# Matemática

Ciências Biomédicas/Mestr. Int. em Ciências Farmacêuticas

**Ana Conceição**

2008/2009

aconcei@ualg.pt

Programa:

1. Funções Reais

2. Cálculo Integral

3. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

4. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

## Bibliografia:

Slides das aulas teóricas!


- 12º matemática - Mª Neves, Mª Vieira, A. Alves - Porto Editora, 1991
- Cálculo Diferencial e Integral, Vols I e II - N. Piskounov - Lopes da Silva, 1978
- Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidóvich - Mir, 1977

## 1. Funções Reais

Definição: Uma correspondência

$$f : D_f \longrightarrow B, \quad D_f,\ B \subset \mathbb{R},$$

é uma *função real de variável real* se e só se

$$\forall x \in D_f\ \exists^1 y \in B : \ f(x) = y.$$

— — — — — — —

$D_f$ *domínio* de $f$

$B$ *conjunto de chegada* de $f$

$D'_f = \{y \in B : y = f(x), x \in D_f\}$ *contradomínio* de $f$

Definição: Uma função $f$ diz-se *crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

— — — — — — —

Definição: Uma função $f$ diz-se *decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

— — — — — — —

As funções crescentes ou decrescentes chamam-se *monótonas*.

— — — — — — —

Definição: Uma função $f$ diz-se *par* (*ímpar*) se

$$\forall x \in D_f : \; (-x) \in D_f \wedge f(-x) = f(x) \; (f(-x) = -f(x)).$$

Definição: A função

$$x = g(y), \quad y \in D'_f,$$

diz-se *inversa* da função $y = f(x)$, se

$$g[f(x)] \equiv x, \ \forall x \in D_f.$$

Quando existe, designa-se $x = f^{-1}(y)$.

— — — — — — —

$$D_f = D'_{f^{-1}} \qquad \mathrm{e} \qquad D_{f^{-1}} = D'_f$$

— — — — — — —

Nota: Dado o gráfico de uma função invertível $f$, o gráfico da função inversa $f^{-1}$ pode ser obtido reflectindo o gráfico de $f$ em relação a $y = x$.

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto $a$ (finito). Diz-se que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ (finito)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

— — — — — — —

Definição: A função $f$ diz-se *contínua* no ponto $x = a$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição: Se um ponto $(x, y)$ se desloca continuamente por uma curva $y = f(x)$ de tal forma que, pelo menos uma de suas coordenadas tenda para o infinito, enquanto que a distância entre esse ponto e uma determinada reta tenda para zero, essa reta recebe o nome de assímptota da curva.

– – – – – – –

$x = a$ assímptota vertical se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

– – – – – – –

$y = mx + b$ assímptota não vertical se:

$$\exists \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = b$$

**Definição:** Diz-se que uma função $f(x)$ admite um **máximo** (**mínimo**) num ponto $a \in D_f$, se numa vizinhança $\mathcal{V}$ de $a$

$$\forall x \in \mathcal{V} : f(x) \leq f(a) \qquad (\forall x \in \mathcal{V} : f(x) \geq f(a)),$$

sendo $f(a)$ o máximo (mínimo).

Os máximos e mínimos da função $f(x)$ chamam-se **extremos** de $f(x)$.

— — — — — — —

**Definição:** Numa função contínua, ao ponto que separa uma parte da curva com 'concavidade voltada para cima', de uma parte da curva com 'concavidade voltada para baixo' chama-se **ponto de inflexão**.

**Definição:** O conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde $x$ pertence ao domínio de uma função $f$ chama-se o **gráfico** de $f$.

— — — — — — —

Conhecido o gráfico de uma função $f$, podemos facilmente representar o gráfico de diversas funções relacionadas, como por exemplo:

- $g(x) = f(x \pm k), \quad k \in \mathbb{R}$
- $g(x) = f(x) \pm k, \quad k \in \mathbb{R}$
- $g(x) = f(-x)$
- $g(x) = -f(x)$

Definição: Chama-se *derivada* da função $y = f(x)$, no ponto $x = a$, a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Denotamos por $f'(a)$.

— — — — — — —

Definição: A função $y = f(x)$ diz-se *derivável* (ou diferenciável), no ponto $x = a$, se tem derivada finita nesse ponto.

