

CONTROLO ACTIVO DE RESSONANCIA EM ESTRUTURAS PIEZOLAMINADAS

José M. Simões Moita^{1*}, Cristóvão M. Mota Soares², Carlos A. Mota Soares²

1: Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Superior de Tecnologia
Universidade do Algarve
Campus da Penha, 8005-139 Faro, Portugal
e-mail: jmoita@ualg.pt

2: IDMEC/IST–Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal.
e-mail: cmmsoares@alfa.ist.utl.pt

Palavras-chave: Actuadores, Sensores, Compósitos Laminados, Elementos Finitos.

Resumo. *Neste trabalho apresenta-se um modelo de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem, o qual é aplicado ao controlo activo de vibrações, incluindo o fenómeno de ressonância, em estruturas laminadas. Sensores e actuadores piezoeléctricos na forma de lâminas estão colados nas superfícies superior e inferior do laminado, permitindo assim um sistema de controlo, ligando os efeitos piezoeléctricos directo e converso, através dum algoritmo baseado na realimentação com velocidade negativa. As estruturas são forçadas a vibrar num determinado modo, e a sua amplitude no tempo é calculada usando o método de Newmark. Apresenta-se uma aplicação ilustrativa.*

1. INTRODUÇÃO

Estruturas compósitas incorporando sensores e actuadores piezoeléctricos tornaram-se muito importantes devido ao desenvolvimento das estruturas ‘inteligentes’. Estas estruturas oferecem potenciais benefícios numa larga gama de aplicações em engenharia, tais como atenuação de vibrações e ruído, controlo de forma e detecção de dano. Investigação pioneira no domínio das estruturas inteligentes é devida a Allik e Hughes [1] que analisaram a interacção entre electricidade e elasticidade. Referem-se ainda os trabalhos de Crawley e de Luis [2], que estudaram o controlo de vibrações de vigas laminadas com material piezoeléctrico embebido ou colado à superfície da viga, e de Tzou e Tseng [3], que apresentaram uma formulação por elementos finitos em placa e cascas contendo actuadores e sensores piezoeléctricos. Referem-se ainda revisões bibliográficas acerca da modelação de estruturas adaptativas por elementos finitos publicada por Senthil et al. [4], Benjeddou [5] e Franco Correia et al. [6]. Vários investigadores formularam modelações por elementos finitos de estruturas compósitas integrando sensores e actuadores piezoeléctricos. Para o controlo activo de vibrações de placas

laminadas com sensores e actuadores distribuídos, Samanta et al [7], desenvolveu um elemento finito isoparamétrico de oito nós, e Lam et al. [8] desenvolveu um modelo de elementos finitos baseado na teoria clássica de placas laminadas. Neste trabalho, é apresentado um modelo de elementos finitos, baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem de Reddy [9], desenvolvido para a análise do controlo activo em dinâmica linear de placas integrando sensores e actuadores piezoeléctrico na forma de lâminas coladas na superfície das estruturas. Este modelo permite tomar em consideração os efeitos das deformações de corte sem requerer o uso de factores de correcção de corte, e é aplicável na análise de estruturas com elevada anisotropia, finas e semi-espessas.

É usado um elemento placa/casca triangular plano de 3 nós, com 24 graus de liberdade referentes ao vector de deslocamentos generalizados, e em cuja formulação se introduz 1 grau de liberdade referente ao potencial eléctrico, por cada camada piezoeléctrica do elemento. É utilizado método de Newmark, Bathe [10], para a solução iterativa das equações de equilíbrio.

2. CAMPO DOS DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

No modelo de elementos finitos desenvolvido, os deslocamentos u, v no plano (x, y) são funções cúbicas da coordenada segundo a espessura, e o deslocamento transversal w constante segundo a mesma coordenada, satisfazendo a condição de se ter tensões de corte transversais nulas nas superfícies superior e inferior, o que é equivalente a requerer-se que as correspondentes deformações se anulem naquelas superfícies[9].

