

ESTUDOS I



FACULDADE de ECONOMIA da UNIVERSIDADE do ALGARVE

ESTUDOS I

Cidadania, Instituição e Património

Economia e Desenvolvimento Regional

Finanças e Contabilidade

Gestão e Apoio à Decisão

Modelos Aplicados à Economia e à Gestão

A Faculdade de Economia da Universidade do Algarve



Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

2004

COMISSÃO EDITORIAL

António Covas
Carlos Cândido
Duarte Trigueiros
Efigénio da Luz Rebelo
João Albino da Silva
João Guerreiro
Paulo M.M. Rodrigues
Rui Nunes

FICHA TÉCNICA

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

Campus de Gambelas, 8005-139 Faro
Tel. 289817571 Fax. 289815937
E-mail: ccfeua@ualg.pt
Website: www.ualg.pt/feua

Título

Estudos I - Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

Autor

Vários

Editor

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve
Morada: Campus de Gambelas
Localidade: FARO
Código Postal: 8005-139

Compilação e Design Gráfico

Susy A. Rodrigues

Revisão de Formatação e Paginação

Lídia Rodrigues

Fotolitos e Impressão

Serviços Gráficos da Universidade do Algarve

ISBN

972-99397-0-5 - Data: 26.10.2004

Depósito Legal

218279/04

Tiragem

500 exemplares

Data

Novembro 2004

**RESERVADOS TODOS OS DIREITOS
REPRODUÇÃO PROIBIDA**

Modelos de avaliação de hipotecas: uma revisão de literatura

Cristina Pereira Viegas

Faculdade de Economia, Universidade do Algarve

José Azevedo Pereira

Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa

Resumo

Este artigo analisa os modelos de avaliação de activos hipotecários baseados na técnica de análise de fluxos contingentes. Trata-se de modelos que tendem a considerar duas fontes de incerteza: o risco de taxa de juro e o risco de incumprimento. Tal facto permite-lhes incorporar, em simultâneo, o efeito induzido pela opção de compra americana inerente à possibilidade detida pelo devedor de terminar o contrato antecipadamente, mediante o pagamento do empréstimo, e o efeito induzido pela opção de venda, que corresponde à possibilidade de incumprimento, também detida pelo devedor. A coexistência de ambas as opções e das correspondentes fontes de risco tende a dificultar significativamente o desenvolvimento dos respectivos modelos de avaliação.

Esta área de investigação tem sido marcada durante os últimos anos pela emergência de modelos de avaliação mais sofisticados e aproximados da realidade, que tomam em consideração outros aspectos capazes de influenciar a decisão de antecipar o pagamento ou de incumprir, tais como os custos de transacção e outras motivações de natureza não puramente financeira.

Palavras-chave: Avaliação de hipotecas, avaliação de opções, pré-pagamento, incumprimento.

Abstract

This article reviews the literature on contingent claims mortgage valuation models. These models take into consideration two sources of uncertainty: interest rate risk and prepayment risk. Given the specific characteristics of most mortgage contracts, mortgage valuation models should be able to take into account the American call option to prepay the loan as well as the put option to default, both held by the mortgagor. The need to take into consideration, simultaneously, both options and the corresponding risk sources has been a major technical hurdle to the development of mortgage valuation models capable of properly describing the underlying economic reality.

The recent past has seen the development of more sophisticated models incorporating other features that affect the decisions to prepay or default, like transaction costs and non-finance driven factors.

Keywords: Mortgage valuation, option pricing, prepayment, default.

1. Introdução

O mercado dos activos hipotecários tem crescido significativamente durante as últimas duas décadas. Tal evolução tem sido evidente tanto ao nível do mercado primário como do mercado secundário.

Efectivamente, de acordo com dados apresentados em Março de 2002, os títulos hipotecários representam cerca de $\frac{1}{4}$ da capitalização global do mercado obrigacionista americano, existindo alguns mercados importantes nos quais o respectivo peso é ainda superior, como se pode constatar através do Quadro 1.

Quadro 1. Peso dos Títulos Hipotecários no Mercado Obrigacionista

| | |
|---------------------------|-----------|
| Estados Unidos da América | 24% (**) |
| Alemanha | 44% (*) |
| Dinamarca | 59% (*) |
| Chile | 33% (***) |
| Malásia | 11% (**) |

Legenda: (*) 1999, (**) 2000, (***) meados de 2001

Fonte: Hassler e Chiquier (2002)

Como seria de esperar, a este aumento do peso financeiro dos títulos hipotecários tem vindo a corresponder um incremento do esforço académico colocado no desenvolvimento de modelos adequados à respectiva valorização.

Segundo Hendershott e Van Order (1987), os primeiros estudos de avaliação de activos hipotecários desenvolvidos nos Estados Unidos tinham como principal factor de motivação a necessidade de encontrar explicações racionais para as diferenças registadas entre os valores das curvas de rendimento baseadas em títulos emitidos pelo Tesouro e os valores das curvas de rendimento calculadas com base em activos hipotecários emitidos pelas agências governamentais americanas. Apesar dos notáveis progressos entretanto registados no domínio da identificação dos factores mais relevantes para efeitos da avaliação de activos hipotecários, existe ainda um significativo percurso de investigação a percorrer no sentido de tornar os modelos de avaliação mais adaptados à realidade.

O presente artigo pretende precisamente analisar os modelos de avaliação existentes nesta área que recorrem a enquadramentos de análise de fluxos contingentes.

A importância da utilização da análise de fluxos contingentes na avaliação de activos hipotecários tem vindo a ser reconhecida desde há mais de duas décadas (Findlay e Capozza, 1977).

Um modelo de valorização deste tipo de activos deve incorporar, em simultâneo, o efeito induzido pela opção de compra americana inerente à possibilidade detida pelo devedor de terminar o contrato antecipadamente, mediante o pagamento do empréstimo, bem como o efeito induzido pela opção de venda, que corresponde à possibilidade de incumprimento, também detida pelo devedor.

De facto, de acordo com Case e Shiller (1996), os investidores que efectuem aplicações no mercado de activos hipotecários assumem “posições curtas” em dois tipos de opções: opções de compra relativas à dívida de longo prazo e opções de venda relativas à propriedade hipotecada. No primeiro caso, a opção existente resulta da

possibilidade conferida ao devedor do empréstimo de o liquidar em qualquer momento do tempo, suportando um conjunto maior ou menor (nalguns casos nulo) de penalidades contratuais. No caso de se tratar de um empréstimo de taxa fixa, tenderão a verificar-se condições propícias ao exercício da opção de compra caso as taxas de juro de mercado registem quebras, facto que implicará um aumento automático do valor de mercado da dívida inerente aos correspondentes empréstimos.

Por sua vez, o exercício da opção de venda tende a ocorrer em casos nos quais o valor da propriedade sofre quebras significativas relativamente ao valor que lhe correspondia no momento do empréstimo.

Em conformidade com o que acaba de ser afirmado, os modelos de análise de fluxos contingentes utilizados na avaliação de produtos hipotecários tendem a considerar duas fontes de incerteza: o risco de taxa de juro e risco de incumprimento.

A coexistência de ambas as opções anteriormente mencionadas e das correspondentes fontes de risco tende a dificultar significativamente o desenvolvimento de modelos de avaliação apropriados. Com efeito, as possibilidades detidas pelo devedor para pôr termo ao respectivo empréstimo, quer por via do respectivo pré-pagamento quer por via do incumprimento, constituem fontes de incerteza relativamente aos fluxos financeiros futuros, de difícil modelação. A decisão do devedor é condicionada, em simultâneo, pela evolução da curva de taxas de juro no futuro e pela evolução do preço do imóvel hipotecado. A opção de pré-pagamento num activo hipotecário é equivalente a uma opção de compra americana sobre uma obrigação em que o activo subjacente é uma obrigação com fluxos monetários equivalentes aos pagamentos remanescentes associados ao empréstimo hipotecário. Por sua vez, a opção de incumprimento pode ser assimilada a uma opção de venda americana cujo activo subjacente é a construção hipotecada¹.

