D = 0 \quad 2.17$$

onde $D = \partial \mathbf{u} / \partial x + \partial \mathbf{v} / \partial y$ é a divergência do campo horizontal. Esta equação admite soluções na forma $e^{i(kx+ly-\omega t)}$, produzindo a relação de dispersão:

$$\omega^2 = 1 + S(k^2 + l^2) \quad 2.18$$

Da análise desta relação conclui-se que para as ondas longas $S|\vec{k}|^2 \ll 1$ a frequência adimensional $\omega = \Omega / f_0 \rightarrow 1$ pelo que as ondas são dominadas pela frequência de Coriolis. Para pequenos comprimentos de onda $S|\vec{k}|^2 \gg 1$ as ondas inerciais-gravíticas tornam-se dispersivas sendo a frequência

proporcional ao número de onda: $\omega \rightarrow \sqrt{S|\vec{k}|}$. A velocidade de grupo destas ondas é:

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \vec{e}_k + \frac{\partial \omega}{\partial l} \vec{e}_l = \frac{S}{\sqrt{1+S|\vec{k}|^2}} (k\vec{e}_k + l\vec{e}_l) \quad 2.19$$

mostrando que a energia, que possui velocidade \vec{c}_g , se desloca sempre na direcção da onda.

A forma discretizada das equações 2.15 e 2.16 deve conseguir produzir ondas com um comportamento semelhante ao da solução contínua, sob pena de introduzir erros na frequência da onda e na propagação da sua energia.

Usando as malhas B e C e definindo os operadores:

$$\delta_{x_i} \alpha = \frac{\alpha_{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} - \alpha_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}}{\Delta x_i} \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}^{x_i} = \frac{\alpha_{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} + \alpha_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}}{2} \quad 2.20$$

obtêm-se as seguintes discretizações para os termos espaciais:

Malha B:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \bar{u}_2^t + \delta_{x_1} \bar{h}^{x_2} = 0 \quad 2.21$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{u}_1^t + \delta_{x_2} \bar{h}^{x_1} = 0 \quad 2.22$$

$$S^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} + (\delta_{x_1} \bar{u}_1^{x_2} + \delta_{x_2} \bar{u}_2^{x_1}) = 0 \quad 2.23$$

Malha C:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \bar{u}_2^{x_1 x_2 t} + \delta_{x_1} h = 0 \quad 2.24$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{u}_1^{x_1 x_2 t} + \delta_{x_2} h = 0 \quad 2.25$$

$$S^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} + (\delta_{x_1} u_1 + \delta_{x_2} u_2) = 0 \quad 2.26$$

tendo-se usado passo adimensional Δx_i constante em cada direcção.

A equação de onda correspondente a cada discretização obtêm-se de forma idêntica à que se usou para o modelo contínuo aplicando o operador divergência discretizado:

Malha B:

$$D = \delta_{x_1} \bar{u}_1^{x_2} + \delta_{x_2} \bar{u}_2^{x_1} \quad 2.27$$

Malha C:

$$D = \delta_{x_1} u_1 + \delta_{x_2} u_2 \quad 2.28$$

obtêm-se as equações de onda discretizadas:

Malha B:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + \bar{D}'' - S(\delta_{x_1 x_1} \bar{D}^{x_2 x_2} + \delta_{x_2 x_2} \bar{D}^{x_1 x_1}) = 0 \quad 2.29$$

Malha C:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + \bar{D}^{x_1 x_1 x_2 x_2 t t} - S(\delta_{x_1 x_1} D + \delta_{x_2 x_2} D) = 0 \quad 2.30$$

Estas equações são diferentes das que se obteriam se a equação 2.17 fosse discretizada directamente na malha e reflectem a forma como o modelo, baseado nas equações 2.15 e 2.16, se comporta do ponto de vista de propagação das ondas inerciais-gravíticas. Substituindo a solução $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ obtêm-se as relações de dispersão:

Malha B:

$$\omega^2 = 1 + S \left[\left(\frac{2}{\Delta x_1} \sin k \frac{\Delta x_1}{2} \right)^2 \left(\cos l \frac{\Delta x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta x_2} \sin l \frac{\Delta x_2}{2} \right)^2 \left(\cos k \frac{\Delta x_1}{2} \right)^2 \right] \quad 2.31$$

Malha C:

$$\omega^2 = \left(\cos k \frac{\Delta x_1}{2} \right)^2 \left(\cos l \frac{\Delta x_2}{2} \right)^2 + S \left[\left(\frac{2}{\Delta x_1} \sin k \frac{\Delta x_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{\Delta x_2} \sin l \frac{\Delta x_2}{2} \right)^2 \right] \quad 2.32$$

para que o modelo numérico produza resultados fisicamente correctos é necessário que as características destas relações de dispersão sejam semelhantes às da equação 2.18. No caso de domínios pequenos como no caso da modelação de estuários o passo espacial é normalmente muito menor que o raio de deformação interno de Rossby (valores de $WR \gg 1$) pelo que se tem uma boa resolução das ondas inerciais-gravíticas. Para domínios oceânicos são frequentes situações em que a malha não consegue resolver correctamente estas ondas. Verifica-se que o comportamento da malha B e C é muito diferente nos dois casos.

Na figura 2.6 representa-se a relação de dispersão do modelo contínuo e das duas versões discretas para as resoluções $WR=2$ e $WR=0.5$.

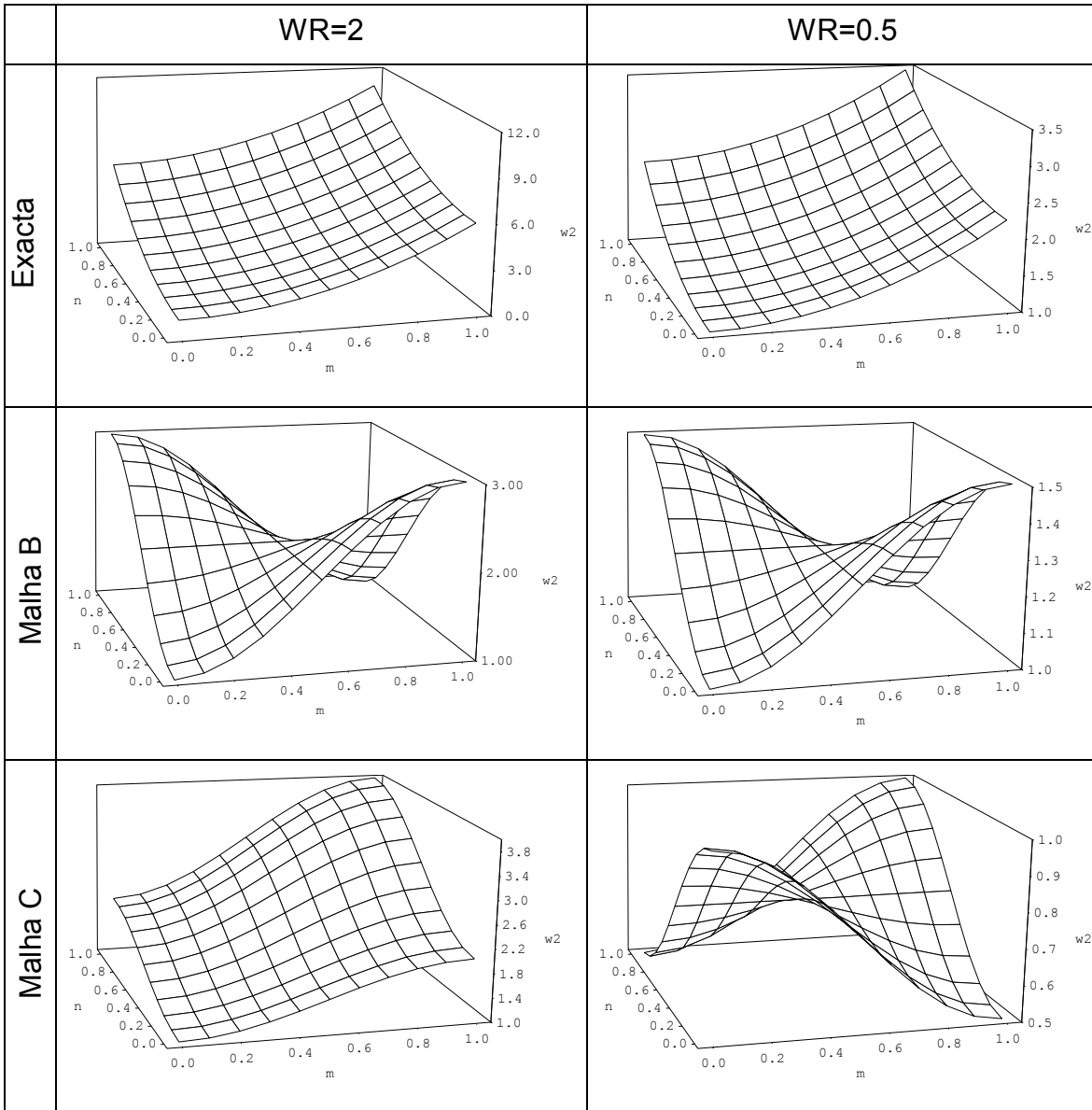


Figura 2.6: Relação de dispersão para as equações 2.15 e 2.16.

Verifica-se que, para o caso de elevada resolução ($WR = 2$), a malha C apresenta um andamento muito semelhante ao da solução exacta, apesar de produzir menores valor de frequência para números de onda perto da frequência de Niquist ($m, n \rightarrow 1$). A velocidade de grupo, dada pelo gradiente da frequência, apresenta sempre a direcção correcta, assegurando a propagação da energia na direcção certa. A malha B, pelo contrário, prediz um valor mínimo de frequência no local onde a solução contínua apresenta um máximo e a

velocidade de grupo possui o sinal errado para $m + n > 1$, fazendo com que o sentido de propagação da energia seja contrário ao da solução contínua.

Antes de se considerar a malha C como a melhor alternativa é no entanto necessário analisar o seu comportamento em situações onde a capacidade de resolução das ondas inerciais-gravíticas é reduzida. Tomando como referência o caso $WR = 0.5$ verifica-se que a malha B apresenta características muito semelhantes às do caso $WR = 2$, com os problemas já referidos para os números de onda elevados. A malha C no entanto, mudou completamente o seu comportamento, apresentando agora dois mínimos de frequência para as ondas alinhadas com as direcções principais da malha e uma velocidade de grupo com direcção contrária para $m + n < 1$. Este comportamento está associado ao termo em cosenos que surge na equação 2.32, tendo sido produzido, em última análise, pelas médias à velocidade necessárias ao calculo do termo de Coriolis quando se usa a malha C.

Conclui-se por isso que a malha C apenas reproduz correctamente o andamento da solução contínua quando a resolução da onda é elevada. Para condições normais no oceano a situação $WR < 1$ verifica-se quando se utilizam passos espaciais superiores a várias dezenas de quilómetros. Esta situação é mais comum em modelos de circulação global justificando a utilização generalizada da malha B nesses modelos. No entanto, com o aumento da capacidade de cálculo, mesmo no caso de circulação global a capacidade de resolução começa a ser suficiente para o uso de malhas do tipo C.

Do ponto de vista da implementação a malha C é a mais adequada à utilização do método do volume finito pois evita médias às velocidades nos cálculos dos fluxos através das faces das células. Pelos motivos apontados foi adoptada neste modelo a malha do tipo C.

A análise anterior não considerou a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude, quando esta limitação é suprimida torna-se possível a propagação de ondas de Rossby que apresentam, em geral, problemas nos modelos discretos em todas as malhas. A solução mais eficiente para contornar este problema nos

modelo de circulação global tem sido a utilização de malhas descentradas no tempo, usando-se malhas diferentes em cada passo de tempo (Fox-Rabinovitz, 1991).

2.1.1.3 Propriedades conservativas dos operadores de média

Para o caso particular da malha C os fluxos pelas faces das células são calculados directamente a partir dos valores das velocidades, estando por isso garantida que a sua divergência é nula. Para as células das velocidades os fluxos são obtidos efectuando médias ao campo de velocidades. A não divergência do campo de velocidades obtido com essas operações de média é importante pois garante a conservação dos segundos momentos (u^2), e por isso da energia cinética (Adcroft et al., 1997).

Considerando a célula representativa de u_{1ij} na figura 2.7 o campo convectivo utilizado no transporte das propriedades é u^* . Os valores de u^* são obtidos do campo u por operações de média que devem garantir a não divergência do campo u^* .

Consideram-se médias com a forma geral:

$$u_{1ijk}^* = \alpha_{u_1} u_{1ijk} + (1 - \alpha_{u_1}) u_{1ij-1k} \quad 2.33$$

$$u_{2ijk}^* = \alpha_{u_2} u_{2ijk} + (1 - \alpha_{u_2}) u_{2ij-1k} \quad 2.34$$

$$u_{3ijk}^* = \alpha_{u_3} u_{3ijk} + (1 - \alpha_{u_3}) u_{3ij-1k} \quad 2.35$$

onde α são parâmetros de ponderação.

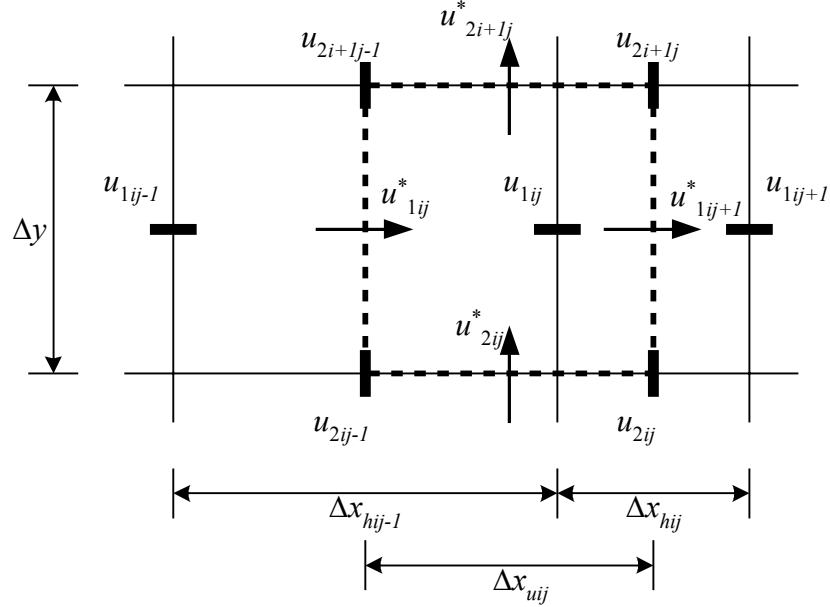


Figura 2.7: Fluxos na célula das velocidades u_1 .

A condição de divergência nula: $\nabla \cdot \vec{u}^* = 0$ pode ser discretizada por:

$$\frac{u_{1ij+1k}^* - u_{1ijk}^*}{\Delta x_{u_{ij}}} + \frac{u_{2i+1jk}^* - u_{2ijk}^*}{\Delta y_{u_{ij}}} + \frac{u_{3ijk+1}^* - u_{3ijk}^*}{\Delta z_{u_{ij}}} = 0 \quad 2.36$$

onde $\Delta x_{u_{ij}} = (\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})/2$, $\Delta y_u = \Delta y_h = \Delta y$ e $\Delta z_u = \Delta z_h = \Delta z$. Aplicando as operações de média à equação anterior obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{u_1} u_{1ij+1k} + (1 - \alpha_{u_1}) u_{1ijk} - \alpha_{u_1} u_{1ijk} - (1 - \alpha_{u_1}) u_{1ij-1k}}{\Delta x_{u_{ij}}} + \\ & \frac{\alpha_{u_{23}} u_{2i+1jk} + (1 - \alpha_{u_{23}}) u_{2i+1j-1k} - \alpha_{u_{23}} u_{2ijk} - (1 - \alpha_{u_{23}}) u_{2ij-1k}}{\Delta y} + \\ & \frac{\alpha_{u_{23}} u_{3ijk+1} + (1 - \alpha_{u_{23}}) u_{3ij-1k+1} - \alpha_{u_{23}} u_{3ijk} - (1 - \alpha_{u_{23}}) u_{3ij-1k}}{\Delta z} = 0 \end{aligned} \quad 2.37$$

onde se considerou $\alpha_{u_2} = \alpha_{u_3} = \alpha_{u_{23}}$ por se tratarem ambas de médias a faces compostas por parte da face da célula i,j e parte da face da célula $i,j+1$. Como o campo u é não divergente tem-se:

$$\frac{u_{2_{i+1jk}} - u_{2_{ijk}}}{\Delta y} + \frac{u_{3_{ijk+1}} - u_{3_{ijk}}}{\Delta z} = -\frac{u_{1_{ij+1k}} - u_{1_{ijk}}}{\Delta x_{h_{ij}}} \quad 2.38$$

Substituindo este resultado na equação 2.37 obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u}^* &= \frac{\alpha_{u_1} (u_{1_{ij+1k}} - u_{1_{ijk}})}{0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})} - \frac{\alpha_{u_{23}} (u_{1_{ij+1k}} - u_{1_{ijk}})}{\Delta x_{h_{ij}}} \\ &+ \frac{(1 - \alpha_{u_1})(u_{1_{ijk}} - u_{1_{ij-1k}})}{0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})} - \frac{(1 - \alpha_{u_{23}})(u_{1_{ijk}} - u_{1_{ij-1k}})}{\Delta x_{h_{ij-1}}} = \quad 2.39 \\ &A(u_{1_{ij+1k}} - u_{1_{ijk}}) + B(u_{1_{ijk}} - u_{1_{ij-1k}}) = 0 \end{aligned}$$

Para que esta expressão se anule independentemente dos valores de u deve-se verificar: $A = 0$ e $B = 0$ obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{u_1}}{0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})} - \frac{\alpha_{u_{23}}}{\Delta x_{h_{ij}}} = 0 \\ \frac{(1 - \alpha_{u_1})}{0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})} - \frac{(1 - \alpha_{u_{23}})}{\Delta x_{h_{ij-1}}} = 0 \end{cases} \quad 2.40$$

a solução deste sistema fornece as condições a que devem obedecer as operações de média para que o campo u^* seja não divergente:

$$\begin{cases} \alpha_{u_1} = 0.5 \\ \alpha_{u_{23}} = \frac{\Delta x_{h_{ij}}}{0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{ij-1}})} \end{cases} \quad 2.41$$

Esta análise foi efectuada para o caso de células com volume constante, para células com volume variável a divergência nula também se mantém desde que o volume das células das velocidades seja obtido dos volumes das células adjacentes pela operação de média:

$$V_{u_{ijk}} = \alpha_{V_{u_1}} V_{h_{ijk}} + (1 - \alpha_{V_{u_1}}) V_{h_{j-1k}} \quad 2.42$$

com $\alpha_{V_{u_1}} = \alpha_{u_{23}} = \Delta x_{h_{ij}} / 0.5(\Delta x_{h_{ij}} + \Delta x_{h_{j-1}})$. Que equivale a efectuar a mesma operação linear a todos os membros da equação da continuidade.

Para o caso do método dos volumes finitos, utilizam-se como variáveis dependentes os fluxos e não as velocidades. Para que os fluxos através das faces da célula das velocidades sejam conservativos é necessário que as médias efectuadas aos fluxos sejam idênticas às efectuadas às velocidades. Isto equivale a dizer que as operações de média para as áreas dessas faces também verificam as mesmas operações de média.

2.1.2 Malha curvilínea

Como se viu no capítulo anterior a malha cartesiana possui características que a tornam atractiva na modelação de escoamentos costeiros e estuarinos. Existem no entanto casos particulares em que as coordenadas curvilíneas possuem vantagens, tanto do ponto de vista de definição da geometria como de economia computacional.

A utilização de coordenadas curvilíneas está associado a uma transformação de coordenadas que obriga a um maior esforço computacional, com maior número de operações por ponto da malha. No entanto, com o uso de coordenadas curvilíneas é possível criar, para certos domínios, malhas eficientes do ponto de vista computacional, em que todos os pontos são pontos efectivos de cálculo. Reduz-se desta forma o número de pontos de cálculo comparativamente a uma malha cartesiana.

Isto é particularmente importante quando uma das dimensões horizontais do domínio é muito superior à outra, como acontece por exemplo no estudo de rios, fiordes ou estuários do tipo vale inundado, que possuem uma topografia horizontal muito próxima da do rio e com fronteiras relativamente regulares. Nestes casos o uso de malhas cartesianas obriga a considerar grande parte dos

pontos da malha como pontos de terra que, apesar de não serem calculados, ocupam recursos no computador.

Para o caso geral de estuários com largura elevada, lagoas costeiras e domínios oceânicos a topografia não apresenta uma direcção horizontal preferencial e as fronteiras são muito irregulares. Torna-se por isso mais eficiente o uso de coordenadas cartesianas nesses domínios.

Apesar de se ter optado por coordenada cartesiana no modelo, analisam-se neste capítulo as principais características de uma malha curvilínea. Mostra-se também que, com o método do volume finito, este tipo de coordenada pode ser facilmente implementado por manipulação da geometria das células no espaço real.

2.1.2.1 Parâmetros da transformação

Considere-se a transformação de coordenadas da figura 2.8. as coordenadas cartesianas \vec{e}_1 , \vec{e}_2 são transformadas nas coordenadas curvilíneas $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ que são escolhidas geralmente de forma a adaptarem-se à geometria do domínio.

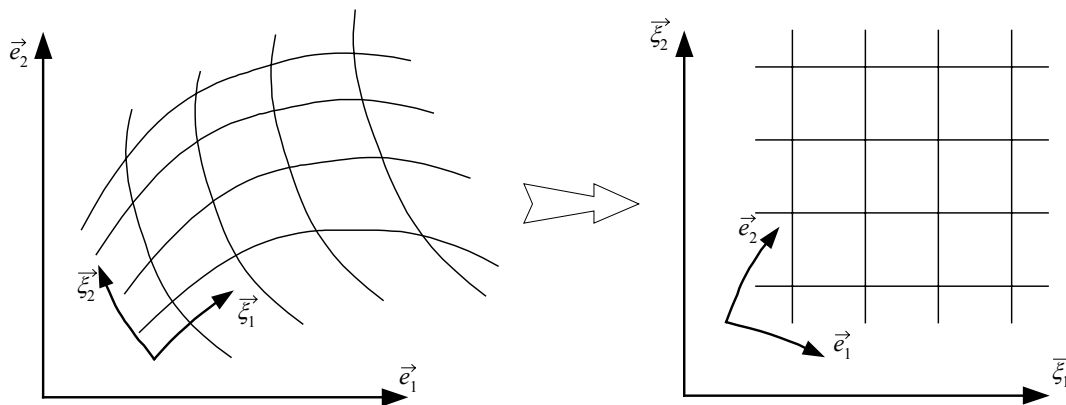


Figura 2.8: Transformação de coordenadas para uma malha genérica 2D.

A transformação de coordenadas deve ser tal que transforme a malha curvilínea do espaço real numa malha uniforme no espaço computacional. A malha pode ser concebida de forma a refinar as zonas do domínio que necessitam de maior resolução, normalmente associadas a elevados gradientes da propriedade ou

irregularidades na geometria. Se a transformação de coordenadas for variável no tempo podem-se implementar esquemas do tipo adaptativo em que a malha se move no espaço real, refinando de forma activa as zonas de maior gradiente, de modo a reduzir os erros de truncatura em todo o domínio.

Para a generalidade dos pontos do domínio a transformação é biunívoca correspondendo a cada ponto (x_1, x_2, x_3) do espaço real um e um só ponto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) do espaço transformado, definidos pelas funções de transformação $\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3)$ e $\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3)$.

2.1.2.1.1 Jacobiano da transformação

As primeiras derivadas de uma função vectorial u nos dois espaços está relacionada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad 2.43$$

onde o operador:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad 2.44$$

é o jacobiano da transformação.

No caso de a transformação ser especificada por uma expressão analítica o jacobiano pode ser determinado analiticamente. No caso geral, mesmo quando a expressão analítica é conhecida, prova-se que a precisão do método é superior se o jacobiano for determinado numericamente, usando o mesmo

esquema numérico utilizado para a discretização das equações do movimento (Burns e Wilkes, 1987). Nesse caso as equações transformadas possuem uma forma mais compacta se for utilizado o inverso do jacobiano, que é também o jacobiano da transformação inversa:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad 2.45$$

Como uma matriz e a sua inversa estão relacionadas por:

$$\mathbf{J} = \frac{[\text{Cofactor}(\mathbf{J}^{-1})]^T}{|\mathbf{J}^{-1}|} \quad 2.46$$

o jacobiano pode ser escrito por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}}{|\mathbf{J}^{-1}|} \\ \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}}{|\mathbf{J}^{-1}|} \\ \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}}{|\mathbf{J}^{-1}|} & \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}}{|\mathbf{J}^{-1}|} \end{bmatrix} \quad 2.47$$

Esta forma é mais conveniente quando a malha não é especificada por uma função pois nesse caso o que se conhece são os valores (x_1, x_2, x_3) para cada ponto discreto (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

2.1.2.1.2 Tensor da métrica

Uma distância elemental δs no espaço físico está relacionada com as variações elementares nas coordenadas cartesianas por:

$$\delta s^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 \quad 2.48$$

Passando para o espaço computacional estas variações ficam:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3} \delta \xi_3 \quad 2.49$$

obtendo-se:

$$\delta s^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \delta \xi_j \right) = g_{ij} \delta \xi_i \delta \xi_j \quad 2.50$$

onde a soma dos índices está implícita. O tensor

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad 2.51$$

é o tensor da métrica e relaciona uma distância elemental δs no espaço físico com as variações elementares $\delta \xi_1, \delta \xi_2, \delta \xi_3$ das coordenadas no espaço transformado. Com este tensor podem-se estabelecer as relações entre as características geométricas das células no espaço físico e no espaço transformado.

Considerando a célula 2D da figura 2.9 o seu volume (área) é dado por:

$$\delta A = |\mathbf{g}|^{1/2} \delta \xi_1 \delta \xi_2 \quad 2.52$$

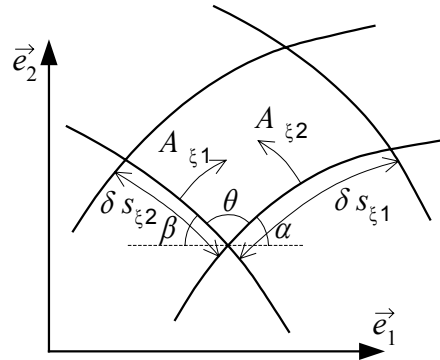


Figura 2.9: Célula da malha genérica bidimensional.

O factor de forma da malha, definido por: $AR = \delta s_{\xi_2} / \delta s_{\xi_1}$ é dado por:

$$AR = \frac{\delta s_{\xi_2}}{\delta s_{\xi_1}} = \left(\frac{g_{22}}{g_{11}} \right)^{1/2} \quad 2.53$$

e os ângulos α e θ respectivamente da inclinação e da distorção da malha são dados por:

$$\cos \alpha = \frac{\partial x_1 / \partial \xi_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}} \quad 2.54$$

As áreas das faces da célula são dadas pelos vectores:

$$\vec{A}_{\xi_1} = \delta s_{\xi_2} \sin \beta \vec{e}_1 + \delta s_{\xi_2} \cos \beta \vec{e}_2 \quad 2.55$$

$$\vec{A}_{\xi_2} = -\delta s_{\xi_1} \sin \alpha \vec{e}_1 + \delta s_{\xi_1} \cos \alpha \vec{e}_2 \quad 2.56$$

que definem a matriz das áreas:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \vec{A}_{\xi_1} \\ \vec{A}_{\xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 \end{bmatrix} \quad 2.57$$

Se o espaçamento da malha no espaço transformado for unitário $\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = 1$ tem-se:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \quad 2.58$$

que é o jacobiano normalizado.

Podem-se calcular também as velocidades contravariantes que são as componentes do campo de velocidades do espaço físico nas direcções ξ_1, ξ_2 :

$$\bar{u}^c = \bar{u}^T \cdot \mathbf{J} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_2 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} u_2 \end{array} \right\} \quad 2.59$$

2.1.2.1.3 Restrições para coordenadas ortogonais e conformais

A precisão do método numérico degrada-se muito rapidamente para distorções de malha elevadas ($\text{Cos}\theta > 0$), por esse motivo impõem-se por vezes restrições à malha de forma a que esta seja ortogonal ($\theta = 90^\circ$) ou conformal ($\theta = 90^\circ$ e $AR = 1$). Estas restrições simplificam em grande medida as equações mas retiram algumas das vantagens das coordenadas generalizadas pois impõem restrições à forma das fronteiras e à localização dos pontos no interior do domínio.

A restrição ($\theta = 90^\circ$) faz com que $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$. A matriz diagonal $h_i = (g_{ii})^{1/2}$ é a matriz dos factores de escala relacionando $\delta\xi_i$ no espaço transformado com δs no espaço real: $\delta s = h_i \delta\xi_i$.

Para o caso 2D de $g_{12} = g_{21} = 0$ obtém-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \cdot AR \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \cdot AR \quad 2.60$$

Se $AR = 1$ a transformação diz-se conformal e as relações anteriores são as condições de Cauchy Reimann, que simplificam de forma apreciável o cálculo dos parâmetros da transformação.

2.1.2.2 Transformação das equações para coordenadas curvilíneas

Os resultados dos pontos anteriores vão ser utilizados para transformar as equações do movimento para um sistema de coordenadas curvilíneas genéricas. Essa transformação é exemplificada com as equações 2D numa forma genérica que permite implementar tanto a equação da continuidade como as equações do momento e de convecção-difusão.

Considera-se assim a equação de primeira ordem:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} = 0 \quad 2.61$$

onde A , B e C são funções genéricas. Para ($A = \eta$, $B = Hu_1$ e $C = Hu_2$) obtém-se a equação da continuidade para as equações 2D integradas na profundidade.

As primeiras derivadas são transformadas utilizando o jacobiano:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right\} \cdot \mathbf{J} \quad 2.62$$

Aplicando à equação 2.61 e dividindo por $|\mathbf{J}|$ fica:

$$\frac{\partial(A/|\mathbf{J}|)}{\partial t} + \frac{\frac{\partial B}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}}{|\mathbf{J}|} + \frac{\frac{\partial C}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} + \frac{\frac{\partial B}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} = 0 \quad 2.63$$

Esta equação pode-se simplificar tendo em atenção que, por exemplo para o segundo termo:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(B \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) = \frac{\partial B}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| + B \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) \quad 2.64$$

Como devido à equação 2.47 para o caso 2D se tem: $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{|\mathbf{J}^{-1}|} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$ a equação

anterior fica:

$$\frac{\partial B}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(B \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) - B \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \quad 2.65$$

Fazendo o mesmo para os outros termos a equação 2.63 fica:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(A/|\mathbf{J}|)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(B \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(C \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} / |\mathbf{J}| \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(B \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(C \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} / |\mathbf{J}| \right) - B \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) - C \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right) - B \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) - \\ & C \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad 2.66$$

ou, anulando os últimos termos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(A/|\mathbf{J}|)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(B \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(C \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} / |\mathbf{J}| \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(B \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} / |\mathbf{J}| \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(C \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} / |\mathbf{J}| \right) = 0 \end{aligned} \quad 2.67$$

definindo as funções:

$$A^* = A/|\mathbf{J}| \quad B^* = \frac{B \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + C \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} \quad C^* = \frac{B \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + C \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} \quad 2.68$$

a equação no espaço transformado fica:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} + \frac{\partial B^*}{\partial \xi_1} + \frac{\partial C^*}{\partial \xi_2} = 0 \quad 2.69$$

que tem uma forma semelhante à da equação original mas nas coordenadas do espaço transformado. Assim a equação da continuidade transformada fica:

$$\frac{\partial(\eta/|\mathbf{J}|)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[H \left(u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) / |\mathbf{J}| \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[H \left(u_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) / |\mathbf{J}| \right] = 0 \quad 2.70$$

Igualando as equações 2.61 e 2.69 e considerando que a transformação não é função do tempo (jacobiano constante no tempo) obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} = |\mathbf{J}| \left(\frac{\partial B^*}{\partial \xi_1} + \frac{\partial C^*}{\partial \xi_2} \right) \quad 2.71$$

Esta relação é usada no apêndice 3.

Considera-se agora a transformação da equação genérica de segunda ordem:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \quad 2.72$$

Para:

$$A = u_1 \quad B = u_1 u_1 + g \eta \quad C = u_1 u_2 \quad D = A u_1 \quad E = 0 \quad F = A u_1 \quad 2.73$$

Esta equação toma a forma da equação de momento para a direcção x_1 integrada na profundidade.

A transformação desta equação para o referencial generalizado (ξ_1, ξ_2) é apresentada no apêndice 3 obtendo-se o resultado:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} + \frac{\partial B^{**}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial C^{**}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial^2 D^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 E^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi_2^2} \quad 2.74$$

As funções A^* a F^* são definidas no apêndice e incluem todos os parâmetros da transformação. Para o caso de transformação generalizada a forma destas funções é bastante complexa, dando origem a erros numéricos adicionais.

2.1.2.3 Equivalência entre coordenadas curvilíneas e volumes finitos

Como foi referido, o tensor da métrica permite estabelecer a relação entre as características geométricas da malha no espaço físico e no espaço transformado. Nesta secção utilizam-se essas relações para mostrar que a utilização do método do volume finito numa célula do espaço real é equivalente à transformação das equações originais seguidas da sua discretização no espaço transformado.

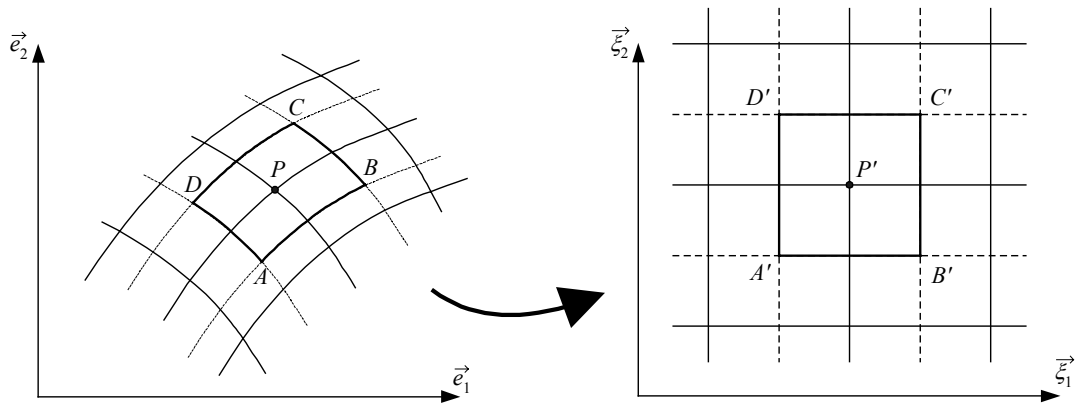


Figura 2.10: Célula de volume finito numa malha curvilínea.

Integrando a equação da continuidade 2D no volume finito ABCD da figura 2.10 e utilizando o teorema da divergência de Gauss obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial \eta}{\partial t} dV + \int_{AD} H \bar{u} \cdot \bar{n} dS + \int_{BC} H \bar{u} \cdot \bar{n} dS + \int_{AB} H \bar{u} \cdot \bar{n} dS + \int_{CD} H \bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad 2.75$$

Considerando o caso de malha 2D com passo horizontal constante no tempo e denominando $H_{\alpha\beta}$ o valor médio da profundidade do fluido na face $\alpha\beta$ a equação anterior é equivalente a:

$$V \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_{AD} (u_1 S_x + u_2 S_y)_{AD} + H_{BC} (u_1 S_x + u_2 S_y)_{BC} + H_{AB} (u_1 S_x + u_2 S_y)_{AB} + H_{CD} (u_1 S_x + u_2 S_y)_{CD} = 0 \quad 2.76$$

onde $S_{x_{\alpha\beta}} = S_{\alpha\beta} \vec{n} \cdot \vec{e}_x$ é a projecção da face AD no plano perpendicular a \vec{e}_x .

A equação anterior é a discretização da equação da continuidade, no espaço físico, pelo método dos volumes finitos.

Considera-se agora uma transformação de coordenadas (ξ_1, ξ_2) que transforma a malha anterior numa malha quadrangular com $\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = 1$ no espaço transformado. A equação anterior, na forma discretizada, é transformada utilizando o conceito de matriz das áreas.

A matriz das áreas relaciona as áreas das faces da célula no espaço físico e no espaço computacional. Utilizando a sua definição 2.58 e a expressão do jacobiano 2.44 obtém-se:

$$S_{x_{AD}} = \left(|\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)_{AD} \quad S_{y_{AD}} = \left(|\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)_{AD} \quad 2.77$$

$$S_{x_{AB}} = \left(|\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)_{AB} \quad S_{y_{AB}} = \left(|\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)_{AB} \quad 2.78$$

Substituindo na equação 2.76 obtém-se:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{J}|_{A'B'C'D'}^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(Hu_1 |\mathbf{J}|_{A'D'}^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)_{A'D'} - \left(Hu_2 |\mathbf{J}|_{A'D'}^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)_{A'D'} - \\ & - \left(Hu_1 |\mathbf{J}|_{A'B'}^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)_{A'B'} - \left(Hu_2 |\mathbf{J}|_{A'B'}^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)_{A'B'} + \left(Hu_1 |\mathbf{J}|_{B'C'}^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)_{B'C'} + \left(Hu_2 |\mathbf{J}|_{B'C'}^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)_{B'C'} + \\ & + \left(Hu_1 |\mathbf{J}|_{C'D'}^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)_{C'D'} + \left(Hu_2 |\mathbf{J}|_{C'D'}^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)_{C'D'} = 0 \end{aligned} \quad 2.79$$

Onde se utilizou $V_{A'B'C'D'} = |g|^{1/2} = |\mathbf{J}|^{-1}$ devido à equação 2.52.

A equação anterior é a equação da continuidade discretizada no espaço transformado. A equação diferencial correspondente é:

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(H u_1 |\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) + \left(H u_2 |\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\left(H u_1 |\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) + \left(H u_2 |\mathbf{J}|^{-1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Considerando $|\mathbf{J}|$ o valor médio no volume de controle a equação anterior fica:

$$\frac{\partial(\eta/|\mathbf{J}|)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[H \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_2 \right) / |\mathbf{J}| \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[H \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} u_2 \right) / |\mathbf{J}| \right] = 0 \tag{2.81}$$

Esta equação é a equação da continuidade na forma diferencial para o espaço transformado e é idêntica à equação 2.70 que foi obtida directamente da transformação de coordenadas.

Mostra-se desta forma, que a utilização do volume finito com a integração das equações no espaço real é conceptualmente equivalente a uma transformação de coordenadas e discretização no espaço transformado. As vantagens de se operar no espaço real são uma maior simplicidade das equações, a liberdade de actuar directamente sobre a geometria das células sem a necessidade de definir funções de transformação e uma maior percepção física dos fenómenos em causa.

O modelo implementado utiliza esta abordagem a dois níveis: no plano horizontal e na direcção vertical. No plano horizontal a malha pode ser do tipo cartesiano ou geográfica, sendo definida neste último caso por isolinhas de latitude e de longitude. O solução das equações nas duas malhas é idêntica pois pelo método dos volumes finitos ambos os casos produzem o mesmo tipo de equações discretizadas. A diferença surge apenas na definição das grandezas geométricas de cada malha.

Na direcção vertical a aplicação destes conceitos permite criar uma malha generalizada onde várias geometrias, equivalentes a diferentes tipos de coordenada vertical, podem ser implementadas. As razões desta opção e a forma da sua implementação são analisadas na próxima secção.

2.2 Divisão vertical do domínio de cálculo

Os escoamentos costeiros e oceânicos encontram-se fortemente estrangidos na direcção vertical. O reduzido factor de forma, com uma dimensão característica na direcção vertical três ordens de grandeza inferior às das direcções horizontais, faz com que o escoamento seja fortemente influenciado pela geometria do fundo e da superfície. A elevada estratificação presente em alguns domínios influencia também de forma apreciável o escoamento. A tensão de corte no fundo e na superfície, a força de Coriolis e a inércia introduzem efeitos adicionais produzindo uma estrutura vertical bastante complexa.

As malhas tradicionalmente utilizadas na modelação destes escoamentos têm em conta apenas o efeito que se considera dominante no domínio em análise. Essas malhas são abordadas de uma forma breve na secção seguinte, sendo depois descrita a opção de malha generalizada adoptada no presente modelo.

2.2.1 Malhas tradicionais na direcção vertical

De uma forma geral, na modelação de escoamentos costeiros e oceânicos, a malha tridimensional é obtida por sobreposição na vertical, de várias camadas de uma malha bidimensional. Os diferentes tipos de malha diferem apenas na distribuição horizontal de espessura de cada camada.

Estas malhas são tradicionalmente obtidas por uma transformação de coordenadas, sendo as equações resolvidas no espaço transformado numa malha do tipo cartesiano. Para o caso da malha cartesiana esta transformação não se torna por isso necessária.

A utilização de malhas não estruturadas na direcção vertical, que conduzem a células tridimensionais de forma tetraedral, não está generalizada, sendo normalmente utilizada apenas em modelação de problemas de hidráulica onde a horizontalidade do escoamento não está assegurada.

2.2.1.1 Malha cartesiana

Este tipo de malha é gerado pela sobreposição de malhas bidimensionais do tipo cartesiano, mantendo-se a distância entre as camadas constante em todo o domínio. A figura 2.11 representa uma malha deste tipo.

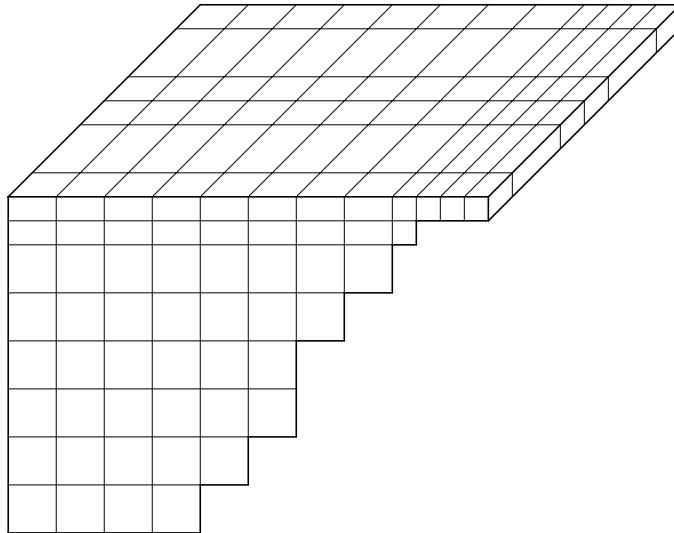


Figura 2.11: Malha cartesiana tridimensional.

A geometria do fundo é definida, decidindo para cada célula, se esta se encontra completamente em água ou em terra. A superfície livre é normalmente considerada plana e rígida.

Os principais inconvenientes deste tipo de malha estão relacionados com a representação da geometria: O facto da superfície livre ser plana limita a sua aplicação a modelos do tipo tampa rígida. Alguns métodos têm sido usados como forma de estender este tipo de malha a modelos com superfície livre. Entre eles destacam-se o de alteração da espessura da camada da superfície e o de adição e subtracção de camadas na superfície.

Este tipo de malha descreve também de uma maneira pouco precisa a topografia do fundo. Esta deficiência é particularmente importante em regiões costeiras onde o fundo condiciona fortemente o escoamento através da geometria e do atrito. Como forma de minorar este problema a espessura da camada em contacto com o fundo é por vezes alterada (Semtner e Mintz, 1977).

Desta forma o volume de água é tratado de forma mais precisa mas a resolução da malha junto ao fundo continua a ser deficiente.

Outra desvantagem apontada neste tipo de malha é a falta de resolução nas zonas pouco profundas. Isto deve-se ao facto do número de camadas presente entre o fundo e a superfície ser mais reduzido nessas zonas. Como nas regiões pouco profundas a dimensão vertical característica dos fenómenos é menor, seria precisamente aí que uma elevada resolução se revelaria útil.

Os inconvenientes apontados a este tipo de malha são principalmente gravosos na modelação de escoamentos costeiros e estuarinos onde as profundidades são reduzidas e o escoamento é muito influenciado pela batimetria. Para escoamentos oceânicos este tipo de malha continua a ser largamente utilizada pois reúne algumas vantagens importantes:

Devido à forma cartesiana da malha as equações são facilmente discretizadas e resolvidas no espaço real, não sendo necessária qualquer transformação de coordenadas. Os gradientes horizontais de pressão podem ser calculados com elevada precisão pois as camadas são horizontais, encontrando-se os pontos de cálculo da pressão todos ao mesmo nível. O código torna-se rápido e fácil de paralelizar, o que é fundamental para a simulação de longos períodos de tempo.

2.2.1.2 Malha sigma

Esta designação é aqui utilizada de forma genérica para identificar a classe de malhas em que as camadas se ajustam para representar de forma adequada a geometria do fundo e da superfície. Na figura 2.12 representa-se uma malha desse tipo.

Esta malha é normalmente implementada, através de uma transformação de coordenadas para um espaço computacional do tipo cartesiano, onde as equações transformadas são resolvidas. A transformação mais utilizada é a devida a Phillips (1957):

$$\tilde{t} = t \quad \tilde{x}_1 = x_1 \quad \tilde{x}_2 = x_2 \quad \tilde{x}_3 = L \frac{x_3 + h}{H} = L\sigma \quad 2.82$$

Onde L é um comprimento característico da direcção vertical no espaço transformado que é normalmente considerado com o valor 1.

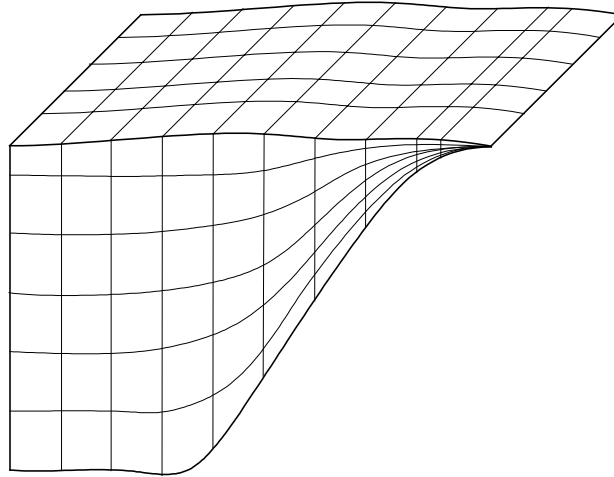


Figura 2.12: Malha sigma tridimensional.

Assim a transformação associa a camada do fundo a uma superfície transformada com coordenada $\tilde{x}_3 = 0$ e a camada da superfície a uma coordenada $\tilde{x}_3 = 1$. Uma superfície no espaço transformado definida por $\tilde{x}_3 = \alpha$ produz, no espaço físico uma camada que dista em cada ponto αH do fundo e $(1-\alpha)H$ da superfície.

Por vezes torna-se conveniente aumentar a resolução vertical da malha junto à superfície e ao fundo mesmo nas regiões de grande profundidade. Este aumento de resolução é fundamental quando se pretende resolver as camadas limites do fundo e da superfície. Song e Haidvogel (1994) propõem uma generalização da coordenada anterior em que uma superfície \tilde{x}_3 no espaço transformado produz uma superfície no espaço físico com a forma:

$$x_3 = \eta(1 + \tilde{x}_3) + h_c \tilde{x}_3 + (h - h_c)C(\tilde{x}_3) \quad 2.83$$

h_c define a espessura, junto à superfície e ao fundo, onde a resolução deve ser aumentada e C é uma função definida por:

$$C(\tilde{x}_3) = (1-b) \frac{\sinh(\theta \tilde{x}_3)}{\sinh \theta} + b \frac{\tanh[\theta(\tilde{x}_3 + \frac{1}{2})] - \tanh(\frac{1}{2}\theta)}{2 \tanh(\frac{1}{2}\theta)} \quad 2.84$$

Os parâmetros θ e b são parâmetros de controle que regulam a resolução da malha junto à superfície e junto ao fundo respectivamente. A figura 2.13 demonstra o seu uso para o caso do Atlântico Norte (Hedström, 1997).

As coordenadas do tipo sigma resolvem os problemas de resolução e de definição da geometria referidos para a malha cartesiana, surgem no entanto outro tipo de problemas: As linhas horizontais no espaço físico são transformadas em linhas oblíquas no espaço transformado, sendo a sua inclinação elevada em regiões com elevados gradientes de profundidade. Por esse motivo os gradientes horizontais de pressão devem ser calculados no espaço transformado por gradientes ao longo de linhas inclinadas produzindo erros numéricos. Pela mesma razão a picnoclina, que em situações normais é aproximadamente horizontal, é transformada numa superfície oblíqua que pode atravessar todo o espaço transformado. A representação dos fenómenos de pequena escala que ocorrem na sua proximidade obrigam assim a uma elevada resolução em todo o domínio. Como forma de resolver estes problemas alguns autores (Beckers, 1991), (Santos, 1995) utilizam a dupla coordenada sigma individualizando os domínios imediatamente abaixo e acima da picnoclina.

Outro problema comum a todas as malhas é o do aumento da difusão numérica quando o campo de velocidades é oblíquo à malha. No plano vertical isto pode acontecer em várias situações tanto em escoamento barotrópico como baroclínico. Em escoamento barotrópico o campo de velocidades é normalmente paralelo às isolinhas sigma, no entanto em zonas de elevada curvatura das linhas de corrente desenvolvem-se escoamentos secundários que produzem um campo de velocidades oblíquo em relação à malha. Em zonas de elevado gradiente da batimetria o escoamento produz por vezes zonas de recirculação com velocidades oblíquas à malha sigma. Em situações de

afloramento (*upwelling*) o escoamento possui também uma elevada componente perpendicular à malha.

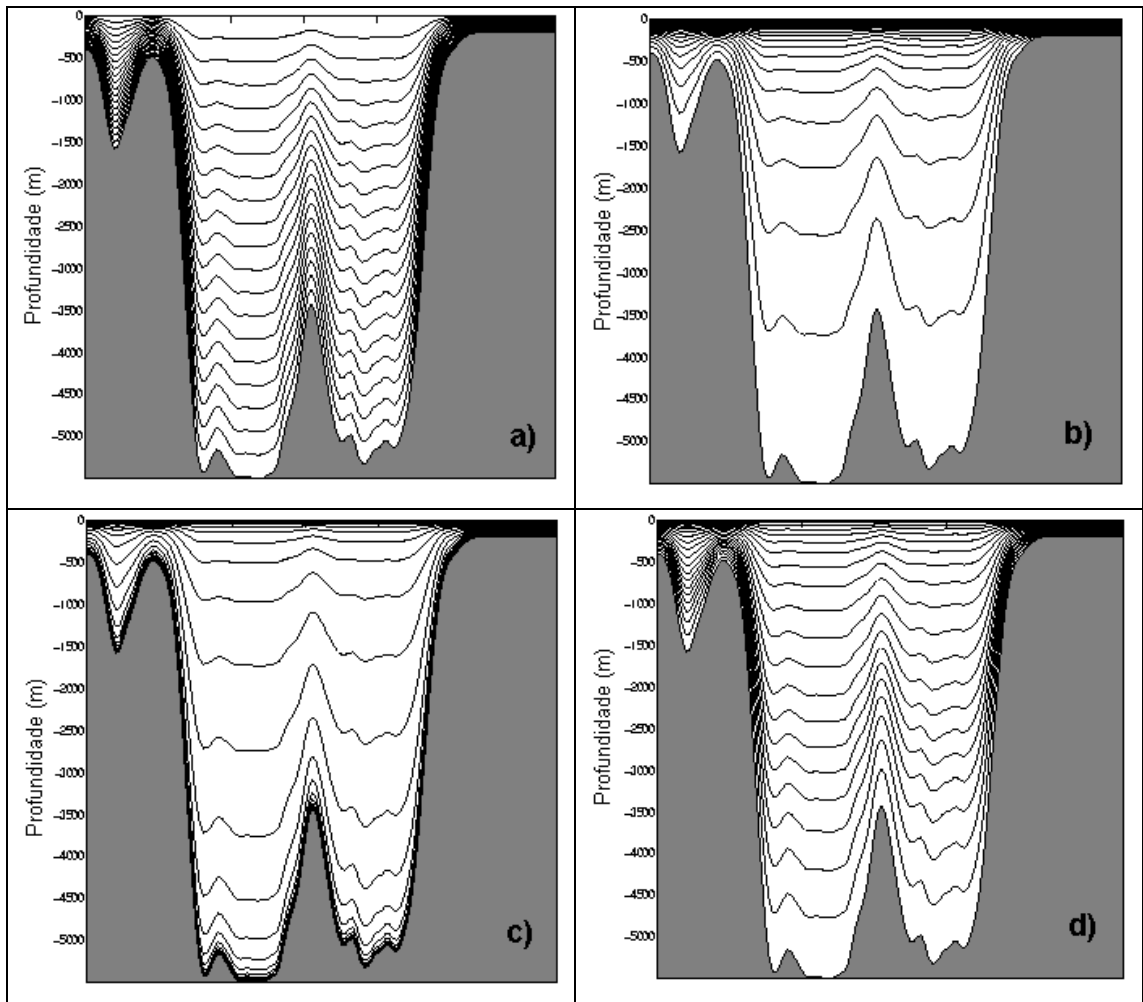


Figura 2.13: Coordenada sigma generalizada. a): ($\theta=0.0001, b=0$) ; b): ($\theta=8, b=0$) ; c): ($\theta=8, b=1$) ; d): ($\theta=5, b=0.4$).

