

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS

MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO
SISTEMA CARDIOVASCULAR

DANIELA VIEGAS CAIADO

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA BIOLÓGICA

2009

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS

MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO
SISTEMA CARDIOVASCULAR

DANIELA VIEGAS CAIADO

DISSERTAÇÃO ORIENTADA POR
PROFESSOR DOUTOR HERMENEGILDO BORGES DE OLIVEIRA

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA BIOLÓGICA

2009

RESUMO

A elevada incidência de patologias no sistema cardiovascular leva à necessidade de elucidar os fenómenos associados ao escoamento do sangue nos vasos sanguíneos. A Matemática pode ser utilizada como ferramenta, apresentando modelos que possam descrever o comportamento de todo o sistema cardiovascular. O objectivo principal deste trabalho é deduzir modelos matemáticos que possam descrever o escoamento do sangue nas grandes artérias. Para tal, é necessário considerar o sangue como um fluido em movimento e descrevê-lo à luz da Mecânica dos Fluidos. Este ramo da Física é tratado no Capítulo 2, onde são considerados conceitos e princípios fundamentais da Física, e obtidas as equações que governam o escoamento de um fluido homogéneo e incompressível. Uma vez que, durante o escoamento, o sangue interage com a parede do vaso, deduz-se no Capítulo 3 um modelo para o deslocamento da parede. Neste modelo considera-se a estrutura cilíndrica da artéria e, como sólido deformável, tem-se em conta a elasticidade da parede. No Capítulo 4, faz-se uma descrição das propriedades reológicas do sangue e deduz-se um modelo unidimensional para o escoamento do sangue nas grandes artérias. Estes dois modelos são os mais simples actualmente utilizados pela comunidade científica no sentido de compreender o escoamento do sangue nas grandes artérias.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema cardiovascular, sangue, equações de Navier-Stokes, modelo unidimensional do escoamento, modelo da parede do vaso.

ABSTRACT

The high incidence of pathologies in cardiovascular system leads to the need to elucidate the phenomena associated with blood flow in blood vessels. Mathematics can be used as a tool presenting models that can describe the whole cardiovascular system behavior. The aim of this work is to deduce mathematical models that can describe blood flow in large arteries. For such, it was necessary to consider the blood as a fluid in movement and to describe it from Fluid Mechanics point of view. This branch of the Physics is treated in Chapter 2, where concepts and basic principles of Physics are considered and obtained the equations that govern the flow of an homogeneous and incompressible fluid. Since blood interacts with the vessel wall, during blood flow, is deduced in Chapter 3 a model for wall displacement. In this model it is considered the cylindrical structure of the artery and, as deformable solid, the elasticity of the wall is taken into account. In Chapter 4, is performed a description of blood's rheological properties and is deduced a one-dimensional model for blood flow in large arteries. These two models are currently the simplest ones used by the scientific community in order to understand the blood flow in large arteries.

KEY-WORDS: Cardiovascular system, blood, Navier-Stokes equations, one-dimensional flow model, vessel wall model.

PREFÁCIO

*“Ao expandirmos o campo do conhecimento
apenas aumentamos o horizonte da ignorância.”*

HENRY MILLER, 1891–1980

Este trabalho surge no culminar do segundo ciclo do Mestrado Integrado em Engenharia Biológica. Este mestrado resultou da adequação ao Processo de Bolonha do curso de Engenharia Biotecnológica, no qual inicialmente ingressei com a perspectiva de adquirir conhecimentos nas mais diversas áreas. Este programa de mestrado permitiu igualar o grau em que agora concluo a minha formação ao nível da qualificação Europeia. Ao longo destes anos, convivi com diversos assuntos de diferentes campos da Ciência, como a Biologia, a Química, a Física, ou a Matemática. Na tentativa de melhorar a minha formação numa área menos explorada do programa de mestrado, segui a sugestão que me foi colocada pelo Professor Doutor Hermenegildo Borges de Oliveira. Confesso que meses difíceis sucederam à minha decisão de realizar este trabalho. Muitas foram as vezes em que desesperei, felizmente, noutras tantas exclamei *Eureka!*. No final, posso dizer que foi muito gratificante fazer um trabalho fora do roteiro usual dos alunos deste curso. Sinto-me bastante satisfeita por ter conseguido, neste trabalho, fazer jus ao significado de biotecnologia que inicialmente me fascinou: *“uso de conhecimentos sobre os processos biológicos e sobre as propriedades dos seres vivos, com o fim de resolver problemas e criar produtos de utilidade”* (p’la Convenção sobre Diversidade Biológica da ONU).

A citação de Henry Miller tem, para mim, um significado especial e exprime de uma forma elegante a minha percepção sobre a complexidade peculiar dos

sistemas vivos, e não só. Assim, pelo desejo de compreender os fenómenos biológicos e pelo fascínio pela complexidade do ser vivo, principalmente, do ser humano, surge a motivação fundamental deste trabalho.

A incidência de doenças relacionadas com o sistema cardiovascular tem vindo a aumentar nos últimos anos, principalmente nos países desenvolvidos. Hoje em dia, estas doenças são a principal causa de morte em todo o mundo, e estão associadas a factores de risco tais como o tabagismo, o sedentarismo, a obesidade ou a hipertensão. As doenças cardiovasculares têm um elevado impacto socio-económico, reduzindo a qualidade de vida e aumentando a morbilidade. É com esta preocupação que têm surgido inúmeros estudos científicos do sistema cardiovascular nas mais diversas áreas. A investigação Matemática aliada à Biofísica pode ser uma ferramenta poderosa no desenvolvimento de técnicas de diagnóstico, prognóstico e tratamento deste tipo de doenças. Por exemplo, na construção de modelos anatómicos que permitam projectar determinada intervenção cirúrgica, e aferir *a priori* o seu desenvolvimento. É no sentido de compreender os fenómenos que ocorrem ao nível do sistema cardiovascular que este trabalho toma forma. Mais concretamente, estudam-se os fenómenos associados ao escoamento do sangue nos vasos sanguíneos, onde uma grande parte destas doenças tem origem. Para tal, conciliam-se diversos conceitos biológicos, matemáticos e físicos, que auxiliam à compreensão deste fenómeno, apelando à natureza interdisciplinar da investigação científica no ramo da Hemodinâmica. Neste contexto, apresenta-se um breve estudo da Mecânica dos Fluidos, agrupando alguns dos conceitos fundamentais para a modelação matemática dos fluidos. Em particular, descreve-se o sangue à luz da Mecânica dos Fluidos e expõe-se um modelo matemático que permita descrever o escoamento do sangue nas grandes artérias. A interacção do sangue com os vasos por onde circula no sistema vascular, torna pertinente, também, o estudo dos vasos sanguíneos e a apresentação de um modelo que descreva o movimento da parede elástica, neste caso, das grandes artérias.

Muitas foram as pessoas que, ao longo dos anos, contribuíram para a minha formação. Quero agradecer à Universidade do Algarve e a todos os professores pelo contributo que deram para a minha formação. Agradeço, em particular, ao meu orientador Professor Doutor Hermenegildo Borges de Oliveira, pelo desa-

PREFÁCIO

fo. Porém, não posso deixar de referir a sua notável capacidade didática e a paciência e disponibilidade com que me acolheu como aluna. Muito Obrigada. Aos meus colegas e amigos, agradeço os *coffee breaks* que tanto me ajudaram a recuperar forças para continuar a escrever esta dissertação. À minha família e ao Ricardo, não tenho palavras para agradecer o amor e o apoio incondicional demonstrado. A todos, o meu Muito Obrigada.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}$	vector aceleração	\mathbf{I}	matriz identidade
a_i	componentes da aceleração	I_i	vector coluna de \mathbf{I}
A	área da secção	J	Jacobiano
\mathbf{D}	gradiente das velocidades de deformação	K	parâmetro de fricção
\mathbf{e}_i	vector da base canónica	dl	segmento de linha
e_i	componente do vector da base canónica	\mathbf{m}_f	vector momento das forças
E	módulo de Young	\mathbf{m}_l	vector momento angular
$\mathbf{f}_{ext}, \mathbf{f}_{int}$	esforços na parede	m	massa
\mathbf{f}_s	forças de superfície	\mathcal{M}_t	descrição de Lagrange
\mathbf{f}_v	forças de volume	\mathbf{n}	vector normal
f, \hat{f}, F	função arbitrária	n_i	componente do vector normal
\mathbf{F}, F_{ij}	gradiente de deformação	\mathbf{p}	vector momento linear
\mathbf{g}	força gravítica	p	pressão
h	espessura da parede	\mathbf{S}	matriz ortogonal
		dS	elemento de superfície
		\mathbf{t}	tensões de Cauchy no fluido
		t	tempo

LISTA DE SÍMBOLOS

T tensor das tensões de Cauchy do fluido	ν viscosidade cinemática
	ρ densidade
T_i vector coluna de T	$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{\alpha\beta}$ tensor das tensões de Cauchy da parede
u, $\hat{\mathbf{u}}$ vector velocidade do fluido	
u_i componentes do vector velocidade do fluido	$\boldsymbol{\sigma}_\theta$ tensões circunferenciais
	$\boldsymbol{\sigma}_z$ tensões longitudinais
v vector velocidade da parede	$d\sigma$ elemento de superfície
V volume	$\boldsymbol{\tau}$ vector tangente
$dV, d\mathcal{V}$ elemento de volume	τ_{ij} entradas da matriz T
w vector velocidade angular	$\boldsymbol{\xi}$ vector posição inicial
w_i componentes do vector velocidade angular	ξ_i componentes do vector posição inicial
W, W_{ij} gradiente das velocidades de rotação	ζ razão de Poisson
x vector posição	$\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{\alpha\beta}$ tensor das deformações
x_i componentes do vector posição	$d\zeta$ elemento de superfície
$\delta_j^i, \delta_\beta^\alpha$ delta de Kronecker	Γ fronteira do domínio
$\boldsymbol{\eta}$ vector deslocamento	Ω domínio do fluido
η componente radial do deslocamento	Σ área
κ curvatura da linha	$\partial\Omega$ fronteira do Ω
μ viscosidade dinâmica	∂V fronteira de V

CONTEÚDO

Resumo	i
Abstract	ii
Prefácio	iii
Lista de Símbolos	vi
1 Introdução	1
1.1 Descrição do sistema cardiovascular	1
1.2 Conceitos fundamentais	5
1.3 Resultados auxiliares	9
2 Mecânica dos Fluidos	11
2.1 Introdução aos fluidos	11
2.2 Descrições de Lagrange e de Euler	13
2.3 Gradiente de deformação	17
2.4 Teorema do Transporte de Reynolds	21
2.5 Equação da continuidade	22
2.6 Equações do movimento	24
2.7 Lei constitutiva	30
2.8 Equações de Navier-Stokes	32
2.9 Condições iniciais e de fronteira	33

CONTEÚDO

3	Modelação da Parede do Vaso Sanguíneo	36
3.1	Estrutura das artérias	36
3.2	Geometria do vaso sanguíneo	38
3.3	Esforços desenvolvidos na parede	43
3.4	Equação do movimento da parede	48
4	Escoamento do sangue nos vasos sanguíneos	51
4.1	Reologia do sangue	51
4.2	Derivação do modelo	53
5	Conclusão	62
	Apêndice: Elasticidade linear	A-I
	Bibliografia	I

INTRODUÇÃO

Todos os fenómenos que ocorrem ao nível dos sistemas biológicos são extraordinariamente complexos e representam um grande desafio para a comunidade científica. Em particular, o sistema cardiovascular é objecto de elevado interesse em diversos ramos da investigação científica, nomeadamente na área da modelação matemática. Este interesse fundamenta-se na problemática crescente das doenças associadas ao sistema cardiovascular. As doenças cardiovasculares representam a causa de cerca de 30% das mortes ao nível mundial e são a principal causa de morte em todo o mundo. É neste enquadramento que a modelação matemática associada à Física e à Biologia é realizada, tendo por objectivo encontrar modelos matemáticos que possam descrever este sistema. Este trabalho prende-se com a dedução de um modelo matemático que descreva o escoamento do sangue nos vasos sanguíneos, nomeadamente nas grandes artérias. Neste capítulo é feita a descrição biológica do sistema cardiovascular e são, também, abordados conceitos matemáticos fundamentais para a derivação de um modelo matemático para o escoamento do sangue nas grandes artérias. Este modelo será deduzido e explicado nos capítulos seguintes.

1.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA CARDIOVASCULAR

O sistema cardiovascular é um sistema circulatório fechado que contribui para a manutenção da homeostasia do organismo. Deste sistema fazem parte o coração e os vasos sanguíneos, especificamente, as artérias, veias e capilares. O coração

1. INTRODUÇÃO

é considerado a bomba propulsora da circulação do sangue em todos os vasos sanguíneos do organismo vivo. O coração de um adulto saudável com 70 Kg bombeia, em média, 7200 L de sangue por dia (5 L por minuto). Este órgão possui células que têm a capacidade de gerar potenciais de acção espontâneos que actuam como sinais eléctricos e que se propagam no músculo cardíaco. Estes sinais são os responsáveis pela contracção muscular do coração e ocorrem em intervalos regulares. A diferença de pressão gerada pelas contracções é a força motriz da circulação do sangue em todo o organismo. A circulação sanguínea compreende dois percursos: a circulação pulmonar e a circulação sistémica (ver Figuras 1.1 e 1.2). O sangue proveniente dos tecidos entra pelo lado direito do

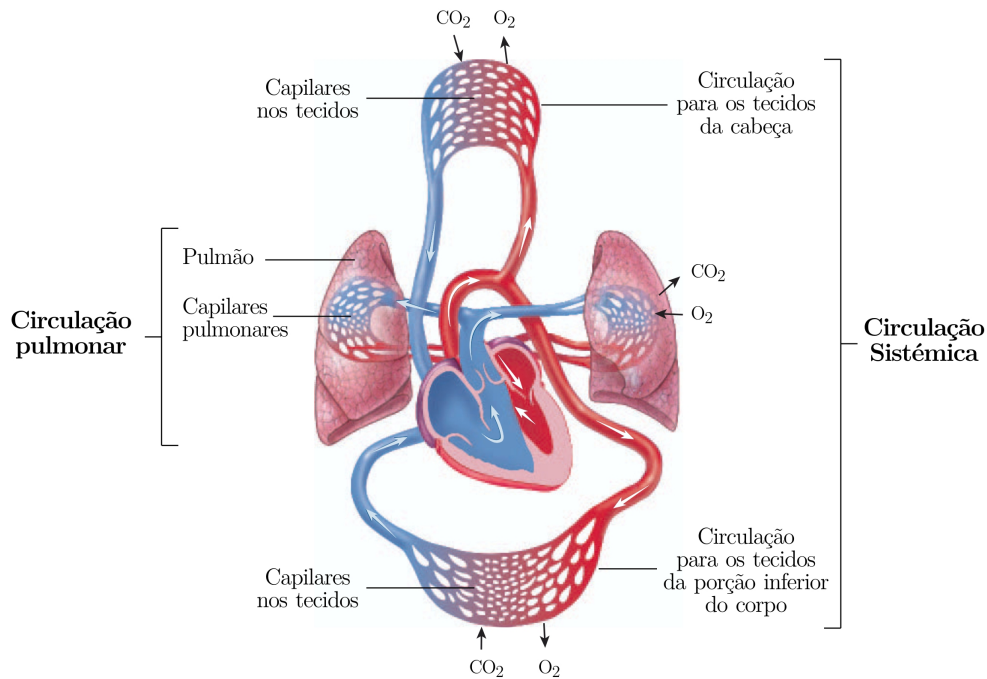


FIGURA 1.1: Circulação sanguínea (fonte: [1]).

coração, primeiramente pela aurícula direita, passando pela válvula tricúspide, e chegando ao ventrículo direito. Quando este enche, contrai e envia o sangue contra as válvulas tricúspide e semilunar pulmonar, fechando a primeira. A válvula semilunar pulmonar abre, e o sangue entra na artéria pulmonar, por onde inicia a circulação sistémica. A artéria pulmonar transporta o sangue desoxigenado para os pulmões, onde ocorrem as trocas gasosas. Nos capilares pulmonares, o dióxido de carbono (CO_2) é libertado e o oxigénio (O_2) difunde-se para o san-

1. INTRODUÇÃO

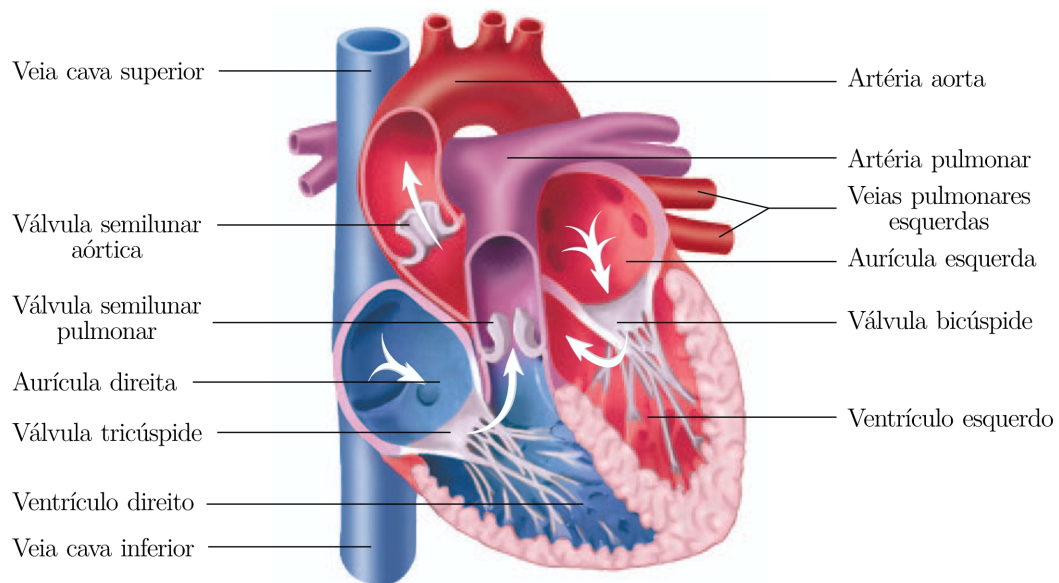


FIGURA 1.2: Coração humano (fonte: [1]).

gue. O sangue oxigenado entra nas veias pulmonares, retorna ao coração pela aurícula esquerda e passa para o ventrículo esquerdo através da válvula bicúspide. O ventrículo contrai e impulsiona o sangue contra as válvulas bicúspide e semilunar aórtica. A primeira fecha, impedindo o retorno do sangue, e a última permite a entrada do sangue na artéria aorta, por onde se inicia a circulação sistêmica. Da artéria aorta, o sangue é dirigido para todas as partes do corpo através das artérias de maior calibre para as de menor, passando pelas arteríolas e chegando aos capilares. Aí fazem-se as trocas necessárias ao metabolismo celular e o sangue entra nas vénulas, passando pelas veias de menor calibre, seguindo até às de maior calibre, e retornando ao coração pelas veias cavas. Desta forma, para além de gerar a força motriz da circulação, o coração também assegura a fluxo unidireccional, por meio das válvulas que impedem o retrocesso do sangue, e regula a distribuição do sangue de acordo com as necessidades celulares. Devido à contracção pulsátil dos ventrículos, o sangue entra nas grandes artérias a uma pressão elevada, para poder chegar a todas as partes do corpo. No entanto, devido à elevada elasticidade, estas artérias deformam-se, permitindo regular significativamente o fluxo sanguíneo. Assim, em condições normais, a pressão sanguínea na aorta varia entre 80 mmHg e 120 mmHg. A última é de-

1. INTRODUÇÃO

signada por pressão sistólica, resultante da contracção do ventrículo, enquanto que a primeira é a pressão diastólica, que corresponde ao momento da dilatação do ventrículo. A contracção cardíaca, bem como a pressão arterial, podem ser reguladas de forma extrínseca por controlo nervoso e hormonal. À medida que o sangue prossegue pela rede de artérias, capilares e veias, a pressão vai diminuindo de acordo com o aumento da resistência à circulação. Esta resistência vai aumentando à medida que o diâmetro das artérias diminui. Ao entrar nos capilares, o sangue encontra-se a 30 mmHg, saindo à pressão de 10 mmHg. Quando chega à aurícula direita, o sangue encontra-se, aproximadamente, a 0 mmHg, sendo que, a resistência ao fluxo sanguíneo nas veias é relativamente pequena. As veias possuem elevada distensibilidade ou *compliance* vascular, isto é, têm tendência para aumentar a capacidade volumétrica aquando do aumento da pressão sanguínea. Assim, quanto maior a capacidade de dilatação do vaso, maior a sua distensibilidade e menor a resistência à circulação sanguínea. O retorno do sangue ao coração, através das veias, é possível devido à existência de válvulas, que impedem o retrocesso do sangue por gravidade. O movimento muscular, principalmente nos membros inferiores, facilita o retorno do sangue ao coração. Toda esta complexidade do sistema cardiovascular é, de certa forma, limitante ao desenvolvimento de modelos matemáticos que possam explicar o seu funcionamento. Pelo que, considera-se apenas o escoamento do sangue nas grandes artérias, deixando de parte o escoamento nos restantes vasos e o comportamento pulsativo do coração.

