

TMS CONFERENCE SERIES (2018)

HOTELARIA E RESTAURAÇÃO

Estratégias *versus* Experiências

Editores:

Elidomar Alcoforado

José António C. Santos

Margarida Custódio Santos

Célia Ramos

Henriques

Hotelaria e
restauração *



UALGB-
PENHA

ESGHT

ALCOFORADO
SANTOS, C. A.; SANTOS, M. C.; RAMOS, C.; HENRIQUES

ISBN: 978-989-8925-58-7

Modelação da procura turística, uma análise comparativa: Uma abordagem com dados mensais do número de dormidas nos estabelecimentos hoteleiros do Algarve

Modeling tourism demand, a comparative analysis: An approach with monthly data on the number of overnight stays in hotel establishments in the Algarve

Raúl Filipe Conceição Guerreiro, ESGHT – Universidade do Algarve, CEFAGE, Portugal, rguerre@ualg.pt

Paulo Jorge Marreiros Batista Basílio, ESGHT – Universidade do Algarve, Portugal, pbasilio@ualg.pt

Resumo

Esta análise tem como principal objetivo avaliar os resultados obtidos, com três abordagens distintas, de previsões com séries cronológicas contendo forte sazonalidade. Para tal, iremos efetuar uma análise comparativa dos resultados obtidos através da decomposição clássica, da aplicação do método Holt-Winters e do filtro de Kalman a uma série cronológica considerada representativa da procura turística. Pretendemos, manipular vários modelos representativos da evolução temporal em estudo e simultaneamente efetuar várias simulações com os dados e respetivos modelos para perceber qual o método mais adequado para modelar e prever valores futuros de séries cronológicas observadas em fenómenos turísticos.

Palavras-chave: Procura turística, modelação e previsão, decomposição clássica, Holt-Winters, filtro de Kalman.

Abstract

Our main objective with this analysis is to evaluate the forecasts of time series, containing strong seasonality, obtained using three different approaches. For this, we will perform a comparative analysis of the predictions obtained with classical decomposition, with the Holt-Winters method and the Kalman filter, to a time series considered representative of tourist demand. We intend to manipulate several representative time series models and, simultaneously, carry out several simulations to understand the most appropriate method to model and predict future values of time series observed in tourist phenomena.

Keywords: Tourism demand, modeling and prediction, classical decomposition, Holt-Winters, Kalman filter.

1. Introdução

Uma série (ou sucessão) cronológica consiste num conjunto de valores quantitativos observados em períodos regulares de tempo. Este registo, normalmente identificado como y_1, \dots, y_n ou y_t com $t = 1, 2, \dots, n$, permite analisar a evolução, ao longo do tempo, de determinado fenómeno ou característica.

Os objetivos que se pretendem atingir com a análise de séries cronológicas são vários. Concretamente, neste artigo, pretendemos modelar uma série cronológica característica da procura turística, com o propósito de a descrever, de prever valores futuros e de avaliar a qualidade das diferentes abordagens.

Um dos métodos mais antigos para análise e previsão de séries cronológicas é a decomposição clássica da série em várias componentes básicas e não observáveis diretamente. Esta abordagem considera que as componentes mantêm-se constantes ao longo do tempo e, por essa via, determinam os valores da série. Esta assunção é muitas vezes criticável porque corresponde a determinar, a priori, um comportamento rígido para a série.

Para ultrapassar este tipo de dificuldades modelos alternativos têm sido apresentados. Referimos em primeiro lugar os modelos com sazonalidade ajustada porque correspondem, em grande medida, a uma adaptação da decomposição clássica. A este respeito veja-se por exemplo Dagum e Bianconcini (2016). Em segundo lugar, referimos a abordagem autorregressiva, mais moderna, baseada na metodologia Box-Jenkins. Veja-se a este respeito Makridakis, Wheelwright, Hyndman (1998), entre outros. Por último, referimos os denominados modelos estruturais porque apresentam algumas características que, em determinados contextos, podem ser vantajosas (Harvey, 1989). Os modelos referidos são formulados em termos das componentes tradicionais sendo cada uma destas formalizada como um processo estocástico.

Neste trabalho pretende-se modelar e obter previsões para a série do número de dormidas nos estabelecimentos hoteleiros do Algarve aplicando as metodologias atrás referidas. Iniciamos o nosso estudo tentando ajustar à série das observações um modelo de decomposição e prosseguimos com um modelo estrutural. Concluímos com a comparação dos três modelos quer em termos de ajustamento, quer em termos de previsão.

Nos dois capítulos seguintes apresentamos de forma resumida as duas abordagens: a clássica e a estrutural, com o objetivo de identificar não só as diferenças, mas também as eventuais semelhanças. No quarto capítulo são formuladas as funções de previsão utilizadas nas duas abordagens, enquanto no quinto capítulo são discutidos

os resultados obtidos com a aplicação empírica destas funções. No sexto capítulo são explicitadas algumas conclusões.

2. Decomposição clássica

A ideia de que as séries cronológicas poderiam ser constituídas por várias componentes invisíveis remonta aos finais do século XVIII quando da observação e estudo de séries relacionadas com a astronomia e a meteorologia. No entanto, é já nas primeiras décadas do século XX que os modernos métodos de decomposição foram desenvolvidos (Macaulay, 1931), assumindo que a série cronológica pode ser representada por:

$$y_t = f(T_t, S_t, C_t, e_t) \quad (1)$$

onde:

T_t é a componente tendência, ou seja, a evolução da série a longo prazo;

S_t é a componente sazonal, que representa a variabilidade periódica relativamente à tendência;

C_t é a componente cíclica no sentido em que períodos de contração alternam com períodos de expansão;

e_t é a componente irregular (ou residual) que incorpora tudo o que não pode ser atribuído às outras três componentes.

Sendo o valor observado em cada período t uma função das quatro componentes referidas, a especificação de como se combinam para reproduzir a série original pode ser formalizada na forma aditiva,

$$y_t = T_t + S_t + C_t + e_t \quad (2)$$

ou multiplicativa,

$$y_t = T_t \times S_t \times C_t \times e_t \quad (3)$$

Um dos critérios para selecionar entre (2) e (3) baseia-se no tipo de sazonalidade presente nos dados. Se a amplitude das flutuações sazonais não se altera com o nível da tendência existem argumentos favoráveis ao modelo aditivo. Por outro lado, quando a variação em torno da tendência é proporcional ao nível da série cronológica então o modelo multiplicativo poderá apresentar mais vantagens.

A distinção entre tendência e ciclo não é óbvia porque ambas as componentes refletem a evolução da série a longo prazo. Uma determinada variação nos valores

da série cronológica ao longo de vários anos poderá corresponder a uma tendência ou a um padrão cíclico de longa duração. As componentes tendência e cíclica são, por isso, geralmente estimadas conjuntamente. Neste trabalho, pelas mesmas razões, adotamos também uma componente agregada tendência-ciclo. O modelo aditivo adotado é, portanto, especificado da seguinte forma:

$$y_t = T_t + S_t + e_t, \text{ com } t = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

2.1 Dessazonalização com médias móveis

Nesta abordagem a componente sazonal é constante de ano para ano e por isso a sua identificação pode ser simplificada sob a forma de índices, ou coeficientes, sazonais.

