ESTUDOS II

FACULDADE de ECONOMIA da UNIVERSIDADE do ALGARVE

ESTUDOS II

Cidadania, Instituições e Património

Economia e Desenvolvimento Regional

Finanças e Contabilidade

Gestão e Apoio à Decisão

Modelos Aplicados à Economia e à Gestão

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

2005

FICHA TÉCNICA

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro
Tel. 289817571 Fax. 289815937
E-mail: ccfeua@ualg.pt
Website: www.ualg.pt/feua

Título
Estudos II - Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

Autor
Vários

Editor
Faculdade de Economia da Universidade do Algarve
Morada: Campus de Gambelas
Localidade: FARO
Código Postal: 8005-139

Capa e Design Gráfico
Susy A. Rodrigues

Compilação, Revisão de Formatação e Paginação
Lídia Rodrigues

Fotolitos e Impressão
Grafica Comercial – Loulé

ISBN
972-99397-1-3 Data: 26-08-2005

Depósito Legal
218279/04

Tiragem

250 exemplares

Data
Novembro 2005

Algoritmos para o Problema do Caixeiro Viajante Multiobjectivo

Luís Paquete

Faculdade de Economia, Universidade do Algarve

Resumo

O Problema do Caixeiro Viajante Multiobjectivo é um problema de optimização combinatório bastante simples de ser formalizado mas que surge em muitas aplicações de transporte e logística. Contudo, a resolução deste problema é um grande desafio em temos computacionais, não só porque herda a dificuldade inerente à versão com um só objectivo mas também devido ao número excessivo de soluções óptimas. Deste modo, alternativas aos algoritmos exactos são necessárias para aplicações reais onde é exigido um tempo rápido de resposta. Este artigo revê algumas destas alternativas que retornam uma aproximação às soluções óptimas em tempo considerado razoável, em particular, algoritmos de aproximação e métodos de pesquisa local estocástica.

Palavras-chave: Optimização combinatória, Programação matemática multiobjectivo, Métodos de aproximação e heurísticas.

Abstract

The Multiobjective Travelling Salesman Problem is a combinatorial optimization problem that can be formalized in a very simple way, but that arises in many transport and logistic applications. However, solving this problem is a computational challenge, not only because it inherits the hardness of the single objective version, but also due to the large number of optimal solutions. Therefore, alternatives to exact algorithms are needed for real-life applications that require a fast answer. This article reviews some of these alternatives that return an approximation to the set of optimal solutions in a reasonable amount of time, in particular, approximation algorithms and stochastic local search methods.

Keywords: Combinatorial optimization, Multi-objective mathematical programming, Approximation methods and heuristics.

1. Introdução

A resolução de um Problema de Optimização Combinatória (POC) consiste em encontrar uma solução *s* num conjunto finito de soluções admissíveis *S* que minimize uma determinada função objectivo $f : s \rightarrow \mathbb{R}$.[1] Estas soluções apresentam uma estrutura combinatória, isto é, podem ser intuitivamente representadas por uma permutação, um arranjo, uma partição de objectos, uma árvore ou um grafo. Um conhecido exemplo desta classe de problemas é o Problema do Caixeiro Viajante (TSP)[2] em que um caixeiro viajante tem que visitar n cidades sem passar mais de uma vez por cada uma e retornar à cidade de partida; a ordem de visita das cidades, que pode ser representada por uma permutação circular, tem então de ser definida de modo a minimizar a soma das distâncias percorridas. Além do TSP ser um subproblema de muitos outros POCs, tal como o Problema de Roteamento de Veículos, muitas aplicações semelhantes podem ser encontradas no âmbito de logística, transportes e telecomunicações.

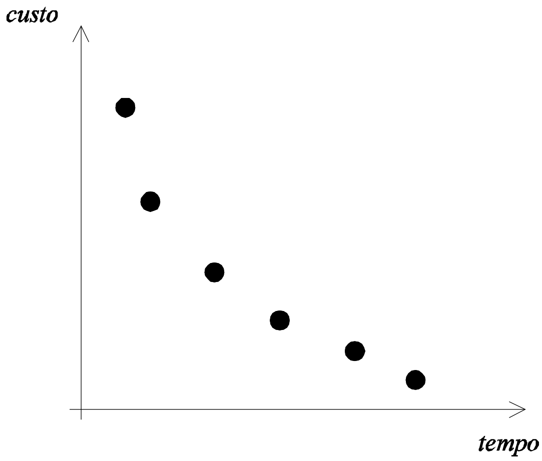
Neste artigo considera-se o Problema do Caixeiro Viajante *Multiobjectivo* (TSPM) em que o caixeiro viajante não pretende unicamente minimizar a distância total percorrida, mas também outras medidas tais como o tempo de viagem, o custo total, etc.. Em particular, considera-se aqui a resolução do TSPM com base na noção de *optimalidade de Pareto* em que se assume que uma determinada solução é óptima se não for pior do que qualquer outra solução e estritamente melhor em, pelo menos, um dos objectivos. Geralmente, não existe só uma solução óptima, mas um conjunto de soluções óptimas denominado *conjunto óptimo de Pareto*.

