



**Universidade do Algarve**  
**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

**COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NUM CONTEXTO  
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:  
UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 9.º ANO**

**Vasco João dos Santos Coelho**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de  
Mestre em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências  
Área de Especialização de Matemática

Faro  
2010



**Universidade do Algarve**  
**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

**COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NUM CONTEXTO  
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:  
UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 9.º ANO**

**Vasco João dos Santos Coelho**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de  
Mestre em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências  
Área de Especialização de Matemática

Orientadoras:

Professora Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Professora Doutora Ana Maria D. Roque de Lemos Boavida

Faro  
2010

*A Matemática constitui um património cultural  
da humanidade e um modo de pensar.  
A sua apropriação é um direito de todos.*

(Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999)



## Resumo

Este estudo visa compreender como alunos do 9.º ano fazem uso de representações para comunicar matematicamente num contexto de resolução de problemas, considerando, simultaneamente, o papel do discurso desenvolvido entre os vários actores, na sala de aula.

Assim, formularam-se as seguintes questões de investigação: i) A que representações matemáticas recorrem os alunos quando se envolvem em actividades de resolução de problemas? ii) Qual o papel desempenhado por estas representações nos processos de resolução de problemas e de comunicação dos seus raciocínios? iii) De que modo as interacções discursivas ocorridas durante as actividades de resolução de problemas influenciam o processo de resolução?

O quadro teórico articulou diferentes focos, destacando-se: o processo de comunicação, em geral, e a comunicação na aula de matemática, em particular, o discurso matemático e as representações do conhecimento matemático.

O trabalho de campo contemplou uma intervenção pedagógica com dez alunos de 9.º ano, nas aulas de Estudo Acompanhado, durante a qual foram propostas dez tarefas. Esta intervenção, ao fomentar e valorizar a comunicação reflexiva e instrutiva, deu aos alunos oportunidades de falarem, ouvirem, discutirem e reflectirem, colocando ênfase na capacidade de comunicar em Matemática.

Adoptou-se uma metodologia qualitativa, de carácter interpretativo, centrada na análise de dados recolhidos através de observação participante, de entrevistas aos alunos e das suas produções.

Os resultados evidenciam que a resolução de problemas constituiu uma boa estratégia para promover a comunicação matemática, uma vez que estimulou o aparecimento de diversas representações, que foram progressivamente melhoradas, facilitou o confronto de ideias, a delineação de estratégias e a apresentação de resultados, quer na forma escrita quer oral.

O discurso que foi emergindo no contexto das aulas, e que se tornou cada vez mais proficiente, permitiu uma clara evolução na execução das tarefas e contribuiu para estabelecer um discurso matemático cada vez mais rico.

**Palavras-chave:** comunicação matemática, resolução de problemas, representações matemáticas, discurso matemático.

## Abstract

This study aims to understand how 9<sup>th</sup> grade students make use of representations to communicate mathematically in the context of solving problems, concurrently considering the role of the discourse developed among the various actors in the classroom.

Thus the following research questions were formulated: i) Which mathematical representations do students use when engaged in problem solving activities? ii) What is the role played by these representations in the process of problem solving and communication of their reasoning? iii) How do the discursive interactions occurring during the activities of problem solving affect the solving process?

The theoretical framework articulated different focuses, including: the process of communicating, in general, and the communication in school mathematics, in particular, the mathematical discourse and the representations of mathematical knowledge.

The fieldwork was performed within a pedagogical intervention with ten students from 9<sup>th</sup> grade, in Tutorial classes, during which ten tasks were proposed. This intervention, while promoting and enhancing reflective and instructive communication, gave the students opportunities to talk, listen, discuss and reflect, putting emphasis on the ability to communicate in mathematics.

A qualitative methodology, interpretative in nature, was adopted and applied in the analysis of data that were collected through participant observation, interviews with students and their productions.

The results show that problem solving was a good strategy to foster mathematical communication as it stimulated the appearance of several representations, which have been gradually improved, facilitated the exchange of ideas, the delineation of strategies and the presentation of results, both in written form or orally.

The discourse that emerged in the context of classes, and which became increasingly proficient, allowed a clear evolution in the completing of tasks and helped to establish an increasingly rich mathematical discourse.

**Keywords:** mathematical communication, problem solving, mathematical representations, mathematical discourse.

## Agradecimentos

Embora uma tese seja, pela sua finalidade académica, um trabalho individual, há contributos de natureza diversa que não podem e nem devem deixar de ser realçados.

É com enorme alegria e satisfação que expresso aqui o mais profundo agradecimento a todos aqueles que tornaram a realização deste trabalho possível.

Um agradecimento especial é devido à Professora Doutora Nélia Amado e à Professora Doutora Ana Maria Boavida, que desde logo aceitaram orientar este trabalho, pelo estímulo e entusiasmo revelado por esta dissertação, pelas críticas e sugestões relevantes feitas durante a orientação, pela disponibilidade sempre revelada, pelo incansável apoio moral e, sobretudo, pela amizade e confiança demonstradas.

Gostaria também de agradecer:

- à Professora Doutora Susana Carreira, coordenadora do Curso de Mestrado, pelas suas palavras, de encorajamento e estímulo.
- aos alunos que tornaram este trabalho uma realidade.
- ao Carlos que me ajudou, mostrando-se sempre disponível, nas traduções dos textos em Inglês.
- aos meus amigos que me foram perguntando pelo trabalho e que me foram estimulando, pela confiança em mim depositada, fazendo-me acreditar que era possível chegar ao fim com sucesso.
- à minha família, pelo apoio incondicional que me deram, em especial, à Maria por todos os momentos em que não estive presente e tanta falta fazia.

Por fim, dedico este trabalho a todos os que acreditaram nele, em particular, à Joana e à Laura, que me perguntavam incessantemente: Pai, o que é uma tese? Pai, já acabaste a tese? Pai, quantos capítulos ainda faltam?

A todos, os meus sinceros agradecimentos.



# ÍNDICE

<b>Capítulo I – Introdução .....</b>	<b>1</b>
1. Motivações pessoais e profissionais .....	3
2. Pertinência do estudo .....	7
3. Propósitos e âmbito do estudo.....	12
4. Estrutura organizativa do trabalho.....	13
<b>Capítulo II – Fundamentação Teórica.....</b>	<b>15</b>
1. Comunicação e comunicação matemática.....	17
1.1. Significado e importância .....	17
1.2. Comunicação matemática: diferentes perspectivas.....	24
2. A comunicação matemática na sala de aula.....	30
2.1. O discurso matemático .....	30
2.1.1. Significado e importância .....	30
2.1.2. Características e dinâmica .....	33
2.2. Padrões de interação .....	39
3. Representações do conhecimento matemático .....	43
3.1. Significado e importância .....	43
3.2. Tipos de representações .....	49
3.3. Conexões entre representações .....	59
<b>Capítulo III – Metodologia .....</b>	<b>63</b>
1. Opção por uma metodologia qualitativa .....	65
2. A intervenção Pedagógica .....	68
2.1. Descrição .....	68
2.2. As tarefas propostas .....	69
3. Participantes .....	73
3.1. A escola .....	73

3.2. Os alunos .....	74
4. Recolha de dados .....	79
5. Análise de dados .....	82
6. Apresentação de dados .....	86
<b>Capítulo IV – Aprender a comunicar, resolvendo problemas .....</b>	<b>89</b>
1. Onde estou? .....	91
1.1. Descrição e análise .....	91
1.2. Síntese .....	103
2. Pintando Sólidos .....	106
2.1. Descrição e análise .....	106
2.2. Síntese .....	125
3. O Papa Bolachas .....	128
3.1. Descrição e análise .....	128
3.2. Síntese .....	137
4. O seminário final .....	139
4.1. Preparando e dinamizando o seminário final .....	139
4.2. Síntese .....	150
5. De Onde Estou?...ao Seminário Final .....	152
5.1. Os impasses na interpretação do enunciado da tarefa .....	153
5.2. As precipitações iniciais .....	154
5.3. Uso das contribuições de colegas para desencadear ou complementar o próprio raciocínio.....	156
5.4. Recurso a representações – Um meio de desvendar caminhos .....	158
5.5. Partilha de ideias como suporte à comunicação escrita .....	160
5.6. A discussão como via para reavivar conceitos e procedimentos .....	162
5.7. A resolução de problemas como um meio para ir mais além .....	163
5.8. Incentivar a discussão e a reflexão: um caminho prometedora mas nem sempre simples.....	165
5.9. Síntese .....	167

<b>Capítulo V – Conclusões .....</b>	<b>171</b>
1. Retomando o objectivo e questões de investigação .....	173
1.1. Tipos de representações .....	173
1.2. Papel das representações .....	176
1.3. Discurso matemático na resolução de problemas .....	180
2. Encerrando o estudo.....	185
<b>Referências bibliográficas .....</b>	<b>191</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>203</b>

## Índice de quadros

Quadro 1. Dois padrões temáticos de interacção .....	42
Quadro 2. Modelo de classificação de representações matemáticas escritas ...	50
Quadro 3. Modelo de classificação de representações matemáticas .....	51
Quadro 4. Usos, vantagens e desvantagens de representações matemáticas ...	54
Quadro 5. Esquema de categorização e exemplos de representações gráficas..	55
Quadro 6. Calendarização da apresentação e exploração das tarefas .....	69
Quadro 7. Resultados finais dos alunos .....	75
Quadro 8. Recolha de material empírico .....	79
Quadro 9. Organização da investigação .....	85
Quadro 10. Momentos caracterizadores da intervenção pedagógica .....	168

## Índice de fotografias

Fotografia 1. Sessão de trabalho .....	79
--	----

## Índice de figuras

Figura 1. Modelo de análise das representações dos alunos .....	48
Figura 2. Diferentes formas de representações matemáticas externas .....	57
Figura 3. Conexões entre representações .....	59
Figura 4. Seis formas distintas de representar o conceito “um meio” .....	61
Figura 5. Tipos de relatos .....	67
Figura 6. Representação de Rúben .....	96
Figura 7. Registo de Pedro .....	98
Figura 8. Representação de Pedro .....	99
Figura 9. Representação de Andreia.....	99
Figura 10. Registo de Sofia .....	101
Figura 11. Representação de Pedro .....	101
Figura 12. Conclusão de Marco .....	102
Figura 13. Conclusão de Olga.....	102
Figura 14. Conclusão de Mónica .....	103
Figura 15. Registo de Pedro .....	104
Figura 16. Registo de Catarina .....	110
Figura 17. Registo de Mónica .....	111
Figura 18. Registo de Olga .....	113
Figura 19. Registo de Catarina .....	113
Figura 20. Registo de Catarina .....	114
Figura 21. Registo de Olga .....	114
Figura 22. Registo de Mónica .....	115
Figura 23. Registo de Pedro .....	122

Figura 24. Registo de Sofia .....	123
Figura 25. Registo de Rúben .....	124
Figura 26. Representação de Mónica .....	131
Figura 27. Representação de Marco .....	131
Figura 28. Expressão escrita por Mónica .....	133
Figura 29. Sequência escrita por Mónica .....	133
Figura 30. Tabela de Mónica com a expressão geral .....	135
Figura 31. Registo de Olga .....	135
Figura 32. Resposta de Marco à última questão .....	136
Figura 33. Resposta de Sofia à última questão .....	136
Figura 34. O que é resolver um problema .....	144
Figura 35. Divisão do Tangram em triângulos geometricamente iguais .....	148
Figura 36. Slide usado para explicar a segunda proposta .....	149
Figura 37. Slide usado para concluir a explicação da segunda proposta .....	149
Figura 38. Tabela elaborada por Mónica associada à tarefa sete .....	159
Figura 39. Registo de Mónica associado à tarefa sete .....	160
Figura 40. Registo de Catarina associado à tarefa quatro .....	162
Figura 41. Registo de Marco associado à tarefa oito .....	164
Figura 42. Metodologia associada à resolução das tarefas .....	168
Figura 43. Sequência no uso de representações: Tarefa O Papa Bolachas ...	174
Figura 44. Paralelismo entre as diferentes formas de representar e as fases de resolução da tarefa .....	175
Figura 45. Alvo da ficha entregue a Sofia com registos feitos pela aluna ....	182
Figura 46. Registo de Sofia .....	183





# Capítulo 1

---

## Introdução

Neste capítulo apresentam-se as principais linhas orientadoras deste trabalho. Em particular, referem-se as motivações pessoais e profissionais que lhe deram origem, bem como a pertinência, propósitos e âmbito do estudo. Por fim, apresenta-se a estrutura do trabalho.



# 1. Motivações pessoais e profissionais

Desde cedo desejei ser professor de Matemática. Lembro-me de, durante quase todo o meu percurso escolar, dizer: Um dia mais tarde o que quero mesmo fazer é “dar aulas”.

Esta opinião foi criticada pelo meu núcleo de amigos e colegas, mas incessantemente a defendi, pois sempre senti uma apetência natural para lidar com os outros e uma preferência peculiar pela Matemática. A minha relação com esta disciplina foi sempre muito especial.

As dificuldades com que, por vezes, me confrontava não me faziam perder o gosto e a vontade de estudar Matemática. Pelo contrário, constituíam um desafio. Foi nesta disciplina que mais investi ao longo de todo o meu percurso escolar e fi-lo sempre com imensa satisfação.

Muitas vezes me interroguei sobre a rejeição que os meus colegas tinham pela Matemática e que eu, tantas vezes, em silêncio, questionava. Recordo-me de ajudar alguns deles e de estes me perguntarem: “*mas como é que tu consegues perceber isso?*”. Nessa altura nem eu próprio tinha consciência do que era compreender Matemática.

Ao longo do meu percurso escolar, a Matemática que me foi apresentada baseava-se num conjunto de regras e procedimentos que devia saber executar com destreza mesmo sem saber ao certo para que serviam. As aplicações da Matemática eram quase inexistentes.

Fruto das circunstâncias da vida e, talvez, de uma errada orientação vocacional acabei por fazer opções que me conduziram ao ingresso num curso superior que nada tinha a ver com o ensino. Fiz uma licenciatura em Gestão de Empresas e no último ano do curso já me encontrava a exercer funções numa empresa do ramo automóvel. No entanto, a vontade de ensinar continuava presente e, por isso, rapidamente acabei por conciliar o trabalho na empresa, durante o dia, com a actividade docente, à noite. A falta de professores de Matemática profissionalizados, na década de noventa, na região do Algarve, permitiu durante alguns anos, a existência de horários exclusivamente nocturnos que eram atribuídos a pessoas que exerciam outra profissão durante o dia.

Quando iniciei a minha actividade docente, no ano lectivo 1995/1996, a única referência que tinha era a minha experiência como aluno. Nessa altura, a minha principal preocupação era transmitir conhecimentos e fazer testes escritos de avaliação. Acreditava que explicando o melhor possível os conteúdos programáticos, os alunos

aprendiam Matemática. Esta foi a minha experiência enquanto aluno: o professor explicava e os alunos ouviam atentamente. Pedir aos alunos para explicarem os seus raciocínios ou ouvir as suas opiniões era experiência que nunca tinha vivido e, como tal, não fazia parte das minhas preocupações. Actualmente, parece-me impensável esta atitude.

Nessa altura sentia que possuía os conhecimentos matemáticos necessários para desempenhar as funções de professor de Matemática. Contudo, ao longo da minha experiência, fui tomando consciência de que esses conhecimentos não são tudo. Fui percebendo que, para se ser um bom professor de Matemática, saber Matemática é necessário mas não basta. Ao longo dos anos fui-me defrontando com outras dificuldades que estão identificadas na literatura. Amado (2007) refere que a maior parte das dificuldades que o professor enfrenta estão relacionadas com a prática e com o conhecimento didáctico.

Desde que optei pelo ensino, tenho vindo a alterar as minhas práticas e, progressivamente, a dar atenção a aspectos que no início de carreira eram pouco relevantes. Em particular, actualmente dou especial atenção à forma como os alunos comunicam entre si e se referem aos conceitos matemáticos. Por exemplo, quando os alunos, para indicarem o denominador de uma fracção, dizem “*aquele número ali debaixo daquele traço*”, tenho a preocupação de os levar a utilizar uma terminologia correcta. Sinto que, em cada dia que passa, dou mais espaço aos alunos para falarem, para responderem e para exporem as suas ideias.

É na prática e com a prática que se aprende, que se ensaiam novos métodos e estratégias de planificar, de ensinar e de avaliar. As mudanças que tenho vindo a introduzir na minha prática, têm sido alimentadas pela minha participação em diversas experiências.

Quando realizei a profissionalização em serviço, no ano lectivo 1999/2000, tive oportunidade de estudar, pela primeira vez, temas que desconhecia, como Didáctica da Matemática, Tecnologias no Ensino da Matemática e Avaliação das Aprendizagens. A partir desta data, interessei-me por acções de formação no âmbito da Didáctica da Matemática que me têm permitido contactar com inúmeros temas e assuntos da maior relevância para a sala de aula.

Em 2006/2007 envolvi-me num projecto nacional que me proporcionou uma experiência única: ao longo de três anos, desempenhei o papel de professor acompanhante do Plano da Matemática. Durante este período tive a possibilidade de

frequentar formação específica para o desempenho destas funções que me permitiu, mais uma vez, reflectir sobre as práticas na sala de aula. O trabalho desenvolvido ao nível da resolução de problemas, do raciocínio matemático, da comunicação matemática e, ainda, das tecnologias no ensino da Matemática, despertou em mim o gosto e o desejo em aprofundar estes temas. A minha participação, enquanto professor acompanhante, revelou-se bastante rica, uma vez que me proporcionou uma diversidade de experiências que contribuíram para introduzir algumas mudanças na minha prática profissional.

Olhando para trás, reconheço que a resolução de problemas ou a comunicação matemática estavam pouco presentes nas minhas aulas. Progressivamente, fui criando mais oportunidades para os alunos resolverem problemas e se envolverem em processos de justificação e argumentação dos seus raciocínios, dando destaque à comunicação matemática, quer na vertente oral, quer escrita.

A necessidade e a vontade de continuar a aprofundar os meus conhecimentos na área da Didáctica da Matemática, conduziram-me ao Curso de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências – Ramo de Matemática. As disciplinas de Didáctica da Matemática I, Didáctica da Matemática II, Resolução de Problemas e Desafios Matemáticos, foram determinantes para o desenvolvimento do presente estudo.

Se por um lado, consigo identificar um conjunto de motivações pessoais, por outro, o surgimento do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira, 2007), traz novas motivações e novos desafios aos professores.

Kilpatrick (2009) refere que os professores deverão ter um “papel crítico na criação de um currículo vivo na Matemática” (p. 52), pelo que devem, em função do programa, criar o currículo que os alunos “experenciam”. Esta ideia vem ao encontro da minha perspectiva sobre o ensino, pois considero que a mudança tem de ser “local e começar pelo professor” (Kilpatrick, 2009, p. 52).

Aliando as várias motivações referidas, nasceu o meu interesse em desenvolver um trabalho de investigação em que tenha lugar de destaque uma das capacidades transversais do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico: a comunicação matemática.

Considero que a comunicação matemática na sala de aula deve ser valorizada e desenvolvida a partir da interacção entre todos os intervenientes. Como referem Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), “comunicar para aprender e aprender a comunicar são duas faces da mesma moeda” (p. 78).

Esta relação de dependência entre comunicação e aprendizagem é fulcral e motivadora para mim enquanto professor que procura o sucesso dos seus alunos, recorrendo, sempre que possível, à discussão e inovação, aceitando as críticas e os novos desafios que se colocam diariamente na sala de aula.

## 2. Pertinência do estudo

A escola tem actualmente tarefas acrescidas na formação dos alunos (Santos, 2005; Martinho, 2007; Ponte et al., 2007; Nunes, 2010). Na verdade, para além daquelas que são tradicionalmente da sua responsabilidade, é-lhe solicitada uma acção especificamente dirigida para a capacitação dos alunos em estratégias que lhes permitam reelaborar, transformar, contrastar e reconstruir criticamente os seus conhecimentos (Abrantes, 2001).

Num artigo publicado na Educação e Matemática, Nunes e Almiro, (2009) referem a necessidade de mudanças profundas no ensino e aprendizagem da Matemática. Estes autores afirmam que não bastam novos programas de Matemática; é também necessário que os vários agentes do sistema educativo, em articulação, se adaptem e se mostrem dispostos à mudança:

Num quadro de mudança económica, política, e organizacional acelerada, muda também a natureza e o conteúdo do currículo e o papel e as exigências de formação do professor.

A mudança educacional, no entanto, requer uma intervenção simultânea e articulada ao nível do desenvolvimento profissional dos professores, dos processos de gestão curricular e do desenvolvimento da cultura e organização escolares e dos processos de liderança. (Nunes e Almiro, 2009, p. 33)

É neste quadro de mudanças que Carreira (2005) refere que “trazer a resolução de problemas para o centro do ensino e da aprendizagem da Matemática tem sido e continua a ser uma das preocupações presentes na renovação e no desenvolvimento dos currículos de Matemática.” (p. 121). Para esta autora, a resolução de um problema deve possibilitar aos alunos momentos de interacção e diálogo. O professor deve acolher as respostas dos alunos, formular novas questões e, ainda, estimular a partilha das diversas estratégias apresentadas. É importante que os alunos dêem a conhecer os seus raciocínios aos colegas, desenvolvendo e aperfeiçoando a sua capacidade de comunicar.

Menezes (2000) refere-se à comunicação na aula de Matemática, atribuindo-lhe uma importância primordial. Com efeito, Veia (1996), Ponte e Veia (2007) bem como o NCTM (2007) salientam que a comunicação na sala de aula marca de forma decisiva a

natureza do processo de ensino e de aprendizagem, permitindo ou não, a promoção de novas aprendizagens.

A resolução de problemas constitui um dos elementos fundamentais da actividade matemática, conferindo-lhe uma natureza criativa e comunicativa, uma vez que permite ao aluno o uso da sua imaginação na construção ou delineação de estratégias formais ou informais de resolução (Tenreiro-Vieira e Vieira, 2001). Um trabalho desta natureza, em Matemática, permite desenvolver o pensamento e estabelecer redes de ideias associadas logicamente, que potencialmente possibilitará, ao aluno, apresentar argumentos em defesa das suas ideias.

Privilegiar a resolução de problemas, em sala de aula, torna-se num meio prioritário quando se pretende dar ênfase às várias formas de comunicar em Matemática.

Para Ponte et al. (2007) o desenvolvimento da capacidade de comunicação pelos alunos passa pelo seu envolvimento em actividades que envolvam a comunicação oral e escrita. Estes autores defendem que, para desenvolver a capacidade de comunicação, é necessário experimentar situações diversificadas, que promovam interacções em pequenos grupos e/ou exposições a grandes grupos, nomeadamente à turma ou à escola. Esta ideia vai ao encontro do que refere Martinho (2007) ao considerar “a comunicação como um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente” (p. 15).

Também Boavida et al. (2008) consideram que a capacidade de comunicar em Matemática é, essencialmente, uma actividade criativa e social, permitindo que a aprendizagem da Matemática se amplie, tendo como ponto de partida a interacção entre os vários intervenientes na aula — professor e alunos:

As interacções que ocorrem no desenrolar da actividade matemática despoletada por uma tarefa, criam inúmeras oportunidades de aprendizagem que dificilmente surgem numa aula de trabalho individualizado em que a interacção fica, frequentemente, confinada à apresentação, no quadro, de procedimentos usados para obter a solução. A partilha de estratégias de resolução em pequeno ou grande grupo permite, não só, que os alunos verbalizem o seu pensamento, tendo para isso que o organizar, como ainda que expliquem as suas resoluções. (...) Assim, a comunicação matemática pode facilitar uma

melhor compreensão e interiorização dos conceitos envolvidos, a incorporação de processos alternativos de resolução e a construção de conhecimentos de longa duração. (Boavida et al., 2008, p. 78)

Segundo as mesmas autoras, a comunicação na sala de aula permite a partilha de ideias matemáticas e a interacção de cada aluno com as ideias expostas pelos seus colegas e pelo professor. Pode permitir ao aluno beneficiar de outra estratégia de resolução de um problema, diferente da sua abordagem, gerando assim uma ampliação do seu conhecimento. Desta forma, espera-se que haja uma significativa e eficaz troca de experiências e que a comunicação possibilite a apropriação de novas técnicas e conceitos (NCTM, 2007; Boavida et al., 2008).

Além disso, a comunicação matemática, pode permitir a criação de um conjunto de oportunidades favoráveis a uma visão da Matemática que vai além da sua identificação com um conjunto de factos, regras e reprodução de procedimentos memorizados e mecanizados (Boavida et al., 2008).

Lampert e Cobb (2003) defendem que se a Matemática é uma actividade de construção de sentido e se aprender Matemática é ser capaz de fazer Matemática, então “as salas de aula não poderão ser lugares silenciosos em que quem aprende lida, em privado, com ideias matemáticas” (p. 237).

Torna-se, por isso, necessário que os alunos falem e escrevam expondo aos outros o seu raciocínio e se envolvam na explicação, justificação e discussão das ideias matemáticas. Todas estas actividades se prendem com a comunicação e uso da linguagem.

A comunicação matemática sobressai nas orientações curriculares de vários países entre os quais Portugal. Com efeito, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), considera-a uma “capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática”, um “objectivo curricular importante” e uma “importante orientação metodológica”, referindo que “envolve as vertentes orais e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática” (Ponte et al., 2007).

O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de

participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação oral tem lugar tanto em discussões na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita. (Ponte et al., 2007, p. 8)

Considero que as capacidades transversais presentes no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) — resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática —, ainda que caracterizadas de forma distinta na sua especificidade, cada uma delas pode alimentar e contribuir para o desenvolvimento mútuo das restantes, como é referido por Rodrigues (2009). Desta forma e, ainda que rotuladas individualmente, devem, na minha perspectiva, ser trabalhadas de forma articulada ao longo dos vários anos de escolaridade pois constituem um todo que culmina na forma como se comunica aquilo que se faz ou pensa.

Apesar do reconhecimento da importância da comunicação matemática, nem sempre há grandes oportunidades para os alunos explicarem processos de resolução, nem para apresentarem argumentos, que a seu ver, os fundamentam (Ferreira, 2005).

Com o chegar do próximo ano lectivo e a generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), novos desafios se colocam aos professores. Embora este documento seja, comumente, designado por “Novo Programa” os seus autores consideram-no um reajustamento do anterior. A questão do “novo” prende-se, entre outros aspectos, com o estatuto que é atribuído às capacidades transversais que nele são consideradas conteúdos de ensino diferentemente do que antes acontecia:

...o carácter novo justifica-se por vários argumentos. É novo nos temas – muitos tópicos estavam contemplados nos programas antigos mas muitos outros não estavam, ou estando, são agora abordados sob diferentes perspectivas. É novo no estatuto que confere às capacidades transversais – a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a

comunicação já eram referidas nos programas antigos, mas agora surgem valorizadas assumindo-se também como conteúdos. É novo no apelo que faz à experiência matemática dos alunos – nos programas antigos já se pressupunha um papel activo dos alunos mas agora as sugestões metodológicas defendem de forma persistente a aquisição dos conhecimentos com compreensão e decorrentes das sínteses do trabalho dos alunos (Canavarro, Tudella e Pires, 2009, p. 1).

É no terreno que se aprende e que se desenvolvem competências. Este estudo, no meu caso pessoal, constitui uma oportunidade de desenvolvimento profissional. Trata-se de fazer um percurso de aprendizagem que me parece ambicioso, com particular incidência nas capacidades transversais e, mais concretamente, na capacidade de comunicar matematicamente envolvendo os alunos em resolução de problemas.

### 3. Propósitos e âmbito do estudo

A necessidade de explorar a temática da comunicação matemática, nasceu da minha vontade em compreender a forma de como os alunos tratam a informação que lhes é apresentada e de que forma transmitem as suas ideias.

O interesse por este tema veio crescendo ao longo da minha participação em actividades matemáticas extracurriculares na Oficina da Matemática na escola onde leccionei durante vários anos. Neste espaço, desenvolvi, semanalmente, com os alunos várias actividades matemáticas como a resolução de problemas que me foram permitindo ensaiar novas estratégias. A oportunidade proporcionada pelo Mestrado em Didáctica e Inovação das Ciências (Ramo de Matemática) veio permitir aprofundar os meus conhecimentos neste domínio e, ainda, criar condições para investigar e aprofundar um tema que me desperta muito interesse.

Este estudo pretende contribuir para analisar a comunicação matemática dos alunos, recorrendo à resolução de problemas enquanto meio para a promover.

Concretamente, o seu principal objectivo é compreender como é que alunos de 9.º ano utilizam as representações matemáticas para comunicar matematicamente num contexto de resolução de problemas e de que forma o discurso desenvolvido entre os vários actores influencia a resolução das tarefas propostas.

Neste âmbito, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- A que representações matemáticas recorrem os alunos quando se envolvem em actividades de resolução de problemas?
- Qual o papel desempenhado pelas representações matemáticas nos processos de resolução de problemas e de comunicação dos seus raciocínios?
- De que modo as interacções discursivas ocorridas durante as actividades de resolução de problemas influenciam o processo de resolução?

## **4. Estrutura organizativa do trabalho**

O presente trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos de que este é o primeiro.

O segundo capítulo, focar-se-á em aspectos teóricos relevantes do domínio da comunicação matemática. Abordarei o significado e a importância da comunicação e da comunicação matemática, apresentando diferentes perspectivas sobre comunicação matemática e dando particular atenção ao discurso matemático. Serão, também, apresentados várias formas de representar o conhecimento matemático, destacando algumas das suas características e vantagens.

O terceiro capítulo será dedicado à metodologia de investigação. Depois de apresentar a justificação metodológica, descrevo a intervenção pedagógica que suportou este estudo, apresento os alunos participantes e dou a conhecer o contexto em que teve lugar. Foco-me, ainda, nos procedimentos de recolha e análise de dados e descrevo brevemente a forma de apresentação dos dados.

No quarto capítulo – Aprender a comunicar, resolvendo problemas – apresento uma análise microscópica de três tarefas propostas aos alunos no âmbito da intervenção pedagógica, bem como uma análise detalhada do seminário realizado pelos alunos no seu final. Além disso, procuro evidenciar aspectos significativos da actividade desenvolvida ao longo de toda a intervenção pedagógica tendo como ponto de partida a análise antes apresentada.

No quinto capítulo retomo as questões de investigação às quais procuro dar uma resposta, apresentando as principais conclusões que emergem desta investigação.



# Capítulo II

---

## Fundamentação Teórica

A “comunicação matemática” tem vindo a adquirir um papel cada vez mais preponderante em educação matemática (Martinho, 2007).

A generalização do novo Programa de Matemática do Ensino Básico que se aproxima vem dar à “comunicação matemática” uma importância incontornável na sala de aula. Com efeito, é uma das capacidades transversais referidas no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) que pode favorecer uma aprendizagem significativa da Matemática, uma vez que possibilita aos alunos explicitar as suas ideias e proporciona aos professores uma oportunidade para perceber como estão os alunos a pensar (Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel, 2008).

Neste capítulo abordo a importância e o significado da comunicação matemática, referindo perspectivas de diversos autores. Neste âmbito, foco, nomeadamente o conceito de discurso e porque a comunicação matemática, tanto na sua vertente oral como escrita, está intimamente associada à representação do conhecimento matemático, debruço-me também sobre este aspecto.



# 1. Comunicação e comunicação matemática

A palavra “comunicação” decerto que é utilizada desde há muito. No entanto, no sentido em que hoje a conhecemos, tem origem bastante recente. A verdade é que todos temos uma ideia sobre a natureza da comunicação, dada a naturalidade com que falamos, escrevemos e nos relacionamos com os outros. Para muitas pessoas comunicar consiste apenas em se expressarem através da fala ou da escrita, afirmando assim as suas ideias e sentimentos, por sua vez, para outras a comunicação alarga-se de tal forma que acreditam ser a solução para todos os problemas do homem e até da própria sociedade (Freixo, 2006, p. 23)

## 1.1. Significado e importância

O processo de comunicar está presente nas mais variadas tarefas que executamos na nossa vida, quer enquanto educadores quer enquanto cidadãos.

Imaginemo-nos perdidos num país longínquo e de que não temos conhecimento algum do seu idioma. Como seres comunicativos que somos, conseguiremos decerto encontrar o caminho para casa, usando gestos, esquemas, desenhos ou sons, sem ser necessário recorrer a um idioma que não se conhece, mobilizando outras vertentes da comunicação.

O termo comunicação pode ser encarado sob diferentes perspectivas. Frequentemente é usado, de forma indiscriminada, associado à linguagem e à fala (Franco, Reis e Gil, 2003), pelo que importa debruçarmo-nos sobre o significado que lhe é atribuído.

Segundo Nunes (2001) comunicar é um processo interactivo, que se desenvolve em contexto social, requerendo um emissor (fonte de informação) que codifica e emite uma mensagem e um receptor que a descodifica ou compreende. Este processo recíproco, obriga a partilha, compreensão e respeito mútuo.

Também Antão (1997) se refere a comunicação como sendo a forma de um emissor fazer chegar aos receptores um conjunto de conhecimentos, quer simples quer complexo, usando um determinado código linguístico.

Menezes, Santos, Silva e Trindade (2003), para analisar o significado de “comunicação” fazem a divisão da palavra em dois vocábulos: “comum” e “comunidade”. Desta forma, comunicar significa “pôr em comum” ou “estabelecer comunidade”.

A associação entre o termo comunicação e uma acção em comum, parece ser partilhada por Bowers (1999) e Freixo (2006). Bowers refere que a comunicação é a forma pela qual o homem pode partilhar objectivos comuns decorrentes de viver em comunidade. Por seu turno, Freixo (2006) defende que a comunicação consiste numa “actividade realizada em conjunto” em consequência da análise do vocábulo latino *communicatio*. Com efeito, este vocábulo pode ser decomposto em “co + munis + tio”, ou seja, o prefixo “co” refere-se a “reunião”, “munis” refere-se a “estar encarregado de” e “tio” significa “actividade”. Assim, a comunicação pode ser entendida como uma “acção em comum”, associando-a à decomposição do termo “comum+acção”, desde que a acção em comum se refira a um mesmo objecto de consciência e não a objectos materiais.

Para Guerreiro (2008) ambos os intervenientes no processo de comunicação devem ser activos. Comunicar, segundo este autor, não é somente a transmissão de mensagens, pois para que seja possível existir partilha e negociação de significados deverão ser consideradas as características individuais de cada um dos sujeitos envolvidos

Esta ideia de partilha e negociação de significados também é apresentada por Belchior (2003) que salienta que a comunicação é um processo social onde os intervenientes interagem e se influenciam reciprocamente na construção de significados. A autora sublinha, ainda, o facto de a comunicação estar associada a um processo de interacções sociais, permitindo aos vários intervenientes exprimir e afirmar a sua singularidade.

Entre os autores que põem a tónica na comunicação enquanto partilha de significados entre vários interlocutores, está ainda, Vieira (2000) que refere a comunicação interpessoal. A este propósito a autora salienta:

Não é só através das palavras que comunicamos. As posições corporais, os gestos, a expressão facial, o olhar, o riso, a respiração, os silêncios são alguns dos sinais emitidos que enriquecem a comunicação interpessoal. Tanto o feedback verbal como o não verbal são elementos

fundamentais em comunicação, que reforçam a ligação entre os diferentes interlocutores (Vieira, 2000, pp.17-18).

Antão (1997) refere-se à comunicação interpessoal como sendo aquela em que “os interlocutores trocam mensagens em todos os sentidos e situam-se num mesmo plano temporal, espacial e psicológico” (p. 10). Freixo (2006), por seu turno, destaca que a comunicação interpessoal assenta em cinco princípios fundamentais:

- Existência de duas ou mais pessoas em proximidade física que reconhecem simultaneamente a presença umas das outras;
- O comportamento comunicativo de um indivíduo é consequência directa de postura e personalidade da outra ou outras pessoas;
- Existe envolvimento e troca de mensagens;
- As mensagens são codificadas de várias formas verbais e não verbais;
- Verifica-se a ausência de estrutura, sendo a comunicação marcada pela informalidade e pela flexibilidade.

Para Freixo (2006, referindo Watzlawik), a comunicação interpessoal é caracterizada por diferentes “axiomas” (p. 160) de que destaco:

- “Não se pode não comunicar” (Freixo, 2006, p. 161). A dupla negação usada na formulação deste axioma, permite sublinhar a impossibilidade de não existir comunicação, isto é, segundo Freixo, até em silêncio estamos a comunicar. O silêncio, as palavras e as observações têm sempre um valor de mensagem. Quantas vezes um professor não se deparou já com situações em que coloca uma questão ao grupo de alunos com os quais está a trabalhar, e a resposta é um profundo silêncio? Este silêncio dá, decerto, informações importantes ao professor.
- “A natureza de uma relação está na contingência da pontuação das sequências comunicativas entre os intervenientes” (Freixo, 2006, p. 162). Este axioma permite destacar que no processo de comunicação as relações que se estabelecem entre os intervenientes são vitais para o desenvolvimento da mensagem.

- “Os seres humanos comunicam digital e analogicamente” (Freixo, 2006, p. 163). Este axioma permite realçar que os seres humanos podem referir-se a um determinado objecto ou coisa de duas formas distintas: usando conhecimentos de sintaxe e semântica de uma determinada língua (comunicação digital) ou recorrendo, nomeadamente a esquemas, desenhos, imagens, gestos, expressões corporais e inflexões de voz (comunicação analógica). Imaginemos, por exemplo, que é pedido a um aluno que explique o que é um quadrado. O aluno pode optar por escrever a frase “O quadrado é um polígono que tem quatro lados iguais e quatro ângulos iguais” (representação digital) ou pode fazer o desenho de um quadrado e usar símbolos para assinalar a igualdade dos ângulos e a igualdade dos lados (representação analógica).
- “Todas as permutas comunicacionais são simétricas ou complementares”(Freixo, 2006, pp. 164-165). As noções de simetria e de complementaridade, referem-se ao facto de podermos estabelecer relações comunicativas num mesmo plano (comunicação simétrica) ou em planos em que um dos participantes ocupa uma posição superior e outro uma posição inferior (comunicação complementar).

No centro do processo de ensino/aprendizagem encontram-se os alunos e os professores, peças fundamentais do processo de comunicação interpessoal. Ferreira (2007, citando Méndez) refere que a comunicação entre aluno e professor “estabelece-se pelo diálogo, entendido, como uma forma de conhecimento através do qual cresce e se expressa o pensamento crítico, processo dinâmico e social que exige juízo e deliberação entre os sujeitos, entre quem ensina e quem aprende” (p. 57). Este autor defende que é necessário que o professor crie situações de confronto e de troca de ideias com os alunos, que os levem a explicar, a justificar, e a argumentar com vista à tomada de decisões em conjunto.

Neste processo é fundamental a qualidade da relação estabelecida: “A qualidade da relação interpessoal entre o professor e alunos tem, de facto, um impacto em muitas facetas da interacção na sala de aula e em relação ao grau de aprendizagem real do aluno” (Sprinthal e Sprinthal, 2003, p. 324).

Em síntese, apresentei até aqui significados atribuídos ao conceito de comunicação por vários autores. Neste estudo, e seguindo Antão (1997), Freixo (2006), Nunes (2001) e Menezes et al. (2003), considero que comunicação significa pôr em

comum, o que requer a partilha de ideias, sendo, assim, um processo social onde os intervenientes devem ser activos. Considero, também, que a comunicação vai muito mais para além da troca de mensagens associadas à escrita ou à oralidade. Com efeito, refiro-me às demais posições corporais que adoptamos aquando da troca de mensagens.

Foco-me, em seguida, na importância que, tanto a nível nacional como internacional, a comunicação matemática tem vindo a assumir quando se equaciona o ensino e aprendizagem da Matemática.

Em Portugal, há cerca de vinte anos, a APM (1988) sublinhava que o ensino da Matemática deveria proporcionar aos alunos de todos os níveis de ensino experiências de aprendizagem ricas e diversificadas que contribuíssem, nomeadamente para incentivar “a curiosidade, a atitude crítica, o gosto de organizar raciocínios e de comunicar” (p. 39). Em particular, destacava que:

a discussão – em pequeno grupo ou de toda a classe – e as demonstrações servem para habituar os alunos a construir argumentações convincentes e válidas e para aguçar o seu espírito crítico em relação às argumentações alheias, e nunca para lhes criar uma ideia da Matemática como a ciência do certo e do errado absolutos, perspectiva contraditória com o próprio desenvolvimento da Matemática contemporânea. (APM, 1988, p. 62)

Mais recentemente, o NCTM (2007) refere que a comunicação é uma parte essencial da Matemática e da educação matemática. As recomendações desta organização são indiciadoras de que a comunicação matemática, é uma força vital que contribui para uma aprendizagem significativa da Matemática. Com efeito, considera que é uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão Matemática. Além disso, através da comunicação as ideias tornam-se objectos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correcção. O processo de comunicação contribui, ainda, para a construção de significados, para a consolidação de ideias e, ainda para a sua divulgação.

Para Moreira (2001), a importância da comunicação matemática surge ligada à necessidade de se associar a Matemática escolar aos demais níveis de realidade dos alunos, através da resolução de problemas, da compreensão de formas de matematizar e do uso de tecnologias.

A relevância da partilha, análise, reflexão e discussão de ideias é, também, destacada por Boavida et al., (2008). As autoras referem que “uma comunicação na sala de aula baseada na partilha de ideias matemáticas, permite a interacção de cada aluno com as ideias expostas para se poder apropriar delas e aprofundar as suas” (p. 61). Assim “ a comunicação matemática permite aprender, mas também contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento” (idem) pelo que constitui uma “parte integrante da essência do processo de uma aprendizagem significativa” (idem).

Como anteriormente referi, a comunicação está associada a um processo de interacção social que, de acordo com Yackel, Cobb, Wood, Wheatley e Merkel, (1991), “desempenha um papel crucial quando as crianças aprendem Matemática” (p. 17). Estes autores, no artigo “A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças”, destacam, em particular, a importância desta interacção, bem como o papel do professor.

Tanto a interacção professor – aluno como a que se processa entre os alunos influenciam o que é aprendido e como é aprendido. O professor toma um papel crucial ao conduzir o desenvolvimento do que Silver (1985) chamou de uma atmosfera de resolução de problemas, um ambiente no qual as crianças se sentem livres para conversar acerca das suas matemáticas (...) notamos que as crianças aprendem muito mais do que Matemática neste tipo – ou em qualquer tipo - de situações de sala de aula. Desenvolvem convicções sobre a Matemática e sobre o seu papel e o do professor (pp. 17 – 21).

Embora se reconheça a importância da comunicação matemática para a aprendizagem, várias são as publicações e estudos que indicam que, em Portugal, não lhe tem sido dada a devida atenção. Em 1988, a APM chamava a atenção para que:

o ensino da Matemática não está orientado para desenvolver e avaliar os processos e estratégias de raciocínio, nem as capacidades necessárias para enfrentar e resolver problemas novos, designadamente os hábitos de consultar, cooperar, comunicar, discutir, investigar ou produzir. Ao mesmo tempo, as actividades escolares são desprovidas de qualquer contexto e não admitem margem para dúvidas, apresentando a

Matemática como uma disciplina do tipo “certo ou errado” que não se questiona e em que o aluno precisa de saber muito bem “o que é para fazer” e de ter aprendido previamente “como é que se faz” (APM, 1988, p. 9) .

Passados mais de 20 anos, no relatório internacional do PISA 2000 pode ler-se que os alunos portugueses apresentam um défice estrutural no que se refere à resolução de tarefas que envolvam raciocínios que passem por representações simbólicas, revelando igualmente uma fraca capacidade de argumentação. No relatório elaborado pelo GAVE, relativo aos exames nacionais do 9.º ano de escolaridade, realizados no ano lectivo de 2004/2005, é possível constatar que cerca de 50% dos alunos sujeitos a exame apresentam um défice na capacidade de comunicação matemática e limitações no raciocínio matemático e no poder de argumentação. Esta reduzida capacidade de comunicar também é acompanhada por fracos desempenhos na resolução de problemas.

Num outro estudo, também da responsabilidade do GAVE, relativo aos testes intermédios de Matemática do 9.º ano de escolaridade realizados no ano lectivo 2008/2009, é de destacar que entre as questões “cujas respostas revelam pior acerto” estão as “que requerem uma leitura, uma interpretação e uma tomada de decisão em face dos dados interpretados (Itens com enunciados mais extensos), os que exigem a comunicação escrita de conceitos e/ou raciocínios” (p. 5).

Em síntese, diversos autores atribuem à comunicação matemática um papel fundamental, considerando que esta contribui para uma aprendizagem significativa. Há, no entanto, indícios de que existem muitos alunos cuja capacidade de comunicar matematicamente está longe de ser a desejável. Partindo do pressuposto que a interacção social é necessária e fundamental, quando se pretende desenvolver nos alunos esta capacidade, criar oportunidades, em sala de aula, para que os alunos, discutam, reflectam, interajam, critiquem e construam o seu próprio conhecimento é uma prioridade. Desta forma torna-se importante equacionar diferentes circunstâncias em que pode ocorrer a comunicação matemática.

## 1.2. Comunicação matemática: diferentes perspectivas

O processo de comunicar, conforme referido anteriormente, está presente nas mais variadas tarefas que executamos na nossa vida, podendo assumir diversos contornos. Tal como nas relações quotidianas, também em Matemática, podemos comunicar de muitas formas. As relações que se estabelecem na sala de aula de Matemática, que estão repletas de diversificadas interações, poderão ou não, permitir a partilha de ideias e a clarificação de conceitos.

Vários dos autores que se debruçaram sobre a comunicação matemática sublinham a importância das salas de aulas não serem locais silenciosos (Lampert e Cobb, 2003), ou seja, é fundamental que exista partilha, negociação e justificação de significados. O que se pretende é, efectivamente, dar voz aos alunos.

Pimm (1987) refere-se à comunicação como sendo uma exteriorização do pensamento através de palavras (orais ou escritas) que podem providenciar maior acesso ao próprio pensamento. Esta exteriorização tem um papel crucial no processo de reflexão, sem o qual a aprendizagem raramente ocorre.

Boavida et al. (2008) referem que “valorizando a comunicação matemática, através da criação de momentos ricos de interação em torno de ideias significativas, surgem oportunidades favoráveis à apropriação de outras dimensões da Matemática” (p. 61), que não emergem se esta for apresentada como um conjunto de “números, factos, regras e reprodução de procedimentos memorizados” (p. 61). Estas autoras sublinham, ainda, a importância da partilha de raciocínios para quem os enuncia. “Comunicar uma ideia ou um raciocínio a outro, de forma clara, exige a organização e clarificação do nosso próprio pensamento”, uma vez que, “as nossas ideias tornam-se mais claras para nós próprios quando as articulamos oralmente ou por escrito” (p. 62).

Esta ideia também é apresentada por Martinho e Ponte (2005), para quem os alunos ao “falarem e ouvirem os colegas, clarificam os significados das palavras bem como dos pensamentos e ideias” (p. 3). Os autores salientam que as interações entre alunos e a negociação de significados são questões centrais quando nos referimos à comunicação matemática, considerando que a comunicação “constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente” (p. 2). Se por um lado, as “interações entre alunos, provocam discussões estimulando-os a novas descobertas e permitindo que construam um conhecimento mais sólido” (Martinho e Ponte, 2005, p. 3), por outro, “os alunos sentem-se mais

confortáveis a falar em pequeno grupo do que em grande grupo (...) onde se vão progressivamente apropriando da linguagem matemática” (p. 3).

Uma outra autora, Santos (2005), colocando o seu olhar na comunicação escrita, refere que esta forma de comunicar “funciona como um catalisador de reflexão” (p. 179) , pois permite aos alunos a articulação de ideias, a explicação de procedimentos e a análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos.

Llinares (2008) argumenta que o processo de comunicação matemática consiste na capacidade de explicar e justificar processos e resultados, assim como de se estabelecerem relações entre as noções e os processos matemáticos. Refere, também, que a capacidade de comunicar, explicar e argumentar matematicamente significa que os alunos são capazes de justificar o porquê de determinadas opções em detrimento de outras. Além disso, destaca que o desenvolvimento da capacidade de comunicar em Matemática:

Apoia e ajuda a desenvolver a compreensão conceptual, uma vez que se estabelecem relações entre conceitos e processos.

Desenvolve habilidades processuais por acontecer num contexto que favorece o esclarecimento e a justificação dos procedimentos empregues. (Llinares, 2008, p. 18)

Desta forma, os alunos vão aperfeiçoando os seus próprios processos de resolução de problemas, não se limitando a imitar um dado procedimento. A possibilidade de partilhar o trabalho realizado, cria oportunidades de mostrar o processo seguido, implicando explicação e justificação. Assim, a comunicação matemática é necessária para desenvolver a competência matemática (Llinares, 2008).

A comunicação matemática que ocorre na sala de aula está intimamente ligada às perspectivas e opções pedagógicas do professor. Se este optar por preparar e conduzir aulas focadas na exploração e resolução de problemas, dando aos alunos a oportunidade de partilhar, discutir, apresentar, reformular e experimentar processos, surgem cenários em que a comunicação é muito diferente da que ocorre em aulas onde o ensino está directamente dirigido para a repetição de procedimentos. É neste sentido que Godino e Llinares (2000) referem que o estudo da forma como os professores e os alunos partilham significados matemáticos e da forma como estes compreendem as intervenções do professor, permite desenvolver perspectivas teóricas úteis para interpretar e analisar a complexidade das aulas de Matemática.

Lampert e Cobb (2003), apoiando-se em Sfard, referem duas metáforas diferentes sobre a aprendizagem e analisam as suas repercussões no modo como se equacionam as questões da linguagem e da comunicação na sala de aula: a) a metáfora da aquisição e b) a metáfora da participação.

A metáfora da aquisição remete para um conjunto de abordagens que caracterizam a aprendizagem do conhecimento matemático, fundamentalmente, como a “aquisição de conhecimento” (p. 237), quer esta aquisição seja o resultado de uma construção activa ou de um escutar passivo, por parte dos alunos. Diferentemente, nas abordagens associadas à metáfora da participação, a aprendizagem é considerada um processo de participação progressiva em práticas matemáticas estabelecidas. Esta metáfora remete para o estudo da linguagem em acção, uma vez que o foco é o estudo do discurso e a emergência de significados partilhados, são os “processos de comunicação entre os alunos e com os alunos” (p. 239).