O cálculo dos referidos coeficientes sazonais, S_t , assume que os efeitos expansivos compensam os efeitos depressivos e portanto,

$$\sum_{t=k+1}^{k+S} S_t = 0, \text{ com } k = 0, 1, \dots, \frac{n}{S} - 1, \quad (5)$$

ONDE, S REPRESENTA O PERÍODO SAZONAL. SE S PAR ENTÃO DEFINIMOS O SEGUINTE PROCESSO DE MÉDIAS MÓVEIS,

$$M_t = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{2} y_{t-\frac{S}{2}} + y_{t-\frac{S}{2}+1} + \dots + y_{t+\frac{S}{2}-1} + \frac{1}{2} y_{t+\frac{S}{2}} \right), \text{ com } t = \frac{S}{2} + 1, \dots, n - \frac{S}{2}. \quad (6)$$

Admitindo que M_t é um bom estimador do nível de tendência no momento t então podemos obter as estimativas das componentes sazonais e residuais através de,

$$S_t^* = y_t - M_t,$$

uma vez que,

$$y_t - M_t = T_t + S_t + e_t - M_t \cong S_t + e_t, \text{ com } t = \frac{S}{2} + 1, \dots, n - \frac{S}{2}.$$

Identificando o número de anos de observações disponíveis com m é possível calcular as S médias,

$$\bar{S}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m S_{i+S(j-1)}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, S \text{ e } j = 1, 2, \dots, m,$$

e, portanto, as estimativas da componente sazonal normalizadas, para assegurar que,

$$\sum_{i=1}^S \bar{S}_i = 0,$$

são dadas por,

$$\bar{S}_i = \bar{S}_i - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \bar{S}_i, i = 1, 2, \dots, S.$$

Neste contexto, a série dessazonalizada, y_t^D , é dada por:

$$y_t^D = y_{t+S(j-1)} - \bar{S}_i, t = 1, 2, \dots, n.$$

2.2 Estimação da tendência

A tendência pode ser estimada por um modelo linear ou por um polinómio de ordem superior. Os modelos polinomiais de ordem k ,

$$T_t = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j + e_t,$$

têm sido largamente utilizados em diferentes abordagens. No entanto, nem sempre é claro que tipo de modelo é o mais adequado para representar as observações. A componente tendência-ciclo em (4) é estimada através de um modelo de regressão linear simples onde a variável independente é $t = 1, 2, \dots, n$, onde:

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t.$$

A utilização do método dos mínimos quadrados é vantajosa porque permite obter estimadores lineares centrados de variância mínima. O modelo linear simples tem também a vantagem de fixar uma tendência com uma interpretação clara e permite investigar a existência de padrões cíclicos.

3. Modelo estrutural e filtro de Kalman

A utilização de modelos estruturais enquadra-se na temática mais geral da representação de modelos em espaço de estados. Esta representação é importante para o estudo de séries temporais porque nos permite explorar as qualidades do filtro de Kalman. Assim sendo, definindo um modelo estrutural, adotado como representativo da realidade em estudo, é preciso primeiro adequar o modelo estrutural ao seu correspondente modelo na representação em espaço de estados e

só posteriormente será possível efetuar as manipulações matemáticas propostas por (Kalman, 1960, Kalman e Bucy, 1961).

3.1 Modelo estrutural

Considere-se o modelo estrutural aditivo (4). A modelação da componente tendência e da componente sazonal deste modelo pode ser efetuada de diferentes formas e com diferentes modelos representativos. Neste ponto do texto apresentamos duas propostas de modelo estrutural representativo da realidade a modelar (Harvey, 1989, Durbin e Koopman, 2001).

O modelo com variáveis "dummy" na componente sazonal, com a seguinte configuração:

$$\begin{cases} Y_t = T_t + C_t + \delta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ S_t = -\sum_{j=1}^{s-1} S_{t-j} + \omega_t \end{cases}, \quad (7)$$

onde $\omega_t \sim NID(0, \sigma_\omega^2)$.

E o modelo com a componente sazonal com especificação trigonométrica, com a seguinte configuração:

$$\begin{cases} Y_t = T_t + C_t + \delta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ S_t = \sum_{j=1}^{s/2} S_{jt} \end{cases}, \quad (8)$$

S_{jt} representa a sazonalidade, com "índice da sazonalidade" j "no tempo" t , não estacionário, de frequência $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$ e período S , com $j=1, 2, \dots, [s/2]$, onde (Harvey, 1989, 2004, Durbin e Koopman, 2001):

$$\begin{bmatrix} S_{jt} \\ S_{jt}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_j & \sin \lambda_j \\ -\sin \lambda_j & \cos \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{j,t-1} \\ S_{j,t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{jt} \\ \omega_{jt}^* \end{bmatrix}, \quad (9)$$

e onde, $\omega_{jt}, \omega_{jt}^* \sim NID(0, \sigma_\omega^2)$.

A tendência é considerada linear, todos os termos dos erros, nas equações (7), (8) e (9) são perturbações aleatórias com características de ruído branco que se assume serem não correlacionada entre si.

As duas primeiras equações de (7) e (8) juntas definem o modelo de tendência onde T_t e β_t representam respetivamente o modelo de nível da tendência e o modelo do respetivo declive, que tem comportamento de passeio aleatório (Silchrist, 1976, Clark, 1987).

A representação completa das equações do modelo estrutural, no caso da componente sazonal representada por variáveis "dummy", em (7), será definida por,

$$\begin{cases} Y_t = T_t + C_t + \delta_t \\ T_t = T_{t-1} + \beta_{t-1} + \theta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ S_{t-1} \\ \sum_{j=0}^{s-1} S_{t-j} = \omega_t \end{cases}, \quad (10)$$

No caso da componente sazonal representada por especificação trigonométrica, em (8), será,

$$\begin{cases} Y_t = T_t + C_t + \delta_t \\ T_t = T_{t-1} + \beta_{t-1} + \theta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \theta_t \\ S_t = \sum_{j=1}^{[s/2]} S_{jt} \end{cases}, \quad (11)$$

onde S_{jt} resulta das equações (9).

Os modelos (10) e (11) constituem-se como os modelos base desta investigação, na abordagem feita com modelos estruturais, utilizados estes para a representação dos dados observados y_t e para as suas componentes não observadas (tendência, sazonal e ruído). Posteriormente os modelos serão representados na formulação em espaço de estados, para que seja possível a subsequente aplicação do filtro de Kalman, tendo como principal objetivo a extração dos sinais (valores) de cada uma das suas componentes (variáveis de interesse) e posterior cálculo dos valores previsionais, com base em extrapolações feitas através do estudo e manipulação dos modelos (Lathi, 2007).

3.2 Modelo em Espaço de Estados

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelação de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Estas últimas variáveis tentam captar a parte dinâmica do

sistema no vetor de estado, formado eventualmente por um conjunto de variáveis não observadas (Vaccaro, 1995, Ogata, 2003, Nise, 2007).

Através de um sistema definido por um modelo estrutural adequado e formulado o seu correspondente modelo na representação em espaço de estados, com a posterior aplicação do filtro de Kalman, podemos estimar o estado não observável, a partir de alguma magnitude observável, relacionada com este. O estimador do estado não observável do vetor no instante t , baseia-se assim na informação obtida até ao instante t e na sua atualização, cada vez que se dispõe de uma nova observação (Harvey, 1989).

A validade dos procedimentos de inferência, aqui referidos, depende obviamente da exatidão dos pressupostos estipulados e assim sendo, será responsável pela qualidade dos resultados produzidos (Duncan e Horn, 1972, Harrison e Stevens, 1976, West e Harrison, 1989, Hamilton, 1994a, 1994b).

Partindo do suposto que o estado segue um processo de Markov de primeira ordem, a equação de transição estabelece uma relação entre o estado atual e o estado no instante anterior. Assim, a formulação para o modelo em espaço de estados terá a equação de estado ou transição,

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (12)$$

onde:

α_t é um vetor de estado de dimensão $m \times 1$;

T_t é uma matriz de dimensão $m \times m$;

c_t é um vetor de dimensão $m \times 1$;

R_t é uma matriz de dimensão $m \times r$;

η_t é um vetor de dimensão $r \times 1$ de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula e matriz de variâncias/covariâncias Q_t ;

Q_t é uma matriz de dimensão $r \times r$.