Dado que a cardinalidade de *S* deste problema é finita, um procedimento que enumere exaustivamente todas as permutações circulares de *n* elementos torna possível a obtenção de todas as soluções óptimas. Contudo, mesmo tendo em conta que cada permutação possa ser avaliada pela função objectivo num milionésimo de segundo num computador pessoal, são necessárias aproximadamente 12 horas para encontrar a solução óptima para $n = 15$, 5 anos para $n = 17$ e 355 séculos para $n = 21$. Deste modo, é necessário recorrer a outros métodos de resolução cujo o tempo computacional, como função de *n,* seja definido por uma menor ordem de grandeza. Porém, o TSPM pertence a uma certa classe de problemas para a qual não se conhece nenhum *algoritmo eficiente*, isto é, um algoritmo que consiga encontrar uma solução óptima num tempo que é limitado superiormente por uma função polinomial das dimensões inerentes à instancia do problema (Serafini, 1986). Mas mesmo que tal algoritmo existisse, o TSPM é considerado *intratável* visto que é possível construir instâncias deste problema em que o conjunto óptimo de Pareto coincida com o conjunto de soluções admissíveis (Emelichev e Perepelitsa 1992). Visto que a cardinalidade do conjunto de soluções admissíveis é de ordem factorial em *n*, tal algoritmo deixaria de ser considerado eficiente.

---

[1] Sem perda de generalidade, neste artigo consideram-se problemas de minimização.
[2] TSP corresponde às inicias de *Travelling Salesman Problem*, nome pelo qual este problema é mais conhecido.

Figura 1. Exemplo de um conjunto de soluções óptimas no espaço dos objectivos.



Dada a dificuldade inerente à resolução do TSPM, muitas das abordagens algorítmicas centram-se na obtenção de um conjunto de soluções que *aproxime* o conjunto óptimo de Pareto num tempo computacional considerado *razoável*. Este artigo descreve algumas destas abordagens para o TSPM com especial ênfase nos algoritmos de aproximação e métodos de pesquisa local estocástica.

2. Noções de Optimização Multiobjectivo

POCs definidos em termos de optimalidade de Pareto surgem na presença de $Q \geq 2$ objectivos e quando as definições das preferências do decisor em relação a esses objectivos não estão definidas *a priori*. O resultado do processo de optimização consiste então num conjunto de soluções óptimas que corresponda a um *trade-off* entre os objectivos. Por exemplo, dificilmente pode existir uma só solução óptima num TSPM que consista em minimizar simultaneamente o *tempo* e o *custo* da viagem tendo em conta um conjunto de estradas secundárias e auto-estradas com portagem; a solução mais barata (mas mais lenta) consistirá naquela que maximize a utilização das estradas secundárias, enquanto que a solução mais rápida (mas mais cara) será aquela que considera a utilização de auto-estradas. Entre estas duas soluções, existirão outras que delinearão o *trade-off* entre tempo e custo. A Figura 1 apresenta um hipotético conjunto de soluções óptimas representadas no espaço dos objectivos de acordo com estes dois objectivos.

Para uma clarificação de como os valores da função objectivo podem ser ordenados, são introduzidas *ordens* em $\mathbb{R}^Q$; sendo u e v vectores em $\mathbb{R}^Q$, temos as seguintes ordens:

i) *ordem fraca no sentido dos componentes*, em que $u \leq v$, ou seja, $u_i \leq v_i$, $i = 1,...,Q$;

ii) *ordem no sentido dos componentes*, em que $u \prec v$, ou seja, $u \neq v$ e $u_i \leq v_i$, $i = 1,...,Q$; e

iii) *ordem estrita no sentido dos componentes*, em que $u < v$, ou seja, $u_i < v_i$, $i = 1,...,Q$.

De realçar que i) é uma ordem parcial (reflexiva, transitiva e antissimétrica), enquanto que ii) e iii) são ordens estritamente parciais (irreflexiva, transitiva e assimétrica). No contexto de optimização, a relação entre duas soluções admissíveis *s* e *t* é denotada do seguinte modo: se $f(s) \leq f(t)$, então *f(s) domina fracamente f(t)*; se $f(s) \prec f(t)$ então *f(s) domina f(t)*; e se $f(s) < f(t)$, então *f(s) domina estritamente f(t)*; *f(s)* e *f(t)* são *não-dominados* se $f(s) \nprec f(t)$ e $f(t) \nprec f(s)$ e são *fracamente não-dominados* se $f(s) \nleq f(t)$ e $f(s) \nleq f(t)$, o que implica que $f(s) \neq f(t)$. Por razões de simplificação, a mesma notação é utilizada igualmente entre soluções quando a relação entre os correspondentes valores da função objectivo é verificada como acima. De seguida, introduz-se a noção de *solução óptima de Pareto* e *conjunto óptimo de Pareto*:

Definição 1. Solução óptima de Pareto. Uma solução $s \in S$ é uma solução óptima de Pareto se, e só se, não existe nenhuma outra solução $s' \in S$, tal que $f(s') \prec f(s)$.

Definição 2. Conjunto óptimo de Pareto. Um conjunto de soluções $S' \subset S$ é um conjunto óptimo de Pareto se, e só se, contém só e todas soluções óptimas de Pareto.

A imagem do conjunto óptimo de Pareto no espaço dos objectivos é o conjunto eficiente. A resolução de um POC multiobjectivo consiste em encontrar um subconjunto do conjunto óptimo de Pareto que seja representativo do conjunto eficiente.