Ambas as metáforas são consideradas por Lampert e Cobb (2003) como diferentes mas não mutuamente exclusivas. No entanto, destacam que a metáfora da participação é mais profícua para lidar com questões associadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, quando se defende que aprender Matemática é ser capaz de fazer Matemática.

Uma outra autora, Sierspiska (1998), apresenta três perspectivas teóricas distintas sobre a aprendizagem e suas influências na forma de conceptualizar a comunicação na sala de aula:

- A perspectiva construtivista;
- A perspectiva sociocultural (ou sociohistórica);
- A perspectiva interaccionista.

Para cada uma destas perspectivas, a autora propõe uma metáfora associada à comunicação que ocorre na sala de aula.

Numa “perspectiva construtivista”, a metáfora é: “Os alunos falam, os professores ouvem” (p. 31). Uma aula orientada por esta perspectiva segue um padrão pedagógico centrado no aluno em que o professor assume um papel de ouvinte e interrogador, visando compreender/interpretar o pensamento do aluno. A linguagem serve, neste caso, para expressar o pensamento individual em função das etapas de desenvolvimento de cada um dos alunos. Assim, Sierpiska (1998) refere que na

perspectiva construtivista “a comunicação é um problema, no sentido em que é difícil explicar como é que ela é possível” (p. 31). Nas suas palavras, “a noção de comunicação é assim um problema para o construtivismo porque é associada à transmissão do pensamento” (p. 33).

Relativamente à “perspectiva sociocultural”, a autora propõe a metáfora: “Os professores falam, os alunos ouvem” (p. 42). Esta perspectiva é inspirada no pensamento Vygotskiano, para quem “a comunicação é um facto cultural” (Sierpiska, 1988, p. 42). “A linguagem é um artefacto cultural, um instrumento especificamente humano de comunicação” (p. 42).

Para a “perspectiva interaccionista” a autora propõe a metáfora: “Professores e alunos em diálogo” (p. 50). Aqui a linguagem é entendida, não como um sistema de signos, mas como uma prática social – um discurso. Assim, “para sobreviver na escola, a criança deve observar as diferenças entre os discursos e envidar todos os seus esforços para se tornar um praticante do novo discurso” (p. 54).

A função da comunicação matemática à luz das três correntes de aprendizagem apresentadas é certamente diferente. Na perspectiva construtivista é dada primazia à construção do conhecimento individual do aluno e na perspectiva sociocultural coloca-se o foco no processo de enculturação (Menezes, 2005). Na perspectiva interaccionista a linguagem é uma ferramenta de comunicação, não no sentido de comunicar pensamentos, nem no sentido da enculturação mas sim de negociação e partilha de significados (Menezes, 2005).

Godino e Llinares (2000) referem a perspectiva interaccionista como uma interacção permanente entre os sujeitos de uma determinada cultura. Nesta perspectiva, a aprendizagem desenvolve-se socialmente, na medida em que os intervenientes participam na negociação de normas da sala de aula, sendo as dimensões culturais e sociais consideradas partes integrantes da actividade matemática que assentam nas premissas:

- O professor e os alunos constituem interactivamente a cultura da aula;
- As convenções, tanto no que se refere aos conteúdos da disciplina, como no que se refere às regularidades sociais, emergem interactivamente;
- O processo de comunicação apoia-se na negociação e os significados são partilhados. (p.71)

Olhar para o ambiente comunicativo da aula de Matemática onde alunos e professores interagem, levam a analisar modos diferentes de comunicação. Brendefur e Frykholm (2000), organizam as diversas perspectivas sobre comunicação matemática em quatro categorias amplas designadas por:

- Comunicação unidireccional;
- Comunicação contributiva;
- Comunicação reflexiva;
- Comunicação instrutiva;

Em contextos de “comunicação unidireccional”, o professor tende a dominar a palavra, dando pouca oportunidade aos alunos para comunicar as suas estratégias, ideias e pensamentos. As questões que surgem são, essencialmente, de natureza fechada.

A “comunicação contributiva” prevê a participação dos alunos nos diálogos que se estabelecem na sala de aula, embora a conversação seja limitada no sentido em que não existe, frequentemente, lugar para pensamentos profundos. Neste contexto, ocorre alguma partilha de ideias, soluções e estratégias, embora sem grande exigência cognitiva. As conversações são tipicamente de natureza correctiva.

A “comunicação reflexiva” é caracterizada pela existência de discussão entre professores e alunos em torno da actividade da sala de aula. Nesta situação é frequente a análise dos “porquês” que surgem ao longo da realização das tarefas, servindo esta análise de “trampolim” para investigações e explorações mais alargadas. Os diálogos que se estabelecem em torno de ideias matemáticas são objecto de reflexão e favorecem a construção de conhecimento.

A “comunicação instrutiva” é aquela “em que o curso da experiência da sala de aula é alterado como resultado da conversação” (p. 148). O professor procura encorajar os alunos a reflectir, de modo a promover uma melhor compreensão da Matemática, bem como uma mudança nas suas concepções. A apresentação de situações e o encorajamento à reflexão são os principais aspectos do papel do professor.

Brendefur e Frykholm (2000), consideram que os quatro níveis de comunicação são inclusivos, pelo facto de cada um assumir características do seu antecessor. Por exemplo, se a comunicação for predominantemente reflexiva, é natural presumir que tenha existido também alguma comunicação contributiva e unidireccional. Com efeito,

numa sala de aula onde os alunos não têm oportunidade de partilhar ideias com os colegas e com o professor, não é possível a existência de uma comunicação reflexiva ou instrutiva, onde se privilegia a negociação e construção de significados.

Uma análise das categorias apresentadas por Brendefur e Frykholm (2000) mostra que as duas primeiras apresentam características bem distintas das duas últimas. Enquanto que nas primeiras, unidireccional e contributiva, o foco é a transmissão de informação, na contributiva e instrutiva há uma mudança em que o cerne é a geração e a negociação de significados.

Em suma, comunicar matematicamente é muito mais do que transmitir informações, como é destacado pelos diferentes autores referidos. Em particular, é essencial promover, em sala de aula, momentos de discussão, onde todos (professor e alunos) participam e interagem em torno de ideias matemáticas poderosas de modo a possibilitar aos alunos a realização de aprendizagens significativas.

Os professores, ao incentivarem a partilha e reflexão de ideias, criam condições favoráveis para que os alunos atribuam sentido à Matemática e não a vejam como um conjunto de procedimentos, regras e processos que devem ser mecanizados e memorizados para posterior repetição.

## **2. A comunicação matemática na sala de aula**

A discussão em pequeno grupo ou de toda a classe e as demonstrações servem para habituar os alunos a construir argumentos convincentes e válidos para aguçar o seu espírito crítico em relação às argumentações alheias, e nunca para lhes criar uma ideia da Matemática como a ciência do certo e do errado absolutos, perspectiva contraditória com o próprio desenvolvimento da Matemática contemporânea. (APM, 1988, p. 47)

### **2.1. O discurso matemático**

Vários autores (Menezes, 1995; NCTM, 2007; Ferreira, 2005; Almiro, 2008; Llinares, 2008) destacam a ideia de que os diálogos estabelecidos pelos alunos em torno de situações por si desenvolvidas são potenciadoras de conhecimento e levam-nos a testar e a reflectir sobre as suas ideias, tendo por base o conhecimento partilhado.

O conhecimento partilhado está intimamente associado à comunicação e quando se fala em comunicação matemática, surge, de forma indissociável, o conceito de discurso (Moreira, 2001).

#### **2.1.1. Significado e importância**

De um modo geral, o termo discurso refere-se ao modo como os significados são atribuídos e trocados pelos vários interlocutores em contextos reais (Menezes, 1997), podendo perspectivar-se de um modo mais estático ou mais dinâmico:

o termo discurso pode assumir uma acepção mais estática, e ser entendido como o produto das múltiplas realizações de um conjunto de falantes, num determinado contexto, ou, pelo contrário, pode encerrar uma atitude mais dinâmica, e reportar-se ao próprio processo de produção de sentido, recorrendo a um determinado conjunto de signos linguísticos, supostamente comuns aos interlocutores, neste caso professor e alunos. (Menezes, 1997, p. 5)

Para Loureiro (2000), Menezes (1997), Pedro (1992) e Stubbs (1987), o discurso corresponde a um acontecimento estrutural, manifestado em comportamento linguístico e não linguístico.

Stubbs (1987) defende que o sentido linguístico (ler, explicar, discutir, contar, interrogar, responder, ouvir, repetir, parafrasear e resumir) surge associado a um conjunto coerente de frases que cada um dos interlocutores emite num processo comunicativo. Por outro lado, o discurso não linguístico surge relacionado com as emoções e expressões adjacentes ao discurso linguístico.

Focando-se no discurso na aula de Matemática, o NCTM (1994) salienta que se refere:

às formas de representar, pensar, falar, concordar ou discordar que professores e alunos usam para se envolver em actividades. O discurso encerra valores acerca do conhecimento e da autoridade. A sua natureza reflecte-se no que faz com que uma resposta esteja certa e no que conta para legitimar a actividade, a argumentação e o pensamento matemático. Os professores, através da forma como conduzem o discurso, transmitem mensagens acerca de qual o conhecimento e as formas de pensar e conhecer que são valorizadas, de quem é considerado capaz de contribuir, de quem tem estatuto num grupo. (p. 22).

Assim o “discurso engloba tanto a forma como as ideias são trocadas como aquilo que as ideias veiculam” (NCTM, 1994, p. 36). Deste modo, “o discurso que se trava na sala de aula (...) é fundamental para aquilo que os alunos aprendem sobre Matemática” (idem).

Moreira (2001) refere-se à necessidade de se criar uma prática discursiva de sala de aula que viabilize e favoreça a comunicação matemática e, ao mesmo tempo, o fazer Matemática:

Actualmente, pretende-se que a Matemática se insira em níveis de realidade que possam ser relacionados com a dos alunos, nomeadamente, através da resolução de problemas, da compreensão das formas de matematizar e do uso de tecnologias. É neste quadro

educativo que surge a importância do papel da comunicação em Matemática e é recomendada a sua observação profissional no sentido de se criar uma prática discursiva na sala de aula que viabilize a comunicação e a produção de textos matemáticos simultaneamente ao fazer da própria Matemática (p. 27).

Assim sendo, é impossível olhar para uma sala de aula, onde interagem professor e alunos, sem que se observem movimentos discursivos. Como refere Stubbs (1987), não é possível um professor entrar numa sala de aula e não praticar actos comunicativos específicos, como preleccionar, explicar, questionar ou encorajar os alunos a falar. Tal significa que em qualquer sala de aula há diversos movimentos discursivos sendo os papéis do professor e dos alunos continuamente construídos no decurso da interacção social (Yackel et al., 1991).

Esta ideia de fenómeno social associada à comunicação e ao discurso, também é defendida por Martinho (2007), para quem o discurso engloba duas vertentes, a oral e a escrita, que têm merecido particular atenção por parte dos investigadores em educação matemática.

Loureiro (2000) refere que “um dos principais objectivos do ensino consiste no desenvolvimento partilhado do conhecimento” (p. 131). O autor, considera que a efectividade do processo educacional é reflectida pelo grau em que o conhecimento educacional é partilhado, através do discurso na aula. Apoiando-se em Edwards e Mercer, salienta que as dificuldades decorrentes do processo de ensino e aprendizagem dependem, em parte, do modo como se gera o conhecimento comum através do discurso do docente e não de dificuldades cognitivas dos alunos.

Quando olhamos para uma aula de Matemática o interesse pelo discurso gerador de aprendizagens, pode combinar três motivações que se relacionam entre si (Menezes, 1997). A primeira prende-se com o facto de as acções de professores e alunos estarem repletas de um discurso fortemente oral. A segunda, advém do reconhecimento, pelos professores, de que os seus movimentos discursivos, podem condicionar a aprendizagem dos alunos. A terceira motivação, tem a ver com o facto da análise do discurso oferecer uma infinidade de informações sobre o processo de ensino e aprendizagem. Ou seja, a análise do discurso vai permitir responder a questões sobre como se desenvolve e processa o conhecimento em sala de aula.

Em síntese, o termo discurso envolve actividades como ler, escrever, resumir, explicar, justificar e argumentar e refere-se à forma de como os significados são negociados pelos vários interlocutores em contextos reais. O discurso que ocorre na aula de Matemática é essencial para que se verifiquem aprendizagens compartilhadas e significativas.

Face à importância atribuída ao discurso na aula de Matemática, apresento, em seguida, as suas características e dinâmica.

### **2.1.2. Características e dinâmica**

Embora o conceito de “discurso” tenha merecido interesse por parte de diversos investigadores, Menezes (1997) salienta que o termo “discurso causa ainda alguma estranheza no âmbito da Educação Matemática” (p. 5) Ao analisar este conceito Martinho (2007) debruça-se sobre quatro aspectos:

- (i) a produção do discurso na sala de aula;
- (ii) o papel do professor;
- (iii) o papel das perguntas do professor;
- (iv) a apropriação da linguagem específica.

*Produção do discurso.* Martinho (2007), apoiando-se nas ideias de Green, salienta que a “produção do discurso” na sala de aula, tal como em qualquer outro processo comunicativo, depende do que os interlocutores levam para a aula. Ou seja, no que diz respeito aos alunos, a produção de um discurso sólido e rico está dependente de todos os conhecimentos prévios, competências, valores, normas, hábitos e expectativas, que funcionam como uma espécie de pré-requisito, fundamental, para a construção do seu discurso.

Ao referir-se ao papel dos alunos na produção de um discurso sólido o NCTM (1994), defende que devem saber ouvir, responder e colocar perguntas ao professor e aos próprios colegas; devem usar uma diversidade de instrumentos para raciocinar, estabelecer conexões e resolver problemas; devem, além disso, colocar questões por sua iniciativa; é, ainda, importante que se convençam a si próprios e aos outros da validade de determinadas representações, resoluções, conjecturas e respostas.

*Papel do professor no discurso.* O professor tem um papel preponderante na estruturação do discurso que ocorre na sala de aula (Martinho, 2007). As interações

discursivas que se podem observar são, na sua generalidade, da responsabilidade do professor, reflectindo-se o predomínio do professor nomeadamente, “no controlo sobre a “organização”, “andamento” e “ritmo”” (idem, p. 19). Esta ideia também é corroborada por Pimm (1987), que afirma que “o domínio e controle da linguagem que é mantido pelo professor é evidente” (p. 87).

O NCTM (1994) caracteriza o papel do professor no discurso da aula referindo que deve colocar questões e propor tarefas que “facilitem, promovam e desafiem o pensamento dos alunos” (p. 37). Deve, também, ouvir atentamente as ideias dos alunos e solicitar-lhes que as clarifiquem e justifiquem, quer oralmente, quer por escrito. Tem, ainda, que decidir que notações matemáticas e linguagem própria desta disciplina devem ser introduzidas, como e quando, apoiando-se nas ideias dos alunos. Além disso, deve ter a capacidade de gerir a apresentação de informação, não deixando os alunos lutar com dificuldades, até à exaustão, e encorajar e incentivar a participação de todos.

*O papel das perguntas.* Martinho (2007), considera que este aspecto constitui um campo particular do papel do professor no discurso. A autora, referindo uma investigação de Ainley (1988) realizada em torno do discurso do professor, sublinha que este “fala a maior parte do tempo da aula e fá-lo sobretudo através de questões” (p. 20).

As perguntas, formuladas pelos professores, estimulam a participação, permitindo, por um lado, ter os alunos mais concentrados e, por outro lado, orientar o decurso de uma aula no sentido pretendido. Esta ideia vai ao encontro do que é salientado por Pimm (1987) para quem as perguntas, “permitem manter o controle do discurso (...) constituem também um procedimento para romper o monólogo do professor e funcionam como meio de prova de que o aluno que é interrogado percebeu o que foi explicado” (p. 89).

As perguntas, na sala de aula, podem ser de diversos tipos e servir vários propósitos. Matos e Serrazina (1996), baseando-se em Love e Mason, distinguem três modos de questionar:

- Fazer “perguntas de focalização”. Estas perguntas pretendem centrar a atenção do aluno num aspecto específico. Suponha-se o seguinte exemplo: “um aluno obteve a sequência, 1, 4, 9... mas não identifica o padrão dos números quadrados, que para o professor salta à vista” (Matos e Serrazina, 1996, p. 180). A questão: Consegues ver um padrão?, colocada pelo professor, tem como principal objectivo

chamar a atenção do aluno para um determinado detalhe ou particularidade, focalizando a atenção do aluno.

- Fazer “perguntas de confirmação”. Pretende-se, essencialmente, testar os conhecimentos dos alunos. Nestas perguntas o professor sabe a resposta mas tenta que os alunos verifiquem as respostas por si próprios (Matos e Serrazina, 1996, p. 180). Por exemplo: Quantos ângulos agudos tem um triângulo rectângulo?
- Fazer “perguntas de inquirição”. Neste caso o professor pretende obter informação dos alunos, para questões cuja resposta ele também desconhece. Matos e Serrazina (1996) referem que há autores que consideram que estas são as verdadeiras perguntas. Por exemplo: O que queres dizer com essa tua afirmação?

O que distingue as três formas de questionar, de acordo com Matos e Serrazina (1996), “são as reacções que se seguem, as quais indicam tanto ao professor como ao aluno que espécie de interacção é pretendida” (p. 183).

Stubbs (1987), citando Barnes, apresenta uma outra caracterização para o tipo de questões na sala de aula — perguntas concretas, perguntas racionais, perguntas sociais e pseudo-perguntas.

- Perguntas concretas: o professor procura saber o nome de alguma coisa, sendo exigidos pensamentos pouco profundos. Surgem associadas ao conector *o quê?*.
- Perguntas racionais: são caracterizadas por formas de questionar em que o professor pretende fazer apelo às memórias do aluno. Surgem associadas aos conectores *como?* ou *porquê?*.
- Perguntas sociais ou reguladoras: surgem no sentido de controlar a turma ou para apelar os alunos à participação numa determinada tarefa. Por exemplo: João és capaz de arranjar um exemplo para o que eu acabei de dizer?
- Pseudo-perguntas: são apresentadas como sendo questões que parecem pretender inquirir o aluno, relativamente a uma opinião pessoal, mas, na verdade, o professor já tem uma determinada resposta idealizada.

Boavida et al., (2008), apoiando-se numa categorização de Way, apresentam, também, uma tipificação dos diferentes papéis que as questões podem ter quando se

trabalha com tarefas abertas em Matemática, mas que é considerada, pelas autoras, adequada a outras situações:

- Questões de partida: são questões que pretendem focar o pensamento do aluno numa determinada direcção. Frequentemente fazem parte do próprio enunciado da tarefa e a sua função é impelir a actividade do aluno.
- Questões para incentivar: pretendem estimular o pensamento matemático e ajudam o aluno a focar-se numa determinada estratégia, “desafiando-o a procurar regularidades e relações” (p. 67).
- Questões para avaliação: focam-se, sobretudo, no pedido de justificações ou explicações e, na sua generalidade, ocorrem depois do aluno ter conseguido encontrar uma resposta à tarefa. Têm “um forte cariz analítico que visa, por um lado, promover no aluno a tomada de consciência do próprio pensamento e, por outro, dar ao professor pistas sobre a forma como ele pensa, o que compreende e como compreende” (p. 67).
- Questões para a discussão final: visam “sistematizar e consolidar uma série de aspectos que se prendem tanto com resultados, como com processos na síntese ou discussão final de uma tarefa” (p. 67). Esta forma de interrogar permite, ainda, o confronto e a comparação de soluções e estratégias, proporcionando uma oportunidade para os alunos tomarem “consciência de ideias matemáticas, e poderem ir mais além, nomeadamente no estabelecimento de conexões” (idem).

*Apropriação da linguagem específica.* Este último aspecto, referido por Martinho (2007), refere-se à apropriação da linguagem particular da Matemática de que a notação simbólica é um exemplo.

Martinho (2007), para além de se debruçar sobre os quatro aspectos do discurso anteriormente referidos, sublinha, ainda, que ao olharmos para uma aula de Matemática, podemos identificar o discurso individual e o discurso reflexivo. O discurso individual tem a ver com a interpretação pessoal que cada aluno faz daquilo que ouve, atribuindo-lhe um valor próprio. O discurso reflexivo corresponde a uma atitude crítica do aluno face à sua aprendizagem, o que passa, essencialmente, pela capacidade de reflexão sobre as actividades desenvolvidas.

De forma a “aperfeiçoar o discurso” em sala de aula também são apresentadas algumas sugestões, pelo NCTM (1994), que se prendem com o uso de tecnologia específica (computadores, calculadoras, etc) e de materiais manipuláveis. É recomendado o recurso frequente a representações pictóricas (figuras, diagramas, tabelas, gráficos), assim como o uso de termos e símbolos que sejam pessoais ou convencionais. Também deverão ser fomentadas as “apresentações orais” ou “dramatizações”.

A natureza da actividade e do discurso na sala de aula determinam as oportunidades que cada aluno tem para aprender tópicos específicos, bem como de desenvolver as suas capacidades de raciocínio e de comunicação sobre esses tópicos (NCTM, 1994). A aprendizagem do discurso matemático é, assim, segundo Ben-Zvi e Sfard (2007), uma peça fundamental da aprendizagem escolar. Com efeito, estes autores consideram esta aprendizagem como uma actividade na qual o aluno modifica e expande o seu reportório discursivo distinguindo, neste âmbito, a aprendizagem a nível do objecto (“*object-level learning*”) e a aprendizagem a nível meta (“*meta-level learning*”). Enquanto que o primeiro nível (no caso da Matemática, por exemplo a aprendizagem de números, triângulos ou funções) “conduz simplesmente a uma extensão de um discurso — que aumenta o conjunto de “factos conhecidos” (...) — a meta-aprendizagem é uma transformação do discurso: muda o vocabulário e as formas através das quais as explorações são feitas” (p. 126). Para os autores os níveis de aprendizagem são interdependentes e ambos necessários para aprender Matemática. Além disso, consideram que a meta-aprendizagem e a aprendizagem a nível do objecto, não acontecem de forma linear, uma seguida da outra. Devido às circularidades inerentes ao processo de aprendizagem, a meta-aprendizagem apenas pode ocorrer através de tentativas amparadas (*scaffolded*) de explorações ao nível do objecto, embora de um tipo novo. Isto significa que o primeiro passo em direcção à meta-aprendizagem é um envolvimento activo num discurso que, numa fase inicial, é incomensurável com o próprio discurso [de quem está a aprender] (Ben-Zvi e Sfard, 2007, p. 128).

Neste âmbito, os mesmos autores salientam que para que seja ultrapassada a inevitável lacuna comunicacional entre os alunos e o professor (ou colegas mais experientes) de modo a ocorrer a meta-aprendizagem, todos os participantes precisam de estar de acordo “mesmo que só tacitamente, relativamente a, pelo menos, três aspectos básicos do processo comunicacional: *o discurso que lidera*, os seus respectivos

*papéis e a natureza da mudança esperada*” (Ben-Zvi e Sfard, 2007, p. 127; destaque no original).

Quanto ao primeiro aspecto, para que se verifique uma efectiva comunicação entre os vários interlocutores é necessária a sua adesão a um conjunto de rotinas discursivas, mais ou menos uniformes (Ben-Zvi e Sfard, 2007). Embora o conjunto de regras acordado seja usualmente negociado pelos diversos actores e, provavelmente estas sejam alteradas, de algum modo, no decurso da interacção, o processo de mudança será ineficaz se os interlocutores não estiverem de acordo sobre qual dos discursos iniciais deverão ser considerado como norma.

A questão da liderança do discurso é, obviamente, uma questão de relações de poder. Segundo Ben-Zvi e Sfard (2007), numa sala de aula tradicional o poder é totalmente dominado pelo contexto institucional: o professor é o líder. Numa sala de aula não tradicional a questão da liderança do discurso está, pelo menos em princípio, aberta à negociação.

Quanto ao acordo sobre os papéis dos interlocutores no discurso, “os consensualmente reconhecidos como líderes devem querer desempenhar o papel de professores, enquanto que aqueles cujo discurso requer adaptação devem concordar em agir como alunos (...) a aceitação de papéis não é um acto formal” (Ben-Zvi e Sfard, 2007, p. 127). Esta aceitação significa um verdadeiro compromisso entre os vários actores para a aproximação comunicacional: “implica que os que concordaram em ser professores se sintam responsáveis pela mudança no discurso dos alunos e que aqueles que concordaram em aprender mostrem confiança na orientação do líder e queiram genuinamente seguir os passos discursivos dos participantes peritos” (idem). Segundo Ben-Zvi e Sfard (2007), esta aceitação da liderança de alguém não significa uma imitação néscia, mas antes um real interesse no novo discurso e uma forte vontade em o transformar de “um discurso para outros num discurso para si próprio” (p. 128).

Relativamente à natureza da mudança discursiva, os autores referem que parece ser uma etapa necessária na aprendizagem de Matemática o uso do “discurso para os outros” (Ben-Zvi e Sfard, 2007, p. 128). Consideram, também, que para que a aprendizagem seja bem sucedida é necessário que “todos os participantes, alunos e professores, tenham uma visão realista do que se pode esperar que venha a acontecer na sala de aula” (idem). Acrescentam que os intervenientes no processo de aprendizagem deverão conviver naturalmente “com o facto do novo discurso ser numa fase inicial como um idioma estrangeiro, e que só é usado porque é “apreciado” por outros” (idem).

Sublinham, ainda, que para que ocorra aprendizagem é necessário que exista imitação, mesmo na aprendizagem da “nossa própria língua” (idem).

Associado ao conceito de discurso, encontram-se alguns aspectos que o caracterizam e conduzem a novas dinâmicas de sala de aula. Irei, em seguida, abordar regularidades que se podem encontrar no discurso em sala de aula.

## **2.2. Padrões de interacção**

Os padrões de interacção, regularidades de acção entre professores e alunos, correspondem a modos de agir em sala de aula, de que nem sempre os intervenientes têm consciência.

Segundo Godino e Llinares (2000), na aula de Matemática podem ser identificados vários padrões de interacção não sendo, estes, rígidos uma vez que se encontram sujeitos a mudanças e alterações. Vários investigadores (Voigt, 1985; Bauersfeld, 1988; Wood, 1994; Godino e Llinares, 2000; Menezes, 2005; Martinho, 2007) referem os seguintes padrões:

- Padrão Extractivo;
- Padrão da Discussão;
- Padrão de Funil;
- Padrão de Focalização.

O padrão extractivo está centrado nas respostas e resoluções dos alunos para determinado problema que lhes é proposto. Os alunos são estimulados a fazer análises e descobertas de acordo com a sua competência. Os professores e os alunos reflectem e avaliam as descobertas realizadas. A solução é o principal objectivo (Godino e Llinares, 2000).

No padrão de discussão, o professor parte de uma solução apresentada por um aluno que pode ser a resposta a um problema e coloca questões de modo a esclarecer e clarificar determinados aspectos. Os alunos assumem o papel central na aula, podendo trocar ideias e partilhar métodos, através das suas explicações ou debates. A solução de uma determinada tarefa é o ponto de partida para uma explicação (Godino e Llinares, 2000).

O padrão de funil pode ser visto com a finalidade de consciencializar os alunos para o erro. O professor pode colocar uma questão com o objectivo de verificar o conhecimento do aluno. No caso da resposta do aluno não corresponder à esperada, o professor ajuda-o a chegar à resposta pretendida, através de questões muito simples. O professor guia directamente o pensamento do aluno, colocando questões que conduzem a respostas breves e pouco exigentes em termos de raciocínio (Godino e Llinares, 2000).

O padrão de focalização corresponde a centrar a atenção numa determinada situação. O professor toma como ponto de partida um determinado conceito e orienta a discussão num caminho que considera adequado para poder atingir o objectivo desejado. Nesta perspectiva, é importante que o professor estimule o aluno a explicar os seus raciocínios dando-lhe uma oportunidade para a construção do conhecimento (Godino e Llinares, 2000).

Cazden (2001) e Sttubs (1987), referindo-se também aos padrões de interacção, identificam o padrão, comumente designado por **IRA**<sup>1</sup>, frequentemente presente nas aulas ditas tradicionais, por oposição às aulas não tradicionais. Numa aula dita tradicional consegue-se identificar a seguinte sequência: **Iniciação** (pelo professor), **Resposta** (do aluno) e **Avaliação** (pelo professor) (Cazden, 2001). A este propósito, Cazden apresenta o seguinte exemplo:

**P:** Quantos lados tem um triângulo, Marta?

**M:** Tem 3.

**P:** Certo.

(Cazden, 2001, p. 30)

Stubbs (1987) refere-se a este padrão de interacção, como sendo uma permuta básica de perguntas e respostas em que o diálogo professor – aluno pode ser, efectivamente, considerado um monólogo:

---

<sup>1</sup> Por vezes este padrão também é designado por **IRF** em que **F** significa *feedback* pelo professor.

O saber da aula é essencialmente fechado. Todas as perguntas têm respostas correctas. O diálogo professor – aluno é efectivamente um monólogo, com o aluno a fornecer respostas curtas a pedido, para contribuir para a corrente de pensamento do professor. (Stubbs, 1987, p. 142)

Segundo Godino e Llinares (2000), num ensino de cunho tradicional os estudantes estão sempre à espera que os professores apresentem um algoritmo para resolver problemas sem terem que fazer qualquer reflexão. Aqui o aluno tem um papel muito limitado, sendo a sua função responder às questões colocadas e receber, de imediato, o feedback do professor.

Boavida (2005, referindo Forman), considera que modelar a comunicação na aula de Matemática tendo como referência o padrão de interacção **IRA** é redutor, uma vez que encoraja os alunos a desempenharem um papel de “autómato computacional” (p. 99) que reage respondendo às ordens do professor e dos livros de texto para calcular, resolver, provar, demonstrar, etc. Esta autora considera que há uma voz que aqui está ausente que é a que representa a de “um participante em comunidades matemáticas e, enquanto tal, relaciona-se com o persuadir outras pessoas acerca da validade de argumentos matemáticos próprios” (p. 99, citando Forman). No entanto, esta voz “não pode ser eliminada pois desempenha um papel fundamental na actividade matemática” (Boavida, 2005, p. 99).

Os padrões de interacção anteriormente referidos - extractivo, discussão, funil, focalização e IRA - poderão ser encontrados em aulas que não sejam de Matemática pelo que Godino e Llinares (2000), apoiando-se nas ideias de Voigt, referem uma possível caracterização de “padrões temáticos de interacção” (p. 82) referentes à aula de Matemática e apresentam o seguinte exemplo relativo ao primeiro ciclo: “É pedido aos alunos que realizem uma operação básica:  $23 + 51$ . Para efectuar a operação os alunos poderão trabalhar com barras de contagem ou efectuar a operação aritmética” (Godino e Llinares, 2000, p. 82).

Em função do desempenho dos alunos, assim se poderão estabelecer interacções diferentes, conforme apresentado no quadro 1 (adaptado de Godino e Llinares, 2000, p. 83).

<i>P<sub>1</sub></i> <i>Padrão temático de contagem de materiais</i>	<i>P<sub>2</sub></i> <i>Padrão temático de cálculo com números de dois dígitos</i>
Trabalhando em conjunto, alguns alunos interpretam os números como representações de materiais concretos, recorrendo às barras de contagem.	Trabalhando em conjunto, alguns alunos interpretam os números como representações de signos. A diferença ocorre dentro do próprio sistema de numeração.
<b>Tema:</b> Quantidades de Materiais	<b>Tema:</b> Aplicação de regras aritméticas

**Quadro 1. Dois padrões temáticos de interacção**

Para Godino e Llinares (2000) o “tema” prende-se com a perspectiva do professor relativamente ao significado dado pelos estudantes às tarefas que estão a resolver. O significado matemático dado às tarefas por parte dos alunos, deduz-se do processo de resolução empregue e da natureza das interacções produzidas. O significado matemático que o professor retira partindo das interacções é diferente, independentemente da tarefa ser, ou não, a mesma. Num caso trata-se da noção de número associada a materiais concretos e ao estabelecimento de um paralelismo entre as supostas relações de números e essa mesma manipulação de materiais. No segundo caso, o professor pode inferir, a partir das interacções dos alunos, que o tema matemático utilizado é a aplicação de regras aritméticas.

Desta forma um padrão temático de interacção acontece quando o professor e os alunos constituem interactivamente relações entre significados matemáticos partilhados.

Na aula de Matemática encontram-se, frequentemente, padrões de interacção de tal forma redutores no sentido em que os alunos não necessitam de estar envolvidos em pensamento matemático significativo, uma vez que apenas “precisam de ser capazes de ter o comportamento apropriado em resposta às acções do professor” (Matos e Serrazina, 1996, p. 164)

Em oposição a este tipo de interacção podemos criar situações em que as “relações na sala de aula são vistas como um processo dinâmico e reflexivo que toma necessariamente em consideração os padrões e processos interactivos de comunicação que são constituídos pelo professor e pelos alunos” (Matos e Serrazina, 1996, p. 164).

### **3. Representações do conhecimento matemático**

Representar é atribuir significado, localizado num sistema. O conceito não é algo externo, objectual, mas um significado que ocupa o centro de um espaço semântico. O princípio de realidade não é a representação de uma exterioridade física ou de uma ideia transcendente, mas a representação de um espaço semântico em que as palavras e os signos, disputam um só sentido, fixando os seus sentidos através de um jogo de análise e síntese. A representação não é uma mera imagem num espelho, é sim “algo” que toma sentido dentro de um sistema de significados e relações. (Rico, 2009, p. 9)

#### **3.1. Significado e importância**

Segundo Valério (2005), “para resolver problemas com que somos confrontados diariamente, recorreremos a desenhos ou esquemas para apoiar o nosso pensamento” (p. 37). Deste modo, já todos nós recorreremos a um gesto ou a um desenho para indicarmos uma determinada direcção ou fizemos esboços de percursos, para indicar a localização de um determinado lugar. Estas sinaléticas e desenhos poderão ser entendidos como exemplos de representações.

Não é objectivo desta secção apresentar uma análise exaustiva do polissémico e complexo conceito de representação a que, desde há muito, filósofos e investigadores de várias áreas têm dedicado atenção (Rico, 2000). No entanto, considerando que “a forma pela qual as ideias matemáticas são apresentadas é essencial para o modo como as pessoas compreendem e utilizam essas ideias” (NCTM, 2007, p. 75) e o importante papel desempenhado pelas representações na comunicação, torna-se importante reflectir sobre significados que têm sido atribuídos a este conceito no âmbito da educação matemática e evidenciar a sua importância quando se equaciona a aprendizagem da Matemática.

Rico (2009) considera que, em sentido amplo, as representações matemáticas podem ser entendidas como “todas as ferramentas – signos e gráficos – que tornam presentes os conceitos e procedimentos matemáticos, e com as quais os sujeitos particulares abordam e interactivam com o conhecimento matemático” (p. 3), ou seja, registam e comunicam o seu conhecimento matemático. Por exemplo, o uso da notação

de raiz quadrada ( $\sqrt{\quad}$ ). Para este autor, “representar é substituir, dar presença a um ausente” (p. 6), é “reproduzir na mente” (p. 7), é “atribuir significado” (p. 9), “é uma prática e abarca uma multiplicidade de opções” (p. 10). Salienta, ainda, que a “representação é um acto criativo, que consiste em trocar de aspecto um mesmo dado de forma a vê-lo de outro modo” (p. 10).

Castro e Castro (1997) referem que as representações matemáticas são notações simbólicas ou gráficas, específicas para cada conceito ou procedimento matemático assim como as suas características e propriedades mais relevantes. Os autores consideram que as notações simbólicas podem atingir grande complexidade, uma vez que se baseiam, na sua generalidade, em signos alfanuméricos estruturados. As representações gráficas baseiam-se em combinações de figuras ou ícones, devidamente estruturados.

Uma representação, no âmbito do ensino e aprendizagem, é essencialmente “um constructo físico ou mental que descreve aspectos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre o conceito e outras ideias” (Tripathi, 2008, p. 438). Esta caracterização é consistente com o indicado pelo NCTM (2007): “o termo representação refere-se simultaneamente a processo e a produto — por outras palavras, ao acto de capturar um conceito ou relação Matemática através de uma determinada forma e à forma em si mesma” (p. 75). Refere-se, também, “a processos e a produtos que são observáveis externamente bem como àqueles que ocorrem “internamente”, na mente das pessoas que fazem Matemática” (p. 75). Assim, podemos pensar em representações como formas de uma ideia que nos permitem interpretá-la, comunicá-la e discuti-la com outros (Tripathi, 2008).

A representação de ideias matemáticas está fortemente associada à comunicação matemática, quer se considere a sua dimensão escrita, quer oral (Boavida et al., 2008). Esta associação transparece também nas palavras de outros autores. Para Preston e Garner (2003) as representações são importantes veículos para a aprendizagem, para a resolução de problemas e para a comunicação. Cazden (2001) considera as representações, uma das formas de comunicação escrita, um passo importante para a comunicação oral. Na mesma linha, Zaskis e Liljedahl (2004) entendem-nas como uma ferramenta para “aprender e comunicar matemática” (p. 167), devendo também ser consideradas como um “meio para dar forma à compreensão conceptual” (p. 167).

Font, Godino e D`Amore (2007) referem que falar em representações no ensino e aprendizagem da Matemática equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão e modelação. Estas noções, constituem o núcleo central da aprendizagem matemática, uma vez que permitem aos alunos desenvolver conexões entre o concreto e o abstracto.

A importância de se dedicar atenção às representações do conhecimento matemático, é sublinhada por vários autores. Clement (2004) defende que as representações devem ser tratadas como elementos essenciais no apoio aos estudantes, na medida em que ajudam à compreensão de conceitos matemáticos e ao estabelecimento de conexões que evidenciam relações entre esses mesmos conceitos. Para Valério (2005) as representações matemáticas permitem aos alunos ter um “papel activo” (p. 38) na sua aprendizagem, sendo consideradas, por Zaskis e Liljedahl (2004), uma ferramenta essencial para pensar e adquirir conhecimentos, uma vez que permitem dar forma à compreensão conceptual. Scheuermann e Garderen (2008) destacam o seu papel, nomeadamente na resolução de problemas, sublinhando que são um requisito fundamental para os alunos alcançarem uma solução. De acordo com o NCTM (2007), a representação é central no estudo da Matemática. Os alunos podem desenvolver e aprofundar os seus conhecimentos sobre conceitos e relações matemáticas, à medida que criam, comparam e utilizam representações diversas. As representações – tais como objectos físicos, desenhos, gráficos e símbolos – ajudam-nos, também, a comunicar o seu raciocínio.

Ainda segundo o NCTM (2007), as representações permitem apoiar a compreensão, pelos alunos, de conceitos e relações matemáticas, favorecem a organização de raciocínios e a reflexão sobre ideias matemáticas, facilitam a comunicação e a resolução de problemas e são úteis para conectar conceitos. Além disso, possibilitam a modelação de situações problemáticas e permitem que os alunos investiguem relações matemáticas, podendo facilitar a justificação e refutação de conjecturas.

Cazden (2001), refere que as representações usadas pelos alunos para representar o seu raciocínio, na resolução de problemas, poderão seguir um formato convencional ou não convencional, uma vez que é através das representações, criadas pelos alunos, que estes organizam, registam e comunicam as suas ideias e conceitos matemáticos.

O NCTM (2007) recomenda que os alunos sejam encorajados a representar as suas ideias sob formas que, para eles façam sentido, mesmo que essas representações

sejam pouco convencionais e que, numa fase posterior, sejam incentivados a aprender formas de representação convencionais. As representações não convencionais, ou o recurso a métodos próprios de resolução, são importantes pois facilitam uma aprendizagem significativa (Valério, 2005). Simultaneamente as representações convencionais são úteis para os alunos progredirem na sua aprendizagem e para comunicarem a outros as suas ideias matemáticas.

Scheuermann e Garderen (2008) referem que uma representação, imagem, vale mais que mil palavras. As representações usadas pelos estudantes podem conter uma riqueza de informação incalculável, nomeadamente sobre o que os alunos entendem e conseguem fazer em Matemática.

Para Clement (2004) quando os professores recorrem a diversas formas de representação nas suas aulas, desenvolvem nos alunos um gosto especial pela Matemática. Estas dão oportunidade aos alunos de visualizarem, de uma forma menos abstracta, determinadas ideias ou conceitos, tornando mais acessível a sua compreensão. Esta ideia vai, em certa medida, ao encontro do que salientam Preston e Garner (2003) para quem as representações matemáticas desenvolvidas pelos alunos, permitem-lhes concretizar noções abstractas, utilizando, nomeadamente, materiais físicos ou desenhos. Também Tripathi (2008), argumenta que os estudantes entendem de forma mais eficaz os conceitos matemáticos, quando os estudam recorrendo a várias representações. considerando, ainda, que as relações entre as várias formas de representar um conceito são elementos fundamentais para a compreensão. Esta ideia pode ser, metaforicamente, ilustrada a partir de uma história hindu apresentada pela autora:

Foi pedido a cinco pessoas, que nunca tinham visto um elefante, que vendassem os olhos, lhe tocassem e o descrevessem. Uma tocou o lado do corpo do elefante e descreveu-o como uma parede. Outra tocou a tromba e ficou convencida de que o animal era como uma serpente. A que tocou o joelho disse tratar-se de uma árvore. A que tocou os dentes disse que um elefante era como duas espadas. Mais tarde, ao reunirem-se, envolveram-se numa discussão acalorada. Cada uma tinha a sua própria versão do animal, mas nenhuma delas se parecia encaixar com a do outro. Embora estivessem individualmente certas, a intolerância em compreender a verdade do próximo impedia a todas de entender o que era realmente o paquiderme. (adaptado de Tripathi, 2008, p. 438)

A história hindu permite evidenciar, que podemos pensar nas representações como uma forma que nos permite interpretar, comunicar, discutir uma ideia com os outros e que restringir uma ideia matemática a uma única representação é fazer uma aproximação parcial ao conceito, tal como cada uma das pessoas, individualmente, fez uma aproximação ao que é um elefante. O mesmo se passa quando consideramos conceitos matemáticos. Suponha-se o seguinte exemplo:

Foi pedido a dois alunos que resolvessem um determinado problema sobre proporcionalidade directa. Um dos alunos utilizou proporções, e um outro usou uma representação à escala.

(adaptado de NCTM, 2007, p. 332)

À semelhança do que aconteceu na história do elefante, também aqui as representações utilizadas complementam-se e completam-se, de forma a permitir uma visão mais ampla do conceito de proporcionalidade directa

Os conceitos matemáticos não “vivem isolados”, ou seja, a Matemática é composta por conceitos interligados por várias relações (Tripathi, 2008), pelo que conhecer/aprender um conceito, isoladamente, implica não conhecer o seu significado. Segundo Tripathi (2008), para aprender um conceito matemático, torna-se imprescindível saber relacioná-lo com outras ideias e conceitos matemáticos. Para ilustrar esta ideia, a autora recorre à metáfora do pintor e do quadro: “Assim como um quadro é criado através da utilização de várias cores, também a Matemática é criada através da interligação de vários conceitos e representações” (Tripathi, 2008, p. 439).

Pode considerar-se que as representações matemáticas têm dois grandes propósitos: a) beneficiar as aprendizagens dos alunos e incentivar o seu pensamento; b) proporcionar aos professores informações sobre as aprendizagens dos alunos. É neste sentido que Scheuermann e Garderen (2008) referem que as representações são úteis, como forma de avaliar, ou seja, através das representações elaboradas pelos alunos é possível aos professores saber se um aluno entendeu ou não um determinado conceito ou problema. Neste âmbito, as autoras desenvolvem um modelo, apresentado na figura 1, que consideram útil para “ajudar a analisar as representações dos alunos” (p. 472) durante a resolução de problemas matemáticos.

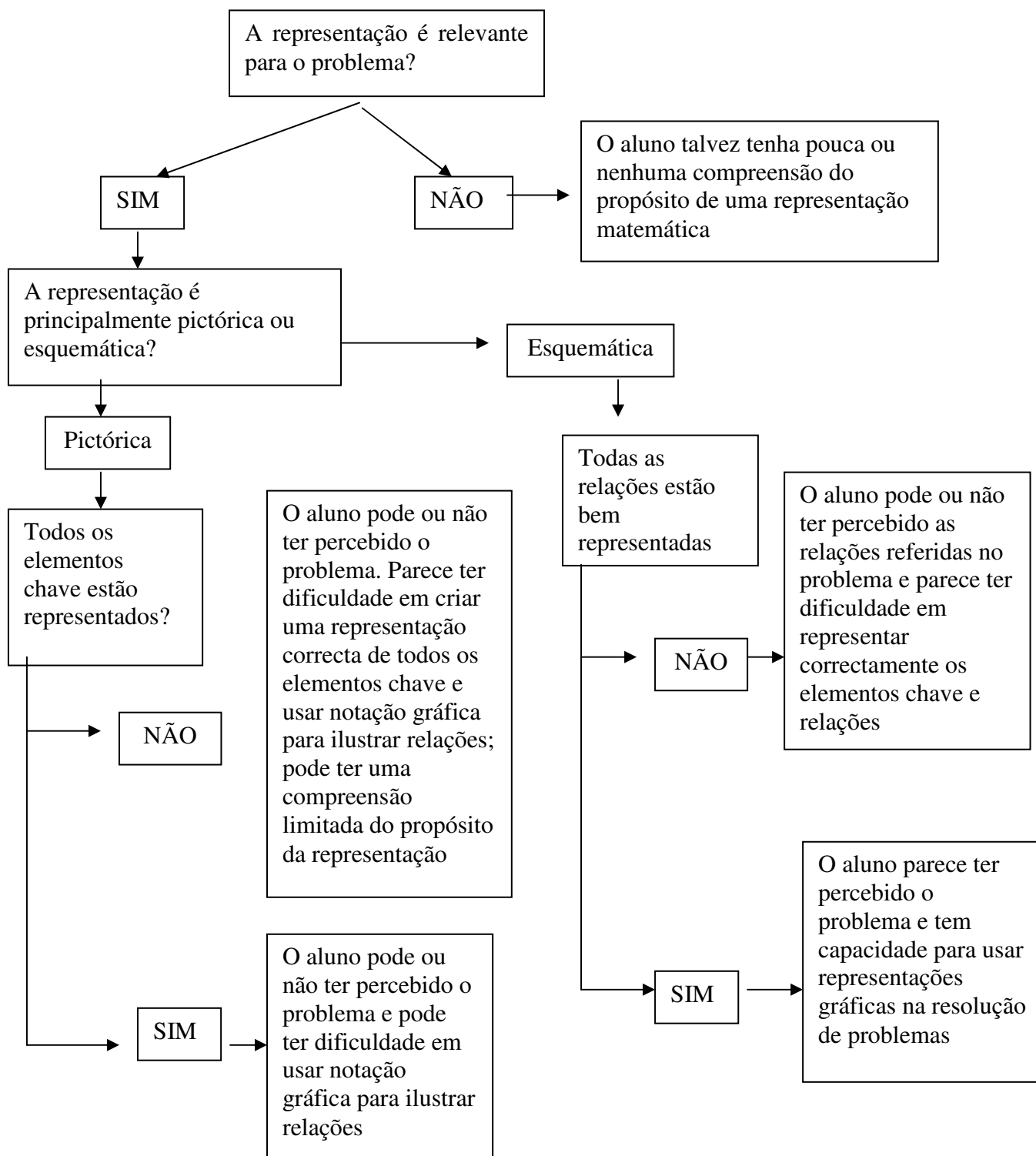


Figura 1. Modelo de análise das representações dos alunos  
(Scheuermann e Garderen, 2008, p. 473)

As representações são “instrumentos vitais para registrar, analisar, resolver e comunicar dados, problemas e ideias matemáticas” (Preston e Garner, 2003, p. 39), que podem constituir importantes veículos para raciocinar e aprender. Não é, assim, de estranhar que o papel, funções e tipologia das representações e as suas relações com o conhecimento e aprendizagem, sejam aspectos sobre os quais se têm debruçado diversos autores (Clement, 2004; Pimm, 1987; Preston e Garner, 2003; Tripathi, 2008), organizando-as e caracterizando-as.

Em suma, as representações matemáticas assumem um papel fundamental na aprendizagem e na forma de comunicar matematicamente. Estas são, ainda, vistas como uma ferramenta imprescindível na conexão e inter-relacionamento de conceitos, pelo que importa fazer uma abordagem aos diferentes modos de representar o conhecimento e as ideias matemáticas.

### **3.2. Tipos de representações**

Vários investigadores têm analisado a forma como os alunos representam ideias/conceitos matemáticos, dando, deste modo, origem a várias categorizações de representações (Bruner, 1962; Pimm, 1987; Preston e Garner, 2003; Clement, 2004; Tripathi, 2008; Scheurmann e Garderen, 2008). Apesar das diferenças na classificação ou na forma de agrupar as representações, os vários autores apresentam como denominador comum a ideia de que as representações devem ser usadas de forma combinada de modo a que os estudantes entendam e expliquem uma determinada ideia ou conceito matemático.

Apresento em seguida algumas categorizações para os modos de representar conceitos, ideias e resoluções em Matemática. Estes modos podem assumir a forma escrita ou a não escrita.

As representações escritas, de acordo com Pimm (1987), podem ser classificadas em:

- Lologramas
- Pictogramas
- Símbolos de Pontuação
- Símbolos Alfabéticos.

No quadro 2 ilustro algumas das características de cada um dos tipos de representação escritas segundo Pimm (1990), também designadas na literatura por representações escritas convencionais.

<b>Classificação</b>	<b>Descrição</b>	<b>Exemplos</b>
<b>Lologramas</b>	Conjunto de símbolos usados em Matemática, que representam palavras ou frases.	$x; + ; <; \forall; \sqrt{\quad}; \in$
<b>Pictogramas</b>	Imagens estilizadas para descrever um determinado objecto ou conceito.	Usar a sinalética, Z, quando nos queremos referir a ângulos alternos de lados paralelos
<b>Símbolos de pontuação</b>	Símbolos que na ortografia normal são utilizados como sinais de pontuação.	O símbolo !, usado em Matemática como factorial é usado em ortografia como sinal de exclamação.
<b>Símbolos alfabéticos</b>	Corresponde à utilização de letras dos vários alfabetos, por exemplo o romano ou o grego	$a, A, \alpha; \beta$

**Quadro 2. Modelo de classificação de representações matemáticas escritas (Pimm, 1987)**

Clement (2004), apoiando-se nas ideias de Lesh, Post e Behr, refere cinco modos distintos de representar ideias matemáticas, que contemplam as representações escritas e as não escritas, designando as representações por:

- Imagens (“Pictures”)
- Materiais manipuláveis
- Linguagem oral
- Situações relevantes
- Símbolos escritos

O quadro 3 ilustra o significado atribuído a estas designações e possíveis potencialidades de cada um dos modos de representação.

