

J. Simões Moita

*Área Eng. Mecânica
EST/UAlg*

ANALISE DE SENSIBILIDADES E OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS LAMINADAS EM REGIME NÃO-LINEAR

Resumo

O trabalho aqui apresentado desenvolve-se no domínio da análise não-linear de estruturas laminadas de tipo placa-casca. É feita a análise da estrutura inicial, o cálculo das suas sensibilidades a perturbações das variáveis de projecto - ângulos das fibras e espessuras das lâminas - e posterior optimização. Com este objectivo foi desenvolvido um elemento finito triangular baseado na

teoria de alta ordem de Reddy, e a análise não-linear foi feita através da formulação Lagrangeana actualizada. As sensibilidades são calculadas analiticamente. A optimização consiste usualmente na minimização do volume de material da estrutura, podendo contudo ter outro objectivo, como seja a minimização do deslocamento, ou a maximização da carga limite.

Campo dos deslocamentos

As Teorias de Deformação de Corte de Alta Ordem usam polinómios de ordem superior na expansão dos deslocamentos segundo a espessura do laminado. Especificamente a

Teoria de Deformação de Corte de 3ª Ordem de Reddy [1], sem alongamento transversal, é baseada no campo de deslocamentos

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_y(x, y) + z^3 \frac{4}{3h^2} \left[\theta_y(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^3 \frac{4}{3h^2} \left[-\theta_x(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

onde u_0, v_0, w_0 são os deslocamentos dum ponto genérico da superfície média do laminado nas direcções dos eixos x, y, z , θ_x, θ_y são as rotações independentes da primitiva normal à superfície média, em torno do eixo x (sentido da

rotação dos ponteiros do relógio) e do eixo y (sentido contrário à rotação dos ponteiros do relógio), e $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ são as inclinações da tangente à superfície média deformada com os eixos x e y respectivamente.

Relações constitutivas dum laminado.

As lâminas constituintes de um elemento estrutural multilaminado típico, possuem três planos de simetria, perpendiculares entre si, podendo desta forma ser considerados meios ortotrópicos. A intersecção destes planos de simetria define um sistema de eixos ortogonal (1,2,3) que se associa a cada lâmina. O eixo 1 é paralelo à direcção das fibras, o eixo 2 é perpendicular às mesmas e o eixo 3 normal ao plano da lâmina. Como

em geral, as lâminas que constituem um laminado podem ter as fibras orientadas arbitrariamente, os eixos 1 e 2 não coincidem nas várias lâminas. Assim para a análise do laminado associa-se a este um sistema de eixos ortogonal (x, y, z), Figura 1, de tal forma que o eixo z seja coincidente com eixo 3, e os eixos (x, y) definam um plano coincidente com o plano médio do laminado, [1]

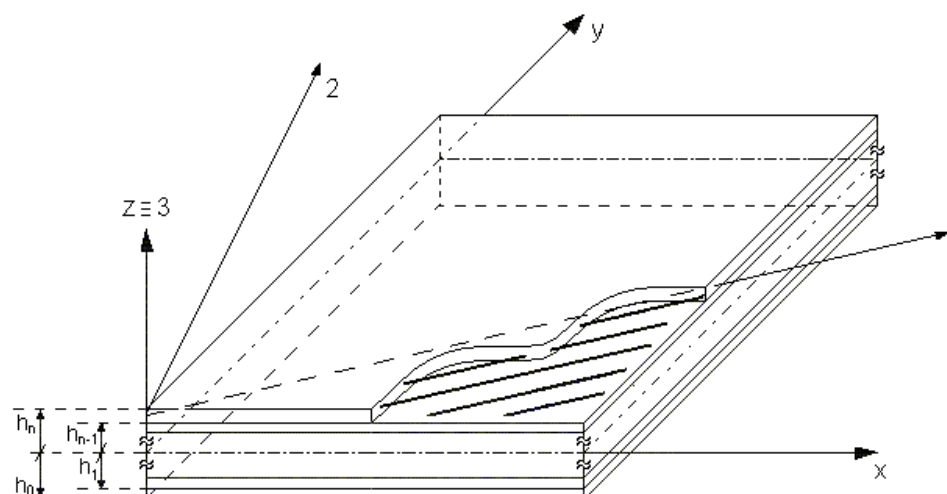


Figura 1. Laminado com os sistemas de eixos geométricos e materiais

Na resolução do problema que se pretende efectuar, as deformações são obtidas no sistema de eixos do laminado, sendo as tensões no