— — — — — — —

Definição: A derivada de $f'(x)$ chama-se *derivada de 2ª ordem* ou *2ª derivada* da função $y = f(x)$.

## Tabela de derivadas

| | |
|---|---|
| $k' = 0$ | $(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1}\, u'$ |
| $(a^u)' = u'\, a^u \ln a$ | $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ |
| $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$ | $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ |
| $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ | $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$ |

| | |
|---|---|
| $(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ | $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ |

$$k \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

# Propriedades da derivação

| | |
|---|---|
| $(k\ f)' = k\ f',\ \ k \in \mathbb{R}$ | $(f \pm g)' = f' \pm g'$ |
| $(f\ g)' = f'\ g + f\ g'$ | $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\ g - f\ g'}{g^2}$ |
| $(f^g)' = g\ f^{g-1}\ \ f' + f^g\ g'\ \ln f$ | $(f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{f'(x)}\Big\vert_{x=f^{-1}(y)}$ |

## 2. Cálculo Integral

Definição: Diz-se que $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$ sobre $[a, b]$, se

$$\boxed{F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]}.$$

— — — — — — —

Teorema: Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são duas primitivas da função $f(x)$ sobre $[a, b]$, a sua diferença é uma constante, ou seja,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Definição: Chama-se integral indefinido da função $f(x)$, e denota-se por

$$\int f(x)dx,$$

a toda a expressão da forma $F(x) + C$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e $C \in \mathbb{R}$.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Nota: $\int f(x)dx$ representa o conjunto de todas as primitivas da função $f(x)$.

# Propriedades do integral indefinido

| |
|---|
| $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$ |
| $\int \left(f_1(x)+f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ |
| $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a \in \mathbb{R}$ |

## Regra útil

- Se $\int f(x)dx = F(x) + C$, então

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}.$$

— — — — — — —

**Nota:**
Nem todas as funções possuem uma primitiva.

**Nota:**
Toda a função contínua possui uma primitiva/ um integral indefinido.

# Tabela de integrais

| |
|---|
| 1) $\int u' u^{\alpha}\, dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$ |
| 2) $\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln\|u\| + C$ |
| 3) $\int u' e^{u}\, dx = e^{u} + C$ |
| 4) $\int u' a^{u}\, dx = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$ |

| |
|---|
| 5) $\int u' \mathrm{sen} u \; dx = -\cos u + C$ |
| 6) $\int u' \cos u \; dx = \mathrm{sen} u + C$ |
| 7) $\int u' \mathrm{tg} u \; dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$ |
| 8) $\int u' \mathrm{ctg} u \; dx = \ln\lvert\mathrm{sen} u\rvert + C$ |

| |
|---|
| 9) $\int \frac{u'}{\cos^2 u}\, dx = \mathrm{tg} u + C$ |
| 10) $\int \frac{u'}{\mathrm{sen}^2 u}\, dx = -\mathrm{ctg} u + C$ |
| 11) $\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \mathrm{arctg} u + C$ |
| 11') $\int \frac{u'}{a^2+u^2}\, dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$ |

| |
|---|
| 12) $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = \mathrm{arcsen}\, u + C$ |
| 12') $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\, dx = \mathrm{arcsen}\frac{u}{a} + C$ |
| 13) $\int \frac{u'}{u^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-u}{a+u}\right\| + C$ |
| 14) $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\, dx = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$ |

# Integração por partes

$$\boxed{\int u\, v' dx = u\, v - \int u' v\, dx, \quad v = \int v' dx}$$

— — — — — — —

Nota: Esta fórmula utiliza-se para calcular o integral de funções que podem ser postas sob a forma do produto de $u$ e $v'$, tais que a procura de $v$ e o cálculo de $\int u' v dx$ sejam um problema mais simples do que o cálculo de $\int u\, v' dx$.

## Integração por mudança de variável

Teorema: Seja $x = \varphi(t)$, onde $\varphi$ e $\varphi'$ são funções contínuas e $\varphi$ é invertível. Tem-se que

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

— — — — — — —

Nota: Por vezes é preferível escolher a mudança sob a forma $t = \psi(x)$ em vez de $x = \varphi(t)$.

