



UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Faculdade de Ciências e Tecnologia

EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE

Tese para obtenção do grau de doutor no
ramo de Matemática, especialidade de Análise Matemática

Rogério P. Cardoso

Orientador:

Doutor Stefan Grigorievitch Samko

Presidente : Reitor da Universidade do Algarve

Vogais:

Doutor Viktor Grigorovitch Kravchenko

Doutor Stefan Grigorievitch Samko

Doutor Frank-Olme Ewald Speck (Relator)

Doutor Luís Filipe Pinheiro de Castro (Relator)

Doutor Nenad Manojlovic

FARO

2006

3671 T.



*

05	12	06	68196
517			
CAR + Equ			

1

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	<i>i</i>
RESUMO	<i>ii</i>
ABSTRACT	<i>iii</i>
SINOPSE	<i>iv</i>

I. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE NA RECTA

1. Introdução	1
2. Preliminares	2
2.1 Equações integrais de Sonine. Núcleos de Sonine	2
2.2 Aproximações à identidade	2
2.3 A equação integral de Sonine nos espaços L_p	6
2.4 A desigualdade de Chebyshev	8
3. Equações integrais de Sonine em $L_1(-\infty, b)$	9
3.1 A inversão formal da equação integral de Sonine	9
3.2 Continuidade absoluta, existência e unicidade da solução	10
4. Os núcleos de Sonine	12
4.1 Uma propriedade principal dos núcleos de Sonine	12
4.2 Hipóteses adicionais sobre os núcleos	14
4.3 Outras propriedades dos núcleos de Sonine	14
5. O operador inverso na forma de Marchaud	20
5.1 A derivada fraccionária de Liouville	20
5.2 Representação do operador inverso na forma de Marchaud	21
5.3 O operador inverso truncado de Marchaud-Sonine	22
5.4 Representação integral da composição $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}$	23
5.5 Propriedades do núcleo $N_\varepsilon(x)$	26
6. Inversão da equação integral de Sonine	32
6.1 O teorema da inversão	32
6.2 O contradomínio do operador integral de Sonine	33
7. Existência de núcleos de Sonine	38
7.1 Condições suficientes para a existência de núcleos de Sonine	38
7.2 Exemplos de núcleos de Sonine	39

II. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE EM $L_p(0, b)$

8. Introdução	43
9. Preliminares	44

9.1	Equações integrais e núcleos de Sonine em $L_1(0, b)$	44
9.2	Propriedades dos núcleos de Sonine	45
9.3	A desigualdade generalizada de Hardy	46
10.	Inversão da equação integral de Sonine em $L_p(0, b)$	50
10.1	O operador inverso truncado	50
10.2	O núcleo $N_\varepsilon(s)$	51
10.3	Representação integral do operador inverso truncado	51
10.4	Propriedade de aproximação à identidade do núcleo $N_\varepsilon(s)$	52
10.5	O teorema da inversão	56
10.6	O contradomínio do operador integral de Sonine	58
11.	Exemplos	64

III. RELAÇÕES ENTRE OPERADORES INTEGRAIS VIA INTEGRAL SINGULAR

12.	Preliminares	71
12.1	A transformação de Fourier	71
12.2	Notações. Teoremas auxiliares	71
12.3	Um lema sobre multiplicadores de Fourier	72
13.	Relação entre operadores integrais	73
13.1	Definição de núcleos na recta real	73
13.2	A relação $\mathbb{K}_+ = S\mathbb{K}_-$	74
13.3	A relação $\mathbb{K}_+T = \mathbb{K}_-$	74
13.4	O núcleo singular $\mathcal{N}(x)$ associado a um núcleo de Sonine	77
13.5	A transformada de Fourier do núcleo singular	78
14.	Equações generalizadas de Sonine com coeficientes constantes	79
14.1	Definições	79
14.2	Resolução das equações generalizadas de Sonine	79
14.3	Exemplos	81

IV. OPERADORES INTEGRAIS DE SONINE EM ESPAÇOS GENERALIZADOS DE HÖLDER

15.	Introdução	101
16.	Preliminares	101
16.1	Funções quase monótonas	101
16.2	Conjuntos funcionais $W_\mu([0, b])$, $V_\lambda([0, b])$	101
16.3	Classes de Bari-Stechkin- Zygmund	102
16.4	Espaços de Hölder generalizados	103
16.5	Desigualdades	104
16.6	Lemas	105
17.	Aplicação isomórfica pelo operador integral de Sonine em espaços $H_0^\omega([0, b])$	106

17.1 Estimativa do módulo de continuidade do operador inverso \mathbb{K}^{-1}	107
17.2 Continuidade do operador inverso \mathbb{K}^{-1}	109
17.3 Aplicação isomórfica pelo operador integral de Sonine	111
18. Propriedades do operador integral de Sonine em espaços generalizados ponderados de Hölder	111
18.1 Estimativa do módulo de continuidade do operador inverso	112
18.2 Continuidade do operador inverso	120
18.3 Isomorfismo entre espaços ponderados de Hölder	123
Referências	126
Lista de símbolos	131

AGRADECIMENTOS

A totalidade dos meus agradecimentos vai para o meu orientador de tese Prof. Dr. Stefan G. Samko, da Universidade do Algarve.

Para além da orientação temática, quero agradecer-lhe a disponibilidade de tempo e a paciência que sempre teve para esclarecer as minhas dúvidas, os seus ensinamentos que muito enriqueceram a minha formação matemática e a sua atitude positiva que tanto encorajou o meu trabalho nestes últimos quatro anos.

RESUMO

NOME: Rogério P. Cardoso

FACULDADE: Faculdade de Ciências e Tecnologia

ORIENTADOR: Stefan G. Samko

DATA: 2006

TÍTULO DA TESE: Equações integrais de Sonine

As equações integrais de Sonine são equações de primeira espécie, de Volterra, $\mathbb{K}\varphi = f$, com núcleo às diferenças, tais que existe um núcleo associado ao núcleo original de modo que sejam ambos divisores da unidade para a convolução.

No Capítulo I realiza-se a inversão do operador \mathbb{K} no quadro dos espaços $L_p(\mathbb{R})$ e obtêm-se as condições necessárias e suficientes para que uma função pertença ao contradomínio deste operador. Este resultado é conseguido após investigação das propriedades dos núcleos de Sonine e das condições especiais exigidas para a construção da forma de Marchaud do operador inverso. O contradomínio do operador \mathbb{K} é descrito como subconjunto de um espaço de Orlicz.

No Capítulo II efectua-se a inversão do operador \mathbb{K} no quadro dos espaços $L_p(0, b)$. A inversão é natural evitando hipóteses que envolvam condições no infinito.

No Capítulo III estuda-se uma relação entre os operadores de Sonine esquerdo e direito, a qual permite considerar algumas equações integrais generalizadas do tipo de Sonine.

No Capítulo IV estabelece-se a existência de isomorfismos entre espaços de Hölder generalizados, com e sem ponderação. Estes resultados exigem o estudo da limitação dos operadores \mathbb{K} e \mathbb{K}^{-1} nestes espaços.

Palavras chave : equações integrais ; núcleos de Sonine ; integrais e derivadas fraccionárias ; módulo de continuidade ; espaços de Hölder generalizados.

ABSTRACT

Sonine integral equations

Sonine integral equations are Volterra first kind integral equations $\mathbb{K}\varphi = f$ with a difference kernel such that there exists another kernel associated with the original kernel so that both are unit divisors for the convolution.

In Chapter I the operator \mathbb{K} is inverted in the frame of spaces $L_p(\mathbb{R})$ and necessary and sufficient conditions are obtained for a function to belong to the range of \mathbb{K} . This result is obtained after an investigation of Sonine kernels properties and of the special conditions required to construct the Marchaud representation of \mathbb{K}^{-1} . The range of the operator \mathbb{K} is described as a subset of an Orlicz space.

In Chapter II the inversion of operator \mathbb{K} is attained in the frame of spaces $L_p([0, b])$. The inversion is natural being related to the kernel values in $[0, b]$ and avoiding conditions at infinity.

In Chapter III a relation between the left-hand sided and right-hand sided Sonine operators is studied, which allows considering of some generalized Sonine-type integral equations.

Chapter IV establishes the existence of isomorphisms between generalized Hölder spaces, weighted and non-weighted. These results require the study of the boundedness of operators \mathbb{K} and \mathbb{K}^{-1} in these spaces.

Key words: integral equations ; Sonine kernels ; fractional integrals and derivatives ; continuity modulus ; generalized Hölder spaces .

SINOPSE

A Tese é dedicada ao estudo dos operadores integrais de Sonine e às correspondentes equações integrais de primeira espécie. Um operador de convolução do tipo de Volterra

$$\mathbb{K}\varphi(x) := \int_a^x k(x-y)\varphi(y)dy, \quad a < x < b, \quad -\infty \leq a < \infty, \quad -\infty < b \leq \infty$$

com $k \in L^1_{loc}([0, b-a])$ chama-se operador de Sonine se o seu núcleo satisfizer a condição de existir outro núcleo $l \in L^1_{loc}([0, b-a])$, chamado núcleo associado de k , tal que

$$\int_0^x k(x-y)l(y)dy \equiv 1,$$

(isto é, k é um divisor da unidade em relação à convolução de Volterra).

As equações integrais da primeira espécie $\mathbb{K}\varphi = f$ com a condição anterior relativa ao núcleo são conhecidas por equações de Sonine devido ao artigo [SON.1] de N. Sonine (1884), o qual introduziu aquela condição como generalização da condição que se tem para a equação integral de Abel. No caso da equação de Abel temos $k(x) = x^{\alpha-1}$, $l(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Assim, os operadores de Sonine representam uma larga generalização dos operadores de integração fraccionária. A teoria da integro-derivação fraccionária que remonta a Riemann, Liouville, Letnikov, Grünwald, Sonine, é apresentada no livro [SAM.2].

A ideia de Sonine é poderosa no sentido em que se conhecermos o núcleo associado, então a solução da equação $\mathbb{K}\varphi = f$ é imediatamente obtida. O próprio Sonine deu exemplos não triviais, diferentes do núcleo de potência, envolvendo funções de Bessel e outras.

As equações deste tipo provaram ser importantes nas aplicações, ver o livro [SON.2]. Muitos exemplos de pares de núcleos $k(x), l(x)$, que satisfazem a condição de Sonine, podem ser dados em termos de funções especiais.

Alguns destes exemplos são considerados nesta Tese, ver em especial a Secção 11.

Muito mais tarde, uma ideia próxima de uma condição semelhante sobre o núcleo foi considerada no artigo [PIN] (1945), numa forma diferente.

Com o desenvolvimento da teoria das equações integrais, provou-se, [WIC] (1968), que qualquer núcleo da forma $\frac{a(x)}{x^{1-\alpha}}$, com uma função analítica $a(x)$,

$a(0) \neq 0$, tem o núcleo associado $l(x) = \frac{b(x)}{x^a}$, com uma função analítica $b(x)$, cujos coeficientes de Taylor podem ser calculados em termos dos coeficientes de $a(x)$, e nos artigos [RUB.3] (1979), [RUB.1] (1982) mostrou-se que a classe de núcleos localmente integráveis $k(x)$ que admitem um núcleo associado localmente integrável $l(x)$ é de facto muito mais extensa.

Embora a solução das equações integrais de Sonine fosse formalmente conhecida há muito tempo, não existia uma investigação teórica funcional. Em particular, as seguintes questões permaneciam em aberto: quais são as classes correctas para este tipo de equações integrais de primeira espécie?

Dado um espaço X no qual procuramos soluções, qual é o contradomínio $\mathbb{K}(X)$?

Um dos objectivos principais desta Tese é responder às questões acima.

Mostramos que, se na classe de todos os operadores de convolução do tipo de Volterra destacamos um subconjunto de operadores de Sonine, então é possível caracterizar explicitamente o contradomínio $\mathbb{K}(X)$, por exemplo para $X = L_p$.

Além disso, mostramos que para todos os operadores de Sonine existe uma escala apropriada de classes correctas. Nomeadamente, os espaços generalizados e ponderados de Hölder $H_0^\omega(\rho)$ fornecem esta escala: sob certas condições impostas ao núcleo, para qualquer operador de Sonine e para um dado módulo de continuidade ω de uma certa classe, existe outro módulo de continuidade ω_1 tal que é válido o isomorfismo

$$\mathbb{K}[H_0^\omega(\rho)] = H_0^{\omega_1}(\rho),$$

o que resolve completamente o problema de descrição do contradomínio.

Antes apenas se conheciam afirmações do tipo de imersão: $\mathbb{K}[H_0^\omega(\rho)] \rightarrow H_0^{\omega_1}(\rho)$, ver [SAM.4].

A realização destes objectivos foi possível devido ao facto de termos construído uma nova forma de inversão dos operadores de Sonine. Esta forma pode ser considerada como uma generalização da fórmula de inversão de Marchaud para os operadores de integração fraccionária. Esta nova forma provou ser bem adequada para espaços como os de Lebesgue L_p ou os espaços generalizados e ponderados de Hölder $H_0^\omega(\rho)$.

A forma clássica de inversão não era adequada para os nossos objectivos, visto que só funciona no caso $p = 1$ dos espaços de Lebesgue e não funciona nada bem no caso dos espaços de Hölder generalizados.

A apresentação da Tese é a seguinte.

Nas Secções 1-2 do Capítulo I começamos com definições e alguns preliminares. Entre os preliminares, o mais importante é o Lema 2.3 que dá - num quadro bastante geral - as condições para que o operador de convolução seja aproximado pelo operador de identidade num espaço funcional arbitrário de Banach, sob alguns axiomas simples e naturais. Este Lema tem um papel crucial na ulterior justificação da inversão do operador de Sonine por meio da construção do tipo de Marchaud.

Na Subsecção 2.4 assinalamos que a desigualdade de Chebyshev para uma

função monótona é válida numa situação mais geral do que a usualmente indicada, resultado que usaremos na continuação.

Nas Secções 3-7 do Capítulo I estuda-se a equação de Sonine para o caso $a = -\infty$.

Na Secção 3 damos uma justificação das fórmulas de inversão clássicas para soluções em L_1 caracterizando o contradomínio em termos da continuidade absoluta de um certo integral.

A Secção 4 contém uma dedução de várias propriedades especiais dos núcleos de Sonine. Mostra-se que, a partir da condição de Sonine sobre a existência de um núcleo associado localmente integrável, é possível deduzir muitas propriedades úteis de $k(x)$ e de $l(x)$ que fornecem informação detalhada sobre o seu comportamento quando $x \rightarrow 0$. Este último facto é importante para a ulterior justificação da inversão dos operadores de Sonine.

Na Secção 5 construímos o operador inverso na forma generalizada de Marchaud, a qual utiliza um certo tipo de integral hipersingular. Nesta secção estuda-se em especial o resultado da aplicação do operador hipersingular truncado ao operador de Sonine.

Na Secção 6 prova-se que as truncaturas acima convergem para a solução (no caso de soluções em L_p), sendo a convergência na norma do espaço. Isto dá-nos a fórmula de inversão na forma de Marchaud. Obtemos também a caracterização do contradomínio $\mathbb{K}(L_p)$ em termos de convergência destas truncaturas.

Na Secção 7 consideramos algumas condições sobre o núcleo $k(x)$, suficientes para a existência do núcleo associado $l(x)$ e apresentamos vários exemplos.

O Capítulo II é dedicado às equações de Sonine num intervalo finito ($-\infty < a < b < \infty$) o qual é mais importante nas aplicações e nos permite considerar muitos mais exemplos, visto que a partir daqui podemos evitar a utilização de informação acerca do comportamento dos núcleos no infinito. Esta informação é, de facto, restritiva para alguns núcleos concretos.

Na Secção 9 deduzimos propriedades adicionais dos núcleos de Sonine.

Mencionamos, em primeiro lugar, a desigualdade generalizada de Hardy na Subsecção 9.3 a qual tem interesse por si própria, independentemente da ulterior aplicação que dela fazemos.

A Secção 10 contém uma modificação da construção hipersingular anteriormente mencionada, melhorada para o caso do intervalo finito. Esta modificação permite construir o operador inverso e também caracterizar o contradomínio do operador de Sonine.

A Secção 11 aplica os resultados obtidos a vários núcleos concretos, envolvendo principalmente funções especiais.

Nas Secções 12-14 do Capítulo III estuda-se a possibilidade de expressar o operador direito de Sonine via operador esquerdo com o mesmo núcleo, e em toda a recta. Sabemos, pelo caso dos operadores de integração fraccionária, que tal ligação é dada em termos de operador singular, pelo que procu-

ramos um operador de tipo singular que possa ser utilizado com o mesmo objectivo para operadores de Sonine arbitrários. Consideramos este método na generalidade e depois estudamos várias situações concretas. Nestes casos concretos damos especial atenção ao estudo do comportamento na origem e no infinito dos núcleos singulares resultantes (alguns dos núcleos são singulares apenas na origem).

Esta ligação via operador de tipo singular permite reduzir a resolução de algumas equações generalizadas de Sonine à resolução de algumas equações singulares.

O Capítulo IV, constituído pelas Secções 15-18, é dedicado ao estudo dos operadores de Sonine em espaços generalizados e ponderados de Hölder $H_0^\rho(\rho)$. São recordadas algumas propriedades dos módulos de continuidade na classe de Zygmund-Bari–Stechkin Φ e definem-se algumas classes de ponderação. Um dos principais resultados obtidos neste capítulo é a estimativa do tipo de Zygmund do módulo de continuidade $\omega(\mathbb{K}^{-1}f, h)$ para o operador inverso $\mathbb{K}^{-1}f$ via módulo de continuidade $\omega(f, h)$ da função f . Este resultado exigiu os principais esforços visto que foi necessário mostrar com exactidão que o módulo de continuidade $\omega(\mathbb{K}^{-1}f, h)$ piora em comparação com $\omega(f, h)$, dependendo das propriedades do núcleo associado $l(x)$.

A estimativa anterior do módulo de continuidade é crucial para a posterior demonstração do isomorfismo realizado pelos operadores de Sonine entre espaços generalizados e ponderados de Hölder. Consideramos separadamente casos não ponderados e ponderados nas secções 17 e 18 com vista a simplificar a apresentação: no caso mais difícil de ponderação a demonstração utiliza o isomorfismo provado para o caso de não ponderação.

I. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE NA RECTA

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos estudar equações integrais de Volterra, de primeira espécie, definidas na recta real

$$\mathbb{K}\varphi(x) := \int_{-\infty}^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.1)$$

sob a condição de existir um núcleo $l(x)$ tal que

$$\int_0^x l(x-t)k(t)dt = 1, \quad x > 0, \quad (1.2)$$

que é a condição de Sonine. Sonine estudou equações integrais num intervalo finito, [SON.1].

Um núcleo $k(x) \in \mathbf{L}_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ designa-se por núcleo de Sonine se existir outro núcleo $l(x) \in \mathbf{L}_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que seja válida a relação (1.2).

É bem conhecido o caso do núcleo da integração fraccionária, [SAM.2],

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.3)$$

para o qual se tem

$$l(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha}, \quad (1.4)$$

que satisfazem a condição (1.2).

Na resolução formal de (1.1) obtemos

$$\int_{-\infty}^x \varphi(s)ds = \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t)dt, \quad (1.5)$$

e

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t)dt. \quad (1.6)$$

Questões em aberto: condições sobre f que assegurem a existência de φ , unicidade de φ , existência de l .

2. PRELIMINARES

2.1. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE. NÚCLEOS DE SONINE

DEFIN. 2.1. Um núcleo $k(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ designa-se por núcleo de Sonine se existir outro núcleo $l(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que seja válida a relação (1.2).

O operador \mathbb{K} em (1.1), com um núcleo de Sonine $k(x)$, chama-se operador integral de Sonine.

O núcleo $l(x)$ chama-se núcleo associado ao núcleo $k(x)$ e é também um núcleo de Sonine.

A relação (1.2) mostra que $k(x)$ e $l(x)$ são necessariamente não limitados quando $x \rightarrow 0$. De facto, suponha-se que $k(x)$ é limitado. Então

$$1 = \left| \int_0^x l(x-t)k(t)dt \right| \leq C \int_0^x |l(x-t)|dt = C \int_0^x |l(s)|ds \rightarrow 0$$

o que não é possível.

2.2. APROXIMAÇÕES À IDENTIDADE

Um operador A_ε diz-se uma aproximação ao operador identidade num espaço de Banach X se

$$\|A_\varepsilon f - f\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Vamos considerar um operador de convolução

$$A_\varepsilon \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a_\varepsilon(t) \varphi(x-t) dt, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.2)$$

São conhecidas as condições suficientes para que o operador de convolução A_ε seja uma aproximação à identidade nos espaços L_p :

$$1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty a_\varepsilon(t) dt = 1,$$

(2.3)

$$2) \int_0^{\infty} |a_{\varepsilon}(t)| dt \leq M < \infty, \quad M \text{ independente de } \varepsilon,$$

(2.4)

$$3) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} |a_{\varepsilon}(t)| dt = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

(2.5)

Vamos estabelecer a seguir as condições suficientes para que A_{ε} seja uma aproximação à identidade num espaço arbitrário $X = X(\mathbb{R})$, que satisfaça dois axiomas:

1) X é invariante à translação

$$\|f(x-h)\|_X \leq C \|f\|_X, \quad C \text{ independente de } h \in \mathbb{R},$$

e verifica-se a continuidade média relativamente à norma

$$\omega_X(f, \delta) := \sup_{|h| < \delta} \|f(x-h) - f(x)\|_X \rightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0,$$

(2.6)

onde $\omega_X(f, \delta)$ é o módulo de continuidade de f .

2) É válida a desigualdade integral de Minkowski:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f(t) dt \right\|_X \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_X dt.$$

(2.7)

OBS.2.2. As hipóteses 1) e 2) são válidas em espaços $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e também em espaços de Orlicz $L_{\Phi}(\mathbb{R})$, com uma função de Young que satisfaça a condição Δ_2 :

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x),$$

para x suficientemente grande e algum $k > 0$.

De facto, a validade da desigualdade integral de Minkowski é uma consequência da definição da norma de Orlicz e não carece da condição Δ_2 . Por outro lado, a continuidade média para Φ já exige a condição Δ_2 , [KUF], p.179.

LEMA 2.3. *Seja X um espaço de Banach que satisfaz os axiomas 1) e 2). Seja uma família de funções $a_\varepsilon(t)$ que satisfazem as condições (2.3) – (2.5).*

Então A_ε definido por (2.2) é uma aproximação ao operador identidade no espaço X .

Além disso, é válida a seguinte estimativa para qualquer $\delta > 0$:

$$\|A_\varepsilon f - f\|_X \leq C(\varepsilon, \delta) \|f\|_X + M\omega_X(f, \delta), \quad (2.8)$$

$$C(\varepsilon, \delta) \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(x) dx \right\| + \int_{|x|>\delta} |a_\varepsilon(x)| dx. \quad (2.9)$$

Em particular, se $a_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a estimativa (2.8) reduz-se a

$$\|A_\varepsilon f - f\|_X \leq C(\varepsilon) \|f\|_X + M\omega_X\left(f, \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (2.10)$$

$$C(\varepsilon) = 2 \int_{|x|>\ln \frac{1}{\varepsilon}} |a(x)| dx, \quad M = \int_{\mathbb{R}} |a(x)| dx. \quad (2.11)$$

DEM. Seja

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f - f\|_X &= \left\| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) f(x-t) dt - f(x) \right\|_X \leq \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_X + \left| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) dt - 1 \right| \|f(x)\|_X = C_\varepsilon + D_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$D_\varepsilon = \left| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) dt - 1 \right| \|f(x)\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ por (2.3).}$$

$$C_\varepsilon = \left\| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_X \leq \left\| \int_{|t|<\delta} a_\varepsilon(t) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_X +$$

$$+ \left\| \int_{|t|>\delta} a_\varepsilon(t)[f(x-t) - f(x)]dt \right\|_X = E_\varepsilon^\delta + F_\varepsilon^\delta. \quad (2.13)$$

Pela desigualdade de Minkowski (2.7) e atendendo à invariância da translação em X

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^\delta &= \left\| \int_{|t|>\delta} a_\varepsilon(t)[f(x-t) - f(x)]dt \right\|_X \leq \int_{|t|>\delta} \|a_\varepsilon(t)[f(x-t) - f(x)]\|_X dt = \\ &= \int_{|t|>\delta} |a_\varepsilon(t)| \|f(x-t) - f(x)\|_X dt. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \|f(x-t) - f(x)\|_X &\leq \|f(x-t)\|_X + \|f(x)\|_X \leq C\|f(x)\|_X + \|f(x)\|_X = \\ &= (1+C)\|f(x)\|_X, \end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{|t|>\delta} |a_\varepsilon(t)| \|f(x-t) - f(x)\|_X dt \leq (1+C)\|f(x)\|_X \int_{|t|>\delta} |a_\varepsilon(t)| dt. \quad (2.14)$$

Por (2.5) vem que $F_\varepsilon^\delta \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo o $\delta > 0$.

Por outro lado, aplicando a continuidade média (2.6) e a condição (2.4) :

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\delta &= \left\| \int_{|t|<\delta} a_\varepsilon(t)[f(x-t) - f(x)]dt \right\|_X \leq \int_{|t|<\delta} |a_\varepsilon(t)| \|f(x-t) - f(x)\|_X dt \leq \\ &\leq \sup_{|t|<\delta} \|f(x-t) - f(x)\|_X \int_{|t|<\delta} |a_\varepsilon(t)| dt \leq M\omega_X(f, \delta). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reunindo as estimativas:

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f - f\|_X &\leq C_\varepsilon + D_\varepsilon \leq E_\varepsilon^\delta + F_\varepsilon^\delta + D_\varepsilon \leq \\ &\leq M\omega_X(f, \delta) + (1+C)\|f(x)\|_X \int_{|t|>\delta} |a_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) dt - 1 \right| \|f(x)\|_X = \\ &= \|f(x)\|_X \left\{ (1+C) \int_{|t|>\delta} |a_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) dt - 1 \right| \right\} + M\omega_X(f, \delta). \end{aligned}$$

Escrevemos

$$C(\varepsilon, \delta) = (1 + C) \int_{|t| > \delta} |a_\varepsilon(t)| dt + \left| \int_{\mathbb{R}} a_\varepsilon(t) dt - 1 \right|,$$

e

$$\|A_\varepsilon f - f\|_X \leq C(\varepsilon, \delta) \|f(x)\|_X + M\omega_X(f, \delta), \text{ que é (2.8).}$$

Atendendo a (2.3)-(2.5), à arbitrariedade de δ , e a que $\omega_X(f, \delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, obtemos o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A_\varepsilon f - f\|_X = 0.$$

Escolhendo $\delta = \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$ e com $a_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ obtém-se (2.10). ■

2.3. A EQUAÇÃO INTEGRAL DE SONINE NOS ESPAÇOS L_p

Seja

$$\mathbb{K}\varphi(x) = \int_{-\infty}^x k(x-t)\varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para podermos considerar o operador de Sonine em $L_p(\mathbb{R})$ é preciso condicionar o núcleo $k(x)$ de modo a garantir a existência do integral para funções $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$. Se o núcleo for do tipo

$$k(x) = \frac{m(x)}{x^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \sup_{x>0} |m(x)| < \infty, \quad (2.16)$$

então é conhecido o seguinte teorema, [SAM.2] :

TEOREMA: *Seja (2.16). Então o operador \mathbb{K} é limitado de $L_p(\mathbb{R})$ em $L_q(\mathbb{R})$ se e só se $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$.*

Para um núcleo de Sonine arbitrário, o conjunto de funções $f = \mathbb{K}\varphi$ já não pertence a qualquer espaço $L_q(\mathbb{R})$, mas poderá estar imerso nalgum espaço de Orlicz, como se verá no Teorema 2.4.

Observamos em primeiro lugar que a convolução com um núcleo $k(x)$ localmente integrável fica bem definida para qualquer função $f \in L_p(\mathbb{R})$ desde que exista um número $N > 0$ tal que

$$\int_N^\infty |k(x)|^p dx < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(2.17)

De facto

$$\int_0^{\infty} k(t)f(x-t)dt = \int_0^N k(t)f(x-t)dt + \int_N^{\infty} k(t)f(x-t)dt.$$

(2.18)

O primeiro termo existe quase sempre pela desigualdade de Minkowski e o segundo termo é limitado, pela desigualdade de Hölder.

No Teorema 2.4 usamos a notação

$$k^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t k^*(s)ds,$$

(2.19)

onde,

$$k^*(s) = \inf\{t > 0 : m(k,t) \leq s\},$$

representa o rearranjo não crescente de $|k(x)|$, inverso da função de distribuição

$$m(k,t) = \text{med}\{x \in \mathbb{R} : |k(x)| > t\}.$$

Tem-se ainda que

$$k^{**}(t) \geq k^*(t), \quad \|k^{**}\|_p = \|k\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

(2.20)

e

$$\|k^{**}\|_p \leq r\|k\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

(2.21)

pela limitação do operador de Hardy $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ em \mathbf{L}_p , [HAR].

O Teorema 2.4 é um caso particular do Teorema de O'Neil, [ONE], sobre a limitação do operador de convolução nos espaços de Orlicz.

TEOREMA 2.4. *Seja um núcleo $k(x) \in \mathbf{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$. O operador de convolução \mathbb{K} é*

definido para toda a função $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, se for verificada a condição (2.17), ou a seguinte condição para algum $N > 0$,

$$\int_N^\infty \frac{|k^{**}(x)|}{x^{\frac{1}{p}}} dx < \infty. \quad (2.22)$$

Sob a condição (2.22) o operador \mathbb{K} é limitado de $\mathbf{L}_p(\mathbb{R})$ no espaço de Orlicz $\mathbf{L}_\Phi(\mathbb{R})$, sendo a função de Young definida pela sua inversa

$$\Phi^{-1}(x) = \int_{1/x}^\infty \frac{k^{**}(t)}{t^{\frac{1}{p}}} dt = p \left[x^{\frac{1}{p}} \int_0^{1/x} |k(s)| ds + \int_{1/x}^\infty \frac{k^*(s)}{s^{\frac{1}{p}}} ds \right]. \quad (2.23)$$

OBS. 2.5. A condição,

$$\int_N^\infty |k(x)|^m dx < \infty, \quad (2.24)$$

para algum $m < p'$ é suficiente para assegurar a validade de (2.22), a qual se obtém pela desigualdade de Hölder e pelas propriedades (2.20) e (2.21).

OBS. 2.6. A partir de (2.23) e por derivação directa obtém-se

$$\frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} = \frac{k^{**}(\frac{1}{x}) + p[k^*(\frac{1}{x}) - |k(\frac{1}{x})|]}{x^{2-\frac{1}{p}}} \quad (2.25)$$

2.4. A DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV

No caso de os núcleos $k(x)$ e $l(x)$ serem ambos monótonos no mesmo sentido, verifica-se a seguinte desigualdade de Chebyshev:

$$\int_0^x l(x-t)k(t)dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x k(t)dt \int_0^x l(t)dt, \quad x > 0. \quad (2.26)$$

Na demonstração clássica desta desigualdade, [YAK], é utilizada a hipótese de o produto $k(t)l(t)$ ser integrável em $[0, \varepsilon]$, o que não acontece no caso dos núcleos de Sonine. Mas é possível provar (2.26) sem esta hipótese. Truncando inicialmente a origem observamos que o integral

$$\int_{\delta}^{x-\delta} \int_{\delta}^{x-\delta} [k(x-t) - k(y)][l(x-t) - l(y)] dt dy,$$

é positivo se $k(x)$ e $l(x)$ forem monótonos no mesmo sentido e é negativo se forem monótonos em sentidos contrários.

Então, para núcleos monótonos no mesmo sentido obtemos

$$(x - 2\delta) \int_{\delta}^{x-\delta} k(t)l(t) dt \geq \int_{\delta}^{x-\delta} k(t) dt \int_{\delta}^{x-\delta} l(t) dt.$$

Para núcleos monótonos em sentidos contrários o sinal da desigualdade inverte-se. Mas se $k(x)$ e $l(x)$ são monótonos no mesmo sentido, então $k(x-t)$ e $l(t)$ serão monótonos em sentidos contrários e ter-se-á

$$(x - 2\delta) \int_{\delta}^{x-\delta} k(x-t)l(t) dt \leq \int_{\delta}^{x-\delta} k(x-t) dt \int_{\delta}^{x-\delta} l(t) dt = \int_{\delta}^{x-\delta} k(s) ds \int_{\delta}^{x-\delta} l(t) dt,$$

que tende para (2.26) quando $\delta \rightarrow 0$.