<b>Representações</b>	<b>Características</b>	<b>Vantagens</b>
<b>Imagens</b>	Imagens desenhadas pelo professor ou incluídas em livros de texto e, preferencialmente, todos os desenhos usados pelos alunos para representar ideias.	Permitem ao aluno transformar um problema matemático numa imagem e permitem ao professor saber se o aluno entendeu, ou não, um determinado problema.
<b>Materiais manipuláveis</b>	Através de materiais manipuláveis, ou seja, de objectos em que os alunos podem mexer, estes podem representar ideias matemáticas.	Permitem o movimento e a manipulação, dando aos alunos a oportunidade de, por exemplo, testar conjecturas.
<b>Linguagem oral</b>	São todas as formas de linguagem oral usadas pelos alunos para relatar as suas respostas e exprimir os seus raciocínios.	A expressão oral de raciocínios matemáticos torna os alunos capazes de tornar explícito conhecimento que até aí permanecia implícito.
<b>Situações relevantes</b>	Contextos frequente, mas não necessariamente, conectados com a vida real que envolvem determinadas ideias matemáticas e despertam o interesse dos alunos.	Facilitam a atribuição de significados a ideias matemáticas e permitem um maior envolvimento dos alunos.
<b>Símbolos escritos</b>	Símbolos matemáticos ou palavras “escritas” associadas aos símbolos (por exemplo $\frac{1}{4}$ e “um quarto”)	Frequentemente permitem representar ideias matemáticas com maior precisão.

**Quadro 3. Modelo de classificação de representações matemáticas (adaptado de Clement, 2004)**

Clement (2004) considera que todas as formas de representar são essenciais no apoio aos estudantes, embora enfatize a necessidade da existência de uma sequencialidade nas representações, devendo o professor começar com as mais representativas para os alunos. Por vezes, o significado de símbolos, para os alunos, é muito abstracto, tornando-se difícil a compreensão. A sequencialidade na construção/introdução das representações matemáticas, assim como a sua conexão, é impulsionadora da compreensão de conceitos. O exemplo que se segue é ilustrativo da efectiva qualidade para compreensão de um conceito quando se opta pela sequencialidade de representações.

Quando é pedido aos alunos que representem um meio de um bolo, muitos alunos por vezes representam  $1\frac{1}{2}$ . Se os alunos concretizarem este pedido a ocorrência de erro é menos frequente. Esta realização pode ser substanciada de diversas formas: recorrendo a um desenho ou recorrendo à utilização de material manipulável. (Clement, 2004, p. 99)

O modelo de classificação de representações apresentado por Clement (2004) tem fortes semelhanças com o proposto por Tripathi (2008). Esta semelhança não é de estranhar uma vez que, tal como Clement, também Tripathi tem por referência a classificação de Lesh, Post e Behr. Para referir as cinco representações matemáticas, Tripathi usa, no entanto, uma terminologia diferente da de Clement: “concretas (manipuláveis), linguagem, simbolismo (notação), semi-concretas (pictóricas) e contextuais (situações da vida real)” (Tripathi, 2008, p. 439). Com o objectivo de ilustrar as características e potencialidades dos diferentes modos de representar as ideias matemáticas, Tripathi apresenta o seguinte exemplo:

Um professor, ao discutir [o conceito] de círculo com a sua turma, pode ter os seus alunos a usar formas de plástico para mostrar concretamente o conceito. (...) Os alunos podem ser encorajados a usar a linguagem, tal como: “O círculo não tem lados direitos”, desenvolvendo, assim, a capacidade de articular processos de pensamento coerentes. Como os alunos aprendem a designar o círculo simbolicamente como  $\bigcirc$  ou como círculo **C** (em que **C** é o centro do círculo), vão-se movendo em direcção à abstracção e [desenvolvendo] a capacidade para se referir a um objecto através de uma forma que pode não partilhar uma semelhança física com o objecto. Os alunos podem desenhar um círculo nos seus cadernos, como uma representação pictórica. Podem referir o bordo de uma lata para descrever o seu uso na vida quotidiana. Estas formas de representação contextual ajudam os alunos a relacionar o conceito com a vida quotidiana. Como professores, temos que considerar cada uma destas representações como uma manifestação de um aspecto do

círculo e desejar que os alunos se familiarizem com elas.

(Tripathi, 2008, pp. 439, 440)

Tripathi (2008) considera que desde que foi proposta a classificação de Lesh, Post e Behr, se expandiu fortemente o repertório de representações acessíveis ao aluno, pelo que considera a expressão “representações visuais” (p. 440) como uma melhor alternativa para designar as representações pictóricas ou semi-concretas. Nas representações visuais inclui “formas como tabelas ou diagramas organizados, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento, e “word pictures” (a descrição em palavras do que estamos a tentar fazer)” (p. 440). Esta autora, considera que as representações devem ser usadas como uma forma que permita interpretar, comunicar e discutir uma ideia, salientando que:

Representações múltiplas podem ser uma ferramenta poderosa para facilitar a compreensão dos alunos. O processo de formular e resolver problemas que acontece em torno das representações pode promover a aprendizagem matemática. O discurso matemático que ocorre na sala de aula quando os alunos e o professor se envolvem num movimento contínuo entre diferentes formas de [representar] um conceito, pode enriquecer a cultura de sala de aula e ajudar os alunos a tornarem-se participantes activos no processo de aprendizagem. (Tripathi, 2008, p. 444)

Considerando os diferentes usos de representações, Preston e Garner (2003) sintetizam e equacionam a sua utilização por alunos do 3.º ciclo, nomeadamente quando resolvem problemas e comunicam as suas resoluções. Esta síntese, bem como as vantagens e desvantagens de cada tipo de representação são apresentadas no quadro 4.

<b>Representações</b>	<b>Usos típicos</b>	<b>Vantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
<b>Verbais</b>	Apresentar o problema inicial, comunicar com outros durante a resolução e apresentação dos resultados finais.	O uso da linguagem natural dos estudantes, ajuda-os, frequentemente, a relacionar o problema com o cotidiano.	A linguagem natural pode ser ambígua, principalmente quando comparada com a linguagem específica da Matemática.
<b>Pictóricas</b>	Recurso a imagens, onde se reúnem informações sobre o problema, modelando-o.	Ajudam a “ver” a situação matemática, sendo uma aproximação confortável para a maioria.	Por vezes os alunos tiram conclusões, das suas construções, que se distanciam do problema. Por vezes algumas capacidades de desenho dos alunos são limitadas.
<b>Numéricas/ Tabelares</b>	Trabalho feito numa fase inicial para compreender um problema; procura de exemplos específicos que se ajustem ao contexto; adivinhar e testar; organização frequente da informação numa tabela.	Ferramentas naturais para a generalidade dos alunos, baseadas na sua experiência prévia. Podem servir como uma efectiva ferramenta para chegar a gráficos e equações.	Questões de falta de generalidade, podem impedir o progresso. A utilização de, somente, alguns números podem obscurecer as situações chave (ex: uso exclusivo de números inteiros)
<b>Gráficas</b>	Úteis para representar situações de crescimento e de decréscimo. Particularmente úteis para comunicar resultados.	Mostram claramente as relações entre as variáveis de um problema. Na maioria das vezes são intuitivas para os alunos. São apelativas para os estudantes “visuais”.	O uso de uma escala desadequada pode levar a uma errada interpretação. Os alunos muitas vezes desenharam gráficos “contínuos” para dados discretos.
<b>Algébricas</b>	São uma opção para os alunos, quando estes começam a sentir-se mais confiantes para generalizar, recorrendo ao uso de variáveis.	Proporcionam uma ideia geral e concisa de uma situação, sendo úteis para justificar e provar	São difíceis, numa fase inicial, para a generalidade dos alunos; podem não ter significado para alguns.



**Quadro 4. Usos, vantagens e desvantagens de representações matemáticas**

(adaptado de Preston e Garner, 2003)

Scheurmann e Garderen (2008), focando-se nas representações gráficas onde incluem diagramas, tabelas, esquemas ou gráficos, consideram duas grandes categorias de representações:

- Representações sobretudo pictóricas
- Representações sobretudo esquemáticas.

O quadro 5, permite ilustrar o significado atribuído pelas autoras a estas categorias:

Problema	Representações pictóricas		Representações esquemáticas	
	Significado	Exemplo	Significado	Exemplo
O João toca numa banda musical. Foi a uma loja para comprar cordas para as guitarras. Quantas cordas deverá comprar, se na banda há três guitarristas e cada guitarra leva seis cordas?	Representam imagens de objectos e ou de pessoas para ilustrar os elementos chave do problema		Representam os objectos e/ou pessoas que ilustram os elementos chave do problema, bem como as relações espaciais entre estes elementos e o modo como se “comportam” em conjunto.	

**Quadro 5. Esquema de categorização e exemplos de representações gráficas**  
(adaptado de Scheurmann e Garderen, 2008)

Boavida et al., (2008), apoiando-se no pensamento de Bruner (1962), referem a seguinte classificação das representações:

- Activas
- Icónicas
- Simbólicas

As representações activas estão associadas a uma determinada acção ou movimento, como é o caso do uso de materiais manipuláveis. As icónicas assentam no uso de figuras, como imagens, esquemas, tabelas ou desenhos. Por último, às representações simbólicas está associado o uso de linguagem simbólica e das suas regras de funcionamento.

Goldin e Janvier, referidos por Font, Godino e D'Amore (2007), apresentam, ainda, uma classificação para as representações matemáticas que passa unicamente pela cognição e pelo manuseamento de signos. As representações que se referem ao conhecimento de um indivíduo são designadas por “mentais” ou “internas”. Os gráficos, tabelas ou expressões simbólicas são consideradas representações “externas” pois referem-se à forma de como uma ideia ou conceito matemático pode ser comunicado, podendo recorrer-se a desenhos, símbolos matemáticos, linguagem falada ou escrita. Os autores, consideram os dois tipos de representação dependentes, uma vez que vivem em conexão. A este propósito, referem que para representar uma ideia através de uma tabela são necessários conhecimentos internos que permitam construir a representação tabelar.

Uma questão que surge naturalmente é a de saber qual das representações antecede a outra. Para Font et al., (2007), para fazer uma representação externa é necessário estabelecer, antes de mais, representações mentais (internas). Como consequência desta dificuldade, os autores consideram a classificação das representações em interna/externa “problemática” e “pouco transparente” (p. 16).

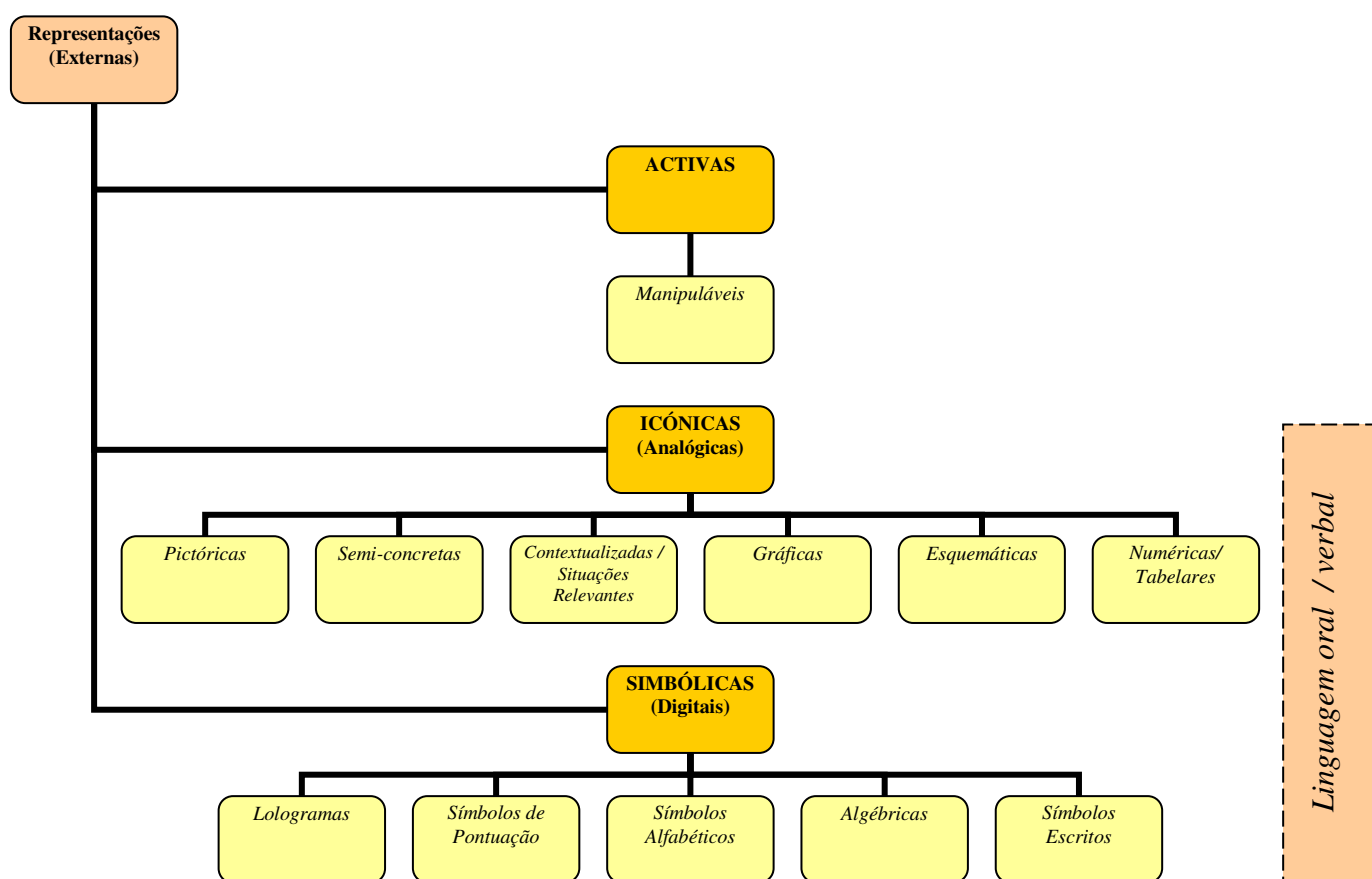
Segundo Castro e Castro (1997), no âmbito das representações externas é usual distinguir duas grandes famílias:

- Representações digitais, comumente designadas por representações simbólicas;
- Representações analógicas, usualmente designadas por representações gráficas.

Entre as representações simbólicas encontram-se, segundo os autores, representações de carácter alfanumérico cuja sintaxe é descrita através de um conjunto de regras e procedimentos. As gráficas “recorrem a representações do tipo figurativo, de carácter analógico, cuja sintaxe vem dada principalmente por regras de composição e convénios de interpretação” (Rico, 2009, p. 8, referindo Castro e Castro).

A categorização de Castro e Castro (1997) devido à sua simplicidade é um recurso de fácil utilização. No entanto, pode não ser muito útil, uma vez que apenas faz a distinção em duas grandes famílias, o que pode não ser suficiente para compreender o modo como os alunos representam ideias matemáticas.

Em síntese, ao longo desta secção foram apresentados vários modelos e tipologias de classificação de representações. Na figura 2 procuro sistematizar o essencial da informação apresentada e, simultaneamente, evidenciar semelhanças e diferenças encontradas. Para o efeito, foco-me, apenas, no que Font, Godino e D'Amore (2007) designam por representações externas, por considerar que são mais úteis face aos objectivos deste estudo.



**Figura 2. Diferentes formas de representações matemáticas externas**

Apoiando-me nas ideias apresentadas pelo vários autores estudados, considero que as diferentes formas de representar ideias e/ou conceitos matemáticos, podem ser agrupadas em três grandes grupos: Activas, Icónicas (analógicas) e Simbólicas (digitais).

As representações activas remetem para uma determinada acção ou movimento, pelo que considero que podem ser associadas às “representações manipuláveis” referidas por Clement (2004) e Preston e Garner (2003), que segundo as autoras, ocorrem aquando do manuseamento de objectos.

No que se refere às representações icónicas, relacionadas com o uso de figuras, considere também as “representações contextualizadas” ou “relevantes”, uma vez que segundo os autores estas representações se referem ao uso de contextos reais próximos ou não da vida quotidiana. Em certa medida, a utilização destes contextos não são mais que uma “representação esquemática” de uma realidade, que os alunos poderão optar, muitas vezes, por desenhar. As “representações numéricas/tabulares” referidas por Preston e Garner (2003), referem-se a uma representação dos problemas que ocorre, geralmente, sob a forma de tabela ou esquema, pelo que também foram consideradas neste segundo grupo.

As representações simbólicas, de que falam Boavida et al., (2008), estão associadas ao uso da linguagem simbólica, razão pela qual integrei neste grupo todas as formas de representar que envolvem o uso de símbolos.

No esquema da figura 2, as representações orais/verbais surgem na vertical para indicar que podem englobar aspectos das icónicas e/ou simbólicas. Esta opção foi tomada com base em Matos e Serrazina (1996) que referem que as representações simbólicas consistem “na tradução das experiências em termos de linguagem simbólica” (p. 81), considerando que os símbolos são palavras ou marcas inventadas pelas pessoas para referirem certos objectos, acontecimentos ou ideias. Estes autores salientam, ainda, que “uma representação simbólica é escrita ou falada normalmente com a finalidade de facilitar a comunicação” (p. 42). Em Matemática recorremos, por vezes, a palavras da linguagem natural (Situações relevantes - Representações icónicas) que têm aí uma conotação específica. Por exemplo, utilizamos a palavra *Vizinhança*, em Matemática e no nosso dia-a-dia, embora com significados diferentes. Várias designações usadas para diversos termos matemáticos evidenciam, aliás, as suas raízes metafóricas (Carreira, 1998). Este facto é natural pois, como defende Carreira (1998), muita da Matemática surgiu a partir de “problemas directamente relacionados com a experiência humana e é uma expressão humana, uma construção social, [pelo que] não será de estranhar que diversos termos matemáticos sejam ricos em imagens e metáforas e tenham uma natureza fundamentalmente metafórica” (p.113)

### 3.3. Conexões entre representações

Um dos aspectos que as várias tipologias de classificação de representações permite sublinhar, é a diversidade de formas que as representações de ideias matemáticas podem assumir. Vários autores defendem que estas formas não devem ser consideradas alternativas nem independentes umas das outras, mas antes, inter-relacionadas. Entre estes autores encontra-se Tripathi (2008), para quem “uma representação matemática frequentemente ilumina apenas um aspecto de um conceito matemático (...) Um quadro holístico do conceito começa a emergir apenas quando (...) observamos a ideia a partir de diferentes perspectivas” (p. 438).

Também Lesh, Post e Behr, (1987), Arcavi (2003) e Clement (2004) sublinham a importância de se estabelecerem conexões entre vários tipos de representações. Para realçar esta ideia, Clement (2004) apresenta o modelo representado na figura 3:

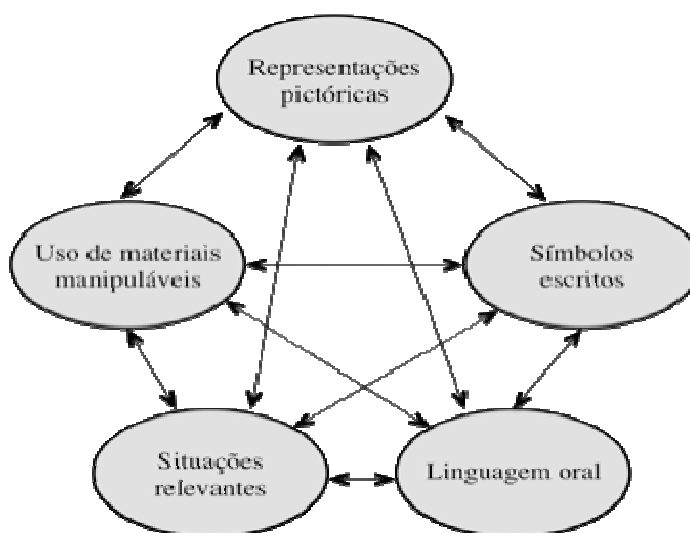


Figura 3. Conexões entre representações (Clement, 2004)

O modelo deixa transparecer a interconexão entre as várias formas de representar, evidenciando a interdependência existente. Qualquer uma das formas de representar se pode apoiar e apoia uma outra(s).

Dar a possibilidade aos alunos de contactarem e usarem diversas formas de representar, incentiva-os a criarem as suas próprias representações para resolver problemas. Ajuda-os, ainda, a estabelecer conexões entre diferentes representações, favorecendo a criação de condições para que disponham, não só de mais recursos comunicativos, mas, sobretudo, para que aprofundem a sua compreensão de ideias

matemáticas assim como das suas relações. O passar de uma forma de representar para outra e o estabelecimento de relações entre as diversas formas de representar são passos indispensáveis para a construção de quadros mentais de conhecimento (Loureiro (2009).

Estas ideias vão ao encontro do que defendem Preston e Garner (2003) que frisam a necessidade de se estabelecerem conexões entre as várias formas de representar, justificando que as representações matemáticas são ferramentas vitais para memorizar, analisar, resolver e comunicar informação matemática. Apesar da sua importância, os autores consideram que elas assumem significados diferentes para os alunos e que, por vezes, eles podem levar algum tempo até conseguirem tirar proveito das relações a estabelecer.

É desta forma que para Goldin e Janvier (1998), referidos por Font et al. (2007), as representações matemáticas vivem em conexão com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, podendo assumir várias interpretações, uma vez que mostram as várias componentes e facetas que interagem em educação matemática.

Rico (2009) sublinha que cada conceito matemático surge associado a diferentes significados e usos, podendo, conseqüentemente, ser suportado por diversas representações. Desta forma, o autor refere que sob o ponto de vista cognitivo para a eficaz compreensão de cada conceito ou estrutura Matemática é necessário um processo combinado por várias formas de representar.

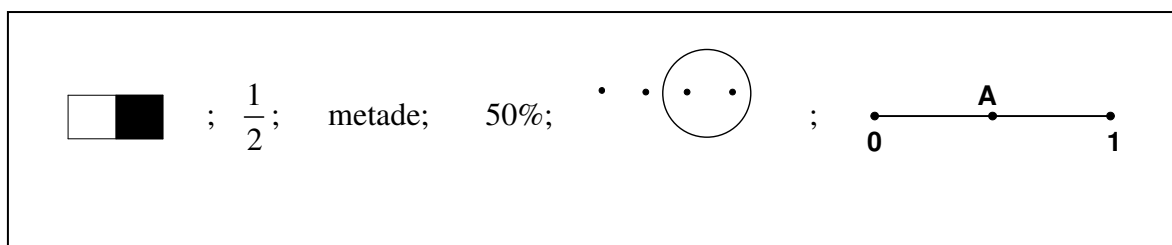
O NCTM (2007) considera que é importante proporcionar aos alunos experiências que permitam a utilização de uma vasta gama de representações. Deste modo, os professores devem atribuir um papel importante às várias formas de representar, não as expondo como um produto acabado, mas sim como veículo de comunicação aberto a sugestões e à construção de significados.

Neste âmbito, Clement (2004) defende que é extremamente importante que o professor, ao planificar o ensino, reflecta sobre questões do tipo:

- Que representação ou representações serão mais significativas para os alunos?
- Por que ordem faz sentido introduzir diferentes representações ou incentivar os alunos a usá-las?
- Que representações ou conexões entre representações poderão promover um pensamento matemático mais poderoso nos alunos?

Ao serem propostas tarefas estimulantes aos alunos, os professores estão a proporcionar a utilização ou o recurso a (de) representações convencionais, em articulação com representações não convencionais, vão ajudar na resolução de problemas e na abordagem de novos conceitos. As representações apoiam diferentes formas de pensar e manipular os objectos e conceitos matemáticos, o que vai potencialmente permitir aos alunos compreendê-los com maior facilidade, uma vez que os podem observar segundo várias perspectivas.

Representações diferentes de um mesmo objecto matemático designam-se, frequentemente, por representações sinónimas (Castro e Castro, 1997). Por exemplo, a figura 4 ilustra um conjunto de representações sinónimas da mesma ideia: “um meio”.



**Figura 4. Seis formas distintas de representar o conceito “um meio”**

**(Adaptado de Castro e Castro (1997))**

Castro e Castro (1997) consideram que os modos distintos de representar um mesmo conceito matemático proporcionam uma caracterização diferente desse mesmo conceito, não existindo uma única representação capaz de esgotar a totalidade e a complexidade de relações que cada conceito encerra. Segundo os autores, cada uma dos sistemas de representação destaca uma(s) propriedade(s) importante(s) do conceito mas dificulta a compreensão de outras.

No exemplo apresentado (figura 4) a primeira representação evidencia a partição de um rectângulo em duas partes iguais; a segunda destaca a ideia de quociente associada à noção de fracção; a terceira, recorre a palavras e a expressão “metade” destaca a igualdade de partes em que foi dividido o todo; a quarta associa o conceito “um meio” quando se considera 100 como unidade; na quinta representação destacam-se duas de quatro unidades; na sexta representação é assinalado um ponto equidistante de 0 e 1 na recta numérica (Castro e Castro, 1997).

Dominar um conceito matemático consiste em conhecer as suas principais representações, ou seja, o significado de cada uma das representações, assim como

operar com as regras internas de cada sistema de representações; consiste, também, em converter ou traduzir uma representação noutra, identificando qual delas é mais vantajosa para trabalhar com um determinado conceito (Castro e Castro, 1997). Os autores dão uma ênfase significativa às conexões a estabelecer entre as diferentes formas de representar um mesmo conceito, considerando importante dar aos alunos a oportunidade de escolher qual delas é mais vantajosa para trabalhar.

Zaskis e Liljedahl (2004) consideram, ainda, que a capacidade dos alunos se moverem suavemente entre as várias representações de um mesmo conceito, pode ser vista como uma indicação da compreensão conceptual e também como um objectivo do ensino.

As conexões entre as várias formas de representar são úteis para incentivar a comunicação na sala de aula e o aprofundamento da compreensão de ideias matemáticas e das suas relações pelos alunos. As representações matemáticas são, ainda, imprescindíveis no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Por esta razão, professores e alunos devem percorrer diferentes formas de representar o conhecimento matemático e estabelecer “pontes” entre representações não convencionais e representações convencionais, de forma a melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

# Capítulo III

---

## Metodologia

Neste capítulo apresento e justifico as opções metodológicas relativas à presente investigação.

Descrevo a intervenção pedagógica que suportou este estudo, incluindo a caracterização das tarefas propostas e do espaço onde decorreu este estudo. Apresento, ainda, os alunos intervenientes, referindo alguns aspectos do seu percurso escolar e a sua relação com a Matemática.

Por fim, descrevo os principais métodos de recolha e análise de dados.



# 1. Opção por uma metodologia qualitativa

Com este estudo pretendo compreender como é que as representações matemáticas são usadas pelos alunos para comunicar matematicamente num contexto de resolução de problemas e de que forma o discurso que ocorre influencia esta resolução.

Pretendo descrever e caracterizar as mais variadas faces dos fenómenos em análise, pelo que se torna imprescindível recorrer a uma metodologia que seja flexível e, em simultâneo, abrangente e que permita aprofundar especificidades circunscritas aos alunos envolvidos. Assim, uma metodologia de investigação de carácter qualitativo, parece ser a opção mais adequada, em consequência da complexidade e das multifacetadas características do fenómeno em análise.

Flick (2005) refere que a investigação qualitativa é particularmente interessante quando os fenómenos a estudar estão ligados às relações sociais e que o seu interesse aumenta em virtude da pluralidade de acontecimentos que lhe estão associados.

O estudo insere-se no paradigma interpretativo e tem carácter qualitativo pois pretende privilegiar “essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 16).

Patton (1990a, citado por Amado, 2007) defende que as investigações desta natureza requerem amostras pequenas, seleccionadas intencionalmente. O facto de as amostras serem pequenas vai permitir que a recolha de dados e a sua análise produzam resultados de alta qualidade — como são o caso das descrições detalhadas dos episódios — e, ainda, que emirjam importantes padrões que surgem da heterogeneidade.

Bogdan e Biklen (1994) defendem que a opção por uma investigação qualitativa deverá ser tomada quando:

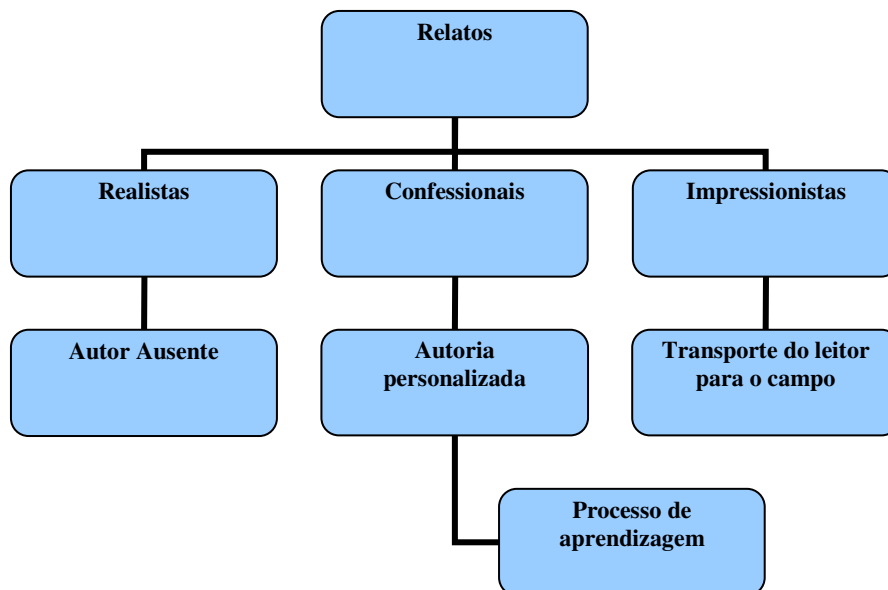
- a fonte directa de informação é o ambiente natural e o investigador é o instrumento fundamental na recolha de dados. Como tal, recorreu-se a equipamento vídeo ou áudio para registar os acontecimentos com a maior fidelidade possível, assim como a notas de campo que complementam os registos feitos;
- a investigação é descritiva. “Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não números” (p. 48). Dos dados fazem parte transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos;

- o investigador preocupa-se mais com o processo do que com o produto. Por exemplo, torna-se mais importante saber como é que os alunos negociam os significados e como é que começam a fazer opções de trabalho em função do que lhes é solicitado do que olhar apenas para os resultados finais;
- a análise de dados é feita de forma indutiva, ou seja, a recolha de dados não tem como intenção confirmar ou refutar hipóteses previamente construídas;
- o investigador preocupa-se com o significado e a compreensão das perspectivas dos participantes interessando-se pelos diferentes processos por eles usados.

Para Stake (1995), as investigações qualitativas são por natureza naturalistas, dando ao leitor uma cronologia da experiência, não atribuindo especial atenção a causas e efeitos, isto porque a característica principal da investigação qualitativa é a sua centralidade na interpretação. O autor refere que “as descobertas não são tanto ‘descobertas’ mas antes ‘asserções’ ” (p. 57). Desta forma, Stake (1995) considera que este tipo de investigação poderá ser subjectiva pois, por vezes, encontram-se mais dúvidas do que soluções.

Stake (1995) refere, ainda, que as investigações de natureza qualitativa estão predominantemente orientadas para o que se passa no terreno, pois permitem uma descrição densa, através de narrativas (pequenos episódios e relatos) que dão ao leitor muita informação da experiência realizada. Assim, possibilitam uma compreensão experiencial dos fenómenos estudados, uma vez que permitem “estabelecer uma compreensão empática com o leitor através da descrição” mas que transmite “ao leitor o que a própria experiência transmitiria” (p. 54). É neste sentido que Geelan (2007) afirma que “as narrativas acerca das aulas são poderosas porque têm em conta não só as práticas correntes e as situações, mas também, as experiências passadas dos professores e as suas futuras aspirações” (p. 140).

Flick (2005) distingue três tipos de relatos possíveis de observar numa investigação interpretativa, que podem ser sintetizados na seguinte figura:



**Figura 5. Tipos de relatos, segundo Flick (2005, p. 244)**

Segundo Flick a diferença entre os relatos de natureza realista e os confessionais reside na presença do investigador enquanto autor, que está mais ausente nos realistas. Os relatos impressionistas são apresentados como se de uma dramatização se tratasse, tendo como objectivo prender o leitor e, simultaneamente, conjugar a coerência e a credibilidade.

Neste estudo, optei por um relato de natureza confessional uma vez que estive presente, como participante, ao longo da investigação.

Flick (2005) destaca a existência de uma relação de dependência entre os três tipos de relato, uma vez que se podem complementar.

No relato deste trabalho procurei, ainda, seguir as recomendações de Amado (2007). Esta autora defende que o investigador deve dar alma e luz ao seu trabalho, dando-lhe movimento (vida) pelo que refere:

O investigador observa uma realidade que tenta compreender e interpretar segundo um quadro teórico. Mas para a descrever e dar a conhecer aos outros deve ser criativo e imaginativo, o que não significa fantasiar ou inventar. Antes, implica ser hábil com as palavras de modo a dar a conhecer aos outros a realidade que observou da forma mais real e vívida possível (Amado, 2007, p. 279).

## 2. A Intervenção Pedagógica

### 2.1. Descrição

Nesta secção apresento a descrição da intervenção pedagógica realizada nos meses de Outubro, Novembro e Dezembro de 2008 que incluiu a realização de dez sessões de trabalho com alunos do 9.º ano de escolaridade no tempo lectivo correspondente ao estudo acompanhado da turma.

Em cada sessão de trabalho foi distribuído o enunciado de uma tarefa aos alunos. Em seguida, eu próprio fiz a sua leitura, em voz alta, para que os alunos a acompanhassem e pudessem de imediato esclarecer alguma dúvida que o enunciado lhes suscitasse. As entoações feitas durante a leitura, os olhares dirigidos aos alunos em determinados momentos chave, ajudavam a ter uma melhor percepção do pretendido.

A seguir à leitura realizou-se um debate sobre a situação apresentada na tarefa. Nesta troca de ideias, os alunos apresentavam uma proposta de exploração e resolução. Procurei, aqui, assumir um papel de mediador, tentando não intervir no seu processo de resolução e nas suas formas de representação.

Após o debate, os alunos iniciaram a resolução da tarefa trocando ideias e sugestões entre si.

Por fim, os alunos apresentavam individualmente a sua proposta de resolução. Esta apresentação foi sempre oral tendo como suporte os registos escritos produzidos por cada um dos alunos.

No desenrolar das sessões de trabalho podem identificar-se cinco momentos principais:

- Distribuição e leitura da tarefa;
- Partilha de opiniões relativas ao enunciado da tarefa;
- Tentativa “individual” de resolução;
- Partilha de estratégias;
- Elaboração de registos finais, individuais.

As tarefas distribuíram-se ao longo do tempo de acordo com o quadro 6:

<b>Data</b>	<b>Designações das tarefas</b>	<b>Incidência Curricular</b>
2 de Outubro de 2008	1. Onde estou?	Lugares geométricos; Proporcionalidade directa
16 de Outubro de 2008	2. O Baile	Probabilidades e estatística
23 de Outubro de 2008	3. A Lata de Insecticida	Áreas e volumes
6 de Novembro de 2008	4. Caramelos e Bombons	Sequências
13 de Novembro de 2008	5. Tiro ao Alvo	Números relativos
20 de Novembro de 2008	6. Pintando Sólidos	Geometria
27 de Novembro de 2008	7. O Rectângulo	Polígonos semelhantes
4 de Dezembro de 2008	8. As sete localidades	Números e cálculo
11 de Dezembro de 2008	9. O Papa Bolachas	Sequências; Potências
18 de Dezembro de 2008	10. O Quadrado	Áreas

**Quadro 6. Calendarização da apresentação e exploração das tarefas**

A intervenção pedagógica culminou com uma apresentação pública integralmente conduzida pelos alunos. Este seminário foi destinado aos pais e aos restantes colegas da turma, tendo ainda sido convidada uma outra turma do 9.º ano com a qual os alunos tinham maior proximidade. Pretendeu-se, por esta via, dar a conhecer à comunidade escolar o trabalho desenvolvido pelos alunos, ao longo do primeiro período, nas aulas de estudo acompanhado.

## **2.2. As tarefas propostas**

Face ao objectivo do estudo, recorreu-se a tarefas associadas a diversos temas matemáticos que podem ser designadas por problemas. O significado atribuído a este conceito transparece nas palavras de Madruga e Carrillo:

Poder-se-á dizer que existe um problema sempre que queremos conseguir algo e não sabemos o que fazer, os métodos que temos ao

nosso alcance não servem. Dito de outro modo, temos uma meta mais ou menos clara e não existe um caminho imediato e directo para alcançá-la, portanto, vemo-nos obrigados a encontrar uma via indirecta, fazendo um desvio. (Madruga, 2002, p. 27)

O conceito de problema deve associar-se à aplicação significativa (não mecânica) do conhecimento matemático em situações que não são familiares, à consistência de tal situação, à existência de dificuldade na hora de realizar e à possibilidade de o problema ser resolvido, aplicando o dito conhecimento (Carrillo, 2004, p. 105, citado por Menina).

Jiménez (2002) considera que através de actividades de resolução de problemas os estudantes experimentam a força e a utilidade da Matemática no mundo que os rodeia, cabendo aos professores a principal responsabilidade por desenvolver nos alunos a confiança necessária para os abordar e resolver.

É desta forma que a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares (NCTM, 2007). Este modo de trabalhar deve ser encarado de forma ampla, uma vez que devem ser abordadas variadas situações que permitam, em simultâneo, estabelecer conexões, “experimental, conjecturar, provar, generalizar, discutir e comunicar” (APM, 1988; NCTM, 2007).

Neste sentido, Ponte (1987) afirma que a resolução de problemas traz à Matemática a “força vital” que a faz avançar, permitindo a possibilidade de fazer generalizações e estruturar o pensamento.

O artigo “A Matemática essencial para o século XXI”, publicado na revista Educação e Matemática, reforça a ideia de força vital defendida por Ponte e acrescenta: “aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática!” (NCTM, 1990, p. 23). O mesmo documento refere que a resolução de problemas é um processo de aplicação de conhecimentos, adquiridos anteriormente, a novas situações não rotineiras.

Back, Piggott e Pumfrey (2003) defendem que a resolução de problemas permite estimular nos alunos a criação de estratégias e procedimentos, expondo-os a um contexto em que as técnicas rotineiras não lhes oferecem qualquer resposta.

Em harmonia com esta ideia está Barbeau (2006) para quem a resolução de problemas permite participar na construção da Matemática pessoal, possibilitando uma visão mais autêntica da natureza da Matemática. Para este autor, a resolução de problemas envolve investigação, formulação de hipóteses e análise, permitindo que o aluno se comporte como se de um matemático se tratasse. A resolução de problemas possibilita ao aluno a utilização, mais rigorosa, de técnicas e processos que vão para além da mecanização.

Também Karp (2006) coloca a tónica nos conceitos a mobilizar pelos alunos ao afirmar: “Os estudantes devem ser confrontados com situações nas quais eles próprios são imprescindíveis para mobilizar conceitos já estudados e que sejam relevantes para o problema” (s/página).

É através desta mobilização que Piggott (2008) considera que a resolução de problemas possibilita ao professor proporcionar uma riqueza de oportunidades que permitem trabalhar em Matemática de forma bastante interessante e apelativa.

Carreira (2007) afirma que a resolução de problemas deverá ser considerada uma prioridade no ensino da Matemática, uma vez que permite aos alunos aprender a lidar com o mundo, assim como com situações problemáticas da vida quotidiana, gerando, assim, uma aprendizagem significativa e desenvolvendo a capacidade de interpretação e intervenção no real.

Associada à resolução de problemas, encontram-se um vasto conjunto de processos que lhe são inerentes, como é o caso da descoberta de regularidades, da formulação de conjecturas, da demonstração, da matematização de situações da vida real, da axiomatização de teorias e do refinamento de conceitos.

Desta forma e numa perspectiva educacional, Boavida et al., (2008) apontam a resolução de problemas como essenciais para os alunos se envolverem em questões de modelação matemática. Para estas autoras, na resolução de problemas podem destacar-se duas características principais: “a exploração e a confirmação”. Entenda-se por exploração a conquista, pela descoberta, de possíveis relações e o uso do raciocínio e de estratégias que levam a uma ou várias soluções. A segunda característica, a confirmação, envolve os processos de testar e apresentar contra-exemplos, assim como encontrar generalizações, tendo como suporte a justificação.

Foi ao olhar para as diferentes perspectivas apresentadas pelos autores estudados, que considerei que poderia constituir uma boa ferramenta, o trabalhar com tarefas que apelassem á resolução de problemas. Estas tarefas seriam, potencialmente,

favoráveis à interacção, à promoção do discurso, ao emergir de procedimentos e à mobilização de conhecimentos.

## 3. Participantes

### 3.1. A escola

Este estudo decorreu numa escola, sediada numa cidade do Sotavento Algarvio, onde me encontrava a leccionar no período em que decorreu a recolha de dados. Na altura, a escola era frequentada por 510 alunos, 189 do 2.º ciclo, distribuídos por 7 turmas, e 321 do 3.º ciclo distribuídos por 12 turmas: 9 turmas de currículo normal e 3 dos Cursos de Educação e Formação (CEF).

O edifício da escola é constituído por dois blocos interligados. Num bloco funcionam as aulas do 2.º ciclo e os serviços administrativos. As aulas do 3.º ciclo, a biblioteca, o refeitório, o bar e a papelaria estão situados no outro bloco. Existem ainda duas zonas de lazer: o pavilhão gimnodesportivo e os campos de jogos. A escola dispõe de diversas salas específicas, nomeadamente para a disciplina de Matemática.

A intervenção pedagógica decorreu numa sala de aula normal, uma vez que não se tornava necessário o recurso a tecnologia ou a materiais pedagógicos muito específicos. Sempre que considerei necessário, providenciei máquinas de calcular ou outros materiais.

Os alunos foram colocados a trabalhar numa mesa única, facilitando assim o diálogo entre eles. Esta organização do grupo de alunos permitiu a partilha de ideias e de “caminhos de resolução”. Na fotografia 1 podemos observar os alunos numa sessão de trabalho.



Fotografia 1. Sessão de trabalho

## 3.2. Os alunos

Um dos critérios estabelecidos nesta escola para a distribuição de serviço docente era o da continuidade das turmas ao longo do ensino básico. Deste modo, quando iniciei a preparação da intervenção pedagógica, sabia que não teria alunos novos. Era meu desejo desenvolver o estudo com alunos que desconhecia de modo a não ter à partida ideias pré-concebidas. Desta forma, pedi a colaboração dos colegas de Matemática da escola de modo a encontrar um grupo de alunos nessas condições. Entre os vários professores, apenas uma colega se mostrou disponível para colaborar comigo. As turmas que lhe foram atribuídas, de acordo com o critério que referi, eram todas de 9.º ano, o que acabou por reduzir a minha escolha aos alunos deste nível. A professora considerou que o estudo podia ser feito com os alunos da sua direcção de turma, pois isso facilitava os pedidos de autorização aos pais. No entanto, defendeu que esta intervenção não devia decorrer nas aulas de Matemática pois estes alunos iriam realizar um exame no final do 9.º ano. O facto de eu estar disponível no tempo lectivo correspondente ao estudo acompanhado desta turma foi decisivo para a realização da intervenção pedagógica em estudo acompanhado.

Nesta escola uma das medidas associadas ao Plano da Matemática é a atribuição de um tempo de estudo acompanhado (quarenta e cinco minutos) ao professor de Matemática. Em conjunto com a professora decidimos fazer dois grupos de trabalho: um trabalharia comigo numa sala e o outro com a professora noutra sala. Foram propostas as mesmas as tarefas aos dois grupos, sempre com o objectivo de desenvolver a comunicação matemática. A escolha dos grupos foi da responsabilidade da professora, uma vez que não queria interferir na sua organização.

O grupo de alunos participantes neste estudo era constituído por sete elementos femininos e por três masculinos. As suas idades variavam entre os 13 e os 15 anos. Apenas um aluno se encontrava a frequentar o 9.º ano pela segunda vez e uma aluna não tinha como língua materna o Português, uma vez que era oriunda da Ucrânia.

No quadro 7 apresento os níveis obtidos pelos alunos participantes no estudo, na disciplina de Matemática, no 7.º ano e 8.º ano (notas finais de ano).

Aluno	Nível final	
	7.ºano	8.ºano
Andreia M.	5	4
Andreia Q.	5	3
Catarina A.	3	3
Catarina M.	5	4
Marco	3	3
Mónica	5	5
Olga	5	5
Pedro	3	2
Ruben	3	4
Sofia	4	4

**Quadro 7. Resultados finais dos alunos**

Na primeira sessão os alunos apresentaram-se individualmente. Eu, além de também me apresentar, dei a conhecer o teor do trabalho que pretendia realizar e o seu objectivo.

Tendo em meu poder as autorizações dos pais para fotografar, filmar, áudio-gravar, entrevistar e reproduzir conversas, foi, em seguida, discutida e negociada a questão do anonimato. Os alunos mostraram desejo que o seu verdadeiro nome constasse no trabalho. Ficou acordado que seria referido apenas o nome próprio de cada um dos intervenientes e quando se verificasse duplicação do nome próprio seria acrescentada a inicial do apelido. Considero que esta decisão por um lado satisfaz os alunos e, por outro lado, não os coloca em qualquer situação de exposição face à comunidade educativa.

Após as apresentações e explicações iniciais, realizei uma conversa individual com cada um dos alunos, apoiada num guião (anexo 1) e, no seu decurso, os alunos afirmaram estar dispostos a envolverem-se em actividades que contribuam para melhorar a sua capacidade de comunicar matematicamente.

Nestas conversas surgiram algumas opiniões concordantes. Oito alunos referiram que nunca tiveram dificuldades em Matemática ao longo do seu percurso escolar, embora referissem apreciar mais uns temas do que por outros, e estar mais à vontade numas matérias do que com outras:

*Desde que entrei para a escola primária [referindo-se ao 1º ciclo] nunca tive dificuldades em Matemática. Sempre tenho gostado de Matemática, gosto muito de resolver problemas, exercícios, gosto mesmo de tudo.*

*Gosto de umas coisas mais e de outras menos, mas não posso dizer que há coisas que não gosto.*

*Gosto menos de geometria, penso eu, o que eu gosto mesmo é de fazer cálculos.*

Em suma, alguns destes alunos mostram menos apetência pela Geometria do que pelos outros temas. Acrescentaram, ainda, que preferem actividades desafiadoras:

*Prefiro um problema que me conduza à operação  $2 \times 3$*

*Prefiro um problema, para ter que pensar, não gosto de questões muito directas, pois assim não tenho que pensar.*

Procurei, também, saber se os alunos estavam habituados a realizar trabalhos escritos, por exemplo, relatórios escritos ou composições. Na generalidade, foram unânimes em afirmar que raramente realizaram outros trabalhos para além dos testes habituais. Recordaram ter realizado um trabalho escrito no 5.º ou 6.º ano no estudo da estatística. A maioria dos alunos declarou nunca ter realizado um relatório escrito:

*Só, às vezes, com as professoras estagiárias no 6.º ano é que fazíamos mas era na sala, não era nada de especial.*

*No 7.º ano para medir altura da escola fizemos um trabalho de grupo, através da sombra, depois tivemos que explicar, num relatório, como é que tínhamos feito.*

Nesta conversa procurei saber, ainda, quais os primeiros passos que realizavam quando tinham uma tarefa para resolver. A maioria dos alunos não respondeu a esta questão. Apenas dois referiram que gostam de elaborar esquemas para organizar os dados de forma a facilitar a escolha dos procedimentos a seguir para encontrar a resposta.

Além do que já referi, procurei compreender de que forma os alunos dão a conhecer aos professores e colegas as resoluções das tarefas e exercícios que lhe são propostos. Pelas respostas dadas, constatei que têm uma forte tendência para responder às questões que lhe são colocadas por escrito, no caderno, colocando num plano secundário o discurso oral:

*Quando são questões que envolvem vários passos de resposta prefiro responder por escrito para que a professora entenda tudo o que eu digo, só quando são questões de resposta directa prefiro oralmente.*

*Eu prefiro por escrito, fazendo esquemas e descrevendo, por escrito o que faço.*

*É mais por escrito, mas se me pedirem para responder oralmente eu também respondo, mas prefiro por escrito, porque sempre dá para rever o que escrevi.*

*Depende, se for uma questão fácil é melhor oralmente. Mas se pedirem para justificar um passo de uma resolução prefiro responder por escrito para não me esquecer de nada.*

As respostas dadas mostram uma tendência para as resoluções escritas das tarefas que lhes são propostas em sala de aula. Aparentemente, os alunos parecem não estar muito habituados ao confronto, à discussão e à partilha de ideias.

Por fim, procurei saber se gostam de Matemática. A maioria das respostas foi positiva:

*Eu penso que gosto de Matemática, só não gosto quando temos que saber montes de coisas, como, por exemplo, critérios, fórmulas e isso.*

*Eu sempre adorei Matemática e a nossa professora também tem contribuído para eu gostar cada vez mais. Nós temos que saber montes de coisas, mas tal como a professora diz, a Matemática que nós aprendemos se olharmos com alguma atenção à nossa volta, ela está ali escondida.*

*Eu gosto de Matemática, mas é difícil.*

*Isso é uma questão muito difícil, porque eu umas vezes gosto e outras não gosto. Mas a minha professora está sempre a tentar usar exemplos e aplicações da Matemática para nós vermos que é importante.*

*Eu como não tenho muitas dificuldades, gosto de Matemática. Mas tenho que estudar muito.*

Os alunos afirmaram gostar de Matemática e reconhecem a sua importância. O trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pela professora desta disciplina, que os acompanha deste o 7.º ano de escolaridade, parece ter sido decisivo para desenvolver este interesse e gosto pela Matemática.

## 4. Recolha de dados

No presente estudo, assumi um papel determinante e activo na recolha de dados. Esta recolha foi, na maior parte das vezes, concomitante com a dinamização das sessões de trabalho em que foram propostas tarefas aos alunos.