Dado que o estado não é observável, é preciso estabelecer uma relação entre o vetor $p \times 1$ de variáveis observáveis e o vetor de estado $m \times 1$, que se define aqui através da equação de observação ou medição,

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (13)$$

onde:

y_t é um vetor de dimensão $p \times 1$;

Z_t é uma matriz de dimensão $p \times m$;

d_t é um vetor de dimensão $p \times 1$;

ε_t é um vetor de dimensão $p \times 1$ de perturbações não correlacionadas serialmente, com média nula e matriz de variância/covariância H_t ;

H_t é uma matriz de dimensão $p \times p$.

Esta formulação requer alguns pressupostos adicionais. No que diz respeito às condições iniciais do sistema, assume-se (Harvey, 1989),

$$E(\alpha_1) = a_1 \quad (14)$$

e

$$Var(\alpha_1) = P_1. \quad (15)$$

Os termos das perturbações da equação de medição e da equação de transição não estão correlacionados entre si e com o vetor de estado inicial, em qualquer momento de tempo, ou seja,

$$E(\varepsilon_t \eta_s') = 0, \forall s, t = 1, \dots, n,$$

$$E(\varepsilon_t \alpha_s') = 0, \quad t = 1, \dots, n,$$

$$E(\eta_t \alpha_s') = 0, \quad t = 1, \dots, n. \quad (16)$$

As matrizes Z_t , d_t , H_t , T_t , c_t , R_t e Q_t denominam-se por matrizes de sistema e, a menos que seja dito o contrário, consideram-se não estocásticas ou não probabilísticas, ainda que possam mudar ao longo do tempo de forma predeterminada. Se considerarmos que o sistema é linear, então em qualquer momento do tempo, o vetor de variáveis observáveis y_t pode expressar-se como uma combinação linear de valores presentes e passados das perturbações, η_t e ε_t , e do vetor de estado inicial, a_1 .

As matrizes do sistema Z_t , H_t , T_t , R_t e Q_t podem depender de um conjunto de parâmetros desconhecidos que determinam as propriedades estocásticas do modelo, denominando-se hiperparâmetros, para os distinguir dos que intervêm nos vetores d_t e c_t que só afetarão o valor esperado do estado e as observações de

forma determinística. Contudo se d_t é função de valores desfasados de y_t , esta conclusão não é válida. Os vetores d_t e c_t contêm componentes fixas e são usados para incorporar efeitos conhecidos ou componentes conhecidas do modelo, caso contrário são considerados de valor nulo (Hamilton, 1994a, Harvey, 1989, Kim e Nelson, 1999, Durbin e Koopman, 2001, Koopman, Wang e Zivot, 2004, Wada e Perron, 2006, Guerreiro, 2010).

Na prática, as variáveis de estado individuais de um sistema dinâmico não são determinadas diretamente. Logo, a sua medição realiza-se por meio de processos estocásticos que contêm algum grau de incerteza. Supõe-se assim que o modelo pode ser descrito através de uma representação estocástica linear, onde os erros associados, assim como a informação adicional que se lhe vai incorporando, têm uma distribuição normal com média zero e variância determinada (Guerreiro, 2010).

3.3 Modelo em Espaço de Estados simplificado

Tendo em conta a adequação do modelo às situações a modelar, construída a partir das igualdades descritas em (12) a (13), a representação de modelos em espaço de estados, em estudos que equacionam realidades económicas, surge-nos usualmente na literatura de forma simplificada. A equação de observação ou medida simplificada é dada por (Harvey, 1989 e Hamilton, 1994b),

$$y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (17)$$

onde:

y_t é um vector de dimensão $p \times 1$;

Z_t é uma matriz de dimensão $p \times m$;

α_t é um vector de estado de dimensão $m \times 1$;

ε_t é um vector de dimensão $p \times 1$ de perturbações, tal que, $\varepsilon_t \sim i. i. d. N_p(0, H_t)$;

H_t é uma matriz de dimensão $p \times p$.

A equação de estado ou transição é,

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (18)$$

onde:

T_t é uma matriz de dimensão $m \times m$;

R_t é uma matriz de dimensão $m \times r$;

η_t é um vector de dimensão $r \times 1$ de perturbações, tal que, $\eta_t \sim i. i. d. N_r(0, Q_t)$;

Q_t é uma matriz de dimensão $r \times r$.

As equações de observação e de estado simplificadas (17) e (18), serão as adotadas ao longo desta investigação, como representação do modelo em espaço de estados. Tal facto prende-se principalmente à constatação de que em estudos desta natureza considera-se normalmente nas equações (12) e (13) que os vetores d_t e c_t são nulos, ou seja, não existem componentes conhecidas associadas ao modelo (Harvey, 1989, Kim e Nelson, 1999, Durbin e Koopman, 2001, Koopman, Wang e Zivot, 2004, Wada e Perron, 2006 e Guerreiro, 2010).

3.3.1 Do modelo estrutural à representação em espaço de estados ("dummy")

Tendo em conta a representação adotada para o modelo estrutural escalar (10) e (11) e a sua correspondente em espaço de estados para equação de medida em (17) e considerando Z_t , como sendo constante ao longo do tempo, ou seja, $Z_t = Z$, temos que (Harvey, 1989 e Durbin e Koopman, 2001),

$$y_t = Z \alpha_t + \varepsilon_t$$

onde,

$$Z = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

e o vector de estado é,

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \beta_t \\ S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \\ S_{t-3} \\ S_{t-4} \\ S_{t-5} \\ S_{t-6} \\ S_{t-7} \\ S_{t-8} \\ S_{t-9} \\ S_{t-10} \end{bmatrix}$$

No que se refere à equação de estado representada em (18), as matrizes de sistema, T_t e R_t , são também constantes, ou seja, $T_t = T$ e $R_t = R$. Logo,

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t$$

onde,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, por fim,

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \delta_t \\ \theta_t \\ \Delta\theta_t \end{bmatrix}$$

O Quadro 1 resume as dimensões dos vetores e matrizes do nosso modelo em espaço de estados, caso se considere, como neste estudo, que o vetor γ_t representa uma única realidade econômica.

QUADRO 1: DIMENSÃO DOS VETORES E DAS MATRIZES DO MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Vetores	Matrizes
γ_t	1×1 Z 1×13
α_t	13×1 T 13×13
ε_t	1×1 H 1×1
η_t	3×1 R 13×3
a_1	13×1 Q 3×3
	P_1 13×13

3.3.2 Do modelo estrutural à representação em espaço de estados (trigonométrica)

Considerando o referido no ponto anterior, temos neste caso que (Harvey, 1989 e Durbin e Koopman, 2001),

$$\gamma_t = Z\alpha_t + \varepsilon_t$$

onde,

$$Z = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

e o vetor de estado é,

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \beta_t \\ S_{1t} \\ S_{2t}^* \\ S_{2t} \\ S_{3t}^* \\ S_{3t} \\ S_{4t} \\ S_{4t}^* \\ S_{5t} \\ S_{5t}^* \\ S_{6t} \end{bmatrix}$$

No que se refere à equação de estado,

de estados, é o da inicialização difusa (Durbín e Koopman, 2001, Jong e Chu-Chun-Lin, 2003, Koopman, Wang e Zivot, 2004, Wada e Perron, 2006, Guerreiro, 2010).

Esta técnica de inicialização, supõe que alguns dos componentes do vetor de estado podem ser potencialmente não estacionários, ou ainda, considera que alguns elementos de α_1 podem ter uma distribuição conhecida enquanto a distribuição dos restantes elementos é, por nós, completamente ignorada. Nesta ótica, o método de inicialização considerado mais adequado, é o da inicialização difusa (Koopman, Wang e Zivot, 2004, Wada e Perron, 2006, Guerreiro, 2010).