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE EM $L_1(-\infty, b)$

3.1. A INVERSÃO FORMAL DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE SONINE

Consideramos $L_1(-\infty, b)$, com $b \leq +\infty$. Seja o operador

$$\mathbb{L}_k f(x) := \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t) dt, \tag{3.1}$$

onde $l(x)$ é o núcleo associado a $k(x)$.

Aplicando formalmente o operador \mathbb{L} ao operador \mathbb{K} , utilizando a fórmula de Dirichlet e usando a propriedade (1.2) obtemos

$$\mathbb{L}\mathbb{K}\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds \int_0^{x-s} l(x-s-u)k(u)du = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds. \quad (3.2)$$

Então a solução de (1.1) é, formalmente

$$\varphi(x) = \mathbb{K}^{-1}f(x) := \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t)dt. \quad (3.3)$$

3.2. CONTINUIDADE ABSOLUTA, EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Para justificar a inversão anterior para soluções em $\mathbf{L}_1(-\infty, b)$ precisamos da seguinte definição, [SAM.2].

DEFIN. 3.1. Uma função $g(x)$ diz-se absolutamente contínua em $(-\infty, b)$, $b \leq \infty$, que se escreve $g(x) \in AC(-\infty, b)$ se for absolutamente contínua em todo o subintervalo limitado de $(-\infty, b)$ e se tiver variação limitada em $[-\infty, b]$. Além disso, a condição $g(x) \in AC(-\infty, b)$ é equivalente à representação

$$g(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt + C, \quad \text{com } \varphi(x) \in \mathbf{L}_1(-\infty, b), \quad (3.4)$$

e para $g(x) \in AC(-\infty, b)$ existe $g'(x) = \varphi(x)$ q.s..

TEOREMA 3.2. Seja $k(x)$ um núcleo de Sonine e seja $l(x)$ o seu núcleo associado. A equação (1.1) é resolúvel em $\mathbf{L}_1(-\infty, b)$ se e só se a função

$$g_l(x) := \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t)dt,$$

satisfizer as condições,

$$g_l(x) \in AC(-\infty, b) \quad \text{e} \quad g_l(-\infty) = 0.$$

(3.5)

Nestas condições a equação (1.1) tem solução única dada por (3.3).

DEM. A demonstração deste teorema é directa e omite-se. ■

O Lema que se segue dá uma condição suficiente para a validade das condições (3.5) em termos da própria função f .

LEMA 3.3. *Seja ,*

$$L(x) = \int_0^x l(s) ds. \tag{3.6}$$

Se,

- a) $f(x) \in AC(-\infty, b)$, $f(-\infty) = 0$,
- b) $\int_0^x f'(t)l(x-t)dt \in L_1(-\infty, b)$,
- c) $\int_{-\infty}^x f'(s)L(x-s)ds$ é convergente, para todo o $x \in (-\infty, b)$,

então $g_l(x) \in AC(-\infty, b)$ e $g_l(-\infty) = 0$.
Além disso, $g_l(x)$ pode ser representada por,

$$g_l(x) = \int_{-\infty}^x f'(s)L(x-s)ds. \tag{3.7}$$

DEM. Pela hipótese a) $f(x)$ tem derivada q.s.. Então

$$g_l(x) = \int_{-\infty}^x l(x-t)dt \int_{-\infty}^t f'(s)ds. \tag{3.8}$$

Podemos escrever

$$g_l(x) = \int_{-\infty}^x f'(s)ds \int_s^x l(x-t)dt = \int_{-\infty}^x f'(s)L(x-s)ds,$$

e atendendo à hipótese c) a expressão obtida é a representação (3.7).

Escrevendo

$$g_l(x) = \int_{-\infty}^x l(x-t) \int_{-\infty}^t f'(s) ds dt = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^t f'(s) l(t-s) ds \right] dt,$$

expressão que pode ser verificada pela troca da ordem de integração, e atendendo à hipótese b) e à definição 3.1 vê-se que $g_l(x) \in AC(-\infty, b)$,

visto que $\int_{-\infty}^t f'(s) l(t-s) ds \in L_1(-\infty, b)$. ■

4. OS NÚCLEOS DE SONINE

4.1 UMA PROPRIEDADE PRINCIPAL DOS NÚCLEOS DE SONINE

LEMA 4.1. *Suponha-se que o núcleo de Sonine $k(x)$ e o núcleo associado $l(x)$ têm derivadas localmente integráveis e que satisfazem as condições*

$$\lim_{t \rightarrow 0} tk(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} tl(t) = 0. \quad (4.1)$$

Então

$$\int_0^x l'(t)[k(x) - k(x-t)] dt = k(x)l(x), \quad x > 0 \text{ q.s.}, \quad (4.2)$$

(para todo o $x > 0$ se $k'(x), l'(x)$ existirem em todo o ponto $x > 0$.)

DEM. Por (4.1) deduzimos integrando por partes que existem os integrais ,

$$\int_0^1 tk'(t) dt \quad \text{e} \quad \int_0^1 tl'(t) dt.$$

De (1.2) decorre que

$$1 = \int_0^x l(x-t)k(t) dt = x \int_0^1 l(x-xt)k(xt) dt, \quad (4.3)$$

e

$$x \int_0^1 [l'(x-xt)(1-t)k(xt) + l(x-xt)k'(xt)t] dt + \int_0^1 l(x-xt)k(xt) dt = 0. \quad (4.4)$$

Usando $s = xt$ obtemos:

$$\int_0^x l'(x-s)(x-s)k(s)ds + \int_0^x l(x-s)k'(s)sds + \int_0^x l(x-s)k(s)ds = 0. \quad (4.5)$$

Observamos que por (1.2) o último integral é igual a 1. Para o segundo integral utilizamos $d[k(s) - k(x)] = k'(s)ds$ e integramos por partes,

$$\int_0^x l(x-s)s d[k(s) - k(x)] = \{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\}_{s=0}^{s=x} - \int_0^x [k(s) - k(x)] \frac{d[sl(x-s)]}{ds} ds.$$

Temos

$$\{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\}_{s=0}^{s=x} = \lim_{s \rightarrow x} \{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\} - \lim_{s \rightarrow 0} \{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\}.$$

De (4.1) deduzimos que $\lim_{t \rightarrow 0} l(t)[k(x) - k(x-t)] = 0$, $x > 0$, q.s..

Além disso existe o limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{k(x) - k(x-t)}{t}$, $x > 0$, q.s.. Obtemos então

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow x} \{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\} &= x \lim_{t \rightarrow 0} l(t)[k(x-t) - k(x)] = 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \{sl(x-s)[k(s) - k(x)]\} &= 0, \end{aligned}$$

pelo que

$$\int_0^x l(x-s)k'(s)sds = - \int_0^x [k(s) - k(x)] \frac{d[sl(x-s)]}{ds} ds.$$

Então (4.5) reduz-se a

$$\int_0^x l'(x-s)[xk(s) - sk(x)]ds + k(x) \int_0^x l(x-s)ds = 0,$$

ou

$$\int_0^x l'(t)[k(x) - k(x-t)]dt = \frac{k(x)}{x} \int_0^x d[tl(t)],$$

que conduz imediatamente ao resultado pretendido. ■

OBS. 4.2. No Lema 4.3 mostrar-se-à que a condição (4.1) é automaticamente satisfeita para $k(x)$ e $l(x)$, desde que estes núcleos sejam decrescentes numa vizinhança da origem.

4.2 HIPÓTESES ADICIONAIS SOBRE OS NÚCLEOS

A inversão da equação de Sonine em L_p será feita sob as seguintes hipóteses adicionais relativas aos núcleos $k(x)$ e $l(x)$.

i) MONOTONIA PERTO DA ORIGEM

Admite-se que existe uma vizinhança $(0, \varepsilon_0)$ na qual se verifica:

$$k(x) \geq 0, l(x) \geq 0, k(x) \downarrow, l(x) \downarrow, 0 < x \leq \varepsilon_0. \quad (4.6)$$

ii) INTEGRABILIDADE ABSOLUTA DAS DERIVADAS NO INFINITO

Admite-se que as derivadas dos núcleos existem, pelo menos em sentido generalizado (sentido distribucional), são localmente integráveis e verificam:

$$\int_{\delta}^{\infty} |k'(x)| dx < \infty, \quad \int_{\delta}^{\infty} |l'(x)| dx < \infty, \quad \delta > 0. \quad (4.7)$$

Um núcleo que satisfaz (4.7) estabiliza no infinito, isto é,

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = k(\infty), \quad |k(\infty)| < \infty. \quad (4.8)$$

Com as hipóteses adicionais (4.6) e (4.7) é possível obter diversas propriedades especiais para um núcleo de Sonine, como por exemplo o seu comportamento perto da origem e no infinito, assim como algumas estimativas integrais.

Os dois lemas seguintes tratam destas propriedades e são indispensáveis para obtermos outras demonstrações.

4.3 OUTRAS PROPRIEDADES DOS NÚCLEOS DE SONINE

LEMA 4.3. *Qualquer núcleo de Sonine que satisfaça (4.6) tem as seguintes propriedades:*

$$xk(x)l(x) \leq 1, \quad 0 < x \leq \varepsilon_0, \quad (4.9)$$

$$k(x) \int_0^x l(t) dt \leq 1, \quad l(x) \int_0^x k(t) dt \leq 1, \quad 0 < x \leq \varepsilon_0, \quad (4.10)$$

$$l(x) \int_0^x k(t) dt + k(x) \int_0^x l(t) dt \geq 1, \quad 0 < x \leq \varepsilon_0, \quad (4.11)$$

$$\int_0^x k(t) dt \int_0^x l(t) dt \geq x, \quad 0 < x \leq \varepsilon_0, \quad (4.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = +\infty, \quad (4.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xk(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xl(x) = 0, \quad (4.14)$$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^\varepsilon |k'(t)| dt \int_{\varepsilon-t}^\varepsilon l(s) ds \right] \leq 1. \quad (4.15)$$

DEM.

a) Prova-se (4.9) pela condição de monotonia (4.6) em (1.2). Para $0 < t < x \leq \varepsilon_0$ temos que $k(t) \geq k(x)$ e $l(x-t) \geq l(x)$. Então,

$$1 = \int_0^x k(t)l(x-t) dt \geq k(x) \int_0^x l(x-t) dt \geq k(x)l(x) \int_0^x dt = xk(x)l(x).$$

b) Por (4.6) temos :

$$1 = \int_0^{2x} k(t)l(2x-t)dt = \int_0^x k(t)l(2x-t)dt + \int_x^{2x} k(t)l(2x-t)dt \leq l(x) \int_0^x k(t)dt + k(x) \int_x^{2x} l(2x-t)dt. \quad (4.16)$$

Daqui obtém-se obtém-se (4.11).

c) A propriedade (4.12) decorre da desigualdade de Chebyshev (2.26) atendendo a (1.2).

d) Retome-se (1.2). Como $l(x-t) \geq l(x)$ resulta que,

$$l(x) \int_0^x k(t)dt \leq \int_0^x k(t)l(x-t)dt = 1.$$

Como $k(t) \geq k(x)$ verifica-se que

$$1 = \int_0^x k(t)l(x-t)dt \geq k(x) \int_0^x l(x-t)dt = k(x) \int_0^x l(s)ds$$

e (4.10) fica provado.

e) Suponha-se que (4.13) não é válido para $k(x)$. Então $k(x)$ seria limitado e de (1.2) obtemos quando $x \rightarrow 0^+$

$$1 \leq \sup k(x) \int_0^x l(t)dt \rightarrow 0,$$

o que não é possível. Portanto (4.13) tem de ser válido.

f) (4.14) é consequência imediata de (4.13).

g) Observamos que

$$\int_0^\varepsilon |k'(t)| dt \int_{\varepsilon-t}^\varepsilon l(s)ds = - \int_0^\varepsilon l(s)ds \int_{\varepsilon-s}^\varepsilon k'(t)dt = - \int_0^\varepsilon l(s)[k(t)]_{\varepsilon-s}^\varepsilon ds = - \int_0^\varepsilon l(s)[k(\varepsilon) - k(\varepsilon-s)] =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} l(s)[k(\varepsilon - s) - k(\varepsilon)]ds = \int_0^{\varepsilon} l(s)k(\varepsilon - s)ds - k(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} l(s)ds \leq 1, \quad (4.17)$$

o que prova (4.15). ■

LEMA 4.4. *Seja um núcleo de Sonine $k(x)$ que satisfaz a condição de integrabilidade absoluta (4.7) e $k(\infty) = 0$ e seja $l(x)$ o seu núcleo associado. Então*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_N^{N+a} k(t)dt = 0, \quad \forall a > 0, \quad (4.18)$$

$$\int_0^{\varepsilon} k(t)dt \leq \int_0^{\infty} |k(t + \varepsilon) - k(t)|dt, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (4.19)$$

Se $k(x)$ satisfaz (4.6) e (4.7) então as seguintes propriedades são válidas:

$$\int_0^{\infty} |k(x + h) - k(x)|dx < \infty, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[l(\varepsilon) \int_0^{\infty} |k(x + \varepsilon) - k(x)|dx \right] < \infty, \quad (4.21)$$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^{\varepsilon} l(t)dt \int_{\varepsilon}^{\infty} |k'(t)|dt \right] < \infty. \quad (4.22)$$

DEM. a) Começamos por provar (4.18). Esta relação decorre da desigualdade

$$\left| \int_N^{N+a} k(s) ds \right| \leq a \int_N^{\infty} |k'(t)| dt, \quad (4.23)$$

pela condição de integrabilidade (4.7). A desigualdade (4.23) decorre da seguinte representação óbvia

$$\int_N^{N+a} k(s) ds = - \int_N^{N+a} ds \int_s^{\infty} k'(t) dt.$$

b) Vamos provar (4.20). Temos

$$I_h := \int_0^{\infty} |k(x+h) - k(x)| dx = \int_0^{\infty} dx \left| \int_0^h k'(x+t) dt \right| \leq \int_0^h dt \int_t^{\infty} |k'(s)| ds. \quad (4.24)$$

Seja $h \geq \varepsilon_0$. Então,

$$\begin{aligned} I_h &\leq \int_0^h dt \int_t^{\varepsilon_0} |k'(s)| ds + \int_0^h dt \int_{\varepsilon_0}^{\infty} |k'(s)| ds = - \int_0^h dt \int_t^{\varepsilon_0} k'(s) ds + \int_0^h dt \int_{\varepsilon_0}^{\infty} |k'(s)| ds = \\ &= \int_0^h dt \int_{\varepsilon_0}^{\infty} |k'(s)| ds + \int_0^h k(t) dt - hk(\varepsilon_0) \end{aligned}$$

e como $k(\varepsilon_0)h \geq 0$, resulta que

$$I_h \leq h \int_{\varepsilon_0}^{\infty} |k'(x)| dx + \int_0^h k(t) dt, \quad (4.25)$$

e daqui decorre (4.20).

Seja agora $h \leq \varepsilon_0$. Retomando a expressão (4.24), com $t < h \leq \varepsilon_0$,

$$I_h \leq \int_0^h dt \int_t^\infty |k'(x)| dx \leq \int_0^{\varepsilon_0} \left[\int_t^\infty |k'(x)| dx \right] dt < \infty.$$

c) Para provar (4.21) multiplicamos (4.25) com $h = \varepsilon$ por $l(\varepsilon)$:

$$l(\varepsilon)I_\varepsilon \leq \varepsilon l(\varepsilon) \int_{\varepsilon_0}^\infty |k'(x)| dx + l(\varepsilon) \int_0^\varepsilon k(t) dt,$$

e observamos que por (4.10) o último termo é limitado por 1.

Por (4.14) temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon l(\varepsilon) = 0$, e por (4.7) o integral é finito, o que prova (4.21).

d) A prova de (4.22) é directa:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^\infty |k'(t)| dt &= \int_0^\varepsilon l(t) dt \left[\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} -k'(t) dt + \int_{\varepsilon_0}^\infty |k'(t)| dt \right] = - \int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} k'(t) dt + \\ &+ \int_0^\varepsilon l(t) dt \int_{\varepsilon_0}^\infty |k'(t)| dt, \end{aligned} \tag{4.26}$$

e ainda

$$\int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^\infty |k'(t)| dt = [k(\varepsilon) - k(\varepsilon_0)] \int_0^\varepsilon l(t) dt + C \int_0^\varepsilon l(t) dt. \tag{4.27}$$

Observamos que

$$C = \int_{\varepsilon_0}^\infty |k'(t)| dt, \quad k(\varepsilon) \int_0^\varepsilon l(t) dt \leq 1, \quad k(\varepsilon_0) \int_0^\varepsilon l(t) dt > 0, \quad 0 < t \leq \varepsilon_0.$$

Então

$$\int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^\infty |k'(t)| dt \leq 1 + C \int_0^\varepsilon l(t) dt, \quad 0 < t \leq \varepsilon_0,$$

ou ainda

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^\infty |k'(t)| dt \right] < \infty.$$

e) Falta provar (4.19). Tem-se

$$\int_0^\varepsilon k(t)dt = \int_0^N |k(t)|dt - \int_\varepsilon^N |k(t)|dt = \int_0^{N-\varepsilon} |k(t)|dt + \int_{N-\varepsilon}^N |k(t)|dt - \int_\varepsilon^N |k(t)|dt.$$

Então:

$$\int_0^\varepsilon k(t)dt = \int_0^{N-\varepsilon} [|k(t)| - |k(t+\varepsilon)|]dt + \int_{N-\varepsilon}^N |k(t)|dt. \quad (4.28)$$

Mas

$$|k(t)| - |k(t+\varepsilon)| \leq |k(t) - k(t+\varepsilon)| = |k(t+\varepsilon) - k(t)|,$$

e observamos que $\int_{N-\varepsilon}^N |k(t)|dt \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, por (4.18).

Portanto, quando $N \rightarrow \infty$ obtemos $\int_0^\varepsilon k(t)dt \leq \int_0^\varepsilon |k(t+\varepsilon) - k(t)|dt$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. ■

5. O OPERADOR INVERSO NA FORMA DE MARCHAUD

5.1. A DERIVADA FRACCIONÁRIA DE LIOUVILLE

Na teoria da derivação fraccionária estabelece-se que a derivada fraccionária de Liouville

$$(\mathbb{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5.1)$$

pode ser representada na forma

$$(\mathbb{D}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (5.2)$$

forma conhecida por derivada fraccionária de Marchaud, [SAM.2].

A forma de Marchaud é muito mais conveniente do que a forma de Liouville, quando estudamos a inversão da integração fraccionária no quadro dos espaços L_p , [SAM.2].

Como o nosso objectivo é inverter o operador integral \mathbb{K} em $L_p(\mathbb{R})$, com um núcleo arbitrário de Sonine, é natural procurarmos uma representação de \mathbb{K}^{-1} análoga à representação (5.2).

5.2 REPRESENTAÇÃO DO OPERADOR INVERSO NA FORMA DE MARCHAUD

LEMA 5.1. *Admita-se que o núcleo associado de Sonine $l(x)$ satisfaz as condições em (4.6) e (4.7).*

Então o operador (3.3) pode ser representado por

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = l(\infty)f(x) + \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt, \quad (5.3)$$

pelo menos para funções $f(x)$ para as quais o integral é convergente (por exemplo, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$).

DEM. Em primeiro lugar recordamos que $l(\infty)$ existe pela condição (4.7) e estabiliza no infinito por (4.8): $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = l(\infty)$, e $|l(\infty)| < \infty$.

Então

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} l(t)f(x-t)dt = \int_0^{\infty} l(t)f'(x-t)dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N l(t)f'(x-t)dt. \quad (5.4)$$

Mas $l(t) = l(N) - \int_t^N l'(\xi)d\xi$, pelo que

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^{-1}f)(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left[l(N) - \int_t^N l'(\xi)d\xi \right] f'(x-t)dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N l(N)f'(x-t)dt - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f'(x-t)dt \int_t^N l'(\xi)d\xi = I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Então

$$I_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} l(N) \int_0^N f'(x-t)dt = - \lim_{N \rightarrow \infty} l(N) \int_x^{x-N} f'(s)ds =$$



$$= -\lim_{N \rightarrow \infty} l(N)[f(x-N) - f(x)] = l(\infty)f(x),$$

visto que $f(-\infty) = 0$.

Temos ainda

$$I_2 = -\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f'(x-t) dt \int_t^N l'(\xi) d\xi = -\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N l'(\xi) d\xi \int_0^\xi f'(x-t) dt.$$

Então

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = l(\infty)f(x) + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N l'(t)[f(x-t) - f(x)] dt.$$

que é o resultado desejado. ■

A convergência do integral $\int_0^\infty l'(t)[f(x-t) - f(x)] dt$ é percebida atendendo a que para $f(x)$ adequada se tem $f(x-t) - f(x) \sim Ct$ quando $t \rightarrow 0$.

5.3 O OPERADOR INVERSO TRUNCADO DE MARCHAUD-SONINE

Quando invertermos o operador \mathbb{K} no quadro dos espaços L_p interpretaremos o operador inverso (5.3) como limite do correspondente operador inverso truncado na origem $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}$:

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}^{(L_p)} (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x), \quad (5.5)$$

e

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(\infty)f(x) + \int_\varepsilon^\infty l'(t)[f(x-t) - f(x)] dt, \quad (5.6)$$

que é a forma de Marchaud-Sonine do operador inverso do lado esquerdo. O objectivo é provar que

$$\mathbb{K}^{-1}\mathbb{K}\varphi(x) = \varphi(x), \quad \text{para } \varphi \in L_p(\mathbb{R}),$$

para um núcleo arbitrário de Sonine que satisfaça condições bastante gerais, e tratando o limite em (5.5) como limite forte, mais precisamente, como limite na norma de L_p .

5.4 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DA COMPOSIÇÃO $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}$

TEOREMA 5.2. *Admita-se que um núcleo de Sonine $k(x)$ e o seu núcleo associado $l(x)$ satisfazem as condições (4.6) e (4.7) e a condição (2.22). Então o operador truncado de Marchaud-Sonine $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}$ aplicado a $f(x) = (\mathbb{K}\varphi)(x)$, $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, pode ser representado por*

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty N_\varepsilon(t)\varphi(x-t)dt, \quad (5.7)$$

com

$$N_\varepsilon(s) = l(\infty)k(s) + \int_\varepsilon^\infty [k_+(s-t) - k(s)]l'(t)dt, \quad (5.8)$$

$$e \quad k_+(s) = \begin{cases} k(s), & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

DEM. Começamos por recordar que pelo Teorema 2.4 o operador de convolução,

$$(\mathbb{K}\varphi)(x) = \int_{-\infty}^x k(x-t)\varphi(t)dt,$$

existe q.s. no caso de $\varphi(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$.

Então $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}\varphi$ existe q.s. como convolução de uma função do espaço de Orlicz com um núcleo integrável $l'(x) \in \mathbf{L}_1(\varepsilon, \infty)$, o que se pode deduzir pela desigualdade integral de Minkowski (2.7), válida em espaços de Orlicz.

Seja então $f = \mathbb{K}\varphi$. Obtemos

$$\begin{aligned} f(x-t) - f(x) &= \int_0^\infty k(s)\varphi(x-t-s)ds - \int_0^\infty k(s)\varphi(x-s)ds = \\ &= \int_t^\infty k(s-t)\varphi(x-s)ds - \int_0^\infty k(s)\varphi(x-s)ds. \end{aligned}$$

Então

$$f(x-t) - f(x) = \int_0^\infty [k_+(s-t) - k(s)]\varphi(x-s)ds, \quad (5.9)$$

com a definição

$$k_+(s) = \begin{cases} k(s), & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Utilizando a expressão (5.6) para $(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x)$ resulta,

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(\infty)(\mathbb{K}\varphi)(x) + \int_\varepsilon^\infty \left\{ \int_0^\infty [k_+(s-t) - k(s)]\varphi(x-s)ds \right\} l'(t)dt. \quad (5.11)$$

Trocamos a ordem de integração, justificando esta troca mais tarde:

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(\infty)(\mathbb{K}\varphi)(x) + \int_0^\infty \varphi(x-s)ds \int_\varepsilon^\infty [k_+(s-t) - k(s)]l'(t)dt,$$

e atendendo a $(\mathbb{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty k(s)\varphi(x-s)ds$ obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) &= \int_0^\infty \varphi(x-s)ds \int_\varepsilon^\infty [k_+(s-t) - k(s)]l'(t)dt + l(\infty) \int_0^\infty k(s)\varphi(x-s)ds = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_\varepsilon^\infty [k_+(s-t) - k(s)]l'(t)dt + l(\infty)k(s) \right\} \varphi(x-s)ds. \end{aligned}$$

Se escrevermos

$$N_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^\infty [k_+(s-t) - k(s)]l'(t)dt + l(\infty)k(s),$$

obtemos o resultado procurado

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty N_\varepsilon(t)\varphi(x-t)dt.$$

Temos ainda de justificar a troca da ordem de integração em (5.11).

Pelo Teorema de Fubini é suficiente provar a convergência, para quase todo o x , do seguinte integral:

$$I(x) := \int_0^\infty |\varphi(x-s)|ds \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| |k_+(s-t) - k(s)|dt. \quad (5.12)$$

Decompondo o domínio de integração e tendo em atenção a definição de $k_+(s)$,

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_0^\varepsilon |\varphi(x-s)| ds \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| |k(s)| dt + \int_\varepsilon^\infty |\varphi(x-s)| ds \int_s^\infty |l'(t)| |k(s)| dt + \\
 &+ \int_\varepsilon^\infty |\varphi(x-s)| ds \int_\varepsilon^s |l'(t)| |k(s-t) - k(s)| dt = I_1 + I_2 + I_3 .
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Então

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &\leq \int_0^\varepsilon |\varphi(x-s)| ds \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| |k(s)| dt + \int_\varepsilon^\infty |\varphi(x-s)| ds \int_s^\infty |l'(t)| |k(s)| dt = \\
 &= \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \left[\int_0^\varepsilon |k(s)\varphi(x-s)| ds + \int_\varepsilon^\infty |k(s)\varphi(x-s)| ds \right] = \\
 &= \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \int_0^\infty |k(s)\varphi(x-s)| ds = C_\varepsilon \int_0^\infty |k(s)\varphi(x-s)| ds,
 \end{aligned}$$

onde $C_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt$.

Quanto ao termo I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_\varepsilon^\infty |\varphi(x-s)| ds \int_\varepsilon^s |l'(t)| |k(s-t) - k(s)| dt = \\
 &= \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \int_\varepsilon^\infty |\varphi(x-s)| |k(s-t) - k(s)| ds \leq \\
 &\leq \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \int_t^\infty |\varphi(x-s)| [|k(s-t)| + |k(s)|] ds.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Podemos ainda escrever:

$$I_3 \leq \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \int_t^\infty |\varphi(x-s)| |k(s-t)| ds + \int_\varepsilon^\infty |l'(t)| dt \int_t^\infty |\varphi(x-s)| k(s) ds.$$

Pelo Teorema 2.4 existe o integral

$$g(x) = \int_0^\infty |\varphi(x-s)k(s)| ds \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbb{R}).$$

Então, com $u = s + t$:

$$g(x-t) = \int_0^{\infty} |\varphi(x-t-s)k(s)| ds = \int_t^{\infty} |k(u-t)\varphi(x-u)| du,$$

ou,

$$g(x-t) = \int_t^{\infty} |k(s-t)\varphi(x-s)| ds.$$

Por outro lado, como $0 < \varepsilon < t$, temos ainda a relação,

$$g(x) = \int_0^{\infty} |\varphi(x-s)k(s)| ds > \int_t^{\infty} |\varphi(x-s)k(s)| ds.$$

Portanto,

$$I_3 \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} |l'(t)| g(x-t) dt + g(x) \int_{\varepsilon}^{\infty} |l'(t)| dt. \quad (5.15)$$

Os integrais em (5.15) são convergentes devido a (4.7) e à limitação de $g \in L_{\Phi}(\mathbb{R})$. Portanto $I(x)$ é convergente e a troca da ordem de integração em (5.11) é válida. ■

5.5. PROPRIEDADES DO NÚCLEO $N_{\varepsilon}(x)$

LEMA 5.3. *Admita-se que um núcleo de Sonine $k(x)$ satisfaz as condições (4.6) e (4.7). Então, além de (5.8), o núcleo $N_{\varepsilon}(x)$ admite as seguintes representações equivalentes:*

$$N_{\varepsilon}(s) = l(\varepsilon)[k(s) - k_+(s-\varepsilon)] + \frac{d}{ds} \int_{\varepsilon}^s l(t)k_+(s-t)dt, \quad (5.16)$$

$$N_{\varepsilon}(s) = l(\varepsilon)[k(s) - k(s-\varepsilon)] - \int_{s-\varepsilon}^s l(s-t)k'(t)dt, \quad s > \varepsilon \quad (5.17)$$

$$N_{\varepsilon}(s) = l(\varepsilon)k(s) + \int_{\varepsilon}^s l'(t)k_+(s-t)dt, \quad (5.18)$$

$$N_{\varepsilon}(s) = \begin{cases} \int_0^{\varepsilon} l'(t)[k(s) - k(s-t)]dt, & s > \varepsilon, \\ l(\varepsilon)k(s), & 0 < s < \varepsilon. \end{cases} \quad (5.19)$$

DEM.

a) De (5.8) obtém-se (5.18) :

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= \int_\varepsilon^s k_+(s-t)l'(t)dt - k(s)[l(t)]_\varepsilon^s - k(s)[l(t)]_s^\infty + l(\infty)k(s) = \\ &= l(\varepsilon)k(s) + \int_\varepsilon^s k_+(s-t)l'(t)dt. \end{aligned}$$

b) De (5.18) deduzimos (5.16). Derivando em ordem a s

$$\frac{d}{ds} \int_0^{s-\varepsilon} l(s-t)k_+(t)dt = l(\varepsilon)k_+(s-\varepsilon) + \int_\varepsilon^s l'(t)k_+(s-t)dt. \quad (5.20)$$

Então

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= l(\varepsilon)k(s) + \frac{d}{ds} \int_0^{s-\varepsilon} l(s-t)k_+(t)dt - l(\varepsilon)k_+(s-\varepsilon) = \\ &= l(\varepsilon)[k(s) - k_+(s-\varepsilon)] + \frac{d}{ds} \int_\varepsilon^s l(t)k_+(s-t)dt. \end{aligned}$$

c) Vamos provar (5.19).

Para $0 < s < \varepsilon$ temos a partir de (5.16) :

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= l(\varepsilon)[k(s) - k_+(s-\varepsilon)] + \frac{d}{ds} \int_\varepsilon^s l(t)k_+(s-t)dt = \\ &= l(\varepsilon)k(s). \end{aligned}$$

Para $s > \varepsilon$ temos a partir de (5.8) :

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= \int_\varepsilon^s [k(s-t) - k(s)]l'(t)dt - \int_s^\infty k(s)l'(t)dt + l(\infty)k(s). \end{aligned} \quad (5.21)$$

E ainda

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= \int_\varepsilon^s [k(s-t) - k(s)]l'(t)dt + k(s)l(s) = \\ &= \int_0^s [k(s-t) - k(s)]l'(t)dt - \int_0^\varepsilon [k(s-t) - k(s)]l'(t)dt + k(s)l(s). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Mas por (4.2) do Lema 4.1:

$$\int_0^s [k(s-t) - k(s)]l'(t)dt = -k(s)l(s),$$

e obtemos (5.19).

d) Provamos (5.17) a partir de (5.19). Para $s > \varepsilon$ tem-se

$$N_\varepsilon(s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_\delta^\varepsilon k(s)l'(t)dt - \int_\delta^\varepsilon k(s-t)l'(t)dt \right].$$

Integramos o segundo integral por partes após a mudança de variável $u = s - t$:

$$\begin{aligned} \int_\delta^\varepsilon k(s-t)l'(t)dt &= \int_{s-\varepsilon}^{s-\delta} k(t)l'(s-t)dt = \\ &= [-k(s-\delta)l(\delta) + k(s-\varepsilon)l(\varepsilon)] + \int_{s-\varepsilon}^{s-\delta} k'(t)l(s-t)dt. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(s) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ k(s)[l(\varepsilon) - l(\delta)] - [k(s-\varepsilon)l(\varepsilon) - k(s-\delta)l(\delta)] - \int_{s-\varepsilon}^{s-\delta} k'(t)l(s-t)dt \right\} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ l(\delta)[k(s-\delta) - k(s)] + l(\varepsilon)[k(s) - k(s-\varepsilon)] - \int_{s-\varepsilon}^{s-\delta} k'(t)l(s-t)dt \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Atendendo a que $k(s)$ é derivável para quase todo o $s > 0$ e por (4.14) :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\delta l(\delta) \frac{[k(s-\delta) - k(s)]}{\delta} \right] = (0)k'(s) = 0,$$

e da fórmula (5.23) obtemos a representação (5.17). ■

Vamos ver que $N_\varepsilon(s)$ tem as mesmas propriedades de aproximação à identidade que a família $a_\varepsilon(t)$ do Lema 2.3.