Os dados foram recolhidos através de três métodos: observação, entrevista e recolha documental, como é recomendado por vários autores (Stake 1995; Bogdan e Biklen, 1994). No quadro 8 apresento, em síntese, os procedimentos seguidos.

Métodos	Fontes	Formas de registo	Material Empírico
Observação	<ul style="list-style-type: none"><li>• Aulas de Estudo Acompanhado</li><li>• Seminário</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Gravação áudio</li><li>• Gravação vídeo</li><li>• Registos fotográficos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Notas de Campo</li><li>• Transcrições</li><li>• Fotografias</li></ul>
Entrevista	<ul style="list-style-type: none"><li>• Encontro individual com cada um dos alunos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Gravação áudio</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Transcrições</li></ul>
Recolha de documentos	<ul style="list-style-type: none"><li>• Alunos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Produções escritas dos alunos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Materiais de apoio às aulas</li><li>• Trabalhos dos alunos</li></ul>

Quadro 8. Recolha de material empírico

### Observação

A observação é algo que nós fazemos no nosso quotidiano.

Como professor observo os meus alunos, nomeadamente a forma como se comportam, como trabalham na aula de Matemática, como interagem ou como partilham ideias. Por seu lado, os alunos também observam o modo como eu dinamizo a aula, como me dirijo a eles, como falo, como me visto ou, entre outros aspectos, os gestos que esboço. No entanto, há situações em que a observação tem exigências específicas, nomeadamente para responder a questões concretas, em educação, destina-se, especialmente, a investigar problemas, a procurar respostas para questões e a ajudar na compreensão do processo de ensino e aprendizagem (Sousa, 2005).

A importância da observação advém do facto de permitir registar os comportamentos e as reacções dos alunos às tarefas propostas à medida que vão ocorrendo. Matos e Carreira (1994) destacam a importância do observador detectar factos ou situações que podem passar despercebidas aos participantes, por serem demasiado rotineiras, mas que podem ser relevantes para o estudo.

No presente estudo, assumi o papel de observador participante uma vez que fui, simultaneamente, investigador e o professor dinamizador da intervenção pedagógica. Segundo Rocha (2002), a observação participante permite “examinar mais de perto, no contexto natural da sala de aula, os efeitos resultantes da realização de tarefas” (p. 103). A observação participante é uma estratégia que permite ouvir e ver as pessoas no seu ambiente natural (Matos, 1995) e, segundo, Abrantes (1994) permite ao investigador ganhar a confiança dos alunos, particularmente, à medida que o conhecimento mútuo vai aumentando.

Todas as sessões da intervenção pedagógica foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas de modo a facilitar a análise dos dados. O seminário final, que marcou o encerramento da recolha de dados, foi registado em vídeo e áudio.

## **Entrevista**

A entrevista na investigação qualitativa procura escutar histórias únicas de cada entrevistado. Por isso, o entrevistador deve chegar junto do entrevistado com uma pequena lista de perguntas orientadas para o problema em estudo (Stake, 1995). Para Bogdan e Biklen (1994) “a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p. 134). Estes autores apresentam vários tipos de entrevistas que variam segundo o seu grau de estruturação: entrevistas estruturadas, semi-estruturadas, ou completamente abertas. Nas primeiras é exigido um guião ou um conjunto de questões a serem seguidas pelo investigador. As entrevistas semi-estruturadas estão também apoiadas num guião, com um conjunto de questões ou tópicos, podendo o entrevistador colocar novas questões caso o entrevistado não aborde o tema proposto. Relativamente às entrevistas abertas, o entrevistado é convidado a falar livremente sobre um determinado tema do interesse do investigador.

Neste estudo optei por seguir a recomendação de Stake (1995) e de Bogdan e Biklen, (1994). Na conversa mantida individualmente com os alunos, segui um conjunto

de questões (anexo 1). Procurei recolher dados sobre o gosto dos alunos pela disciplina de Matemática, o interesse pela Matemática, pelas aulas e pela resolução de problemas. Esta conversa decorreu antes da 1.<sup>a</sup> sessão da intervenção pedagógica. Todas as conversas com os alunos foram gravadas e posteriormente transcritas.

### **Recolha documental**

Tal como na observação e na entrevista, na recolha documental é necessário ter as ideias bem definidas e saber que documentos se pretendem recolher (Stake, 1995).

Neste estudo, a recolha de documentos incidiu sobre as produções escritas produzidas pelos alunos na resolução das dez tarefas apresentados ao longo da intervenção pedagógica e, ainda, nas reflexões escritas pelos alunos onde manifestaram as suas opiniões acerca do trabalho realizado. Entre estas produções estão os relatórios, solicitados aos alunos, da resolução adoptada em cada uma das tarefas.

Conforme é referido por Santos (2005), a realização de relatórios escritos funciona como um catalisador de reflexão, uma vez que faz apelo à articulação de ideias, à explicitação de procedimentos e à análise crítica dos processos e dos resultados obtidos.

## 5. Análise de dados

Ao longo da intervenção pedagógica que, culminou com o seminário, foi possível recolher uma grande quantidade de informação.

Segundo Boavida (2005, referindo Patton), a análise qualitativa, consiste em reduzir a informação recolhida, ou seja, separar o trivial do significativo, identificar padrões relevantes, encontrar sentido nos dados e construir uma forma de comunicar o essencial.

Stake (1995), considera ainda que “analisar significa, na essência, fraccionar” (p. 87). O autor sublinha que esta tarefa é complexa e multifacetada, uma vez que a função mais importante na investigação qualitativa não é acumular todos os dados possíveis, mas sim “deitar fora” a maior parte dos dados acumulados. Esta selecção exige um exame minucioso e constante, onde o segredo é conseguir separar o “essencial do trivial”.

Esta necessidade de saber eleger a informação necessária e pertinente, prende-se com a importância dos dados seleccionados permitirem ilustrar de forma clara e inequívoca a realidade estudada. Boavida (2005) refere que não existem fórmulas nem receitas para estas actividades, tornando os estudos qualitativos únicos e o processo de análise igualmente único.

Apoiando-me na ideia de unicidade como mote, adoptei uma perspectiva interpretativa (Patton, 1990b), através da qual procurei compreender e interpretar os vários dados recolhidos, numa estreita ligação com o objectivo e questões do estudo e com os pressupostos teóricos que me serviram de referência.

Na sequência de uma análise preliminar de todos os dados recolhidos nas dez sessões de trabalho, decidi fazer uma “análise microscópica” (Boavida, 2005) destas sessões. Decidi, também, que o seminário final seria, igualmente, objecto de uma análise detalhada.

Desta forma, o processo de análise dos dados passou por cinco fases distintas:

- Transcrição dos registos áudio das sessões de trabalho e análise preliminar dos dados recolhidos;
- Selecção das tarefas cuja exploração nas sessões de trabalho seria objecto de análise microscópica;

- Análise microscópica das sessões de trabalho associadas às tarefas seleccionadas;
- Análise microscópica do seminário final.
- Análise holística da intervenção pedagógica.

O processo de transcrição dos registos áudio das sessões constituiu a primeira etapa da análise das sessões de trabalho. Muitas vezes, só depois de cada sessão, ainda no próprio dia, é que me apercebia da natureza dos diálogos mantidos, iniciando nesse momento uma primeira análise, mesmo que ainda um pouco superficial.

A selecção das tarefas para a realização da análise microscópica aconteceu no final da intervenção pedagógica depois de ter todos os documentos produzidos pelos alunos em meu poder. Juntamente a estes também se encontravam as notas de campo que elaborava no final de cada sessão.

A escolha das tarefas cuja exploração, nas sessões de trabalho, seria analisada detalhadamente não foi aleatória. Nesta selecção procurei conjugar os seguintes critérios: em primeiro lugar, que se tivessem realizado em diferentes momentos da intervenção pedagógica de modo a permitir encontrar alguma diferenças nos diálogos e nas representações produzidas pelos alunos. Em segundo lugar, tive a preocupação de que fossem de natureza diferente e sobre temas distintos. Por fim, preocupei-me com a qualidade dos registos dos alunos.

Num primeiro momento, pensei analisar o material empírico recolhido na primeira, quinta e décima sessões, de modo a fazer a análise do processo evolutivo dos alunos. Após uma primeira análise de todas as resoluções dos alunos, constatei que todas elas eram interessantes e ricas, pelo que acabei por optar pelos problemas trabalhados na primeira, sexta e nona sessões. Estas foram extremamente ricas tanto ao nível dos movimentos discursivos, como ao nível dos registos escritos efectuados pelos alunos. Além disso, incidiam sobre tópicos curriculares distintos como se pretendia.

Na análise microscópica das sessões de trabalhos relativas às tarefas seleccionadas, procurei identificar todas as particularidades inerentes à resolução de cada tarefa, métodos, estratégias, diálogos mantidos, negociação de significados, percurso e dificuldades. Foi ainda meu propósito procurar diferentes formas/processos de resolução para uma mesma tarefa. Para cada uma das tarefas analisadas foram lidas todas as respostas e justificações finais dos alunos no intuito de encontrar concordâncias.

A análise microscópica do seminário refere-se a um olhar “crítico” das ideias e opiniões, apresentadas pelos alunos relativamente a alguns tópicos que considerámos pertinentes partilhar com a comunidade escolar: *Como decorreram as aulas de estudo acompanhado; O que é resolver um problema e qual a importância das actividades realizadas.*

No que concerne à análise holística da intervenção pedagógica, procurei identificar harmonias, transversais a toda ela. Foi a partir daqui que surgiram os itens organizadores que vieram a orientar a referida análise: *interpretação do enunciado das tarefas; precipitações iniciais; uso de opiniões de outros colegas como forma de justificar ou continuar um próprio pensamento; recurso a representações; o discurso escrito e o discurso oral; tarefas mobilizadoras de conceitos e procedimentos; extrapolação para outros conhecimentos curriculares; e intervenções do professor.*

Nesta análise procuro dar ênfase ao caminho percorrido pelos alunos e por mim, enquanto professor, que procurou dinamizar as sessões de trabalho de forma amistosa e promovendo a interacção, a partilha e a construção de conhecimento.

No quadro 9, sintetizo as seis etapas que constituíram este estudo de modo a ilustrar o caminho percorrido desde a identificação da problemática a estudar, passando pela operacionalização de metodologia de investigação e enquadramento teórico, de modo a obter vias e elementos de resposta às questões que nortearam a investigação.

		<b>Actividades</b>	<b>Finalidades</b>
<b>1ª Etapa</b>	Fase Exploratória	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Motivações pessoais</li> <li>• Leituras</li> <li>• Recolha documental</li> </ul>	Definição da problemática geral
<b>2ª Etapa</b>	Definição de objectivos	Definição das questões de investigação	
<b>3ª Etapa</b>	Plano Teórico	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Leituras</li> <li>• Apropriação de conceitos</li> </ul>	Definição das linhas teóricas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comunicação matemática</li> <li>• Discurso</li> <li>• Representações matemáticas</li> <li>• Resolução de problemas</li> </ul>
<b>4ª Etapa</b>	Trabalho de campo	Planificação e Implementação da Intervenção Pedagógica Recolha de dados: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Entrevistas</li> <li>• Observação participante</li> <li>• Recolha documental</li> </ul> Organização dos dados	Obtenção de dados empíricos
<b>5ª Etapa</b>	Análise de dados	Análise qualitativa <ul style="list-style-type: none"> <li>• Análise microscópica (três tarefas e seminário)</li> <li>• Análise macroscópica da intervenção pedagógica</li> </ul>	Interpretação dos dados empíricos em articulação com as linhas teóricas e questões do estudo
<b>6ª Etapa</b>	Resultados e conclusões	Síntese e apresentação das respostas às questões de investigação	

**Quadro 9. Organização da investigação**

## 6. Apresentação dos dados

Tal como Bogdan e Biklen (1994) referem, numa investigação qualitativa é necessário que o investigador “pegue nos dados” e os observe de forma sensata e atenta, de modo a fazer emergir o seu valor.

No capítulo quatro, designado por *aprender a comunicar resolvendo problemas*, começo por apresentar a análise de três sessões de trabalho, à luz do ponto de vista teórico que emerge da revisão da literatura desenvolvida e do meu posicionamento, enquanto professor, num contexto em que a resolução de problemas é considerada um instrumento fundamental. Neste capítulo apresento transcrições de diálogos entre os participantes deste estudo e excertos de algumas representações produzidas pelos alunos na resolução das tarefas:

- Onde estou?
- Pintando Sólidos.
- O Papa Bolachas

Descrevo a exploração de cada uma delas de forma pormenorizada - análise microscópica - dando enfoque às resoluções, representações, discursos e confrontos de ideias apresentados pelos alunos nas sessões de trabalho. Refiro, ainda, algumas dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução dos problemas e apresento um breve balanço do envolvimento dos alunos nas tarefas.

Tendo por referência Patton (2002) e Stake (1995), após a redução da informação recolhida, parte-se para a apresentação e análise dessa mesma informação.

No que diz respeito às sessões de trabalho anteriormente referidas, a apresentação e análise de dados seguiu o seguinte alinhamento:

- Descrição da tarefa e respectiva caracterização;
- Apresentação da tarefa;
- Apresentação de episódios;
- Apresentação de digitalizações do trabalho realizado pelos alunos;
- Considerações relativas aos vários episódios;
- Dificuldades dos alunos associadas à resolução da tarefa.

Após a descrição da tarefa e uma breve caracterização da mesma, no que se refere a tópicos do programa de Matemática do ensino básico, apresento alguns episódios mais significativos que estão identificados com um título que tenta dar ao leitor informação relativa ao conteúdo do episódio. Para encontrar este título, procurei no episódio, uma fala ou uma observação dos alunos que permitisse ilustrar a sua principal incidência.

As falas constantes de cada episódio são numeradas de forma sequencial, por episódio, iniciando cada uma sempre no número 1.

Na análise que é feita dos vários episódios e sempre que pretendo referir-me a um movimento discursivo, faço-o recorrendo à numeração sequencial atribuída a cada narrativa, usando neste caso, o número entre parêntesis rectos [1].

Acompanhando os vários episódios também se encontram digitalizações das resoluções dos alunos que permitem, ao leitor, uma melhor percepção do tipo de trabalho desenvolvido pelos alunos.

Na sequência da análise das três sessões de trabalho incluo a análise do seminário final, onde procurei, em particular, trazer para primeiro plano a voz dos alunos. Segue-se uma análise transversal da globalidade da intervenção pedagógica em que, orientando-me pelas questões do estudo, visei destacar singularidades e aspectos comuns.



# Capítulo IV

---

## **Aprender a comunicar, resolvendo problemas**

Neste capítulo pretendo dar a conhecer a análise dos dados recolhidos ao longo da intervenção pedagógica tendo por referência os objectivos do estudo.

Organizo-o em cinco partes. Nas primeiras três, apresento uma análise microscópica da exploração de três tarefas: *Onde estou?*, *Pintando sólidos* e *O Papa Bolachas*. Em seguida, analiso o seminário final realizado pelos alunos no encerramento da intervenção pedagógica. Por fim, na última parte, intitulada *De onde estou?... ao Seminário final*, pretendo ilustrar e evidenciar aspectos relevantes do percurso destes alunos ao longo deste estudo. Procuo destacar aspectos significativos da actividade desenvolvida, tendo como ponto de partida a análise microscópica do processo de resolução das três tarefas referidas e do Seminário.



# 1. Onde estou?

## 1.1. Descrição e análise

A tarefa *Onde estou?*<sup>2</sup> foi explorada na primeira sessão de um conjunto de dez. Esta sessão organizou-se em torno de uma série de etapas, que se poderão identificar como os seus principais momentos: (a) leitura da tarefa; (b) interpretação e exploração individual da tarefa; (c) partilha de opiniões e interpretação colectiva do enunciado; (d) resolução da tarefa com recurso a instrumentos de desenho e medição e (e) registos escritos e conclusões. Este padrão organizativo da sessão foi mantido para as restantes tarefas propostas, com excepção do recurso a instrumentos de desenho e medição.

A tarefa escolhida para esta sessão envolvia directamente um conteúdo matemático estudado no 8.º ano de escolaridade – Lugares Geométricos – e permitiu estabelecer conexões com a proporcionalidade directa, estudada no 7.º ano e com o uso de escalas que os alunos estudaram em anos anteriores e em outras disciplinas.

### Onde estou?

Imaginemo-nos perdidos no Alentejo, entre Almodôvar e Castro Verde. Nessas povoações existem igrejas que repicam os sinos de hora a hora, com grande precisão e timbres diferentes, de modo a que sejam ouvidos em dezenas de quilómetros em seu redor e possam ser distinguidos sem problemas.

A certa altura ouvimos os sinos de Castro Verde, passam 55 segundos do meio-dia. Querendo isso dizer que o som desses sinos, emitido às 12 horas precisas, demorou 55 segundos até nos alcançar. Pouco depois ouvimos os sinos de Ourique e olhamos para o relógio, e tinham passado 80 segundos do meio-dia.

Onde é que nós nos encontramos?

Foi minha intenção nesta sessão, assim como nas restantes, apresentar tarefas que, potencialmente, fossem, para os alunos, problemas no sentido em que não

---

<sup>2</sup> Adaptada de Crato, N. (2008), p.71

poderiam resolvê-las por aplicação imediata de procedimentos conhecidos de antemão. Pretendia que levassem os alunos à exploração de ideias e conceitos matemáticos e, em particular, recordar conceitos abordados em anos anteriores.

Quando me aproximei da sala os alunos já me esperavam à porta e li nos seus rostos alguma expectativa em relação ao trabalho que iríamos desenvolver. Entraram de forma ordeira e rapidamente se sentaram, dois a dois.

Pedi-lhes que juntassem as mesas de forma a trabalharem em grupo, o que o fizeram de imediato. Não surgiram quaisquer questões antes de lhes ser entregue o enunciado da tarefa. Nesta primeira sessão senti alguma ansiedade no rosto dos alunos, a presença de um gravador, em cima da mesa, para registar as interações verbais pode ter causado, inicialmente, algum receio. No entanto, ao longo da sessão os alunos foram perdendo o receio e aos poucos foram começando a falar. Este “receio” inicial do gravador não surgiu em nenhuma das sessões seguintes.

Findas algumas considerações iniciais, entreguei o enunciado da tarefa e propus uma leitura silenciosa. Em seguida, fiz a leitura em voz alta, para que todos a acompanhassem. Após a leitura, procurei iniciar um debate de ideias de modo a promover a interpretação da tarefa. A primeira reacção dos alunos foi dizer que faltava algo no enunciado da tarefa.

Para alguns alunos a falta de um dado no problema tornava difícil ou até impossível iniciar a sua resolução. O episódio que apresento em seguida “*Falta aqui um dado*”, ilustra a discussão inicial.

### ***Episódio 1: Falta aqui um dado...***

1. **Ruben:** *É assim .... O que eu acho é que falta aqui um dado, ou seja, a velocidade do som.*
2. **Professor:** *Ora bem. Não é dada a velocidade do som...*
3. **Mónica:** *[Interpelando o professor]. Mas nós sabemos que é 340 metros por segundo, já demos isso em Ciências Físico - Químicas.*
4. **Ruben:** *Sim, eu sei isso, Mónica, mas acho que isso deveria ser aqui referido.*
5. **Sofia:** *Mas as pessoas que se perderam no Alentejo possivelmente também não sabiam.*

Este diálogo inicial foi determinante na medida em que permitiu aos alunos ultrapassar a primeira dificuldade, devido à inexistência de um dado no enunciado do problema [1], que julgavam inviabilizar a resolução.

O debate trouxe para a sala de aula o confronto de ideias e promoveu a mobilização de conhecimentos de outra disciplina – concretamente Ciências Físico Químicas – o que foi favorável ao estabelecimento de conexões entre a Matemática e outra área curricular.

Quando Rúben se referiu à falta um dado no enunciado [1], senti vontade de validar a sua afirmação e dar orientações para que este obstáculo fosse ultrapassado. No entanto, Mónica [3] antecipou-se e deu essa informação, dispensando a minha intervenção.

A informação adicional, trazida por Mónica, permitiu a todos prosseguirem com a realização da tarefa.

Foi minha intenção proporcionar momentos de partilha de ideias e discussão, levando os alunos a construírem as suas próprias resoluções, e evitando que o discurso da sessão fosse modelado à luz do *padrão de interação IRA* (Cazden, 2001).

Ultrapassada a situação da falta de um dado [3], os alunos passaram à exploração individual da tarefa. No entanto, espontaneamente se começou a desencadear uma discussão conjunta (episódio 2), que legitimei deliberadamente.

### ***Episódio 2: Vamos fazer um gráfico... quer dizer um desenho***

1. **Mónica:** *Eu acho que das duas uma, ou estamos mais perto de Castro Verde porque o som chegou a nós primeiro ou os sinos de Castro Verde tocam mais alto que os de Ourique.*
2. **Ruben:** *Isso não invalida nada, porque por mais alto que toquem os sinos a velocidade é a mesma, pode tocar bastante alto mas a velocidade vai ser a mesma, mas concordo com a Mónica quando ela diz que estamos mais perto de Castro Verde do que de Ourique.*
3. **Sofia:** *O Ruben tem razão.*
4. **Mónica:** *Mas repara a diferença dos 55 segundos para os 80 segundos não é muito grande.*
5. **Ruben:** *Nós vamos fazer isto em gráfico?*
6. **Professor:** *Um gráfico?*

7. **Rúben:** *Estou com uma ideia...*
8. **Professor:** *Sim...*
9. **Rúben:** *Sim, quer dizer um desenho. Ponho aqui Castro Verde e aqui Ourique, vou ver quantos quilómetros separam estas localidades e depois faço uma regra de três simples de acordo com o tempo que o som levou a chegar até nós.*
10. **Mónica:** *Sim porque nós sabemos que a velocidade do som é de 340 metros por segundo, então temos que fazer  $55 \times 340$  e  $80 \times 340$ .*
11. **Sofia:** *É isso, é isso.*
12. **Professor:** *Neste momento, quais são os conhecimentos matemáticos que vos parece que podemos aplicar para chegar à resposta pretendida?*
13. **Rúben:** *Regra de 3 simples.*
14. **Mónica e Sofia:** *Proporções.*
15. **Professor:** *Mais coisas...*
16. **Marco:** *Por exemplo, se tivéssemos um mapa com estas localidades podíamos aplicar escalas.*
17. **Professor:** *E mais nada?*
18. **Rúben:** *Podemos usar o compasso.*
19. **Andreia:** *Sim, usando o compasso, era geometria [concordando e reforçando a ideia do Rúben].*
20. **Professor:** *Sim, mas geometria é muito lato. Dentro da geometria há algum capítulo que tenham estudado, em particular, que se refira a este tipo de construção que querem fazer?*
21. **Marco:** *Sim. São os Lugares Geométricos [muito convicto do que estava a afirmar].*
22. **Professor:** *Isso mesmo, os Lugares Geométricos.*
23. **Sofia:** *Pois é, já apareceu um problema deste tipo nos exames do 9.º ano.*
24. **Mónica:** *Está bem, está. Está certo.*

Este episódio, mostra o quão importante foi o discurso mantido. Se, por um lado, o discurso emergente permitiu dar vida à exploração da tarefa e à consequente prossecução por parte dos alunos que não a abandonaram, por outro lado, é de realçar

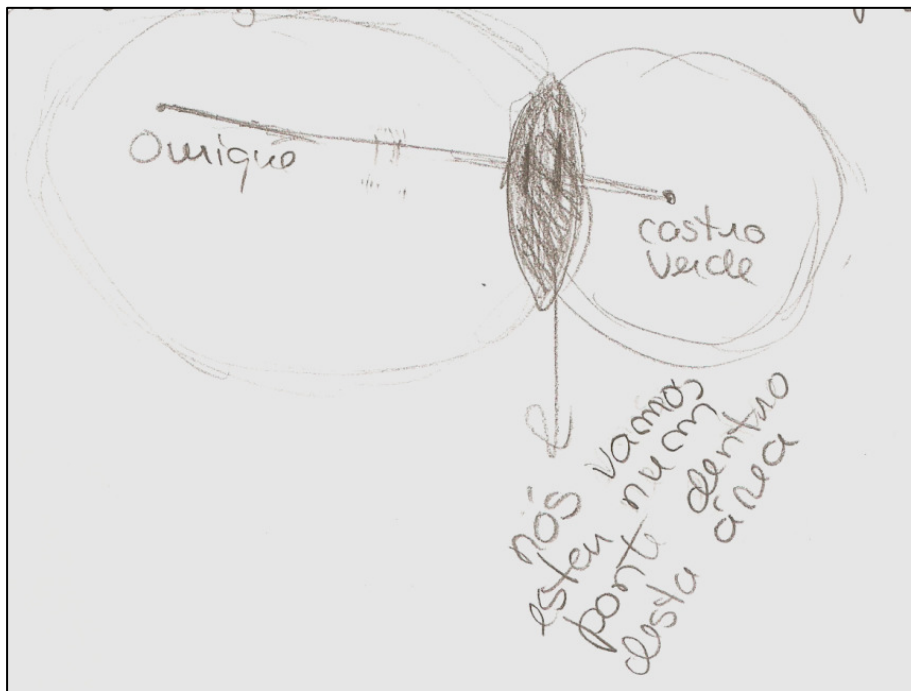
que os movimentos discursivos tiveram, essencialmente, origem nos alunos. A discussão mantida e suportada em torno da tarefa, depois de ultrapassada a questão da velocidade do som, veio permitir a todos os alunos iniciar um processo de resolução.

É de salientar que numa sequência de vinte e quatro intervenções, apenas fiz seis, que, na sua generalidade, apelaram a um esclarecimento das alegações que iam sendo apresentadas, tendo contribuído para apoiar/suportar um discurso matematicamente produtivo. No caso da intervenção [20], a questão que coloquei tinha como objectivo avivar a memória dos alunos, relativamente a conhecimentos já explorados e trabalhados. Esta questão foi prontamente respondida por Marco [21] que referiu, de imediato e de modo bastante seguro “*lugares geométricos*”. Valorizei a sua afirmação com a expressão “*isso mesmo*”, expressão que legitimava a contribuição do aluno, por considerar que esta validação era muito importante, para dar, aos alunos, confiança e vontade de continuar.

Pela análise das intervenções dos alunos, sobressai que estes se apropriam das ideias expostas pelos colegas de forma a prosseguirem, tal como se pode observar em [9], [10] e [11].

Sofia [11], deixa transparecer a utilidade do discurso como suporte para o aperfeiçoamento do seu próprio raciocínio. Quando diz aos colegas: “*É isso, é isso*” concorda com eles, dando credibilidade a todas as afirmações, que serviram para desbloquear e permitir continuar a exploração da tarefa.

Quando Ruben [5] questiona se vão fazer um gráfico, estava decerto a referir-se a uma representação pictórica, uma vez que substitui a palavra “gráfico” pela palavra “desenho” [9]. Tentava fazer uma aproximação da modelação da tarefa, conforme se pode constatar na representação que fez na sua folha de respostas (figura 6).



**Figura 6. Representação de Rúben**

A representação apresentada por Rúben estava muito próxima do que viria a ser a resposta à tarefa, apresentada pelos colegas. Embora com algumas imprecisões, pois o aluno estava a considerar o conjunto de pontos originado pela intersecção de dois círculos em vez de apenas os pontos de intersecção das circunferências, o que é um facto é que esta representação poderia, a meu ver, permitir avançar na exploração da tarefa e possibilitar o confronto e a troca de opiniões.

Ao aperceber-me da representação de Rúben (figura 6) e uma vez que aí estava escrito “*nós vamos estar num ponto dentro de esta área*”, pedi-lhe que explicasse aos colegas o que tinha feito na sua folha de registos. Através desta via procurava desencadear uma *comunicação reflexiva* (Brendefur e Frykholm, 2000) que potenciase a exploração da tarefa.

O episódio, “*Ah, pois é...*” mostra-nos como foi importante a representação de Rúben e as explicações apresentadas. Este aluno conseguiu, através das pequenas indicações que fui dando, identificar e corrigir o erro que tinha na sua representação inicial.

### ***Episódio 3: Ah! pois é...***

1. **Rúben:** *Oh professor, eu já fiz, mas agora, quer dizer que nos podemos encontrar aqui nesta zona toda. [referindo-se ao conjunto de pontos compreendido entre dois arcos de circunferência]*
2. **Professor:** *Vê lá bem, estamos a falar de que figura geométrica?*
3. **Rúben:** *de circunferências!*
4. **Professor:** *Então se são circunferências....*
5. **Rúben:** *Ah! Pois é, são só estas linhas, [referindo-se aos arcos], neste caso ou estamos neste ponto ou neste ponto. [referindo-se aos pontos de intersecção das duas circunferências]*

O episódio 3, dá-nos conta de como, a partir das ideias de Rúben, ainda que inicialmente incorrectas, foi possível encontrar o rumo a dar à exploração da tarefa. As minhas intervenções [2] e [4] foram no sentido de o fazer reflectir sobre a sua representação (figura 6) de forma a identificar o que nela era problemático.

Apesar do diálogo ocorrer entre mim e Rúben, os restantes alunos estavam atentos, o que lhes permitiu delinear um percurso coerente para a resolução da tarefa e encontrar uma estratégia de acção idêntica à de Rúben. Esta ocasião permitiu o desenvolvimento de um momento de partilha e reflexão de ideias, útil para todos.

Pode dizer-se que do “diálogo nasceu a luz” que permitiu, mais uma vez, ultrapassar as dificuldades e as dúvidas. As palavras de Rúben foram uma “bengala” que rapidamente foram apropriadas por todos.

Na continuação do trabalho, os alunos usaram o raciocínio proporcional – regra de três simples –, para determinar, em metros, as distâncias reais, apoiando-se ainda na representação produzida por Rúben e no diálogo que este manteve com o professor.

A figura 7, extracto da resolução de Pedro, mostra as estratégias usadas pelo aluno para determinar as distâncias reais a que nos encontrávamos das referidas localidades, de acordo com as condições apresentadas pela tarefa.

No problema sabemos que estamos entre Almodôvar e Castro Verde. Os sinos da Igreja de Castro Verde demoram 55 segundos até chegarem até nós e os de Ourique 80 segundos. Visto que a velocidade do som no ar é de 340 m/s podemos calcular as distâncias da Igreja de Castro Verde e de Ourique através de uma Regra de 3 simples:

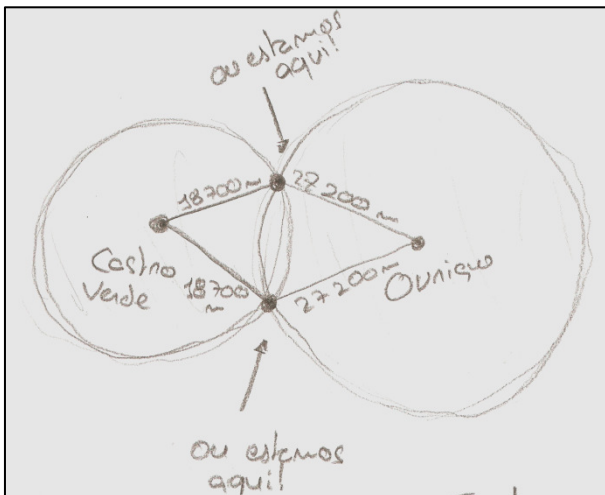
Castroverde	Ourique
340m — 1s	340m — 1s
x m — 55s	x m — 80s
$x = \frac{340 \times 55}{1} \Leftrightarrow$	$x = \frac{340 \times 80}{1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{18.700}{1} \Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow x = \frac{27.200}{1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 18.700m$	$\Leftrightarrow x = 27.200m$

Figura 7. Registo de Pedro

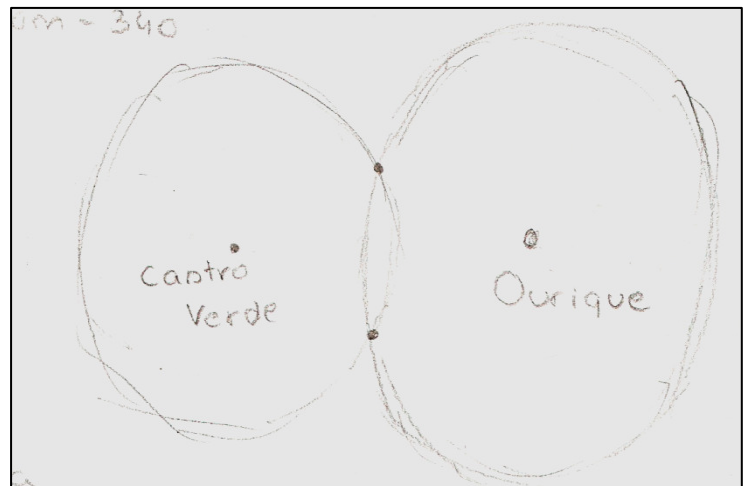
Este aluno acompanha os seus cálculos com uma breve descrição do problema que completa, usando as suas palavras “a velocidade do som no ar”.

O registo (figura 7) deixa transparecer que Pedro entendeu o que estava a fazer, assim como mostra o conhecimento que mobilizou para prosseguir e complementar a sua representação, embora não tenha participado nos diálogos.

As figuras 8 e 9 mostram duas representações que foram produzidas depois de Rúben ter mostrado a sua representação e mantido o diálogo com o professor, constante no episódio 3.



**Figura 8. Representação de Pedro**



**Figura 9. Representação de Andreia**

As representações usadas por Pedro e Andreia para modelar a tarefa são ilustrativas das que foram realizadas pelos restantes alunos. Estas apresentavam o esboço das circunferências que se obtinham com centro em cada uma das localidades o que permitia, de forma inequívoca, identificar dois pontos que satisfaziam uma das condições da tarefa.

Na representação de Pedro, há um conjunto de informações, nomeadamente as distâncias reais (raios das circunferências) e a afirmação “*ou estamos aqui, ou estamos aqui*” que mostra que a sua representação o conduz para duas soluções. Na representação de Andreia, embora mais incompleta, são também evidentes os pontos correspondentes à intersecção das duas circunferências.

Juntamente com as representações pictóricas, através das quais modelaram a tarefa proposta, os alunos registaram, por escrito, todo o procedimento necessário para encontrarem a sua solução, mobilizando conhecimentos importantes (proporções, escalas, regra de três simples e lugares geométricos). Desta forma, estabeleceram conexões entre vários conhecimentos trabalhados e explorados em anos anteriores. Neste entrosamento de conhecimentos foi utilizado o elemento em falta no enunciado, velocidade do som, que facilmente foi aceite por todos.

Neste momento os alunos já tinham obtido a representação pictórica que modelava a tarefa, assim como conheciam a distância real, em metros, a que nos poderíamos encontrar das localidades de Ourique e Castro Verde. No entanto ainda não tinham resposta para a questão colocada. “*Onde é que nós nos encontramos?*”.

Estavam confiantes de que a resposta seria uma localidade e sabiam que as representações efectuadas em papel apenas modelavam a situação. No entanto, este conhecimento não bastava para reponderem ao solicitado.

Mais uma vez, a maioria dos alunos sentiu falta de um “elemento” referindo a necessidade de utilizar um mapa da região, onde pudessem reproduzir a modelação efectuada. Poderiam usar este mapa e as distâncias reais que tinham determinado, depois de ajustadas à respectiva escala (reduzindo para centímetros).

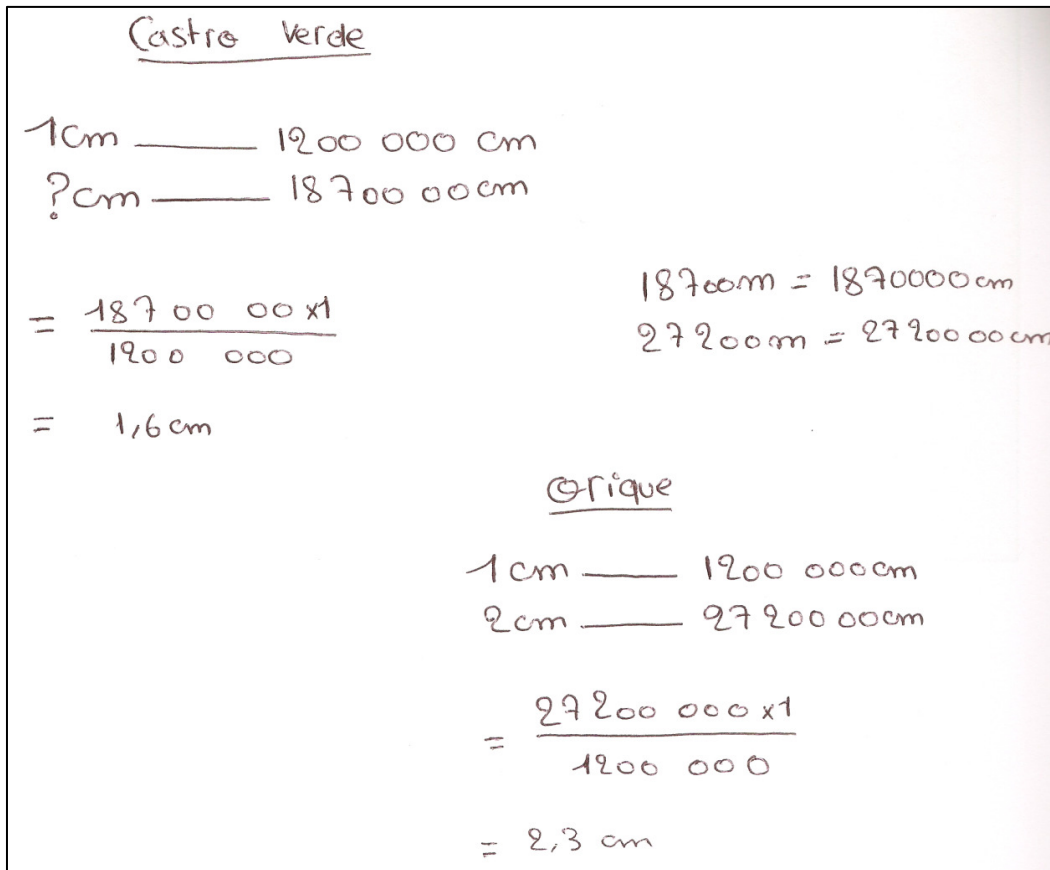
É de salientar que não bastava, somente, reproduzir a modelação já conseguida. Era necessário fazê-lo com algum rigor, pois só assim conseguiriam localizar a ou as localidades em que nos poderíamos encontrar.

Previendo esta situação, providenciei fotocópias de uma parte da carta topográfica do Baixo Alentejo à escala 1:1200000. Levei, ainda, uma pasta com alguns compassos e réguas, de modo a proporcionar uma resolução com um certo rigor. Esperava que estes recursos pudessem ser úteis para os alunos encontrarem o local pretendido.

Distribuídas as fotocópias do mapa, surgiu o trabalho com escalas, actividade que não se mostrou complicada para os alunos.

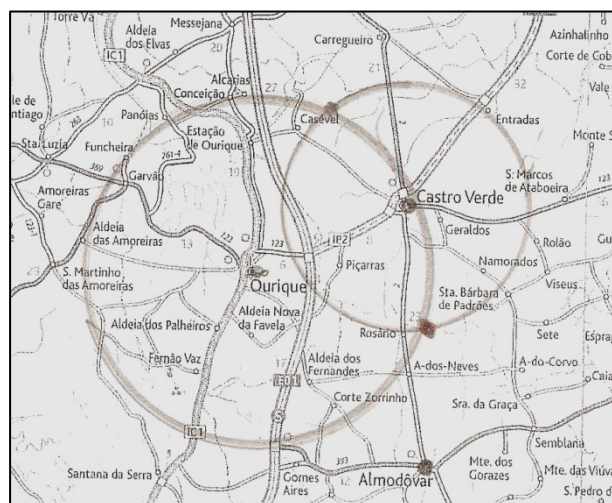
Depois de efectuarem novos cálculos, desta vez utilizando a escala do mapa (1:1200000) para encontrar o raio das circunferências que iriam desenhar no mapa, com centro em cada uma das localidades, procederam à sua marcação na carta topográfica.

A figura 10, registo de Sofia, mostra o trabalho com escalas recorrendo ao conceito de proporcionalidade, para obtenção dos raios das circunferências a desenhar no mapa. O trabalho com escalas não constituiu novidade para os alunos pois habitualmente também é explorado na disciplina de Geografia. No registo de Sofia, a aluna apresenta apenas os cálculos que foram realizados após ter determinado as distâncias reais, em metros, a que nos encontrávamos de Castro Verde e de Ourique. No entanto, não apresenta nenhum registo escrito que justifique esta sua opção.



**Figura 10. Registo de Sofia**

Depois de efectuados os cálculos necessários, os alunos, usando o compasso e a régua, traçaram, com o maior rigor possível, duas circunferências: uma com centro em Castro Verde e outra com centro em Ourique. A figura 11 representa o registo, de Pedro, onde se podem visualizar as circunferências e os pontos de intersecção das mesmas.

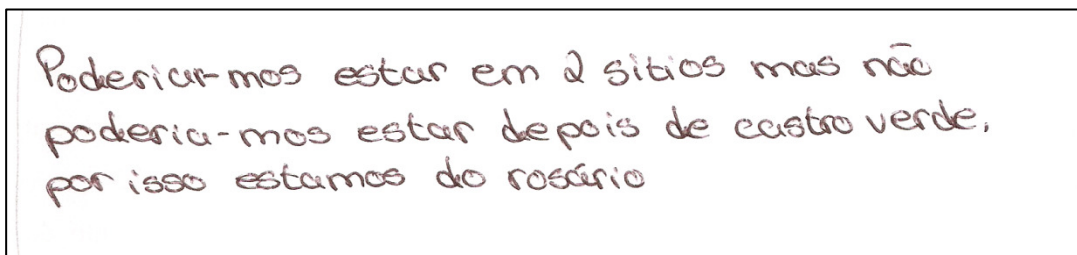


**Figura 11. Representação de Pedro.**

A utilização dos vários materiais como compasso, mapa e régua permitiu encontrar uma aproximação do local com uma margem de erro, natural uma vez que não estávamos a trabalhar com instrumentos de precisão, mas com aqueles que temos ao dispor nas escolas. Os materiais disponibilizados permitiram aos alunos aperfeiçoar as suas representações.

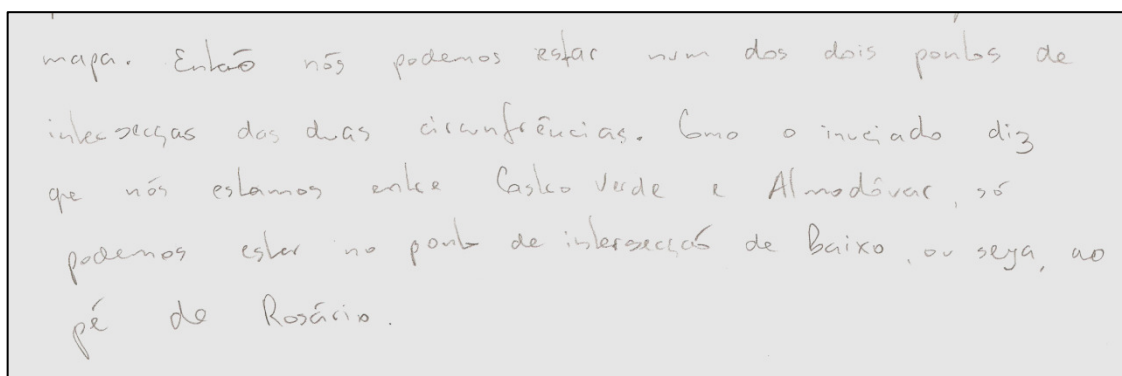
Observando a representação pictórica obtida é possível verificar que existem dois pontos. Contudo o enunciado da tarefa, ao referir que estamos perdidos entre Almodôvar e Castro Verde, leva os alunos a rejeitarem um dos pontos de intersecção das duas circunferências e a concluírem que existe apenas uma possibilidade.

Para terminar, foi pedido aos alunos para registarem por escrito as conclusões a que chegaram relativamente à localização do local que se pretendia encontrar. Os relatórios produzidos pelos alunos nesta primeira tarefa foram breves. No entanto, conseguiram explicar as razões que os levaram a excluir um dos pontos de intersecção das duas circunferências. Os extractos dos relatórios de Marco, Olga e Mónica permitem apoiar esta ideia (figuras, 12, 13 e 14).



Poderiamos estar em 2 sítios mas não poderíamos estar depois de castro verde, por isso estamos do rosário

**Figura 12. Conclusão de Marco**



mapa. Então nós podemos estar num dos dois pontos de intersecções das duas circunferências. Como o enunciado diz que nós estamos entre Castro Verde e Almodôvar, nós podemos estar no ponto de intersecção de baixo, ou seja, ao pé do Rosário.

**Figura 13. Conclusão de Olga**

R: Depois de ter traçado as duas circunferências com os maíus fi-  
tos à escala e com o centro (de cada uma) na localiza-  
de correspondente, pudemos "estimar" a nossa localização.  
Visto que o ponto que descobrimos não é exacto, mas sabendo  
que estamos entre Almodôvar e Castro Verde, conseguimos  
descobrir um ponto perto de Rosário, ou seja, a noss  
localização.

**Figura 14. Conclusão de Mónica**

O registo escrito de Marco, embora curto, contém o essencial. Os registos de Olga e de Mónica são mais completos. No entanto, ambos referem a falta de precisão na localização do lugar procurado em consequência dos materiais de desenho utilizados.

O enunciado da tarefa fornece a informação que permite concluir que nos encontramos mais perto de Castro Verde. A consulta do mapa permitiu descobrir que o local desejado se encontra muito perto da povoação do Rosário, como é referido nos registos de Olga e de Mónica.

Os exemplos apresentados, extraídos de alguns relatórios, correspondem, na sua generalidade, às conclusões enunciadas pelo grupo de alunos. Alguns são mais completos do que outros, mas focam, de forma clara, as informações e os dados necessários que levaram a encontrar os dois pontos possíveis e à exclusão de um dos pontos de intersecção como solução da tarefa, obedecendo às restrições indicadas no enunciado apresentado.

## **1.2. Síntese**

A primeira tarefa da intervenção pedagógica – *Onde Estou?* –, constituiu como que um mote de lançamento e motivação para a realização dos restantes problemas propostos aos alunos no âmbito desta intervenção.

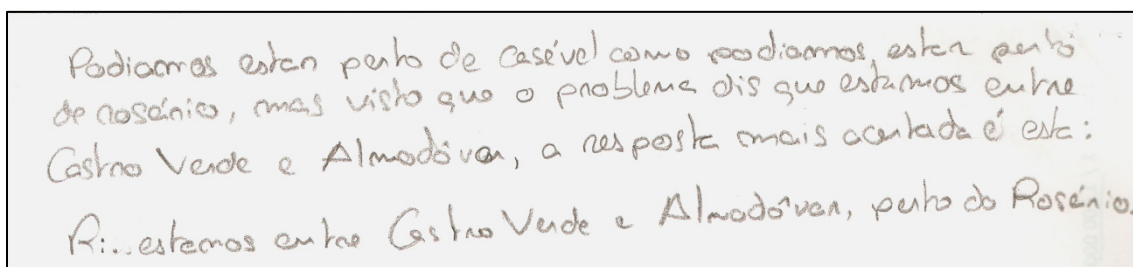
Escolhi esta tarefa para iniciar a intervenção pedagógica porque considerei que era interessante do ponto vista das conexões que permitia estabelecer entre diversos conteúdos matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares. Além disso, também a considerei motivadora por permitir relacionar a Matemática com a realidade.

Os alunos mostraram-se bastante empenhados na sua resolução. Os diálogos que ocorreram, embora sem a participação de todos, foram propícios à apropriação, por todo

o grupo, de procedimentos que contribuíram para a conclusão da tarefa com o sucesso inicialmente pretendido.

Os relatórios produzidos pelos alunos nesta tarefa revelam ainda alguma escassez na escrita tal como aconteceu nos diálogos. No entanto, é de realçar que mesmo os alunos que não participaram nos diálogos conseguiram elaborar representações que modelavam a situação. Inicialmente, de um modo mais informal, mas seguindo para uma segunda tentativa mais formal, recorrendo a instrumentos de desenho e medição. Assim, todos conseguiram elaborar o relatório final.

Pedro foi um dos alunos que não tendo participado nas discussões em torno da tarefa, apresentou uma modelação e uma resolução bastante válida e completa, como mostram os extractos das suas produções (figuras 7, 8, 11 e 15).



Podíamos estar perto de Casével como podíamos estar perto de Rosénio, mas visto que o problema diz que estamos entre Castro Verde e Almodôvar, a resposta mais acertada é esta:  
R...estemos entre Castro Verde e Almodôvar, perto do Rosénio.

**Figura 15. Registo de Pedro**

Se, por um lado, o diálogo ocorrido permitiu suportar a resolução da tarefa com sucesso, por outro, as representações dos alunos – pictóricas e numéricas ou simbólicas – permitiram reforçar e dar vida ao discurso matemático. A modelação da tarefa pelos alunos, tornou-se importante no sentido em que permitiu a sua visualização e conduziu à consequente rejeição de uma das soluções obtidas graficamente.

Foram vários os tópicos matemáticos identificados e trabalhados pelos alunos ao longo da resolução deste problema: Círculo e circunferência, tendo sido necessário distinguir estes dois conceitos; lugares geométricos, nomeadamente identificar e construir circunferências. A resolução deste problema envolveu os conceitos de circunferência e de outros lugares geométricos, escalas e proporcionalidade directa.

Os alunos recorreram à utilização de vários instrumentos de medida e desenho tal como é recomendado na abordagem da geometria ao longo do ensino básico (Ponte et al., 2007, p. 38). De um modo geral, revelaram ser capazes de utilizar com correcção régua e compasso assim como o mapa disponibilizado para determinarem com algum rigor, a solução da tarefa.

O discurso oral permitiu uma percepção e visualização da tarefa que conduziu à sua concretização em formato escrito. O discurso oral foi preponderante e potenciador do discurso escrito, no sentido em que se revelou útil para que todos procedessem aos seus registos escritos.

Associadas à resolução da tarefa, emergiram algumas dificuldades, que se prenderam com a interpretação do seu enunciado e das representações que iam sendo conseguidas pelos alunos. As primeiras dificuldades estiveram associadas à interpretação do enunciado: os alunos começaram por o considerar incompleto, considerando ser necessário conhecer a velocidade do som. Assim que esta questão foi ultrapassada, sentiram dificuldade em saber que conhecimento(s) deveriam mobilizar para prosseguir a resolução.