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \theta_y(x, y) + z^3 \frac{4}{3h^2} \left[\theta_y(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \theta_x(x, y) + z^3 \frac{4}{3h^2} \left[-\theta_x(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

onde u_0, v_0, w_0 são os deslocamentos dum ponto genérico da superfície média do laminado nas direcções dos eixos x, y, z , θ_x e θ_y são as rotações da normal à superfície média, em torno dos eixos x e y , respectivamente, e $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ são as inclinações da tangente à superfície média deformada com os eixos x e y respectivamente.

As componentes das deformações associadas com os deslocamentos da equação (1) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{e}}_m + z \bar{\mathbf{e}}_b + z^3 \bar{\mathbf{e}}_b^* \\ \bar{\mathbf{e}}_s + z^2 \bar{\mathbf{e}}_s^* \end{array} \right\} = Z \bar{\mathbf{e}} \quad (2)$$

onde Z é uma matriz apropriada contendo potências de z (z^n com $n=0, \dots, 3$).

As componentes do vector $\bar{\mathbf{e}}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{e}}_m &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{dv_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\}^T \\
 \bar{\mathbf{e}}_b &= \{k_x, k_y, k_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right\}^T \\
 \bar{\mathbf{e}}_b^* &= \{k_x^*, k_y^*, k_{xy}^*\}^T = c_1 \left\{ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (3) \\
 \bar{\mathbf{e}}_s &= \{\phi_x, \phi_y\}^T = \left\{ -\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\}^T \\
 \bar{\mathbf{e}}_s^* &= \{\psi_x, \psi_y\}^T = \left\{ c_2 \left(\theta_y - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), c_2 \left(-\theta_x - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\}^T
 \end{aligned}$$

onde $c_2 = 4/h^2$

3. LAMINADOS PIEZOELÉCTRICOS. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS.

Assumindo que uma placa compósita é constituída por várias lâminas, incluindo as lâminas piezoeléctricas, a equação constitutiva duma lâmina ortotrópica do substrato é

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{e}} \quad (4)$$

e as equações constitutivas dum meio piezoeléctrico deformável, ligando os campos elástico e eléctrico são, Tiersten [11]:

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{E}} \quad (6)$$

onde $\bar{\mathbf{s}} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T$ e $\bar{\mathbf{e}} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T$ são os vectores das tensões e das deformações elásticas, respectivamente, $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz constitutiva, $\bar{\mathbf{e}}$ é a matriz dos coeficientes piezoeléctricos, $\bar{\mathbf{E}}$ o vector do campo eléctrico, $\bar{\mathbf{D}}$ o vector do deslocamento eléctrico e $\bar{\mathbf{p}}$ a matriz dos coeficientes dieléctricos, no sistema de eixos local (x,y,z) do elemento laminado, e dados em Reddy [9].

O vector do campo eléctrico $\bar{\mathbf{E}}$, é o gradiente negativo do potencial eléctrico ϕ na lâmina k

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \phi \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \{0 \quad 0 \quad E_z\}^T \quad (8)$$

$$E_z = -\phi/t_k \quad (9)$$

O vector das deformações em electro-elasticidade pode ser escrito na forma seguinte

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

As equações constitutivas (5) e (6) podem então ser escritas na forma:

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{e}}^L \\ -\bar{\mathbf{E}} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (11)$$

4. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.