Os modelos de avaliação de fluxos contingentes desenhados com o intuito de valorizar activos hipotecários assumem normalmente que o objectivo do devedor consiste em minimizar o valor de mercado do empréstimo. Isto é assume-se que o devedor, enquanto agente económico racional, procura minimizar o valor actualizado do contrato que o liga à entidade financiadora. Em ordem a que tal objectivo possa ser alcançado, devem ser tomados em consideração não apenas os pagamentos de capital e juros associados ao contrato, mas também todos os restantes fluxos de natureza financeira associados às opções de incumprimento e pré-pagamento existentes. Em moldes simplificados, poder-se-á afirmar que o devedor tende a incumprir quando o valor do imóvel hipotecado atinge um valor inferior ao valor actualizado do empréstimo. Alternativamente, tenderá também a proceder ao reembolso antecipado do empréstimo caso o montante total a despender seja inferior ao respectivo valor actualizado, facto que poderá acontecer caso se registre uma situação de descida das taxas de juro no mercado.

Os modelos de fluxos contingentes destinados à avaliação de produtos hipotecários registaram uma evolução significativa ao longo das duas últimas décadas. Nas variantes mais simples, como as patentes em Dunn e McConnell (1981b) e Kau,

¹ Pode também ser modelada, provavelmente de forma ainda mais adequada, como uma European compound option. Ou seja, como uma sequência de opções de compra europeias, com vencimentos em cada uma das datas de pagamento inerentes ao empréstimo (vejam-se, por exemplo, Kau, Keenan, Muller e Epperson, 1995 e Azevedo-Pereira *et al.*, 2002, 2003).

Keenan, Muller e Epperson (1992), admite-se um comportamento puramente otimizador, por parte do devedor, que procede ao pré-pagamento sempre que tal decisão se mostrar a melhor em termos financeiros. Tal decisão reflecte-se de imediato no comportamento do investidor perante o activo hipotecário.

A passagem do tempo permitiu o desenvolvimento de modelos progressivamente mais sofisticados e aproximados da realidade nos quais são tomados em consideração factores como os custos de transacção, bem como motivações de natureza não puramente financeira capazes de influenciar a decisão de antecipar o pagamento ou de incumprir. Também se tem vindo a admitir progressivamente que estas decisões divergem não somente entre contratos, mas também, para o mesmo tipo de contratos, entre emitentes. Stanton (1995), por exemplo, apresenta um trabalho de avaliação dos activos hipotecários que engloba um modelo de pré-pagamento no qual o comportamento heterogéneo dos emitentes dos activos se encontra associado aos custos de transacção.

Por sua vez, a modelação do incumprimento como uma opção de venda americana detida pelo devedor, um enquadramento de avaliação inicialmente proposto em Foster e Van Order (1984,1985) e posteriormente desenvolvido em Epperson, Kau, Keenan e Muller (1985), tem-se tornado comum na literatura da especialidade.

A boa compreensão das características e componentes dos contratos hipotecários permitida pela modelação em enquadramentos de avaliação de fluxos contingentes capazes de tomar em consideração as opções de incumprimento e de pré-pagamento tem não apenas importância académica, mas também implicações práticas, uma vez que o *pricing* dos activos tende naturalmente a melhorar em consequência da progressiva adopção pelos diferentes bancos de investimento de modelos com estas características.

Enumeram-se de seguida, os vários pontos abordados no artigo. Após a introdução é descrita de forma breve a organização do mercado hipotecário e os principais tipos de activos que nele são transaccionados. O ponto seguinte do trabalho debruça-se sobre a avaliação dos activos hipotecários, abordando em detalhe os principais factores de risco e a forma mediante a qual podem ser incorporados nos exercícios de avaliação. É dada ênfase especial aos processos estocásticos subjacentes às variáveis relevantes do modelo – taxa de juro e valor da propriedade – bem como às opções de pré-pagamento e de incumprimento inerentes aos modelos de avaliação dos activos hipotecários, procurando evidenciar os moldes em que o valor destas opções afecta o preço dos activos. Ainda neste ponto, é deduzida a equação diferencial parcial geral que permite obter o valor dos activos financeiros, sendo feita uma breve alusão aos principais métodos de solução utilizados na literatura. No quarto ponto, são referidos alguns dos modelos de avaliação existentes na literatura. Incluem-se aqui quer modelos de matriz conceptual, quer modelos de características empíricas. Paralelamente, são também identificadas as opções alvo de modelação em cada artigo: pré-pagamento, incumprimento ou ambas. O último ponto apresenta a conclusão.

2. Breve Descrição do Mercado Hipotecário

O mercado hipotecário, que representa uma parcela significativa do volume global de negócios do sector financeiro, encontra-se subdividido em três grandes segmentos. O primeiro corresponde aos activos físicos – casas ou propriedades – que sendo objecto de garantia, subjazem à emissão dos títulos. O segundo é constituído pelo mercado primário no qual são emitidos e subscritos os títulos hipotecários. Por último, o terceiro segmento corresponde às transacções em mercado secundário dos activos anteriormente emitidos. Neste artigo é dada especial atenção ao mercado dos activos financeiros de natureza hipotecária e às próprias hipotecas. No entanto, importa salientar que os activos físicos subjacentes são também alvo de intensa investigação, uma vez que a análise do comportamento do respectivo valor é fundamental à valorização da opção de incumprimento embutida nos activos hipotecários.

No mercado americano, que dada a respectiva dimensão relativa constitui o principal referencial de investigação da comunidade científica que se dedica ao estudo desta temática, a grande maioria dos activos hipotecários tem associada uma taxa de juro fixa. Consequentemente, o montante dos juros a suportar pelos devedores dos empréstimos encontra-se determinado no momento da respectiva contracção. Existem, no entanto, activos hipotecários cujos juros são determinados com base numa taxa variável ao longo da vida do empréstimo, outros cujas prestações periódicas são crescentes com o tempo de vida do activo e, ainda, outros cujas prestações periódicas de capital e juros são ajustadas em função da taxa de inflação, com o objectivo de reflectirem a evolução do preço da construção hipotecada.

No que se refere ao tipo de activo físico subjacente, os activos hipotecários encontram-se subdivididos em dois grandes grupos: os activos hipotecários residenciais e os activos hipotecários comerciais. No primeiro caso, trata-se de activos garantidos por casas particulares. Por oposição, os segundos são títulos de dívida garantidos por propriedades como centros comerciais, hotéis, escritórios e complexos industriais.

Apesar destes últimos representarem uma parcela significativa do volume global de transacções de activos hipotecários, o número de estudos relativos à sua avaliação tem sido relativamente reduzido, quando comparado com o volume de investigação produzido a respeito dos activos hipotecários de natureza residencial. Alguns dos poucos exemplos de modelos de avaliação desenvolvidos neste domínio são Titman e Torous (1989), Kau, Keenan, Muller e Epperson (1987, 1990), Riddiough e Thompson (1993), Childs, Ott e Riddiough (1996) e Ciochetti e Vandell (1999).

3. Avaliação de Activos Hipotecários como Derivados

3.1. O Efeito da Incerteza

Os activos hipotecários são activos financeiros que incorporam duas fontes de incerteza. Uma dessas fontes é constituída pelas taxas de juro que é necessário utilizar em ordem a avaliar o empréstimo hipotecário. A evolução da taxa de juro não é conhecida com certeza. Esta incerteza condiciona a forma como os pagamentos das

prestações futuras ocorrerão. Ou seja, pode levar ao pagamento antecipado do empréstimo caso o valor actual dos pagamentos futuros seja inferior ao valor do activo em questão.

Outra das fontes de incerteza relativa à modelação da avaliação dos activos hipotecários diz respeito à evolução do valor da propriedade. Quando se avalia este tipo de contratos e caso o valor da propriedade hipotecada seja inferior ao valor presente do activo é possível que os devedores dos empréstimos hipotecários não paguem as prestações que faltam incorrendo no incumprimento do contrato.

Um dos maiores desafios inerentes à modelação financeira consiste na representação matemática destas fontes de risco e em tomá-las em consideração de forma adequada no processo de avaliação.