Em escoamento baroclínico o forçamento é essencialmente devido aos gradientes de densidade. Em situação de estratificação estável o transporte é inibido na direcção perpendicular às isopícnicas, fazendo-se por isso preferencialmente ao longo destas isolinhas de densidade. Se for utilizada uma malha do tipo sigma o escoamento será oblíquo à malha sempre que as

isopícnicas intersectarem as isolinhas sigma. Esta é uma das justificações para o uso de coordenadas isopícnicas.

2.2.1.3 Malha isopícnica

Esta malha é definida fazendo coincidir as camadas do espaço físico com superfícies de densidade constante (isopícnicas). A figura 2.14 ilustra este princípio.

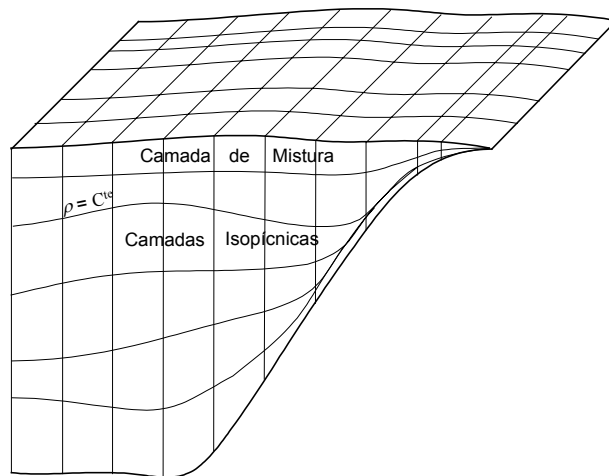


Figura 2.14: Malha Isopícnica tridimensional.

Este tipo de malha é normalmente criada através de uma transformação que converte as coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) em (x_1, x_2, ρ, t) . No espaço transformado a densidade é assim uma variável independente, enquanto que a profundidade x_3 onde se encontra esse valor de densidade é uma variável dependente, devendo ser calculada pelo modelo. A discretização das equações é efectuada escolhendo N valores de densidade e integrando as equações nas N camadas assim formadas (Bleck e Boudra, 1986).

Em escoamentos forçados pela densidade, este tipo de coordenada garante um campo de velocidades praticamente alinhado com a malha, diminuindo assim a difusão numérica na direcção vertical. Quando a coluna de água se encontra muito estratificada a difusão turbulenta na direcção vertical fica inibida, impedindo a coluna de água de homogeneizar. É por isso muito importante

nessas situações, que a difusão numérica na direcção vertical seja baixa para não destruir essa estrutura. Nos modelos de coordenadas isopícnicas é usual considerar que a difusão entre camadas é nula o que, aliado a uma baixa difusão numérica, permite manter a estratificação. O transporte vertical é assim implementado nestes modelos de forma indirecta, através da transferência de massas de água entre camadas seguida de uma homogeneização instantânea. Este processo tem como resultando o movimento vertical da camada (Bleck et *al.*, 1992).

Em regiões onde a coluna de água é homogénea a camada que corresponde a essa densidade ocupa grande parte do domínio, forçando as outras camadas para uma espessura perto de zero (Bleck e Smith, 1990). Esta situação é frequente em águas pouco profundas onde os mecanismos de mistura são mais intensos. Para além do problema computacional que a redução das camadas representa a resolução espacial torna-se muito reduzida. No limite, para uma coluna de água totalmente homogénea, o modelo possuiria apenas uma camada activa tornando-se bidimensional.

Nas regiões da superfície com menor densidade as camadas têm tendência a emergir. Para resolver esse problema este tipo de modelos possuem uma camada na superfície do tipo camada de mistura, homogénea na vertical e com um gradiente horizontal de densidade compatível com as densidades das camadas isopícnicas que se encontram por baixo. As trocas nessa interface são explicadas em pormenor por (Bleck et *al.*, 1989).

Em regiões influenciadas pelo fundo, pela inércia ou em presença de escoamentos secundários o campo de velocidades possui uma componente importante na direcção perpendicular às isopícnicas, contrariando os pressupostos do modelo. Apesar de este tipo de malha produzir resultados muito bons em regiões fortemente estratificadas, os problemas que apresenta em regiões homogéneas, em zonas de afloramento, e em águas pouco profundas fazem com que a malha não possa ser aplicada em diversas situações de interesse.

2.2.2 Malha vertical generalizada

Comparando as malhas descritas na secção anterior, verifica-se que cada coordenada vertical toma como pressuposto que o escoamento é forçado e estrangido por um único mecanismo. Na realidade os escoamentos são influenciados simultaneamente pela densidade, pela geometria, pela tensão de corte e pela inércia, sendo a importância relativa de cada mecanismo variável de região para região. Nessas situações as malhas tradicionais não se comportam bem, do ponto de vista numérico, apresentando problemas de estabilidade e de difusão numérica excessiva.

Do ponto de vista espacial é possível identificar regiões do escoamento em que cada um dos forçamentos anteriores se sobrepõe aos restantes, justificando a utilização de uma só malha para a modelação do escoamento nessa região. No entanto para a modelação de regiões alargadas que englobem mais do que um mecanismo, é conveniente que o modelo permita a utilização simultânea de diferentes malhas em diferentes zonas do domínio. Para isso é necessário dividir o domínio em subdomínios o que obriga a decidir, à partida sobre o melhor tipo de malha para cada região.

Para que o modelo tenha um domínio de aplicação abrangente deve também ser capaz de modelar com eficiência as zonas de interface entre essas regiões. Essas zonas são forçadas simultaneamente pelos vários mecanismos. Algumas situações típicas são as regiões de interface entre os estuários e a plataforma continental e as regiões de interface entre a plataforma e o oceano. Nessas regiões nenhuma das coordenadas anteriores produz bons resultados sendo desejável o uso de uma coordenada que se adapte de forma eficiente às necessidades do escoamento.

Neste modelo a divisão do domínio em subdomínios e a utilização de novos tipos de coordenadas foi implementada utilizando o método do volume finito, como é descrito a seguir.

2.2.2.1 *Divisão em subdomínios*

A divisão em subdomínios obrigaria, na abordagem tradicional, a definir uma transformação de coordenadas diferente para cada subdomínio. A resolução simultânea de equações com diferente natureza tornar-se-ia muito pesada do ponto de vista computacional. Mesmo utilizando uma transformação genérica para a coordenada vertical, o jacobiano da transformação seria diferente em cada subdomínio.

Utilizando o método dos volumes finitos a geometria da malha pode ser imposta de forma explícita, sendo as equações idênticas para qualquer forma das células. Com este método a malha pode ser especificada directamente no espaço físico impondo as localizações geométricas dos nós. As equações incorporam a informação da malha através das grandezas geométricas como as áreas e os volumes das células que são calculados em todas as iterações. Com esta abordagem a divisão em subdomínios é efectuada apenas ao nível da definição das coordenadas dos nós da malha, sendo as equações resolvidas pelo mesmo algoritmo em todo o domínio. A consideração de subdomínios é por útil apenas para comodidade na definição da geometria.

A divisão em subdomínios é considerada aqui apenas na direcção vertical, encontrando-se separados por superfícies horizontais ou paralelas ao fundo. Na figura 2.15 apresenta-se uma combinação possível de realizar com esta filosofia.

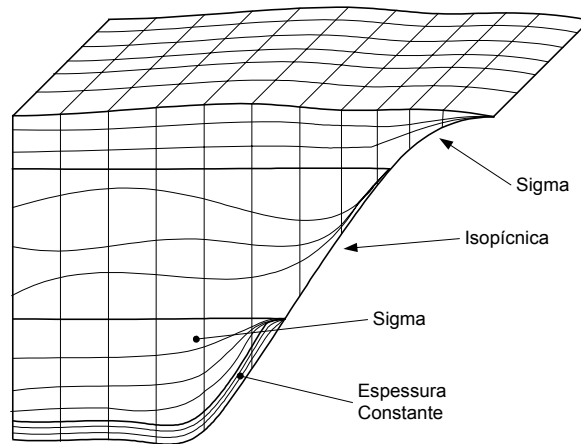


Figura 2.15: Divisão vertical do domínio em subdomínios.

A divisão horizontal do domínio é também possível, recorrendo à utilização de submodelos encaixados.

Os subdomínios do tipo cartesiano podem ser implementados de duas maneiras diferentes: Malha cartesiana tradicional e "shaved cells". No primeiro caso pode-se criar em qualquer posição, excepto à superfície, um subdomínio cartesiano tradicional onde o fundo é representado por descontinuidades com a forma de degraus. No segundo caso subdivide-se uma região do domínio num elevado número de subdomínios compostos apenas por uma camada sigma. A malha resultante é uma malha cartesiana do tipo "shaved cell" idêntica à proposta por (Adcroft et al., 1997). Trata-se de uma malha cartesiana onde as células que intersectam terra são cortadas, melhorando a representação da batimetria.

A decisão do número, localização e tipo de domínios deve ser tomada pelo utilizador em função dos fenómenos que se espera que ocorram nas várias regiões.

O custo computacional é o mesmo para todas as coordenadas uma vez que o algoritmo de cálculo é comum a todo o domínio.

2.2.2.2 Coordenada lagrangeana

Uma das principais motivações para o uso de diferentes coordenadas verticais é a de reduzir a difusão numérica. De uma forma geral a difusão numérica é

importante para números de Reynolds elevados, e é máxima quando o escoamento possui uma grande inclinação relativamente à malha. Para uma malha cartesiana bidimensional com passos espaciais Δx_1 , Δx_2 a difusão numérica produzida por um esquema “upwind” pode ser calculada aproximadamente por (Patankar, 1981):

$$A_N = \frac{\rho U \Delta x_1 \Delta x_2 \sin 2\theta}{4(\Delta x_2 \sin^3 \theta + \Delta x_1 \cos^3 \theta)} \quad 2.85$$

Onde θ é a inclinação do campo de velocidades relativamente a x_1 . Esta dependência da inclinação da malha é explicada pela análise do mecanismo de produção da difusão numérica. A difusão numérica está associada ao termo convectivo e surge das aproximações efectuadas na discretização desse termo.

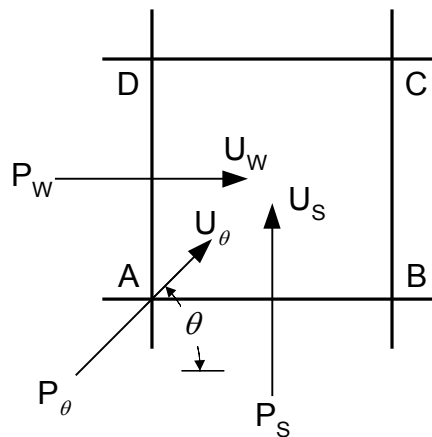


Figura 2.16: Fluxo convectivo para o interior de uma célula cartesiana.

Considerando a célula da figura 2.16 o fluxo convectivo para o seu interior durante o intervalo de tempo Δt deve ser:

$$F_{conv} = \int_{\Delta t} \int_{DAB} P \vec{u} \cdot \vec{n} ds dt \quad 2.86$$

onde P é a propriedade transportada. Se este termo for discretizado por um esquema “upwind” o fluxo resultante é:

$$F_{conv} = \Delta t (S_{DA} U_W P_W + S_{AB} U_S P_S) \quad 2.87$$

A diferença entre estes dois fluxos faz com que as equações discretizadas possuam uma natureza difusiva, que é devida apenas à discretização numérica. Para valores elevados de θ e para números de Courant altos esta discretização produz erros apreciáveis devido às aproximações consideradas para o caudal e para o valor da propriedade transportada.

A discretização usando um método de características ou um método do tipo PIC “*Particle In Cell*” permite reduzir de forma drástica a difusão numérica pois aproxima de forma mais eficiente o fluxo convectivo considerando a velocidade U_θ e usando para propriedade um valor P_θ dependente da inclinação do campo de velocidades (Roache, 1972). Estes métodos são no entanto muito exigentes do ponto de vista computacional e apenas se tornam necessários em algumas regiões do escoamento. Quando o escoamento apresenta um ângulo pequeno relativamente à malha e quando o número de Courant é próximo da unidade estas discretizações são equivalentes ao método “*Upwind*”. Por este motivo uma abordagem alternativa ao problema da difusão numérica pode ser a de garantir em todos os instantes um pequeno valor de θ .

Quando as equações possuem um termo de difusão física a difusão numérica actua de forma aditiva, sendo adicionada à difusão turbulenta. Desta forma o problema da difusão numérica só se torna importante quando o seu valor não for desprezável face ao da difusão turbulenta local. Em escoamentos costeiros e oceânicos a difusão turbulenta na direcção vertical é fortemente inibida pela estratificação. Por esse motivo, as situações de escoamento estratificado são as mais sensíveis aos efeitos da difusão numérica. Com o objectivo de assegurar um pequeno valor de θ na direcção vertical propõe-se o uso de uma malha adaptativa do tipo lagrangeano para essa direcção.

Com a utilização do método dos volumes finitos a geometria pode ser definida explicitamente através das coordenadas dos nós da malha. Desta forma a coordenada lagrangeana é implementada neste modelo movimentando os

vértices das células com uma lei que é função da velocidade vertical do campo de velocidades. Desta forma garante-se que o fluxo através das camadas é reduzido, mantendo-se o escoamento alinhado com a malha como é representado na figura 2.17. Este conceito é semelhante ao utilizado na malha isopícnica onde as camadas coincidem com iso-superfícies de densidades e o fluxo entre camadas é pequeno devido ao campo de velocidades se orientar na direcção dessas superfícies.

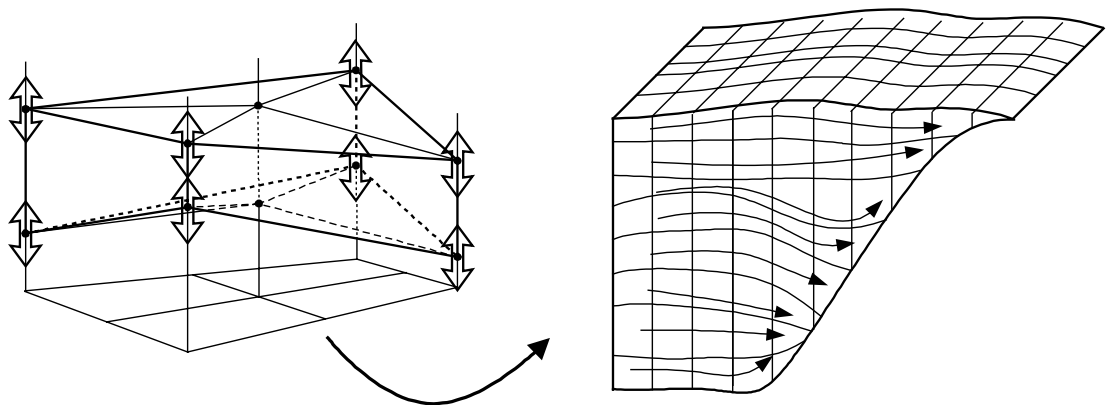


Figura 2.17: Célula de cálculo e malha lagrangeana resultante.

A implementação deste conceito apresenta no entanto algumas dificuldades: A lei de movimento da malha impõe, em cada iteração, a variação de volume da célula. A velocidade vertical que é usada na movimentação da malha é calculada por continuidade, dependendo por sua vez da variação de volume da célula. Trata-se por isso de um problema cuja solução exacta obrigaria a uma formulação implícita para o movimento da malha. No entanto a localização em cada instante dos vértices da malha não necessita de ser feita a partir do campo de velocidades exacto: Desde que se considere um campo de velocidades suficientemente aproximado a inclinação entre a malha e a velocidade será reduzida. Assim, o cálculo da velocidade vertical e da localização dos vértices é efectuada em duas etapas por um método de previsão correcção: Numa primeira fase calcula-se um campo provisório para a velocidade vertical, calculado por continuidade considerando que as células permanecem fixas.

Esse campo é utilizado na movimentação da malha, usando-se a variação de volume para o cálculo do campo de velocidades verticais definitivo. Eventuais erros cometidos no movimento da malha numa iteração são compensados na iteração seguinte. Os detalhes de implementação deste procedimento são analisados em pormenor no capítulo de descrição do modelo.

Do ponto de vista da divisão em subdomínios este tipo de malha pode ser usada em qualquer subdomínio, especificando malhas de outra natureza para outras regiões do espaço.

2.3 Conclusões

Neste capítulo analisaram-se várias alternativas de construção da malha computacional, tanto para o plano horizontal como para a direcção vertical. Para o plano horizontal mostrou-se que a opção de malha cartesiana ou geográfica em detrimento de malhas curvilíneas se justifica pela natureza excessivamente irregular da linha de costa e pelo baixo custo operacional de implementação de novas geometrias. Dentro das malhas cartesianas analisaram-se as propriedades numéricas de várias alternativas, tendo-se concluído que a malha "C" de Arakawa representa a melhor solução para a simulação de escoamentos costeiros e estuarinos. Na direcção vertical descreveram-se os vários tipos de coordenadas tradicionalmente em uso, tendo-se mostrado as vantagens da abordagem de coordenada genérica usada neste modelo. A subdivisão do domínio em subdomínios e a utilização de malha lagrangeana foram apontadas como formas de reduzir o problema da difusão numérica.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo analisam-se numa perspectiva crítica as várias abordagens possíveis para a solução numérica das equações obtidas no capítulo 1. Comparam-se para esse efeito os métodos das diferenças finitas, dos volumes finitos e a classe de métodos dos resíduos ponderados (dentro da qual se destacam os métodos dos elementos finitos e os métodos espectrais). Esta análise toma como referência o método dos volumes finitos, mostrando-se que este método partilha muitas das características dos outros métodos. Este método apresenta uma grande flexibilidade na implementação da geometria e boas propriedades do ponto de vista numérico, justificando-se desta forma a sua adopção no modelo implementado.

3.1 Método das diferenças finitas

No método das diferenças finitas as equações diferenciais originais são aproximadas por equações algébricas, onde figuram como variáveis os valores da solução em pontos discretos do espaço. A solução exacta, de natureza contínua, é assim aproximada por uma solução discreta, conhecida apenas em alguns pontos do domínio. O domínio de cálculo deve por isso ser dividido usando uma malha do tipo primário, segundo a classificação do capítulo anterior.

A discretização das equações é obtida termo a termo por aplicação directa de operadores de diferenças finitas às derivadas que os compõem. Estes operadores são normalmente obtidos recorrendo à expansão em série de Taylor da solução numérica nos pontos da malha, de forma semelhante à efectuada nas equações 2.2, 2.3 e 2.5 do capítulo anterior.

Com o objectivo de ilustrar o método e as suas propriedades numéricas consideram-se as equações unidimensionais para águas pouco profundas na sua forma linearizada (Hirsch, 1988):

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + u_0 \frac{\partial H}{\partial x} + H_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad 3.1$$

onde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_0 & H_0 \\ g & u_0 \end{bmatrix} \quad 3.2$$

A discretização das equações vai ser efectuada em duas etapas: primeiro discretizam-se as derivadas espaciais, seguindo-se depois a discretização temporal onde se decidem os instantes de cálculo das variáveis envolvidas no cálculo das derivadas espaciais.

Utilizando diferenças centrais (equação 2.5) que, como se viu, têm precisão de segunda ordem as equações anteriores ficam:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -u_0 \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x} - H_0 \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - g \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{A} \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2\Delta x} \quad 3.3$$

onde o índice i indica a posição $x=i\Delta x$ no domínio unidimensional $x \in [0, L]$.

A discretização temporal é efectuada pelo esquema explícito Lax-friedrichs:

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = \frac{H_{i+1}^n + H_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u_0 (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) + H_0 (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)] \\ u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u_0 (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + g (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n)] \end{cases} \quad 3.4$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i-1}^n}{2} - \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad 3.5$$

onde o sobrescrito n indica o instante de tempo $t=n\Delta t$.

Este esquema é condicionalmente estável e pode ser visto como uma modificação do esquema de diferenças progressivas no tempo que, para este problema possui uma natureza instável (Lax, 1954). Esta discretização temporal foi escolhida para ilustrar algumas propriedades numéricas do método das diferenças finitas e possui um critério de estabilidade semelhante ao da discretização usada no modelo.

As equações discretizadas 3.4 possuem uma forma que permite identificar os termos das equações diferenciais originais. Esta correspondência é uma característica própria do método das diferenças finitas. A forma de dedução dos operadores de diferenças com recurso à expansão em série de Taylor fornecem uma medida directa dos erros de truncatura cometidos na discretização, o que é também uma vantagem comparativamente a outros métodos.

A análise das equações discretizadas quanto à sua consistência, e do comportamento da solução quanto à convergência e estabilidade, pode também ser efectuada de forma simples para o caso das diferenças finitas. Este facto é de grande importância para a concepção de novos esquemas numéricos. Seguidamente exemplifica-se esta análise para o caso das equações anteriores.

3.2 Propriedades numéricas dos métodos

As equações discretizadas são consistentes com as equações diferenciais originais se tenderem para estas quando Δx e Δt tendem para zero. Para as equações discretizadas 3.5 pode-se verificar esta propriedade efectuando as expansões em série de Taylor:

$$\mathbf{U}_{i\pm 1}^n = \mathbf{U}_i^n \pm \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \Big|_i^n \Delta x + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \Big|_i^n \frac{\Delta x^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^3} \Big|_i^n \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 3.6$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_i^n \Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \Big|_i^n \frac{\Delta t^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial t^3} \Big|_i^n \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad 3.7$$

onde $\partial\mathbf{U}/\partial x$ representa a derivada de ambas as componentes do vector. Substituindo os resultados na equação 3.5. Obtém-se:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \frac{\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{A}}{2\Delta x} (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_{i-1}^n) = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\Big|_i + \mathbf{A} \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}\Big|_i + O(\Delta t, \Delta x) \quad 3.8$$

mostrando que a equação discretizada é consistente com a equação diferencial original e que a aproximação é de primeira ordem no tempo e no espaço.

A condição anterior caracteriza a natureza das equações discretizadas mas não fornece informação sobre a precisão dos resultados. Um método numérico produz uma solução convergente quando, em qualquer ponto do domínio, a solução numérica tende para a solução exacta quando Δx e Δt tendem para zero. Como geralmente não se conhece a solução exacta a convergência do método não pode ser provada directamente. O teorema da equivalência de Lax garante que para um problema bem posto (sem pontos singulares no domínio e com condições fronteira correctas) com uma discretização consistente a estabilidade do método é condição necessária e suficiente para a sua convergência. Desta forma é possível determinar indirectamente a convergência do método através da análise da estabilidade.

Um método é estável se os erros não se amplificam com o tempo. Esta condição garante que a diferença entre a solução numérica e a solução exacta tende para zero com Δx e Δt e garante que a solução não apresenta valores inaceitáveis para instantes de tempo intermédios.

A estabilidade pode ser analisada pelo método de Von Neumann que é aqui aplicado na sua forma matricial.

Neste método as equações discretizada são escritas como:

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{C} \mathbf{X}^n \quad 3.9$$

onde \mathbf{X} é o vector das incógnitas em todos os pontos da malha:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \left[\begin{array}{c} H \\ u \\ H \end{array} \right]_{i-1} \\ \left[\begin{array}{c} u \\ \vdots \end{array} \right]_i \end{bmatrix} \quad 3.10$$

e \mathbf{C} é o operador da discretização:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{A} \Delta t}{2 \Delta x} \right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad 3.11$$

Para garantir que nenhuma componente da solução é amplificada esta é decomposta no espaço numa série de Fourier com a forma:

$$\mathbf{X}_i^n = \sum_{m=-N}^N a_m^n e^{li\phi} \quad 3.12$$

onde a é a amplitude da componente, $\phi = k_m \Delta x = m\pi/N$ é o seu número de onda e $l = \sqrt{-1}$. Esta decomposição engloba todas as harmónicas possíveis para uma malha finita de espaçamento Δx com $N+1$ nós.

A evolução de cada componente desta decomposição é obtida substituindo $x_i^n = a^n e^{li\phi}$ na equação 3.9 e colocando $e^{li\phi}$ em evidência. Obtém-se:

$$a^{n+1} = \mathbf{G}(\phi) a^n \quad 3.13$$

onde

$$\mathbf{G}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi - \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} I \sin \phi & -I \frac{\Delta t}{\Delta x} g \sin \phi \\ -I \frac{\Delta t}{\Delta x} H_0 \sin \phi & \cos \phi - \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} I \sin \phi \end{bmatrix} \quad 3.14$$

é a matriz de amplificação. Nesta formulação a condição de estabilidade é satisfeita se o raio espectral da matriz de amplificação for menor ou igual 1:

$$\rho(\mathbf{G}) \leq 1 \quad 3.15$$

O raio espectral é dado por:

$$\rho(\mathbf{G}) = \text{Max}_{j=1,p} |\lambda_j| \quad 3.16$$

onde λ_j são os valores próprios da matriz \mathbf{G} .

Para o presente caso os valores próprios de \mathbf{G} são:

$$|\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \cos \phi - I \left(u_0 \pm \sqrt{gH_0} \right) \Delta t / \Delta x \quad 3.17$$

e a condição de estabilidade para $u_0 > 0$ é:

$$\rho(\mathbf{G}) = |\lambda_{+}| = \sqrt{\cos^2 \phi - I \sin^2 \phi \left(u_0 + \sqrt{gH_0} \right)^2 \Delta t^2 / \Delta x^2} \leq 1 \quad 3.18$$

que é satisfeita para $\left(u_0 \pm \sqrt{gH_0} \right) \Delta t / \Delta x \leq 1$. Esta condição equivale a um valor unitário para um número de Courant baseado na velocidade $u_0 \pm \sqrt{gH_0}$.

Esta forma do método de Von Neumann permite assim estudar a estabilidade da discretização de um sistemas de equações como um todo. Para o caso de discretizações implícitas o processo é semelhante, sendo o operador da discretização \mathbf{C} obtido por:

$$\mathbf{B}\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n \Rightarrow \mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}^n \quad 3.19$$

O estudo das características numéricas foi aqui apresentada para o método das diferenças finitas mas o procedimento pode igualmente ser aplicado a outros métodos pois geralmente a sua forma final reduz-se à solução de um sistema com a forma da equação 3.9 e esta equação constitui o ponto de partida para a análise efectuada.

3.3 Métodos de resíduos ponderados

No método das diferenças finitas as variáveis são aproximadas por valores discretos em determinados pontos do domínio, não sendo conhecida a sua evolução entre estes pontos discretos. Uma diferença fundamental entre esse método e os métodos de resíduos ponderados reside no facto de nestes últimos as variáveis serem aproximadas por funções contínuas em todo ou em parte do domínio. Desta forma, o valor exacto de uma variável genérica $\tilde{\alpha}$ é aproximado pela função α dada por:

$$\tilde{\alpha} \approx \alpha(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha_0(x_1, x_2, x_3, t) + \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x_1, x_2, x_3) \quad 3.20$$

Para a definição de α são usados N pontos discretos do domínio mas a função final é conhecida em todo o domínio. A função α_0 deve ser tal que α satisfaça as condições fronteira e a condição inicial. As funções ϕ_n são funções interpoladoras (denominadas funções tentativa ou funções de forma) e $a_n(t)$ são as incógnitas que permitem determinar a solução. Esta abordagem na aproximação da função é também usada nos métodos variacionais.

Nos métodos variacionais os valores $a_n(t)$ são os valores que minimizam um determinado funcional, normalmente associado a uma condição energética do sistema físico (Cook et al., 1989). Esta família de métodos tem larga aplicação em mecânica dos sólidos e resistência dos materiais, não sendo no entanto possível aplicar uma formulação deste tipo à maioria dos problemas de mecânica dos fluidos (Fletcher, 1991).

Nos métodos de resíduos ponderados as equações diferenciais f do problema são escritas na sua forma homogénea, tendo-se para a solução exacta:

$$f(\tilde{\alpha}) = 0 \quad 3.21$$

Quando as mesmas equações são aplicadas à solução aproximada da equação 3.20 produz-se o resíduo R :

$$f(\alpha) = R \quad 3.22$$

O resíduo é assim uma função contínua em todo o domínio que depende das funções de forma escolhidas e cujo valor é determinado pelos coeficientes $a_n(t)$. Este resíduo é uma medida do erro cometido na solução aproximada, procurando-se que seja próximo de zero para todo o domínio. Os valores das incógnitas $a_n(t)$ é assim obtido da condição:

$$\iiint_{\text{Domínio}} W_m(x_1, x_2, x_3) \cdot R \, dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad m = 1, \dots, M \quad 3.23$$

onde M é o numero de células ou de pontos (dependendo do método) em que o domínio é dividido. A aplicação da equação 3.23 aos M pontos produz um sistema de equações algébricas que permitem determinar as incógnitas a_n . O uso de diferentes funções de peso ou funções teste W_m dão origem a diferentes métodos dentro da classe dos resíduos ponderados:

Se o domínio for dividido em M células ou subdomínios D_m e as funções de peso forem:

$$\begin{cases} W_m(\vec{x}) = 1 & \vec{x} \in D_m \\ W_m(\vec{x}) = 0 & \vec{x} \notin D_m \end{cases} \quad 3.24$$

obtém-se o método do subdomínio que pode ser interpretado como o método dos volumes finitos na determinação da equação 3.23. O método dos volumes finitos obriga no entanto a considerar funções de forma constantes em cada

célula do domínio não podendo por isso satisfazer a condição de continuidade normalmente exigida às funções de forma.

Se forem definidos M pontos \bar{x}_m no interior do domínio e as funções de peso forem:

$$W_m(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_m) \quad 3.25$$

onde δ é a função delta de Dirac, obtém-se o método de co-locação que partilha algumas das características com o método das diferenças finitas.

O método com maior aplicação é no entanto o método de Galerkin que se caracteriza pelas funções de peso pertencerem à mesma família das funções de forma:

$$W_m(\bar{x}) = \phi_m(\bar{x}) \quad 3.26$$

Se estas funções constituírem um conjunto completo nos M graus de liberdade possíveis a equação 3.23 garante que o resíduo é ortogonal a todos os membros de esse conjunto e que por isso tende para zero quando M tende para infinito. Desta forma garante-se a convergência do método.

Seguidamente particulariza-se a abordagem de Galerkin para dois métodos usados frequentemente em aplicações de mecânica dos fluidos: O método dos elementos finitos e os métodos espectrais.

3.3.1 Método dos elementos finitos

No método dos elementos finitos do tipo Galerkin as funções de forma e as funções de peso pertencem à mesma família de funções. O que distingue este método do método de Galerkin tradicional é o facto de o domínio ser dividido em elementos contíguos nos quais se definem pontos e as funções utilizadas serem funções locais, definidas na vizinhança desses pontos e nulas no resto do domínio. As funções de forma são tais que o valor do seu somatório nos nós

vale 1. Por esse motivo os coeficientes a_n a determinar coincidem com os valores α_n da solução nesses pontos. A solução aproximada é assim:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \phi_n(x_1, x_2, x_3) \quad 3.27$$

Esta solução aproximada é usada na equação diferencial para obter o resíduo, como indicado na equação 3.22. Como ϕ é derivável analiticamente na vizinhança de cada nó, a expressão analítica do resíduo pode ser calculada nessa vizinhança, como função dos valores α_n da solução nessa vizinhança. A discretização do termo temporal é efectuada normalmente por um método de diferenças finitas.

A integração da equação 3.23 pode ser efectuada analiticamente para cada m obtendo-se uma equação algébrica onde figuram apenas as incógnitas α_n da vizinhança de m . Através de uma numeração adequada dos pontos da malha é possível obter um sistema de equações algébricas pouco esparso, com as incógnitas dos pontos de cada vizinhança concentrados perto da diagonal principal. Não é no entanto possível para o caso geral, obter sistemas tri-diagonais como acontece com os métodos dos volumes finitos ou das diferenças finitas. Este método necessita por isso de algoritmos de solução das equações mais dispendiosos do ponto de vista computacional.

3.3.2 Métodos espectrais

Ao contrário dos elementos finitos os métodos espectrais são métodos de Galerkin tradicionais em que as funções de forma e as funções de peso são definidas de uma forma global em todos os pontos do domínio, não estando limitadas a uma vizinhança do ponto. Por esse motivo os valores a_n das incógnitas não se podem identificar com os valores α_n da solução nos pontos. A particularidade dos métodos espectrais consiste em considerar para funções de

forma e funções de peso uma família de funções que sejam ortogonais. Duas funções ϕ_i e ϕ_j são ortogonais se:

$$\iiint_{\text{Domínio}} \phi_i(x_1, x_2, x_3) \cdot \phi_j(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \begin{cases} \neq 0 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases} \quad 3.28$$

Utilizam-se normalmente séries de Fourier, polinómios de Legendre ou polinómios de Chebyshev para este efeito. A solução aproximada tem a forma da equação 3.20 que é aqui entendida como uma transformação da solução do espaço físico para o espaço espectral. A solução é obtida da equação 3.23 onde, devido à ortogonalidade das funções, para cada m apenas o termo m do resíduo é diferente de zero. Obtém-se assim um sistema de equações diferenciais ordinárias relativamente simples de resolver. Estes métodos dão bons resultados quando a informação disponível para as condições inicial e fronteira é escassa, como acontece em previsão oceânica e atmosférica. É também frequente encontrar estes métodos em modelos do tipo quasi-tridimensionais compostos por um esquema tradicional de diferenças finitas para as equações 2D integradas na profundidade e um método espectral 1D na vertical (Davies, 1993).

3.4 Método dos volumes finitos

A denominação de método dos volumes finitos é por vezes utilizada com o significado de método de diferenças finitas na sua forma conservativa. Esta denominação deve-se ao facto de ambos os métodos poderem conduzir às mesmas equações discretizadas quando a malha primária é cartesiana em todas as direcções. As equações resultam iguais porque esse tipo de malha primária produz uma malha secundária composta por células paralelepípedicas em que as áreas e volumes são dados pelo produto dos passos espaciais. Na realidade os métodos possuem uma natureza distinta, conduzindo a discretizações diferentes para o caso geral de malhas não cartesianas. Podem-

se realçar diferenças tanto no processo de discretização como na natureza do espaço discretizado (Vinokur, 1989).

No método das diferenças finitas aproximam-se os termos das equações diferenciais por operadores de diferenças. No método dos volumes finitos são os balanços integrais das propriedades transportadas que são aproximados calculando-se para isso os fluxos através das faces das células. Estes balanços podem ser obtidos da integração das equações diferenciais nas células da malha secundária. Esta abordagem, por vezes útil, é no entanto artificial uma vez que as equações diferenciais são por sua vez obtidas dos balanços integrais para um volume de controle infinitesimal como efectuado na secção 1.2.2.

Para malhas diferentes da cartesiana o método das diferenças finitas obriga normalmente a uma transformação de coordenadas, discretizando-se as equações resultantes num espaço transformado onde a malha é do tipo cartesiano. No método dos volumes finitos os balanços são efectuados no espaço real, sendo a geometria das células introduzida de forma explícita através das suas áreas e volumes.

A malha utilizada no método das diferenças finitas é uma malha primária definida pelos pontos onde as variáveis discretas são calculadas. Os valores das variáveis dependentes não são por isso conhecidos para localizações do espaço diferentes desses pontos. No método dos volumes finitos utiliza-se uma malha secundária que divide o domínio em células de cálculo. Os valores das variáveis dependentes, incluindo a elevação da superfície livre, são considerados constantes no interior de cada célula, sendo por isso conhecidos em todo o domínio e apresentando descontinuidades nas faces das células. Em certos casos, como por exemplo no cálculo dos fluxos difusivos, torna-se útil associar o valor da propriedade a um ponto específico no interior da célula, podendo-se para esse efeito utilizar o centro de massas da célula.

O facto das propriedades serem conhecidas em todo o domínio e apresentarem descontinuidades nas faces das células pode ser aproveitado para construir

métodos eficientes nos casos em que a solução apresenta descontinuidades no domínio. Em hidrodinâmica este fenómeno está presente em situações de salto hidráulico. Duas abordagens distintas podem ser adoptadas: Nos métodos adaptativos a malha desloca-se de forma a capturar os choques nas interfaces entre células (Thompson, 1984). Nos métodos do tipo Godunov a malha permanece fixa e a propagação do choque é calculada em cada iteração pela solução de um problema de Riemann, calculando-se de seguida, para as células que contém o choque, os fluxos correspondentes. Este segundo método é utilizado por Chippada et al. (1998) em aplicações costeiras utilizando o método dos volumes finitos numa malha não estruturada composta por triângulos.

Nos parágrafos seguintes utiliza-se o método dos volumes finitos para discretizar uma equação de evolução genérica. Esta equação tem uma forma que engloba todas as equações do modelo a partir da especificação da propriedade transportada. O processo de discretização é em seguida particularizado para os diversos termos presentes nas equações do modelo, de forma a introduzir a estrutura geral da discretização. Utiliza-se inicialmente uma célula genérica de forma hexaédrica, particularizando depois para uma célula com as características usadas no modelo. Ilustram-se dessa forma as simplificações que essa geometria permite.

A evolução de uma variável genérica α no interior de um volume arbitrário V pode ser escrita na sua forma integral por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{n} = \int_V fp dV \quad 3.29$$

onde \vec{n} é a normal exterior da superfície S que define a fronteira de V e fp é o termo de fontes e poços da propriedade. O integral de superfície contabiliza os fluxos da propriedade através de S . As equações de Navier-Stokes e as equações de transporte de salinidade e temperatura podem ser escritas nesta forma através de uma escolha conveniente das variáveis α e fp .

3.4.1 Equação da continuidade

Para este caso a propriedade transportada e o termo de fontes e poços devem ser:

$$\alpha = \rho \quad ; \quad fp = 0 \tag{3.30}$$

Os fluxos $\vec{F} \cdot \vec{n}S$ da propriedade através das faces do volume de controlo representam assim caudais mássicos.

A equação anterior pode ser discretizada pelo método dos volumes finitos numa célula hexaédrica de geometria genérica, como a apresentada na figura 3.1. Considera-se nessa discretização que as propriedades são homogéneas no interior da célula.

A discretização espacial fica:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_{ijk} V_{ijk}) = - \sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}_m \cdot \vec{n}_m S_m + FP_{ijk} V_{ijk} \tag{3.31}$$

Tendo-se mantido a evolução temporal na sua forma diferencial.

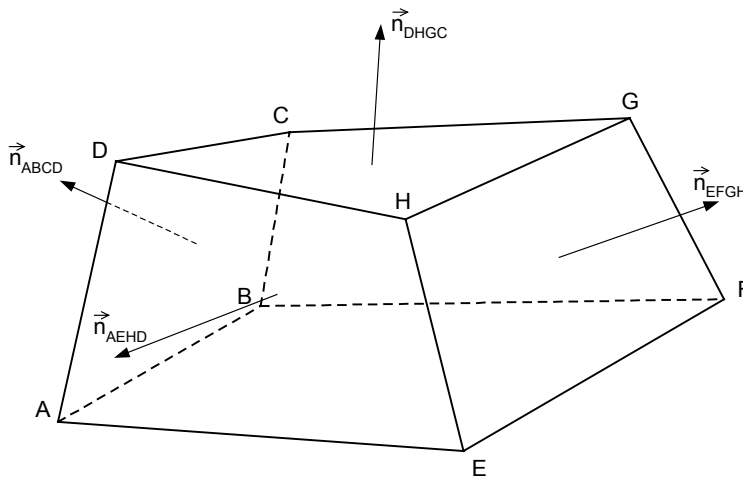


Figura 3.1: Célula hexaédrica genérica.

Os fluxos são calculados por:

$$\vec{F}_m \cdot \vec{n}S_m = \alpha_m \vec{u}_m \cdot \vec{n}S_m \quad 3.32$$

onde \vec{u}_m é o valor representativo do campo de velocidades na face m e α_m o valor representativo da propriedade que a atravessa. A forma de calcular estas duas grandezas define o método de discretização espacial.

Com o uso de uma malha descentrada do tipo “C”, em cada face da célula é calculada uma das componentes u_i da velocidade \vec{u}_m dessa face. Se a face for perpendicular a um dos eixos coordenados essa é a única componente responsável pelo fluxo volúmico através da face. No caso da face não ser perpendicular a um dos eixos as outras duas componentes são obtidas para cada face por interpolação, devendo os operadores de média possuir as propriedades indicadas na secção 2.1.1.3.

3.4.1.1 Cálculo dos fluxos convectivos horizontais

Particulariza-se agora a discretização para a célula adoptada no modelo. Neste caso apenas a coordenada vertical é genérica, sendo a malha horizontal do tipo cartesiana. Como consequência, as faces laterais são verticais, como representado na figura 3.2. Esta geometria permite uma redução considerável do número de interpolações a efectuar, pois apenas a componente da velocidade calculada na face contribui para o fluxo volúmico.

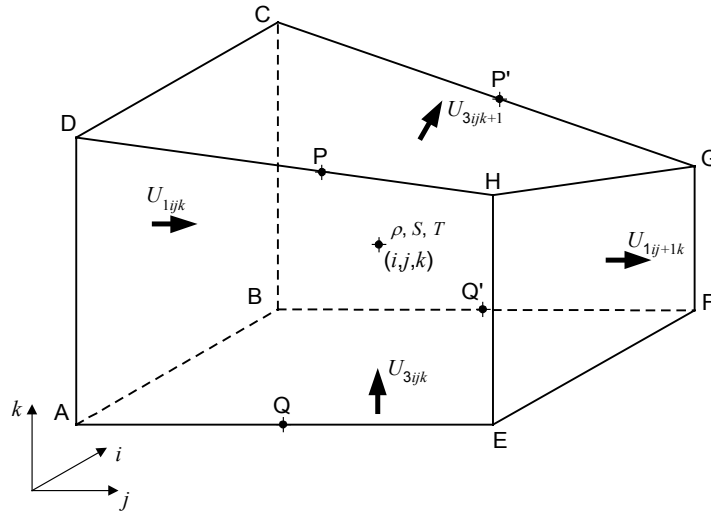


Figura 3.2: Célula tridimensional do tipo “C” para cálculo de escalares.

Quando a propriedade transportada pelo fluxo volúmico não é calculada sobre a face torna-se necessário considerar hipóteses adicionais. As características de um método numérico dependem em grande medida das hipóteses adoptadas. Considerando a propriedade genérica α o seu valor para a face ABCD quando se utiliza uma discretização do tipo central é dado por $\alpha_{ABCD} = \alpha_{ij-1/2k}$ obtido por média ponderada para o caso geral de passo variável. Se for utilizada uma discretização do tipo “upwind” o valor será:

$$\alpha_{ABCD} = \frac{F_{xz_{ijk}} + |F_{xz_{ijk}}|}{2} \alpha_{ij-1k} + \frac{F_{xz_{ijk}} - |F_{xz_{ijk}}|}{2} \alpha_{ij-1k} \quad 3.33$$

onde $F_{xz_{ijk}} = U_{ijk} S_{ABCD}$ é o caudal volúmico pela face ABCD. A letra x no fluxo indica a direcção (x , y ou z) e a letra z indica a célula a que se refere (z , u ou v). Uma formulação híbrida que permita a contribuição das duas discretizações ponderada por um parâmetro γ tem assim a forma:

$$(\vec{F} \cdot \vec{n} S)_{ABCD} = -\gamma \left(\frac{F_{xz_{ijk}} + |F_{xz_{ijk}}|}{2} \alpha_{ij-1k} + \frac{F_{xz_{ijk}} - |F_{xz_{ijk}}|}{2} \alpha_{ijk} \right) - (1-\gamma) \alpha_{ij-1/2k} F_{xz_{ijk}} \quad 3.34$$

O primeiro termo da equação 3.31 é discretizado por um método tradicional de diferenças finitas progressivas no tempo ficando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_{ijk} V_{ijk}) = \frac{\alpha_{ijk}^{n+1} V_{ijk}^{n+1} - \alpha_{ijk}^n V_{ijk}^n}{\Delta t} \quad 3.35$$

3.4.1.2 Cálculo dos fluxos convectivos verticais

No caso de aproximação hidrostática a equação da continuidade é usada para determinar a velocidade vertical, como referido no capítulo 1. Para escoamento incompressível tem-se $\alpha = \rho = C^{te}$ e o termo temporal (equação 3.35) é conhecido explicitamente a partir da lei de movimento da malha. A equação 3.31 é por isso resolvida usando como variável dependente o fluxo vertical:

$$(\vec{F} \cdot \vec{n}S)_{DHGC} = - \sum_{m=1}^{N-1 \text{ faces}} \vec{F}_m \cdot \vec{n}S_m - \frac{\alpha_{ijk}^{n+1} V_{ijk}^{n+1} - \alpha_{ijk}^n V_{ijk}^n}{\Delta t} \quad 3.36$$

Para o caso geral da face DHGC ser inclinada, o fluxo calculado desta forma é o fluxo total que atravessa a face, como ilustrado na figura 3.3:

$$(\vec{F} \cdot \vec{n}S)_{DHGC} = F_{zz_{ijk+1}} \cdot \alpha = (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3) S_{DHGC} \cdot \alpha \quad 3.37$$

A variação de volume da célula encontra-se já contabilizada nesta expressão, devido ao termo da equação 3.35. O valor da velocidade vertical calculada a partir desse fluxo deve por isso ser entendida como uma velocidade relativa, definida num referencial fixo na malha e perpendicular à face DHGC.

O valor da velocidade não é na verdade necessário para a solução das equações, utilizando-se apenas o fluxo F_{zz} que se denomina aqui por “vertical” apesar de ser devido a componentes nas três direcções.

3.4.2 Equação de transporte da salinidade e temperatura

Para este caso a propriedade transportada e o termo de fontes e poços devem ser:

$$\alpha = S \text{ ou } T \quad ; \quad fp = 0 \quad 3.38$$

O formalismo anterior aplica-se na totalidade, sendo agora a equação 3.31 resolvida em ordem à propriedade transportada. Neste caso, para além dos fluxos convectivos idênticos aos anteriores, devem-se ainda calcular os fluxos difusivos.

3.4.2.1 Cálculo dos fluxos difusivos horizontais

Para cada face m o fluxo difusivo é dado pelo vector:

$$\vec{F}_{Diff_m} = -\frac{1}{S_m} \int_{S_m} K \vec{\nabla} \alpha \, dS = -\frac{1}{S_m} \int_{S_m} K_H \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \vec{e}_1 + K_H \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \vec{e}_2 + K_V \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} \vec{e}_3 \, dS \quad 3.39$$

Para as faces verticais apenas a componente do fluxo perpendicular à face contribui para o transporte. Por exemplo na face ABCD tem-se $\vec{n}_{ABCD} = -1\vec{e}_1$ e o fluxo difusivo para uma discretização do tipo central fica:

$$\vec{F} dh_{ABCD} \cdot \vec{n} S_{ABCD} = - \int_{S_{ABCD}} K \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S_{ABCD}} K_H \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \, dS = K_{H_{ABCD}} \frac{\alpha_{ijk} - \alpha_{ij-1k}}{\Delta x_1} S_{ABCD} \quad 3.40$$

3.4.2.2 Cálculo dos fluxos convectivos verticais

Na célula da figura 3.2 as faces superior e inferior são oblíquas em relação aos eixos coordenados, como consequência da coordenada vertical genérica. Os fluxos convectivo e difusivo através dessas faces possuem assim componentes nas três direcções espaciais. Este fluxo convectivo pode ser discretizada de forma idêntica à dos fluxos convectivos horizontais:

$$(\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{DHGC} = \gamma \left(\frac{F_{zz_{ijk+1}} + |F_{zz_{ijk+1}}|}{2} \alpha_{ijk} + \frac{F_{zz_{ijk+1}} - |F_{zz_{ijk+1}}|}{2} \alpha_{ijk+1} \right) + (1-\gamma) \alpha_{ijk+1/2} F_{zz_{ijk+1}} \quad 3.41$$

onde F_{zz} é o caudal volúmico obtido por continuidade das equações 3.36 e 3.37 e que engloba componentes nas três direcções. Esta discretização equivale a

considerar que, independentemente da direcção do fluxo pela face DHGC, a propriedade transportada é sempre uma função de α_{ijk} e α_{ijk+1} . Esta aproximação é semelhante à considerada em modelos de coordenada sigma, e justifica-se devido à pequena inclinação da malha e aos grandes factores de forma das células na simulação de escoamentos costeiros.

3.4.2.3 Cálculo dos fluxos difusivos verticais

Para o fluxo difusivo pela face DHGC é necessário calcular as suas três componentes separadamente, uma vez que não se pode utilizar informação vinda da equação da continuidade.

Na figura 3.3 representa-se um corte da célula da figura 3.2 pelo plano x_1, x_3 .

O fluxo difusivo na direcção vertical $F_3 n_3 S_{DHGC}$ é discretizado de forma semelhante à efectuada para os fluxos horizontais:

$$F_3 n_3 S_{DHGC} = - \int_{S_{DHGC}} K_V \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} dS = K_{V_{DHGC}} \frac{\alpha_{ijk+1} - \alpha_{ijk}}{\Delta x_3} S_{DHGC} \quad 3.42$$

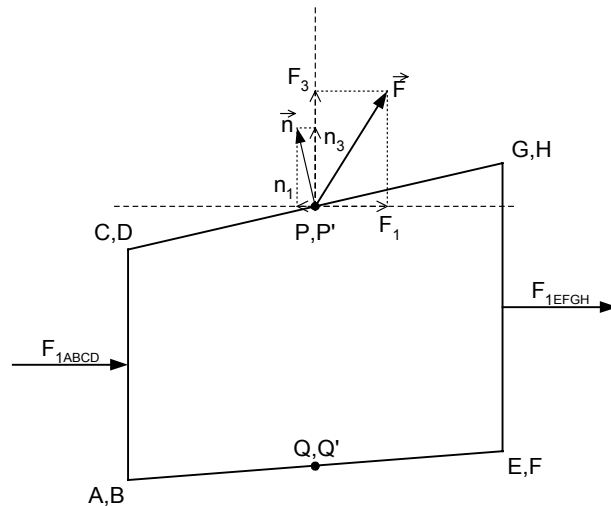


Figura 3.3: Fluxo vertical pela face superior da célula.

Os fluxos horizontais $F_1 n_1 S_{DHGC}$ e $F_2 n_2 S_{DHGC}$ são normalmente desprezados em modelos de coordenada sigma pois n_1 e n_2 são, para essa coordenada, da ordem de $\partial h / \partial x_1$ e $\partial h / \partial x_2$ respectivamente (Mellor e Blumberg, 1985). Na implementação tradicional da coordenada sigma por transformação de coordenadas a discretização do fluxo $F_1 n_1 S_{DHGC}$ por exemplo, envolve a aproximação da expressão:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_1} K_V \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_3} \right) + \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(K_H \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{x}_3}{\partial x_1} K_V \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_3} \right) \quad 3.43$$

onde \tilde{x}_1 e \tilde{x}_3 são as coordenadas no espaço transformado. A discretização desta expressão introduz um erro excessivo no termo da difusão sendo outro dos motivos que leva a não ser considerado.

Com o método dos volumes finitos é possível uma simplificação que deverá ser testada em condições reais: O fluxo $F_1 n_1 S_{DHGC}$ da figura 3.4 pode ser decomposto em:

$$F_1 n_1 S_{DHGC} = F_1' n_1' S_{DPP'C} + F_1'' n_1'' S_{PHGP'} \quad 3.44$$

sendo os fluxos difusivos F_1' e F_1'' aproximados por $F_1' \approx F_{1_{ABCD}}$ e $F_1'' \approx F_{1_{EFGH}}$ que se encontram já calculados. As áreas $n_1' S_{DPP'C}$ e $n_1'' S_{PHGP'}$ são as projecções da área DHGC no plano vertical, sendo facilmente calculadas por considerações geométricas. Esta aproximação equivale por isso a calcular os fluxos difusivos horizontais da célula numa área vertical modificada de forma a ter em conta a inclinação da célula. Para a célula considerada essa área é definida pela superfície PP'Q'Q. Estes fluxos devem ser adicionados ao fluxo produzido pelo gradiente vertical. Os escoamentos costeiros apresentam geralmente uma estratificação por planos horizontais. A contribuição dos fluxos F_1' e F_1'' é assim normalmente pequena, justificando a opção de não os incluir.