Contudo, em muitas aplicações reais, o decisor é capaz de quantificar o grau de importância de cada objectivo. Neste caso, os componentes da função objectivo podem ser agregados e ponderações são atribuídas a cada componente. Assume-se que cada ponderação $\lambda = \{\lambda_1,...,\lambda_Q\}$ contém componentes normalizados tal que a soma destes seja 1 e que a agregação dos objectivos é efectuada com base na família de métricas L_p

$$f(s) = \left[\sum_{i=1}^{Q} \left(\lambda \left| f_i(s) - y_i \right| \right)^p \right]^{1/p} \tag{0.1}$$

em que $s \in S$ e $y = \{y_1,...,y_Q\}$ é o vector ideal definido como $min\ f_i$, $i = 1,...,Q$. Com $p = 1$, obtém-se

$$f(s) = \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(s) \tag{0.2}$$

e para $p = \infty$,

$$f(s) = \max_{i=1,\ldots,Q} \left[\lambda_i \left| f_i(s) - y_i \right| \right]. \tag{0.3}$$

A solução óptima para um POC multiobjectivo formalizado de acordo com a Equação (1.2), com $p \neq \infty$ e ponderações positivas, é também uma solução óptima de Pareto para o correspondente POC multiobjectivo definido em termos de optimalidade de Pareto (Steuer 1986). Assim, espera-se que, para um determinado número de diferentes ponderações, uma grande parte do conjunto eficiente possa ser obtido. Contudo, este método não é suficiente para obter *todos* os elementos do conjunto eficiente visto que existem soluções óptimas de Pareto que não são óptimas em relação à Equação (1.2). Estas soluções são chamadas *não-suportadas* e não pertencem ao envelope convexo[3] do conjunto eficiente.

3. Algoritmos de Aproximação

Um algoritmo de aproximação para um determinado POC é um algoritmo eficiente que está associado a uma garantia de desempenho expressa através do *pior-caso* que se pode obter em termos da qualidade da solução para qualquer instância desse POC. Os seguintes tipos de aproximação são considerados na literatura (Vazinari 2001):

i.) *$(1+\varepsilon)$-algoritmo de aproximação*, é um algoritmo que demora um tempo computacional que é limitado superiormente por uma função polinomial das dimensões da instância do problema (o algoritmo demora *tempo polinomial*) e retorna uma solução que está a uma factor fixo $\varepsilon>0$ da solução óptima;

ii.) *esquema de aproximação de tempo polinomial* é um conjunto de $(1+\varepsilon)$-algoritmos de aproximação cujo o tempo de resolução depende de ε; e

iii.) *esquema completo de aproximação de tempo polinomial* é um esquema de aproximação de tempo polinomial em que a relação entre o tempo de resolução e $1/\varepsilon$ é definido por uma função polinomial.

Existem algoritmos de aproximação para determinados casos especiais do TSP. Por exemplo, quando as distâncias entre cidades satisfazem a desigualdade triangular[4] existem dois $(1+\varepsilon)$-algoritmos de aproximação: a Heurística de Árvore (Rosenkrantz *et al*. 1977) com um factor $\varepsilon = 1$ e a Heurística de Christofides (Christofides 1976) com $\varepsilon = 1/2$. Para o

[3] O envelope convexo de um conjunto de pontos S é a intersecção de todos conjuntos convexos que contem S.
[4] A soma das distâncias entre A e B e entre B e C é maior ou igual que a distância entre A e C.

caso especial em que as distâncias são Euclidianas,[5] existe um esquema de aproximação de tempo polinomial proposto em Arora (1997). Contudo, não existe nenhum $(1+\varepsilon)$-algoritmo de aproximação para o caso geral do TSP.

Recentemente, algoritmos de aproximação tem sido propostos para POCs multiobjectivo e os seus fundamentos estão descritos em Safer e Orlin (1995), Papadimitriou e Yannakakis (2000) e Erghott (2000). Safer e Orlin (1995) introduziram a noção de *ε-dominância* entre duas soluções admissíveis s e t, isto é, dado um certo ε, se $f(s) \leq (1+\varepsilon) f(t)$, então s *ε-domina* t; um conjunto *ε-eficiente* corresponde à imagem das soluções aproximadas no espaço dos objectivos que não são dominadas por nenhuma outra solução por um factor superior a $1+\varepsilon$. Papadimitriou e Yannakakis (2000) demonstraram que um conjunto ε-eficiente de tamanho polinomial em relação às dimensões da instância de um POC multiobjectivo pode ser sempre obtido através da partição do espaço dos objectivos em hiper-rectângulos tal que o rácio entre a maior e a menor coordenada seja $1+\varepsilon$ para cada objectivo.[6] Finalmente, de uma perspectiva algo diferente, Ehgott (2000) utilizou *normas vectoriais* para fornecer resultados de aproximação tendo em conta a distância entre uma solução admissível s e *qualquer* solução óptima de Pareto t dos dois seguintes modos:

$$R_1(s,t)=\frac{\left\| \|f(s)\| - \|f(t)\| \right\|}{\|f(t)\|} \tag{0.4}$$

$$R_2(s,t)=\frac{\left\| f(s) - f(t) \right\|}{\|f(t)\|} \tag{0.5}$$

em que $\| \ \|$ é uma norma L_p.

Poucos algoritmos de aproximação são conhecidos para o TSPM. Erghott (2000) propôs dois algoritmos de aproximação baseados na Heurística de Árvore e na Heurística de Christofides para o TSPM com distâncias Euclidianas. Ambos os algoritmos tiram partido da semelhança entre o TSP e o Problema de Árvore Geradora Mínima que consiste em encontrar um subgrafo de n-1 arestas tal que a soma das ponderações das arestas desse subgrafo seja mínima; para a resolução óptima deste problema existem algoritmos eficientes como o algoritmo de Prim e de Kuskal. Os passos da Heurística em Árvore estão descritos no procedimento seguinte (assume-se que G é um grafo completo):