Outro tipo de dificuldade surgiu mais tarde, depois de os alunos terem iniciado a resolução. Uma representação produzida por um dos alunos, apresentava uma incorrecção que acabou por se transformar num obstáculo, como se pode ver na figura 6. A discussão que se travou em torno da situação apresentada foi determinante para ultrapassar a dificuldade. Optei por ser eu a “provocar” o discurso, mas fi-lo de forma a promover uma reflexão que levasse o autor da representação e os restantes colegas a tomarem consciência da referida incorrecção.

O entrave, rapidamente ultrapassado, deu origem a um discurso que foi decisivo para os alunos decidirem qual a representação a que deveriam recorrer para modelar a tarefa de modo a obterem a solução correcta.

Em suma, os alunos conseguiram de forma clara e correcta percorrer um conjunto de procedimentos eficazes e imprescindíveis para resolver a tarefa com o sucesso pretendido, suportados pelas suas representações e pelos movimentos discursivos que emergiram.

## 2. Pintando Sólidos

### 2.1. Descrição e análise

*Pintando Sólidos*<sup>3</sup> foi a sexta tarefa a ser proposta na intervenção pedagógica. Foram várias as razões que me levaram à escolha de uma tarefa de geometria. Este tema está presente nos três ciclos do ensino básico e tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. O estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais tem assumido e continua a assumir um papel muito importante neste tema, que não é do maior agrado dos alunos como alguns referiram. Estes factos acabaram por pesar na escolha desta tarefa que considero acessível, interessante e desafiadora para os alunos. Recordo que “desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de figuras geométricas no plano e no espaço” (Ponte et al., 2007, p. 52) constituiu principal propósito de ensino da geometria no 3.º ciclo. Por outro lado, um dos objectivos gerais de aprendizagem da geometria é que os alunos sejam capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Esta proposta de trabalho veio permitir o envolvimento dos alunos numa experiência de aprendizagem em que a formulação e o teste de conjecturas tiveram um lugar de destaque.

Nesta fase da investigação considerei ser importante ver como é que os alunos conseguiram trabalhar uma tarefa que apelava para um discurso rico e, em simultâneo, era potenciadora do desenvolvimento da capacidade de análise, da visualização, da construção de conhecimento matemático e da formulação e teste de conjecturas, uma vez que até aqui, todas as tarefas propostas envolviam conceitos e procedimentos já estudados e trabalhados pelos alunos, em anos anteriores.

Dado o nível de escolaridade dos alunos, considerei, ser útil, não disponibilizar sólidos, de forma a incentivá-los à visualização espacial.

Apresento, em seguida, o enunciado da tarefa *Pintando Sólidos*.

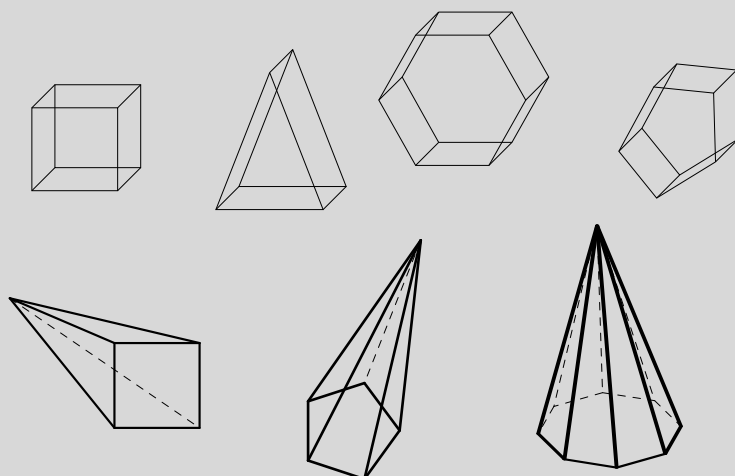
---

<sup>3</sup> Programa de formação contínua de professores matemática do 1.º e 2.º ciclos. Escola Superior de Educação da Universidade do Algarve (material não publicado).

## Pintando Sólidos

O Marco foi encarregado de pintar sólidos para uma exposição.

As instruções que lhe deram foram de que ele deveria utilizar o menor número de cores possível, mas de modo a que duas faces adjacentes não tivessem a mesma cor. Entregaram ao Marco os seguintes sólidos: Cubo; Prisma Triangular; Prisma Hexagonal; Prisma Pentagonal; Pirâmide Quadrangular e Pirâmide Pentagonal.



Será verdade que, quanto maior for o número de faces do sólido, mais cores serão necessárias?

Comecei por entregar o enunciado da tarefa a cada um dos alunos. Após uma primeira leitura, em silêncio, seguiu-se uma leitura feita por mim em voz alta. Procurei usar um tom de voz que destacasse os aspectos que considerei pertinentes como foi o caso de “*faces adjacentes*”, “*quanto maior*” e “*mais cores são necessárias*”. Este destaque teve como objectivo chamar a atenção dos alunos para as palavras-chave da tarefa.

Os alunos mostraram-se bastante receptivos e interessados na sua resolução, o que pode não ser indiferente a esta ser uma tarefa distinta das demais trabalhadas. Foi a primeira em que lhes era pedida uma explicação/justificação para uma afirmação, onde não tinham que recorrer ao cálculo. Importa referir que após a leitura da tarefa, a maioria dos alunos não conseguiu identificar o que fazer: a questão apresentada parecia não fazer sentido, como se pode perceber a partir do episódio “*Isto não faz sentido nenhum...*”:

### ***Episódio 1: Isto não faz sentido nenhum...***

1. **Mónica:** *Oh! Professor, isto não faz sentido nenhum, então vê-se logo, que quanto maior for o número de faces mais cores serão necessárias, acho eu.*
2. **Pedro:** *Oh! Professor, aqui diz, as faces adjacentes têm que ter cor diferente, por isso se tiver poucas faces vamos ter que utilizar poucas cores, mas se tivermos mais faces vamos usar mais cores...*

As intervenções, muito espontâneas, de Mónica e Pedro receberam a aprovação dos restantes alunos. Foi necessário explicar-lhes que nem sempre o que parece é, e que, possivelmente, a ideia de que “*quanto maior for o número de faces do sólido, mais cores serão necessárias*” podia não ser verdadeira. Evidenciei a necessidade de fazer algumas investigações e de reflectir até se tirarem conclusões.

Ultrapassado este primeiro impasse, os alunos consciencializaram-se que poderia haver algo mais por “de trás da tarefa” e que seria bom tentar encontrar esse “mundo oculto”.

As palavras de Mónica mostram que não reflectiu [1], pois afirma “vê-se logo” mas termina com “acho eu” o que mostra pouca convicção na afirmação. Esta suspeição da aluna mostra-nos que embora a primeira leitura da tarefa pareça não lhe ter suscitado quaisquer dúvidas, “*isto não faz sentido nenhum, então vê-se logo, que quanto maior for o número de faces mais cores serão necessárias*”, eventualmente, no seu âmago não está muito convicta.

Pedro é um aluno que gosta sempre de dar a sua opinião e em [2] mostra concordar com Mónica. As ideias de Pedro são, geralmente, aceites pelos colegas.

Talvez por essa razão os restantes alunos tenham permanecido em silêncio, o que me obrigou a intervir dizendo:

*“ora bem vocês acham que eu teria trazido uma tarefa para vos propor que tivesse uma resposta assim tão óbvia?”*

Estas palavras foram suficientes para quebrar o silêncio provocado pelo impasse inicial. Surgiu, assim, a primeira dificuldade: “o que são faces adjacentes?”. O episódio 2 ilustra a emergência desta dúvida e o diálogo que se lhe seguiu.

### ***Episódio 2: Faces seguidas, estás a ver?***

1. **Ruben:** *Oh professor, o que são faces adjacentes?*
2. **Mónica:** *Faces adjacentes, são faces seguidas, estás a ver?*  
*Coladas...*
3. **Ruben:** *Coladas?*
4. **Mónica:** *Sim, assim e assim.* [explicando com as mãos, posicionando-os como se fossem faces de sólidos]
5. **Ruben:** *Ah! É isso?*
6. **Mónica:** *É, não é, professor?*
7. **Professor:** *Sim. É isso. São faces que têm uma aresta em comum.*

Embora Rúben me tenha dirigido a questão, foi Mónica, de forma espontânea, que o esclareceu. Na sequência da primeira resposta desta aluna [2], Rúben parece não perceber o que a colega quer dizer com o termo coladas, questionando-a [3]: “coladas?”. A nova dúvida leva Mónica a recorrer às próprias mãos para o esclarecer.

É de destacar que Mónica para ilustrar o significado de faces adjacentes, não usa apenas um discurso oral. Recorre, também, a uma forma muito interessante de comunicação através de gestos. Mónica não dispondo de sólidos geométricos e tendo apenas, na sua mesa de trabalho, folhas de papel e material de escrita, recorreu às suas próprias mãos para tornar visível e explicar o conceito em análise.

Esta simultaneidade de representações, orais e gestuais, usadas pela aluna sustentam-se e clarificam a ideia apresentada dando força e solidez à sua explicação.

O uso das mãos corresponde a uma representação activa, uma vez que se encontra ligada a uma determinada acção, servindo para alicerçar a sua contribuição e, assim, transmitir a sua ideia aos colegas. A conexão entre as várias formas de

representar foi fundamental e imprescindível para que a aluna explicasse o que entendia por “*faces adjacentes*”.

Mónica após explicar o que entendia por faces adjacentes, procura o aval do professor, como se pode observar na questão colocada: “*É, não é, professor?*” [6]. Legitimei a contribuição de Mónica, mas reformulei-a de modo a torná-la mais clara e a introduzir maior rigor matemático na conversação que decorria: “*São faces que têm uma aresta em comum*” [7].

Ultrapassada a questão relativa ao significado de faces adjacentes, os alunos começaram a discutir e a formular as primeiras conjecturas. O processo recorrente para todos foi o de efectuar registos junto das imagens dos sólidos incluídos no enunciado da tarefa.

O discurso oral que se ia mantendo entre os alunos mostrou-se importante no prosseguimento da tarefa e as representações que iam elaborando eram decisivas para as hipóteses que iam surgindo.

As figuras 16 e 17 referem-se respectivamente, aos registos escritos de Catarina e de Mónica e mostram as suas tentativas de encontrar uma resposta para a tarefa.

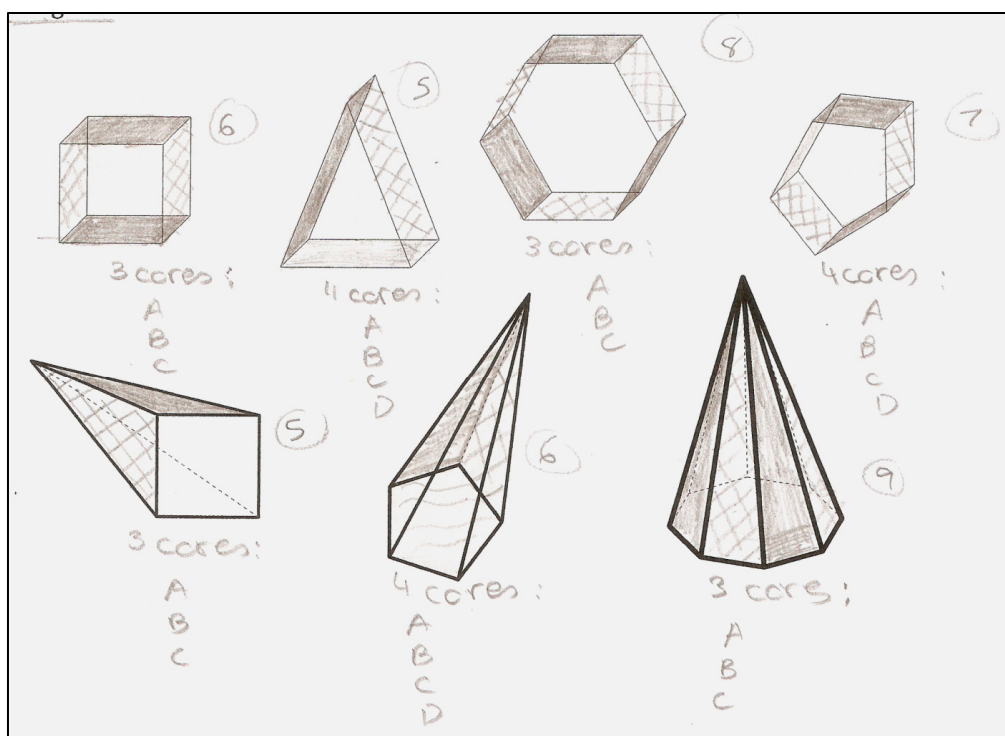
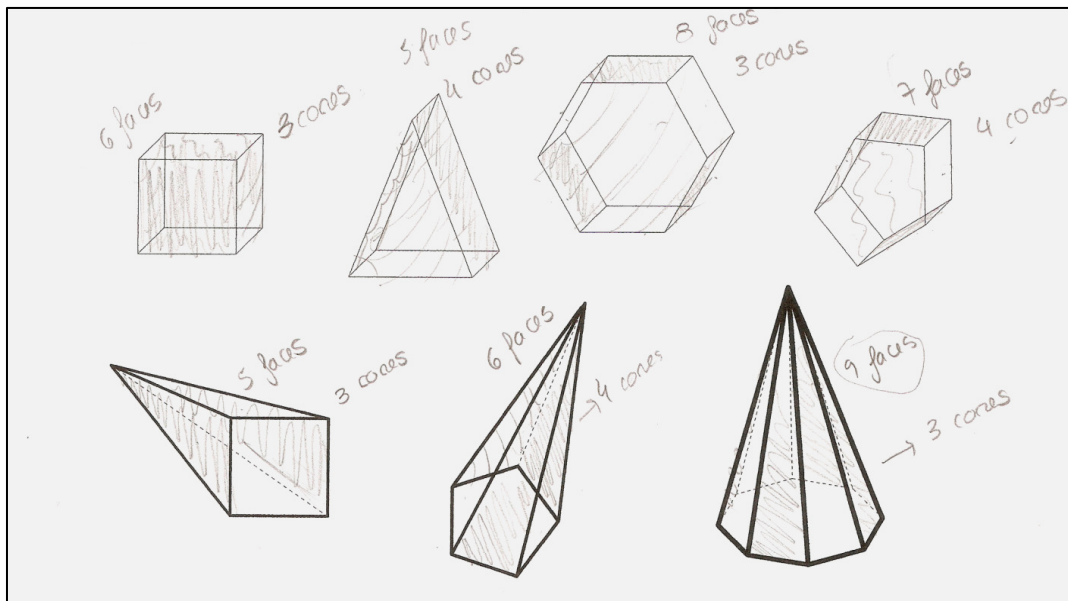


Figura 16. Registo de Catarina



**Figura 17. Registo de Mónica**

Catarina começa por utilizar os sólidos representados no enunciado da tarefa, para desenvolver a sua investigação e fazer os seus vários registos: representações simbólicas e pictóricas. Quando regista o número máximo de cores necessárias para colorir o sólido nas condições da tarefa ou regista dentro de um círculo o número total de faces do sólido, está a fazer um registo simbólico, neste caso quantitativo. Mas ao usar uma sequência de letras, ABC ou ABCD, que simbolizam as cores a utilizar, está a efectuar um registo simbólico de natureza diferente. O recurso ao contraste de texturas pode ser visto como uma representação pictórica. Os vários registos permitem-lhe perceber que o número de cores varia entre três e quatro.

Na figura 17, o registo de Mónica, semelhante ao de outros colegas, não apresenta a representação simbólica com recurso a letras para representar cores. Contudo esta aluna também recorre a distintas formas para representar a sua análise: pictórica (texturas) e simbólica (número de faces e número de cores).

As figuras 16 e 17 ilustram o tipo de registos efectuados pela generalidade dos alunos. Há nestes registos, algumas diferenças, embora todos optem por fazer anotações junto dos sólidos (que se encontravam desenhados na tarefa), que são sempre de natureza simbólica (números ou letras) e pictórica.

Estes registos foram adequados na medida em que permitiram o surgimento de regularidades. Contudo os alunos tiveram dificuldade em as relacionar com as características dos sólidos, o que inviabilizava a obtenção de um argumento válido para responder à questão que lhes era apresentada na tarefa.

O episódio “*Uma cor aqui, outra cor aqui, outra cor ali...*” ilustra a análise que os alunos fizeram das suas próprias representações.

### ***Episódio 3: Uma cor aqui, outra cor aqui, outra cor ali...***

1. **Pedro:** *Oh professor: aqui diz, as faces adjacentes têm que ter cor diferente. Por isso se tiver poucas faces vamos ter que utilizar mais cores. Por exemplo se tivermos uma pirâmide de base triangular, teremos que utilizar uma cor aqui, outra cor aqui, outra cor aqui, outra cor ali,* [apontando para uma pirâmide triangular que desenhou na sua ficha], *porque são tudo faces adjacentes, se tivermos mais faces vamos usar menos cores, porque podemos repetir as cores. Porque se for uma coisa assim,* [apontando para a pirâmide de base quadrangular], *posso repetir as cores nas faces que não estão juntas.*
2. **Marco:** [referindo-se a um dos sólidos da ficha, o prisma hexagonal] *Podemos usar aqui uma cor, aqui outra e aqui a mesma desta* [apontando para a primeira face a que já tinha sido atribuída uma cor].

Pedro e Marco não conseguem identificar regularidade alguma nas representações que efectuaram junto das imagens dos sólidos, conseguindo verificar, apenas, que quando o polígono tem “*poucas faces*” são necessárias mais cores do que quando o polígono tem “*mais faces*”. Com estas contribuições, os alunos abriram o caminho para a continuidade da exploração da tarefa, uma vez que nos seus registos se encontravam os elementos chave do problema.

Face aos registos dos alunos, aconselhei-os a organizar a informação obtida de outro modo, por exemplo, através de uma tabela (representação esquemática). Nem todos seguiram a minha sugestão. Entre os que optaram por a seguir estão Olga e Catarina (figuras 18 e 19).








Figura	Nº de faces	Nº de cores
Cubo 	6	3
Prisma Triangular 	5	4
Prisma Hexagonal 	8	3
Prisma Pentagonal 	7	4
Pirâmide quadrangular 	5	3
Pirâmide pentagonal 	6	4
Pirâmide Octogonal 	9	4

Figura 18. Registo da Olga

nome	faces	cores	base
cubo	p. 6	i. 3	4
P. triangular	i. 5	p. 4	3
P. hexa.	p. 8	i. 3	6
P. penta.	i. 7	p. 4	5
Pir. qua.	i. 5	i. 3	1
Pir. penta.	p. 6	p. 4	1
Pir. octo.	i. 9	i. 3	1

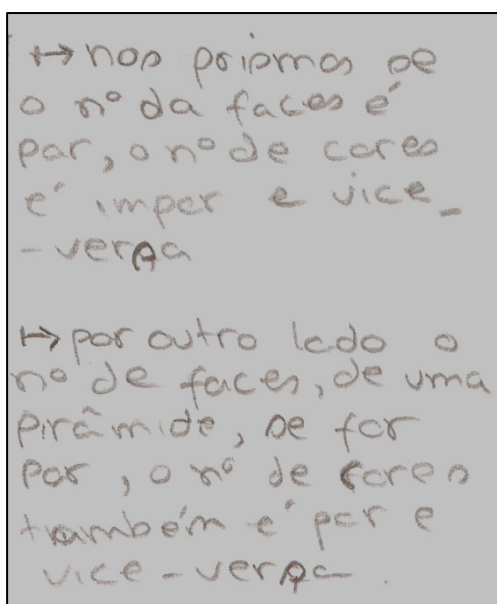
1 - Impar  
P - par

Figura 19. Registo de Catarina

A tabela elaborada por Olga (figura 18) inclui a designação e a representação de diversos sólidos, o número de faces de cada um e o número mínimo de cores necessário

para o colorir nas condições do problema. Estas eram as únicas informações que constavam na sua folha de registos.

A tabela de Catarina (figura 19) apresentava também o número de faces e o número de cores, acompanhada de uma representação simbólica para o número mínimo de cores necessárias. A aluna criou, ainda, uma coluna com o número de lados do polígono da base que identificou por “base” e uma legenda *i* (*ímpar*) ou *p* (*par*), que associou apenas ao número de faces e ao número de cores. Estas anotações originaram as seguintes observações em linguagem corrente, que registou na sua folha de registos (figura 20).

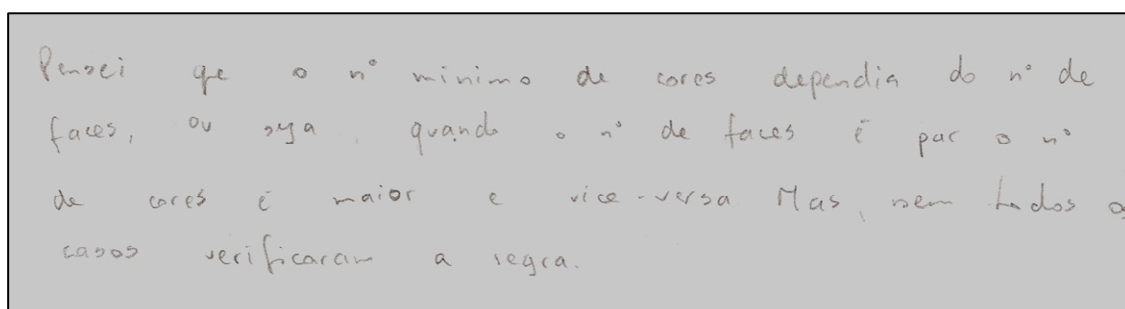


→ nos prismas se o nº da faces é par, o nº de cores é ímpar e vice-versa.

→ por outro lado o nº de faces, de uma pirâmide, se for par, o nº de cores também é par e vice-versa.

Figura 20. Registo de Catarina

Catarina ao analisar a sua tabela (figura 20) apercebe-se da existência de uma relação comum entre todos os prismas que têm um número par/ímpar de faces e o número de cores a utilizar, referindo-se apenas à sua paridade. Esta forma de registo não foi apenas usada por Catarina. Vários alunos fazem afirmações muito semelhantes, como é o caso do registo de Olga (figura 21) que foi elaborado após a análise da tabela representada na figura 18.



Pensei que o nº mínimo de cores dependia do nº de faces, ou seja, quando o nº de faces é par o nº de cores é maior e vice-versa. Mas, nem todos os casos verificaram a regra.

Figura 21. Registo de Olga

Olga refere, também, o maior ou menor número de cores em função da paridade das faces.

Como referi, nem todos os alunos seguiram a sugestão relativa ao uso de uma tabela. Alguns optaram por seguir um formato diferente para organizar a informação. Entre estes está Mónica que fez registos bastante pertinentes e úteis (figura 22).

<u>Cubo</u> 6 faces 3 cores	<u>Prisma Triângular</u> 5 faces 4 cores	<u>Prisma Hexagonal</u> 8 faces 3 cores
<u>Prisma Pentagonal</u> 7 faces 4 cores	<u>Pinâmide Quadrangular</u> 5 faces 3 cores	<u>Pinâmide Pentagonal</u> 6 faces 4 cores
<u>Pinâmide Octogonal</u> 9 faces 3 cores		

Figura 22. Registo de Mónica

Mónica organiza e apresenta a informação de uma forma perceptível. No entanto, não estabeleceu qualquer tipo de relação entre os sólidos que tinha analisado e o número mínimo de cores necessário para os colorir. Apercebendo-me do conteúdo dos registos e de modo a incentivá-la a continuar, recorri à ideia, “*paridade das faces e número mínimo de cores*”, para promover uma nova troca de ideias. Destaquei a questão que norteava a tarefa, o que deu origem ao episódio “*Faces pares...faces ímpares*”.

#### **Episódio 4: Faces pares ... faces ímpares**

1. **Professor:** Então será que quantas mais faces tivermos mais cores vão ser necessárias?
2. **Olga:** Não, não é verdade, pois podemos ter um sólido com quatro faces [laterais] e um outro com oito faces [laterais] e usamos só duas cores. Acho que se o número de faces é par temos que usar menos

*cores, mas se o seu número de faces é ímpar temos que usar mais cores.*

Olga [2] com base nos seus registos (figuras 18 e 21) responde prontamente “*não, não é verdade*”, mostrando alguma segurança no seu tom de voz. Justifica a sua posição, dizendo que, na sua perspectiva, “*se o número de faces é par temos que usar menos cores, mas se o seu número de faces é ímpar temos que usar mais cores*”. Quando Olga se refere a faces, apenas está a considerar as faces laterais.

Entretanto, um dos alunos, Ruben, vai abanando com a cabeça indicando que discorda da opinião de Olga. Ao aperceber-me desta divergência de posições, decidi dar visibilidade ao desacordo esperando que surgissem ideias favoráveis à continuidade da exploração da tarefa. É neste contexto que surge o episódio “*Par ou ímpar tanto faz...*”.

#### ***Episódio 5: Par ou ímpar tanto faz...***

1. ***Professor:*** *Parece que o Ruben não concorda com a Olga.*
2. ***Ruben:*** *Pode ser ímpar ou par, tanto faz...*
3. ***Professor:*** *Olhem, o Ruben diz que é indiferente ser ímpar ou par.*
4. ***Ruben:*** *Professor, nesta pirâmide octogonal pode-se usar só três cores. [utilizando uma das suas representações pictóricas foi explicando aos colegas, como se o seu desenho na folha fosse tridimensional]*
5. ***Professor:*** *Sim, continua.*
6. ***Rúben:*** *Imaginem: azul, vermelho, azul, vermelho, azul, vermelho, azul, vermelho e uma outra cor para base, ou seja três cores. Mas se for um prisma octogonal vou usar as mesmas três cores, porque na outra base vou usar a mesma cor, porque são opostas.*
7. ***Professor:*** *Queres tu dizer com isso que o número de faces não vai interferir com o número de cores a utilizar nas condições do problema?*
8. ***Ruben:*** *É.*

9. **Pedro:** [Que até aqui se tinha mantido em silêncio] *O sólido quanto menos faces tem, mais pequeno é...*
10. **Professor:** *Mais pequeno é? Quererás tu dizer que é menor o número de faces? O tamanho do sólido não está em questão, pois não?*
11. **Pedro:** *Sim, sim.*
12. **Professor:** *Vá, continua...*
13. **Pedro:** *Como eu disse no exemplo da pirâmide, esta face está adjacente a esta, não pode ter a mesma cor, mas se tiver muitas faces, vou poder repetir.*
14. **Sofia:** *No prisma hexagonal vamos precisar somente de três cores. Parece-me, mas não sei se o número mínimo é três cores. Mas se o prisma for heptagonal, já são necessárias quatro cores, que é uma cor para a face que apareceu a mais. Mas se o prisma for octogonal vamos ter só falta de três cores, outra vez.*
15. **Professor:** *Então, existirá algum sólido em que seja necessário utilizar mais do que quatro cores?*
16. **Mónica:** *Não, eu acho que apenas precisamos de três cores ou de quatro cores, independentemente do número de faces que o sólido possa ter. Eu estive a fazer aqui, e então o cubo tem seis faces, são necessárias três cores, depois o prisma triangular tem cinco faces, quatro cores e assim sucessivamente, para cada sólido [mostrando o seu registo aos colegas] e esta pirâmide octogonal tem nove faces e pode levar apenas três cores, assim como o prisma hexagonal e o octogonal que também têm três cores, então eu agora defendo que quantas mais faces menos cores. Mas depois temos aqui a pirâmide quadrangular que tem cinco faces e tem apenas três cores.*

No episódio 4 Olga [2] frisa que, se o número de faces for par terá que usar menos cores do que se o número de faces for ímpar. Rúben, recorrendo a um movimento com a cabeça, mostra estar em desacordo com a colega, originando o episódio "par ou ímpar tanto faz". A ideia de Olga é contrariada por Rúben, ao referir que a paridade do número de faces não é factor preponderante para se saber qual é o menor número de cores a utilizar para pintar os sólidos. Este aluno, ao afirmar "Pode

*ser ímpar ou par, tanto faz*”, origina um novo olhar sobre a tarefa proposta. Pedi aos alunos que pensassem nesta observação [3]. Rúben não consegue justificar a indiferença relativa à paridade das faces, conforme se pode verificar em [4] e [6], tendo sido necessária a minha intervenção [7] através da qual procurei incentivar os alunos a reflectirem e discutirem em função dos seus registos.

Note-se que foram a contribuição, embora incorrecta, de Olga (episódio 4) e a manifestação de desacordo por Rúben (episódio 5) que permitiram desencadear a discussão que ocorreu.

Rúben, explica e justifica, recorrendo a um discurso oral [4] e [6] suportado pelas suas representações pictóricas, o seu ponto de vista ao apresentar a sua análise relativa a uma pirâmide octogonal, que tem nove faces (número ímpar) e um prisma octogonal que tem dez faces (número par). No primeiro caso (pirâmide) Rúben verifica, que apenas são necessárias três cores e no segundo são, também, apenas necessárias três cores. Neste segundo caso o aluno refere-se à sequência de cores, *azul, vermelho, azul, vermelho...*, sendo apenas necessária uma outra cor para as faces, o que também perfaz três cores.

O exemplo que Rúben apresentou foi bastante pertinente e trouxe para a discussão um elemento novo, que refutava a ideia inicial de que quantas mais faces tivesse um sólido, mais cores seriam necessárias para o colorir, opinião inicialmente partilhada por todos.

Conforme referi, a minha intervenção [7], serviu para dar ênfase à ideia de Rúben, pois considerei que se abria mais uma porta, que era importante para todos. De facto, Rúben estava muito certo do que afirmava, pois a sua resposta à minha questão, foi espontânea e afirmativa [8]. Enquanto Rúben apresentava os seus argumentos, os colegas ouviam-no com atenção.

Pedro, que até ali se tinha mantido em silêncio, fez uma intervenção, que matematicamente não é válida. As suas palavras pareciam revelar uma confusão entre quantidade de faces com o tamanho do sólido [9]. Usando a forma interrogativa, decidi reformular a sua contribuição [10] de modo a poder compreender se a referida confusão era real ou se se tratava, antes, de uma incorrecção na verbalização do pensamento do aluno. Pedro concorda com a minha intervenção [10] e, em seguida ([13]) esclarece a sua ideia, referindo que pelo facto de um sólido ter muitas faces, não seriam necessariamente precisas mais cores, pois poderíamos repetir as cores, nas faces

que não são adjacentes. Foi, assim, ao encontro da opinião de Rúben expressa em [4] e [6].

Sofia [14] concretiza referindo-se apenas a prismas. Diz que para os colorir, apenas vão ser necessárias três ou quatro cores, independentemente do número de faces que estes apresentem, embora pareça não estar muito segura pois logo no início da sua intervenção diz: “*parece-me, mas não sei...*”.

Apoiado na afirmação da aluna, questionei, relativamente ao número máximo de cores necessário [15], perguntando se nunca seriam necessárias mais do que quatro cores. A minha intervenção foi no sentido de promover a resolução da tarefa considerando os argumentos apresentados pelos alunos, uma vez que já tinham conseguido encontrar o caminho a seguir.

O episódio “*par ou ímpar tanto faz*” mostra-nos o quão importante foram os movimentos discursivos na exploração da tarefa, dando oportunidade a que todos os alunos avançassem. Com a análise que os alunos iam fazendo dos seus registos, e comparando-os com o que os colegas iam dizendo, foi-se tornando cada vez mais clara, a relação existente entre o número de faces dos sólidos e o número mínimo de cores a utilizar para colorir os prismas e as pirâmides.

O episódio “*Há uma coisa comum em todas as figuras*” surgiu na sequência dos alunos sentirem necessidade de partilhar as descobertas que iam emergindo das suas análises, mas que ainda não eram suficientes para tirar conclusões.

### ***Episódio 6: Há uma coisa comum em todas as figuras***

1. ***Sofia:*** *Eu acho que isto tem mesmo que depender do número de faces, mas ainda não vi como.*
2. ***Professor:*** *Mas depende das faces, de que modo?*
3. ***Sofia:*** *Aqui temos uma pirâmide de cinco faces, [referindo-se a uma pirâmide quadrangular] são necessárias três cores, mas aqui temos um prisma de cinco faces [referindo-se a um prisma triangular] e são necessárias quatro cores.*
4. ***Professor:*** *Então quando é que são necessárias mais cores?*
5. ***Sofia:*** *Não sei, depende da figura.*
6. ***Pedro:*** *Há uma coisa comum em todas as figuras em que eu uso três cores ou em que eu uso quatro cores. Quando eu uso três cores*

- tenho um número de faces par, quando eu uso quatro cores, tenho um número de faces ímpar, isto deve estar relacionado com isso, está, não está?* [fazendo indicações nos sólidos do seu registo]
7. **Ruben:** *Quando o Pedro está a falar em faces eu acho que ele quer dizer as arestas da figura geométrica da base, não é Pedro?*
  8. **Pedro:** *Sim, são as arestas da base.*
  9. **Professor:** *Número de lados do polígono da base, não é?*
  10. **Pedro:** *Sim, é isso.*
  11. **Ruben:** *Então, o Pedro tem razão. Quando o número de lados da base é par são necessárias três cores, quando é ímpar são necessárias, quatro cores. Querem ver? Tenho aqui um quadrado [apontando para o cubo] e são necessárias três cores. Tenho aqui um triângulo [apontando para o prisma triangular] e são necessárias quatro cores. Tenho aqui um pentágono [apontando para o prisma pentagonal] e são necessárias quatro cores. Tenho aqui um hexágono [apontando para o prisma hexagonal] e são necessárias três cores, o mesmo acontecendo para outros sólidos.*
  12. **Professor:** *Em relação ao número de cores estamos bem.*
  13. **Sofia:** *Mas isso é para os sólidos que não são pirâmides e nas pirâmides, como é que fazes?*
  14. **Pedro:** *Faz-se igual, porque como as pirâmides só têm uma base, só necessitam de uma cor para essa base, os prismas têm duas bases, em frente mas a cor que se vai usar é a mesma, porque não têm arestas adjacentes.*
  15. **Mónica:** *Então, se o polígono da base tiver um número par de lados é necessário apenas três cores mas, por outro, lado se o polígono da base tiver um número ímpar de lados vou precisar de quatro cores.*
  16. **Professor:** *Então parece que fica assente que apenas precisamos de três ou de quatro cores e que isso depende do número de lados do polígono da base.*

No início do diálogo, Sofia, mostra-se verdadeiramente convencida que o número de cores necessário depende do número de faces, só que não consegue identificar de que forma se relacionam [1]. De forma a não deixar que os alunos

abandonassem esta ideia, reforcei-a perguntando de que forma é que essa dependência acontecia. Sofia não conseguiu concluir o seu raciocínio, pois acaba por dizer “*não sei, depende da figura*” [5]. Contudo, a aluna não desistiu. Só que Pedro [6] não lhe deu tempo para pensar um pouco mais, pois expande o raciocínio da colega: “*há uma coisa comum em todas figuras*”.

Após esta intervenção, as ideias começaram a ficar cada vez mais claras para todos, uma vez que parecia que o número de cores variava efectivamente entre três e quatro, sendo neste sentido que deveriam continuar a procurar um argumento válido, que contrariasse a afirmação inicial partilhada por todos, que ia no sentido de que o número de cores a utilizar aumentava de forma directa em função do número de faces do sólido.

Pedro usou incorrectamente o termo faces [6], pois queria referir-se ao número de lados do polígono da base. Rúben percebendo a incorrecção, interpela o colega no sentido de esclarecer a sua contribuição [7]. A interpretação de Rúben merece o aval de Pedro, não tendo sido necessária a minha intervenção. A questão que, em seguida coloquei, serviu somente para introduzir uma maior correcção matemática, pois neste momento os alunos já tinham em sua posse um conjunto suficiente de “verdades” que lhes permitia continuar.

Rúben [11] concorda com a intervenção de Pedro, afirmando convictamente que o número de cores a utilizar dependeria do número de lados do polígono da base. Apoia a sua posição recorrendo a vários exemplos, embora use nas suas asserções alguns termos de forma incorrecta. Com efeito, utiliza o termo quadrado para se referir a um cubo e triângulo para se referir a um prisma triangular. No entanto, a incorrecção da terminologia não pareceu ser impeditiva da obtenção de conclusões correctas.

Ruben constatou que o número de cores variava entre três e quatro e que havia uma relação entre o número de cores a utilizar e o polígono da base. Em [11] argumenta de forma bastante clara as razões que o levam a necessitar de três ou quatro cores. Alguns colegas interpelam-no, como foi o caso de Sofia [13], que apesar de concordar com o colega, parecia ter dúvidas se a ideia apresentada se podia generalizar ao caso das pirâmides. Esta situação é esclarecida por Pedro [14] e, por fim, por Mónica [15] que ajudou a generalizar: “*se o polígono da base tiver um número par de lados é necessário apenas três cores mas, por outro, lado se o polígono da base tiver um número ímpar de lados vou precisar de quatro cores*”.

A figura 23 é um exemplo do tipo de registos elaborados pelos alunos, após o episódio 6. Estes registos só foram conseguidos após todos terem partilhado as suas análises e pensamentos e terem tido a oportunidade de negociar algumas das suas ideias.

→ vejamos exemplos de figuras com base com nº de lados par:

→ vejamos porque é que isto acontece:

→ quando o nº de lados da base é par é isto que acontece

sequência de lados: e não precisa de mudar a cor no último lado porque a cor que vem no 1º é diferente.

... mas a cor da base tem de ser diferente da cor 1 e 2 porque a base é adjacente com todos os lados da figura. Isto dá 3 cores para as figuras de base com nº de lados par.

---

Agora vejamos as figuras com o nº de lados de base ímpar:

→ vejamos porque é que isto acontece:

→ quando o nº de lados da base é ímpar é isto que acontece:

sequência de lados: a cor do lado final tem de ser diferente, porque segundo a sequência inicial a cor que vem a seguir seria a cor 1, mas a cor 1 não pode estar no último lado porque o primeiro é adjacente com o último, por isso não podemos permitir que tenham a mesma cor logo, precisamos de 3 cores para pintar os lados e uma última cor para pintar a base (4 cores).

Figura 23. Registo de Pedro

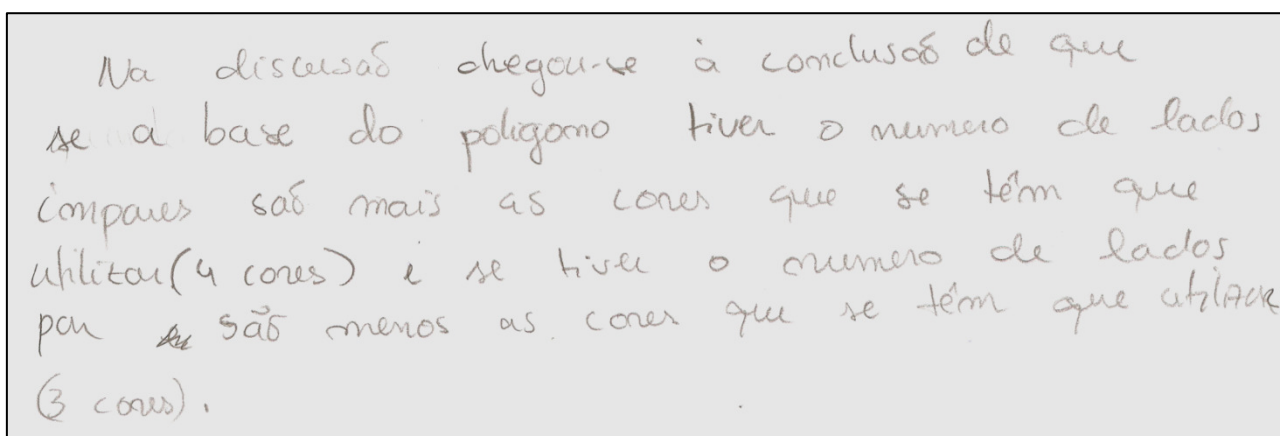
Pedro começa por justificar que para os sólidos — que denomina por figuras — com um número de lados par, apenas são necessárias três cores. Recorrendo a representações pictóricas e simbólicas, desenha um cubo e um prisma hexagonal. Atribui cores a cada uma das faces (vermelho, verde e azul), opção que abandona logo de seguida, pois desenha, tal como lhe chama, uma sequência de lados, estando a referir-se à planificação lateral do sólido, atribuindo, desta vez os termos cor 1, cor 2, cor 1, cor 2, associando-as aos lados (lado 1, lado 2, lado 3, lado 4).

Pedro conclui que nos sólidos que têm como base um polígono com um número par de lados, são necessárias sempre duas únicas cores para colorir as faces laterais, sendo necessário utilizar uma terceira cor, para as bases, uma vez que não são adjacentes entre si, mas são adjacentes a todas as faces laterais. Para os sólidos que têm como base um polígono com um número ímpar de lados, segue um raciocínio idêntico.

Todos os alunos conseguiram redigir conclusões, que variaram na forma mas não no conteúdo. As conclusões de Pedro (figura 23) são as que se encontram mais completas, uma vez que consegue elaborá-las de forma coerente e clara, associando representações pictóricas e registos escritos e abandonando as imagens dos sólidos apresentados na tarefa.

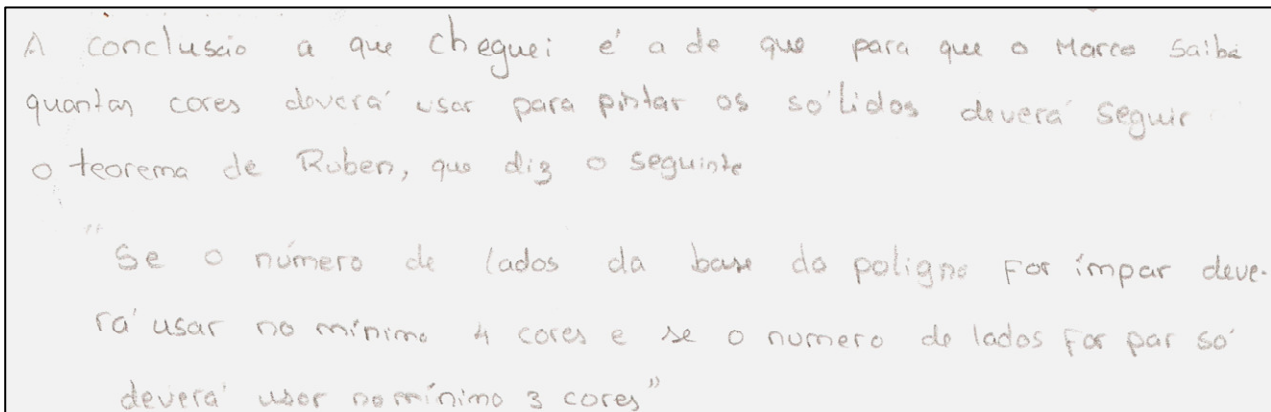
Se houve alunos que fizeram registos finais do processo de resolução da tarefa muito completos e com uma explicação pormenorizada, outros houve que foram muito mais lacónicos nas conclusões que registaram. Embora económicos na escrita, conseguiram, de igual modo, arrolar uma resposta à tarefa e refutar a ideia inicial, *quanto maior for o número de faces mais cores serão necessárias*, que mereceu concordância de todos.

As figuras 24 e 25 referem-se às respostas finais de Sofia e de Rúben.



Na discussão chegou-se à conclusão de que se a base do polígono tiver o número de lados ímpares são mais as cores que se têm que utilizar (4 cores) e se tiver o número de lados par ~~se~~ são menos as cores que se têm que utilizar (3 cores).

Figura 24. Registo de Sofia



A conclusão a que cheguei é a de que para que o Marco saiba quantas cores devera' usar para pintar os sólidos devera' seguir o teorema de Rúben, que diz o seguinte

"Se o número de lados da base do polígono for ímpar devera' usar no mínimo 4 cores e se o número de lados for par só devera' usar no mínimo 3 cores"

**Figura 25. Registo de Rúben**

A conclusão final de Sofia (figura 24) e a de Rúben (figura 25) são coerentes com a de Pedro (figura 23) e neste caso ilustram os registos dos demais colegas.

Os alunos consideraram provado, através das argumentações apresentadas, que para prismas e pirâmides, a relação que estabeleceram entre o número de cores e a paridade do número de lados do polígono da sua base é verdadeira, tendo analisado apenas os sólidos fornecidos no enunciado da tarefa.

Rúben, satisfeito com o resultado a que chegou, considerou que as suas conclusões eram dignas de serem consideradas um teorema com o seu nome e escreveu: "Teorema de Rúben" (figura 25). Embora, do ponto de vista matemático, a utilização da palavra "teorema" seja problemática pois a relação foi, apenas, verificada para alguns exemplos, nunca se tendo abordado a questão da sua generalidade, este registo deixa transparecer que o aluno parece ter-se apropriado da relação existente entre o número de lados do polígono da base de um sólido e o número de cores necessário para o colorir de modo a que duas faces adjacentes não tenham a mesma cor, como se fosse uma "descoberta" pessoal. Este sentido de apropriação também está presente nos registos de Olga que escreveu "Lei da Olga".

## 2.2. Síntese

Esta tarefa mostrou-se muito rica do ponto de vista da comunicação Matemática. As várias formas de representar — esquemática, pictórica, registos escritos e o discurso oral — assim como as conexões estabelecidas entre elas, ajudaram os alunos a interpretar a tarefa, a clarificar as suas ideias e a encontrar uma relação entre o número de faces do sólido e o número de cores. Conseguiram construir uma resposta para a tarefa que veio contrariar a ideia inicial defendida por todos de que quanto maior for o número de faces de um sólido mais cores são necessárias, de acordo com as condições enunciadas.

Foi importante promover um diálogo entre os alunos que foi sendo sustentado por diversas representações, que os ajudaram a tomar consciência dos seus próprios raciocínios — ou seja, permitiram a meta comunicação — mas que contribuíram, também, para sustentarem e defenderem as suas conjecturas perante os colegas. Neste processo, procurei não quebrar o raciocínio dos alunos, não interrompendo os diálogos nem avançando com respostas. Esta atitude de deixar os alunos falarem sem dar as respostas, não é fácil de manter na sala de aula. Nós, professores, temos receio de que os alunos não sejam capazes de tirar as conclusões pretendidas e, por vezes, acabamos por avançar com pistas e dados que não são os que os alunos podem vir a apresentar. Condicioná-los, assim, para o nosso processo de raciocínio o que pode impedir que surjam outras ideias. Outras vezes temos tendência a interromper o discurso dos alunos, quando estes dizem algo que não está correcto. Estas situações ocorrem, frequentemente, sem que nos apercebamos de tal, talvez fruto do nosso passado, enquanto alunos.

Considero que o facto de não estarmos na aula de Matemática facilitou a atitude que adoptei durante a exploração da tarefa, mas também me ajudou a tomar consciência de como é importante deixar os alunos pensarem e expressarem as suas ideias. A minha intervenção [10] no episódio cinco não provocou uma quebra do raciocínio do aluno pois teve como intenção corrigir a linguagem usada, tendo o aluno continuado o seu raciocínio. No entanto, poderá haver ocasiões em que o mesmo não acontece, perdendo-se a oportunidade de surgirem raciocínios importantes do ponto de vista didáctico.

Recordo que na realização desta tarefa não foram fornecidos sólidos geométricos aos alunos. A minha intenção foi incentivar os alunos a desenvolver a

visualização espacial promovendo diálogos em torno das representações dos sólidos elaborados pelos alunos ou incluídas no enunciado da tarefa. Por exemplo, em [11], episódio seis, o aluno recorre frequentemente aos seus registos para se referir aos polígonos da base dos sólidos, apontando para eles sempre que necessário. As representações bidimensionais no papel funcionaram como se de sólidos tridimensionais se tratassem.

Ao longo da exploração da tarefa procurei assumir o papel de mediador, promovendo e sustentando o diálogo de forma a levar os alunos a testar e a reflectir sobre as suas ideias, tendo por base o conhecimento partilhado.

É de realçar que parece existir uma evolução dos alunos no que se refere à sua capacidade de explicar e justificar os seus argumentos. Nesta sexta sessão de trabalho as intervenções dos alunos são espontâneas, muito mais frequentes e ricas, contrariamente ao que sucedia nas primeiras. Os discursos são mais longos e não necessitam de apoio do professor.

Recordo que uma das características desta tarefa foi o facto de exigir alguma investigação e a produção de conjecturas, o que a distingue das restantes. Não bastava fazer cálculos e encontrar uma resposta, o que tornou inicialmente a tarefa mais difícil para os alunos. Tiveram tempo para realizar experiências, formular conjecturas, descrever e justificar processos com rigor progressivo, como é sugerido no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al. 2007). No entanto, mostraram-se muito empenhados em investigar a situação.

No decurso da resolução da tarefa os alunos confrontaram-se com algumas dificuldades, nomeadamente ao nível de alguns conceitos básicos de geometria e ao nível do estabelecimento de conexões entre as suas próprias asserções.

O facto de inicialmente alguns alunos não saberem o que eram faces adjacentes, deve ser encarado, não como um entrave, mas uma oportunidade para promover a comunicação, uma vez que se tornou num pretexto para outros alunos colocarem a sua capacidade de comunicar à prova, conforme se pode verificar no episódio 2.

A utilização de uma linguagem correcta foi também uma dificuldade que os diálogos ajudaram a corrigir. Um exemplo desta situação ocorre no episódio 6 em que o aluno utiliza o termo quadrado para se referir a um cubo e triângulo para se referir ao prisma triangular.

Importa referir que esteve sempre presente a preocupação de corrigir todas as situações em que a terminologia não era adequada. Umhas vezes, por mim, outras vezes

pelos próprios alunos, que se foram tornando cada vez mais atentos e rigorosos, relativamente aos termos usados pelos colegas.

## 3. O Papa bolachas

### 3.1. Descrição e análise

A tarefa *O papa bolachas*<sup>4</sup> foi a penúltima do conjunto das dez tarefas da intervenção pedagógica. Tal como as restantes, a sua exploração envolvia conhecimentos que os alunos já detinham do 2.º e 3.º ciclos. O ensino e aprendizagem dos números e operações é iniciado no 1.º ciclo mas o desenvolvimento do sentido do número e a capacidade de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos, está presente ao longo de toda a escolaridade. Esta tarefa é de uma grande riqueza pois proporciona o trabalho com potências, a comparação e ordenação de números, a análise de relações entre os termos de uma sequência e a explicação de uma lei de formação. Além disso, abre caminhos para outros tópicos que vão ser abordados no ensino secundário.