O termo de fonte e poço que se considerou nulo pode ser usado nas células da superfície para a imposição da evaporação ou precipitação. A precipitação é assim modelada como uma variação de salinidade e não como um acréscimo de água doce.

3.4.3 Equação de transporte da quantidade de movimento

As variáveis transportadas e os termos de fonte e poço são agora dados por:

$$\begin{aligned}
 x_1: \quad \alpha &= \rho u_1 & ; & \quad fp = \rho f u_2 \\
 x_2: \quad \alpha &= \rho u_2 & ; & \quad fp = -\rho f u_1 \\
 x_3: \quad \alpha &= 0 & ; & \quad fp = -\rho g
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

Os fluxos \vec{F} na equação 3.31 representam neste caso fluxos de quantidade de movimento por unidade de volume, devendo por isso ser interpretados como forças. \vec{F} engloba assim todas as forças exercidas no fluido: Forças viscosas, forças de pressão e convectivas (fluxo convectivo de quantidade de movimento). A discretização dos fluxos convectivos e difusivos é idêntica à apresentada anteriormente. Devido ao uso de uma malha descentrada a localização das propriedades relativamente à célula é no entanto diferente, como indicado na figura 3.5.

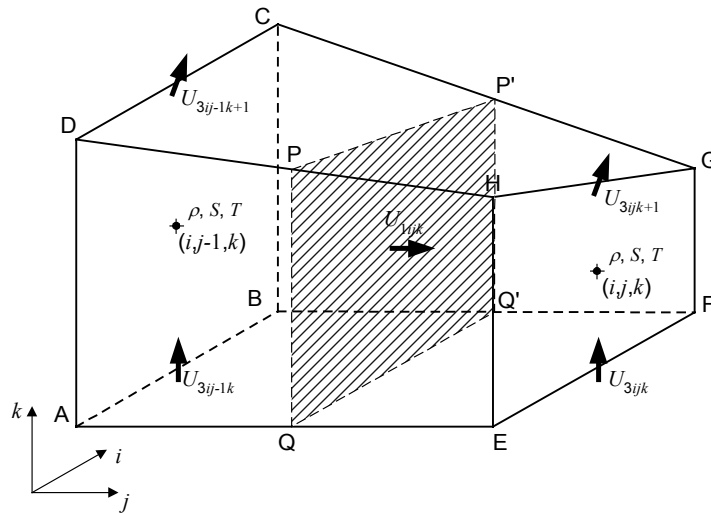


Figura 3.5: Célula tridimensional do tipo “C” para cálculo da velocidade u_1 .

Isto obriga a interpolações para o cálculo dos caudais volúmicos nas faces, como foi analisado na secção 2.1.1.3.

3.4.3.1 Cálculo das forças de pressão

A força de pressão exercida numa face m da célula é:

$$\vec{\pi}_m = - \left(\frac{1}{S_m} \int_{S_m} p dS \right) \vec{n} = -P_m \vec{n} \quad 3.46$$

e representa um vector com a direcção da normal à face e sentido contrário a esta. Na equação de transporte de cada componente da quantidade de movimento, o fluxo associado à força de pressão, apenas considera essa componente da força. O fluxo a usar na equação de transporte da componente x_1 da quantidade de movimento é assim:

$$\vec{F}p_m = -\pi_{1m} \vec{e}_1 = P_m n_{1m} \vec{e}_1 \quad 3.47$$

O sentido de \vec{F} é o simétrico da força para compatibilidade com a equação 3.31. A integração nas faces da célula, tendo em conta que as normais das faces verticais coincidem com os eixos coordenados, fica:

$$\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F} p_m \cdot \vec{n} S_m = (P n_1 S)_{DHGC} + (P n_1 S)_{AEFB} - (PS)_{ABCD} + (PS)_{EFGH} \quad 3.48$$

A pressão média P nas faces das células é dada pela integração da pressão em toda a superfície da face. A pressão é calculada para cada ponto pela equação 1.59 onde se usou a aproximação hidrostática. Obtém-se:

$$P_m = \frac{1}{S_m} \int_{S_m} (p_{btrop} + p_{bclin}) dS = \frac{1}{S_m} \int_{S_m} \left[P_{atm} + \rho_0 g (\eta - x_3) + g \int_{x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \right] dS \quad 3.49$$

3.4.3.1.1 Pressão barotrópica

No método do volume finito a elevação da superfície livre é considerada constante dentro de cada célula da malha horizontal. Com o uso de malha descentrada isso significa que todos os pontos da face ABCD e todos os pontos das faces DPP'C e AQQ'B possuem a elevação η_{ij-1} e os pontos das faces EFGH, PHGP' e QEFQ' têm a elevação η_{ij} . A integração do termo barotrópico em todas as faces da célula é por isso equivalente à integração a ambos os lados da superfície PP'Q'Q da figura 3.5:

$$\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F} b t_m \cdot \vec{n} S_m = \left\{ \left[P_{atm_{ij}} + \rho_0 g (\eta_{ij} - \hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}) \right] - \left[P_{atm_{ij-1}} + \rho_0 g (\eta_{ij-1} - \hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}) \right] \right\} S_{PP'Q'Q} \quad 3.50$$

Onde $\hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}$ é a profundidade do centro de gravidade da superfície PP'Q'Q.

Simplificando fica:

$$\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F} b t_m \cdot \vec{n} S_m = \left[(P_{atm_{ij}} - P_{atm_{ij-1}}) + \rho_0 g (\eta_{ij} - \eta_{ij-1}) \right] S_{PP'Q'Q} \quad 3.51$$

3.4.3.1.2 Pressão baroclínica

A componente baroclínica da força é dada por:

$$\sum_{m=1}^{N_{\text{faces}}} \vec{F}bc_m \cdot \vec{n}S_m = \sum_{m=1}^{N_{\text{faces}}} \left(\frac{g}{S_m} \int_{S_m, x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \right) \vec{e}_1 \cdot \vec{n}S_m \quad 3.52$$

Tomando como exemplo a célula $U_{ijkmax-1}$ da figura 3.6 a integração para a face ABCD é:

$$\begin{aligned} \vec{F}bc_{ABCD} \cdot \vec{n}S = & -g \int_{ABCD, x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \, dS = -g \int_{ABCD} \left[\rho'_{ij-1kmax} (\eta_{ij-1} - x_{3CD}) + \int_{x_3}^{x_{3CD}} \rho'_{ij-1kmax-1} dx_3 \right] dS = \\ & -gS_{ABCD} \left[\rho'_{ij-1kmax} (\eta_{ij-1} - x_{3CD}) + \rho'_{ij-1kmax-1} (x_{3CD} - \hat{x}_{3ABCD}) \right] \end{aligned} \quad 3.53$$

onde \hat{x}_{3ABCD} é o centro de gravidade da face ABCD.

Para as faces da célula que não são verticais, a força de pressão baroclínica depende da estrutura da estratificação existente sobre elas (densidade e geometria das células entre essa face e a superfície).

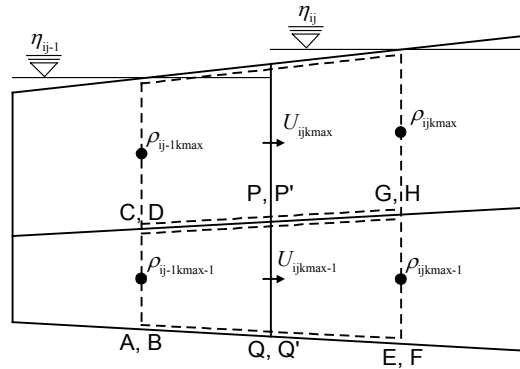


Figura 3.6: Corte Vertical da célula das velocidades.

Para a face AQQ'B por exemplo, o fluxo associado à componente da força de pressão baroclínica na direção \vec{e}_1 é:

$$\vec{F}bc_{AQQ'B} \cdot \vec{n}S = gn_1 \int_{AQQ'B} \left(\int_{x_3}^{\eta} \rho' dx_3 \right) dS = gn_1 \int_{AQQ'B} \left(\int_{x_{3DPPC}}^{\eta_{ij-1}} \rho'_{ij-1kmax} dx_3 + \int_{x_3}^{x_{3DPPC}} \rho'_{ij-1kmax-1} dx_3 \right) dS = 3.54$$

$$gn_1 (\rho'_{ij-1kmax} V_{kmax} + \rho'_{ij-1kmax-1} V_{kmax-1})$$

onde V_{kmax} é o volume da metade da célula U_{ijkmax} que pertence à célula $\rho_{ij-1kmax}$. Esta forma de calcular o termo baroclínico torna-se excessivamente dispendiosa do ponto de vista computacional pois obriga ao cálculo acumulado do peso de todas as células por cima de cada face. Uma forma simplificada de calcular a contribuição destas faces consiste em considerar que a estrutura da estratificação é idêntica à que existe nos pontos de cálculo da densidade. Com esta simplificação a pressão baroclínica num ponto com coordenada x_3 na face AQQ'B é:

$$p(x_{3AQQ'B}) = p(x_{3ABCD}) + g \int_{x_{3AQQ'B}}^{x_{3ABCD}} \rho'_{ij-1kmax-1} dx_3 \quad 3.55$$

onde x_{3ABCD} é um ponto arbitrário na face ABCD. Escolhendo um ponto na aresta CD e efectuando a integração da pressão baroclínica a toda a face AQQ'B obtém-se uma expressão semelhante à da equação 3.53:

$$\vec{F}bc_{AQQ'B} \cdot \vec{n}S = n_1 g \int_{AQQ'B} \left[\rho'_{ij-1kmax} (\eta_{ij-1} - x_{3CD}) + \int_{x_{3AQQ'B}}^{x_{3CD}} \rho'_{ij-1kmax-1} dx_3 \right] dS = 3.56$$

$$n_1 g S_{AQQ'B} \left[\rho'_{ij-1kmax} (\eta_{ij-1} - x_{3CD}) + \rho'_{ij-1kmax-1} (x_{3CD} - \hat{x}_{3AQQ'B}) \right]$$

De igual forma, efectuando os integrais para as outras faces da célula que pertencem à célula $\rho_{ij-1kmax-1}$ (e por isso possuem elevação η_{ij-1}) obtém-se:

$$\sum_{\substack{DPPC \\ ABCD \\ AQQ'B}} \vec{F}bc \cdot \vec{n}S = -g S_{PPQQ} \left[\rho'_{ij-1kmax} (\eta_{ij-1} - x_{3CD}) + \rho'_{ij-1kmax-1} (x_{3CD} - \hat{x}_{3PPQQ}) \right] \quad 3.57$$

onde se utilizou o facto da coordenada vertical do centro de gravidade do conjunto dessas faces coincidir com a coordenada $\hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}$ do centro de gravidade da superfície PP'Q'Q, e de a superfície projectada do conjunto das faces na direcção \vec{e}_1 coincidir também com a área dessa superfície.

A contribuição das faces que pertencem à célula $\rho_{ijk_{max-1}}$ é:

$$\sum_{\substack{PHGP' \\ EFGH \\ QEFQ'}} \vec{F}bc \cdot \vec{n}S = gS_{PP'Q'Q} \left[\rho'_{ijk_{max}} (\eta_{ij} - x_{3_{GH}}) + \rho'_{ijk_{max-1}} (x_{3_{GH}} - \hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}) \right] \quad 3.58$$

Generalizando, o fluxo total numa célula da camada k devido à força baroclínica é:

$$\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}bc_m \cdot \vec{n}S_m = gS_{PP'Q'Q} \left\{ \left[\sum_{n=k+1}^{k_{max}} (\rho'_{ijn} \Delta x_{3_{jn}}) + \rho'_{ijk} (x_{3_{GH}} - \hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}) \right] - \left[\sum_{n=k+1}^{k_{max}} (\rho'_{ij-1n} \Delta x_{3_{j-1n}}) + \rho'_{ij-1k} (x_{3_{CD}} - \hat{x}_{3_{PP'Q'Q}}) \right] \right\} \quad 3.59$$

Onde $\Delta x_{3_{ijk}}$ é a espessura da célula U_{ijk} na face ρ_{ijk} . Esta equação pode ser interpretada como a discretização do termo baroclínico da equação 1.60. Outra possibilidade seria a de efectuar para cada célula a diferença das pressões em cada face e integrar o resultado em toda a coluna de água. Essa implementação seria equivalente à discretização do termo baroclínico da equação 1.61, surgindo nas equações discretizadas o termo $\rho'_{ijk_{max}} (\eta_{ij} - \eta_{ij-1})$ devido à diferença no nível da superfície livre entre os dois lados da célula. A aproximação admitida na equação 3.59 é idêntica à efectuada nos modelos de coordenada sigma pois nesses modelos o gradiente de pressão baroclínico, expresso pela equação 1.60, é discretizado considerando que a estrutura da estratificação é igual em todos os pontos da célula. Esta forma produz o valor exacto quando as camadas são horizontais e justifica-se devido às pequenas inclinações presentes em situações reais. Para o caso de inclinações acentuadas da malha

a forma expressa pela equação 3.54 é preferível, exigindo no entanto um esforço computacional cinco vezes superior.

3.5 Conclusões

Neste capítulo analisaram-se alguns dos métodos tradicionalmente usados na simulação de escoamentos costeiros e oceânicos.

Mostrou-se que o método das diferenças finitas tem como principal vantagem a sua simplicidade que resulta de traduzir directamente para diferenças os diversos termos das equações diferenciais. A aplicação deste método a geometrias complexas é no entanto dificultada pela necessidade de efectuar uma transformação das equações para um sistema de coordenadas que se adapte à geometria em análise.

Os métodos dos resíduos ponderados, e particularmente o método dos elementos finitos, não apresentam esta dificuldade uma vez que podem ser aplicados em malhas não estruturadas compostas geralmente por elementos triangulares e tetraédricos. Para além desta vantagem a solução produzida por estes métodos é conhecida em todo o domínio e não em pontos discretos como acontece no método das diferenças finitas. O método dos elementos finitos obriga no entanto à solução de sistemas de equações algébricas relativamente dispendiosos do ponto de vista computacional. Este tipo de método apresenta também dificuldades na implementação do termo convectivo devido à simetria normalmente adoptada para as funções de forma.

O método dos volumes finitos foi analisado em mais detalhe tendo-se visto que possui algumas das vantagens dos métodos anteriores. A geometria é bem representada uma vez que o método permite a utilização de malhas estruturadas e não estruturadas com células de qualquer tipo. As equações são resolvidas na sua forma integral, podendo-se identificar claramente as contribuições dos diversos fenómenos físicos. Não é necessário efectuar transformação de coordenadas pois essas equações são resolvidas no espaço real. O sistema de equações algébricas resultante no caso de malha estruturada

é do tipo tridiagonal ou pentadiagonal sendo pouco exigente do ponto de vista computacional. Como as equações são resolvidas na sua forma integral a propriedade conservativa do método é assegurada de uma forma natural. É também possível a existência de descontinuidades no interior das células, o que se torna particularmente útil na simulação de situações de choque como acontece no caso do salto hidráulico. Este método não permite no entanto soluções analíticas contínuas em todo o domínio e o esforço computacional associado ao cálculo dos parâmetros geométricos das células pode-se tornar excessivo se não se restringir alguns dos graus de liberdade dos seus vértices. Este método foi analisado em detalhe para os diversos termos das equações do modelo, como forma de introduzir a discretização efectuada no capítulo seguinte.

4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo utilizam-se os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores, interligando-os de forma a construir o esquema numérico do modelo. As equações do movimento com a hipótese hidrostática deduzidas no capítulo 1 são discretizadas pelo método do volume finito delineado no capítulo 3. Usa-se para isso uma malha descentrada do tipo C e uma coordenada vertical genérica com a possibilidade de divisão em subdomínios como descrito no capítulo 2. Analisa-se também neste capítulo o processo de cálculo das grandezas geométricas necessárias à aplicação do método do volume finito e a forma da discretização temporal adoptada. Obtém-se como resultado o conjunto das equações algébricas do modelo (Martins et. *al.*, 1998), (Martins et. *al.*, 1999).

4.1 Cálculo da geometria

A aplicação do método do volume finito obriga ao conhecimento do volume e das áreas das faces das células em cada instante de tempo. Considerando uma célula hexaédrica com uma forma genérica como representado na figura 3.1 os pontos que formam cada face não são necessariamente coplanares, não definindo por isso univocamente uma superfície. Relativamente à aplicação do método dos volumes finitos várias formas de calcular uma superfície equivalente têm sido propostas (Vinokur, 1989), (Davies e Salmond, 1985). Duas formas possíveis são definidas, para a face ABCD, pelos produtos externos:

$$A_{ABCD} \vec{n} = (\vec{x}_D - \vec{x}_B) \times (\vec{x}_C - \vec{x}_A) \quad 4.1$$

e

$$A_{ABCD} \vec{n} = \left(\frac{\vec{x}_C + \vec{x}_D}{2} - \frac{\vec{x}_A + \vec{x}_B}{2} \right) \times \left(\frac{\vec{x}_B + \vec{x}_C}{2} - \frac{\vec{x}_A + \vec{x}_D}{2} \right) \quad 4.2$$

onde \vec{x}_i é o vector posição do vértice i . A segunda equação utiliza a propriedade de os quatro pontos médios das arestas de um quadrilátero serem coplanares.

Desta forma a superfície tem um suporte físico com pelo menos quatro pontos pertencentes à célula mas o número de operações necessárias é superior.

Para a célula adoptada no modelo os pontos que definem as faces verticais são coplanares e por isso este problema não se coloca para essas faces. Os pontos que definem as faces superior e inferior não se encontram no mesmo plano pois são definidos pela coordenada genérica. No entanto, devido às hipóteses consideradas no capítulo anterior, apenas a componente vertical dos fluxos por essas faces necessita de ser calculado. Esses fluxos dependem apenas da projecção das faces no plano horizontal não sendo por isso necessário o cálculo da sua área. As áreas das seis faces de cada célula são por isso calculadas em cada iteração usando apenas a expressão da área de um trapézio plano. O volume da célula não fica no entanto definido univocamente.

O volume de uma célula hexaédrica genérica pode ser determinado por decomposição desta em formas geométricas regulares como pirâmides ou prismas e usando definições das faces semelhantes às das equações 4.1 e 4.2. Devido às particularidades da célula do modelo optou-se por uma decomposição em quatro prismas triangulares definidos pelas faces verticais e partilhando uma aresta comum PQ que é obtida por médias aos vértices das faces superior e inferior.

A figura 4.1 representa essa decomposição e a nomenclatura utilizada neste capítulo para as grandezas geométricas.

Esta célula é utilizada para o cálculo das propriedades ρ , S , T e para a definição da viscosidade horizontal. A viscosidade vertical é definida numa célula centrada no ponto P. As células para o cálculo das velocidades u_1 , u_2 e u_3 encontram-se descentradas de forma que as áreas A_u , A_v e o ponto Q passam pelos seus centros respectivamente. Os índices i , j e k da localização espacial das células coincidem com as direcções x_2 , x_1 e x_3 respectivamente.

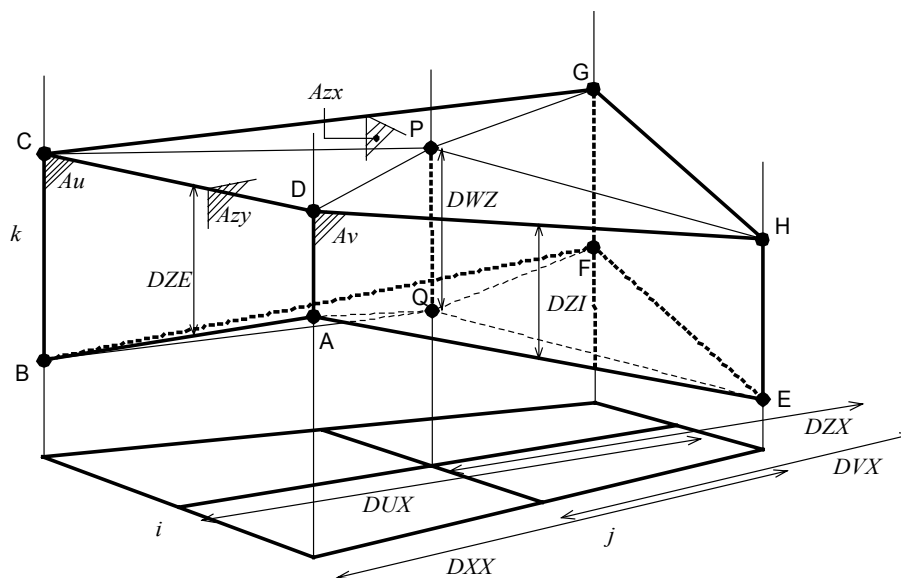


Figura 4.1: Geometria e nomenclatura da célula usada no modelo.

Os passos espaciais horizontais são definidos de forma que para cada célula DUX pode ser diferente de DXX e, para a direcção x_2 , DVY pode ser diferente de DYY . As células não ficam assim limitadas a ser rectangulares na sua projecção horizontal, podendo ser quadrangulares com qualquer forma. Do ponto de vista geométrico as variáveis são suficientes para implementar uma coordenada curvilínea genérica no plano horizontal. No entanto, as equações de discretização consideram que os fluxos pelas faces verticais são perpendiculares a estas. A liberdade na geometria da malha horizontal fica por isso limitada aos casos de coordenada cartesiana e coordenadas geográficas, sendo neste último caso calculadas as componentes da velocidade nas direcções dessas coordenadas.

4.2 Discretização temporal

A discretização temporal utilizada, e mais especificamente a sua natureza implícita ou explícita condicionam a estabilidade do método, traduzindo-se isso por uma restrição no passo temporal.

A utilização de métodos completamente explícitos introduz restrições devidas aos diferentes termos das equações. Para o caso de uma formulação 1D com

discretização progressiva no tempo e centrada no espaço, excepto para o termo convectivo, discretizado por um esquema "upwind" as restrições são:

Devido à estabilidade dos termos convectivo e de pressão:

$$(u_1 + \sqrt{2gH})\Delta t/\Delta x \leq 1 \quad 4.3$$

como indicado na secção 3.2. Devido ao termo de difusão:

$$A_i \Delta t/\Delta x_i^2 \leq 1/2 \quad i = 1,2,3 \quad 4.4$$

e devido ao termo de Coriolis (Santos, 1995):

$$f \Delta t/2 \leq 1 \quad 4.5$$

Para o caso das equações tridimensionais, sem supressão do modo externo, os termos que mais limitam a estabilidade são o de pressão barotrópica e o do transporte vertical. O termo de pressão barotrópica é limitativo devido à elevada celeridade das ondas de superfície, produzindo uma restrição semelhante à da equação 4.3. O transporte vertical é limitativo devido ao pequeno passo espacial na direcção vertical. Nas secções seguintes são calculadas ordens de grandeza da estabilidade de cada termo para o caso de escoamento de mesoescala.

A utilização de um esquema completamente implícito deveria eliminar estas restrições, produzindo um esquema incondicionavelmente estável. Isto no entanto só é válido para as equações simplificadas para as quais a análise de estabilidade foi efectuada. O sistema completo de equações com todos os termos não lineares e a dependência das equações de transporte para a densidade não pode ser analisada quanto à estabilidade, não existindo assim garantia de estabilidade. De qualquer forma os esquemas completamente implícitos possuem sempre restrições ao passo temporal devidas à precisão. Estas discretizações completamente implícitas produzem sistemas de equações muito dispendiosas do ponto de vista computacional, anulando em parte a vantagem de um maior passo temporal.

Neste modelo optou-se por uma discretização semi-implícita do tipo ADI "Alternate Direction Implicit" (Neves, 1985). Nesta formulação a equação para uma das componentes horizontais da quantidade de movimento é calculada com o termo barotrópico implícito sendo a outra direcção calculada explicitamente. Na iteração seguinte as direcções calculadas implicitamente e explicitamente invertem-se. Esta metodologia é originária dos modelos bidimensionais integrados na profundidade. Devido à aproximação hidrostática, o termo barotrópico no caso tridimensional é idêntico ao do caso bidimensional. Por esse motivo a discretização temporal mais indicada para resolver as limitações de estabilidade associadas a esse termo é idêntica à do caso bidimensional. Os termos de transporte vertical são também calculados de forma implícita. O sistema de equações resultante é do tipo tridiagonal, sendo resolvido de forma eficiente pelo algoritmo de Thomas.

No modelo são implementados dois tipos de discretização: O esquema S21 (Abbott et al., 1973) e o esquema de Leendertse (Leendertse, 1967). O esquema S21 é um esquema de 4 equações algébricas, duas para cada meio passo de tempo. No primeiro meio passo de tempo calcula-se a elevação e uma das componentes da velocidade (quantidade de movimento) de forma implícita. Para a outra componente utiliza-se o valor da iteração anterior. No segundo meio passo de tempo calcula-se novamente a elevação e a outra componente da velocidade de forma implícita. A velocidade vertical é recalculada em todos os meios passos de tempo em função da nova elevação. A figura 4.2 representa esquematicamente o processo de cálculo.

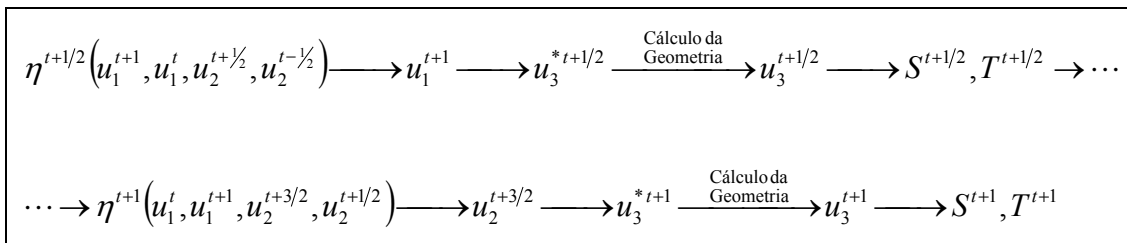


Figura 4.2: Discretização do esquema de quatro equações S21.

O cálculo da salinidade e da temperatura encontram-se também indicados na figura.

O esquema de Leendertse é um esquema de 6 equações algébricas, três para cada meio passo de tempo. Neste esquema a componente da velocidade na direcção explícita é calculada também em cada meio passo de tempo antes do cálculo da elevação. A figura 4.3 representa a sucessão dos cálculos para este esquema.

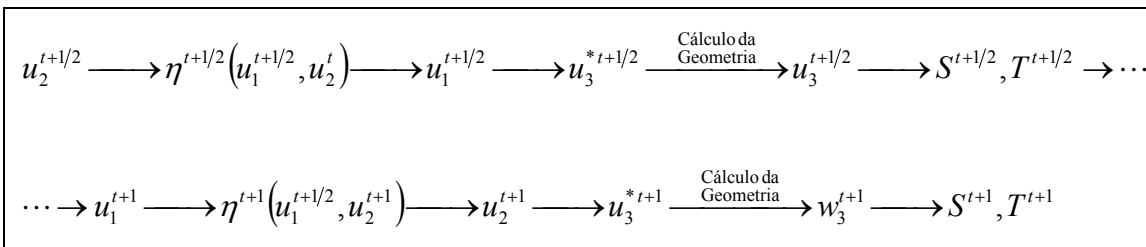


Figura 4.3: Discretização do esquema Leendertse de seis equações.

Como se calculam as duas componentes da velocidade em cada meio passo de tempo as condições fronteira de descobertura são actualizadas com maior frequência, melhorando o comportamento do modelo em regiões intertidais. As menores necessidades computacionais do esquema S21 favorece a sua utilização para águas mais profundas onde a restrição do número de Courant é maior e as zonas de descobertura são menos frequentes. Em ambos os métodos os cálculos são centrados a meio do intervalo de tempo tendo por isso os resultados precisão temporal de segunda ordem.

A discretização das equações pelos dois esquemas é descrita nos capítulos seguintes.

4.3 Quantidade de movimento

A equação de transporte de quantidade de movimento que é expressa na sua forma diferencial pela equação 1.63 é discretizada pelo método dos volumes finitos usando a equação 3.31 com $\alpha = \rho U_1$ e $fp = \rho f U_2$ para o caso da

componente na direcção e_1 . A discretização temporal é efectuada por diferenças progressivas ficando, para o caso da discretização S21:

$$\frac{\rho_0 V u_{ijk}^n (U_{1ijk}^{n+1} - U_{1ijk}^n)}{\Delta t} + \sum_{m=1}^{N_{\text{faces}}} \vec{F}_m \cdot \vec{n} S_m = \rho_0 f u_{ijk} V u_{ijk}^n \bar{U}_{2ijk}^n \quad 4.6$$

onde $V u_{ijk}^n$ é o volume da célula de cálculo de U_{1ijk} e $f u_{ijk}$ é o valor do parâmetro de Coriolis para essa célula. A velocidade \bar{U}_{2ijk}^n é o valor médio da componente e_2 do campo de velocidades na célula U_{1ijk} e é calculada por:

$$\bar{U}_{2ijk}^n = \frac{\frac{DXX_{i+1j} U_{2_{i+1j-1k}}^n + DXX_{i+1j-1} U_{2_{i+1jk}}^n}{DXX_{i+1j} + DXX_{i+1j-1}} + \frac{DXX_{ij} U_{2_{ij-1k}}^n + DXX_{ij-1} U_{2_{ijk}}^n}{DXX_{ij} + DXX_{ij-1}}}{2} \quad 4.7$$

Esta operação de média é a responsável pelo mau comportamento da malha C de Arakawa em situações de resolução reduzida como se viu na secção 2.1.1.2. O termo de Coriolis é discretizado de forma explícita pois a restrição imposta pela equação 4.5 não é crítica em escoamentos costeiros, mesmo para latitudes elevadas. A título de exemplo para $f=1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ que corresponde a uma latitude de 43° a restrição ao passo temporal é $\Delta t < 20000 \text{ s} \approx 5\text{h}30\text{m}$ que é muito superior aos passos de tempo usados nestes domínios.

Os termos \vec{F}_m representam os fluxos convectivos de quantidade de movimento e as forças de superfície aplicadas às faces da célula sendo analisados em seguida. Nas secções seguintes toma-se como referência o esquema S21. Para o esquema de 6 equações as equações são idênticas encontrando-se os índices temporais desfasados de meio passo de tempo.

4.3.1 Fluxo convectivo

Para que o método transporte a quantidade de movimento de forma conservativa é importante que os caudais utilizados tenham divergência nula.

Utilizam-se por isso em todos os transportes convectivos os fluxos utilizados no último cálculo da elevação e da velocidade vertical. Para o cálculo de U_1^{n+1} usam-se assim os caudais do cálculo de η^n que são:

$$F_{xz}^{n-1/2} = \frac{U_1^n Au^{n-1} + U_1^{n-1} Au^{n-2}}{2} \quad 4.8$$

$$F_{yz}^n = \frac{U_2^{n+1/2} Av^{n-1/2} + U_2^{n-1/2} Av^{n-3/2}}{2} \quad 4.9$$

Para a célula de cálculo de U_1 obtém-se os fluxos:

$$F_{xu}_{ijk}^{n-1/2} = \frac{F_{xz}_{ijk}^{n-1/2} + F_{xz}_{ij-1k}^{n-1/2}}{2} \quad 4.10$$

$$F_{yu}_{ijk}^{n-1/2} = \frac{DXX_{ij-1k} F_{yz}_{ijk}^n + DXX_{ijk} F_{yz}_{ij-1k}^n}{DXX_{ij-1k} + DXX_{ijk}} \quad 4.11$$

Os fluxos convectivos devem ser calculados em todas as faces da célula por:

$$\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}c_m \cdot \vec{n}S_m = (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ij-1/2k}^n + (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ij+1/2k}^n + (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{i-1/2jk}^n + (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{i+1/2jk}^n + (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ijk-1/2}^n + (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ijk+1/2}^n \quad 4.12$$

onde os índices espaciais dos fluxos convectivos são relativos à célula U_{1ijk} .

Os fluxos nas direcções horizontais são dados pela equação 3.34. Para a direcção e_1 fica:

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ij-1/2k}^n = \rho_0 \left[\gamma \left(\frac{F_{xu}_{ijk}^{n-1/2} + |F_{xu}_{ijk}^{n-1/2}|}{2} U_{1ij-1k}^n + \frac{F_{xu}_{ijk}^{n-1/2} - |F_{xu}_{ijk}^{n-1/2}|}{2} U_{1ijk}^n \right) + \right. \\ \left. + (1-\gamma) \frac{U_{1ijk}^n + U_{1ij-1k}^n}{2} \right] F_{xu}_{ijk}^{n-1/2} \quad 4.13 \end{aligned}$$

Para a direcção e_2 tem-se de igual forma:

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{i-\frac{1}{2},jk}^n = \rho_0 \left[\gamma \left(\frac{Fyu_{ijk}^n + |Fyu_{ijk}^n|}{2} U_{i-1,jk}^n + \frac{Fyu_{ijk}^n - |Fyu_{ijk}^n|}{2} U_{ijk}^n \right) + \right. \\ \left. + (1-\gamma) \frac{DYY_{ij} U_{i-1,jk}^n + DYY_{i-1,j} U_{ijk}^n}{DYY_{ij} + DYY_{i-1,j}} \right] Fyu_{ijk}^n \end{aligned} \quad 4.14$$

Onde γ representa um factor de ponderação entre "upwind" e diferenças centrais. Para a direcção vertical os fluxos convectivos são discretizados usando a equação 3.41 e considerando os fluxos Fzu que atravessam as faces superior e inferior:

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ijk-\frac{1}{2}}^n = \rho_0 \left[\gamma \left(\frac{Fzu_{ijk}^n + |Fzu_{ijk}^n|}{2} U_{ijk-1}^n + \frac{Fzu_{ijk}^n - |Fzu_{ijk}^n|}{2} U_{ijk}^n \right) + \right. \\ \left. + (1-\gamma) \frac{DZE_{ijk} U_{ijk-1}^n + DZE_{ijk-1} U_{ijk}^n}{DZE_{ijk} + DZE_{ijk-1}} \right] Fxu_{ijk}^n \end{aligned} \quad 4.15$$

Os fluxos convectivos horizontais são discretizados de forma explícita pois a velocidade horizontal característica para escoamentos de mesoescala é da ordem de 1 m/s, fazendo com que a restrição ao número de Courant baseado na velocidade não seja crítica. Por exemplo para profundidades superiores a 10 cm as ondas de superfície terão uma velocidade superior a essa e por conseguinte a restrição ao passo de tempo é devida ao termo de pressão barotrópica e não ao termo convectivo. Para malhas que permitem a redução de espessura das camadas a restrição imposta pelo termo convectivo vertical pode-se tornar activa. Estão nessa situação por exemplo as regiões de pequena profundidade quando se usa coordenada sigma. Nesses casos duas abordagens são possíveis: Desprezar o termo convectivo vertical nessas regiões ou implementar este termo de forma implícita. No modelo optou-se pela primeira metodologia pois o escoamento nessas regiões dá-se essencialmente na direcção horizontal, possuindo por isso a convecção vertical uma importância reduzida.

4.3.2 Pressão barotrópica

O fluxo de quantidade de movimento Fbt associado à acção da força de pressão barotrópica é dado pela equação 3.51. Como se viu na secção anterior este termo deve ser discretizado de forma implícita pois a restrição ao passo temporal imposta pelo número de Courant baseado na velocidade de propagação das ondas de superfície é muito condicionante. Para a célula U_{ijk} tem-se assim:

$$-\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}bt_m \cdot \vec{n}S_m = \left[\left(P_{atm_{j-1}}^{n+1} - P_{atm_j}^{n+1} \right) + \rho_0 g \left(\eta_{ij-1}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2} \right) \right] Au_{ijk}^n \quad 4.16$$

onde se usou o facto de a área $S_{PP'Q'Q}$ coincidir com a área Au .

A discretização implícita faz com que as equações de momento, quando substituídas na equação de cálculo da superfície livre, produzam um sistema de equações tri-diagonal como descrito na secção 4.3.7. Para o cálculo das velocidades no entanto, os valores da elevação já são conhecidos pois são calculados antes destas como indicado nas figuras 4.2 e 4.3. Este termo pode assim ser implementado no cálculo da velocidade como explícito apesar de se tratar de um termo implícito.

4.3.3 Pressão baroclínica

A força de pressão baroclínica, considerando as aproximações da secção 3.4.3, produz um fluxo de quantidade de movimento através das faces da célula U_{ijk} dado pela equação 3.59:

$$-\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}bc_m \cdot \vec{n}S_m = g \left\{ \left[\sum_{l=k+1}^{kmax} \left(\rho'_{ij-1l}{}^n DWZ_{ij-1l} \right) + \rho'_{ij-1k}{}^n \Delta \hat{x}_{3_{ij-1k}}^n \right] - \left[\sum_{l=k+1}^{kmax} \left(\rho'_{ijl}{}^n DWZ_{ijl} \right) + \rho'_{ijk}{}^n \Delta \hat{x}_{3_{ijk}}^n \right] \right\} Au_{ijk}^n \quad 4.17$$

onde $\Delta\hat{x}_{3_{ijk}}$ é a distância vertical medida da aresta superior da célula ao ponto de cálculo da velocidade.

A discretização deste termo é efectuada de forma explícita pois a velocidade de propagação dos modos internos é muito inferior à velocidade de propagação do modo barotrópico. A restrição no passo de tempo associada ao número de Courant não é por isso crítica quando comparada com a do modo barotrópico, como se pode ver da análise dimensional efectuada na secção 1.3.2.

4.3.4 Fluxos difusivos horizontais

Os fluxos difusivos horizontais são calculados em todas as faces verticais da célula, tendo em consideração que a direcção da normal de cada face coincide com a direcção do fluxo:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{m=1}^{N_{\text{faces}_h}} \vec{Fdh}_m \cdot \vec{n} S_m = & \left(Fdh_{ij-\frac{1}{2}k}^n A_{zx_{ij-1k}}^n - Fdh_{ij+\frac{1}{2}k}^n A_{zx_{ijk}}^n \right) + \\
 & \left(Fdh_{i-\frac{1}{2}jk}^n \frac{Av_{ijk}^n + Av_{ij-1k}^n}{2} - Fdh_{i+\frac{1}{2}jk}^n \frac{Av_{i+1jk}^n + Av_{i+1j-1k}^n}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Cada fluxo Fdh é calculado usando a discretização central da equação 3.40. Para a direcção e_1 fica (ver figura 4.1):

$$Fdh_{ij-\frac{1}{2}k}^n = -\rho_0 A_{h_{ij-1k}}^n \frac{U_{1_{ijk}}^n - U_{1_{ij-1k}}^n}{DUX_{ij-1}} \tag{4.19}$$

e para a direcção e_2 tem-se:

$$Fdh_{i-\frac{1}{2}jk}^n = -\rho_0 A_{h_{i-1/2j-1/2k}}^n \frac{U_{1_{ijk}}^n - U_{1_{i-1jk}}^n}{(DYY_{ij} + DYY_{i-1j})/2} \tag{4.20}$$

onde

$$A_{h_{i-1/2,j-1/2k}}^n = \frac{DYY_{i-1,j} \frac{DUX_{ij} A_{h_{ij-1k}}^n + DUX_{ij-1} A_{h_{ijk}}^n}{DUX_{ij} + DUX_{ij-1}} + DYY_{ij} \frac{DUX_{i-1,j} A_{h_{i-1,j-1k}}^n + DUX_{i-1,j-1} A_{h_{i-1,jk}}^n}{DUX_{i-1,j} + DUX_{i-1,j-1}}}{DYY_{i-1,j} + DYY_{ij}} \quad 4.21$$

é a viscosidade turbulenta na face $i-1/2jk$ da célula U_{1ijk} .

A discretização deste termo é explícita pois a restrição imposta ao passo temporal pelo número de difusão horizontal não é crítica. Para os valores característicos em estuários: $A_h = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ e $\Delta x = 100 \text{ m}$ o número de difusão dado pela equação 4.4 limita o passo temporal a $\Delta t < 250 \text{ s}$ o que é pouco limitativo. Em termos comparativos, a restrição do termo barotrópico é superior a esta para profundidades superiores a 1,6 cm.

4.3.5 Difusão vertical

O termo de difusão vertical deve ser discretizado de forma implícita pois a restrição que impõe ao passo temporal é da mesma ordem de grandeza da imposta pelo termo barotrópico. Considerando por exemplo um domínio estuarino com os seguintes valores característicos:

$$H = 10 \text{ m} \quad ; \quad \Delta x_3 = 1 \text{ m} \quad ; \quad \Delta x_h = 100 \text{ m} \quad ; \quad A_v = 0,05 \text{ m}^2/\text{s}$$

as restrições ao passo temporal impostas pelo termo barotrópico e pelo termo difusivo vertical são respectivamente:

$$\frac{\Delta t \sqrt{gH}}{\Delta x_h} < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t < 10 \text{ s} \quad 4.22$$

e

$$\frac{A_v \Delta t}{\Delta x_3^2} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t < 10 \text{ s} \quad 4.23$$

Os termos devem por isso ser ambos discretizados de forma implícita.

Os fluxos difusivos são calculados nas faces superior e inferior da célula considerando as aproximações da secção 3.4.2:

$$-\sum_{m=1}^{N_{faces}} \vec{F}dv_m \cdot \vec{n}S_m = (Fdv_{ijk-\frac{1}{2}}^{n+1} - Fdv_{ijk+\frac{1}{2}}^{n+1})Ah_{ij-\frac{1}{2}}^n \quad 4.24$$

onde $Ah_{ij-\frac{1}{2}}^n = (Ah_{ij-1}^n + Ah_{ij}^n)/2$. Os valores de Fdv são dados pela equação 3.42:

$$Fdv_{ijk-\frac{1}{2}}^{n+1} = -\rho_0 A_{v_{ij-1/2k-1}}^n \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk-1}^{n+1}}{DUZ_{ijk-1}^n} \quad 4.25$$

onde $A_{v_{ij-1/2k-1}}^n = (DUX_{ij} A_{v_{ij-1k-1}}^n + DUX_{ij-1} A_{v_{ijk-1}}^n) / (DUX_{ij} + DUX_{ij-1})$ é a viscosidade vertical na face superior da célula e $DUZ_{ijk}^n = (DZE_{ijk+1}^n + DZE_{ijk}^n) / 2$.

4.3.6 Equação resultante

A forma discretizada da equação de transporte de quantidade de movimento obtém-se, substituindo as expressões para os fluxos deduzidas nas secções anteriores na equação 4.6. Agrupando os termos explícitos num termo comum

X_{ijk}^n tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n}{\Delta t} = & \frac{1}{Vu_{ijk}^n} \left[\left(\frac{p_{amij-1}^{t+1} - p_{amij}^{t+1}}{\rho_0} + g(\eta_{ij-1}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2}) \right) \cdot Au_{ijk}^n + \right. \\ & \left. + \left(A_{v_{ij-1/2k}}^n \frac{U_{ijk+1}^{n+1} - U_{ijk}^{n+1}}{DUZ_{ijk}^n} - A_{v_{ij-1/2k-1}}^n \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk-1}^{n+1}}{DUZ_{ijk-1}^n} \right) \cdot Ah_{ij-\frac{1}{2}} + X_{ijk}^n \right] \quad 4.26 \end{aligned}$$

ou, colocando as velocidades no instante $n+1$ em evidência:

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{Vu_{ijk}^n} \frac{A_{v_{ij-\frac{1}{2}k-1}}^n}{DUZ_{ijk-1}^n} \right) U_{1_{ijk-1}}^{n+1} + \left[1 + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{Vu_{ijk}^n} \left(\frac{A_{v_{ij-\frac{1}{2}k-1}}^n}{DUZ_{ijk-1}^n} + \frac{A_{v_{ij-\frac{1}{2}k}}^n}{DUZ_{ijk}^n} \right) \right] U_{1_{ijk}}^{n+1} \\
 & + \left(-\frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{Vu_{ijk}^n} \frac{A_{v_{ij-\frac{1}{2}k}}^n}{DUZ_{ijk}^n} \right) U_{1_{ijk+1}}^{n+1} = \tag{4.27} \\
 & U_{1_{ijk}}^n + \left[\frac{\Delta t}{Vu_{ijk}^n} \left(\left[\frac{p^{t+1} - p^{t+1}}{\rho_0} + g(\eta_{ij-1}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2}) \right] Au_{ijk}^n + X_{ijk}^n \right) \right]
 \end{aligned}$$

Esta equação tem a forma:

$$Du_{1_{ijk}} \cdot U_{1_{ijk-1}}^{n+1} + Eu_{1_{ijk}} \cdot U_{1_{ijk}}^{n+1} + Fu_{1_{ijk}} \cdot U_{1_{ijk+1}}^{n+1} = Tlu_{1_{ijk}} \tag{4.28}$$

com os coeficientes Du , Eu , Fu e Tlu dados pela expressão anterior. A aplicação desta expressão a todos os pontos do domínio produz um sistema tri-diagonal que é resolvido de forma eficiente pelo método de Thomas.

Para a componente e_2 da quantidade de movimento o cálculo é em todo semelhante obtendo-se, para o caso do esquema S21:

$$Du_{2_{ijk}} \cdot U_{2_{ijk-1}}^{n+\frac{3}{2}} + Eu_{2_{ijk}} \cdot U_{2_{ijk}}^{n+\frac{3}{2}} + Fu_{2_{ijk}} \cdot U_{2_{ijk+1}}^{n+\frac{3}{2}} = Tlu_{2_{ijk}} \tag{4.29}$$

com:

$$Du_{2_{ijk}} = -\frac{\Delta t Ah_{i-\frac{1}{2}j}}{Vv_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}} \frac{A_{v_{i-\frac{1}{2}jk-1}}^{n+\frac{1}{2}}}{DVZ_{ijk-1}^{n+\frac{1}{2}}} \tag{4.30}$$

$$Eu_{2_{ijk}} = \left[1 + \frac{\Delta t Ah_{i-\frac{1}{2}j}}{Vv_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}} \left(\frac{A_{v_{i-\frac{1}{2}jk-1}}^{n+\frac{1}{2}}}{DVZ_{ijk-1}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{A_{v_{i-\frac{1}{2}jk}}^{n+\frac{1}{2}}}{DVZ_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}} \right) \right] \tag{4.31}$$

$$Fu_{2_{ijk}} = -\frac{\Delta t Ah_{i-\frac{1}{2}j}}{Vv_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}} \frac{A_{v_{i-\frac{1}{2}jk}}^{n+\frac{1}{2}}}{DVZ_{ijk}^{n+\frac{1}{2}}} \tag{4.32}$$

$$Ttu_{2_{ijk}} = U_{2_{ijk}}^{n+1/2} + \left[\frac{\Delta t}{Vv_{ijk}^{n+1/2}} \left(\left[\frac{p_{atm_{i-1j}}^{n+3/2} - p_{atm_{ij}}^{n+3/2}}{\rho_0} + g(\eta_{i-1j}^{n+1} - \eta_{ij}^{n+1}) \right] Av_{ijk}^{n+1/2} + Y_{ijk}^{n+1/2} \right) \right] \quad 4.33$$

O termo barotrópico faz parte do termo independente pois já foi calculado nesse passo de tempo.

4.3.7 Tensão de corte na superfície e no fundo

Na célula da superfície o fluxo difusivo pela face superior deve ser entendido como uma tensão de corte devida ao vento. Esta tensão é normalmente imposta directamente pois o seu cálculo através da velocidade do vento e da rugosidade da superfície depende de processos que não são considerados no modelo. Isto equivale a fazer na equação 4.26 para a camada $k=kmax$:

$$A_{v_{ij-1/2k}}^n \frac{U_{1_{ijk+1}}^{n+1} - U_{1_{ijk}}^{n+1}}{DUZ_{ijk}^n} = \tau u_{ij}^{vento} \quad 4.34$$

e os coeficientes ficam:

$$Du_{1_{ijkmax}} = - \frac{\Delta t Ah_{ij-1/2}}{Vu_{ijkmax}^n} \frac{A_{v_{ij-1/2kmax-1}}^n}{DUZ_{ijkmax-1}^n} \quad 4.35$$

$$Eu_{1_{ijkmax}} = \left[1 + \frac{\Delta t Ah_{ij-1/2}}{Vu_{ijkmax}^n} \frac{A_{v_{ij-1/2kmax-1}}^n}{DUZ_{ijkmax-1}^n} \right] \quad 4.36$$

$$Fu_{2_{ijk}} = 0 \quad 4.37$$

$$Ttu_{1_{ijk}} = U_{1_{ijk}}^n + \left[\frac{\Delta t}{Vu_{ijk}^n} \left(\left[\frac{p_{atm_{i-1j}}^{n+1} - p_{atm_{ij}}^{n+1}}{\rho_0} + g(\eta_{i-1j}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2}) \right] Au_{ijk}^n + \frac{\tau u_{ij}^{vento}}{\rho_0} Ah_{ij-1/2} + X_{ijk}^n \right) \right] \quad 4.38$$

O fluxo difusivo pela face inferior da célula do fundo deve também ser entendido como uma tensão de corte no fundo. A tensão de corte no fundo é calculada por

uma lei quadrática em função da velocidade da célula do fundo e incluída nas equações. Este termo pode ser uma fonte de instabilidade se não for discretizado de forma conveniente. Rescrevendo a equação 4.26 para a camada $k=k_{fundo}$ como:

$$U_{1_{ijkfundo}}^{n+1} = U_{1_{ijkfundo}}^n + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{\rho_0 V u_{ijkfundo}^n} (\tau u_{ijkfundo+1} - \tau u_{ijkfundo}) + X'_{ijkfundo}^n \quad 4.39$$

onde X' representa os restantes termos da equação. Se a tensão de corte no fundo for implementada de forma explícita como:

$$\tau u_{ijkfundo} = \rho_0 C_D |\vec{u}_{ijkfundo}| U_{1_{ijkfundo}}^n \quad 4.40$$

a equação anterior fica:

$$U_{1_{ijkfundo}}^{n+1} = (1 - R) U_{1_{ijkfundo}}^n + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{\rho_0 V u_{ijkfundo}^n} (\tau u_{ijkfundo+1}) + X'_{ijkfundo}^n \quad 4.41$$

onde

$$R = \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}} C_D |\vec{u}_{ijkfundo}|}{V u_{ijkfundo}^n} \quad 4.42$$

é uma grandeza positiva. Para $R > 1$ esta forma não é estável produzindo uma alternância no sinal de U_1 em cada iteração. Se a tensão de corte for discretizada de forma implícita por:

$$\tau u_{ijkfundo} = \rho_0 C_D |\vec{u}_{ijkfundo}| U_{1_{ijkfundo}}^{n+1} \quad 4.43$$

a equação 4.39 fica:

$$U_{1_{ijkfundo}}^{n+1} (1 + R) = U_{1_{ijkfundo}}^n + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{V u_{ijkfundo}^n} (\tau u_{ijkfundo+1}) + X'_{ijkfundo}^n \quad 4.44$$

ou, reordenando os termos:

$$U_{1ijkfundo}^{n+1} = Fx_{ij} \left[U_{1ijkfundo}^n + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}}}{Vu_{ijkfundo}^n} (\tau u_{ijkfundo+1}) + X_{ijkfundo}^{1n} \right] \quad 4.45$$

onde

$$Fx_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t Ah_{ij-\frac{1}{2}} C_D |\bar{u}_{ijkfundo}|}{Vu_{ijkfundo}^n}} \quad 4.46$$

Esta forma possui uma natureza estável. Backhaus (1985) propõe que a tensão na segunda camada seja calculada de forma explícita pois a sua ordem de grandeza é inferior à da tensão de corte no fundo. Existem no entanto várias formas de implementar essa tensão de forma implícita (Santos, 1995).

4.4 Elevação da superfície livre

A elevação da superfície livre é calculada por integração da equação da continuidade em toda a coluna de água, como indicado na equação 1.67. A discretização pelo método dos volumes finitos traduz esta integração por um somatório aos fluxos volúmicos de todas as células da coluna de água. Para a discretização S21 fica, no primeiro meio passo de tempo:

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1/2} - \eta_{ij}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{Ah_{ij}} \left[\frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^n \cdot Au_{ijk}^{n-1})}{2} - \frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1y+1k}^{n+1} \cdot Au_{ij+1k}^n) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1y+1k}^n \cdot Au_{ij+1k}^{n-1})}{2} \right] \quad 4.47$$

$$+ \left[\frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2ijk}^{n+1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-1/2}) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2ijk}^{n-1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-3/2})}{2} - \frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2i+1jk}^{n+1/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n-1/2}) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2i+1jk}^{n-1/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n-3/2})}{2} \right]$$

e no segundo meio passo:

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{Ah_{ij}} \left[\frac{\sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) + \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ijk}^n \cdot Au_{ijk}^{n-1})}{2} - \frac{\sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ij+1k}^{n+1} \cdot Au_{ij+1k}^n) + \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ij+1k}^n \cdot Au_{ij+1k}^{n-1})}{2} \right] \quad 4.48$$

$$+ \left[\frac{\sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2ijk}^{n+3/2} \cdot Av_{ijk}^{n+1/2}) + \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2ijk}^{n+1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-1/2})}{2} - \frac{\sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2i+1jk}^{n+3/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n+1/2}) + \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2i+1jk}^{n+1/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n-1/2})}{2} \right]$$

onde $Ah_{ij} = DUX_{ij} \cdot DVY_{ij}$ é a área projectada no plano horizontal. As médias temporais dos fluxos fazem com que o cálculo seja globalmente centrado em $n+1/2$ no conjunto dos dois meios passos de tempo.