1. M é uma árvore geradora mínima em G de acordo com uma norma L_p
2. M' é M com arestas duplicadas.

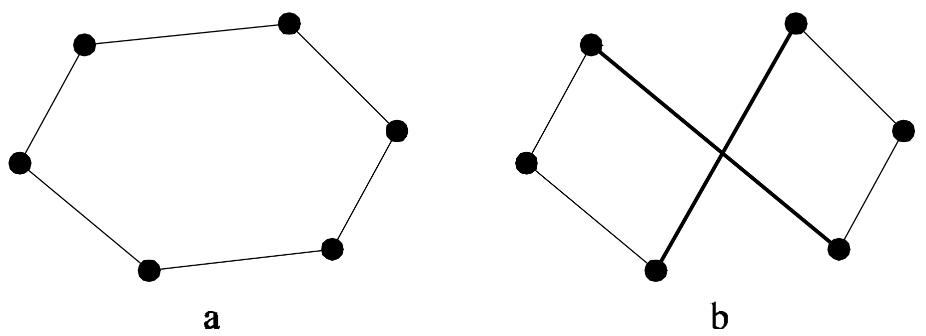
[5] Dada uma cidade A com coordenadas (a_1,a_2) e outra cidade B com (b_1,b_2), a distância Euclidiana entre A e B é calculada através de $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

[6] Contudo, este conjunto é exponencial em relação ao número dos objectivos.

3. M^* é um ciclo Euleriano[7] em M'
4. P é um ciclo em M^* sem arestas duplicadas.
5. Retorna P.

A Heurística de Christofides é só um pouco mais complicada: o segundo passo consiste em adicionar arestas entre os vértices da árvore com um número par de arestas, encontrar uma correspondência perfeita mínima[8] C (de acordo com uma norma L_p) e gerar M' como o grafo resultante da reunião das arestas pertencentes a M e C; o algoritmo de Edmond pode encontrar uma correspondência perfeita mínima em tempo polinomial. Ehrgott (2000) demonstrou que tanto a Heurística de Árvore como a Heurística de Christofides retornam uma solução com factor $R_1 = 1$, e que a última retorna com factor $R_1 = 1/2$ se $p = 1$ é utilizado. Com p arbitrário, ambos algoritmos retornam uma solução com factor $R_2 = 1 + (2^p + 1)^{1/p}$. Contudo, quando $p = \infty$ é considerado, ambos algoritmos deixam de ser eficientes porque não é possível encontrar uma árvore geradora mínima no passo 1 em tempo polinomial com essa norma.

Figura 2. A solução a e b são vizinhas de acordo com a vizinhança 2-opt.



Uma abordagem diferente é proposta por Angel *et al.* (2004a) para o TSPM com dois objectivos e distâncias com valor um e dois. Trata-se de um algoritmo de aproximação (de acordo com a noção de ε-dominância (Safer e Orlin, 1995)) baseado em algoritmos de melhoria iterativa e é uma extensão dos resultados conhecidos para a mesma variante com um só objectivo (Kanna et al. 1998). Estes algoritmos são procedimentos que iterativamente pesquisam entre soluções admissíveis vizinhas por soluções aproximadas de boa qualidade. Assume-se a existência de uma função de vizinhança que mapeia uma solução admissível num pequeno subconjunto de S.9 Este mapeamento é definido com base em operações muito simples; por exemplo, na

[7] Um ciclo Euleriano é um ciclo num grafo que visita todas as arestas uma só vez.
[8] A correspondência perfeita mínima de um grafo consiste num subconjunto de arestas tal que cada vértice do grafo é incidente, pelo menos, a uma dessas arestas e a soma das suas ponderações é mínima.
[9] Geralmente, o tamanho do subconjunto de soluções vizinhas é polinomial em relação ao tamanho da instância.

vizinhança *2-opt* para o TSP, duas soluções são vizinhas se os respectivos ciclos diferem de duas arestas (ver Figura 2). O algoritmo de melhoria iterativa termina numa solução para qual não existe nenhuma solução vizinha com melhor qualidade, o que significa que um *óptimo local* foi encontrado.[10]

O algoritmo proposto por Angel et al. (2004a) utiliza a vizinhança 2-opt. A escolha entre duas soluções vizinhas é determinada por uma relação de preferência associada a cada objectivo: dadas duas soluções admissíveis que são vizinhas em relação à vizinhança 2-opt e tendo em conta o primeiro objectivo, a solução cujo ciclo contém um par de arestas em que, pelo menos, uma destas está afecta a (1,1), é preferível em relação a outra solução vizinha cujo o ciclo contém outro par de arestas em que, pelo menos, uma destas está afecta a (1,2) (respectivamente, (2,1) quando o segundo objectivo é considerado). Os autores demonstram que o algoritmo proposto retorna uma solução com factor $\varepsilon = 1/2$ e que termina em O(n3) passos, sendo n o número de cidades. Recentemente, ideias semelhantes foram exploradas pelos mesmos autores em Angel et al. (2005) para a versão do TSPM com $Q \geq 3$ objectivos através da adaptação da Heurística do Vizinho Mais Próximo (Rosenkrantz et al. 1977). Este algoritmo retorna uma solução com factor $\varepsilon = (Q-1)/(Q+1)$ em $O(n^2 Q!)$ passos.

Embora os algoritmos de aproximação sejam bastante apelativos, o maior obstáculo reside na dificuldade de derivar a garantia de desempenho para certos POCs, como para o caso geral do TSP, o Problema de Afectação Quadrática, o Problema de Coloração de Grafos, entre muitos outros. Nestes casos, métodos pesquisa local estocástica tem-se apresentado como válidas alternativas.