Assumindo-se a distribuição normal dos termos do erro, igualdades (16), a proposta no modelo (17) e (18), a formulação utilizada no filtro de Kalman (Kalman, 1960, Kalman e Bucy, 1961), a estimação de θ utilizará a função de máxima verosimilhança (Clark, 1987, Harvey, 1989, Kim e Nelson, 1999, Durbín e Koopman, 2001, Guerreiro, 2010).

$$\log L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=d+1}^n \left(\log(2\pi|F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t) \right) \quad (19)$$

A estimação dos valores, tendo como objetivo encontrar um determinado vetor θ que forneça resultados de máxima verosimilhança e será realizada por uma pesquisa não linear sobre o espaço de soluções dos parâmetros de θ .

Será também necessário encontrar, entre as múltiplas possibilidades combinatórias, uma forma de inicializar os algoritmos de pesquisa não linear, ou seja, os valores do vetor $\theta = [\sigma_\epsilon^2 \quad \sigma_\delta^2 \quad \sigma_\omega^2]$ para se poder dar início no nosso modelo ao processo de cálculo computacional (Kim e Nelson, 1999, Wada e Perron, 2006).

Em resumo, os valores que maximizam a função de máxima verosimilhança (19), obtidos em cada variável, podem ser obtidos entre vários métodos computacionais, o método Newton-Raphson, método BFGS e o método Nelder-Mead, são considerados adequados para este tipo de situações (Nelder e Mead, 1965, Shanno, 1970, Rosenber, 1973, Lagarias, Reeds e Wright, 1998, Nocedal e Wright 1999, Pollock, 2003, Guerreiro, 2010).

4. Previsão

Antecipar a evolução futura de uma série cronológica (Lynwood et al., 1990), através do cálculo de estimativas para valores futuros e avaliar a sua fiabilidade, é uma das questões centrais desta investigação.

a. Previsão com o Método de Holt-Winters

A decomposição das séries, em componentes observáveis, permite o desenvolvimento de modelos de previsão com a utilização do método Holt-Winters (Holt, 1957, Winters, 1960, Brockwell e Davis, 1996), na sua versão aditiva, apresenta-se como uma boa solução tendo em atenção o padrão sazonal e o facto de ser expresso em termos absolutos. Este método compreende uma equação de previsão e três de alisamento: uma para o nível, \hat{a}_t , uma para a tendência, \hat{b}_t , e uma outra para a componente sazonal, \hat{s}_t , com parâmetros de alisamento α, β e γ , respetivamente.

Considerando o modelo (4) a função de previsão é,

$$\hat{Y}_{t+m} = \hat{a}_t + m\hat{b}_t + \hat{S}_{t+m-k}$$

com $m = 1, 2, \dots$ e $k = 1$ se $0 < m < S$, $k = 2$ se $S < m < 2S$,

Enquanto as equações de alisamento são,

$$\hat{a}_t = \alpha(y_t - \hat{S}_{t-s}) + (1 - \alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}), 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1 - \beta)\hat{b}_{t-1}, 0 < \beta < 1$$

$$\hat{S}_t = \gamma(y_t - \hat{a}_t) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-s}, 0 < \gamma < 1$$

b. Previsão com algoritmo de Kalman

Suponhamos que temos em nossa posse as observações Y_1, \dots, Y_n e pretende-se fazer uma previsão para Y_{n+k} onde $k = 1, \dots, K$. Com este propósito vamos então estimar \bar{Y}_{n+k} . Assim sendo considera-se, tendo em conta (17) e (18) e os pressupostos associados a esses modelos que (Kalman, 1960 e Durbin e Koopman, 2001):

Para $k = 1$ a previsão é,

$$Y_{n+1} = Z_{n+1}\alpha_{n+1}$$

onde α_{n+1} pode ser encontrada, utilizando $\alpha_{n+1} = T_n \alpha_n$, com $T_n = T$ e $Z_{n+1} = Z$.

Genericamente, para $k = 2, \dots, K$, teremos,

$$\bar{Y}_{n+k} = Z_{n+k}\bar{\alpha}_{n+k}$$

onde,

$$\bar{u}_{n+k+1} = T_{n+k} \bar{u}_{n+k}$$

com $k = 1, \dots, K - 1$ e $\bar{u}_{n+1} = \alpha_{n+1}$, $Z_{n+k} = Z$ e $T_{n+k} = T$.

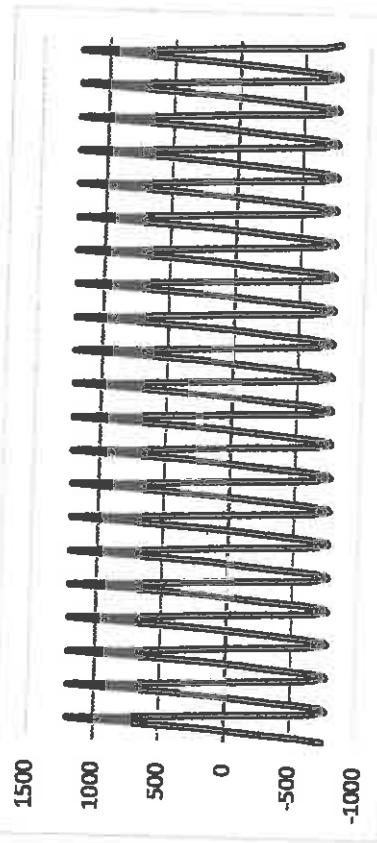
5. Modelação da Série Cronológica Número de Dormidas nos Estabelecimentos Hoteleiros do Algarve

a. Dados

Os dados analisados neste trabalho foram recolhidos a partir da base de dados estatísticos do Instituto Nacional de Estatística e dizem respeito ao número de dormidas nos estabelecimentos hoteleiros do Algarve em milhares, ocorrido entre janeiro de 1995 e dezembro de 2017. Esta série cronológica mensal com 276 observações, daqui em diante designada simplesmente por Dormidas, é utilizada da seguinte forma:

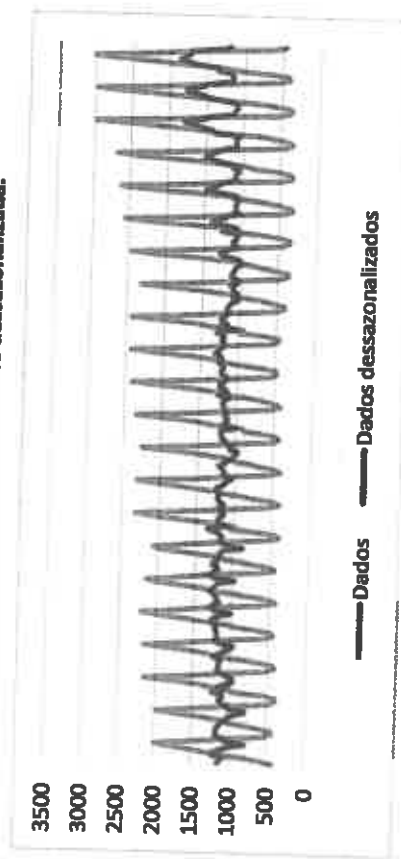
- os dados de janeiro de 1995 a dezembro de 2016 são utilizados para estimar os parâmetros dos modelos;
 - os dados de janeiro de 2017 a dezembro de 2017 são utilizados para avaliar a aderência das previsões calculadas pelos diferentes modelos à realidade observada no último ano.
- b. Decomposição clássica
- i. Estimação das componentes
- A componente sazonal foi estimada com base numa média móvel centrada, M_c , de 12 meses e encontra-se representada no Gráfico 1.

Gráfico 1: Índices sazonais da série Dormidas.



A subtração da componente sazonal aos dados observados tem o efeito esperado de alisar a série. A série desazonalizada apresenta uma evolução mais linear do que a série observada, como podemos ver no representada no Gráfico 2.

Gráfico 2: Série Dormidas e a série desazonalizada.