Para a discretização de Leendertse a elevação da superfície livre no primeiro meio passo de tempo é dada por:

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1/2} - \eta_{ij}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{Ah_{ij}} \left[\left\{ \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ijk}^{n+1/2} \cdot Au_{ijk}^n) - \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ij+1k}^{n+1/2} \cdot Au_{ij+1k}^n) \right\} + \right. \quad 4.49$$

$$\left. + \left\{ \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2ijk}^n \cdot Av_{ijk}^{n-1/2}) - \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2i+1jk}^n \cdot Av_{i+1jk}^{n-1/2}) \right\} \right]$$

e no segundo meio passo de tempo é dada por:

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{Ah_{ij}} \left[\left\{ \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ijk}^{n+1/2} \cdot Au_{ijk}^n) - \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{1ij+1k}^{n+1/2} \cdot Au_{ij+1k}^n) \right\} + \right. \quad 4.50$$

$$\left. + \left\{ \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2ijk}^{n+1} \cdot Av_{ijk}^{n+1/2}) - \sum_{k=k\text{fundo}}^{k\text{max}} (U_{2i+1jk}^{n+1} \cdot Av_{i+1jk}^{n+1/2}) \right\} \right]$$

sendo também globalmente centrada em $n+1/2$.

Os fluxos $U_1 \cdot Au$ e $U_2 \cdot Av$ que são implícitos em cada equação devem ser calculados por substituição da equação de momento respectiva. Para o caso da equação 4.47 os únicos fluxos implícitos são os da forma $U_1^{n+1} \cdot Au^n$ que são calculados pela equação 4.26. Efectuando o somatório a toda a coluna de água os termos de difusão vertical cancelam entre camadas adjacentes e a difusão

na face superior da célula da superfície e na face inferior da célula do fundo são calculadas na forma de tensões de corte. Obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) &= \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^n \cdot Au_{ijk}^n) + \\
 + \Delta t \left\{ \left(\frac{p_{atm_{ij-1}}^{n+1} - p_{atm_{ij}}^{n+1}}{\rho_0} \right) + g(\eta_{ij-1}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2}) \right\} &\cdot \sum_{k=kfundo}^{kmax} \frac{(Au_{ijk}^n)^2}{Vu_{ijk}^n} + \\
 + \frac{\Delta t}{\rho_0} \cdot \left\{ \tau_{ij}^{vento} \cdot \frac{Au_{ijkmax}^n}{Vu_{ijkmax}^n} - \tau_{ij}^{fundo} \cdot \frac{Au_{ij1}^n}{Vu_{ij1}^n} \right\} Ah_{ij-1/2} &+ \frac{\Delta t}{\rho_0} \cdot \sum_{k=kfundo}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{Au_{ijk}^n}{Vu_{ijk}^n} \right)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Calculando a tensão de forma implícita fica:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) &= U_{1ijkfundo}^{n+1} \cdot Au_{ijkfundo}^n + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) = \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} (U_{1ijk}^n \cdot Au_{ijk}^n) + \\
 + Fx_{ij} \left(U_{1ijkfundo}^n + \frac{\Delta t \cdot X_{ijkfundo}}{\rho_0 \cdot Vu_{ijkfundo}^n} \right) Au_{ijkfundo}^n &+ \frac{\Delta t}{\rho_0} \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{Au_{ijk}^n}{Vu_{ijk}^n} \right) + \\
 + \Delta t \left\{ \left(\frac{p_{atm_{ij-1}}^{n+1} - p_{atm_{ij}}^{n+1}}{\rho_0} \right) + g(\eta_{ij-1}^{n+1/2} - \eta_{ij}^{n+1/2}) \right\} &\cdot \left[Fx_{ij} \frac{(Au_{ijkfundo}^n)^2}{Vu_{ijkfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ijk}^n)^2}{Vu_{ijk}^n} \right] + \\
 + \frac{\Delta t}{\rho_0} \cdot \left\{ \tau_{ij}^{vento} \cdot \frac{Au_{ijkmax}^n}{Vu_{ijkmax}^n} + \left(Fx_{ij} \frac{Au_{ijkfundo}^n}{Vu_{ijkfundo}^n} - \frac{Au_{ijkfundo+1}^n}{Vu_{ijkfundo+1}^n} \right) \cdot \left(\rho_0 A_v^n \frac{U_{1ijkfundo+1}^n - U_{1ijkfundo}^n}{DUZ_{ijkfundo}^n} \right) \right\} &Ah_{ij-1/2}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

esta expressão é substituída na equação 4.47, juntamente com uma expressão equivalente para a face $ij+1k$. Colocando as elevações em evidência obtém-se uma equação na forma:

$$Dz_{ij} \cdot \eta_{ij-1}^{n+1/2} + Ez_{ij} \cdot \eta_{ij}^{n+1/2} + Fz_{ij} \cdot \eta_{ij+1}^{n+1/2} = Tlz_{ij} \tag{4.53}$$

com os coeficientes:

$$Dz_{ij} = -\frac{\Delta t^2 g}{4Ah_{ij}} \left[Fx_{ij} \frac{(Au_{ijkfundo}^n)^2}{Vu_{ijkfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ijk}^n)^2}{Vu_{ijk}^n} \right] \tag{4.54}$$

$$Ez_{ij} = 1 + \frac{\Delta t^2 g}{4Ah_{ij}} \left[Fx_{ij} \left\{ \frac{(Au_{ijkfundo}^n)^2}{Vu_{ijkfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ijk}^n)^2}{Vu_{ijk}^n} \right\} + \right. \\ \left. + Fx_{ij+1} \left\{ \frac{(Au_{ij+1kfundo}^n)^2}{Vu_{ij+1kfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ij+1k}^n)^2}{Vu_{ij+1k}^n} \right\} \right] \quad 4.55$$

$$Fz_{ij} = -\frac{\Delta t^2 g}{4Ah_{ij}} \left[Fx_{ij+1} \frac{(Au_{ij+1kfundo}^n)^2}{Vu_{ij+1kfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ij+1k}^n)^2}{Vu_{ij+1k}^n} \right] \quad 4.56$$

$$Tlz_{ij} = \eta_{ij}^n + \frac{\Delta t}{4 \cdot Ah_{ij}} \left[\left\langle (1 + Fx_{ij}) U_{1ijkfundo}^n Au_{ijkfundo}^n + 2 \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} (U_{1ijk}^n Au_{ijk}^n) + \frac{\Delta t}{\rho_0} \left\{ Fx_{ij} X_{ijkfundo} \frac{Au_{ijkfundo}^n}{Vu_{ijkfundo}^n} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \left(X_{ijk} \frac{Au_{ijk}^n}{Vu_{ijk}^n} \right) \right\} + \Delta t \frac{p_{atm,ij-1}^{t+1/2} - p_{atm,ij}^{t+1/2}}{\rho_0} \left[Fx_{ij} \frac{(Au_{ijkfundo}^n)^2}{Vu_{ijkfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ijk}^n)^2}{Vu_{ijk}^n} \right] + \right. \\ \left. \frac{\Delta t}{\rho_0} \cdot \left\{ \tau u_{ij}^{vento} \cdot \frac{Au_{ijkmax}^n}{Vu_{ijkmax}^n} + \left(Fx_{ij} \frac{Au_{ijkfundo}^n}{Vu_{ijkfundo}^n} - \frac{Au_{ijkfundo+1}^n}{Vu_{ijkfundo+1}^n} \right) \cdot \left(\rho_0 A_{v_{ij-\frac{1}{2}kfundo}} \frac{U_{1ijkfundo+1}^n - U_{1ijkfundo}^n}{DUZ_{ijkfundo}^n} \right) \right\} Ah_{ij-\frac{1}{2}} \right] - \\ \left[\left\langle (1 + Fx_{ij+1}) U_{1ij+1kfundo}^n Au_{ij+1kfundo}^n + 2 \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} (U_{1ij+1k}^n Au_{ij+1k}^n) + \frac{\Delta t}{\rho_0} \left\{ Fx_{ij+1} X_{ij+1kfundo} \frac{Au_{ij+1kfundo}^n}{Vu_{ij+1kfundo}^n} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \left(X_{ij+1k} \frac{Au_{ij+1k}^n}{Vu_{ij+1k}^n} \right) \right\} + \Delta t \frac{p_{atm,ij}^{t+1/2} - p_{atm,ij+1}^{t+1/2}}{\rho_0} \left[Fx_{ij+1} \frac{(Au_{ij+1kfundo}^n)^2}{Vu_{ij+1kfundo}^n} + \sum_{k=kfundo+1}^{kmax} \frac{(Au_{ij+1k}^n)^2}{Vu_{ij+1k}^n} \right] + \right. \\ \left. \frac{\Delta t}{\rho_0} \cdot \left\{ \tau u_{ij+1}^{vento} \cdot \frac{Au_{ij+1kmax}^n}{Vu_{ij+1kmax}^n} + \left(Fx_{ij+1} \frac{Au_{ij+1kfundo}^n}{Vu_{ij+1kfundo}^n} - \frac{Au_{ij+1kfundo+1}^n}{Vu_{ij+1kfundo+1}^n} \right) \cdot \left(\rho_0 A_{v_{ij+\frac{1}{2}kfundo}} \frac{U_{1ij+1kfundo+1}^n - U_{1ij+1kfundo}^n}{DUZ_{ij+1kfundo}^n} \right) \right\} Ah_{ij+\frac{1}{2}} \right] + \\ \left. \left\langle \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2ijk}^{n+1/2} \cdot Av_{ijk}^n + U_{2ijk}^{n-1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-1}) \right\rangle - \left\langle \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2i+1,jk}^{n+1/2} \cdot Av_{i+1,jk}^n + U_{2i+1,jk}^{n-1/2} \cdot Av_{i+1,jk}^{n-1}) \right\rangle \right] \quad 4.57$$

A aplicação desta equação a todos os pontos forma um sistema tri-diagonal que é resolvido para o cálculo da elevação. Nesta equação a direcção implícita é a direcção e_1 , sendo os termos da direcção e_2 calculados de forma explícita. Como se trata de um método ADI no meio passo de tempo seguinte a direcção implícita é a direcção e_2 sendo a direcção e_1 calculada de forma explícita.

4.5 Velocidade vertical e redefinição da geometria

A velocidade vertical deve ser calculada utilizando a equação da continuidade, como indicado na equação 1.69. A discretização dessa equação faz com que um valor natural para o limite de integração x_3 seja a coordenada da face superior da célula. Para o caso de coordenada vertical genérica o método de cálculo desta velocidade deve permitir o movimento vertical da malha. Isto equivale a dizer que na equação anterior esse limite não se encontra fixo no tempo, dependendo da variação de volume das células que se encontram por baixo. Com essa escolha, a velocidade calculada é a velocidade relativa à malha, responsável pelo caudal volúmico através dessa face. O cálculo desse caudal volúmico F_{zz} é dado pelas equações 3.36 e 3.37.

No caso de coordenada vertical lagrangeana por exemplo o movimento da malha depende da própria velocidade vertical, devendo o cálculo ser efectuado de forma implícita com acontece nos métodos adaptativos. Neste caso específico o movimento da malha é suficientemente lento para se poder optar por um método explícito. O cálculo do movimento da malha e da velocidade vertical são assim efectuados em conjunto por uma metodologia do tipo previsão correcção com três passos:

- i. Estimativa da velocidade vertical u_3^* , considerando que a malha permanece fixa.
- ii. Movimentação explícita da malha e redefinição da geometria.
- iii. Cálculo do valor final da velocidade vertical u_3 .

Estes passos são analisados nas secções seguintes para o esquema S21 relativamente ao cálculo de $U_{3ijk}^{n+\frac{1}{2}}$.

4.5.1 Estimativa da velocidade vertical

Se a malha permanecesse fixa o caudal volúmico através da face superior da célula ijk seria dado pela equação 3.36 com a variação do volume da célula nulo:

$$U_{3_{ijk+1}}^{*n+1/2} = U_{3_{ijk}}^{*n+1/2} + \frac{(F_x z_{ijk}^{n+1/2} - F_x z_{ij+1k}^{n+1/2}) + (F_y z_{ijk}^n - F_y z_{i+1,jk}^n)}{A h_{ij}} \quad 4.58$$

Para que haja compatibilidade entre o cálculo da elevação e da velocidade vertical os fluxos a usar na expressão anterior devem ser os utilizados no cálculo da elevação. Assim, para o esquema S21 tem-se:

$$F_x z_{ijk}^{n+1/2} = \frac{U_{1_{ijk}}^{n+1} A u_{ijk}^n + U_{1_{ijk}}^n A u_{ijk}^{n-1}}{2} \quad 4.59$$

$$F_y z_{ijk}^n = \frac{U_{2_{ijk}}^{n+1/2} A v_{ijk}^{n-1/2} + U_{2_{ijk}}^{n-1/2} A v_{ijk}^{n-3/2}}{2} \quad 4.60$$

A equação 4.58 é resolvida explicitamente em toda a coluna de água usando a condição fronteira $U_{3_{ijk\text{fundo}}}^{*n+1/2} = 0$ e progredindo o cálculo do fundo para a superfície. A velocidade U_3^* só representa uma velocidade vertical para o caso da malha possuir camadas horizontais. No caso genérico deve ser entendida como o caudal por unidade de área que muda de camada.

4.5.2 Redefinição da geometria

Após o cálculo de u_3^* pode-se movimentar a malha e redefinir a geometria para todos os tipos de malha. Existem dois casos limites para a movimentação da malha: Malha fixa e malha Lagrangeana. Quando a malha é fixa o valor estimado coincide com o valor final não sendo necessários os passos *ii.* e *iii.* da secção 4.5. Na malha Lagrangeana pretende-se que a geometria se adapte ao escoamento de forma que a velocidade vertical seja nula. Usa-se por isso o valor u_3^* para determinar a variação de volume que garante divergência nula:

$$\frac{V_z^{n+1/2} - V_z^n}{A h_{ij} \Delta t / 2} = \frac{(F_x z_{ijk}^{n+1/2} - F_x z_{ij+1k}^{n+1/2}) + (F_y z_{ijk}^n - F_y z_{i+1,jk}^n)}{A h_{ij}} = U_{3_{ijk+1}}^{*n+1/2} - U_{3_{ijk}}^{*n+1/2} \quad 4.61$$

O passo *iii.* não é neste caso necessário, pois a equação anterior garante velocidade vertical nula.

Para coordenada sigma o movimento da malha depende apenas de η não sendo por isso função de u_3^* . Para a coordenada isopícnica, devido à reduzida celeridade do modo interno, a movimentação pode ser efectuada explicitamente usando o campo de densidade do instante n . Não dependendo igualmente de u_3^* . O valor de u_3^* é no entanto calculado para todas as malhas pois a sua diferença representa a divergência horizontal do campo de velocidades, sendo usada no cálculo da velocidade vertical final para todas os tipos de malha. Esse processo é explicado na secção seguinte.

Os vários processos de movimentação da malha acima referidos resultam numa redefinição dos lugares geométricos dos vértices das células no novo instante de tempo. O cálculo da geometria (áreas e volumes das células) é depois efectuado em conjunto, para todos os subdomínios, por um algoritmo único. Este algoritmo é independente do tipo de malha pois as grandezas geométricas dependem apenas das coordenadas dos vértices. Nos subdomínios onde a malha permanece fixa este algoritmo apenas é necessário na inicialização, traduzindo-se por uma considerável economia computacional. Estão nessas circunstâncias os subdomínios com coordenada cartesiana e com coordenada sigma quando situados abaixo do superior.

4.5.3 Velocidade vertical final

A velocidade vertical final é calculada usando novamente a equação 3.36 mas incluindo agora a variação de volume da célula:

$$U_{3_{ijk+1}}^{n+1/2} = U_{3_{ijk}}^{n+1/2} + \frac{(Fxz_{ijk}^{n+1/2} - Fxz_{ij+1k}^{n+1/2}) + (Fyz_{ijk}^n - Fyz_{i+1jk}^n)}{Ah_{ij}} - \frac{Vz_{ijk}^{n+1/2} - Vz_{ijk}^n}{Ah_{ij} \Delta t/2} \quad 4.62$$

Como foi referido na secção anterior a velocidade vertical intermédia pode ser usada no cálculo da velocidade final. Usando a equação 4.58 a expressão anterior fica:

$$U_{3_{jk+1}}^{n+1/2} = U_{3_{jk}}^{n+1/2} + \left(U_{3_{jk+1}}^{*n+1/2} - U_{3_{jk}}^{*n+1/2} \right) - \frac{Vz_{ijk}^{n+1/2} - Vz_{ijk}^n}{Ah_{ij} \Delta t / 2} \quad 4.63$$

Nos subdomínios onde a malha permanece fixa este cálculo não é necessário coincidindo a velocidade vertical intermédia com a velocidade final. Nos subdomínios com malha Lagrangeana este cálculo não é igualmente necessário, sendo a velocidade vertical nula.

De forma a garantir a propriedade conservativa os volumes das células calculados durante a redefinição da geometria devem ser tais que, somados em toda a coluna de água, produzam uma variação de volume igual à provocada pela variação da superfície livre. Com o método do volume finito esta propriedade é sempre satisfeita desde que se utilizem os mesmos fluxos nos dois cálculos. Os erros de arredondamento nas operações de cálculo da geometria são no entanto uma fonte de problemas, principalmente para o transporte da salinidade e da temperatura. Uma forma de resolver esse problema consiste em distribuir o erro por todas as células da coluna de água.

4.5.4 Velocidade vertical real

A velocidade vertical calculada na secção anterior não é na verdade a componente do campo de velocidade na direcção e_3 devendo antes ser interpretada como o fluxo volúmico por unidade de área que atravessa a face inferior da célula. Na figura 4.4 representa-se uma superfície de corrente e a superfície do volume de controlo definida por essa face da célula.

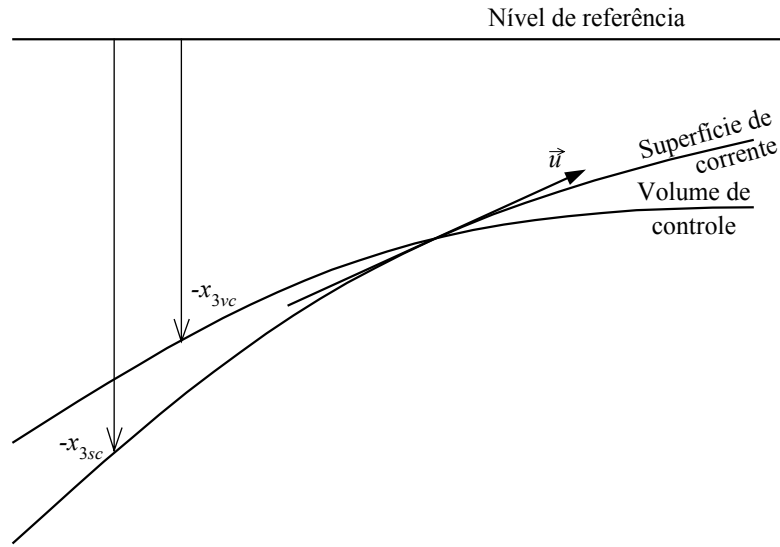


Figura 4.4: Velocidade real através do volume de controle.

O campo de velocidades é paralelo à superfície de corrente sendo a componente vertical da velocidade real dada por:

$$u_3^{real} = \frac{\partial x_{3sc}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial x_{3sc}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial x_{3sc}}{\partial x_2} \quad 4.64$$

A velocidade vertical com que se desloca uma partícula situada sobre a superfície do volume de controle é:

$$u_3^{transporte} = \frac{\partial x_{3vc}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial x_{3vc}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial x_{3vc}}{\partial x_2} \quad 4.65$$

esta é a velocidade de transporte associada ao movimento da malha. A velocidade vertical calculada na secção anterior é uma velocidade relativa à malha, sendo dada pela diferença entre estas duas velocidades.

A velocidade real é assim calculada por:

$$u_3^{real} = u_3 + u_3^{transporte} = u_3 + \frac{\partial x_{3vc}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial x_{3vc}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial x_{3vc}}{\partial x_2} \quad 4.66$$

Denominando a coordenada vertical do ponto P da célula da figura 4.1 por:

$$SZZ_{ijk}^n = -x_{3P_{ijk}}^n \quad 4.67$$

a equação 4.66 pode ser discretizada por:

$$U_{3ijk}^{real^{n+1/2}} = U_{3ijk}^{n+1/2} - \frac{SZZ_{ijk-1}^{n+1/2} - SZZ_{ijk-1}^n}{\Delta t/2} - U_{1_{ij+1/2k-1/2}}^{n+1/2} \frac{SZZ_{ij+1k-1}^{n+1/2} - SZZ_{ij-1k-1}^n}{DZX_{ij-1} + DZX_{ij}} - U_{2_{i+1/2jk-1/2}}^{n+1/2} \frac{SZZ_{i+1jk-1}^{n+1/2} - SZZ_{i-1jk-1}^n}{DZY_{i-1j} + DZY_{ij}} \quad 4.68$$

onde se usou uma discretização progressiva no tempo e centrada no espaço. A equação anterior pode ser resolvida explicitamente no fim de cada meio passo de tempo pois todas as grandezas são conhecidas nesse instante.

A velocidade real não é no entanto necessária para o cálculo da hidrodinâmica, nem para o transporte de propriedades. O seu cálculo é necessário apenas para possibilitar a representação gráfica do campo de velocidades, sendo efectuado unicamente nos instantes de saída de resultados.

4.6 Transporte da salinidade e da temperatura

A salinidade e a temperatura assim como qualquer propriedade conservativa são transportadas de acordo com a equação 1.70 que é discretizada pelo método dos volumes finitos com a equação 3.31. Os fluxos convectivos e difusivos são discretizados de forma semelhante à efectuada para a equação de transporte de quantidade de movimento, sendo aplicados à célula das propriedades. Para o caso da discretização S21 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{V_{z_{ijk}}^{n+1/2} \alpha_{ijk}^{n+1/2} - V_{z_{ijk}}^n \alpha_{ijk}^n}{\Delta t/2} = & -(\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{ij-1/2k}^{n+1/2} - (\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{ij+1/2k}^{n+1/2} - (\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{i-1/2jk}^{n+1/2} - (\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{i+1/2jk}^{n+1/2} - \\ & - (\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{ijk-1/2}^{n+1/2} - (\bar{F}c \cdot \bar{n}S)_{ijk+1/2}^{n+1/2} + \left(A_{h_{ij-1/2k}}^n \frac{\alpha_{ij-1k}^n - \alpha_{ijk}^n}{DZX_{ij-1k}} \cdot Au_{ijk}^n - A_{h_{ij+1/2k}}^n \frac{\alpha_{ijk}^n - \alpha_{ij+1k}^n}{DZX_{ijk}} \cdot Au_{ij+1k}^n \right) + \\ & \left(A_{h_{i-1/2jk}}^n \frac{\alpha_{i-1jk}^n - \alpha_{ijk}^n}{DZY_{i-1jk}} \cdot Av_{ijk}^n - A_{h_{i+1/2jk}}^n \frac{\alpha_{i+1jk}^n - \alpha_{ijk}^n}{DZY_{ijk}} \cdot Av_{i+1jk}^n \right) + \left(A_{v_{ijk-1}}^n \frac{\alpha_{ijk-1}^{n+1/2} - \alpha_{ijk}^{n+1/2}}{DZZ_{ijk-1}^{n+1/2}} - A_{v_{ijk}}^n \frac{\alpha_{ijk}^{n+1/2} - \alpha_{ijk+1}^{n+1/2}}{DZZ_{ijk}^{n+1/2}} \right) Ah_{ij} \end{aligned} \quad 4.69$$

Os fluxos convectivos são discretizados na mesma forma híbrida “upwind”, central usada no transporte de quantidade de movimento. Os caudais volúmicos devem ser os mesmos que se usaram no cálculo de $\eta^{n+1/2}$. Para o primeiro meio passo de tempo da discretização S21 fica:

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ij-\frac{1}{2}k}^{n+1/2} = & \left[\gamma \left(\frac{F_{xz_{ijk}}^{n+1/2} + |F_{xz_{ijk}}^{n+1/2}|}{2} \alpha_{ij-1k}^n + \frac{F_{xz_{ijk}}^{n+1/2} - |F_{xz_{ijk}}^{n+1/2}|}{2} \alpha_{ijk}^n \right) + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \frac{DXU_{ij} \alpha_{ij-1k}^n + DXU_{ij-1} \alpha_{ijk}^n}{DXU_{ij} + DXU_{ij-1}} \right] F_{xz_{ijk}}^{n+1/2} \end{aligned} \quad 4.70$$

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+1/2} = & \left[\gamma \left(\frac{F_{yz_{ijk}}^n + |F_{yz_{ijk}}^n|}{2} \alpha_{i-1jk}^n + \frac{F_{yz_{ijk}}^n - |F_{yz_{ijk}}^n|}{2} \alpha_{ijk}^n \right) + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \frac{DXV_{ij} \alpha_{i-1jk}^n + DXV_{i-1j} \alpha_{ijk}^n}{DXV_{ij} + DXV_{i-1j}} \right] F_{yz_{ijk}}^n \end{aligned} \quad 4.71$$

$$\begin{aligned} (\vec{F}c \cdot \vec{n}S)_{ijk-\frac{1}{2}}^{n+1/2} = & \left[\gamma \left(\frac{F_{zz_{ijk}}^{n+1/2} + |F_{zz_{ijk}}^{n+1/2}|}{2} \alpha_{ijk-1}^n + \frac{F_{zz_{ijk}}^{n+1/2} - |F_{zz_{ijk}}^{n+1/2}|}{2} \alpha_{ijk}^n \right) + \right. \\ & \left. + (1-\gamma) \frac{DWZ_{ijk}^{n+1/2} \alpha_{ijk-1}^n + DWZ_{ijk-1}^{n+1/2} \alpha_{ijk}^n}{DWZ_{ijk}^{n+1/2} + DWZ_{ijk-1}^{n+1/2}} \right] F_{zz_{ijk}}^{n+1/2} \end{aligned} \quad 4.72$$

Os fluxos convectivos e os fluxos difusivos horizontais são discretizados de forma explícita por razões idênticas às apresentadas para o transporte de quantidade de movimento. Os fluxos difusivos verticais são discretizados de forma implícita como indicado na equação 4.69. Esta discretização produz assim um sistema tri-diagonal que pode ser resolvido de forma eficiente pelo algoritmo de Thomas.

As equações obtidas nas secções anteriores são aplicáveis em células interiores do domínio, cujas faces não contactam com as fronteiras. À excepção do termo de tensão de corte no fundo e do cálculo da velocidade vertical, não foi

referida a forma de implementar as condições fronteira. Na secção seguinte indicam-se as alterações a efectuar nas equações anteriores para as células que contactam com os diversos tipos de fronteiras.

4.7 Condições iniciais e fronteira

As equações de cálculo da elevação da superfície livre, da velocidade e do transporte de salinidade e temperatura formam um sistema de natureza parabólica necessitando por isso de condições iniciais em todo o domínio e condições fronteira durante toda a simulação. Em aplicações de hidrodinâmica costeira cinco tipos de fronteira devem ser considerados: superfície livre, fundo, laterais fechadas, laterais abertas e fronteira móvel. Para cada tipo de fronteira a condição a utilizar é fortemente dependente da aplicação. Frequentemente é necessário o teste de vários tipos de condições numa determinada aplicação antes de se obterem resultados credíveis. Nas secções seguintes descrevem-se diversos tipos de condições implementadas no modelo. A utilização do método do volume finito baseado nos fluxos através das faces das células, simplifica grandemente esta tarefa.

4.7.1 Condições iniciais

As condições iniciais usadas em todas as equações são do tipo de Dirichlet, sendo impostas especificando directamente os valores das propriedades em todo o domínio durante o arranque.

Devido à elevada celeridade do modo barotrópico, a especificação da elevação da superfície livre não necessita de procedimentos especiais. O seu valor é normalmente inicializado com o nível de referência, ajustando-se depois naturalmente sob a acção das ondas de superfície.

As velocidades iniciais são também normalmente inicializadas a zero fazendo-se um arranque "*frio*". É no entanto necessário executar o modelo durante um determinado tempo de arranque para que a velocidade se ajuste ao forçamento. Para escoamentos fortemente condicionados pela densidade, como acontece em zonas costeiras, as perturbações dos modos internos do campo de

velocidades deslocam-se com a velocidade das ondas internas, sendo por isso necessários tempos de arranque da ordem de $L/\sqrt{g'H}$ onde L é a dimensão horizontal do domínio e g' a gravidade reduzida. Em termos práticos isto significa tempos de arranque da ordem de vários dias. Outra solução que evita tempos de arranque tão longos, consiste em iniciar o modelo com o campo de velocidades geostrófico, calculado a partir do campo de densidades.

Os campos de salinidade e temperatura ajustam-se com uma celeridade que depende do transporte desses constituintes, sendo por isso da ordem de grandeza da velocidade. Em escoamentos costeiros a dimensão do domínio é excessivamente elevada, sendo economicamente inviável efectuar um arranque "frio" e esperar o ajuste dos campos. A incerteza nas condições fronteira de salinidade e temperatura inviabilizam também essa abordagem. Por esse motivo, os campos de salinidade e temperatura são inicializados através de dados climatológicos. Na simulação de escoamentos baroclínicos em estuários, a dimensão do domínio é reduzida e as condições fronteira de salinidade e temperatura são conhecidas com algum rigor. O campo de velocidades é influenciado maioritariamente pelo forçamento barotrópico. Por esse motivo é possível nos escoamentos em estuários um arranque "frio" dos campos de salinidades e temperaturas.

4.7.2 Superfície livre

Na superfície livre considera-se que os fluxos convectivos, tanto de quantidade de movimento como de salinidade e temperatura são nulos. Como no método do volume finito, esses fluxos são todos calculados com base no caudal volúmico pela superfície, essa condição é facilmente imposta em todas as equações impondo:

$$F_{zz}^{ijk_{max+1}} = 0 \tag{4.73}$$

O fluxo difusivo de quantidade de movimento pela superfície é imposto explicitamente através de uma tensão devida ao vento, como indicado na

secção 4.3.7. Os fluxos difusivos de salinidade e de temperatura são considerados nulos, sendo uma condição de Dirichlet no método do volume finito. Os fluxos de calor são implementados através de um termo fonte nas equações de transporte da temperatura. Esta abordagem tem a vantagem de permitir a distribuição do fluxo de radiação em profundidade. A precipitação é implementada por um fluxo de salinidade pela superfície livre. A imposição do fluxo de salinidade é preferível à imposição de um fluxo de água pois é imposto apenas na equação de transporte de sal, não afectando a continuidade nem a hidrodinâmica.

4.7.3 Fronteira com o fundo

As condições fronteira para o fundo são semelhantes às usadas para a superfície livre. Os fluxos convectivos são considerados nulos sendo impostos por:

$$F_{zz}^{ijk_{fundo}} = 0 \quad 4.74$$

O fluxo difusivo de quantidade de movimento é imposto de forma implícita como descrito na secção 4.3.7. Os fluxos difusivos de salinidade e de temperatura são considerados nulos.

4.7.4 Fronteiras laterais fechadas

Estas fronteiras limitam o domínio lateralmente nas regiões em contacto com terra. Estas fronteiras só existem para malhas que não garantem a continuidade do fundo ou nas regiões de pequena profundidade pois nas restantes células o fundo é contínuo, não existindo faces laterais em contacto com terra.

Do ponto de vista convectivo considera-se a fronteira impermeável, o que é conseguido impondo fluxos laterais nulos nas faces que fazem parte da fronteira:

$$F_{xz}^{ijk} = 0 \quad ; \quad F_{yz}^{ijk} = 0 \quad 4.75$$

Esta situação deve ser alterada no caso de acoplamento a modelos de escoamento subterrâneo. No transporte de quantidade de movimento, os termos difusivos horizontais são várias ordens de grandeza inferiores aos restantes termos, sendo normalmente incluídos nas equações apenas por razões de estabilidade. Reforçando esse facto, as áreas das faces laterais das células são muito inferiores às das faces inferior e superior. Justifica-se por isso que se use uma condição de escorregamento livre nessa fronteira. Esta condição é imposta especificando fluxo difusivo de quantidade de movimento nulo pelas faces em questão. Os fluxos difusivos de salinidade e de temperatura são também considerados nulos por não se considerar normalmente trocas dessas propriedades através das fronteiras.

4.7.5 Fronteiras laterais abertas

As fronteiras laterais abertas são introduzidas artificialmente, como forma de limitar o domínio de cálculo à região de interesse. Esta metodologia permite poupar tempo de cálculo, mas deve ser usada com precaução para que a presença da fronteira não influencie a solução na região de estudo.

4.7.5.1 Hidrodinâmica

Para as equações da hidrodinâmica o tipo de condição a impor depende do local e da razão pela qual a fronteira foi aplicada. Consideram-se dois tipos de condições diferentes: caudal imposto e elevação da superfície livre imposta.

A condição de caudal imposto é normalmente usada nas fronteiras com rios, impondo-se o caudal do rio directamente nas variáveis F_{xz} e F_{yz} das faces em contacto com a fronteira. A elevação na fronteira é calculada por continuidade, de forma semelhante à efectuada para os pontos interiores, mas com os caudais na fronteira impostos de forma explícita. Considerando uma fronteira com o rio em $j+1$ tem-se para a discretização S21 no primeiro meio passo de tempo:

$$\frac{\eta_{ij}^{n+1/2} - \eta_{ij}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{Ah_{ij}} \left\{ \frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^{n+1} \cdot Au_{ijk}^n) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{1ijk}^n \cdot Au_{ijk}^{n-1})}{2} - \sum_{k=kfundo}^{kmax} (F_{xz}^{n+1/2}) \right\} \quad 4.76$$

$$+ \left\{ \frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2ijk}^{n+1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-1/2}) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2ijk}^{n-1/2} \cdot Av_{ijk}^{n-3/2})}{2} - \frac{\sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2+1jk}^{n+1/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n-1/2}) + \sum_{k=kfundo}^{kmax} (U_{2+1jk}^{n-1/2} \cdot Av_{i+1jk}^{n-3/2})}{2} \right\}$$

Onde F_{xz} são os caudais impostos. A equação resultante é implícita sendo resolvida juntamente com as equações dos pontos interiores.

A condição de elevação imposta é utilizada nas fronteiras influenciadas pela maré, especificando-se nesses pontos a elevação proveniente de marégrafos. A velocidade e os caudais nas faces exteriores dessas células é calculada por continuidade, sendo os seus valores importantes para as condições fronteira da salinidade e da temperatura.

As componentes da maré provenientes dos marégrafos e impostas nos pontos da fronteira contém contribuições tanto da onda incidente como das ondas reflectidas e geradas no interior do domínio, devendo ser aplicadas sem modificação. A fronteira torna-se no entanto opaca a ondas geradas no interior do domínio que possuam frequências diferentes das impostas. Essas ondas não podem assim sair do domínio atravessando-o até se dissipar. Algumas formas de minorar este problema são: incluir vários marégrafos ao longo da fronteira com um grande número de componentes e colocar as fronteira suficientemente afastadas da zona de interesse.

Quando a fronteira aberta não está sujeita a maré ou quando artificialmente não se pretende incluir a sua influência é possível implementar uma condição de radiação que permite a saída para o exterior das ondas geradas no interior do domínio (Santos e Neves, 1991).

4.7.5.2 Transporte de salinidade e temperatura

Para as equações de transporte da salinidade e temperatura a condição a aplicar em todas as fronteiras abertas é a de fluxo convectivo imposto. Os caudais volúmicos encontram-se especificados ou calculados por continuidade pelas condições fronteira da hidrodinâmica. O fluxo convectivo numa fronteira aberta em $jmin$ (esquerda) por exemplo é:

$$\left(\vec{F}c \cdot \vec{n}S\right)_{ijmin-\frac{1}{2}k}^{n+1/2} = \gamma \left(\frac{Fxz_{ijmin}^{n+1/2} + |Fxz_{ijmin}^{n+1/2}|}{2} \alpha^* + \frac{Fxz_{ijmin}^{n+1/2} - |Fxz_{ijmin}^{n+1/2}|}{2} \alpha_{ijmin}^n \right) Fxz_{ijk}^{n+1/2} \quad 4.77$$

onde α^* é a propriedade que entra a partir do exterior. Em fronteiras sujeitas a maré este valor depende das condições existentes do exterior e da propriedade que saiu durante a vazante. Denominando por α_{front} a propriedade no exterior, a uma distância DX_{dilu} suficientemente afastada da fronteira para não sofrer influência desta, o valor da propriedade na região exterior próxima da fronteira depende de α_{front} , de α_{ijmin} e do processo de dispersão no exterior do domínio. Esse processo é parametrizado impondo um perfil de variação da propriedade com a distância $\alpha(x)$ como indicado na figura 4.5. O valor DX_{dilu} representa a distância que um volume de fluido que sai da fronteira precisa de percorrer até se diluir com o meio envolvente.

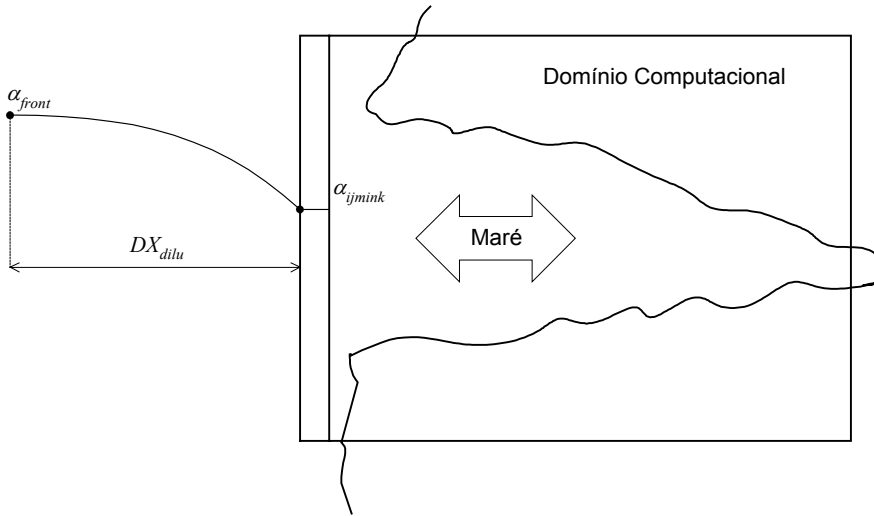


Figura 4.5: Condição fronteira para o transporte da propriedade α .

O valor α^* a usar durante a enchente deve ser tal que produza em cada passo de tempo um fluxo de propriedade compatível com o perfil $\alpha(x)$ imposto:

$$\alpha^* Fx_{ijmink} \Delta t/2 = \int_t^{t+\Delta t/2} Fx_{ijmink} \alpha(u_{ijmink}, t) dt \quad 4.78$$

onde se fez a transformação de variável $\alpha(x) = \alpha(u_{ijmink}, t)$. Considerando para $\alpha(x)$ o perfil linear:

$$\alpha(x) = \alpha_{ijmink} + \frac{\alpha_{front} - \alpha_{ijmink}}{DX_{dilu}} x \quad 4.79$$

obtém-se o valor de α^* :

$$\alpha^* = \alpha_{ijmink} + \frac{\alpha_{front} - \alpha_{ijmink}}{DX_{dilu}} u_{ijmink} \Delta t/4 \quad 4.80$$

Este valor deve ser interpretado, de acordo com a figura 4.6, como o valor constante que introduz uma massa de α no interior da célula igual à introduzida pela convecção do perfil $\alpha(x)$.

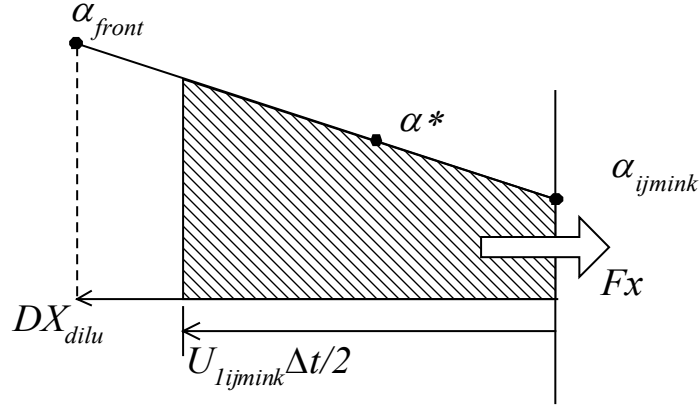


Figura 4.6: Interpretação do valor de α^* .

Discretizando a equação de transporte na célula da fronteira e considerando por simplicidade apenas o fluxo exterior tem-se:

$$\frac{V_{ijnink}^{n+1/2} \alpha_{ijnink}^{n+1/2} - V_{ijnink}^n \alpha_{ijnink}^n}{\Delta t / 2} = Fx_{ijnink}^{n+1/2} \left(\alpha_{ijnink}^{n+1/2} + \frac{\alpha_{front} - \alpha_{ijnink}^{n+1/2}}{DX_{dilu}} U_{ijnink}^{n+1/2} \Delta t / 4 \right) \quad 4.81$$

Conclui-se facilmente da equação anterior que o uso de uma discretização explícita pode ser instável para valores da distância de diluição DX_{dilu} perto de zero. Usando uma discretização implícita na forma:

$$\frac{V_{ijnink}^{n+1/2} \alpha_{ijnink}^{n+1/2} - V_{ijnink}^n \alpha_{ijnink}^n}{\Delta t / 2} = Fx_{ijnink}^{n+1/2} \left(\alpha_{ijnink}^{n+1/2} + \frac{\alpha_{front} - \alpha_{ijnink}^{n+1/2}}{DX_{dilu}} U_{ijnink}^{n+1/2} \Delta t / 4 \right) \quad 4.82$$

obtem-se:

$$\alpha_{ijnink}^{n+1/2} = (1 - \gamma) \alpha_{ijnink}^n + \gamma \alpha_{front} \quad 4.83$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{V_{ijnink}^n DX_{dilu} Au_{ijnink}^{n+1/2}}{(Fx_{ijnink}^{n+1/2} \Delta t / 2)^2 / 4}} \quad 4.84$$

é um parâmetro de ponderação com valores $0 < \gamma < 1$ que depende apenas da distância de diluição.

Se for considerado que o volume de fluido que sai da fronteira durante a vazante dilui-se com o exterior apenas como função do tempo (tempo de decaimento) é possível obter uma formulação semelhante a esta (Santos, 1995) mas que não tem em conta o efeito convectivo.

4.7.6 Fronteiras móveis

As fronteiras móveis são fronteiras fechadas cuja posição varia no tempo. Este tipo de fronteira é necessária para simular a descobertura das zonas entre-marés. As células que se encontram a descoberto devem ser identificadas em cada iteração aplicando-se as condições da secção 4.7.4 às faces das células cobertas em contacto com a célula descoberta. Por razões computacionais não se pode usar a condição $\eta \leq -h$ para decidir se uma célula se encontra descoberta. Isso produziria instabilidades devido a células que se encontrariam alternadamente cobertas e descobertas por uma película reduzida de água. Usa-se assim um critério de descobertura baseado na figura 4.7.

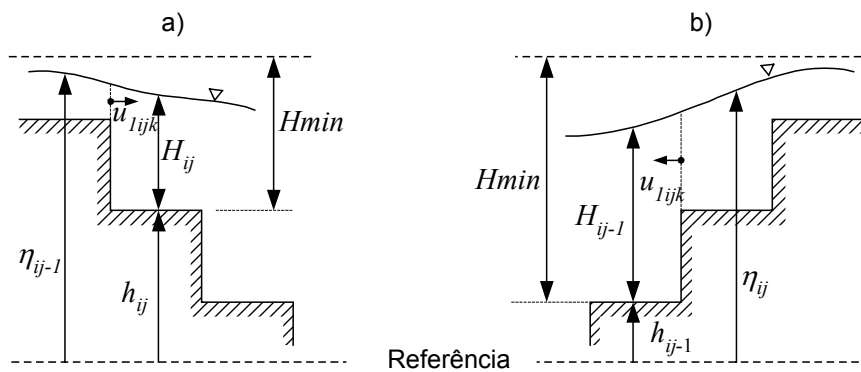


Figura 4.7: Critérios para descobertura.

Considera-se uma profundidade mínima H_{min} abaixo da qual a célula se encontra descoberta. Desta forma evita-se a criação de células com profundidades negativas, ficando sempre uma fina camada de água sobre as células

descobertas. As células de cálculo de U_1 na posição i,j consideram-se descobertas quando se verifica pelo menos uma das duas situações seguintes:

$$H_{ij} < Hmin \quad \text{e} \quad \eta_{ij-1} < -h_{ij} + Hmin \quad 4.85$$

ou

$$H_{ij-1} < Hmin \quad \text{e} \quad \eta_{ij} < -h_{ij-1} + Hmin \quad 4.86$$

A segunda condição da equação 4.85 impede que a célula se cubra por uma onda que progrida da esquerda para a direita e a segunda condição da equação 4.86 impede que a célula se cubra por uma onda que progrida da direita para a esquerda. O ruído produzido pelas variações abruptas de velocidade devidas à cobertura e descobertura pode ser controlado mediante uma escolha cuidadosa do parâmetro $Hmin$ (Stelling, 1983).

4.8 Conclusões

Neste capítulo utilizou-se o método dos volumes finitos para discretizar as equações primitivas para águas pouco profundas com a aproximação hidrostática. Utilizaram-se duas discretizações temporais diferentes: o esquema S21 de 4 equações e o esquema de Leendertse com 6 equações. Ambas as discretizações produzem um esquema globalmente centrado no tempo sendo o esquema S21 mais eficiente em águas profundas e o esquema de Leendertse mais apropriado para águas pouco profundas com zonas de descobertura. Na discretização das equações ficaram patentes as características do método do volume finito, permitindo uma separação entre o processo de cálculo e a geometria da malha. Esta separação permite a implementação da coordenada vertical genérica sem alteração na forma das equações. A programação torna-se também mais metódica e estruturada pois os fluxos são calculados para todas as células sendo depois construídas a partir deles as equações do modelo. Neste capítulo analisou-se ainda a implementação das condições

fronteira. O método do volume finito revelou-se também vantajoso nesse campo, permitindo a especificação directa dos fluxos nas faces das células. Dessa forma as condições fronteira de fluxo imposto, que num método tradicional de diferenças finitas seriam condições de Neumann passam a ser condições de Dirichlet.

O modelo é seguidamente testado em diversos domínios esquemáticos e reais. Antes dessas aplicações é no entanto apresentada no capítulo seguinte uma breve descrição dos fenómenos físicos de maior relevo que ocorrem nesses domínios, com o objectivo de situar os resultados do modelo e de auxiliar a sua interpretação.

5 ASPECTOS DINÂMICOS EM ESTUÁRIOS E ZONAS COSTEIRAS

Os estuários são tradicionalmente definidos como bacias semi fechadas no interior das quais a água doce proveniente de drenagem terrestre se mistura com água salgada (Cameron e Pritchard, 1963). Neste capítulo analisam-se alguns processos físicos característicos destes sistemas e também processos que ocorrem em zonas pouco profundas da plataforma continental. Em ambas as regiões a maré e a densidade dominam o escoamento nas escalas espaciais e temporais de interesse (mesoescala). A maré desempenha um papel preponderante impondo o declive da superfície livre. Os gradientes de densidade influenciam o escoamento de duas formas diferentes: através das forças baroclínicas, em função da profundidade e através da alteração da viscosidade turbulenta e dos coeficientes de difusão, provocada pela estratificação. A tensão do vento, a radiação solar, o atrito do fundo, e os constrangimentos topográficos interagem com os processos anteriores dando origem a um sistema não linear de elevada complexidade.

Neste capítulo começam-se por analisar os mecanismos de geração da maré no oceano seguindo-se uma análise da interações dos escoamentos de maré com diversos fenómenos característicos da plataforma continental e dos estuários. São descritos depois alguns processos pelos quais a maré é modificada no interior dos estuários. Dividem-se estes processos em barotrópicos e baroclínicos e mostra-se como os processos de mistura no interior do estuário podem influenciar a zona adjacente da plataforma continental.

5.1 Caracterização da maré oceânica

As forças geradoras da maré provém da atracção gravítica do sistema Terra, Sol, Lua. As forças produzidas pelos outros corpos celestes contribuem tão pouco para a maré que são usualmente desprezadas. Considerando apenas o sistema Terra Lua, uma partícula na superfície da terra está sujeita a uma força centrífuga aparente devida à rotação do sistema Terra Lua em torno do seu

centro de massas com um período de 27,3 dias (F_c na figura 5.1). Esta força é distinta da força centrífuga devida à rotação da terra sobre o seu próprio eixo e é aproximadamente igual para todos os pontos da sua superfície. A mesma partícula está sujeita também a uma força devida ao campo gravítico da lua (F_g na figura 5.1).

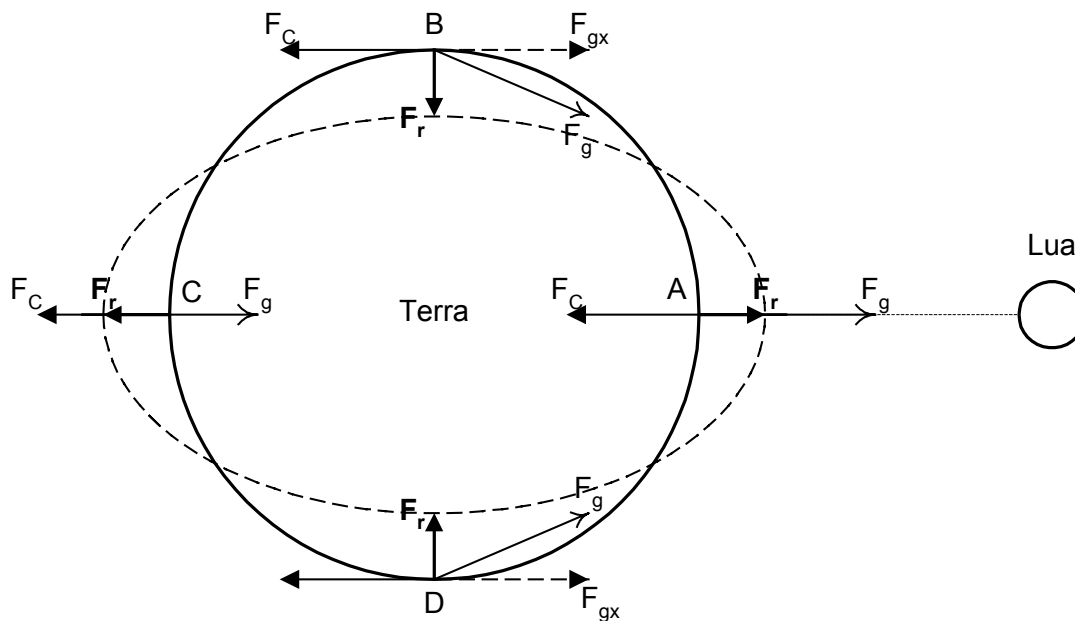


Figura 5.1: Força geradora da maré para o sistema Terra Lua.

Estas duas forças anulam-se para uma partícula situada no centro da Terra, para qualquer outro ponto as forças não se equilibram originando uma resultante F_r . Na figura 5.1 estão representadas essas forças para quatro pontos na superfície da Terra. A força resultante actua na massa de água deformando a superfície livre relativamente à sua posição de equilíbrio geopotencial (elipse a tracejado na figura 5.1). Em condições de equilíbrio esta elipse manteria sempre o seu eixo maior alinhado com a linha que une o centro de gravidade dos dois astros. Devido à rotação da Terra e à translacção da Lua um ponto fixo na Terra sentiria dois ciclos de maré durante um dia lunar (24,8 horas) com uma amplitude que dependeria da sua posição. Na realidade a velocidade de

propagação da onda de maré está limitada à velocidade de propagação de ondas longas deslocando-se desfasada das forças geradoras.

As forças geradas pelo sistema Terra Sol são semelhantes às do sistema Terra Lua mas com intensidade, frequência e linha de acção diferentes. Como as órbitas da lua e da terra são elípticas e também devido à declinação dessas órbitas surgem novas componentes das forças geradoras com intensidades e frequências diferentes.

Usualmente contabilizam-se os forçamentos pelas diferentes forças através de uma decomposição da onda total de maré em diversas constituintes harmónicas com as frequências das forças geradoras:

$$\eta(t) = \sum_i a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) + R(t) \quad 5.1$$

onde $\eta(t)$ é a elevação da superfície livre acima do nível de referência, a_i a amplitude da constituinte i , ω_i a sua frequência e ϕ_i a fase. Ao todo foram identificadas mais de 390 constituintes com frequências associadas ao movimento relativo do sistema Terra Sol Lua (Doodson e Warburg, 1961).