## Funções racionais

Toda a função racional regular pode ser representada através de uma soma de frações racionais elementares:

1) $\dfrac{A}{x-a}$

3) $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$

4) $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$

$$k \in \mathbb{N}, \;\; k \geq 2, \quad b^2 - 4ac < 0$$

## Decomposição em f. racionais elementares

Seja $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}$ regular.

$$f(x) = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{x-a_1} + \cdots$$

$$+\frac{A_{n1}}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_{n2}}{(x-a_n)^{\alpha_n-1}} + \cdots + \frac{A_{n\alpha_n}}{x-a_n}$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \cdots + \frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots$$

$$+\frac{M_{m1}x+N_{m1}}{(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}} + \cdots + \frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{x^2+b_mx+c_m}$$

## □ Integração de frações racionais elementares

**I)** $$\int \frac{A}{x-a}\,dx \underbrace{=}_{2)} A\ln|x-a| + C$$

**II)** $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx \underbrace{=}_{1)} \frac{A}{-k+1}\,(x-a)^{-k+1} + C$$

III) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= \tfrac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= \underbrace{\tfrac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx}_{2)} + \tfrac{1}{a}\left(B-\tfrac{Ab}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+d^2}}_{11')}$$

$$= \tfrac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \tfrac{1}{ad}\left(B-\tfrac{Ab}{2a}\right)\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{d} + C$$

$$d^2 = \tfrac{c}{a} - \tfrac{b^2}{4a^2}$$

IV) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$

$$= \underbrace{\tfrac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx}_{1)} + \left(B - \tfrac{Ab}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{(*)}$$

para $\;x + \frac{b}{2a} = t$:

$$(*) \quad \tfrac{1}{a}\int \frac{dt}{(t^2+d^2)^k} = \frac{1}{ad^2}\int \frac{d^2+t^2-t^2}{(t^2+d^2)^k}dt =$$

$$= \tfrac{1}{ad^2}\int \frac{dt}{(t^2+d^2)^{k-1}} - \frac{1}{2}\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\frac{2t}{(t^2+d^2)^k}}_{v'}dt$$

por partes

## Integral definido $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$\hookrightarrow$ conceito que surgiu associado ao cálculo de áreas de regiões planas como limite da soma de várias subáreas (somas de Riemann).

Definição: Uma função $f(x)$, definida em $[a, b]$, para a qual $\exists \int_a^b f(x)dx$, diz-se integrável em $[a, b]$.

Nota: Existem funções integráveis que não são contínuas em $[a, b]$.

# Propriedades dos integrais definidos

## Propriedade 1.

Se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$, então $(kf)(x)$, onde $k$ é uma constante, também é integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx}$$

## Propriedade 2.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$, então $(f \pm g)(x)$ são integráveis em $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx} \, .$$

## Propriedade 3.

Seja $c \in ]a,b[$. Se $f(x)$ é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}.$$

Propriedade 4.

Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0}\,.$$

## Propriedade 5.

Se $f(x)$ é uma função par, então

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx}.$$

Se $f(x)$ é uma função ímpar, então

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}.$$

## Teorema do valor médio

Seja $f(x)$ é uma função contínua em $[a,b]$. Então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)}.$$

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$.

## Fórmula de Newton-Leibniz

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Nota: O cálculo de integrais definidos de funções contínuas está reduzido à procura de primitivas e ao cálculo de valores das primitivas em a e em b.

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

## Integração por partes (integrais definidos)

$$\boxed{\int_a^b u\, v' dx = (u\, v)\big|_a^b - \int_a^b u' v\, dx}$$

— — — — — — —

## Integração por mudança de variável (integrais definidos)

Teorema: Seja $x = \varphi(t)$, onde $\varphi$ e $\varphi'$ são funções contínuas e $\varphi$ é invertível. Tem-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

## Aplicações geométricas dos integrais definidos

$\diamond$ Cálculo de áreas planas: A área de uma região plana, limitada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, corresponde ao valor do integral definido

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Nota: Se $y = g(x)$ coincide com o eixo $OX$, então a área é dada pelo integral definido

$$\int_a^b f(x)dx.$$

$\diamond$ Cálculo de volumes de corpos de revolução:

O volume de um corpo gerado pela rotação, em torno do eixo $OX$, de uma região plana limitada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$, corresponde ao valor do integral definido

$$\pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx.$$

Nota: Se $y = g(x)$ coincide com o eixo $OX$, então o volume é dado pelo integral definido