Neste trabalho usa-se um elemento finito não conforme de alta ordem com três nós e oito graus de liberdade por nó. Os deslocamentos e rotações são expressos em termos das variáveis nodais através de funções de forma \mathbf{N}_i , dadas em termos das coordenadas de área L_i [12]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \right) = \mathbf{Z} \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (12)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (13)$$

com

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z^3 c_1 & 0 & -z + z^3 c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z^3 c_1 & 0 & +z - z^3 c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_i = \left\{ u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z \right\}_i \quad (15)$$

As deformações definidas pelas expressões (3) podem então ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_m &= \mathbf{B}^m \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{e}}_b &= \mathbf{B}^b \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{e}}_b^* &= \mathbf{B}^{*b} \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{B}^s \mathbf{a} \\ \bar{\mathbf{e}}_s^* &= \mathbf{B}^{*s} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (16)$$

onde as sub-matrizes das relações deformações-deslocamentos, \mathbf{B}^m , \mathbf{B}^b , \mathbf{B}^{*b} , \mathbf{B}^s e \mathbf{B}^{*s} são dadas em [13].

O campo eléctrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}^\phi \phi \quad (17)$$

onde \mathbf{B}^ϕ é a matriz campo eléctrico – potencial, dada por

$$\mathbf{B}^\phi = \begin{bmatrix} 1/t_1 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & 1/t_{NPL} \end{bmatrix} \quad (18)$$

As equações da dinâmica são derivadas do princípio de Hamilton. Para laminados é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{K=1}^N \left(\int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{C}}_k \hat{\mathbf{e}} dz dA^e - \int_{A^e} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \mathbf{u}^T \rho_k \mathbf{u} dz dA^e \right) - \left(\int_V \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{T} \delta \mathbf{u} dS + \sum_i \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i + \int_S \mathbf{Q} \delta \phi dS \right) \right\} dt = 0 \quad (19)$$

Entrando com as equações (11) a (18) na equação (19), tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{K=1}^N \left(\int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mec} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{e}}^T & -\bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mec} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix} dz dA - \int_A \mathbf{N}^T \left(\sum_{k=1}^n \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T dz \right) \mathbf{N} dA \right) + \int_V \delta \{ \mathbf{a} \}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_S \delta \{ \mathbf{a} \}^T \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \delta \{ \mathbf{a} \}^T \mathbf{F}_c + \int_S \mathbf{Q} \delta \phi dS \right] dt = 0 \quad (20)$$

Ao primeiro e segundo termos do primeiro membro da equação (20), correspondem as matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente dadas por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} & \mathbf{B}^{bT} & \mathbf{B}^{*bT} & \mathbf{B}^{sT} & \mathbf{B}^{*sT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}^{\phi T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}' \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}' \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_s & \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s & \mathbf{E}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{D}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^m & 0 \\ \mathbf{B}^b & 0 \\ \mathbf{B}^{*b} & 0 \\ \mathbf{B}^s & 0 \\ \mathbf{B}^{*s} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^\phi \end{bmatrix} dA \quad (21)$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N}^T \left(\sum_{k=1}^n \rho_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} dz \right) \mathbf{N} dA \quad (22)$$

sendo os elementos da rigidez mecânica, piezoelétrica e dielétrica dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{K=1}^N [\bar{Q}_{ij} H_1] \\ [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] &= \sum_{K=1}^N [\bar{Q}_{ij} H_2 \quad \bar{Q}_{ij} H_4] \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} \end{bmatrix} &= \sum_{K=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ij} H_3 & \bar{Q}_{ij} H_5 \\ \bar{Q}_{ij} H_5 & \bar{Q}_{ij} H_7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{C}_s & \mathbf{E}_s \end{bmatrix} &= \sum_{K=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{lm} H_1 & \bar{Q}_{lm} H_3 \\ \bar{Q}_{lm} H_3 & \bar{Q}_{lm} H_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}' = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{e}_{3j} H_1$$

$$\mathbf{B}' = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{e}_{3j} H_2 \quad (24)$$

$$\mathbf{D}' = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{e}_{3j} H_4$$

$$\mathbf{A}'' = \sum_{k=1}^{N^P} \bar{p}_{33} H_1 \quad (25)$$

$$H_n = (z_k^n - z_{k-1}^n) / n \quad (26)$$

onde $i, j = 1, 2, 6$ and $l, m = 4, 5$; $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7$, N é o número de laminas e N^P é o número de lâminas de material piezoelétrico.