3.2. Os Processos Estocásticos Utilizados na Modelação do Comportamento das Variáveis Relevantes: Taxa de Juro e Preço da Propriedade

O valor actualizado dos activos hipotecários é normalmente calculado mediante a utilização de uma estrutura de avaliação estocástica assente em modelos de arbitragem em tempo contínuo. O valor de um activo financeiro é determinado de acordo com as especificações e os pressupostos inerentes às variáveis de estado utilizadas, que são descritas por processos estocásticos.

Como o valor do activo financeiro é função dos pressupostos assumidos na caracterização do comportamento das variáveis incorporadas no modelo, é fundamental que o processo estocástico seguido por estas variáveis retrate, o mais fidedignamente possível, a dinâmica seguida pelo mercado.

Por exemplo, Black e Scholes (1973) e Merton (1973) modelaram o preço das acções através de um processo estocástico denominado movimento geométrico *browniano*, conseguindo obter uma solução fechada para o valor de uma opção de compra Europeia sobre uma acção.

Este pressuposto, normalmente utilizado na modelação do comportamento do preço das acções tem também encontrado aplicação no mercado dos activos hipotecários. De facto, trata-se de uma abordagem que tem sido frequentemente utilizada na modelação do valor da propriedade, nos modelos de avaliação de activos hipotecários.

Por sua vez Vasicek (1977), modelou o comportamento dos preços dos activos de rendimento fixo, através da utilização de uma variável de estado associada à taxa de juro de curto prazo. A taxa de juro é então descrita através de uma equação diferencial estocástica, que segue um processo de *Ornstein-Uhlenbeck*, com a seguinte configuração:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r dz_r \quad (1)$$

onde r é a taxa de juro instantânea que oscila em redor da sua média de longo prazo, θ , em função de uma determinada taxa de ajustamento, k . Esta equação diferencial estocástica é composta por um termo não aleatório, que constitui a tendência de variação instantânea da taxa de juro, e de um termo aleatório, que inclui a variância da

taxa de juro σ_r , e um incremento diferencial dz . Por seu lado, z , simboliza um processo de *Wiener* padrão.

Fazendo apelo à regra de diferenciação de Itô, este autor refere que o preço da obrigação, P , pode ser definido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dP(t, T, r) = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dr^2 \quad (2)$$

Tendo por base os princípios referidos e após algumas transformações algébricas, Vasicek obteve a seguinte equação diferencial parcial para a estrutura a prazo de taxas de juro:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (k(\theta - r) - \lambda \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (3)$$

Esta formulação base permitiu a Vasicek a apresentação de uma solução fechada para o valor de uma obrigação de cupão zero.

Outro dos modelos de referência neste domínio é o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985). Trata-se de um modelo que consubstancia algumas alterações em relação ao anteriormente mencionado modelo de Vasicek (1977). Admite-se que a taxa de juro de curto prazo segue, neste caso, um processo de reversão na direcção da média, com a seguinte configuração:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dz_r \quad (4)$$

A principal diferença, em relação ao modelo de Vasicek, reside na componente desvio-padrão. Também, através da utilização deste último processo estocástico caracterizador da evolução da taxa de juro, é possível obter uma solução fechada relativa ao preço dos activos de rendimento fixo com comportamento semelhante a uma obrigação cupão zero.

Para além destes dois trabalhos de referência, existem outras propostas, defendidas por diferentes autores, relativas ao processo estocástico representativo da evolução da taxa de juro.

Chen e Yang (1995) comparam a exequibilidade de quatro diferentes processos estocásticos, caracterizadores da estrutura a prazo das taxas de juro para avaliar um activo hipotecário com opção de pré-pagamento. O processo de Ornstein-Uhlenbeck é confrontado com três outros processos: o processo raiz quadrada média revertida definido por Cox, Ingersoll e Ross (1985), o processo *log* normal padrão² que Dothan (1978) empregou para modelar a estrutura a prazo das obrigações de cupão zero e o processo binomial discreto de Ho e Lee (1986). Utilizando estes diferentes processos estocásticos, o estudo em causa analisa e compara os resultados obtidos na valorização de soberanos e de activos hipotecários emitidos por agências governamentais americanas. As suas conclusões apontam no sentido de que o modelo que avalia os

² Este processo estocástico é, normalmente, utilizado nos activos hipotecários para definir o comportamento do imóvel hipotecado.

activos hipotecários é menos sensível a diferenças verificadas na definição do processo estocástico que caracteriza a evolução da taxa de juro de curto prazo, quando comparado com o modelo que avalia uma simples obrigação com cupão. Tal facto é justificado pela inclusão de uma função de pré-pagamento no modelo que avalia os activos hipotecários. No que se refere ao desempenho que os diferentes processos estocásticos proporcionam na avaliação dos activos hipotecários verifica-se que os resultados obtidos são satisfatórios e relativamente semelhantes quando se utiliza o processo de Vasicek (1977) ou o de Cox, Ingersoll e Ross (1985). Em relação a este último, importa mencionar a vantagem de não permitir taxas de juro negativas, em resultado do modo mediante o qual é definida a componente aleatória do respectivo processo estocástico.

A especificação mais utilizada na bibliografia da especialidade é, provavelmente, a que foi originalmente proposta por Cox, Ingersoll e Ross (1985). Nos estudos de avaliação de activos hipotecários, este modelo tem-se tornado uma referência na modelação do risco da estrutura a prazo de taxas de juro. O seu desempenho neste tipo de estrutura foi analisado em Archer e Ling (1995), tendo obtido bons resultados quando comparado com o modelo de ausência de arbitragem de Black, Derman e Toy (1990). Vários artigos de avaliação de activos hipotecários têm adoptado, ao longo das últimas duas décadas, este modelo para definir o comportamento da taxa de juro de curto prazo. Entre eles, importa referir os trabalhos de Dunn e McConnel (1981a, 1981b), Buser e Hendershott (1984), Brennan e Schwartz (1985), Hendershott e Van Order (1987), Kau *et al.* (1987, 1990, 1992, 1993a, 1993b, 1995), Titman e Torous (1989), Schwartz e Torous (1992), Riddiough e Thompson (1993), Harding (1994), Quigley e Van Order (1995), Kau e Keenan (1995), Stanton (1995), Stanton e Wallace (1997), Yang e Maris (1996), Deng (1997), Hilliard, Kaw e Slawson (1998), Azevedo-Pereira, Newton e Paxson (2000, 2002, 2003).

Durante o período de tempo que mediou entre a publicação dos referidos artigos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985), Brennan e Schwartz (1979) desenvolveram um modelo com características semelhantes aos dos modelos anteriormente referidos, com a diferença de apresentar a inclusão de duas variáveis de estado, a taxa de juro de curto prazo e a taxa de juro de longo prazo, para caracterizar a estrutura a prazo de taxas de juro. Dava-se, assim, início ao estudo de modelos de arbitragem a mais de uma variável estocástica. O objectivo principal continuava a ser a construção de uma estrutura a prazo de taxas de juro através do cálculo do preço das obrigações cupão zero.

A partir daqui, ficaram estabelecidos os alicerces que permitiram a proliferação de modelos de arbitragem a uma e a mais variáveis de estado. Baseados neste tipo de abordagem surgiram vários modelos de avaliação dos activos hipotecários que utilizam como variáveis de estado, a taxa de juro de curto prazo e a de longo prazo.

Brenann e Schwartz (1985) e Schwartz e Torous (1989a,b) desenvolveram modelos de avaliação de activos hipotecários onde o comportamento da estrutura a prazo de taxas de juro é definido pela taxa de juro de curto prazo, r , e pela taxa de juro de longo prazo, l . Nestes trabalhos, os processos estocásticos relativos às variáveis de estado têm a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} dr &= (a_1 + b_1(l - r))dt + \sigma_r r dz_r \\ dl &= (a_2 + b_2 l + c_2 r)dt + \sigma_l dz_l \end{aligned} \quad (5)$$

Onde a_1, b_1, a_2, b_2 e c_2 são os parâmetros dos processos estocásticos das duas variáveis do modelo e σ_i se refere ao desvio padrão da variável i , (com $i = r, l$). Por sua vez, z_r e z_l , são processos *Wiener* padrão que verificam as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} dz_i dz_j &= \rho_{ij} dt, \text{ para } i = r, l, j = r, l, i \neq j \text{ e } \rho_{ij} = \rho_{ji} \\ dz_i dz_j &= dt, \text{ para } i = r, l, j = r, l \text{ e } i = j \end{aligned} \quad (6)$$

onde ρ_{ij} designa o coeficiente de correlação instantâneo entre a variável i e a j .