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

$\diamond$ Cálculo de comprimento de curvas: O comprimento, entre $x = a$ e $x = b$, de uma curva dada pela equação $y = f(x)$, onde $f(x)$ tem derivada contínua, corresponde ao valor do integral definido

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

## 3. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Definição: Se a cada par $(x, y)$ de valores de duas variáveis independentes $x$ e $y$, pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, corresponde um valor bem determinado de variável $z$, diz-se que $z$ é uma função de duas variáveis independentes $x$ e $y$. Denotamos por $z = f(x, y)$.

**Exemplo:** $z = x^2 y + \operatorname{sen} x$

Definição: Chama-se domínio de definição da função $z = f(x, y)$ ao conjunto dos pares $(x, y)$ de valores de $x$ e de $y$ para os quais $f(x, y)$ faz sentido. Denotamos por $D$.

— — — — — — —

Nota: Geometricamente, o domínio de definição de uma função $z = f(x, y)$ está representado no plano $OXY$.

**Definição:** Se a todo n-úplo $(x_1, , x_n)$ de valores de $n$ variáveis independentes $x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, corresponde um valor bem determinado de variável $y$, diz-se que $y$ é uma função de variáveis independentes $x_1, \cdots, x_n$ e denotamos por $y = f(x_1, \cdots, x_n)$.

**Exemplo:** $w = x^2yz + \operatorname{sen} x \, e^z \; (= f(x, y, z))$

— — — — — — —

**Nota:** O domínio de definição define-se de forma análoga ao caso $n = 2$.

Definição: O lugar geométrico de todos os pontos $P$ cujas coordenadas verificam a equação $z = f(x, y)$ chama-se gráfico da função.

— — — — — — —

A equação $z = f(x, y)$ define uma superfície no espaço, cuja projeção no plano $OXY$ é o domínio desta função. Cada perpendicular ao plano $OXY$ não corta a superfície em mais do que um ponto.

Definição: Chama-se derivada parcial em relação a $x$ $(y)$, da função $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$, ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\right).$$

— — — — — — —

Nota: A derivada de $z = f(x, y)$ em relação a $x$ $(y)$ é calculada derivando a função considerando $\underline{x}$ $(y)$ <u>variável</u> e supondo $\underline{y}$ $(x)$ <u>constante</u>.

## Interpretação geométrica das derivadas parciais

O valor da derivada parcial em relação a $x$, no ponto $(x_0, y_0)$, é igual à tangente do ângulo formado pela reta tangente à curva, definida pela interseção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $y = y_0$, e o plano $OXY$. Analogamente, define-se a derivada parcial em relação a $y$, no ponto $(x_0, y_0)$.

Definição: Chama-se derivada parcial em relação a $x_i$, da função $z = f(x_1, \cdots, x_n)$, no ponto $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$, ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_0^1, \cdots, x_0^n) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^i + h, \cdots, x_0^n) - f(x_0^1, \cdots, x_0^n)}{h}.$$

— — — — — — —

Nota: A derivada de $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ em relação a $x_i$ é calculada derivando a função $f(x_1, \cdots, x_n)$ considerando $\underline{x_i}$ <u>variável</u> e supondo $\underline{x_j}$, $j \neq i$ <u>constantes</u>.

Seja $z = f(x,y)$. Assim, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ também são funções de $x$ e $y$.

Definição: As derivadas parciais de $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ chamam-se derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = f(x,y)$.

— — — — — — —

Em geral, as derivadas parciais das derivadas de ordem $n-1$ da função $z = f(x,y)$ chamam-se derivadas parciais de ordem $n$, de $z = f(x,y)$.

Derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = f(x, y)$:

- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}$$
- $\diamondsuit$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \ \text{ derivadas mistas}$$

**Teorema:** Se a função $z = f(x, y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

são contínuas no ponto $(x_0, y_0)$ e numa vizinhança de $(x_0, y_0)$, então

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Derivadas parciais de 3ª ordem da função $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

— — — — — — —

$z = f(x, y)$ tem $2^p$ derivadas parciais de ordem $p$.

$$w = f(x,y,z) \quad \text{tem} \quad 3^p \quad \text{derivadas de ordem } p.$$

$$- \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$y = f(x_1, \cdots, x_n) \ \text{ tem } \ n^p \ \text{ derivadas parciais de ordem } p.$$

$$- \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

Nota: Caso as derivadas parciais sejam contínuas então o resultado da derivação múltipla não depende da ordem dessa derivação.

