XXIV SIEM Braga, Universidade do Minho, Instituto de Educação
16 e 17 de novembro de 2013

ATAS DO XXIV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Organizadores

José António Fernandes
Maria Helena Martinho
Joana Tinoco
Floriano Viseu

Braga 2013

APM
Associação de Professores
de Matemática

FICHA TÉCNICA

Título

ATAS DO XXIV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Organizadores

José António Fernandes
Maria Helena Martinho
Joana Tinoco
Floriano Viseu

ISBN

978-989-8525-24-6

Associação de Professores de Matemática

Centro de Investigação em Educação
Universidade do Minho

Novembro de 2013

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

A aprendizagem de métodos formais num ambiente combinado de lápis e papel e folha de cálculo

Sandra Nobre[1], *Nélia Amado*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Agrupamento de escolas professor Paula Nogueira, & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com
[2]FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *O nosso objetivo é estudar a aprendizagem de métodos formais na resolução de sistemas de equações, no quadro de uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano, para o que analisamos as representações usadas por duas alunas. Os dados foram recolhidos durante as aulas da experiência de ensino. Os resultados mostram que a experiência informal realizada com a folha de cálculo, nomeadamente, através da identificação de variáveis, tradução de condições e identificação de soluções se mostrou uma abordagem adequada, em especial, para o estudo do método de substituição. No final do estudo, uma das alunas passou a recorrer sistematicamente aos métodos formais enquanto a outra usa com eficácia a folha de cálculo, que prefere em relação aos métodos formais.*

Palavras-chave: Pensamento algébrico; sistemas de equações; métodos formais; representações matemáticas; folha de cálculo.

Introdução

O recurso a métodos formais na resolução de problemas e em outras situações é de grande utilidade pois permite alcançar a solução de uma forma rápida e eficiente. No entanto, é frequente encontrar alunos que, no uso de métodos formais, operam mecanicamente com os símbolos, sem entender o seu significado. Estas dificuldades podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994). Para facilitar a aprendizagem dos alunos é importante envolvê-los em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas. Além disso, a folha de cálculo permite estabelecer relações funcionais bem como conexões com a linguagem algébrica, o que pode levar os alunos a uma compreensão mais significativa desta linguagem. Nesta comunicação analisamos o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no que respeita à aprendizagem de métodos formais no estudo dos sistemas de duas equações a duas incógnitas. Olhamos para as representações utilizadas por duas alunas, procurando verificar como estas serviram de suporte para a aprendizagem de métodos formais.

O pensamento algébrico, representações e métodos formais

O pensamento algébrico envolve o conhecimento de várias formas de representação, incluindo a simbólica, bem como flexibilidade na mudança entre os modos de representação e capacidade de operar com símbolos em contexto e, quando apropriado (Schoenfeld, 2008). Num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se através do uso de expressões simbólicas e equações, em vez de números e operações (Kieran, 2007). No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam a notação algébrica, as formas generalizadas de pensar sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, pode ser considerado algébrico. Ou seja, o uso de simbolismo algébrico deve ser tomado como um indicador do pensamento algébrico, mas a ausência de notação algébrica não deve ser julgada como uma incapacidade para pensar algebricamente (Zazkis & Liljedahl, 2002).

As representações matemáticas produzidas pelos alunos são poderosas ferramentas que constituem uma componente essencial da aprendizagem, possibilitando a organização e a comunicação de ideias. Constituem também um meio para a aprendizagem progressiva de métodos formais, aspeto importante no estudo da Álgebra. A folha de cálculo permite o acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005). O recurso a esta ferramenta na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, por meio de fórmulas, tem consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005).

Friedlander (1998) afirma que

> "a folha de cálculo constrói uma ponte ideal entre a aritmética e a álgebra e permite aos alunos a livre circulação entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjeturas, e estabelecem a equivalência de dois modelos conforme as necessidades intrínsecas e significativas e não como exigências arbitrárias colocadas pelo professor" (p. 383).

No entanto, continua por investigar o alcance da contribuição folha de cálculo para uma compreensão mais ampla dos fundamentos dos métodos formais, em particular de resolução de sistemas de equações.

