

ESTUDOS II



FACULDADE de ECONOMIA da UNIVERSIDADE do ALGARVE

ESTUDOS II

Cidadania, Instituições e Património

Economia e Desenvolvimento Regional

Finanças e Contabilidade

Gestão e Apoio à Decisão

Modelos Aplicados à Economia e à Gestão



Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

2005

COMISSÃO EDITORIAL

António Covas
Carlos Cândido
Duarte Trigueiros
Efigénio da Luz Rebelo
João Albino da Silva
João Guerreiro
Paulo M.M. Rodrigues
Rui Nunes

FICHA TÉCNICA

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

Campus de Gambelas, 8005-139 Faro
Tel. 289817571 Fax. 289815937
E-mail: ccfeua@ualg.pt
Website: www.ualg.pt/feua

Título

Estudos II - Faculdade de Economia da Universidade do Algarve

Autor

Vários

Editor

Faculdade de Economia da Universidade do Algarve
Morada: Campus de Gambelas
Localidade: FARO
Código Postal: 8005-139

Capa e Design Gráfico

Susy A. Rodrigues

Compilação, Revisão de Formatação e Paginação

Lídia Rodrigues

Fotolitos e Impressão

Grafica Comercial – Loulé

ISBN

972-99397-1-3 Data: 26-08-2005

Depósito Legal

218279/04

Tiragem

250 exemplares

Data

Novembro 2005

RESERVADOS TODOS OS DIREITOS

REPRODUÇÃO PROIBIDA

Modelo de avaliação de uma opção de venda tipo Americano: solução analítica.

Cristina Pereira Viegas

Faculdade de Economia, Universidade do Algarve

José Azevedo Pereira

Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa

Resumo

Este estudo desenvolve uma solução analítica para o valor de uma opção de venda de tipo Americano e para o respectivo preço crítico. Para obter uma solução fechada da equação diferencial proposta por Black e Scholes (1973), utiliza-se um procedimento usualmente conhecido como “método das linhas” - considera-se uma formulação na qual o tempo é discreto, em vez de contínuo. Deste modo, a equação diferencial parcial é transformada numa equação diferencial ordinária não homogénea, a derivada da função preço da opção em ordem ao tempo é substituída por uma diferença finita e as derivadas em ordem ao preço do activo subjacente mantêm-se inalteradas. Com vista a melhorar a qualidade dos resultados obtidos, é aplicada a extrapolação de *Richardson*, facto que permite acelerar a convergência dos *outputs* para valores próximos da realidade.

Palavras-chave: Avaliação de opções, opções Americanas, soluções analíticas.

Abstract

This study proposes an analytical approximation for the value of an American put option and its critical stock price. To obtain a closed-form solution to the Black and Scholes (1973)' partial differential equation, the equation is discretized in time while leaving space continuous (procedure known as the method of lines). Time derivatives are replaced by finite differences, while derivatives with respect to stock price remain intact. This process can be regarded as a dimensional reduction of a partial differential equation to an ordinary differential equation. To improve pricing accuracy while reducing the computational weight, the paper introduces Richardson extrapolation, which is a technique to extrapolate the limit based on the first few numbers of a sequence.

Keywords: Option pricing, American options, analytical solutions.

1. Introdução

Muitas das opções transaccionadas nos principais mercados financeiros são de tipo Americano, o que significa que podem ser exercidas em qualquer momento até à respectiva data de maturidade. Contrariamente às opções de tipo Americano, as opções de tipo Europeu somente podem ser exercidas na data de maturidade do contrato o que permite determinar o seu valor facilmente através da aplicação da fórmula deduzida em Black e Scholes (1973). Por sua vez, a valorização de uma opção de venda de tipo Americano afigura-se uma tarefa muito mais complexa, facto que é confirmado pela quase inexistência de trabalhos que apresentem soluções analíticas, para o valor deste tipo de opções. Este artigo tem por objectivo o desenvolvimento de uma solução analítica capaz de avaliar uma *put* Americana.

A possibilidade de exercício antecipado por parte do detentor deste tipo de opções constitui o principal obstáculo à determinação de uma solução fechada. Daí que grande parte dos trabalhos que apresentam soluções analíticas para o preço da opção recorram a métodos numéricos para determinar o preço crítico do activo subjacente. Por exemplo, trabalhos como Carr, Jarrow e Myneni (1992), Jacka (1991) e Kim (1990), consideram que o valor da opção Americana corresponde ao valor da opção Europeia¹ acrescido de um prémio que é dado pelo valor actualizado dos ganhos potenciais inerentes ao exercício antecipado. Este prémio é dado por uma equação integral, sendo a fronteira de exercício determinada através de um procedimento numérico reversivo.

Por sua vez, trabalhos como Lee e Paxson (2003), Huang, Subrahmanyam e Yu (1996), Ho, Stapleton e Subrahmanyam (1994), Bunch e Johnson (1992) e Geske e Johnson (1984), desenvolvem aproximações analíticas para o preço da *put* Americana através do cálculo do valor de conjuntos de opções com datas de exercício discretas. A diferença entre estes estudos reside fundamentalmente no número e nas datas de exercício das opções utilizadas para o cálculo da *put* Americana, bem como no método de extrapolação² utilizado com o intuito de obter uma aproximação satisfatória para o valor da opção. No entanto, trata-se também de trabalhos que não determinam analiticamente o valor crítico do activo subjacente.

Paralelamente, existem também trabalhos que, apresentando formulações analíticas para o preço da opção de venda Americana, determinam, explicitamente, o preço crítico do activo subjacente. Merecem particular saliência neste domínio, os trabalhos de Bunch e Johnson (2000), Carr (1998) e Carr e Faguet (1996), que apresentam avanços significativos no cálculo do valor da opção de venda Americana mediante o recurso a soluções *quasi-explicitas*.

Por exemplo, a derivação de uma expressão para o chamado preço crítico do activo subjacente de uma opção de venda Americana constitui um dos principais objectivos de Bunch e Johnson (2000). Uma vez determinado o valor desta variável, os autores

¹ O valor da opção Europeia é determinado de acordo com a fórmula dada em Black e Scholes (1973)

² Existem trabalhos que utilizam extrapolação linear enquanto outros recorrem à extrapolação exponencial.

utilizam-no na determinação do valor da opção de venda Americana, mediante a utilização do método proposto em Huang, Subrahmanyam e Yu (1996). Efectivamente, nos termos propostos neste trabalho, o valor de uma opção de venda Americana é dado pelo valor da opção de venda Europeia correspondente, calculado nos termos propostos por Black e Scholes (1973), acrescido de um prémio resultante da possibilidade de exercício da opção em qualquer momento. A obtenção de uma solução fechada para o valor deste prémio impõe a necessidade de que seja conhecida a expressão que permite determinar o preço crítico do activo subjacente. Este preço crítico corresponde ao valor mais alto do preço do activo subjacente para o qual a opção de venda deve ser exercida. Este resultado é obtido igualando a zero a derivada da expressão que permite determinar o preço da opção de venda Americana em relação ao tempo e resolvendo esta igualdade em ordem ao valor do activo subjacente. A expressão encontrada para o activo subjacente corresponde ao preço crítico³. A obtenção deste valor é uma condição fundamental para a determinação do valor da opção de venda Americana. Importa, no entanto, referir que a solução de Bunch e Johnson (2000) é apenas válida para opções de venda Americanas cujo activo subjacente não distribua dividendos.