4. Métodos de Pesquisa Local Estocástica

Métodos de Pesquisa Local Estocástica (MPLEs) (Hoos and Stützle 2004) correspondem ao conjunto de algoritmos que *pesquisam* por soluções aproximadas com base na noção de vizinhança e em que o processo de pesquisa incorpora tomadas de decisão aleatórias de modo a evitar que o este termine prematuramente num óptimo local. Esta classe de algoritmos inclui também metaheurísticas como Arrefecimento Simulado (Kirkpatrick et al. 1983), Pesquisa Tabu (Glover e Laguna 1997), Pesquisa Local Iterativa (Lourenco et al. 2002), Pesquisa de Vizinhança Variável (Mladenovic e Hansen 1997), Optimização de Colónia de Formigas (Dorigo e Stützle 2004) e Algoritmos Evolutivos (Goldberg 1989). Muitos destes algoritmos são bastante eficazes na prática, retornando as melhores aproximações para muitos POCs em que não é possível obter a solução óptima. Por exemplo, um algoritmo de Pesquisa Local Iterativa baseado na heurística de Lin-Kernigham é capaz de retornar soluções a 0.5% da solução óptima para instâncias do TSP com aproximadamente 80000 cidades em menos de 10 minutos, o que contrasta com os

[10] Por exemplo, o conhecido Simplex pode ser considerado um algoritmo de melhoria iterativa que termina quando o óptimo global é encontrado; nesse caso, o óptimo local corresponde ao óptimo global.

26 anos necessários para obter a solução óptima num problema de 15112 cidades através de algoritmos exactos num computador pessoal (Applegate *et al*. 2003). Resultados semelhantes obtidos por MPLEs são igualmente conhecidos para o Problema de Afectação Quadrática (Taillard 1995, Stützle 2005) e para o Problema de Coloração de Grafos (Paquete e Stützle 2002, Chiarandini e Stützle 2002).

Tal como para os algoritmos de aproximação, também os princípios básicos dos MPLEs tem de ser adaptados para lidar com POCMs. Comum a todas as abordagens é o facto destes algoritmos retornarem um conjunto de soluções não-dominadas quando terminam (à semelhança do conjunto eficiente – ver Figura 1). Uma revisão da literatura efectuada em Paquete e Stützle (2005) indica que a maioria destas abordagens podem ser classificadas de acordo com o *critério de selecção* da solução preferível na vizinhança: modelo de pesquisa baseado na ordem no sentido dos componentes e baseado na agregação dos objectivos. Algoritmos que pertencem a estas duas classificações irão ser revistos nas duas próximas secções.

4.1 Modelo de pesquisa baseado na ordem do sentido dos componentes

O conjunto eficiente pode ser obtido se a imagem do conjunto de soluções admissíveis no espaço dos objectivos for *ordenado* de acordo com a ordem no sentido dos componentes. Embora tal ordenação seja impraticável devido à impossibilidade de enumerar todo o conjunto de soluções admissíveis, espera-se que o mesmo procedimento efectuado, iterativamente, a um nível *mais local* possibilite a obtenção de uma boa aproximação ao conjunto eficiente. Deste modo, o princípio básico dos algoritmos baseados neste método de pesquisa é identificar, a cada iteração, o conjunto de soluções vizinhas que são não-dominadas em relação à vizinhança. Para manter este conjunto de soluções, torna-se necessária uma estrutura de dados adicional, denominada *Arquivo*, em que a sua actualização consiste na aceitação de soluções não-dominadas e remoção das respectivas soluções dominadas. Estes princípios de pesquisa são óbvias extensões dos algoritmos de melhoria iterativa para POCs multiobjectivo (ver pg. 7), ou seja, um algoritmo termina quando encontra um conjunto de soluções em que não existem outras soluções vizinhas de melhor qualidade. Diz-se que, neste caso, um *conjunto óptimo local de Pareto* foi encontrado (Paquete *et al*. 2004).

A implementação desta ideia básica para o TSPM foi posta em prática em Paquete *et al*. (2004). O algoritmo proposto, denominado PLS, foi testado num conjunto de instâncias Euclidianas com as vizinhanças 2-, 2h- e 3-opt[11]. Considerou-se igualmente que a solução inicial era gerada de um modo aleatório. Embora os resultados em termos de qualidade de solução fossem comparáveis a algoritmos mais complexos, o excessivo tempo computacional demonstrou que esta classe de algoritmos sofre da desvantagem de aceitar um número demasiado grande de soluções para o Arquivo.

[11] 2h-opt é uma extensão da 2-opt e a 3-opt considera que duas soluções são vizinhas se diferem em três arestas.

Independentemente, Angel *et al.* (2004b) propuseram um algoritmo semelhante, denominado BLS. Estes autores obtiveram resultados semelhantes aos do PLS no mesmo tipo de instâncias. Uma extensão do BLS foi proposta igualmente pelos mesmos autores em que o espaço dos objectivos é particionado em hiper-rectângulos e só uma solução pode residir dentro de cada um (como proposto por Papadimitrou e Yannakakis (2000)). Esta técnica implica que o Arquivo seja de tamanho polinomial em relação às dimensões da instância, o que é uma vantagem em relação ao PLS e à versão original do BLS. Contudo, os autores verificaram que esta restrição deteriora a qualidade de solução, embora o tempo computacional reportado tenha melhorado significativamente. Estes resultados foram igualmente corroborados em Paquete (2005) em instâncias de Matriz Aleatória. Nesta última classe de instâncias, as distâncias afectas às arestas são geradas aleatoriamente e, por isso, a desigualdade triangular não é assegurada. Por fim, este último autor demonstrou que a qualidade da solução pode ser ainda melhorada se a solução inicial do PLS for uma solução de boa qualidade para um dos objectivos.