LEMA 5.4. *Se um núcleo de Sonine $k(x)$ satisfaz (4.6) e (4.7) então $N_\varepsilon(x)$ tem as propriedades do núcleo de aproximação à identidade (ie. a convolução de $N_\varepsilon(x)$ e $\varphi(x)$ é um operador de aproximação à identidade):*

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_0^\infty |N_\varepsilon(x)|dx = M < \infty, \quad (5.24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} N_{\varepsilon}(t) dt = 1, \quad (5.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} |N_{\varepsilon}(t)| dt = 0, \quad \delta > 0. \quad (5.26)$$

DEM. a) Por (5.19) obtemos

$$\int_0^{\infty} |N_{\varepsilon}(s)| ds = \int_0^{\varepsilon} |l(\varepsilon)k(s)| ds + \int_{\varepsilon}^{\infty} |N_{\varepsilon}(s)| ds, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (5.27)$$

Por (4.10) :

$$l(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} k(s) ds \leq 1, \quad 0 < s \leq \varepsilon_0.$$

Por (5.17) :

$$N_{\varepsilon}(s) = l(\varepsilon)[k(s) - k(s - \varepsilon)] - \int_{s-\varepsilon}^s l(s-t)k'(t) dt, \quad s > \varepsilon,$$

e,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |N_{\varepsilon}(s)| ds \leq l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\infty} |k(s) - k(s - \varepsilon)| ds + \int_{\varepsilon}^{\infty} ds \int_{s-\varepsilon}^s |l(s-t)k'(t)| dt. \quad (5.28)$$

Por (4.21) :

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\infty} |k(s) - k(s - \varepsilon)| ds \right] < \infty.$$

Quanto ao segundo termo do membro direito da desigualdade (5.28), que designamos por I , obtemos, por inversão da ordem de integração,

$$I := \int_{s-\varepsilon}^s dt \int_{\varepsilon}^{\infty} |l(s-t)||k'(t)| ds = \int_{s-\varepsilon}^s |k'(t)| dt \int_{\varepsilon}^{\infty} |l(s-t)| ds.$$

Decompondo o domínio de integração tem-se:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\varepsilon} |k'(t)| dt \int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds + \int_{\varepsilon}^{\infty} |k'(t)| dt \int_{t}^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds = \\ &= \int_0^{\varepsilon} |k'(t)| dt \int_{\varepsilon-t}^{\varepsilon} |l(s)| ds + \int_{\varepsilon}^{\infty} |k'(t)| dt \int_0^{\varepsilon} |l(s)| ds. \end{aligned}$$

(5.29)

Por (4.22) do Lema 4.4

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^\varepsilon l(t) dt \int_\varepsilon^\infty |k'(t)| dt \right] < \infty,$$

o segundo termo de (5.29) é uniformemente limitado.

Por (4.15) do Lema 4.3

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^\varepsilon |k'(t)| dt \int_{\varepsilon-t}^\varepsilon l(s) ds \right] \leq 1,$$

o primeiro termo de (5.29) é também uniformemente limitado. Fica estabelecido o resultado (5.24).

b) Para provar (5.25) utilizamos a representação (5.16).

Para o primeiro termo em (5.16) temos:

$$\int_0^\infty [k(s) - k_+(s - \varepsilon)] ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_0^a k(s) ds - \int_\varepsilon^a k(s - \varepsilon) ds \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-\varepsilon}^a k(s) ds = 0.$$

Designando

$$\mathbb{A}_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^s l(t) k(s-t) dt, \quad s > \varepsilon, \quad \mathbb{A}_\varepsilon(\varepsilon) = 0,$$

(5.30)

$$\int_0^\infty N_\varepsilon(s) ds = \int_\varepsilon^\infty \frac{d}{ds} \mathbb{A}_\varepsilon(s) ds = [\mathbb{A}_\varepsilon(s)]_\varepsilon^\infty = \mathbb{A}_\varepsilon(\infty) - \mathbb{A}_\varepsilon(\varepsilon) = \mathbb{A}_\varepsilon(\infty).$$

(5.31)

Resta provar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{A}_\varepsilon(\infty) = 1$. De facto,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\varepsilon(\infty) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{A}_\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_0^s l(t) k(s-t) dt - \int_0^\varepsilon l(t) k(s-t) dt \right] = \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon l(t) k(s-t) dt. \end{aligned}$$

(5.32)

Se $k(\infty) = 0$ então a tese fica provada quando $s \rightarrow \infty$. De facto, por (4.7) e (4.8), $|k(\infty)| = k(\infty) < \infty$ pelo que:

$$\left| \int_0^\varepsilon l(t)k(s-t)dt \right| \leq \int_0^\varepsilon l(t)|k(s-t)|dt \leq \sup_{0 < t < \varepsilon} |k(s-t)| \int_0^\varepsilon l(t)dt.$$

Mas, $0 < t < \varepsilon \Rightarrow s > s-t > s-\varepsilon$ ou $s-\varepsilon < s_\varepsilon < s$, e $\sup_{0 < t < \varepsilon} |k(s-t)| =$

$$= \sup_{s-\varepsilon < s_\varepsilon < s} |k(s_\varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow \infty, \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon l(t)k(s-t)dt = 0.$$

Portanto, $\mathbb{A}_\varepsilon(\infty) = 1$.

Se $k(\infty) \neq 0$ então $\mathbb{A}_\varepsilon(\infty) \neq 1$, mas $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{A}_\varepsilon(\infty) = 1$.

c) Vamos provar (5.26).

Utilizando a representação (5.17) de $N_\varepsilon(s)$ e observando que $\varepsilon < \delta < s$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\delta^\infty |N_\varepsilon(s)|ds &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\delta^\infty l(\varepsilon)|k(s) - k(s-\varepsilon)|ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\delta^\infty ds \int_{s-\varepsilon}^s |l(s-t)k'(t)|dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\delta^\infty l(\varepsilon)|k(s) - k(s-\varepsilon)|ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\delta^\infty ds \int_0^\varepsilon |l(t)k'(s-t)|dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Vamos estimar A_ε :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &\leq l(\varepsilon) \int_0^\infty |k(s+\varepsilon) - k(s)|ds = l(\varepsilon) \int_0^\infty ds \left| \int_0^\varepsilon k'(s+t)dt \right| \leq \\ &\leq l(\varepsilon) \int_0^\varepsilon dt \int_0^\infty |k'(s+t)|ds. \end{aligned}$$

Com $u = s+t$, atendendo a (4.7) e recordando que $s > \delta > \varepsilon$,

$$A_\varepsilon \leq l(\varepsilon) \int_0^\varepsilon dt \int_\delta^\infty |k'(s+t)|ds = l(\varepsilon) \int_0^\varepsilon dt \int_{t+\delta}^\infty |k'(s)|ds \leq Cl(\varepsilon) \int_0^\varepsilon dt = C\varepsilon l(\varepsilon). \quad (5.34)$$

Portanto, $A_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, por (4.14).

Vamos estimar B_ε :

$$B_\varepsilon = \int_\delta^\infty ds \int_0^\varepsilon |l(t)k'(s-t)|dt = \int_0^\varepsilon l(t)dt \int_\delta^\infty |k'(s-t)|ds = \int_0^\varepsilon l(t)dt \int_{\delta-t}^\infty |k'(s)|ds.$$

Mas $0 < t < \varepsilon \Rightarrow \delta - \varepsilon < \delta - t < \delta$, e se $\delta \geq 2\varepsilon$ então $\delta - t \geq \varepsilon$ ou $\delta - t > 0$.

Portanto, para $\delta \geq 2\varepsilon$ temos por (4.7) que

$$\int_{\delta-t}^{\infty} |k'(s)| ds = C(\delta) < \infty,$$

e por (4.14),

$$B_\varepsilon \leq C(\delta) \int_0^\varepsilon l(t) dt \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B_\varepsilon = 0. \quad \blacksquare$$

6. INVERSÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE SONINE

6.1 O TEOREMA DA INVERSÃO

Os Teoremas 6.1 e 6.3 desta secção representam a vasta generalização dos resultados do cálculo fraccionário com o núcleo de potência, [SAM.2], ao caso de um núcleo arbitrário às diferenças.

De facto, a parte principal desta generalização foi feita no Lema 5.4, no qual mostrámos que $N_\varepsilon(x)$ é um núcleo de aproximação à identidade.

TEOREMA 6.1 *Seja um núcleo de Sonine $k(x)$ que satisfaz as condições (4.6), (4.7) e (2.22). Então*

$$\mathbb{K}^{-1}\mathbb{K}\varphi(x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}), \quad 1 < p < \infty, \quad (6.1)$$

com

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = l(\infty)f(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \int_\varepsilon^\infty [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt. \quad (6.2)$$

DEM. Recorde-se que

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x).$$

Pelo Teorema 5.2 tem-se a representação (5.7)

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}\mathbb{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty N_\varepsilon(t)\varphi(x-t)dt,$$

representação que é válida com as hipóteses do presente teorema.

Pelo Lema 5.4 o operador,

$$\mathbb{A}_\varepsilon \varphi(x) = \int_0^\infty N_\varepsilon(t) \varphi(x-t) dt,$$

é uma aproximação à identidade no espaço de Banach $X = \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$ e podemos aplicar o resultado do Lema 2.3:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbb{A}_\varepsilon \varphi - \varphi\|_{\mathbf{L}_p} = 0,$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} \mathbb{K} \varphi - \varphi\|_{\mathbf{L}_p} = 0, \quad \varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}), \quad 1 < p < \infty,$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} \mathbb{K} \varphi(x) = \mathbb{K}^{-1} \mathbb{K} \varphi(x) = \varphi(x). \quad \blacksquare$$

6.2 O CONTRADOMÍNIO DO OPERADOR INTEGRAL DE SONINE

No Teorema 6.3 vamos caracterizar o contradomínio do operador \mathbb{K} ,

$$\mathbb{K}(\mathbf{L}_p) = \{f : f(x) = (\mathbb{K}\varphi)(x), \quad \varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})\}, \quad (6.3)$$

admitindo que as condições (4.6), (4.7) e (2.22) são válidas para o núcleo $k(x)$. Este contradomínio está imerso num certo espaço de Orlicz. Nalguns casos, como já foi mencionado em 2.3, o contradomínio pode permanecer em $\mathbf{L}_q(\mathbb{R})$, nomeadamente se existir $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$m(x) = x^{\alpha-1} k(x) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbb{R}_+} |m(x)| < \infty, \quad (6.4).$$

No caso geral de um espaço de Orlicz com a função de Young Φ definida por (2.23), é preciso verificar se Φ tem a propriedade Δ_2 . De facto, temos de utilizar o Lema 2.3 relativo à aproximação à identidade, o qual depende da invariância da norma à translação, da continuidade média em relação à norma e da desigualdade integral de Minkowski. A continuidade média só é verificada se for válida a condição Δ_2 .

LEMA 6.2. *Admita-se que o núcleo $k(x)$ satisfaz (4.7) e (2.22). Então a função de Young definida por (2.23) satisfaz a condição Δ_2 se e só se,*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^{\infty} k^*(t) \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{p}} dt}{\int_0^x k(t) dt} < \infty, \quad (6.5)$$

DEM. A condição Δ_2 , isto é, $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$, $K > 0$, é equivalente à condição, [KUF], p.138,

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)} \right] < \infty, \quad (6.6)$$

ou, de forma equivalente

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\Phi^{-1}(x)}{x \frac{d}{dx} \Phi^{-1}(x)} \right] < \infty. \quad (6.7)$$

Usando (2.23) e (2.25) obtemos

$$\Phi^{-1}(x) = p \left[x^{\frac{1}{p}-1} k^{**}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{k^*(s)}{s^{\frac{1}{p}}} ds \right],$$

e

$$\frac{d}{dx} \Phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p}-2} k^{**}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (6.8)$$

Então (6.7) reduz-se a (6.5). ■

No Teorema 6.3 que se segue usaremos a notação seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbb{R}) &= \mathbf{L}_{\Phi}(\mathbb{R}) \text{ se } k(x) \text{ satisfaz (6.5) e (2.22);} \\ \mathbf{Y}(\mathbb{R}) &= \mathbf{L}_q(\mathbb{R}) \text{ se } k(x) \text{ satisfaz (6.4).} \end{aligned} \quad (6.9)$$

TEOREMA 6.3 Admita-se que um núcleo $k(x)$ satisfaz (4.6), (4.7), (6.5), (2.22). Então $f(x) \in \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$ se e só se $f(x) \in \mathbf{Y}(\mathbb{R})$, e se for satisfeita uma das seguintes condições:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{K}_{\varepsilon}^{-1} f \in \mathbf{L}_p \quad \text{ou} \quad \sup_{\varepsilon > 0} \|\mathbb{K}_{\varepsilon}^{-1} f\|_{\mathbf{L}_p} < \infty. \quad (6.10)$$

DEM. a) **Condições necessárias**

Seja $f = \mathbb{K}\varphi \in \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$, $\varphi \in \mathbf{L}_p$.

Então:

- 1) se $k(x)$ satisfaz (6.4) tem-se pelo Teorema de Hardy-Littlewood (cf. Teor.2.3) que $f(x) \in \mathbf{L}_q(\mathbb{R}) = \mathbf{Y}(\mathbb{R})$;
- 2) se $k(x)$ satisfaz (6.5), (2.22) tem-se pelo Teorema de O'Neil (cf. Teor. 2.4) que $f(x) \in \mathbf{L}_\phi(\mathbb{R}) = \mathbf{Y}(\mathbb{R})$.

Nos dois casos o operador \mathbb{K} é limitado de acordo com estes teoremas. A existência do limite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f \in \mathbf{L}_p,$$

é consequência do Teorema 6.1, mais precisamente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} \mathbb{K} \varphi)(x) = \varphi \in \mathbf{L}_p.$$

A limitação uniforme

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f\|_{\mathbf{L}_p} < \infty,$$

é consequência da representação (5.7) e da propriedade (5.24).

De facto pelo teorema de Young temos

$$\|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f\|_{\mathbf{L}_p} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{L}_p} \int_0^\infty |N_\varepsilon(t)| dt \leq M \|\varphi\|_{\mathbf{L}_p} < \infty.$$

Portanto

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f\|_{\mathbf{L}_p} < \infty.$$

b) Condições suficientes

Seja $f \in \mathbf{Y}(\mathbb{R})$.

Em primeiro lugar provamos que com as hipóteses do Teorema existe uma função $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$ tal que,

$$f(x) - f(x-h) = (\mathbb{K}\varphi)(x) - (\mathbb{K}\varphi)(x-h), \quad \forall h \in \mathbb{R}. \quad (6.11)$$

Seja

$$(A_h \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(x-t) \varphi(t) dt, \quad (6.12)$$

com

$$a_h(t) = k_+(t) - k_+(t-h).$$

(6.13)

Pela propriedade (4.20)

$$\int_0^{\infty} |k(t+h) - k(t)| dt = \int_h^{\infty} |k(t) - k(t-h)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |k_+(t) - k_+(t-h)| dt < \infty.$$

Portanto $a_h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ e pelo Teorema de Young deduz-se que,

$$\|A_h \varphi\|_{L_p} \leq \|a_h\|_{L_1} \|\varphi\|_{L_p}.$$

Observamos que

$$(A_h \varphi)(x) = (\mathbb{K}\varphi)(x) - (\mathbb{K}\varphi)(x-h). \quad (6.13')$$

visto que

$$(A_h \varphi)(x) = \int_0^{\infty} k(s)\varphi(x-s) ds - \int_0^{\infty} k(s)\varphi(x-s-h) ds.$$

Então:

$$(A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = (\mathbb{K} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) - (\mathbb{K} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x-h).$$

Como os operadores são de convolução, comutam:

$$(A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} A_h f)(x) = (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} \mathbb{K} f)(x) - (\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} \mathbb{K} f)(x-h), \quad (6.14)$$

pelo menos para funções f adequadas, por exemplo $f \in C_0^\infty$.

Utilizando (5.7) temos

$$(A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = \int_0^{\infty} N_\varepsilon(t) [f(x-t) - f(x-t-h)] dt, \quad (6.15)$$

pelo menos para $f \in C_0^\infty$.

O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $Y(\mathbb{R})$, [KUF], p.73. No caso de ser $Y(\mathbb{R}) = L_\Phi(\mathbb{R})$ isto ainda é verdade se for válida a condição Δ_2 . Então como os operadores em (6.15) são limitados em L_p , conclui-se que (6.15) é válido em todo o espaço $L_p(\mathbb{R})$, isto é, para toda a função $f \in L_p(\mathbb{R})$.

Agora passamos ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (6.15), na norma de Y , o que é possível visto que o membro direito de (6.15) converge para $f(x) - f(x-h)$

pelos Lemas 5.4 e 2.3.

Portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(Y)} (A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = f(x) - f(x - h). \quad (6.16)$$

Suponhamos agora que é válida a primeira condição suficiente, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p)} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f \in L_p$.

Pela limitação do operador A_h em L_p existe o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p)} (A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = A_h \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p)} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f \right)(x) = (A_h \varphi)(x), \text{ com } \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p)} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f. \quad (6.17)$$

Como $A_h \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f$ converge na norma de Y por (6.16) e na norma de L_p por (6.17), as funções limite coincidem q.s. e chegamos à relação (6.11).

Admita-se agora que é válida a segunda condição suficiente

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f\|_{L_p} < \infty.$$

Sabemos que os conjuntos limitados em $L_p, p > 1$, são fracamente compactos, isto é, para cada sucessão nestes conjuntos existe uma subsucessão fracamente convergente. Além disso, qualquer operador limitado é fraco e fortemente contínuo.

Escolhemos então uma subsucessão $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow 0$, tal que $\mathbb{K}_{\varepsilon_k}^{-1} f$ converge fracamente em L_p :

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0}^w A_h (\mathbb{K}_{\varepsilon_k}^{-1} f)(x) = A_h \left(\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0}^w \mathbb{K}_{\varepsilon_k}^{-1} f \right)(x) = (A_h \varphi)(x) = g(x) = f(x) - f(x - h),$$

onde \lim^w significa limite fraco.

Portanto somos de novo conduzidos a (6.11).

É preciso observar que a relação (6.11) implica indirectamente $f(x) = (\mathbb{K}\varphi)(x)$ visto que as funções com diferenças iguais

$$[f(x) - f(x - h)] = [(\mathbb{K}\varphi)(x) - (\mathbb{K}\varphi)(x - h)],$$

só podem diferir de uma constante, a qual no nosso caso até pode ser zero. ■

7. EXISTÊNCIA DE NÚCLEOS DE SONINE

7.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A EXISTÊNCIA DE NÚCLEOS DE SONINE

Observe-se que da aplicação da transformação de Laplace à equação (1.2) resulta que,

$$s\mathcal{L}k(s)\mathcal{L}l(s) \equiv 1, \quad \text{com} \quad \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}_+ . \quad (7.1)$$

Esta relação permite obter vários exemplos de núcleos de Sonine em forma finita. O teorema seguinte, [WIC], dá uma condição suficiente para que $k(x)$ seja um núcleo de Sonine.

TEOREMA 7.1 *Seja,*

$$k(x) = a(x)x^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \quad (7.2)$$

Então, para cada $\alpha \in (0, 1)$ existe uma função analítica única,

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

tal que,

$$l(x) = b(x)x^{-\alpha}, \quad (7.3)$$

e $l(x)$ e $k(x)$ são núcleos de Sonine associados.

A série de $b(x)$ converge onde a série de $a(x)$ convergir.

Os coeficientes b_k são determinados de modo único a partir do seguinte sistema algébrico triangular

$$a_0 b_0 = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi},$$
$$\sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} \Gamma(k+1-\alpha) \Gamma(\alpha+n-k) = 0, \quad n \geq 1. \quad (7.4)$$

OBS. 7.2 O Teorema 7.1 foi demonstrado em [WIC] via integração curvilínea no plano complexo. Mas a redução da condição (1.2) ao sistema (7.4) pode ser

feita de maneira directa substituindo (7.2) e (7.3) em (1.2) e fazendo $t = x\xi$:

$$\int_0^1 [1/\xi^\alpha (1-\xi)^{1-\alpha}] \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k (1-\xi)^k \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \xi^j d\xi \equiv 1. \quad (7.5)$$

Multiplicando as duas séries de potências e igualando os coeficientes chegamos a (7.4) depois de cálculo directo.

O Teorema 7.1 refere-se a núcleos que são semelhantes a funções potência perto da origem. A classe de núcleos de Sonine é mais vasta e inclui, por exemplo, funções com singularidades logarítmicas na origem. Mais precisamente, funções do tipo

$$k(x) = h(x)x^{\alpha-1} \prod_{k=1}^n [\ln \dots \ln(\gamma/x)]^{\nu_k}, \quad (7.6)$$

onde $\alpha \in (0,1)$, $h(x) \in AC(\mathbb{R})$, $h(0) \neq 0$, $\nu_k \in \mathbb{R}$ se $k = 2, \dots, n$, e $\nu_1 \in \mathbb{Z}$ e γ suficientemente grande para que $\ln(\gamma/x) > 0$, são núcleos de Sonine, [RUB.1].

7.2 EXEMPLOS DE NÚCLEOS DE SONINE

Vamos apresentar exemplos de núcleos que satisfazem (1.2).

EXEMPLO 1. [SON.1],[SON.2]. Funções do tipo de Bessel:

$$k(x) = \frac{J_{-\nu}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^\nu} \quad \text{e} \quad l(x) = \frac{I_{\nu-1}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{1-\nu}}, \quad (7.7)$$

ou, simetricamente

$$k(x) = \frac{I_{-\nu}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^\nu} \quad \text{e} \quad l(x) = \frac{J_{\nu-1}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{1-\nu}}. \quad (7.8)$$

J_ν é a função de Bessel de primeira espécie $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$ e I_ν é a função de Bessel de segunda espécie $I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$, e $0 < \nu < 1$.

EXEMPLO 2. Funções potência-exponencial

$$k(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}, \quad \gamma \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (7.9)$$

$$l(x) = \gamma^\alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty (e^{-\gamma t}/t^{1+\alpha}) dt. \quad (7.10)$$

Neste caso $\mathcal{L}k(s) = \frac{1}{(\lambda+s)^\alpha}$, $\mathcal{L}l(s) = \frac{(\lambda+s)^\alpha}{s}$ e obtemos (7.1) e (1.2).

EXEMPLO 3. Funções do tipo de Kummer

$$k(x) = x^{\alpha-1} \Phi(\beta, \alpha; -\gamma x), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (7.11)$$

$$l(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} x^{-\alpha} \Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x), \quad (7.12)$$

onde Φ é a função de Kummer $\Phi(\beta, \alpha; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\alpha)_k} \frac{z^k}{k!}$. Referimos [SAM.2], fórmulas (37.1) e (37.31) que permitem obter (1.2) para $k(x)$ e $l(x)$ em (7.11) e (7.12).

EXEMPLO 4.

$$k(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}}, \quad a > 0, \quad (7.13)$$

$$l(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - b e^{b^2 x} fcer(b\sqrt{x}), \quad b = a\Gamma(\alpha), \quad (7.14)$$

são núcleos associados de Sonine, verificável via transformação de Laplace. Observamos que $fcer(x)$ é a função complementar da função erro $fer(x)$:

$$fcer(x) = 1 - fer(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

EXEMPLO 5.

$$k(x) = 1 - \frac{a}{x^{1-\alpha}}, \quad a > 0,$$

(7.15)

$$l(x) = bx^{-\alpha} E_{1-\alpha, 1-\alpha}(bx^{1-\alpha}), \quad b = a\Gamma(\alpha),$$

(7.16)

onde $E_{\alpha, \beta}(x)$ é a função de Mittag-Leffler $E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$

Neste caso a condição de Sonine também é verificável via transformação de Laplace, [SAM.2], fórmula (1.93).

Este núcleo $l(x)$ e as suas derivadas crescem exponencialmente quando $x \rightarrow \infty$.

EXEMPLO 6.

$$k(x) = \frac{\ln(\frac{1}{x}) + A}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}},$$

(7.17)

$$l(x) = \mu_{\alpha, h}(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^{t-\alpha} e^{ht}}{\Gamma(t+1-\alpha)} dt, \quad h = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - A,$$

(7.18)

onde $\mu_{\alpha, h}(x)$ é a função de Volterra, [VOL.1], [VOL.2], $\mu_{\alpha, h}(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^{t-\alpha} e^{ht}}{\Gamma(t+1-\alpha)} dt$.

Neste exemplo a condição de Sonine (1.2) deriva da fórmula

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \mu_{\alpha, h}(x) dx = \frac{s^{\alpha-1}}{(\ln s) - h}, \quad s > e^h,$$

(7.19)

que se verifica directamente.

Pela expressão assintótica da função de Volterra na origem, [VOL.2], obtemos

$$l'(x) = \mu_{\alpha+1, h}(x) < 0,$$

perto da origem, pelo que $l(x)$ satisfaz (4.6). Porém, $\mu_{\alpha, h}(x)$ cresce exponencialmente no infinito ($\sim e^{xe^h}$) e o mesmo acontece com a derivada.

OBS. 7.3. Como se vê pelos exemplos apresentados, o núcleo $l(x)$ pode crescer no infinito e até mesmo de forma exponencial, embora $k(x)$ seja decrescente, e neste caso não é verdade que $l'(x) \in \mathbf{L}_1(\varepsilon, \infty)$, pelo que não podemos usar a fórmula (6.2) para $(\mathbb{K}^{-1}f)(x)$.

Portanto o teorema da inversão, Teorema 6.1, não é aplicável. Porém, a fórmula (6.2) pode ser modificada de modo a ser válida para funções $f(x)$ com suporte em $(-N, \infty)$, $N < \infty$, o que será feito no Capítulo II. Em [RUB.2]

foi obtida uma fórmula análoga a (6.2) num intervalo finito para o núcleo (7.17). A fórmula (6.2) é aplicável, por exemplo, aos núcleos (7.9) e (7.13). No caso de (7.9) a aplicação de (6.2) à equação

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x e^{-\gamma(x-t)}(x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x), \quad (7.20)$$

com soluções $\varphi(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, conduz a

$$\varphi(x) = \gamma^\alpha f(x) + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \int_{\varepsilon}^{\infty} [f(x) - f(x-t)] t^{-1-\alpha} e^{-\gamma t} dt. \quad (7.21)$$

Atendendo à fórmula (5.81) em [SAM.2]

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-t}) t^{-1-\alpha} dt = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}, \quad (7.22)$$

observamos que (7.21) coincide com

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(x-t) e^{-\gamma t}}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (7.23)$$

Obviamente a fórmula (7.23) é aplicável quando procuramos soluções tais que $e^{\gamma t} \varphi(t) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$.

II. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE EM $L_p(0, b)$

8. INTRODUÇÃO

Continuamos o estudo das equações integrais

$$\mathbb{K}\varphi(x) := \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 < x \leq b \leq \infty, \quad (8.1)$$

com um núcleo de Sonine $k(x)$ admitindo a possibilidade de trabalhar com intervalos limitados.

No Capítulo I obteve-se a solução de uma equação semelhante na recta \mathbb{R} e no âmbito dos espaços L_p , o que foi feito por construção do operador inverso limitado de $\mathbb{K}(L_p)$ em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Os resultados obtidos na recta real ainda são aplicáveis ao semi-eixo real \mathbb{R}_+ através do prolongamento de $\varphi(x)$ por zero em $(-\infty, 0)$.

Porém, nas aplicações, as equações integrais de Sonine surgem frequentemente com domínio de integração limitado, do tipo $[0, b]$.

No caso do intervalo limitado os resultados na recta podem ainda ser aplicados devido a termos uma equação de Volterra.

Mas as condições a aplicar no caso da recta devem ser respeitadas quando se passa ao caso do intervalo limitado.

No caso da recta real admitiu-se que o núcleo $k(x)$ e o núcleo associado $l(x)$ seriam diferenciáveis para x suficientemente grande e que as derivadas $k'(x)$ e $l'(x)$ seriam absolutamente integráveis no infinito, ver (4.7).

O operador inverso envolvia valores de $l(x)$ até ao infinito, $l(\infty)$.

Queremos agora obter a inversão natural de (8.1), isto é, uma inversão relacionada apenas com os valores dos núcleos em $[0, b]$ e evitando hipóteses do tipo (4.7).

Evitar hipóteses do tipo (4.7) é importante. Por exemplo, os núcleos

$$k(x) = \frac{A + \ln(1/x)}{x^{1-a}} \quad \text{e} \quad k(x) = 1 - \frac{a}{x^{1-a}}, \quad a > 0,$$

têm núcleos associados $l(x)$ que não satisfazem (4.7).

Pretende-se, por conseguinte, inverter a equação (8.1) em $L_p(0, b)$ utilizando condições naturais sobre o núcleo $k(x)$ e depois caracterizar o contradomínio $\mathbb{K}[L_p(0, b)]$.

9. PRELIMINARES

9.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE SONINE E NÚCLEOS DE SONINE EM $L_1(0, b)$

A partir de (1.2) obtém-se a solução formal de (8.1) nomeadamente,

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x l(x-t)f(t)dt, \quad 0 < b < \infty. \quad (9.1)$$

Para a equação (1.1) na recta real, o operador inverso ajustado a soluções em L_p é

$$\varphi(x) = (\mathbb{K}^{-1}f)(x) := l(\infty)f(x) + \int_0^\infty l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt. \quad (9.2)$$

O nosso objectivo é demonstrar que no caso de (8.1) o operador inverso pode ser representado na forma

$$(\mathbb{K}^{-1}f)(x) := l(x)f(x) + \int_0^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt. \quad (9.3)$$

Observamos que a fórmula (9.3) generaliza a fórmula de Marchaud da derivada fraccionária a partir de $x = 0$:

$$(\mathbb{D}_{0^+}^\alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha}f(x) + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t^{1-\alpha})[f(x-t) - f(x)]dt,$$

correspondente aos núcleos

$$l(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha} \quad \text{e} \quad k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}.$$

Pretendemos provar que (9.3) com o integral convergente na norma de L_p é o operador inverso para a equação (8.1) com soluções em L_p .

À semelhança do que foi feito no Capítulo I admitimos as seguintes condições:

1) Existe uma vizinhança $0 < x \leq \varepsilon_0$ na qual se verifica

$$k(x) \geq 0, l(x) \geq 0, k(x) \downarrow, l(x) \downarrow, 0 < x \leq \varepsilon_0. \quad (9.4)$$

2) As derivadas de $k(x)$ e de $l(x)$ existem no sentido distribucional e verificam

$$\int_{\delta}^b |k'(x)| dx < \infty, \quad \int_{\delta}^b |l'(x)| dx < \infty, \quad \forall \delta \in (0, b). \quad (9.5)$$

9.2 PROPRIEDADES DOS NÚCLEOS DE SONINE

LEMA 9.1 *Qualquer núcleo de Sonine que satisfaça (9.4) – (9.5) tem as seguintes propriedades:*

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^b |k(x) - k(x - \varepsilon)| dx \right] < \infty, \quad (9.6)$$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \left[\int_0^{\varepsilon} l(t) dt \int_{\varepsilon}^b |k'(t)| dt \right] < \infty. \quad (9.7)$$

As propriedades (9.6) e (9.7) foram provadas no Capítulo I para $b = \infty$. Vamos verificar que as condições (9.4) – (9.5) são suficientes para garantir a validade de (9.6) e (9.7) quando $b < \infty$.

a) A desigualdade (9.6) deriva da desigualdade

$$\int_{\varepsilon}^b |k(x) - k(x - \varepsilon)| dx \leq C\varepsilon + \int_0^{\varepsilon} k(t) dt, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad C = \int_{\varepsilon_0}^b |k'(t)| dt. \quad (A)$$

Para demonstrar (A),

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^b |k(x) - k(x - \varepsilon)| dx &= \int_{\varepsilon}^b \left| \int_0^{\varepsilon} k'(x - \varepsilon + t) dt \right| dx \leq \int_{\varepsilon}^b dx \int_0^{\varepsilon} |k'(x - \varepsilon + t)| dt = \\ &= \int_0^{\varepsilon} dt \int_{\varepsilon}^b |k'(x - \varepsilon + t)| dx = \int_0^{\varepsilon} dt \int_t^{b-\varepsilon+t} |k'(x)| dx. \end{aligned}$$

Obviamente

$$\int_0^{\varepsilon} dt \int_t^{b-\varepsilon+t} |k'(x)| dx \leq \int_0^{\varepsilon} dt \int_t^b |k'(x)| dx = \int_0^{\varepsilon} dt \left[\int_t^{\varepsilon_0} |k'(x)| dx + \int_{\varepsilon_0}^b |k'(x)| dx \right].$$

Então

$$\int_{\varepsilon}^b |k(x) - k(x - \varepsilon)| dx \leq - \int_0^{\varepsilon} dt \int_t^{\varepsilon_0} k'(x) dx + C \int_0^{\varepsilon} dt, \quad \text{com } C = \int_{\varepsilon_0}^b |k'(x)| dx,$$

o que prova (A). A propriedade (9.6) decorre de (A) em virtude de (4.10) e (4.14). A relação (9.7) demonstra-se de modo análogo. ■

9.3 A DESIGUALDADE GENERALIZADA DE HARDY

O seguinte resultado é indispensável nas demonstrações efectuadas neste Capítulo.