Nestes trabalhos é assumido que o comportamento da curva de taxas de juro pode ser descrito em função da dinâmica seguida por estas duas variáveis de estado. De acordo com Kau e Keenan (1995), a utilização das duas variáveis proporciona a vantagem de conceder ao modelo um maior número de graus de liberdade na representação da estrutura a prazo; por outro lado proporciona a desvantagem de aumentar significativamente a complexidade de cálculos necessários para a obtenção da solução. Daí que, este tipo de modelos, normalmente, só seja utilizado em contextos em que a estrutura a prazo é considerada a única fonte de incerteza. Quando se utilizam outras variáveis, como o valor da propriedade hipotecada, para explicar o comportamento do valor dos activos, a evolução da taxa de juro é na quase totalidade dos casos representada por uma única variável de estado, geralmente a taxa de juro de curto prazo modelada de acordo com o processo sugerido por Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Nos últimos anos têm surgido trabalhos que apresentam outras combinações de variáveis para representar o comportamento da curva de taxas de juro. Exemplo disso é o trabalho de Balduzzi *et al.* (2000), que desenvolve e implementa empiricamente um modelo com duas variáveis de estado: a taxa de juro de curto prazo e o nível médio da taxa de juro. Neste modelo os processos estocásticos relativos às duas variáveis têm a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} dr &= k(\theta - r)dt + \sigma_r dz_r \\ d\theta &= (a + b\theta)dt + \eta dw \end{aligned} \quad (7)$$

Em relação à variável taxa de juro de curto prazo o processo estocástico corresponde ao definido em (1). No que diz respeito à variável nível médio da taxa de juro, θ , os parâmetros a, b e η são constantes dadas. Tal como foi referido para dz_r , também dw corresponde a um processo de *Wiener* padrão, pelo que $dz_r dw = \rho dt$, com ρ a representar o coeficiente de correlação. Partindo desta configuração, os autores conseguem determinar uma solução fechada que permite avaliar obrigações e estimar os parâmetros do modelo que proporcionam um melhor desempenho para a solução encontrada. No respectivo entender, a introdução da segunda variável mencionada na representação da curva de taxas de juro melhora a avaliação de obrigações, e de

opções sobre obrigações de longo prazo, com a característica adicional de ser relativamente simples de determinar.

No que se refere à outra variável de estado considerada na grande maioria dos trabalhos académicos que se debruçam sobre a avaliação de activos hipotecários – o valor da casa ou da propriedade – existe um consenso mais alargado, entre académicos, acerca do processo estocástico mais capaz de representar. A quase totalidade da literatura existente nesta área do conhecimento considera, para esta variável, o seguinte processo estocástico:

$$dB = (\alpha - b)Bdt + \sigma_B Bdz_B \quad (8)$$

Onde B representa o valor da casa ou da propriedade, α corresponde ao rendimento instantâneo esperado na propriedade, b representa a taxa de rendimento contínua da propriedade, σ_B o desvio padrão instantâneo e z_B o processo de *Wiener* padrão.

Cunningham e Hendershott (1984), Epperson *et al.* (1985), Kau *et al.* (1987, 1990, 1992, 1993a, 1993b, 1995), Titman e Torous (1989), Schwartz e Torous (1992), Deng (1997), Hilliard, Kau e Slawson (1998), Yang, Buist e Megbolugbe (1998) Ciochetti e Vandell (1999), Azevedo-Pereira *et al.* (2000, 2002, 2003), Downing, Stanton e Wallace (2003), constituem exemplos de trabalhos que utilizam esta abordagem.

3.3. As Opções de Pré-Pagamento e de Incumprimento

Os modelos clássicos de avaliação de activos hipotecários tendem a atribuir ao devedor três possibilidades de escolha em cada momento do tempo: pré-pagamento, incumprimento ou manutenção do empréstimo por via do pagamento da prestação (continuação), até à próxima data de decisão. Em qualquer dos casos, o objectivo último do devedor hipotecário consiste em minimizar o custo do empréstimo³.

Consideremos, como primeira hipótese, que na data de vencimento de uma determinada prestação, t , o devedor do empréstimo resolve pagar a totalidade da sua dívida. No momento do exercício da opção de pré-pagamento, o respectivo valor tem necessariamente de corresponder a:

$$C(t, r, B) = A(t, r, B) - MB(t) \quad (9)$$

onde $MB(t)$ corresponde ao valor do empréstimo por amortizar na data t e $A(t, r, B)$ é o valor actual das prestações do empréstimo que não foram pagas até à data t . Paralelamente, neste mesmo momento do tempo, o valor da opção de incumprimento é necessariamente nulo (quem paga não pode em simultâneo incumprir):

$$P(t, r, B) = 0 \quad (10)$$

³ A formulação utilizada nesta parte do trabalho é baseada em Lin e Buttimer (2002)

Alternativamente, nessa mesma data, t , o devedor do empréstimo pode não efectuar o pagamento da prestação em dívida, exercendo a respectiva opção de incumprimento. Neste caso, o valor da opção exercida corresponde a⁴:

$$P(t, r, B) = A(t, r, B) - B(t) \quad (11)$$

onde $B(t)$ corresponde ao valor do imóvel hipotecado, na data t . Deste modo, o valor da opção de incumprimento corresponde à diferença entre o valor actualizado dos pagamentos futuros associados ao empréstimo e o valor da construção hipotecada. O exercício da opção de incumprimento só fará sentido caso a construção atinja um valor inferior ao do activo hipotecário. Tal situação equivale a admitir que o devedor do empréstimo vende o imóvel ao credor hipotecário por um preço igual a $B(t)$. Caso o devedor do empréstimo exerça a opção de incumprimento, o valor da opção de pré-pagamento deixa de existir (quem incumpe não pode, em simultâneo, pré-pagar):

$$C(t, r, B) = 0 \quad (12)$$

A terceira alternativa possível consiste em admitir que na data t , o devedor do empréstimo efectue o pagamento da prestação em dívida, garantindo assim a possibilidade de exercício futuro de qualquer uma das opções de que dispõe. Nestas circunstâncias, no momento t , o valor de cada uma das opções corresponde, ao valor (esperado) actualizado dos *payoffs* que poderá proporcionar no futuro:

$$\begin{aligned} C(t, r, B) &= E_C(t, r, B) \\ P(t, r, B) &= E_P(t, r, B) \end{aligned} \quad (13)$$

Paralelamente, o valor do activo corresponde ao valor actualizado dos pagamentos futuros deduzido do valor (também actualizado) das opções de pré-pagamento e de incumprimento:

$$A(t, r, B) - E_C(t, r, B) - E_P(t, r, B) \quad (14)$$

Numa situação de incumprimento do devedor do empréstimo, o valor da hipoteca iguala o valor do imóvel. Alternativamente, caso seja exercida a opção de pré-pagamento, o valor da hipoteca coincide com o valor do empréstimo amortizado.

A grande dificuldade inerente à avaliação dos contratos hipotecários reside no cálculo dos valores das opções de pré-pagamento e incumprimento. No caso, boa parte dos exercícios de modelação que têm vindo a ser implementados tende a tratar ambos os direitos em causa como opções Americanas – passíveis de ser exercidas em qualquer momento. A literatura publicada neste domínio tem vindo a registar alguns avanços durante os últimos anos. No entanto, não existe ainda uma fórmula consensual que permita determinar, explicitamente, o valor deste tipo de opções. Existem sim, algumas abordagens que permitem obter aproximações satisfatórias para o problema. Merecem particular saliência, os trabalhos de Carr (1998) e de Bunch e Johnson

⁴ No caso, trata-se de um *payoff*, uma vez que se trata de uma opção exercida.

(2000), que apresentam avanços significativos no cálculo do valor da opção de venda americana mediante o recurso a soluções *quasi-explicitas*.