Outros dois trabalhos de referência neste domínio são os de Carr (1998) e de Carr e Faguet (1996). Estes dois trabalhos transformam a equação diferencial parcial geral⁴ numa equação diferencial ordinária não homogénea. Esta passagem pressupõe a substituição da derivada da função preço em ordem ao tempo por uma diferença finita. Os pressupostos base para a aplicação deste procedimento são diferentes nos dois artigos. Assim, Carr (1998) justifica o seu procedimento através da classificação do tempo como aleatório e considerando que o mesmo segue uma distribuição de Erlang ou distribuição gamma. Já Carr e Faguet (1996) referem que a obtenção de uma solução analítica pressupõe a aplicação do “método das linhas”, o que significa que a componente tempo do modelo deixa de ser contínua para passar a ser discreta. Nestes dois últimos artigos referidos, apesar dos pressupostos iniciais do modelo serem diferentes, os resultados finais são equivalentes. Assim, são determinados os valores da opção de venda Americana e do preço crítico do respectivo activo subjacente.

O presente trabalho descreve, numa primeira parte, as principais características inerentes a um contrato de opções, incidindo nos aspectos directamente relacionados com a sua avaliação. De seguida, deduz-se uma solução analítica para o valor de uma opção de venda de tipo Americano cujo activo subjacente não distribui dividendos e para o respectivo preço crítico. Por fim, são apresentados, numérica e graficamente, os resultados obtidos com a aplicação das fórmulas anteriormente deduzidas e os mesmos são confrontados com outros valores, alcançados por diferentes autores, que têm apresentado trabalhos nesta área de investigação.

³ Quando a derivada do preço da opção de venda americana em relação ao tempo é nula, o valor da opção não depende do tempo, sendo óptimo exercê-la imediatamente, pelo que o preço do activo subjacente é igual ao preço crítico.

⁴ Trata-se da equação dada por Black Scholes (1973) e que serviu de base à determinação do valor da opção Europeia sobre uma acção.

2. Principais características inerentes a um contrato de opções

Antes da dedução e apresentação das fórmulas de valorização de uma opção de venda Americana, importa tecer algumas considerações acerca dos principais aspectos que presidem à avaliação deste tipo de contratos, incidindo nas opções cujo activo subjacente não distribui dividendos.

2.1 Terminologia aplicável a um contrato de opções

Existem dois tipos básicos de opções: opções de compra (*calls*) e opções de venda (*puts*). Uma opção de compra ou *call* confere ao seu possuidor o direito de comprar um número determinado de unidades do activo subjacente a um preço fixado antecipadamente, designado por preço de exercício, durante um período de tempo pré-estabelecido ou numa data previamente acordada. Uma opção de venda ou *put* dá ao seu possuidor o direito de vender um número determinado de unidades do activo subjacente por um determinado preço, num período ou data previamente especificado.

Uma das análises mais elementares que são passíveis de ser efectuadas no domínio da avaliação de opções consiste no cálculo do respectivo *payoff* para o investidor. A função *payoff* corresponde ao *cash flow* que o investidor arrecada na data de vencimento do contrato.

Nas opções financeiras de características mais simples existem assim dois tipos básicos de *payoffs*. O *payoff* de uma *call* corresponde a:

$$\max(S - K, 0) \tag{1}$$

Por sua vez, o *payoff* de uma *put* equivale a:

$$\max(K - S, 0) \tag{2}$$

Onde K corresponde ao preço de exercício e S ao preço, no mercado à vista, do activo subjacente.

2.2 Factores dominantes na determinação do preço de uma opção *put*

Os factores que afectam o valor de uma opção são:

a) O preço à vista do activo subjacente, S . Se o preço do activo subjacente aumenta, o valor da *put* diminui, uma vez que o rendimento a auferir com o exercício da opção de venda também diminui;

b) O preço de exercício, K . Trata-se do preço de venda do activo subjacente caso a *put* seja exercida. Neste sentido, a um aumento de K também deverá corresponder um acréscimo no valor da opção, mantendo-se todos os outros factores constantes.

c) O período de tempo que decorre desde a data de avaliação até à data de vencimento, τ . O valor da *put* Americana tende a aumentar à medida que τ também aumenta, uma vez que a um τ superior corresponde uma maior incerteza quanto à evolução dos preços durante o período de tempo de posse da opção.

d) A volatilidade do preço do activo de suporte, σ . Quanto maior for a volatilidade do preço do activo subjacente maior é a probabilidade de variações do seu valor. Assim, para o possuidor de uma opção *put* existe a possibilidade de obter ganhos mais elevados, caso o valor do activo subjacente desça significativamente enquanto que o valor das perdas fica limitado ao preço da opção. Deste modo, a um aumento de σ deve corresponder um aumento no valor da opção de venda.

e) A taxa de juro dos activos sem risco, r . Trata-se de outro parâmetro que influencia o valor da opção, uma vez que determina a dimensão do factor de actualização a aplicar aos *cash flows* futuros associados ao eventual exercício da opção.

2.3 A paridade *put-call*

A relação que se estabelece entre a opção de venda e a opção de compra é denominada paridade *put-call*. Esta relação verifica-se para opções de tipo Europeu. Assim sendo:

$$c + Ke^{-r\tau} = p + S \quad (3)$$

Nesta igualdade, c e p correspondem ao valor de uma *call* e uma *put* de tipo Europeu, respectivamente.

Para derivar a igualdade (3) considere as duas carteiras de investimentos, alternativas:

$$\text{Carteira A: } c + Ke^{-r\tau}$$

$$\text{Carteira B: } p + S$$

Na data de vencimento, $\tau = 0$, os valores das duas carteiras são iguais:

$$A=B=\max(S, K) \tag{4}$$

Perante a ausência de oportunidades de arbitragem estas duas carteiras devem ser iguais para qualquer τ , o que conduz à paridade *put-call*.

3. Modelo de avaliação de uma opção de venda de tipo Americano

O objectivo deste trabalho é deduzir uma solução fechada para o valor de uma opção de venda de tipo Americano e para o respectivo preço crítico, considerando que o activo subjacente são acções que não distribuem dividendos.

3.1 Solução analítica para o valor de uma opção de venda de tipo Americano cujo activo subjacente corresponde a acções que não distribuem dividendos

O processo a desenvolver assenta na técnica utilizada para a avaliação de fluxos contingentes. Considera-se que o valor da opção depende de uma única variável estocástica: o preço da acção. A evolução desta variável é definida de acordo com o seguinte processo estocástico:

$$dS = rSdt + \sigma_S S dz_s \tag{5}$$

Onde S representa o valor da acção, r a taxa de juro sem risco de curto prazo, σ_s o desvio padrão instantâneo e z_s o processo de *wiener* padrão.

Considerando que o valor da opção, $P(S, \tau)$, depende da variável estocástica, preço da acção, e que a mesma segue o processo definido em (5), é deduzida a equação diferencial parcial:

$$-\frac{\partial P(\tau, S)}{\partial \tau} + \frac{\partial P(\tau, S)}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 P(\tau, S)}{\partial S^2} - rP(\tau, S) = 0 \quad \text{se } S \geq \underline{S}_n \quad (6)$$

onde \underline{S}_n corresponde ao valor crítico da acção, abaixo do qual a opção deve ser exercida imediatamente.

Esta equação corresponde à equação diferencial definida em Black Scholes (1973), que permitiu a estes autores apresentarem uma solução fechada para a valorização de uma opção de tipo Europeu.

No caso da valorização da opção *put* Americana, esta equação está sujeita às seguintes condições de fronteira:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, \tau) = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{S \rightarrow \underline{S}_n} P(S, \tau) = K - \underline{S}_n \quad (8)$$

$$\lim_{S \rightarrow \underline{S}_n} \frac{\partial P(S, \tau)}{\partial S} = -1 \quad (9)$$

Como já foi referido, a obtenção de uma solução fechada para este problema é uma tarefa muito complexa. Trata-se de uma área que tem registado alguns avanços nos últimos anos, no entanto os mesmos não têm sido suficientes para a apresentação de uma solução analítica consensual.