mesmo sistema de eixos relacionadas com aquelas deformações através da relação (2), em que os termos \bar{Q}_{ij} não nulos são dados em [1].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \bar{\sigma} = \bar{Q} \bar{\varepsilon} \quad (2)$$

Método dos elementos Finitos. Formulação Lagrangeana actualizada.

Usando a formulação Lagrangeana actualizada [2],[3], [4], a equação do Principio do Trabalho Virtual é dada por (3), obtendo-se, após desenvolvimento, a expressão (4), onde \mathbf{K}_L^e é a matriz de rigidez linear, \mathbf{K}_σ^e é a matriz de rigidez

não-linear geométrica, \mathbf{F}_{ext}^e é o vector das forças externas aplicadas \mathbf{F}_{int}^e é o vector das forças internas, e $\Delta \mathbf{q}$ é o vector dos deslocamentos incrementais.

$$\int_{t_V} {}^t C_{ijrs} e_{rs} \delta_t e_{ij} d^t V + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^t V \quad (3)$$

$${}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma)^{(k-1)} (\Delta \mathbf{q})^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} - {}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}_{int})^{(k-1)} \quad (4)$$

Análise de Sensibilidades. Método Analítico.

O cálculo das sensibilidades por este método é feito pela derivação analítica da função em ordem às variáveis de

projecto. A equação de equilíbrio para a análise geometricamente não-linear, no final de cada incremento, isto é, após

obtida a convergência, pode ser escrita na forma dada pela equação (5), onde \mathbf{F}_{int} é o vector das forças internas o qual é função do vector dos deslocamentos totais \mathbf{q} e do vector das variáveis de projecto \mathbf{b} , e $\mathbf{F}_{\text{ext}}^0$ é o vector das forças

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \mu \mathbf{F}_{\text{ext}}^0 \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{q}}{db_i} = \mu \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \right) \quad (7)$$

onde $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}$, e a derivada analítica $\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i}$ é calculada ao nível do

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^e}{\partial \alpha_i} = \int_A \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial \alpha_i} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^L dA \quad (9)$$

Optimização

O problema de optimização foi formulado do seguinte modo:

1º nível de optimização

O objectivo é determinar a direcção das fibras de cada lâmina que

$$\min \phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \quad \text{ou}$$

$$\text{sujeito a } b_i^l \leq b_i \leq b_i^u$$

externas aplicadas, todas estas grandezas medidas no final do incremento. Diferenciando a equação (5) em ordem à variável de projecto b_i , para um nível de carga fixo, obtêm-se sucessivamente as equações (6), (7) e (8)

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{db_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} = \mu \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{\partial b_i} \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{db_i} = \mathbf{K}_T^{-1} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}^0}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial b_i} \right) \quad (8)$$

elemento por (9) e (10), respectivamente em ordem ao angulo das fibras e às distâncias vectoriais

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^e}{\partial h_i} = \int_A \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial h_i} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^L dA + \int_A \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial h_i} \hat{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^L dA \quad (10)$$

minimiza uma componente do deslocamento, ou que minimiza a energia elástica de deformação, ou maximiza a carga limite, com as variáveis de projecto a poderem variar entre um limite máximo e um limite mínimo:

$$\max \phi(\mathbf{q}, \mathbf{b})$$

$$\text{sujeito a } b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \quad (11)$$