4.2 Modelo de pesquisa baseado na agregação dos objectivos

Neste modelo de pesquisa, uma solução vizinha é seleccionada se obter o melhor valor em relação à vizinhança com respeito à agregação definida, por exemplo, pela Equação (1.2). Na prática, um algoritmo que siga este método de pesquisa tem de considerar várias ponderações diferentes durante a sua execução de modo a obter soluções afastadas entre si no espaço dos objectivos. Contudo, ao contrário dos algoritmos referidos na secção anterior, este processo não assegura que as soluções finais sejam não-dominadas. Deste modo, um passo adicional antes de retornar as soluções finais consiste em remover as soluções dominadas. A clara vantagem desta classe de algoritmos reside na possibilidade de utilizar um MPLE com bom desempenho na versão uni-objectivo para resolver cada um dos problemas resultantes de cada agregação dos objectivos; esse algoritmo é aqui denominado *algoritmo subordinado*. Obviamente, esta abordagem obtém somente soluções suportadas se o algoritmo subordinado tiver muito bom desempenho.

Estes princípios foram explorados inicialmente para o TSPM por Serafini (1993), em que o algoritmo subordinado consistia no Arrefecimento Simulado. Quando aplicado a problemas uni-objectivo, o Arrefecimento Simulado selecciona, de um modo aleatório, uma solução vizinha e aceita-a de acordo com uma probabilidade P que depende de um parâmetro T e da diferença Δ entre o valor da função objectivo da solução corrente a da correspondente solução vizinha. Este autor definiu e testou diversos modos de implementar o cálculo do parâmetro P para o TSPM. Os melhores resultados foram obtidos com base no seguinte cálculo

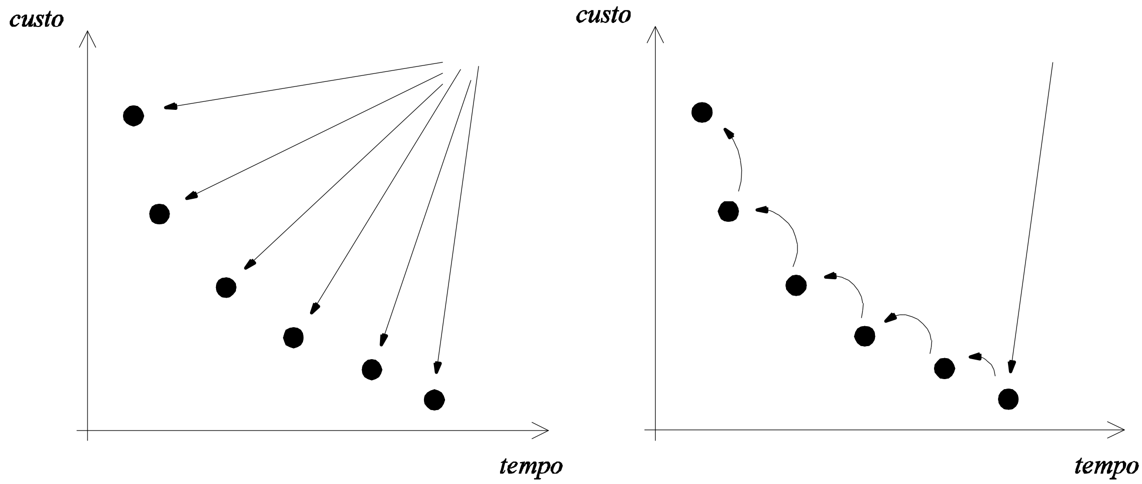
$$P = \alpha \prod_{q=1}^{Q} \min \left\{ 1 : e^{\lambda_q \Delta_q / T} \right\} + (\alpha - 1) \prod_{q=1}^{Q} \min \left\{ 1 : \max_{q=1,\ldots,Q} \left\{ e^{\lambda_q \Delta_q / T} \right\} \right\} \qquad (0.6)$$

com $\alpha = 0.9$ e com ponderações λ definidas aleatoriamente a cada iteração.

Hansen (2000) utilizou a Pesquisa Tabu baseada na vizinhança 2-opt como algoritmo subordinado, associada a um conjunto de ponderações definido previamente. Contudo, diferente do algoritmo de Serafini (1993), a modificação das ponderações ocorre depois de um determinado número de iterações da Pesquisa Tabu; quando esse número é atingido, o algoritmo reinicia a partir de uma solução gerada aleatoriamente. Hansen (2000) explorou diversos tipos de agregação com base nas diferentes métricas L_p em instâncias Euclidianas; os resultados experimentais indicaram que $p = 1$ fornecia as melhores aproximações. Recentemente, Paquete (2005) analisou o desempenho de certas variações da abordagem de Hansen com $p = 1$ mas utilizando um algoritmo de Pesquisa Local Iterativa como algoritmo subordinado. Numa das variantes, o conjunto de soluções não-dominadas na vizinhança da melhor solução aproximada para cada agregação é também considerado no conjunto de soluções retornadas pelo algoritmo. Este procedimento adicional é denominado *PLS-passo*. Uma análise de desempenho baseada em desenho experimental e em funções de aproveitamento propostas por Grunert da Fonseca *et al*. (2003) permitiu concluir que o uso do PLS-passo providencia um acréscimo significativo na qualidade da solução em instâncias Euclidianas e de Matriz Aleatória, unicamente com um acréscimo de 1% de tempo computacional.