A derivação de uma expressão para o chamado preço crítico do activo subjacente a uma opção de venda americana constitui um dos objectivos do artigo de Bunch e Johnson (2000). Uma vez determinado o valor desta variável, os autores utilizam-no na determinação do valor da opção de venda americana, mediante a utilização do método proposto em Huang, Subrahmanyam e Yu (1996). De acordo com este trabalho, o valor de uma opção de venda americana é dado pelo valor da opção de venda europeia correspondente, calculado nos termos propostos por Black e Scholes (1973), acrescido de um prémio resultante da possibilidade de exercício da opção em qualquer momento. A obtenção de uma solução fechada para o valor deste prémio impõe a necessidade de que seja conhecida a expressão que permite determinar o preço crítico do activo subjacente. Este preço crítico corresponde ao valor mais alto do preço do activo subjacente para o qual a opção de venda deve ser exercida. Este resultado é obtido igualando a zero a derivada da expressão que permite determinar o preço da opção de venda americana em relação ao tempo e resolvendo esta igualdade em ordem ao valor do activo subjacente. A expressão encontrada para o activo subjacente corresponde ao preço crítico⁵. A obtenção deste valor é uma condição fundamental para a determinação do valor da opção de venda americana. No caso dos activos hipotecários, o preço crítico do activo subjacente⁶ permite obter o valor limite da propriedade hipotecada. Este valor corresponde à zona de fronteira na qual se passa de uma situação de incumprimento para uma situação na qual os pagamentos das prestações devem continuar normalmente. O preço crítico assume importância acrescida no caso da avaliação dos activos hipotecários comerciais, dado o facto de as respectivas condições contratuais permitirem que no exercício de modelação e *pricing* seja normalmente ignorada a opção de pré-pagamento. Importa, no entanto, referir que a solução de Bunch e Johnson (2000) é apenas válida para opções de venda americanas cujo activo subjacente não distribua dividendos. No caso dos activos hipotecários existe um parâmetro com tratamento similar aos dividendos. Trata-se da taxa de rendimento contínuo proporcionado pelo imóvel que, na prática, tende a existir sempre. Consequentemente, a extensão do resultado de Bunch e Johnson (2000) à avaliação imobiliária impõe a necessidade de admissão de um pressuposto muito pouco consentâneo com a realidade do mercado.

Outro trabalho de referência neste domínio é o de Carr (1998). Também neste artigo são determinados o valor da opção de venda Americana e o preço crítico do respectivo activo subjacente. Neste caso, a derivação da expressão que permite determinar o valor crítico é apresentada para três hipóteses distintas: inexistência de dividendos (tal como em Bunch e Johnson, 2000), dividendos constantes e dividendos proporcionais ao valor do activo subjacente. Enquanto que para as duas primeiras soluções é possível apresentar uma expressão explícita para o valor crítico, no caso da terceira hipótese, o valor crítico é determinado implicitamente. Tal facto acarreta maior complexidade na determinação do seu valor. A aplicação deste tipo de

⁵ Quando a derivada do preço da opção de venda americana em relação ao tempo é nula, o valor da opção não depende do tempo, sendo óptimo exercê-la imediatamente, pelo que o preço do activo subjacente é igual ao preço crítico.

⁶ Para os activos hipotecários o activo subjacente da opção de venda corresponde ao valor da propriedade hipotecada.

resultados aos activos hipotecários permitiria uma aproximação dos respectivos modelos de avaliação à realidade. Ou seja, com base em Carr (1998) deverá ser possível deduzir uma expressão para o valor fronteira da propriedade hipotecada, isto é, para o valor limite a partir do qual é óptimo para o devedor do empréstimo o exercício da opção de incumprimento. Esta dedução é passível de ser realizada caso se considere constante o rendimento obtido com a propriedade hipotecada. Na hipótese deste rendimento ser proporcional ao valor da propriedade, a dedução de uma expressão para o valor fronteira da propriedade é de extrema complexidade.

3.4. Métodos de Solução

A equação geral que permite obter o valor dos activos é desenvolvida em duas etapas. A primeira etapa consiste na derivação da equação geral de avaliação de um derivado financeiro, cujo valor depende de várias variáveis estocásticas. Dado que os activos hipotecários constituem derivados financeiros, a respectiva valorização é passível de ser conseguida mediante a aplicação conjunta da equação geral de avaliação com as condições de fronteira adequadas à tomada em consideração da respectiva realidade contratual. A segunda etapa do exercício de valorização de um activo hipotecário consiste precisamente em identificar a equação diferencial a respeitar e as respectivas condições de fronteira. Por fim, a terceira fase do exercício de valorização consiste em resolver a equação diferencial parcial sujeita às condições limite impostas, extraindo um valor para os activos em questão.

Na avaliação de derivados financeiros é utilizada a teoria geral dos processos diferenciais estocásticos, tal como é aplicada no domínio da matemática financeira. A primeira etapa define os activos a avaliar e os processos estocásticos inerentes às variáveis de estado utilizadas. O passo seguinte consiste em derivar a equação diferencial parcial relativa ao valor do activo hipotecário, admitindo ausência de oportunidades de arbitragem.

Considerando uma carteira constituída por $n+1$ activos hipotecários, cujo valor depende de n variáveis de estado, é, de seguida, deduzida a equação diferencial parcial que pode ser aplicada a cada caso concreto juntamente com as condições fronteiras adequadas⁷.

Deste modo, é criada uma carteira constituída por uma combinação linear de $n+1$ activos hipotecários, ao menor risco, e com valor facial dado por Π :

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i V_i \quad \text{com } a_i \in \mathfrak{R} \quad (15)$$

onde a_i e V_i correspondem ao montante e ao valor, respectivamente, do activo hipotecário i na carteira de activos.

De seguida considere-se o aumento na riqueza obtido durante um período de tempo curto, $\delta(\text{Riqueza})$:

⁷ A formulação seguinte é baseada em Oliver (1998), com as convenientes adaptações para os activos hipotecários.

$$\delta(Riqueza) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \delta V_i \quad (16)$$

Conforme atrás mencionado, $V_i \equiv V_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, onde x_1, x_2, \dots, x_n são n variáveis de estado que seguem o processo diferencial estocástico geral:

$$dx_i = \mu_i dt + \sigma_i dz_i \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Assim sendo, é possível aplicar a fórmula de Itô de dimensão n :

$$\delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} \delta t + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i^2} \delta x_i^2 + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j \quad \text{com } i \neq j \text{ e } i, j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

Sendo a carteira livre de risco, o aumento da riqueza deve corresponder ao produto do respectivo valor facial Π pela taxa de juro dos activos sem risco, r . Caso contrário encontrar-nos-íamos em presença de uma oportunidade de arbitragem.

Daqui é possível extrair:

$$\delta(Riqueza) = r \Pi \delta t \Leftrightarrow \delta(Riqueza) = r \sum_{i=1}^{n+1} a_i V_i \delta t \quad (19)$$

Com base neste resultado é possível apresentar a equação diferencial parcial relativa ao valor do activo geral V , cuja formulação é o resultado da dinâmica seguida pelas n variáveis subjacentes ao modelo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} - rV = 0 \quad (20)$$

Onde o parâmetro λ_i , relativo à variável de estado x_i , representa o preço de mercado do risco de x_i .

A igualdade (20) representa a equação (diferencial parcial) geral de avaliação de activos hipotecários.

A formulação precisa assumida pela equação diferencial parcial no processo de valorização específica de cada tipo de activo hipotecário depende das especificações e dos pressupostos inerentes às variáveis de estado utilizadas que são descritas por processos estocásticos. É imprescindível que o processo estocástico seguido por estas variáveis retrate, o mais fidedignamente possível, a dinâmica seguida pelo mercado. A aplicação de diferentes variáveis bem como de diferentes processos estocásticos produzirá diferentes cenários de avaliação.

O valor do activo é passível de ser obtido através da resolução da equação diferencial parcial sujeita às condições de fronteira adequadas, decorrentes das opções de pré-pagamento e de incumprimento implícitas. A literatura da especialidade tem, na esmagadora maioria dos casos, apresentado apenas soluções numéricas, para este tipo

de enquadramento de avaliação. Em ordem a obter estas mesmas soluções numéricas, é necessário recorrer a complexas técnicas de computação, facto que torna o processo demasiado moroso e dispendioso.