Na Tabela 5.1 são indicadas algumas das principais constituintes das forças, divididas em grupos de acordo com o seu período e indicando um valor típico da sua amplitude relativamente à amplitude da constituinte principal M_2 .

Para além das constituintes devidas ao forçamento gravítico existe sempre numa onda real de maré um resíduo $R(t)$, usualmente pequeno, com frequências que abrangem todo o espectro. Este resíduo reflecte forçamentos causados directa ou indirectamente pela radiação solar (vento, aquecimento, perturbações atmosféricas) e por efeitos não lineares.

Tabela 5.1: Constituintes principais das forças geradoras da maré.

Constituinte	Símbolo	Período (horas)	Amplitude Relativa
Semi-diurna:			
Lunar principal	M ₂	12.42	100
Solar Principal	S ₂	12.00	47
Elíptica lunar	N ₂	12.66	19
Luni-solar	K ₂	11.97	13
Diurna:			
Luni-solar	K ₁	23.93	58
Lunar principal	O ₁	25.82	42
Solar Principal	P ₁	24.07	19
Elíptica lunar	Q ₁	26.87	8
Período longo			
Lunar quinzenal	M _f	327.9	17
Lunar mensal	M _m	661.3	9
Solar semi-anual	S _{sa}	4383	8

Para além da análise harmónica atrás descrita são frequentemente usados mais dois métodos na análise dos valores de maré: O método de resposta e a análise por ondas elementares.

No método de resposta efectua-se uma análise de Fourier convencional ao sinal de maré, dividindo o espectro em intervalos de frequência iguais $\Delta f=1/T$ desde $f_1=1/T$ até $f_n=1/(2\Delta t)$ onde T é a dimensão do sinal e Δt é o tempo de amostragem (Munk e Cartwright, 1965).

Na análise por ondas elementares decompõe-se o sinal da onda de maré não numa série de funções trigonométricas com um único parâmetro ω como nos outros métodos mas sim numa série de funções escaláveis. Estas funções são obtidas a partir de uma função base $\Psi_0(t)$ que é depois escalada em frequência

e transladada no tempo pelos parâmetros a e d respectivamente. Jay e Flinchem (1997) propõe uma função da forma:

$$\psi_{a,d}(t) = \frac{1}{a} \psi_0 \left(\frac{t-d}{a} \right) \quad 5.2$$

O efeito dos parâmetros a e d é o indicado na figura 5.2.

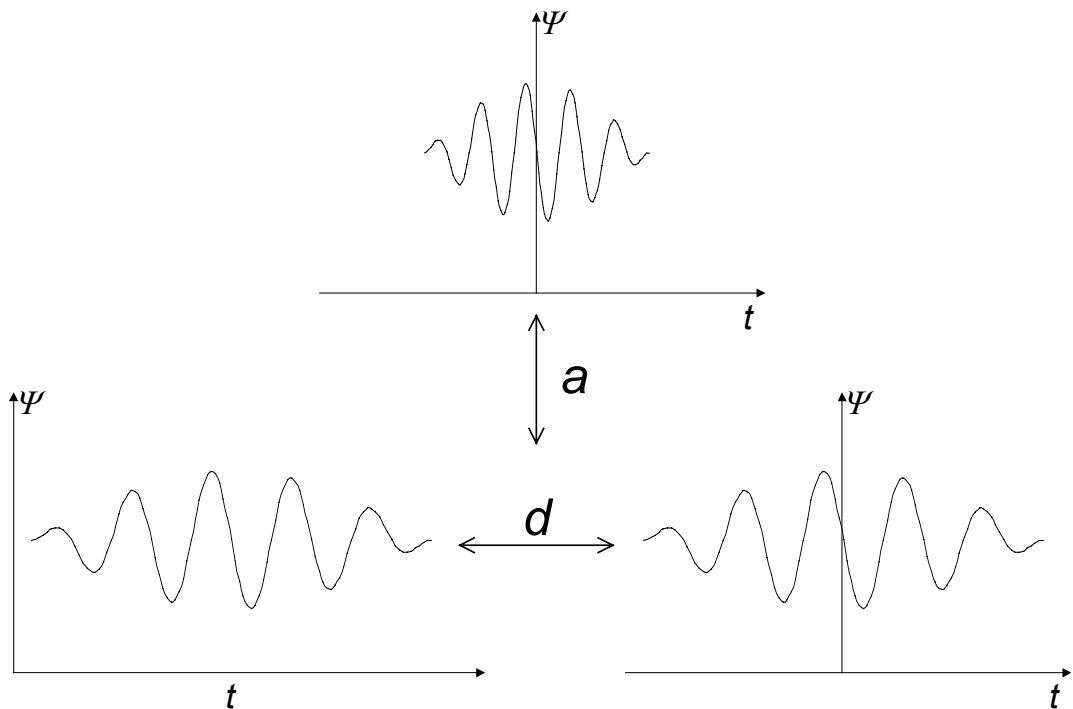


Figura 5.2: Onda elementar escalável e efeito dos parâmetro de controle.

Estas funções são depois aplicadas na transformação do sinal original numa forma semelhante à efectuada pela análise de Fourier.

Com estes métodos é possível a análise de fenómenos com forçamentos de características não exclusivamente periódicas. São exemplos a interacção da maré com o caudal variável do rio, a modulação de ondas internas por plumas de densidade, a assimetria interna em estuários estratificados e a interacção da maré com o vento.

5.2 Modificação da maré nas zonas costeiras

Perto da costa e no interior dos estuários a onda de maré é perturbada por diversos mecanismos que a distorcem. Devido à não linearidade das equações de transporte os efeitos provocados por esses mecanismos interagem entre eles tornando o escoamento mais complexo.

5.2.1 Interacção com a geometria

A escala lateral de variabilidade da maré é da ordem de grandeza do raio de deformação de Rossby barotrópico (secção 1.2.9):

$$L_{R_0} = \frac{\sqrt{gh}}{f} \quad 5.3$$

onde h é a profundidade abaixo do nível de referência, g a aceleração da gravidade e $f=2\omega \sin\phi$ é o parâmetro de Coriolis. Esta dimensão fornece uma ordem de grandeza da distância de atenuação da onda de maré, na direcção perpendicular à sua propagação. Apenas as irregularidades da geometria na direcção horizontal com ordem de grandeza semelhante a esse valor afectam significativamente a onda de maré (LeBlond, 1991). É por isso natural que nas zonas costeiras onde a profundidade é reduzida a topografia condicione de forma mais marcada a onda de maré. Para a Latitude Portuguesa e para uma profundidade de 100m este valor é da ordem dos 300 Km pelo que se conclui que apenas as massas continentais afectam significativamente a maré oceânica do ponto de vista dinâmico. Para além deste mecanismo dinâmico de distorção a onda de maré está ainda sujeita a efeitos de restrição lateral provocados pela batimetria e que actuam por intermédio da continuidade confinando a onda e deformando-a em regiões costeiras.

Na zona da plataforma os efeitos da tensão de corte no fundo são usualmente reduzidos. Uma estimativa da sua importância pode ser obtida pela razão entre o termo de atrito no fundo e o termo de aceleração. Tomando como ponto de partida a equação 1D de balanço de quantidade de movimento (Eq. 5.19) e

considerando para escala de tempos da onda de maré $T = 1/\omega$ onde ω é a frequência da maré, a razão anterior vem dada por:

$$\frac{C_d \frac{U|U|}{h+\eta}}{\frac{\partial U}{\partial t}} \sim \frac{C_d |U|}{\omega h} \quad 5.4$$

admitindo para C_d o valor típico em zonas costeiras 0.005 (Davies e Furnes, 1980), para h 100 metros, para $|U|$ 0.1 m/s e para ω a frequência da constituinte M_2 : $1.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ a razão anterior toma o valor 0.035 mostrando que o termo de atrito tem uma importância reduzida nestas regiões sendo uma a duas ordens de grandeza inferior ao termo de aceleração. O termo de atrito torna-se no entanto importante em zonas pouco profundas. Considerando os valores típicos em estuários: $C_d = 0.0025$ e $|U| = 1 \text{ m/s}$ a razão entre o termo de atrito e o termo de aceleração torna-se superior à unidade para profundidades inferiores a 18 metros.

A onda de maré sofre normalmente amplificação quando encontra a plataforma. Esta amplificação é devida principalmente à concentração de energia nas zonas pouco profundas. A energia total de uma onda é composta pela soma da sua energia potencial e cinética. O valor médio da energia total entre duas cristas consecutivas, por unidade de área horizontal, é dado por:

$$E = \frac{1}{8} \rho g (2a)^2 \quad 5.5$$

onde a é a amplitude da onda. Esta energia é transportada com a velocidade de grupo que para ondas gravíticas longas é igual a $c_0 = \sqrt{gh}$. Para este caso o fluxo médio de energia por unidade de largura da onda é:

$$Ec_0 = \frac{\rho g^{3/2}}{2} a^2 \sqrt{h} \quad 5.6$$

Considerando conservação da energia total da onda este fluxo deve manter-se quando a onda se aproxima da costa, pelo que para dois pontos 1 e 2 com profundidades diferentes se deve ter:

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_2}} \quad 5.7$$

Concluindo-se que a amplificação é proporcional a $\sqrt[4]{1/h}$. Nesta análise simplificada não se considerou refração nem dissipação de energia da onda. A refração associada à topografia irregular pode contribuir tanto para aumentar como para diminuir o efeito de amplificação uma vez que distribui de forma não uniforme a energia disponível. Os mecanismos dissipativos pelo contrário tendem sempre a contrariar o efeito de amplificação. Na banda de frequências da maré a dissipação é induzida principalmente pela tensão de corte no fundo que, como se viu, é baixa nas zonas de grande profundidade.

Para valores $\omega > |f|$ a maré pode interagir construtivamente com ondas inerciais-gravíticas com frequências semelhantes à da maré cuja propagação é condicionada pela plataforma continental. Este fenómeno é favorecido quando a largura da plataforma é elevada contribuindo para a amplificação da maré (Brink, 1991). Devido à limitação imposta pela frequência de inércia não é possível a propagação de ondas inerciais-gravíticas com frequências inferiores a f (LeBond e Mysak, 1978), pelo que para frequências de maré $\omega < |f|$ esta interacção não se dá podendo a maré inclusivamente atenuar-se ao aproximar-se da costa (Clarke, 1991).

5.2.2 Interacção com outras ondas

As escalas temporais e espaciais associadas às ondas de vento (25 seg., 10 m) são muito diferentes das escalas típicas de uma onda de maré (12 h, 1000 Km) pelo que a interacção entre estes dois fenómenos só pode ser estudado do ponto de vista paramétrico: A maré modifica as ondas de vento devido à variação da profundidade média em que elas se propagam e devido à

celeridade da onda de maré ser da mesma ordem de grandeza da celeridade das ondas de vento. As ondas de vento influenciam a maré devido ao empilhamento junto à costa e formação de correntes paralelas e perpendiculares à costa. Esta interacção é usualmente incluída nos modelos de maré de forma paramétrica através de uma tensão devida às ondas e numa modificação dos coeficientes de difusão e atrito. As ondas de vento alteram também a rugosidade da superfície livre sobre a qual actua o próprio vento e devem por isso ser também consideradas no cálculo do valor de C_d o qual se torna uma função da velocidade do vento. Usualmente essa metodologia não é usada pois as incertezas associadas ao valor de C_d e ao campo de vento são superiores a essa influência (Broche e Forget, 1992).

As ondas associadas à passagem de superfícies frontais ("storm surges") têm ordens de grandeza temporal e espacial de alguns dias e de várias centenas de quilómetros pelo que podem interagir facilmente com a maré. A sua interacção é essencialmente do tipo linear podendo-se em primeira aproximação adicionar as elevações das superfícies livres das duas ondas. Este efeito é incluído nos modelos numéricos através da alteração das condições de elevação nas fronteiras abertas. Para além desta interacção existe também uma influência não linear produzida pelos termos convectivo e de tensão de corte no fundo que é normalmente incluída nos modelos de forma paramétrica (Heaps, 1983).

5.2.3 Interacção com correntes médias

As correntes médias oceânicas são da ordem de alguns centímetros por segundo. Na plataforma continental o Número de Froude barotrópico

$$Fr_0 = \frac{U}{\sqrt{gH}} \quad 5.8$$

é bastante baixo indicando que a importância dessas correntes para o termo de aceleração é reduzida. Conclui-se que as correntes oceânicas influenciam pouco a dinâmica do escoamento de maré, podendo ser adicionadas

linearmente. As correntes residuais produzidas por rectificação das correntes de maré (filtragem das frequências inferiores às quinzenais) são no entanto da mesma ordem de grandeza das correntes oceânicas. Essas correntes podem interagir de forma mais complexa nas zonas de menor profundidade através do atrito no fundo (Parker, 1991).

5.2.4 Efeitos baroclínicos

Nas zonas costeiras a maré pode interagir com os fenómenos baroclínicos associados a gradientes de densidade gerando ondas internas e frentes costeiras.

As frentes na zona costeira são regiões com uma dimensão longitudinal elevada que apresentam gradientes transversais de velocidade e de propriedades intensos. Vários mecanismos podem ser responsáveis pela geração e manutenção de uma zona frontal: *i*) Convergência de massas de água superficiais devido a campos de vento não uniformes sobre o domínio, *ii*) Instabilidades baroclínicas associadas à criação de vórtices de mesoescala, *iii*) contacto entre massas de água com diferentes características como acontece nas zonas de influência das plumas dos rios e *iv*) Estratificação diferenciada devido a variação na eficiência dos mecanismos de mistura. Os dois últimos mecanismos dependem directamente das características do escoamento de maré, sendo analisados com algum detalhe.

As frentes geradas por estratificação diferenciada ocorrem em regiões mais afastadas da plataforma continental e dependem do balanço entre a variação de energia potencial associada à estratificação produzida pelo fluxo de calor na superfície livre e a capacidade de mistura da maré gerada pelos gradientes verticais de velocidade (figura 5.11). No inverno, quando o fluxo de calor pela superfície é negativo produz-se uma circulação vertical do tipo convectivo que auxilia a turbulência vertical na homogeneização da coluna de água. Quando o fluxo de calor pela superfície se torna positivo, aproximadamente 90% dessa energia é absorvida nos 5m superficiais da coluna de água (Ivanov, 1977). Nas

regiões onde a capacidade de mistura é suficiente para vencer a impulsão essa energia é redistribuída pela coluna de água que se torna homogênea. Quando a tendência para a mistura produzida pela energia cinética turbulenta não é suficiente para vencer a impulsão, como acontece usualmente nas zonas mais profundas, forma-se uma coluna de água estratificada com uma termoclina acentuada que separa a camada superficial com uma temperatura elevada da região inferior relativamente homogênea com temperaturas mais baixas. A fronteira entre a zona menos profunda, com elevada capacidade de mistura e a zona mais profunda, com baixa capacidade de mistura, forma uma frente onde os gradientes de temperatura e outras propriedades são importantes. A figura 5.3 ilustra as principais características de uma região frontal desta natureza.

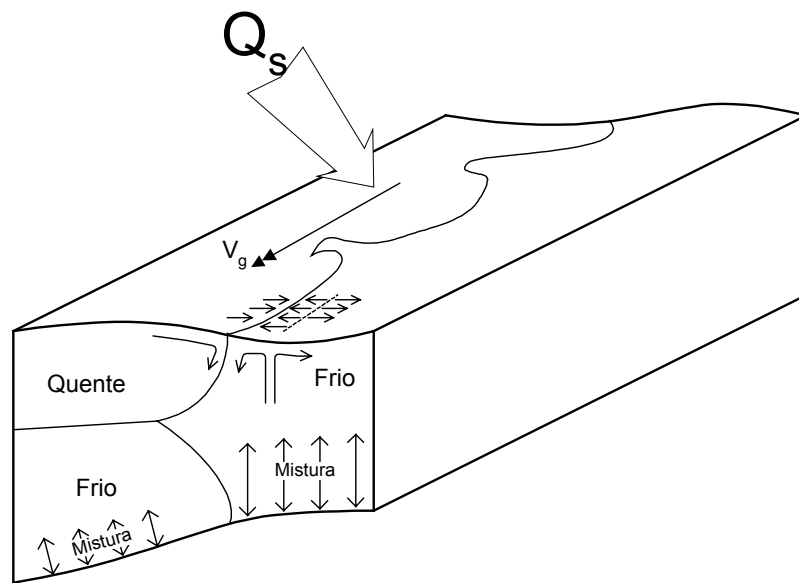


Figura 5.3: Estrutura de uma frente costeira.

Considerando a coluna de água homogênea o fluxo de calor por unidade de área de superfície livre \dot{q} produz um aumento de temperatura da coluna de água de altura H :

$$dT = \frac{\dot{q}}{\rho H C_p} dt \quad 5.9$$

onde C_p é o calor específico da água a pressão constante. O aumento de volume provocado por esta subida de temperatura pode ser calculado pelo coeficiente de expansão volumétrica β que, por unidade de área horizontal é:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad 5.10$$

O aumento de volume por unidade de tempo vem assim dado por

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\beta \dot{q}}{\rho C_p} \quad 5.11$$

A energia potencial da coluna de água por unidade de área horizontal, considerando para nível de referência a base da coluna de água é:

$$E_p = \int_0^H \rho g z \, dz = \frac{1}{2} M g H \quad 5.12$$

onde $M = \rho H$ é a massa da coluna de água por unidade de área horizontal e considera-se constante.

A variação de energia potencial produzida pelo fluxo de calor é assim:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{1}{2} H g \frac{\beta \dot{q}}{C_p} \quad 5.13$$

Como o estado de menor energia do fluido é o estado estratificado, para que o fluido se mantenha homogéneo é necessário que a turbulência forneça uma quantidade de energia igual ao aumento de energia potencial associado à homogeneização. A equação 5.13 mostra que quanto menor for a profundidade H menor é o aumento de energia potencial e por isso menor a energia turbulenta necessária.

Considerando que o principal produtor de turbulência nesta região é a tensão de corte no fundo:

$$\tau = \rho C_d U^2 = \rho u_*^2 \quad 5.14$$

onde $u_* = \sqrt{\tau/\rho} = U\sqrt{C_d}$ é a velocidade de atrito

A taxa de produção de energia cinética turbulenta pode ser dada aproximadamente por:

$$\tau U = \rho C_d^{-1/2} u_*^3 \quad 5.15$$

Uma fracção ε desta potência é utilizada na mistura. A condição crítica para que a coluna de água se mantenha homogénea é obtida igualando esta potência de mistura à variação de energia potencial do sistema:

$$\varepsilon \rho C_d^{-1/2} u_*^3 = \frac{1}{2} H g \frac{\beta \dot{q}}{C_p} \Rightarrow \frac{H}{u_*^3} = \frac{2 \varepsilon \rho C_d^{-1/2} C_p}{g \beta \dot{q}} \quad 5.16$$

O lado direito desta equação é constante para cada valor de \dot{q} pelo que o parâmetro H/U^3 onde U é a amplitude da corrente de maré integrada na profundidade tem-se revelado um bom indicador para a localização da posição de frentes deste tipo (Simpson e James, 1986). Esta análise simplificada ignora os efeitos da rotação da Terra. Quando estes efeitos são considerados forma-se uma camada de Ekman no fundo com uma espessura da ordem de:

$$D_E = \pi \sqrt{2 A_v / |f|} \quad 5.17$$

Esta camada confina a mistura turbulenta ao seu interior reduzindo o valor de ε na zona da termoclina. Nesse caso o parâmetro fH/u_* deve também ser considerado na localização da frente (Garrett et al., 1978).

A análise de perfis de temperatura sugerem um padrão de escoamento no interior da frente como indicado na figura 5.3: Devido ao gradiente horizontal de densidades desenvolve-se um escoamento geostrófico na direcção paralela à

frente, produzindo frequentemente variabilidade da região frontal com a formação de vórtices. Na fronteira entre os dois regimes a mistura produz uma água de densidade intermédia que afunda do lado estratificado produzindo *downwelling* e convergência à superfície. A existência de valores mínimos de temperatura à superfície na zona misturada perto da frente sugerem a existência de *upwelling* nessa região.

Este tipo de frentes têm grande importância do ponto de vista biológico sendo regiões com condições que permitem grande produtividade (Holligan, 1981). Este facto deve-se não só ao *upwelling* atrás referido mas também ao movimento da região frontal. Este movimento é controlado pela eficiência da mistura da maré sendo modulado com o ciclo maré viva maré morta. Nos períodos de maré morta, quando a eficiência de mistura diminui, a frente avança aprisionando água rica em nutrientes proveniente da região homogénea no interior da região estratificada contribuindo para a produtividade dessa região (Simpson e James, 1986).

Controlando a posição e intensidade das frentes costeiras a maré desempenha assim um papel decisivo no estabelecimento do regime baroclínico global da plataforma.

5.3 Interações barotrópicas em estuários

Vão-se analisar as interações do escoamento de maré com o fundo através do atrito, com a geometria e com o caudal do rio. Estes mecanismos podem ser estudados na direcção longitudinal do estuário usando um modelo unidimensional. Nos estuários com gradientes verticais e transversais de propriedades os conceitos mantêm-se, sendo no entanto os resultados quantitativamente diferentes.

As equações hidrodinâmicas unidimensionais podem ser obtidas das equações 1.49 e 1.63 por integração na direcção vertical e posterior integração na direcção normal à linha central do estuário:

$$B \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial B(h + \eta)U}{\partial x} = 0 \quad 5.18$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + C_d \frac{U|U|}{h + \eta} = 0 \quad 5.19$$

Onde se considerou x como a direcção longitudinal do estuário, U o valor médio da velocidade em cada secção e B a largura média do estuário na direcção normal a x , de tal forma que o caudal que passa por uma secção seja $Q=B(h + \eta)U$. A validade destas equações está limitada a sistemas com número de Kelvin baixo:

$$\frac{fB}{\sqrt{gh}} \ll 1 \quad 5.20$$

para garantir que os efeitos transversais devidos à rotação não são importantes e factores de forma reduzidos:

$$\frac{B^2 \omega^2}{gh} \ll 1 \quad 5.21$$

onde ω é a frequência das constituintes de maré, para garantir que o domínio é suficientemente estreito e a onda de maré não tem variabilidade na direcção transversal (Ianniello, 1977). Note-se que mesmo para o caso de estuários com Número de Kelvin baixo a rotação provoca um avanço de fase na margem esquerda do estuário relativamente à margem direita de aproximadamente

$$\frac{fB}{2\sqrt{gh}} \quad 5.22$$

radianos (Prandle, 1991).

São três os termos não lineares presentes nestas equações: O termo $\partial B(h + \eta)U/\partial x$ na equação da continuidade, o termo convectivo $U \partial U/\partial x$ na equação de transporte de quantidade de movimento e o termo $C_d U|U|/(h + \eta)$ da tensão de corte no fundo.

5.3.1 Efeito não linear da continuidade

O termo $\partial B(h + \eta)U/\partial x$ é responsável pela velocidade de propagação da crista da onda ser superior à da cava (Parker, 1991). Por essa razão a onda distorce-se à medida que progride para o interior do estuário. Esta distorção é tanto maior quanto maior for o quociente a/h entre a amplitude da onda e a profundidade.

5.3.2 Efeito não linear da convecção

A amplitude da corrente de maré sem atrito é aproximadamente $\sqrt{gh} \cdot a/h$. Quando a/h é elevado a velocidade da corrente não pode ser desprezada relativamente à velocidade de propagação da onda convectando esta. Este efeito tem origem no termo $U \partial U/\partial x$ e faz igualmente com que a velocidade da crista seja superior à da cava, distorcendo o perfil da onda. Este efeito é mais importante quando se trata de uma onda progressiva pois nessa situação a velocidade é máxima na crista e mínima (com sinal negativo) na cava da onda.

5.3.3 Efeito não linear da tensão de corte no fundo

O termo da tensão de corte no fundo tem como consequências a diminuição da velocidade de propagação e a atenuação da amplitude da onda. estes efeitos lineares são simétricos não conduzindo a distorção da onda. Este termo tem no entanto duas facetas não lineares: O numerador $U|U|$ e o denominador $1/(h + \eta)$. O denominador associa a tensão de corte à profundidade local. Desta forma para valores elevados de a/h a crista da onda é menos influenciada pelo fundo propagando-se a uma velocidade superior à da cava (Godin, 1991).

Os três efeitos acima analisados provocam uma distorção assimétrica da onda de maré. Esta distorção é representada na análise harmónica pelo aparecimento de harmónicas pares de maior frequência sendo a M_4 a mais importante. No gráfico η v.s. x da figura 5.4 subtrai-se à onda distorcida a onda original M_2 obtendo-se a harmónica M_4 .

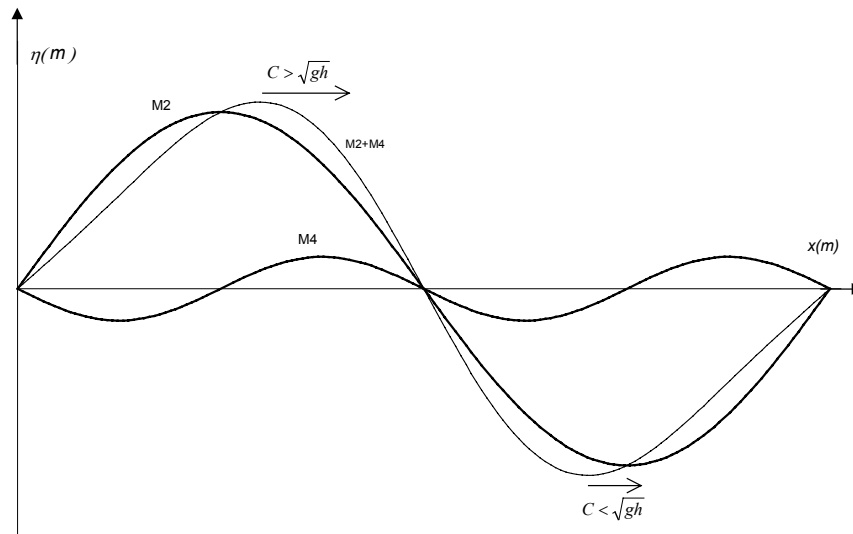


Figura 5.4: Geração da harmónica M_4 a partir de uma onda M_2 distorcida assimétrica.

Como consequência desta distorção as enchentes são mais curtas e com velocidades máximas superiores enquanto as vazantes são longas e com velocidades inferiores. Esta assimetria temporal do campo de velocidades tem consequências importantes na geração de correntes residuais e no transporte de sedimentos no interior dos estuários (Fry e Aubrey, 1990).

O efeito de $U|U|$ no termo de atrito é o de provocar atenuação máxima nos picos de velocidade e atenuação mínima nos períodos de estofa. Para uma onda M_2 actuando isoladamente o caudal de enchente é igual ao de vazante pelo que a deformação provocada é do tipo simétrico gerando-se a harmónica M_6 com frequência tripla da M_2 e outras harmónicas ímpares. No gráfico U v.s. t da figura 5.5 ilustra-se a geração dessa harmónica a partir de uma componente

M_2 da velocidade de maré distorcida. Nos casos reais este efeito surge sobreposto aos efeitos anteriores actuando por isso numa onda já distorcida produzindo harmónicas adicionais.

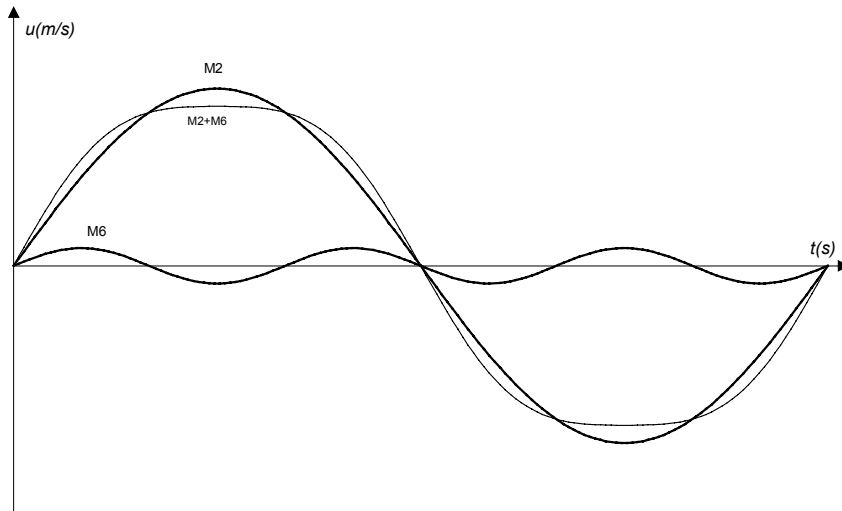


Figura 5.5: Geração da harmónica M_6 a partir de uma onda M_2 distorcida simétrica.

Quando o caudal do rio está presente a velocidade da vazante é superior à da enchente. A natureza quadrática de $U|U|$ faz com que a perda de energia devida ao atrito seja assimétrica contribuindo para a constituinte M_4 e outras constituintes pares. As constituintes pares estão também presentes nas zonas em que o caudal do rio inverte o sentido durante o ciclo de maré. Nas zonas mais a montante do rio ou quando o seu caudal é elevado a velocidade não inverte o sentido embora seja modulada pela maré. Neste caso as atenuações máxima e mínima produzidas pelo termo $U|U|$ encontram-se desfasadas de π , contribuindo para a M_4 e não para a M_6 .

5.3.4 Interação entre constituintes

Quando duas constituintes com frequências diferentes se encontram em presença a amplitude do sinal resultante da sua adição é modulado por uma onda com frequência igual à diferença das frequências das ondas originais. Este

efeito de carácter linear faz no entanto com que os efeitos dos termos não lineares sejam diferentes dos produzidos pelas constituintes quando actuam isoladamente.

Considerando a interacção das constituintes M_2 e N_2 a onda resultante é modulada com um período de 27.6 dias. Os efeitos não lineares que provocam o surgimento da harmónica M_4 devido a diferenças de profundidade são assim modulados com esta frequência o que produz uma variação na M_4 . Esta variação pode ser representada na análise harmónica por duas novas componentes: $2NM_2$ e $2MN_2$.

As correntes de maré serão também maiores quando M_2 e N_2 estão em fase do que as produzidas isoladamente por M_2 ou N_2 . O oposto acontece meio período depois. Devido à natureza quadrática da tensão de corte no fundo o aumento de perda de energia quando as constituintes estão em fase é superior à diminuição de perda de energia quando as componentes estão fora de fase, a perda total de energia é portanto superior quando as ondas actuam simultaneamente. Este facto tem consequências na calibração dos modelos numéricos: Quando um modelo é forçado apenas por uma componente na sua fronteira (usualmente a M_2) este efeito de aumento de perda por interacção entre constituintes não está presente, é assim necessário aumentar artificialmente o coeficiente de atrito de forma a obter bons resultados. Esta prática tem no entanto alguns inconvenientes: Os efeitos não lineares não são uniformes em todo o domínio não sendo bem representados por um aumento constante do coeficiente de atrito. A solução da constituinte principal é melhorada mas as constituintes geradas internamente são representadas de forma deficiente quando se aumenta artificialmente o valor do coeficiente de atrito (Amin, 1993). É por isso de grande importância forçar o modelo com o maior número de componentes disponível.

5.3.5 Interacção com a geometria

No interior dos estuários a maré não se comporta usualmente como uma onda de Kelvin uma vez que o equilíbrio da força de pressão devida ao gradiente da superfície livre se efectua principalmente com o atrito do fundo e não com a força de Coriolis como no caso da maré oceânica (LeBlond, 1978). A geometria do estuário condiciona a maré por efeito da continuidade, tendo este constrangimento uma importância superior à dos efeitos dinâmicos atrás referidos. Como as escalas dos constrangimentos a que cada constituinte da maré é sensível variam com o seu comprimento de onda o padrão de variabilidade torna-se bastante complexo. No interior de sistemas com zonas de descobertura estas regiões armazenam água durante a enchente libertando-a na vazante. Este efeito provoca uma distorção da onda de maré no interior do estuário mesmo em regiões profundas afastadas das zonas de descobertura tornando o estuário com vazante dominante: O período de enchente prolonga-se devido ao enchimento dessas regiões e o caudal de vazante é mais intenso devido ao jacto produzido na libertação da água (Speer et al., 1991). Este efeito tem grande importância do ponto de vista do transporte sólido promovendo o deslocamento de sedimentos para jusante

5.3.6 Interacção com correntes médias

No interior dos estuários o caudal do rio produz uma corrente com a qual o escoamento de maré tem capacidade para interagir. Ao contrário do que se viu na plataforma continental a pequena profundidade destas regiões permite Números de Froude perto da unidade para os quais a velocidade da corrente é da mesma ordem de grandeza da velocidade de propagação da onda de maré. Existe por isso uma sobreposição linear de transporte semelhante à das correntes oceânicas e uma interacção não linear através dos termos convectivo e de tensão de corte no fundo. O ciclo maré viva / maré morta modula a tensão de corte no fundo com um período quinzenal. Devido ao equilíbrio de forças entre o gradiente de pressão barotrópico e o atrito no fundo essa modulação

obriga a um ajustamento do gradiente da superfície livre com o mesmo período como indicado na figura 5.6.

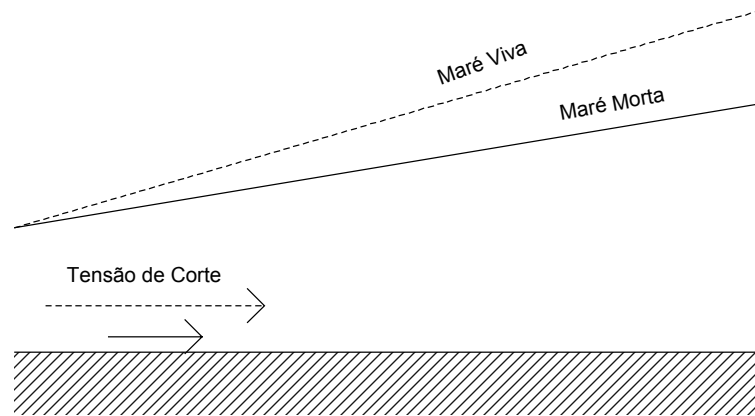


Figura 5.6: Variação do gradiente da S.L. em função da Tensão de corte no fundo.

Nas zonas mais a montante dos rios onde as ondas de frequência semi-diurna se encontram já bastante amortecidas ainda é possível encontrar uma modulação quinzenal na elevação da superfície livre com uma amplitude de alguns centímetros (Godin, 1991).

Nos períodos em que o caudal do rio é elevado a tensão de corte no fundo aumenta sendo necessário, para manter o equilíbrio atrás referido, um aumento do gradiente da superfície livre. O nível médio das regiões de montante aumenta por isso quando o caudal do rio é elevado. A dissipação produzida por essa tensão de corte provoca também uma diminuição da amplitude da maré nesses períodos.

5.3.7 Parâmetros caracterizadores da maré.

Resumem-se aqui alguns parâmetros globais caracterizadores da natureza da maré e das suas distorções.

O carácter diurno, semi-diurno ou misto da maré é caracterizado pelo coeficiente de forma da maré F , dado pela razão entre as amplitude das constituintes diurnas e semi-diurnas principais (Kjerfve e Knoppers, 1991):

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2} \quad 5.23$$

Para valores de F superiores a 3 a maré é considerada do tipo diurno e para $F < 0.25$ o seu carácter é semi-diurno. Para valores intermédios de F a maré é do tipo misto podendo apresentar alternadamente ciclos de grande e de pequena amplitude e podendo oscilar de diurna a semi-diurna ao longo do mês lunar.

A distorção barotrópica da onda de maré ou das velocidades de maré é contabilizada por dois parâmetros: M_4/M_2 e Δ .

A razão M_4/M_2 entre a amplitude da constituinte principal quarto-diurna e da constituinte principal semi-diurna indica a intensidade da distorção.

A fase relativa Δ é definida por:

$$\Delta = \phi_{M_4} - 2\phi_{M_2} \quad 5.24$$

onde ϕ são as fases das componentes M_2 e M_4 . Este parâmetro indica a direcção da distorção presente na onda.

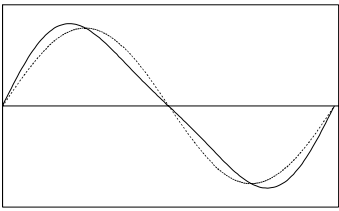
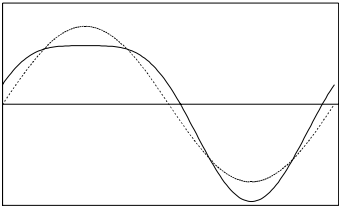
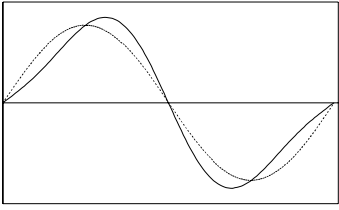
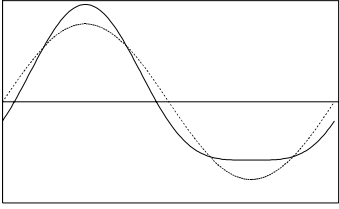
A tabela 5.2 resume os diversos tipos de distorção possíveis em função dos valores da fase relativa. A traço interrompido nas figuras encontra-se também indicado o andamento da onda M_2 original em função do tempo para comparação.

Do ponto de vista da geometria do domínio utilizam-se usualmente dois parâmetros para caracterizar globalmente a capacidade de distorção do estuário: a/h e V_s/V_c .

A razão a/h entre a amplitude da constituinte M_2 na fronteira aberta do sistema e a profundidade média do domínio caracteriza o estuário quanto à capacidade de distorção, considerando-se que os mecanismos não lineares são importantes para $a/h > 0.1$.

O quociente V_s/V_c entre o volume médio do prisma de maré e o volume médio do estuário é um indicador da capacidade de armazenamento do sistema nas zonas entre marés.

Tabela 5.2: Distorção barotrópica da maré em função da sua fase relativa.

Fase relativa	Forma da onda (η v.s. t)	Tipo de distorção
$\Delta = 0$		Enchente dominante: Enchentes curtas e com velocidades elevadas, vazantes lentas, inversão de maré com a mesma duração em preia-mar e em baixa-mar.
$\Delta = \pi/2$		Velocidades semelhantes em enchente e em vazante, inversão de maré mais demorada em preia-mar
$\Delta = \pi$		Vazante Dominante: Vazantes curtas e com velocidades elevadas; enchentes lentas, inversão de maré com a mesma duração em preia-mar e em baixa-mar.
$\Delta = 3\pi/2$		Velocidades semelhantes em enchente e em vazante, inversão de maré mais demorada em baixa-mar

Para valores de a/h superiores a 0.3 o sistema é usualmente do tipo enchente dominante, para valores inferiores a 0.2 o sistema é do tipo vazante dominante desde que a capacidade de armazenamento V_s/V_c seja elevada (Speer et al., 1991).

5.4 Fenómenos baroclínicos em estuários

5.4.1 Mistura e estratificação em estuários

Tradicionalmente classificam-se os estuários do ponto de vista da estratificação vertical como sendo do tipo Cunha salina, Fiorde, Parcialmente Misturado ou Homogéneo (Pritchard, 1955).

Muitos parâmetros têm sido propostos para caracterizar um estuário quanto à estratificação. Simmons (1955) propõe uma razão de caudais definida pelo quociente entre a descarga do rio durante um ciclo de maré e o prisma de maré, considerando-se que o estuário é fortemente estratificado para valores superiores a 1, parcialmente misturado para valores perto de 0.25 e completamente misturado para valores inferiores a 0.1. Ippen e Harleman (1961) usam um número de estratificação definido como a razão entre a energia perdida pela maré ao longo do estuário e a energia utilizada na mistura. Este número é equivalente ao inverso de um número de Richardson pelo que estuários bem misturados apresentam números de estratificação elevados. Hansen e Rattray (1966) apresentam um diagrama de estratificação V.S. circulação sendo o estuário caracterizado em função do parâmetro de estratificação $\nabla S/S_0$ onde ∇S é a diferença entre a salinidade do fundo e a da superfície e S_0 é a salinidade média da coluna de água e do parâmetro de circulação Q_s/Q onde Q_s é o caudal médio da camada da superfície e Q é o caudal médio da coluna de água.

A estratificação vertical da coluna de água no interior dos estuários é controlada, como no caso das águas costeiras, pela competição entre as forças de impulsão e os mecanismos de mistura. Uma medida global da estratificação da coluna de água num ponto é dada pela anomalia da energia potencial (Lewis, 1996):

$$\phi = \frac{g}{h} \int_{-h}^{\eta} (\rho - \rho_0) z dz \quad 5.25$$

Este parâmetro quantifica a energia necessária (em J/m^3) para misturar completamente a coluna de água. O valor é por isso positivo no caso de a coluna de água possuir estratificação estável.

No caso dos estuários a principal fonte de impulsão provém do caudal de água doce do rio. Este fluxo de impulsão, ao contrário das zonas costeiras em que a principal fonte é o aquecimento solar, é fornecido lateralmente ao domínio sendo depois redistribuído pela acção do campo de velocidades (Wheless e Valle-Levinson, 1996). Os gradientes horizontais assim produzidos são depois deformados por efeito de corte do perfil vertical de velocidades aumentando a estabilidade durante a vazante devido à convecção de água menos salina perto da superfície. A variação de ϕ por efeito de corte pode ser dada, ignorando efeitos na direcção transversal do estuário por (Simpson et al., 1990):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_C = \frac{g}{h} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \rho}{\partial x} (u - U) z \, dz \quad 5.26$$

ou, em termos globais (Vaz e Lennon, 1991):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_C = \frac{g^2 H^4 (\partial \rho / \partial x)^2}{\rho K_v} \quad 5.27$$

O mecanismo de mistura mais importante provém da turbulência que é gerada sobretudo em zonas de maior gradiente vertical de velocidade como sejam o fundo e a interface da cunha salina, caso esta exista. Considerando uma eficiência de mistura ε dada pela fracção da energia cinética turbulenta produzida no fundo que é utilizada na mistura da coluna de água e calculando a taxa de produção de energia cinética pela equação 5.15 obtém-se a variação da anomalia da energia potencial devida à tensão de corte no fundo:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_F = \frac{\varepsilon \rho C_d |u_*^3|}{H} \quad 5.28$$

Uma forma simples de determinar a localização temporal e espacial do ponto de transição entre o regime misturado e estratificado consiste em admitir que essa transição se dá quando o aumento de ϕ devido à mistura pela tensão de corte no fundo está em equilíbrio com a redução de ϕ pelo efeito de corte (Nunes e Lennon, 1987):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_C + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_F = 0 \Rightarrow \frac{H^5 (\partial \rho / \partial x)^2}{|u_*^3| K_v} = \frac{\varepsilon \rho^2 C_d}{g^2} = C^{te} \quad 5.29$$

Para o caso de estuários do tipo cunha salina para além da mistura devida à turbulência originada no fundo verifica-se também mistura devida à turbulência originada na interface da cunha salina. Esta mistura pode ser conseguida por difusão turbulenta ou por aprisionamento de fluido proveniente da camada inferior na camada superficial (Dyer, 1973). Para este tipo de estuário apesar de cerca de 90% da energia cinética turbulenta ser produzida no fundo, devido à grande estabilidade da coluna de água esta turbulência não consegue ser transportada para a pycnoclina (Bowden, 1983). Por este motivo a turbulência gerada localmente na interface é o principal mecanismo de aumento da energia potencial da coluna de água. A mistura na interface é controlada pelo número de Richardson de fluxo que é definido como a razão entre a taxa de aumento da energia potencial da coluna de água e a taxa de produção de energia cinética turbulenta na interface:

$$R_{if} = \frac{\partial E_p / \partial t}{P_i} \quad 5.30$$

O valor de R_f aumenta com o valor do número de Richardson de camada:

$$R_{iL} = \frac{\nabla \rho / \rho g D}{(\nabla u)^2} \quad 5.31$$

onde ∇ refere-se à diferença de valores entre a camada superior e a do fundo e D é a espessura da camada superior. Para valores de R_{iL} elevados no entanto, o desenvolvimento de ondas internas retira energia ao processo de mistura diminuindo R_{if} (Linden, 1979). Devido a este mecanismo de mistura na interface o valor de $\partial\phi/\partial t|_F$ necessita de ser modificado na equação 5.29 para o caso de estuários do tipo cunha salina, o que é usualmente feito através do valor de ε . Como o equilíbrio entre estratificação e mistura depende fortemente da velocidade da maré as características do estuário são moduladas na frequência da maré podendo este variar de fortemente estratificado no fim da vazante a misturado durante a enchente. Devido ao efeito da inércia verifica-se ser necessário um intervalo de tempo para o restabelecimento da estratificação depois de um período de condições misturadas. Este intervalo de tempo é inversamente proporcional à frequência de Brunt-Vaisala e faz com que as componentes de maré de maior período (quinzenais e superiores) tenham um maior controle no processo de estratificação. Devido à modulação anterior o transporte longitudinal e por consequência a renovação é aumentada nos períodos de maré morta ao contrário do que acontece em sistemas barotrópicos (Vaz e Lennon, 1991).

5.4.2 Assimetria interna do perfil vertical de velocidades

O carácter baroclínico do escoamento no interior do estuário pode provocar uma assimetria interna no perfil de velocidades com transferência de energia das frequências dominantes para frequências superiores e para os campos residuais. Durante a enchente o gradiente barotrópico de pressão e o gradiente baroclínico actuam ambos no sentido da enchente. A força baroclínica é máxima junto ao fundo produzindo um perfil de velocidades homogéneo em toda a coluna de água. A coluna de água encontra-se também mais homogénea durante a enchente contribuindo para uma maior difusão da quantidade de movimento e conseqüente uniformização do perfil de velocidades. Durante a vazante a força de pressão baroclínica na camada do fundo é contrária ao

escoamento e ao gradiente de pressões barotrópico produzindo um perfil de velocidades com maior corte, aumentando o *déficit* de velocidade junto ao fundo. Como durante a vazante a convecção do campo de densidades provoca maior estratificação a difusão turbulenta é inibida contribuindo para a forma do perfil.

A velocidade pode ser decomposta, para uma constituinte com frequência ω , na soma de uma parte reversível u_0 e de uma parte não reversível ∇ como indicado na figura 5.7 (Jay, 1991):

$$u(z,t) = u_0(z,t) - \Delta(z,t) = (A(z) - \delta(z))\cos(\omega t) \quad 5.32$$

Onde a parte reversível integrada na profundidade é igual ao caudal. Por esse motivo o valor da assimetria δ está sujeita ao constrangimento:

$$\int_{-h}^{\eta} \delta(z) dz = 0 \quad 5.33$$

mudando 180° de fase ao longo da coluna de água.

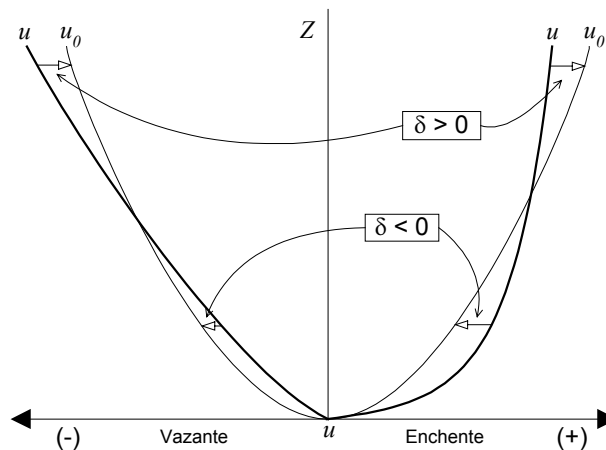


Figura 5.7: Decomposição do perfil de velocidades.

Este tipo de assimetria surge em domínios que simultaneamente possuem um forte gradiente horizontal de densidades, um escoamento dominado pela maré

com caudais de enchente e de vazante comparáveis e onde as forças barotrópicas e baroclínicas são semelhantes. Esta última condição é equivalente a impor um número de Froude interno unitário (Jay e Musiak, 1996)

$$Fr_i = \frac{u}{\sqrt{(\nabla\rho/\rho)gD}} \quad 5.34$$

A assimetria no campo de velocidades produz tensões de corte no fundo diferentes na enchente e na vazante. Esta assimetria no corte e a assimetria na difusão vertical da quantidade de movimento produzem componentes residuais e harmónicas internas de frequência superior no campo de velocidade. Estas harmónicas manifestam-se numa decomposição de δ em série de Fourier sendo as frequências M_4 e M_8 as mais importantes. A fase destas constituintes do campo de velocidade mudam 180° do fundo até à superfície pelo que não alteram o caudal total e não deformam a superfície livre. Como parâmetro indicador deste processo utiliza-se a amplitude normalizada definida por (Jay e Musiak, 1996):

$$A_N = \frac{M_{4v}/M_{4z}}{M_{2v}/M_{2z}} \quad 5.35$$

que compara as amplitudes dos sinais M_2 e M_4 da elevação e da velocidade. Valores elevados de A_N revelam a presença de componentes M_4 na velocidade sem correspondência na elevação sugerindo a existência de assimetria interna. A assimetria do campo de velocidades com velocidades elevadas à superfície na vazante e no fundo durante a enchente é um mecanismo importante no transporte de sal e de sedimentos no estuário.

5.4.3 Frentes e plumas produzidas por fluxos de água doce

Devido à variação espacial dos mecanismos de mistura e de geração da estratificação halina formam-se frequentemente estruturas frontais separando regiões com diferentes padrões de estratificação. As frentes assim formadas podem ser do tipo frentes de pluma, frentes de intrusão e frentes longitudinais.

As frentes do tipo pluma estão normalmente associadas a estuários com caudal de água doce elevado e baixo efeito de mistura pela maré, possuindo por isso uma estrutura vertical na zona da barra de forte estratificação. O caudal de água doce escoar-se essencialmente pela camada da superfície podendo haver arrastamento de água salina da camada inferior se o número de Froude interno for elevado (Dyer, 1973). Quando este número de Froude é unitário o escoamento baroclínico torna-se crítico havendo um controle hidráulico do caudal na barra do estuário (Noble et al., 1996). O escoamento na zona costeira adjacente ao estuário é caracterizado por uma pluma de baixa salinidade formando-se na altura da vazante uma frente à superfície em forma de semi-círculo separando a água costeira da água de menor salinidade proveniente do estuário. Em ambas as extremidades dessa estrutura frontal formam-se frequentemente vórtices rodando em sentido oposto como indicado na figura 5.8. A pluma tem tendência para se deformar devido ao efeito de Coriolis, podendo o vórtice do lado direito (esquerdo no caso do hemisfério Sul) atingir a Costa.

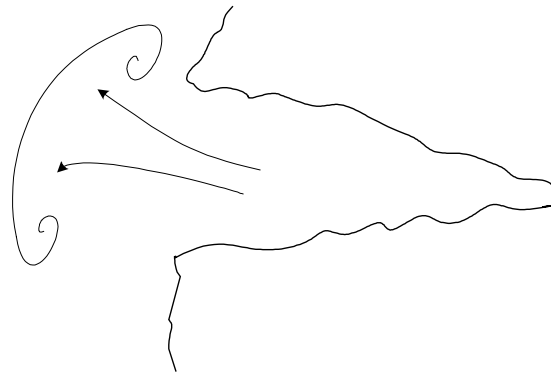


Figura 5.8: Frente estuarina do tipo pluma.

A mistura na zona da frente faz-se por um mecanismo de rolamento com a água costeira a penetrar por baixo da água estuarina enquanto que a mistura na zona dos vórtices é efectuada em toda a profundidade da coluna de água (Wheless e Valle-Levinson, 1996). A eficiência dos mecanismos de mistura na zona frontal condicionam a salinidade na região da plataforma adjacente ao estuário controlando a existência e características de um regime do tipo ROFI. A região frontal de uma frente de pluma desloca-se para o exterior com uma velocidade da ordem de $\sqrt{g'h}$ que corresponde à velocidade de fase do primeiro modo interno. Quando a velocidade da enchente é superior a este valor a frente pode ser transportada para o interior do estuário passando-se a denominar frente de intrusão (Simpson e James, 1986). Na região da frente de intrusão a água doce mistura-se com a água salgada produzindo uma água de salinidade intermédia que afunda provocando, por continuidade, convergência em ambos os lados da frente. Estas frentes tem frequentemente a forma de "V" formando-se um vórtice na zona central como esquematizado na figura 5.9. A frente forma-se geralmente durante o início da enchente sendo posteriormente destruída pelo campo de velocidades.

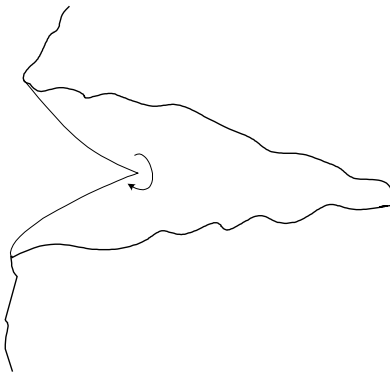


Figura 5.9: Frente estuarina de intrusão.