Para a resolução de (6) sujeita às restrições (7), (8) e (9), o método a desenvolver ao longo deste trabalho assenta na transformação da equação diferencial parcial geral numa equação diferencial ordinária não homogénea. Esta passagem é feita através da aplicação denominada método das linhas⁵. Trata-se de substituir a derivada da função preço, em ordem ao tempo, por uma diferença finita. Quanto menor for o intervalo de tempo considerado na diferença finita maior qualidade possuem os resultados alcançados com esta alteração. Neste trabalho subdivide-se o tempo num número relativamente

⁵ A aplicação deste método na avaliação de opções deve-se a Carr e Faguet (1996) e Meyer e van der Hoek (1997)

pequeno de intervalos, quatro⁶ no caso, e posteriormente aplica-se a extrapolação de *Richardson*⁷ com o intuito de acelerar a convergência dos resultados obtidos para valores próximos da realidade.

Deste modo a equação (6) passa a ter a seguinte configuração:

$$\frac{\partial P^{(\phi)}(S)}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 P^{(\phi)}(S)}{\partial S^2} - rP^{(\phi)}(S) = \frac{P^{(\phi)}(S) - P^{(\phi-1)}(S)}{\tau/n} \quad \text{se } S \geq \underline{S}_n \quad (10)$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária não homogénea em que o preço da opção passa a ser função de uma única variável.

Para a determinação de $P^{(\phi)}(S)$ é necessário conhecer a expressão de $P^{(\phi-1)}(S)$, pelo que esta equação deve ser resolvida para $\phi = 1,2,3,4$ ⁸.

Para a prossecução do objectivo de determinar o valor da *put* Americana, através da resolução de (10), sujeita às restrições (7), (8) e (9), aplica-se o procedimento utilizado em trabalhos como Huang, Subrahmanyam e Yu (1996), onde o valor da opção Americana corresponde ao valor da opção Europeia acrescido de um prémio resultante da possibilidade de exercício antecipado da opção.

Deste modo, obtém-se:

$$P^{(\phi)}(S) = p^{(\phi)}(S) + pr^{(\phi)}(S) \quad \text{se } S \geq \underline{S}_n \quad (11)$$

onde $p^{(\phi)}(S)$ e $pr^{(\phi)}(S)$ correspondem ao valor da *put* Europeia e ao valor do prémio, respectivamente.

Por sua vez a *put* Europeia deve verificar (10) e as seguintes condições de fronteira:

⁶ Na valorização de uma *put* Americana, a subdivisão do tempo total de posse da opção em quatro intervalos conduz a estimativas muito aceitáveis ; veja-se por exemplo, Carr e Faguet (1996).

⁷ A extrapolação de *Richardson* tem sido aplicada em trabalhos da área com sucesso; veja-se por exemplo Carr (1998).

⁸ ϕ corresponde ao número de sub-períodos em relação ao número total de intervalos de tempo, $n = 4$, considerados no modelo. Assim, é determinada a expressão do valor da *put* Americana, relativa a $\frac{\phi\tau}{n}$ períodos de tempo, com $\phi = 1,2,3,4$ e $\phi \leq n$.

$$p(S) = \max(K - S, 0) \text{ para } \tau = 0$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} p(S) = \frac{K}{\left(1 + r \frac{\tau}{n}\right)^n} \quad (12)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S) = 0$$

O respectivo prémio, deve verificar (10) e a seguinte condição:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} pr(S) = 0 \quad (13)$$

Com a utilização deste procedimento, a solução fechada geral para o valor da *put* Americana vem dada por diferentes expressões, de acordo com o intervalo de variação do preço do activo subjacente.

Assim, para $S \geq K$, $\phi = 1,2,3,4$, $n = 1,2,3,4$ e $\phi \leq n$, o valor da opção *put* Europeia vem:

$$P_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S) = S^{\frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 - \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2}} \left[\left(a_\phi + 2na_{\phi-1} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} + \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right) + 2n^2 a_{\phi-2} \left(\frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{2\tau\sigma^2}{\alpha_n} \right)^2 + \frac{n^4 a_{\phi-3}}{3} \left(\frac{30\tau^3 \sigma^6}{\alpha_n^3} \text{ se } S \geq K \right) + \frac{30\tau^2 \sigma^4 \ln(S)}{\alpha_n^{5/2}} + \frac{9\sigma^2 \tau \ln(S)^2}{\alpha_n^2} + \frac{\ln(S)^3}{\alpha_n^{3/2}} \right] \quad (14)$$

Onde:

$$a_{\phi-i} = 0 \text{ para } \phi - i \leq 0 \text{ e } i = 1,2,3$$

O mesmo raciocínio é seguido para determinar o valor do prémio, o qual deve verificar a condição de fronteira definida em (13). Assim, para $S \geq \underline{S}_1$, $\phi = 1,2,3,4$, $n = 1,2,3,4$ e $\phi \leq n$, vem:

$$\begin{aligned}
 pr^{(\phi)}(S) = (S)^{\frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 - \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2}} & \left[\left(p_\phi + 2np_{\phi-1} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} + \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right) \right. \\
 & + 2n^2 p_{\phi-2} \left(\frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{2\tau\sigma^2}{\alpha_n} \right)^2 + \frac{n^4 p_{\phi-3}}{3} \left(\frac{30\tau^3\sigma^6}{\alpha_n^3} \text{ se } S \geq \underline{S}_1 \right. \\
 & \left. \left. + \frac{30\tau^2\sigma^4 \ln(S)}{\alpha_n^{5/2}} + \frac{9\sigma^2\tau \ln(S)^2}{\alpha_n^2} + \frac{\ln(S)^3}{\alpha_n^{3/2}} \right) \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

Onde:

$$p_{\phi-i} = 0 \text{ para } \phi - i \leq 0 \text{ e } i = 1, 2, 3$$

Deste modo já é possível apresentar a solução geral, relativa ao valor da *put* de tipo Americano, quando $S \geq K$ e $\phi = 1, 2, 3, 4$:

$$P_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S) = P_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S) + pr^{(\phi)}(S) \quad \text{se } S \geq K \quad (16)$$

Na região $\underline{S}_1 \leq S \leq K$, o valor da *put* Americana também corresponde à opção Europeia acrescida do prémio, com a particularidade de, nesta zona, o valor da opção Europeia a determinar ser o da *call*⁹, sendo posteriormente aplicada a paridade *put-call* para obter a expressão da *put* Europeia. Por sua vez, o valor do prémio, tem a configuração definida em (15). Nestes termos, o valor da *put* Europeia, nesta zona, com $\phi = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, 4$ e $\phi \leq n$, é dado pela seguinte expressão¹⁰:

⁹ A primeira etapa na resolução de (10) compreende a determinação do valor da opção no término do contrato. Este valor corresponde ao *payoff* da opção, o qual é igual a zero na zona *out-of-money* de uma opção Europeia. Assim, na zona $\underline{S}_1 \leq S \leq K$ e para $\tau = 0$, o valor da *call* Europeia é igual a zero.