Ao terceiro termo da equação (20), corresponde o vector de carga eléctrica aplicada $\mathbf{F}^{(A)}$, e o vector de forças mecânicas exteriores aplicadas, o qual é definido por:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^{\text{mec}} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \mathbf{F}_c \quad (27)$$

onde \mathbf{f} são forças de volume, \mathbf{t} forças de superfície, e \mathbf{F}_c forças concentradas.

As matrizes de rigidez e de massas, assim como o vector das forças exteriores são inicialmente obtidas no sistema de coordenadas locais. Para obter a solução de estruturas genéricas, são feitas as transformações de coordenadas locais para globais, Zienkiewicz [12]. Depois destas transformações, o sistema de equações no referencial global é:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\text{ext}}^{\text{mec}}(t) \\ F^{(A)}(t) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Assumindo que tanto os sensores como os actuadores piezoeléctricos estão colados nas superfícies da estrutura, o vector dos potenciais eléctricos é subdividido em dois componentes, a dos sensores $\phi^{(S)}$ e a dos actuadores $\phi^{(A)}$. A carga eléctrica exteriormente aplicada nos sensores é zero. Separando as componentes dos actuadores e dos sensores, o sistema de equações (28) toma a forma seguinte:

$$[M_{uu}] \{q\} + [K_{uu}] \{q\} + [K_{u\phi}^{(S)}] \{\phi^{(S)}\} = \{F_{\text{ext}}^{\text{mec}}(t) - K_{u\phi}^{(A)} \phi^{(A)}\} \quad (29)$$

$$[K_{\phi u}^{(A)}] \{q\} + [K_{\phi\phi}^{(A)}] \{\phi^{(A)}\} = \{F^{(A)}(t)\} \quad (30)$$

$$[K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} + [K_{\phi\phi}^{(S)}] \{\phi^{(S)}\} = \{0\} \quad (31)$$

Da última destas equações, os potenciais eléctricos $\{\phi^{(S)}\}$ induzidos nos sensores são obtidos do seguinte modo:

$$\{\phi^{(S)}\} = -[K_{\phi\phi}^{(S)}]^{-1} [K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} \quad (32)$$

5. DINÂMICA LINEAR

A carga em cada sensor, com polarização na direcção da espessura, pode ser expressa em termos de integração espacial do deslocamento eléctrico sobre a sua superfície, tendo em consideração que o efeito piezoeléctrico reverso é desprezável, Samanta et al. [7]. Tem-se então

$$Q^{(S)}(t) = \int_A D_z(t) dA = \frac{1}{2} \left[\int_{A(z=z_k)} D_z(t) dA + \int_{A(z=z_{k+1})} D_z(t) dA \right] \quad (33)$$

Da equação (6), a última equação pode ser escrita como segue

$$Q^{(S)}(t) = \int_A \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} dA \quad (34)$$

ou na forma discretizada

$$Q^{(S)}(t) = \left(\int_A \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}^{\text{mb}} dA \right) \{q\} = [K_{\phi u}^{(S)}] \{q\} \quad (35)$$

A corrente na superfície do sensor é dada por

$$I(t) = \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (36)$$

a qual pode ser convertida em diferença de potencial do sensor $\phi^{(S)}$ em circuito aberto

$$\phi^{(S)} = G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (37)$$

onde $G_c (= R_a, \text{resistencia do amplificador})$ é o ganho constante do amplificador, o qual transforma a corrente do sensor em diferença de potencial.

A diferença de potencial dos sensores pode alimentar os actuados através dum amplificador e com uma mudança de polaridade. Tem-se então para a diferença de potencial dos actuados:

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (38)$$

onde G_i é o ganho do amplificador para realizar o controlo.