O estudo dos métodos formais abarca o trabalho com várias representações como a algébrica e a gráfica. Este trabalho com múltiplas representações matemáticas continua a ser um objetivo na aprendizagem da matemática (NCTM, 2000) e tem-se destacado pela sua grande utilidade na resolução de problemas (Kaput 1992; Yerushalmy, 2006). Os métodos formais são eficazes para resolver numerosos problemas, levando os alunos rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem do nível informal ao formal não é fácil para a maioria dos alunos. Além disso, uma vez adquiridos os procedimentos algébricos e os métodos tornados rotineiros, os alunos manifestam uma grande tendência para cometerem erros que não são capazes de identificar nem corrigir (Wagner, 1983). Muitos dos alunos que apresentam um elevado desempenho na aplicação de procedimentos formais revelam frequentemente uma compreensão limitada do seu significado e têm dificuldade em lidar com situações problemáticas. Estes alunos mostram reduzida flexibilidade matemática para adaptar os procedimentos a situações novas, a menos que sejam capazes de relacioná-las com procedimentos informais (Küchemann, 1981).

No ensino básico está previsto o ensino do método de substituição e de resolução gráfica, podendo ainda ser trabalhado o método da adição ordenada. O *método de substituição* assenta no uso da linguagem algébrica onde a ideia de substituição está sempre presente. Filloy, Rojano & Solares (2004) mostram que certos alunos têm dificuldades em resolver problemas com duas incógnitas e manifestam dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual" quando se depararam com duas equações do tipo: $4x-3=y$ e $6x+7=y$; não reconhecendo a transitividade para obter, por exemplo, $4x-3=6x+7$. Uma explicação para esta dificuldade pode residir no facto de os alunos considerarem os y's como sendo diferentes. No *método gráfico* predomina a representação gráfica, podendo também estar envolvidas a representação tabelar e/ou algébrica. O *método da adição ordenada* apoia-se numa linguagem predominantemente algébrica, envolvendo a ideia de substituição.

Metodologia de investigação

O objetivo deste estudo é analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico e compreender como duas alunas do 9.º ano progrediram na aprendizagem de métodos formais de resolução de sistemas de equações.

Atendendo à natureza do estudo segue-se uma abordagem qualitativa seguindo o paradigma interpretativo. A metodologia de experiência de ensino é o *design* adotado, com recurso a estudos de caso. A primeira autora assume, simultaneamente, o papel de professora e investigadora. Analisamos os casos de Ana e de Carolina. Ana é uma aluna de 14 anos, geralmente empenhada e participativa e não manifesta dificuldades a Matemática. Carolina tem 16 anos, é uma aluna muito espontânea, com uma participação e empenho irregular. Ana e Carolina têm vindo a utilizar a folha de cálculo para resolver problemas nas aulas de Matemática como relatado em Nobre, Amado & Carreira (2012).

Na intervenção pedagógica a resolução de problemas assume o papel principal. Foram propostas oito tarefas (Fig.1); umas para serem trabalhadas com lápis e papel e outras, para resolver com recurso à folha de cálculo. Neste caso, os alunos também podem recorrer livremente ao lápis e papel. A tarefa E, em particular, é concebida para explorar parcialmente com a folha de cálculo. Em cada tarefa é criado um momento de discussão e de síntese, procurando-se promover uma ponte entre o trabalho na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico.

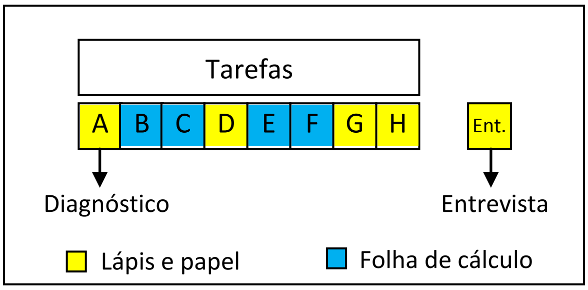

Fig. 1: Tarefas propostas no estudo do tópico

Em sala de aula procedemos à recolha das produções das alunas, em papel e na folha de cálculo e à gravação áudio das aulas. Para o registo detalhado dos processos das alunas na folha de cálculo, utilizámos o *software Camtasia Studio* que nos permite recolher, em simultâneo, os diálogos e a sequência de ecrãs no computador. No final do estudo do tópico foi realizada, a cada uma das alunas, uma entrevista clínica.