As frentes longitudinais são caracterizadas por uma região linear paralela ao eixo do estuário onde se desenvolvem grandes gradientes horizontais de salinidade como indicado na figura 5.10.

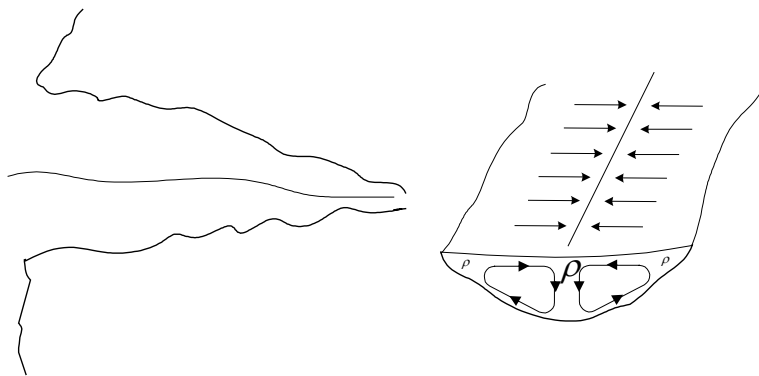


Figura 5.10: Frente estuarina longitudinal.

Este tipo de frente pode ser provocada por dois mecanismos diferentes consoante se desenvolva em estuários estratificados ou verticalmente homogêneos. Em estuários estratificados a energia de mistura pelo corte no fundo e nas fronteiras laterais pode ser suficiente para homogeneizar a coluna de água nas regiões de menor profundidade, usualmente junto às margens. A região central de maior profundidade mantém-se estratificada surgindo uma frente ao longo do eixo do estuário separando estes dois regimes. Os gradientes transversais são mais pronunciados na vazante devido ao efeito adicional de deformação do gradiente longitudinal devido ao corte. Na zona da frente a

mistura produz uma água de densidade intermédia que afunda ao longo da região frontal mantendo de ambos os lados da frente uma convergência transversal à superfície (Bowman e Iverson, 1978).

Em estuários verticalmente homogêneos, durante o período da enchente o efeito de corte vertical e horizontal actuam no gradiente longitudinal de salinidades produzindo no eixo do estuário uma região de densidade mais elevada à superfície. Este gradiente de densidade produz uma circulação transversal com convergência na superfície e afundamento na região central como esquematizado na figura 5.10. Este tipo de frentes, devido ao seu mecanismo de formação surgem apenas durante a enchente associadas a gradientes longitudinais de salinidade importantes podendo produzir velocidades transversais à superfície da ordem dos 20% da velocidade longitudinal (Simpson e James, 1986).

5.4.4 Fenómenos baroclínicos na região de influência da água doce

As regiões de influência da água doce (ROFIs) são zonas costeiras com um regime misto entre o de plataforma e o de estuário onde o fornecimento de impulsão pelo caudal de água doce é igual ou superior ao fornecimento sazonal de impulsão pela radiação solar. Nestas regiões os processos característicos da plataforma e do estuário sobrepõem-se criando-se um sistema complexo.

Quando os processos de mistura são fracos e a topografia não restringe o escoamento o caudal de saída do estuário progride como uma corrente costeira em equilíbrio geostrófico como indicado na figura 5.11.

As frentes do estuário, principalmente as frentes de pluma e de intrusão controlam as características dessa corrente tanto no que diz respeito à salinidade como às suas dimensões. Como são fenómenos com frequência elevada comparativamente à corrente em regime geostrófico a sua influência faz-se sentir essencialmente através dos efeitos que produzem na mistura.

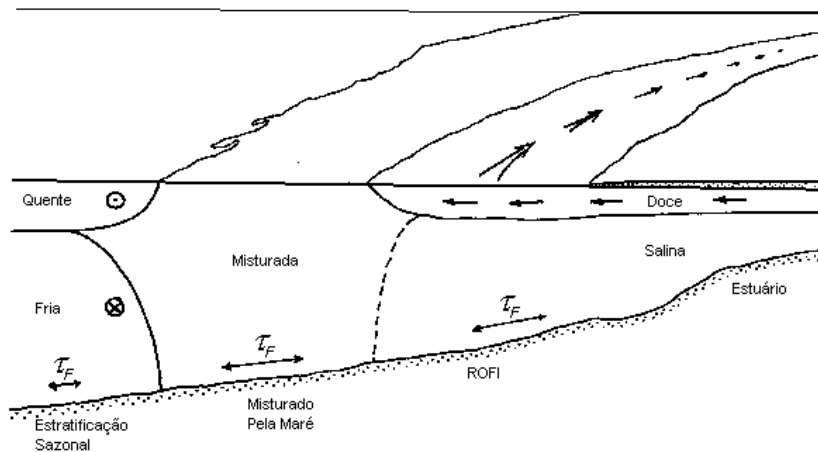


Figura 5.11: Estrutura esquemática dos regimes da plataforma e do ROFI.

O atrito no fundo é normalmente suficiente para estabilizar o escoamento mas quando tal não se verifica podem-se desenvolver instabilidades baroclínicas na fronteira oposta a terra com a formação de meandros e turbilhões (Simpson, 1997).

Para além desta corrente em equilíbrio geostrófico que induz estratificação, encontra-se também presente um mecanismo de estratificação por deformação dos gradientes horizontais de densidade. De forma semelhante aos estuários este efeito advectivo do perfil vertical da velocidade de maré modula a estratificação nas frequências semi-diurna e quinzenal (Simpson et al., 1990).

Os mecanismos de mistura são devidos à acção conjunta da tensão de corte, do efeito do vento e das ondas. Quando a mistura é intensa a corrente geostrófica pode ser inibida restabelecendo-se quando a energia de mistura desce abaixo de um valor crítico.

Para além de influenciar a mistura o vento tem também um papel importante na progressão da corrente podendo suprimi-la quando produz um escoamento de *upwelling* importante (Lee e Pritchard, 1996).

O dinâmica da estratificação e da zona frontal a ela associada assim como a influência desta região na circulação costeira condicionam o transporte de

sedimentos e de poluentes sendo também de grande importância do ponto de vista biológico.

5.5 Conclusões

Neste capítulo analisaram-se os principais mecanismos que influenciam o escoamento de maré nas zonas costeiras e no interior dos estuários. Viu-se que tanto nos escoamentos barotrópicos como nos baroclínicos a natureza não linear das equações de transporte é responsável pela distorção da maré produzindo assimetrias no escoamento e gerando constituintes harmónicas com frequências superiores à da onda original. Nos domínios onde as diferenças de densidade são importantes viu-se que a competição entre os processos de mistura e de estratificação ditam a natureza do escoamento formando-se zonas frontais dividindo regiões com diferentes características. O estudo das embocaduras dos estuários deve pois ser feito recorrendo a modelos baroclínicos tridimensionais, especialmente em condições de caudal elevado. No capítulo seguinte apresentam-se várias aplicações do modelo, algumas delas em domínios reais, tentando-se identificar alguns dos fenómenos descritos neste capítulo.

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentam-se várias aplicações efectuadas com o modelo, tendo como objectivo a sua validação. A validação deve neste caso ser entendida no sentido lato como o processo de legitimação de um modelo novo e não apenas a aplicação de um modelo existente a um novo domínio. Este é um processo complexo, devendo-se adoptar várias abordagens diferentes: Testes preliminares às propriedades numéricas do modelo, Comparação com resultados analíticos, comparação com resultados numéricos de modelos fiáveis e comparação com medidas experimentais de campo e de modelos físicos. Estas abordagens não são alternativas, devendo ser aplicadas em conjunto de forma a aumentar a credibilidade nos resultados e a robustez do modelo em novas situações. Este é obrigatoriamente um processo iterativo que está intimamente ligado à detecção de erros, à optimização do código e à sua manutenção, devendo ser efectuado em conjunto com estes.

O aumento da capacidade de cálculo e a melhoria dos métodos numéricos tem permitido na última década a modelação hidrodinâmica de zonas costeiras com elevados níveis de resolução e precisão. Por esse motivo o conhecimento da hidrodinâmica deixou de ser um fim em si, passando a ser uma ferramenta que permite a análise dos processos físicos, químicos e biológicos presentes nesses sistemas. Esta nova dimensão exige do modelo hidrodinâmico uma modularização e flexibilidade que permita a sua ligação a modelos de descrição desses processos físicos. O modelo foi desenvolvido de forma a permitir a integração de modelos de transporte de sedimentos, de qualidade da água e de produção primária desenvolvidos por outros grupos. A abordagem do volume finito revelou-se eficiente nesta integração interdisciplinar pois permite um relacionamento coerente entre os fluxos das grandezas hidrodinâmicas e das grandezas próprias de cada módulo. Do ponto de vista da validação a inclusão dos módulos obriga por isso a uma estreita colaboração entre as diversas equipas de forma a obter um desempenho correcto de todo o sistema.

Nas secções que se seguem descrevem-se algumas das aplicações efectuadas, tanto em domínios esquemáticos como reais, não se tratando no entanto de uma descrição exhaustiva do processo de validação. Nas aplicações em domínios reais apresentam-se resultados obtidos da colaboração interdisciplinar entre as diversas equipas que utilizaram o modelo, apresentando-se por isso resultados de transporte de sedimentos e de qualidade da água obtidos por esses modelos.

6.1 Escoamento barotrópico com solução analítica

A comparação dos resultados de modelos com soluções analíticas permite determinar exactamente o erro da solução para o escoamento em questão. Tem também a vantagem de fornecer resultados em todo o domínio e permite a manipulação dos parâmetros geométricos e do escoamento dentro dos limites impostos pela solução analítica. As soluções analíticas no entanto, obrigam invariavelmente à simplificação das equações do movimento e restringem a geometria e o forçamento a determinadas funções. Por esse motivo a comparação com soluções analíticas é um instrumento valioso na validação de um modelo, devendo-se ter presente as suas limitações.

Existe na literatura um vasto conjunto de soluções analíticas para casos particulares das equações primitivas (Briggs e Madsen, 1973), (Ippen, 1966). Estas soluções são normalmente obtidas para geometrias simples, usualmente canais rectangulares com profundidade constante, não se testando por isso algumas das características do modelo com sejam a capacidade de descrever uma geometria complexa ou uma batimetria de profundidade irregular.

Nestes testes optou-se pelas soluções propostas por (Lynch e Gray, 1978) que permitem esse tipo de teste. Nestas soluções a batimetria tem a forma de um sector circular com profundidade variável segundo a forma $h(r) = h_0 \cdot r^2$ como representado na figura 6.1.

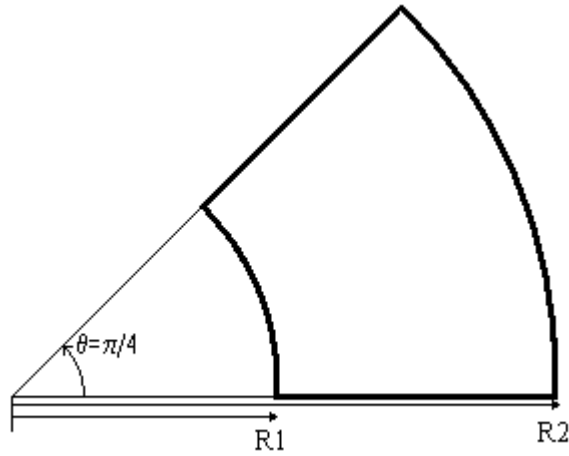


Figura 6.1: Geometria horizontal do domínio de cálculo.

As equações a resolver são um caso particular das equações para águas pouco profundas integradas na profundidade:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \quad 6.1$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \tau^f \bar{u}_i - \frac{\tau_i^w}{H} = 0 \quad i = 1, 2 \quad 6.2$$

Estas equações foram simplificadas e linearizadas suprimindo os termos difusivo e convectivo. Mantêm no entanto a tensão de atrito devida ao vento τ_i^w e uma tensão de corte linearizada no fundo, função da constante τ^f . Este último facto é de grande importância pois permite incluir um mecanismo de dissipação no modelo o que é decisivo para a sua estabilidade. A fronteira aberta deste domínio é a aresta exterior do sector circular $r = R2$. Trata-se de uma fronteira aberta com forma curva sendo no entanto facilmente implementada no modelo devido a forma utilizada para o mapeamento das células de cálculo. A condição de maré imposta nessa fronteira é do tipo

$\zeta = \zeta_0 \cdot e^{i\omega t}$. A solução analítica das equações sujeitas a essa condição fronteira é da forma:

$$\zeta(r, t) = \text{Re} \left\{ \zeta_0 \frac{\text{Cosh} \left[\frac{\beta}{2} (r^2 - R1^2) \right]}{\text{Cosh} \left[\frac{\beta}{2} (R2^2 - R1^2) \right]} e^{i\omega t} \right\}$$

onde

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 - i\omega\tau}{gh_0}}$$

Devido a questões de precisão relacionadas com o cálculo da solução analítica optou-se por um domínio de cálculo com as dimensões $R1 = 2000\text{m}$, $R2 = 4000\text{m}$, $\Delta x = \Delta y = 40\text{m}$, com uma batimetria dada por $h = 3.125 \times 10^{-7} r^2$ e forçado por uma onda da forma $\zeta = 0.1 e^{i\pi/600t}$. Utilizou-se para o cálculo da tensão de corte no fundo o valor $\tau = 0.03 \text{ s}^{-1}$.

Na solução numérica utilizou-se o mesmo domínio e condições fronteira, anularam-se os termos difusivo e convectivo e linearizou-se o atrito no fundo. Não se considerou nesta aplicação a tensão do vento para testar a simetria da solução. Como se trata de uma solução integrada na profundidade considerou-se uma discretização vertical do tipo sigma com apenas uma camada.

Na figura 6.2 compara-se a elevação da solução numérica com a solução analítica para uma angulo de fase da condição fronteira de $2n\pi$. As duas soluções são coincidentes na quase totalidade do domínio

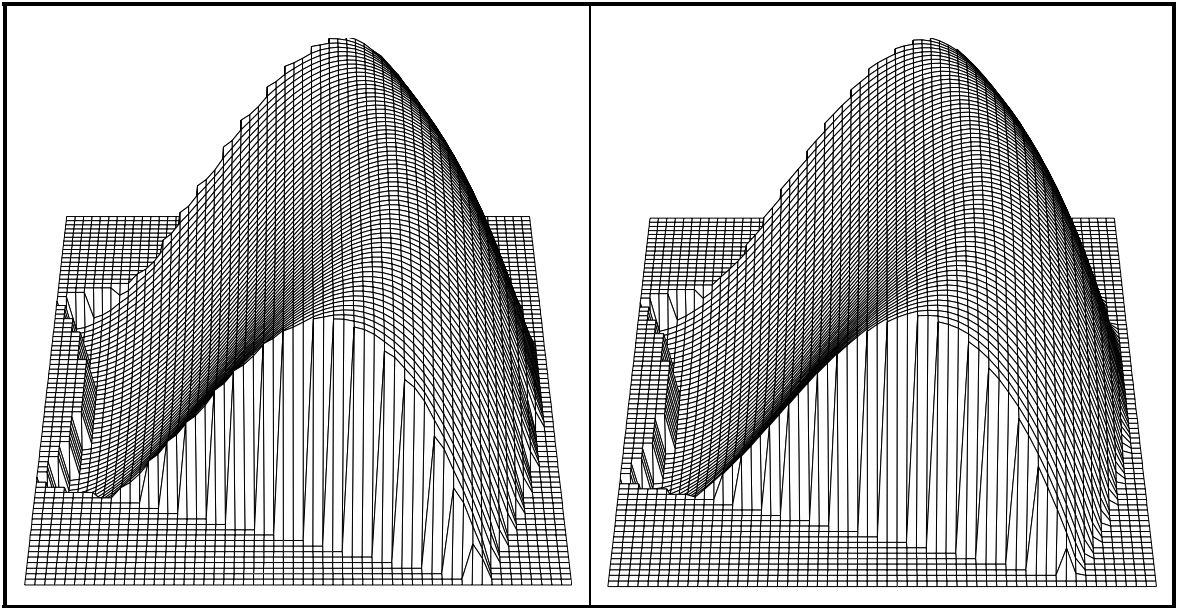


Figura 6.2: Elevação das soluções numérica (esquerda) e analítica (direita).

Na figura 6.3 representa-se o erro relativo entre estas duas soluções. As diferenças são inferiores a 0.008% em praticamente todo o domínio.

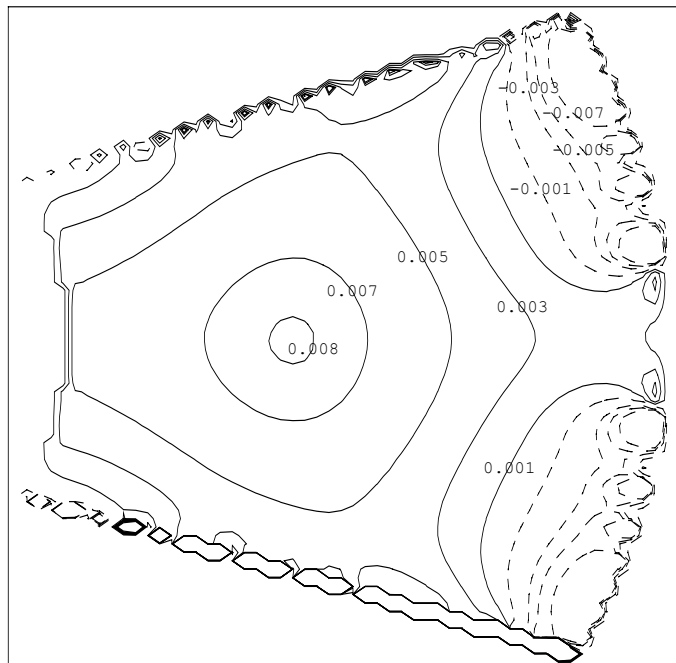


Figura 6.3: Erro relativo entre a solução analítica e numérica.

Nas vizinhanças das fronteiras laterais podem-se observar erros máximos de 3mm. Estas diferenças são possivelmente devidas às reflexões que a onda de superfície sofre nas fronteiras laterais do modelo numérico e que estão naturalmente ausentes na solução numérica. O tipo de exemplo escolhido cumpre assim um dos seus objectivos que é o de analisar o comportamento do modelo em face de uma geometria irregular. Pode-se também verificar que a simetria da solução é perfeita.

Na figura 6.4 comparam-se os perfis da superfície livre $\zeta(r)$ na secção $\theta = \pi/8$ para os instantes correspondentes a fases $n\pi/2$ da condição fronteira.

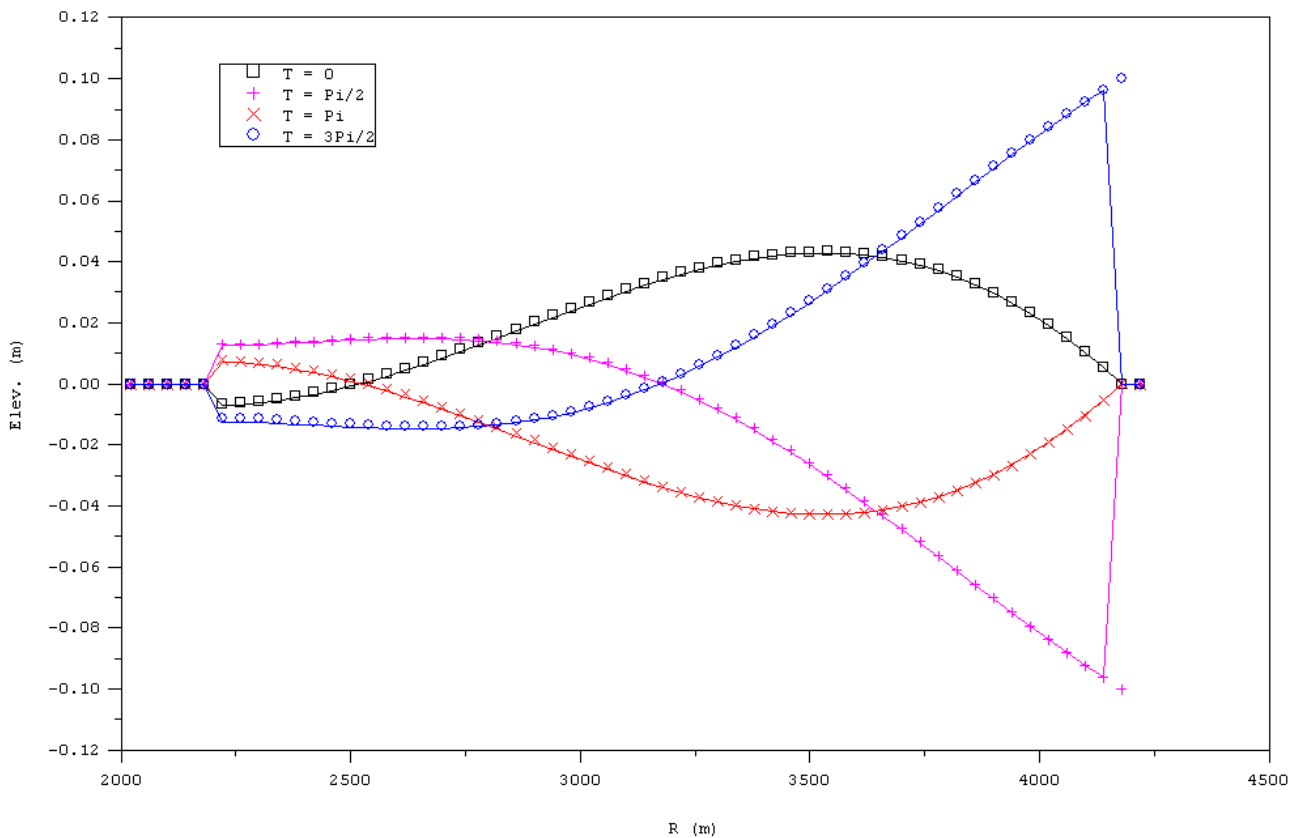


Figura 6.4: Solução numérica (símbolos) e analítica (linhas) na secção $\theta = \pi/8$.

Nessa secção, distante das fronteiras sólidas, os perfis da solução analítica e da solução numérica são praticamente coincidentes. Da análise da figura conclui-

se também que os erros de fase entre as duas soluções conservam-se pequenos.

Com esta aplicação o modelo mostrou-se capaz de descrever de forma adequada um escoamento simplificado com alguma complexidade na geometria. Não foram no entanto testados os termos convectivo, difusivo, baroclínico e de Coriolis e as equações de transporte de salinidade e de temperatura não foram também usadas. Na próxima secção apresenta-se um teste onde a geometria é muito simplificada mas em que se testam de uma forma qualitativa alguns de estes termos.

6.2 Escoamento baroclínico num tanque

Nesta aplicação pretende-se testar o comportamento do modelo numa situação baroclínica. Para se isolar apenas os efeitos baroclínicos considerou-se uma geometria de teste muito simples do tipo bidimensional integrada lateralmente. Os resultados obtidos foram comparado com os do modelo *TRID*. Este é um modelo de dupla coordenada sigma com uma discretização temporal semelhante à do modelo apresentado e que tem sido largamente validado em vários domínios onde o forçamento baroclínico é importante

A configuração adoptada foi a de um canal rectangular fechado em todas as arestas com apenas uma célula de largura de forma a não incluir efeitos laterais na solução. A distribuição inicial de salinidade é a apresentada na figura 6.5. Utilizou-se uma discretização com 20 células na horizontal e um passo espacial de 300m. Na direcção vertical usou-se um domínio sigma com 20 camadas e uma profundidade constante de 600 m.

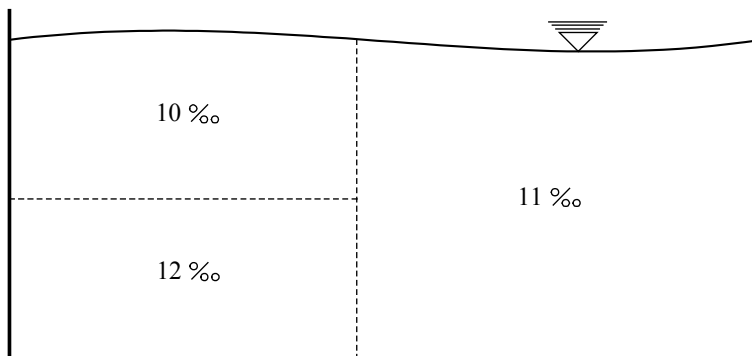


Figura 6.5: Geometria do problema e distribuição inicial de salinidade.

O forçamento deste sistema é exclusivamente baroclínico sendo de prever um deslocamento do fluido de densidade intermédia para uma posição estável entre os outros dois fluidos. Desta forma, devido aos efeitos de inércia, gera-se um movimento oscilatório das três massas de água em torno dessa situação de equilíbrio.

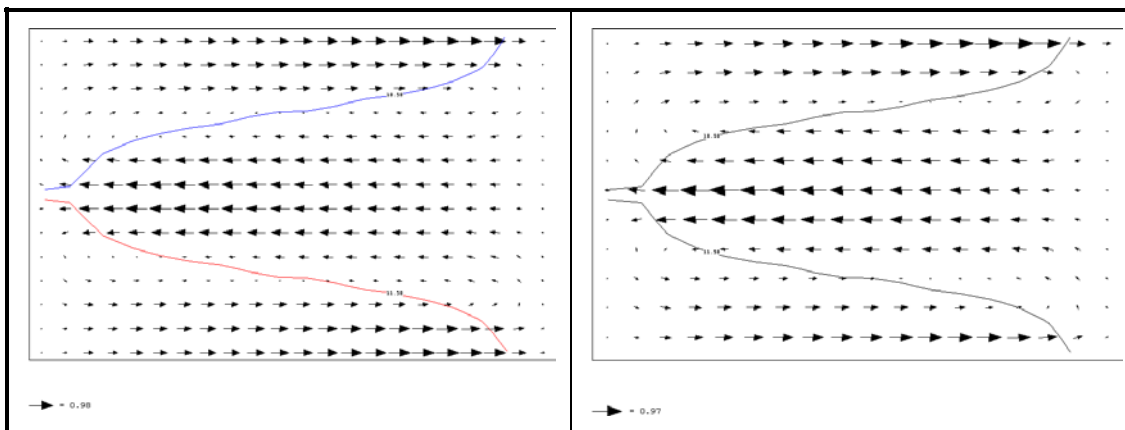


Figura 6.6: Campos de velocidades e salinidade 1 h após o início da simulação.

Na figura 6.6 comparam-se os campos de velocidades e isolinhas de salinidade para o modelo implementado (esquerda) e para o modelo *Trid* (direita), 1 hora após o início da simulação. Os campos de velocidade apresentam o mesmo andamento e os campos de salinidade são muito semelhantes sendo a diferença em cada ponto sempre inferior a 0.02%. Neste teste anularam-se os termos de difusão e de tensão no fundo de forma a que o amortecimento do movimento oscilatório fosse mínimo. Dessa forma podem-se tirar algumas

conclusões sobre a difusão numérica do esquema utilizado. Para o caso de forçamento baroclínico a difusão numérica revela-se de duas formas distintas: Directamente nas equações hidrodinâmicas onde actua como um termo difusivo de quantidade de movimento e indirectamente através das equações de transporte da salinidade e temperatura alterando o campo de densidades e por isso o forçamento.

Calcularam-se em cada instante, os valores globais de energia cinética, energia potencial e energia total do sistema, tendo-se simultaneamente verificado a conservação da massa no domínio. Na figura 6.7 representam-se esses resultados para 24 horas de simulação.

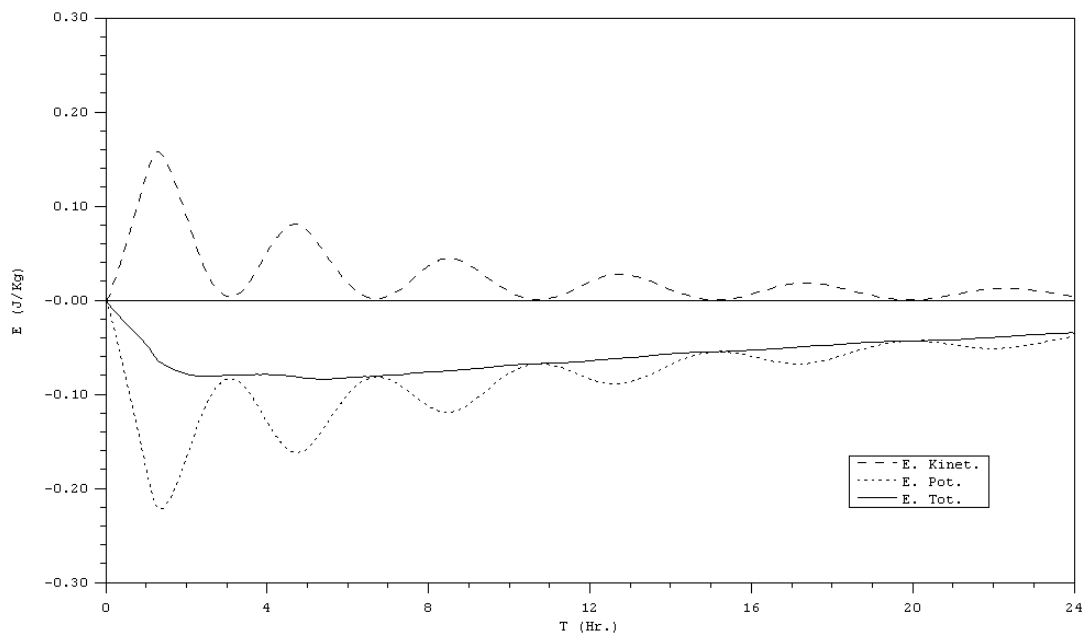


Figura 6.7: Evolução temporal da energia do sistema.

Verifica-se uma simetria quase perfeita com transferência entre energia potencial e cinética ao longo do processo oscilatório.

A difusão numérica produz dois efeitos de natureza oposta na energia do sistema: Nas equações hidrodinâmicas comporta-se como um termo de difusão real, dissipando a energia cinética e diminuindo a energia total do sistema, particularmente quando a velocidade é elevada. Nas equações de transporte da

salinidade a difusão numérica contribui para a difusão vertical da salinidade na interface entre as massas de água onde o gradiente é elevado. Este último efeito transporta sal do fundo para a superfície aumentando a energia potencial do sistema e por isso a sua energia total. Este aumento é simétrico da variação da anomalia da energia potencial (equação 5.25). O limite superior do aumento de energia corresponde à situação do fluido completamente homogéneo. Estes dois efeitos têm escalas de tempo diferentes. A dissipação de energia cinética está associada ao campo de velocidades sendo mais intensa quando a velocidade é elevada e actuando instantaneamente. Este facto explica a intensa diminuição de energia total nas primeiras duas horas de simulação. O aumento de energia potencial depende do transporte difusivo na vertical possuindo, o seu efeito acumulado, uma escala de tempos mais longa. Isto explica o progressivo aumento na energia total do sistema a partir das duas horas de simulação.

Esta aplicação permitiu o teste das equações de transporte da salinidade e temperatura e do termo de pressão baroclínico, mostrando por comparação com um modelo fiável a precisão dos resultados. Os diversos tipos de condição fronteira e o termo difusivo não foram no entanto testados sendo para isso necessárias geometrias mais complexas. Nas aplicações seguintes aplica-se o modelo em domínios reais onde se procura uma validação hidrodinâmica com medidas de campo.

6.3 Estuário do Sado

O modelo foi aplicado no estuário do Sado integrado num estudo de impacto ambiental produzido por trabalhos de dragagem nesse domínio (Silva et al., 1998). As características físicas e hidrodinâmicas do domínio são primeiro descritas, apresentando-se depois os resultados obtidos pelo modelo.

O estuário do Sado possui uma área de aproximadamente 160 Km^2 com um comprimento de 20 Km e uma largura média de 8 Km . A sua profundidade média é de 8 m possuindo uma profundidade máxima da ordem dos 50 m perto da barra. Do ponto de vista morfológico pode-se dividir o estuário em duas

regiões de características distintas como representado na figura 6.8. A região I apresenta uma topografia complexa com zonas de baixa profundidade e canais de acentuada curvatura. Perto da barra bancos de areia individualizam um canal norte e um canal sul com características hidrodinâmicas diferentes. A zona de montante caracteriza-se por um sapal que ocupa uma área de cerca de 1/3 da região I. A região II é constituída por uma canal longo e estreito, com uma profundidade média da ordem de 1 m que liga o estuário ao rio Sado.

A cidade de Setúbal com cerca de cem mil habitantes e as intensas actividades portuária e industrial que se desenvolvem na sua margem Norte são responsáveis por uma grande pressão antropogénica sobre o sistema. A margem Sul é caracterizada por dunas despovoadas, possuindo apenas algumas estruturas turísticas próximo da barra. A região de montante é constituída principalmente por áreas florestais e de cultivo. No seu interior a pesca é ainda uma importante actividade económica a par da aquacultura. A produção de ostras foi uma actividade importante nos anos 60 tendo sido a sua elevada mortalidade nos anos 70 e 80 frequentemente associada à operação dos estaleiros da Setenave.

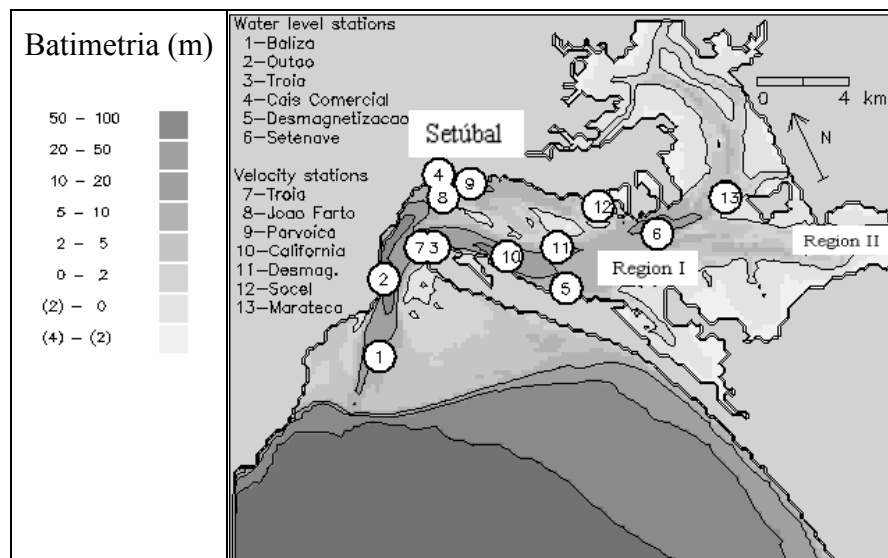


Figura 6.8: Estuário do Sado: Batimetria e identificação das estações.

A importância económica e natural do estuário justificam o seu estudo aprofundado. A batimetria é medida com frequência, em especial na área de navegação. O sinal de maré e as velocidades foram medidos pela marinha Portuguesa em diversos pontos do estuário usando instrumentos fixos (Sobral, 1977). Ribeiro e Neves (1982) mediram velocidades em 12 estações fixas durante um ciclo de maré e distribuições horizontais de salinidade e temperatura. Wollast (1978a, 1978b, 1979) mediu propriedades hidrodinâmicas e geoquímicas. Neves (1985) efectuou a simulação hidrodinâmica do domínio usando um modelo bidimensional integrado na profundidade. Estes estudos permitiram entender os principais mecanismos que controlam a circulação no estuário e permitiram uma primeira caracterização do seu estado ambiental.

O escoamento é forçado principalmente pela maré. A maré é do tipo semi-diurno com amplitudes que variam de 1.6 m em maré viva a 0.6 m em maré morta. O seu factor de forma, dado pela equação 5.23, para o marégrafo de Sesimbra localizado no exterior do estuário é de 0.1 indicando o carácter acentuadamente semi-diurno da maré. A onda de maré em Sesimbra é do tipo "enchente dominante" com um valor da fase relativa Δ de $\pi/4$ (equação 5.24) a intensidade da distorção é no entanto pequena com uma relação M_4 / M_2 entre as amplitudes das constituintes de apenas 0.01. Este valor cresce progressivamente quando se progride para o interior do estuário, reflectindo a geração de constituintes de ordem superior devido aos efeitos não lineares. A tabela 6.1 mostra esses valores para diversos pontos no interior do estuário.

Tabela 6.1: Parâmetros caracterizadores da maré no estuário do Sado.

	Sesimbra	Outão	Tróia	C.Comerc.	Desmagn.	Setenave
F	0.100	0.099	0.096	0.096	0.093	0.092
Δ	0.241π	$0.687 \cdot \pi$	$0.586 \cdot \pi$	$0.707 \cdot \pi$	$0.607 \cdot \pi$	$0.528 \cdot \pi$
M_4 / M_2	0.009	0.012	0.018	0.024	0.035	0.039

A fase relativa passa repentinamente de valores baixos no exterior do estuário para valores próximos de $\pi/2$ no seu interior, indicando que os efeitos não

lineares presentes perto da barra são responsáveis por uma alteração nas características da maré que passa a apresentar inversões de maré longas na preia-mar (ver tabela 5.2). Os efeitos não lineares são no entanto muito reduzidos apresentando a onda de maré uma forma essencialmente do tipo M_2 . Perto da embocadura formam-se dois vórtices residuais que ocupam grande parte da região e condicionam o transporte nessa zona. Na região de montante o padrão é mais complexo confirmando a divisão do estuário em duas regiões como sugerido por Wollast baseado em distribuições de temperatura e salinidade. Estes estudos indicam que a região de jusante do estuário se comporta, do ponto de vista hidrodinâmico, como uma lagoa costeira com pequena influência da água doce e que a região de montante possui características típicas de um estuário estreito. O tempo de residência no estuário foi estudado utilizando traçadores lagrangeanos (Neves, 1985) tendo-se mostrado que o tempo de residência na região de jusante é da ordem de alguns dias enquanto na região de montante é da ordem dos meses. Esta diferença confirma a divisão do estuário em duas regiões com características marcadamente distintas.

O caudal do rio apresenta uma forte variabilidade com valores diários no Verão inferiores a $1 \text{ m}^3/\text{s}$ e valores máximos no Inverno superiores a $20 \text{ m}^3/\text{s}$, sendo o valor médio anual de cerca de $1 \text{ m}^3/\text{s}$. As medidas de salinidade e velocidade de Ambar et al., (1980) permitem classificar o estuário como fracamente estratificado segundo o diagrama de Hansen e Rattray (ver secção 5.4.1).

A plataforma exterior ao estuário possui um canal de navegação com 14 m de profundidade. Foram efectuados estudos de optimização para os trabalhos de dragagem do canal (localização e profundidade inicial) usando um modelo bidimensional e considerando os efeitos combinados da maré e das ondas (Silva e Leitão, 1995). Os resultados deste estudo auxiliaram a interpretação dos processos físicos que controlam o transporte nessa região e mostraram que apenas um modelo tridimensional poderia explicar alguns aspectos relacionados com a formação do grande banco de sedimentos localizado na embocadura. A

estrutura tridimensional do escoamento perto da barra, aliada ao efeito das ondas, controlam o transporte de sedimentos na plataforma anexa ao estuário. Com o objectivo de estudar a estrutura tridimensional do escoamento na região de jusante do estuário implementou-se neste sistema o modelo desenvolvido. Devido à pequena influência da água doce nesta região usou-se numa fase inicial apenas forçamento barotrópico, tendo-se incluído numa fase posterior também o forçamento baroclínico.

Para a discretização do domínio utilizou-se uma malha horizontal de 120 x 158 pontos com passo espacial constante de 200 m e uma discretização vertical do tipo sigma com 6 camadas. A maré foi imposta na fronteira aberta usando 22 componentes harmónicas do marégrafo de Sesimbra, tendo-se corrigido as fases de forma a reflectir a progressão da onda até à fronteira.

6.3.1 Calibração barotrópica

Os resultados do modelo com forçamento barotrópico foram comparados com medições de nível das estações 1 a 6 da figura 6.8 e com medições de velocidade das estações 7 a 13. As estações de velocidade possuem um correntómetro localizado 1 m abaixo da superfície livre e outro localizado 3 m acima do fundo (Ribeiro e Neves, 1982). Na figura 6.9 comparam-se os níveis para a estação 6 localizada no interior do estuário. As diferenças de amplitude e de fase são pequenas tornando-se ainda menores nas estações perto da barra.

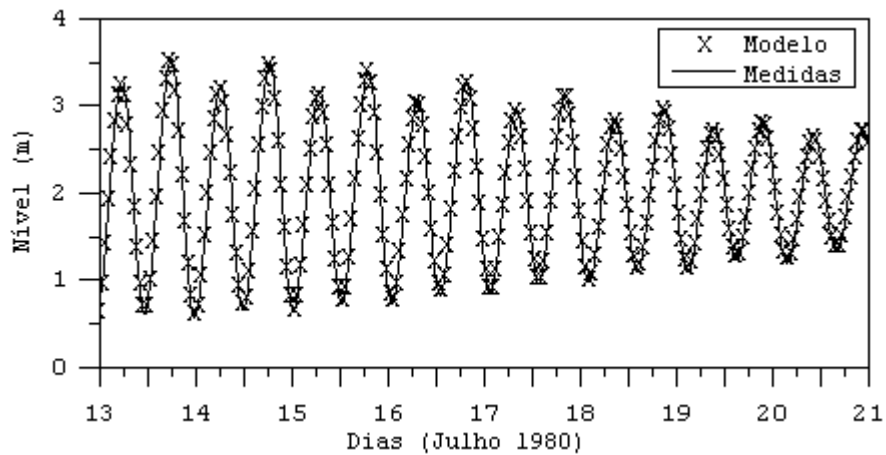


Figura 6.9: Comparação dos níveis para a estação 6 (Setenave).

Nas figuras 6.10 e 6.11 comparam-se as velocidades dos correntómetros da estação 11 (desmagnetização) com os resultados do modelo à mesma profundidade.

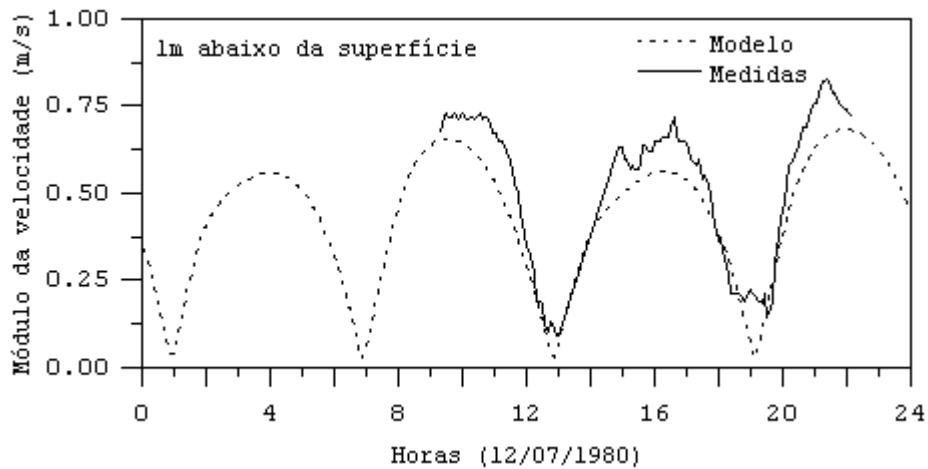


Figura 6.10: Comparação da velocidade na superfície para a estação 11.

Pode-se verificar que a velocidade de fase das medidas e do modelo é muito semelhante e que o erro relativo máximo na amplitude se situa entre os 10% e os 20% o que se considera aceitável tendo em atenção os erros da batimetria e das medições.

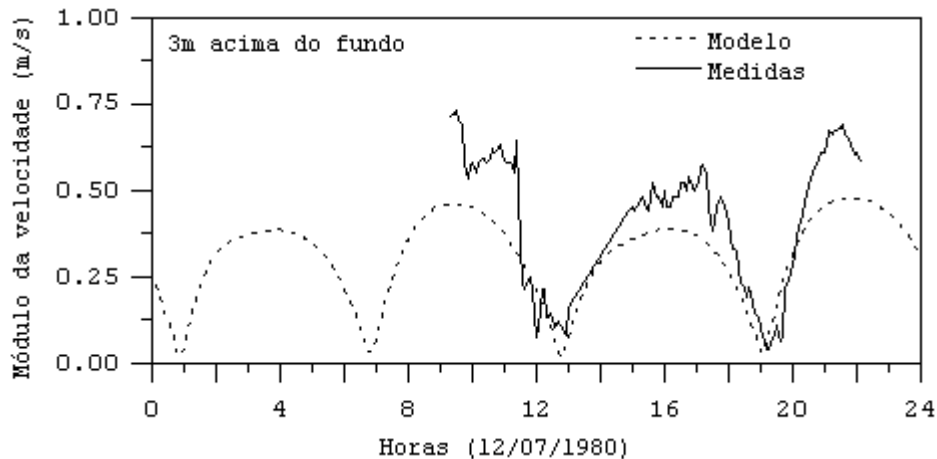


Figura 6.11: Comparação da velocidade no fundo para a estação 11.

O menor valor da velocidade nas medidas do fundo confirma o perfil logarítmico de velocidades produzido pelo modelo em grande parte do ciclo de maré.

6.3.2 Calibração baroclínica

O modelo foi utilizado com forçamento baroclínico com o objectivo de determinar a influência desse tipo de forçamento na região jusante do estuário. Consideraram-se para esse efeito os caudais médios diários de água doce provenientes do rio Sado e os caudais médios mensais dos efluentes da indústria de papel. Na fronteira aberta impuseram-se valores climatológicos de salinidade (Levitus, 1982)

Na figura 6.12 comparam-se os valores de salinidade e velocidade medidos na estação 6 (Setenave) (Ribeiro e Neves, 1982) com os resultados do modelo.

Os valores de salinidade comparam bem com os do modelo mostrando variações típicas de salinidade entre a preia-mar e a baixa-mar da ordem do 1 psu. Os resultados do modelo apresentam uma elevada homogeneidade da coluna de água, confirmando as observações de estudos anteriores.

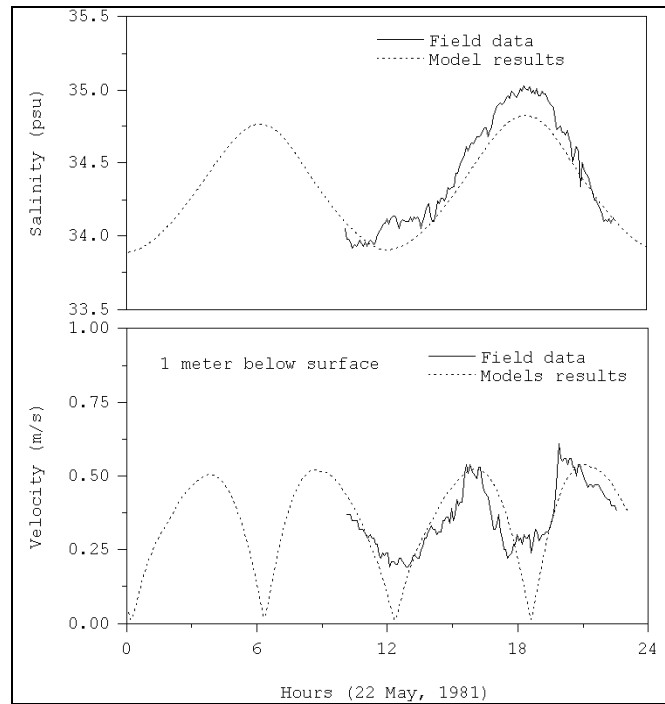


Figura 6.12: Comparação da velocidade e salinidade para a estação 6.

6.3.3 Efeito do forçamento baroclínico

Devido à homogeneidade vertical os únicos efeitos baroclínicos que se podem esperar neste domínio estão associados ao gradiente horizontal de salinidade. Com o objectivo de determinar a sua influência no campo de velocidades compararam-se os campos de velocidades produzidos pelo modelo em modo barotrópico com os produzidos em igual situação com forçamento baroclínico. As diferenças mais acentuadas foram detectadas na camada do fundo em situação de maré morta durante os períodos de estufa. A figura 6.13 representa as diferenças no módulo da velocidade instantânea para essas condições.

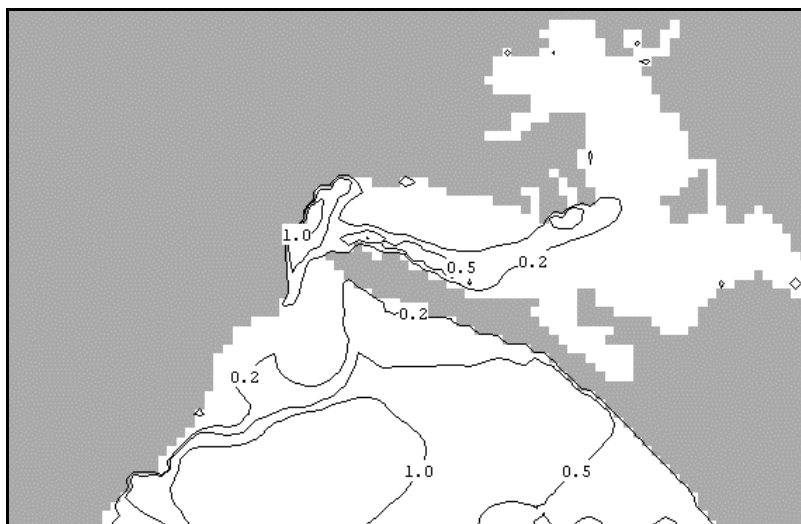


Figura 6.13: Diferença de velocidades no fundo em baixa-mar (cm/s).

O gradiente baroclínico produz uma força no fundo com o sentido de montante como descrito na secção 5.4.2. Para o estuário do Sado em condições de verão essa influência é diminuta com diferenças máximas de apenas 1 cm/s que correspondem a um erro relativo de 1%. Por esse motivo optou-se por considerar o escoamento apenas com forçamento barotrópico o que se traduz numa poupança significativa das necessidades de cálculo.

6.3.4 Correntes residuais

O campo de velocidades residual permite compreender as trocas de água no estuário para escalas de tempo superiores à do período de maré e é um bom indicador das direcções preferenciais do trânsito sedimentar. Com esse objectivo calcularam-se as velocidades residuais para um meio período maré-viva, maré-morta. Esses resultados encontram-se representados na figura 6.14. Pode-se identificar um vórtice com sentido anticiclónico no interior do estuário que sugere uma circulação preferencial em enchente pelo canal norte e uma circulação de vazante pelo canal sul. No exterior do estuário identifica-se um jacto intenso na direcção do canal de navegação com ligação a uma circulação ciclónica perto da península de Tróia. Este padrão do escoamento exterior sugere que os sedimentos da zona do cambalhão em frente à península de

Tróia provém da plataforma anexa. A troca de água entre o estuário e o oceano é controlada pela separação entre estas duas estruturas de circulação.

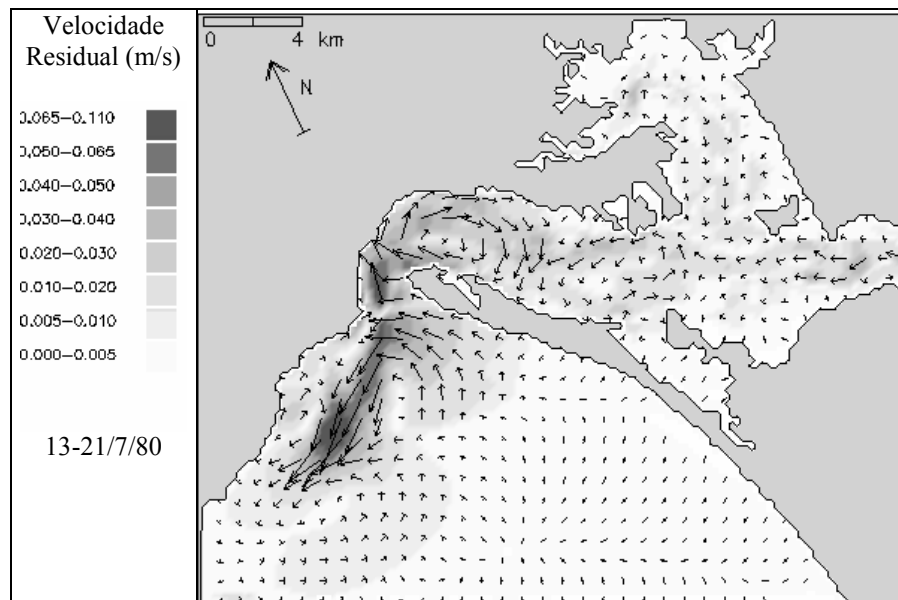


Figura 6.14: Campo residual de velocidades.