¹⁰ Mais uma vez o valor da *put* Europeia deve verificar as condições de fronteira definidas em (12)

$$\begin{aligned}
 P_{[\underline{S}_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) = & S^{\frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 + \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2}} \left[\left(b_\phi + 2nb_{\phi-1} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} - \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right) \right. \\
 & + 2n^2 b_{\phi-2} \left(\frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} - \frac{2\tau\sigma^2}{\alpha_n} \right)^2 + \frac{n^4 b_{\phi-3}}{3} \left(\frac{30\tau^3\sigma^6}{\alpha_n^3} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{30\tau^2\sigma^4 \ln(S)}{\alpha_n^{5/2}} + \frac{9\sigma^2\tau \ln(S)^2}{\alpha_n^2} - \frac{\ln(S)^3}{\alpha_n^{3/2}} \right) \right] \quad \text{se } \underline{S}_1 \leq S \leq K \quad (17) \\
 & + \frac{K}{\left(1 + r \frac{\tau}{n}\right)^\phi} - S + e_\phi
 \end{aligned}$$

Onde:

$$b_{\phi-i} = 0 \text{ para } \phi - i \leq 0 \text{ e } i = 1, 2, 3$$

Pelo que a expressão geral relativa ao valor da opção *put* de tipo Americano, quando $\underline{S}_1 \leq S \leq K$ e $\phi = 1, 2, 3, 4$, vem dada por:

$$P_{[\underline{S}_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) = p_{[\underline{S}_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) + pr^{(\phi)}(S) \quad \text{se } \underline{S}_1 \leq S \leq K \quad (18)$$

Para $S \leq \underline{S}_1$, o valor da opção é dado por diferentes expressões de acordo com o intervalo de variação do preço da acção. Assim para $\underline{S}_2 \leq S \leq \underline{S}_1$, $\phi = 2, 3, 4$, $n = 2, 3, 4$ e $\phi \leq n$, vem:

$$\begin{aligned}
 P_{[\underline{S}_2 \leq S \leq \underline{S}_1]}^{(\phi)}(S) = & S^{\frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 + \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2}} \left[z_{\phi-1} + 2nz_{\phi-2} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} - \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right. \\
 & \left. + 2n^2 z_{\phi-3} \left(\frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} - \frac{2\tau\sigma^2}{\alpha_n} \right)^2 \right] + \frac{K}{\left(1 + r \frac{\tau}{n}\right)^{\phi-1}} - S \\
 & + S^{\frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 - \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2}} \left[y_{\phi-1} + 2ny_{\phi-2} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} + \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right. \\
 & \left. + 2n^2 y_{\phi-3} \left(\frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{2\tau\sigma^2}{\alpha_n} \right)^2 \right] \quad \text{se } \underline{S}_2 \leq S \leq \underline{S}_1 \quad (19)
 \end{aligned}$$

Onde:

$$y_{\phi-i} = 0 \text{ e } z_{\phi-i} = 0 \text{ para } \phi - i \leq 0 \text{ e } i = 2,3$$

Por sua vez, para $\underline{S}_3 \leq S \leq \underline{S}_2$, $\phi = 3,4$, $n = 3,4$ e $\phi \leq n$, a fórmula para o valor da *put* Americana é a seguinte:

$$P_{[\underline{S}_3 \leq S \leq \underline{S}_2]}^{(\phi)}(S) = S \frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 + \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2} \left(w_{\phi-2} + 2nw_{\phi-3} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} - \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right) + \frac{K}{\left(1 + r \frac{\tau}{n}\right)^{\phi-2}} - S \quad \text{se } \underline{S}_3 \leq S \leq \underline{S}_2 \quad (20) + S \frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 - \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2} \left(x_{\phi-2} + 2nx_{\phi-3} \left(\frac{\tau\sigma^2}{\alpha_n} + \frac{\ln(S)}{\sqrt{\alpha_n}} \right) \right)$$

Onde:

$$w_{\phi-i} = 0 \text{ e } x_{\phi-i} = 0 \text{ para } \phi - i \leq 0 \text{ e } i = 3$$

Relativamente à zona $\underline{S}_4 \leq S \leq \underline{S}_3$, $\phi = 4$ e $n = 4$ o valor da opção corresponde a:

$$P_{[\underline{S}_4 \leq S \leq \underline{S}_3]}^{(\phi)}(S) = u_1 S \frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 + \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2} + \frac{K}{1 + r \frac{\tau}{n}} - S + v_1 S \frac{-2r\tau + \tau\sigma^2 - \sqrt{\alpha_n}}{2\tau\sigma^2} \quad \text{se } \underline{S}_4 \leq S \leq \underline{S}_3 \quad (21)$$

Por último, para $S \leq \underline{S}_n$, com $n = 1,2,3,4$ e $\phi = n$, a *put* é exercida imediatamente, pelo que o seu valor corresponde a:

$$P_{[S \leq \underline{S}_n]}^{(\phi)}(S) = K - S \quad \text{se } S \leq \underline{S}_n \quad (22)$$

Estas diferentes expressões para o valor da *put* Americana contêm um conjunto de parâmetros cujo valor é determinado através da resolução de um sistema de equações. Trata-se de resolver um sistema de equações que as diferentes expressões do valor da *put* Americana deverão verificar. Assim, obtém-se:

Para $\phi = 1,2,3,4$, $n = 1,2,3,4$, $\phi \leq n$ e $S = K$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S) &= P_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) \\
 \frac{dP_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S)}{dS} &= \frac{dP_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S)}{dS} \\
 \frac{d^2 P_{[S \geq K]}^{(\phi)}(S)}{dS^2} &= \frac{d^2 P_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S)}{dS^2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Para $\phi = 1$, $n = 1,2,3,4$ e $S = \underline{S}_1$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) &= P_{[S \leq \underline{S}_1]}^{(\phi)}(S) \\
 \frac{dP_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S)}{dS} &= -1
 \end{aligned} \tag{24}$$

Para $\phi = 2,3,4$, $n = 2,3,4$, $\phi \leq n$ e $S = \underline{S}_1$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_{[S_2 \leq S \leq \underline{S}_1]}^{(\phi)}(S) &= P_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S) \\
 \frac{dP_{[S_2 \leq S \leq \underline{S}_1]}^{(\phi)}(S)}{dS} &= \frac{dP_{[S_1 \leq S \leq K]}^{(\phi)}(S)}{dS}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Para $\phi = 2,3,4$, $n = 2,3,4$, $\phi \leq n$ e $S = \underline{S}_n$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_{[S \leq \underline{S}_n]}^{(\phi)}(S) &= P_{[S_n \leq S \leq \underline{S}_{n-1}]}^{(\phi)}(S) \\
 \frac{dP_{[S_n \leq S \leq \underline{S}_{n-1}]}^{(\phi)}(S)}{dS} &= -1
 \end{aligned} \tag{26}$$

Para $\phi = 3,4$, $n = 3,4$, $\phi \leq n$ e $S = \underline{S}_2$, obtém-se:

$$P_{[S_3 \leq S \leq S_2]}^{(\phi)}(S) = P_{[S_2 \leq S \leq S_1]}^{(\phi)}(S)$$

$$\frac{dP_{[S_3 \leq S \leq S_2]}^{(\phi)}(S)}{dS} = \frac{dP_{[S_2 \leq S \leq S_1]}^{(\phi)}(S)}{dS} \quad (27)$$

Da resolução de (24), para $n = 1$, e de (26), para $n = 2,3,4$. obtém-se o valor crítico:

$$\underline{S}_n = e^{\left(\frac{\sigma^2 \tau \ln \left(\frac{4\beta^2 (n+r\tau)^2 \alpha_n}{K^2 r^2 \tau^2 (2r\tau - \sigma^2 \tau + \sqrt{\alpha_n})^2} \right)}{2r\tau - \sigma^2 \tau - \sqrt{\alpha_n}} \right)} \quad (28)$$

Onde: para $n = 1$ vem $\beta = b_1$, para $n = 2$ vem $\beta = z_1$, para $n = 3$ vem $\beta = w_1$, para $n = 4$ vem $\beta = u_1$.