O sangue é o fluido que percorre o sistema cardiovascular, e transporta substâncias essenciais ao metabolismo celular: gases, nutrientes, produtos de degradação, enzimas, hormonas. A regulação do pH e da concentração de sais também é uma função do sangue, assim como, a manutenção da temperatura do corpo. Mais ainda, o sangue compreende parte do sistema imunitário, protegendo o organismo contra substâncias exógenas, toxinas e microrganismos. A coagulação do sangue nas zonas de danificação dos tecidos está, também, assegurada pelo sangue. Do ponto de vista microscópico, o sangue é uma mistura de um fluido, que se designa por plasma, e de partículas em suspensão nesse fluido (ver Figura 1.3). As partículas podem ser células ou fragmentos celulares e designam-se por elementos figurados. Estes, constituem cerca de 45% do volume total do

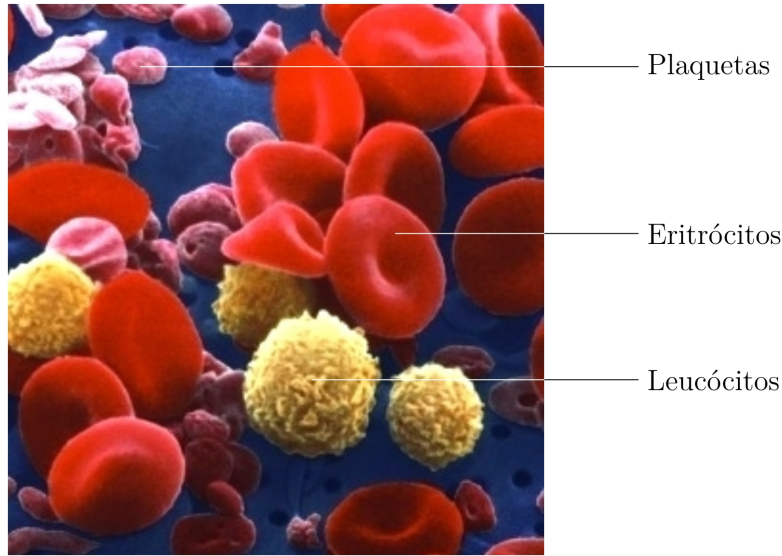


FIGURA 1.3: Microscopia electrónica de varrimento colorida dos elementos figurados do sangue humano (fonte: National Cancer Institute, Science Photo Library).

sangue e os restantes 55% correspondem ao plasma. No plasma cerca de 91% da massa é água, 7% são proteínas e 2% são outras substâncias orgânicas e inorgânicas. Dos elementos figurados, 95% do volume são eritrócitos, também designados por hemácias ou glóbulos vermelhos, e os restantes 5% são leucócitos, ou glóbulos brancos, e plaquetas, ou trombócitos. Os eritrócitos são as células responsáveis pelas trocas gasosas, levando oxigénio dos pulmões até aos tecidos e removendo o dióxido de carbono da circulação sanguínea. Os leucócitos, por sua vez, são células especializadas do sistema imunitário. As plaquetas são os fragmentos responsáveis pela coagulação sanguínea, actuando directamente nas zonas danificadas e desencadeando um processo de reconstrução dos tecidos.

1.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste texto, todas as quantidades físicas são consideradas tensores. Estas quantidades são definidas em \mathbb{R}^n que corresponde ao espaço euclideo de dimensão $n \in \mathbb{N}$, onde \mathbb{N} denota o conjunto dos números naturais e \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Um tensor de ordem m num espaço de dimensão n é um objecto matemático que tem n^m componentes e que obedece a determinadas

regras de transformação. Assim, no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , um tensor de ordem zero tem uma única componente e é designado por escalar. Um escalar é independente do sistema de coordenadas e é completamente descrito pela sua magnitude. Salienta-se que um escalar não é necessariamente uma constante podendo ser função da posição e do tempo. Por sua vez, um tensor de primeira ordem tem três componentes e é designado por vector. Este possui magnitude e direcção e as suas componentes são descritas por meio de um sistema de coordenadas. O tensor de segunda ordem tem nove componentes, é descrito por uma matriz de ordem 3×3 e é habitualmente designado apenas por tensor. Os escalares são representados por letras em itálico, por exemplo ρ ou x . Aos vectores atribuem-se as letras minúsculas a negrito, como $\boldsymbol{\xi}$ ou \mathbf{x} . Os tensores são representados por letras maiúsculas, também a negrito, por exemplo, \mathbf{T} . Cada ponto arbitrário \mathbf{a} de \mathbb{R}^n tem n componentes e é denotado por $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, assim como o vector posição correspondente. A base canónica de \mathbb{R}^n é dada por $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. No espaço \mathbb{R}^3 , escolhe-se o sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) cuja base canónica é ortonormal e é dada pelos vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Assim, em \mathbb{R}^n , o vector posição pode ser descrito por

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i.$$

A adição de dois vectores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ é definida por

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \mathbf{e}_i.$$

A multiplicação de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por um vector pode ser definida na forma seguinte:

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda a_i \mathbf{e}_i.$$

O produto escalar entre dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

e o resultado é um escalar. O produto escalar entre dois vectores da base canónica, diga-se \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j , com $i, j = 1, \dots, n$, é dado por

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i,$$

1. INTRODUÇÃO

onde δ_j^i é designado por delta de Kronecker e define-se por

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Define-se a norma euclideana de um vector \mathbf{a} por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

O produto escalar entre dois vectores está relacionado com as normas desses vectores por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

onde θ é o menor ângulo formado entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . No caso particular de $n = 3$, define-se o produto vectorial entre dois vectores na forma seguinte:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 - \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_3.$$

Este produto dá origem a um vector cuja direcção é perpendicular ao plano formado por \mathbf{a} e \mathbf{b} e cuja magnitude é $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$. Pode-se definir o produto vectorial de um modo mais simples, mas formal, como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Qualquer tensor de segunda ordem pode ser descrito na forma matricial seguinte:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix}.$$

Pode-se, ainda, definir um tensor como a transformação linear das componentes do vector \mathbf{a} nas componentes do vector \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}.$$

A matriz identidade denota-se por \mathbf{I} e é uma matriz quadrada tal que as suas entradas são descritas por

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

1. INTRODUÇÃO

com $i, j = 1, 2, \dots, n$. Para $n = 3$ a matriz identidade é de ordem 3×3 e toma a expressão

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A derivada parcial de uma função escalar $f(x_1, \dots, x_n)$, no ponto (a_1, \dots, a_n) , em ordem à variável x_i , é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

O gradiente é um operador diferencial denotado por ∇ e é definido formalmente por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Assim, o gradiente de f é um vector cujas componentes são as derivadas parciais de f , isto é,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

A divergência de um campo vectorial $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ é um escalar e é dada por

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}.$$

A divergência do gradiente de um escalar f também é um operador diferencial designado por laplaciano de f , e é definido por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

No caso de $n = 3$, o rotacional de um campo vectorial $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ é um vector e é definido por

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 - \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_3.$$

A matriz Jacobiana de uma transformação $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com m e n não necessariamente iguais, que transforma os pontos (x_1, \dots, x_n) em (y_1, \dots, y_m) ,

onde $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ e $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, é dada por

$$M_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \equiv \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right].$$

No caso da matriz Jacobiana ser quadrada, o que corresponde ao caso em que $m = n$, o determinante de M_J designa-se por Jacobiano.

Considera-se um domínio aberto, limitado e conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira compacta é denotada por $\partial\Omega$. Dada uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e um domínio $V \subset \Omega$, o integral de volume será representado por

$$\int_V f dV,$$

onde dV é um elemento infinitesimal de V . Da mesma forma, um integral de superfície será denotado por

$$\int_{\partial V} f d\zeta,$$

onde $d\zeta$ é um elemento infinitesimal de ∂V .

1.3 RESULTADOS AUXILIARES

No sentido de complementar a exposição deste trabalho, apresentam-se alguns resultados auxiliares que são válidos para qualquer dimensão $n \geq 1$ que se considere.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência). *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado com fronteira ∂V suficientemente regular de modo a que exista em quase todos os pontos de ∂V a normal \mathbf{n} , e seja \mathbf{a} um campo vectorial diferenciável num conjunto aberto que contém V e ∂V . Então,*

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\zeta.$$

Demonstração. Dias Agudo [2], pag. 130. □

Teorema 1.2 (Integração por partes). *Nas condições do Teorema 1.1, sejam f e g funções diferenciáveis em V e ∂V . Então,*

$$\int_V f \frac{\partial g}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} fg n_i d\varsigma - \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} g dV,$$

onde n_i é a i -ésima componente do vector normal a ∂V e onde $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Aplicação do Teorema da Divergência ao produto fg . □

Aplicando o Teorema da Divergência ao produto $f\mathbf{a}$, obtém-se a resultado seguinte:

$$\int_V f \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{\partial V} f\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\varsigma - \int_V \nabla f \cdot \mathbf{a} dV,$$

onde \mathbf{n} é o vector normal a ∂V .

Teorema 1.3 (Teorema de Valor Médio). *Seja f uma função contínua num subconjunto conexo e compacto $V \subset \mathbb{R}^n$. Então existe um ponto $\bar{\mathbf{a}} \in V$ tal que*

$$\int_V f dV = \bar{f} |V|,$$

onde $\bar{f} = f(\bar{\mathbf{a}})$ e $|V|$ denota a medida de V .

Demonstração. Dias Agudo [2], pag. 196. □

Teorema 1.4 (Teorema de Mudança de Variável). *Sejam V e Λ dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n e limitados por funções diferenciáveis. Seja $\varphi : \Lambda \rightarrow V$ uma função bijectiva com derivadas parciais contínuas. Então, se f é uma função integrável em V , tem-se*

$$\int_V f dV = \int_{\varphi^{-1}(V)} f \circ \varphi |J| d\Lambda = \int_{\Lambda} f \circ \varphi |J| d\Lambda,$$

onde dV e $d\Lambda$ são elementos infinitesimais de V e Λ , respectivamente, e J é o Jacobiano da transformação.

Demonstração. Dias Agudo [2], pag. 132. □

CAPÍTULO 2

MECÂNICA DOS FLUIDOS

É inserido na Mecânica dos Fluidos que se procura fazer o estudo do escoamento do sangue no sistema cardiovascular - Hemodinâmica. Esta disciplina trata o sangue como um fluido em movimento, estudando o comportamento deste e subsequentes efeitos da interacção com as fronteiras que o delimitam. Neste capítulo serão abordados os princípios fundamentais da Física que descrevem o escoamento de um fluido isotérmico, pelo que, não serão abordados os princípios da Termodinâmica. É necessário, porém, introduzir alguns conceitos da Cinemática, de forma a viabilizar a derivação das equações fundamentais que governam o movimento de um fluido. Estes conceitos e princípios aplicados à Mecânica dos Fluidos podem ser encontrados nos textos dos autores J. Serrin [3], G. Duvaut [4], G.T. Mase e G.E. Mase [5] e J.H. Spurk [6], que foram utilizados neste estudo.

2.1 INTRODUÇÃO AOS FLUIDOS

Em geral, entende-se por fluido como sendo uma substância capaz de escoar e cujo volume adquire a forma do recipiente que o contém. No entanto, esta noção, apesar de dar a ideia do que é um fluido, não constitui uma definição científica. Por definição, um fluido é uma substância cuja estrutura molecular não oferece resistência à sua deformação, quando submetida a tensões de qualquer magnitude. Num fluido, entende-se por tensão, como sendo os esforços internos que ocorrem como reacção a forças externas aplicadas sobre o fluido, ou como reacção

de forças internas. Entre as tensões com mais expressão no estudo teórico dos fluidos, encontram-se a tensão de corte, que está relacionada com as forças tangenciais aplicadas na superfície, e a tensão superficial. Esta última, relaciona-se com as propriedades coesivas dos fluidos, e explica fenómenos como a formação de gotas ou a flutuação de pequenos objectos. A tensão de corte, é uma tensão que se cria quando uma força tangencial é aplicada sobre a superfície do fluido, e que, por muito pequena que seja, induz à deformação contínua do fluido. Por outras palavras, dá-se o escoamento do fluido, que se mantém enquanto a tensão de corte se fizer sentir. Para além das tensões, as características mais importantes que descrevem o escoamento dos fluidos são a velocidade, a densidade, a viscosidade e a temperatura. Para caracterizar o comportamento de um fluido, é imperativo o conhecimento do campo de velocidades, que descreve a variação no deslocamento deste em relação ao tempo. A densidade, é uma propriedade física que corresponde à razão da quantidade de matéria, ou massa, por unidade de volume. Convém frisar que este termo é transposto directamente do inglês *density*. No entanto, alguns textos em português remetem esta definição para o termo massa específica ou massa volúmica, reservando o termo densidade para a razão entre a densidade, definida anteriormente, da substância em estudo e a densidade da substância de referência, a água. A viscosidade é uma propriedade intrínseca de cada fluido e caracteriza as tensões internas que se criam entre moléculas contíguas, que resultam no deslocamento destas a diferentes velocidades. A temperatura, embora não sendo objecto de estudo neste texto, é muito importante, pois caracteriza o estado do fluido.

Seja no estado líquido ou gasoso, um fluido é composto, de forma discreta, por inúmeras moléculas que interagem entre si. Seria, portanto, uma tarefa utópica analisar o comportamento individual de cada molécula para descrever o movimento do fluido. Assim, considera-se um fluido como uma substância infinitamente divisível, isto é, um meio contínuo, hipoteticamente compacto, uma vez que a distância entre moléculas é desprezável comparativamente às dimensões em análise. Desta forma, um elemento ou partícula de fluido corresponde a um volume muito pequeno, do ponto de vista macroscópico, mas suficientemente grande para conter um número representativo de moléculas, de forma a atribuir valores médios às suas propriedades. A densidade de um meio contínuo é, por-

tanto, um valor médio da razão entre a massa de cada partícula e o volume que cada uma ocupa. Qualquer propriedade em estudo será considerada como uma função contínua que varia no espaço e no tempo.

Para além da hipótese da continuidade, o estudo dos fluidos assenta em três princípios gerais: o princípio do determinismo que postula que as tensões, num elemento de fluido, são determinadas pelo historial do movimento desse elemento; o princípio da acção local que estabelece que somente o movimento das partículas vizinhas de um elemento de fluido podem afectar as tensões nesse elemento; e o princípio da invariância ou da indiferença material que afirma que o comportamento do fluido é invariante para mudanças de referencial, isto é, é independente da posição do observador. Adicionalmente, considera-se que os fluidos são substâncias isotrópicas e, portanto, deformam-se em qualquer sentido e possuem as mesmas características em todas as direcções.

2.2 DESCRIÇÕES DE LAGRANGE E DE EULER

O escoamento de um fluido pode ser descrito através de duas abordagens principais: descrição de Lagrange e descrição de Euler. A abordagem de Lagrange procura descrever o comportamento das propriedades de partículas identificáveis do fluido ao longo das suas trajectórias, avaliando a variação total dessas propriedades. Por outro lado, a abordagem de Euler consiste em identificar um local fixo no espaço e descrever as propriedades das partículas que por aí passam ao longo do tempo. Esta descrição permite não só verificar a evolução das propriedades no decurso do tempo num determinado local, como também analisar, num dado instante, a variação dessas propriedades em diferentes locais. No sentido de descrever cada uma das abordagens, fixa-se um intervalo de tempo $I = [0, T]$, com $T > 0$ e considera-se um domínio $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ ocupado pelo fluido no instante t , com $t \in [0, T]$. Em particular, Ω_0 refere-se ao domínio ocupado pelo fluido no instante inicial $t = 0$ e, portanto, à configuração inicial. Por analogia, considerando t o instante actual, Ω_t é a configuração actual. Para se compreender estas descrições, considere-se uma partícula de fluido cuja forma varia de modo contínuo com o movimento.