6.3.5 Estrutura tridimensional da circulação

Em escoamento barotrópico as velocidades verticais podem ser produzidas em regiões de elevada curvatura das linhas de corrente, associadas a escoamentos secundários ou em regiões com elevado gradiente da batimetria, associadas a zonas de recirculação. A estrutura vertical do campo de velocidades permite identificar importantes mecanismos de mistura que contribuem para a homogeneização da coluna de água e fornece pistas para entender o transporte de sedimentos e a configuração da batimetria nessas regiões. Na figura 6.15 representa-se com a escala de cores a velocidade vertical na camada intermédia para um instante de 5 horas após a preia-mar. Na mesma figura representa-se ainda o campo de velocidades num corte vertical de uma região com elevado gradiente de batimetria situada no talude exterior ao estuário.

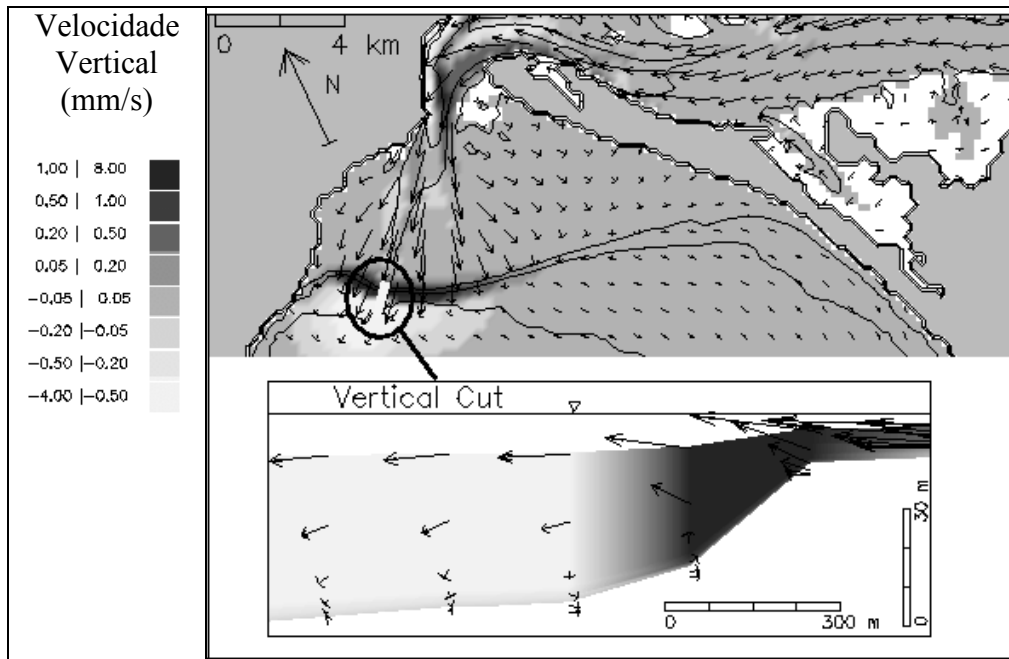


Figura 6.15: Estrutura vertical do escoamento na região da barra.

Observa-se na região de maior curvatura das linhas de corrente perto da embocadura a formação de um escoamento secundário no plano perpendicular ao escoamento principal com "*downwelling*" na zona exterior da curva, próximo do Outão e "*upwelling*" na zona interior próximo de Tróia. Este padrão do escoamento está provavelmente associado à formação do banco de sedimentos do cambalhão próximo dessa zona. Na zona exterior ao estuário onde o talude possui maior inclinação forma-se uma zona de recirculação no plano vertical que pode ser identificada no corte da figura 6.15. Esta estrutura forma-se no início da vazante sendo destruída nas primeiras horas da enchente. Pensa-se que este padrão de escoamento é responsável pela manutenção de uma elevada inclinação do talude pois a velocidade do fundo possui o sentido da enchente durante quase todo o ciclo de maré. Desta forma o sedimento erodido na parte superior do talude é transportado de novo para a vertente.

Os escoamentos secundários presentes no interior do estuário e identificados na figura 6.15 produzem uma forte recirculação do campo de velocidades residuais no plano perpendicular à direcção do escoamento principal. Nas

figuras 6.16 e 6.17 representam-se dois cortes verticais do campo de velocidades residuais para os canais Sul e Norte respectivamente.

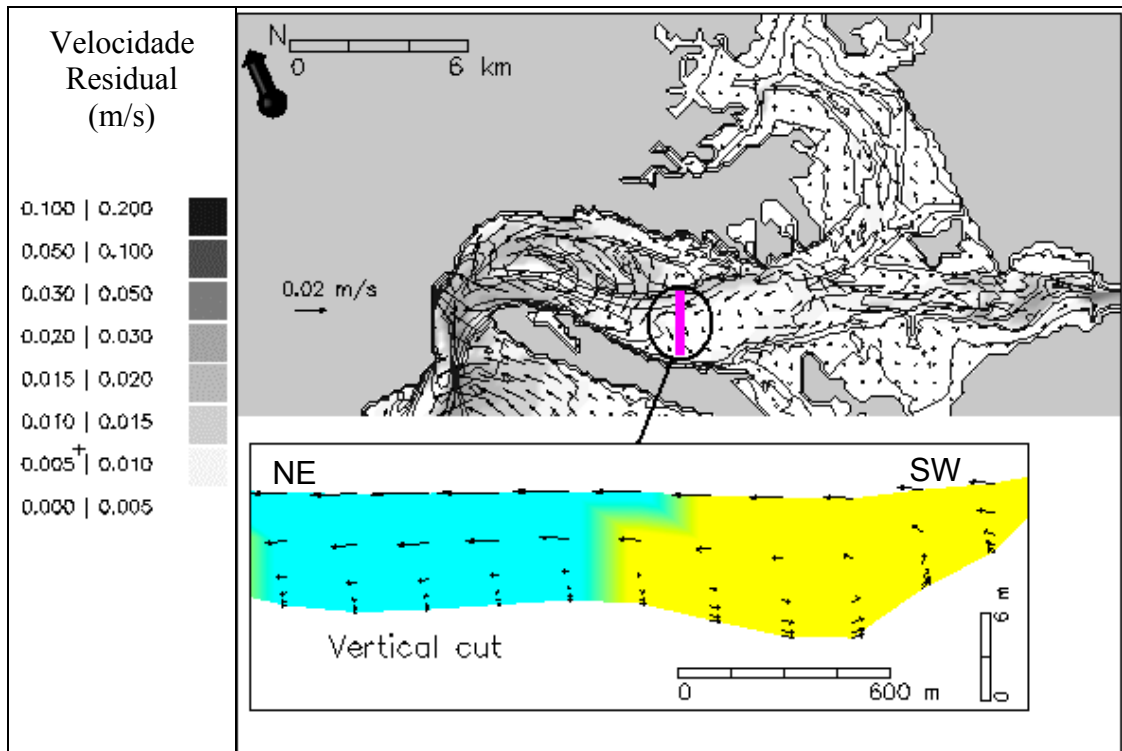


Figura 6.16: Corte vertical do campo de velocidades residuais no canal Sul.

A tendência de "*upwelling*" na parte interior da curva e de "*downwelling*" na parte exterior produz uma circulação residual no plano vertical que pode explicar a formação e a conservação do banco de sedimentos entre os dois canais.

No canal Norte esta circulação é mais intensa mostrando como os sedimentos presentes na coluna de água e existentes no fundo do canal são transportados para o banco e aí depositados. A tendência de erosão devida à circulação do canal Sul é menos intensa garantindo a estabilidade do banco de sedimentos.

O padrão global da circulação residual apresentado na figura 6.14 mostra como o fornecimento de sedimentos ao canal Norte se efectua pelo lado de jusante do canal. Os sedimentos de origem fluvial atravessam primeiro o canal sul onde se juntam aos sedimentos provenientes da erosão da vertente sul do banco sendo depois fornecidos ao canal Norte.

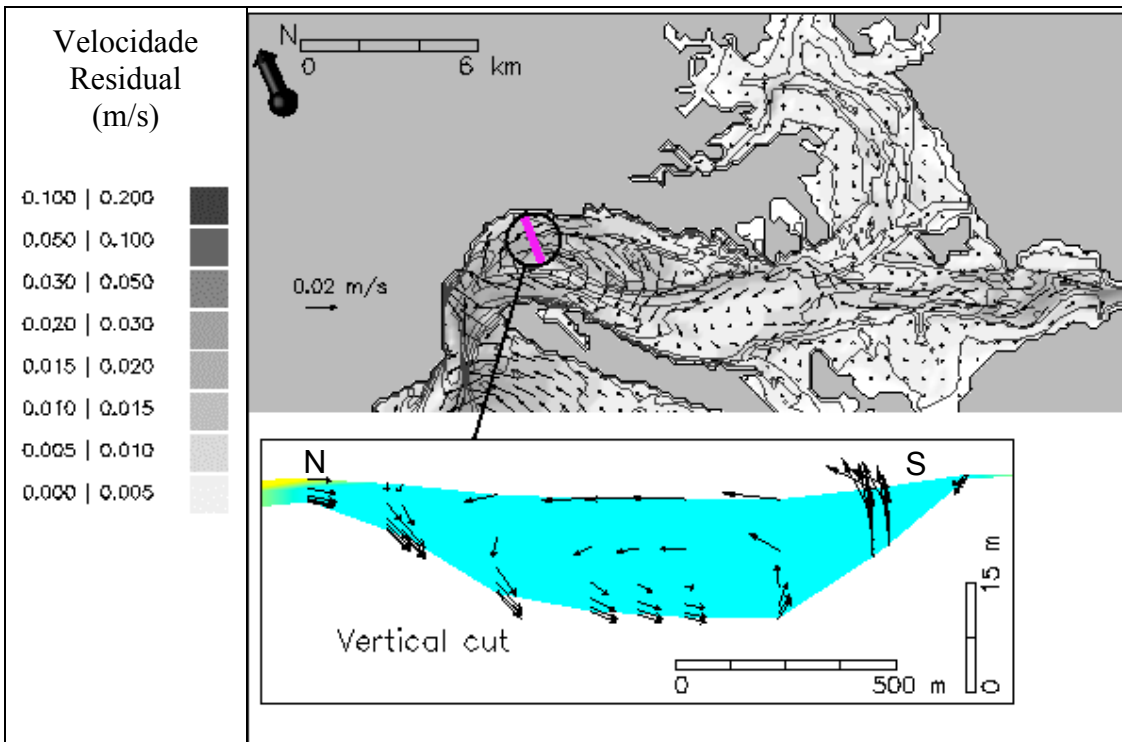


Figura 6.17: Corte vertical do campo de velocidades residuais no canal Norte.

6.3.6 conclusões

Com esta aplicação mostrou-se a capacidade do modelo para simular com realismo um problema complexo de circulação num estuário. A utilidade do uso de modelos tridimensionais neste tipo de domínios foi posta em evidência, mesmo para o caso de estuários bem misturados, mostrando-se como a interpretação do padrão tridimensional do escoamento permite identificar os principais mecanismos responsáveis pela mistura e pelo transporte de sedimentos no estuário.

6.4 Estuário do Tejo

O modelo foi aplicado ao estuário do Tejo integrado no programa de monitorização do emissário submarino da Guia (Neves et al., 1998b)). Apresenta-se em seguida um breve resumo das características do estuário e alguns resultados obtidos com o modelo e com um modelo de transporte lagrangeano a ele acoplado.

O estuário do Tejo, representado na Figura 6.18, possui uma área aproximada de 320 Km² podendo ser classificado como do tipo vale inundado. O limite de penetração de água salina situa-se em Vila Franca de Xira a 50 Km da barra, podendo-se considerar este como o limite de montante do estuário (Lemos, 1972). O sinal de maré no entanto, propaga-se pelo rio Tejo para montante deste local por mais 30 Km até à região de Muge. Do ponto de vista morfológico identificam-se três regiões de diferentes características: A região I, denominada Sector Inferior, definida entre a secção Belém - Trafaria e a secção Terreiro do Paço - Cacilhas, a região II ou Sector Médio que se estende para montante até à secção Sacavém - Alcochete, e a região III ou Sector Superior que termina em Vila Franca de Xira.

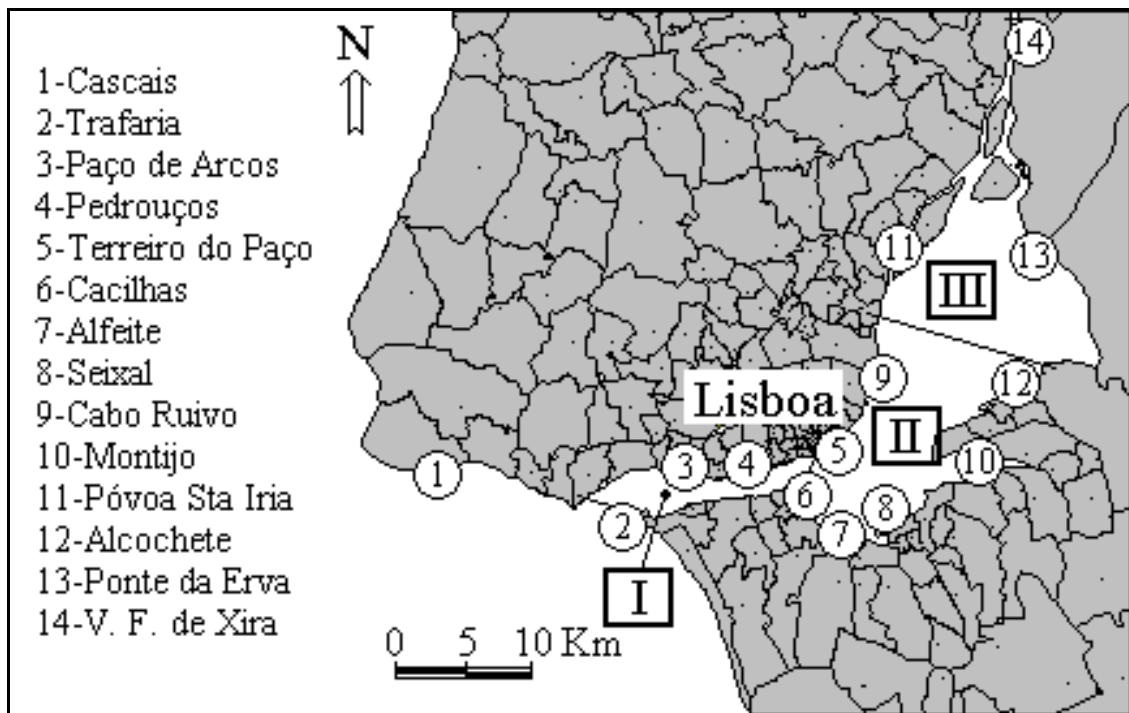


Figura 6.18: Estuário do Tejo, localização dos marégrafos.

O Sector Superior encontra-se directamente sob a influência do caudal do rio Tejo, recebendo também os caudais dos rios Sorraia e Trancão. A sua largura aumenta uniformemente para jusante, apresentando a secção de jusante a largura máxima do Estuário com cerca de 14 Km. A profundidade desta região é

baixa, não ultrapassando os 5 m nos canais mais profundos. No seu interior desenvolve-se uma vasta área de sapal, integrada na Reserva Natural do Estuário do Tejo. Esta é uma importante área de nidificação para algumas espécies protegidas de aves aquáticas. Entre elas destacam-se o Perna-Longa, a Andorinha-do-Mar-Anã e o Borrelho-de-Coleira-Interrompida.

O Sector Médio possui uma profundidade da ordem dos 7 m com dois canais mais profundos que a percorrem longitudinalmente. A parte sul desta região forma uma bacia denominada Mar de Palha onde desaguam os esteiros associados aos canais do Montijo e do Barreiro. A intensidade de navegação nesta região é intensa, existindo diversos canais de navegação que exigem dragagens de manutenção regulares.

O Sector Inferior possui a forma de um canal com cerca de 2 Km de largura, 10 Km de comprimento e uma profundidade da ordem dos 30 m. Esta região efectua a ligação do estuário ao oceano, desempenhando um papel importante nas trocas de água entre esses dois meios. A plataforma exterior ao estuário é estreita com a batimétrica dos 200 m situada a cerca de 30 Km da costa. O canal de saída encontra-se separado da plataforma por dois baixios denominados Cachopos Norte e Sul com uma profundidade de cerca de 10 m. Estas estruturas condicionam o escoamento no exterior do estuário guiando o jacto de vazante na direcção do eixo do canal e favorecendo a criação de zonas de recirculação de ambos os lados da embocadura entre os cachopos e a costa. A circulação no interior do estuário é dominada pela influência da maré, sendo o caudal do rio um factor importante apenas durante os períodos de cheia. A maré é do tipo semi-diurno com uma amplitude da ordem de 2 m em situação de maré viva e de 1 m em maré morta podendo-se por isso classificar como mesotidal. O prisma de maré para condições de maré médias é da ordem dos $7,5 \times 10^8 \text{ m}^3$, representando uma fracção considerável do volume total do estuário que é da ordem dos $1,9 \times 10^9 \text{ m}^3$. O elevado valor do prisma de maré associado à pequena secção do canal do sector inferior explica as elevadas velocidades nessa região e a sua elevada profundidade. Na tabela 6.2 apresentam-se

alguns parâmetros característicos do sinal de maré em diversos locais do estuário.

Tabela 6.2: Parâmetros caracterizadores da maré no estuário do Tejo.

	Cascais	T. Paço	Cacilhas	Seixal	C. Ruivo	Póv.S.Iria	P. Erva
F	0.096	0.082	0.084	0.083	0.080	0.073	0.077
Δ	$0.365 \cdot \pi$	$0.489 \cdot \pi$	$0.484 \cdot \pi$	$0.493 \cdot \pi$	$0.524 \cdot \pi$	$0.568 \cdot \pi$	$0.576 \cdot \pi$
M_4 / M_2	0.010	0.070	0.060	0.074	0.080	0.063	0.068

A maré possui uma característica acentuadamente semi-diurna com um factor de forma F, dado pela equação 5.23, muito inferior ao limite de 0.25. A distorção da maré oceânica é pequena com uma razão entre amplitudes M_4 / M_2 de apenas 0.01. Os efeitos não lineares presentes no canal da região I provocam um aumento substancial deste parâmetro que apresenta valores 6 a 7 vezes superiores na secção Terreiro do Paço - Cacilhas. As componentes de ordem superior assim formadas produzem uma deformação da onda de maré nas regiões de montante do estuário. O factor de forma Δ associado a essa deformação não é neste caso um bom indicador da natureza da onda no interior do estuário. Isto deve-se ao facto de a componente MS_4 , que não é englobada no parâmetro, possuir uma ordem de grandeza semelhante à da componente M_4 e uma grande diferença de fase relativamente a esta. A largura do estuário é muito variável sendo a largura máxima da ordem dos 14 Km na secção Sacavém - Alcochete. Esta morfologia origina um número de Kelvin da ordem de 0.15 nessa região. Este valor relativamente elevado faz prever uma elevada importância dos escoamentos transversais no domínio. A onda de maré não apresenta no entanto um avanço de fase significativo na margem Sul relativamente à margem Norte como seria de prever pela equação 5.22. Uma razão possível para isso é o facto da margem Sul possuir uma profundidade pequena e extensas zonas de descobertura que retiram energia à onda devido ao atrito.

A cidade de Lisboa e as suas povoações limítrofes representam um total de mais de 2 milhões de habitantes em contacto directo com o estuário. A estrutura industrial da região caracteriza-se por uma forte diversidade de sectores. Destacam-se as indústrias de refinação, química, siderúrgica, cimenteira e de reparação naval. O estuário é o principal destino para os efluentes domésticos e industriais da cidade. Uma parte destes efluentes recebe um tratamento primário mas uma grande parte é libertada sem qualquer tipo de tratamento. A forte dinâmica do estuário associada a um valor do prisma de maré elevado permite no entanto uma dispersão eficiente, mantendo as concentrações em níveis aceitáveis (Câmara et al., 1987), (Portela, 1996). As descargas dos efluentes domésticos e industriais efectuam-se maioritariamente na margem Norte que possui tempos de residência menores contribuindo para esta situação (Antunes, 1999).

O caudal fluvial do rio Tejo apresenta uma forte variabilidade sazonal com caudais médios diários que variam de 30 m³/s na estação seca a 2000 m³/s em situação de cheia. O caudal médio anual situa-se em 300 m³/s. A região III exhibe um forte gradiente horizontal de densidades desde valores muito próximos de zero na secção de V. F. de Xira até salinidades médias de 27 ‰ na secção Sacavém - Alcochete. Para jusante as salinidades aumentam rapidamente tendendo para valores oceânicos (Câmara et al., 1987). As regiões I e II apresentam uma estrutura vertical homogénea. Esta situação deve-se ao forte efeito de mistura vertical provocado pelas elevadas velocidades e pequena profundidade e por um caudal médio do rio pequeno. Na região III o estuário varia entre parcialmente misturado e homogéneo em função do caudal do rio. Essa variação é modulada pelo ciclo maré viva - maré morta

6.4.1 Calibração

Aplicou-se o modelo neste domínio usando uma discretização horizontal com 134 x 168 células com passo espacial variável entre 1000m na região da fronteira aberta até 300m no interior do estuário. A discretização vertical é do

tipo sigma com um domínio e 8 camadas de espaçamento variável. Devido à pequena influência da salinidade na região do emissário utilizou-se forçamento exclusivamente barotrópico. As elevações impostas na fronteira aberta foram geradas a partir das 36 constituintes harmónicas do marégrafo de Cascais tendo-se efectuado correcção das fases. A região do emissário pode apresentar durante o Verão estratificação de origem térmica. Esta estratificação inibe a difusão vertical aumentando a mobilidade da camada superficial por acção do vento. Este facto foi modelado por parametrização dos perfis verticais de viscosidade e do coeficiente de difusão.

Foi efectuada uma calibração neste domínio comparando séries temporais de elevação da superfície livre produzidas pelo modelo com as obtidas a partir das componentes harmónicas de 14 marégrafos no interior do estuário. Na figura 6.18 encontram-se assinaladas as posições dos marégrafos usados na calibração. As figuras 6.19 e 6.20 mostram a comparação da elevação para as estações Terreiro do Paço e Vila Franca de Xira respectivamente.

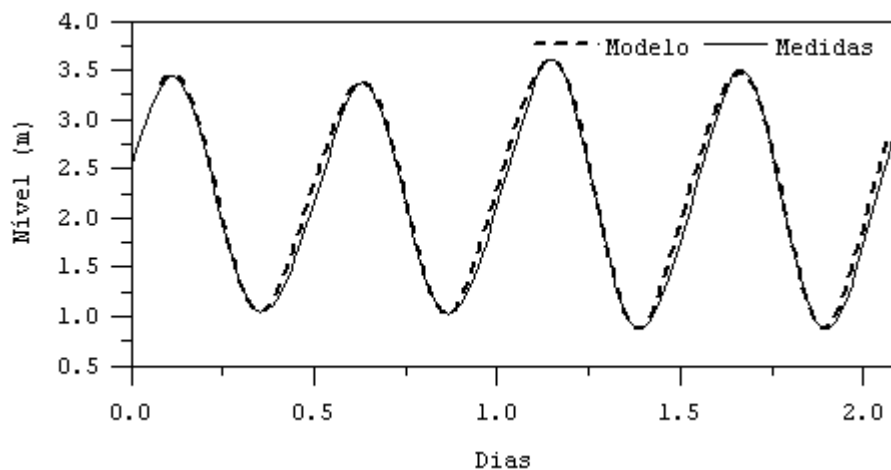


Figura 6.19: Comparação dos níveis para a estação 5 (Terreiro do Paço).

Pode-se observar que a concordância é muito boa, mesmo para a região de montante. O modelo prevê correctamente não só as amplitudes e instantes de inversão mas também a distorção da onda de maré.

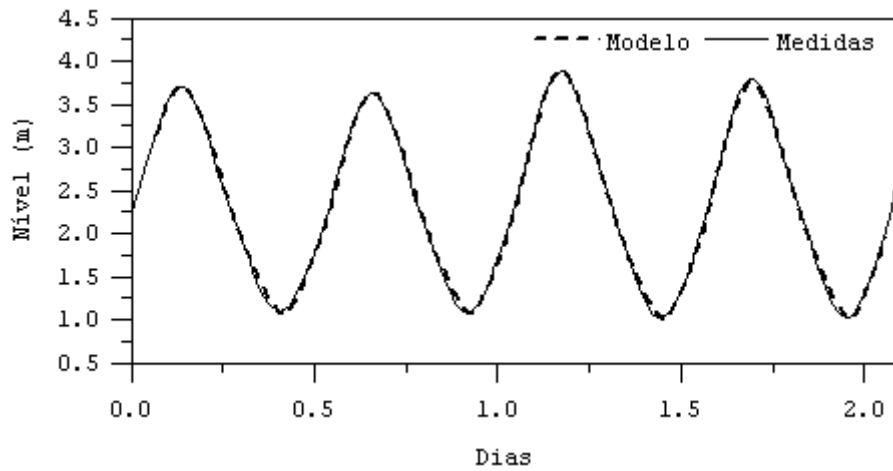


Figura 6.20: Comparação dos níveis para a estação 14 (Vila Franca de Xira).

6.4.2 Velocidades instantâneas

Na figura 6.21 apresenta-se o campo de velocidades instantâneas em baixa-mar para situação de maré viva.

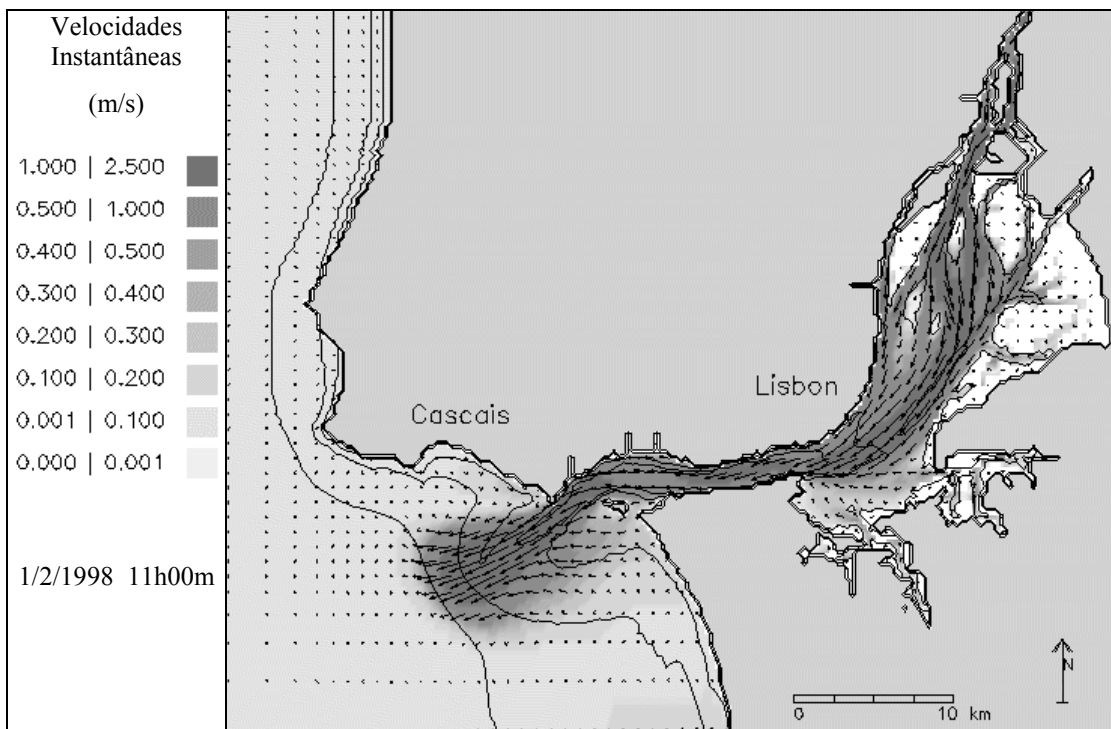


Figura 6.21: Velocidades instantâneas à superfície 5h44m depois da preia-mar.

O escoamento apresenta um jacto de vazante intenso no exterior do estuário e velocidades elevadas nos canais principais. Nas regiões de montante as velocidades elevadas prolongam-se durante a inversão da maré sendo um factor importante no transporte de material particulado para jusante. Na região exterior do estuário pode-se identificar um vórtice em frente à Costa do Estoril e um transporte na direcção norte em frente à Costa da Caparica. O padrão de velocidades nesta fase da maré contribui de forma notável para a estrutura do escoamento residual que apresenta características semelhantes a estas.

6.4.3 Velocidades residuais

As velocidades residuais foram calculadas para determinar o transporte numa escala de tempo superior à da frequência de maré. Na figura 6.22 representa-se o campo de velocidades residuais na camada da superfície. Estes resultados foram obtidos por média euleriana do campo de velocidades instantâneas durante um ciclo maré-viva maré-morta.

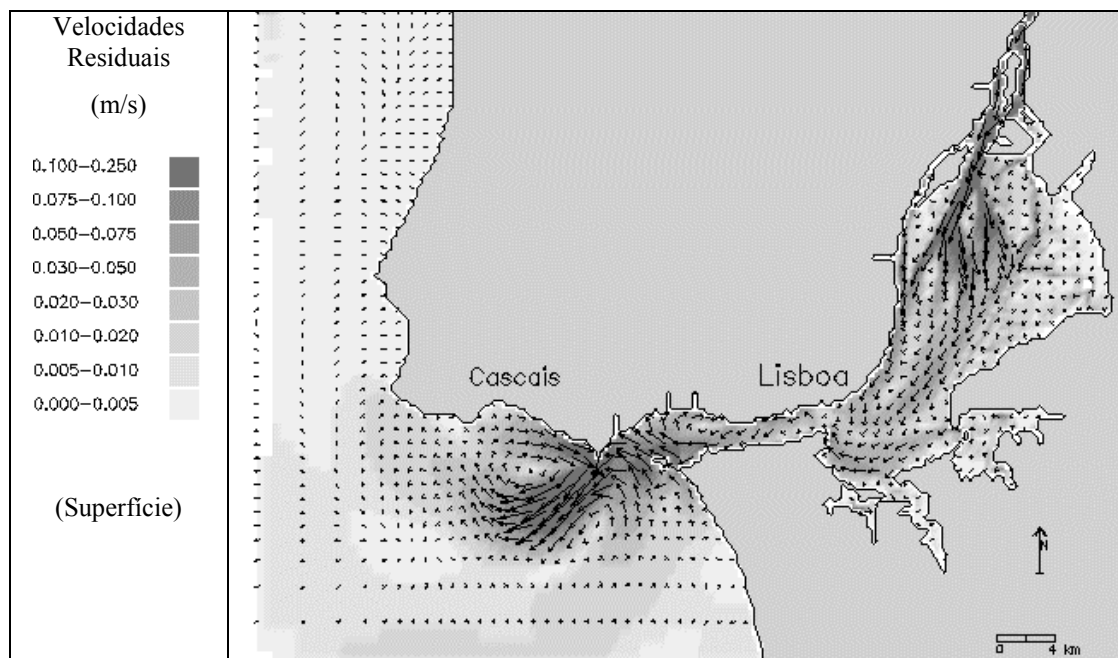


Figura 6.22: Velocidades residuais para um ciclo maré-viva maré-morta.

Pode-se identificar um vórtice residual de grande intensidade ao largo da Costa do Estoril. Esta estrutura não permite a entrada directa nessa região da água proveniente do canal de saída forçando-a a uma diluição prévia com água oceânica. As velocidades residuais máximas junto à costa situam-se na zona de Carcavelos transportando essa massa de água para o jacto de saída que por sua vez a leva até à parte exterior da circulação. Ao largo da Costa da Caparica a velocidade residual tem uma direcção predominante para Norte. É por isso previsível que a água que alimenta essa região provenha de Sul e Oeste e não da margem Norte. Na região do emissário a velocidade residual é relativamente baixa, da ordem de 1 cm/s com a direcção Oeste. Pode-se por isso prever que a pluma proveniente do emissário terá um deslocamento preferencial para Oeste, afastando-se da Baía de Cascais. No canal de saída do estuário podem-se identificar vários vórtices residuais com uma dimensão horizontal comparável com a largura do canal. Estas estruturas promovem a mistura transversal das massas de água provenientes da margem Norte. No interior do estuário pode-se também identificar uma circulação de grandes dimensões no Mar da Palha. Esta estrutura é responsável pela acumulação nessa região de água proveniente das regiões de montante e proveniente dos canais do Montijo e do Barreiro. O mar da palha alimenta depois o canal de saída pela região de Cacilhas.

6.4.4 Traçadores lagrangeanos

O campo de velocidades residuais eulerianas permite conhecer o padrão de transporte de massas de água em escalas de tempo superiores à do ciclo de maré. Esses resultados são importantes na análise de fenómenos com uma escala de tempos elevada quando comparada com o ciclo de maré. A dispersão de poluentes provenientes de fontes pontuais é um fenómeno que possui variabilidade tanto na escala de tempo da maré como em escalas de tempo superiores a esta. Um modelo de transporte do tipo Lagrangeano é por isso mais adequado ao seu estudo (Neves e Martins, 1996). Com esse objectivo foi acoplado ao modelo hidrodinâmico um modelo de transporte do tipo

lagrangeano. Este modelo utiliza o campo de velocidades produzido pelo modelo hidrodinâmico para simular o movimento de massas de água aqui denominadas traçadores (Leitão, 1996).

Para analisar os destinos de massas de água emitidas em diversos pontos do estuário utilizaram-se traçadores do tipo passivo. Este tipo de traçador não representa a dispersão de nenhuma propriedade, comportando-se como uma partícula flutuante. Não apresenta por isso características de aumento de volume nem de decaimento de concentração próprias dos traçadores activos.

Escolheram-se para pontos de emissão as saídas dos principais efluentes e locais ao largo dessas saídas. Os traçadores foram emitidos a uma frequência de 2 traçadores por hora que é suficiente para identificar o padrão do transporte sem dificultar a sua representação. Na figura 6.23 representa-se a posição dos traçadores num instante de baixa-mar correspondente a 4 dias após o início das emissões.

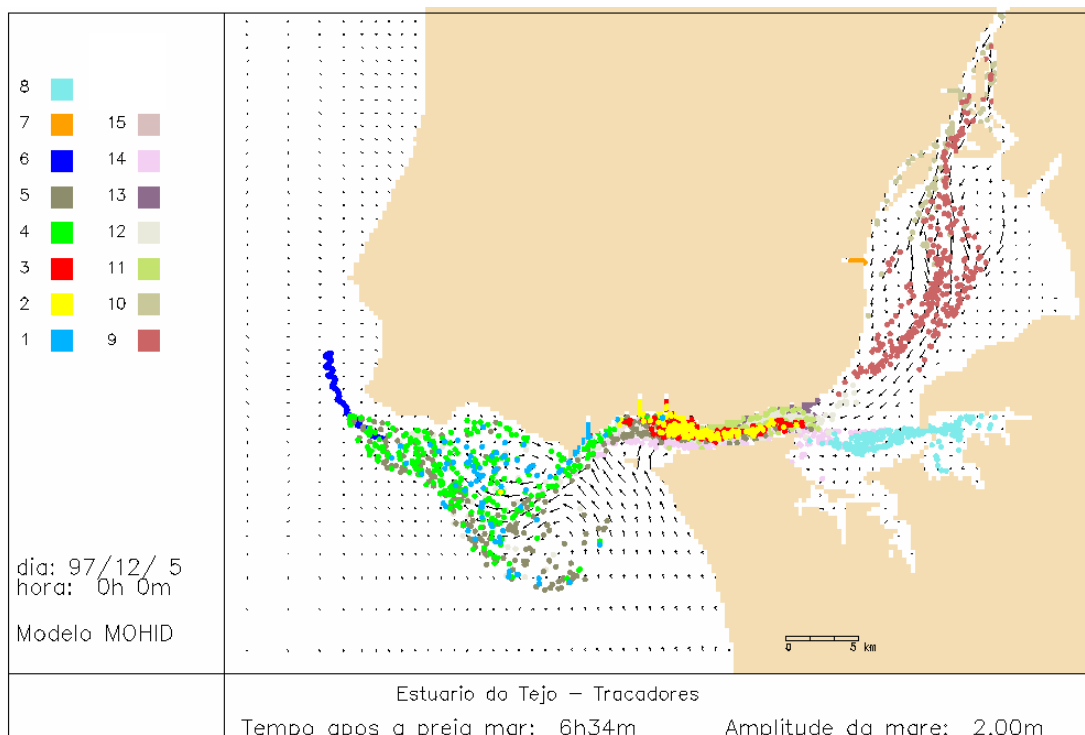


Figura 6.23: Distribuição de traçadores Lagrangeanos após 4 dias de emissões.

As origens dos traçadores podem ser identificadas pelas suas cores de acordo com a tabela 6.3.

Tabela 6.3: Origem dos traçadores Lagrangeanos da figura 6.23.

Origem	Designação	Origem	Designação
1	Ribeira da Laje	8	Montijo (ao largo)
2	Ribeira de Barcarena	9	Rio Trancão (ao largo)
3	Rio Jamor	10	Rio Cós
4	Ribeira Da Laje (ao largo)	11	Alcântara
5	Rio Jamor (ao largo)	12	Alcântara (ao largo)
6	Emissário da Guia	13	Terreiro do Paço
7	Rio Trancão	14	T. do Paço (ao largo)

Verifica-se que a pluma proveniente do emissário se desloca para Oeste, contornando o Cabo Raso e dirigindo-se para o Cabo da Roca. A pluma do estuário ao largo da Costa do Estoril e da Baía de Cascais é composta essencialmente por traçadores com origem na Ribeira da Laje, e ao largo de S. Julião da Barra. Verifica-se também um número muito reduzido de traçadores ao largo da Costa da Caparica. Esse facto confirma o pressuposto que a água dessa região tem origem atlântica. No interior do canal de saída verifica-se um predominância de traçadores provenientes das ribeiras de Caxias e Jamor que se deslocam para o interior do estuário. Este facto está associado aos vórtices residuais assinalados nessa região com velocidades para montante perto da margem Norte. Verifica-se também que os traçadores provenientes do Mar da Palha se deslocam para o exterior do estuário junto à margem Sul encontrando-se já a jusante dos provenientes das ribeiras de Caxias e do Jamor. Esta situação parece assim indicar que os efluentes provenientes da margem norte do canal de saída deslocam-se primeiro para o interior do estuário junto à margem Norte até ao Mar da Palha, saindo depois junto à margem Sul. Os traçadores emitidos nas regiões de montante do estuário encontram-se ainda no seu interior sendo necessários períodos muito superiores a 4 dias para que a sua rejeição para o oceano se efectue. Isto está de acordo com as estimativas de tempos de residência elevados indicadas anteriormente.

6.4.5 Conclusões

Esta aplicação permitiu testar o modelo hidrodinâmico numa situação real que apresenta várias dificuldades do ponto de vista numérico. A extensa zona de descobertura nas regiões de montante constitui um teste exigente para a condição de fronteira móvel. As elevadas velocidades no canal de saída condicionam a estabilidade do modelo, especialmente nas situações em que o campo de velocidades é oblíquo em relação à malha. A forte irregularidade da topografia do fundo constitui também um teste rigoroso ao cálculo da geometria. Os bons resultados da calibração mesmo nas regiões interiores do estuário e o uso de passos de tempo da ordem dos 30 segundos mostram que o tipo de formulação adoptada no modelo pode ser usada em problemas práticos de engenharia. A inclusão do módulo de transporte lagrangeano mostrou também que o método do volume finito simplifica a modularização do código, tornando fácil o desenvolvimento em paralelo de modelos que trocam informação com o modelo hidrodinâmico.

6.5 Atlântico Norte (OMEX)

Para testar o modelo numa aplicação com características oceânicas escolheu-se o domínio do projecto OMEX (Ocean Margin Exchange). A região de estudo estende-se de 30 °N a 60 °N na direcção meridional e de 25 °W a 8 °E na direcção zonal. Este domínio tem sido objecto de um estudo intensivo nos últimos anos, estando agora identificados os principais processos físicos que nele ocorrem (Ambar et al., 1986), (Pingree e LeCann, 1989), (Neves et al., 1999), (Huthnance et al., 1999). A batimetria caracteriza-se por uma plataforma continental com uma largura muito variável ligada ao oceano aberto por um talude de grande inclinação como se pode observar na figura 6.24.

Na costa Ibérica a largura da plataforma é reduzida, com a batimétrica dos 200 m situada a uma distância da costa da ordem dos 50 Km. No Mar Céltico e ao largo da Irlanda pelo contrário, a plataforma é larga aumentando essa distância para valores da ordem dos 300 Km. A morfologia contrastante destas

duas zonas permite estudar as trocas entre a plataforma e o oceano em diferentes situações. A identificação e quantificação dos processos envolvidos nessas trocas é o objectivo principal do projecto.

O forçamento nesta região possui uma importante componente baroclínica, sendo a camada superficial fortemente influenciada pela tensão do vento. A maré possui também uma intensidade elevada devido à dimensão característica do Atlântico Norte se encontrar próxima da ressonância para as componentes de frequência semi-diurna (Huthnance *et al.*, 1999). No Mar Céltico este efeito é intensificado devido à forma da bacia.

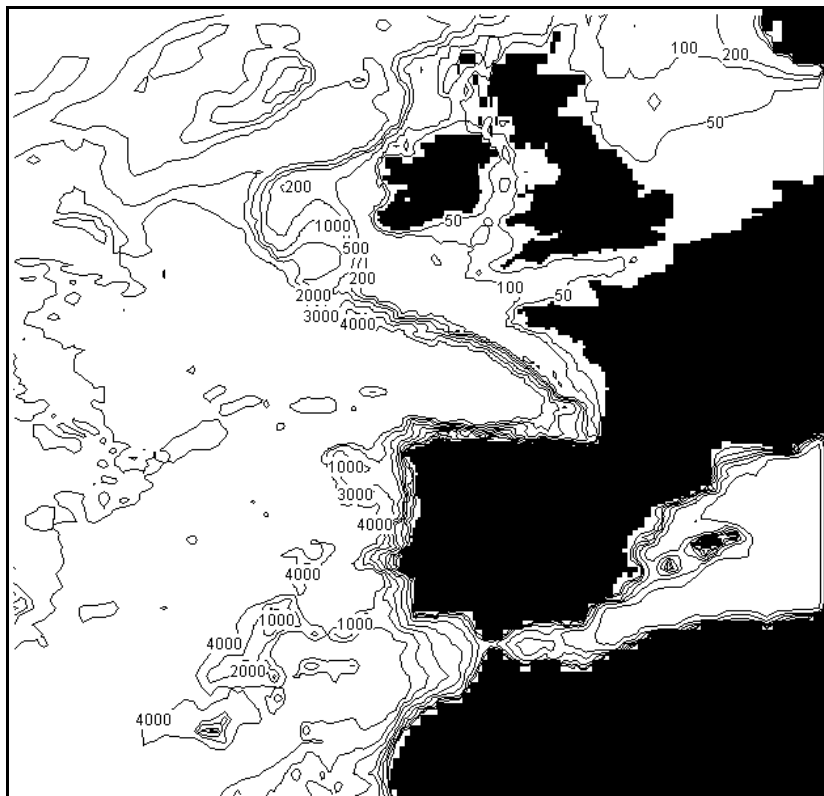


Figura 6.24: Batimetria da região do projecto OMEX.

A principal característica do escoamento nesta região é a forte corrente que se desenvolve no sentido Sul-Norte sobre o talude. Na costa Ibérica a corrente estende-se possivelmente desde a base da água intermédia mediterrânea,

situada a uma profundidade da ordem dos 1600 m até à superfície. O escoamento na camada da superfície pode no entanto inverter-se durante os meses de verão devido à predominância de ventos de Norte que produzem transporte dessa camada para Oeste ou SW e, por continuidade, induzem "upwelling". Existem vários mecanismos capazes de explicar a corrente do talude. Para vento com direcção de S e SW o transporte de Ekman produz empilhamento junto à costa que, por equilíbrio geostrófico, induz um escoamento no sentido Sul-Norte. Este mecanismo permite explicar a corrente na camada da superfície durante os meses de inverno (Ambar *et al.*, 1986). Não permite no entanto explicar a corrente em profundidade nem o seu carácter permanente mesmo em situações de vento "upwelling". O rotacional do vento associado ao aumento da vorticidade planetária com a latitude permite explicar um transporte na direcção Sul-Norte (relação de Sverdrup). Este mecanismo não permite no entanto explicar a concentração da corrente sobre o talude nem a sua intensidade em profundidade.

O JEBAR parece ser o mecanismo mais importante no estabelecimento dessa corrente (Huthnance, 1984), (Pingree e LeCann, 1990). Este forçamento manifesta-se quando existe gradiente de densidades na direcção meridional ($\partial\rho/\partial x_2$) na presença de um gradiente de batimetria na direcção zonal ($\partial h/\partial x_1$). Derivando a equação 1.59 na direcção meridional e considerando por simplicidade que a densidade não varia na direcção vertical, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = g(\eta - x_3) \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad 6.3$$

Denominando $x_3 = -H$ a profundidade para a qual $\partial p/\partial x_2 = 0$ tem-se para essa profundidade:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = -\frac{H}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \quad 6.4$$

Onde se considerou que $\eta \ll H$. Como a densidade aumenta na direcção do pólo produz-se um gradiente da superfície livre na direcção meridional. Este gradiente é função de H sendo maior no oceano do que sobre a plataforma. Esta diferença de $\partial\eta/\partial x_2$ produz um gradiente $\partial\eta/\partial x_1$ quando a plataforma se encontra orientada na direcção meridional. O valor do gradiente zonal $\partial\eta/\partial x_1$ é apreciável para gradientes de batimetria elevados, intensificando-se para Norte. Este forçamento induz, por equilíbrio geostrófico, um escoamento confinado à região do talude e com intensidade suficiente para explicar as velocidades observadas.

O vento possui nesta região um carácter fortemente sazonal. Nos meses de Verão a sua direcção predominante é Norte, rodando progressivamente para SW e Sul no início do Outono e mantendo essa predominância durante os meses de Inverno. O vento Norte durante o verão dá origem a episódios de "upwelling" e pode inverter o sentido da corrente de talude na camada da superfície, tipicamente da ordem de grandeza da camada de Ekman. Estes episódios de "upwelling" produzem um transporte vertical importante estando associados a aumentos apreciáveis da produtividade primária.

O modelo foi aplicado neste domínio em dois contextos distintos: Em modo puramente barotrópico foi usado para caracterizar a progressão da maré e em modo baroclínico, com superfície livre mas sem forçamento de maré foi usado para caracterizar a circulação da região, com especial atenção para a corrente do talude e os fenómenos a ela associados.

6.5.1 Simulação da maré

Para a simulação da maré usou-se uma discretização horizontal de 183 x 191 células com apenas 1 camada na vertical. Nesta configuração o modelo comporta-se como um modelo bidimensional integrado na vertical. Esta opção justifica-se devido à característica barotrópica da maré e por se pretender estudar nesta primeira fase apenas a propagação da onda de superfície. A

utilização de 1 única camada possibilitou reduções de tempo de cálculo e de memória substanciais.

A elevação imposta nas fronteiras abertas foi obtida do modelo global de propagação de maré CSR 1.6. Estes dados são o resultado de um ajustamento dos resultados do modelo hidrodinâmico FES94.1 com uma discretização de 0,5 x 0,5 graus usando os primeiros dois anos de dados de altimetria do satélite Topex/Poseidon (LeProvost, 1994).

Na simulação usaram-se as 6 componentes de maior amplitude (M2, S2, K2, O1, P1 e Q1) tendo-se corrigido os valores para cada célula da fronteira (Neves *et al.*, 1998a)).

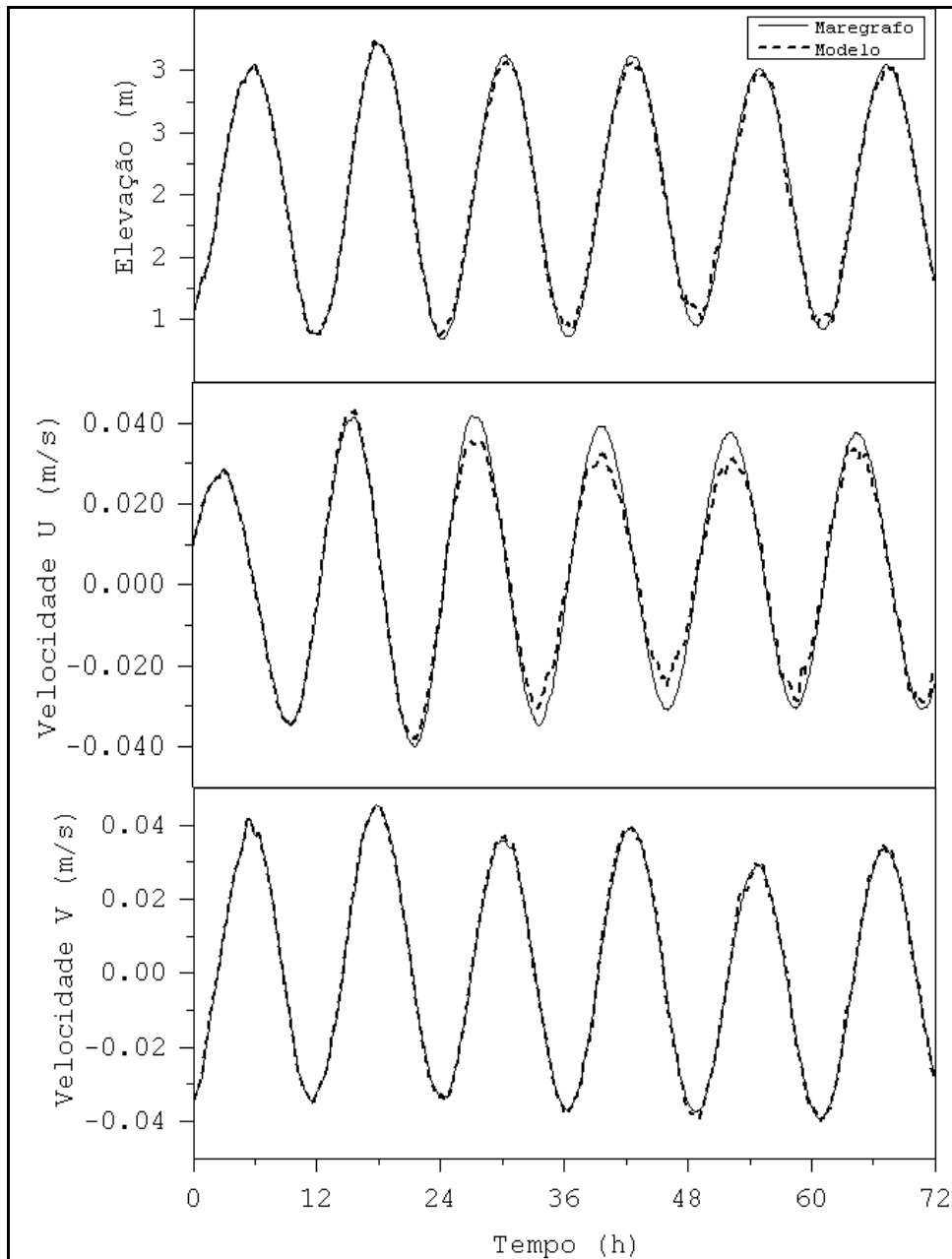


Figura 6.25: Comparação da elevação e velocidade da maré em oceano aberto.

O modelo foi calibrado comparando as elevações e as velocidades produzidas em diversos pontos do domínio com séries temporais obtidas de um campo de marés global (Schwiderski, 1980). Na figura 6.25 ilustra-se esta comparação para a localização 41°N , 9°W ao largo de Vigo e na figura 6.26 para o ponto 47°N , 7°W situado no Mar Céltico.