Nesta perspetiva, a componente tendência, estimada pelo método dos mínimos quadrados, é identificada com base na série desazonalizada e tem como equação:

$$\hat{y}_t = 1068,11 + 0,92t$$

Ao longo do período em análise estima-se, portanto, um crescimento médio de 920 dormidas mensais.

ii. Previsão

Identificadas as componentes individuais do modelo representado em (4) torna-se possível estimar o valor previsto da série. Neste contexto,

$$\hat{y}_{t+k} = \hat{y}_{t+k} + \hat{S}_{t+k-mS}$$

ONDE,

$$t = 1, 2, \dots, n,$$

$$m = 1 \text{ para } 1 \leq k \leq S,$$

$$m = 2 \text{ para } S \leq k \leq 2S$$

...

ou seja, cada valor da série é estimado através da adição das estimativas para as componentes não observáveis. E, portanto, a componente residual é dada por:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t - \hat{S}_t$$

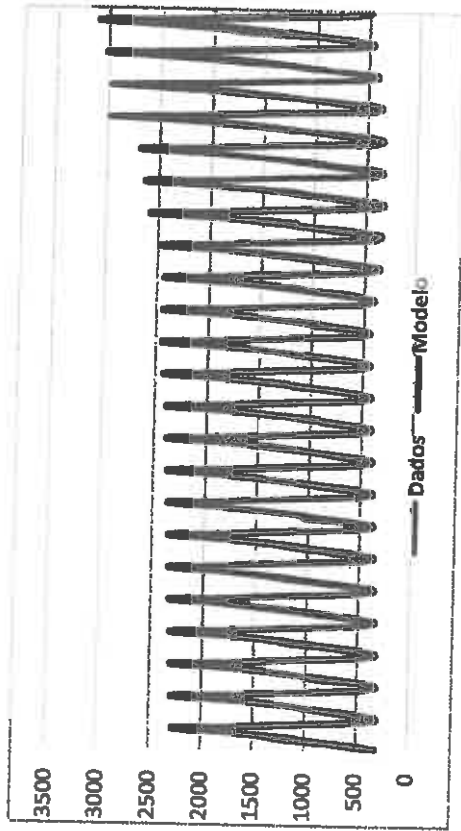
Esta abordagem corresponde à definição da função de previsão do método Holt-Winters uma vez que

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{S}_t$$

A equação de previsão é, por conseguinte, dada por:

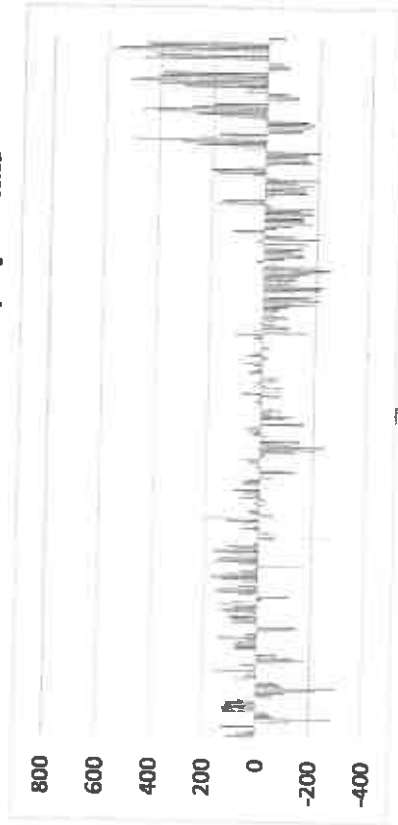
$$\hat{y}_t = 1068,11 + 0,92t + \hat{S}_t$$

Gráfico 3: Dormidas e Modelo – Decomposição Clássica



Enquanto a componente residual estimada, $\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t$, apresenta a evolução seguinte:

Gráfico 4: Dormidas - Erro – Decomposição clássica



A evolução dos erros é um aspeto importante na análise da qualidade do modelo de previsão. A análise dos dois últimos gráficos permite identificar uma dificuldade deste modelo em acompanhar a evolução dos dados, em particular nos extremos da série.

Esta dificuldade prende-se, em primeiro lugar, com o facto da componente sazonal ser fixa ao longo de todo o período da série. Esta é uma hipótese que parece ser demasiado restritiva e que limita a capacidade preditiva da decomposição clássica. Em segundo lugar, o bloco tendência-ciclo representado por um modelo de regressão linear pode introduzir também alguma rigidez no modelo e, portanto, um modelo polinomial de ordem superior poderia ser vantajoso. Esta rigidez pode ser observada através da comparação do erro quadrático médio (Makridakis, Wheelwright, Hyndman, 1998), considerando todo o período de estimação com 264 observações,

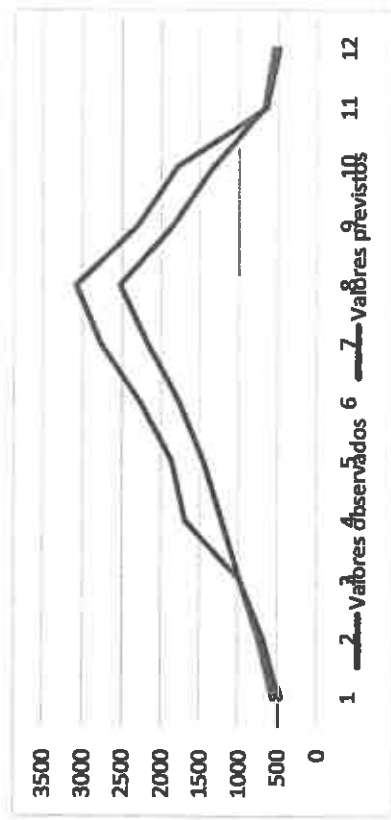
$$EQM = \frac{1}{264} \sum_{t=1}^{264} (y_t - \hat{y}_t)^2 = 21126$$

com o erro quadrático médio calculado para as últimas 12 observações disponíveis.

$$EQM = \frac{1}{12} \sum_{t=265}^{276} (y_t - \hat{y}_t)^2 = 145527$$

Um erro quadrático médio elevado indica algum afastamento entre valores previstos e observados, como é possível verificar no gráfico seguinte.

Gráfico 5: Dormidas – Dados reais e previsão – Decomposição clássica - jan. a dez. 2017



c. Filtro de Kalman, estimação das componentes

Com base no software desenvolvido para esta investigação, construíram-se os Gráficos 6 a 15 representativos dos dados da Dormidas e do modelo, da tendência, da componente de tendência aleatória, da componente sazonal e do erro, de janeiro

1995 a dezembro de 2016. Estes gráficos representam assim as evoluções temporais das equações referidas em (10), Gráfico 6, o modelo (y_t), Gráfico 7, a tendência (T_t), Gráfico 8, a tendência aleatória (β_t), Gráfico 9, a sazonalidade – representada por variáveis *Dummy* (S_t), Gráfico 10 o erro do modelo (ϵ_t).

Gráfico 6: Dormidas e Modelo – variáveis “Dummy”

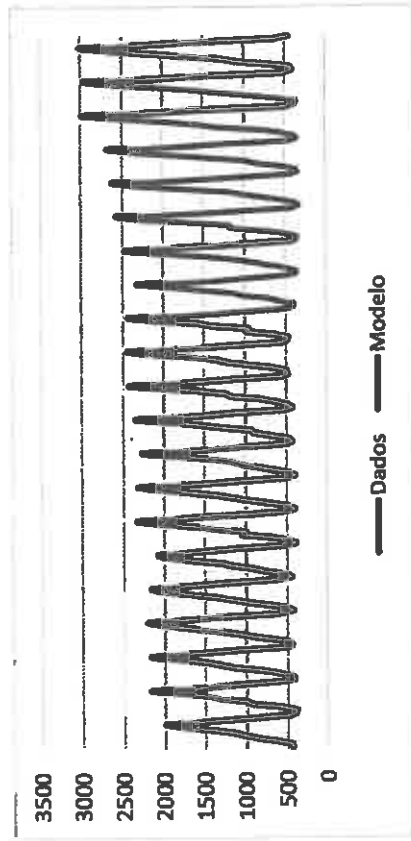


Gráfico 7: Dormidas – Tendência – variáveis “Dummy”