Na descrição de Lagrange, a cada partícula na posição inicial $t = 0$ associa-se

um vector $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$. Assim, o vector posição $\mathbf{x} \in \Omega_t$, num determinado tempo $t > 0$, pode ser definido por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, isto é, \mathbf{x} é uma função da posição inicial, $\boldsymbol{\xi}$, e do tempo, t . Deste modo, o escoamento do fluido, nesta descrição, pode ser expresso por

$$\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathcal{M}_t(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{M}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ corresponde a uma família de difeomorfismos, ou seja, aplicações diferenciáveis com inversas também diferenciáveis. Esta família de aplicações relaciona a configuração inicial, Ω_0 , com a configuração actual, Ω_t . Desta forma, descreve-se o trajecto da partícula $\boldsymbol{\xi}$ no decurso do tempo, e obtém-

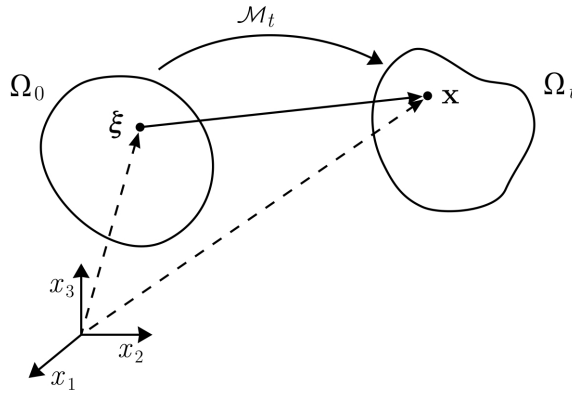


FIGURA 2.1: Descrição de Lagrange.

se para cada $\boldsymbol{\xi}$ uma trajectória no espaço ao longo do tempo. A velocidade da partícula no instante t corresponde à derivada do vector posição em ordem ao tempo. O campo de velocidades $\hat{\mathbf{u}} : \Omega_0 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ descrito ao longo da trajectória é definido, na descrição de Lagrange, por

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Da mesma forma, o campo vectorial que descreve a aceleração $\hat{\mathbf{a}} : \Omega_0 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é expresso, nesta descrição, por

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Assim sendo, as variáveis independentes $(\boldsymbol{\xi}, t)$ são designadas por variáveis de Lagrange ou materiais, sendo esta última designação para fazer menção à partícula ou ponto material que se segue ao longo do tempo. Por vezes, a descrição de Lagrange é denominada por descrição de referência ou, ainda, inicial.

A descrição de Euler, também designada por descrição actual, permite descrever as propriedades do fluido em função da posição no espaço e do tempo. A partícula $\boldsymbol{\xi}$ que se encontra na posição \mathbf{x} no tempo t pode ser expressa, na descrição de Euler, por

$$\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{M}_t^{-1}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

onde \mathcal{M}_t^{-1} corresponde à inversa da família de aplicações \mathcal{M}_t . Assim, num determinado local \mathbf{x} no espaço, são descritas as propriedades da partícula que aí se encontra no tempo t . Nesta descrição, utilizam-se as variáveis independentes (\mathbf{x}, t) que se designam por variáveis de Euler. Estas variáveis também são designadas por variáveis espaciais por analogia ao local fixo no espaço onde se descreve o escoamento do fluido ao longo do tempo. Quando se fixa um local no espaço, entende-se que a velocidade nesse local corresponde à velocidade de que cada partícula vem animada. Daqui advém que a velocidade, na descrição de Euler, seja definida por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

onde $\boldsymbol{\xi} = \mathcal{M}_t^{-1}(\mathbf{x})$. Observe-se, por (2.2) e (2.5), que a velocidade tem a mesma expressão nas duas descrições. Na configuração actual, o fluido é descrito em função, não só do tempo, mas também da posição, pelo que, a derivada em ordem ao tempo, na descrição de Euler, não será apenas parcial. Para se entender isto, considere-se uma determinada quantidade escalar $f : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Esta quantidade escalar terá de ser igual nas duas descrições, pelo que,

$$f(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (2.6)$$

A taxa de variação de \hat{f} ao longo da trajectória percorrida por $\boldsymbol{\xi}$ é dada, simplesmente, pela derivada parcial em ordem ao tempo, uma vez que $\boldsymbol{\xi}$ está fixo e, portanto, não é função do tempo:

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t).$$

Contudo, na configuração actual, qualquer quantidade f varia no tempo e no espaço. Por aplicação da regra de derivação da função composta, obtém-se

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t}, \quad (2.7)$$

ou, em notação vectorial,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (2.8)$$

A derivada total de f em ordem ao tempo, expressa em (2.7)-(2.8), designa-se por derivada material de f . Esta derivada permite aferir que a variação total de uma determinada quantidade em ordem ao tempo resulta da soma de duas contribuições. O primeiro termo refere-se à derivada local, isto é, à variação da quantidade ao longo do tempo, num determinado local. O segundo corresponde à variação da quantidade no espaço, num determinado instante, e designa-se por derivada advectiva. Estas noções de derivada também se aplicam a quantidades vectoriais. Assim sendo, a aceleração pode ser descrita, na configuração actual, recorrendo à definição de derivada material. Usando (2.8), obtém-se, para cada componente da aceleração na descrição de Euler,

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i, \quad (2.9)$$

com $i = 1, 2, 3$. Pode-se então escrever, na forma vectorial,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial t} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla u_1, \mathbf{u} \cdot \nabla u_2, \mathbf{u} \cdot \nabla u_3) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

Para o fenómeno em estudo, não é conveniente identificar e descrever o movimento de cada partícula como parte do meio contínuo, mas sim identificar uma região no espaço e descrever o que acontece aí ao longo do tempo. Como tal, neste texto, a descrição do escoamento do fluido será feita a partir da configuração actual e, portanto, segundo a descrição de Euler. No entanto, é possível obter uma descrição a partir da outra. A passagem da descrição de Lagrange à descrição de Euler é feita por integração da velocidade, expressa em variáveis de Lagrange, ao longo da trajectória de $\boldsymbol{\xi}$. Com base em (2.2) e (2.5) tem-se a igualdade seguinte:

$$\int_0^t \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) dt = \int_0^t \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0).$$

Como $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$, obtém-se, em variáveis de Euler, a expressão

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, t) dt.$$

Por outro lado, conhecidos o campo de velocidades actual e a posição inicial, tem-se o problema seguinte, para a descrição do movimento do fluido: para qualquer $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$, determine-se a função $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ que satisfaz às condições seguintes:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \forall t \in I \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases}$$

A resolução deste problema de Cauchy permite passar da descrição de Euler à descrição de Lagrange.

2.3 GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO

Durante o movimento, os meios contínuos deformam-se e as partículas constituintes podem tomar posições relativas diferentes a cada instante. Pelo que, no estudo dos fluidos é importante caracterizar as deformações que ocorrem aquando do escoamento. Para tal, considere-se um cubo infinitesimal, conforme ilustrado na Figura 2.2, que corresponde a um elemento de volume do fluido, e defina-se $d\boldsymbol{\xi} = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ e $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ como elementos de linha na configuração inicial e actual, respectivamente. Assumindo que (2.1) é di-

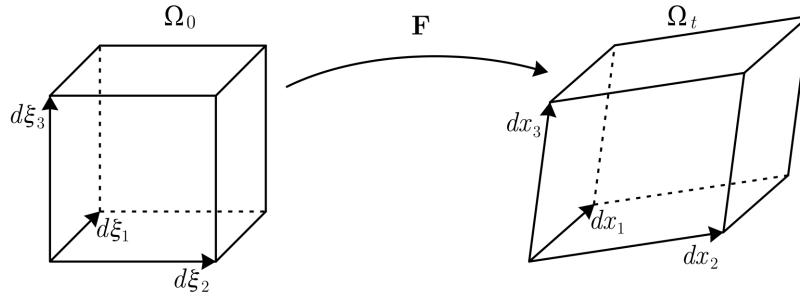


FIGURA 2.2: Gradiente de deformação.

ferenciável, tem-se, formalmente, para cada componente do elemento de linha $d\mathbf{x}$,

$$dx_i = \frac{dx_i}{d\xi_j} d\xi_j, \quad (2.11)$$

com $i, j = 1, 2$ e 3 . Em notação vectorial, tem-se

$$d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{F} d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.12)$$

sendo $\mathbf{F} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ uma matriz cujas entradas são, assim, definidas por

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (2.13)$$

com $i, j = 1, 2, 3$, ou, na forma matricial,

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t). \quad (2.14)$$

Esta matriz, como tal, é um tensor de segunda ordem que corresponde à transformação linear dos elementos de linha $d\boldsymbol{\xi}$ em elementos de linha $d\mathbf{x}$ e que se designa por gradiente de deformação. Recordando que as aplicações contínuas que definem o escoamento de um fluido são invertíveis, é condição necessária e suficiente para isto acontecer que o determinante do gradiente de deformação seja não nulo. Este determinante é denominado por Jacobiano e é dado por

$$J = \det \mathbf{F} = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right]_{i,j=1,2,3}. \quad (2.15)$$

Salienta-se o facto de que para o escoamento de um meio contínuo, como é o caso dos fluidos, não é possível a mudança de orientação dos eixos coordenados e, neste caso, J toma valores positivos. Pelo contrário, para o deslocamento de um corpo rígido, J pode tomar valores negativos. É possível estabelecer uma relação entre a variação do Jacobiano no tempo e a divergência da velocidade. Esta relação determina as variações locais de volume devidas ao escoamento.

Lema 2.1. Nas condições de (2.15), tem-se

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Demonstração. Considere-se a definição do Jacobiano

$$J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right], \quad (2.17)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Sejam A_i^α os cofactores de $\partial x_i / \partial \xi_\alpha$ na expansão de (2.17) de modo que

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} A_j^\alpha = J \delta_j^i. \quad (2.18)$$

Aqui δ_j^i é o delta de Kronecker. Escrevendo (2.18) por extenso, tem-se

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} A_j^1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} A_j^2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3} A_j^3 = J \delta_j^i. \quad (2.19)$$

Tomando $i = j$ em (2.19), a variação do Jacobiano em ordem ao tempo é dada por

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} A_i^1 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} A_i^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3} A_i^3.$$

Relembrando que $\partial x_i / \partial t = u_i$ e que x_i é diferenciável em ordem a $\boldsymbol{\xi}$, então

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} A_i^1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} A_i^2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3} A_i^3 \right] = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J.$$

Finalmente obtém-se a igualdade

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad \square$$

Por este resultado, conclui-se que a variação de J no tempo é igual a zero se, e só se,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.20)$$

Neste caso, tem-se um escoamento em que ocorre deformação sem alteração do volume. Por isso, os fluidos que satisfazem a (2.20) dizem-se incompressíveis. A equação (2.20) é chamada a equação da incompressibilidade e é a primeira equação que governa o escoamento de um fluido incompressível.

Determinadas as deformações do fluido, é essencial descrever a forma como essas deformações ocorrem, isto é, averiguar a variação dessas deformações no tempo. Considerando a variação do elemento de linha $d\mathbf{x}$ ao longo do tempo, obtém-se, a partir de (2.12),

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\xi}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.21)$$

Refira-se que a segunda igualdade resulta de $\boldsymbol{\xi}$ ser independente de t . Pode-se ainda mostrar que

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \nabla \mathbf{u} \mathbf{F}, \quad (2.22)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ denota a matriz

$$\nabla \mathbf{u} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,2,3}.$$

Esta matriz dá o gradiente das velocidades e expressa a velocidade das deformações. De (2.12), (2.21) e (2.22) obtém-se a relação

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Considere-se, também, o produto escalar entre dois elementos de linha, por exemplo, $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$. A caracterização do ângulo entre dois elementos de linha permite verificar de que forma ocorreu a deformação. Adicionalmente, a variação do produto escalar, e, portanto, desse ângulo, dá informação acerca da dependência da deformação. Desta forma,

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1) \cdot d\mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_1 \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_2)$$

que, por meio de (2.23), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) &= (\nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_1) \cdot d\mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_1 \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_2) \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot d\mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo $\nabla \mathbf{u}^T$ a matriz transposta de $\nabla \mathbf{u}$, isto é, a matriz

$$\nabla \mathbf{u}^T = \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{i,j=1,2,3}.$$

Por fim, agrupando os termos de (2.24) num único, obtém-se a igualdade

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = 2d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}_2,$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{i,j=1,2,3}.$$

A matriz \mathbf{D} está relacionada com as tensões internas que se criam durante o movimento e, por isso, é designada por gradiente das velocidades de deformação. Por outro lado, a matriz $\nabla \mathbf{u}$ pode sempre ser decomposta em duas outras, uma simétrica e a outra anti-simétrica:

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.25)$$

Desta decomposição, verifica-se que o primeiro termo é, garantidamente, uma matriz simétrica e corresponde a \mathbf{D} . O segundo termo de (2.25) é uma matriz anti-simétrica, e é definida por

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{i,j=1,2,3}.$$

Observe-se que a matriz \mathbf{W} tem todos os elementos da diagonal principal iguais a zero. Mais ainda, está relacionada com a rotação do elemento, pois

$$\text{rot } \mathbf{u} = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{w},$$

onde

$$\frac{w_1}{2} = W_{32} = -W_{23}, \quad \frac{w_2}{2} = W_{13} = -W_{31}, \quad \frac{w_3}{2} = W_{21} = -W_{12},$$

sendo W_{ij} as entradas da matriz \mathbf{W} , com $i, j = 1, 2, 3$. O campo vectorial \mathbf{w} descreve a velocidade angular. Assim, a matriz \mathbf{W} descreve as velocidades sem considerar a deformação do fluidos, ou seja, como se de um corpo rígido se tratasse. Por isso, a matriz \mathbf{W} designa-se por gradiente das velocidades de rotação. Assim, para o caso em que $\mathbf{D} = 0$ tem-se um deslocamento de corpo rígido.

2.4 TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

No sentido de derivar as equações fundamentais que governam o escoamento de um fluido na descrição de Euler, é conveniente estabelecer uma relação capaz de transformar a integração de uma determinada quantidade sobre um volume em escoamento, numa integração sobre um volume fixo. Com efeito, define-se um volume de controlo fixo no espaço, $V_0 \subset \Omega_0$, e um volume de controlo que acompanha o escoamento e que, portanto, varia no tempo, $V_t \subset \Omega_t$. O teorema seguinte é conhecido por Teorema do Transporte de Reynolds e apresenta uma fórmula para a variação, em ordem ao tempo, de uma quantidade.

Teorema 2.1. *Considere-se $V_0 \subset \Omega_0$ e $V_t \subset \Omega_t$ a imagem de V_0 sob as aplicações \mathcal{M}_t . Seja $f : \Omega_t \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável relativamente a \mathbf{x} e t . Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, d\mathbf{x} = \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{u}) \right) d\mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.4 pode-se escrever a relação seguinte:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \hat{f} J \, d\boldsymbol{\xi},$$

onde $\hat{f} = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t)$ e onde J é o Jacobiano da mudança de variáveis. Como V_0 não depende de t , pode-se fazer

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \hat{f} J \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\hat{f} J) \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Aplicando a regra de derivação do produto e com base no Lema 2.1, obtém-se

$$\int_{V_0} \frac{d}{dt} (\hat{f} J) \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{V_0} \left(\frac{d\hat{f}}{dt} J + \hat{f} \frac{dJ}{dt} \right) d\boldsymbol{\xi} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \hat{f} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) J \, d\boldsymbol{\xi}. \quad (2.27)$$

Através do Teorema 1.4, tem-se a relação seguinte:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} J \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{V_t} \frac{df}{dt} d\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

Usando (2.8) e (2.28) em (2.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{V_t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

□

2.5 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A massa m é uma propriedade directamente relacionada com a inércia do corpo, ou seja, é a medida de resistência de um corpo a alterações no movimento. Para um elemento de fluido V_t , pode-se definir a massa de V_t por

$$m = \int_{V_t} \rho \, dV,$$

onde ρ é a densidade do fluido. Considera-se que a massa total de um fluido é igual à soma da massa de todas as suas partículas. No entanto, a densidade, definida por $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, pode variar de partícula para partícula.

Princípio 2.1 (Princípio da Conservação da Massa). *A massa de cada elemento de fluido mantém-se constante com o escoamento, isto é, a massa do fluido num elemento de volume não varia à medida que o elemento de volume se move com o fluido.*

Por este princípio, pode-se inferir que a variação da massa m , integrada num volume de fluido V_t , em ordem ao tempo é igual a zero:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dV = 0.$$

Uma vez que ρ depende do tempo, é conveniente aplicar o Teorema do Transporte de Reynolds (Teorema 2.1) e, assim, obter

$$\int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dV = 0.$$

Uma vez que V_t é um volume arbitrário do meio contínuo, pode-se escrever

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.29)$$

Tomando a definição de derivada material (2.8) e utilizando a propriedade da divergência do produto de uma função escalar com uma função vectorial, obtém-se a relação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.30)$$

Esta relação é designada por equação da continuidade. No caso dos fluidos incompressíveis, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ e, de (2.29), tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2.31)$$

pelo que, ρ é constante ao longo das trajectórias das partículas. Assim,

$$\rho = \rho_0 = \rho(\mathbf{x}, 0),$$

onde ρ_0 é a densidade na posição inicial $t = 0$. Se, além disso, o fluido for homogéneo, ρ é constante em todo o fluido, isto é,

$$\rho = \rho_0 = \text{Constante} > 0.$$

Desta forma, para fluidos incompressíveis e homogéneos, a equação da continuidade reduz-se à equação da incompressibilidade (2.20).

2.6 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Considerando a Dinâmica dos fluidos, isto é, o estudo das forças relacionadas com o escoamento dos fluidos, pretende-se derivar as equações que descrevem a acção das forças sobre o fluido. Para tal, começa-se por definir o momento linear de uma partícula de fluido, que ocupa o volume $V_t \subset \Omega_t$, por

$$\mathbf{p} = \int_{V_t} \rho \mathbf{u} dV. \quad (2.32)$$

As equações do movimento vão ser deduzidas a partir do Princípio de Conservação do Momento Linear.

Princípio 2.2 (Princípio da Conservação do Momento Linear). *A variação total do momento linear de um elemento de fluido, que ocupa um volume V_t , é igual à resultante das forças que actuam sobre ele.*

As forças que actuam em $V_t \subset \Omega_t$ podem ser de dois tipos: forças de volume e forças de superfície ou de contacto. As forças de volume são aquelas que actuam, sem contacto físico, sobre todas as partículas, e que se distribuem por todo o fluido. Os campos de força gravitacional ou electromagnético são exemplos de forças de volume, e são proporcionais à massa do fluido. Estas forças podem ser expressas por

$$\mathbf{f}_v = \int_{V_t} k \mathbf{f} dV,$$

onde o campo vectorial $\mathbf{f} : \Omega_t \times I$ é uma força de volume específica e k a propriedade física relacionada, sendo, ambas, funções conhecidas da posição e do tempo. Tomando o exemplo da força gravítica que actua sobre um corpo, tem-se

$$\mathbf{f}_v = \int_{V_t} \rho \mathbf{g} dV,$$

onde, aqui, \mathbf{f} é o campo de aceleração da gravidade, \mathbf{g} , e k é a densidade, ρ . Estas forças são, normalmente, de origem externa ao fluido e, por isso, são também designadas por forças externas.

As forças de superfície são as forças exercidas ao longo da superfície, seja ela a superfície limitante do fluido ou a superfície de um elemento de fluido arbitrário. As tensões que ocorrem entre duas superfícies distintas, por exemplo

entre a superfície de uma porção de azeite em contacto com a superfície da água, ou as tensões que ocorrem entre as superfícies de partículas do mesmo fluido que colidem, são exemplos de forças de superfície ou de contacto. É, portanto, necessário caracterizar os esforços que ocorrem no fluido de modo a descrever estas forças de superfície. Esta caracterização é possível devido ao Princípio de Cauchy que se enuncia a seguir.