TEOREMA 9.2 *Seja um núcleo $k(x) \in \mathbf{L}_1([0, b])$, $0 < b < \infty$, o qual satisfaz a condição (9.4). Então para cada p em $1 < p < \infty$ existe um $A = A_p > 0$, dependente de p , tal que com $\varphi \in \mathbf{L}_p(0, b)$ é válida a desigualdade*

$$\left\| l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t) dt \right\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} \leq A \|\varphi\|_{\mathbf{L}_p(0,b)}, \quad (9.8)$$

para qualquer função $l(x)$ tal que

$$\sup_{0 < x < \varepsilon_0} \left| l(x) \int_0^x k(t) dt \right| < \infty,$$

(9.9)

e

$$|l(x)| \leq C, \quad \varepsilon_0 \leq x \leq b < \infty.$$

(9.10)

DEM. A demonstração baseia-se no facto de o operador

$$(\Delta\varphi)(x) = l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt,$$

(9.11)

ser dominado, numa vizinhança da origem, pelo operador maximal de Hardy

$$(M\varphi)(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(t)|dt, \quad 0 \leq x \leq b,$$

(9.12)

devido à monotonia do núcleo perto da origem.

Em (9.12) admite-se o prolongamento por zero da função $\varphi(t)$ para além do intervalo $[0, b]$.

Pelo Teorema de Hardy-Littlewood para funções de $L_p(0, b)$, o operador M é limitado no espaço $L_p(0, b)$:

$$\|M\varphi\|_{L_p(0,b)} \leq C\|\varphi\|_{L_p(0,b)}, \quad 1 < p < \infty,$$

(9.13)

ver, por exemplo, [STE.2].

Com as hipóteses (9.4), (9.9), (9.10) é válida a seguinte estimativa pontual

$$\left| l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| \leq C(M\varphi)(x),$$

(9.14)

para quase todo o $x \in (0, \varepsilon_0)$, onde ε_0 é o número da propriedade (9.4).

A demonstração de (9.14) baseia-se na partição do intervalo de integração:

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m}x}^{2^{-m+1}x} k(t)\varphi(x-t)dt. \quad (9.15)$$

Pela propriedade (9.4) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x) \int_{2^{-m}x}^{2^{-m+1}x} |\varphi(x-t)|dt = \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x) \int_{x-2^{-m+1}x}^{x-2^{-m}x} |\varphi(t)|dt \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x) \int_{x-2^{-m+1}x}^{x+2^{-m+1}x} |\varphi(t)|dt = \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x)(x2^{2-m}) \left[\frac{1}{x2^{2-m}} \int_{x-2^{-m+1}x}^{x+2^{-m+1}x} |\varphi(t)|dt \right]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Com $h = 2^{-m+1}x$ obtemos:

$$\frac{1}{x2^{2-m}} \int_{x-2^{-m+1}x}^{x+2^{-m+1}x} |\varphi(t)|dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(t)|dt \leq (M\varphi)(x).$$

A partir de (9.16) :

$$\left| \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| \leq \mathcal{A}(x)(M\varphi)(x), \text{ com } \mathcal{A}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x)(x2^{2-m}). \quad (9.17)$$

A função $\mathcal{A}(x)$ pode ser estimada através do núcleo $k(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^x k(t)dt &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{-m}x}^{2^{-m+1}x} k(t)dt \geq \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m+1}x) \int_{2^{-m}x}^{2^{-m+1}x} dt = \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m+1}x)(2^{-m}x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} k(2^{-m}x)(2^{-m-1}x) \geq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} k(2^{-m}x)(2^{-m}x) \geq \frac{1}{8}\mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

(9.18)

Portanto de (9.17) e (9.18) obtemos:

$$\left| l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| \leq 8 \left(l(x) \int_0^x k(t)dt \right) (M\varphi)(x),$$

(9.19)

e por (9.9) chegamos a (9.14).

Então em virtude da limitação (9.13) obtemos

$$\|M\varphi\|_{L_p(0,\varepsilon_0)} \leq C\|\varphi\|_{L_p(0,\varepsilon_0)}, \quad 1 < p < \infty, \quad \text{em } [0, \varepsilon_0].$$

No intervalo $[\varepsilon_0, b]$ a limitação é trivial visto que $l(x)$ é limitada em $[\varepsilon_0, b]$ por (9.10) e $k(x)$ é um núcleo integrável naquele intervalo. ■

COROLÁRIO 9.3 *Admita-se que um núcleo de Sonine $k(x) \in L_1([0, b])$ e o seu núcleo associado $l(x)$ satisfazem a condição de monotonia (9.4) e que $l(x)$ é limitado para $\varepsilon_0 \leq x \leq b < \infty$. Então ainda é válida a desigualdade (9.8).*

Observamos que no Teorema 9.2 apenas $k(x)$ obedece a (9.4); no Corolário 9.3 $k(x)$ e $l(x)$ obedecem ambos a (9.4), mas é dispensada a condição (9.9) relativa ao supremo.

DEM. Visto que $k(x)$ e $l(x)$ satisfazem (9.4), basta referir que a condição (9.9) é satisfeita automaticamente devido a (4.10). Temos

$$\left| l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| \leq 8 \left(l(x) \int_0^x k(t)dt \right) (M\varphi)(x).$$

Como $l(x)$ satisfaz (9.4) em $(0, \varepsilon_0)$ e é limitada em $[\varepsilon_0, b]$ e $k(x)$ é integrável podemos logo escrever

$$\left| l(x) \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \right| \leq C(M\varphi)(x), \quad 0 < x < b,$$

e daqui se obtém de novo a desigualdade (9.8). ■

EXEMPLO 9.4 Seja,

$$k(x) = \frac{|\ln^m x|}{x^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{e} \quad l(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+|\ln^m x|)}.$$

É fácil verificar que as condições (9.9) e (9.10) são satisfeitas neste caso. Então

$$\left\| \frac{1}{x^\alpha(1+|\ln^m x|)} \int_0^x \frac{|\ln^m(x-t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt \right\|_{L_p(0,b)} \leq A \|\varphi\|_{L_p(0,b)},$$

com $1 < p < \infty$ e $0 < b < \infty$.

(9.20)

10. INVERSÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE SONINE EM $L_p(0, b)$

10.1 O OPERADOR INVERSO TRUNCADO

Vamos considerar a truncatura na origem do operador (9.3) na forma

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) := \begin{cases} l(x)f(x) + \int_\varepsilon^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt, & \text{se } x > \varepsilon, \\ l(x)f(x), & \text{se } 0 < x < \varepsilon. \end{cases}$$

(10.1)

Por vezes é conveniente escrever

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(x)f(x) + (\Psi_\varepsilon f)(x), \quad 0 < x < b.$$

(10.2)

onde

$$(\Psi_\varepsilon f)(x) = \begin{cases} \int_\varepsilon^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt, & \text{se } x > \varepsilon, \\ 0 & \text{se } 0 < x < \varepsilon. \end{cases}$$

(10.3)

10.2 O NÚCLEO $N_\varepsilon(s)$

Vamos procurar uma representação integral do operador truncado $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f$ para $f \in \mathbb{K}(\mathbb{L}_p)$ e, neste sentido, vamos utilizar o núcleo $N_\varepsilon(s)$ introduzido no Capítulo I, ver (5.17) – (5.19).

10.3 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DO OPERADOR INVERSO TRUNCADO

LEMA 10.1. *Seja um núcleo de Sonine $k(x)$ que satisfaz (9.4) e (9.5) em $[0, b]$, $0 < b < \infty$, $f = \mathbb{K}\varphi$, $\varphi \in \mathbb{L}_p(0, b)$, $1 < p < \infty$. Então para o operador (10.1) é válida a representação,*

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds, \quad \text{se } \varepsilon < x < b. \quad (10.4)$$

DEM. Para $f = \mathbb{K}\varphi$ obtemos

$$f(x-t) - f(x) = \int_0^x [k_+(s-t) - k(s)]\varphi(x-s)ds. \quad (10.5)$$

Substituindo (10.5) em (10.3) e usando o Teorema de Fubini obtemos:

$$(\Psi_\varepsilon f)(x) = \int_\varepsilon^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt = \int_\varepsilon^x l'(t) \int_0^x [k_+(s-t) - k(s)]\varphi(x-s)dsdt.$$

Pelo teorema de Fubini daqui obtemos

$$(\Psi_\varepsilon f)(x) = \int_0^x A_\varepsilon(x, s)\varphi(x-s)ds, \quad x > \varepsilon, \quad (10.6)$$

onde

$$A_\varepsilon(x, s) = \int_\varepsilon^x l'(t)[k_+(s-t) - k(s)]dt, \quad x > \varepsilon.$$

Obviamente, como $k_+(s-t) = 0$ se $s < t$, obtemos ainda

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(x, s) &= \int_\varepsilon^s l'(t)k(s-t)dt - k(s) \int_\varepsilon^x l'(t)dt = \int_\varepsilon^s l'(t)k(s-t)dt - k(s)[l(x) - l(\varepsilon)] = \\ &= N_\varepsilon(s) - k(s)l(x). \end{aligned}$$

Por (10.6),

$$\begin{aligned} (\Psi_\varepsilon f)(x) &= \int_0^x A_\varepsilon(x, s)\varphi(x-s)ds = \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds - l(x) \int_0^x k(s)\varphi(x-s)ds = \\ &= \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds - l(x)f(x), \end{aligned}$$

e por (10.2) obtém-se a fórmula (10.4). ■

10.4 PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO À IDENTIDADE DO NÚCLEO $N_\varepsilon(s)$

O lema que se segue já foi demonstrado no Capítulo I para o caso de $b = \infty$, ver Lema 5.4. Vai aqui ser demonstrado para o caso de $b \leq \infty$.

Começamos por definir o núcleo prolongado:

$$\tilde{N}_\varepsilon(s) = \begin{cases} N_\varepsilon(s), & \text{se } 0 \leq s \leq b, \\ 0, & \text{se } s \notin [0, b]. \end{cases}$$

LEMA 10.2. *Se um núcleo de Sonine $k(x)$ satisfaz (9.4) e (9.5) então o núcleo prolongado $\tilde{N}_\varepsilon(x)$ tem as propriedades do núcleo de aproximação à identidade:*

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_0^\infty |\tilde{N}_\varepsilon(s)| ds < \infty, \tag{10.7}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \tilde{N}_\varepsilon(s) ds = 1, \tag{10.8}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} |\tilde{N}_{\varepsilon}(s)| ds = 0, \quad \delta > 0, \quad (10.9)$$

DEM.

a) Utilizando a expressão (5.19) de $N_{\varepsilon}(s)$ obtemos

$$\int_0^{\infty} |\tilde{N}_{\varepsilon}(s)| ds = l(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} k(s) ds + \int_{\varepsilon}^b |N_{\varepsilon}(s)| ds, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ o primeiro termo do segundo membro é limitado devido a (4.10).

Usando a representação (5.17)

$$N_{\varepsilon}(s) = l(\varepsilon)[k(s) - k(s - \varepsilon)] - \int_{s-\varepsilon}^s l(s-t)k'(t)dt, \quad \text{com } s > \varepsilon,$$

podemos escrever

$$\int_{\varepsilon}^b |N_{\varepsilon}(s)| ds \leq l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^b |k(s) - k(s - \varepsilon)| ds + \int_{\varepsilon}^b ds \int_{s-\varepsilon}^s |l(s-t)k'(t)| dt.$$

Por (9.6)

$$l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^b |k(s) - k(s - \varepsilon)| ds = C < \infty.$$

Seja

$$I := \int_{\varepsilon}^b ds \int_{s-\varepsilon}^s |l(s-t)k'(t)| dt.$$

Trocando a ordem de integração obtemos

$$I = \int_0^{\varepsilon} |k'(t)| dt \int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds + \int_{\varepsilon}^{b-\varepsilon} |k'(t)| dt \int_t^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds + \int_{b-\varepsilon}^b |k'(t)| dt \int_t^b |l(s-t)| ds.$$

Por (4.15) e para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ obtemos a limitação uniforme:

$$\int_0^\varepsilon |k'(t)| dt \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds = \int_0^\varepsilon |k'(t)| dt \int_{\varepsilon-t}^\varepsilon |l(s)| ds \leq 1.$$

Por (9.7) e para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ obtemos analogamente:

$$\int_\varepsilon^{b-\varepsilon} |k'(t)| dt \int_t^{t+\varepsilon} |l(s-t)| ds = \int_\varepsilon^{b-\varepsilon} |k'(t)| dt \int_0^\varepsilon |l(s)| ds \leq \int_0^\varepsilon |l(s)| ds \int_\varepsilon^b |k'(t)| dt < \infty.$$

O último integral na expressão de I é limitado e tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

b) Vamos demonstrar (10.8) a partir da representação (5.16) de $N_\varepsilon(s)$.

$$\int_0^\infty \tilde{N}_\varepsilon(s) ds = l(\varepsilon) \int_0^b [k(s) - k_+(s-\varepsilon)] ds + \int_0^b \left[\frac{d}{ds} A_\varepsilon(s) \right] ds, \quad (10.10)$$

$$\text{com } A_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^s l(t)k(s-t)dt, \quad s > \varepsilon.$$

Observamos que,

$$\int_0^b [k(s) - k_+(s-\varepsilon)] ds = \int_0^b k(s) ds - \int_0^{b-\varepsilon} k(s) ds = \int_{b-\varepsilon}^b k(s) ds.$$

Então,

$$\left| l(\varepsilon) \int_0^b [k(s) - k_+(s-\varepsilon)] ds \right| = \left| l(\varepsilon) \int_{b-\varepsilon}^b k(s) ds \right|.$$

Seja $\varepsilon < \frac{b}{2}$. Então $\left| \int_{b-\varepsilon}^b k(s) ds \right| \leq C\varepsilon$ onde $C = \max_{s \in [\frac{b}{2}, b]} |k(s)|$.

Para o termo restante em (10.10) tem-se

$$\int_\varepsilon^b \left[\frac{d}{ds} A_\varepsilon(s) \right] ds = A_\varepsilon(b) - A_\varepsilon(\varepsilon) = \int_\varepsilon^b l(t)k(b-t)dt.$$

Atendendo a (1.2) é então possível escrever

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^b l(t)k(b-t)dt = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \tilde{N}_{\varepsilon}(s)ds = 1.$$

c) Vamos demonstrar (10.9) a partir da representação (5.17) de $N_{\varepsilon}(s)$ para $s > \varepsilon$, e vamos considerar $\varepsilon < \delta$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} |\tilde{N}_{\varepsilon}(s)|ds &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^b l(\varepsilon)|k(s) - k(s-\varepsilon)|ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta}^b ds \int_0^{\varepsilon} l(t)|k'(s-t)|dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}^1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}^1$, com $0 < \varepsilon < \delta$, já vimos que

$$\begin{aligned} \left| l(\varepsilon) \int_{\delta}^b |k(s) - k(s-\varepsilon)|ds \right| &\leq \left| l(\varepsilon) \int_0^b |k(s) - k_+(s-\varepsilon)|ds \right| = \left| l(\varepsilon) \int_{b-\varepsilon}^b k(s)ds \right| \leq \\ &\leq C\varepsilon l(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad C = \max_{s \in [\frac{b}{2}, b]} |k(s)|. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}^1 = 0.$$

Vejamos o segundo termo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}^2$. Escolhemos $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ e obtemos

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon}^2 &= \int_{\delta}^b ds \int_0^{\varepsilon} l(t)|k'(s-t)|dt = \int_0^{\varepsilon} l(t)dt \int_{\delta}^b |k'(s-t)|ds = \\ &= \int_0^{\varepsilon} l(t)dt \int_{\delta-t}^{b-t} |k'(s)|ds \leq \int_0^{\varepsilon} l(t)dt \int_{\delta-t}^b |k'(s)|ds, \end{aligned}$$

expressão que tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

10.5 O TEOREMA DA INVERSÃO

TEOREMA 10.3. Admita-se que um núcleo de Sonine $k(x)$ satisfaz (9.4) e (9.5) em $[0, b]$, $0 < b < \infty$. Então para toda a função $f = \mathbb{K}\varphi$, $\varphi \in \mathbf{L}_p(0, b)$, $1 < p < \infty$, a solução φ calcula-se pela fórmula

$$\varphi(x) = \mathbb{K}^{-1}f(x) := l(x)f(x) + \int_0^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt, \quad (10.11)$$

e a convergência do integral em $\mathbb{K}^{-1}f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f$ é a convergência na norma de \mathbf{L}_p :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f - \varphi\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} = 0. \quad (10.12)$$

DEM. Pretendemos provar (10.12). Utilizamos a representação integral (10.4) de $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f$ com $f = \mathbb{K}\varphi$,

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds, \quad \text{se } \varepsilon < x < b,$$

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(x)f(x), \quad \text{se } 0 < x < \varepsilon.$$

Obtemos:

$$\|\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f - \varphi\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} \leq \left\| \varphi(x) - \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds \right\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon, b)} + \|l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, \varepsilon)} + \|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, \varepsilon)}$$

Usando as funções características:

$$\begin{aligned} \chi_{[\varepsilon, b]}(x) &= 1 \quad \text{se } x \in [\varepsilon, b] \quad \text{e } x = 0 \quad \text{em caso contrário,} \\ \chi_{[0, \varepsilon]}(x) &= 1 \quad \text{se } x \in [0, \varepsilon] \quad \text{e } x = 0 \quad \text{em caso contrário,} \end{aligned}$$

e a designação

$$(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) = \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds, \quad x > \varepsilon,$$

podemos escrever

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) - \varphi(x) = \chi_{[\varepsilon,b]}(x)(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) - \varphi(x) + \chi_{[0,\varepsilon]}(x)l(x)f(x), \quad 0 < x < b,$$

ou

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) - \varphi(x) = \chi_{[\varepsilon,b]}(x)(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) - \chi_{[0,\varepsilon]}(x)\varphi(x) - \chi_{[\varepsilon,b]}(x)\varphi(x) + \chi_{[0,\varepsilon]}(x)l(x)f(x).$$

Então

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) - \varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} &\leq \|(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) - \varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} + \|l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} + \\ &\quad + \|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade generalizada de Hardy (9.8) :

$$\|l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} = \left\| l(x) \int_0^x k(t)\varphi(x-t)dt \right\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} \leq A\|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)},$$

pelo que

$$\|(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) - \varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} \leq \|(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) - \varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} + (1+A)\|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}.$$

Além disso

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1+A)\|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} = 0.$$

Resta observar que

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{A}_\varepsilon\varphi)(x) - \varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} &= \left\| \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds - \varphi(x) \right\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} \leq \\ &\leq \left\| \tilde{\varphi}(x) - \int_{-\infty}^x \tilde{N}_\varepsilon(s)\tilde{\varphi}(x-s)ds \right\|_{\mathbf{L}_p(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{10.13}$$

com,

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) \quad \text{se } s \in [0, b] \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}(s) = 0 \quad \text{em caso contrário,}$$

$$\tilde{N}_\varepsilon(s) = N_\varepsilon(s) \quad \text{se } s \in [0, b] \quad \text{e} \quad \tilde{N}_\varepsilon(s) = 0 \quad \text{em caso contrário.}$$

Então pelo Lema 10.2 e pelas propriedades do operador de convolução

$(\mathbb{A}\varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{N}_\varepsilon(s)\tilde{\varphi}(x-s)ds$ num espaço de Banach, Lema 2.3, tem-se, a partir de (10.13)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \tilde{\varphi}(x) - \int_0^x \tilde{N}_\varepsilon(s)\tilde{\varphi}(x-s)ds \right\|_{\mathbf{L}_p(\mathbb{R})} = 0,$$

e, portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| \varphi(x) - \int_0^x N_\varepsilon(s)\varphi(x-s)ds \right\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon, b)} = 0. \quad \blacksquare$$

10.6 O CONTRADOMÍNIO DO OPERADOR INTEGRAL DE SONINE

O contradomínio do operador integral de Sonine é definido por,

$$\mathbb{K}[\mathbf{L}_p(0, b)] := \{f : f(x) = (\mathbb{K}\varphi)(x), \varphi \in \mathbf{L}_p(0, b), 1 \leq p < \infty\}, \quad (10.14)$$

que designamos, abreviadamente, por $\mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$. Vamos enunciar e demonstrar um teorema que dá as condições necessárias e suficientes para que uma função pertença a $\mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$.

TEOREMA 10.4. *Admita-se que um núcleo de Sonine $k(x)$ satisfaz as condições (9.4) e (9.5) em $[0, b]$, $0 < b < \infty$. Então uma função $f \in \mathbf{L}_1(0, b)$, pertence ao contradomínio $\mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$, $1 < p < \infty$, se e só se*

$$l(x)f(x) \in \mathbf{L}_p(0, b), \quad (10.15)$$

e for satisfeita uma das seguintes condições:

$$i) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon f \in \mathbf{L}_p(0, b), \quad (10.16)$$

ou

$$ii) \quad \sup_{0 < \varepsilon < b} \|\Psi_\varepsilon f\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} < \infty. \quad (10.17)$$

DEM.

a) Condições necessárias

Seja $f \in \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$.

Queremos provar que se verificam as condições (10.15) – (10.17).

A propriedade (10.15) decorre da desigualdade generalizada de Hardy (9.8). A condição (10.16) foi provada no Teorema 10.3. De facto pelo Teorema 10.3 existe o limite

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [l(x)f(x) + (\Psi_\varepsilon f)(x)],$$

e portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Psi_\varepsilon f)(x) \in \mathbf{L}_p(0, b).$$

A condição (10.17) deduz-se da representação integral (10.2) de $\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f$

$$\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f(x) = l(x)f(x) + (\Psi_\varepsilon f)(x),$$

e da propriedade (10.7),

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_0^\infty |\tilde{N}_\varepsilon(s)| ds = M < \infty.$$

Realmente, usando

$$(\mathbb{A}_\varepsilon \varphi)(x) = \int_0^x N_\varepsilon(s) \varphi(x-s) ds, \quad x > \varepsilon,$$

podemos escrever

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x) = \chi_{[\varepsilon, b]}(x) (\mathbb{A}_\varepsilon \varphi)(x) + \chi_{[0, \varepsilon]}(x) l(x)f(x), \quad 0 < x < b,$$

e

$$\|(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} \leq \|\chi_{[\varepsilon, b]}(x) (\mathbb{A}_\varepsilon \varphi)(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} + \|\chi_{[0, \varepsilon]}(x) l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)}.$$

Utilizando a desigualdade de Minkowski e admitindo a invariância da norma à translação, obtemos para o primeiro termo do segundo membro da última desigualdade obtida

$$\begin{aligned} & \|\chi_{[\varepsilon, b]}(x) (\mathbb{A}_\varepsilon \varphi)(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} = \|(\mathbb{A}_\varepsilon \varphi)(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon, b)} = \\ & = \left[\int_\varepsilon^b \left| \int_0^x N_\varepsilon(t) \varphi(x-t) dt \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^x |N_\varepsilon(t)| dt \left[\int_\varepsilon^b |\varphi(x-t)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \\ & = \|\varphi(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon, b)} \int_0^x |N_\varepsilon(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

Falta observar que $\|\chi_{[0, \varepsilon]}(x) l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} \leq \|l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, \varepsilon)} = \text{const.}$

Portanto

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \|(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1} f)(x)\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} < \infty$$

e como

$$(\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}f)(x) = l(x)f(x) + (\Psi_\varepsilon f)(x), \quad 0 < x < b,$$

o resultado (10.17) fica assegurado.

b) Condições suficientes

Seja $l(x)f(x) \in \mathbf{L}_p(0, b)$ e $f \in \mathbf{L}_1(0, b)$ e admita-se a validade de uma das condições (10.16) ou (10.17).

Queremos provar que existe $\varphi \in \mathbf{L}_p(0, b)$, $1 < p < \infty$, tal que $f = \mathbb{K}\varphi$ e $f \in \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$.

Observamos que $(\Psi_\varepsilon f)(x)$ fica bem definido.

De acordo com (10.2) definimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = l(x)f(x) + (\Psi_\varepsilon f)(x) \in \mathbf{L}_p. \quad (10.18)$$

Vamos provar que

$$(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) = (\mathbb{A}_\varepsilon f)(x), \quad (10.19)$$

com

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\varepsilon f)(x) &= \mu_\varepsilon(x) + \int_0^x N_\varepsilon(t)f(x-t)dt, \quad \varepsilon < x < b, \\ (\mathbb{A}_\varepsilon f)(x) &= v(x), \quad 0 < x < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10.20)$$

onde $N_\varepsilon(t)$ é o núcleo de aproximação à identidade (5.18) e

$$\mu_\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon k(x-t)[l(t) - l(\varepsilon)]f(t)dt, \quad \varepsilon < x < b, \quad (10.21)$$

e

$$v(x) = \int_0^x k(x-t)l(t)f(t)dt, \quad 0 < x < \varepsilon. \quad (10.22)$$

Seja $x > \varepsilon$. Para provar (10.19) temos de acordo com (10.3)

$$\begin{aligned}
(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) &= \int_0^x k(x-t)[l(t)f(t) + (\Psi_\varepsilon f)(t)]dt = \\
&= \int_0^x k(x-t) \left[l(t)f(t) + \int_\varepsilon^t l'(s)[f(t-s) - f(t)]ds \right] dt = \\
&= \int_0^x k(x-t)l(t)f(t)dt + \int_0^x k(x-t)dt \left\{ \int_0^{t-\varepsilon} l'(t-\xi)f(\xi)d\xi - f(t)[l(t) - l(\varepsilon)] \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) &= \int_0^\varepsilon k(x-t)l(t)f(t)dt + l(\varepsilon) \int_\varepsilon^x k(x-t)f(t)dt + \\
&\quad + \int_0^{x-\varepsilon} f(\xi)d\xi \int_\varepsilon^{x-\xi} k(x-\xi-y)l'(y)dy.
\end{aligned} \tag{10.23}$$

Utilizando (5.18) temos ainda

$$N_\varepsilon(x) - l(\varepsilon)k(x) = \int_\varepsilon^x l'(y)k(x-y)dy, \quad \varepsilon < x < b.$$

Então (10.23) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) &= \int_0^\varepsilon k(x-t)l(t)f(t)dt + l(\varepsilon) \int_\varepsilon^x k(x-t)f(t)dt + \\
&\quad + \int_0^{x-\varepsilon} f(\xi)d\xi [N_\varepsilon(x-\xi) - l(\varepsilon)k(x-\xi)] = \\
&= \int_0^\varepsilon k(x-t)l(t)f(t)dt + l(\varepsilon) \int_\varepsilon^x k(x-t)f(t)dt + \\
&\quad + \int_0^{x-\varepsilon} N_\varepsilon(x-\xi)f(\xi)d\xi - l(\varepsilon) \int_0^{x-\varepsilon} k(x-\xi)f(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Fazemos as seguintes transformações:

$$\int_0^{x-\varepsilon} N_\varepsilon(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_\varepsilon^x N_\varepsilon(t)f(x-t)dt,$$

$$l(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^x k(x-t)f(t)dt = l(\varepsilon) \int_0^x k(x-t)f(t)dt - l(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} k(x-t)f(t)dt.$$

Combinamos resultados:

$$l(\varepsilon) \int_0^x k(x-t)f(t)dt - l(\varepsilon) \int_0^{x-\varepsilon} k(x-t)f(t)dt = l(\varepsilon) \int_{x-\varepsilon}^x k(x-t)f(t)dt.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}\varphi_{\varepsilon})(x) &= \int_0^{\varepsilon} k(x-t)l(t)f(t)dt - l(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} k(x-t)f(t)dt + l(\varepsilon) \int_{x-\varepsilon}^x k(x-t)f(t)dt + \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^x N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt. \end{aligned}$$

Ainda por (5.19)

$$l(\varepsilon) \int_{x-\varepsilon}^x k(x-t)f(t)dt = \int_0^{\varepsilon} l(\varepsilon)k(t)f(x-t)dt = \int_0^{\varepsilon} N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt.$$

Então

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}\varphi_{\varepsilon})(x) &= \int_0^{\varepsilon} k(x-t)[l(t) - l(\varepsilon)]f(t)dt + \int_0^{\varepsilon} N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt + \int_{\varepsilon}^x N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt = \\ &= \int_0^{\varepsilon} k(x-t)[l(t) - l(\varepsilon)]f(t)dt + \int_0^x N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt = \\ &= \mu_{\varepsilon}(x) + \int_0^x N_{\varepsilon}(t)f(x-t)dt, \quad \varepsilon < x < b, \end{aligned}$$

que é a primeira linha de (10.20).

A segunda linha de (10.20) é óbvia pela definição de $v(x)$.

Para completar a demonstração das condições suficientes precisamos de passar ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ nas representações (10.19) e (10.20).

b₁) Suponha-se que é válida a condição suficiente (10.16) além da condição já assumida (10.15). Como

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = l(x)f(x) + (\Psi_{\varepsilon}f)(x),$$

as funções $\varphi_{\varepsilon}(x)$ convergem em L_p . Escrevemos, então, $\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(L_p)} \varphi_{\varepsilon}(x)$.

Vamos ver que, de facto, se tem $f = \mathbb{K}\varphi$.

Pela continuidade do operador \mathbb{K} em L_p é suficiente verificar que

$$f = \mathbb{K}\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{K}\varphi_\varepsilon. \quad (10.24)$$

Por (10.19)

$$(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) = (\mathbb{A}_\varepsilon f)(x),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} &\leq \left\| \int_0^x N_\varepsilon(t) f(x-t) dt - f(x) \right\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} + \|f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} + \\ &+ \|\mu_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon,b)} + \|v_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} &\leq \left\| \int_0^x N_\varepsilon(t) f(x-t) dt - f(x) \right\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} + \|f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)} + \\ &+ \|\mu_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} + \|v_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Como $N_\varepsilon(t)$ é um núcleo de aproximação à identidade pelo Lema 10.2, o primeiro termo do segundo membro da desigualdade tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, de acordo com o Lema 2.3.

Como f e v estão em $\mathbf{L}_p(0,b)$ os termos $\|f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}$ e $\|v_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)}$ tendem para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para provarmos que $\|\mu_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} \rightarrow 0$, observamos que $l(\varepsilon) \leq l(t)$ em (10.21) desde que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Então

$$\mu_\varepsilon(x) \leq \int_0^\varepsilon |k(x-t)l(t)f(t)| dt,$$

e pelo teorema de Young (válido na recta) e atendendo a que $k \in \mathbf{L}_1$ e $lf \in \mathbf{L}_p$,

$$\|\mu_\varepsilon(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} \leq \|k(x)\|_{\mathbf{L}_1(0,b)} \|l(x)f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,\varepsilon)},$$

e esta expressão tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Portanto, de (10.25) obtém-se no limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(\mathbb{K}\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_{\mathbf{L}_p(0,b)} = 0,$$

ou

$$f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \mathbb{K}\varphi_\varepsilon = \mathbb{K} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(\mathbf{L}_p)} \varphi_\varepsilon \right) = \mathbb{K}\varphi,$$

isto é, existe $\varphi \in \mathbf{L}_p(0, b)$ tal que $f = \mathbb{K}\varphi$ e $f \in \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$.

b₂) Admita-se agora que é válida a condição suficiente (10.17)

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \|\Psi_\varepsilon f\|_{\mathbf{L}_p(0, b)} < \infty,$$

condição que implica a limitação do conjunto $\{\Psi_\varepsilon f\}_{\varepsilon > 0}$.

Sabemos que os conjuntos limitados de \mathbf{L}_p , $p > 1$, são fracamente compactos, isto é, para cada sucessão nestes conjuntos existe uma subsucessão fracamente convergente, [SCH], p.198. Como $\{\Psi_\varepsilon f\}_{\varepsilon > 0}$ é limitado e atendendo a (10.18) concluímos que existe uma subsucessão $\{\varepsilon_k\}$ tal que φ_{ε_k} converge fracamente para uma certa função $\varphi \in \mathbf{L}_p$.