Seja $z = f(x,y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$.

Definição: Se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $(x_0, y_0)$ tal que $\forall (x,y) \in \mathcal{V} \cap D_f,\ (x,y) \neq (x_0, y_0)$,

$$f(x_0, y_0) > f(x,y) \qquad (f(x_0, y_0) < f(x,y)),$$

diz-se que a função $z = f(x,y)$ admite um máximo (mínimo) no ponto $(x_0, y_0)$.

Ao(s) máximo(s)/mínimo(s) de $z = f(x,y)$ chamam-se extremos da função.

Teorema (condição necessária para a existência de extremo):
Se a função $z = f(x, y)$ admite um extremo no ponto $(x_0, y_0)$, então as derivadas parciais de 1ª ordem anulam-se no ponto $(x_0, y_0)$ ou não existem.

— — — — — — —

Definição: Seja $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$. Se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

então $(x_0, y_0)$ chama-se ponto estacionário da função.

## Algoritmo ($n = 2$)

**Passo 1:** Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) \text{ ponto estacionário}$$

**Passo 2:** Determinar

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

**Passo 3:**

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad D_2 = |H(x_0, y_0)|$$

**Passo 4:**

◇ Se $D_1 > 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ mínimo

◇ Se $D_1 < 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ máximo

◇ Se $D_2 < 0 \implies f(x_0, y_0)$ não é extremo

◇ Se $D_2 = 0 \implies$ nada se pode concluir (por este método)

## 4. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Definição: Chama-se equação diferencial ordinária a uma igualdade que estabelece uma relação entre uma variável independente $x$, uma função desconhecida $y = y(x)$, e as suas derivadas, $y'$, $y''$, $\cdots$, $y^{(n)}$, i. e. uma equação da forma

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

Exemplos: $a)$ $y' - \dfrac{x}{y} = 0$ $\qquad$ $b)$ $y'' - 6x - 2 = 0$

Equação diferencial ordinária porque $y = y(x)$ é função de apenas uma variável independente $x$.

Nota: Se $y$ fosse uma função de duas ou mais variáveis independentes, por exemplo $y = y(x,t)$, então teríamos uma equação diferencial de derivadas parciais.

Definição: Chama-se ordem de uma eq. dif. a ordem da derivada de maior ordem presente na eq. dif.

— — — — — — —

Exemplos: $a)$ ordem 1 $b)$ ordem 2

Definição: Chama-se solução da eq. dif., num intervalo $]a, b[$, a uma função $y = \varphi(x)$, tal que, substituída na eq. dif., a transforma numa identidade, $\forall x \in ]a, b[$.

— — — — — — —

Nota: Nem sempre é possível explicitar $y$ como função de $x$. Ou seja, a solução de uma dada eq. dif. pode apresentar-se na forma explícita $y = \varphi(x)$ ou na forma implícita $\phi(x, y) = 0$.

Nota: Nem todas as eq. dif. são solúveis.

— — — — — — —

Uma solução particular de uma eq. dif. é qualquer solução da mesma.

**Definição:** Chama-se **solução geral** da eq. dif., de ordem $n$, à função $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, desde que esta seja solução da eq. dif. para quaisquer valores das constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Chama-se **integral geral** à solução geral dada na forma implícita $\phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$.

— — — — — — —

**Nota:** A solução geral de uma eq. dif. nem sempre pode ser expressa mediante uma fórmula única.

**Exemplo:** A eq. dif. $y' + y^2 = 0$ admite as soluções $y \equiv 0$ e $y = \frac{1}{x-C}$, $C \in \mathbb{R}$.

Definição: Um problema de valor inicial consiste numa eq. dif., juntamente com condições relativas à função $y = y(x)$ e suas derivadas, tudo para um mesmo valor da variável independente $x$.

Se as condições se referem a mais de um valor da variável independente temos um problema de valores de contorno.