Resultados gerais

Nas tabelas 1 e 2 pode observar-se a evolução de Ana e de Carolina, respetivamente, no que respeita às representações utilizadas nas diferentes tarefas e na entrevista.

No trabalho com lápis e papel, as alunas recorrem sempre à linguagem natural. Este tipo de representação é utilizado essencialmente na identificação de incógnitas bem como na explicação dos procedimentos.

Na resolução das tarefas iniciais, por ambas as alunas, as representações no sistema de notação numérico têm uma grande expressão. Para além dos cálculos elementares, utilizam-nas para efetuar cálculos por substituições numéricas. Ana recorre maioritariamente a este tipo de representação, enquanto Carolina usa fortemente o sistema de notação algébrico.

Tabela 1. Percentagem de utilização de representações de Ana por tarefa e na entrevista

	Tarefas/ Representações	A	B	C	D	E	F	G	H	Ent.
Lápis e papel	Linguagem Natural	55			40	25		56	71	53
	Sistema de notação numérico	24			35	6		10	0	7
	Sistema de notação algébrico	18			15	0		31	29	33
	Pictóricas	3			10	0		0	0	0
	Gráficas	0			0	0		3	0	7
Folha de cálculo	Linguagem Natural		25	58		25	43			
	Registo Numérico		50	14		19	29			
	Registo de Fórmulas		25	14		0	14			
	Gráficos		0	0		19	0			
	Formatação condicional /realce		0	14		6	14			

Tabela 2. Percentagem de utilização de representações de Carolina por tarefa e na entrevista

	Tarefas/ Representações	A	B	C	D	E	F*	G	H	Ent.
Lápis e papel	Linguagem natural	61	18		50	30		48	22	38
	Sistema de notação numérico	14	0		5	5		13	0	5
	Sistema de notação algébrico	21	9		35	0		32	67	32
	Pictóricas	4	0		10	0		0	0	0
	Gráficas	0	0		0	0		7	11	5
Folha de cálculo	Linguagem natural		28	49		15				5
	Registo numérico		18	17		15				5
	Registo de fórmulas		18	17		15				5
	Gráficos		0	0		15				0
	Formatação condicional /realce		9	17		5				5

* A Carolina não realizou a tarefa F.

As alunas recorrem esporadicamente a representações pictóricas. Ana utiliza-as em associação com representações no sistema de notação numérico e Carolina utiliza-as ainda em associação com representações no sistema de notação algébrico. No que se refere às representações gráficas, estas são apenas utilizadas nas últimas tarefas e quase sempre quando solicitadas.

Quando recorrem à folha de cálculo, as duas alunas utilizam a linguagem natural para nomear colunas, explicar os procedimentos e apresentar a reposta aos problemas. Por vezes, recorrem ao registo numérico usufruindo da geração automática de sequências com incremento constante ou nulo, em outros casos para inserir fórmulas gerando variáveis-coluna. Quanto às representações gráficas, estas surgem apenas quando solicitadas. Na parte final das resoluções, para procurar ou realçar as soluções, as alunas valem-se do realce colorido ou da formatação automática para colorir as respetivas células.

No que se refere aos métodos formais, destacamos, nas secções seguintes, os principais aspetos do pensamento algébrico que foram desenvolvidos, no percurso de aprendizagem de Ana e de Carolina, em especial no que respeita às representações matemáticas utilizadas.

Uso do método de substituição

A escrita de equações do 1.º grau com duas incógnitas

Problema: Adivinhar o dia de aniversário

A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:

- Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!

Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

Fig. 1: Tarefa B

Ana e a colega iniciam a resolução selecionando as variáveis independentes: dia e mês. Após diversas tentativas, decidem estabelecer relações intermédias: o produto do número correspondente ao dia por 12 e entre o produto do número correspondente ao mês por 30, efetuando depois a sua soma (Fig. 2).