Princípio 2.3 (Princípio de Cauchy). *Existe um campo vectorial $\mathbf{t} : \Omega_t \times I \times \mathbf{S}$ que define os esforços que se propagam, num determinado elemento de fluido $V_t \subset \Omega_t$, devido às forças de superfície:*

$$\mathbf{f}_s = \int_{\partial V_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) d\zeta,$$

onde $\mathbf{S} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{n}\| = 1\}$ e \mathbf{n} é o vector normal à superfície do elemento de volume, $d\zeta$.

Aos vectores \mathbf{t} chama-se esforços de Cauchy, que, num determinado instante t , dependem da posição e da orientação da normal à superfície do elemento de fluido. Assim, pode-se escrever o Princípio de Conservação do Momento Linear na forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_t} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\zeta. \quad (2.33)$$

Por aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds (ver demonstração) e considerando que se trata de um escoamento de fluidos incompressíveis, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_t} \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} dV. \quad (2.34)$$

Tendo em conta, novamente, que o fluido é incompressível obtém-se, a partir da equação da continuidade (2.30),

$$\int_{V_t} \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} dV = \int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV. \quad (2.35)$$

O Teorema das Tensões de Cauchy, que a seguir se enuncia, permite relacionar os vectores \mathbf{t} com um tensor \mathbf{T} , que depende da posição \mathbf{x} e do tempo t .

Teorema 2.2 (Teorema das Tensões de Cauchy). *Suponha-se que para todo $t \in I$, \mathbf{t} é diferenciável em ordem a $\mathbf{x} \in \Omega_t$, para cada $\mathbf{n} \in \mathbf{S}$. Então, existe um campo tensorial diferenciável $\mathbf{T} : \overline{\Omega_t} \times I \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}.$$

Demonstração. Considere-se l^3 o volume de V_t . Dividindo ambos os membros da equação (2.33) por l^2 e passando ao limite de V_t a tender para zero, na equação resultante, obtém-se

$$\lim_{V_t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{l^2} \int_{\partial V_t} \mathbf{t} \, d\zeta \right) = 0. \quad (2.36)$$

Observe-se que as funções integrandas dos integrais de volume em (2.33) são limitadas. A equação (2.36) traduz o equilíbrio local das tensões. Considere-se, agora, um volume de controlo com a forma de um tetraedro, conforme a Figura 2.3. Sejam $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a normal à superfície exposta e $(-\mathbf{e}_1)$, $(-\mathbf{e}_2)$

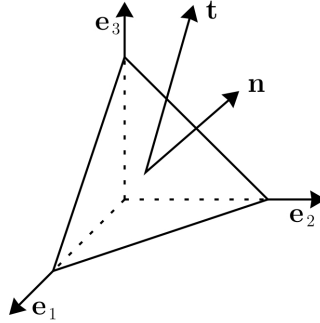


FIGURA 2.3: Elemento de fluido na forma de tetraedro.

e $(-\mathbf{e}_3)$ as normais às superfícies paralelas aos planos coordenados. Recorde-se que $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Sendo Σ a área da face exposta, as outras faces têm áreas $\Sigma_{23} = n_1\Sigma$, $\Sigma_{13} = n_2\Sigma$ e $\Sigma_{12} = n_3\Sigma$, respectivamente, onde Σ_{ij} denota a face no plano formado por \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j , com $i, j = 1, 2, 3$. Indicando o esforço de Cauchy correspondente à face exposta por $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ e os outros esforços por $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3)$, pode-se escrever (2.36) na forma

$$\lim_{V_t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Sigma}{l^2} [\mathbf{t}(\mathbf{n}) + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_1)n_1 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2)n_2 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3)n_3] \right\} = 0. \quad (2.37)$$

Sendo $\Sigma = l^2$ e calculando o limite (2.37), obtém-se a relação seguinte:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1)n_1 - \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2)n_2 - \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3)n_3. \quad (2.38)$$

Uma vez que os esforços aplicados em lados opostos de uma mesma superfície têm a mesma magnitude e sinais opostos, isto é,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n}), \quad (2.39)$$

então, a expressão (2.38) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{e}_1)n_1 + \mathbf{t}(\mathbf{e}_2)n_2 + \mathbf{t}(\mathbf{e}_3)n_3.$$

Verifica-se que os esforços de Cauchy são funções lineares do vector normal. Desta forma, decompondo os esforços de Cauchy das faces com as normais $(-\mathbf{e}_1)$, $(-\mathbf{e}_2)$ e $(-\mathbf{e}_3)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) = & (\tau_{11}\mathbf{e}_1 + \tau_{12}\mathbf{e}_2 + \tau_{13}\mathbf{e}_3)n_1 + \\ & (\tau_{21}\mathbf{e}_1 + \tau_{22}\mathbf{e}_2 + \tau_{23}\mathbf{e}_3)n_2 + \\ & (\tau_{31}\mathbf{e}_1 + \tau_{32}\mathbf{e}_2 + \tau_{33}\mathbf{e}_3)n_3, \end{aligned} \quad (2.40)$$

sendo o primeiro índice a direcção do vector normal, e o segundo a direcção da componente. A expressão (2.40) pode ser escrita na forma abreviada

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n},$$

onde

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.41) \quad \square$$

O tensor obtido em (2.41) é designado por tensor das tensões de Cauchy. Observe-se que \mathbf{T} é independente da normal \mathbf{n} , o que permite caracterizar os esforços na superfície de um elemento de fluido de forma mais simples. Neste tensor, os elementos da diagonal principal correspondem aos esforços normais, isto é, aos esforços na direcção do vector normal, e os restantes elementos são os esforços tangenciais. Na Figura 2.4 representam-se, de forma esquemática, os esforços

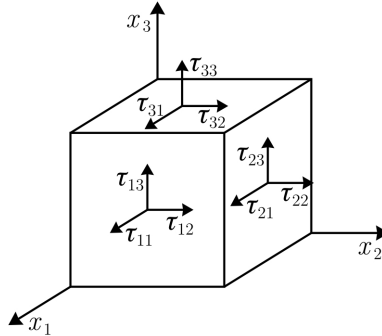


FIGURA 2.4: Componentes do tensor das tensões num cubo infinitesimal.

internos no sentido positivo num cubo infinitesimal. Esta figura permite compreender as nove componentes do tensor das tensões. Assim, por aplicação do Teorema das Tensões de Cauchy (Teorema 2.2) pode-se escrever, por meio de (2.33)-(2.34), o Princípio de Conservação do Momento Linear na forma

$$\int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_{V_t} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\zeta. \quad (2.42)$$

Aplicando o Teorema da Divergência (Teorema 1.1) a (2.42), tem-se

$$\int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_{V_t} (\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}) dV.$$

Como V_t é um elemento de volume arbitrário, obtém-se a igualdade

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad (2.43)$$

que traduz a equação do movimento. A equação (2.43) governa o escoamento de qualquer fluido. Porém, a especificidade de cada fluido é expressa pelo tensor das tensões \mathbf{T} . Desta forma, é importante estudar as propriedades deste tensor, das quais a simetria é a mais importante. A simetria do tensor \mathbf{T} permite efectuar um estudo matemático dos fluidos e é descrita na forma

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (2.44)$$

para quaisquer $i, j = 1, 2, 3$. Esta propriedade é obtida a partir do Princípio de Conservação do Momento Angular. Antes de enunciar este princípio, recorde-se que o momento angular corresponde ao produto vectorial entre o vector posição \mathbf{x} e o momento linear \mathbf{p} do elemento de fluido que ocupa o volume V_t . De igual modo como se fez para (2.32), define-se o momento angular por

$$\mathbf{m}_l = \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dV.$$

O momento angular é também referido na literatura como o momento do momento linear.

Princípio 2.4 (Princípio da Conservação do Momento Angular). *A variação, em ordem ao tempo, do momento angular é igual ao momento da resultante das forças que actuam sobre o elemento de volume V_t .*

Considerando as forças aplicadas num elemento de fluido, tem-se o momento destas forças, \mathbf{m}_f , na forma

$$\mathbf{m}_f = \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} d\zeta.$$

Deste modo, o Princípio 2.4 toma a forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dV = \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} d\zeta. \quad (2.45)$$

Aplicando o Teorema do Transporte de Reynolds ao primeiro membro de (2.45), e tendo em conta que se consideram os fluidos incompressíveis, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dV = \int_{V_t} \frac{d}{dt} [\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u})] dV = \int_{V_t} \mathbf{x} \times \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (2.46)$$

O facto de se considerar os fluidos incompressíveis, juntamente com (2.31), vai permitir escrever, a partir de (2.46),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dV = \int_{V_t} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV. \quad (2.47)$$

Usando (2.43) e (2.47) em (2.45), obtém-se

$$\int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}) dV = \int_{V_t} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} d\zeta. \quad (2.48)$$

Usando o Teorema das Tensões de Cauchy e simplificando a equação (2.48), tem-se

$$\int_{V_t} \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{T} dV - \int_{\partial V_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d\zeta = 0. \quad (2.49)$$

Ao primeiro termo de (2.49) aplica-se a regra de integração por partes

$$\int_{V_t} \mathbf{x} \times \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \int_{\partial V_t} \mathbf{x} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d\zeta - \int_{V_t} \nabla \mathbf{x} \times \mathbf{T} dV. \quad (2.50)$$

Usando (2.50), a equação (2.49) reduz-se a

$$\int_{V_t} \nabla \mathbf{x} \times \mathbf{T} dV = 0. \quad (2.51)$$

O termo $\nabla \mathbf{x}$ toma o valor de matriz identidade, $\nabla \mathbf{x} = \mathbf{I}$. Desta forma, o integral de volume em (2.51) é nulo se

$$\mathbf{I} \times \mathbf{T} = 0 \Leftrightarrow I_1 \times T_1 + I_2 \times T_2 + I_3 \times T_3 = 0, \quad (2.52)$$

sendo I_i e T_i , com $i = 1, 2, 3$, os vectores coluna das matrizes \mathbf{I} e \mathbf{T} , respectivamente. Determinados os produtos vectoriais $I_i \times T_i$ verifica-se que (2.52) é válida se, e só se,

$$\tau_{23} - \tau_{32} = 0, \quad \tau_{31} - \tau_{13} = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{12} - \tau_{21} = 0.$$

Ora, isto é equivalente a (2.44). Em suma, o Princípio de Conservação do Momento Angular permitiu mostrar que o tensor das tensões \mathbf{T} é simétrico. No entanto, a recíproca também é válida, isto é, se o tensor das tensões é simétrico, então, o Princípio de Conservação do Momento Angular é válido.

2.7 LEI CONSTITUTIVA

A relação entre as tensões e a deformação de um meio contínuo é designada por Lei Constitutiva. Estas relações exprimem o comportamento específico de cada matéria, uma vez que o escoamento e a deformação decorrem consoante a natureza física do fluido. Como tal, estas equações também são designadas por leis de comportamento e correspondem à principal diferença entre a descrição de um fluido e de um sólido deformável. A lei constitutiva de um fluido relaciona o tensor das tensões, \mathbf{T} , e o gradiente das velocidades de deformação \mathbf{D} . O ramo da Física que explica de um modo mais simples o escoamento dos fluidos é a Mecânica dos Meios Contínuos. A Teoria Cinética, incluída noutra ramo, embora possa descrever o escoamento dos fluidos não o faz com a mesma simplicidade e elegância. À luz da Mecânica dos Meios Contínuos o tensor das tensões \mathbf{T} , em qualquer lei constitutiva, deve satisfazer aos postulados seguintes:

1. \mathbf{T} é uma função contínua do gradiente das velocidades de deformação \mathbf{D} , é independente de todas as outras propriedades cinemáticas e não depende explicitamente da posição \mathbf{x} :

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{D});$$

2. não existe direcção preferencial de comportamento no espaço (isotropia);
3. para $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, onde p é uma função escalar designada por pressão e \mathbf{I} é a matriz identidade.

Em termos matemáticos, a condição de isotropia traduz-se por

$$\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1} = f(\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}),$$

para toda a matriz ortogonal \mathbf{S} . A lei constitutiva mais simples é descrita para fluidos invíscidos e é dada por

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}. \quad (2.53)$$

Ao substituir \mathbf{T} , descrito em (2.53), nas equações do movimento, obtêm-se as chamadas equações de Euler. À grande maioria dos fluidos existentes está-lhes associada uma resistência interna ao escoamento, a viscosidade. Para explicar o conceito de viscosidade, considere-se um escoamento unidimensional conforme a Figura 2.5. Neste caso, o escoamento promove um gradiente de velocidades

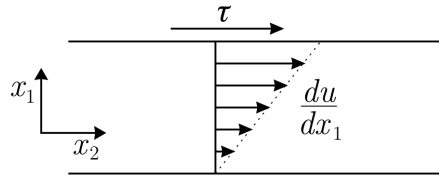


FIGURA 2.5: Escoamento unidimensional.

uniforme, desenvolvido transversalmente. Desta forma, a tensão de corte τ é dada por

$$\tau = \mu \frac{du}{dx_1},$$

onde a viscosidade é o coeficiente de proporcionalidade, μ , entre uma tensão de corte τ e o gradiente de velocidades desenvolvido transversalmente. Neste caso, a lei constitutiva além de expressar o efeito da pressão vai, também, expressar o efeito da viscosidade. Desta forma, a lei constitutiva, no caso do escoamento unidimensional, é expressa pela relação escalar

$$T = -p + \gamma, \quad \gamma = \mu \frac{du}{dx_1}.$$

Generalizando este raciocínio para escoamentos em dimensões superiores, obtêm-se a lei constitutiva

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \gamma, \quad \gamma = 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.54)$$

onde μ é uma função escalar que se designa por viscosidade dinâmica. A relação (2.54) é conhecida por lei de Stokes e verifica-se que satisfaz aos postulados

enunciados acima. Os fluidos cuja lei constitutiva é dada pela lei de Stokes designam-se por fluidos Newtonianos. A equação (2.54) estabelece uma relação linear entre \mathbf{T} e \mathbf{D} e é validada por resultados experimentais. Em (2.54), o termo $-p\mathbf{I}$ corresponde ao estado de tensão num fluido viscoso em repouso. Pelo que, neste caso não se consideram as deformações e, portanto, \mathbf{D} é nulo. Assim, num fluido viscoso em repouso, a tensão que se faz sentir é apenas devida à pressão a que está sujeito e toma a forma de (2.53), tal como para fluidos invíscidos. A maioria dos fluidos, líquidos ou gases, que se conhecem podem ser descritos como fluidos Newtonianos. No entanto, existem fluidos para os quais a lei de Stokes não descreve adequadamente a relação entre as tensões e as deformações. Este é o caso de alguns polímeros, das tintas e do próprio sangue. Estes fluidos chamam-se não Newtonianos e têm leis constitutivas mais complexas. Uma lei constitutiva mais geral e que engloba tanto Newtonianos como não Newtonianos é

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2,$$

onde α , β e γ são funções escalares dos invariantes principais da matriz \mathbf{D} .

2.8 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações deduzidas nas secções anteriores vão permitir obter as equações que governam o escoamento de fluidos Newtonianos incompressíveis. Pelo Princípio da Conservação da Massa, obteve-se a equação da continuidade (2.30)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

que, para fluidos incompressíveis e homogêneos, corresponde à equação da incompressibilidade (2.20)

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Pelo Princípio da Conservação do Momento Linear, obtiveram-se as equações do movimento (2.43)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}.$$

A lei constitutiva (2.54)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

caracteriza o comportamento específico dos fluidos Newtonianos. Usando (2.10) e (2.54) em (2.43), obtém-se

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) = \rho \mathbf{f}.$$

Para fluidos homogêneos, ρ é constante. Neste caso, admite-se também que μ é constante e, considerando fluidos incompressíveis, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u},$$

onde $\nu = \mu/\rho$ é designada por viscosidade cinemática. Observe-se que $\operatorname{div}(2\mathbf{D}) = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$ devido à incompressibilidade. Deste modo, as equações que governam o escoamento de um fluido Newtoniano, homogêneo e incompressível são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \tag{2.55}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 .$$

Estas equações são designadas na literatura por equações de Navier-Stokes para fluidos homogêneos e incompressíveis ou, simplesmente, equações de Navier-Stokes.

2.9 CONDIÇÕES INICIAIS E DE FRONTEIRA

No sentido de resolver as equações de Navier–Stokes é necessário impor condições iniciais e de fronteira apropriadas. As funções que caracterizam o escoamento do fluido têm de ser definidas na fronteira do domínio ocupado pelo fluido, diga-se Ω . Considera-se, portanto, que estas funções são contínuas na fronteira $\partial\Omega$. Em regime não estacionário (transiente), estuda-se o comportamento do fluido, numa determinada região do espaço, como função do tempo t . É necessário, portanto, estabelecer as condições iniciais que caracterizam o estado do escoamento, no início do intervalo I . Desta forma, o instante $t = 0$ é imposto como a origem do intervalo e a velocidade, nesse instante, é definida por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

para $\mathbf{x} \in \Omega$. Relativamente às condições de fronteira, considera-se que a fronteira $\Gamma \subset \partial\Omega$ é impermeável, não havendo passagem do fluido através da fronteira.