Então pela representação (10.19), já demonstrada, tem-se

$$(\mathbb{K}\varphi_{\varepsilon_k})(x) = (\mathbb{A}_{\varepsilon_k} f)(x),$$

e podemos passar ao limite fraco.

Como $\mathbb{A}_{\varepsilon_k} f$ converge fortemente (na norma) para f , então também converge fracamente para f . Portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(w)} \mathbb{K}\varphi_{\varepsilon_k} = \mathbb{K} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(w)} \varphi_{\varepsilon_k} \right) = \mathbb{K}\varphi,$$

e por (10.20) e (10.21) e pelo Lema 10.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{(w)} (\mathbb{A}_{\varepsilon_k} f)(x) = f,$$

que implicam o resultado $\mathbb{K}\varphi = f$. ■

11. EXEMPLOS

Vamos ver exemplos tratados em $\mathbf{L}_p(0, b)$, $0 < b < \infty$.

EXEMPLO 1. A equação integral,

$$\mathbb{K}\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\ln(\frac{1}{x-t}) + A}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, A \in \mathbb{R}, \quad (11.1)$$

foi estudada por Volterra, [VOL.2] . Volterra obteve a solução na forma

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \mu_\alpha(x-t) f(t) dt,$$

onde $\mu_\alpha(x)$ é a função especial de Volterra

$$\mu_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{x^{t-\alpha} e^{ht}}{\Gamma(1-\alpha+t)} dt, \quad h = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - A. \quad (11.2)$$

Neste exemplo temos portanto os núcleos

$$k(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [\ln(\frac{1}{x}) + A], \quad (11.3)$$

$$l(x) = \mu_\alpha(x). \quad (11.4)$$

Verifica-se a relação

$$l'(x) = \mu'_\alpha(x) = \mu_{1+\alpha}(x). \quad (11.5)$$

De facto:

$$l'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{x^{t-\alpha} e^{ht}}{\Gamma(1-\alpha+t)} dt = \int_0^\infty \frac{(t-\alpha)(x^{t-\alpha-1} e^{ht})}{\Gamma(1-\alpha+t)} dt = \int_0^\infty \frac{x^{t-(1+\alpha)} e^{ht}}{\Gamma(t-\alpha)} dt = \mu_{1+\alpha}(x).$$

As condições (9.4) e (9.5) são satisfeitas. A monotonia de $l(x) = \mu_\alpha(x)$ perto da origem deriva do facto de ser $l'(x) = \mu_{1+\alpha}(x) < 0$ perto da origem,

como se verifica atendendo à expressão assintótica de $\mu_{1+\alpha}(x)$ na vizinhança da origem, [ERD], secção 18.3:

$$\mu_{1+\alpha}(x) = \frac{\Gamma(-\alpha)}{x^{\alpha+1} \ln(1/x)} \left\{ 1 + O\left[\frac{1}{\ln(1/x)} \right] \right\}, \text{ quando } x \rightarrow 0. \quad (11.6)$$

Podemos então enunciar um corolário dos Teoremas 10.3 e 10.4.

COROLÁRIO 11.1 *A solução única da equação,*

$$\mathbb{K}\varphi(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\ln(\frac{1}{x-t}) + A}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, A \in \mathbb{R},$$

no espaço $\mathbf{L}_p(0, b)$, $1 < p < \infty$, é

$$\varphi(x) = \mu_\alpha(x)f(x) + \int_0^x \mu_{1+\alpha}(t)[f(x-t) - f(x)]dt, \quad (11.7)$$

considerando a convergência do integral na norma de \mathbf{L}_p , ((10.1) e (10.12)). O contradomínio $\mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$ é constituído unicamente pelas funções $f(x)$ tais que

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \left\| \int_\varepsilon^x \mu_{1+\alpha}(t)[f(x-t) - f(x)]dt \right\|_{\mathbf{L}_p(\varepsilon, b)} < \infty. \quad (11.8)$$

EXEMPLO 2. Este exemplo é devido a Sonine, [SON.1]. Sejam

$$k(x) = \frac{J_{-\nu}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^\nu}, \quad (11.9)$$

$$l(x) = \frac{I_{\nu-1}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{1-\nu}}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (11.10)$$

Como $l'(x) = I_{\nu-2}(2\sqrt{x})/(\sqrt{x})^{2-\nu}$ as condições (9.4) e (9.5) são satisfeitas. A partir dos Teoremas 10.3 e 10.4 podemos então enunciar o seguinte corolário :

COROLÁRIO 11.2 *A solução única da equação integral*

$$\mathbb{K}\varphi(x) = \int_0^x \frac{J_{-\nu}(2\sqrt{x-t})}{(\sqrt{x-t})^\nu} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \nu < 1, \quad (11.11)$$

no espaço $L_p(0, b)$, $1 < p < \infty$, é dada por

$$\varphi(x) = \frac{I_{\nu-1}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{1-\nu}} f(x) + \int_0^x \frac{I_{\nu-2}(2\sqrt{t})}{(\sqrt{t})^{2-\nu}} [f(x-t) - f(x)] dt, \quad (11.12)$$

com a convergência do integral na norma de L_p e o contradomínio $\mathbb{K}(L_p)$ descrito pela condição

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \left\| \int_\varepsilon^x I_{\nu-2}(2\sqrt{t})/(\sqrt{t})^{2-\nu} [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_{L_p(\varepsilon, b)} < \infty.$$

EXEMPLO 3. Seja a função hipergeométrica confluyente (função de Kummer)

$$\Phi(\beta; \alpha; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\alpha)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11.13)$$

As funções

$$k(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Phi(\beta; \alpha; \gamma x), \quad (11.14)$$

e

$$l(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \Phi(-\beta; 1-\alpha; \gamma x), \quad (11.15)$$

com $0 < \alpha < 1$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, são núcleos de Sonine. Visto que a equação (1.2) é equivalente à relação

$$\mathcal{L}k(p)\mathcal{L}l(p) = 1/p, \quad (A)$$

para as transformadas de Laplace, é suficiente verificar (A).

O cálculo da transformada de Laplace é feito directamente sobre as séries que definem Φ em (11.14) e (11.15) obtendo-se:

$$\mathcal{L}k(p) = \frac{p^{\beta-a}}{(p-\gamma)^\beta}, \quad \mathcal{L}l(p) = \frac{(p-\gamma)^\beta}{p^{1+\beta-a}}, \quad p > \gamma. \quad (11.16)$$

Utilizando a fórmula

$$\frac{d}{dx} [x^{b-1} \Phi(a; b; x)] = (b-1)x^{b-2} \Phi(a; b-1; x),$$

deduz-se

$$l'(x) = [1/\Gamma(-\alpha)x^{1+\alpha}] \Phi(-\beta; -\alpha; \gamma x), \quad (11.17)$$

e as condições (9.4) e (9.5) são satisfeitas. Podemos então enunciar o seguinte corolário:

COROLÁRIO 11.3. *A solução única no espaço $L_p(0, b)$ da equação integral*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi[\beta; \alpha; \gamma(x-t)] \varphi(t) dt = f(x), \quad (11.18)$$

é dada por

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \Phi(-\beta; 1-\alpha; \gamma x) f(x) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{t^{1+\alpha}} \Phi(-\beta; -\alpha; \gamma t) [f(x-t) - f(x)] dt, \end{aligned} \quad (11.19)$$

com a convergência do integral na norma de L_p e o contradomínio $\mathbb{K}(L_p)$ descrito pela condição

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \left\| \int_\varepsilon^x (1/t^{1+\alpha}) \Phi(-\beta; -\alpha; \gamma t) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_{L_p(\varepsilon, b)} < \infty.$$

EXEMPLO 4. Seja a função generalizada de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (11.20)$$

Temos o seguinte par de núcleos de Sonine,

$$k(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma > 0, \quad (11.21)$$

$$l(x) = x^{-\alpha} E_{1-\alpha, 1-\alpha}(\gamma x^{1-\alpha}), \quad (11.22)$$

o que pode ser verificado através da transformação de Laplace. Temos ainda

$$l'(x) = x^{-1-\alpha} E_{1-\alpha, -\alpha}(\gamma x^{\alpha}), \quad (11.23)$$

expressão que permite confirmar a validade das condições (9.4) e (9.5). Então:

COROLÁRIO 11.4 *A solução única em $L_p(0, b)$ da equação integral*

$$\mathbb{K}\varphi(x) = \int_0^x \left[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \gamma \right] \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \gamma > 0, \quad (11.24)$$

é dada por

$$\varphi(x) = x^{-\alpha} E_{1-\alpha, 1-\alpha}(\gamma x^{1-\alpha}) f(x) + \int_0^x t^{-1-\alpha} E_{1-\alpha, -\alpha}(\gamma t^{\alpha}) [f(x-t) - f(x)] dt, \quad (11.25)$$

com a convergência do integral na norma de L_p e o contradomínio $\mathbb{K}(L_p)$ descrito pela condição

$$\sup_{0 < \varepsilon < b} \left\| \int_{\varepsilon}^x t^{-1-\alpha} E_{1-\alpha, -\alpha}(\gamma t^{\alpha}) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_{L_p(\varepsilon, b)} < \infty.$$

III. RELAÇÕES ENTRE OPERADORES INTEGRAIS VIA INTEGRAL SINGULAR

12. PRELIMINARES

12.1 A TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER

A transformada de Fourier de uma função $f \in L_1(\mathbb{R})$ será definida por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} f(t) dt, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (12.1)$$

A transformada inversa será definida por

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(t) = \tilde{f}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (12.2)$$

Para funções $f \in L_1(\mathbb{R})$ as transformadas $\hat{f}(\xi)$ e $\tilde{f}(\xi)$ são funções contínuas e limitadas que tendem para zero quando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Se $t^\alpha f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ para todo o α tal que $0 \leq \alpha \leq n$, então $\hat{f}(\xi)$ e $\tilde{f}(t)$ admitem derivadas contínuas e limitadas até à ordem n .

12.2 NOTAÇÕES. TEOREMAS AUXILIARES.

Para os operadores integrais que queremos relacionar usaremos as seguintes notações:

$$(\mathbb{K}_+\varphi)(x) := \int_{-\infty}^x k(x-t)\varphi(t)dt, \quad (\mathbb{K}_-\varphi)(x) := \int_x^{\infty} k(t-x)\varphi(t)dt. \quad (12.3)$$

É bem conhecido que

$$\mathcal{F}[(k * \varphi)](\xi) = \hat{k}(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

(12.4)

Recordamos o Teorema de Mikhlin sobre a limitação do operador de convolução em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

TEOREMA DE MIKHLIN

Seja $\hat{k}(\xi)$ a transformada de Fourier do núcleo $k(x)$ e admita-se que $\hat{k}(\xi) = m(\xi)$ é uma função que satisfaz as condições

$$|m(\xi)| \leq C < \infty \quad \text{e} \quad |\xi m'(\xi)| \leq C < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Então o operador dado por $\mathcal{F}^{-1}m\mathcal{F}$, apenas por exemplo num conjunto denso em L_p , é limitado em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

TEOREMA DE YOUNG

Se $k(x) \in L_1(\mathbb{R})$ e $\varphi(x) \in L_p(\mathbb{R})$ então verifica-se $\|k * \varphi\|_{L_p} \leq \|k\|_{L_1} \|\varphi\|_{L_p}$.

CRITÉRIO DE MIKHLIN-HÖRMANDER, [STE.2], p.96

Seja uma função $m(x) \in C[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$.

Se

- 1) $|m(x)| \leq B' < \infty$,
- 2) $\sup_{0 < R < \infty} R^3 \int_{R \leq |x| \leq 2R} |m'(x)|^2 dx \leq B' < \infty$,

então $m(x)$ é multiplicador de Fourier para L_p , $1 < p < \infty$.

12.3 UM LEMA SOBRE MULTIPLICADORES DE FOURIER

O seguinte lema será utilizado quando tratarmos das equações generalizadas de Sonine.

LEMA 12.1 Se $\hat{N}(\xi)$ for um multiplicador de Fourier que satisfaz as condições do Teorema de Mikhlin e se $\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |A + \hat{N}(\xi)| > 0$, então a função

$1 / [A + \hat{N}(\xi)]$ satisfaz as mesmas condições.

COROLÁRIO 12.2 Se $\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |a + b\lambda + b\hat{N}(\xi)| > 0$, onde a, b são constantes,

e $\hat{N}(\xi)$ satisfaz as condições do Teorema de Mikhlin, então o operador

$(Ng)(x) = \int_{\mathbb{R}} N_1(x-t)g(t)dt$ é limitado em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, com

$$\hat{N}_1(\xi) = \frac{1}{a + b\lambda + b\hat{N}(\xi)}.$$

13. RELAÇÃO ENTRE OPERADORES INTEGRAIS VIA OPERADOR SINGULAR

13.1 DEFINIÇÃO DE NÚCLEOS NA RECTA REAL

O objectivo é determinar um operador \mathbb{S} tal que

$$\mathbb{K}_+\varphi = \mathbb{S}\mathbb{K}_-\varphi, \text{ para um núcleo } k(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+), \quad (13.1)$$

pelo menos no caso de "boas" funções φ .

Consideremos então um núcleo de Sonine $k(s)$ localmente integrável em \mathbb{R}_+ . Prolongamos um núcleo $k(x)$ do seguinte modo:

$$k_+(s) = \begin{cases} k(s), & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}, \quad k_-(s) = \begin{cases} k(-s), & s < 0, \\ 0, & s > 0. \end{cases} \quad (13.2)$$

Então

$$(\mathbb{K}_+\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_+(x-t)\varphi(t)dt. \quad (13.3)$$

$$(\mathbb{K}_-\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_-(x-t)\varphi(t)dt. \quad (13.4)$$

Utilizando (12.4) obtemos:

$$\mathcal{F}[(\mathbb{K}_\pm\varphi)(x)](\xi) = \hat{k}_\pm(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad (13.5)$$

e

$$\hat{k}_\pm(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} k_\pm(t) dt = \int_0^{\infty} e^{\pm i\xi t} k(t) dt, \quad (13.6)$$

13.2 A RELAÇÃO $\mathbb{K}_+ = \mathbb{S}\mathbb{K}_-$

Calculamos a transformada de Fourier de ambos os membros da igualdade (13.1) :

$$\mathcal{F}[\mathbb{K}_+\varphi(x)](\xi) = \mathcal{F}[\mathbb{S}\mathbb{K}_-\varphi(x)](\xi) = \mathcal{F}[\mathbb{S}](\xi)\mathcal{F}[k_-](\xi)\mathcal{F}[\varphi](\xi),$$

e portanto

$$\mathcal{F}[\mathbb{S}](\xi) = \frac{\mathcal{F}[k_+](\xi)}{\mathcal{F}[k_-](\xi)} \quad (13.7)$$

Assim, formalmente,

$$\mathbb{S}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\hat{k}_+(\xi)}{\hat{k}_-(\xi)} d\xi. \quad (13.8)$$

13.3 A RELAÇÃO $\mathbb{K}_+\mathbb{T} = \mathbb{K}_-$

Admitamos a existência de um operador \mathbb{T} tal que

$$\mathbb{K}_+\mathbb{T}\varphi = \mathbb{K}_-\varphi, \quad (13.9)$$

pelo que

$$\mathbb{T} = \mathbb{K}_+^{-1}\mathbb{K}_-. \quad (13.10)$$

Queremos calcular

$$(\mathbb{T}\varphi)(x) = [\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x). \quad (13.11)$$

para funções $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Pelos resultados do Capítulo I temos, pelo menos formalmente,

$$\varphi(x) = (\mathbb{K}_+^{-1}f)(x) = (\mathbb{K}_-^{-1}f)(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x l(x-t)f(t)dt. \quad (13.12)$$

Substituindo a expressão (12.3) de $(\mathbb{K}_-\varphi)(x)$ em (13.12) obtemos:

$$[\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x l(x-t)dt \int_t^\infty k(s-t)\varphi(s)ds.$$

Mudando a ordem de integração no integral iterado obtemos

$$[\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^\infty \varphi(s)ds \int_{-\infty}^{\min(x,s)} l(x-t)k(s-t)dt. \quad (13.13)$$

Não podemos derivar sob o sinal de integral, pois o integral obtido não converge quando $x = t$. Introduzimos uma expressão auxiliar truncando o parâmetro x :

$$\begin{aligned} (J_\varepsilon\varphi)(x) &= \\ &= \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \varphi(s)ds \int_{-\infty}^s l(x-t)k(s-t)dt + \int_{x+\varepsilon}^\infty \varphi(s)ds \int_{-\infty}^x l(x-t)k(s-t)dt \right] = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \varphi(s)A(x-s)ds + \int_{x+\varepsilon}^\infty \varphi(s)B(s-x)ds \right], \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^\infty k(t)l(x+t)dt, \quad x > 0, \\ B(x) &= \int_0^\infty l(t)k(x+t)dt, \quad x > 0. \end{aligned}$$

$$(13.14)$$

Então definimos

$$[\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \varphi(s)A(x-s)ds + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \varphi(s)B(s-x)ds \right]. \quad (13.15)$$

Repare-se que pela construção efectuada tem-se

$$\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi) = \frac{d}{dx} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(J_\varepsilon \varphi)(x)],$$

ao passo que em (13.15) definimos

$$\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} [(J_\varepsilon \varphi)(x)].$$

Em geral é preciso demonstrar que estes resultados são iguais. Por agora procuraremos um resultado final que depois poderá ser justificado.

A partir de (13.15) obtemos:

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} [(J_\varepsilon \varphi)(x)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \varphi(s)A(x-s)ds + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \varphi(s)B(s-x)ds \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A(\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon) - B(\varepsilon)\varphi(x+\varepsilon)] + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} A'(x-s)\varphi(s)ds + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} -B'(s-x)\varphi(s)ds \right]. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Visto que $\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon) \rightarrow 0$ no caso de "boas" funções, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A(\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon) - B(\varepsilon)\varphi(x+\varepsilon)] = \lambda\varphi(x),$$

com

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A(\varepsilon) - B(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [k(t)l(t+\varepsilon) - l(t)k(t+\varepsilon)]dt. \quad (13.17)$$

Podemos desdobrar o primeiro integral, e fazendo $u = t + \varepsilon$ no último integral da expressão anterior resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon k(t)l(t+\varepsilon)dt + \int_\varepsilon^\infty k(t)l(t+\varepsilon)dt - \int_0^\infty l(t-\varepsilon)k(t)dt = \\ & = \int_\varepsilon^\infty k(t)[l(t+\varepsilon) - l(t-\varepsilon)]dt + \int_0^\varepsilon k(t)l(t+\varepsilon)dt. \end{aligned}$$

Portanto λ pode ainda ser representado na forma

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^\infty k(t)[l(t+\varepsilon) - l(t-\varepsilon)]dt + \int_0^\varepsilon k(t)l(t+\varepsilon)dt \right]. \quad (13.18)$$

13.4 O NÚCLEO SINGULAR $\mathcal{N}(x)$ ASSOCIADO A UM NÚCLEO DE SONINE

A partir da expressão (13.16) podemos escrever:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} A'(x-s)\varphi(s)ds + \int_{x+\varepsilon}^\infty [-B'(s-x)]\varphi(s)ds \right] = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{N}(x-s)\varphi(s)ds, \quad (13.19)$$

sendo o núcleo $\mathcal{N}(x)$ definido por

$$\mathcal{N}(x) = \begin{cases} A'(x), & x > 0, \\ -B'(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (13.20)$$

Portanto

$$(\mathbb{T}\varphi)(x) = [\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) = \lambda\varphi(x) + \int_{-\infty}^\infty \mathcal{N}(x-s)\varphi(s)ds. \quad (13.21)$$

DEFINIÇÃO 13.1. Ao núcleo $\mathcal{N}(x)$ definido por (13.20) chama-se núcleo singular associado ao núcleo de Sonine $k(x)$.

A partir de (13.14) é ainda possível a representação:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= A'(x) = \int_0^{\infty} k(t)l'(x+t)dt, \quad x > 0, \\ \mathcal{N}(x) &= -B'(-x) = \int_0^{\infty} l(t)k'(t-x)dt, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{13.22}$$

13.5 A TRANSFORMADA DE FOURIER DO NÚCLEO SINGULAR

TEOREMA 13.2. *A transformada de Fourier do núcleo singular $\mathcal{N}(x)$ é dada por*

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = \frac{\hat{k}_+(-\xi)}{\hat{k}_+(\xi)} - \lambda. \tag{13.23}$$

DEM. Usando o operador

$$(\mathbb{N}\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x-s)\varphi(s)ds,$$

podemos reescrever (13.21) na forma

$$[\mathbb{K}_+\mathbb{K}_+^{-1}(\mathbb{K}_-\varphi)](x) = \mathbb{K}_+[\lambda\varphi(x) + \mathbb{N}\varphi(x)],$$

ou

$$\mathbb{K}_-\varphi = \mathbb{K}_+[\lambda I + \mathbb{N}]\varphi. \tag{13.24}$$

Como todos os operadores são de convolução, a passagem à transformada de Fourier conduz a

$$\hat{k}_+(-\xi) = [\lambda + \hat{\mathcal{N}}(\xi)]\hat{k}_+(\xi). \tag{13.25}$$

O resultado desejado é imediato. ■

Podemos verificar a relação $\mathbb{K}_+\mathbb{T}\varphi = \mathbb{K}_-\varphi$ para $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$. Seja inicialmente $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Obtemos

$$\mathcal{F}[(\mathbb{K}_+\mathbb{T} - \mathbb{K}_-)\varphi(x)] = [\hat{k}_+(-\xi) - \hat{k}_-(\xi)]\hat{\varphi}(\xi) = 0.$$

Se nos restringirmos ao espaço de Lizorkin $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ no qual $\hat{\varphi}(0) = 0$

podemos afirmar que $(\mathbb{K}_+ \mathbb{T} - \mathbb{K}_-) \varphi(x) = 0$. Por um conhecido teorema de Banach pode estender-se o resultado a $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ visto que $\Phi(\mathbb{R})$ é denso em $L_p(\mathbb{R})$, [KAR.2], p. 93.

14. EQUAÇÕES GENERALIZADAS DE SONINE COM COEFICIENTES CONSTANTES

14.1 DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 14.1. Chamamos equação generalizada de Sonine com coeficientes constantes a uma equação integral de primeira espécie da forma

$$a \int_{-\infty}^x k(x-t)\varphi(t)dt + b \int_x^{\infty} k(t-x)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14.1)$$

na qual a, b são constantes arbitrárias.

Nesta definição supõe-se $b \neq 0$. De facto, se fosse $b = 0$ regressaríamos à equação integral de Sonine usual.

Um caso particular da equação (14.1) com o núcleo $k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, é bem conhecido como equação generalizada de Abel com coeficientes constantes, [SAM.2], p. 622.

Utilizando (13.3) e (13.4) podemos ainda escrever:

$$a\mathbb{K}_+\varphi + b\mathbb{K}_-\varphi = f. \quad (14.2)$$

Atendendo à ligação entre \mathbb{K}_+ e \mathbb{K}_- via operador singular \mathbb{T} , a resolução de (14.2) pode reduzir-se à resolução de uma equação integral de Sonine do tipo usual e à resolução de uma equação integral singular.

14.2 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES GENERALIZADAS DE SONINE

Aplicando (13.24) à equação (14.2) obtemos

$$[(a + b\lambda)I + b\mathbb{N}]\mathbb{K}_+\varphi = f. \quad (14.3)$$

ou

$$\mathbb{K}_+[(a + \lambda b)\varphi + b\mathbb{N}\varphi] = f. \quad (14.4)$$

Para resolver (14.4) temos de começar por resolver a equação usual de Sonine, e em seguida temos de resolver uma equação integral singular

$$(a + \lambda b)\varphi + b\mathbb{N}\varphi = \mathbb{K}_+^{-1}f. \quad (14.5)$$

Se procurarmos soluções φ em $\mathbf{L}_p(\mathbb{R})$ então f deve pertencer ao espaço $\mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p) = \{f : f = \mathbb{K}_+\varphi, \varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})\}$, de modo que $\mathbb{K}_+^{-1}f \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$.

Se escrevermos $\Psi = \mathbb{K}_+\varphi$ em (14.3), obtemos

$$(a + b\lambda)\Psi + b\mathbb{N}\Psi = f, \quad (14.6)$$

onde $\Psi \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$ e $f \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$. Portanto a equação (14.6) deve ser resolvida em ordem a Ψ , não no espaço $\mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, mas sim no espaço $\mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$.

Resolvida a equação (14.6) em $\mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$ e obtida a solução Ψ , podemos então obter φ resolvendo a equação de Sonine $\mathbb{K}_+\varphi = \Psi$.

Pelas razões indicadas (utilização de espaços diferentes) é preferível trabalhar com a equação (14.4) em vez de (14.3).

As equações (14.4) e (14.3) são coincidentes para funções suficientemente boas e podem coincidir em espaços maiores, por exemplo para funções $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$ para valores de p tais que os operadores em (14.3) e (14.4) sejam operadores limitados.

A equação (14.5) tem, formalmente, solução única se

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |a + b\lambda + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)| > 0, \quad (14.7)$$

o que é óbvio via transformada de Fourier.

Formalmente

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\hat{g}(\xi)}{a + \lambda b + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)} \right](x). \quad (14.8)$$

Também formalmente, com

$$\varphi(x) = (\mathbb{N}_1 g)(x),$$

(14.9)

$$(\mathbb{N}_1 g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}_1(x-t)g(t)dt,$$

(14.10)

se existir o núcleo $\mathcal{N}_1(x)$ tal que

$$\hat{\mathcal{N}}_1(\xi) = \frac{1}{a+\lambda b+b\hat{\mathcal{N}}(\xi)}.$$

(14.11)

A condição (14.7) com $b \neq 0$ equivale à afirmação

$$a/b \notin \mathcal{R}_G,$$

(14.12)

onde \mathcal{R}_G é o contradomínio da função $z = G(\xi) = -\lambda - (\hat{\mathcal{N}})(\xi) = -\frac{\hat{k}_+(-\xi)}{\hat{k}_+(\xi)}$, isto é, \mathcal{R}_G é a curva descrita pelo ponto z quando ξ percorre a recta real.

14.3 EXEMPLOS

EXEMPLO 1. Seja a equação generalizada de Sonine com coeficientes constantes

$$\frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\gamma(x-t)}}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\gamma(t-x)}}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x),$$

ou

$$a\mathbb{K}_+\varphi + b\mathbb{K}_-\varphi = f.$$

(14.13)

com o núcleo $k(x)$ e o núcleo associado $l(x)$,

$$k(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}, \quad \gamma \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$l(x) = \gamma^\alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} (e^{-\gamma t}/t^{1+\alpha}) dt.$$

(14.13a)

i) Cálculo de λ

Por (13.17)

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty k(t)l(t+\varepsilon)dt - \int_0^\infty l(t)k(t+\varepsilon)dt \right].$$

Por substituição obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon = & \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma t}}{t^{1-\alpha}} - \frac{e^{-\gamma(t+\varepsilon)}}{(t+\varepsilon)^{1-\alpha}} \right] dt + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma t}}{t^{1-\alpha}} \left(\int_{t+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds \right) dt - \\ & - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(t+\varepsilon)}}{(t+\varepsilon)^{1-\alpha}} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds \right) dt. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Reparamos que

$$\frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma t}}{t^{1-\alpha}} - \frac{e^{-\gamma(t+\varepsilon)}}{(t+\varepsilon)^{1-\alpha}} \right] dt \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14.15)$$

Desdobramos o integral $\int_t^{t+\varepsilon}$ em $\int_t^{t+\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^\infty$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon = & \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma t}}{t^{1-\alpha}} - \frac{e^{-\gamma(t+\varepsilon)}}{(t+\varepsilon)^{1-\alpha}} \right] \int_{t+\varepsilon}^\infty \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds dt - \\ & - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(t+\varepsilon)}}{(t+\varepsilon)^{1-\alpha}} \int_t^{t+\varepsilon} \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds dt. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Fazemos a mudança de variável $t = \varepsilon u$ e obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon = & \frac{\alpha \varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma \varepsilon u}}{u^{1-\alpha}} - \frac{e^{-\gamma \varepsilon(u+1)}}{(u+1)^{1-\alpha}} \right] \int_{\varepsilon(u+1)}^\infty \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds dt - \\ & - \frac{\alpha \varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma \varepsilon(u+1)}}{(u+1)^{1-\alpha}} \int_{\varepsilon u}^{\varepsilon(u+1)} \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds dt. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Fazemos a mudança de variável $s = \varepsilon u$ nos integrais em ordem a s e obtemos

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma \varepsilon u}}{u^{1-\alpha}} - \frac{e^{-\gamma \varepsilon(u+1)}}{(u+1)^{1-\alpha}} \right] \int_{u+1}^\infty \frac{e^{-\gamma \varepsilon s}}{s^{1+\alpha}} ds dt -$$

$$-\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma t(t+1)}}{(t+1)^{1-\alpha}} \int_t^{t+1} \frac{e^{-\gamma s}}{s^{1+\alpha}} ds dt. \quad (14.18)$$

No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ resulta

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t^{1-\alpha}} \frac{1}{(t+1)^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \frac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} \right] dt. \quad (14.19)$$

Pela mudança de variável $x = \frac{1}{1+t}$ obtemos finalmente

$$\lambda = \cos(\alpha\pi). \quad (14.20)$$

ii) Cálculo de $\hat{\mathcal{N}}(\xi)$

Neste caso

$$\hat{k}_+(\xi) = \int_0^{\infty} e^{i\xi t} k_+(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{i\xi t} [e^{-\gamma t}/t^{1-\alpha}] dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{(i\xi-\gamma)t}/t^{1-\alpha} dt = \frac{1}{(\gamma-i\xi)^\alpha}.$$

Também

$$\hat{k}_+(-\xi) = \frac{1}{(\gamma+i\xi)^\alpha}.$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{N}}(\xi) &= \frac{\hat{k}_+(-\xi)}{\hat{k}_+(\xi)} - \lambda = \frac{(\gamma-i\xi)^\alpha}{(\gamma+i\xi)^\alpha} - \lambda = \frac{|\gamma-i\xi|^\alpha e^{i\alpha \arctan\left(\frac{-\xi}{\gamma}\right)}}{|\gamma+i\xi|^\alpha e^{i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)}} - \lambda = \\ &= e^{i\alpha \arctan\left(\frac{-\xi}{\gamma}\right) - i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)} - \lambda = e^{-2i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)} - \lambda. \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = e^{-2i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)} - \cos(\alpha\pi). \quad (14.21)$$

iii) Equação generalizada de Sonine

Vamos resolver a equação (14.13).

Começamos por determinar $\mathbb{K}_+^{-1}f$. Pelo Lema 5.1 do Capítulo I, se $l(x)$ satisfaz a condição $\lim_{x \rightarrow 0} xl(x) = 0$ e se existir $l'(x) \in L_1(\varepsilon, n)$ para todo o intervalo tal que $0 < \varepsilon < n < \infty$, então tem-se

$$(\mathbb{K}_+^{-1}f)(x) = l(\infty)f(x) + \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt,$$

pelo menos para funções f para as quais o integral é convergente. De (14.13a) obtemos

$$l'(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{-e^{-\gamma x}}{x^{1+\alpha}} \right),$$

assim como

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |l'(x)| dx < \infty, \text{ para todo o } \varepsilon > 0.$$

Falta observar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} xl(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x\gamma^{\alpha} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{t^{1+\alpha}} dt = 0.$$

Então pelo Lema 5.1 e para $x > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_+^{-1}f)(x) &= l(\infty)f(x) + \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt = \\ &= \gamma^{\alpha}f(x) - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[f(x-t) - f(x)]e^{-\gamma t}}{t^{1+\alpha}} dt = g(x). \end{aligned}$$

(14.22)

Como

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = e^{-2i\alpha \arctan(\frac{\xi}{\gamma})} - \cos(\alpha\pi),$$

resulta que

$$|\hat{\mathcal{N}}(\xi)| \leq 2 < \infty.$$

Também

$$\hat{\mathcal{N}}'(\xi) = e^{-2i\alpha \arctan(\frac{\xi}{\gamma})} \left(\frac{-2i\alpha\gamma}{\gamma^2 + \xi^2} \right),$$

e

$$\left| \xi \hat{\mathcal{N}}'(\xi) \right| = \left| 2i\alpha\gamma \frac{\xi}{\gamma^2 + \xi^2} \right| \leq |2i\alpha\gamma| \left| \frac{\gamma}{\gamma^2 + \gamma^2} \right| = \alpha < \infty.$$

Então o Teorema de Mikhlin afirma que o operador

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\mathcal{N}}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x-t)\varphi(t)dt,$$

é limitado em $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

Aplicando a transformação de Fourier à equação $(a + \lambda b)\varphi + b\mathbb{N}\varphi = g$ obtemos

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{a + b\lambda + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)}. \quad (14.23)$$

Observamos que

$$|a + b\lambda + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)| = \left| a + be^{-2i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)} \right| = |b| \left| \frac{a}{b} + e^{-2i\alpha \arctan\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)} \right|.$$

Daqui é óbvio que

$$\inf |a + b\lambda + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)| > 0 \text{ se e só se } |a| \neq |b|.$$

Nestas condições

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\mathcal{N}}_1(\xi)\hat{g}(\xi)] = (\mathcal{N}_1 * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}_1(x-t)g(t)dt.$$

iv) Comportamento do núcleo singular $\mathcal{N}(x)$

Vamos estudar o comportamento do núcleo singular através do estudo da função $\mathcal{M}(x) = x\mathcal{N}(x)$, com o fim de obtermos $\mathcal{M}(0), \mathcal{M}(-\infty), \mathcal{M}(\infty)$.