A diferença de potencial dos actuados, escrita na forma discretizada, é então dada por

$$\phi^{(A)} = -G_i G_c \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \{ \phi \} \quad (39)$$

Substituindo a equação (39) na equação (29), obtém-se a equação do movimento:

$$[M_{uu}] \{ \ddot{u} \} - G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)} \right] \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \{ \phi \} + \left([K_{uu}] - [K_{u\phi}^{(S)}] \left[K_{\phi\phi}^{(S)} \right]^{-1} \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \right) \{ q \} = \{ F_{ext}^{mec}(t) \} \quad (40)$$

Para amortecimento do tipo Rayleigh, esta equação toma a forma:

$$[M_{uu}] \{ \ddot{u} \} + (C_R + C_A) \{ \dot{u} \} + \left([K_{uu}] - [K_{u\phi}^{(S)}] \left[K_{\phi\phi}^{(S)} \right]^{-1} \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \right) \{ q \} = \{ F_{ext}^{mec}(t) \} \quad (41)$$

sendo

$$C_R = \alpha M_{uu} + \beta K_{uu} \quad (42)$$

onde α e β são os coeficientes de Rayleigh, e o efeito de amortecimento devido ao controlo activo é dado por:

$$C_A = -G_i G_c \left[K_{u\phi}^{(A)} \right] \left[K_{\phi u}^{(S)} \right] \quad (43)$$

A solução da equação (41) é obtida usando o método directo de Newmark, Bathe [10].

6. APLICAÇÕES

6.1. Viga compósita adaptativa com controlo activo.

Uma viga encastrada-livre (Figura 1) feita de graphite-epoxy, com sequência de laminação $[a/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/s]$, onde a e s representam as laminas actuadora e sensora feitas de PVDF coladas nas superfícies superior e inferior da estrutura principal, foi modelada por uma malha (5x1) de elementos finitos (10 elementos triangulares). As propriedades mecânicas e

piezoeléctricas do PVDF são $E_1 = E_2 = 2 \text{ GPa}$, $G_{12} = 0.775 \text{ GPa}$, $G_{13} = G_{23} = 0.775 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.29$, $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$, $t = 0.1 \times 10^{-3} \text{ m}$, $p_{33} = 1.062 \times 10^{-10} \text{ F/m}$, $e_{31} = e_{32} = 0.046 \text{ C/m}^2$, e as propriedades mecânicas da graphite-epoxy são $E_1 = 98 \text{ GPa}$, $E_2 = 7.9 \text{ GPa}$, $G_{12} = 5.6 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\rho = 1520 \text{ kg/m}^3$, e têm espessura $0.125 \times 10^{-3} \text{ m}$. As dimensões da viga são: comprimento $L = 0.1 \text{ m}$ e largura $b = 0.005 \text{ m}$. Os coeficientes de amortecimento de Rayleigh são $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ e $\beta = 9.6 \times 10^{-6}$. A viga é sujeita a uma carga transversa harmonicamente variável $q(t) = q \sin 2\pi f t$, onde $q = 7.5 \text{ N/m}^2$ é uma pressão uniformemente distribuída. Para uma carga sinusoidal com frequência $f = 10 \text{ Hz}$, a Figura 2 mostra a resposta w da ponta da viga no primeiro modo de vibração, respectivamente para os casos de não controlo e controlo activo. Observa-se claramente o efeito obtido com o controlo $G_1 G_c = 1.0 \times 10^{12}$.

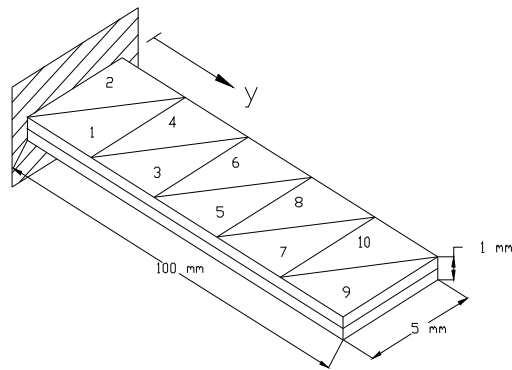


Figure 1. Viga encastrada-livre com actuadores e sensores colados nas superfícies superior e inferior.