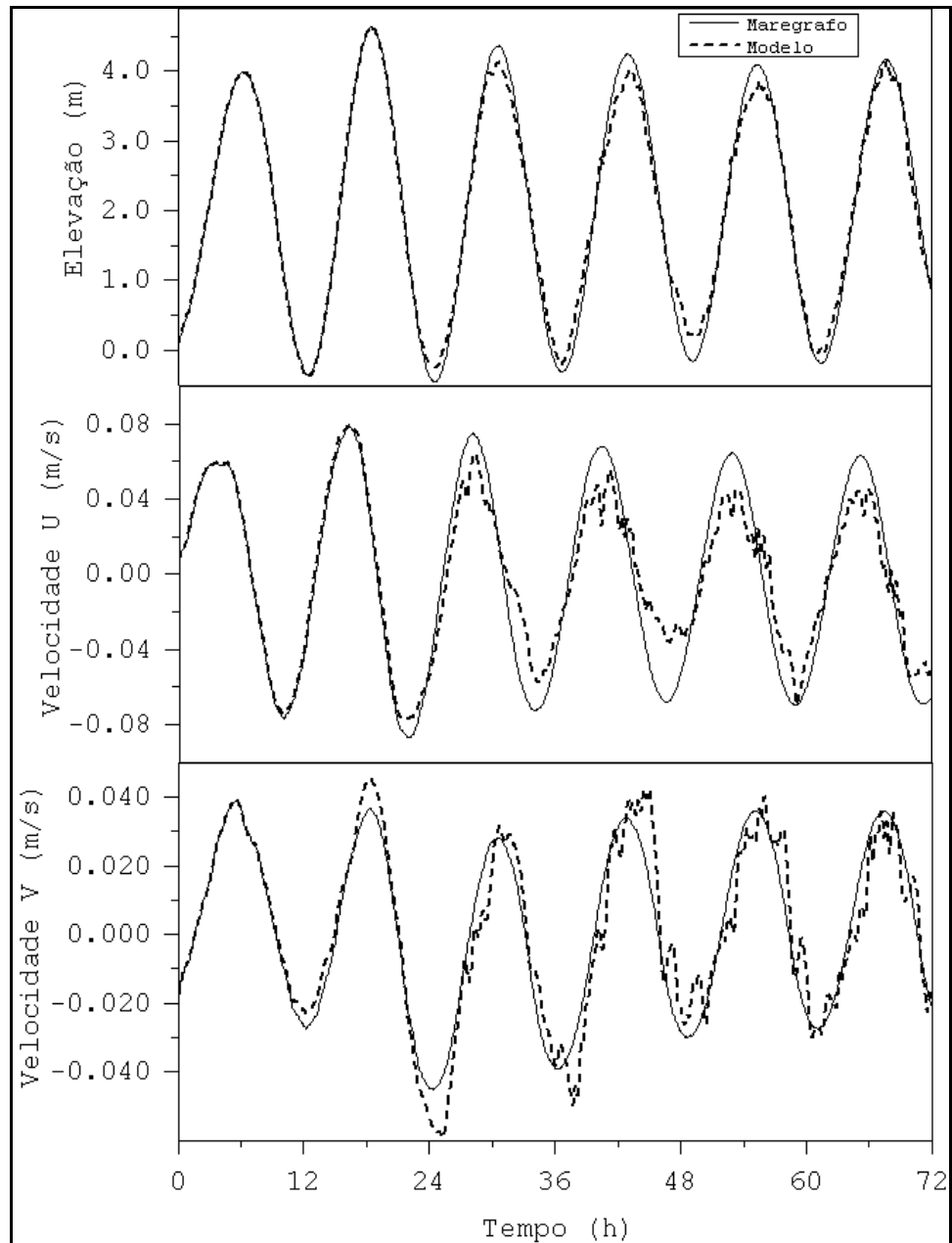


Figura 6.26: Comparação da elevação e velocidade da maré no mar Céltico.

Pode-se verificar que a comparação é bastante aceitável. Os resultados do campo de marés globais encontram-se excessivamente regulares devido a se terem considerado apenas componentes diurnas e semi-diurnas.

Nas figuras 6.27 e 6.28 representam-se as isolinhas de amplitude para dois instantes de maré separados de 6 horas e coincidentes respectivamente com preia-mar e baixa-mar no Canal da Mancha.

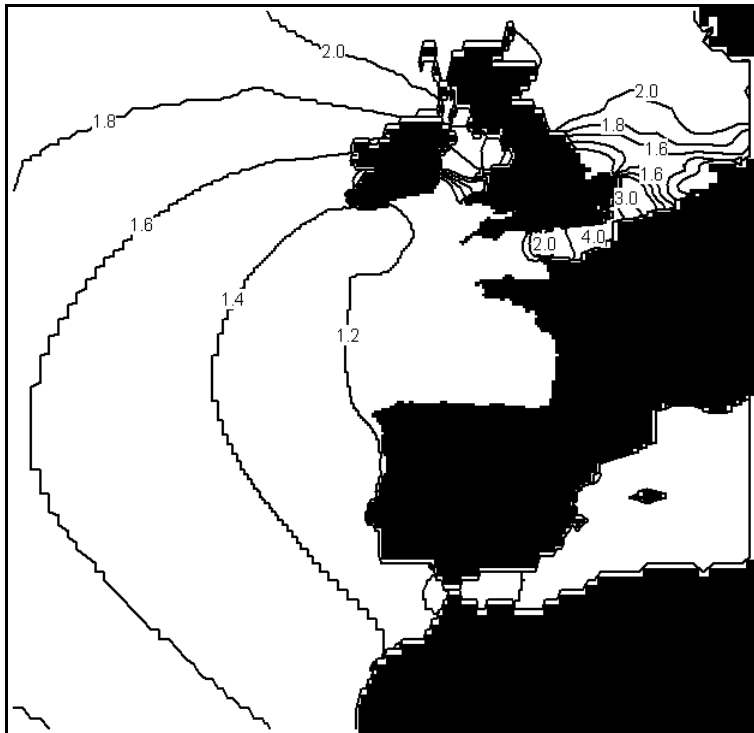


Figura 6.27: Isolinhas de amplitude (metros) (preia-mar no Canal da Mancha).

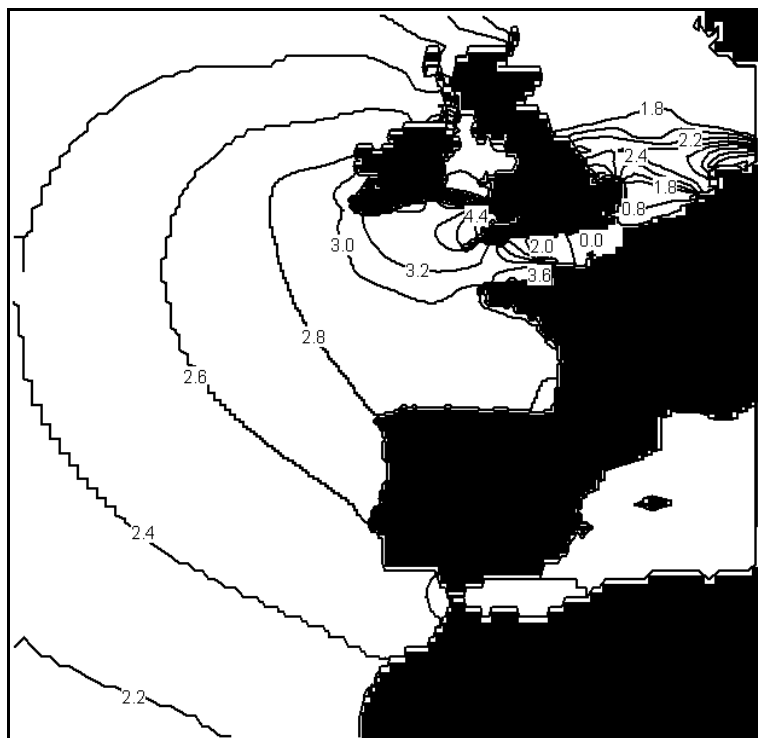


Figura 6.28: Isolinhas de amplitude (metros) (baixa-mar no Canal da Mancha).

Pode-se observar a amplificação característica no Canal de Bristol e no Golfo de S. Malo a Norte da Bretanha. Uma animação destes resultados permite identificar um ponto anfidrómico a Sul de Inglaterra, outro no Mar do Norte e uma rotação das isolinhas na forma de uma onda de Kelvin guiada pela linha de costa.

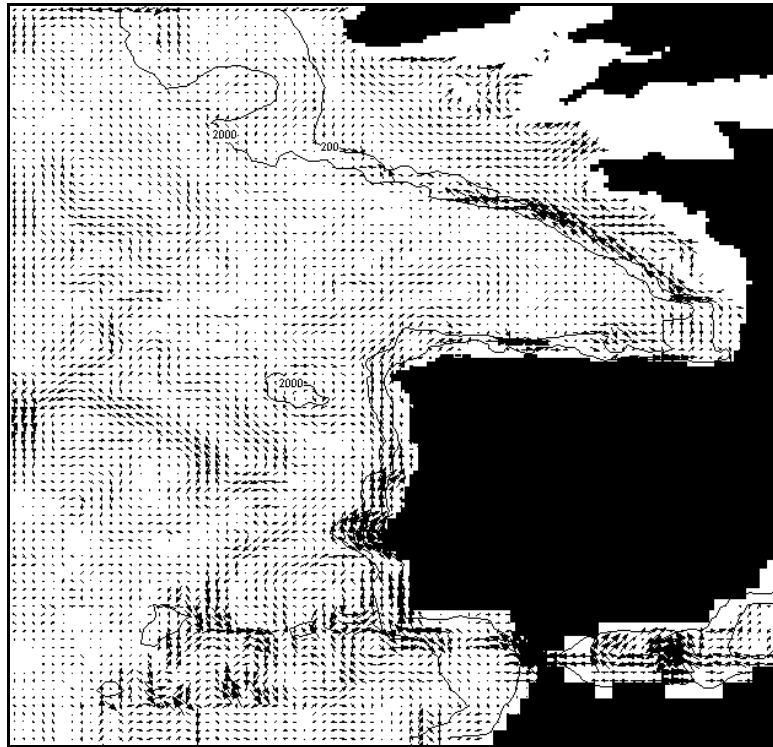
6.5.2 Simulação baroclínica

A simulação baroclínica foi efectuada com uma discretização horizontal de 183 x 191 e uma discretização vertical com dois domínios do tipo sigma e um total de 14 camadas. A divisão entre os domínios é efectuada para uma profundidade de 100m que coincide com a profundidade média da termoclina permanente. Os campos iniciais de salinidade e temperatura foram impostos a partir de valores climatológicos (Levitus, 1982). Nesta simulação usaram-se as condições de inverno com o objectivo de reproduzir uma forte corrente de talude. Nas fronteiras abertas usaram-se também os valores climatológicos tendo-se imposto uma condição de relaxação baseada na distância de diluição. Neste caso o forçamento é exclusivamente baroclínico não se tendo imposto elevação de maré na fronteiras nem tensão devida ao vento.

Na figura 6.29 representa-se o campo de velocidades ao fim de 15 dias de simulação para a camada do fundo. Esta camada representa 49% da profundidade do domínio inferior. Pode-se verificar uma intensa corrente sobre o talude tanto ao largo da Costa Francesa como na Costa Ibérica. A estabilidade da corrente do fundo é grande com pequena variabilidade espacial o que está de acordo com as observações.

Na figura 6.30 representa-se o campo de velocidades na primeira camada do domínio superior que possui por isso uma profundidade média de 100m. A corrente do talude é menos intensa à superfície apresentando o mesmo sentido preferencial para Norte tanto na Costa Ibérica como no Golfo da Biscaia. Neste último local a corrente apresenta-se desviada para terra e verifica-se uma bifurcação com parte da corrente ao largo do talude. A variabilidade espacial é

maior podendo-se identificar os vórtices característicos a Norte de Vigo e no Golfo da Biscaia a Oeste do talude.



→ = 2.38 m/s

Figura 6.29: Campo de velocidades de Inverno na camada do fundo.

Estes resultados são o produto de um primeiro esforço de aplicação do modelo ao domínio do OMEX. O modelo conseguiu reproduzir correctamente do ponto de vista qualitativo as principais características do escoamento. A corrente do talude localiza-se correctamente, possui a direcção esperada e intensifica-se em profundidade. Os vórtices associados a essa corrente encontram-se também presentes nos locais onde se tem observado maior variabilidade.

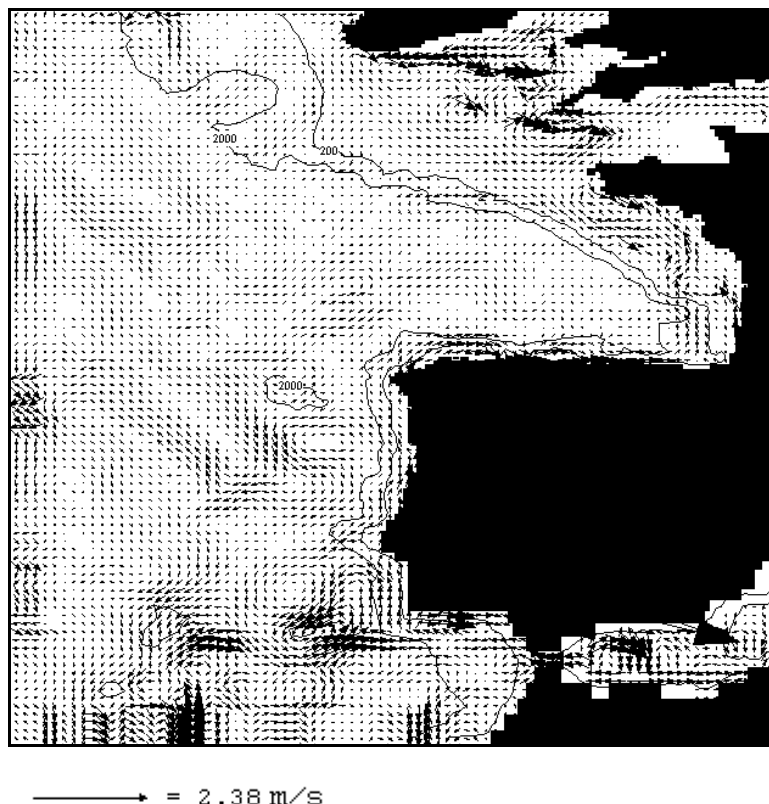


Figura 6.30: Campo de velocidades de Inverno (camada a 100m da superfície).

6.6 Conclusões

Neste capítulo apresentaram-se algumas das aplicações efectuadas com o modelo durante o processo de correcção de erros e afinação. Usando uma batimetria esquemática comparou-se o modelo em modo barotrópico com uma solução analítica num domínio com alguma complexidade geométrica. Comparou-se ainda numa batimetria esquemática os resultados do modelo com os produzidos por um modelo implementado em coordenada sigma tradicional numa situação puramente baroclínica. Em domínios reais usou-se o modelo nos estuários do Sado, do Tejo e no Atlântico Norte no domínio do projecto OMEX. Efectuou-se a calibração do modelo nesses domínios e mostrou-se que os resultados reproduziam os principais aspectos da circulação, permitindo a identificação das estruturas tridimensionais desses escoamentos.

7 CONCLUSÕES

O principal objectivo deste trabalho, foi o de produzir um modelo tridimensional, com uma metodologia adequada à modelação tanto de escoamentos costeiros como estuarinos. Devido à natureza distinta dos processos dominantes nesses dois tipos de sistemas, considerou-se que um requerimento importante no desenvolvimento do método seria a sua capacidade para admitir diferentes discretizações na direcção vertical. O método devia também possuir características de modularidade e de simplicidade que permitissem o seu acoplamento a novos módulos de forma simples e uma fácil aprendizagem por utilizadores de outras vertentes científicas, com reduzida formação em métodos numéricos.

O método dos volumes finitos foi escolhido para a discretização das equações. Este método tem sido pouco usado no contexto da modelação de escoamentos costeiros sendo inovador dentro do grupo de trabalho onde foi desenvolvido. O método foi escolhido por possibilitar a utilização de células com geometria genérica e apresentar uma separação completa entre as propriedades geométricas e as equações que são resolvidas. A criação de malhas com leis de variação complexa, em geral função das variáveis resolvidas, ficou assim facilitada resumindo-se no modelo à criação de uma nova rotina de redefinição da geometria. O facto do método operar no espaço real sem transformação de coordenadas contribuiu também para a simplicidade do código, facilitando a sua interpretação e manutenção.

O método impõe, de forma intrínseca, o cálculo explícito de um campo conservativo de fluxos entre células. Este campo torna a integração de novos módulos um processo transparente e menos sujeito a erros. Estes novos módulos são geralmente módulos de transporte de um conjunto de variáveis específicas a um determinado processo. Estas variáveis podem ser por exemplo a carga de sedimento, concentrações, fitoplâncton, etc. em função do tipo de módulo. Os processos de transporte destas variáveis são no entanto comuns,

devendo por isso ser usado o mesmo código tanto para o transporte de variáveis hidrodinâmicas como de variáveis exteriores. Os diferentes módulos resumem-se assim à definição dos termos de produção e de destruição. Outra vantagem desta abordagem é a de permitir aos módulos de transporte um fácil acoplamento a outros modelos hidrodinâmicos. Esta metodologia simplificou de forma significativa o acoplamento de módulos de transporte de sedimentos e de qualidade da água entretanto desenvolvidos.

A utilização do método dos volumes finitos com uma malha variável no tempo obriga a uma redefinição da geometria em todas as iterações. Por esse motivo este método é frequentemente apontado como pouco eficiente do ponto de vista computacional quando comparado com métodos especializados num tipo particular de transformação de coordenadas (por exemplo sigma). A restrição do movimento dos vértices à direcção vertical permite no entanto simplificações consideráveis no cálculo das grandezas geométricas e uma redução significativa nas necessidades de memória. Com estas simplificações obtiveram-se prestações globais semelhantes às de um modelo com coordenada sigma com velocidades 10 a 20% inferiores e necessidades de memória 20% superiores. Este facto permitiu a utilização do modelo em domínios reais, como os casos apresentados do Estuário do Sado, do Estuário do Tejo e do OMEX.

A utilização intensiva da coordenada sigma efectuada na fase de testes serviu diversos objectivos. Para o caso de uma só camada este tipo de coordenada não só é o único admissível como degenera numa formulação bidimensional. Tirou-se partido disso para comparação do modelo com um modelo bidimensional existente e com soluções analíticas das equações 2D. Para o caso tridimensional existia também outro modelo disponível e uma vasta experiência em domínios costeiros. Este facto permitiu a comparação tanto dos resultados como do desempenho do novo código. No modelo, a coordenada sigma não é tratada como um caso especial, sendo o processo em tudo igual ao efectuado para outra lei de posicionamento dos vértices. É por isso de esperar

que com outro tipo de lei o modelo se comporte de forma semelhante a um modelo especializado nessa lei. A verificação desta hipótese e o desenvolvimento de diferentes tipos de coordenada envolvem neste modelo um trabalho de desenvolvimento mínimo, sendo no entanto necessário uma exaustiva análise de resultados e de comparações em diversas situações de teste.

7.1 Trabalho futuro

Um dos objectivos futuros é o de utilizar o modelo para determinar a influência da discretização vertical na simulação de escoamentos estuarinos e costeiros. Para esta tarefa torna-se necessário a validação do modelo em situações de teste e em domínios reais, usando diversos tipos de coordenadas. Esta validação deve recorrer tanto a dados de campo como a comparação com modelos específicos que usem o tipo de coordenada em causa. A comparação dos resultados em domínios reais com diversos tipos de coordenada deve ser efectuada na perspectiva dos processos em presença, identificando as vantagens relativas em função dos processos dominantes em cada caso.

A evolução prevista para os modelos hidrodinâmicos de mesoescala aponta para a sua utilização generalizada como ferramentas de previsão, de análise e de apoio à decisão. Isto implica a utilização do modelo por vários níveis de utilizadores diferentes. Num nível científico espera-se que o modelo continue a ser capaz de auxiliar na análise e na simulação dos processos mais relevantes em cada aplicação. Num nível técnico, espera-se que o modelo responda a questões práticas auxiliando o projecto. Num nível operacional espera-se que o modelo se integre com outras ferramentas permitindo um apoio efectivo à tomada de decisão através da previsão e da análise de cenários. Estas diversas utilizações não impõem alterações no método de cálculo. O que varia em cada um destes níveis é apenas a forma do ser humano interagir com o programa. Um dos objectivos a atingir no futuro deve por isso ser o projecto de uma interface de ligação do modelo ao utilizador. Esta interface não se deve limitar a

facilitar a introdução dos dados e a visualização dos resultados. Deve antes ser uma ferramenta que integre o modelo com outras aplicações e que responda às questões que o utilizador procura. Estas questões envolvem dados gerados pelo modelo mas não se limitam a eles. Deve por isso ter características de integração, combinando os resultados provenientes de diversas fontes e assistindo o utilizador durante todo o processo de tomada de decisão. O facto de todos os resultados serem grandezas geo-referenciáveis permite a utilização das modernas técnicas de informação geográfica. Um sistema de Informação geográfica é por isso uma plataforma natural para o desenvolvimento dessa interface.

APÊNDICE 1: HIPÓTESE DE INCOMPRESSIBILIDADE

Analisa-se aqui a ordem de grandeza do segundo termo da equação de variação da massa volúmica:

$$\frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \quad \text{A1.1}$$

Na análise de grandezas que se segue consideram-se as seguintes dimensões características de escoamentos de mesoescala:

$$L \sim 10^4 \text{ m} ; U \sim 1 \text{ m/s} ; \mu \sim 10^{-3} \text{ Kg/(ms)} ; T \sim 10^2 \text{ K} ; \rho \sim 10^3 \text{ Kg/m}^3 ; \kappa \sim 1 \text{ W/(mK)} ; a \sim 10^3 \text{ m/s}$$

A variação de entropia de uma partícula material de fluido é devida a irreversibilidades internas produzidas por dissipação de energia mecânica e ao fluxo de calor pela sua fronteira (Spurk, 1997):

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \rho \left(\frac{Ds}{Dt} \right)_{irrev} + \rho \left(\frac{Ds}{Dt} \right)_{rev} = \left(\frac{\Phi}{T} - \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) \quad \text{A1.2}$$

onde Φ é a função de dissipação que contabiliza a energia mecânica dissipada no interior do elemento de fluido. Para o caso de fluidos Newtonianos (relação constitutiva que se adoptou) Φ tem a seguinte ordem de grandeza:

$$O(\Phi) = O\left(\mu \frac{U^2}{L^2} \right) \quad \text{A1.3}$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

O termo Φ/T tem a seguinte ordem de grandeza:

$$O\left(\frac{\Phi}{T} \right) = O\left(\mu \frac{U^2}{TL^2} \right) \approx 10^{-3} \frac{1}{10^2 10^8} = 10^{-13} \quad \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{s}} \quad \text{A1.4}$$

Em fluidos com número de Prandtl superior a 1, como é o caso da água, o termo $q_i/T^2 \partial T/\partial x_i$ é sempre inferior a Φ/T . Tem-se por isso:

$$O\left(\rho\left(\frac{Ds}{Dt}\right)_{irrev}\right) = O\left(\frac{\Phi}{T}\right) \approx 10^{-13} \quad \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{s}} \quad \text{A1.5}$$

A variação de entropia devida ao fluxo de calor é dada pelo termo $\partial(q_i/T)/\partial x_i$. A variável q_i contabiliza apenas o fluxo de calor por condução e por radiação para o interior da partícula de fluido, uma vez que se está a analisar o elemento de fluido num referencial Lagrangeano. No caso de escoamentos costeiros e oceânicos a radiação só se faz sentir nos primeiros metros da coluna de água, numa região em que o gradiente vertical de temperatura é reduzido. O gradiente máximo de temperatura ocorre na termoclina situada tipicamente 100m abaixo da superfície. Nessa região o efeito da radiação é pequeno pelo que se vai considerar apenas o fluxo condutivo em q_i .

Considerando a lei constitutiva para o fluxo de calor por condução:

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{A1.6}$$

o termo anterior fica:

$$\rho\left(\frac{Ds}{Dt}\right)_{rev} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad \text{A1.7}$$

Na termoclina verificam-se variações da ordem dos 10 °C ao longo de distâncias de 100 m, pelo que o termo anterior tem a ordem de grandeza:

$$O\left(\rho\left(\frac{Ds}{Dt}\right)_{rev}\right) \approx \frac{1}{10^2} \left(\frac{1}{10^2} \frac{10}{10^2} \right) = 10^{-5} \quad \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{s}} \quad \text{A1.8}$$

Das equações A1.5 e A1.8 obtém-se:

$$O\left(\frac{Ds}{Dt}\right) \approx \left(\frac{10^{-13}}{10^3} + \frac{10^{-5}}{10^3}\right) \approx 10^{-8} \quad \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K} \cdot \text{s}} \quad \text{A1.9}$$

Na equação 2.25 este termo vem multiplicado por $(\partial p / \partial s)_\rho$. Para o caso de água pura em condições típicas do oceano este factor tem uma ordem de grandeza de 10^4 (Keenan et al., 1978), pelo que se tem:

$$O\left(\frac{L}{\rho U} \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{Ds}{Dt}\right) \approx \frac{10^4}{10^3} \frac{1}{10^6} 10^4 10^{-8} = 10^{-9} \quad \text{A1.10}$$

APÊNDICE 2: DECOMPOSIÇÃO DO CAMPO TURBULENTO

Tendo como base de partida as equações de Navier-Stokes para fluido incompressível escritas num referencial fixo na superfície da Terra:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A2.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k \quad \text{A2.2}$$

Vão-se obter as equações que descrevem o escoamento do campo resolvido. Para isso utiliza-se a decomposição:

$$u_i(x_i, t) = U_i(x_i, t) + u'_i(x_i, t) \quad \text{A2.3}$$

$$p(x_i, t) = P(x_i, t) + p'(x_i, t) \quad \text{A2.4}$$

e ignoram-se as perturbações turbulentas de densidade que, no caso incompressível, não influenciam significativamente o escoamento (Bradsaw et al., 1981). Aplicando a operação de média 1.38 a A2.1 obtém-se:

$$\frac{\partial(\overline{U_i + u'_i})}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \text{A2.5}$$

pelo que se têm:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A2.6}$$

que é a equação da continuidade do campo resolvido. Usaram-se para este resultado as propriedades da operação de média:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \quad \text{A2.7}$$

$$\overline{f'} = 0 \quad \text{A2.8}$$

$$\overline{F} = F \quad \text{A2.9}$$

com $s=x_i$ ou t e $f = F + f'$.

Subtraindo a equação A2.6 da equação A2.1 obtém-se:

$$\frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{A2.10}$$

que é a equação da continuidade para o campo das perturbações.

Aplicando a mesma metodologia à equação de balanço da quantidade de movimento A2.2 obtém-se:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{\frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j}} = g_i - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k} \quad \text{A2.11}$$

com:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad \text{A2.12}$$

$$\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{A2.13}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{A2.14}$$

$$2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k} = 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k \quad \text{A2.15}$$

Onde se usaram as propriedades A2.7 a A2.9 e também:

$$\overline{f \cdot g} = \overline{F \cdot G} + \overline{f' \cdot g'} \quad \text{A2.16}$$

que, para o caso de f constante simplifica para:

$$\overline{C^{te} \cdot g} = C^{te} \cdot \overline{G} \quad \text{A2.17}$$

O termo convectivo fica:

$$\overline{\frac{\partial(U_j + u'_j)(U_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U_i U_j} + \overline{U_i u'_j} + \overline{U_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad \text{A2.18}$$

Para o caso geral de uma média dada pela equação 1.38 a propriedade A2.16 não é válida pelo que nenhum destes termos se anula. Na técnica LES, que utiliza uma operação de média semelhante à da equação 1.38 mas com integração nas três dimensões espaciais para um instante fixo no tempo, os termos:

$$\overline{U_i u'_j} + \overline{U_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j} \quad \text{A2.19}$$

são as tensões de escala "subgrid" e o termo $\overline{U_i U_j}$ produz um termo de tensão adicional pois

$$\overline{U_i U_j} \neq U_i U_j \quad \text{A2.20}$$

O tensor

$$\lambda_{ij} = \overline{U_i U_j} - U_i U_j \quad \text{A2.21}$$

é o tensor das tensões de Leonard (Abbott e Basco, 1989).

Para o caso tradicional da média 1.38 com a função de peso 1.41 a propriedade A2.16 pode aplicar-se, simplificando A2.18 para:

$$\overline{\frac{\partial(U_j + u'_j)(U_i + u'_i)}{\partial x_j}} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad \text{A2.22}$$

A equação A2.2 fica assim:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial(U_j U_i)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad \text{A2.23}$$

Subtraindo a equação A2.23 da equação A2.2 obtém-se a equação de transporte para as perturbações da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial U_j u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u'_k + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} \quad \text{A2.24}$$

A equação de transporte da energia cinética por unidade de massa para o campo resolvido pode-se obter multiplicando a equação A2.23 por U_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i^2/2}{\partial t} + \frac{\partial(U_j U_i^2/2)}{\partial x_j} &= g_i U_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P U_i}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i^2/2}{\partial x_j} \right) - \\ &\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j} U_i)}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \text{A2.25}$$

Para obter a equação de balanço da energia cinética por unidade de massa para o campo das perturbações pode-se multiplicar a equação A2.2 por u_i , efectuando de seguida uma operação de média, subtraindo ao resultado dessa média a equação A2.25. Para o caso da média de Reynolds este procedimento é equivalente a multiplicar a equação A2.24 por u'_i efectuando depois uma operação de média. Obtém-se o resultado:

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial U_j u'_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j U_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} - 2\varepsilon_{ijk} \overline{\Omega_j u'_k u'_i} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}$$
A2.26

Os termos da equação anterior podem ser simplificados com o auxílio das propriedades da operação de média e da equação da continuidade ficando:

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{u_i'^2} / 2}{\partial t}$$
A2.27

$$\overline{u'_i \frac{\partial U_j u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{U_j u_i'^2} / 2}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{U_j u_i'^2} / 2}{\partial x_j}$$
A2.28

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_j U_i}{\partial x_j}} = \overline{u'_i u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$
A2.29

$$-\frac{1}{\rho} \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i}$$
A2.30

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\nu u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) - \overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i'^2} / 2}{\partial x_j^2} - \overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}$$
A2.31

$$-2\varepsilon_{ijk} \overline{\Omega_j u'_k u'_i} = -2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u'_k u'_i}$$
A2.32

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_j u_i'^2} / 2}{\partial x_j}$$
A2.33

$$\overline{u'_i \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}} = \overline{u'_i} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{A2.34}$$

Denominando $k = \overline{u_i'^2}/2$ e reordenando os termos a equação de transporte de energia cinética turbulenta fica:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_j k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u'_k u'_i} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'_j k}}{\partial x_j} - \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \text{A2.35}$$

APÊNDICE 3: TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS CURVILÍNEAS

A equação genérica de segunda ordem:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial C}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \quad \text{A3.1}$$

escrita no referencial cartesiano \vec{e}_1, \vec{e}_2 vai ser transformada neste apêndice para o referencial em coordenadas curvilíneas $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$.

O lado direito da equação anterior pode ser escrito como:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial D}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(1 - \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \right] \quad \text{A3.2}$$

Para E continuamente diferenciável o parâmetro ε pode assumir qualquer valor entre 0 e 1 e foi aqui introduzido por conveniência, sendo eliminado nas equações finais.

Usando a relação 2.71 a equação anterior fica:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = |\mathbf{J}| \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1} + \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \right) \quad \text{A3.3}$$

onde:

$$G = \frac{\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \left[\frac{\partial D}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \left[(1 - \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \right]}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.4}$$

$$H = \frac{\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \left[\frac{\partial D}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \left[(1 - \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \right]}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.5}$$

Usando a derivada do produto a função G pode ser transformada em:

$$G = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(D \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) - D \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\varepsilon E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) - \varepsilon E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(1-\varepsilon) E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right] - (1-\varepsilon) E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(F \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) - F \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.6}$$

ou, reagrupando termos:

$$G = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + (1-\varepsilon) E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\varepsilon E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + F \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)}{|\mathbf{J}|} - \frac{D \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + F \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.7}$$

Usando novamente a relação 2.71 a expressão anterior fica:

$$G = \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \left[D \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + (1-\varepsilon) E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \left(\varepsilon E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + F \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \right) \right\} / |\mathbf{J}| + \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \left[D \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + (1-\varepsilon) E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \left(\varepsilon E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + F \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \right) \right\} / |\mathbf{J}| - \frac{D \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + F \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.8}$$

Reordenando os termos esta expressão fica por fim:

$$\begin{aligned}
 G = & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[D \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + F \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(D \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + E \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \varepsilon |\mathbf{J}| E + F \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) - \\
 & - \frac{D \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + F \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|}
 \end{aligned} \tag{A3.9}$$

onde se usou a definição de jacobiano: $|\mathbf{J}| = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}$.

Efectuando uma operação semelhante para o termo H, equação A3.5, e substituindo ambos os resultados na equação A3.3 a equação genérica de segunda ordem A3.1 é transformada em:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t} + \frac{\partial B^{**}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial C^{**}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial^2 D^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 E^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi_2^2} \tag{A3.10}$$

onde

$$B^{**} = B^* + \frac{D \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + E \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + F \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|} \tag{A3.11}$$

$$C^{**} = C^* + \frac{D \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} + E \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2}}{|\mathbf{J}|} \tag{A3.12}$$

$$D^* = \frac{D \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + E \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + F \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2}{|\mathbf{J}|} \tag{A3.13}$$

$$E^* = \frac{2D \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + E \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) + 2F \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.14}$$

$$F^* = \frac{D \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 + E \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + F \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2}{|\mathbf{J}|} \quad \text{A3.15}$$

e onde A^* , B^* e C^* são definidos pelas equações 2.68.

Os termos do tipo $(\partial \xi_i / \partial x_j)^2$ são responsáveis por erros numéricos adicionais nas malhas de passo variável que não tem correspondência com erros nas equações do espaço físico.

REFERÊNCIAS

- Abbott, M., A. Damsgaard e G. Rodenhuis, 1973. System 21 Jupiter, A design system for two-dimensional nearly-horizontal flows. *J. Hyd. Res.* **1**:1-28.
- Abbott, M. e D. Basco, 1989. *Computational fluid dynamics: an introduction for engineers*. Longman Scientific & Technical. London.
- Adcroft, A. J., 1997. *Numerical Algorithms for use in a dynamical model of the ocean*. Tese de Doutorado, University of London, Imperial College.
- Adcroft, A., C. Hill e J. Marshall, 1997. Representation of Topography by Shaved Cells in a Height Coordinate Ocean Model. *Monthly Weather Review.* **125**(9):2293–2315.
- Ambar, I., A. Fiúza, F. Sousa e I. Lourenço, 1980. General circulation in the lower Sado river estuary under drought conditions. *Proceedings of Actual problems of oceanography in Portugal*. Ed. JNICT, Lisboa.
- Ambar I., A. Fiúza, T. Boyd e R. Frouin, 1986. Observations of a warm oceanic current flowing northward along the coasts of Portugal and Spain during Nov-Dec 1983. *Eos Trans.* **67**(144):1054.
- Amin, M., 1993. The mutual influence of tidal constituents in the presence of bottom stress. *Estuarine Coastal & Shelf Science*, **37**:625-633.
- Antunes, I., 1999. *Modelação Matemática da Qualidade da Água no Estuário do Tejo*. Tese de Mestrado. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Arakawa, A. e V. Lamb, 1977. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics.* **17**:174-267.
- Backhaus, J., 1985. A three-dimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. Dpt. Hydrogr. Z. 38, H. 4.
- Beckers, J. M., 1991. Analytical linear numerical stability conditions for an anisotropic threedimensional advection-diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* Vol.29, nº 3.
- Bleck, R. e D. Boudra, 1986. Wind-driven spin-up in eddy-resolving ocean models formulated in isopycnic and isobaric coordinates. *J. Geophys. Res.* **91**(C):7611-7621
- Bleck, R., H. Hanson, D. Hu e E. Kraus, 1989. Mixed layer-termocline interaction in a 3D isopycnic coordinate model. *J. Phys. Oceanogr.* **19**:1417-1439.

- Bleck, R. e L. Smith, 1990. A Wind-driven isopycnic coordinate model of the North and Equatorial Atlantic Ocean. I- model development and supporting experiments. *J. Geophys. Res.* **95**(C):3273-3285.
- Bleck, R., C. Rooth, D. Hu e L. Smith, 1992. Salinity-driven termocline transients in a wind- and thermohaline-forced isopycnic coordinate model of the North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.* **22**:1486-1505.
- Blumberg, F. A. e G. L., Mellor, 1983. Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight. *J. Geophys. Res.*, **88**:4579-4592.
- Bowden, K., 1983. *Physical Oceanography of Coastal Waters*. Ellis Horwood, Chichester.
- Bowman, M. e R. Iverson, 1978. Estuarine and plume fronts. *Oceanic fronts in coastal processes*. Ed. Bowman e Esaias, Springer-Verlag, New York.
- Bradshaw, P., T. Cebeci e J. Whitelaw, 1981. *Engineering calculation methods for turbulent flow*. Academic Press, London.
- Briggs, D., e O. Madsen, 1973. Analytical models for one- and two-layer systems in rectangular basins. Part II of Mathematical models of Massachusetts Bay. *Report N° 172. Parsons Lab.*, M.I.T., Cambridge.
- Brink, K., 1991. Coastal-trapped waves and wind-driven currents over the continental shelf. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23**:389-412.
- Broche, P. e P. Forget, 1992. Has the influence of surface waves on wind stress to be accounted for in modelling the coastal circulation. *Estuarine Coastal & Shelf Science*, **35**:347-351.
- Brown, J., A. Colling, D. Park, J. Phillips, D. Rothery e J. Wright., 1989. *Ocean Circulation*. Open University, Pergamon Press, Oxford.
- Burns, A. e N. Wilkes, 1987. A finite difference method for the computation of fluid flows in complex three dimensional geometries. *Harwell Laboratory report AERF-R 12342*, Harwell, U.K.
- Câmara, A., M. Silva, J. Ferreira, A. Rodrigues, J. Remédio, P. Castro, T. Fernandes e V. Machado, 1987. Sistema de Gestão da Qualidade da Água do Estuário do Tejo. *Relatório Técnico, Projecto Tejo nº 15*, Estudo Ambiental do Estuário do Tejo.
- Cameron, W. e D. Pritchard, 1963. Estuaries. *The sea*. Ed. M. N. Hill. Vol. 2, pp. 306-324, John Wiley & Sons, New York.
- Chippada, S., C. Dawson e M. Wheeler, 1998. A godonov-type finite volume method for the system of shallow water equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. **151**(01):105-130.

- Clarke, A., 1991. The dynamics of barotropic tides over the continental shelf and slope (review). *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Coelho, H. S., 1996. Modelação Numérica da Turbulência Oceânica. Tese Mestrado, IST, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- Cook, R., D. Malkus e M. Plesha, 1989. *Concepts and applications of finite element analysis*. 3ª Ed. John Wiley & Sons.
- Davies, A. e G. Furnes, 1980. Observed and computed M2 tidal currents in the North Sea. *J. Phys. Oceanogr.*, **10**:237-257.
- Davies, D. e D. Salmond, 1985. Calculation of the volume of a general hexaedron for flow prediction. *AIAA Journal*, **23**:954-956.
- Davies, A. M., 1993. Quasi-three-dimensional modelling using mixed finite-difference and spectral models. *Coastal, estuarial and harbour engineer's reference book*. pp. 117-128, Edited by M. B. Abbott and W. A. Price. Chapman & Hall, London.
- Deleersnijder, E., 1993. Numerical mass conservation in a free-surface sigma coordinate marine model with mode splitting. *Journal of Marine Systems*, **4**:365-370.
- Doodson, A. e H. Warburg, 1961. *Admiralty manual of tides*. Her Majesty's Stationary Office, London.
- Dyer, K., 1973. *Estuaries: a physical introduction*. John Wiley & Sons, London.
- Fletcher, C., 1991. *Computational techniques for fluid dynamics*. Vol. 1. Springer-Verlag
- Fox-Rabinovitz, M., 1991. Computational dispersion of horizontal staggered grids for atmospheric and ocean models. *Mon. Wea. Rev.* **119**:1624-1639.
- Fry, V. e D. Aubrey, 1990. Tidal velocity asymmetries and bedload transport in shallow embayments. *Estuarine Coastal & Shelf Science*, **30**:453-473.
- Garrett, C., J. Keeley e D. Greenberg, 1978. Tidal mixing versus thermal stratification in the Bay of Fundy and Gulf of Maine. *Atmos. Ocean*, **16**:403-423.
- Gill, A., 1989. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. International Geophysics Series, Vol. 30, Academic Press, San Diego.
- Godin, G., 1991. Frictional effects in river tides. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Hansen, D. & M. Rattray, 1966. New dimensions in estuary classification. *Limnol. Oceanogr.* **11**:319-326.

- Heaps, N., 1983. Storm surges, 1967-1982. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, **74**:331-376.
- Hedström, K., 1997. *User's manual for an S-coordinate primitive equation ocean circulation model (SCRUM) version 3.0*. Institute of Marine and Coastal Sciences, Rutgers University.
- Hirsch, C., 1988. *Numerical computation of internal and external flows*. Vol. 1. John Wiley & Sons.
- Holland, W. R., 1986. Quasi-geostrophic modelling of eddy-resolving ocean circulation. *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*. ed. J.J. O'Brien, D. Reidel.
- Holligan, P., 1981. Biological implications of fronts on the north-west European shelf. *Philos. Trans. R. Soc. London*, **302**(A):547-562.
- Huthnance, J., 1984. Slope currents and "JEBAR". *J. Phys. Oceanogr.*, **14**:795-810.
- Huthnance J.M., H. Coelho, C.R. Griffiths, R.D. Pingree, A.P. Rees, B. Sinha, A. Vangriesheim e M. White, 1999 Physical structures, advection and mixing at Goban Spur *Deep Sea Res.*, submitted.
- Ianniello, J., 1977. Tidally-induced residual currents in estuaries of constant breadth and depth. *Journal of Marine Research*, **35**(4):755-786.
- Ippen, A. e D. Harleman, 1961. One-dimensional analysis of salinity intrusion in estuaries. *Tech. Bull. 5. Comm. Tidal Hydraul. Corps. Eng. U.S. Army*.
- Ippen, A., 1966. Tidal dynamics in estuaries, Part I: estuaries of rectangular section. *Estuary and Coastline Hydrodynamics*. Ed. A. T. Ippen, McGraw-Hill Book Co., New York.
- Ivanov, A., 1977. Oceanic absorption of solar energy. *Modelling and prediction of the upper layers of the ocean*. Ed. E.B. Kraus, pp. 47-71, Pergamon, New York.
- Jay, D., 1991. Internal asymmetry and anharmonicity in estuarine flows. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Jay, D. e J. Musiak, 1996. Internal tidal asymmetry in chanel flows: Origins and consequences. *Mixing in estuaries and coastal seas, Coastal and estuarine studies* Vol. 50, pp. 211-249, American Geophysical Union.
- Jay, D. e E. Flinchem, 1997. Interaction of fluctuating river flow with a barotropic tide: A demonstration of wavelet tidal analysis methods. *Journal of Geophysical Research*. **102**(C3):5705-5720.
- Keenan, J., F. Keyes, P. Hill e J. Moore, 1978. *Steam tables, SI units*. Wiley, New York.

- Kjerfve, B. e B. Knoppers 1991. Tidal choking in a coastal lagoon. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Kowalik, Z. e T. S. Murty, 1993. *Numerical modelling of ocean dynamics*. World Scientific, 481 p., Singapura.
- Lax, P., 1954. "Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation". *Comm. pure and applied mathematics*. **7**:159-193.
- LeBlond, P., 1978. On tidal propagation in shallow rivers. *Journal of Geophysical Research*. **83**(C9):4717-4721.
- LeBond, P. e L. Mysak, 1978. *Waves in the Ocean*. Elsevier Pub. Co.
- Lee, R. e T. Pritchard, 1996. Dispersion of effluent from Sydney's new deepwater outfalls. Part1: Ocean processes. *Mixing in estuaries and coastal seas, Coastal and estuarine studies* Vol. 50, pp. 430-438, American Geophysical Union.
- Leendertse, J., 1967. Aspects of a computational model for long water wave propagation. Rand Corporation Memorandum RH-5299-RR, Santa Monica.
- Leendertsee, J. J. e S. K. Liu, 1978. A three-dimensional turbulent energy model for non-homogeneous estuaries and coastal sea systems. *Hydrodynamics of Estuaries and Fjords*. ed. J. C. J. Nihoul, pp. 387-405, Elsevier, Amsterdam.
- Leitão, P., 1996. *Modelo de Dispersão Lagrangeano Tridimensional*. Tese de Mestrado. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Lemos, P., 1972. Estuário do Tejo. *Relatório Técnico, AGPL*, Lisboa.
- Leonard, A., 1974. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advances in Geophysics*, **18**(A):237-248.
- LeProvost, C., 1994. A new in situ reference data set for ocean tides. *AVISO Altimetry Newsletter No. 3*, September 1994.
- Levitus, B., 1982. Climatological atlas for the World Ocean. *NOAA Prog. Paper 13*, US Government Printing Office, Washington DC.
- Lewis, R., 1996. Relative contributions of interfacial and bed generated mixing to the estuarine energy balance. *Mixing in estuaries and coastal seas, Coastal and estuarine studies* Vol.50, pp. 250-266, American Geophysical Union.
- Linden, P., 1979. Mixing in stratified fluids. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. **13**(3):3-23.

- Lynch, D. e W. Gray, 1978: Analytic solutions for computer flow model testing. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, **104**(HY10):1409-1428.
- Madala, R. V. e S. A., Piacsek, 1977. A semi-implicit numerical model for baroclinic oceans. *J. Comp. Phys.* **23**:167-178.
- Martins, F., R. Neves e P. Leitão, 1998. A three-dimensional hydrodynamic model with generic vertical coordinate. Proceedings de Hydroinformatics'98, Vol. 2, pp. 1403-1410, Ed. V. Babovic & L. C. Larsen, Balkema, Rotterdam.
- Martins, F., R. Neves, P. Leitão e A. Silva, 1999. 3D modeling in the Sado estuary using a new generic coordinate approach. *J. Geophys. Res.*, *submitted*.
- McWilliams, J. C., 1986. Modelling the oceanic general circulation. *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **28**:215-248.
- Mellor, G. e F. Blumberg, 1985. Modelling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system. *Mon. Weather Rev.* **113**:1379-1383.
- Mohammadi, B. & O. Pironneau, 1994. *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. John Wiley & Sons, Paris.
- Munk, W. e D. Cartwright, 1965. Tidal spectroscopy and prediction. *Philos. Trans. R. Soc. London*, **259**(A):533-581.
- Neves, R., 1985. *Étude expérimentale et modélisation mathématique des circulations transitoire et résiduelle dans l'estuaire du Sado*. Tese de Doutoramento, Université de Liège.
- Neves, R. e F. Martins, 1996. Modelação Lagrangeana dos Processos de Transporte na Ria Formosa. *5ª Conferência Nacional Sobre a Qualidade do Ambiente*, Aveiro.
- Neves R., H. Coelho, A. Santos, H. Martins, P. Leitão, R. Miranda, F. Martins e P. Montero, 1998a). Modeling the circulation off Iberian Peninsula. *OMEX First Annual Science Report*, pp. 191-202.
- Neves, R., R. Miranda, P. Leitão. e F. Martins, 1998b). Programa de monitorização do emissário da Guia: Modelação matemática. *Relatório técnico, SANEST Lda*, Lisboa.
- Neves R., A. Santos, H. Coelho, R. Miranda, P. Leitão, H. Martins, 1999 Hydrodynamics and fluxes along the European Ocean Margin. *Deep Sea Res.*, *submitted*
- Noble, M., W. Schroeder, W. Wiseman Jr., H. Ryan e G. Gelfenbaum. 1996. Subtidal circulation patterns in a shallow, highly stratified estuary: Mobile Bay, Alabama. *J. Geophysical Res.* **101**(C11):25689-25703.

- Norton, N. J., J. C. McWilliams e P. R. Gent, 1986. A numerical model of the balance equations in a periodic domain and an example of balanced turbulence. *J. Comput. Phys.*, **67**:439-471.
- Nunes, R. e G. Lennon, 1987. Episodic stratification and gravity currents in a marine environment of modulated turbulence. *J. Geophys. Res.* **92**:5465-5480.
- O'Brien, J., 1986. The diffusive problem. *Advanced physical oceanographic numerical modelling*. Ed. J. O'Brien, D. Reidel, 127-144.
- Parker, B., 1991. The relative importance of the various nonlinear mechanisms in a wide range of tidal interactions. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Patankar, S. V., 1981. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publ. Co., McGraw Hill Book Company.
- Pedlosky, J. 1987. *Geophysical fluid dynamics*. Springer Verlag, 2. Ed. New York.
- Phillips, N. A., 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteorol.* **14**:184-185.
- Pingree, R. e B. LeCann, 1989. Celtic and Armorican slope and shelf residual currents. *Progress in Oceanography*, **23**:303-338.
- Pingree, R. e B. LeCann, 1990. Structure, strength and seasonality of the slope currents in the Bay of Biscay region. *Journal of the Marine Biological Association of the UK*, **70**:857-885.
- Pond, S. e G.L. Pickard., 1989. *Introductory dynamical oceanography*. 2 Ed., Pergamon Press, Oxford.
- Portela, L., 1996. *Modelação matemática de processos hidrodinâmicos e de qualidade da água no Estuário do Tejo*. Tese de Doutoramento. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Prandle, D., 1991. Tides in estuaries and embayments (review). *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Pritchard, D. , 1955. Estuarine circulation patterns, *Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, Vol. 81, Nº. 717.
- Ribeiro, M. e R. Neves, 1982. Caracterização hidrográfica do estuário do Sado. Relatório do Dep. Engenharia Mecânica, I.S.T., Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- Roach, P.J., 1972. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publ., Albuquerque.
- Santos, A. e R. Neves, 1991. Radiative artificial boundaries in ocean barotropic models. *Second international conference on computer modelling*, pp. 373-383, Barcelona.

- Santos, A., 1995. *Modelo hidrodinâmico tridimensional de circulação oceânica e estuarina*. Tese de Doutoramento. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Schwiderski, E., 1980. On charting global ocean tides. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **18**:243-268.
- Semtner, A. e Y. Mintz, 1977. Numerical simulation of the gulf stream and mid-ocean eddies. *J. Phys. Oceanogr.* **77**:208-230.
- Silva, A. e J. Leitão, 1995. Estudos de modelação matemática do novo porto terminal de Setúbal. *Relatório Técnico, Hidromod Lda*, Lisboa.
- Silva, A., J. Leitão e P. Leitão, 1998. Estudo hidrodinâmico e dos processos de transporte na área de projecto do novo terminal do porto de setúbal usando um modelo 3D. *Relatório Técnico, Hidromod Lda*. Lisboa.
- Simmons, H., 1955. Some affects of upland discharge on estuarine hydraulics. *Proc. Amer. Soc. Civil Eng.* **81**:792.
- Simpson, J. e I. James, 1986. Coastal and estuarine fronts. *Baroclinic processes on continental shelves*. Ed. C.N.K. Mooers, pp. 63-93. Amer. Geophys. Union., Washington D.C.
- Simpson, J., J. Brown, J. Matthews e G. Allen, 1990. Tidal straining, density currents and stirring in the control of estuarine stratification. *Estuaries*, **13**(2):125-132.
- Simpson, J., 1997. Physical processes in the ROFI regime. *J. Mar. Sys.* **12**:3-15.
- Sobral, J. T., 1977. Estuário do Sado Observação de correntes de marés. Relatório do Instituto Hidrográfico, Lisboa.
- Song, Y. e D. B. Haidvogel, 1994. A semi-implicit ocean circulation model using a generalized topography-following coordinate system. *J. Comp. Phys.* **115**(1):228-244.
- Speer, P., D. Aubrey e C. Friedrichs, 1991. Nonlinear hydrodynamics of shallow tidal inlet/bay systems. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Speziale, C., 1987. On nonlinear k-l and k- ϵ models of turbulence. *J. Fluid. Mech.*, **178**:459-475.
- Spurk, J., 1997. *Fluid mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Stelling, G. S., 1983. *On the construction of computational methods for shallow water flow problems*. Tese de Doutoramento, Technische Hogeschool to Delft.
- Tennekes, H. e J. Lumley, 1972. *A first course in turbulence*. MIT press, Cambridge.

- Thompson, J.F., 1984. A survey of dynamical-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations. AIAA Paper 84-1606.
- Unesco, 1981. Tenth report of the joint panel on oceanographic tables and standards. *Unesco technical papers in marine science* N.36, p. 24.
- Vaz, R. e G. Lennon, 1991. Modulation of estuarine stratification and mass flux at tidal frequencies. *Tidal hydrodynamics*, Ed. Bruce B. Parker, John Wiley & Son.
- Vinokur, M., 1989. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, **81**:1-52.
- Wallcraft, A., 1989. *The navy layered ocean model user's guide*. JAYCOR, Stennis Space Center, MS 39529-5004.
- Wheless, G. e A. Valle-Levinson, 1996. A modeling study of tidally driven estuarine exchange through a narrow inlet onto a sloping shelf. *Journal of Geophysical Research*. **101**(C11):25675-25687.
- Wollast, R., 1978a. *Rio Sado. Campagne de mesures de juillet 1978*. Relatório técnico, secretaria de estado do ambiente, Lisboa.
- Wollast, R., 1978b. *Rio Sado. Campagne de mesures de décembre 1978*. Relatório técnico, secretaria de estado do ambiente, Lisboa.
- Wollast, R., 1979. *Rio Sado. Campagne de mesures d'avril 1979*. Relatório técnico, secretaria de estado do ambiente, Lisboa.
- Yanenko, N. N., 1971. *The methods of fractional steps*, Springer-Verlag, New-York.