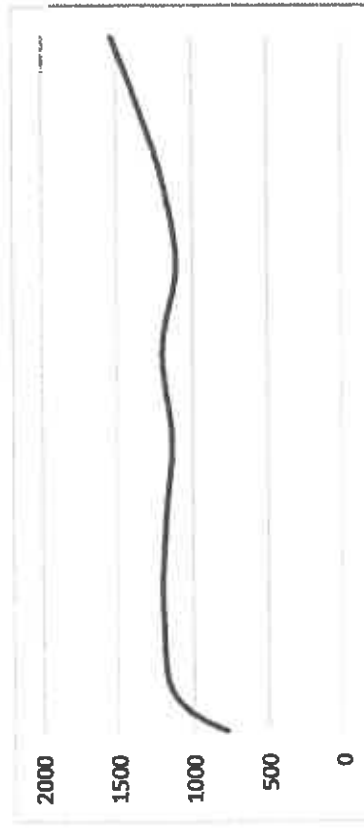


Gráfico 8: Dormidas – Tendência Aleatória – variáveis “Dummy”

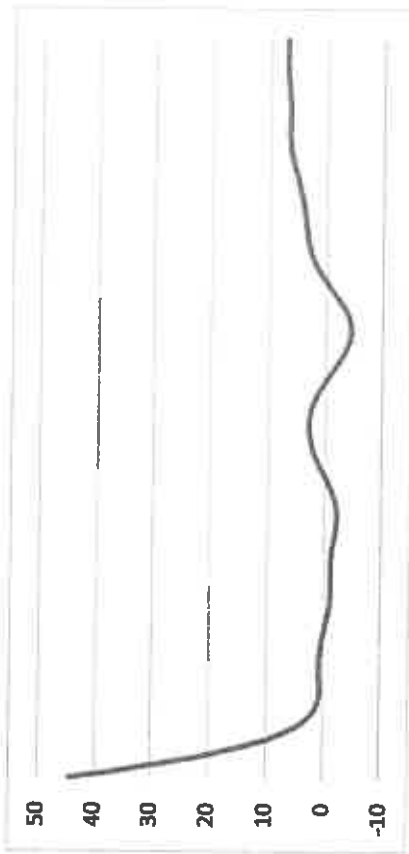


Gráfico 10: Dormidas – Erro – variáveis “Dummy”

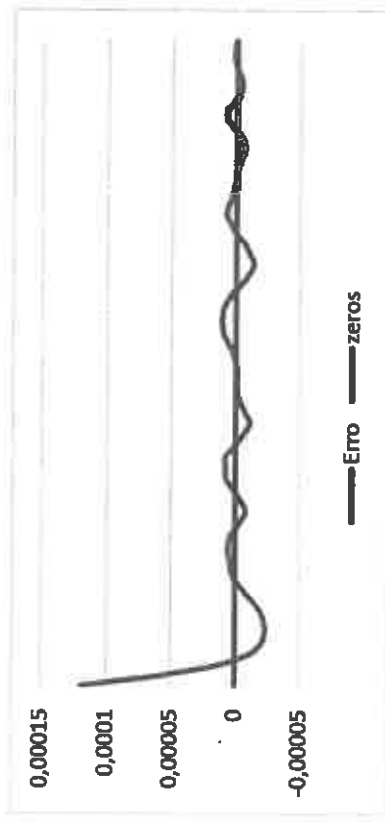


Gráfico 9: Dormidas – Componente Sazonal – variáveis “Dummy”

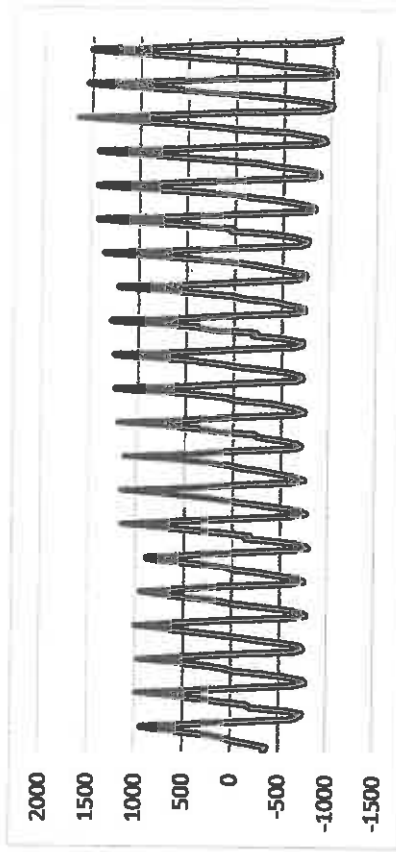
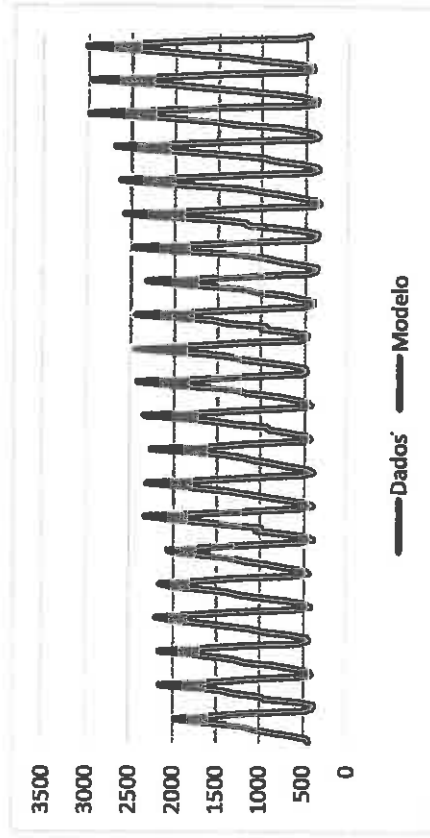


Gráfico 11: Dormidas e Modelo – “Trigonométrica”



Os gráficos seguintes representam, de janeiro 1995 a dezembro de 2016; a evolução temporal, das equações referidas em (11), Gráfico 11, o modelo (y_t), Gráfico 12, a tendência (T_t), Gráfico 13 a tendência aleatória (β_t), Gráfico 14, a sazonalidade – representada por variáveis trigonométricas (S_t), Gráfico 15 o erro do modelo (ϵ_t).

Gráfico 12: Dormidas – Tendência – “Trigonométrica”

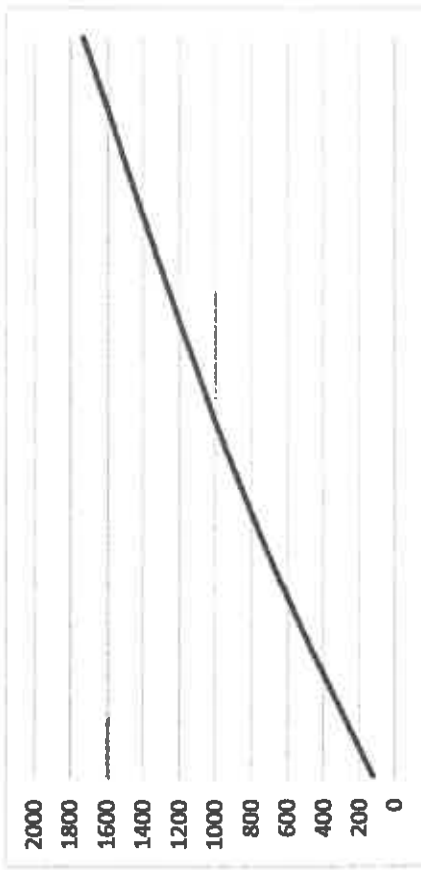


Gráfico 14: Dormidas – Componente Sazonal – “Trigonométrica”