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	12	1	30	42		2	60	72
2	24	1	30	54		2	60	84
3	36	1	30	66		2	60	96
4	48	1	30	78		2	60	108
5	60	1	30	90		2	60	120

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	=1*12	1	=1*30	=D3+F3		2	60	=60+D3
2	=2*12	1	=1*30	=F4+D4		2	60	=J4+D4
3	=3*12	1	=1*30	=F5+D5		2	60	=J5+D5

Fig. 2: Produção de Ana e colega para a Tarefa B

Este procedimento revela-se moroso e as alunas não conseguem concluir a resolução, como reconhece Ana na entrevista.

> Eu é que compliquei… Foi assim professora, este aqui em três colunas conseguimos resolver e eu e a minha colega fomos fazer mês a mês: Janeiro, Fevereiro, Março, Abril… mas depois aqui em Abril e Maio vimos que começava a repetir-se tudo depois baralhamo-nos tanto, aquilo começou a repetir-se os números, tudo, tudo, tudo … depois disso passamo-nos por completo.…

Ana considera que a estratégia selecionada não é a melhor o que as leva a desistir. Por seu lado Carolina, após realizar alguns ensaios, apaga tudo e seleciona um conjunto de células formando um retângulo na folha de cálculo (Fig. 3).

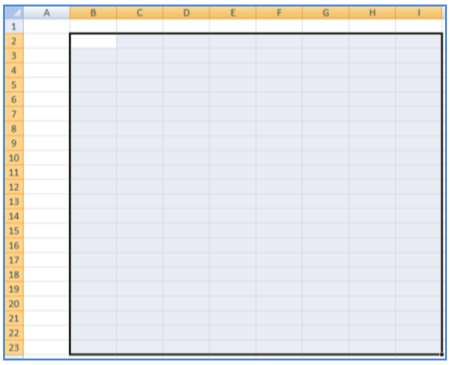

Fig. 3: Ensaio de Carolina

Ao efetuar esta experiência, Carolina provavelmente lembra-se de uma tabela de dupla entrada, feita no estudo de outro tema, e afirma de imediato: “Professora, acho que descobri uma forma! … Já descobri! Sou um génio!” Rapidamente insere numa coluna os números de 1 a 30 e numa linha os números de 1 a 12. No entanto, talvez por insegurança questiona a professora.

> Carolina: Mas agora como é que eu vou fazer a tabela? Uma para os dias e outra para os meses?
>
> Professora: Essa tem muito bom aspeto!

Como reação às palavras de apreço da professora, Carolina tenta multiplicar os números da coluna pelos da linha e lembra-se que tem de colocar um cifrão mas não se recorda de como o fazer, pelo que foi ajudada pela professora. Recorrendo à formatação condicional, obtém as células com o valor 582 realçadas como se pode ver na Fig. 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		DIAS												
2	MÊS	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3		1	42	72	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372
4		2	54	84	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384
5		3	66	96	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396
6		4	78	108	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408
7		5	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420
8		6	102	132	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432
9		7	114	144	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444
10		8	126	156	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456
11		9	138	168	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468
12		10	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480
13		11	162	192	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492
14		12	174	204	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504
15		13	186	216	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516
16		14	198	228	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528
17		15	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540
18		16	222	252	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552
19		17	234	264	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564
20		18	246	276	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576
21		19	258	288	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588
22		20	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600
23		21	282	312	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612
24		22	294	324	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624
25		23	306	336	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636
26		24	318	348	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648
27		25	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660
28		26	342	372	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672
29		27	354	384	414	444	474	504	534	564	594	624	654	684
30		28	366	396	426	456	486	516	546	576	606	636	666	696
31		29	378	408	438	468	498	528	558	588	618	648	678	708
32		30	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720
33		31	402	432	462	492	522	552	582	612	642	672	702	732

	A	B	C	D	E	F
1		DIAS				
2	MÊS	x	1	2	3	4
3		1	`=$B3*12+C$2*30`	`=$B3*12+D$2*30`	`=$B3*12+E$2*30`	`=$B3*12+F$2*30`
4		2	`=$B4*12+C$2*30`	`=$B4*12+D$2*30`	`=$B4*12+E$2*30`	`=$B4*12+F$2*30`

Fig. 4: Produção de Carolina para a Tarefa B

A aluna explica os procedimentos realizados na folha de cálculo e destaca a resposta (Fig. 5).