Apresentaremos os resultados na forma de um lema.

Observamos em primeiro lugar que a função hipergeométrica confluyente $\Psi(a, c; x)$ pode ser definida, [ERD], p.257, por

$$\Psi(a, c; x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x),$$

onde Φ é a função de Kummer.

LEMA 14.2. O núcleo $\mathcal{N}(x)$ calcula-se pelas fórmulas

$$\mathcal{N}(x) = \begin{cases} \frac{2\gamma e^{-\gamma x}}{\Gamma(-\alpha)} \Psi(1+\alpha, 2; 2\gamma x), & x > 0, \\ -\frac{2\gamma e^{\gamma x}}{\Gamma(\alpha)} \left[\Psi(1+\alpha, 2; -2\gamma x) + \frac{1}{2}(-\gamma x)^{\alpha-1} \right], & x < 0. \end{cases}$$

(14.24)

Além disso

$$\mathcal{N}(x) \sim \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi x}, \text{ quando } x \rightarrow 0, \quad (14.25)$$

e $\mathcal{N}(x)$ tem crescimento exponencial no infinito

$$\mathcal{N}(x) \sim \begin{cases} \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(-\alpha)(2\gamma)^\alpha x^{\alpha+1}}, & x \rightarrow +\infty, \\ \frac{(2^\alpha - 1)(-\gamma)^\alpha}{\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}} e^{\gamma x}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (14.26)$$

DEM.

a) Seja $x > 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= x\mathcal{N}(x) = \frac{-\alpha x e^{-\gamma x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-2\gamma t}}{t^{1-\alpha}(x+t)^{1+\alpha}} dt = \\ &= \frac{-\alpha e^{-\gamma x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{-1-\alpha} e^{-2\gamma x t} dt. \end{aligned} \quad (14.27)$$

A partir desta expressão podemos calcular $\mathcal{M}(0^+)$:

$$\mathcal{M}(0^+) = \frac{-\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{-1-\alpha} dt = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}. \quad (14.28)$$

Se $\lambda = \cos(\alpha\pi) \neq 0$ ainda podemos escrever

$$\mathcal{M}(0^+) = \frac{\lambda}{\pi} \tan(\alpha\pi), \text{ com } \alpha \neq k + \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (14.29)$$

Usando a fórmula 2.3.6(9), p. 324, volume 1, de Prudnikov, [PRU],

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (t+z)^{-\rho} e^{-\rho t} dt = \Gamma(\alpha) z^{\alpha-\rho} \Psi(\alpha, \alpha+1-\rho; \rho z),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \rho > 0, |\arg z| < \pi,$$
(14.30)

obtemos

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{-1-\alpha} e^{-2\gamma x t} dt = \Gamma(\alpha) \Psi(\alpha, 0; 2\gamma x).$$
(14.31)

Recorremos a seguir à fórmula 7.2.2(1), volume 3, Prudnikov, [PRU],

$$\Psi(a, c; x) = x^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c; x).$$

Então de (14.27) e (14.31) obtemos

$$\mathcal{M}(x) = \frac{-2\alpha\gamma x e^{-\gamma x}}{\Gamma(1-\alpha)} \Psi(1+\alpha, 2; 2\gamma x),$$
(14.32)

que justifica a primeira linha de (14.24).

Usamos a seguir a expressão assintótica da função Ψ , [ERD], p. 278, vol. 1 .

$$\Psi(a, c; x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(a)_k (a-c+1)_k}{k!} x^{-a-k} + O(|x|^{-a-n-1}),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \rightarrow \infty, \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}.$$

Portanto

$$\mathcal{M}(x) \sim \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(-\alpha)(2\gamma x)^\alpha}, \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty,$$
(14.33)

que justifica a primeira linha de (14.26).

b) Seja $x < 0$. Temos

$$\mathcal{M}(x) = x \int_0^{\infty} l(t) k'(t-x) dt = x \int_0^{\infty} l(t) d[k(t-x) - k(-x)] =$$

$$= x \{l(t)[k(t-x) - k(-x)]\}_0^\infty - x \int_0^\infty [k(t-x) - k(-x)]l'(t)dt.$$

Admitimos que $\{l(t)[k(t-x) - k(-x)]\}_0^\infty \rightarrow 0$, o que é possível por (4.14) e (4.7).
Então

$$M(x) = -x \int_0^\infty [k(t-x) - k(-x)]l'(t)dt. \quad (14.34)$$

Substituindo $k(x)$ e $l'(t)$ obtemos

$$\mathcal{M}(x) = \frac{\alpha x e^{\gamma x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\gamma t}}{(t-x)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(-x)^{1-\alpha}} \right] \frac{e^{-\gamma t}}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{\alpha e^{\gamma x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[1 - \frac{e^{\gamma x t}}{(1+t)^{1-\alpha}} \right] \frac{e^{\gamma x t}}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (14.35)$$

A partir de (14.35) obtemos

$$\mathcal{M}(0^-) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+t)^{1-\alpha}} \right] \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (14.36)$$

Mas conhecemos o resultado

$$\int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{(1+t)^\gamma} \right] \frac{1}{t^{1+\beta}} dt = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

De facto, integrando o primeiro membro por partes, obtemos

$$\left\{ \left[1 - \frac{1}{(1+t)^\gamma} \right] \frac{t^{-\beta}}{-\beta} \right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{-\beta} \gamma (1+t)^{-\gamma-1} dt.$$

Admitindo que $\left\{ \left[1 - \frac{1}{(1+t)^\gamma} \right] \frac{t^{-\beta}}{-\beta} \right\}_0^\infty \rightarrow 0$, o que é verdade, em particular, para $\gamma = 1 - \alpha$, $\beta = \alpha$, obtemos

$$\frac{\gamma}{\beta} \int_0^\infty t^{-\beta} (1+t)^{-\gamma-1} dt = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

Aplicando a (14.36) com $\gamma = 1 - \alpha$, $\beta = \alpha$, obtemos

$$\mathcal{M}(0^-) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi},$$

(14.37)

Assim $\mathcal{M}(x)$ é contínua na origem: $\mathcal{M}(0^-) = \mathcal{M}(0^+) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}$ e (14.25) fica demonstrado.

Falta estimar $\mathcal{M}(x)$ quando $x \rightarrow -\infty$. Basta calcular o integral

$$I_\alpha(x) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{e^{\gamma xt}}{(1+t)^{1-\alpha}} \right] \frac{e^{\gamma xt}}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (14.38)$$

observando que a função $I_\alpha(x)$ é analítica em relação a α . É suficiente, portanto, calcular $I_{-\alpha}(x)$ e depois substituir α por $-\alpha$.

Obtemos

$$I_{-\alpha}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{\gamma xt}}{t^{1-\alpha}} dt - \int_0^\infty \frac{e^{2\gamma xt}}{t^{1-\alpha}(1+t)^{1+\alpha}} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{(-\gamma x)^\alpha} - \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{-\alpha-1} e^{2\gamma xt} dt.$$

O integral acima é calculado por (14.30) e obtemos

$$I_{-\alpha}(x) = \Gamma(\alpha)[(-\gamma x)^{-\alpha} - \Psi(\alpha, 0; -2\gamma x)].$$

Então

$$I_\alpha(x) = \Gamma(-\alpha)[(-\gamma x)^\alpha - \Psi(-\alpha, 0; -2\gamma x)] = \Gamma(-\alpha)[(-\gamma x)^\alpha + 2\gamma x \Psi(1 - \alpha, 2; -2\gamma x)].$$

Portanto

$$\mathcal{M}(x) = \frac{e^{\gamma x}}{\Gamma(\alpha)} [-2\gamma x \Psi(1 - \alpha, 2; -2\gamma x) - (-\gamma x)^\alpha].$$

Usando a expressão assintótica da função Ψ obtemos

$$\mathcal{M}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} (-\gamma x)^\alpha e^{\gamma x} = 0,$$

e daí decorre a segunda linha de (14.26).

EXEMPLO 2.

Seja a equação generalizada de Sonine com coeficientes constantes

$$a \int_{-\infty}^x (\sqrt{x-t})^{-\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{x-t}) \varphi(t) dt + b \int_x^\infty (\sqrt{t-x})^{-\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{t-x}) \varphi(t) dt = f(x),$$

com $b \neq 0$, $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $f \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$,

(14.39)

com o núcleo $k(x)$ e o núcleo associado $l(x)$

$$k(x) = \frac{J_{-\nu}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^\nu} \text{ e } l(x) = \frac{I_{\nu-1}(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{1-\nu}}, \quad 0 < \nu < 1, \quad (14.40)$$

i) Cálculo de λ

$$\lambda_\varepsilon = \int_0^\infty [k(t)l(t+\varepsilon) - l(t)k(t+\varepsilon)] dt =$$

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{J_{-\nu}\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\right) I_{\nu-1}\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\right)}{t^{\frac{\nu}{2}}(1+t)^{\frac{1-\nu}{2}}} - \frac{J_{-\nu}\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\right) I_{\nu-1}\left(2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\right)}{t^{\frac{1-\nu}{2}}(1+t)^{\frac{\nu}{2}}} \right] dt. \quad (14.41)$$

O primeiro termo do integrando é igual a

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} t^{-\nu} (1+t)^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+\nu)}, \quad (14.42)$$

e o segundo termo do integrando é igual a

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} t^{\nu-1} (1+t)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+\nu)}. \quad (14.43)$$

Substituindo (14.42) e (14.43) em (14.41), destacando o primeiro termo de cada série e tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtém-se

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{t^\nu(1+t)^{1-\nu}} - \frac{1}{t^{1-\nu}(1+t)^\nu} \right] dt.$$

Usando $t = \frac{1-s}{s}$ resulta e a fórmula 21, p.297, vol.1, [PRU]obtemos

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \int_0^1 \left[\frac{1}{t^\nu(1-t)} - \frac{1}{t^{1-\nu}(1-t)} \right] dt = -\frac{\pi \cot(\nu\pi)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\cos(\nu\pi). \quad (14.44)$$

ii) **Cálculo de $\hat{\mathcal{N}}(\xi)$**

Temos

$$\hat{k}_+(\xi) = \int_0^\infty e^{i\xi t} (\sqrt{t})^{-\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{t}) dt = 2 \int_0^\infty e^{i\xi t^2} t^{1-\nu} J_{-\nu}(2t) dt, \quad (14.45)$$

Vamos utilizar o seguinte integral, fórmula 17.2, pág.186, vol.2, [PRU]:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t^2} t^{\alpha-1} J_\nu(ct) dt = A_\nu^\alpha(c), \text{ com } \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re}(\alpha + \nu) > 0, |\arg c| < \pi, \quad (14.46)$$

onde

$$A_\nu^\alpha(c) = c^\nu \gamma^{-\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)} 2^{-\nu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} \frac{\alpha+\nu}{2} \\ \nu+1 \end{matrix} \right] F_1 \left(\frac{\alpha+\nu}{2}; \nu+1; -\frac{c^2}{4\gamma} \right). \quad (14.47)$$

Comparando (3.88) com (3.89) :

Introduzimos $\xi_\varepsilon = \xi + i\varepsilon$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_\varepsilon = \xi$. Então:

$$\hat{k}_+(\xi_\varepsilon) = 2 \int_0^\infty e^{i(\xi+i\varepsilon)t^2} t^{1+\mu} J_\mu(2t) dt, \text{ com } \mu = -\nu$$

Então

$$\begin{aligned} 2A_\mu^\alpha(2) &= 2 \left\{ 2^\mu (\varepsilon - i\xi)^{-\left(\frac{\alpha+\mu}{2}\right)} 2^{-\mu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} \frac{\alpha+\mu}{2} \\ \mu+1 \end{matrix} \right] F_1 \left(\frac{\alpha+\mu}{2}; \mu+1; -\frac{2^2}{4(\varepsilon-i\xi)} \right) \right\} = \\ &= \left\{ (\varepsilon - i\xi)^{-(1+\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+\mu \\ \mu+1 \end{matrix} \right] F_1 [1+\mu; \mu+1; (i\xi - \varepsilon)^{-1}] \right\} = \\ &= (\varepsilon - i\xi)^{\nu-1} F_1 [1-\nu; 1-\nu; (i\xi - \varepsilon)^{-1}] = (\varepsilon - i\xi)^{\nu-1} e^{(i\xi - \varepsilon)^{-1}}. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Então,

$$\hat{k}_+(\xi) = (-i\xi)^{\nu-1} e^{(i\xi)^{-1}},$$

(14.49)

e

$$\hat{k}_+(-\xi) = (i\xi)^{\nu-1} e^{(-i\xi)^{-1}}.$$

(14.50)

pelo que

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = \frac{\hat{k}_+(-\xi)}{\hat{k}_+(\xi)} - \lambda = e^{i[(\nu-1)\pi \operatorname{sign}(\xi) + \frac{2}{\xi}]} + \cos(\nu\pi).$$

(14.51)

iii) Equação generalizada de Sonine

Temos a equação (14.39)

$$a \int_{-\infty}^x (\sqrt{x-t})^{-\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{x-t}) \varphi(t) dt + b \int_x^{\infty} (\sqrt{t-x})^{-\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{t-x}) \varphi(t) dt = f(x).$$

Supomos $b \neq 0$, $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $f \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$.

Começamos por calcular $\mathbb{K}_+^{-1}f$. Para podermos aplicar o Lema 5.1 do capítulo I, temos de verificar se as hipóteses deste Lema são satisfeitas.

Podemos escrever

$$l(x) = 2^{1-\nu} (2\sqrt{x})^{\nu-1} I_{\nu-1}(2\sqrt{x}),$$

$$l'(x) = 2^{1-\nu} \frac{d}{dx} \left[(2\sqrt{x})^{\nu-1} I_{\nu-1}(2\sqrt{x}) \right] = x^{\frac{\nu-2}{2}} I_{\nu-2}(2\sqrt{x}).$$

(14.52)

Então

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |l'(x)| dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} |x^{\frac{\nu-2}{2}} I_{\nu-2}(2\sqrt{x})| dx < \infty, \quad 0 < \varepsilon < \infty.$$

(14.53)

Também

$$\lim_{x \rightarrow 0} xl(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x(\sqrt{x})^{\nu-1} I_{\nu-1}(2\sqrt{x}) = 0.$$

(14.54)

Podemos então aplicar o Lema 5.1 do Capítulo I:

$$(\mathbb{K}_+^{-1}f)(x) = \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)] t^{\frac{\nu-2}{2}} I_{\nu-2}(2\sqrt{t}) dt,$$

e, se o integral convergir, escrevemos

$$(\mathbb{K}_+^{-1}f)(x) = g(x).$$

Temos de verificar se o operador singular correspondente \mathbb{N} é operador limitado em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

De facto, no caso presente, as condições do Teorema de Mikhlin não são satisfeitas. Como por (14.51).

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = e^{i[(\nu-1)\pi \text{sign}(\xi) + \frac{2}{\xi}]} + \cos(\nu\pi),$$

tem-se $|\hat{\mathcal{N}}(\xi)| \leq 2 < \infty$, mas

$$\hat{\mathcal{N}}'(\xi) = e^{i[(\nu-1)\pi \text{sign}(\xi) + \frac{2}{\xi}]} \left[\pm i(\nu-1)\pi + i\frac{2}{\xi} \right]'_{\xi} = e^{i[(\nu-1)\pi \text{sign}(\xi) + \frac{2}{\xi}]} \left[-\frac{2i}{\xi^2} \right],$$

e

$$\left| \xi \hat{\mathcal{N}}'(\xi) \right| = \left| \frac{2i}{\xi} \right| \rightarrow \infty \text{ quando } \xi \rightarrow 0.$$

Mas o cálculo directo mostra que o critério de Mikhlin-Hörmander é satisfeito.

A condição correspondente $\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |a + b\xi + b\hat{\mathcal{N}}(\xi)| > 0$ ou $\left| \frac{a}{b} + e^{i[(\nu-1)\pi \text{sign}(\xi) + \frac{2}{\xi}]} \right| > 0$, é equivalente à condição $|a| \neq |b|$.

iv) Comportamento do núcleo singular $\mathcal{N}(x)$

a) Seja $x > 0$. Escrevemos como no exemplo anterior

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= x\mathcal{N}(x) = x \int_0^{\infty} t^{-\frac{\nu}{2}} (x+t)^{-\frac{\nu-2}{2}} J_{-\nu}(2\sqrt{t}) I_{\nu-2}(2\sqrt{x+t}) dt = \\ &= x \int_0^{\infty} t^{-\frac{\nu}{2}} (1+t)^{-\frac{\nu-2}{2}} J_{-\nu}(2\sqrt{xt}) I_{\nu-2}(2\sqrt{x(1+t)}) dt. \end{aligned}$$

Observando que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{J_{-\nu}(2\sqrt{xt})}{(xt)^{-\frac{\nu}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{I_{\nu-2}(2\sqrt{x(1+t)})}{[x(1+t)]^{\frac{\nu-2}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\nu-1)},$$

obtemos, quando $x \rightarrow 0^+$,

$$\mathcal{M}(0^+) = \frac{(v-1)\sin(v\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-v}(1+t)^{v-2} dt = \frac{\sin(v\pi)}{\pi} \quad (14.55)$$

b) Seja $x < 0$. Temos

$$k'(x) = (\sqrt{x})^{-v-1} J_{-v-1}(2\sqrt{x}), \quad (14.56)$$

e

$$\mathcal{M}(x) = x \int_0^{\infty} t^{\frac{v-1}{2}} (t+1)^{-\frac{v-1}{2}} I_{v-1}(2\sqrt{-xt}) J_{-v-1}(2\sqrt{-x(t+1)}) dt. \quad (14.57)$$

Mas $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{I_{v-1}(2\sqrt{-xt})}{(\sqrt{-xt})^{v-1}} = \frac{1}{\Gamma(v)}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{J_{-v-1}(2\sqrt{-x(t+1)})}{(\sqrt{-x(t+1)})^{-v-1}} = \frac{1}{\Gamma(-v)}$ pelo que

$$\mathcal{M}(0^-) = \frac{-v\sin(v\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{v-1}(t+1)^{-v-1} dt = \frac{\sin(v\pi)}{\pi}. \quad (14.58)$$

Por (14.55) e (14.58) $\mathcal{M}(x)$ é contínua na origem e temos

$$\mathcal{N}(x) \sim \frac{\sin(v\pi)}{\pi x}, \quad x \rightarrow 0. \quad (14.59)$$

EXEMPLO 3.

Seja a equação generalizada de Sonine com coeficientes constantes

$$a \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi[\beta, \alpha; -\gamma(x-t)] \varphi(t) dt + b \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} \Phi[\beta, \alpha; -\gamma(t-x)] \varphi(t) dt = f(x),$$

$$b \neq 0, \varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty, f \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p), \quad (14.60)$$

com o núcleo $k(x)$ e o núcleo associado $l(x)$

$$k(x) = x^{\alpha-1} \Phi(\beta, \alpha; -\gamma x), \quad \alpha \in (0, 1), \gamma > 0,$$

$$l(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} x^{-\alpha} \Phi(-\beta, 1 - \alpha; -\gamma x),$$

nos quais figura a função confluyente hipergeométrica ou função de Kummer,

$$\Phi(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k}{(a)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

i) Cálculo de λ

$$\lambda_\varepsilon = \int_0^\infty [k(t)l(t + \varepsilon) - l(t)k(t + \varepsilon)] dt,$$

tem a forma

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1-\alpha}(1+t)^\alpha} \Phi(\beta, \alpha; -\gamma\varepsilon t) \Phi[-\beta, 1 - \alpha; -\gamma\varepsilon(1+t)] dt -$$

$$- \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(1+t)^{1-\alpha}} \Phi[-\beta, 1 - \alpha; -\gamma\varepsilon t] \Phi[\beta, \alpha; -\gamma\varepsilon(1+t)] dt.$$

O primeiro integrando pode escrever-se na forma:

$$\frac{1}{t^{1-\alpha}(1+t)^\alpha} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\alpha)_k} \frac{(-\gamma\varepsilon t)^k}{k!} \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)_k}{(1-\alpha)_k} \frac{[-\gamma\varepsilon(1+t)]^k}{k!} \right],$$

que tende para $\frac{1}{t^{1-\alpha}(1+t)^\alpha}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O segundo integrando pode escrever-se:

$$\frac{1}{t^\alpha(1+t)^{1-\alpha}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)_k}{(1-\alpha)_k} \frac{(-\gamma\varepsilon t)^k}{k!} \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\alpha)_k} \frac{[-\gamma\varepsilon(1+t)]^k}{k!} \right],$$

que tende para $\frac{1}{t^\alpha(1+t)^{1-\alpha}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Então

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t^{1-\alpha}(1+t)^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha(1+t)^{1-\alpha}} \right] dt = \cos(\alpha\pi). \quad (14.61)$$

ii) Cálculo de $\hat{N}(\xi)$

Vamos determinar $\hat{N}(\xi) = \frac{\hat{k}_+(-\xi)}{\hat{k}_+(\xi)} - \lambda$.

Observamos que a função confluyente hipergeométrica de Whittaker é definida por (Prudnikov, vol.3, pág.795), [PRU] :

$$M_{\nu, \mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \Phi\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right), \quad (2\mu + 1) \notin \mathbb{Z},$$

pelo que

$$\Phi(\beta, \alpha; -\gamma x) = (-\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\gamma x}{2}} M_{\frac{\alpha}{2}-\beta, \frac{\alpha-1}{2}}(-\gamma x). \quad (14.62)$$

Então,

$$\hat{k}_+(\xi) = (-\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{t(i\xi - \frac{\gamma}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} M_{\frac{\alpha}{2}-\beta, \frac{\alpha-1}{2}}(-\gamma t) dt. \quad (14.63)$$

Para calcular o integral em (14.63) usamos a seguinte fórmula, (Prudnikov, vol.3, pág.255), [PRU] :

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{q-1} M_{\rho, \sigma}(ct) dt = I_q,$$

com $\operatorname{Re}(q + \sigma) > -\frac{1}{2}$, $2\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} c|$,
ou $\operatorname{Re}(\rho - q) > 0$, $2\operatorname{Re} p = \operatorname{Re} c$,

$$I_q = \frac{2^{q+\sigma+1/2} c^{\sigma+1/2}}{(2p-c)^{q+\sigma+1/2}} \Gamma\left(q + \sigma + \frac{1}{2}\right) F_2\left(\frac{1}{2} + \rho + \sigma, \frac{1}{2} + q + \sigma; 2\sigma + 1; \frac{2c}{c-2p}\right).$$

É fácil verificar que a condição $\operatorname{Re}(q + \sigma) > -\frac{1}{2}$ é satisfeita no nosso caso. Então

$$\hat{k}_+(\xi) = (-\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\frac{\alpha}{2}} = (-\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{(-\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}}{(\gamma - i\xi)^\alpha} \Gamma(\alpha) F_2\left(\alpha - \beta, \alpha; \alpha; \frac{\gamma}{\gamma - i\xi}\right),$$

onde F_2 é a função hipergeométrica de Gauss.

Concluimos que

$$\hat{k}_+(\xi) = \Gamma(\alpha)(-i\xi)^{\beta-\alpha}(\gamma - i\xi)^{-\beta}, \quad (14.64)$$

que permite escrever

$$\hat{\mathcal{N}}(\xi) = e^{i[\pi(\beta-\alpha)\text{sign}(\xi) - 2\beta\arctan(\frac{\xi}{\gamma})]} - \lambda. \quad (14.65)$$

Notamos que se $\beta = \alpha$ então o núcleo $k(x) = x^{\alpha-1}\Phi(\beta, \alpha; -\gamma x)$ reduz-se ao núcleo $k(x) = x^{\alpha-1}e^{-\gamma x}$ e a fórmula (14.65) reduz-se a $e^{-i2\alpha\arctan(\frac{\xi}{\gamma})} - \lambda$ que é a fórmula (14.21). Observamos ainda que a fórmula (14.64) pode ser verificada directamente, integrando a série

$$\Phi(\beta, \alpha; -\gamma t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\alpha)_k} \frac{(-\gamma t)^k}{k!},$$

e expandindo a função $(1 - \frac{\gamma}{i\xi})^{-\beta}$.

iii) Equação generalizada de Sonine

Seja a equação,

$$a \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} \Phi[\beta, \alpha; -\gamma(x-t)] \varphi(t) dt + b \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} \Phi[\beta, \alpha; -\gamma(t-x)] \varphi(t) dt = f(x).$$

Supomos válidas as condições $b \neq 0$, $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $f \in \mathbb{K}_+(\mathbf{L}_p)$.

a) Determinação de $\mathbb{K}_+^{-1}f$

Pelo Lema 5.1 do Capítulo I se $\lim_{x \rightarrow 0} x l(x) = 0$ e se existir $l'(x) \in \mathbf{L}_1(\varepsilon, n)$ para todo o $0 < \varepsilon < n < \infty$, então,

$$\mathbb{K}^{-1}f(x) = l(\infty)f(x) + \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt,$$

pelo menos para funções f que assegurem a convergência do integral. Vamos verificar estas condições da hipótese do Lema 5.1. Temos, [BEL] , p.197,

$$l'(x) = \left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} x^{-\alpha} \Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x) \right]' = \\ = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[-\alpha x^{-\alpha-1} \Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x) + x^{-\alpha} \frac{\gamma\beta}{1-\alpha} \Phi(1-\beta, 2-\alpha; -\gamma x) \right]. \quad (14.66)$$

Também

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} |l'(x)| dx = \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-\alpha-1} |\Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x)| dx + \\ + \frac{\gamma\beta}{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{\varepsilon}^n x^{-\alpha} |\Phi(1-\beta, 2-\alpha; -\gamma x)| dx. \quad (14.67)$$

Os integrais entre 0 e ∞ das funções integrandas do segundo membro de (14.67) são integrais convergentes, deduzindo-se portanto que os integrais entre ε e n dos mesmos integrandos também convergem. Temos ainda que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x l(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x) = 0.$$

b) Aplicação da transformação de Fourier.

Temos de verificar se \mathbb{N} é operador limitado em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, utilizando o Teorema de Mikhlin. Pela expressão (14.65) tem-se que $|\hat{\mathcal{N}}(\xi)| < \infty$.

Além disso

$$\xi \hat{\mathcal{N}}'(\xi) = \xi e^{i[\pi(\beta-\alpha)\text{sign}(\xi) - 2\beta \arctan(\frac{\xi}{\gamma})]} \left(\frac{-2i\beta\gamma}{\gamma^2 + \xi^2} \right),$$

e

$$|\xi \hat{\mathcal{N}}'(\xi)| \leq |\beta| < \infty.$$

Então pelo Teorema de Mikhlin o operador $\mathcal{F}^{-1}[\hat{\mathcal{N}}(\xi)\hat{\phi}(\xi)]$ é limitado em $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Podemos então aplicar a transformação de Fourier e obter $\hat{\phi}(\xi)$.

A condição correspondente

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |a + b\xi + b\mathcal{N}(\xi)| > 0,$$

tem a forma

$$\left| \frac{a}{b} + e^{i[\pi(\beta-\alpha)\text{sign}(\xi) - 2\beta\arctan(\frac{\xi}{\gamma})]} \right| > 0,$$

o que é equivalente a $|a| \neq |b|$.

iv) Comportamento do núcleo singular $\mathcal{N}(x)$

a) Seja $x > 0$. Temos

$$l'(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\frac{\gamma\beta}{1-\alpha} \frac{\Phi(1-\beta, 2-\alpha; -\gamma x)}{x^\alpha} - \alpha \frac{\Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma x)}{x^{1+\alpha}} \right], \quad (14.68)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= \frac{\gamma\beta}{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} x \int_0^\infty \frac{\Phi(\beta, \alpha; -\gamma t)}{t^{1-\alpha}} \frac{\Phi[1-\beta, 2-\alpha; -\gamma(x+t)]}{(x+t)^\alpha} dt - \\ &\quad - \frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} x \int_0^\infty \frac{\Phi(\beta, \alpha; -\gamma t)}{t^{1-\alpha}} \frac{\Phi[-\beta, 1-\alpha; -\gamma(x+t)]}{(x+t)^{1+\alpha}} dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (14.69)$$

Para o integral I_2 temos

$$I_2 = -\frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{-1-\alpha} \Phi(\beta, \alpha; -\gamma xt) \Phi[-\beta, 1-\alpha; -\gamma x(1+t)] dt,$$

e

$$I_2(0^+) = -\frac{\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1+t)^{-1-\alpha} dt = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}. \quad (14.70)$$

O integral I_1 é nulo na origem. Então

$$\mathcal{M}(0^+) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}. \quad (14.71)$$

Falta calcular $\mathcal{M}(+\infty)$. Aplicando a (14.69) a transformação de Kummer e utilizando a expressão assintótica da função de Kummer à função resultante obtemos quando $x \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{M}(+\infty) = -\frac{\sin[(\alpha-\beta)\pi]}{\pi}, \text{ para } \beta < \alpha.$$

b) Seja $x < 0$. Então

$$k'(x) = x^{\alpha-1} \left(\frac{-\gamma\beta}{\alpha} \right) \Phi(\beta+1, \alpha+1; -\gamma x) + (\alpha-1)x^{\alpha-2} \Phi(\beta, \alpha; -\gamma x), \quad (14.72)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) &= \left(\frac{-\gamma\beta}{\alpha} \right) \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{\Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma t)}{t^\alpha} \frac{\Phi[\beta+1, \alpha+1; -\gamma(t-x)]}{(t-x)^{1-\alpha}} dt + \\ &+ (\alpha-1) \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{\Phi(-\beta, 1-\alpha; -\gamma t)}{t^\alpha} \frac{\Phi[\beta, \alpha; -\gamma(t-x)]}{(t-x)^{2-\alpha}} dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (14.73)$$

O integral I_1 é nulo quando $x \rightarrow 0^-$. Para o integral I_2 temos

$$I_2(x) = (1-\alpha) \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\alpha} (t+1)^{\alpha-2} \Phi(-\beta, 1-\alpha; \gamma xt) \Phi[\beta, \alpha; \gamma x(t+1)] dt, \quad (14.74)$$

e

$$\mathcal{M}(0^-) = I_2(0^-) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}.$$

Portanto $\mathcal{M}(x)$ é contínua na origem e por (14.71) e (14.74) temos

$$\mathcal{N}(x) \sim \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi x}, \quad x \rightarrow 0. \quad (14.75)$$

Falta calcular $\mathcal{M}(-\infty)$. Aplicando a (14.73) a transformação de Kummer, utilizando a expressão assintótica da função de Kummer para a função resultante e calculando o limite quando $x \rightarrow -\infty$ obtemos

$$\mathcal{M}(-\infty) = \frac{\sin[(\alpha-\beta)\pi]}{\pi}, \quad \text{para } \beta < \alpha.$$

Então

$$\mathcal{N}(x) \sim \frac{\sin[(\alpha-\beta)\pi]}{-\pi|x|}, \quad \beta < \alpha. \quad (14.76)$$

IV. OPERADORES INTEGRAIS DE SONINE EM ESPAÇOS GENERALIZADOS DE HÖLDER

15. INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores investigámos operadores de convolução em espaços L_p . No presente capítulo vamos estudar estes operadores em espaços generalizados de Hölder, com e sem ponderação.

Como resultado principal provaremos que o operador integral de Sonine \mathbb{K} realiza um isomorfismo entre espaços de Hölder, sendo \mathbb{K} definido por

$$\mathbb{K}\varphi(x) = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt, \quad 0 < x < b < \infty.$$

Assim, os espaços de Hölder são os mais convenientes para os operadores em estudo, visto que no caso dos espaços L_p o contradomínio $\mathbb{K}(L_p)$ não coincide com qualquer espaço L_q .