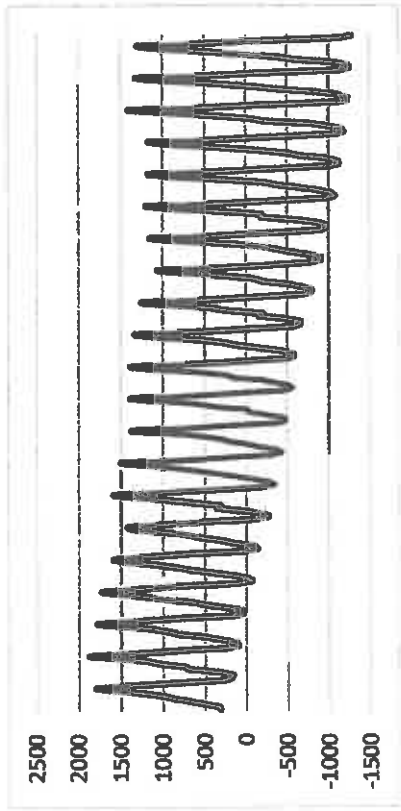


Gráfico 13: Dormidas – Tendência Aleatória – “Trigonométrica”

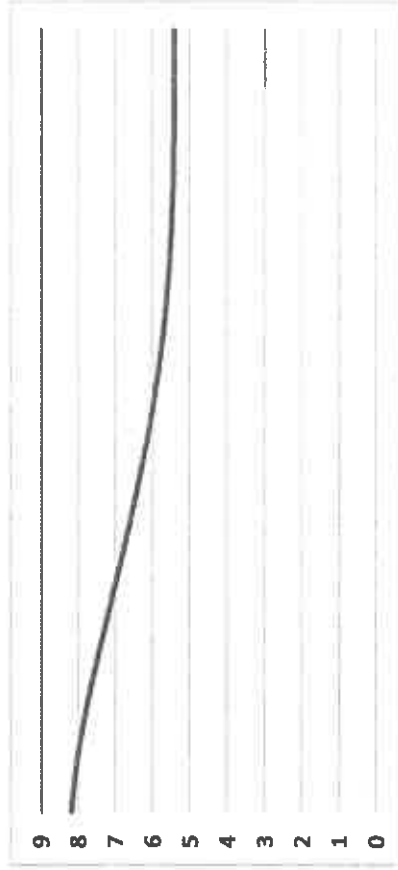
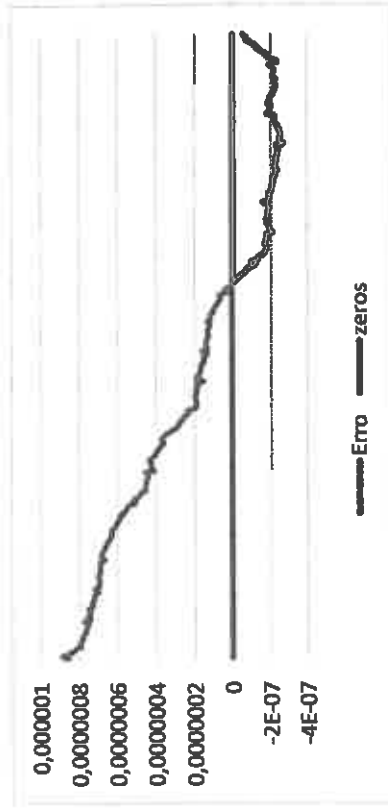


Gráfico 15: Dormidas – Erro – “Trigonométrica”



Os Gráficos 6 a 11, apresentados parecem-nos confirmar a utilidade do filtro de Kalman, como instrumento de extração e de isolamento das componentes de interesse das séries em estudo (Harvey, 1989, Durbin e Koopman, 2001 e Guerreiro, 2010), definidas tanto para a representação com variáveis “Dummy”, gráficos 6 a 10, como para a representação sazonal trigonométrica, gráficos 11 a 15.

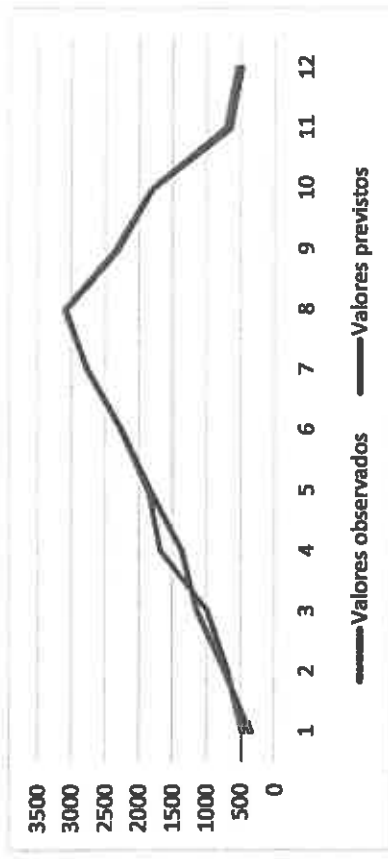
Nota-se, no entanto, algumas diferenças nos valores obtidos nas várias componentes. O gráfico da tendência parece, no caso da representação com variáveis “Dummy” captar algum movimento cíclico que não fará parte da sazonalidade, o que não acontece na representação trigonométrica da componente

sazonal. A tendência aleatória parece caminhar para um valor constante quando evoluímos para o final da amostra, dando a ideia de que em amostras de grande dimensão o seu comportamento poderá ser assintótico. A evolução temporal do erro, embora apresente uma configuração gráfica diferente nos dois modelos, os seus valores são ao longo de toda a amostra muito próximos do valor zero.

I. Previsão

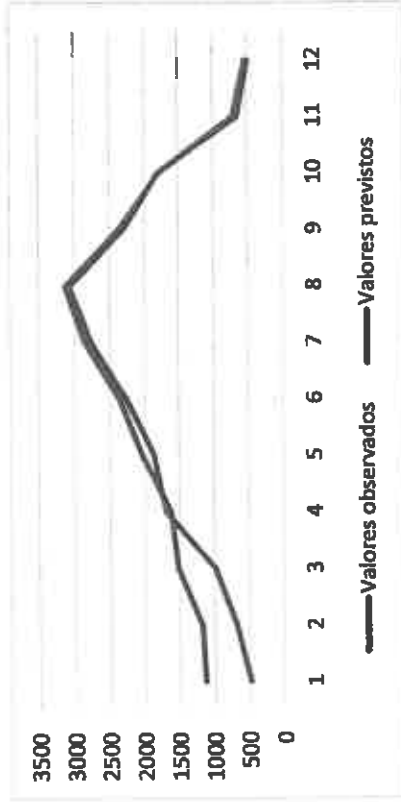
Tendo em conta o referido em 4.2, construíram-se os Gráficos 16 e 17.

Gráfico 16: Dormidas – Dados reais e previsão – variáveis “Dummy” - jan. a dez. 2017



$$EQM = \frac{1}{12} \sum_{t=265}^{276} (y_t - \hat{y}_t)^2 = 12843,91$$

Gráfico 17: Dormidas – Dados reais e previsão – “Trigonométrica” - jan. a dez. 2017



$$EQM = \frac{1}{12} \sum_{t=265}^{276} (y_t - \hat{y}_t)^2 = 84470,85$$

d. Comparação dos resultados

No quadro seguinte são apresentadas as previsões que obtivemos com os quatro modelos para os doze meses de 2017 da série Dormidas.