#### O Papa Bolachas

Em casa do Mário vive um Duende que se chama Papa Bolachas.

O Mário sabendo deste gosto desmesurado do Duende guarda em lugar seguro todas as bolachas que compra.

Certo dia, por lapso, deixou uma bolacha esquecida na dispensa, pelo que o Duende:

Na primeira noite foi à dispensa e comeu metade da bolacha.

Na segunda noite regressou à dispensa e comeu metade da bolacha que tinha sobrado na noite anterior.

Na terceira noite volta à dispensa e come metade da bolacha que tinha sobrado e assim sucessivamente.

- 1) Qual a porção de bolacha que o Papa Bolachas comeu ao fim de 7 visitas à dispensa?
- 2) Qual a porção de bolacha que sobrou ao fim das referidas 7 visitas?
- 3) Qual a porção de bolacha que o Papa Bolachas comeu na  $n$ ésima visita à dispensa?
- 4) Qual a porção de bolacha que sobrou ao fim de  $n$  visitas?
- 5) Será que alguma vez o Papa Bolachas come a bolacha toda? Porquê?

---

<sup>4</sup> Apresentada no seminário dinamizado pelo Prof. Doutor Domingos Fernandes. Avaliação para as aprendizagens: Questões Teóricas e Práticas. Universidade do Algarve, (2008)

Comecei, como sempre, por fazer uma primeira leitura do problema com o objectivo de realçar elementos chave, sublinhando, através do tom de voz, termos que me pareciam importantes, como “metade”, “assim sucessivamente” e “porção”. Solicitei, em seguida, a um aluno que também o fizesse, neste caso Marco. A minha intenção ao solicitar a leitura audível a um aluno, foi a de fazer com que todos se inteirassem da situação, mas desta vez prestassem, também, atenção a mais uma leitura. É que, muitas vezes, acontecia que os alunos não ouviam a minha leitura, nem faziam uma leitura atenta e cuidada. No momento seguinte às duas leituras, Pedro, afirmou não estar a perceber a tarefa. O episódio “*É óbvio que vai comer a bolacha toda*”, refere-se a esse momento, que também deu origem à primeira troca de ideias relativa à questão: “*Será que alguma vez o Papa Bolachas come a bolacha toda? Porquê?*”

### ***Episódio 1: É óbvio que vai comer a bolacha toda!***

1. **Pedro:** *Professor, não estou a perceber onde é que se quer chegar. É evidente que o duende vai comer a bolacha toda.*
2. **Professor:** *Algum de vós quer explicar ao Pedro o que se pretende?*
3. **Mónica:** *Posso professor?*
4. **Professor:** *Claro.*
5. **Mónica:** *É assim, o Mário tem um duende que se chama Papa Bolachas e o Mário sabendo deste vício guarda sempre as bolachas em sítio seguro, mas uma vez deixou uma bolacha esquecida e então vai de lá o duende e come a bolacha. No 1.º dia só come metade da bolacha, no dia a seguir só come metade da bolacha que sobrou no dia anterior, ou seja,  $\frac{1}{4}$ , no outro dia comeu metade do que tinha sobrado,  $\frac{1}{8}$ , e depois outra metade e assim sucessivamente. Então a 1.ª pergunta é saber que porção da bolacha come o Papa Bolachas passados 7 dias.*
6. **Professor:** *Calma Mónica, está bom. Já percebeste o que se pretende?*
7. **Pedro.** *Parece que sim.*

8. **Rúben:** *É obvio que vai comer a bolacha toda, ele nem sequer vai conseguir partir a bolacha sempre.*
9. **Pedro:** *É isso mesmo.*
10. **Professor:** *Meninos, às vezes as precipitações tornam-se em bons momentos de reflexão, já não é a primeira vez, que as vossas opiniões iniciais caem por terra.*
11. **Rúben:** *Já lá está o professor a tentar contrariar-me. Mas aqui professor vê-se logo [sorrindo].*
12. **Professor:** *Eu não te estou a contrariar, mas isso agora também não interessa, vamos lá tentar analisar e responder às questões que vos são colocadas.*

As intervenções de [1] a [5] serviram para esclarecer Pedro sobre o objectivo da tarefa. Em [5] Mónica procura dar ao colega mais algumas informações, apresentando alguns elementos que se vão obtendo após a leitura e interpretação do enunciado da tarefa. Assim, refere as porções de bolacha comida na segunda e terceira noite:  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{8}$ , respectivamente. Esta concretização de Mónica, poderá ter ajudado Pedro e os restantes colegas a entenderem o que se pretendia [7].

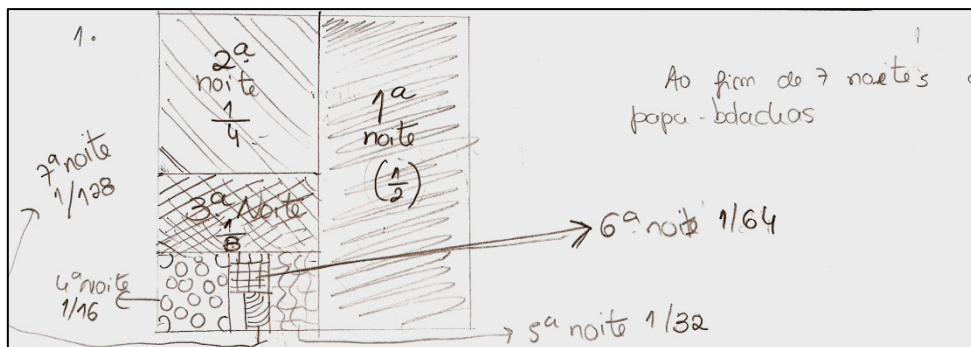
O esclarecimento de Mónica, parece ter assim sido útil a Pedro que, em seguida, troca algumas palavras com Rúben, [8] e [9], quando este diz: “*É obvio que vai comer a bolacha toda, ele nem sequer vai conseguir partir a bolacha sempre*” (última questão da tarefa). Os restantes colegas mantinham-se em silêncio, o que me fez suspeitar que poderiam concordar com a posição de Rúben e Pedro. Decidi intervir [10], pois pretendia que os alunos se recordassem que já em tarefas anteriores, as primeiras opiniões, as mais óbvias, haviam sido refutadas, depois de se pensar com mais cuidado. Tentava, assim, semear a dúvida.

Rúben parece não estar convencido de que não tinha razão [11], mas o seu sorriso, indicou-me que já não estava tão confiante na sua afirmação.

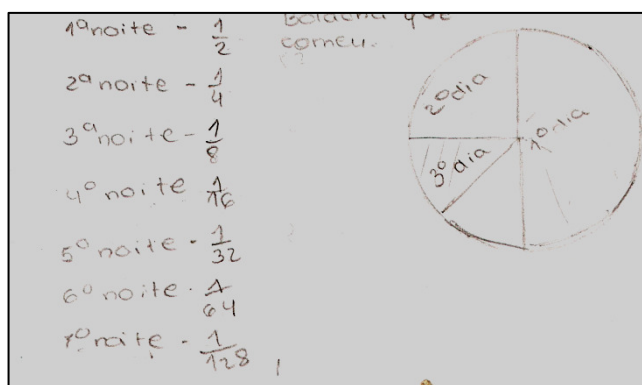
Foi após o episódio 1, que se desencadeou o início da resolução individual da tarefa pelos alunos, que teve uma duração de cerca de dez minutos.

Terminada esta fase, verifiquei que todos tinham optado por modelar a repartição da bolacha, recorrendo a representações icónicas (pictóricas). Quase todos os alunos optaram por representar a bolacha através de uma figura com a forma circular ou

quadrangular. Seguiram, depois, um processo que consistiu em fazer divisões sucessivas da bolacha e registrar as porções que o Papa Bolachas ia comendo. Os alunos, estabeleceram, assim, um paralelismo entre as representações icônicas e simbólica, o que permitiu obter rapidamente a resposta às duas primeiras questões (figura 26 e figura 27).



**Figura 26. Representação de Mônica**



**Figura 27. Representação de Marco**

Em ambos os casos, a bolacha foi dividida ao meio, mostrando o que foi comido na primeira noite. Em simultâneo, os alunos associam a imagem à representação escrita. Este raciocínio foi prolongado para as subsequentes divisões da bolacha.

Os exemplos apresentados apoiam a ideia de que as representações icônicas são recursos poderosos para a comunicação do raciocínio matemático. Neste caso, permitiram estabelecer uma ponte para a linguagem simbólica, própria da Matemática, o que possibilitou descentrar da situação da “bolacha” para a situação Matemática que fez surgir uma sequência de frações. As representações elaboradas foram favoráveis à resolução do problema e facilitaram a escrita de uma expressão para responder às primeiras duas questões apresentadas na tarefa. Estas questões não suscitaram quaisquer

dificuldades aos alunos. Rapidamente adicionaram as porções (fracções) de bolacha comida em cada uma das primeiras sete noites de forma a obterem as fracções  $\frac{127}{128}$  (porção de bolacha comida ao fim das 7 visitas) e  $\frac{1}{128}$  (porção de bolacha que sobrou ao fim de 7 visitas).

Surgiu, no entanto, um impasse associado ao cálculo da parte de bolacha comida na enésima visita do duende à dispensa. O episódio 2, “*Já olhei, mas não vejo nada*”, ilustra parte da discussão que ocorreu para descobrir a expressão matemática que permitia responder às antepenúltima e penúltima questões.

### **Episódio 2: *Já olhei, mas não vejo nada!***

1. **Rúben:** *Oh professor, olhando para o esquema da bolacha e para as várias fracções que dão a bolacha comida em cada uma das noites, vê-se que os denominadores das fracções parecem estar relacionados. Só que não sei como.*
2. **Professor:** *Então, olha melhor para eles.*
3. **Rúben:** *Eu já olhei, mas não vejo nada!*
4. **Professor:** *Alguém quer ajudar o Rúben?*
5. **Sofia:** *Pois eu também já vi isso e consegui ver que são o dobro do anterior [referindo-se aos denominadores], não consigo é arranjar uma expressão para escrever isso.*
6. **Professor:** *Ajudou o que a Sofia disse?*
7. **Pedro e Marco:** *Ajudou.*
8. **Rúben:** *Ajudou, mas continuo sem saber como escrever esse dobro, para que dê certo.*
9. **Mónica:** *Professor, posso dizer o que fiz? (...) Eu primeiro fiz o esquema de uma bolacha. E fui dividindo e colocando as fracções, na 1ª parte  $\frac{1}{2}$ , na segunda  $\frac{1}{4}$  e, assim, sucessivamente. E fui percebendo que os denominadores das fracções que ia escrevendo eram sempre o dobro dos denominadores da fracção anterior. Depois fiz uma expressão esquisita, com muita palavra, que era a fracção de bolacha comida ao fim de “n”*

vezes, era igual a um sobre o denominador da fração anterior vezes dois [figura 28]. Depois vi que cada denominador era sempre vezes dois, e então depois fiz uma tabela, com a 1ª noite, 2ª noite, 3ª noite, 4ª, 5ª até à enésima noite. E fui preenchendo uma tabela com as frações que tinha no esquema da bolacha que tinha feito [figura 29].

A handwritten equation in a box. On the left, it says 'fracção de bolacha com início no fim de n x'. This is followed by an equals sign and a fraction: the numerator is '1' and the denominator is 'denominador de fracção de bolacha anterior x 2'.

Figura 28. Expressão escrita por Mónica

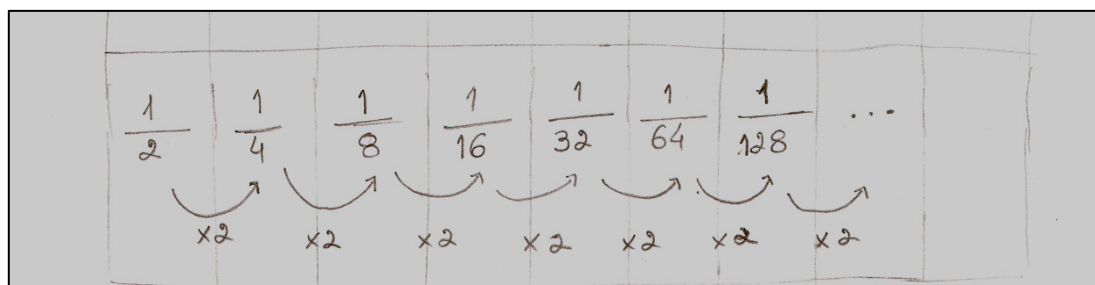


Figura 29. Sequência escrita por Mónica

10. **Professor:** Mónica, tens na tabela uma multiplicação sucessiva do número dois. Não é?
11. **Mónica:** É.
12. **Professor:** Quando eu refiro multiplicação sucessiva por dois, estarei a falar do quê?
13. **Pedro:** Então, está a falar de multiplicação.
14. **Professor:** Sim, é de multiplicação, mas reparem que eu também disse multiplicação sucessiva por dois. O que é isso de multiplicação sucessiva por dois?  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots$   
(...)
15. **Marco:** Potências.
16. **Professor:** Isso, mas neste caso são potências de base dois, não é?  
[pausa] E agora?

17. *Mónica: Professor não diga mais, que eu já sei, a fracção que se comeu em cada um dos dias é uma fracção, em que o denominador é dois e que tem no expoente o dia que se está a comer.*

A análise do episódio, mostra várias oportunidades para os alunos apresentarem as suas ideias. Procurei incentivá-los a reflectirem sobre o que faziam ou escutavam de modo a que fosse ampliada a linha de pensamento que emergia. Ao constatar que Ruben não consegue descortinar qual a relação que pressentia existir entre os denominadores das fracções [3], tentei que outros colegas contribuíssem para a conversação [4] e foco a atenção dos alunos numa intervenção significativa [6], uma vez que Sofia enriqueceu o diálogo usando a expressão “*são o dobro dos anteriores*”, relação essa que iria permitir avançar.

Além disso, a observação do episódio, revela a existência de um discurso essencialmente matemático que apela sobretudo a relações internas da Matemática. A atenção começa a centrar-se nas representações simbólicas para a descoberta de uma regularidade algébrica. O olhar dos alunos desvia-se da “bolacha” para os denominadores das sucessivas fracções da sequência.

Mónica percebeu como estava construída a sequência e comunicou-o através de palavras, em linguagem corrente, o que tornava a sua “expressão esquisita”, como refere [9]. Pode designar-se aquela “expressão esquisita” como sendo uma pré-simbolização algébrica, na medida em que a própria aluna sente que ela “*tem muita palavra*” [9]. No entanto, consegue explicar o significado da expressão que criou de uma forma clara e inequívoca. As imagens, que inicialmente assumiram um papel preponderante, foram progressivamente perdendo a sua relevância que foi passando para a representação escrita e simbólica. Esta última forma de representar foi conectada e complementada com a representação oral, como forma de apurar a representação matemática simbólica que era o objectivo final. O que acontece é que a simbolização constitui uma forma sintética de exprimir um conjunto de informações bastante difíceis de transmitir em linguagem corrente.

Mónica [17] ao usar a expressão “*tem no expoente o dia que se está a comer*”, uma representação oral que permite escrever o termo geral da sequência, possibilita a todos a concretização e finalização da tarefa. A aluna consegue, assim, após esta sua observação, concluir os registos da tabela que tinha iniciado, mas à qual ainda faltava acrescentar o termo geral da sequência, conforme mostra a figura 30.

1ª noite	2ª noite	3ª noite	4ª noite	5ª noite	6ª noite	7ª noite	...	nª noite
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	...	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	...	$\frac{1}{2^n}$

Figura 30. Tabela de Mónica com a expressão geral

Ao escrever  $\frac{1}{2^n}$  Mónica encontrou a lei de formação para os termos da sequência. A partir de um conjunto de palavras que apresentou aos seus colegas e apoiando-se nos seus registos escritos, consegue de uma forma clara e rigorosa obter a lei de formação [17]. Mónica representou simbolicamente as relações descritas no problema, em linguagem natural e em linguagem simbólica.

Os registos e intervenções de Mónica mostraram-se extremamente úteis, pois permitiram aos colegas olhar para os seus registos e a partir deles avançar também para a generalização, obtendo a expressão geradora da porção de bolacha comida em cada uma das noites.

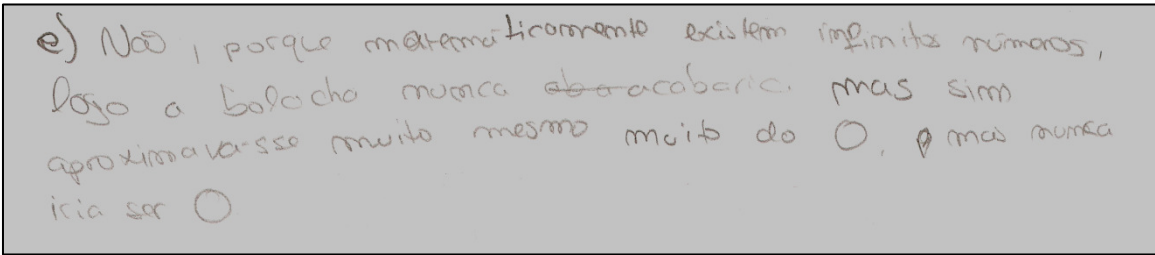
Os alunos conseguiram escrever a porção da bolacha comida na enésima visita do duende à dispensa, mas também conseguiram obter a expressão que permitia calcular a porção de bolacha que sobrou depois dessa enésima visita. O registo de Olga (figura 31) mostra-nos a resposta conseguida pela maioria dos alunos, uma vez que dois deles,

Pedro e Rúben, deram apenas como resposta  $1 - \frac{1}{2^n}$ .

d)  $1 - \frac{1}{2^n}$  . porque da bolacha inteira que é 1 ou 100% tiramos a parte que ele come ao fim de  $(n)$  visitas:  $1 - \frac{1}{2^n}$

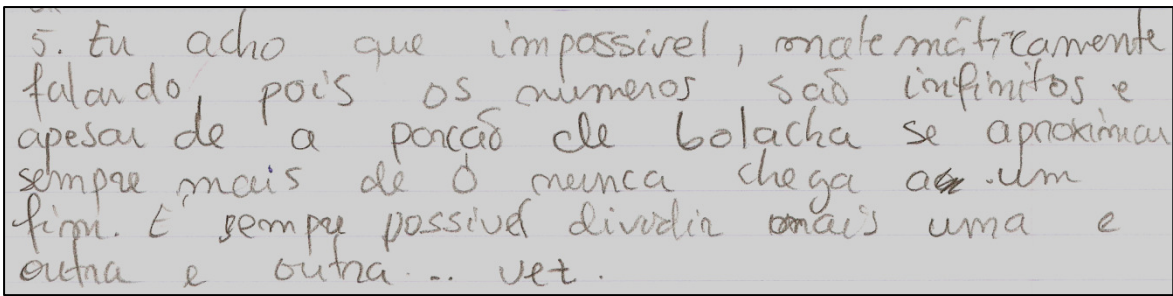
Figura 31. Registo de Olga

Poucos minutos antes de terminar a aula foi pedido aos alunos para registarem por escrito a resposta à última questão: “Será que alguma vez o Papa Bolachas come a bolacha toda?” Nos relatórios os alunos apresentaram respostas muito interessantes que justificam que a bolacha nunca seria totalmente comida. Nos seus raciocínios está presente a noção de que os números naturais são infinitos, o que faz com que o expoente da expressão algébrica continue a aumentar indefinidamente e, por consequência, a fracção  $\frac{1}{2^n}$  aproxima-se cada vez mais de zero, mas nunca toma este valor. A situação da bolacha que constituiu aqui uma *situação relevante* (Clement, 2004) ajudou à compreensão deste significado. Os alunos perceberam que por mais pequena que seja a fracção da bolacha, ela pode sempre imaginar-se a ser dividida ao meio. A título de exemplo, apresento duas das respostas a esta questão que traduzem uma primeira aproximação ao conceito de infinitamente grande e de infinitésimo (figuras 32 e 33).



e) Não, porque matematicamente existem infinitos números, logo a bolacha nunca ~~acabaria~~ acaba, mas sim aproximava-se muito mesmo muito do 0, mas nunca iria ser 0.

**Figura 32. Resposta de Marco à última questão**



5. Tu acho que impossível, matematicamente falando, pois os números são infinitos e apesar de a porção de bolacha se aproxima sempre mais de 0 nunca chega a ser um fim. É sempre possível dividir mais uma e outra e outra... etc.

**Figura 33. Resposta de Sofia à última questão**

Nos registos apresentados é notório que os alunos entenderam que “matematicamente”, a bolacha nunca iria ser totalmente comida, pois a dízima correspondente à fracção que se obtém depois de muitas visitas à dispensa é muito

próxima de zero, mas nunca chega a zero: será sempre “*possível dividir mais uma e outra e outra... vez*” (figura 33). Os alunos estavam perto da noção de infinitésimo.

Olhando para o início da sessão e para os registos finais dos alunos, estes parecem indicar que a ideia inicial apresentada por Rúben e apoiada por Pedro (episódio 1) é verdadeira na prática, mas não do ponto de vista matemático pois é sempre possível calcular (representar) metade de um número por muito pequeno que este seja.

### 3.2. Síntese

A discussão em torno da tarefa *O Papa Bolachas* foi bastante interessante e rica. As conexões entre as várias representações (figuras, tabelas, símbolos, palavras escritas e oralidade) permitiram avançar na resolução do problema, evoluir na linguagem e iniciar uma progressiva aproximação ao conceito de progressão geométrica, infinitésimo, soma de  $n$  termos de uma progressão geométrica, entre outros. No início, os alunos recorreram, essencialmente, a representações mais esquemáticas, mais icónicas e mais “coladas” à situação apresentada no problema, que foram abandonando progressivamente pela necessidade crescente de encontrar um modelo matemático que lhes permitisse generalizar uma determinada relação. A linguagem dos alunos foi-se tornando cada vez mais simbólica, seguindo o movimento a que se refere Clement (2004), que parte de representações pictóricas e progride até aos símbolos matemáticos. A linguagem oral mostrou-se determinante para esta evolução.

A resolução deste problema permitiu aos alunos explorarem e investigarem regularidades e mobilizarem diversos conhecimentos trabalhados em anos de escolaridade anteriores. Ao resolverem o problema, mostraram-se capazes de raciocinar e de comunicar recorrendo a diversas representações.

Nesta tarefa, os alunos revelaram dificuldades ao nível do estabelecimento de “regras” ou identificação de “padrões”.

A utilização de representações (representação pictórica da bolacha e tabela) para modelar a tarefa foi, como sempre, uma opção da generalidade dos alunos, que permitiram responder às questões onde não era necessário generalizar. As principais dificuldades surgem quando os alunos têm que encontrar o termo geral da sequência.

Os alunos conseguiram, de forma muito clara, representar o crescimento da sequência, assim como foram capazes de analisar o seu comportamento, embora, na generalidade, tivessem dificuldades em utilizar as suas representações para encontrar o termo geral, de forma autónoma.

Foi necessário, mais uma vez, iniciar uma discussão em torno das várias representações realizadas pelos alunos. A partilha de opiniões tornou possível o entendimento das representações que os alunos haviam efectuado, possibilitando-lhes a encontrar o termo geral da sequência  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .

## 4. O seminário final

### 4.1. Preparando e dinamizando o seminário final

A importância e a necessidade de se experimentarem situações de comunicação diversificadas, incluindo interações no seio de pequenos grupos e exposições a grandes grupos, nomeadamente à turma ou à escola, serviram de mote para a realização do seminário final.

Com a realização deste seminário pretendia mostrar o trabalho desenvolvido à comunidade escolar. Além disso, serviria, também, como mais uma fonte de recolha de dados, pois seria possível aperceber-me de como conseguiriam os alunos responder ou justificar questões que lhes poderiam vir a ser colocadas.

Esperava que estas duas faces da mesma moeda – partilha do trabalho desenvolvido e fonte de recolha de dados – me permitissem perceber melhor de que forma os alunos tinham desenvolvido e/ou aperfeiçoado a sua capacidade de comunicar.

A partilha com os colegas, professores e encarregados de educação do trabalho do grupo de dez alunos com quem desenvolvi a intervenção pedagógica, mostrou-se um enorme desafio, quer para os alunos quer para mim. Desafio porque, no que se refere aos alunos, encontravam-se cheios de vontade de mostrar um trabalho diferente daquele que habitualmente fazem. Para mim, o desafio provinha de se tornar público um trabalho com características diferentes daquele que acontece normalmente nas salas de aula de Matemática e que gostaria de ver apresentado e defendido por estes alunos.

Após a última sessão da intervenção pedagógica, os alunos dispuseram de mais duas sessões de quarenta e cinco minutos cada uma, para preparar o seminário.

Esta preparação passou por dois momentos distintos. Primeiramente, foi necessário chegar a um acordo relativamente à forma como se iria conduzir, uma vez que não queria ser eu a determinar a sua concretização. Numa segunda fase foi necessário organizar a apresentação.

Quando os alunos tiveram que delinear a metodologia e organização do seminário, ocorreu um impasse. Alguns eram da opinião que deveriam seguir uma metodologia idêntica à usada nas sessões de trabalho: entregar um problema para os participantes resolverem e depois fazerem uma exploração em torno das ideias apresentadas para a sua resolução. Outro grupo de alunos não concordava com esta

perspectiva, uma vez que não achavam bem colocar os participantes a resolver problemas.

O episódio “*Fazíamos de professores*”, que de seguida apresento, dá conta das sugestões propostas pelo grupo de alunos defensores da primeira posição.

### ***Episódio 1: Fazíamos de professores***

1. **Mónica:** *Eu acho que deveríamos fazer como o professor fazia connosco.*
2. **Professor:** *Explica lá o que queres dizer Mónica, não estou a entender.*
3. **Mónica:** *Professor, podíamos entregar problemas para resolverem e depois ver como é que resolviam, e se eram ou não capazes de explicar. E nós fazíamos todos de professores.*
4. **Rúben:** *Sim, e assim podíamos ser nós a explicar coisas aos nossos colegas.*

Mónica, uma das alunas mais participativas e com mais vontade de trabalhar, sugeriu que se desenvolvesse um trabalho idêntico ao que tinha sido desenvolvido nas sessões da intervenção pedagógica [1] e [3]. A sugestão de Mónica foi aceite por alguns alunos, com entusiasmo, entre os quais Rúben, que concorda com a colega [4]. No entanto, outra parte do grupo defendia a ideia de que num seminário não deveriam colocar ninguém a trabalhar. Deveriam apresentar o trabalho desenvolvido e dar a conhecer as suas perspectivas relativamente ao mesmo. O episódio 2 mostra o envolvimento dos alunos na procura de um rumo a dar ao seminário.

### ***Episódio 2: Não estou a ver os meus pais a resolver problemas***

5. **Sofia:** *Eu acho que seria engraçado, mas eu não estou a ver os meus pais a resolver problemas.*
6. **Rúben:** *Sim, mas quando eles não conseguirem somos nós que lhe vamos explicar.*
7. **Pedro:** *Eu também concordo com a Sofia.*

8. **Sofia:** *Professor, não seria melhor apresentarmos alguns resultados do nosso trabalho?*
9. **Professor:** *Sim e podem também dar algumas opiniões e responder a questões que vos queiram colocar.*
10. **Sofia:** *Sim, eu assim acho melhor.*
11. **Pedro:** *Eu também concordo.*
12. **Rúben:** *Sim pode ser também assim, mas eu continuo a achar que podíamos, por exemplo, no final propor um problema para eles resolverem.*
13. **Professor:** *Que lhes parece a opinião do Rúben?*

Este episódio dá-nos conta do processo adoptado para encontrar com os alunos a metodologia para concretizar o seminário que lhes tinha proposto realizar. Após alguma discussão e a partilha de ideias, foi possível chegar a um consenso. Ficou decidido que o seminário seria desenvolvido enquadrando ambas as posições, isto é, numa primeira parte os alunos dariam a conhecer o trabalho realizado na intervenção pedagógica, apresentando algumas das tarefas trabalhadas. Na segunda parte, seria proposto aos colegas, professores e encarregados de educação que resolvessem uma tarefa Matemática. Depois de delineado o rumo do seminário, foi necessário planificá-lo, dando-lhe significado e sentido. Neste âmbito ficou assente que as linhas orientadoras seriam as seguintes:

- Como decorreram as aulas;
- O que é (para mim) resolver um problema;
- A importância das tarefas realizadas;
- As actividades;
  1. A lata de insecticida;
  2. Tiro ao Alvo;
  3. O Papa Bolachas;
- Actividade para todos;
- Debate final;

Ficou decidido que todos os alunos teriam uma intervenção na apresentação do seminário. Uma vez que eram dez alunos, foi necessário distribuir tarefas e organizar a forma de o conduzir. Em particular, ficou acordado que preparariam uma apresentação em *PowerPoint* e foi considerado por todos que era necessário criar a figura do moderador do seminário, tendo esse papel sido atribuído a Rúben.

Em seguida, apresento e analiso a realização do seminário tendo por referência as linhas orientadoras definidas.

### **Como decorreram as aulas**

Rúben começou por dar as boas vindas aos participantes no seminário e apresentar os seus colegas. Em seguida, chamou Andreia para, em conjunto com ela, iniciar o seminário. Começaram por partilhar com o público, de forma bastante clara, o desenrolar das sessões de trabalho. As suas palavras foram devidamente preparadas com a ajuda dos colegas:

*Estas aulas foram muito boas. Posso dizer que foram realmente motivadoras, pois mostraram-nos tantos modos de resolver os problemas que eram propostos pelo professor ... estas aulas foram como uma aventura em que o tesouro que no final acabaríamos por descobrir, era um novo método que nos iria ajudar no dia-a-dia.*

*As aulas decorreram de uma forma muito agradável, nós nem dávamos pelo tempo passar. Estávamos sempre desejando que a semana passasse para termos novamente aula com o professor. A parte que menos gostávamos era a de ter que pôr tudo por escrito, mas fomos habituando e depois já nem era necessário o professor pedir para nós escrevermos, pois nós já sabíamos que tínhamos que escrever.*

*Outra coisa que nós todos gostámos muito foi o facto de podermos contar com as opiniões dos colegas para efectuar as nossas resoluções, porque o professor queria sempre que fizéssemos a discussão das nossas ideias, e nós não estávamos habituados a partilhar as opiniões, o que se tornou muito útil.*

*Estas aulas que foram sempre de resolução de problemas obedeceram a um esquema de trabalho que se verificou em todas elas, que foi: Nós*

*chegávamos à sala e fazíamos logo um grupo com todos. O professor distribuía a tarefa, nós líamos em silêncio e depois o professor lia em voz alta. Logo de seguida começávamos a trocar opiniões em relação ao problema. Esta troca de opiniões permitia logo começar a delinear uma estratégia de resolução. Depois resolvíamos, individualmente, ou tentávamos resolver pois, por vezes, nem todos conseguíamos resolver a tarefa na totalidade, mas como de seguida passávamos sempre à troca de ideias, conseguíamos sempre terminar a resolução. O professor também ajudava, dando pistas ou colocando outras questões, quando nós não conseguíamos.*

*Eu posso dizer, que adorei estas aulas e gostava que as aulas fossem sempre assim, isto é, a nossa opinião é muito importante e ajuda quando temos mais dificuldades. (Andreia)*

Das palavras da aluna é de destacar a metáfora usada, onde esta associa o trabalho de resolução de problemas a uma aventura.

A aluna reconhece que, no início, aquilo de que menos gostavam era de elaborar os registos escritos que eram solicitados, o que pode indiciar a existência, no começo, de alguma resistência à comunicação escrita que incluía o registo de todas as suas opções e estratégias de resolução das tarefas. No entanto, as suas palavras indiciam que esta resistência parece ter sido ultrapassada: *“mas fomos habituando e depois já nem era necessário o professor pedir para nós escrevermos, pois nós já sabíamos que tínhamos que escrever”*.

Andreia conseguiu, de uma forma bastante clara, dar a conhecer a todos como tinham decorrido as sessões de trabalho. Destacou a importância do discurso mantido e da partilha das opiniões como “força vital” para a resolução de problemas. Sobressai ainda que os alunos gostaram do trabalho desenvolvido e que a metodologia de trabalho parece ter sido propícia para ultrapassar as barreiras e os obstáculos que iam surgindo.

## O que é resolver um problema

Coube a Marco a tarefa de partilhar com o público aquilo que este grupo de alunos entende por “resolver um problema”. A imagem representada na figura 34, que representa um dos slides incluídos na apresentação em *PowerPoint*, serviu de suporte ao discurso do aluno.

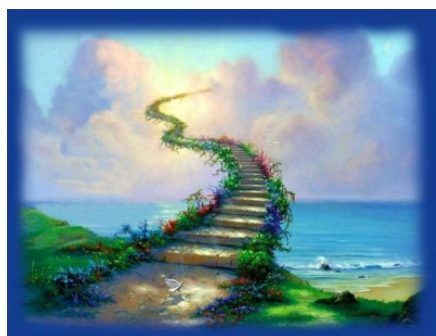


Figura 34. O que é resolver um problema

*Nós consideramos que esta imagem descreve perfeitamente o que é resolver um problema. Reparem que o caminho parece seguir para o infinito, começa muito largo e depois vai ficando cada vez mais estreito. Quando estávamos a resolver um problema, numa fase inicial, também não sabíamos para onde íamos, tínhamos um enorme conjunto de possibilidades (parte mais larga da estrada) e depois à medida que íamos andando pela resolução, essas mesmas possibilidades iam ficando cada vez mais restritas.*

*Resolver problemas é muito importante, pois ajuda a treinar o raciocínio, permite reflectir e abre-nos novas portas no mundo matemático.*

*Resolver um problema e tal como a Andreia há pouco disse: é uma aventura onde se pretende encontrar um tesouro. (Marco)*

A metáfora: “é uma aventura onde se pretende encontrar um tesouro” e a imagem seleccionada pelos alunos, mostra o conceito que construíram sobre resolução de problemas. Esta ideia que, por vezes, se torna de difícil verbalização, foi metaforicamente explicada, de uma forma bem conseguida, por este conjunto de alunos.

Os alunos atribuíram uma grande importância à resolução de problemas, reconhecendo a diversidade de possibilidades com que são confrontados inicialmente e a caminhada que vão desenvolvendo através dos vários ensaios, das discussões, da partilha e negociação de ideias que os vai ajudando a estreitar o caminho até encontrar o “tesouro”.

Reconhecem ainda que a resolução de problemas contribui para desenvolver o raciocínio matemático, tendo a partilha de ideias e a reflexão, sido decisivas para que todos tivessem acesso à construção da solução dos problemas. Desta forma foi possível a todos os elementos do grupo alcançarem o que designam por “tesouro”.

### **A importância das actividades realizadas**

Foi Olga quem explicou a importância do trabalho realizado ao longo das sessões:

*As fichas que o professor entregava, tinham sempre um problema para resolver.*

*Nós nunca sabíamos ao certo o que tínhamos que fazer, podíamos ter uma ou outra ideia mas não sabíamos o que tínhamos que fazer, e como o professor também não nos dizia, tínhamos que ser a nós a arranjar maneira de o resolver. Podíamos fazer como quiséssemos, desenhos, cálculos, equações, etc. O mais importante é que partilhássemos, com todos, as nossas ideias e as nossas tentativas de resolução.*

*Eu digo tentativas pois, muitas vezes, era o conjunto das várias tentativas e opiniões que permitiam encontrar e estabelecer o caminho a seguir, para o conseguirmos resolver.*

*O professor ia-nos sempre ajudando e também participava nas nossas conversas, mas nunca nos dizia se estávamos certos ou errados, deixando-nos sempre experimentar as nossas ideias, mesmo que não fossem as mais correctas.*

*Nós consideramos que este trabalho foi mesmo muito importante, pois permitiu acima de tudo trabalhar Matemática de uma forma diferente daquela a que estamos habituados. (Olga)*

A aluna focou-se, nomeadamente no papel desempenhado pelo professor ao longo da intervenção pedagógica. Referiu o facto deste não sugerir, à partida, o caminho a seguir para resolver os problemas, deixando os alunos “*arranjar maneira de os resolver*” podendo, para isso, recorrer a variadas forma de representação: “*Podíamos fazer como quiséssemos, desenhos, cálculos, equações, etc*”. Sublinhou, também, a importância da partilha de ideias e das várias tentativas que iam surgindo ao longo da resolução das tarefas. Um outro aspecto também valorizado pelos alunos, através das palavras de Olga, foi o facto de o professor participar nas discussões sem fazer juízos de valor, permitindo, no dizer da aluna, “*sempre experimentar as nossas ideias, mesmo que não fossem as mais correctas*”. Esta intervenção é indiciadora de que os alunos se sentiram com liberdade para contribuírem com sugestões mesmo não tendo a certeza se seriam válidas e para apresentarem as suas ideias sem receio de estar a errar.

O facto de esta intervenção ter ocorrido nas aulas de estudo acompanhado retirou à avaliação o peso que esta assume na aula de Matemática onde tradicionalmente os alunos têm receio de dizer algo que esteja menos certo e que possa dar ao professor a ideia de que o aluno não sabe.

O meu posicionamento e o facto de estarmos num espaço diferente da aula de Matemática, parece ter contribuído para que os diálogos surgissem sem receios. Os alunos parecem ter ganho confiança em exprimir as suas opiniões e ideias.

### **As actividades**

Passada a fase inicial do seminário, que permitiu dar a conhecer o trabalho desenvolvido e colocar os presentes a par da perspectiva dos alunos envolvidos, relativamente à metodologia de trabalho, passou-se a uma breve apresentação de três das dez tarefas trabalhadas durante a intervenção pedagógica.

Os alunos tentaram conduzir a apresentação de cada uma, confrontando os participantes com o seu enunciado e apelando ao seu senso comum, tal como aconteceu nas sessões da intervenção pedagógica. Só depois de todos terem lido a tarefa, que apresentavam num *slide*, e de terem formulado a sua opinião, é que os alunos iniciavam a explicação e justificação. Estas intervenções eram acompanhadas de imagens das suas próprias resoluções e conclusões.

As tarefas *A lata de Insecticida*, *Tiro ao Alvo* e *O Papa Bolachas* foram as que os alunos consideraram mais interessantes para apresentar. No caso das tarefas *A Lata*

de insecticida e O Papa Bolachas, as conclusões apresentadas foram ao encontro da metáfora usada, por eles, para definir o que é resolver um problema: *uma aventura onde se pretende encontrar um tesouro*. Mostraram como, através de estratégias pessoais, conseguiram resolver as tarefas, refutando as ideias iniciais resultantes de uma primeira leitura.

A tarefa *Tiro ao Alvo* foi, desde o primeiro momento, do agrado de todos os alunos. O entusiasmo com que nela se envolveram levou-os a apostarem na sua apresentação no seminário. O envolvimento e gosto pela tarefa permitiu-lhes desenvolver raciocínios e o cálculo mental, tendo como referência um conjunto de restrições. Esta tarefa não suscitou, nos alunos, quaisquer dificuldades. Viram nela uma “espécie de jogo informático”, tendo permitido desencadear significativos momentos de discussão.

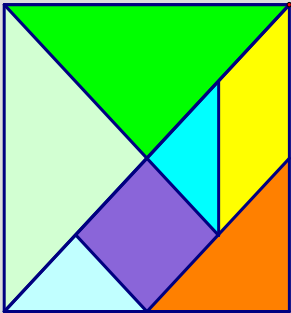
Durante a apresentação das tarefas os alunos foram capazes de responder a todas as perguntas que lhes foram colocadas.

### **Tarefa para todos**

Neste espaço do seminário os encarregados de educação, professores e alunos foram convidados a resolver a tarefa *O Tangram*, apresentada em seguida, que suscitou algum entusiasmo nos convidados.

**TANGRAM<sup>5</sup>**

As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra a figura:



Se a área do quadrilátero amarelo é 1 cm<sup>2</sup>, qual é a área de todo o Tangram?

---

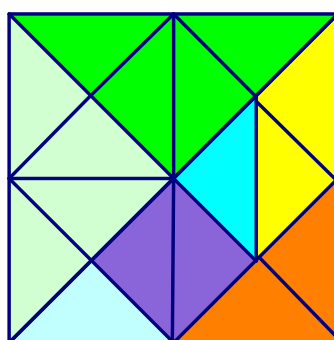
<sup>5</sup> Lopes, C. (2002), p.35

Os alunos usaram alguns critérios para a selecção da tarefa a apresentar aos participantes no seminário. Tiveram o cuidado de escolher uma tarefa cuja resolução não exigisse conhecimentos específicos que a pudesse tornar inacessível. Na sua perspectiva, *O tangram* era uma tarefa fácil por não exigir cálculos, nem a resolução de equações ou o uso de expressões ou algoritmos específicos. Bastaria, a seu ver, recorrer a estratégias ao alcance de qualquer um dos presentes. Os alunos procuraram, em simultâneo, mostrar o que é resolver um problema.

Após a distribuição do enunciado da tarefa, foram disponibilizados alguns tangrans, para serem manuseados pelos presentes, durante cerca de cinco minutos. Durante este período os participantes fizeram experiências com as peças do *tangram* e trocaram algumas impressões entre si relativas à tarefa apresentada. Pedro e Mónica, foram circulando pela sala de modo a contactarem com o trabalho que estava a ser realizado pelos convidados. As situações observadas variavam entre alunos, encarregados de educação e familiares. Alguns alunos conseguiram obter a resposta para a tarefa apresentada. Entre os encarregados de educação e familiares, apenas uma jovem, irmã de Marco, conseguiu resolver a tarefa.

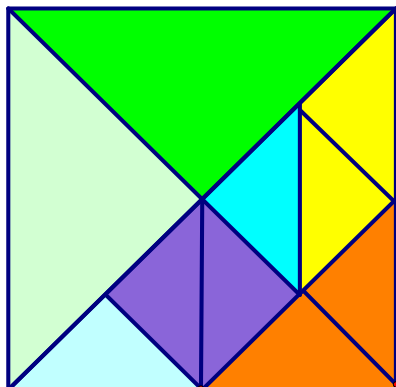
Os alunos tiveram a preocupação de apresentar, no final, duas propostas de resolução. A primeira passou pela divisão de cada uma das peças do *tangram* em triângulos geometricamente iguais. Esta proposta foi facilmente entendida pelos participantes e coincidiu com a que alguns dos alunos convidados tinham delineado.

A divisão do *tangram* em dezasseis triângulos, geometricamente iguais (figura 35) conduzia ao cálculo  $16 \times 0,5 = 8 \text{ cm}^2$ , obtendo-se assim a área de todo o *tangram*.



**Figura 35. Divisão do tangram em triângulos geometricamente iguais**

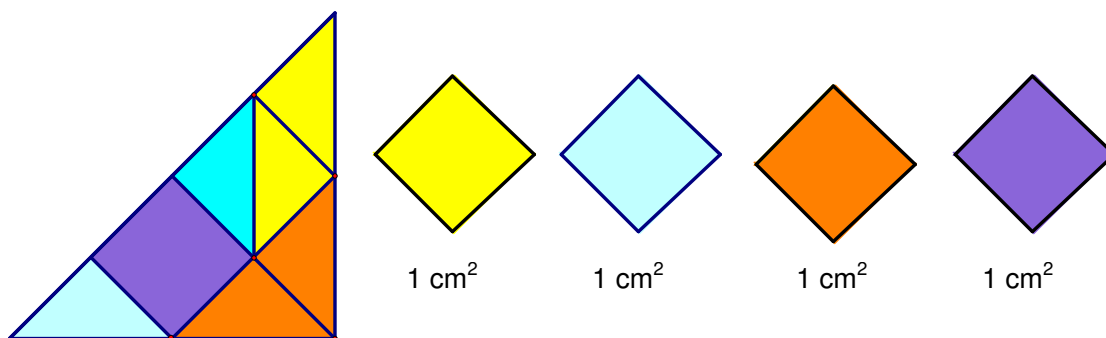
A segunda proposta de resolução apresentada, um pouco mais complexa, apelava à manipulação das várias peças que compõem o *tangram*. A figura 36 complementou a sua explicação.



- Juntando os dois triângulos amarelos obtemos um quadrado de área de  $1\text{cm}^2$ , igual ao lilás;
- Juntando os dois triângulos azuis obtemos um quadrado de área de  $1\text{cm}^2$ , igual ao lilás;
- Juntando os dois triângulos laranja obtemos um quadrado de área de  $1\text{cm}^2$ , igual ao lilás;

**Figura 36.** Slide usado para explicar a segunda proposta de resolução de *O Tangram*

Depois de terem explicado a imagem da figura anterior, os alunos apresentaram um novo slide (figura 37) onde mostravam uma sequência de figuras todas com  $1\text{cm}^2$  de área, o que perfazia um total de  $4\text{cm}^2$ . Concluíram dizendo que com estes quatro quadrados apenas se estava a considerar metade do *tangram*, pelo que a área deste seria o dobro, ou seja,  $8\text{cm}^2$ .



**Figura 37.** Slide usado para concluir a explicação da segunda proposta de resolução de *O Tangram*

Com a apresentação de duas propostas de resolução os alunos quiseram mostrar um dos aspectos mais relevantes que a intervenção pedagógica lhes proporcionou: a consciência de que não existe um único processo válido de resolução de uma tarefa.

Além disso pretenderam ilustrar que a resolução de um problema exige a leitura do enunciado e sua interpretação, delinear uma estratégia de resolução e comunicar os raciocínios feitos.

## 4.2. Síntese

Os alunos mostraram grande domínio na utilização da linguagem natural e simbólica, apresentando um discurso fluente e de fácil compreensão. Mostraram, ainda, ter compreendido o conceito de problema.

A metáfora usada pelos alunos para ilustrar o significado de problema – *“uma aventura onde se pretende encontrar um tesouro”* – é, do ponto de vista didático, riquíssima. Quando referem “aventura” estão a referir-se às várias tentativas e aos progressos e retrocessos que surgem na resolução de um problema. Tal como acontece nas aventuras, onde os heróis têm que enfrentar verdadeiros obstáculos para alcançar o tesouro, na resolução de um problema também surgem obstáculos, que há que ultrapassar, para chegar à solução.

A imagem usada pelos alunos (estrada de base larga a dirigir-se para o infinito), assim como a sua opinião da importância da resolução de problemas – *“ajuda a treinar o raciocínio, permite reflectir e abre-nos novas portas no mundo matemático”* – mostra como os alunos apreciaram esta oportunidade de, nas palavras de Olga, *“trabalhar Matemática de uma forma diferente daquela a que estamos habituados”*.

No final do seminário, os alunos foram confrontados com algumas questões, colocadas por alguns professores, que se prenderam com a efectiva importância da aprendizagem realizada nas sessões da intervenção pedagógica. Em resposta, referiram, que aprenderam a partilhar e confrontar as suas opiniões e que isso é fundamental para ultrapassarem os obstáculos. Sublinharam, também, que gostariam de ter oportunidade de resolver tarefas desta natureza nas aulas de Matemática. Apesar de elogiarem o trabalho da professora de Matemática que os acompanhou ao longo do 3.º ciclo, reconheceram que este tipo de tarefas e esta metodologia de trabalho não existe nas aulas de Matemática a que estão habituados e manifestaram o desejo de resolver problemas nas aulas de Matemática.

Os alunos apresentaram as suas ideias e opiniões pessoais acerca deste trabalho de uma forma muito convicta. Mostraram ainda muita facilidade em enfrentar a plateia,

nomeadamente, no trabalho com os participantes na tarefa *O tangram*, colocando à prova a sua capacidade de comunicar em Matemática.

## ***5. De Onde estou?... ao Seminário Final***

Vários estudos mostram que a maioria dos professores age de acordo com a experiência vivida como alunos (Amado, 2007). Talvez por esta razão, continuam a existir inúmeras salas de aula em que os alunos raramente têm oportunidade para apresentar e discutir as suas ideias ou sentimentos relativamente a uma dada situação. Cazdan (2001), Loureiro (2000) e Stubbs (1987) afirmam que os movimentos discursivos mais frequentes em sala de aula, são os do padrão de interação IRA.

Ao longo dos últimos anos têm surgido várias recomendações no sentido de alterar esta situação na aula de Matemática, de modo a trazer para primeiro plano a comunicação, a interação multidireccional e a negociação de significados (APM, 1998; NCTM, 2007).

Como anteriormente referi, a intervenção pedagógica desenvolvida ao longo de dez sessões, foi seguida de um seminário que permitiu evidenciar que os alunos foram adquirindo novos hábitos e métodos de trabalho, em que a comunicação matemática teve um lugar de destaque. Nestas sessões procurei fomentar uma comunicação matemática que não fosse modelada pelo padrão de interação IRA, de modo a promover o desenvolvimento da comunicação matemática num contexto de resolução de problemas. Em particular, tentei compreender como é que os alunos utilizam as representações matemáticas para comunicar as suas ideias e as suas estratégias.

A metodologia de trabalho seguida nesta intervenção pedagógica foi para mim, tal como para os alunos envolvidos, uma experiência nova uma vez que, tal como a professora destes alunos, não tinha por hábito propor este tipo de tarefas nas aulas de Matemática.

Foi possível promover a existência de uma permanente partilha e discussão de ideias, incentivar o recurso a múltiplas representações e ainda envolver os alunos na elaboração de pequenos relatórios escritos para cada uma das tarefas propostas.

A análise transversal da exploração das dez tarefas propostas e das resoluções dos alunos, permitem identificar algumas regularidades que apresento em seguida.

## 5.1. Os impasses na interpretação do enunciado da tarefa

Na maioria das tarefas, os alunos revelaram inicialmente algumas dificuldades na interpretação do enunciado dos problemas que eram apresentados em suporte escrito. Por vezes, as dúvidas prendiam-se com termos ou palavras que desconheciam. Além disso, aconteceu, considerarem os dados do problema insuficientes, como sucedeu nas tarefas um e seis, conforme foi referido nas secções 4.1. e 4.2. deste capítulo. Durante a resolução da tarefa sete (*O Rectângulo*, anexo 8) também ocorreu a mesma situação. Neste caso, pretendia-se saber o que sucedia com a área de um rectângulo, quando *multiplicávamos o comprimento dos seus lados por um mesmo factor*. Alguns alunos não sabiam o significado da palavra *factor* como é visível no episódio *Ai professor, não sei explicar* que ocorreu logo após a leitura da tarefa.