As técnicas numéricas utilizadas para determinar o valor dos activos derivados podem ser classificadas como métodos “forward” e métodos “backward”. Os métodos “forward”, como a simulação de Monte Carlo, utilizam a informação presente e passada para estimar os fluxos monetários decorrentes do empréstimo hipotecário e consequentemente avaliam os activos em questão. Como o término do contrato pode acontecer antecipadamente, por via do exercício das opções de pré-pagamento e de incumprimento, é necessário estimar a taxa de antecipação do termo do mesmo, analisando o comportamento do devedor do empréstimo para diferentes cenários da evolução das variáveis estocásticas do modelo.

Por outro lado, os métodos “backward”, como o método binomial ou o método das diferenças finitas, avaliam o activo de acordo com a informação presente e futura. Este tipo de estrutura de avaliação é mais adequado para avaliar activos hipotecários, uma vez que permite tratar de forma endógena o exercício de qualquer das opções embutidas no contrato hipotecário que possibilitam o respectivo termo antecipado. Na data de maturidade, o valor do contrato hipotecário é conhecido para cada um dos potenciais estados da natureza. Através da consideração da equação geral de avaliação e das condições de fronteira adequadas, é matematicamente possível determinar também o valor desse mesmo contrato no momento do tempo imediatamente anterior. Seguindo recursivamente este procedimento, é possível determinar o valor do activo no momento presente. O método das diferenças finitas é um dos procedimentos mais utilizados neste domínio. Wilmott, Dewynne e Howison (1993) e Clewlow e Strickland (1998) apresentam uma descrição detalhada do funcionamento deste método.

4. Modelos na Literatura

Durante os últimos anos foi publicado um conjunto de modelos de avaliação de fluxos contingentes destinados à avaliação de activos hipotecários que toma em consideração, simultaneamente, as opções de pré pagamento e de incumprimento. De entre estes merecem destaque os trabalhos de Kau *et al.* (1992, 1995), Kau e Keenan (1995) e Deng, Quigley e Van Order (2000). Kau e Keenan (1995) apresentam uma revisão da literatura da especialidade publicada até meados da década de noventa.

Conforme foi mencionado na introdução, no domínio das hipotecas sobre imóveis de natureza residencial, os primeiros trabalhos que utilizaram modelos de fluxos contingentes para avaliar os activos hipotecários com opção de pré-pagamento devem-se a Dunn e McConnell (1981a,b). Abordagens similares são, no entanto, apresentadas numa série de trabalhos posteriores. Brennan e Schwartz (1985) desenvolveram um modelo de avaliação dos activos hipotecários sujeitos a risco de pré-pagamento, no qual utilizaram como variáveis de estado a taxa de juro de curto prazo e a taxa de juro de longo prazo. Timmis (1985), considerou especificamente a existência de custos de transacção associados à opção de pré-pagamento. Schwartz e Torous (1989a) analisaram empiricamente o comportamento do pré-pagamento e

utilizam essa informação para o desenvolvimento de um modelo de avaliação. Recentemente, Stanton e Wallace (1997), apresentaram mais um modelo de fluxos contingentes capaz de avaliar este tipo de activos, apresentando um algoritmo numérico para resolver o problema da valorização dos efeitos induzidos pelos pré-pagamentos e generalizando este tipo de análise através da consideração da possibilidade de existência de pré-pagamento induzidos por razões exógenas.

Paralelamente surgiram outros trabalhos relativos à avaliação de activos hipotecários cujo foco principal reside na opção de incumprimento. Neste âmbito, Cunningham e Hendershott (1984) e Epperson *et al.* (1985) desenvolvem modelos aplicáveis a este tipo de avaliação com a inclusão de opções de venda.

Por sua vez, no que respeita ao tratamento e avaliação dos efeitos induzidos pelas opções de incumprimento, uma das referências pioneiras deve-se a Leung (1989). Trata-se de um modelo de avaliação de activos hipotecários que tem a particularidade de considerar apenas a opção de incumprimento. Apresenta soluções analíticas e resultados estatísticos comparáveis para o valor dos activos hipotecários que apresentem como característica a inexistência de opção de pré-pagamento. O modelo utiliza duas variáveis de estado para caracterizar o comportamento dos activos em questão: o preço da obrigação cupão zero e o preço do imóvel. O trabalho recorre ao método do “valor esperado” de Cox e Ross (1976) para avaliar o activo hipotecário com uma opção de incumprimento, argumentando que este método é mais rápido do que o método das diferenças finitas, de utilização mais frequente.

No domínio paralelo da investigação sobre métodos de avaliação de activos hipotecários comerciais, importa mencionar a recente revisão de literatura incluída no trabalho de Fu, LaCour-Little e Vandell (2002), tomando em consideração tanto modelos centrados na valorização da opção de pré-pagamento, como modelos centrados na valorização da opção de incumprimentos e modelos que consideram simultaneamente ambas as opções. Em termos históricos, no domínio da valorização de activos hipotecários comerciais, uma das primeiras referências a considerar é Vandell (1984), um dos primeiros estudos a analisar o risco de incumprimento em activos hipotecários comerciais. O respectivo modelo considera o incumprimento como resultado da existência de fluxos monetários adversos, ou do facto de o valor líquido do contrato ter valor negativo. É reconhecida a existência de interações entre os fluxos monetários decorrentes do empréstimo e o valor líquido do contrato, que possuem implicações ao nível do risco de incumprimento. O artigo coloca ainda particular ênfase no papel que no entender deve ser destinado à regulamentação das consequências do incumprimento e à necessidade de tomar em consideração toda a informação volátil relativa à propriedade, ao mercado e às condições económicas no exercício de avaliação. Titman e Torous (1989), constitui outro trabalho de referência nesta área. O trabalho inclui um modelo de avaliação de activos hipotecários que considera a opção de incumprimento, baseando-se na noção de que o devedor do empréstimo hipotecário exerce a opção de incumprimento sempre que o valor da construção hipotecada atinge um montante inferior ao da correspondente hipoteca. Os dados utilizados para a estimação empírica são as taxas dos títulos hipotecários comerciais, cotadas por companhias de seguros para períodos de 3, 5, 7 e 10 anos. Os parâmetros para os processos taxas de juro são estimados a partir do preço das obrigações do Tesouro. O modelo explica uma parte significativa do nível do prémio

de incumprimento e as alterações que são verificadas ao longo dos períodos. No entanto, como é observado pelos autores do artigo, os resultados obtidos são muito sensíveis aos valores escolhidos para os parâmetros. Vandell (1992), avalia a relação entre, por um lado, o incumprimento nos activos hipotecários comerciais e, por outro lado, as características do contrato, da propriedade hipotecada, do devedor do empréstimo, do mercado e do meio envolvente económico geral. Para tal utiliza o maior conjunto de dados, disponível publicamente, relativo à incidência do incumprimento nos hipotecários comerciais. O artigo apresenta-se como um instrumento útil na determinação do risco de incumprimento futuro, segundo cenários económicos alternativos. Vandell *et al.* (1993) analisam também o incumprimento associado aos activos hipotecários comerciais, e tal como Vandell (1992), estudam a probabilidade de incumprimento associada aos referidos activos. Tanto quanto é do nosso conhecimento, este trabalho apresenta a primeira tentativa empírica de utilização da base de dados de empréstimos comerciais efectuados por uma grande companhia de seguros. Os resultados empíricos confirmam a importância dos valores das prestações e da propriedade na explicação dos níveis de incumprimento. Ciochetti e Vandell (1999), investigam também o risco de incumprimento, utilizando para o efeito o modelo binomial multi-período (Rendleman e Bartter, 1979 e Cox, Ross e Rubinstein, 1979). De resto, os métodos numéricos utilizados na solução dos problemas de avaliação de activos hipotecários comerciais têm variado frequentemente nos trabalhos que têm vindo a ser publicados, ao longo das últimas duas décadas. Por exemplo Titman e Torous (1989) e Kau *et al.* (1987, 1990) utilizam o método das diferenças finitas, enquanto que Riddiough e Thompson (1993) e Childs, Ott e Riddiough (1996) empregam o método de simulação de Monte Carlo.