Quadro 3: Comparação das previsões para 2017 (milhares de dormidas)

Previsão	Dados 2017				
	Decomposição Clássica	Holt-Winters	Variáveis “Dummy”	Trigonométrica	
Janeiro	476,52	562,75	765,68	356,27	1128,65
Fevereiro	682,70	741,65	959,90	731,94	1175,91
Março	987,76	990,16	1235,10	1143,65	1516,94
Abril	1685,87	1213,60	1504,05	1366,10	1615,37

Mai	1860,4	1442,14	1766,9	1833,76	2037,37
	6		5		
Junho	2259,1	1758,34	2122,4	2245,54	2361,38
	0		9		
Julho	2769,9	2175,65	2601,9	2765,85	2856,50
	0		1		
Agosto	3079,6	2519,56	2963,6	3095,14	3128,78
	4		8		
Setembro	2295,4	1845,99	2214,5	2330,92	2354,43
	7		3		
Outubro	1791,4	1330,25	1672,1	1797,65	1789,54
	4		1		
Novembr	646,24	671,87	929,56	714,98	704,98
o					
Dezembr	485,21	551,69	824,80	544,51	524,09
o					

Para avaliarmos de forma mais rigorosa a qualidade das previsões apresentamos no quadro 4 os erros quadráticos médios apurados nos diferentes modelos. O modelo com variáveis "Dummy" é aquele que, de acordo com este critério de avaliação, aquele que apresenta as melhores previsões.

QUADRO 4: EQM PARA OS QUATRO MÉTODOS.

	Previsão		Variáveis		"Trigonométrica"
	Decomposição Clássica	Holt-Winters	"Dummy"		
EQM	145527	45011	12844	84471	
EQM %	8,8%	28,5%	100%	15,2%	

No Quadro 4 "EQM %" foi calculado pela divisão dos valores do EQM das variáveis "Dummy" pelos outros EQMs.

6. Conclusão

Neste artigo apresentamos os resultados obtidos com o estudo de três abordagens diferentes de análise de séries cronológicas: a decomposição clássica, o método Holt-Winters e a modelação estrutural com filtro de Kalman. As duas primeiras pertencem ao mesmo domínio clássico de abordagem, enquanto a última recorre a processos estocásticos na sua formalização.

A modelação da série cronológica número de dormidas nos estabelecimentos hoteleiros do Algarve permitiu verificar a adequação das três metodologias propostas para explicar o comportamento da série. No entanto, os métodos clássicos ao considerarem a sazonalidade como fator fixo, imutável ao longo do tempo, e alguma arbitrariedade dos caminhos a seguir apresentaram algumas desvantagens em termos de previsão.

Nas previsões calculadas para os primeiros doze meses, subsequentes às observações, o modelo estrutural com filtro de Kalman apresentou os melhores resultados. A decomposição clássica, pelo contrário, apresentou as piores previsões, subestimando sempre os valores reais, sendo todavia a abordagem mais simples de ser aplicada empiricamente e de ser interpretada.

Na análise previewal, para 2017, representada nos gráficos 5, 16 e 17 observa-se de facto uma proximidade entre as previsões e os valores observados. No entanto, através do EQM, verifica-se que a representação da sazonalidade com variáveis "Dummy" fornece previsões com um valor para o erro muito inferior, cerca de 15,2% do valor EQM da representação da sazonalidade com variáveis sazonais e 28,5% do valor do EQM da previsão para 2017 feita com o método de Holt-Winters, sendo para a decomposição clássica de 8,8%. Neste sentido, tendo em conta os dados analisados que a representação da sazonalidade com variáveis "Dummy" no modelo estrutural para posterior utilização do filtro de Kalman, será a alternativa mais adequada para modelar e prever este fenómeno com forte sazonalidade.

Neste contexto, parece existir espaço para aprofundar o estudo dos modelos estruturais na explicação de fenómenos onde a componente sazonal é determinante. Em particular na adaptação e fundamentação das condições necessárias à sua aplicação empírica. Com este trabalho exploramos a aderência desta abordagem ao fenómeno turístico utilizando metodologias, mais simples e com maior poder interpretativo, como referência. Os resultados obtidos, embora limitados, apontam numa direção já observada noutros contextos: modelos com origem em ciências físicas apresentam grande poder predictivo em domínios económicos e sociais, mas são bastante limitados em termos interpretativos e de difícil fundamentação.

Referências

- Brockwell, P. J. and Davis, R. (1996) *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York, Springer.
- Clarif, P. (1987) The Cyclical Component of U.S. Economic Activity, *Quarterly Journal of Economics*, 102, 4, Novembro, 797-814.
- Duncan, D. e S. Horn (1972) Linear Dynamic Recursive Estimation from the viewpoint of Regression Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 815-821.
- Dagum, E. B. e Bianconcini, S. (2016) *Seasonal adjustment methods and real time trend-cycle estimation*, Springer.
- Durbin, J. e S. Koopman (2001) *Time Series Analysis by State Space Models*, Oxford University Press.
- Glüchrit, W. (1976) *Statistical Forecasting*, London, Wiley.
- Guerrero, R. (2010) *Análise e monitorização do ciclo económico português: Uma abordagem centrada no método de Kalman*. Tese de Doutoramento não publicada, Faculdade de Economia da Universidade do Algarve.
- Hamilton, J. (1994a) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hamilton, J. (1994b) State-Space Models, In R. Engle e D. McFadden (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Cap. 50, North-Holland, 3039-3080.
- Harrison, P. e C. Stevens, C. (1976) Bayesian Forecasting, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 38, 246-257.
- Harvey, A. (1989) *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman filter*, Cambridge University Press.
- Harvey, A. (2004) Test for cycles, In Harvey, A., S. Koopman e N. Shephard (eds.), *State Space and Unobserved Component Models: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 102-119.
- Holt, C. (1957) Forecasting trends and seasonal by exponentially weighted moving averages, ONR Research Memorandum, Carnegie Institute of Technology 52.
- Jong, P. e S. Chiu-Chun-Lin (2003) Smoothing with an Unknown Initial Condition, *Journal of Time Series Analysis*, 24, 2, Março, 141-148.
- Kalman, R. (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, Série D, 82, 35-45.
- Kalman, R. e R. Bucy (1961) New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, Série D, 83, 95-107.
- Kim, C. e C. Nelson (1999) *State-Space Models with Regime Switching*, Cambridge, MA, MIT Press.
- Koopman, S., J. Wang e E. Zivot (2004) State Space Modelling in Macroeconomics and Finance using SsfPack in S-Plus, In Harvey, A., S. Koopman e N. Shephard (eds.), *State Space and Unobserved Component Models: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 284-335.
- Lagarias, J., J. Reeds e M. Wright (1998) Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method, *SIAM Journal of Optimization*, 9, 1, 112-147.
- Lathi, P. (2007) *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª edição, Bookman.
- Macaulay, F. (1931) *The Smoothing of Times Series*. National Bureau of Economic Research, New York.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C. and Hyndman, R. (1998) *Forecasting: Methods and Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Lynwood A., J. Douglas C. Montgomery and J. S. Gardiner. *Forecasting and Time Series Analysis*. McGraw-Hill, Inc, 2nd edition, 1990.
- Nelder, J. e R. Mead (1965) A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal*, 7, 308-313.
- Nilsen, N. (2007) *Control Systems Engineering*, 5ª edição, John Wiley & Sons, Inc.
- Nocedal, J. e S. Wright (1999) *Numerical Optimization*, New York, Springer-Verlag Inc.
- Ogata, K. (2003) *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Prentice-Hall Brasil.
- Pollock, D. (2003) Recursive Estimation in Econometrics, *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*, 44, Julho, 35-75.
- Rosenberg, B. (1973) Random Coefficients Models: The Analysis of a Cross-Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression, *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, 399-428.
- Shanno, D. (1970) Conditioning of Quasi-Newton methods for function minimization, *Mathematics of Computing*, 24, 647-656.
- Vaccaro, R. (1995) *Digital Control: A State-Space Approach*, New York, McGraw-Hill, Inc.
- Wada, T. e P. Perron (2006) An Alternative Trend-Cycle Decomposition using a State Space Model with Mixtures of Normals: Specifications and Applications to International Data, *Department of Economics Boston University*, September.
- West, M. e J. Harrison (1989) *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, New York, Springer-Verlag.
- Winters, P. (1960) Forecasting sales by exponentially weighted moving averages, *Management Science*, 6, 324-342.