Relativamente às equações apresentadas anteriormente, vem:

$$\alpha_n = (2r\tau + \tau\sigma^2)^2 + 8n\sigma^2 \quad \text{para } n = 1,2,3,4 \quad (29)$$

3.2 A aplicação da extrapolação de *Richardson* no modelo de valorização de uma opção de venda de tipo Americano

Neste artigo, apesar de se considerar o tempo dividido num relativamente reduzido número de sub períodos, é possível obter uma boa estimativa para o valor de uma *put* Americana, através da aplicação da extrapolação de *Richardson*.

Neste âmbito, considere-se que os valores relativos à *put* Americana obtidos a partir das equações determinadas anteriormente, para $n = 1,2,3,4$, são funções dos respectivos sub-períodos de tempo aplicados para cada caso, isto é, de $\tau, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{3}, \frac{\tau}{4}$, respectivamente. Designe-se essas funções por $\hat{P}(\frac{\tau}{n})$, com $n = 1,2,3,4$.

De acordo com Carr (1998), a utilização da extrapolação de *Richardson* é adequada uma vez que a função $\hat{P}(\frac{\tau}{n})$ pode ser representada através da série de *MacLaurin*:

$$\hat{P}(\frac{\tau}{n}) = \hat{P}(0) + \frac{\tau}{n} \hat{P}'(0) + \frac{(\frac{\tau}{n})^2}{2!} \hat{P}''(0) + \dots + \frac{(\frac{\tau}{n})^n}{n!} \hat{P}^{(n)}(0) + O\left(\left(\frac{\tau}{n}\right)^n\right) \quad (30)$$

onde $O\left(\left(\frac{\tau}{n}\right)^n\right)$ representa o erro da aproximação, o qual tende para zero quando o n tende para infinito. O valor extrapolado da opção *put* Americana corresponde à solução de $\hat{P}(0)$. Para que tal resultado seja possível de alcançar considere-se:

$$\hat{P}(\frac{\tau}{n}) \approx \hat{P}(0) + \frac{\tau}{n} \hat{P}'(0) + \frac{(\frac{\tau}{n})^2}{2!} \hat{P}''(0) + \frac{(\frac{\tau}{n})^3}{3!} \hat{P}'''(0) \quad (31)$$

Considerando $n = 1, n = 2, n = 3$ e $n = 4$, (31) é transformada num sistema de quatro equações, com quatro variáveis, $\hat{P}(0), \hat{P}'(0), \hat{P}''(0)$ e $\hat{P}'''(0)$. A resolução deste sistema permite encontrar o valor extrapolado da *put* Americana:

$$\hat{P}(0) = \frac{32}{3} \hat{P}(\frac{\tau}{4}) - \frac{27}{2} \hat{P}(\frac{\tau}{3}) + 4\hat{P}(\frac{\tau}{2}) - \frac{1}{6} \hat{P}(\tau) \quad (32)$$

O mesmo tipo de raciocínio deve ser aplicado para a determinação do valor crítico extrapolado do activo subjacente:

$$\hat{S}_4(0) = \frac{32}{3} \hat{S}_4(\frac{\tau}{4}) - \frac{27}{2} \hat{S}_3(\frac{\tau}{3}) + 4\hat{S}_2(\frac{\tau}{2}) - \frac{1}{6} \hat{S}_1(\tau) \quad (33)$$

Com a aplicação da extrapolação de *Richardson*, são determinados os valores extrapolados do preço crítico, $\hat{S}_4(0)$ e da *put* Americana, $\hat{P}(0)$, o que permite obter uma aproximação muito satisfatória para o valor destas funções, embora se considere o tempo dividido, somente, em quatro intervalos.

4. Análise de resultados do modelo de avaliação de uma opção *put* Americana

Esta secção apresenta e discute, numérica e graficamente, os resultados proporcionados pelo modelo geral de valorização de uma opção de venda de tipo Americano, anteriormente desenvolvido. Esta análise é efectuada através da apresentação de gráficos, representativos da evolução do valor da opção e do preço crítico, assim como de tabelas onde são apresentados valores numéricos para o valor da *put* Americana e para o respectivo preço crítico.

Pretende-se, assim, mostrar que as fórmulas aqui desenvolvidas, relativas à avaliação da opção *put* de tipo Americano, representam uma boa estimativa para o valor da opção, comparativamente com o que tem sido apresentado noutros estudos da área. Deste modo, os resultados obtidos para o valor crítico e para a *put* Americana, recorrendo às fórmulas deduzidas neste trabalho, são confrontados com outros valores que têm sido alcançados, por diferentes autores, com trabalhos desenvolvidos nesta área de investigação.

4.1 Resultados numéricos do preço crítico do activo subjacente e do valor da *put* Americana

Na Tabela 1, os valores para o preço crítico, resultantes das fórmulas deduzidas neste trabalho, são comparados com os apresentados em Bunch e Johnson (2000) cujo trabalho propõe uma solução fechada para o valor de uma *put* de tipo Americano, bem como para o valor crítico do activo, quando este não distribui dividendos. Da análise da Tabela 1 constata-se que os valores obtidos com a aplicação das fórmulas desenvolvidas neste trabalho estão mais próximos do valor de referência, CRR (2000 intervalos), do que os de Bunch e Johnson (2000). De referir que os resultados MLE (n=4) são valores extrapolados, ou seja, após o cálculo dos valores críticos, com base na equação (28), é aplicada a extrapolação de *Richardson*, de acordo com (33).

Tabela 1 – Comparação de Preços Críticos Relativos a uma Opção Put Americana cujo Activo Subjacente não Distribui Dividendos

Método	$\sigma = 0,20, \tau = 9/12$	$\sigma = 0,30, \tau = 1/12$	$\sigma = 0,30, \tau = 9/12$
CR85	36,00	34,28	28,80
CRR (150 intervalos)	33,06	34,17	28,75
CRR (800 intervalos)	32,95	34,11	28,59
CRR (2000 intervalos)	32,91	34,09	28,55
BJ1	32,59	34,11	28,17
BJ2	33,78	33,69	27,42
MLE (n=4)	32,87	34,08	28,51

Os dados desta tabela são retirados de Bunch e Johnson (2000), excepto a última linha, MLE (n=4), cujos valores são resultantes das fórmulas deduzidas neste trabalho. Em relação às restantes linhas tem-se: CR85 = Cox e Rubinstein (1985); CRR (150 intervalos), CRR (800 intervalos) e CRR (2000 intervalos) = Cox, Ross e Rubinstein (1979) com 150, 800 e 2000 intervalos de tempo, respectivamente; BJ1 = Bunch e Johnson (2000); BJ2 = Bunch e Johnson (2000). Subjacente à construção desta tabela os valores dos parâmetros são os seguintes: r , a taxa de juro discreta é 0,05; r , a taxa de juro contínua é 0,0488; K , o preço de exercício é 40. Os parâmetros referenciados na Tabela são: σ , a volatilidade do preço do activo subjacente e τ , o tempo para a maturidade, dado em anos.

Na tabela seguinte, para além ser apresentado o valor da opção *put* Americana, também é determinada a raiz quadrada da média do quadrado dos erros relativos, *RMSRE*¹¹:

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(P(A)_i - P_i) / P_i]^2} \quad (34)$$

Onde n é o número total de opções objecto de análise; $P(A)_i$ corresponde ao valor aproximado da opção i e P_i corresponde ao valor de referência da opção i .