Os últimos anos têm vindo a ser marcados pela publicação de modelos de avaliação de activos hipotecários mais sofisticados, que tentam conciliar o trabalho conceptual com a análise empírica. Ciochetti, Deng, Gao e Yao (2002), utilizam um conjunto de dados de uma grande companhia de seguros, aplicando uma estrutura originalmente desenvolvida por Deng, Quigley e Van Order (1996, 2000) para o mercado dos activos hipotecários residenciais, num trabalho que incide especificamente sobre activos hipotecários de natureza comercial. Os seus resultados confirmam que a evolução do valor das opções de compra e venda contribui significativamente para explicar os níveis efectivos de pré-pagamento e incumprimento de hipotecas comerciais. Os custos de transacção são outro dos aspectos que assume um papel de relevo na explicação dos casos de conclusão antecipada do contrato. Downing, Stanton e Wallace (2003), desenvolvem e testam empiricamente um modelo de avaliação estrutural que avalia as opções de pré-pagamento e de incumprimento incluídas num contrato hipotecário, como funções endógenas das fontes subjacentes de incerteza. Neste artigo, ao contrário do que foi assumido noutros trabalhos do mesmo tipo, como Dunn e McConnell (1981a, 1981b), são também tomados em consideração factores exógenos capazes de influenciar o exercício das opções de incumprimento e de pré-pagamento. Nomeadamente, são considerados os custos de transacção associados à decisão de incumprir ou de pré-pagar o empréstimo, salientando-se o facto de existirem diferenças nos níveis que estes custos apresentam para diferentes tipos de investidores. Paralelamente, é ainda tomado em consideração o facto de o valor das opções de incumprimento e de pré-pagamento

poder também ser condicionado por factores de natureza não estritamente financeira que podem condicionar a decisão do devedor hipotecário.

Outros estudos que merecem referência especial pelo seu carácter inovador à data da publicação são Collin-Dufresne e Harding (1999) e Yang, Buist e Megbolugbe (1998). Collin-Dufresne e Harding (1999) deduzem uma solução fechada para os activos hipotecários residenciais de taxa fixa, utilizando uma única variável de estado, a taxa de juro de curto prazo, que segue um processo de *Ornstein Uhlenbeck*. No seu estudo incorporam um modelo empírico de pré-pagamento, através da utilização de dados históricos. Tem sido demonstrado noutros artigos, nomeadamente em Kau *et al.* (1992), que, potencialmente, a modelação dos activos hipotecários mediante o recurso a mais de uma variável de estado, proporciona resultados mais fiáveis. No entanto, os autores apresentam uma lista de vantagens inerentes à apresentação de uma solução fechada com a utilização de uma única variável de estado. Nomeadamente, esta solução permite determinar, rapidamente, os valores assumidos por variáveis relevantes para a gestão de carteiras de títulos, tais como o valor, a duração e a convexidade. Esta capacidade facilita a efectivação de análises de optimização e de imunização de carteiras mais complexas, as quais, de outro modo, causariam volumosos cálculos matemáticos.

Por último, convirá mencionar o caso invulgar de modelação a três factores, no domínio da avaliação de activos hipotecários. Yang, Buist e Megbolugbe (1998) introduzem um terceiro processo estocástico – o rendimento obtido com o imóvel hipotecado – no modelo de avaliação usual, que inclui normalmente apenas a taxa de juro e o preço do imóvel, chegando a uma formulação que lhes possibilita o cálculo das probabilidades de incumprimentos e de pré-pagamento.

5. Conclusão

O estudo histórico da literatura dedicada à avaliação de activos hipotecários revela que a análise de fluxos contingentes tem vindo a ser utilizada na avaliação deste tipo de activos desde há mais de duas décadas.

Nestes casos, os modelos de avaliação dos activos hipotecários, para além de incluírem um método de valorização dos *cash flows* esperados correspondentes aos reembolsos de capital e juros, devem incluir especificamente o tratamento de duas opções facultadas ao devedor hipotecário: uma opção de compra, cujo exercício torna possível terminar antecipadamente o contrato hipotecário, através do pré-pagamento da dívida; e uma opção de venda, cujo exercício, por via do incumprimento, é também possível obter o mesmo efeito terminal.

Os últimos anos têm sido marcados pela emergência de modelos que tentam conciliar o tratamento teórico do processo de avaliação com *inputs* de natureza empírica. Em paralelo, recentemente, merecem também destaque os trabalhos destinados ao cálculo de probabilidades de incumprimento e de pré-pagamento inerentes aos diversos contratos hipotecários.

Um domínio ainda pouco explorado neste campo de investigação, respeita ao desenvolvimento de soluções fechadas para a avaliação de activos hipotecários. Contudo a complexidade do tratamento matemático que é induzido pela existência

simultânea de duas opções Americanas, tem até aqui impedido o desenvolvimento de modelos eficazes de avaliação. Será, no entanto de esperar que, tal como tem vindo a acontecer no domínio dos activos financeiros derivados, num futuro não muito longínquo, a comunidade académica seja capaz de ultrapassar estas dificuldades e produzir modelos de avaliação que apresentem soluções fechadas ou *quasi-fechadas*.

Bibliografia

- Archer, W.R. e D.C. Ling (1995) The Effect of Alternative Interest Rate Processes on the Value of Mortgage-Backed Securities, *Journal of Housing Research*, 6, 2, 285-314.
- Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2000) Numerical Solution of a Two State Variable Contingent Claims Mortgage Valuation Model, *Portuguese Review of Financial Markets*, 3, 1, 35-65.
- Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2002) UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation, *Real Estate Economics*, 30, 2, 185-211.
- Azevedo-Pereira, J. A., D.P. Newton e D.A. Paxson (2003) Fixed Rate Endowment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 26, 2-3, 197-221.
- Balduzzi, P., S.R. Das, S. Foresi e R.K. Sundaram (2000), Stochastic Mean Models of the Term Structure of Interest Rates, in B. Tuckman e N. Jegadeesh (eds.), *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*, New York, John Wiley and Sons, 128-161.
- Black, F. e M. Scholes (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-659.
- Black, F., E. Derman e W. Toy (1990) A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options, *Financial Analysts Journal*, 46, 1, 33-39.
- Brennan, M.J. e E.S. Schwartz (1979) A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds, *Journal of Banking and Finance*, 3, 133-155.
- Brennan, M.J. e E.S. Schwartz (1985) Determinants of GNMA Mortgage Prices, *AREUEA Journal*, 13, 3, 209-228.
- Bunch, D.S. e H. Johnson (2000) The American Put Option and Its Critical Stock Price, *Journal of Finance*, 55, 5, 2333-2356.
- Buser, Stephen A. e P.H. Hendershott (1984) Pricing Default-Free Fixed Rate Mortgages, *Housing Finance Review*, 3, 4, 405-429.
- Carr, P. (1998) Randomization and the American Put, *The Review of Financial Studies*, 11, 3, 597-626.
- Case, K.E. e R.J. Shiller (1996) Mortgage Default Risk and Real Estate Prices: The Use of Index-Based Futures and Options in Real Estate, *Journal of Housing Research*, 7, 2, 243-258.
- Chen, R.-R. e T.L.T. Yang (1995) The Relevance of Interest Rate Processes in Pricing Mortgage-Backed Securities, *Journal of Housing Research*, 6, 2, 315-332.
- Childs, P.D., S.H. Ott e T.J. Riddiough (1996) The Pricing of Multi-Class Commercial Mortgage-Backed Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 4, 581-603.