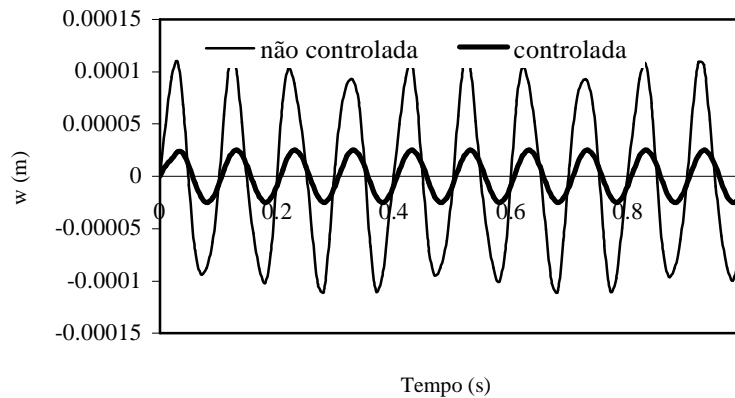


Figure 2. Efeito do controlo activo na resposta w , $f = 10 \text{ Hz}$

As Figura 3 e 4 mostram a diferença de potencial induzida no sensor e e aplicada no actuador, colocados no elemento 1, onde se observa que estas variam com a vibração da viga, e que o seu período de variação é o mesmo do período de vibração da estrutura.