Jaszkiewicz (2002) propôs um MPLE denominado MOGLS para o MTSP baseado em Algoritmos Evolutivos. Dada a sua complexidade, só uma breve descrição deste algoritmo é aqui fornecida. MOGLS mantém dois arquivos, um que guarda o conjunto actual de soluções a cada iteração (Arquivo A) e outro que contém as melhores soluções não-dominadas encontradas durante o processo de pesquisa (Arquivo B). O conteúdo dos Arquivos A e B é iniciado com um procedimento semelhante ao descrito por Hansen (2000), mas utilizando um algoritmo subordinado de melhoria iterativa e ponderações aleatórias. A cada iteração, as duas melhores soluções de acordo com ponderações definidas aleatoriamente são seleccionadas do Arquivo A e *recombinadas*. Este processo de recombinação, consiste em gerar um nova solução com base nas permutações circulares das duas soluções seleccionadas (*ver* Freisleben e Merz (1996)). Seguidamente, esta nova solução é utilizada como solução inicial para um algoritmo de melhoria iterativa e de acordo com uma determinada ponderação. A solução final é adicionada ao Arquivo A se for melhor que a pior solução de um subconjunto de B de acordo com uma determinada ponderação, e adicionada ao Arquivo A se for não-dominada; neste caso, o Arquivo A é actualizado. Este processo é repetido até o critério de terminação, definido pelo utilizador, for alcançado. Os resultados experimentais obtidos por MOGLS demonstram que este algoritmo apresenta a melhor qualidade da solução quando comparado com muitos outros MPLEs no mesmo tempo computacional.

Figura 3. Visualização intuitiva do funcionamento do Algoritmo de Hansen (2000) na esquerda e do algoritmo de duas-fases por Paquete e Stützle (2003) na direita.



Finalmente, Paquete e Stützle (2003) apresentam um algoritmo de *duas-fases* para o TSPM. Este algoritmo obtém, numa primeira fase, uma solução de boa qualidade para um dos objectivos, e numa segunda fase, soluções aproximadas para várias agregações em que a solução inicial para cada agregação é a solução final obtida na agregação anterior. Este procedimento é motivado pela *proximidade* observada em Paquete *et al*. (2004) entre as soluções aproximadas no TSPM com respeito à vizinhança 2-opt. Deste modo, evitando sucessivas inicializações a partir de soluções geradas aleatoriamente, como no algoritmo de Hansen (2000), espera-se que o algoritmo de duas-fases demore menos tempo computacional. A Figura 3 apresenta o funcionamento do algoritmo de Hansen (2000) e o algoritmo de duas-fases, de uma forma muito intuitiva e assumindo uma situação muito ideal. Em Paquete e Stützle (2003), este algoritmo utiliza a Pesquisa Local Iterativa com 3-opt como algoritmo subordinado e apresenta um desempenho superior ao MOGLS em relação à qualidade da solução num conjunto de instâncias Euclidianas de dois objectivos quando combinado com o PLS-passo. Finalmente, Paquete (2005) demonstra que este algoritmo é, de facto, superior ao MOGLS em instâncias Euclidianas e de Matriz Aleatória com dois e três objectivos com respeito à qualidade da solução.[12]

[12] Alguns dos resultados experimentais obtidos com o algoritmo de duas-fases estão disponíveis na MCDM Numerical Instances Library na International Society on Multiple Criteria Decision Making em http://www.univ-valenciennes.fr/ROAD/MCDM/.

5. Conclusões

Este artigo descreve algoritmos de aproximação e métodos de pesquisa estocástica que retornam aproximações ao conjunto eficiente do TSPM. A grande vantagem dos algoritmos de aproximação reside na garantia de desempenho que corresponde ao pior-caso na qualidade da solução que pode ocorrer quando esse algoritmo é aplicado a um determinado POC. Esta é uma informação útil em aplicações reais, visto que é possível saber que a solução obtida não será pior do que um determinado valor. Contudo, a aplicação dos algoritmos de aproximação tem as suas limitações, como é o exemplo para o TSPM quando a desigualdade triangular não é assegurada; para este problema não existe nenhum algoritmo de aproximação que forneça um factor fixo de aproximação.

Métodos de Pesquisa Local Estocástica têm surgido como alternativas práticas para obter soluções de qualidade para POCs multiobjectivo em relativamente pouco tempo. Contudo, uma garantia de desempenho é extremamente difícil de ser derivada, e a análise destes algoritmos tem de assentar nos mesmos princípios das ciências empíricas, isto é, o desempenho obtido num conjunto de instâncias é generalizado para a *população* de instâncias de um POC multiobjectivo por meios de inferência estatística. A maior dificuldade desta análise reside na definição da *amostra* de instâncias, ou seja, como definir um gerador que assegure que qualquer instância gerada tenha a mesma probabilidade ser seleccionada.

O algoritmo de duas-fases explora a *proximidade* entre soluções aproximadas no TSPM de acordo com uma noção de vizinhança relativamente pequena e esta parece ser a principal razão pelo seu excelente desempenho quando comparado com outros MPLEs propostos na literatura. Contudo, tal não acontece, por exemplo, no Problema de Afectação Quadrática, em que as soluções aproximadas estão tipicamente dispersas de acordo com uma noção de vizinhança semelhante (Paquete 2005). Por outro lado, verificou-se neste último problema que algoritmos que utilizam o método de pesquisa baseado na ordem do sentido dos componentes, como o PLS, são mais eficazes quando os objectivos estão correlacionados negativamente. Este conjunto de observações indica que o desempenho destes algoritmos depende fortemente de certas *características* do POC multiobjectivo. Uma questão pertinente para ser explorada no futuro próximo é detectar sistematicamente quais são estas características que podem afectar o desempenho de MPLEs.

Bibliografia

Angel E., Bampis E., Gourvés L. (2004a), Approximating the Pareto curve with local search for the Bicriteria TSP (1,2) problem. Theoretical Computer Science, 310:135-146.

Angel E., Bampis E., Gourvés L. (2004b), A dynasearch neighborhood for the bicriteria traveling salesman problem. In Gandibleux X., Sevaux M., Sörensen K., T'kindt, editors, Metaheuristics for Multiobjective Optimisation, Volume 535 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 153-176, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Angel E., Bampis E., Gourvés L., Monnot G. (2005), (Non)-Approximability for the multi-criteria TSP (1,2). The 15th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, to appear.