Na Tabela 2, são comparados os preços das *puts* Americanas com tempo para a maturidade inferior a um ano, pressupondo a inexistência de dividendos. Verifica-se que a fórmula de valorização desenvolvida neste trabalho conduz a uma estimativa muito próxima do valor de referência, o que atesta a fiabilidade do modelo aqui desenvolvido, nomeadamente perante opções de curto prazo cujo activo subjacente não distribua dividendos. Tal facto é reforçado através da análise da última linha da Tabela, onde o valor mais baixo para a raiz quadrada da média do quadrado dos erros relativos é obtido, quando se aplica a formulação desenvolvida neste artigo.

¹¹ Existem trabalhos, nomeadamente Ju (1998), que determinam a raiz quadrada da média do quadrado dos erros absolutos. Neste trabalho, e seguindo Lee e Paxson (2003) é determinada a raiz quadrada da média do quadrado dos erros relativos, o que significa que é feita a ponderação dos erros absolutos pelo valor da opção.

Tabela 2 – Comparação de Valores Relativos a uma Opção Put Americana cujo Activo Subjacente não Distribui Dividendos

(1) (S, τ, σ, r)	(2) P_{FD}	(3) P_{BW}	(4) \hat{P}	(5) $MLE(n=4)$
(80;0,25;0,20;0,08)	20,00	20,00	20,00	20,00
(90;0,25;0,20;0,08)	10,04	10,01	10,12	10,04
(100;0,25;0,20;0,08)	3,22	3,22	3,22	3,22
(110;0,25;0,20;0,08)	0,66	0,68	0,65	0,66
(120;0,25;0,20;0,08)	0,09	0,10	0,09	0,09
(80;0,25;0,20;0,12)	20,00	20,00	20,02	20,00
(90;0,25;0,20;0,12)	10,00	10,00	10,00	10,00
(100;0,25;0,20;0,12)	2,92	2,93	2,95	2,92
(120;0,25;0,20;0,12)	0,55	0,58	0,54	0,55
(120;0,25;0,20;0,12)	0,07	0,08	0,07	0,07
(80;0,25;0,40;0,08)	20,32	20,25	20,48	20,31
(90;0,25;0,40;0,08)	12,56	12,51	12,62	12,56
(100;0,25;0,40;0,08)	7,11	7,10	7,08	7,10
(110;0,25;0,40;0,08)	3,70	3,71	3,66	3,69
(120;0,25;0,40;0,08)	1,79	1,81	1,77	1,78
(80;0,50;0,20;0,08)	20,00	20,00	20,00	20,00
(90;0,50;0,20;0,08)	10,29	10,23	10,46	10,29
(100;0,50;0,20;0,08)	4,19	4,19	4,22	4,18
(110;0,50;0,20;0,08)	1,41	1,45	1,38	1,41
(120;0,50;0,20;0,08)	0,40	0,42	0,38	0,39
<i>RMSRE</i>	-	0,0349	0,0115	0,0045

Os dados desta tabela são retirados de Ho, Stapleton e Subrahmanyam (1994), excepto a última coluna, MLE (n=4), cujos valores são resultantes das fórmulas deduzidas neste trabalho. Em relação à primeira coluna tem-se: S , o preço do activo subjacente; τ , o tempo para a maturidade, dado em anos; σ , a volatilidade do preço do activo subjacente e r , a taxa de juro sem risco. A coluna (2), P_{FD} , refere-se ao valor da opção utilizando o método das diferenças finitas, calculado com intervalos de 0,10 para o preço do activo subjacente e intervalos de 0,20 dias para o tempo, sendo considerado o valor de referência. A coluna (3), P_{BW} , apresenta os valores da opção put Americana calculados pelo método da aproximação quadrática de Barone-Adesi e Whaley (1987). A coluna (4), \hat{P} , apresenta os valores da opção put Americana de acordo com o método da aproximação exponencial desenvolvido em Ho, Stapleton e Subrahmanyam (1994). O preço de exercício, K , é 100.

Na Tabela 3 são comparados os valores das puts Americanas com maturidade a 3 anos. Mais uma vez, se constata que a formulação aqui proposta apresenta uma boa estimativa, comparativamente com os valores alcançados por outros trabalhos referenciados na Tabela. São calculados os preços das puts para diferentes valores do activo subjacente, verificando-se que para todas as situações, os valores alcançados através do trabalho aqui apresentado são muito satisfatórios comparativamente com os valores considerados padrão, que são apresentados na coluna (2).

Tabela 3 – Comparação de Valores Relativos a uma Opção Put Americana ($t = 3$)

(1) (S)	(2) TRUE	(3) MGJ2	(4) HSY6	(5) LUBA	(6) RAN4	(7) EXP3	(8) MLE4
80	20,0000	20,0000	19,9484	20,0000	20,0000	20,0000	20,0000
90	11,6974	10,1758	11,7047	11,6953	11,7011	11,6991	11,7011
100	6,9320	6,9394	6,9109	6,9346	6,9316	6,9346	6,9316
110	4,1550	4,1453	4,1897	4,1550	4,1531	4,1571	4,1531
120	2,5102	2,4546	2,5150	2,5110	2,5068	2,5119	2,5068

Os dados desta tabela são retirados de Ju (1998), excepto a última coluna, MLE4, cujos valores são resultantes das fórmulas deduzidas neste trabalho. A primeira coluna representa S , o preço do activo subjacente. A coluna (2), TRUE, refere-se ao valor da opção utilizando o modelo binomial com 10 000 intervalos de tempo, sendo considerado o valor de referência. A coluna (3), MGJ2, apresenta o valor da opção calculado pelo método modificado de Geske e Johnson, desenvolvido em Bunch e Johnson (1992). A coluna (4), HSY6, apresenta o valor da opção utilizando o esquema reversivo com 6 intervalos de tempo desenvolvido em Huang, Subrahmanyam e Yu (1996). A coluna (5), LUBA, refere-se ao valor da opção de acordo com o trabalho de Broadie e Detemple (1996). A coluna (6), RAN4, apresenta o valor da opção utilizando o modelo desenvolvido em Carr (1998) com 4 intervalos de tempo. A coluna (7) apresenta o valor da opção de acordo com o método da fronteira exponencial desenvolvido em Ju (1998). Subjacente à construção desta tabela os valores dos parâmetros são os seguintes: r , a taxa de juro sem risco é 0,08; K , o preço de exercício é 100; τ , o tempo para a maturidade é 3 anos; σ , a volatilidade do preço do activo subjacente é 0,20.

4.2 Análise gráfica do preço crítico do activo subjacente e do valor da put Americana

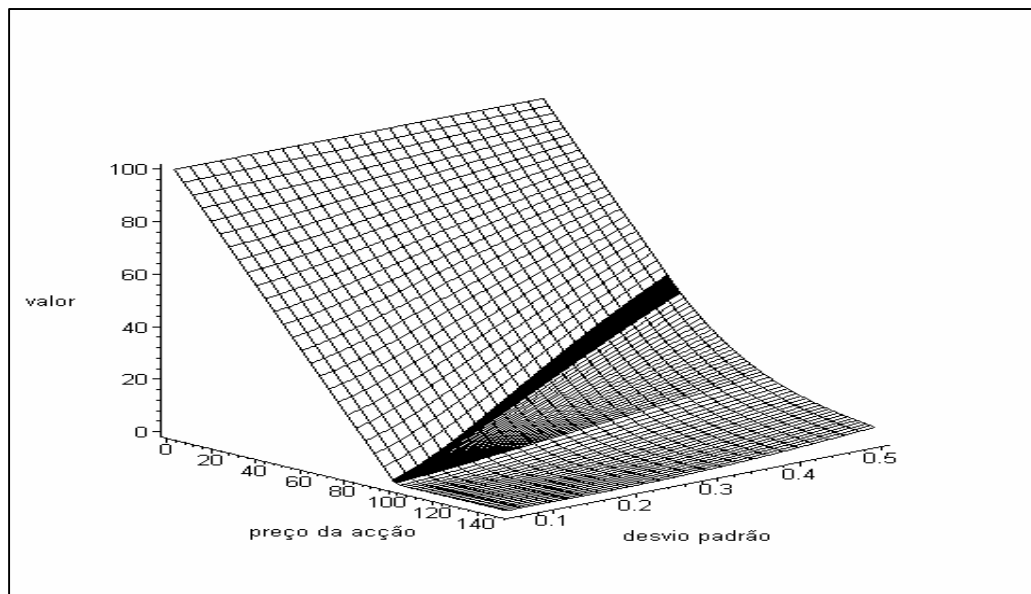
De seguida são apresentados alguns gráficos, em três dimensões, representativos do comportamento do preço da opção quando o preço do activo subjacente e alguns parâmetros do modelo variam.