Como tal, a velocidade do fluido na direcção da normal à superfície da fronteira Γ é nula, isto é,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.56)$$

Se, de outro modo, se considerasse a fronteira permeável, ter-se-ia um escoamento em que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0. \quad (2.57)$$

O escoamento do fluido próximo da fronteira está sujeito ao atrito provocado pela fronteira e é, portanto, necessário perceber o comportamento do fluido na fronteira. Mais precisamente, pretende-se compreender de que forma estão relacionados os esforços tangenciais e a velocidade do fluido, na fronteira. A expressão proposta por C.L. Navier em 1827 (ver [3]) relaciona a velocidade e os esforços na direcção tangencial sob a forma

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \alpha \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2.58)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o vector tangente à fronteira $\partial\Omega$, e α um coeficiente de proporcionalidade. A expressão (2.58) traduz, assim, o deslizamento do fluido pela fronteira Γ e é designada por condição de não aderência à fronteira. Para o caso em que $\alpha > 0$, o fluido sofre aceleração provocada pela fronteira. No caso em que $\alpha < 0$, a fronteira retarda o fluido. Para a situação limite onde $\alpha \rightarrow +\infty$, tem-se

$$\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Nesta situação os esforços na direcção tangencial são nulos. Para a situação limite $\alpha \rightarrow 0$, obtém-se que a velocidade do fluido na direcção tangencial é nula, isto é,

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Se a velocidade na direcção normal também for nula, como no caso da fronteira impermeável, (2.56), tem-se que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.59)$$

onde $\mathbf{x} \in \Gamma$ tem menos uma componente do que $\mathbf{x} \in \Omega$. Esta expressão, que deriva de (2.58) numa situação limite, é designada por condição de aderência à

fronteira. Se a fronteira se encontrar a uma velocidade \mathbf{u}_s , a velocidade do fluido na fronteira é dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t).$$

Desta forma, expressa-se que as velocidades normais e tangenciais do fluido correspondem às velocidades normais e tangenciais da superfície em todos os pontos da fronteira. Esta é uma situação ideal que é, por vezes, admitida, uma vez que resultados experimentais mostram que as partículas de fluidos Newtonianos aderem a superfícies sólidas, adquirindo, assim, a velocidade da fronteira. No caso de fluidos incompressíveis a função \mathbf{u}_s tem de satisfazer à condição de compatibilidade

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = 0,$$

pois

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = 0.$$

Para o caso em estudo, considere-se, um domínio ramificado, conforme a Figura 2.6. A fronteira desse domínio é dada por $\Gamma^p \cup \Gamma^e \cup \Gamma^s = \partial\Omega$, onde Γ^p é a

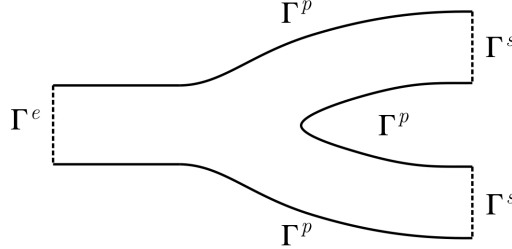


FIGURA 2.6: Representação do domínio Ω ramificado.

superfície sólida e Γ^e e Γ^s são fronteiras fictícias que correspondem à entrada e à saída do domínio, respectivamente. Considera-se, então, que Γ^p é uma fronteira impermeável, onde se impõe a condição de aderência à fronteira, (2.59). Nas fronteiras fictícias toma-se a condição (2.57) e, portanto, há passagem do fluido pelas fronteiras. À entrada do domínio a velocidade prescrita é $\mathbf{v} : \Gamma^e \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e impõe-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

onde $\mathbf{x} \in \Gamma^e$. Na fronteira Γ^s é imposto o equilíbrio local das tensões e, assim,

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

CAPÍTULO 3

MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

O escoamento do sangue *in vivo* provoca um deslocamento da parede dos vasos sanguíneos. Este deslocamento da parede é significativo nas grandes artérias, nomeadamente na artéria aorta, e é possível devido às características mecânicas das diferentes camadas da parede. Neste capítulo será descrita a estrutura da parede da artéria e apresentadas a geometria e as hipóteses consideradas para a exposição de um modelo para o deslocamento da parede da artéria. Este modelo será deduzido a partir dos princípios fundamentais da Física que, embora tenham sido descritos no Capítulo 2 para o caso particular dos fluidos, aplicam-se a qualquer meio contínuo. Os estudos de A. Quarteroni e L. Formaggia [7] foram o apoio bibliográfico essencial neste capítulo. Também foram consultadas as monografias de Y. Fung que representam os fundamentos da Biomecânica, das quais se destaca [8].

3.1 ESTRUTURA DAS ARTÉRIAS

A parede das artérias está organizada em três camadas distintas, que estão esquematizadas na Figura 3.1. A camada externa é composta por tecido conjuntivo, que suporta a estrutura física da artéria, e é designada por túnica adventícia. A camada média da parede da artéria é designada por túnica média e é responsável pela elasticidade da parede. Esta camada é constituída por tecido muscular liso e tecido elástico. A camada mais interna é composta por células endoteliais, que

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

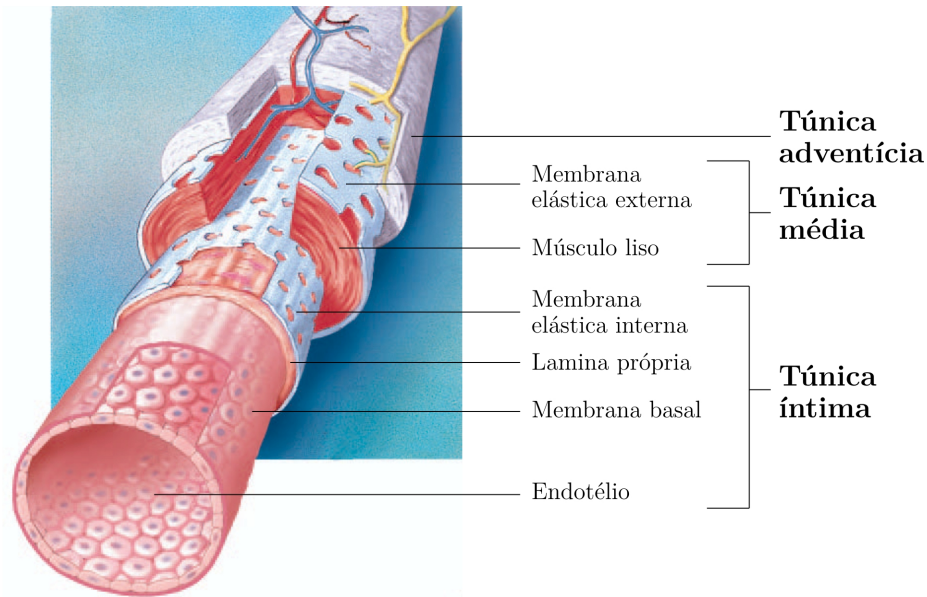


FIGURA 3.1: Vaso sanguíneo (fonte: [1]).

se encontram em contacto com o sangue, e é chamada a túnica íntima. As artérias mais próximas do coração têm uma túnica média de maior espessura, que diminui com a distância a que estas se encontram do coração. Evidentemente, o comportamento elástico da parede das grandes artérias influencia o escoamento do sangue e, portanto, o deslocamento da parede deve ser considerado. No entanto, tendo em conta a estrutura tridimensional da artéria, bem como o facto de ser constituída por diferentes camadas, de tecidos distintos, a obtenção de um modelo para o deslocamento da parede artéria é muito difícil. Porém, a dedução de um modelo menos complexo é possível fazendo várias simplificações. Neste estudo, pretende-se derivar um modelo simples, e, portanto, obter uma equação diferencial que descreve o deslocamento unidimensional da parede do vaso. Para tal, admitem-se as hipóteses seguintes:

H.I – *A geometria da parede do vaso, na configuração inicial, toma a forma de um cilindro circular;*

H.II – *O deslocamento da parede ocorre apenas na direcção radial, isto é, segundo \mathbf{e}_r ;*

H.III – *A espessura h da parede do vaso é relativamente pequena, permitindo supor a parede como uma superfície, sem espessura;*

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

H.IV – *Sob a hipótese anterior, considera-se que a parede se encontra num estado plano de tensão, isto é, a espessura reduzida da parede não permite que as tensões na direcção da normal \mathbf{n} se desenvolvam, pelo que, são nulas;*

H.V – *A parede do vaso é incompressível, conservando o seu volume durante o deslocamento;*

H.VI – *A parede do vaso tem um comportamento elástico linear e, portanto, os gradientes de deformação são relativamente pequenos.*

Convém frisar que na hipótese H.I se afirma que cada secção do cilindro é uma circunferência, e que secções diferentes podem ter raios distintos. Relativamente à hipótese H.V, salienta-se que a incompressibilidade é, praticamente, uma característica dos tecidos vivos. No que respeita a hipótese H.VI, a elasticidade é verificada nas grandes artérias, permitindo admitir a hipótese de comportamento elástico. A linearidade deste comportamento está implícita na lei constitutiva da parede do vaso. Esta lei, para o caso dos sólidos deformáveis, relaciona o tensor das tensões de Cauchy com o tensor das deformações (ver Apêndice).

3.2 GEOMETRIA DO VASO SANGUÍNEO

Para a derivação do modelo matemático da parede da artéria, é necessário ter em consideração a forma geométrica da parede. É bastante razoável admitir que a artéria toma a forma de um cilindro oco de diâmetro variável. Dada a geometria cilíndrica dos vasos sanguíneos (hipótese H.I), é conveniente utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas. Antes de se prosseguir, convém referir que, neste capítulo e apenas para simplificar a exposição, as componentes x_1 , x_2 e x_3 de um ponto arbitrário de \mathbb{R}^3 serão denotadas por x , y e z , respectivamente. Com esta notação, os elementos \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 da base canónica de \mathbb{R}^3 serão denotados por \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z , respectivamente. Na Figura 3.2 apresentam-se os sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, θ, z) , ambas num cilindro de raio r . Estes sistemas de coordenadas são ortonormais e estão relacionados por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad (3.1)$$

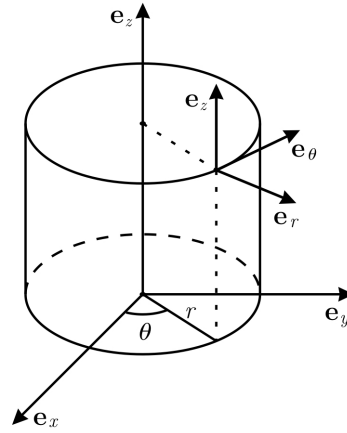


FIGURA 3.2: Sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Observe-se que de (3.1) tem-se

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \quad (3.2)$$

Desta forma, a posição espacial da superfície do cilindro é descrita pelas coordenadas r , que corresponde à distância ao eixo longitudinal, θ , que é o ângulo formado entre o eixo \mathbf{e}_x e a projecção de r no plano formado por \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_y e, z , a distância ao longo do eixo longitudinal, \mathbf{e}_z . A transformação do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cilíndricas, expressa em (3.1), pode ser escrita na forma seguinte:

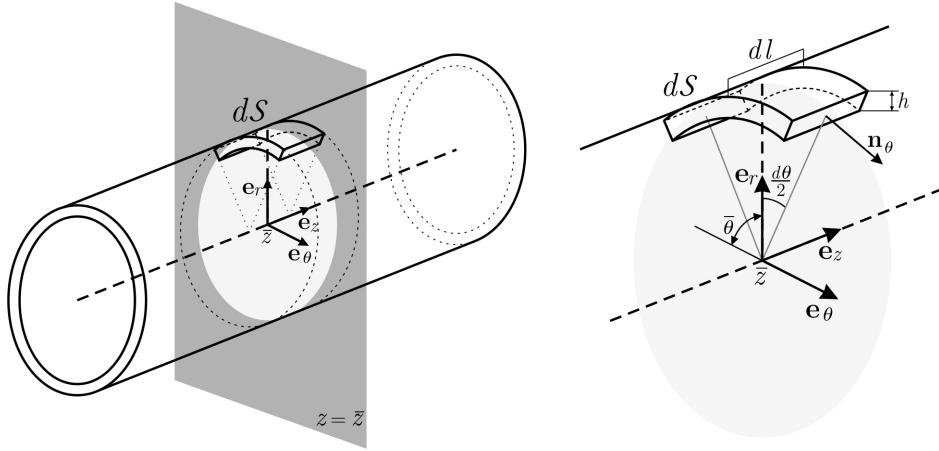
$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \text{cos } \theta \mathbf{e}_x + \text{sen } \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = -\text{sen } \theta \mathbf{e}_x + \text{cos } \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z . \end{cases}$$

A transformação inversa pode ser escrita por

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \text{cos } \theta \mathbf{e}_r - \text{sen } \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_y = \text{sen } \theta \mathbf{e}_r + \text{cos } \theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z . \end{cases} \quad (3.3)$$

Considere-se, então, a artéria como um cilindro cujo eixo longitudinal se encontra alinhado com o eixo dos zz . Supõe-se que o comprimento do elemento da parede arterial pode tomar valores entre 0 e L . Ao fixar-se a constante $z = \bar{z}$, define-se uma secção axial. Considere-se, agora, a função

$$r = R(\theta, z; t),$$


 FIGURA 3.3: Elemento de superfície dS .

que descreve, para cada t , a componente radial da superfície do vaso. Então, num local genérico do espaço de coordenadas $\theta = \bar{\theta}$ e $z = \bar{z}$, o elemento de superfície da parede da artéria dS , esquematizado na Figura 3.3, é definido por

$$dS = \left\{ (r, \theta, z) : r = R(\theta, z; t), \theta \in \left[\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}, \bar{\theta} + \frac{d\theta}{2} \right], z \in \left[\bar{z} - \frac{dz}{2}, \bar{z} + \frac{dz}{2} \right] \right\}.$$

Tendo em conta a estrutura cilíndrica da artéria (hipótese H.I), admite-se que a configuração inicial Γ_0^p corresponde à parede do vaso, de secção circular, quando este está em repouso. Nesta configuração, o raio do vaso é dado pela função

$$r = R_0(z)$$

que, evidentemente, toma valores positivos. Assim, a configuração inicial da parede da artéria é dada por

$$\Gamma_0^p = \{(r, \theta, z) : r = R_0(z), \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}.$$

Considera-se que o vaso, na configuração inicial, se encontra ocupado por fluido com velocidade nula e sob a pressão externa p_{ext} exercida pelos tecidos adjacentes. A configuração actual Γ_t^p define a superfície do vaso, num determinado tempo t , e é dada por

$$\Gamma_t^p = \{(r, \theta, z) : r = R(\theta, z; t), \theta \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}.$$

A Figura 3.4 esquematiza as duas configurações, realçando a geometria cilíndrica da configuração inicial e o deslocamento da parede. Tendo em conta a

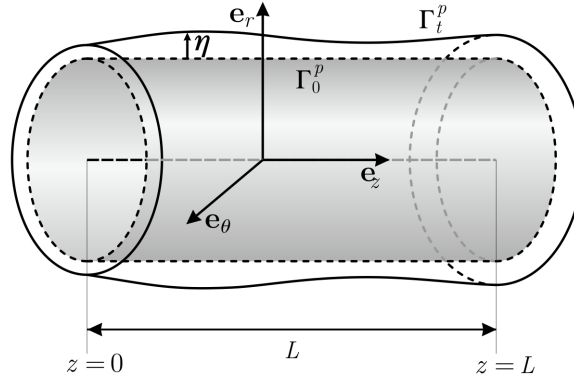


FIGURA 3.4: Configurações inicial e actual da parede do vaso.

hipótese H.II, o campo vectorial que descreve o deslocamento da parede do vaso sanguíneo, $\boldsymbol{\eta}$, tem apenas a componente radial e é descrito por

$$\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r = (R - R_0) \mathbf{e}_r, \quad (3.4)$$

onde η é uma função escalar de θ , z e t . Por se mostrar conveniente, serão, agora, deduzidas expressões que definem o vector normal, \mathbf{n} , ao elemento de superfície $d\mathcal{S}$. Seja

$$F(r, \theta, z) \equiv r - R(\theta, z) = 0, \quad (3.5)$$

a representação cartesiana da superfície do vaso sanguíneo. Como $d\mathcal{S}$ é um elemento desta superfície, por simplicidade da análise que se vai fazer, pode-se considerar $d\mathcal{S}$ em vez de toda a superfície. A normal à superfície $d\mathcal{S}$ pode ser definida por

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}. \quad (3.6)$$

Em coordenadas cartesianas, pode-se escrever

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (3.7)$$

Tendo em conta (3.1), a expressão (3.7) toma a forma

$$\begin{aligned} \nabla F = & \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \\ & \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

Derivando as funções r , θ e z , descritas em (3.1), em ordem a x , y e z , obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla F = & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_x + \\ & \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Simplificando a equação (3.8), por meio de (3.2)-(3.3), tem-se

$$\begin{aligned} \nabla F = & \left(\cos \theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\ & + \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observando que, na equação (3.9), $\partial F / \partial r = 1$, obtém-se, simplificando a expressão e usando (3.5), o gradiente de F em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla F = \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{e}_z .$$

Por sua vez, a norma de ∇F , em coordenadas cilíndricas, é dada pela expressão

$$\|\nabla F\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2} . \quad (3.10)$$

Por fim, o vector normal à superfície $d\mathcal{S}$, em coordenadas cilíndricas, é dado por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2}} \left(\mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) .$$

Para a componente radial do vector \mathbf{n} , tem-se

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{\|\nabla F\|} . \quad (3.11)$$

Convém, ainda, definir algumas medidas da superfície, nomeadamente, a área do elemento de superfície $d\mathcal{S}$, que se designa por $d\sigma$, e a dimensão linear de $d\mathcal{S}$ ao longo do eixo longitudinal, dl . Refira-se que estas medidas estão definidas em coordenadas cartesianas. A transformação de $d\sigma$ para coordenadas cilíndricas passa pela multiplicação da área pelo raio R . Fazendo a mudança de variáveis

para coordenadas cilíndricas e projectando a superfície no plano formado por \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_z , obtém-se

$$d\sigma_{(x,y,z)} = Rd\sigma_{(r,\theta,z)} = \|\nabla F\| Rd\theta dz_{(R(\theta,z),\theta,z)}. \quad (3.12)$$

Por meio de (3.11) e (3.12), tem-se que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma_{(x,y,z)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r Rd\sigma_{(r,\theta,z)} = Rd\theta dz. \quad (3.13)$$

Por seu lado, fazendo a mudança de variáveis $z = z$ e fazendo a projecção sobre o eixo \mathbf{e}_z , obtém-se

$$dl_z = dl_z = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2} dz. \quad (3.14)$$

3.3 ESFORÇOS DESENVOLVIDOS NA PAREDE

A dedução do modelo do deslocamento da parede do vaso sanguíneo passa por caracterizar as forças de superfície que actuam sobre a parede. A parede do vaso sanguíneo está sujeita a diversos tipos de esforços, sejam eles de origem interna (\mathbf{f}_{int}) ou externa (\mathbf{f}_{ext}) à parede. Os esforços externos são exercidos pelos tecidos adjacentes, \mathbf{f}_{ext}^t , e pelo fluido que passa no interior do vaso, \mathbf{f}_{ext}^f . Os esforços devidos aos tecidos adjacentes resultam de uma pressão constante p_{ext} , exercida sob o elemento dS , e são descritos por

$$\mathbf{f}_{ext}^t = -p_{ext} \mathbf{n}. \quad (3.15)$$

Os esforços exercidos pelo fluido a partir do interior do vaso, podem ser representados pelos esforços de Cauchy na parede, \mathbf{t}^p (ver Princípio de Cauchy 2.3). De acordo com o Teorema das Tensões de Cauchy (Teorema 2.2), tem-se

$$\mathbf{t}^p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n},$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy na parede do vaso. Denotando por \mathbf{T} o tensor das tensões de Cauchy descrito para o fluido, considera-se, que as tensões na parede são simétricas a \mathbf{T} , de acordo com a 3ª Lei de Newton. Esta lei postula que quando um corpo exerce uma força sobre outro corpo, simultaneamente esse corpo exerce sobre o primeiro uma força com a mesma intensidade e direcção,

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

mas de sentido oposto (ver (2.39)). Assim, tendo em conta (2.54), os esforços exercidos pelo fluido em $d\mathcal{S}$ são descritos por

$$\mathbf{f}_{ext}^f = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = p\mathbf{n} - 2\mu\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.16)$$

Deste modo, a soma dos esforços externos, descritos em (3.15) e (3.16), é dada por

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{ext}^t + \mathbf{f}_{ext}^f = (p - p_{ext})\mathbf{n} - 2\mu\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.17)$$

De acordo com a hipótese H.II, considera-se apenas a componente radial do deslocamento da parede para a dedução deste modelo. Por consequência, os esforços em causa também são considerados na sua componente radial. Assim, a chamada componente radial dos esforços externos é dada por

$$f_{ext} = \mathbf{f}_{ext} \cdot \mathbf{e}_r = (p - p_{ext})\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r - 2\mu(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.18)$$

Os esforços internos são exercidos, de acordo com a hipótese do estado plano de tensão (ver hipótese H.IV), segundo as direcções circunferencial (\mathbf{e}_θ) e longitudinal (\mathbf{e}_z). Uma vez que se considera o deslocamento da parede segundo a direcção radial, a componente radial dos esforços internos ($\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{int}^\theta + \mathbf{f}_{int}^z$) é dada por

$$f_{int} = (\mathbf{f}_{int}^\theta + \mathbf{f}_{int}^z) \cdot \mathbf{e}_r, \quad (3.19)$$

onde \mathbf{f}_{int}^θ e \mathbf{f}_{int}^z são os esforços circunferenciais e longitudinais, respectivamente. A caracterização destes esforços será feita separadamente, pelo que, se consideram duas secções da parede do vaso, uma axial e outra longitudinal. Relativamente à secção axial, esquematizada na Figura 3.5, admitem-se hipóteses adicionais para a derivação do modelo. Assim, supõe-se que:

A.I – Na secção axial do vaso, dominam as tensões circunferenciais, σ_θ , e, portanto, as tensões longitudinais σ_z , que actuam segundo a direcção longitudinal, são desprezadas;

A.II – O vaso mantém a sua configuração cilíndrica (circular) durante o deslocamento e, como tal, $\partial R / \partial \theta$ é nula;

A.III – A tensão circunferencial σ_θ é proporcional ao alongamento circunferencial relativo e pode ser descrita por

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0}, \quad (3.20)$$

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

onde E é o módulo de Young e ζ é a razão de Poisson (ver Apêndice).