- Ciochetti, B.A. e K.D. Vandell (1999) The Performance of Commercial Mortgages, *Real Estate Economics*, 27, 1, 27-61.
- Ciochetti, B.A., Y. Deng, B. Gao e R. Yao (2002) The Termination of Commercial Mortgage Contracts through Prepayment and Default: A Proportional Hazard Approach with Competing Risks, *Real Estate Economics*, 30, 4, 595-633.
- Clelow, L. e C. Strickland (1998) *Implementing Derivatives Models*, England, John Wiley & Sons.
- Collin-Dufresne, P. e J.P. Harding (1999) A Closed Form Formula for Valuing Mortgages, *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 19, 2, 133-146.
- Cox, J. e R. Ross (1976) The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll e S.A. Ross (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 2, 385-407.
- Cox, J.C., S.A. Ross e M. Rubinstein (1979) Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Cunningham, D. e P.H. Hendershott (1984) Pricing FHA Mortgage Default Insurance, *Housing Finance Review*, 3, 4, 383-392.
- Deng, Y. (1997) Mortgage Termination: An Empirical Hazard Model with a Stochastic Term Structure, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14, 3, 309-331.
- Deng, Y., J.M. Quigley e R. Van Order (1996) Mortgage Default and Low Downpayment Loans: The Cost of Public Subsidy, *Regional Science and Urban Economics*, 26, 3-4, 263-285.
- Deng, Y., J.M. Quigley e R. Van Order (2000) Mortgage Terminations, Heterogeneity and the Exercise of Mortgage Options, *Econometrica*, 68, 2, 275-307.
- Dothan, L.U. (1978) On the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, 6, 1, 59-69.
- Downing, C., R. Stanton e N.E. Wallace (2003) *An Empirical Test of a Two-Factor Mortgage Valuation Model: How Much Do House Prices Matter?*, Paper RPF-296, Research Program in Finance Working Papers.
- Dunn, K.B. e J.J. McConnell (1981a) A Comparison of Alternative Models for Pricing GNMA Mortgage-Backed Securities, *Journal of Finance*, 36, 2, 471-483.
- Dunn, K.B. e J.J. McConnell (1981b) Valuation of Mortgage-Backed Securities, *Journal of Finance*, 36, 3, 599-617.
- Epperson, J.F., J.B. Kau, D.C. Keenan e W.J. Muller III (1985) Pricing Default Risk in Mortgages, *Journal of AREUEA*, 13, 3, 261-272.
- Findlay, M.C. e D.R. Capozza (1977) The Variable-Rate Mortgage and Risk in the Mortgage Market: An Option Theory Perspective, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 9, 356-364.
- Foster, C. e R. Van Order (1984) An Option Based Model of Mortgage Default, *Housing Finance Review*, 3, 4, 351-372.
- Foster, C. e R. Van Order (1985) FHA Terminations: A Prelude to Rational Mortgage Pricing, *Journal of AREUEA*, 13, 3, 273-291.
- Fu, Q., M. LaCour-Little e K.D. Vandell (2003) Commercial Mortgage Prepayments Under Heterogeneous Prepayment Penalty Structures, *Journal of Real Estate Research*, 25, 3, 245-275.

- Harding, J., (1994) Rational Mortgage Valuation with Heterogeneous Borrowers, Working Paper, University of California at Berkeley.
- Hassler, O. e L. Chiquier. Government Bonds and Mortgage Securities. Fourth OECD/World Bank Workshop. Março de 2002. Disponível em URL: [http://wbIn0018.worldbank.org/html/FinancialSectorWeb.nsf/\(attachmentweb\)/GovernmentBondsMortgagesecurities/\\$FILE/GovernmentBondsMortgagesecurities.pdf](http://wbIn0018.worldbank.org/html/FinancialSectorWeb.nsf/(attachmentweb)/GovernmentBondsMortgagesecurities/$FILE/GovernmentBondsMortgagesecurities.pdf)
- Hendershott, P.H. e R. Van Order (1987) Pricing Mortgages: an Interpretation of the Models and Results, *Journal of Financial Services Research*, 1, 1, 19-55.
- Hilliard, J.E., J.B. Kau e V.C. Slawson (1998) Valuing Prepayment and Default in a Fixed-Rate Mortgage: A Bivariate Binomial Options Pricing Technique, 26, 3, 431-468.
- Ho, T.S. e S. Lee (1986) Term Structure Movements and Pricing Interest Rates Contingent Claims, *Journal of Finance*, 41, 5, 1011-1030.
- Huang, J., M. Subrahmanyam e G. Yu (1996) Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method, *The Review of Financial Studies*, 9, 1, 277-300.
- Kau, J.B. e D.C. Keenan (1995) An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages, *Journal of Housing Research*, 6, 2, 217-244.
- Kau, J.B., D.C. Keenan e W.J. Muller III (1993b) An Option Based Pricing Model of Private Mortgage Insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 60, 2, 288-299.
- Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller e J.F. Epperson (1987) The Valuation and Securitization of Commercial and Multifamily Mortgages, *Journal of Banking and Finance*, 11, 525-546.
- Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller e J.F. Epperson (1990) Pricing Commercial Mortgages and Their Mortgage-Backed Securities, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 3, 4, 333-356.
- Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1992) A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages, *Journal of Money, Credit and Banking*, 24, 3, 279-299.
- Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1993a) Option Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable and Fixed-Rate Securities, *Journal of Business*, 66, 4, 595-618.
- Kau, J.B., D.C. Keenan, W.J. Muller III e J.F. Epperson (1995) The Valuation at Origination of Fixed Rate Mortgages with Default and Prepayment, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11, 1, 5-39.
- Leung, W.K. (1989) Option Theory and Defaultable Mortgage Pricing, *The Journal of Real Estate Research*, 4, 53-59.
- Lin, C. e Buttimer R. (2002) *Valuation of Individual Mortgage Servicing Contracts*, Mimeo.
- Merton, R.C. (1973) The Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 1, 141-183.
- Oliver, P. (1998) *Forward Prices: Multi-Factor Models for Commodities*, BG Technology Research Paper, Gas Research and Technology Centre.
- Quigley, J.M. e R. Van Order (1995) Explicit Tests of Contingent Claims Models of Mortgage Default, *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 11, 2, 99-117.

- Rendleman, R.J. e B: Bartter (1979) Two-State Option Pricing, *Journal of Finance*, 34, 1093-1110.
- Riddiough, T. J. e H.E. Thompson (1993) Commercial Mortgage Pricing with Unobservable Borrower Default Costs, *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, 21, 3, 265-291.
- Schwartz, E.S. e W.N. Torous (1989a) Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities, *Journal of Finance*, 44, 2, 375-392.
- Schwartz, E.S. e W.N. Torous (1989b) Valuing Stripped Mortgage-Backed Securities, *Housing Finance Review*, 8, 4, 241-251.
- Schwartz, E.S. e W.N.Torous (1992) Prepayment, Default, and the Valuation of Mortgage Pass-Through Securities, *Journal of Business*, 65, 2, 221-239.
- Stanton, R. (1995) Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities, *Review of Financial Studies*, 8, 3, 677-708.
- Stanton, R. e N. Wallace (1997) Mortgage Choice: What's the Point, *Real Estate Economics*, 26, 173-205.
- Timmis, G.C. (1985) *Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities with Transaction Costs, Heterogeneous Households and Endogenously Generated Prepayment Rates*, Working paper, Carnegie- Mellon University.
- Titman, S. e W. Torous (1989) Valuing Commercial Mortgages: An Empirical Investigation of the Contingent-Claims Approach to Pricing Risky Debt, *The Journal of Finance*, 44, 2, 345-373.
- Vandell, K.D. (1984) On the Assessment of Default Risk in Commercial Mortgage Lending, *Journal of AREUEA*, 12, 270-296.
- Vandell, K.D. (1992) Predicting Commercial Mortgage Foreclosure Experience, *Journal of AREUEA*, 20, 55-88.
- Vandell, K.D., W. Barnes, D. Hartzell, D. Kraft e W. Wendt (1993) Commercial Mortgage Defaults: Proportional Hazards Estimations Using Individual Loan Histories, *Journal of AREUEA*, 21, 451-480.
- Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.
- Wilmott, P., J. Dewynne e S. Howison (1993), *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, England, Oxford Financial Press.
- Yang, T. T. e B.B. Maris (1996) Mortgage Prepayment with an Uncertain Holding Period, *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 12, 2, 179-194.
- Yang, T.T., H. Buist e I.F. Megbolugbe (1998) An Analysis of the Ex Ante Probabilities of Mortgage Prepayment and Default, *Real Estate Economics*, 26, 4, 651-676.