Para a representação dos gráficos em três dimensões foi considerado o tempo dividido em 2 intervalos de tempo, isto é, $n = 2$, o que resulta na consideração de três funções distintas nas figuras apresentadas.

A Figura 1 apresenta, em três dimensões, a evolução do valor da opção put Americana quando o preço do activo subjacente (S) e o tempo para a maturidade (τ) variam entre 0 e 150 e entre 0 e 5, respectivamente. A superfície com inclinação recta, relativa a valores mais baixos do activo subjacente, representa a zona de exercício imediato da opção. Por sua vez, a superfície intermédia, convexa e com maior inclinação, refere-se à zona em que o activo subjacente é inferior ao preço de exercício mas superior ao preço crítico. Verifica-se que, nesta zona, o valor da opção é mais sensível a variações no preço do activo subjacente comparativamente com o que acontece quando o activo subjacente tem valores superiores ao preço de exercício, zona representada pela superfície mais plana. Para além destas considerações, que diferenciam o comportamento do valor da opção nas três zonas referenciadas, é possível efectuar algumas considerações de âmbito mais geral. Assim, verifica-se que variações positivas no preço do activo subjacente provocam uma diminuição no valor da opção. Outro aspecto a referir prende-se com o comportamento do preço da opção quando o tempo para a maturidade varia.

Verifica-se uma ligeira tendência de aumento do valor da opção à medida que a maturidade aumenta. Quando o preço do activo subjacente se aproxima do valor crítico, o valor da opção é mais sensível a variações na maturidade.

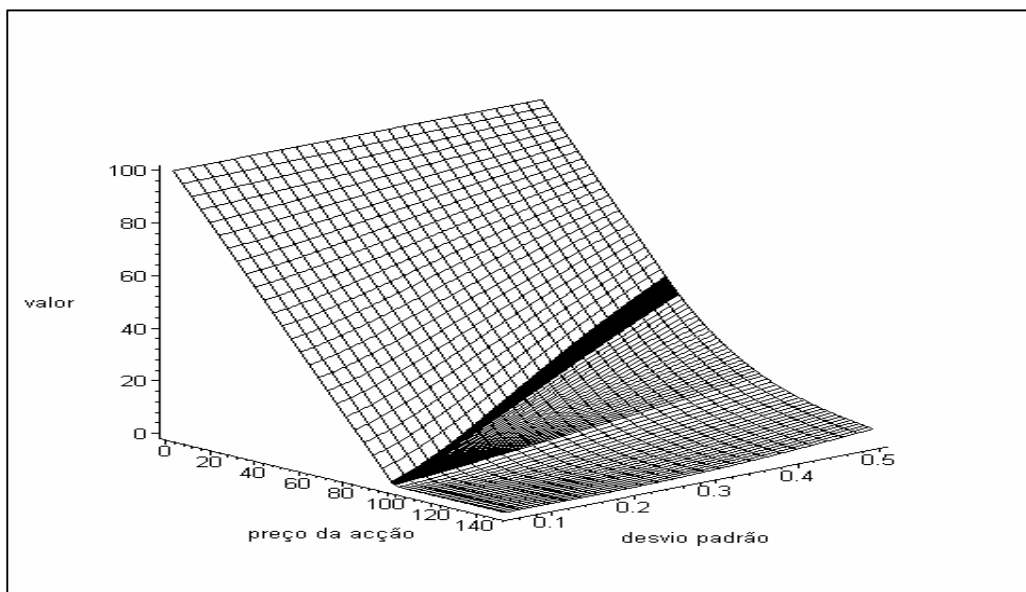
Figura 1 – Valor de uma Opção Put Americana como uma função de S e t



Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n , o número de intervalos de tempo é 2; r , a taxa de juro sem risco é 0,08; σ , a volatilidade do preço da acção é 0,20; K , o preço de exercício é 100.

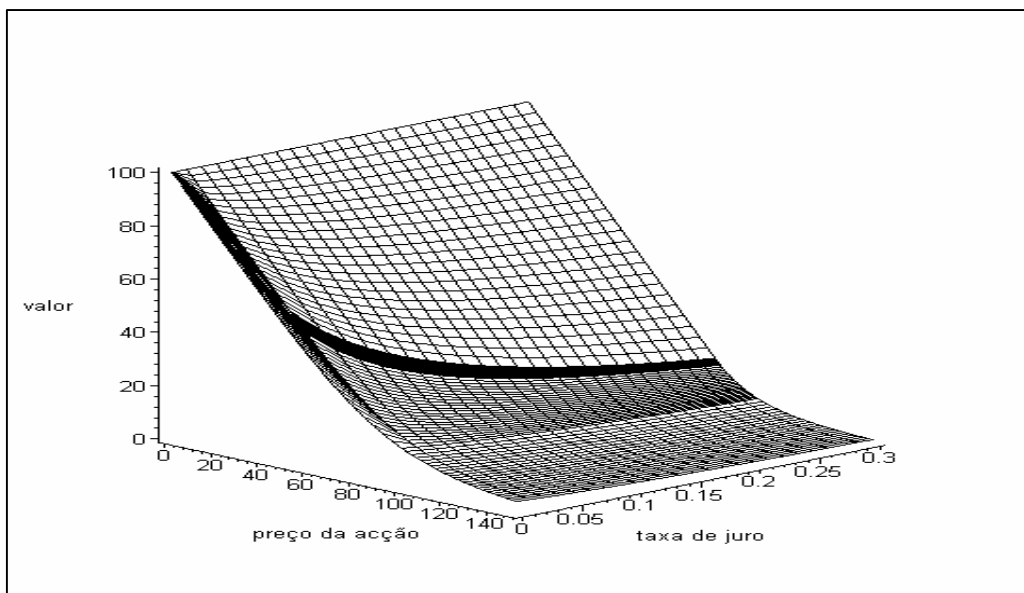
A Figura 2 apresenta o valor da opção como uma função do preço do activo subjacente e da volatilidade deste preço. Tal como na Figura 1, o comportamento do valor da opção, está dividido em três zonas distintas apresentando uma evolução semelhante à referida anteriormente, no que concerne à relação entre o activo subjacente e o valor da opção. Por outro lado verifica-se que quanto maior for a volatilidade do preço do activo subjacente maior é o preço da opção. Esta situação é mais expressiva quando se está próximo do valor crítico. Outro aspecto que ressalta da análise da figura é que o preço crítico tende a diminuir significativamente à medida que a volatilidade do activo subjacente aumenta.

Figura 2 – Valor de uma Opção Put Americana como uma função de S e s



Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n , o número de intervalos de tempo é 2; r , a taxa de juro sem risco é 0,08; τ , o tempo para a maturidade é 1 ano; K , o preço de exercício é 100.