16. PRELIMINARES

16.1 FUNÇÕES QUASE MONÓTONAS

DEFINIÇÃO 16.1. Uma função não negativa $f(x)$, definida em $0 \leq x \leq b \leq \infty$, diz-se quase crescente se $f(x) \leq C f(y)$ para todo o $x \leq y$ e diz-se quase decrescente se $f(x) \leq C f(y)$ para todo o $x \geq y$.

C indica uma constante positiva que poderá representar diferentes valores numéricos em diferentes contextos.

16.2 CONJUNTOS FUNCIONAIS $W_\mu([0, b])$, $V_\lambda([0, b])$

Consideramos $0 < b < \infty$.

De acordo com [SAM.4] introduzimos as seguintes definições.

DEFINIÇÃO 16.2. Diremos que uma função não negativa $\rho(x)$ pertence ao conjunto $W_\mu([0, b])$, $\mu > 0$, de funções de ponderação se:

- 1) $\rho(x) \in C([0, b])$;
- 2) $\rho(0) = 0$, $\rho(x) > 0$ se $x > 0$;
- 3) $\rho(x)$ é quase crescente;
- 4) $\rho(x)/x^\mu$ é quase decrescente;
- 5) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\rho(x) - \rho(y)}{x - y} \right| \leq C \frac{\rho(x^*)}{x^*}, \quad x^* = \max(x, y). \quad (16.1)$$

DEFINIÇÃO 16.3. Diz-se que um núcleo não negativo $k(x)$ pertence ao conjunto $V_\lambda([0, b])$, $\lambda > 0$, se:

- 1) $k(x) > 0$;
- 2) $x^\lambda k(x)$ é quase crescente;
- 3) $[x^\lambda k(x)]_{x=0} = 0$;
- 4) existe ε , $0 < \varepsilon < \lambda$, tal que $x^{\lambda-\varepsilon} k(x)$ é quase decrescente;
- 5) existe $C > 0$ tal que

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} \leq C \frac{k(x)}{x+h}, \quad h > 0. \quad (16.2)$$

16.3 CLASSES DE BARI-STECHKIN-ZYGMUND

DEFINIÇÃO 16.4. Uma função não negativa $\omega(t)$ definida em $[0, b]$ pertence à classe de Zygmund $Z([0, b])$ se

- 1) $\omega(t) \in \mathbf{C}([0, b])$;
- 2) $\omega(0) = 0$ e $\omega(t) > 0$ se $t > 0$;
- 3) $\omega(t)$ é função quase crescente ;
- 4) $\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt \leq C\omega(h)$, $0 < h \leq b$, $C = C(\omega) > 0$ e C não depende de h .

DEFINIÇÃO 16.5. Uma função não negativa $\omega(t)$ definida em $[0, b]$ pertence à classe de Zygmund $Z_1([0, b])$ se

- 1) $\omega(t) \in \mathbf{C}([0, b])$;
- 2) $\omega(0) = 0$ e $\omega(t) > 0$ se $t > 0$;
- 3) $\omega(t)$ é função quase crescente ;
- 4) $\int_h^b \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq C \frac{\omega(h)}{h}$, $0 < h \leq b$, $C = C(\omega) > 0$ e C não depende de h .

DEFINIÇÃO 16.6. A classe de Bari-Steckin-Zygmund é definida por $\Phi([0, b]) = Z([0, b]) \cap Z_1([0, b])$.

Tem-se o seguinte resultado útil, [BAR]: se $\omega(t) \in \Phi([0, b])$ então existem números positivos δ_1, δ_2 , $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ e constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 h^{\delta_2} \leq \omega(h) \leq C_2 h^{\delta_1}. \quad (16.3)$$

16.4 ESPAÇOS DE HÖLDER GENERALIZADOS

Designaremos um espaço de Hölder generalizado por $H^\omega([0, b])$.

DEFINIÇÃO 16.7. Uma função $\varphi(x)$ pertence ao espaço $H^\omega([0, b])$ se o módulo de continuidade da função satisfizer a condição,

$$\omega(\varphi, h) := \sup_{\substack{0 < t < h \\ x+t, x \in [0, b]}} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq C\omega(h).$$

OBS. 16.8.

- i) $\omega(h)$ é uma função positiva denominada função característica do espaço $H^\omega([0, b])$ e tal que $\omega \in \Phi([0, b])$;
- ii) a notação $H_0^\omega([0, b])$ indica o subespaço de $H^\omega([0, b])$ no qual se verifica $\varphi(0) = 0$;
- iii) a função $\omega(\varphi, x)$ é uma função sub-aditiva: para todo o $x_1, x_2 \in [0, b]$ e tais que $(x_1 + x_2) \in [0, b]$ tem-se

$$\omega(\varphi, x_1 + x_2) \leq C_1 \omega(\varphi, x_1) + C_2 \omega(\varphi, x_2).$$

DEFINIÇÃO 16.9. A norma de uma função φ no espaço H^ω é definida por

$$\|\varphi\|_{H^\omega} = \|\varphi\|_C + \sup_{h>0} \left[\frac{\omega(\varphi, h)}{\omega(h)} \right].$$

DEFINIÇÃO 16.10. Uma função $f(x)$ pertence ao espaço generalizado de Hölder das funções ponderadas, que se escreve $f(x) \in H_0^\omega(\rho)$ se

$$\rho(x)f(x) \in H_0^\omega([0, b]),$$

onde $\rho(x)$ é uma função de ponderação, não negativa. Além disso,

$$\|f\|_{H_0^\omega(\rho)} = \|\rho f\|_{H_0^\omega}.$$

16.5 DESIGUALDADES

Com as notações já definidas verificam-se as seguintes desigualdades:

1)

$$\frac{\omega(\varphi, x)}{x} \leq C \frac{\omega(\varphi, y)}{y}, \quad x \geq y, \quad (16.4)$$

que equivale a afirmar que $\frac{\omega(\varphi, x)}{x}$ é uma função quase decrescente.

2) Se $0 < \alpha < 1$, então

$$\frac{\omega(\varphi, h)}{h^\alpha} \leq C \int_0^h \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (16.5)$$

3) Se $\rho(x) \in \mathbf{W}_\mu([0, b])$ então

$$\rho(x) \leq C \left(\frac{x}{y}\right)^\mu \rho(y), \quad x \geq y. \quad (16.6)$$

4) Se $\rho(x) \in \mathbf{W}_\mu([0, b])$ e $0 < \mu < 1$ então

$$\left| \frac{\rho(x) - \rho(y)}{x - y} \right| \leq C \frac{\rho(x)}{x} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\rho(x) - \rho(y)}{x - y} \right| \leq C \frac{\rho(y)}{y}. \quad (16.7)$$

5) Se $k(x) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$ então

$$k(x) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda k(y), \quad x \leq y. \quad (16.8)$$

Além disso existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$k(x) \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda - \varepsilon} k(y), \quad x \geq y. \quad (16.9)$$

6) Se $\lambda \leq 1$ então

$$|x^\lambda - y^\lambda| \leq C(x - y)y^{\lambda-1}, \quad x \geq y > 0. \quad (16.10)$$

7) Se $\lambda \geq 0$ então

$$|x^\lambda - y^\lambda| \leq C(x - y)x^{\lambda-1}, \quad x \geq y > 0. \quad (16.11)$$

16.6 LEMAS

Os seguintes Lemas são importantes para a demonstração de resultados no contexto do presente capítulo.

LEMA 16.11. *Se uma função $l(x)$ satisfaz a condição*

$$\left| \frac{l(x+h)-l(x)}{h} \right| \leq C \left| \frac{l(x+h)}{x+h} \right|,$$

para todo o $x \in [0, b]$ e $h > 0$ e se $l(x_0) = 0$, então tem-se $l(x) = 0$ para todo o $x \geq x_0$.

DEM. Seja $l(x_0) = 0$. Então $\left| \frac{l(x_0+h)}{h} \right| \leq C \left| \frac{l(x_0+h)}{x_0+h} \right|$.

Seja $l(x_0+h) \neq 0$ para todo o $h > 0$. Então existe uma sucessão $h_k \rightarrow 0$ tal que $l(x_0+h_k) \neq 0$. Obtemos $\left| \frac{l(x_0+h_k)}{h_k} \right| \leq C \left| \frac{l(x_0+h_k)}{x_0+h_k} \right|$ ou $\frac{1}{h_k} \leq C \frac{1}{|x_0+h_k|}$ com $h_k \rightarrow 0$ o que é impossível. Concluimos que deve ser $l(x_0+h) = 0$. ■

LEMA 16.12. *Seja uma função $l(x)$ que satisfaz as seguintes condições:*

1) $l(x)$ é quase decrescente em $[0, b]$ e $l(x) \geq 0$;

2) $\left| \frac{l(x+h)-l(x)}{h} \right| \leq C \frac{l(x)}{x+h}$, $h > 0$.

Seja ainda $F(x) = l(x)f(x)$, $f(x) \in \mathbf{C}([0, b])$, $f(0) = 0$.

Então é válida a estimativa

$$\omega(F, h) \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f, t)}{t} dt, \quad C > 0, \quad C \text{ independente de } h. \quad (16.12)$$

DEM.

$$F(x+h) - F(x) = l(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[l(x+h) - l(x)] := A_1 + A_2.$$

Temos

$$|A_1| \leq C\omega(f, h)l(x+h) \leq Cl(h)\omega(f, h) \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f, t)}{t} dt. \quad (16.13)$$

Aplicando a condição 2) obtemos

$$|A_2| \leq C\omega(f,x)\frac{h}{x+h}l(x) \leq C\omega(f,x)l(x) \quad (16.14)$$

Atendendo a que

$$\omega(f,x)l(x) \leq C \int_0^x \frac{l(t)\omega(f,t)}{t} dt, \text{ para todo o } x \in [0, b],$$

resulta, com $x \leq h$, que

$$|A_2| \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f,t)}{t} dt. \quad (16.15)$$

Se $x \geq h$ usamos de novo (16.14) :

$$|A_2| \leq C\omega(f,x)\frac{h}{x+h}l(x) \leq C\frac{\omega(f,x+h)}{x+h}hl(x) \leq C\frac{\omega(f,h)}{h}hl(h) \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f,t)}{t} dt. \quad (16.16)$$

Portanto

$$\omega(F, h) = \sup_{h>0} |F(x+h) - F(x)| \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f,t)}{t} dt.$$

■

17. APLICAÇÃO ISOMÓRFICA PELO OPERADOR INTEGRAL DE SONINE EM ESPAÇOS $H_0^\omega([0, b])$

Para o operador integral \mathbb{K} com o núcleo $k \in \mathbf{V}_\lambda$ existe o seguinte resultado, [SAM.4], Teorema 3:

TEOREMA 17.1. *Seja uma função $\omega(t) \in \Phi([0, b])$ e os núcleos associados de Sonine $l(x), k(x) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$, $0 < \lambda < 1$, que verificam as seguintes condições:*

- 1) $l(x) \geq 0$, $k(x) \geq 0$, $0 < x < b$;
- 2) $l(x), k(x)$ são quase decrescentes em $[0, b]$;
- 3) $xk(x)\omega(x) \in \mathbf{Z}_1([0, b])$;

4) $\omega(t) \in \mathbf{Z}([0, b])$;

Então o operador \mathbb{K} é limitado de $\mathbf{H}_0^\omega([0, b])$ em $\mathbf{H}_0^{\omega'}([0, b])$, com $\omega_1(t) = tk(t)\omega(t)$.

O nosso objectivo é demonstrar que o operador inverso \mathbb{K}^{-1} é limitado de $\mathbf{H}_0^{\omega'}$ em \mathbf{H}_0^ω .

17.1 ESTIMATIVA DO MÓDULO DE CONTINUIDADE DO OPERADOR INVERSO \mathbb{K}^{-1} EM $\mathbf{H}_0^\omega([0, b])$

O teorema que se segue dá uma estimativa do módulo de continuidade do operador inverso.

TEOREMA 17.2. *Seja um núcleo $l(x) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$, $0 < \lambda < 1$, que satisfaz (9.4) e (9.5) e uma função $f \in \mathbf{H}_0^\omega([0, b])$. Então é válida a estimativa*

$$\omega(\mathbb{K}^{-1}f, h) \leq C \int_0^h \frac{l(t)\omega(f, t)}{t} dt, \quad h > 0. \quad (17.1)$$

DEM. Consideremos o operador inverso na forma de Marchaud (9.3) e

$$\Psi(x) = \int_0^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt. \quad \text{Então}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x+h) - \Psi(x) &= \int_0^x l'(t)[f(x+h-t) - f(x+h) + f(x) - f(x-t)]dt + \\ &+ \int_x^{x+h} l'(t)[f(x+h-t) - f(x+h)]dt = B_1 + B_2. \end{aligned}$$

(17.2)

a) Estimativa de B_1 .

i) Seja $x \leq h$. Então

$$|B_1| \leq 2 \int_0^h \omega(f, t) |l'(t)| dt.$$

Mas, pela condição 5) da Def.16.3 temos $|l'(x)| \leq C \frac{l(x)}{x}$ e

$$|B_1| \leq C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt. \quad (17.3)$$

ii) Seja $x > h$.

Decompomos o integral $\int_0^x = \int_0^h + \int_h^x$ e usamos a desigualdade (17.3) no caso do integral \int_0^h . Obtemos

$$|B_1| \leq C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt + 2\omega(f, h) \int_h^x |l'(t)| dt = C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt + 2\omega(f, h) I_h(x), \quad (17.4)$$

onde $I_h(x) = \int_h^x |l'(t)| dt$.

Vamos estimar $I_h(x)$. Na vizinhança $0 < t < \varepsilon_0$ temos $|l'(t)| = -l'(t)$ pelo que, para $h \leq t \leq x \leq \varepsilon_0$ obtemos

$$I_h(x) = - \int_h^x l'(t) dt = l(h) - l(x) \leq l(h).$$

Se $x \geq \varepsilon_0$ e $h \geq \varepsilon_0$, isto é, $0 < \varepsilon_0 \leq h \leq t \leq x \leq b$ obtém-se

$$I_h(x) = \int_h^x |l'(t)| dt \leq \int_{\varepsilon_0}^b |l'(t)| dt \leq C$$

com uma constante C apropriada.

Se $0 < h < \varepsilon_0 < x$ então ainda pode ser $t > \varepsilon_0$ ou $t < \varepsilon_0$.

$$\begin{aligned} I_h(x) &= \int_h^x |l'(t)| dt \leq l(h) - l(\varepsilon_0) + \int_{\varepsilon_0}^b |l'(t)| dt = \\ &= l(h) - l(\varepsilon_0) + C_1 \leq Cl(h). \end{aligned}$$

Portanto podemos sempre escrever

$$I_h(x) = \int_h^x |l'(t)| dt \leq Cl(h), \quad (17.5)$$

e a partir de (17.4) obtemos

$$|B_1| \leq C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt. \quad (17.6)$$

b) Estimativa de B_2 .

$$|B_2| \leq \int_x^{x+h} |l'(t)| |f(x+h-t) - f(x+h)| dt \leq \int_x^{x+h} |l'(t)| \omega(f, t) dt. \quad (17.7)$$

Com $s = t - x$ resulta

$$|B_2| \leq C \int_0^h \omega(f, x+t) \frac{l(x+t)}{x+t} dt \leq C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt. \quad (17.8)$$

Por (17.3), (17.6), (17.7) e (17.8) tem-se

$$\omega(\Psi, h) \leq C \int_0^h t^{-1} l(t) \omega(f, t) dt. \quad (17.9)$$

Atendendo à expressão (16.12) do Lema 16.12, aplicável ao primeiro termo da expressão de $\mathbb{K}^{-1}f$, e a (17.9) obtemos o resultado procurado (17.1). ■

17.2 CONTINUIDADE DO OPERADOR INVERSO \mathbb{K}^{-1}

O teorema seguinte utiliza a estimativa obtida no Teorema 17.2, pelo que deverá obedecer às mesmas hipóteses deste teorema, assim como às condições sobre $l(x)$ que permitem a existência de \mathbb{K}^{-1} .

TEOREMA 17.3. *Seja um núcleo $l(x) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$, $0 < \lambda < 1$.*

Admita-se que :

- 1) *existe $l'(x)$ e $\int_\delta^b |l'(x)| dx < \infty$, $0 < \delta < b$;*

2) $l(t)\omega(t) \in \mathbf{Z}([0, b])$;

3) $[l(x)\omega(x)]_{x=0} = 0$.

Então \mathbb{K}^{-1} aplica continuamente $\mathbf{H}_0^0([0, b])$ em $\mathbf{H}_0^1([0, b])$, com $\omega_1(h) = l(h)\omega(h)$.

DEM.

Temos de provar que

$$\|(\mathbb{K}^{-1}f)(x)\|_{\mathbf{C}} < C \|f\|_{\mathbf{H}_0^0} \quad \text{e} \quad \sup_{h>0} \frac{\omega(\mathbb{K}^{-1}f, h)}{\omega_1(h)} \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_0^0}.$$

Temos:

$$\mathbb{K}^{-1}f(x) = l(x)f(x) + \Psi(x), \quad \text{com} \quad \Psi(x) = \int_0^x l'(t)[f(x-t) - f(x)]dt.$$

Obviamente

$$|l(x)f(x)| \leq Cl(x)\omega(f, x) \leq Cl(x)\omega(x)\|f\|_{\mathbf{H}_0^0} \leq C_1 \|f\|_{\mathbf{H}_0^0}. \quad (17.10)$$

Visto que $|l'(x)| \leq C \frac{l(x)}{x}$ para $l(x) \in \mathbf{V}_\lambda$ obtemos

$$|\Psi(x)| \leq C \int_0^x \frac{l(t)}{t} \omega(f, t) dt \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_0^0} \int_0^x \frac{l(t)\omega(t)}{t} dt. \quad (17.11)$$

Das estimativas (17.10) e (17.11) decorre que $\mathbb{K}^{-1}f(0) = 0$.

Temos ainda

$$\frac{\omega(\mathbb{K}^{-1}f, h)}{\omega_1(h)} \leq \frac{C}{l(h)\omega(h)} \int_0^h t^{-1} l(t)\omega(f, t) dt. \quad (17.11a)$$

Pela condição 2) da hipótese

$$\frac{C}{l(h)\omega(h)} \int_0^h t^{-1} l(t)\omega(t)\|f\|_{\mathbf{H}_0^0} dt \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_0^0}. \quad (17.12)$$

Em virtude de (17.10), (17.11) e (17.11a) concluímos que

$$\|(\mathbb{K}^{-1}f)(x)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_0^0}. \quad \blacksquare$$

17.3 APLICAÇÃO ISOMÓRFICA PELO OPERADOR INTEGRAL DE SONINE

TEOREMA 17.4. *Com as mesmas hipóteses dos Teoremas 17.1 e 17.3, o operador \mathbb{K} aplica isomorficamente $\mathbf{H}_0^\omega([0, b])$ em $\mathbf{H}_0^{\omega_1}([0, b])$, com $\omega_1(h) = \frac{\omega(h)}{l(h)}$.*

DEM. Tem-se a imersão

$$(\mathbb{K}\varphi)(x) = f(x) \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}([0, b]) \text{ e } \mathbf{H}_0^{\omega_1}([0, b]) \subset \mathbf{L}_1([0, b]),$$

e pelos Teoremas 17.1 e 17.3 tem-se também $\mathbb{K} : \mathbf{H}_0^\omega \rightarrow \mathbf{H}_0^{\omega_1}$, e $\mathbb{K}^{-1} : \mathbf{H}_0^{\omega_1} \rightarrow \mathbf{H}_0^\omega$. Então é suficiente provar que uma função arbitrária $f \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}([0, b])$ é representável na forma $f = \mathbb{K}\varphi$, onde $\varphi \in \mathbf{L}_p$ com algum $p > 1$, o que acontece se forem verificadas as condições (10.15) e (10.17).

Pela condição $[l(x)\omega(x)]_{x=0} = 0$ concluímos que

$$|l(x)f(x)| \leq Cl(x)\omega(x) \leq C_1 < \infty,$$

pelo que $l(x)f(x) \in \mathbf{L}_p$ para qualquer $p \geq 1$.

Temos ainda

$$|\Psi_\varepsilon(x)| \leq \int_0^{x-\varepsilon} |f(t) - f(x)| |l'(x-t)| dt \leq C \int_0^x t^{-1} \omega(f, t) l(t) dt \leq C \int_0^b \frac{l(t)\omega(t)}{t} dt = \text{const.},$$

pelo que $\sup_{\varepsilon > 0} \|\Psi_\varepsilon\|_p < \infty$ para qualquer $p \geq 1$.

Portanto para toda a função $f \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}([0, b])$ existe a representação $f = \mathbb{K}\varphi$, $\varphi \in \mathbf{L}_p([0, b])$, $1 \leq p < \infty$. Visto que \mathbb{K}^{-1} aplica continuamente $\mathbf{H}_0^{\omega_1}$ em \mathbf{H}_0^ω obtemos que $\varphi \in \mathbf{H}_0^\omega$. ■

18. PROPRIEDADES DO OPERADOR INTEGRAL DE SONINE EM ESPAÇOS GENERALIZADOS PONDERADOS DE HÖLDER

Consideramos o espaço ponderado $\mathbf{H}_0^\omega(\rho)$ com o peso $\rho \in \mathbf{W}_\mu$. A limitação dos operadores integrais do tipo \mathbb{K} nestes espaços foi tratada em [SAM.4] onde foi obtido o seguinte resultado:

TEOREMA 18.1. *Seja $\rho(x) \in \mathbf{W}_\mu([0, b])$, $0 < \mu < 2$ e $k(t) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$, $0 < \lambda < 1$. Admita-se que:*

- 1) $\mu < 1 + \lambda$;
- 2) $t^{-\max(0, \mu-1)}\omega(t) \in \mathbf{Z}([0, b])$;

3) $tk(t)\omega(t) \in \mathbf{Z}_1([0, b])$.

Então o operador \mathbb{K} é limitado de $\mathbf{H}_0^\omega(\rho)$ em $\mathbf{H}_0^{\omega_k}(\rho)$, com $\omega_k(h) = hk(h)\omega(h)$.

Observamos que a característica $\omega_k(h) = hk(h)\omega(h)$ no teorema acima pode ser substituída por $\omega_1(h) = \frac{\omega(h)}{l(h)}$ sob alguma condição adicional. Neste contexto é válido o seguinte Lema.

LEMA 18.2. *Suponhamos que $k(x)$ e $l(x)$ são não negativos e que existem constantes $\alpha, \beta \in (0, 1)$, tais que $x^\alpha k(x)$ e $x^\beta l(x)$ são quase crescentes.*

Então

$$\frac{C_1}{l(x)} \leq xk(x) \leq \frac{C_2}{l(x)}.$$

DEM. A desigualdade $xk(x)l(x) \leq C_2$ obtém-se como no Lema 4.3. Para a outra desigualdade temos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^x k(x-t)l(t)dt = \int_0^x (x-t)^\alpha k(x-t)t^\beta l(t) \frac{1}{(x-t)^\alpha t^\beta} dt \leq Cx^{\alpha+\beta} k(x)l(x) \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha t^\beta} dt \leq \\ &\leq C_1 xk(x)l(x). \end{aligned}$$

■

O nosso objectivo é estabelecer a limitação do operador inverso.

18.1 ESTIMATIVA DO MÓDULO DE CONTINUIDADE DO OPERADOR INVERSO

Introduzimos uma condição adicional para o núcleo $l(x)$. Vamos supor que:

$$1) \quad l(x) \in \mathbf{C}^2([\delta, b]) \text{ para qualquer } \delta \in (0, b); \tag{18.1}$$

$$2) \quad \text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \left| \frac{l'(x)-l'(t)}{x-t} \right| \leq C \frac{|l'(t)|}{x}, \quad 0 < t < x \leq \delta. \tag{18.2}$$

Observamos que a condição (18.2) é válida, por exemplo, para funções $l(x) = x^{-\alpha}(\ln \frac{A}{x})^p$, $\alpha \in (0, 1)$, $p \in \mathbb{R}$, $A > b$ e para funções mais complicadas com somas, produtos e composições de funções de potência e função logarítmica.

O lema seguinte é válido para exemplos importantes em aplicações concretas e em particular para os exemplos tratados na secção 11.

LEMA 18.3. *Seja $l(x) = \frac{a(x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ e $a(x) \in \mathbf{C}^2([0, b])$ e $a(0) \neq 0$. Então $l(x)$ satisfaz as condições (18.1) – (18.2).*

DEM. A condição (18.1) é óbvia. A condição (18.2) reescreve-se na forma

$$|l'(x) - l'(\lambda x)| \leq C(1 - \lambda)|l'(\lambda x)|, \\ 0 < \lambda < 1, \quad 0 < x \leq \delta.$$

Esta condição para a função $l(x) = x^{-\alpha}a(x)$, depois de simplificada, tem a forma

$$|\alpha a(\lambda x) - \alpha \lambda^{1+\alpha} a(x) + x \lambda^{1+\alpha} a'(x) - \lambda x a'(\lambda x)| \leq C(1 - \lambda)|\alpha a(\lambda x) - \lambda x a'(\lambda x)|.$$

Designando $g(x) = \alpha a(x) - x a'(x)$ vemos que a desigualdade anterior é

$$|g(\lambda x) - \lambda^{1+\alpha} g(x)| \leq C(1 - \lambda)g(\lambda x),$$

ou

$$\left| \lambda^{1+\alpha} \frac{g(x)}{g(\lambda x)} - 1 \right| \leq C(1 - \lambda). \quad (18.3)$$

Observamos que $g(\lambda x) \neq 0$, $0 < x < \delta$, no caso de δ pequeno, devido à condição $a(0) \neq 0$.

Obviamente

$$\left| \lambda^{1+\alpha} \frac{g(x)}{g(\lambda x)} - 1 \right| \leq |1 - \lambda^{1+\alpha}| + \lambda^{1+\alpha} \left| \frac{g(x) - g(\lambda x)}{g(\lambda x)} \right|.$$

Portanto, para obter (18.3) é suficiente demonstrar que

$$|g(x) - g(\lambda x)| \leq C(1 - \lambda),$$

o que é válido visto que $g(x) \in \mathbf{C}^1([0, b])$. ■

No teorema seguinte usamos algumas ideias da demonstração de um teorema semelhante provado em [KAR.1] para o caso particular de $k(x) = x^{-\alpha}$, $l(x) = Cx^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$.

TEOREMA 18.4. *Seja um núcleo de Sonine $l(x) \in \mathbf{V}_\lambda([0, b])$, $0 < \lambda < 1$. Admita-se que existe a derivada $l'(x)$ para todo o $x \in (0, b)$, que $|l'(x)|$ é quase decrescente e ainda que $l'(x)$ satisfaz as condições (18.1) – (18.2). Então, com $\rho(x) \in \mathbf{W}_\mu([0, b])$, $0 < \mu < 2$ é válida a estimativa*

$$\omega\left(\rho \mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho}, h\right) \leq Ch^\gamma \int_0^h \frac{l(t)\omega(f, t)}{t^{1+\gamma}} dt + Ch \int_h^b \frac{l(t)\omega(f, t)}{t^2} dt, \quad (18.4)$$

onde $\gamma = \max(0, \mu - 1)$.

DEM. Temos

$$\rho(x) \left(\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho} \right) (x) = l(x)f(x) + \int_0^x \left[\frac{\rho(x)}{\rho(x-t)} f(x-t) - f(x) \right] l'(t) dt = \mathbb{K}^{-1} f(x) + \mathbb{N}f(x), \quad (18.5)$$

onde

$$(\mathbb{N}f)(x) = \int_0^x \frac{\rho(x) - \rho(x-t)}{\rho(x-t)} l'(t) f(x-t) dt := \int_0^x B(x, t) f(t) dt,$$

com

$$B(x, t) = \frac{\rho(x) - \rho(t)}{\rho(t)} l'(x-t). \quad (18.6)$$

A estimativa do módulo de continuidade de $\mathbb{K}^{-1}f(x)$ é dada pelo Teorema 17.2. Vamos estimar $\omega(\mathbb{N}f, h)$. Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{N}f(x+h) - \mathbb{N}f(x) &= \int_x^{x+h} B(x+h, t) f(t) dt + \int_0^x [B(x+h, t) - B(x, t)] f(t) dt = \\ &:= G_1(x, h) + G_2(x, h), \end{aligned} \quad (18.7)$$

e

$$G_2(x, h) = \int_0^x B_1(x, h, t) f(t) dt, \quad \text{com } B_1(x, h, t) = B(x+h, t) - B(x, t).$$

Notamos que é suficiente estimar $\omega(\mathbb{N}f, h)$ apenas para valores pequenos de h , $0 < h \leq \frac{\delta}{2}$, onde δ é da condição (18.2). No caso de $h \geq \frac{\delta}{2}$ a estimativa de $\omega(\mathbb{N}f, h)$ é trivial, visto que a função $\mathbb{N}f(x)$ é limitada (ver página 120 e 121). Portanto no que se segue admitimos que $h < \frac{\delta}{2}$.

i) Estimativa de $B(x, t)$.

Pelas condições (16.1) e (16.2) temos

$$|B(x, t)| \leq C \frac{l(x-t)}{t^{\mu-1} x^{2-\mu}} \leq C \frac{l(x-t)}{t}, \quad t < x. \quad (18.8)$$

ii) Estimativa de $G_1(x, h)$.

Temos

$$G_1(x, h) \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, x+t)}{x+t} l(h-t) dt = C \int_0^{h/2} \frac{\omega(f, x+t)}{x+t} l(h-t) dt + C \int_{h/2}^h \frac{\omega(f, x+t)}{x+t} l(h-t) dt.$$

Pela desigualdade (16.4) e atendendo a que $l(t)$ é quase decrescente obtemos

$$\int_0^{h/2} \frac{\omega(f, x+t)}{x+t} l(h-t) dt \leq C \int_0^{h/2} \frac{\omega(f, t)}{t} l(t) dt,$$

e

$$\int_{h/2}^h \frac{\omega(f, x+t)}{x+t} l(h-t) dt = \int_0^{h/2} \frac{\omega(f, x+h-t)}{x+h-t} l(t) dt \leq C \int_0^{h/2} \frac{\omega(f, t)}{t} l(t) dt.$$

Temos portanto o resultado

$$G_1(x, h) \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t} l(t) dt. \quad (18.9)$$

iii) Estimativa de $B_1(x, h, t)$:

Temos

$$B_1(x, h, t) = \frac{\rho(x+h)-\rho(x)}{\rho(t)} l'(x+h-t) + \frac{\rho(x)-\rho(t)}{\rho(t)} [l'(x+h-t) - l'(x-t)] = A_1 + A_2.$$

Visto que $|l'(x)| \leq C \frac{l(x)}{x}$, temos

$$|l'(x+h-t)| \leq C \frac{l(x+h-t)}{x+h-t}.$$

Pelas desigualdades (16.1) e (16.6) obtemos:

$$\frac{\rho(x+h)-\rho(x)}{\rho(t)} \leq C \frac{h(x+h)^{\mu-1}}{t^\mu}.$$

Portanto

$$|A_1| \leq C \frac{h(x+h)^{\mu-1}}{t^\mu} \frac{l(x+h-t)}{x+h-t}.$$

Para estimar A_2 utilizamos (18.1) – (18.2). Quando $x-t < \frac{\delta}{2}$ temos ainda $x-t+h < \delta$ visto que $h < \frac{\delta}{2}$. Portanto podemos usar (18.2) e obtemos

$$|l'(x+h-t) - l'(x-t)| \leq Ch \frac{l'(x-t)}{x+h-t} \leq Ch \frac{l(x-t)}{(x-t)(x+h-t)}.$$

Então

$$|A_2| \leq C \frac{hx^{\mu-1}l(x-t)}{t^\mu(x+h-t)}.$$

Assim

$$|B_1(x, h, t)| \leq C \frac{h}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} \left[\frac{(x+h)^{\mu-1}}{t^{\mu-1}} + \frac{x^{\mu-1}}{t^{\mu-1}} \right]. \quad (18.10)$$

iv) Estimativa de $G_2(x, h)$.

Temos

$$|G_2(x, h)| \leq Ch \int_0^x \left[\frac{(x+h)^{\mu-1}}{t^{\mu-1}} + \frac{x^{\mu-1}}{t^{\mu-1}} \right] \frac{l(x-t)}{x+h-t} \frac{\omega(f, t)}{t} dt. \quad (18.11)$$

Tratamos os casos $0 < \mu \leq 1$ e $1 < \mu < 2$ em separado.

a) Primeiro caso: $0 < \mu \leq 1$.