2º nível de otimização

O objectivo é determinar as distancias vectoriais de cada lâmina que minimizam o volume do material da estrutura, tendo em conta constrangimentos de deslocamento, e/ou de critérios de rotura $\bar{\psi}_j(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \leq 0$, ou maximizar a carga

limite com a condição de manter constante o volume do material da estrutura, em ambos os casos com as variáveis de projecto a serem limitadas por um valor máximo e um valor mínimo:

$$\begin{array}{ll} \min \phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) & \text{ou} & \max \phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \\ \text{sujeito a } \frac{\psi_j(\mathbf{q}, \mathbf{b})}{s} \leq 0 & & \text{sujeito a Vol=constante} \\ & & b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \\ & & \psi^c(\mathbf{q}, \mathbf{b}) \leq 0 \\ & & b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \end{array} \quad (12)$$

Aplicações

Como exemplo de aplicação considera-se um painel cilíndrico simplesmente apoiado nos bordos rectos e livre nos bordos curvos com laminação $[-45^\circ/45^\circ]$, carregado por uma carga concentrada P_c . As suas características geométricas e materiais são: $R = 2540 \text{ mm}$, $L = 508 \text{ mm}$, $H = 12.6 \text{ mm}$, $\theta = 0.1 \text{ rad}$, $E_1 = 3.3 \text{ GPa}$, $E_2 = 1.1 \text{ GPa}$, $G_{12} = 0.66 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$, $\sigma_{1U} = 70 \text{ MPa}$, $\sigma_{2U} = 3 \text{ MPa}$, e $\sigma_{12U} = \sigma_{13U} = \sigma_{23U} = 5 \text{ MPa}$. A optimização pretendida fez-se considerando o

painel dividido em quatro faixas longitudinais, e consiste em minimizar o volume, para o que se determina a orientação das fibras que maximizam a rigidez e a distribuição das espessuras que minimizam o volume, impondo como constrangimentos um deslocamento máximo $w_{c_0} = 8.9 \text{ mm}$ e uma tensão efectiva normalizada máxima $\bar{\Psi}_0 = 1.0$ para o nível de carga de 1160 N. Feita a optimização obtiveram-se as distribuições de espessuras indicada

na Tabelas 1, a que corresponde um volume de $2.391 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, portanto uma redução de 26.4% em relação ao volume inicial. O deslocamento do ponto central do painel encontrado

para esta distribuição de espessuras foi $w_c = 8.988 \text{ mm}$, e a tensão efectiva máxima encontrada foi $\bar{\Psi}_0 = 0.894$.

Grupo de Elementos	1	2	3	4
Espessura (mm)	6.6540	7.4800	10.0610	12.8520

Tabela 1. Distribuição da espessura para o volume óptimo do painel cilíndrico

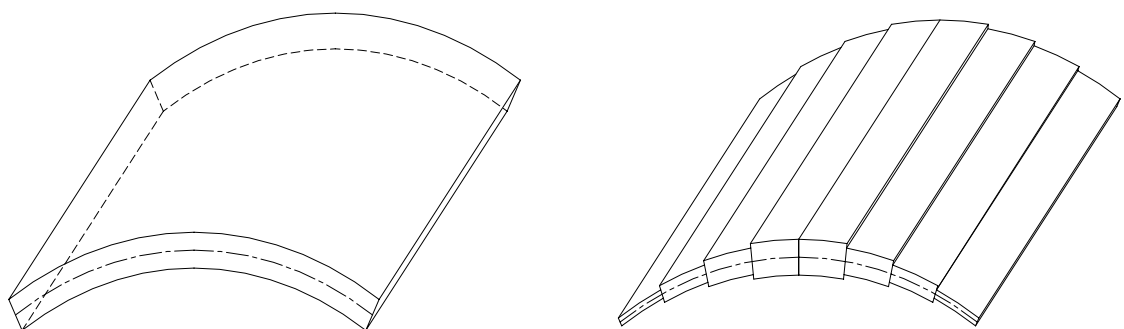


Figura 2. Painéis original e otimizado.

Referências

1. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates*, CRC Press, Boca Raton, New York, 1997.
2. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1982.
3. Bathe, K. J. and Ho, L. W., *A Simple and Efficient Element for Analysis of General Shell Structures*, Computers and Structures, 1981, Vol. 13, pp 673-681.
4. Crisfield M. A., *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles – Snap-Through*, Computers and Structures, 1980, Vol. 13, pp. 55-62.