Figura 3 – Valor de uma Opção Put Americana como uma função de S e r

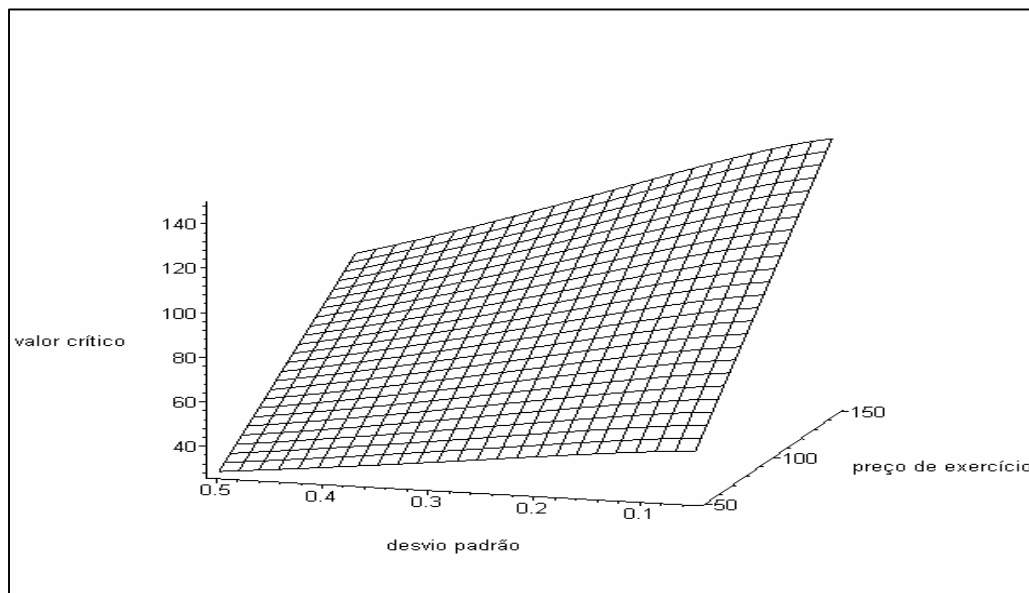


Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n , o número de intervalos de tempo é 2; σ , a volatilidade do preço da acção é 0,40; τ , o tempo para a maturidade é 1 ano; K , o preço de exercício é 100.

Importa agora perceber qual o efeito que uma variação na taxa de juro provoca no valor da opção. Tal relação é apresentada na Figura 3. Verifica-se que o preço crítico é muito sensível a variações na taxa de juro, sendo que à medida que a taxa de juro se aproxima de zero, o preço crítico também se aproxima de zero, o que pode ser confirmado pela zona a negro do gráfico. Outra das conclusões a retirar do gráfico é que à medida que a taxa de juro baixa o valor da opção aumenta.

A evolução do valor crítico como função do preço de exercício e da volatilidade do activo subjacente é representada na Figura 4. Da análise do gráfico, constata-se que um aumento no preço de exercício provoca também um acréscimo no valor crítico e que uma diminuição na volatilidade do activo subjacente provoca um acréscimo no preço crítico¹².

Figura 4 – Valor Crítico de uma Opção *Put* Americana como uma função de K e s



Subjacente à construção desta figura os valores dos parâmetros são os seguintes: n , o número de intervalos de tempo é 2; τ , o tempo para a maturidade é 1 ano; r , a taxa de juro sem risco é 0,08.

A apresentação deste conjunto de Tabelas e Figuras teve por objectivo comprovar a fiabilidade do modelo desenvolvido ao longo deste capítulo. A apresentação e comparação dos resultados numéricos permitiram constatar que a solução fechada, aqui desenvolvida, constitui uma alternativa credível para a valorização deste tipo de derivados financeiros.

¹² Esta última conclusão já havia sido retirada aquando da análise da Figura 2

5. Conclusão

Este artigo tem por objectivo o desenvolvimento de uma solução analítica capaz de avaliar uma *put* de tipo Americano. Trata-se de uma área de investigação financeira de grande interesse, tanto devido ao elevado número de transacções de opções sobre diferentes activos subjacentes (acções, moedas, mercadorias, entre outros), como pelo facto deste tipo de avaliação ter aplicações na determinação do valor de outros activos financeiros.

O modelo desenvolvido ao longo deste trabalho permite obter soluções fechadas para o valor da opção e para o respectivo preço crítico, considerando que o activo subjacente corresponde a acções que não distribuem dividendos. Estes resultados, para além de permitirem determinar rapidamente o valor da opção e do preço crítico, possibilitam a apresentação gráfica em três dimensões do valor da opção e do preço crítico como função de outras componentes do modelo. Este tipo de representação não tem sido incluído noutros trabalhos da área¹³ que apresentam soluções analíticas para o valor da *put* Americana.

Um domínio ainda mais complexo neste campo de investigação, respeita ao desenvolvimento de soluções fechadas para a avaliação de opções Americanas cujo activo subjacente distribui dividendos. A principal dificuldade nesta área respeita à determinação duma solução fechada para o preço crítico. Será, no entanto de esperar que a comunidade académica seja capaz de ultrapassar esta dificuldade e produza modelos de avaliação de opções de venda Americana que apresentem soluções fechadas para o preço crítico, considerando que o activo subjacente distribui dividendos.

Bibliografia

- Barone-Adesi, G. e R.E. Whaley (1987) Efficient Analytic Approximation of American Options Values, *Journal of Finance*, 42, 301-320.
- Black, F. e M. Scholes (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-659.
- Broadie, M. e J. Detemple (1996) American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods, *Review of Financial Studies*, 9, 1211-1250.

¹³ Veja-se por exemplo Carr (1998) e Bunch e Johnson (2000).

- Bunch, D. e H. Johnson (1992) A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach, *Journal of Finance*, 47, 809-816.
- Bunch, D. e H. Johnson (2000) The American Put Option and Its Critical Stock Price, *Journal of Finance*, 55, 5, 2333-2356.
- Carr, P. (1998) Randomization and the American Put, *The Review of Financial Studies*, 11, 3, 597-626.
- Carr, P. e D. Faguet (1996) *Valuing finite-lived options as perpetual*, Morgan Stanley, Working Paper.
- Carr, P., R. Jarrow e R. Myneni (1992) Alternative Characterizations of American Put Options, *Mathematical Finance*, 2, 87-106.
- Cox, J. e M. Rubinstein (1985) *Options Market*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Cox, J.C., S.A. Ross e M. Rubinstein (1979) Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Geske, R. e H. E. Johnson (1984) The American Put Valued Analytically, *Journal of Finance*, 39, 1511-1524.
- Ho, T. S., R.C. Stapleton e M.G. Subrahmanyam (1994) A Simple Technique for the Valuation and Hedging of American Options, *Journal of Derivatives*, 2, 52-66.
- Huang, J., M. Subrahmanyam e G. Yu (1996) Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method, *The Review of Financial Studies*, 9, 1, 277-300.
- Jacka, S. D. (1991) Optimal Stopping and the American Put, *Mathematical Finance*, 1, 1-14.
- Ju, N. (1998) Pricing an American Option by Approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function, *Review of Financial Studies*, 11, 627-646.
- Kim, I.J. (1990) The Analytic Valuation of American Puts, *Review of Financial Studies*, 3, 4, 547-572.
- Lee, J. e D.A. Paxson (2003) Confined exponential approximations for the valuation of American options, *The European Journal of Finance*, 9, 1-26.
- Meyer, G.H. e J. van der Hoek (1997) The Valuation of American Options with the Method of Lines, *Advances in Futures and Options Research*, 9, 265-285.