Na Figura 3.5 representam-se, simbolicamente, os vectores $\boldsymbol{\sigma}_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2})$ e $\boldsymbol{\sigma}_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2})$ que formam com o vector \mathbf{e}_r ângulos de $\pi/2 + d\theta/2$ e $-(\pi/2 + d\theta/2)$, respectivamente, e onde $\bar{\theta}$ é um ângulo fixo. Mais ainda, estes vectores têm a direcção da normal \mathbf{n}_θ . Assim, os esforços circunferenciais podem ser descritos por

$$\mathbf{f}_{int}^\theta = \boldsymbol{\sigma}_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2}) + \boldsymbol{\sigma}_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}) = \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2}) + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}).$$

Deste modo, pode-se descrever os esforços internos que se desenvolvem na secção axial, segundo a componente radial, sob a forma

$$f_{int}^\theta = \mathbf{f}_{int}^\theta \cdot \mathbf{e}_r = \sigma_\theta \left[\mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2}) + \mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2}) \right] \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.21)$$

Aplicando a definição de produto escalar, pode-se escrever a equação (3.21) na forma

$$f_{int}^\theta = \sigma_\theta \left[\|\mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} + \frac{d\theta}{2})\| \|\mathbf{e}_r\| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\theta}{2}\right) + \|\mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} - \frac{d\theta}{2})\| \|\mathbf{e}_r\| \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Tendo em conta que \mathbf{e}_r e $\mathbf{e}_\theta(\bar{\theta} \pm \frac{d\theta}{2})$ se tratam de vectores unitários e utilizando a fórmula trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$ em (3.22), bem como o facto do cosseno ser par, obtém-se

$$f_{int}^\theta = -2\sigma_\theta \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right). \quad (3.23)$$

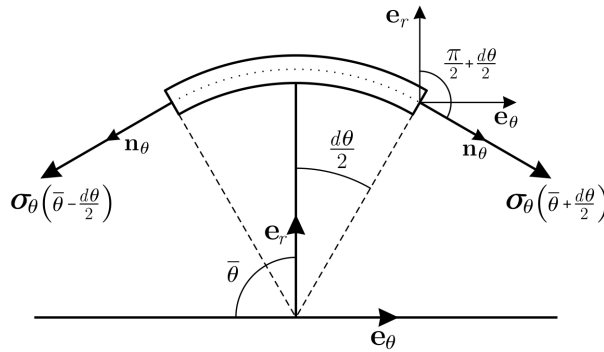


FIGURA 3.5: Secção axial.

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

Multiplicando e dividindo o segundo membro de (3.23) por $d\theta/2$, e passando ao limite $d\theta/2 \rightarrow 0$, obtém-se

$$f_{int}^\theta = -\sigma_\theta d\theta + o(d\theta), \quad (3.24)$$

onde $o(d\theta)$ é um infinitésimo relativamente a $d\theta$. Substituindo (3.20) em (3.24), tem-se a expressão para a componente radial dos esforços circunferenciais na forma

$$f_{int}^\theta = -\frac{E}{1-\zeta^2} \frac{\eta}{R_0} d\theta + o(d\theta). \quad (3.25)$$

Considere-se, agora, a secção longitudinal que está representada na Figura 3.6. Novamente, é necessário fazer uma hipótese suplementar:

L.I – *Na direcção longitudinal, as tensões longitudinais são dominantes e podem ser expressas por*

$$\sigma_z = \pm \sigma_z \boldsymbol{\tau}, \quad (3.26)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é um vector unitário tangente à curva $r = R(\bar{\theta}, z; t)$.

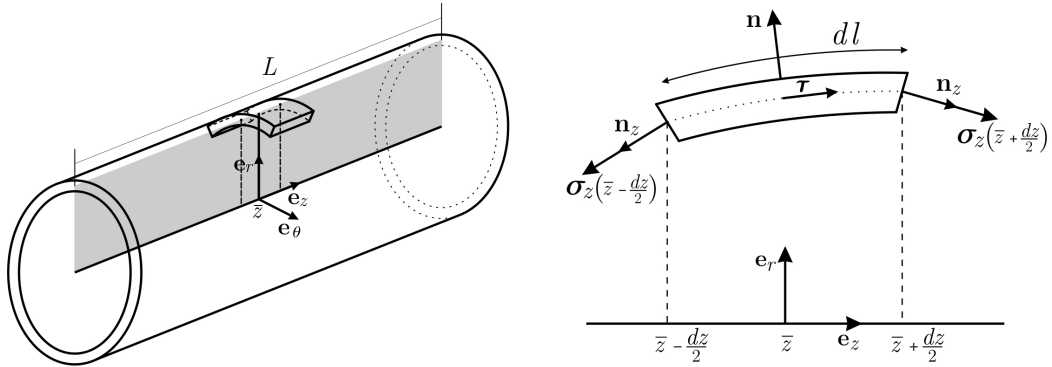


FIGURA 3.6: Secção longitudinal.

Esta hipótese é confirmada na observação *in vivo* do vaso. De facto, observa-se que o vaso sanguíneo encolhe ao ser removido do organismo. Este encolhimento ocorre, principalmente, na extensão longitudinal e, portanto, entende-se que a parede do vaso encontra-se sob tensão longitudinal. Este facto sobrepõe-se à elasticidade do vaso na direcção longitudinal, que se admite ser mais relevante

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

na direcção circunferencial. A componente radial dos esforços internos que se desenvolvem ao longo da secção longitudinal é descrita por

$$f_{int}^z = \mathbf{f}_{int}^z \cdot \mathbf{e}_r = \left[\sigma_z \left(\bar{z} + \frac{dz}{2} \right) + \sigma_z \left(\bar{z} - \frac{dz}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.27)$$

Usando (3.26) em (3.27) obtém-se

$$f_{int}^z = \sigma_z \left[\boldsymbol{\tau} \left(\bar{z} + \frac{dz}{2} \right) - \boldsymbol{\tau} \left(\bar{z} - \frac{dz}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.28)$$

Os vectores tangentes $\boldsymbol{\tau}(\bar{z} \pm \frac{dz}{2})$ podem ser expressos pelas fórmulas de Frenet-Serret. Estas fórmulas permitem descrever propriedades cinemáticas de partículas que descrevem uma trajectória curvilínea. Mais precisamente, descrevem cada um dos vectores tangente, normal e binormal (vector resultante do produto vectorial dos outros dois) em função dos outros. Neste caso, a fórmula de Frenet-Serret adequada é

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \kappa \mathbf{n}, \quad (3.29)$$

que descreve o vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ em função do vector normal à curva \mathbf{n} . Na equação (3.29), κ denota a curvatura da linha $r = R(\bar{\theta}, z; t)$ e dl o comprimento da linha. A curvatura da linha é dada pela expressão

$$\kappa = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (3.30)$$

Pode-se, então, escrever (3.28) na forma

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{\boldsymbol{\tau} \left(\bar{z} + \frac{dz}{2} \right) - \boldsymbol{\tau} \left(\bar{z} - \frac{dz}{2} \right)}{dl} \cdot \mathbf{e}_r dl. \quad (3.31)$$

Passando ao limite $dz \rightarrow 0$ em (3.31), obtém-se

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} \cdot \mathbf{e}_r dl + \mathbf{o}(dl) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.32)$$

Usando a fórmula de Frenet-Serret (3.29) em (3.32), obtém-se

$$f_{int}^z = \sigma_z \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r dl + \mathbf{o}(dl) \cdot \mathbf{e}_r.$$

Por meio de (3.11), f_{int}^z toma a expressão

$$f_{int}^z = \sigma_z \kappa \frac{1}{\|\nabla F\|} dl + \mathbf{o}(dl) \cdot \mathbf{e}_r.$$

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

Devido à hipótese A.II, $\partial R/\partial\theta$ é nula em (3.10) e, por meio de (3.14), tem-se

$$f_{int}^z = \sigma_z \kappa dz + o(dz).$$

Substituindo o termo da curvatura da linha, (3.30), obtém-se a expressão

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right]^{-3/2} dz + o(dz). \quad (3.33)$$

O termo $(\partial R/\partial z)^2$, em (3.33), torna o modelo não linear e, uma vez que é muito inferior a $\partial R/\partial z$, pode ser desprezado. Tendo em conta que, neste caso, $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$, obtém-se uma expressão linear para a componente radial dos esforços longitudinais

$$f_{int}^z = \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz + o(dz). \quad (3.34)$$

A componente radial dos esforços internos que se desenvolvem na parede do vaso sanguíneo é, usando (3.19), (3.25) e (3.34), dada por

$$f_{int} = -\frac{E}{1-\zeta^2} \frac{\eta}{R_0} d\theta + \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz + o(d\theta dz). \quad (3.35)$$

3.4 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DA PAREDE

A parede do vaso sanguíneo é um sólido com comportamento elástico e, como tal, é deformável. Assim sendo, é também considerada como um meio contínuo. Deste modo, os princípios de conservação da Mecânica Clássica, enunciados no Capítulo 2, também são aqui válidos. Neste caso, o Princípio de Conservação do Momento Linear (ver Princípio 2.2, (2.33) e (2.42)) é escrito na forma seguinte:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_p \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} dV = \int_V \rho_p \mathbf{f}_p dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta. \quad (3.36)$$

Aqui, V e ρ_p são, respectivamente, o volume e a densidade da parede, dV é um elemento infinitesimal da parede e $d\zeta$ é um elemento de área da fronteira ∂V . O vector $\boldsymbol{\eta}$ descreve o deslocamento da parede e, portanto, $d\boldsymbol{\eta}/dt$ é a velocidade da parede. Ainda em (3.36), \mathbf{f}_p corresponde às forças de volume na parede que, devido à especificidade do modelo, podem ser desprezadas. Do mesmo modo que foi feito para (2.34)-(2.35), pode-se escrever (3.36) na forma

$$\int_V \rho_p \frac{d^2 \boldsymbol{\eta}}{dt^2} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta. \quad (3.37)$$

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

Recordando o elemento de superfície $d\mathcal{S}$ esquematizado na Figura 3.3, verifica-se que

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta = \int_{\partial V_r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta + \int_{\partial V_\theta} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta + \int_{\partial V_z} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\zeta, \quad (3.38)$$

onde as fronteiras ∂V_r , ∂V_θ e ∂V_z correspondem às superfícies de ∂V nas respectivas direcções. Considerando, então, que sobre ∂V_r actuam os esforços externos e que sobre ∂V_θ e ∂V_z se desenvolvem os respectivos esforços internos definidos na Secção 3.3, tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}_{ext} & \text{em} & \partial V_r, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}_{int}^\theta & \text{em} & \partial V_\theta, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}_{int}^z & \text{em} & \partial V_z. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Considere-se que, em coordenadas cilíndricas, o volume da parede é dado por

$$V = Rh d\theta dl, \quad (3.40)$$

e a área das fronteiras ∂V_α , com $\alpha = r, \theta, z$, é dada por Σ_α . Passando, então, a coordenadas cilíndricas e tendo em conta apenas o equilíbrio do momento linear ao longo da componente radial, de acordo com a hipótese H.II, tem-se, por meio de (3.37)-(3.40),

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \cdot \mathbf{e}_r Rh d\theta dl &= \mathbf{f}_{ext} \cdot \mathbf{e}_r \Sigma_r \\ &+ \mathbf{f}_{int}^\theta \cdot \mathbf{e}_r \Sigma_\theta + \mathbf{f}_{int}^z \cdot \mathbf{e}_r \Sigma_z + o(d\Sigma). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Neste caso, o volume de integração mantém-se constante devido à incompressibilidade assumida (hipótese H.V). Assim, dado que se consideram gradientes de deformação relativamente pequenos (hipótese H.VI), o volume da parede na configuração actual é igual ao volume na configuração inicial

$$V = hR d\theta dl = h_0 R_0 d\theta dz. \quad (3.42)$$

Assim sendo, por meio de (3.4) e substituindo (3.18) e (3.35) em (3.41), obtém-se

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} R_0 h_0 d\theta dz &= (p - p_{ext}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r \Sigma_r - (2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \Sigma_r \\ &- \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0} d\theta \Sigma_\theta + \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} dz \Sigma_z + o(d\Sigma). \end{aligned} \quad (3.43)$$

3. MODELAÇÃO DA PAREDE DO VASO SANGUÍNEO

Considere-se, agora, as áreas $\bar{\Sigma}_r$, que corresponde a $d\sigma$ em (3.12), $\Sigma_\theta = hdl$ e $\Sigma_z = hRd\theta$. Por meio de (3.13), obtém-se (3.43) na forma

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} R_0 h_0 d\theta dz + \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0} h_0 d\theta dz - \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} h_0 R_0 d\theta dz + o(d\theta dz) \\ = (p - p_{ext}) R d\theta dz - (2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\| R d\theta dz . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dividindo (3.44) por $d\theta dz$ e passando ao limite $d\theta, dz \rightarrow 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \rho_p \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} R_0 h_0 + \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{R_0} h_0 - \sigma_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} h_0 R_0 \\ = (p - p_{ext}) R - (2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\| R d\theta dz . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pode-se, então, dividir a equação (3.45) por $\rho_p h_0 R_0$ e, admitindo que μ é constante, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta}{\rho_p R_0^2} - \frac{\sigma_z}{\rho_p} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = (p - p_{ext}) \frac{R}{\rho_p h_0 R_0} - (2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \frac{\|\nabla F\| R}{\rho_p h_0 R_0} . \quad (3.46)$$

A expressão (3.46) corresponde à equação de movimento da parede do vaso e pode ser escrita, de uma forma geral, por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + b\eta = c, \quad (3.47)$$

onde

$$a = \frac{\sigma_z}{\rho_p}, \quad b = \frac{E}{\rho_p (1 - \zeta^2) R_0^2}$$

e

$$c = \frac{R}{\rho_p h_0 R_0} \left[(p - p_{ext}) - 2\mu (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_r \|\nabla F\| \right].$$

A equação (3.47) é, então, o modelo geral para o deslocamento da parede e é definida, para todo $t \in I$, no mesmo conjunto que dá origem à configuração inicial, Γ_0^p . Este modelo pode ser simplificado, por exemplo, desprezando o termo das tensões longitudinais e, assim, a equação (3.47) é escrita na forma

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + b\eta = c.$$

Este modelo simplificado é designado na bibliografia por modelo do anel independente. Um modelo ainda mais simples pode ser obtido, desprezando os esforços devidos à viscosidade do fluido e a razão R/R_0 , ficando o termo c independente da configuração actual

$$c = \frac{p - p_{ext}}{\rho_p h_0}.$$

ESCOAMENTO DO SANGUE NOS VASOS SANGUÍNEOS

O fenómeno fisiológico do escoamento do sangue nos vasos sanguíneos é, como todos os fenómenos biológicos, complexo. São muitos os parâmetros que podem ser estudados para a compreensão deste fenómeno. Desta complexidade, inerente aos sistemas biológicos, é importante estudar a composição do fluido. Neste caso, interessa estudar as propriedades reológicas do sangue, isto é, as propriedades que influenciam o seu escoamento, de forma a encontrar simplificações para um modelo matemático. Neste capítulo, serão conciliados todos os factores que até aqui foram considerados, no sentido de obter um modelo para o escoamento do sangue nas grandes artérias. A abordagem ao estudo do escoamento do sangue feita neste capítulo tem por base nos trabalhos de A. Quarteroni e L. Formaggia [7] e a monografia de Y. Fung [8].

4.1 REOLOGIA DO SANGUE

Do ponto de vista microscópico o sangue é composto por diversas moléculas e células vivas em suspensão. No entanto, à luz da Mecânica dos Fluidos, o sangue pode ser descrito como um meio contínuo e, uma vez que se deforma continuamente sob a acção qualquer tensão, é considerado como um fluido. Porém, os eritrócitos, as células mais abundantes no sangue, adquirem formas diferentes durante o escoamento e podem tomar orientações preferenciais, anulando a condição de isotropia. Este comportamento é, no entanto, desprezado neste trabalho

e assume-se que o sangue é uma substância isotrópica. A elevada proporção de água no plasma permite classificar este fluido como Newtoniano e transpor esta hipótese para todo o sangue como hipótese simplificativa. No entanto, os eritrócitos induzem um comportamento não Newtoniano do sangue. Estas células têm a forma de discos bicôncavos, com $7,6 \mu\text{m}$ de diâmetro e $2,8 \mu\text{m}$ de espessura, em condições estáticas. Os eritrócitos possuem uma membrana de revestimento elástica e, portanto, são células altamente deformáveis. No entanto, esta elevada capacidade de deformação não provoca grande variação da área superficial. Estas estruturas são, então, caracterizadas pelo seu comportamento viscoelástico, uma vez que oferecem alguma resistência à deformação e possuem características elásticas, voltando à forma original após a deformação. Estas características dos eritrócitos, juntamente com a capacidade de formar aglomerados entre si, fazem com que o sangue apresente um comportamento não Newtoniano. De uma forma mais específica, têm comportamento pseudoplástico, isto é, a viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação. Este comportamento é mais relevante à escala das artérias médias, arteríolas e capilares, onde as taxas de deformação são baixas, e onde a ordem de grandeza entre os aglomerados e a parede do vaso é semelhante. Porém, admite-se que o sangue tem um comportamento Newtoniano nas grandes artérias, uma vez que as taxas de deformação são relativamente elevadas nestas estruturas. O escoamento do sangue nas artérias dá-se em regime laminar. Neste caso, consideram-se várias camadas concêntricas de fluido que escoam a velocidades diferentes. Desta forma, tem-se um perfil de velocidades parabólico em que as camadas mais externas escoam a uma velocidade menor devido à resistência imposta pela parede, e as camadas contíguas apresentam sucessivamente uma velocidade superior. A diferença de velocidades que se faz sentir entre as várias camadas de sangue deve-se à sua viscosidade. A viscosidade do sangue é em cerca de 3 a 4 vezes superior à da água, necessitando, comparativamente, de maior pressão para o fazer circular, nas mesmas condições. No entanto, o escoamento do sangue no sistema cardiovascular não é sempre em regime laminar. No coração, nas zonas de ramificação dos vasos e nas zonas de estrangulamento é comum o sangue escoar em regime turbulento. Este regime é caracterizado pelas diversas direcções tomadas pelo fluido e, portanto, é extremamente difícil de modelar.