### ***Episódio 1: Ai professor, não sei explicar***

1. **Ruben:** *Professor, o que é um factor?*
2. **Mónica:** *Um factor é .....*
3. **Professor:** *Diz Mónica.*
4. **Mónica:** *Ai professor, não sei explicar, mas se aqui diz multiplicar por um factor, deve ser um número, não é?*
5. **Professor:** *Não sei...*
6. **Mónica:** *Multiplicar, neste caso tem que ser por um número.*
7. **Pedro:** *Mas podemos usar um número qualquer [referindo-se ao factor], e considerar também um rectângulo qualquer?*
8. **Sofia:** *Mas... Professor, podemos inventar uns lados quaisquer?*
9. **Professor:** *Tudo o que quiserem.*

Quando Rúben, me questiona [1], sobre o significado da palavra *factor*, foram os colegas que procuram ajudar e esclarecer a sua dúvida. Mónica [2] tenta responder, pelo que incentivei a sua participação [3]. Procurei sempre dar força aos alunos para esclarecer os colegas, pois as suas explicações, por vezes informais, são suficientemente claras para tornarem as ideias entendíveis pelos colegas. Por exemplo, quando em [5], refiro “*Não sei*”, foi com intenção de fazer a aluna e os colegas reflectirem sobre o que Mónica havia afirmado.

O episódio 1 é um exemplo de como o diálogo se pode tornar um veículo decisivo no esclarecimento de dúvidas. Foi sempre num sentido de partilha de opiniões e significados que os alunos conseguiram encontrar esclarecimentos para as suas alegações.

Ao longo de todas as sessões tive a preocupação em esclarecer os alunos, sempre que surgiram impasses resultantes de não conhecerem ou não recordarem o significado de termos constantes no enunciado das tarefas. É interessante assinalar que os próprios alunos se empenharam em prestar esclarecimentos uns aos outros, apoiando-se mutuamente até encontrar as respostas para as suas dúvidas, pelo que nem sempre foi necessária a minha intervenção. A minha participação nos diálogos foi essencialmente para questionar, ajudar a tornar as explicações mais claras ou corrigir a linguagem tornando-a mais precisa e correcta.

## **5.2. As precipitações iniciais**

Uma situação frequente foi os alunos começarem a emitir opiniões e ideias imediatamente após a leitura das tarefas, sem reflectirem sobre o que afirmavam. Como procurei evidenciar nas três primeiras secções deste capítulo, nas tarefas um (*Onde estou?*), seis (*Pintando Sólidos*) e nove (*O Papa-Bolachas*), esta situação foi bastante evidente o mesmo acontecendo com outras tarefas de que a três (*A lata de insecticida*, anexo 4) é um exemplo. O episódio 2, que apresento em seguida, refere-se a esta última tarefa que incluía um pedido de comentário à seguinte afirmação:

*“Uma lata do mesmo material, com a mesma altura e metade do diâmetro da base da lata da figura, tem metade do seu volume”.*

A situação apresentada envolve a razão entre volumes de sólidos. Para os alunos tratava-se de um problema novo, uma vez que de, acordo com o Programa de Matemática, apenas se trabalha a razão de semelhança para comparar perímetros e áreas de polígonos semelhantes.

Como se pode observar no episódio 2, a primeira reacção dos alunos, antes de efectuarem qualquer procedimento que lhes pudesse dar alguma indicação, foi concordarem com a afirmação.

## ***Episódio 2: É óbvio que terá metade do volume...***

1. **Sofia:** *Concordo, a frase é verdadeira, porque se nós cortássemos uma lata por um plano perpendicular à sua base, passando pelo centro da base, obtínhamos duas latas de igual volume, em que cada uma delas tem metade do volume da original. Porque este corte divide o cilindro em duas partes iguais.*
2. **Mónica:** *Isso depende da altura.*
3. **Professor:** *A altura é a mesma.*
4. **Mónica:** *Ah! Então sim, a afirmação é verdadeira.*
5. **Pedro:** *É como a Sofia disse. Se o material é o mesmo, mas tem metade do diâmetro, é óbvio que terá metade do volume.*

Para os alunos a resposta parecia tão evidente que não se preocuparam em provar a sua veracidade ou em procurar um contra-exemplo. Neste caso, a minha intervenção revelou-se indispensável para os levar a pensar na tarefa. Procurei colocar questões que incentivassem a experimentação e a procura de um contra-exemplo que, mais tarde, serviu para refutar a ideia inicial. Esta situação aconteceu sempre que estivemos na presença de conjecturas que poderiam ser refutadas através da experimentação/verificação com outros exemplos. Esta dificuldade dos alunos pode ter diversas origens. Uma hipótese possível prende-se com o facto de não estarem habituados a experimentar e descobrir contra-exemplos que permitam concluir que uma afirmação é falsa.

No entanto, não deixa de ser interessante notar o que sucedeu no episódio 2, “*É óbvio que terá metade do volume...*”. Os alunos apesar de estarem a tirar uma conclusão errada, utilizam um discurso coerente e bastante rigoroso, relativamente à terminologia matemática usada, expondo de forma clara as suas ideias [1].

### 5.3. Uso das contribuições de colegas para desencadear ou complementar o próprio raciocínio

As tarefas propostas aos alunos tiveram como objectivo promover o seu envolvimento, nomeadamente numa actividade em que a comunicação matemática fosse privilegiada. Em particular, tentei desafiar o espírito crítico relativamente às contribuições dos colegas e estimular e desenvolver o espírito de cooperação.

Vários dos episódios apresentados no âmbito da análise microscópica de três das tarefas (três primeiras secções deste capítulo) são ilustrativos de como os alunos usavam, criticavam ou refutavam as opiniões dos colegas. Este modo de estar não surgiu apenas a propósito da exploração destas tarefas. Observe-se, por exemplo, o episódio 3 “*Uma coisa que eu agora não me lembro*”, associado à exploração da tarefa quatro (*Caramelos e Bombons*, anexo 5).

#### ***Episódio 3: Uma coisa que eu agora não me lembro...***

1. **Sofia:** *Oh professor! É ou não verdade que por cada dois bombons há um caramelo e meio?*
2. **Mónica:** *Não porque, aqui há dois bombons, meio caramelo, mais dois bombons, meio caramelo, mas para fazermos este lado teríamos que contar novamente com este [referindo-se aos caramelos da 1ª linha da segunda caixa]*
3. **Ruben:** *Podemos usar uma coisa, que eu agora não me lembro do nome, mas pode ser do tipo  $n+1$ .*
4. **Professor:** *Referes-te a uma expressão geradora?*
5. **Ruben:** *Sim, uma expressão geradora.*

Deste episódio transparece a ideia de como eram importantes para os alunos as contribuições dos colegas. Embora Sofia [1] tenha colocado uma questão ao professor, Mónica antecipou-se [2], desencadeando um processo de comunicação contributiva e reflexiva, que levou, com a intervenção de Rúben [3], à ideia de expressão geradora.

Esta característica foi frequente nos diálogos que se estabeleceram ao longo da realização das várias tarefas. Os alunos utilizaram as opiniões dos colegas para desencadear e/ou complementar o seu próprio raciocínio.

O discurso surgia através da interação e as ideias iam sendo negociadas o que permitia fazer uma aproximação aos conceitos envolvidos nas tarefas propostas. Neste âmbito, surgiam frequentes explicações e justificações pelo que a argumentação teve um papel importante.

Após as discussões/negociações, os alunos tinham a oportunidade de continuar a trabalhar na tarefa de forma a encontrar a solução, a provar a afirmação ou a encontrar contra - exemplos que permitissem a refutação das ideias iniciais.

A tarefa sete (*O rectângulo*, anexo 8) também nos fornece, um exemplo rico, no que se refere ao uso das contribuições dos colegas. O episódio 4 refere-se à exploração inicial desta tarefa.

#### ***Episódio 4: É pelo factor e pelo factor***

1. **Olga:** *Eu escolhi o factor dois. Depois desenhei três rectângulos e imaginei os seus lados 2 e 4, 4 e 8, e 6 e 12. Então, as áreas que obtive foram 8, 32 e 72. E depois multipliquei as áreas por dois, porque foi o factor que escolhi e obtive 16, 64 e 144, mas as áreas dos novos rectângulos que são 4 e 8, 8 e 16, e 12 e 24 não vêm multiplicadas pelo factor dois.*
2. **Pedro:** *Pois não! A área vem multiplicada por duas vezes o factor.*
3. **Professor:** *O Pedro disse que aparece multiplicada por duas vezes o factor.*
4. **Sofia:** *Não é por duas vezes o factor, é pelo factor e pelo factor.*
5. **Professor:** *O que é isso, Sofia?*
6. **Sofia:** *É o factor ao quadrado.*
7. **Mónica:** *Se o factor for dois, a nova área vem multiplicada por quatro, quadrado de dois, mas se o factor for três a nova área vem multiplicada por nove....*
8. **Ruben:** *Que é o quadrado de três.*

Este episódio mostra-nos como, a partir das ideias que cada um vai lançando, os alunos se envolvem numa discussão e fazem uso dessas ideias para chegar a um resultado ou tirar uma conclusão.

Olga [1] não conseguia identificar o fenómeno que ocorria, pelo que Pedro [2] tendo percebido a situação, a ajuda e, por esta via, ajuda, eventualmente, os outros colegas. No entanto, a sua linguagem não é matematicamente correcta, situação que é ultrapassada pelas intervenções de Sofia [4] e [6] e, posteriormente, por Mónica [7].

O discurso foi decisivo para que os alunos conseguissem perceber que se tratava do quadrado razão de semelhança.

#### **5.4. Recurso a representações - Um meio de desvendar caminhos**

O recurso a representações é um dos aspectos que sobressai da análise às diferentes tarefas. Os alunos revelaram uma apetência natural para recorrer a representações pictóricas e/ou esquemáticas, representações essas que modelam as situações apresentadas ou organizam os *outputs* que obtinham nas várias tentativas de resolução.

Estas representações têm um duplo papel. Por um lado, têm uma função informativa, na medida em que podem ajudar o professor a compreender a forma como os alunos pensam. Por outro, permitem ao próprio aluno organizar o seu próprio pensamento, criando, em simultâneo, situações de auto-comunicação.

Ao longo da intervenção pedagógica, foi evidente a necessidade que os alunos têm em recorrer, com alguma frequência, a representações como forma de modelar e/ou clarificar a tarefa apresentada e o seu próprio pensamento. A opção dos alunos pelas representações sejam elas activas, icónicas ou simbólicas, são acima de tudo um modo de comunicação. Elas parecem ter, para o próprio aluno, um papel importante, pois à medida que as vão elaborando, vão eles próprios desvendando os caminhos a seguir na resolução da tarefa. Neste sentido, as representações ajudaram os alunos a entender a tarefa e, simultaneamente, possibilitaram explicações mais claras e/ou ao surgimento de conjecturas, que contribuíram para encontrar ou corrigir erros ou, mesmo, a concertar metodologias de trabalho.

Por exemplo, para resolver a tarefa sete (*O Rectângulo*, anexo 8), Mónica elaborou uma tabela (figura 38) – que incluí nas representações icónicas – onde registou e organizou o seu pensamento.

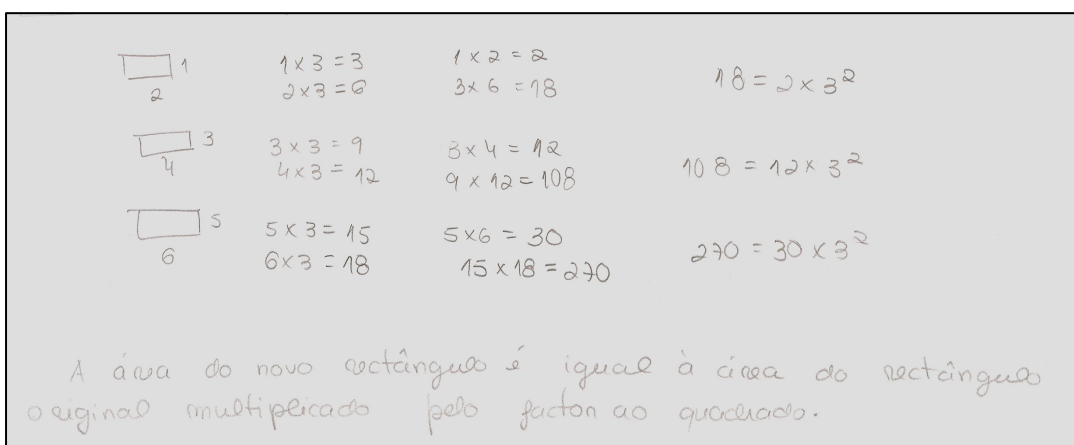
Rectângulo	n.º pelo qual multiplico os lados	comprimentos dos lados antes de serem multiplicados	comprimento dos lados após de serem multiplicados	Área Antes	Área depois
1	2	$l - 1 \text{ cm}$ $c - 2 \text{ cm}$	$l - 2 \text{ cm}$ $c - 4 \text{ cm}$	$2 \text{ cm}^2$	$8 \text{ cm}^2$
2	2	$l - 3$ $c - 4$	$l - 6$ $c - 8$	12	48
3	2	$l - 5$ $c - 6$	$l - 10$ $c - 12$	30	120

**Figura 38. Tabela elaborada por Mónica associada à tarefa sete**

Na resolução desta tarefa a aluna procurava uma forma de generalização. Recorreu a uma tabela para representar e organizar os dados e os vários ensaios que foi realizando. Esta foi a opção seguida pelos alunos sempre que as tarefas envolviam a experimentação.

Na figura 39 encontram-se os cálculos efectuados por Mónica, que acompanham a sua representação icónica (tabela) e que depois de analisados pela aluna deram origem aos seus registos escritos.

A opção pela elaboração de tabelas, em que registam a informação que vão obtendo através de várias tentativas de experimentação, é a mais frequente entre os alunos. Esta opção permite-lhes, organizar a informação, fazer uma análise das evidências que vão surgindo e oferece ao professor, um registo escrito útil e claro para compreender o processo de pensamento dos alunos.



**Figura 39. Registo da Mónica associado à tarefa sete**

Esta aluna, recorrendo a desenhos e representações simbólicas, elabora, de forma clara, um registo dos vários ensaios que realiza, para uma das questões da tarefa (figura 39). Estes registos foram sempre conseguidos após a discussão, entre os vários alunos, emergindo assim propostas de resolução.

## 5.5. Partilha de ideias como suporte à comunicação escrita

A maioria dos alunos optou, em primeiro lugar, por fazer registos esquemáticos dos dados das tarefas, em seguida, por apresentar as ideias oralmente e, por fim, por elaborar o relato escrito. O recurso ao registo escrito definitivo acontece sempre após a apresentação e discussão oral das ideias. Alguns alunos começam, logo após a leitura e interpretação da tarefa, a efectuar tentativas de resolução que, na maioria das vezes, não permitem chegar a uma solução. Funcionam como um levantamento de informação relevante e o que os alunos procuram é encontrar conexões entre as várias informações existentes no enunciado da tarefa.

A sequência de acontecimentos (discurso oral/registo escrito) parece estar relacionada com a necessidade de os alunos organizarem o seu pensamento. A troca de ideias ou a interacção com os colegas sob forma de diálogo e/ou discussão proporcionam-lhes uma maior capacidade de reflexão e uma melhor organização.

Numa conversa mantida com Mónica, no final de uma das sessões de trabalho, esta comentou que os relatos e alegações dos colegas serviam de “bengalas” para as suas ideias e permitiam delinear as suas próprias estratégias de resolução.

É certo que a intervenção pedagógica levada a cabo com este grupo de dez alunos teve impactos diversos, pois cada aluno é uma pessoa diferente. Uns preferem apresentar as suas ideias por escrito, enquanto outros optam por fazê-lo oralmente.

Existem também alunos que manifestam uma grande dificuldade em comunicar os seus raciocínios mesmo quando directamente solicitados. Apresentam contribuições muito lacónicas, emitem opiniões como “sim”, “não”, “pois” ou “concordo com ela/ele”. Embora não se mostrem muito à vontade na oralidade, não mostram qualquer inibição em relatar por escrito, metodologias e/ou conclusões. Este facto remete para a importância e necessidade de promover os diálogos e as formas escritas de trabalho.

Fazendo uma análise geral das resoluções dos alunos e dos relatórios produzidos, é evidente um crescente aumento da produção escrita ao longo do tempo. Confrontando os relatórios produzidos nas primeiras tarefas com os elaborados nas últimas, encontrei mudanças significativas. Inicialmente os alunos escreviam uma ou duas linhas depois de alguma insistência de minha parte, mostrando alguma resistência em escrever. Esta dificuldade pode explicar-se pelo facto de não ser habitual, em sala de aula, proporcionar aos alunos momentos para a reflexão e escrita dos processos de resolução. No final da intervenção, os alunos mostravam já alguma autonomia na elaboração das suas produções escritas, não sendo necessária a minha solicitação, como é visível nas palavras que Andreia pronunciou no seminário final: “*e depois já nem era necessário o professor pedir para nós escrevermos, pois nós já sabíamos que tínhamos que escrever*”.

O crescimento de texto escrito foi acompanhado de uma melhoria significativa nas argumentações apresentadas. Também as conexões estabelecidas entre as várias representações se foram tornando, para os alunos, cada vez mais uma fonte de observação para os factos que desejavam evidenciar.

A figura 40 refere-se ao registo final de Catarina, para a tarefa quatro: “*Caramelos e Bombons*” (anexo 5). Esta era uma aluna que passava desapercibida no grupo pois raramente falava, mas os seus registos escritos permitiam ilustrar o processo de resolução da tarefa.

A aluna descreve a forma como se consegue determinar o número de caramelos e de bombons de uma caixa, sabendo as suas dimensões. O texto é acompanhado por uma representação pictórica da caixa e seu conteúdo. Apresenta um relatório que permite determinar o número de caramelos e o número de bombons. Esta aluna não

participa nos diálogos mantidos pelos colegas, mas percebe-se, pelos seus registos, que eles dão um importante contributo para a sua resolução da tarefa.

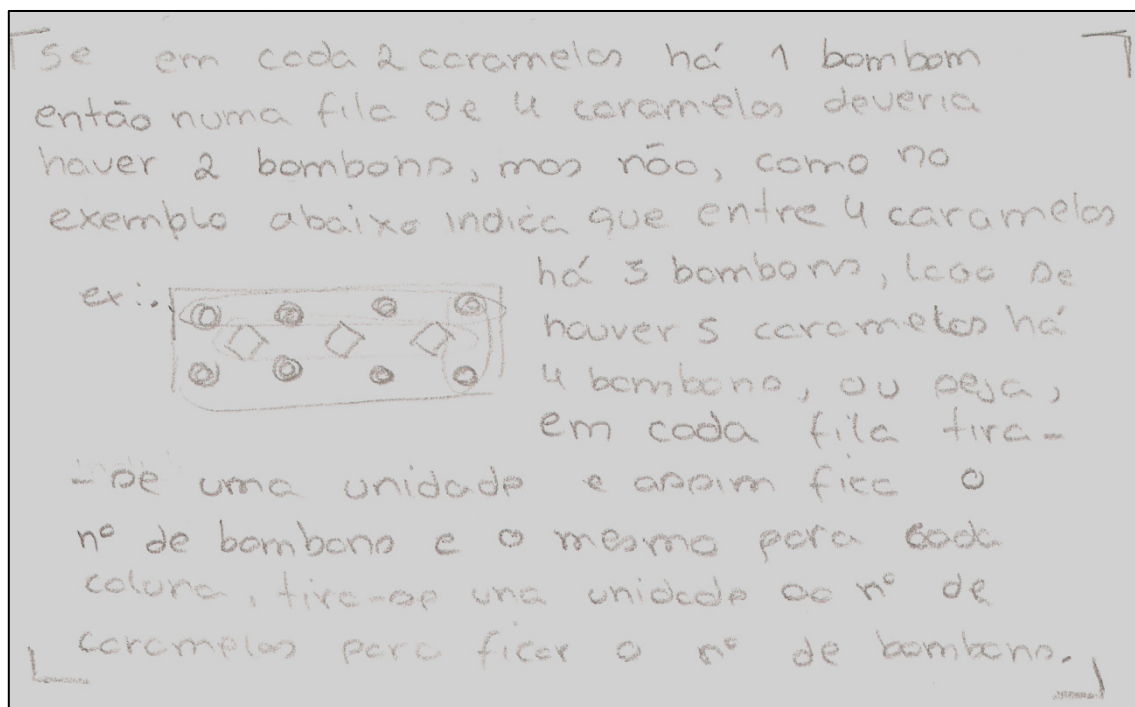


Figura 40. Registo da Catarina associado à tarefa quatro

O relatório de Catarina é acompanhado do desenho de uma caixa de 2x4. A aluna apresenta uma relação entre duas formas distintas de comunicar: a pictórica e o registo escrito. Em ambos os casos apoiou-se nos movimentos discursivos dos colegas. Na troca de ideias que ocorreu teve um papel de *out-sider* e nesta tarefa, antes de se realizar a discussão, não tinha efectuado qualquer registo na sua folha de respostas.

## 5.6. A discussão como via para reavivar conceitos e procedimentos

Uma outra evidência que ressalta da análise das dez tarefas, é o facto de os alunos manifestarem dificuldades em saber que conhecimentos devem mobilizar para resolver as tarefas. Recordo que as tarefas apresentadas envolviam apenas conhecimentos estudados em anos anteriores. Contudo os alunos dificilmente os identificavam e aplicavam. Muitas vezes, só a partir da discussão, entre todos os intervenientes, foi possível fazer renascer/reavivar um ou outro conteúdo necessário. Nem sempre estive envolvido neste processo. Em algumas situações, os alunos

conseguiram descobrir os conhecimentos que necessitavam de aplicar, sem a minha ajuda pois, eles próprios, reconheciam que já tinham estudado o assunto em anos anteriores.

A tarefa três – *A lata de Insecticida*, anexo 4, é um exemplo da necessidade dos alunos recorrerem à mobilização de conteúdos já explorados no decurso da sua vida escolar. Neste caso, era necessário aos alunos, recordar o cálculo de área do círculo e o cálculo de volume do cilindro. Estes tópicos, trabalhados no 2.º ciclo, nem sempre estão presentes na memória dos alunos.

### **5.7. A resolução de problemas como um meio para ir mais além**

Se por um lado as tarefas apresentadas fizeram recordar assuntos tratados em anos anteriores, também é verdade que serviram para ampliar os conhecimentos dos alunos. Esta situação foi bastante evidente na tarefa nove – *O Papa Bolachas*. De uma forma simples e natural, os alunos trabalharam informalmente tópicos do ensino secundário como a noção de infinitésimo e de infinitamente grande positivo, de progressão geométrica e da soma de  $n$  termos de uma progressão geométrica. Tiveram, ainda, oportunidade de ampliar os seus conhecimentos no domínio do sentido do número, nomeadamente, propriedades dos números.

Algumas vezes as tarefas podiam ser resolvidas sem o recurso a conteúdos estudados em anos anteriores. Um exemplo desta situação está patente na tarefa oito (*As sete localidades*, anexo 9), onde se pedia aos alunos para otimizarem uma rede de estradas. No entanto, alunos de 9.º ano não têm os conhecimentos formais que lhes permitam determinar a solução. Através de um esquema, forma de representar e/ou modelar a situação, conseguiram, encontrar a solução óptima e até fazer uma aproximação ao algoritmo de Prim, descrevendo, em linguagem natural, a forma como resolveram a situação proposta. Marco foi um dos alunos que conseguiu fazer uma aproximação a este algoritmo, explicando a estratégia usada (figura 41).

$A-B = 10 \text{ Km}$ $A-G = 20 \text{ Km}$
$B-A = 10 \text{ Km}$ $B-C = 25 \text{ Km}$ $B-D = 13 \text{ Km}$ $B-F = 15 \text{ Km}$
$C-B = 25 \text{ Km}$ $C-D = 18 \text{ Km}$
$D-B = 13 \text{ Km}$ $D-C = 18 \text{ Km}$ $D-E = 19 \text{ Km}$ $D-F = 20 \text{ Km}$
$E-D = 19 \text{ Km}$ $E-F = 14 \text{ Km}$ $E-G = 25 \text{ Km}$

$F-B = 15 \text{ Km}$ $F-D = 20 \text{ Km}$ $F-E = 14 \text{ Km}$ $F-G = 18 \text{ Km}$
$G-A = 20 \text{ Km}$ $G-E = 25 \text{ Km}$ $G-F = 18 \text{ Km}$
$(A-B = B-A) = 10 \text{ Km}$ $(B-D = D-B) = 13 \text{ Km}$ $(B-F = F-B) = 15 \text{ Km}$ $(C-D = D-C) = 18 \text{ Km}$ $(E-F = F-E) = 14 \text{ Km}$ $(F-G = G-F) = 18 \text{ Km}$

Isto são todos os caminhos possíveis que existem se escolhermos as 12 <sup>mais</sup> curtas vai dar logo o caminho, porque o presidente da Câmara Municipal quer fazer o menos quilómetros possíveis, logo se tivermos as 12 mais curtas vai dar porque metade dessas 12 estradas é igual a outra como por exemplo  $(A-B = B-A) = 10 \text{ Km}$ . Temos que escolher 12 porque 6 delas são iguais as outras.

**Figura 41. Registo de Marco associado à tarefa oito**

Marco criou todos os caminhos possíveis a partir de cada uma das localidades, registando a distância a percorrer.

Depois de ter registado todas as possibilidades, iniciou num dos percursos, AB, e marcou-o com um ponto, marcando também o percurso BA, com um ponto, de forma a saber que já estava a ser considerado. A utilização do ponto para marcar cada percurso tinha como objectivo evitar a repetição dos percursos. Procedeu de modo análogo para os restantes percursos.

À medida que ia marcando percursos, ia acompanhando com a respectiva marcação na rede de estradas fornecida e, em simultâneo, registava o percurso em quilómetros que seriam necessários alcatroar.

Saliente-se o facto de o aluno não conhecer o Algoritmo de Prim, mas ter usado uma estratégia que se encontra próxima do procedimento convencional.

## **5.8. Incentivar a discussão e a reflexão: um caminho promissor mas nem sempre simples**

O meu discurso, ao longo da intervenção pedagógica, teve sempre o objectivo de incentivar os alunos a falar sobre os seus raciocínios. Procurei que reflectissem sobre as ideias que apresentavam, que analisassem criticamente as suas afirmações e/ou as dos colegas e apelei à verbalização de explicações e justificações. Neste processo, apoiei-me no que ia ouvindo dos alunos e, muitas vezes, fiz intervenções no sentido de realçar certas contribuições e, além disso, de fazer progredir a própria discussão. Foi deste modo que equacionei o meu papel e que tentei desempenhá-lo, embora nem sempre seja simples, ao professor, desencadear e apoiar uma comunicação matemática reflexiva. O episódio 5, que ocorreu durante a realização da tarefa três - *A lata de Insecticida* (anexo 4) -, permite apoiar esta ideia.

### ***Episódio 5: Então, pensem comigo***

1. **Professor:** *Então vocês estão a afirmar que ao reduzir o raio da lata para metade, o volume da lata passa também para metade, não é?*
2. **Sofia:** *Sim.*
3. **Professor:** *Então, pensem comigo. Quando eu coloco metade do raio da lata antiga, na fórmula para calcular o volume só coloco metade do raio? Não faço mais nada? [tentando fazer lembrar os alunos a necessidade de calcular o quadrado de metade do raio]*
4. **Sofia:** *Não. Coloca metade do raio ao quadrado.*
5. **Professor:** *Sim. E.....quer isso dizer que....*

(silêncio)

6. **Professor:** [voltando a insistir] *Então? Quando eu divido o raio inicial em dois e uso esse valor na nova lata, o volume aparece-me também dividido por dois? Sendo assim, estes valores são proporcionais, na razão 2?*
7. **Ruben:** *Eu acho que sim, porque se nós fizermos o volume de uma lata e depois o volume de outra com metade do raio, em ambos os casos vamos elevar ao quadrado o raio logo o volume tem que ser metade.*

[Não conseguindo levar os alunos a concluir que multiplicar por dois é diferente de elevar ao quadrado, decidi recorrer a um exemplo. Mostrei-lhes, recorrendo a registos no quadro, que:]

*Considere-se o  $r_1=6$  e  $r_2= 3$  em que  $r_1/r_2=2$*

$$r_1^2 = 36 \text{ e } r_2^2 = 9$$

$$r_1^2 / r_2^2 = 4$$

*o resultado da divisão de  $r_1^2$  por  $r_2^2$  também devia ser dois, mas não é.*

8. **Professor:** *Reparem, 3 é metade de 6 mas 9 não é metade de 36, existe aqui proporcionalidade?*
9. **Alunos:** *Não.*
10. **Professor:** *Volto a perguntar: será que, uma lata do mesmo material, com a mesma altura e metade do diâmetro da base da lata da figura tem metade do seu volume?*
11. **Rúben:** *Oh, professor, pelo que o professor diz parece que não, mas eu ainda estou na minha.*

12. *Mónica: Não, porque elevar um número quadrado não é o mesmo que multiplicar por dois, logo a afirmação é falsa.*

13. *Sofia: Oh, professor mas parecia que era mesmo verdade!*

Globalmente, ao longo do episódio procurei levar os alunos a reflectir e questionar as suas afirmações de modo a que fossem os próprios a encontrar a solução da tarefa. Comecei por relatar uma ideia expressa por vários elementos do grupo [1]. Apesar da incorrecção desta ideia, não a abandonei nem a corriji. Parti dela, procurando levar os alunos a centrarem aí a sua atenção o que poderia ser favorável à identificação de alguma incoerência. Este processo não deu grandes frutos [2]. Tentando levar os alunos para uma linha de pensamento correcta, continuei a questioná-los, introduzindo alguns detalhes que os ajudassem a identificar o erro [3], [5] e [6], o que não se revelou fácil como ilustra a intervenção de Rúben [7]. Apercebendo-me de que os alunos não conseguiam avançar, pelo que escrevi expliquei no quadro, em linguagem simbólica, um exemplo que poderia permitir, aos alunos, perceber o erro, o que, finalmente, veio a acontecer [12] e [13].

## 5.9. Síntese

Terminada a intervenção pedagógica, que culminou com o seminário, importa identificar alguns aspectos que merecem realce.

Ao longo das dez sessões verifiquei que os alunos foram ganhando confiança nas suas palavras e nas suas próprias resoluções. Do início até ao final da intervenção, mudaram as suas atitudes face ao trabalho proposto. Inicialmente, manifestavam muita dificuldade em apresentar as suas opiniões aos colegas e ao professor. No entanto, aos poucos foram ultrapassando a timidez e/ou o receio inicial e foram ganhando confiança. Nas últimas sessões já não era necessário grande esforço para despoletar a discussão, pois os alunos, de forma natural, começavam a debater ideias entre si, procurando, através da partilha, encontrar um pilar que os ajudasse a resolver as tarefas. Assim, foram interiorizando, naturalmente, as etapas que tinham sido pensadas para a intervenção pedagógica de modo a promover e apoiar a comunicação matemática. Na figura 42, apresento uma síntese da metodologia seguida em cada uma das sessões.

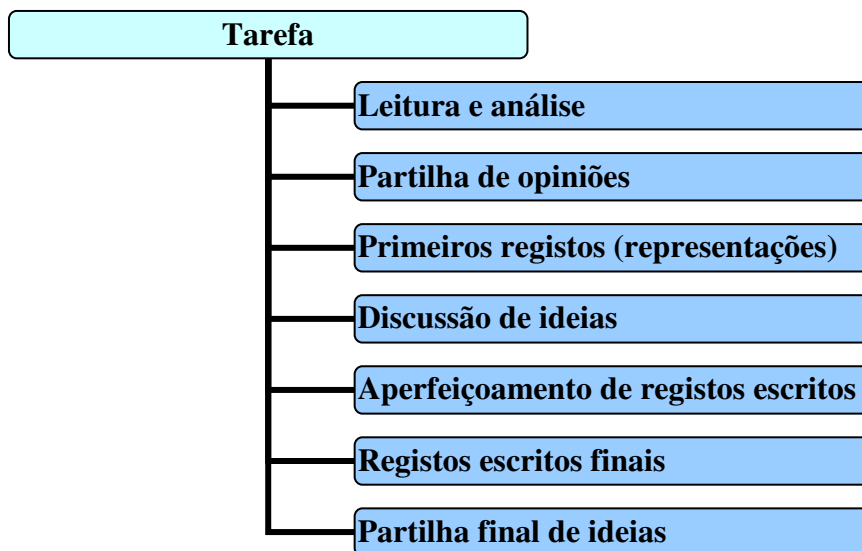


Figura 42. Metodologia associada à resolução das tarefas

Conforme referido, a atitude e envolvimento dos alunos face ao trabalho realizado é, em tudo, diferente se olharmos para o início e para o término da intervenção pedagógica. Em relação a estes aspectos, parece ser possível identificar três fases distintas nesta intervenção. Procuo sistematizá-los no quadro 10.

<b>Fase inicial</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reduzida autonomia;</li> <li>• Reduzida confiança;</li> <li>• Diálogos pouco participados;</li> <li>• Reduzida capacidade de justificação;</li> <li>• Reduzida capacidade de analisar os próprios registos;</li> <li>• Uso de opiniões dos outros.</li> </ul>
<b>Fase intermédia</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Autonomia na produção de registos escritos;</li> <li>• Saber ouvir;</li> <li>• Criticar e auto criticar;</li> <li>• Maior envolvimento;</li> <li>• Uso de opiniões dos outros.</li> </ul>
<b>Fase final</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Confiança na apresentação de ideias;</li> <li>• Fluidez no discurso oral e escrito;</li> <li>• Conexão entre as várias formas de representar;</li> <li>• Uso de opiniões de outros.</li> </ul>

Quadro 10. Momentos caracterizadores da intervenção pedagógica

Não é possível detectar, com clareza, o momento em que terminou a fase inicial e teve início a fase intermédia. A exploração da tarefa um – Onde *Estou?*, foi o ponto de partida da intervenção pedagógica. Apesar de os alunos a terem concluído com sucesso, senti dificuldade em promover o discurso entre os vários elementos do grupo. Apenas alguns expressaram as suas opiniões, ainda que de forma pouco confiante, com diálogos curtos e, sistematicamente, incentivados por mim. É interessante notar que os alunos deram sempre valor às opiniões dos colegas, as quais apelidaram de “*bengalas*”. Rúben e Mónica foram os alunos que se mostraram mais comunicativos. Ambos são alunos de nível 5, o que pode justificar a confiança que os outros depositavam nas suas ideias. Pedro era um aluno com algumas dificuldades a Matemática e estava a repetir o 9.º ano. Nas primeiras sessões era raro participar nos diálogos, mas ao longo da intervenção a sua atitude foi-se alterando de forma notória e as suas contribuições, que eram aceites e utilizadas pelos restantes colegas, permitiram, por vezes, encontrar a chave do problema. Na sessão seis, Pedro tem já uma participação marcante quer a nível oral quer ao nível escrito. Esta situação levou-me a considerar que neste momento se estaria numa fase intermédia da intervenção pedagógica.

À fase final desta intervenção, encontram-se associadas as tarefas finais (tarefas 8, 9 e 10) e o seminário. Acredito que a realização do seminário de forma tão profícua, só ocorreu, em virtude dos alunos terem percorrido um caminho que os conduziu a manifestar uma maior segurança na apresentação e discussão das suas ideias.



# Capítulo V

---

## Conclusões

Neste capítulo começarei por apresentar as conclusões do estudo tendo por referência os objectivos e questões que o nortearam, o enquadramento teórico apresentado, os dados recolhidos e sua análise. Terminarei abordando a importância que a sua realização teve para mim, enquanto professor de Matemática.



# 1. Retomando o objectivo e as questões de investigação

Este estudo teve como objectivo principal compreender como é que as representações matemáticas são usadas por alunos do 9.º ano de escolaridade para comunicar matematicamente num contexto de resolução de problemas e de que forma o discurso que ocorre influencia esta resolução. Assim, coloquei o meu olhar nas representações matemáticas a que recorrem, no papel desempenhado por estas representações na resolução de problemas e na comunicação de raciocínios e, ainda, no discurso matemático que emerge entre os vários intervenientes e suas repercussões na actividade desenvolvida.

## 1.1. Tipos de representações

O recurso a representações matemáticas, ao longo de toda a intervenção pedagógica, surgiu de forma natural. Os alunos, após a leitura de cada uma das tarefas, optavam por representar os elementos chave na folha de respostas. Esta primeira actividade favoreceu a organização do pensamento e do raciocínio, permitindo, assim, o início da resolução, o que vai ao encontro do que é referido pelo NCTM (2007). Permitiu, em simultâneo, a compreensão e a modelação da tarefa, conforme é argumentado por Font, Godino e D`Amore (2007).

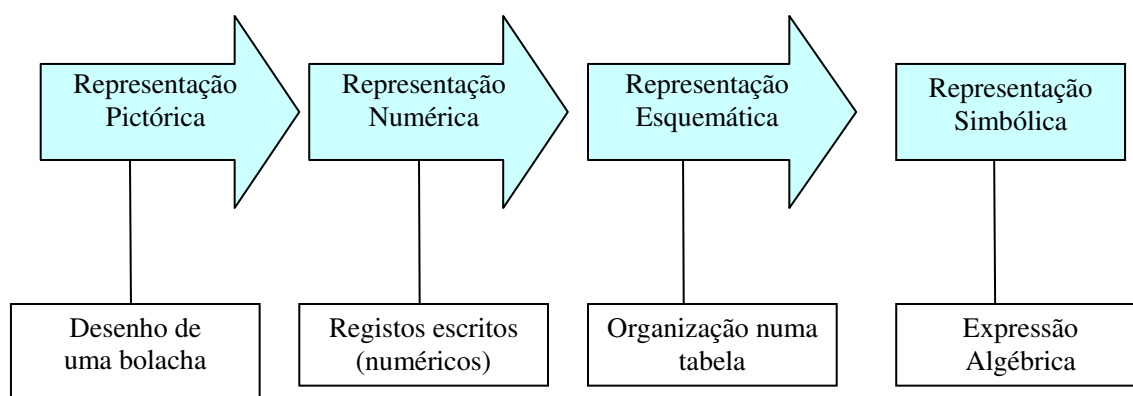
A opção dos alunos em representar a informação dos problemas passou, na generalidade das vezes, pelo recurso a representações não convencionais ou informais, que posteriormente, após um vasto processo de discussão, foram sendo aperfeiçoadas.

O tipo de tarefas propostas foram escolhidas de modo a fazer parte das vivências dos alunos, o que permitiu o emergir de várias formas de representar que são referidas por Clement (2004) como “próximas ou relevantes” para os alunos.

Durante a intervenção pedagógica, as primeiras representações que surgiram foram pictóricas e/ou numéricas, de acordo com a classificação de Preston e Garner (2003). A exploração das tarefas 1 – *Onde estou?* – e a 9 – *O Papa Bolachas* – (anexos 2 e 10, respectivamente), analisadas no capítulo 4 são disso exemplo. Os alunos optaram por modelar, através de uma imagem (representação pictórica), a tarefa proposta, completando essa representação com registos escritos (representações

numéricas), o que lhes permitiu, numa fase posterior, passar para uma representação esquemática e por fim, no caso da tarefa 9, escrever a expressão algébrica que era resposta a uma das questões colocadas (representação algébrica). As diversas formas de representar que foram escolhidas pelos alunos, vão ao encontro das ideias referidas por Preston e Garner (2003). No processo de representação há um caminho que é percorrido pelos vários alunos. Inicialmente, começaram por uma representação pictórica que serviu de ponto de partida para a discussão e, simultaneamente, constituiu uma forma de os motivar. A análise, a crítica, o estabelecimento de relações e a partilha destas primeiras representações, permitiram aos alunos comunicar, a si e aos outros, o seu percurso de análise, interpretação e resolução da tarefa.

Na tarefa nove – *O papa Bolachas* – (anexo 10), foram surgindo sucessivamente diferentes formas de representar, que permitiram ultrapassar os obstáculos que iam surgindo. Na figura 43, procuro mostrar o percurso seguido pelos alunos no decurso da resolução desta tarefa.

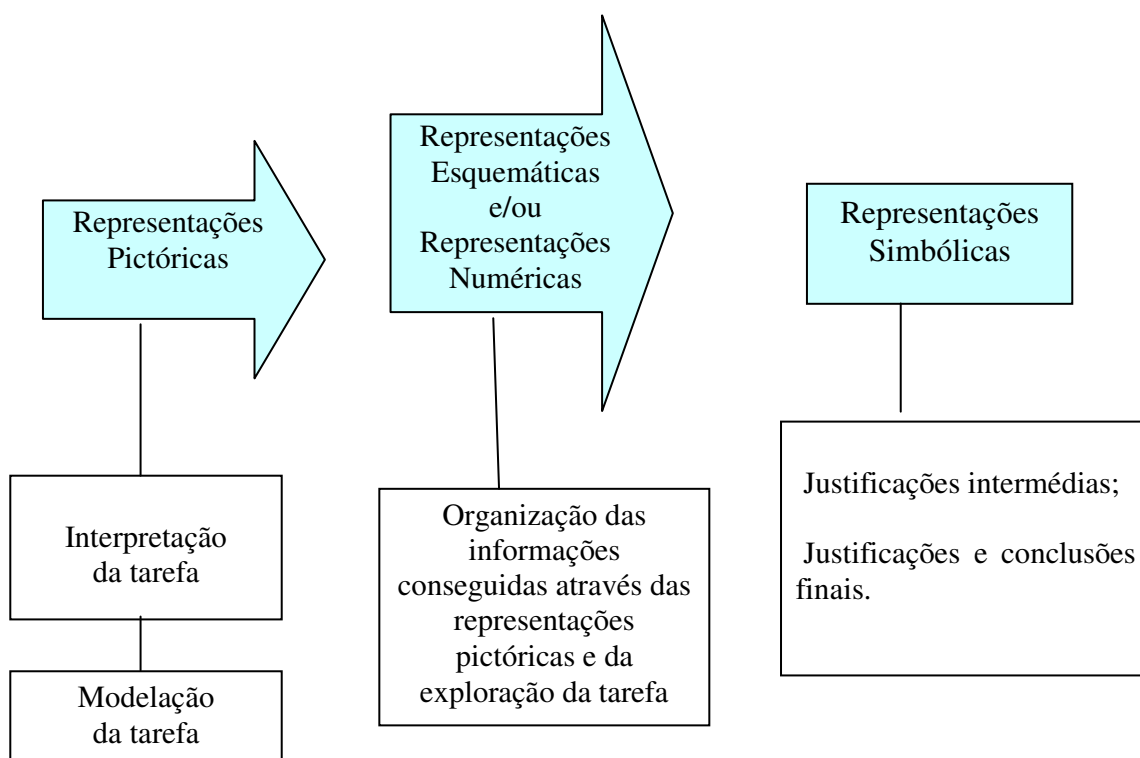


**Figura 43. Sequência no uso de representações: Tarefa *O Papa Bolachas***

O recurso a diferentes formas de representar a informação e as conquistas que estas permitem, assim como a sua análise, promovem a continuação da resolução. Esta opção foi uma constante ao longo de toda a intervenção pedagógica.

Na generalidade das tarefas propostas, os alunos passaram pelas quatro formas de representação escritas indicadas na figura 43, sempre acompanhadas de representações orais/verbais, embora nem sempre pela ordem sugerida no esquema anterior. Por vezes, as representações esquemáticas e numéricas surgiram em simultâneo.

De uma forma geral, os alunos recorrem a diferentes formas de representar, optando sempre numa fase inicial pelas representações pictóricas e remetendo para o final as representações simbólicas e algébricas, estas últimas específicas da Matemática. Os dados analisados neste estudo evidenciam uma correspondência entre o modo de representar e a fase de resolução da tarefa. A figura 44 ilustra esse paralelismo:



**Figura 44. Paralelismo entre as diferentes formas de representar e as fases de resolução da tarefa.**

Em síntese, da análise transversal das resoluções das dez tarefas, observa-se, como já referi, que a generalidade das representações iniciais são pictóricas. Estas, dão origem, numa fase posterior, a representações gráficas, tabelares e esquemáticas que são acompanhadas de representações simbólicas, como é o caso de símbolos escritos, expressões algébricas e logogramas.

Os alunos ao percorrerem as diversas representações estão, sobretudo, a mobilizar um leque diversificado de recursos comunicativos. Transparece, de forma clara, a interdependência existente entre as diferentes formas de representar as ideias e conceitos matemáticos, o estabelecimento de elos de ligação entre os seus raciocínios, ideias e tentativas de resolução. O movimento que os alunos estabeleceram vai ao

encontro do que é referido por Clement (2004) ao afirmar que qualquer forma de representar se pode apoiar, e apoia, numa outra(s).

## 1.2. Papel das representações

O recurso a representações matemáticas foi um instrumento poderoso na resolução das tarefas propostas, auxiliando os alunos a delinear estratégias, a estabelecer conexões e a apresentarem as suas conquistas para alcançarem a solução. Na generalidade dos casos, recorreram a representações informais e formais e relacionaram-nas de modo significativo, mobilizando, progressivamente, conhecimentos mais “complexos”, fruto da sua curiosidade e engenho. A importância da interligação em Matemática transparece na perspectiva de Stewart (2006) sobre o que é esta ciência:

a Matemática é como a construção de um edifício sem fim, com pequenas excrescências esquisitas a despontarem por todo o lado, a torcerem-se e a virarem-se para um lado e outro; elementos decorativos como minaretes e domos e gárgulas; escadarias e passagens secretas que ligassem, inesperadamente, salas distantes; pranchas de mergulho suspensas sobre abismos vertiginosos (p. 40).

As representações apresentadas pelos alunos, permitiram desenvolver a comunicação matemática, uma vez que possibilitaram a organização, o registo, o debate e o confronto de ideias, de raciocínios e perspectivas com os colegas e professor. Este resultado é consistente com o que é referido por Cazden (2001), Scheuermann e Garderen (2008) a propósito da comunicação matemática.

As diferentes representações observadas no decurso da intervenção pedagógica apresentam diversas mais-valias, tal como é referido por Preston e Garner (2003): modelação, registo, interpretação/análise, resolução e comunicação. Apresento, em seguida, estas mais-valias organizando-as em torno de seis eixos.

- **Modelação do problema e registos efectuados.** As várias representações usadas pelos alunos, tais como, tabelas, gráficos e figuras geométricas, permitiam esquematizar as tarefas propostas e tornar visíveis relações e estruturas dos

problemas, tais como, tabelas, gráficos e figuras geométricas. Por exemplo, na tarefa nove – *O Papa Bolachas*, – (anexo 10) — a primeira reacção dos alunos foi desenhar uma bolacha (representação pictórica) e, a partir deste desenho partiram para um conjunto de registos escritos que permitiram a elaboração de uma tabela (representação esquemática) organizativa dos registos que haviam feito junto da imagem.

As representações pictóricas, simbólicas e esquemáticas permitiram a modelação da tarefa e deram oportunidade aos alunos para, numa fase posterior, desviar o seu olhar para a sequência de fracções que registaram na tabela, descentrando a sua atenção da representação pictórica. As representações elaboradas foram favoráveis à resolução do problema e facilitaram a escrita de uma expressão matemática.

- **Interpretação/análise.** Através das tabelas, gráficos, figuras geométricas e outro tipo de representações, os alunos conseguiram interpretar as situações apresentadas, dando ênfase à sua própria imaginação, o que permitiu despertar e prender a sua atenção. Por exemplo, na tarefa um – *Onde estou?* (anexo 2) — as representações iniciais permitiram continuar a exploração e delinear estratégias de resolução. A primeira representação conseguida por Rúben foi favorável, por um lado, à compreensão do que era pretendido com a tarefa e, por outro, possibilitou aos alunos uma análise da mesma. Esta análise levou-os a concluir que a referida representação, embora com uma incorrecção, permitiu a modelação da tarefa o que facilitou que dessem mais um passo no caminho conducente à resolução.

- **Identificação de estratégias de resolução.** Ao analisar as suas próprias representações, os alunos delinearão os procedimentos a seguir, colocando e testando hipóteses, fazendo opções, ensaiando processos de resolução e principalmente, encontrando "caminhos", por vezes informais, mas que conduziam à formalização de conceitos e/ou procedimentos matemáticos.

Por exemplo, durante a resolução da tarefa seis – *Pintando Sólidos* (anexo 7) —, através dos diferentes registos dos alunos, referidos na literatura por

representações pessoais ou informais, foi-lhes possível encontrar uma resposta para a tarefa. Por vezes, foi necessária a minha intervenção, sugerindo aos alunos a organização dos resultados das diferentes tentativas, em tabelas ou esquemas. Recordo o episódio com Mónica (figura 22, capítulo 4) em que ela deu uma interpretação pessoal à construção da tabela sugerida.

- **Análise colectiva de resoluções.** A comparação entre as diferentes formas de representar uma mesma situação em tabela, desenho ou esquema, gerou um discurso próprio que conduziu a novas aprendizagens. Por exemplo, durante a resolução da tarefa nove – *O Papa Bolachas* (anexo 10) —, Mónica ao apresentar aos colegas e ao professor os seus primeiros registos (representações pictóricas, esquemáticas e numéricas) não tinha, ainda, conseguido identificar a expressão geradora da sequência de fracções que tinha registado. A análise colectiva dos seus registos, assim como a troca de significados e opiniões, possibilitou à aluna afirmar: *“não diga mais, que eu já sei, a fracção que se comeu em cada um dos dias é um fracção, em que o denominador é dois e que tem no expoente o dia que se está a comer”*. Esta representação oral levou-a de imediato à escrita da expressão geradora da sequência (representação escrita simbólica).

- **Monitorização, pelo professor, das resoluções.** Este percurso através de várias representações, permitiu-me acompanhar o pensamento dos alunos, que foi sendo transposto para o papel. Esta situação tornou mais fácil e eficaz a ajuda a dar aos alunos, tanto na interpretação como na compreensão e resolução das tarefas.

- **Comunicação Matemática.** As diferentes formas de representar, escritas e orais, convencionais ou não, foram favoráveis ao surgimento da comunicação matemática, tal como é referido no NCTM (2007) e por Boavida et al., (2008). Deste trabalho ressaí que um dos pilares fundamentais para a emergência e desenvolvimento da comunicação matemática, no sentido que é atribuído a esta capacidade pelo novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), é o recurso a representações matemáticas, uma vez que estas possibilitam percorrer caminhos diversificados e estabelecer conexões matemáticas. Muitas

representações são extremamente significativas e poderosas, permitindo a partilha de conceitos, ideias, perspectivas e procedimentos com uma clareza e precisão, difícil de conseguir apenas através da oralidade. Esta ideia remete para o que afirmam Scheuermann e Garderen (2008): uma representação vale mais do que mil palavras.