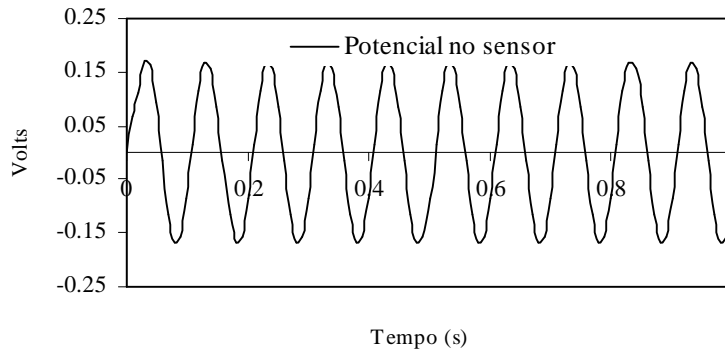


Figure 3. Diferença de potencial no sensor, $f=10$ Hz

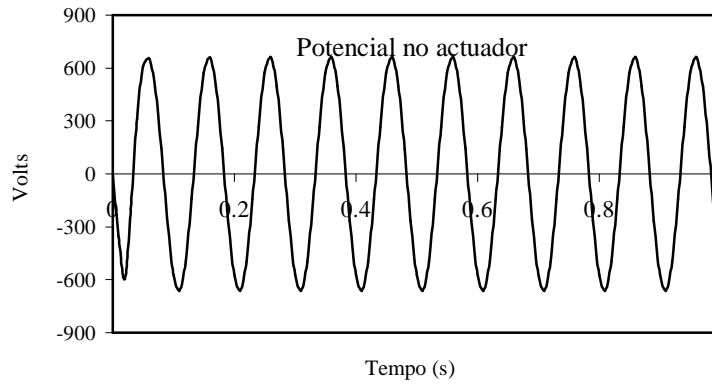


Figure 4. Diferença de potencial no actuador, $f=10$ Hz

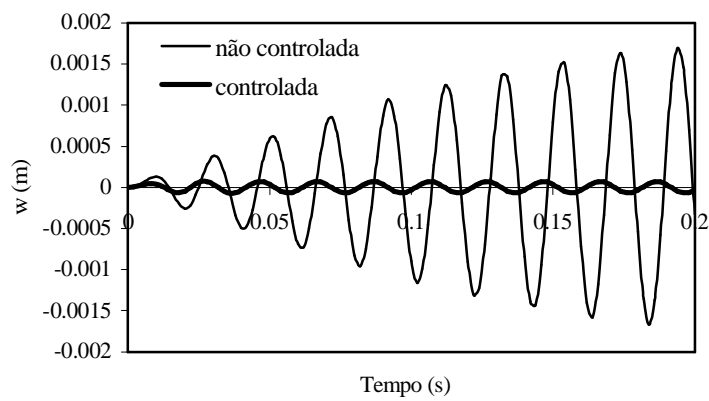


Figure 5. Efeito do controlo activo na resposta w , $f=50$ Hz

Para uma carga sinusoidal com frequência $f=50$ Hz, a qual é muito próxima da 1ª frequência natural da viga, a Figura 5 mostra as respostas w não controlada e controlada, onde o efeito do controlo activo $G_i G_c = 1.0 \times 10^{11}$ é agora muito mais evidente.

12. CONCLUSÕES

- O modelo de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de 3ª ordem, foi desenvolvido para ser aplicado em estruturas laminadas, integrando sensores e actuadores piezoeléctricos na forma de lâminas ou patches.
- O modelo desenvolvido foi aplicado no amortecimento activo de estruturas simples a vibrarem sob a acção de forças superficiais harmonicamente variáveis.
- Os resultados obtidos mostram que o modelo desenvolvido permite analisar o controlo activo de vibrações forçadas de estruturas do tipo placa.

AGRADECIMENTOS: Os autores agradecem o apoio financeiro recebido através do programa FCT/POCTI/FEDER, e Projecto POCTI/FEDER/ EME/37559/2001.

REFERÊNCIAS

- [1] H.Allik, e T.Hughes, “Finite element method for piezoelectric vibration”, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **2**, pp. 151-157, (1970).
- [2] E.F. Crawley e J. de Luis, “Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures”, *AIAA Journal* **25**, 10, pp. 1373-1385, (1987).
- [3] H.S. Tzou e C.I. Tseng, “Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parametric systems: A piezoelectric finite element approach”, *J. Sound Vibration* **138**, pp. 17-34, (1990).
- [4] V.G. Senthil, V.V. Varadan e V.K. Varadan, “A review and critique of theories for piezoelectric laminates”, *Smart Material Structures* **9**, pp. 24-28, (1999).
- [5] A. Benjeddou, “Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: A survey”, *Computer and Structures* **76**, pp. 347-363, (2000).
- [6] V.M. Franco, M.A. Gomes, A. Suleman, C.M. Mota Soares e C.A. Mota Soares, “Modelling and design of adaptive composite structures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engineering* **185**, pp. 325-346, (2000).
- [7] B. Samanta, M.C. Ray, e R. Bhattacharyya, “Finite element model for active control of intelligent structures”, *AIAA Journal* vol. **34**, n. 9, pp. 1885-1893, (1996).
- [8] K.Y. Lam, X.Q. Peng, G.R. Liu e J.N. Reddy, “A finite element model for piezoelectric composite laminates”, *Smart Material Structures* **6**, pp. 583-591, (1997).
- [9] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates*, CRC Press, Boca Raton, New York (1997).
- [10] K.J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, USA (1982).
- [11] H.F. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, New York: Plenum Press (1969).

- [12] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, *The finite element method*, McGraw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II, (1991).
- [13] J.S. Moita, J.I. Barbosa, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, *Design sensitivity analysis and optimal design of geometric non-linear laminated plate and shell structures*. Carlos A. Mota Soares, Cristóvão M. Mota Soares, Manuel J.M. Freitas, eds. *Proceedings of NATO Advanced Study Institute, Mechanics of Composite Materials and Structures*, 1998, pp. 265-308.