4.2 DERIVAÇÃO DO MODELO

A dedução do modelo matemático do escoamento do sangue nos vasos sanguíneos, pode ser feita a partir das equações de Navier–Stokes. Para tal, considera-se que o escoamento do sangue decorre num vaso sanguíneo com a estrutura geométrica descrita na Secção 3.2. Desta forma, formulam-se as hipóteses seguintes:

S.I – *A estrutura cilíndrica (de secção circular) do vaso permanece durante o movimento. Como tal, todas as quantidades que descrevem a parede do vaso são independentes de θ : o raio do vaso, R , depende apenas de z e t ;*

S.II – *A parede do vaso desloca-se apenas na direcção radial: $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r$;*

S.III – *A pressão é constante em cada secção: p depende apenas de z e t ;*

S.IV – *As forças de volume são desprezadas: $\mathbf{f} = \mathbf{0}$;*

S.V – *As componentes da velocidade ortogonais ao eixo dos zz são muito pequenas quando comparadas com a componente da velocidade ao longo do eixo dos zz , e por isso podem ser desprezadas: $u_z \gg u_r, u_\theta$.*

De acordo com a hipótese S.I, a parede do vaso que faz fronteira com o domínio Ω_t ocupado pelo fluido, é descrita por

$$\Gamma_t^p = \{(r, \theta, z) : r = R(z, t), \theta \in [0, 2\pi), z \in (0, L)\}.$$

Segundo S.I e S.II, o raio do vaso é dado na forma

$$R(z, t) = \eta(z, t) + R_0(z, t_0). \quad (4.1)$$

Considere-se a secção axial, denotada por $S = S(z, t)$. A área da secção S é dada, em coordenadas cilíndricas, por

$$A(z, t) = \int_S r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\theta = \pi R^2. \quad (4.2)$$

Usando (4.1) em (4.2) tem-se

$$A = \pi [\eta(z, t) + R_0(z)]^2.$$

Assume-se que a componente da velocidade u_z , em coordenadas cilíndricas, toma a expressão

$$u_z(r, z, t) = \bar{u}(r, z, t) \phi\left(\frac{r}{R(z)}\right), \quad (4.3)$$

onde \bar{u} é a velocidade média da componente u_z , em cada secção axial, e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um perfil de velocidades representativo de um escoamento, também ele, representativo. A velocidade média \bar{u} pode ser definida por

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_S u_z dS, \quad (4.4)$$

onde dS é um elemento infinitesimal de S . Por meio de (4.3) e (4.4), obtém-se

$$A = \int_S \phi dS.$$

Multiplicando (4.4) pela área A , obtém-se o fluxo médio

$$Q = A\bar{u} = \int_S u_z dS. \quad (4.5)$$

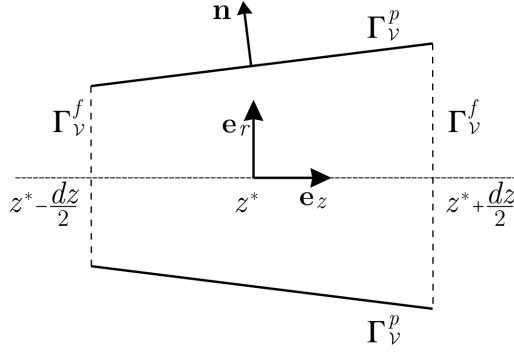
A não uniformidade da distribuição das velocidades no escoamento do fluido no vaso aumenta a complexidade dos modelos matemáticos. Neste caso, em que se assume uma velocidade média em cada secção, é necessário corrigir os efeitos locais da velocidade na equação do movimento. Para o caso do fluxo unidireccional de um fluido homogêneo, introduz-se um coeficiente de correcção do fluxo do momento, α , tal que

$$\alpha A\bar{u}^2 = \int_S u_z^2 dS. \quad (4.6)$$

Este coeficiente relaciona o fluxo do momento calculado a partir da velocidade média da secção, no primeiro membro de (4.6), com a soma dos fluxos dos momentos de cada ponto dessa secção, no segundo membro. Considerando, então, as hipóteses S.III e S.IV, as equações de Navier–Stokes ao longo do eixo dos zz podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \text{div}(u_z \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \Delta u_z = 0 \quad (4.7a)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (4.7b)$$


 FIGURA 4.1: Representação da secção longitudinal da porção \mathcal{V} .

Considere-se, então, uma porção \mathcal{V} de Ω_t , sobre a qual será feita a integração das equações de Navier–Stokes (4.7). Na Figura 4.1 esquematiza-se uma secção longitudinal da porção \mathcal{V} , com θ constante, descrita entre $z = z^* - dz/2$ e $z = z^* + dz/2$. A fronteira desta secção é denotada por $\partial\mathcal{V} = \Gamma_{\mathcal{V}}^p \cup \Gamma_{\mathcal{V}}^f$, onde $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é a fronteira que coincide com a parede do vaso sanguíneo, e onde $\Gamma_{\mathcal{V}}^f$ corresponde às fronteiras fictícias de entrada e saída do domínio \mathcal{V} . Considere-se que a fronteira $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é impermeável ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$), enquanto que $\Gamma_{\mathcal{V}}^f$ é uma fronteira permeável. Por outro lado, a velocidade do fluido na parede é igual à velocidade da parede. Assim, em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$, a velocidade é dada por

$$\mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$

Apresenta-se, agora, um resultado preliminar, que será fundamental para a integração das equações (4.7).

Lema 4.1. Seja $f : \mathcal{V} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função axi-simétrica com valor na parede $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ dado por f_p . Denote-se por \bar{f} e $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$ os valores médios da função f e da variação de f em ordem ao tempo, respectivamente. Então, a relação seguinte é verificada:

$$\frac{\partial(\bar{f}A)}{\partial t} = A \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + 2\pi R \dot{\eta} f_p. \quad (4.8)$$

Demonstração. Por aplicação do Teorema de Transporte de Reynolds (Teorema 2.1) em \mathcal{V} , seguida da aplicação do Teorema da Divergência (Teorema 1.1), tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{v}) \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} f\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\varsigma, \quad (4.9)$$

onde $d\mathcal{V}$ e $d\zeta$ são elementos infinitesimais de volume e de área, respectivamente, da porção \mathcal{V} . Em (4.9), \mathbf{v} é a velocidade da fronteira de \mathcal{V} , $\partial\mathcal{V}$, e é dada por

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} & \text{em } \Gamma_{\mathcal{V}}^p \\ \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_{\mathcal{V}}^f \end{cases}. \quad (4.10)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 1.3) aos integrais de volume da equação (4.9), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} f \, d\mathcal{V} &= \frac{d}{dt} \left\{ A(z^*) \left[z^* + \frac{dz}{2} - \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) + o(dz) \right] \bar{f}(z^*) \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left[A(z^*) \bar{f}(z^*) dz + o(dz) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} &= A(z^*) \left[z^* + \frac{dz}{2} - \left(z^* - \frac{dz}{2} \right) + o(dz) \right] \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}(z^*) \\ &= A(z^*) \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}(z^*) dz + o(dz), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $A(z^*)$ e $f(z^*)$ são os valores da área A e da função f , calculados em z^* (valor médio do intervalo de integração). Por meio de (4.10), e uma vez que $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r$, o terceiro termo de (4.9) toma a forma

$$\int_{\partial\mathcal{V}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} f \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} \, d\zeta. \quad (4.13)$$

Note-se que em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$, o elemento infinitesimal $d\zeta$ corresponde ao elemento $d\sigma$, definido na Secção 3.2. Usando (3.13) e o Teorema do Valor Médio, obtém-se, a partir de (4.13),

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} f \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} f \dot{\eta} R \, d\theta dz \\ &= 2\pi \left[f_p(z^*) R(z^*) \dot{\eta}(z^*) dz + o(dz) \right] \\ &= 2\pi f_p(z^*) R(z^*) \dot{\eta}(z^*) dz + o(dz). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.11), (4.12) e (4.14) em (4.9), obtém-se a igualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[A(z^*) \bar{f}(z^*) dz + o(dz) \right] &= \\ &= A(z^*) \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}(z^*) dz + 2\pi f_p(z^*) R(z^*) \dot{\eta}(z^*) dz + o(dz). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dividindo (4.15) por dz e passando ao limite $dz \rightarrow 0$ tem-se, finalmente, a expressão (4.8). \square

Prosseguindo na dedução do modelo, integram-se as equações de Navier–Stokes (4.7) sobre a porção \mathcal{V} . Sejam S^- e S^+ as fronteiras fictícias de entrada e saída da porção \mathcal{V} , de modo que $\Gamma_{\mathcal{V}}^f = S^- \cup S^+$. Sejam, ainda, $-\mathbf{e}_z$ e \mathbf{e}_z os vectores normais a estas superfícies, respectivamente. Em primeiro lugar, integra-se a equação da continuidade (4.7b). Por aplicação do Teorema da Divergência e tendo em conta que a velocidade em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$ é dada por $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ (ver (4.10)), obtém-se

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathcal{V} = \int_{S^-} \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{e}_z) \, dS + \int_{S^+} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z \, dS + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (4.16)$$

Refira-se o facto das fronteiras S^- e S^+ serem permeáveis e atendendo às hipóteses S.II e S.V, tem-se (4.16) na forma

$$- \int_{S^-} u_z \, dS + \int_{S^+} u_z \, dS + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0. \quad (4.17)$$

Aplicando (4.14), com $f = 1$, ao último termo de (4.17), obtém-se a expressão

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 2\pi R(z^*) \dot{\eta}(z^*) dz + o(dz). \quad (4.18)$$

Por meio do Lema 4.1, com $f = 1$, obtém-se

$$2\pi R(z^*) \dot{\eta}(z^*) = \frac{\partial A}{\partial t}(z^*). \quad (4.19)$$

De acordo com a noção de fluxo médio expressa em (4.5), a soma dos outros dois termos de (4.17) corresponde à variação de Q entre as secções S^- e S^+ (dQ). Substitui-se (4.19) em (4.18) e a resultante daqui substitui-se em (4.17). Dividindo a expressão obtida por dz e passando o limite $dz \rightarrow 0$, obtém-se uma nova expressão para a equação da continuidade:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (4.20)$$

Relativamente à equação do momento (4.7a), segue-se a integração sobre \mathcal{V} de cada termo desta equação. Para o primeiro termo de (4.7a), tem-se, pelo Teorema de Transporte de Reynolds (Teorema 2.1) e pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} \, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_z \, d\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{V}} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\zeta = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_z \, d\mathcal{V}. \quad (4.21)$$

A segunda igualdade de (4.21) resulta do facto de o deslocamento da parede ser apenas na direcção radial e, assim, $u_z = 0$ em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$. Mais ainda, nas fronteiras fictícias $\Gamma_{\mathcal{V}}^f = S^- \cup S^+$ a velocidade \mathbf{v} é nula. Usando (4.11), pode-se escrever

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_z d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} [A(z^*)\bar{u}(z^*)dz + o(dz)]. \quad (4.22)$$

Por (4.5), sabe-se que $A\bar{u} = Q$. Então, (4.22) pode ser escrita na forma

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_z}{\partial t} d\mathcal{V} = \frac{\partial Q}{\partial t}(z^*)dz + o(dz). \quad (4.23)$$

Integrando o segundo termo de (4.7a), obtém-se

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} = \int_{S^-} u_z \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{e}_z) dS + \int_{S^+} u_z \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z dS + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} u_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (4.24)$$

Por meio das mesmas justificações usadas em (4.21), o integral de superfície em (4.24) é nulo. Então, por aplicação do Teorema de Valor Médio (Teorema 1.3), e tendo em conta que (4.6), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) d\mathcal{V} &= - \int_{S^-} u_z^2 dS + \int_{S^+} u_z^2 dS \\ &= - \alpha A(z^* - \frac{dz}{2}) \bar{u}^2(z^* - \frac{dz}{2}) + \alpha A(z^* + \frac{dz}{2}) \bar{u}^2(z^* + \frac{dz}{2}) \\ &= \frac{\partial \alpha A \bar{u}^2}{\partial z}(z^*)dz + o(dz). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe-se que a última igualdade resulta do facto do termo anterior ser a variação de $\alpha A \bar{u}^2$ em ordem a z . Para a integração do termo relativo à pressão na equação (4.7a), utiliza-se o Teorema da Divergência para se obter

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = - \int_{S^-} p dS + \int_{S^+} p dS + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} p n_z d\sigma. \quad (4.26)$$

Observe-se que as componentes dos vectores normais às superfícies S^- e S^+ , na direcção do eixo dos zz , são -1 e 1 , respectivamente, e que n_z é a terceira componente do vector \mathbf{n} normal a $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$. Usando agora a hipótese S.III, obtém-se de (4.26),

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial z} d\mathcal{V} = A(z^* + \frac{dz}{2}) p(z^* + \frac{dz}{2}) - A(z^* - \frac{dz}{2}) p(z^* - \frac{dz}{2}) + \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} p n_z d\sigma. \quad (4.27)$$

Uma vez que $n_z = (0, 0, 1) \cdot \mathbf{n}$, pelo Teorema da Divergência, tem-se

$$\int_{\partial \mathcal{V}} n_z d\sigma = 0. \quad (4.28)$$

Tomando $p(z) = p(z^*) + o(dz)$, isto é, assumindo que a pressão toma um valor médio no intervalo considerado e que esse valor é calculado no ponto médio, obtém-se, por meio de (4.28),

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_V^p} p n_z d\sigma &= p(z^*) \int_{\Gamma_V^p} n_z d\sigma + o(dz) = -p(z^*) \int_{\Gamma_V^f} n_z dS + o(dz) \\ &= -p(z^*) [A(z^* + \frac{dz}{2}) - A(z^* - \frac{dz}{2})] + o(dz). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV &= A(z^* + \frac{dz}{2}) p(z^* + \frac{dz}{2}) - A(z^* - \frac{dz}{2}) p(z^* - \frac{dz}{2}) - \\ & p(z^*) [A(z^* + \frac{dz}{2}) - A(z^* - \frac{dz}{2})] + o(dz). \end{aligned} \quad (4.30)$$

De (4.30), obtém-se, usando da regra de derivação do produto na segunda igualdade,

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial z} dV = \frac{\partial(Ap)}{\partial z}(z^*) dz - p(z^*) \frac{\partial A}{\partial z}(z^*) dz + o(dz) = A \frac{\partial p}{\partial z}(z^*) dz + o(dz). \quad (4.31)$$

Ao último termo da equação (4.7a) aplica-se o Teorema da Divergência e, considerando que $-\mathbf{e}_z$ e \mathbf{e}_z são os vectores normais às superfícies S^- e S^+ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_V \Delta u_z dV &= \int_{\partial V} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\varsigma \\ &= - \int_{S^-} \frac{\partial u_z}{\partial z} dS + \int_{S^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} dS + \int_{\Gamma_V^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para se obter uma simplificação maior, supõe-se que a variação da velocidade do fluido ao longo do eixo dos zz é relativamente pequena, quando comparada com os outros termos da equação. Assim, considera-se apenas o último integral de (4.32), e escreve-se

$$\int_V \Delta u_z dV = \int_{\Gamma_V^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (4.33)$$

Decompondo o vector \mathbf{n} segundo as duas direcções \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_z , tem-se

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z. \quad (4.34)$$

Usando (4.34), tem-se

$$\int_{\Gamma_V^p} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma_V^p} (n_r \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r + n_z \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_z) d\sigma. \quad (4.35)$$

Como o termo $n_z \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_z$ é da mesma ordem de grandeza que o termo $\partial u_z / \partial z$, pode ser desprezado, resultando de (4.33) e (4.35) a expressão seguinte:

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} n_r \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r d\sigma. \quad (4.36)$$

Para se poder calcular o termo ∇u_z , recorde-se a expressão do gradiente em coordenadas cilíndricas, (3.9). Neste caso, tem-se, por meio de (4.3),

$$\nabla u_z = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \bar{u} \phi' \left(\frac{r}{R(z)} \right) \frac{1}{R(z)} \left(1, -\frac{rR'(z)}{R(z)} \right). \quad (4.37)$$

Como em $\Gamma_{\mathcal{V}}^p$, $r = R(z)$, a expressão (4.37) reduz-se a

$$\nabla u_z = \bar{u} \phi'(1) \frac{1}{R(z)} \left(1, -R'(z) \right). \quad (4.38)$$

Substituindo (4.38) em (4.36), obtém-se

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} n_r \bar{u} \phi'(1) \frac{1}{R(z)} \left(1, -R'(z) \right) \cdot \mathbf{e}_r d\sigma. \quad (4.39)$$

Tomando, agora, $F = r - R(z)$ na expressão (3.9) tem-se $\nabla F = (1, -R'(z))$ em (3.6) e, como a norma do vector normal é, neste caso, n_r , obtém-se, de (4.39),

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = \int_{\Gamma_{\mathcal{V}}^p} \bar{u} \phi'(1) \frac{1}{R(z)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r d\sigma, \quad (4.40)$$

onde ϕ' é a derivada de ϕ . Recordando a relação (3.13), onde $d\theta = 2\pi$, pode-se escrever (4.40) na forma

$$\int_{\mathcal{V}} \Delta u_z d\mathcal{V} = 2\pi \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \bar{u} \phi'(1) dz = 2\pi \bar{u}(z^*) \phi'(1) dz. \quad (4.41)$$

Para se obter a expressão final para a equação do movimento, substituem-se (4.23), (4.25), (4.31) e (4.41) em (4.7a), tendo em conta que se considera ρ e ν são constantes. Dividindo a expressão resultante por dz e passando ao limite $dz \rightarrow 0$, obtém-se

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \alpha A \bar{u}^2}{\partial z} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K \bar{u} = 0, \quad (4.42)$$

onde $K = -2\pi\nu\phi'(1)$ é o denominado parâmetro de fricção, que depende do perfil de velocidades escolhido. Tomando α constante e tendo em conta que $\bar{u} = Q/A$, obtém-se, de (4.20) e (4.42), o sistema de equações seguinte:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.43a)$$

4. ESCOAMENTO DO SANGUE NOS VASOS SANGUÍNEOS

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial Q^2}{\partial z} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + K \frac{Q}{A} = 0. \quad (4.43b)$$

Desta forma, obtém-se um sistema de equações que descreve o escoamento unidireccional do sangue nas grandes artérias, onde A , Q e p são as incógnitas deste problema.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

A importância de estudar o sistema cardiovascular humano está intimamente relacionada com as várias patologias decorrentes do seu mau funcionamento. Na população adulta existe uma elevada taxa de incidência destas patologias e, em conjunto, constituem a principal causa de morte em todo o mundo. A maior parte destas patologias tem origem em alterações que ocorrem na estrutura dos vasos sanguíneos e que, por consequência, perturbam o escoamento do sangue. É neste sentido que o estudo do escoamento do sangue no sistema cardiovascular tem vindo a ganhar projecção na modelação matemática. No entanto, é um estudo tão vasto e complexo que é necessária a cooperação entre as diversas áreas da Ciência, com a finalidade de desenvolver técnicas de diagnóstico, tratamento e prognóstico deste tipo de patologias. Neste trabalho, conciliaram-se os fundamentos da Física, que permitem descrever o escoamento do sangue e o movimento da parede do vaso, com o conhecimento da Biologia do corpo humano e com o rigor da Matemática.