— — — — — — —

Definição: Uma solução de um problema de valor inicial, ou de valores de contorno, é uma função $y(x)$ que satisfaz não só a eq. dif. dada, mas também todas as condições.

## Equações diferenciais de primeira ordem

**Definição:** Uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação da forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

**Definição:** Chama-se solução geral da equação $F(x, y, y') = 0$ à função

$$y = \varphi(x, C)$$

desde que esta seja solução da eq. dif. para qualquer valor da constante $C$.

Definição: Chama-se integral geral à solução geral da eq. dif., na forma implícita, $\phi(x, y, C) = 0$.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Definição: É possível que uma equação diferencial $F(x, y, y') = 0$, com a solução geral $y = \varphi(x, C)$, admita uma solução

$$y = \psi(x) \ : \ \psi(x) \neq \varphi(x, C), \ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Neste caso diz-se que $y = \psi(x)$ é uma solução singular da eq. dif.

Exemplo: A eq. dif. $y' + y^2 = 0$ admite as soluções $y \equiv 0$ (singular) e $y = \frac{1}{x-C}$, $C \in \mathbb{R}$.

■ Equações diferenciais do tipo normal:

$$y' = f(x, y)$$

Outra forma de representar uma equação diferencial de primeira ordem do tipo normal, isto é, que é resolúvel relativamente à derivada

$$y' = f(x, y),$$

é a chamada forma diferencial ou simétrica

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

onde $N(x, y) \neq 0$.

— — — — — — —

Exemplos: Equações diferenciais de variáveis separadas, de variáveis separáveis, homogéneas, exatas e lineares.

## $\diamond$ Equações diferenciais de variáveis separadas

Definição: Chama-se equação diferencial de variáveis separadas a uma equação diferencial da forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$\hookrightarrow$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

## ◇ Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição: Chama-se equação diferencial de variáveis separáveis a uma equação diferencial da forma

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$$

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

$\hookrightarrow$

$: \; N_1(y)M_2(x)$

$\hookrightarrow$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

$\hookrightarrow$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

## $\diamond$ Equações diferenciais homogéneas

Definição: Chama-se equação diferencial homogénea a uma equação diferencial da forma

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$y = ux \qquad \longrightarrow \qquad y' = u'x + u$$

$$y' = f(x, y) \longrightarrow u'x + u = f(x, ux) \longrightarrow u'x + u = f(1, u)$$

$\hookrightarrow$ eq. dif. de variáveis separadas/separáveis (edvs/s)

$\hookrightarrow \qquad u = \dfrac{y}{x}$

## ◇ Equações diferenciais exatas

Definição: Chama-se equação diferencial exata a uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

se existir uma função $u(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

A igualdade

$$u(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

é o integral geral da equação.

Sejam $M$ e $N$ funções com derivadas contínuas.

Teorema: Para que a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

seja exata, é necessário e suficiente que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

— — — — — — —

$\hookrightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)dx = \cdots + C_1(y)$

$\hookrightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)dy = \cdots + C_2(x)$

$\hookrightarrow$

$$u(x,y) = C$$

## ◇ Equações diferenciais lineares

**Definição:** Chama-se equação diferencial linear de primeira ordem a uma equação diferencial da forma

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

— — — — — — —

▷ $Q(x) \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad$ (edvs/s).

▷ Caso contrário,

$$y = uv \longrightarrow y' = u'v + uv' \longrightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

$$\hookrightarrow \quad v' + P(x)v = 0 \quad \text{(edvs/s)} \quad \longrightarrow \quad v_p$$

$$\hookrightarrow \quad u'v_p = Q(x) \quad \text{(edvs/s)} \quad \longrightarrow \quad y = uv_p$$

Seja $x(t)$ a quantidade de uma substância (ex: subst. radioactiva) ou o n° de elementos de uma população (ex: pessoas, bactérias) no momento $t$. Admitamos que a taxa de variação de $x(t)$, $\dfrac{dx}{dt}$, é proporcional a $x(t)$, isto é, $\dfrac{dx}{dt} = k\ x$, onde $k$ é a constante de proporcionalidade (positiva ou negativa conforme $x(t)$ aumentar ou diminuir ao longo do tempo). Seja $x(0) = x_0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\ x \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \hookrightarrow \qquad x(t) = x_0 e^{k\,t}$$