Applegate D., Cook D., Rohe A. (2003), Chained Lin-Kerningham for large travelling salesman problem. INFORMS Journal on Computing, 15(1):82-92.

Arora S. (1997), Nearly linear time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems. In Proceedings of the 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 554-563.

Chiarandini M., Stützle T. (2002), An application of iterated local search for graph coloring. In Johnson D. S., Mehrotra A., Trick M., editors, Proceedings of the Computational Symposium on Graph Coloring and its Generalizations, pp. 112-125, Ithaca, New York, USA.

Christofides N. (1976), Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical report, Carnegie-Mellon University.

Dorigo, M., Stützle T. (2004), Ant Colony Optimization. MIT Press, Cambridge, MA, USA.

Ehrgott M. (2000), Approximations algorithms for combinatorial multicriteria optimization problems. International Transactions in Operational Research, 7:5-31.

Emelichev V. A., Perepelitsa V. A. (1992), On the cardinality of the set of alternatives in discrete many-criterion problems. Discrete Mathematics and Applications, 2(5):461-471.

Freisleben B., Merz P., New genetic local search operators for the traveling salesman problem. In Voigt H.-M., Ebeling W., Rechenberg I., Schwefel H.-P., Proceedings of the 4th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature, Volume 1141 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 890-899, Spriger Verlag, Berlin, Germany.

Glover F., Laguna M. (1997), Tabu Search. Kluwer Academic Publishers.

Goldberg D. E. (1989), Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley.

Hansen M. P. (2000), Use of substitute scalarizing functions to guide a local search based Heuristic: The case of moTSP, Journal of Heuristics, 6 (3): 419–431.

Hoos H. H, Stützle T. (2004), Stochastic Local Search – Foundations and Applications. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, USA.

Grunert da Fonseca V., Fonseca C. M., Hall A. O., Inferential Performance Assessment of Stochatic Optimisers and the Attainment Function. In Zitzler E., Deb K., Thiele L., Coello Coello C. A., Corne D., editors, Evolutionary Multi-Criterion Optimization, First International Conference, Volume 1993 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 213-225, Berlin: Springer-Verlag, 2001

Khanna S., Motwani R., Sudan M., Vazinari V. (1998). On syntatic versus computational views of approximability, SIAM Journal on Computing, 28 (1): 164-191.

Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. (1983), Optimization by simulated annealing, Science, 220:671-680.

Jaszkiewicz (2002). Genetic local search for multiple objective combinatorial optimization. European Journal of Operational Research, 137 (1): 50-71.

Lourenco H. R., Martin O., Stützle T. (2002), Iterated Local Search, in Glover F., Kochenberger G., editors, Handbook of Metaheuristics, Volume 57 of International Series in Operations Research and Management Science, pp. 321-353, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA.

Mladenovic N., Hansen P. (1997), Variable neighbourhood search. Computers and Operations Research, 24:1097-1100.

Papadimitrou C. H.,Yannakakis M. (2000), on the approximability of trade-offs and optimal access of web sources. In Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 86-92.

Paquete L., Stützle T. (2002), Experimental investigation of iterated local search for coloring graphs. In Cagnoni S., Gottlieb J., Hart E., Middendorf M., Raidl G., editors, Applications of Evolutionary Computing, Proceedings of EvoWorkshops 2002, volume 2279 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 122-131. Springer Verlag, Berlin, Germany.

Paquete L., Stützle T. (2003), A two-phase local search for the biobjective traveling salesman problem. In Fonseca C. M., Fleming P., Zitzler E., Deb K., and Thiele L., editors, Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Third International Conference, Volume 2632 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 479-493, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Paquete L., Chiarandini M., Stützle T. (2004), Pareto local optimum sets in the biobjective traveling salesman problem: An experimental study. In Gandibleux X., Sevaux M., Sörensen K., T'kindt, editors, Metaheuristics for Multiobjective

Optimisation, Volume 535 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 177-200, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

Paquete L., Stützle T. (2005), Stochastic local search algorithms for multiobjective combinatorial optimization problems. In Gonzalez T., Approximation Algorithms and Metaheuristics, Chapman & Hall / CRC.

Paquete (2005), Stochastic Local Search Algorithms for Multiobjective Combinatorial Optimization Problems: Methods and Analysis, PhD thesis, Technische Universität Darmstadt.

Rosenkrantz D. J., Stearns R. E., Lewis P. M. (1977), An analysis of several heuristics for the travelling salesman problem. SIAM Journal on Computing, 6:563-581.

Safer H. M., Orlin J. B., Fast approximation schemes for multi-criteria combinatorial optimization. Working Paper 3759-95, MIT.

Serafini P. (1986), Some considerations about computational complexity for multiobjective combinatorial problems. In Jahn J., Krabs W., editors, Recent Advances and Historical Development of Vector Optimization, Volume 294, Lecture Notes of Economics and Mathematical Systems, pp. 222-231, Springer Verlag, Berlin, Germany.

Serafini P. (1993) Simulated annealing for multiobjective optimization problems, Tzeng G. H, Wen U. P., Yu P.L., editors. In Multiple Criteria Decision Making: Expand and Enrich the Domains of Thinking and Application, Springer Verlag, Berlin, Germany.

Steuer R. E. (1986), Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York, USA.

Stützle T. (2005), Iterated local search for the quadratic assignment problem. European Journal of Operational Research, to appear.

Stützle T, H. H. Hoos (1999). Analyzing the run-time behaviour of iterated local search for the TSP. In Proceedings of the 3rd Metaheuristic International Conference, pages 1-6.

Taillard É. D. (1995), Comparison of iterative searches for the quadratic assignment problem, Location Sciences, 3:87-105.

Vazinari, M. (2001), Approximation Algorithms, Springer Verlag.