Em termos gerais, o sangue é considerado como um fluido, tanto em termos fisiológicos como para a modelação matemática. Neste sentido, foi necessário derivar, no Capítulo 2, as equações que governam o escoamento de um fluido. É importante realçar o facto de um fluido ser considerado um meio contínuo, uma vez que este tipo de análise matemática implica a continuidade das funções que descrevem o escoamento. Assim sendo, não se impõe apenas a continuidade do fluido como também a isotropia. Nestas condições, um fluido pode ser descrito com base nos princípios fundamentais da Física, nomeadamente, os princípios

5. CONCLUSÃO

de conservação da massa e do momento linear. Estes princípios dão origem às principais equações que governam os fluidos: a equação da continuidade, que garante que a massa do fluido não varia, e as equações do movimento, que permitem modelar o escoamento do fluido de acordo com as forças a que está sujeito. A validade do princípio do momento angular permitiu demonstrar que o tensor das tensões de Cauchy é simétrico. Este tensor exprime as tensões em função das deformações que ocorrem no fluido, representando a lei constitutiva, característica de cada meio. Esta lei constitutiva estabelece uma relação linear entre tensões e velocidades de deformação para fluidos Newtonianos. Para o caso não linear, os fluidos são não Newtonianos. A partir destas relações, obtiveram-se as equações de Navier–Stokes que governam o escoamento de um fluido homogéneo e incompressível.

O escoamento do sangue provoca, efectivamente, alterações na estrutura das artérias, tornando essencial a modelação da parede destes vasos. A parede das artérias pode ser modelada através dos mesmos princípios descritos na Mecânica dos Fluidos, residindo a principal diferença na lei constitutiva. Por se tratar de um sólido, foi essencial distinguir a dependência do tensor das tensões de Cauchy que, não depende do campo de velocidades, mas sim, do campo de deslocamentos. Neste caso, a lei constitutiva apropriada foi deduzida para um sólido deformável e elástico, uma vez que a parede da artéria tem na sua constituição uma camada com características elásticas. Adicionalmente, a hipótese do estado plano de tensão, onde se desprezaram as tensões que se desenvolvem ao longo da espessura da parede, tornou esta lei relativamente mais simples. No entanto, esta lei obtida adequa-se principalmente na modelação das tensões circunferenciais, já que a elasticidade da parede é mais significativa nesta direcção. Neste modelo, contabilizaram-se, não só as tensões internas, como também as tensões resultantes do contacto com os meios exteriores, nomeadamente, as tensões exercidas pelo fluido a partir do interior do vaso e as tensões exercidas pelos tecidos adjacentes. Estas tensões foram descritas nas suas componentes radiais, e o modelo obtido é um modelo unidimensional que descreve o deslocamento da parede apenas na direcção radial. É nesta direcção que o deslocamento da parede das artérias é mais proeminente, podendo, este modelo, conferir resultados importantes relativamente ao deslocamento da parede.

5. CONCLUSÃO

No sentido de modelar o escoamento do sangue, considerou-se o sangue como fluido e, portanto, como um meio continuamente deformável. Embora composto por inúmeras partículas e moléculas, é bastante razoável, devido à escala do problema, desprezar a composição discreta e considerar a continuidade e homogeneidade do sangue. Neste estudo considerou-se, também, o sangue como um fluido incompressível, uma vez que o seu estado físico não permite grandes variações de volume. De todos os constituintes, é importante realçar as características dos eritrócitos que são os responsáveis pelo comportamento reológico do sangue que o afasta de um comportamento Newtoniano. A viscoelasticidade e a capacidade de formação de aglomerados conferem orientações preferenciais e anulam a condição de isotropia. Estas características são as mais relevantes para descrever o comportamento pseudoplástico do sangue. No entanto, dada a especificidade do problema, pode ser considerando o comportamento Newtoniano do sangue nas grandes artérias. De facto, nestas estruturas as taxas de deformação são elevadas e, portanto, o comportamento pseudoplástico dos eritrócitos não é tão significativo. É de referir que existem trabalhos no mesmo sentido que consideram o sangue como um fluido não Newtoniano. O modelo final foi obtido a partir das equações de Navier–Stokes, integradas num domínio de fronteira impermeável, que coincide com a parede do vaso, e de fronteira permeável, correspondendo à entrada e saída do fluido no domínio de integração. Este modelo é representado por um sistema de duas equações às derivadas parciais que descreve a variação da área, do fluxo e da pressão ao longo da direcção longitudinal do vaso e depende, evidentemente, do perfil de velocidades. Obteve-se, portanto, um modelo unidimensional que descreve o escoamento do sangue nas grandes artérias.

As soluções para as equações diferenciais deste tipo são muito difíceis de obter analiticamente. Neste sentido, é possível resolver estas equações através de alguns métodos numéricos capazes de fornecer aproximações das equações diferenciais obtidas, nomeadamente, o método das diferenças finitas (FDM) e o método dos elementos finitos (FEM). O método dos elementos finitos consiste, em traços largos, na divisão do domínio do problema em diversos subdomínios, designados por elementos finitos, e na aproximação das funções em cada elemento. O método das diferenças finitas é mais comum no estudo das equações

5. CONCLUSÃO

diferenciais em regime transiente e consiste na aproximação das equações por diferenças finitas. Estes métodos de discretização têm sido tão utilizados que constituem um ramo autônomo da Mecânica dos Fluidos, designado por Dinâmica Computacional dos Fluidos (CFD). Neste ramo, faz-se uso de *software* adequado e *hardware* de alta performance, onde se tratam os fluidos contínuos de uma forma discreta. Desta forma, aproximam-se as equações diferenciais por um sistema de equações algébricas que podem ser resolvidas pelo *software*. Em suma, define-se a geometria do problema, impondo condições de fronteira, discretiza-se o domínio espacial em pequenas porções, formando uma malha, e aplica-se um algoritmo adequado para resolver o sistema de equações que governam o problema. A solução é processada para posterior análise e visualização.

Estes modelos podem ser utilizados para compreender melhor diversas patologias vasculares, nomeadamente, a aterosclerose. Esta patologia é caracterizada pelo espessamento da parede da artéria e perda de elasticidade. A aterosclerose resulta de uma sequência de acontecimentos, desde a ocorrência de uma lesão no endotélio do vaso até à adesão de leucócitos e plaquetas, promovendo a acumulação de lípidos e tecido fibroso. Desta forma criam-se placas ateroscleróticas que diminuem o diâmetro interno do vaso e restringem o escoamento do sangue, constituindo uma estenose. Quando ocorre nas artérias coronárias, artérias que levam o sangue ao músculo do coração – miocárdio, as placas podem obstruir o vaso e provocar um enfarte do miocárdio. Neste sentido, os modelos matemáticos podem ser usados para fornecer alguma informação acerca dos padrões do escoamento do sangue em determinadas zonas críticas das artérias, onde se pensa que a patologia tem origem. Também no âmbito das intervenções cirúrgicas, estes modelos podem desempenhar um papel importante no planeamento e na prevenção de complicações cirúrgicas. No caso da angioplastia, que consiste na dilatação da estenose através de um cateter balão inserido via cutânea, estes modelos podem ser úteis na previsão sobre a elasticidade e resistência da parede. Na substituição vascular, enxertos ou anastomoses (enxertos sintéticos), os modelos podem ser usados, por exemplo, no prognóstico da adaptação dos vasos após cirurgia.

Apenas uma pequena parte do sistema cardiovascular está retratada no modelo do escoamento do sangue. Relativamente ao sistema vascular, este mo-

5. CONCLUSÃO

delo aplica-se apenas às artérias onde ocorrem elevadas taxas de deformação e, portanto, não é adequado para o escoamento do sangue em artérias de calibre pequeno, capilares ou veias. O aumento de dimensão torna os modelos bastante mais complexos. No entanto, poder-se-ia retirar mais informação dos modelos, considerando as outras direcções, tanto no escoamento do sangue como no deslocamento da parede. Outros modelos podem ser deduzidos considerando o comportamento pulsativo do coração e incorporando as ondas de pressão ao longo do escoamento. Também o movimento muscular não está contabilizado neste modelo, uma vez que a pressão dos tecidos é considerada constante. A turbulência nas zonas de ramificação dos vasos ou nas zonas de estrangulamento pode também ser incorporada neste modelo, o que tornaria o modelo extremamente complexo e bastante caro em simulações numéricas. Relativamente à contabilização da temperatura nestes modelos, pode-se, a partir dos princípios fundamentais da Termodinâmica, deduzir a expressão para a variação de temperatura. Embora a temperatura ronde os 37 °C num indivíduo saudável, num estado patológico a temperatura pode variar significativamente. Mais ainda, a viscosidade é altamente dependente da temperatura, tornando estas variações mais significativas em escoamentos sob baixas taxas de deformação. Adicionalmente, o comportamento viscoelástico do sangue também pode ser incluído neste modelo. Outros parâmetros que podem ser conjugados nestes modelos são os fenómenos de transferência de massa que ocorrem no sangue, nomeadamente, os fenómenos relativos às trocas gasosas e processos químicos que ocorrem no sangue.

APÊNDICE: ELASTICIDADE LINEAR

O comportamento dos materiais é definido pela lei constitutiva que corresponde à principal diferença entre a modelação de fluidos ou de sólidos. Assim, é possível, também para a parede da artéria, encontrar uma relação entre o tensor das tensões de Cauchy e as quantidades cinemáticas que a descrevem. No caso dos fluidos, a lei constitutiva foi obtida em função do campo de velocidades e, assim, o tensor \mathbf{T} foi definido como função do gradiente das velocidades de deformação \mathbf{D} . Para o caso dos sólidos deformáveis interessa estudar o campo de deslocamentos e, como tal, obter uma relação constitutiva em função do deslocamento. Neste apêndice será derivada a lei constitutiva para sólidos deformáveis, para a qual será importante considerar alguns resultados obtidos na Secção 2.3. Considere-se duas partículas separadas por elementos de linha $d\xi$, na posição inicial, e $d\mathbf{x}$, na configuração actual (Figura A-1). Se o deslocamento de uma

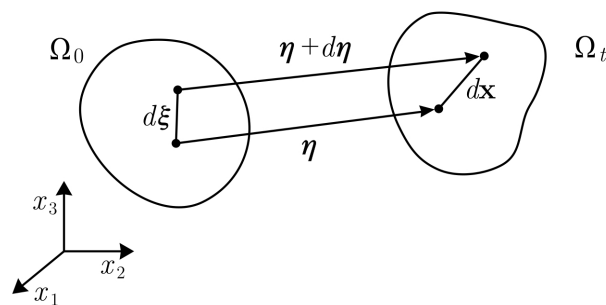


FIGURA A-1: Vector deslocamento.

das partículas é dado pelo campo vectorial $\boldsymbol{\eta}$, o deslocamento da outra é dado

por $\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\eta}$. Desta forma, tem-se que

$$d\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} + d\mathbf{x} \Leftrightarrow d\boldsymbol{\eta} = d\mathbf{x} - d\boldsymbol{\xi}.$$

Para descrever os movimentos e as deformações podem ser usadas várias medidas de deformação. Para o caso de sólidos deformáveis considera-se usualmente, como medida, a diferença entre os quadrados das distâncias entre as partículas durante o movimento, isto é,

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\boldsymbol{\xi})^2 = dx_i dx_i - d\xi_i d\xi_i.$$

Por meio de (2.11) e tendo em conta que $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{\xi}$, tem-se

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x})^2 - (d\boldsymbol{\xi})^2 &= \frac{dx_i}{d\xi_j} d\xi_j \frac{dx_i}{d\xi_k} d\xi_k - d\xi_i d\xi_i \\ &= \left(\frac{dx_i}{d\xi_j} \frac{dx_i}{d\xi_k} - \delta_k^j \right) d\xi_j d\xi_k \\ &= \left[\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} + \delta_j^i \right) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_k} + \delta_k^i \right) - \delta_k^j \right] d\xi_j d\xi_k \\ &= \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_k} \right) d\xi_j d\xi_k. \end{aligned}$$

Por comodidade da exposição que se segue, trocam-se os índices i e k e obtém-se

$$(d\mathbf{x})^2 - (d\boldsymbol{\xi})^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi_i d\xi_j,$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_j} \right). \quad (\text{A-1})$$

Este tensor reflecte as deformações após o movimento e é denominado por tensor das deformações. Para pequenas deformações, os termos ε_{ij} são pequenos quando comparados com a unidade. Assim, os termos não lineares podem ser desprezados e (A-1) pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{\eta} + \nabla \boldsymbol{\eta}^T).$$

Em coordenadas cilíndricas, o tensor das deformações é dado por

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial \eta_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_\theta}{\partial r} - \frac{\eta_\theta}{r} \right) = \varepsilon_{\theta r}, \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\eta_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_\theta}{\partial \theta}, & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_z}{\partial \theta} \right) = \varepsilon_{z\theta}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial \eta_r}{\partial z}, & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial z} + \frac{\partial \eta_z}{\partial r} \right) = \varepsilon_{rz},
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

onde η_r , η_θ e η_z são as componentes do vector deslocamento $\boldsymbol{\eta}$. Ainda em coordenadas cilíndricas, o tensor das tensões de Cauchy pode ser escrito na forma

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

onde o primeiro índice é a direcção da normal à face e o segundo a direcção da componente.

A relação entre as tensões e as deformações na parede da artéria considera-se linear. Além disso, considera-se que a parede tem um comportamento elástico, isto é, não há dissipação de energia durante a deformação. Esta relação, para pequenas deformações, pode ser descrita pela lei de Hooke. Em coordenadas cilíndricas, a lei de Hooke pode ser expressa por

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\beta}^{\alpha}\varepsilon_{\gamma\gamma}, \tag{A-3}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma = r, \theta, z$, e onde μ e λ são as constantes de Lamé. Esta lei é definida nesta forma para materiais isotrópicos e homogéneos. As constantes de Lamé são adequadas para o tratamento matemático destes problemas. No entanto, pode-se recorrer a estudos da Mecânica Elementar que dispõem constantes associadas a medidas experimentais dos materiais. Estas constantes estão relacionadas com as constantes de Lamé e são definidas por

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \\
 \zeta &= \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)},
 \end{aligned}$$

onde E é o módulo de Young e ζ é a razão de Poisson. As constantes de Lamé

podem ser expressas por

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \zeta)}, \quad (\text{A-4})$$

$$\lambda = \frac{\zeta E}{(1 + \zeta)(1 - 2\zeta)}. \quad (\text{A-5})$$

Tendo em conta (A-3), (A-4) e (A-5), a lei de Hooke pode ser escrita na forma

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{(1 + \zeta)} \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta)(1 - 2\zeta)} \delta_{\beta}^{\alpha} \varepsilon_{\gamma\gamma}.$$

Considerando apenas o estado plano de tensão, desprezando, neste caso, as tensões e deformações relativas à coordenada r ($\sigma_{rr} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0$), têm-se as relações seguintes entre as tensões e as deformações:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 + \zeta)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta)(1 - 2\zeta)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \zeta)} \varepsilon_{zz} + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta)(1 - 2\zeta)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{\theta z} = \frac{E}{(1 + \zeta)} \varepsilon_{\theta z}. \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

Somando as tensões principais, e resolvendo a equação obtida em ordem a $(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})$, obtém-se

$$\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{(1 + \zeta)(1 - 2\zeta)}{E(1 + \zeta)(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})}. \quad (\text{A-7})$$

Por substituição de (A-7) em (A-6) e considerando apenas as tensões principais, obtém-se

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 + \zeta^2)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta^2)} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \zeta^2)} \varepsilon_{zz} + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta^2)} \varepsilon_{\theta\theta}. \end{cases}$$

Para o caso particular em que se considera uma secção axial, as tensões circunferenciais são dominantes em relação às longitudinais. Neste caso, usando (A-2), tem-se

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 + \zeta^2)} \left(\frac{\eta_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\zeta E}{(1 + \zeta^2)} \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial z} \right).$$

Admitindo que o deslocamento é apenas radial, tem-se

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 + \zeta^2)} \frac{\eta_r}{r}.$$

Neste caso particular, o deslocamento da parede é dado por $\boldsymbol{\eta} = \eta_r \mathbf{e}_r$ e tomando o raio $r = R_0$ na configuração inicial, as tensões circunferenciais tomam a forma

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1 - \zeta^2} \frac{\eta_r}{R_0}.$$

Aqui, a componente tensorial $\sigma_{\theta\theta}$ é designada no texto principal apenas por σ_θ e a componente η_r é denotada apenas por η .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Seeley, R., Stephens, T. D., Tate, P.: *Anatomy and Physiology*. McGraw-Hill, Boston, 6ª edição, 2003.
- [2] Dias Agudo, F. R.: *Análise Real*, volume II. Escolar Editora, Lisboa, 1990.
- [3] Serrin, J.: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, volume VIII/1, páginas 125–263. Springer-Verlag, 1959.
- [4] Duvaut, G.: *Mécanique des Milieux Continus*. Masson, Paris, 1990.
- [5] Mase, G. T., Mase, G. E.: *Continuum Mechanics for Engineers*. CRC Press, Boca Raton, 2ª edição, 1999.
- [6] Spurk, J. H.: *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlim, 1997.
- [7] Quarteroni, A., Formaggia, L.: *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System*. In *Modelling of Living Systems*, (P. G. Ciarlet and J. L. Lions ed.), Handbook of Numerical Analysis Series 12, páginas 3–127. Elsevier, Amesterdão, 2004.
- [8] Fung, Y. C.: *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag, Nova Iorque, 2ª edição, 1993.