Neste caso, com $t \leq x$ temos $\left(\frac{t}{x+h}\right)^{1-\mu} \leq \left(\frac{t}{x}\right)^{1-\mu} \leq 1$ pelo que

$$|G_2(x, h)| \leq Ch \int_0^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt.$$

Tratamos primeiramente o caso mais fácil quando $x \leq 2h$. Neste caso

$$|G_2(x, h)| \leq Ch \int_0^{x/2} \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(t)}{h} dt + Ch \int_{x/2}^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt. \quad (18.12)$$

No segundo termo atendemos a que $\frac{\omega(f, t)}{t}$ é quase decrescente e obtemos

$$|G_2(x, h)| \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt + C \int_0^{x/2} \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt. \quad (18.13)$$

Portanto

$$|G_2(x, h)| \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt. \quad (18.14)$$

No caso de $x \geq 2h$ temos

$$|G_2(x, h)| \leq Ch \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt + Ch \int_h^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt. \quad (18.15)$$

No primeiro termo temos $x+h-t > h$ e $x-t > t$. Portanto como no caso anterior obtemos

$$|G_2(x, h)| \leq Ch \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt + D(x, h), \quad (18.16)$$

com

$$\begin{aligned} D(x, h) &= Ch \int_h^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt = Ch \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt + Ch \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt := \\ &:= D_1(x, h) + D_2(x, h). \end{aligned} \quad (18.17)$$

No termo $D_1(x, h)$ temos $x - t > t$. Portanto

$$D_1(x, h) \leq Ch \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt \leq Ch \int_h^b \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt. \quad (18.18)$$

No termo $D_2(x, h)$ fazemos a integração da seguinte maneira:

$$D_2(x, h) = Ch \int_{\frac{x}{2}}^{x-h} \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt + Ch \int_{x-h}^x \frac{\omega(f, t)}{t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt.$$

No primeiro termo temos $\frac{1}{x+h-t} \leq \frac{1}{x-t}$, no segundo termo utilizamos o facto de ser $\frac{1}{x+h-t} \leq \frac{1}{h}$ e usamos ainda em cada termo a relação $\frac{\omega(f, t)}{t} \leq \frac{\omega(f, x-t)}{x-t}$ pois $t > x - t$ e $\frac{\omega(f, t)}{t}$ é quase decrescente. Obtemos

$$\begin{aligned} D_2(x, h) &\leq Ch \int_{\frac{x}{2}}^{x-h} \frac{\omega(f, x-t)l(x-t)}{(x-t)^2} dt + C \int_{x-h}^x \frac{\omega(f, x-t)l(x-t)}{x-t} dt = \\ &= Ch \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt + C \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Daqui

$$D_2(x, h) \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt + Ch \int_h^b \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt. \quad (18.19)$$

Pelas fórmulas (18.18), (18.19), pelas desigualdades (18.14), (18.16) e pela relação (18.17) obtemos

$$|G_2(x, h)| \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t) l(t)}{t} dt + Ch \int_h^b \frac{\omega(f, t) l(t)}{t^2} dt. \quad (18.20)$$

Em virtude das fórmulas (18.7), (18.9) e (18.20) deduzimos para $\omega(\mathbb{N}f, h)$ a mesma estimativa que em (18.20). Usando ainda a estimativa (17.1) para o termo $\mathbb{K}^{-1}f$ em (18.5), chegamos à estimativa (18.4) do tipo de Zygmund no caso $0 < \mu \leq 1$.

b) Segundo caso: $1 < \mu < 2$. Neste caso

$$|G_2(x, h)| \leq Ch(x+h)^{\mu-1} \int_0^x \frac{\omega(f, t) l(x-t)}{t^\mu (x+h-t)} dt. \quad (A)$$

Consideramos primeiramente o caso $x \leq 4h$. Repetindo os raciocínios em (18.12) – (18.13) obtemos

$$|G_2(x, h)| \leq Ch^{\mu-1} \int_0^h \frac{\omega(f, t) l(t)}{t^\mu} dt. \quad (18.21)$$

Passamos agora ao caso mais difícil $x \geq 4h$. Temos

$$\begin{aligned} |G_2(x, h)| &\leq Ch(x+h)^{\mu-1} \int_0^h \frac{\omega(f, t) l(x-t)}{t^\mu (x+h-t)} dt + Ch(x+h)^{\mu-1} \int_h^x \frac{\omega(f, t) l(x-t)}{t^\mu (x+h-t)} dt := \\ &:= C_\mu(x, h) + D_\mu(x, h). \end{aligned}$$

No termo $C_\mu(x, h)$ temos $x-t > \frac{x+h}{2}$. Portanto $\frac{l(x-t)}{x+h-t} \leq C \frac{l(\frac{x+h}{2})}{x+h}$. Então

$$C_\mu(x, h) \leq C \frac{hl(\frac{x+h}{2})}{(x+h)^{2-\mu}} \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t^\mu} dt.$$

A função $\frac{l(x)}{x^{2-\mu}}$ é quase decrescente e $\frac{x+h}{2} > h$. Portanto

$$C_\mu(x, h) \leq Ch^{\mu-1} l(h) \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t^\mu} dt.$$

Visto que $l(x)$ é quase decrescente e $h > t$ obtemos

$$C_\mu(x, h) \leq Ch^{\mu-1} \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^\mu} dt. \quad (18.22)$$

Para o termo $D_\mu(x, h)$ temos

$$\begin{aligned} D_\mu(x, h) &\leq Ch(x+h)^{\mu-1} \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)}{t^\mu} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt + Ch(x+h)^{\mu-1} \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)}{t^\mu} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt := \\ &:= D_\mu^1(x, h) + D_\mu^2(x, h). \end{aligned}$$

Notamos que $x-t > t$ e $x+h-t > \frac{x+h}{2}$ no termo $D_\mu^1(x, h)$ e portanto

$$D_\mu^1(x, h) \leq Ch(x+h)^{\mu-2} \int_h^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^\mu} dt.$$

Visto que $(x+h)^{\mu-2} \leq t^{\mu-2}$ obtemos

$$D_\mu^1(x, h) \leq Ch \int_h^b \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt. \quad (18.23)$$

Para o termo $D_\mu^2(x, h)$ fazemos

$$D_\mu^2(x, h) = Ch(x+h)^{\mu-1} \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+h}{2}} + \int_{\frac{x+h}{2}}^{x-h} + \int_{x-h}^x \right) := E_\mu^1(x, h) + E_\mu^2(x, h) + E_\mu^3(x, h).$$

Esta partição é possível quando $x-h > \frac{x+h}{2}$, o que é válido porque $x \geq 4h$. No termo $E_\mu^1(x, h)$ utilizamos a relação $x+h-t > \frac{x+h}{2}$ e obtemos

$$E_\mu^1(x, h) \leq Ch(x+h)^{\mu-2} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+h}{2}} \frac{\omega(f, t)l(x-t)}{t^\mu} dt \leq Ch^{\mu-1} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\omega(f, t+\frac{x}{2})l(\frac{x}{2}-t)}{(t+\frac{x}{2})^\mu} dt.$$

Visto que as funções $\frac{\omega(f, t)}{t^\mu}$ e $l(t)$ são quase decrescentes e $t+\frac{x}{2} > t$ e $\frac{x}{2}-t > t$ obtemos

$$E_\mu^1(x, h) \leq Ch^{\mu-1} \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^\mu} dt. \quad (18.24)$$

No termo $E_{\mu}^2(x, h)$ observamos que $t > \frac{x+h}{2}$ e portanto

$$\frac{\omega(f, t)}{t^{\mu}} = \frac{1}{t^{\mu-1}} \frac{\omega(f, t)}{t} \leq \frac{C}{(x+h)^{\mu-1}} \frac{\omega(f, x-t)}{x-t},$$

visto que $t > x-t$ e $\frac{\omega(f, t)}{t}$ é quase decrescente. Portanto

$$E_{\mu}^2(x, h) \leq Ch \int_{\frac{x+h}{2}}^{x-h} \frac{\omega(f, x-t)}{x-t} \frac{l(x-t)}{x+h-t} dt = Ch \int_h^{\frac{x-h}{2}} \frac{\omega(f, t)l(t)}{l(t+h)} dt.$$

Daqui resulta

$$E_{\mu}^2(x, h) \leq Ch \int_h^b \frac{\omega(f, t)l(t)}{t^2} dt.$$

(18.25)

Finalmente, no termo $E_{\mu}^3(x, h)$ utilizamos o facto de ser $t > x-h > \frac{x}{2}$ e portanto

$$\frac{1}{t^{\mu}} = \frac{1}{t^{\mu-1}} \frac{1}{t} \leq \frac{C}{(x+h)^{\mu-1}} \frac{1}{t}.$$

Então

$$E_{\mu}^3(x, h) \leq Ch \int_{x-h}^x \frac{\omega(f, t)l(x-t)}{l(x+h-t)} dt = Ch \int_0^h \frac{\omega(f, x-t)l(t)}{(x-t)(t+h)} dt \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, x-t)l(t)}{x-t} dt.$$

Visto que $x-t > t$ daqui resulta

$$E_{\mu}^3(x, h) \leq C \int_0^h \frac{\omega(f, t)l(t)}{t} dt.$$

(18.26)

Reunindo as estimativas (18.21) – (18.26) obtemos de novo a estimativa (18.4) com $\mu > 1$. ■

18.2 CONTINUIDADE DO OPERADOR INVERSO

O teorema seguinte mostra que o operador \mathbb{K}^{-1} aplica continuamente o espaço $H_0^{\omega}(\rho)$ no espaço $H_0^{\omega_1}(\rho)$, $\omega_1(x) = \omega(x)l(x)$ com as suposições naturais sobre $\omega(x)$ e $\rho(x)$.

TEOREMA 18.5. *Seja um núcleo de Sonine $l(x)$ que obedece às condições do Teorema 18.4, $\rho(x) \in \mathbf{W}_{\mu}([0, b])$, $0 < \mu < 2$, e $\omega(x)$ satisfaz as seguintes*

condições:

- i) $\frac{\omega(x)}{x}$ é quase decrescente;
- ii) $\frac{\omega(x)l(x)}{x^\gamma} \in \mathbf{Z}([0, b])$, $\gamma = \max(0, \mu - 1)$;
- iii) $\omega(x)l(x) \in \mathbf{Z}_1([0, b])$.

Então o operador \mathbb{K}^{-1} aplica continuamente $\mathbf{H}_0^\omega(\rho)$ em $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$, $\omega_1(x) = \omega(x)l(x)$.

DEM. Obviamente

$$\mathbb{K}^{-1} : \mathbf{H}_0^\omega(\rho) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho) \Leftrightarrow \rho\mathbb{K}^{-1} \frac{1}{\rho} : \mathbf{H}_0^\omega \rightarrow \mathbf{H}_0^{\omega_1}.$$

É suficiente demonstrar que

$$\sup_{h>0} \frac{\omega(\rho\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho}, h)}{\omega_1(h)} \leq C \|f\|_{\mathbf{H}_0^\omega}. \quad (18.27)$$

Utilizando a estimativa (18.4) temos

$$\omega(\rho\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho}, h) \leq C \left[h^\gamma \int_0^h \frac{t^\gamma l(t)\omega(t)}{t} dt + h \int_h^b \frac{l(t)\omega(t)}{t^2} dt \right] \|f\|_{\mathbf{H}_0^\omega}.$$

Pelas condições ii) e iii) do teorema obtemos

$$\omega(\rho\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho}, h) \leq Cl(h)\omega(h)\|f\|_{\mathbf{H}_0^\omega},$$

o que prova (18.27).

Resta provar que $[\rho\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho}(x)]_{x=0} = 0$ para $f \in \mathbf{H}_0^\omega(\rho)$. Utilizando a expressão para o operador inverso \mathbb{K}^{-1} obtemos

$$\begin{aligned} |(\rho\mathbb{K}^{-1} \frac{f}{\rho})(x)| &\leq |l(x)f(x)| + \left| \int_0^x [f(x-t) - f(x)]l'(t)dt \right| + \left| \int_0^x \frac{\rho(x) - \rho(x-t)}{\rho(x-t)} f(x-t)l'(t)dt \right| := \\ &:= D_1 + D_2 + D_3. \end{aligned}$$

Visto que $|l(x)f(x)| \leq |l(x)\omega(f, x)| \leq Cl(x)\omega(x)$ e $l(x)\omega(x) \in \mathbf{Z}$, tem-se que $D_1 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.

Também

$$|D_2| \leq C \int_0^x \omega(f, t) |l'(t)| dt \leq C \int_0^x \frac{l(t)\omega(t)}{t} dt \rightarrow 0$$

quando $x \rightarrow 0$. Quanto a D_3 temos

$$|D_3| \leq \int_0^x \frac{|\rho(x) - \rho(x-t)|}{\rho(x-t)} l(t) \frac{\omega(f, x-t)}{t} dt.$$

Se $\mu \leq 1$ temos

$$\frac{|\rho(x) - \rho(x-t)|}{\rho(x-t)} \leq C \frac{t}{x-t},$$

por (16.7). Se $\mu > 1$, por (16.1) e (16.6) obtemos

$$\frac{|\rho(x) - \rho(x-t)|}{\rho(x-t)} \leq C \frac{x^{\mu-1} t}{(x-t)^\mu}.$$

(18.28)

Então no caso $\mu \leq 1$ temos

$$|D_3| \leq C \int_0^x l(t) \frac{\omega(x-t)}{x-t} dt = C \int_0^{\frac{x}{2}} l(t) \frac{\omega(x-t)}{x-t} dt + C \int_{\frac{x}{2}}^x l(t) \frac{\omega(x-t)}{x-t} dt := I_1 + I_2.$$

Como $x-t > t$ no primeiro termo, obtemos

$$I_1 \leq C \int_0^x \frac{l(t)\omega(t)}{t} dt \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

(18.29)

Também, como $x-t < t$ em I_2 deduzimos que

$$I_2 \leq C \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{l(s)\omega(s)}{s} ds \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

(18.30)

No caso $\mu > 1$ temos por (18.28)

$$|D_3| \leq Cx^{\mu-1} \int_0^x \frac{l(t)\omega(t)}{t^\mu} dt \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0,$$

(18.31)

visto que $t^{1-\mu}l(t)\omega(t) \in \mathbf{Z}$. A desigualdade em (18.31) obtém-se com raciocínios análogos aos utilizados em (18.29) – (18.30). ■

18.3. ISOMORFISMO ENTRE ESPAÇOS PONDERADOS DE HÖLDER

Na demonstração do isomorfismo mencionado precisamos do seguinte lema.

LEMA 18.6. *Seja $0 < \mu < 2$. Se $\frac{\omega(x)}{x^\gamma} \in \mathbf{Z}$, onde $\gamma = \max(0, \mu - 1)$, então existe $p_0 > 1$ tal que $\frac{\omega(x)}{x^\mu} \in \mathbf{L}_p(0, b)$ para todo o p tal que $1 \leq p < p_0$.*

DEM. No caso $\mu \leq 1$ usamos o facto de ser $\omega(x) \in \mathbf{Z}$ pelo que existe $\delta_1 \in (0, 1)$ tal que $\omega(x) \leq Cx^{\delta_1}$. Então $\frac{\omega(x)}{x^\mu} \leq \frac{C}{x^{\mu-\delta_1}} \in \mathbf{L}_p(0, b)$ com $1 \leq p < \frac{1}{\mu-\delta_1}$ se $\delta_1 < \mu$ e $1 \leq p < \infty$ se $\delta_1 \geq \mu$.

No caso $\mu > 1$ usamos o facto de ser $\frac{\omega(x)}{x^{\mu-1}} \in \mathbf{Z}$ pelo que $\omega(x) \leq x^{\mu-1+\delta_2}$ com $\delta_2 \in (0, 1)$. Então $\frac{\omega(x)}{x^\mu} \leq \frac{C}{x^{1-\delta_2}} \in \mathbf{L}_p(0, b)$ com $1 \leq p < \frac{1}{1-\delta_2}$.

Resta observar que no caso $0 < \mu < 1$ temos $p_0 = \frac{1}{\mu-\delta_1}$ se $\delta_1 < \mu$ e $p_0 = \infty$ se $\delta_1 \geq \mu$ e no caso $1 < \mu < 2$ temos $p_0 = \frac{1}{1-\delta_2}$. ■

TEOREMA 18.7. *Admita-se que os núcleos de Sonine $k(x)$ e $l(x)$, o peso $\rho(x)$ e a característica $\omega(x)$ satisfazem as seguintes condições :*

- 1) $k(x) \in \mathbf{V}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$ e $l(x) \in \mathbf{V}_\beta$, $0 < \beta < 1$;
- 2) $l(x)$ satisfaz as condições (18.1) – (18.2);
- 3) $\rho(x) \in \mathbf{W}_\mu$, $0 < \mu < 1 + \beta$;
- 4) $xk(x)\omega(x) \in \mathbf{Z}_1([0, b])$;
- 5) $x^{-\gamma}\omega(x) \in \mathbf{Z}([0, b])$, $\gamma = \max(0, \mu - 1)$.

Então o operador \mathbb{K} aplica isomorficamente o espaço $\mathbf{H}_0^\omega(\rho)$ no espaço $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$, com $\omega_1(t) = tk(t)\omega(t)$.

DEM. De acordo com os Teoremas 18.1 e 18.5 e sob as condições correspondentes desses teoremas temos

$$\mathbb{K} : \mathbf{H}_0^\omega(\rho) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho), \quad (18.32)$$

$$\mathbb{K}^{-1} : \mathbf{H}_0^{\omega_2}(\rho) \rightarrow \mathbf{H}_0^\omega(\rho), \quad (18.33)$$

onde $\omega_1(x) = xk(x)\omega(x)$ e $\omega_2(x) = \frac{\omega(x)}{l(x)}$. Pela condição 1) do teorema e pelo Lema 18.2 temos $xk(x) \sim \frac{1}{l(x)}$. Portanto, pela equivalência das normas, temos $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho) = \mathbf{H}_0^{\omega_2}(\rho)$.

As condições 1)-5) do teorema representam a unificação das condições dos Teoremas 18.1 e 18.5.

Para afirmar que os resultados (18.32) – (18.33) garantem a existência de isomorfismo entre os espaços $\mathbf{H}_0^\omega(\rho)$ e $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$, falta provar que o contradomínio do ope-

radar \mathbb{K} coincide com o espaço $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$:

$$\mathbb{K}[\mathbf{H}_0^{\omega}(\rho)] = \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho). \quad (18.34)$$

Não temos descrição independente do contradomínio $\mathbb{K}[\mathbf{H}_0^{\omega}(\rho)]$, mas no caso de espaços de Lebesgue \mathbf{L}_p , a caracterização do contradomínio foi obtida pelo Teorema 10.4. Portanto, para demonstrar que qualquer função $f \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$ pertence ao contradomínio $\mathbb{K}[\mathbf{H}_0^{\omega}(\rho)]$ é suficiente demonstrar que existe $p > 1$ tal que as condições (10.15) e (10.17) do Teorema 10.4 são satisfeitas para $f \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$. Então $\mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho) \subset \mathbb{K}(\mathbf{L}_p)$ e neste caso o Teorema 10.3 e a aplicação (18.33) garantem que a coincidência (18.34) é válida.

i) Verificação da condição (10.15).

Para $f \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}(\rho)$ temos $f = \frac{g}{\rho}$ com $g \in \mathbf{H}_0^{\omega_1}$. Portanto

$$|l(x)f(x)| \leq C \frac{l(x)\omega_1(x)}{\rho(x)} \leq C \frac{\omega(x)}{x^\mu} \in \mathbf{L}_p,$$

para todo o p tal que $1 \leq p < p_0$, pelo Lema 18.6.

ii) Verificação da condição (10.17)

Para

$$\Psi_\varepsilon(x) = \int_0^{x-\varepsilon} l'(x-t) \left[\frac{g(t)}{\rho(t)} - \frac{g(x)}{\rho(x)} \right] dt,$$

temos

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\rho(x)} \int_0^{x-\varepsilon} |l'(x-t)| |g(x) - g(t)| dt + \int_0^{x-\varepsilon} |l'(x-t)| |g(t)| \left| \frac{1}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| dt := \\ &:= F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Como $\frac{\rho(x)}{x^\mu}$ é quase decrescente temos $\frac{1}{\rho(x)} \leq \frac{C}{x^\mu}$. Então

$$F_1 \leq \frac{C}{x^\mu} \int_0^x |l'(x-t)| \omega(g, x-t) dt \leq \frac{C}{x^\mu} \int_0^x \frac{\omega(g, t) l(t)}{t} dt.$$

Atendendo a que $\omega(g, t) \leq C \frac{\omega(t)}{l(t)}$ resulta

$$F_1 \leq \frac{C}{x^\mu} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt \leq C \frac{\omega(x)}{x^\mu} \in \mathbf{L}_p,$$

pelo Lema 18.6.

Resta-nos estimar o termo F_2 .

Primeiro caso: $0 < \mu \leq 1$.

Pelas fórmulas (16.6) e (16.7) temos

$$\left| \frac{1}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| \leq C \frac{x-t}{xt^\mu},$$

pelo que

$$\begin{aligned} F_2 &\leq \frac{C}{x} \int_0^x \frac{l(x-t)\omega(g,t)}{t^\mu} dt \leq \frac{C}{x} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{l(x-t)\omega_1(t)}{t^\mu} dt + \frac{C}{x} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{l(x-t)\omega_1(t)}{t^\mu} dt \leq \\ &\leq \frac{C}{x} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(t)}{t^\mu} dt + \frac{C}{x} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{l(t)\omega_1(x-t)}{(x-t)^\mu} dt \leq \frac{C}{x} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t^\mu} dt. \end{aligned}$$

Visto que $\omega \in \mathbf{Z}$ então também $t^{1-\mu}\omega(t) \in \mathbf{Z}$. Portanto

$$F_2 \leq C \frac{\omega(x)}{x^\mu} \in \mathbf{L}_p,$$

pelo Lema 18.6.

Segundo caso: $1 < \mu < 2$.

Temos de usar (16.1) e atender a que $\max(x,t) = x$. Obtemos

$$\left| \frac{1}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(x)} \right| \leq C \frac{x-t}{x\rho(t)},$$

Portanto

$$F_2 \leq \frac{C}{x} \int_0^x \frac{l(x-t)\omega(g,t)}{t^\mu} dt.$$

Por estimativas semelhantes às do caso anterior é fácil obter $F_2 \leq C \frac{\omega(x)}{x^\mu}$ e portanto

$$|\Psi_\varepsilon(x)| \leq F_1 + F_2 \leq C \frac{\omega(x)}{x^\mu},$$

onde $C > 0$ não depende de ε . Daqui concluímos que $\sup_{\varepsilon > 0} \|\Psi_\varepsilon\|_{\mathbf{L}_p} < \infty$, para

$1 < p < p_0$, onde p_0 é do Lema 18.5.

Verificadas as condições do Teorema 10.4, o teorema fica demonstrado. ■

OBS. 18.8. As suposições 1) e 2) sobre os núcleos $k(x), l(x)$ no Teorema 18.7 são satisfeitas nas várias aplicações e, em particular, nos exemplos tratados na secção 11. Particularmente, a condição 2) é válida em todos os exemplos da secção 11 pelo Lema 18.3, e a condição 1), isto é, $k(x) \in \mathbf{V}_\alpha$ é satisfeita para qualquer núcleo da forma $\frac{m(x)}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, $m(x)$ função limitada e diferente de zero em $(0, b)$.

REFERÊNCIAS

- [ABE.1] N.H. Abel. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1 (1823), 11-27.
- [ABE.2] N.H. Abel. Auflösung einer mechanischen Aufgabe, *J. für reine und angewandte Math.*, 1, (1826), 153-157.
- [BAR] N.K. Bari and S.B. Stechkin. Best approximation and differential properties of two conjugate functions, (Russian), *Trudy Mosk. Mat. Obshch*, 5 (1956), 483-522.
- [BEL] J. Bellandi. *Funções especiais*, Editora Papirus, S.Paulo, 1986.
- [BÖC] M. Böcher. *An introduction to the study of integral equations*, Tracts in Math. and Math. Phys., 10 (1909), Cambridge Univ. Press .
- [DUN] M.Dunford and J.T.Schwartz. *Linear operators, General Theory*, Interscience Publ., 1953.
- [ERD] A. Erdély, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions*, Vol. 3, McGraw-Hill Book, N. York, 1954. Reprinted: Krieger, Malabar, Florida, 1981.
- [GAK] F.D. Gakhov. *Boundary value problems*, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1966. Reprinted: Dover Publications, Inc., N. York, 1990.
- [GEL] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov. *The spaces of test and generalized functions*, (Russian), Fizmatgiz, Moscow, 1958. Translation: *Generalized functions*, Vol.1, Academic Press, N.York, 1964.
- [HAR] G.H.Hardy and J.E.Littlewood . *A maximal theorem with function-theoretic applications* , *Acta Math.* 54 (1930) , p. 81-116.

- [HOL] Hj. Holmgren. Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst, *Kong. Svenska Vetenskaps.-Akad. Handl.*, Stockholm, 5, no. 11 (1865-1866), 1-83.
- [JOA] F. Joachimstahl. Über ein Attractionprobleme, *J. für reine und angew. Math.*, 58 (1861), 135-137.
- [KAN] R.P. Kanwal. *Linear Integral Equations*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [KUF] A. Kufner, O. John, S. Fucik. *Function Spaces*, Noordhoff Intern. Publishing, Leyden, 1977.
- [KAR.1] N.K.Karapetians and L.D. Shankishvili. *A short proof of Hardy-Littlewood-type theorem for fractional integrals in weighted Hölder spaces*, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 2, no. 2, (1999).
- [KAR.2] N.K.Karapetians and S.G. Samko. *Equations with involutive operators*, Gordon & Breach Science Publishers, N. York, 2000.
- [LET.1] A.V. Letnikov. Theory of differentiation with an arbitrary index, *Mat. Sb.*, 3 (1868), 1-66.
- [LET.2] A.V. Letnikov. On historical development of differentiation with an arbitrary index, *Mat. Sb.*, 3 (1868), 85-112.
- [LET.3] A.V. Letnikov. On the explanation of the main propositions of differentiation with an arbitrary index, *Mat. Sb.*, 6 (1872), Vyp. 1, 413-445.
- [LET.4] A.V.Letnikov. Investigations on the theory of integrals of the form $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u) du$, *Mat. Sb.*, 7 (1874), Vyp. 1, 5-205.
- [LIO] J. Liouville. Mémoire sur le calcul de différentielles à indices quelconques, *J. de l'École Roy. Polytech.*, 13, Sect. 21, (1832), 71-162.
- [MAR] A. Marchaud. Sur les dérivées et sur les differences dans fonctions de variables réels, *J. Math. Pures et Appl.*, (1927), 337-425.

- [MIK] S.G. Mikhlin. *Linear Integral Equations*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.
- [MUS] N.I. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff N.V., 1953.
- [ONE] R.O. O'Neil. Fractional integration in Orlicz spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 115 (1965), no. 3, 300-328.
- [PIN] E. Pinney. A class of integral equations which generalize Abel's equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 259-265.
- [PRU] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. *Integrals and Series. Special Functions, Vols. 1,2,3*, Gordon & Breach Science Publishers, N. York, 1988.
- [RUB.1] B.S. Rubin. An imbedding theorem for images of convolution operators on a finite segment, and operators of potential type, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* (1982), no.1, 53-63, (Russian).
- [RUB.2] B.S. Rubin. An analogue of the Marchaud derivative for convolutions with power-logarithm kernels on a finite interval, *Math. Analysis and Its Applications*, Rostov Gos. University, Rostov, 1992, 133-139, (Russian).
- [RUB.3] B.S. Rubin and G.F. Volodarskaja. An imbedding theorem for convolutions on a finite interval and its application to integral equations of the first kind, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 244, (1979), no.6, 1322-1326, (Russian). Translation: *Soviet Math. Dokl.*, 20, (1979), no.1, 234-239.
- [SAM.1] S.G. Samko. *Hypersingular Integrals and their Applications*, Gordon & Breach Science Publishers, N. York, Series *Analytical Methods and Special Functions*, Vol.5, 2000.
- [SAM.2] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon & Breach Science Publishers, N. York, 1993.

- [SAM.3] S.G. Samko and Kh. M. Murdaev. Weighted Zygmund estimates for fractional integro-differentiations and its applications, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 180, (1987), 197-198.
- [SAM.4] S.G. Samko and Z.U. Mussalaeva. Fractional type operators in weighted generalized Hölder spaces, *Proc. Georgian Acad. Sci., Mathem.*,1 (5), (1993), 601-626.
- [SAM.5] N.G.Samko. Weighted Zygmund estimates for the singular operator and a theorem on its boundedness in $H_0^{\omega}(\rho)$ in the case of general weights, (Russian), *Rostov-on-Don, deposited in VINITI, Moscow*, 5.12.89, no. 7559-BS9
- [SAM.6] N.G. Samko. A singular operator and operators with a weak singularity in weighted generalized Hölder spaces, (Russian), *Izv. Sev.-Kark. Nauchn. Tsentra. Vysch. Scholy, Sev. Estestv. Nauk.* no.3, (1991), 46-69.
- [SAM.7] S.G. Samko and R.P. Cardoso. Integral equations of the first kind of Sonine type, *Intern. J. Math. and Math. Sci.*,57, (2003), 3609-3632.
- [SAM.8] S.G. Samko and R.P. Cardoso. Sonine integral equations of the first kind in $L_p(0, b)$, *Fract. Calc. & Applied Anal.*, 6, no.3, (2003), 235-258.
- [SCH] M. Schechter. *Principles of functional analysis*, Academic Press, London, 1971.
- [SON.1] N. Sonine. Sur la généralization d'une formule d'Abel, *Acta Math.*,4, (1884), 171-176.
- [SON.2] N. Sonine. Investigations of cylinder functions and special polynomials, *Gos. Izdat. Tekhn. Liter.*,(Russian), Moscow, 1954.
- [STE.1] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Space*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.
- [STE.2] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Fun-*

ctions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

- [TAM] J.D. Tamarkin. On integrable solutions of Abel's integral equation. *Ann. Math. Ser.*, 2, 31 (1930), p.219-229
- [TON] L. Tonelli. Sur un problema di Abel, *Math. Ann.*, 99 (1928), p.183-199
- [VIN] I. M. Vinogradov (Editor). *Encyclopedia of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [VOL.1] V. Volterra. *Leçons sur la Composition et les Fonctions Permutables*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- [VOL.2] V. Volterra. Teoria delle potenze dei logaritmi e delle funzioni di composizione, *Atti Accad. dei Lincei*, Ser.5,11,(1916),167-249.
- [WIC] J. Wick. Über eine Integralgleichung vom Abelschen Typ, *Z. angew. Mat. und Mech.*,48(8), (1968), 39-41.
- [YAK] A. Ya. Yakubov and L.D. Shankishvili. Some inequalities for convolution integral transforms, *Spec. Funct.*, 2,no.1,(1994), 65-76.

$\Psi(a, c; x)$
 $\omega_x(f, \delta)$
 $\omega(\varphi, h)$

84
3
102



LISTA DE SÍMBOLOS

A_h	35
A_ε	2,32,51,54,60
\mathbb{A}	47
\mathcal{A}	48
\mathbb{D}^α	20
$\mathbb{D}_{0^+}^\alpha$	44
$E_{\alpha,\beta}(x)$	40
\hat{f}, \tilde{f}	70
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	70
H	7
$\mathbf{H}^\omega, \mathbf{H}_0^\omega, \mathbf{H}_0^\omega(\rho)$	102
J_ε	74
k_+, k_-	72
k^*, k^{**}	7
\mathbb{K}	1
\mathbb{K}^{-1}	16
$\mathbb{K}_\varepsilon^{-1}$	22
$\mathbb{K}_+, \mathbb{K}_-$	70
\mathcal{L}	37
\mathbb{L}	9
\mathbf{L}_Φ	3
\mathcal{M}	84
$M\varphi$	47
$m(k,t)$	7
\mathcal{N}	76
N_1	72
\mathbb{N}	72,77,113
N_ε	22,52
\mathbb{S}	72
\mathbb{T}	73
\mathbf{V}_λ	100
\mathbf{W}_μ	100
\mathbf{Y}	34
\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_1	101
$\mu_{\alpha,h}(x)$	40
$\mu_\alpha(x)$	65
$\varphi_\varepsilon(x)$	60
Φ^{-1}	8,34
$\Phi(\beta, \alpha; z)$	40
Ψ_ε	50