A intervenção pedagógica desenvolvida, ao fomentar e valorizar a comunicação reflexiva e instrutiva, criou oportunidades aos alunos para falarem, ouvirem, discutirem e reflectirem sobre as suas ideias matemáticas, contribuindo para o desenvolvimento da sua competência Matemática e promovendo, progressivamente, o desenvolvimento da capacidade de comunicar.

Os resultados apresentados vão no sentido de evidenciar que a resolução de problemas constituiu um bom recurso para promover a comunicação matemática, uma vez que possibilitam o emergir de representações, o confronto de ideias, a delimitação de estratégias e a apresentação de resultados, quer na forma escrita, quer na forma oral. Esta multiplicidade de situações permitiu aos alunos a apropriação de conceitos e procedimentos. No entanto, importa realçar que o modo de explorar a tarefa é decisivo. A tarefa é importante mas por si só é insuficiente para melhorar a aprendizagem. O professor assume um papel decisivo na promoção do diálogo, como instrumento imprescindível na exploração das tarefas. No trabalho realizado por Marques e Pesquisa (2010) é reconhecida a importância da existência de episódios de comunicação em sala de aula. Para estas autoras estes episódios encontram-se directamente relacionados com a natureza das tarefas propostas assim como da dinâmica e organização da própria aula.

Na fase inicial da intervenção pedagógica, as representações dos alunos eram mais elementares, pouco formais e pouco ricas em conteúdo e forma (representações informais), mas permitiram, desde logo, o desenvolvimento da tarefa e o envolvimento de todos. Ao longo das várias sessões assistiu-se a um aperfeiçoamento progressivo destas representações e à utilização de modos de representar mais convencionais. Ou seja, os alunos foram aprendendo a construir as suas próprias representações e a torná-las cada vez mais eficazes. Valério (2005) defende que o recurso a representações ditas

não convencionais ou o recurso a métodos próprios de resolução, são favoráveis ao surgimento de aprendizagens significativas.

A sequencialidade na forma de representar uma tarefa é também uma mais-valia significativa para a interpretação e conclusão das tarefas.

Durante a resolução da tarefa seis — *Pintando Sólidos*, (anexo 7) — foi através das sucessivas representações que os alunos obtiveram a resposta à questão colocada. A análise das sucessivas representações mostra que as ideias dos alunos se vão tornando cada vez mais claras e precisas e que se vão aproximando da resposta para a tarefa. Clement (2004) defende que as representações matemáticas são elementos essenciais para a compreensão e o estabelecimento de conexões.

Durante a exploração das várias tarefas, os alunos estabeleceram conexões entre as diferentes representações, passando de símbolos, figuras, tabelas, à linguagem oral e escrita. Neste processo, para além de termos abordado vários tópicos já estudados anteriormente, foi, ainda, possível criar condições favoráveis à ampliação dos conhecimentos. Por exemplo, os alunos, de forma informal, abordaram conceitos como progressão geométrica, infinitamente grande, infinitésimo, algoritmo de Prim e a conjectura das Quatro Cores, que só posteriormente serão estudados de um modo mais formal.

### **1.3. Discurso matemático na resolução de problemas**

O discurso matemático (oral, escrito, linguístico e não linguístico) ocorreu sempre de uma forma muito natural durante a resolução de problemas e pode ser analisado considerando três momentos distintos: discurso inerente à interpretação dos enunciados das tarefas; discurso associado às tentativas de resolução e relacionado com as diferentes representações que iam surgindo; e discurso relativo aos registos e conclusões finais.

- **Discurso inerente à interpretação dos enunciados.** Após a leitura de cada tarefa, surgia de forma espontânea a troca de ideias entre os alunos. Emergiam dúvidas, opiniões, críticas e discordâncias relativas ao enunciado apresentado. Toda a troca de ideias nesta primeira fase, encontra-se associada a um conjunto de movimentos discursivos, desencadeados pelos alunos e que foram mantidos e

suportados por estes e pelo professor que teve o cuidado de não descaracterizar o trabalho do aluno.

Logo na primeira tarefa – *Onde Estou?*, (anexo 2) — a falta de um elemento essencial no enunciado da tarefa (velocidade do som) deu origem a um conjunto de interacções discursivas ocorridas entre os alunos e professor. Este tipo de ocorrência manteve-se durante a intervenção pedagógica. Estes movimentos discursivos iniciais serviram para ultrapassar as primeiras dificuldades.

As primeiras palavras dos alunos, revelavam alguma precipitação e falta de experiência na resolução de problemas, mas o discurso que foi nascendo e se tornou cada dia mais profícuo, permitiu “*agarrar*” as tarefas e contribuiu para promover um discurso matemático cada vez mais rico.

Conforme referido no capítulo quatro, a partilha inicial de opiniões, de ideias, de interrogações e constatações entre os diferentes intervenientes, ajudava os alunos que ainda não tinham conseguido alcançar esse estágio a mergulhar na tarefa. Como foi sublinhado por vários alunos, as opiniões dos colegas serviam de “*bengalas de resolução*”:

*Eu digo tentativas pois, muitas vezes, era o conjunto das várias tentativas e opiniões que permitiam encontrar e estabelecer o caminho a seguir, para o conseguirmos resolver [o problema]. (Palavras de Olga, aquando do seminário final)*

*Quando nós estávamos a discutir, as resoluções e as opiniões que íamos ouvindo dos nossos colegas serviam de bengalas para as nossas resoluções, quero dizer, podíamos aproveitar as opiniões deles para continuar ou melhorar as nossas resoluções. (Palavras de Marco, aquando do seminário final)*

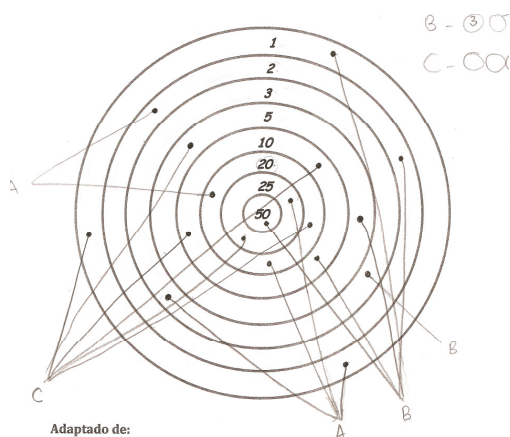
Neste estudo, assumi uma participação matematicamente activa no que os alunos fizeram e disseram, avaliando e tentando que os alunos também avaliassem a validade das ideias matemáticas e procurando encontrar sentido no raciocínio matemático dos alunos, mesmo quando as ideias apresentavam alguns erros. Com efeito, considero que o professor deve saber ouvir as ideias dos alunos de modo a colocar questões que os ajudem a avaliar o seu pensamento, em particular a

compreensão de conceitos chave que se relacionem com o objectivo da tarefa. Considero, ainda, que o professor deve ser um mediador, que se apoia no discurso dos alunos para atingir um determinado fim, recorrendo a uma comunicação reflexiva e instrutiva, de modo a alterar ou suportar o diálogo em função do que dizem e fazem os alunos.

Deste modo, é essencial criar oportunidades de debate de ideias, que permitam aos alunos explicar e encontrar justificações para as suas dúvidas, tornando-se, assim, mais confiantes nas suas capacidades. A discussão em grupo revelou-se potenciadora da comunicação, tanto oral como escrita.

- **Discurso associado às tentativas de resolução.** O discurso que emerge, escrito ou não, durante as resoluções das tarefas, tinha por base as diferentes representações efectuadas (pictóricas, esquemáticas, simbólicas e algébricas). Os alunos apoiam os seus argumentos orais nas representações escritas obtidas que ajudam a verbalizar as ideias (discurso linguístico oral) e a comunicar com os outros. Assim, surgem avanços e retrocessos na resolução de uma tarefa, sem se perder o seu objectivo, o que permite, ao aluno, redigir (discurso escrito) as justificações e pareceres relativos à sua resolução.

Por exemplo, na tarefa cinco – *Tiro ao Alvo* (anexo 6) — Sofia partilhou com os colegas a sua resolução final, apoiando-se nas representações por si construídas que serviram de suporte para mostrar aos colegas o *enorme conjunto de possibilidades*. As figuras 45 e 46 acompanharam a explicação de Sofia.



**Figura 45.** Alvo da ficha entregue a Sofia com registos feitos pela aluna

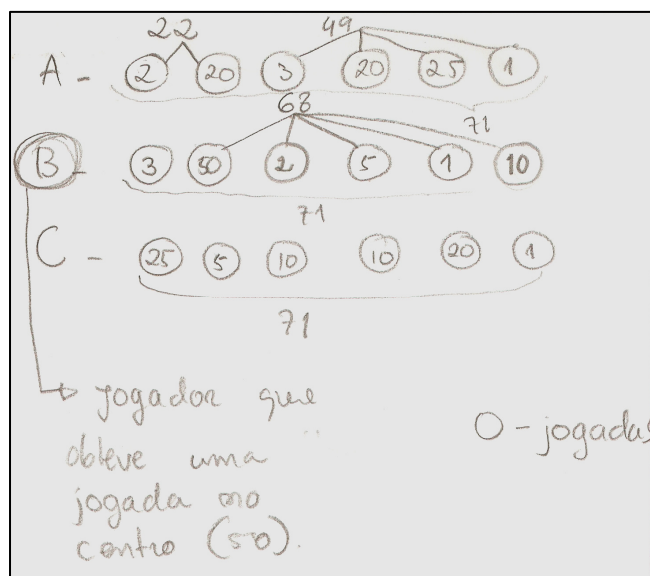


Figura 46. Registo de Sofia

### Explicação oral de Sofia

*O homem A não pode ser, porque se ele nos primeiros dois tiros fez 22 pontos se tivesse feito um tiro de 50 pontos ficava com 72, o que não é possível, pois ficaram todos com 71 pontos. Estes valores que estão aqui, 3, 20, 25, 1, só fiz no final [referindo-se ao homem A].*

*O homem B fez 3 pontos no primeiro tiro, pelo que ainda faltam distribuir 68 pontos, para ter um total de 71 pontos. Então eu tentei, logo, que os 50 pontos [tiro no centro] fossem para ele e fui eliminando no Alvo, estão a ver? [apontando para o Alvo] mas ainda me faltavam 18 pontos. Para fazer 8 pontos precisamos de dois tiros no mínimo, mas a opção possível era  $2 + 5 + 1 = 8$ , e como ainda nos faltam 10 pontos e um tiro, este último tinha que ser de 10 pontos, para perfazer os 71 pontos.*

*Depois de ter feito este raciocínio e ter eliminado no Alvo as marcas de tiro já ocupadas, verifiquei que as que sobravam também davam 71 pontos, e que neste caso correspondiam aos acertos do homem C.*

*Eu foi assim que fiz, mas possivelmente podem existir outras soluções, eu não tentei atribuir 50 pontos ao homem C.*

Como se pode observar neste extracto, o discurso da aluna, feito durante a apresentação aos colegas e professor da sua resolução, foi apoiado nas suas

representações escritas. Podemos, assim, concluir que as representações constituem bons pilares de apoio, quando se pretende que os alunos exponham aos outros os seus métodos e percursos de resolução.

Quando o foco do professor está dirigido para o desenvolvimento da comunicação matemática, tendo como principal instrumento de trabalho a resolução de problemas, é inevitável observar-se uma relação entre estas duas capacidades transversais. Esta simbiose permitiu aos alunos o aperfeiçoamento da apresentação das justificações escritas, recorrendo maioritariamente a representações formais ou informais e a uma melhoria substancial do seu discurso matemático.

- **Discurso associado aos registos e conclusões finais.** Os registos e conclusões finais estiveram sempre associados a um discurso escrito, fortemente marcado pelas opiniões pessoais e pelas representações simbólicas e algébricas específicas da Matemática. Recordo que estes registos constituíam o último passo da resolução da tarefa e foram sempre precedidos de uma explicação dos “trilhos” seguidos para obtenção da solução, relação ou regularidade que era pretendida, isto é, de um discurso oral.

## 2. Encerrando o estudo

Quando me propus voltar a estudar, de modo a adquirir e desenvolver novas competências no âmbito da Didáctica da Matemática, não imaginava os grandes desafios que se avizinhavam.

A parte curricular do Mestrado foi um percurso “duro”, em virtude de termos de conciliar toda a actividade profissional na Escola com a actividade de Estudante, mas permitiu a aprendizagem de um vasto conjunto de temas da maior relevância e importância nos tempos actuais. O segundo ano, apesar de me ter libertado das aulas, não foi menos duro. Foi necessário dar um rumo ao trabalho de investigação e aí outros obstáculos surgiram.

O trabalho que desenvolvi nesta investigação, focado essencialmente na comunicação matemática e na resolução de problemas, envolveu um grupo de dez alunos do 9.º ano e permitiu traçar, com estes alunos, um caminho em que todos mobilizámos e desenvolvemos novos saberes e competências. Tenho plena consciência que este percurso seria diferente se os actores tivessem sido outros, pois um trabalho de investigação desta natureza tem sempre um cunho pessoal influenciado pelas experiências pessoais de cada um.

O estudo que me propus desenvolver e no qual fui um participante activo, foi enriquecido pela disponibilidade e pelo gosto dos alunos envolvidos.

A capacidade transversal sobre a qual fiz incidir as minhas lentes de investigador, tornou-se, para mim, cada vez mais importante, pois o processo de ensino e aprendizagem é indissociável da comunicação. Contudo, para que surjam aprendizagens significativas e de qualidade é necessário que a comunicação, em sala de aula, promova a crítica, a introspecção, a partilha, a análise, o confronto e a apresentação de ideias.

A intervenção pedagógica em que me envolvi, permitiu desenvolver um trabalho diferente daquele que se faz regularmente em sala de aula, pois não estávamos sujeitos a um conjunto de constrangimentos naturais. O que orientou esta intervenção foi, apenas, a promoção da comunicação matemática num contexto de resolução de problemas.

Os próprios alunos reconheceram, que esta experiência assumiu contornos diferentes do que é usual em muitas aulas de Matemática:

*Nós consideramos que este trabalho foi mesmo muito importante, pois permitiu acima de tudo trabalhar Matemática de uma forma diferente daquela a que estamos habituados. (Palavras de Olga aquando do seminário final)*

*(...) adorei estas aulas, e gostava que as aulas fossem sempre assim, isto é, a nossa opinião é muito importante e ajuda quando temos mais dificuldades. (Palavras de Andreia aquando do seminário final)*

Olhando para o trabalho realizado com estes alunos, há alguns aspectos que importa destacar.

Foi um caminho difícil de traçar, mas que se foi tornando progressivamente cada vez mais acessível, pelo gosto e empenho de todos. Realço que apesar da minha enorme vontade em realizar esta investigação, ela só foi possível graças ao grande espírito de cooperação de todos os intervenientes na sala de aula, em particular dos alunos envolvidos que permitiram o surgimento de episódios ricos em comunicação matemática.

Ao longo das várias sessões, o tipo de tarefas apresentadas aos alunos criou oportunidades para trabalhar as três capacidades transversais referidas por Ponte et al., (2007) que se mostraram indissociáveis: resolução de problemas, a comunicação matemática e o raciocínio matemático. Esta relação de interdependência possibilitou alterar um pouco a minha perspectiva inicial. Hoje, olho para estas capacidades como um todo em que não é possível trabalhar cada uma delas, de forma exclusiva. É importante dizer que, embora elas estejam interligadas, foquei o meu olhar de investigador, em particular, na comunicação matemática.

Desta forma, será impensável pensar num ensino da Matemática segmentado em temas matemáticos e em cada uma das capacidades transversais. Como refere Rodrigues (2009), as capacidades transversais podem ser caracterizadas de forma distinta na sua especificidade, mas cada uma delas alimenta e contribui para a constituição mútua das restantes.

É neste sentido que nós, professores de Matemática, devemos repensar as nossas aulas, não relevando o facto de que, quer os temas matemáticos, quer as capacidades

transversais se alimentam, complementam e subsistem, mutuamente. Esta dupla conexão constitui, decerto, um grande e difícil desafio para os professores.

Para que a combinação dos temas matemáticos e das capacidades transversais seja profícua, é necessário investimento, dedicação, empenho e acima de tudo, vontade de querer mudar, quer da parte dos professores, quer da parte dos alunos.

O percurso que realizei permitiu-me ganhar consciência de que ensinar Matemática é fazer aprender Matemática, facto que me leva a afirmar que, hoje, sou um professor diferente. Estas diferenças ocorreram em diversos sentidos:

- Estou mais atento às formas de gerir e dinamizar uma aula, tendo sempre presente o desenvolvimento das capacidades transversais;
- Tento fomentar mais a participação dos alunos, procurando promover uma comunicação reflexiva e instrutiva. Opto, com maior frequência, pelo trabalho de grupo, de modo a permitir momentos de discussão de ideias;
- Estou mais atento aos movimentos discursivos dos alunos, tentando tirar partido das suas intervenções, valorizando-as e utilizando-as no decurso da aula.
- Incentivo os meus alunos a exporem as suas ideias, promovendo interacção, discussão, reflexão e crítica;
- Encaro de um outro modo os erros dos alunos e procuro criar situações que os levem a tomar consciência de que é importante reflectir sobre os próprios erros;
- Dou mais importância aos processos usados quer sejam formais ou informais, desfocando o meu olhar dos produtos e procurando que os alunos compreendam que é importante explicar o como e o porquê e que ajam deste modo;
- Tornei-me num professor mais reflexivo, procurando analisar e problematizar as minhas práticas e acções em sala de aula;

- Como consequência, sinto que também alterei a minha forma de encarar a avaliação dos meus alunos.

Diferentes são os rumos que tenho vindo a dar às minhas aulas. Progressivamente vão deixando de estar, maioritariamente, centradas no professor, passando os alunos a ter um papel mais central e activo. Tomei consciência de que a capacidade para explicar e justificar processos de resolução só podem transformar-se numa rotina na sala de aula se estas actividades ocorrerem de forma continuada. O recurso a tarefas ricas e potenciadoras de novas aprendizagens passou a ser mais frequente.

No entanto, estas mudanças não são fáceis e, no dia-a-dia, deparo-me com vários obstáculos. Por exemplo, nem os alunos nem os pais e encarregados de educação estão habituados a este tipo de trabalho. É necessário que se consciencializem de que o aluno deve ter um papel preponderante no seu processo de aprendizagem. É, ainda, necessário estar disposto a enfrentar novos desafios, obstáculos, contratempos, hábitos, posturas e posicionamentos que poderão inviabilizar um trabalho pedagógico que se pretende pautado por um conjunto de interacções permanentes entre alunos/alunos/ professor.

Perante a diversidade de contrariedades com que nos podemos deparar, urge ter força, vontade e espírito aberto para conseguir ultrapassar cada uma delas. Não podemos esquecer que a comunicação é um elemento essencial na vida dos seres vivos, através da qual os humanos são capazes de elaborar, expressar pensamentos e sentimentos em sons, palavras, desenhos, gestos e outras formas. É uma das actividades humanas que, quando acontece, é fácil de reconhecer, mas muito difícil de definir (Sousa, 2006).

Para terminar, sublinho que o estudo que realizei mostra que a resolução de problemas é um canal privilegiado para que a comunicação matemática emerja e se desenvolva, favorecendo a criação de momentos de interacção em torno de ideias significativas e poderosas que possibilitam, tal como sublinham alguns autores (por exemplo, Boavida et al., 2008), a apropriação de outras dimensões da Matemática. As conclusões deste estudo são, além disso, concordantes com alguns resultados da literatura estudada (Cazden, 2001; NCTM, 2007; Tripathi, 2008) que sublinham que o recurso a diferentes formas de representação matemática é um elemento fundamental para o emergir de uma efectiva comunicação, seja ela escrita ou oral.

*Se o teu projecto é para um ano, planta arroz,  
Se o teu projecto é para dez anos planta uma árvore,  
Se o teu projecto é para cem anos, ensina crianças.*

“Provérbio Popular Chinês”



# Referências Bibliográficas

- Ainley, J. (1988). Perceptions of teacher's questioning styles. *Proceedings of Psychology of Mathematics Educations XII* (pp. I, 92-99), Vezprém, Hungary.
- Abrantes, P. (1994). O Trabalho de Projecto e a relação dos Alunos com a Matemática. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.
- Abrantes, P. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Almiro, J. (2008). A Comunicação Escrita na Matemática do Ensino Secundário: Um projecto de um grupo de professores. Em GTI (Ed), *O professor de Matemática e os projectos de escola*. (pp. 257-295) Lisboa: APM.
- Amado, N. (2007). *O Professor Estagiário de Matemática e a Integração das Tecnologias na Sala de Aula Relações de Mentoring numa Constelação de Práticas*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.
- Antão, J. (1997). Comunicação na Sala de Aula. *Cadernos Pedagógicos*, Lisboa: Edições ASA.
- APM (Associação de Professores de Matemática) (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM (Edição de 2009).
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215-241.

- Back, J.; Piggott, J. & Pumfrey, L. (2003). *Using Non-standard Problems to Challenge Pre-conceptions*. (disponível em <http://nrich.maths.org/>. Acedido em 27 de Janeiro de 2010).
- Barbeau, E. (2006). The role of Challenges in Mathematical Learning. - Internacional Commision on Mathematical Instruction – 2006. (Disponível em <http://www.amt.canberra.edu.au/icmis16BarbeauEssay1.pdf>. Acedido em 20 de Abril de 2010).
- Barnes, D. (1969). Language in the secondary classroom. *Language, Learner and the Scholl*. Harmondsworth. Penguin.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construcion, and knowledge: Alternative perpectives for mathematics education. *Efective Mathematics Teaching* (pp. 27-46). NCTM.
- Belchior, F.(2003). Pedagogia, comunicação e existência. *Revista Portuguesa de Pedagogia*. Ano 37, 3, 197-230. Universidade de Coimbra.
- Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne´s Thread, Deadalus`Wings and the learner´s Autonomy. *Education and Didactics*, 1(3), 123-141. (Disponível em <http://www.msu.edu/sfard>. Acedido em 20 de Dezembro de 2009).
- Boavida, A. (2005). A argumentação Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. Tese de Doutoramento (Não publicada). Universidade de Lisboa.
- Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Continua de Professores*. Lisboa: DGIDC.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos* (2ªEd.). Porto: Porto Editora.

- Bowers, J. (1999). Postscript: Integrating Themes on Discourse and Design. Em Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. *Symbolizing Communicating in Mathematics Classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design.* (pp. 385-397). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teacher's conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Bruner (1962). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- Canavarro, C., Tudella, C. & Pires, M. (2009). Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. Os nossos alunos merecem! *Educação Matemática*, 105, 1.
- Carreira, S. (1998). Significado e aprendizagem da matemática: dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.
- Carreira, S. (2005). O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a Matemática e as situações do mundo real. Em *Encontro Internacional de Homenagem a Paulo Abrantes*. (pp.121-138). Lisboa: APM.
- Carreira, S. (2007). Do Castelo de Marvão à cidade do Sado. *Educação Matemática*, 82, 3-9.
- Carrillo, J. (2004). Qué aprenden los alumnos para la resolución de problemas? Em J. Giménez, L. Santos & J.P. Ponte (Coords.) *La actividad matemática en la aula*. (pp. 103-115). Barcelona: Biblioteca de Uno.
- Castro, E. & Castro, E. (1997). *Representaciones y Modelización*. (disponível em <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF>, acedido em 10 de Janeiro de 2010).

- Cazden, C. (2001). *Classroom Discourse: The Language of Teaching and Learning*. Heinemann : NH. Portsmouth.
- Chalvin, J. (1994). *Prévenir Conflits et Violence*. Éditions Nathan.
- Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, 11, (2), 97-102.
- Edwards, D. & Mercer, M. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. London: Methuen.
- Ferreira, R. (2005). Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment. Tese de Doutorado. Illinois State University.
- Ferreira, C. (2007). *A avaliação no quotidiano da sala de aula*. Coleção Currículo, Políticas e Práticas. Porto: Porto Editora.
- Flick, U. (2005). *Métodos Qualitativos na investigação científica*. Lisboa: Monitor Projectos e Edições.
- Forman, E. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. Em J. Kilpatrick, W.G. Martin & D.Schifter (Eds), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: NCTM.
- Font, V., Godino, J. & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. Em *Onto-semiotic approach to representations in the mathematics education. For the learning of Mathematics*, 27, 2-7.

- Franco, M., Reis, M. & Gil, T. (2003). Comunicação, Linguagem e Fala – Perturbações Específicas de Linguagem em contexto escolar. Editorial do Ministério da Educação.
- Freixo, M. J. (2006). *Teorias e Modelos de Comunicação*. Coleção Epistemologia e Sociedade. Lisboa: Instituto Piaget.
- GAVE (2002). Pisa 2000 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- GAVE (2006). Resultados dos exames de Matemática do 9.º ano de 2005 – 1ª chamada. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- GAVE (2009). *Projecto Testes Intermédios. Relatório Final 2008-2009*. (Disponível em <http://www.gave.min-edu.pt/>. Acedido em 10 de Março de 2010).
- Geelen, D. (2007). Songs of Innocence and of Experience: Impressionist tales and secret stories of live in classrooms. Em Taylor, P. & Wallace, J. *Qualitative Research in Postmodern Times*. (pp. 139-148). Exemplars for Science, Mathematics and Technology Educators. Springer.
- Godino, J. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12, (1), 70-92.
- Goldin, G. & Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of mathematics Behaviour*, 17, 1-4.
- Guerreiro, A. (2008). Comunicar é influenciar ou negociar? O papel do aluno no 1º ciclo do ensino básico. Em González, L., Alfonso, G., Machín, C. & Nieto, B. *Investigacion en Education Matemática XII*. (pp. 629-646). Badajoz, SEIEM, SPCE, APM.

- Jiménez, J. E. (2002). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. *La resolución de problemas em matemáticas: Claves para la Innovación Educativa*. (pp. 111- 130) Barcelona: Editora Graó.
- Karp, A. (2006). *An Ordinary Problem, But a Different One....* – Internacional Commission on Mathematical Instruction - 2006. (Disponível em <http://www.amt.canberra.edu.au/icmis16pusakarp.pdf>, Acedido em 20 de Abril de 2010).
- Kilpatrick, J. (2009). Programa de Matemática do Ensino Básico. O Olhar de um especialista em currículo de Matemática. *Educação Matemática*, 105, 50- 52.
- Lampert, M. & Cobb, P. (2003). Communication and language. Em J. Kilpatrick, W.G. Martin & D.Schifter (Eds), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 237-249). Reston, VA: NCTM.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among representations in Mathematics Learnig and Problem Solving. Em *Problems of representations in the Teaching and Learnig of Mathematics*. (pp-33-40). Laurence: Erlbaum Associates.
- Llinares, S. (2008). Matemáticas escolares y competencia matemática. Em Chmorro, M. *Didáctica de las Matemáticas*. España.
- Lopes, C. (2002). *Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas em Matemática*. Cadernos do CRIAP – Centro de Recursos de Informação e Apoio Pedagógico. Porto: Edições ASA.
- Loureiro, M. (2000). *Discurso e compreensão na sala de aula*. Porto: Edições ASA.
- Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de matemática do ensino básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação Matemática*, 105, 61 – 66.

- Love, E. & Mason, J. (1995). *Telling and asking. Subject learning in primary curriculum*. London: Routledge.
- Madruga, J. (2002). Resolución de problemas. *La resolución de problemas em matemáticas: Claves para la Innovación Educativa*. (pp. 27-33) Barcelona: Editora Graó.
- Marques, T. & Pesquita, I. (2010). Equações do 2.º grau: Resolução de problemas e Comunicação. *O Professor e o Programa de matemática do Ensino Básico*. 233-255. Lisboa:APM.
- Martinho, H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento não publicada). FCUL.
- Martinho, H. & Ponte, J.P. (2005). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor*. Actas do V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática - CIBEM.
- Matos, J. F. (1995). *Estudos etnográficos em educação matemática. Implicações da análise de estudos realizados em Portugal*. Versão parcial da comunicação ao IV Encontro de Investigação em Educação Matemática da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. (Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/96matos.pdf>. Acedido em 2 de Setembro de 2009).
- Matos, J. F. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática: Problemas Actuais. *Revista Quadrante*, 3 (1), 19-53.
- Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Menezes, L. (1995). *Concepções e Práticas de Professores de Matemática: Contributos Para o Estudo da Pergunta*. Lisboa: APM.

- Menezes, L. (1997). O discurso da aula de matemática. *Educação Matemática*, 44, 5- 8, 11.
- Menezes, L. (2000). Comunicação na aula de matemática e desenvolvimento profissional de professores. *Revista Millenium*, 20. Viseu.
- Menezes, L. (2005). Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1.º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa. Em Boavida, A. *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática - SIEM*. (pp. 349-365). Lisboa: APM.
- Menezes, L.; Santos, F.; Silva, A. & Trindade, M. (2003). Investigar a comunicação matemática no 1.º ciclo. *Revista Millenium*, 27. Viseu.
- Menina, F. (2009). Compreensão e Interpretação em Matemática: Dificuldades de alunos do 9.º ano na resolução de problemas. (Tese de Mestrado não publicada). Universidade do Algarve.
- Moreira, D. (2001). Educação Matemática e comunicação: uma abordagem no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, 65, 27-32.
- Nunes, C. (2001). *Aprendizagem activa na criança com multideficiência*. Lisboa; Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Nunes, C. (2010). Liderança no contexto escolar. *Educação Matemática*, 106, 1.
- Nunes, C. & Almiro, J. (2009). O professor de Matemática e os projectos de escola. *Educação Matemática*, 104, 3-7.
- NCTM, (1990). A Matemática essencial para o século XXI. Em *Educação Matemática*, 14, 23-25.
- NCTM, (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM (tradução portuguesa da edição original 1991).

- NCTM (2007). *Standards 2000 - Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Patton, M. (1990a). *Qualitative evaluation and research methods* (pp. 169-186). Beverly Hills, C.A: Sage.
- Patton, M. (1990b). *How to use Qualitative Methods in Evaluations*. Newbury Park Sage (Disponível em <http://books.google.pt>. acessado em 18 de Janeiro de 2010).
- Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. London: Sage.
- Pedro, E. (1992). *O discurso na aula. Uma análise sociolinguística da pratica escolar em Portugal*. Lisboa: Caminho – Colecção Universitária.
- Piggott, J.(2008). *A problem is a problem for all that* (Disponível em <http://nrich.maths.org/>. Acessado em 29 de Janeiro de 2010).
- Pimm, D. (1987). *El lenguaje matemático en el aula*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Ediciones Morata.
- Ponte, J. P. (1987). A matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. *Educação Matemática*, 4, 5-6, 26.
- Ponte, J. P. & Veia, L. (2007). A comunicação nas práticas de Jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20, 39-74. Universidade do Minho.
- Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H; Breda, A. Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Departamento de Educação Básica. Ministério da Educação.

- Preston, R. & Garner, A. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the middle school*, 9 (1), 38-43.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, *PNA*, 4, (1), 1-14.
- Rocha, A. (2002). *Os alunos de matemática e o trabalho investigativo*. Reflectir e investigar sobre a prática profissional. GTI, 99-124. Lisboa: APM.
- Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no Novo Programa do Ensino Básico. Desafios da sua integração. *Educação Matemática*, 105, 38-40.
- Sierspiska, A. (1998). Tree epistemologies, tree views of classroom communications: Constructivism, sociocultural approaches, interacionism. Em H.Steinbring,
- Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. Em *Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes*. (pp. 169-187). Lisboa: APM.
- Scheuermann, A. & Garderen, D. (2008). Analyzing students use of graphic representations: Determining Misconceptions and error patterns for instruction. *Mathematics Teaching in the middle school*, 13 (8), 471 – 477.
- Silver, A. (1985). “Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Directions”. Em *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, edited by Edward A. Silver.( pp. 247-266). Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sousa, A. (2005). *Investigação em Educação*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Sousa, A.(2006). *A verbalização da Linguagem Matemática*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.
- Sprinthall, N. & Sprinthall, R. (1990). *Psicologia Educacional*. McGrawHill.

- Stake, R. (1995). *A arte da Investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Stewart, I. (2006). *Cartas a uma jovem matemática*. Lisboa: Relógio D' Água.
- Stubbs, M. (1987). *Linguagem, escolas e aulas*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Tenreiro – Vieira, C. & Vieira, R. (2001). Resolução de problemas e pensamento crítico. Em torno da(s) possibilidade(s) de articulação. *Educação Matemática*, 62, 34-37.
- Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical Understanding Through, Multiple representations. *Mathematics Teaching in the middle school*, 13 (8), 438-445.
- Valério, N. (2005). A matemática nos primeiros anos. Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. *Revista Quadrante*, 14 (1), 38-66.
- Veia, L. (1996). A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no primeiro ciclo do ensino básico. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.
- Vieira, H. (2000). *A Comunicação na Sala de Aula*, Lisboa: Editorial Presença.
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, 275-298.
- Way, J. (2001). *Using Questioning to Stimulate Mathematical Thinking: Addendum* (disponível em <http://nrich.maths.org/>. Acesso em 27 de Janeiro de 2010).
- Watzlawik, P. (1967). *Pragmática da Comunicação Humana: um estudo dos padrões, patologia e paradoxos da integração*. São Paulo. Cultrix.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. *Culture Perspectives on the Mathematics Classroom* (pp. 149-168). Dordrecht.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. & Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação Matemática*, 18, 17-21.

Zaskis, R. & Liljedahl, P. (2004). Understanding Primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (3), 164-186.

### **Sites consultados**

<http://www.amt.canberra.edu>

<http://books.google.pt>

<http://www.nrich.maths.org/>

<http://www.msu.edu/sfard>

<http://www.educ.fc.ul.pt/>

<http://www.gave.min-edu.pt/>

<http://sln.fi.edu/school/math2/nov.html>

<http://cumbia.ath>

<http://www.spce.org.pt/sem/96matos.pdf>

# ANEXOS



---

## Guião de Entrevista aos alunos

### A) Relação com a disciplina de matemática

- Gostas de estudar?
- E de matemática, gostas? Porquê?
- Do que gostas mais?
- Do que gostas menos?
- Na tua opinião o que é que leva os alunos a não gostarem de matemática?
- O que é que achas que poderia ser feito para os alunos que os alunos gostassem mais de matemática?
- Consideras que é importante estudar matemática? Porquê?

### B) Aspectos da comunicação na aula de matemática

- Na aula de matemática, gostas de partilhar oralmente as ideias com os teus colegas?
- Gostas mais de responder às questões de forma escrita ou oral? Porquê?
- Que tipos de trabalhos escritos tens feito na aula de matemática?



### **Tarefa 1- Onde estou?**

Imaginemo-nos perdidos no Alentejo, entre Almodôvar e Castro Verde. Nessas povoações existem igrejas que repicam os sinos de hora a hora, com grande precisão e timbres diferentes, de modo a que sejam ouvidos em dezenas de quilómetros em seu redor e possam ser distinguidos sem problemas.

A certa altura ouvimos os sinos de Castro Verde, passam 55 segundos do meio-dia. Querendo isso dizer que o som desses sinos, emitido às 12 horas precisas, demorou 55 segundos até nos alcançar. Pouco depois ouvimos os sinos de Ourique e olhamos para o relógio, e tinham passado 80 segundos do meio-dia.

Onde é que nós nos encontramos?

**Adaptado de:**

Crato, N (2008). A Matemática das Coisas. pp 71- 73. Edições Gradiva.



### Tarefa 2 - O Baile

A turma da Joana organizou um baile de máscaras. Nesse baile existiam, entre outros mascarados, quatro casais mascarados do mesmo tema:

- Um Mexicano e uma Mexicana;
- Um príncipe e uma princesa;
- Um bailarino e uma bailarina;
- Um cozinheiro e uma cozinheira.

Os mascarados dançaram durante toda a noite.

A Joana que era muito curiosa observou os pares a dançar e no momento que o Mexicano estava a dançar com a cozinheira, questionou-se sobre com quem estaria a dançar cada um dos outros seis mascarados, uma vez que os pares de mascarados, do mesmo tema, nunca poderiam dançar juntos.

Qual terá sido a solução que a Joana conseguiu encontrar?

**Adaptado de:**

*Projecto Pólya da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – Centro de Matemática da Universidade do Porto*



### Tarefa 3 - A Lata de Insecticida

Alguns insecticidas são vendidos em latas, com uma forma cilíndrica, como a ilustrada na figura 1.

Na figura 2 apresenta-se um esquema dessa lata, sem tampa, e na tabela estão as suas principais características.

Altura total (com tampa)	35,4cm
Altura da tampa	6,0cm
Diâmetro do círculo da base	6,5cm
Espessura do material da lata	0,1cm



Fig. 1

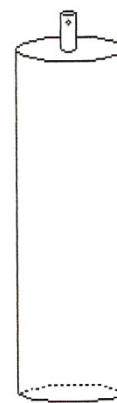


Fig. 2

- Qual é, aproximadamente, a capacidade máxima da lata, em mililitros?
- No mercado também existem latas de insecticida sem tampa, se se mantivesse a altura total da embalagem, que quantidade mais levaria essa embalagem?
- Considera a seguinte afirmação:

**“Uma lata do mesmo material, com a mesma altura e metade do diâmetro da base da lata da figura tem metade do seu volume”**

Faz um comentário a esta afirmação.

**Adaptado de:**

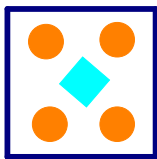
Projecto 1000 Itens – GAVE – Ministério da Educação



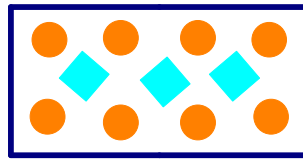
### Tarefa 4 - Caramelos e Bombons

Uma caixa com doces contém bombons e caramelos dispostos como se mostra na figura.

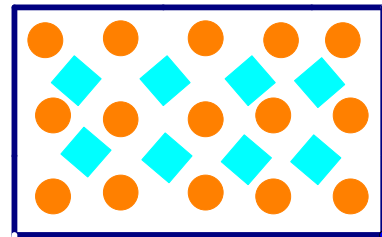
Os caramelos estão compreendidos entre duas filas de bombons.



2 x 2



2 x 4



3 x 5

As dimensões de cada uma das caixas dizem-nos quantas linhas e quantas colunas de bombons tem cada caixa.

**Proposta de trabalho:**

Descobre um método para encontrar o número de caramelos e de bombons em cada uma das caixas, sabendo as suas dimensões.

Explica e justifica o método usado para chegar ao resultado.

**Adaptado de:**

Vale, I e Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, pp.14-20 . Lisboa: APM

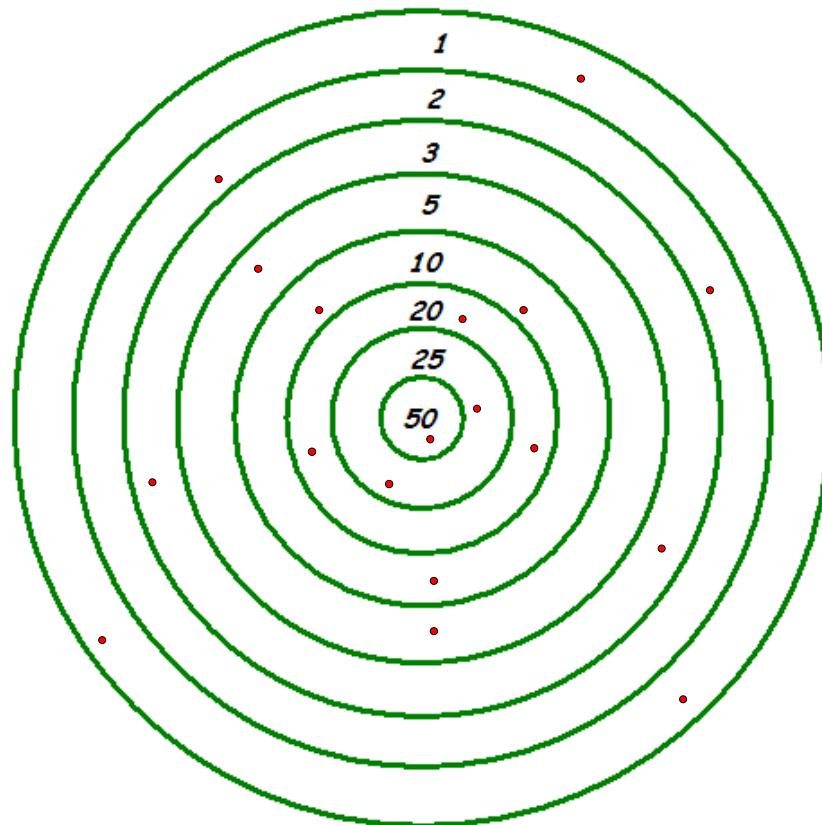


### Tarefa 5 - Tiro ao Alvo

Três homens - A, B e C – deram 6 tiros cada um e ficaram cada um com 71 pontos.

- Os dois primeiros tiros do A somaram 22 pontos;
- O primeiro tiro do B valeu-lhes 3 pontos;

Quem acertou no centro?



**Adaptado de:**

Carter, P e Russel, K.(2000). Puzzles com Números. Editora Replicação. Lisboa

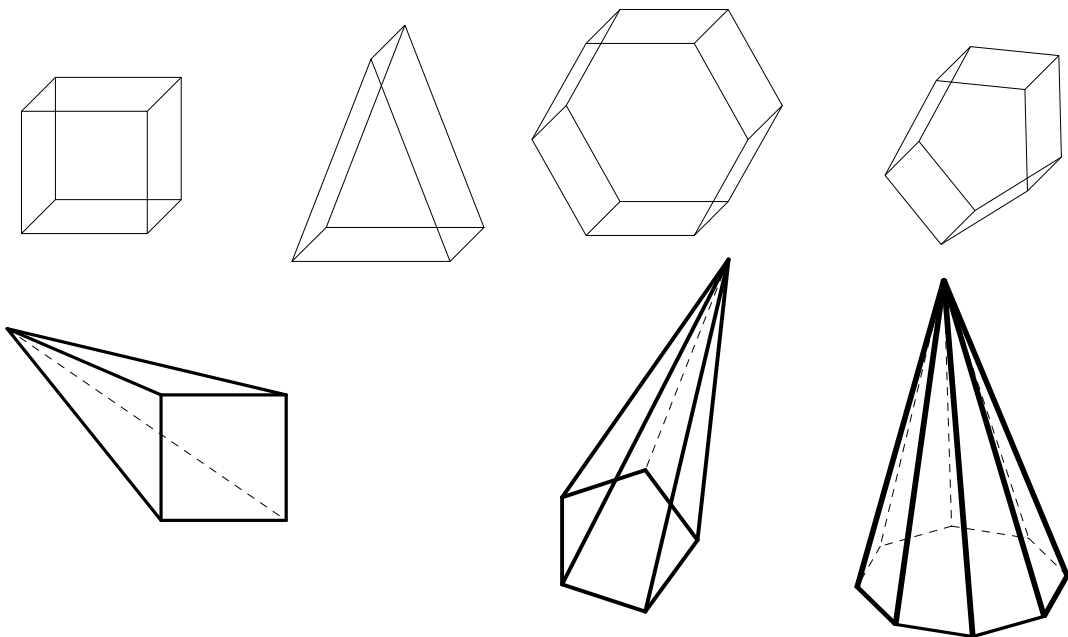


### Tarefa 6 - Pintando Sólidos

O Marco foi encarregado de pintar sólidos para uma exposição.

As instruções que lhe deram foram de que ele deveria utilizar o menor número de cores possível, mas de modo a que duas faces adjacentes não tivessem a mesma cor.

Entregaram ao Marco alguns sólidos: Cubo; Prisma Triangular; Prisma Hexagonal; Prisma Pentagonal; Pirâmide quadrangular; Pirâmide Pentagonal e Pirâmide Octogonal.



- Será verdade que, quanto maior o número de faces, mais cores serão necessárias?
- Explica como chegaste à tua resposta utilizando palavras e desenhos e.....

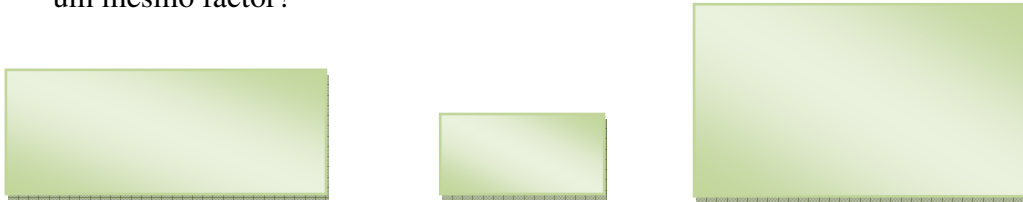
**Adaptado de:**

Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º ciclos. Escola Superior de Educação da Universidade do Algarve.

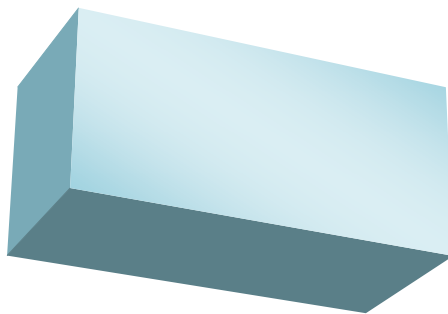


### Tarefa 7 - O rectângulo

- O que acontece à área de um rectângulo quando multiplicamos os seus lados por um mesmo factor?



- Imagina agora um prisma recto de base rectangular. O que acontece ao seu volume quando multiplicamos os lados da sua base por um mesmo factor, mantendo a altura? E se multiplicarmos a altura por esse mesmo factor?



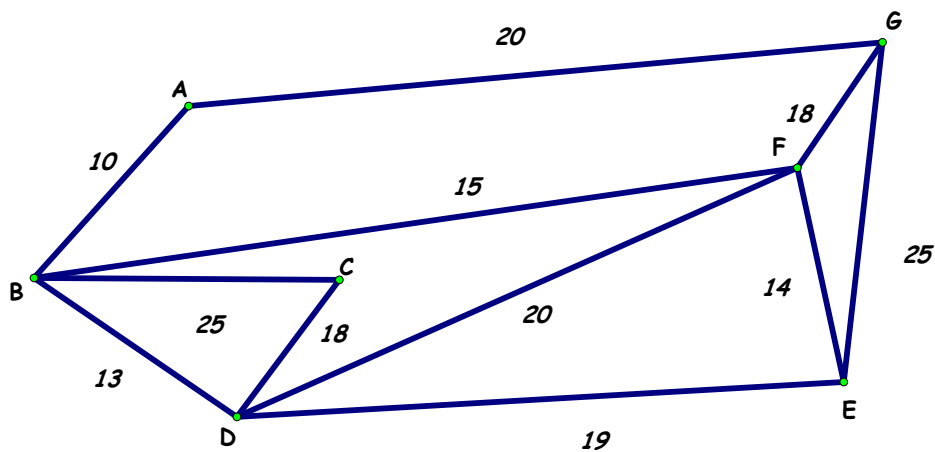
**Adaptado de:**

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (pp.319-320)



### Tarefa 8 - As sete localidades

Sete pequenas aldeias do interior Algarvio encontram-se ligadas entre si por meio de estradas de terra batida, conforme diagrama que se segue. (O diagrama representa apenas os começos, términos e comprimentos das estradas em Km.)



A Câmara Municipal possui um orçamento limitado, mas pretende alcatroar algumas estradas, de modo a que as pessoas se possam deslocar, directa ou indirectamente, entre cada uma das aldeias só por estradas alcatroadas, mas pretende para isso minimizar o número total de quilómetros alcatroados.

Encontra uma rede de estradas que satisfaça a condição do município.

**Adaptado de:**

NCTM (2007) *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (pp.374-375)



### Tarefa 9 - O Papa – Bolachas

Em casa do Mário vive um Duende que se chama Papa Bolachas.

O Mário sabendo desde gosto desmesurado do Duende guarda em lugar seguro todas as bolachas que compra.

Certo dia, por lapso, deixou uma bolacha esquecida na dispensa, pelo que o Duende:



- Na primeira noite foi à dispensa e comeu metade da bolacha.
- Na segunda noite regressou à dispensa e comeu metade da bolacha que tinha sobrado na noite anterior.
- Na terceira noite volta à dispensa e come metade da bolacha que tinha sobrado e assim sucessivamente



- Qual a porção de bolacha que o Papa Bolachas comeu ao fim de 7 visitas à dispensa?
- Qual a porção de bolacha que sobrou ao fim das referidas 7 visitas?
- Qual a porção de bolacha que o Papa Bolachas comeu ao fim de  $n$  visitas à dispensa?
- Qual a porção de bolacha que sobrou ao fim de  $n$  visitas?
- Será que alguma vez o Papa Bolachas come a bolacha toda? Porquê?

Problema apresentado no seminário dinamizado pelo Prof. Doutor Domingos Fernandes. Avaliação para as aprendizagens: Questões Teóricas e Práticas. Universidade do Algarve, (2008)



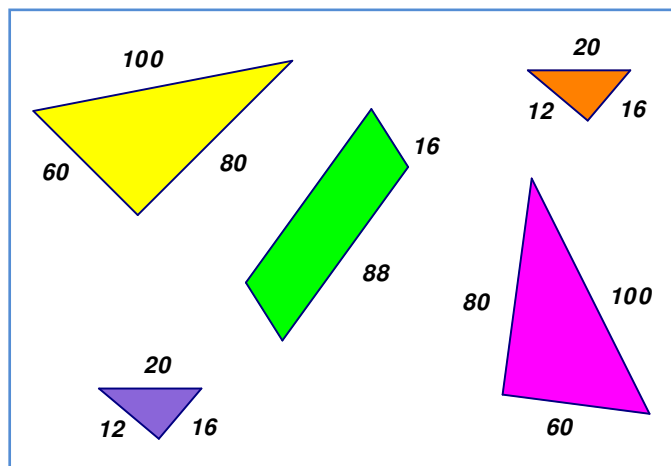
## Tarefa 10 - “O Quadrado”

Na figura que se segue estão representados quatro triângulos rectângulos e um paralelogramo, assim como as suas medidas.

Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado.

Quanto mede o lado desse quadrado?

*Unidade: cm*



Explica como chegaste à tua solução.

**Adaptado de:**

Lopes. C. (2002), p. 37