! RACIOCINIO !
Temos várias hipoteses de resposta, de acordo com o meu
raciocinio expresso ao lado.
Enão na coluna na vertical, coloquei os dias do mês, logo
só temos até dia 31. Na linha na horizontal, coloquei o numero
dos meses do ano, que são apenas 12, logo só temos
numeros até 12.
Depois como a Sofia diz que temos de multiplicar o dia
pelo nrº 12 e o mês pelo nrº 30, vamos por isso mesmo
na fórmula em que ao mesmo tempo colocamos a soma
do resultado dessas multiplicações citadas no enunciado.
Depois dos possiveis rsultados, verificamos que temos
3 hipóteses de resposta. Sendo elas:
> Dia 21 de Novembro;
> Dia 26 de Setembro;
> Dia 31 de Julho.
Logo não descobrimos qual o dia em que a Sofia faz anos !

Fig. 5: Explicação de Carolina para a Tarefa B

Durante a discussão do problema a professora questiona os alunos da turma.

> Professora: Será que nós aqui conseguíamos escrever uma relação entre o 582, o dia e o mês de aniversário?
>
> Carolina: Então, é a fórmula! [Referindo-se a fórmula que ela tinha usado]
>
> Tatiana: Então, é o dia vezes 12 ... e o mês vezes 30…
>
> Carolina: Mais.
>
> Tatiana: Adicionado o mês vezes 30.
>
> Professora: E depois disso?
>
> Alunos: Igual a 582.

Carolina mostra ter percebido a relação entre o trabalho efetuado na folha de cálculo com a equação escrita.

Esta tarefa permite lidar com uma equação linear envolvendo duas incógnitas, o que permite dar sentido às incógnitas numa equação indeterminada e perceber que estas equações podem admitir várias soluções.

A noção de sistema de equações

Problema: O peso das 3 irmãs
O Sr. José tem três filhas muito gulosas: a Alice, a Beta e a Célia. Com a chegada do verão, elas ficaram muito preocupadas com a sua elegância, por causa da praia. Decidiram as três fazer uma dieta e pesar-se regularmente numa balança que o pai tinha no armazém. Quando começaram a dieta, as irmãs pesaram-se, duas a duas, na balança.
A Alice e a Beta pesavam juntas 132 Kg.
A Beta e a Célia pesavam juntas 151 Kg.
A Célia e a Alice pesavam juntas 137 kg.
Qual é o peso de cada uma das filhas do Sr. José?

Fig. 6: Tarefa C

No decorrer da resolução desta tarefa a professora deteta dificuldades na organização dos dados na folha de cálculo, pelo que questiona:

> Professora: Vamos supor que eu arranjo uma coluna para a Alice que é o primeiro nome que vem ali, para o peso da Alice e que a seguir tenho uma coluna para a Beta… Que valores é que eu posso atribuir, por exemplo, à Alice?
>
> Ana: Pode atribuir todos, tem de dar é 132 porque se vai conjugar com a Beta o total tem de ser 132… 1, 2, 3, 4, 5, …
>
> Carolina: Hammm, então não podemos pôr até 130?
>
> Professora: Claro, com certeza… Se a Alice e a Beta pesam 132, o que é que eu posso por aqui para o peso da Beta?

Maria: Aí é 132 a dividir…

Carolina: Nãaaaao!… É aquele menos o peso da Alice… É 132 menos o peso da Alice.

Professora: Então o que é que eu tenho de escrever aqui no computador?

Carolina: É igual a 132 menos o peso da Alice… a célula selecionada.

Professora: Isto é uma ideia para começar a resolver o problema. Agora vejam lá se conseguem estabelecer as outras relações.

Na sequência da intervenção da professora, Ana e Carolina prosseguem com a nomeação de colunas, identificando as restantes variáveis e estabelecendo as relações recorrendo a fórmulas. A coluna "Célia e Alice" serve de controlo para a obtenção da solução. Por fim, as alunas respondem ao problema explicando os procedimentos efetuados na folha de cálculo (Fig. 7 e 8).

Elas pesaram-se duas a duas, então eu consigo tirar algumas conclusões
A Alice é a mais levezinha, pois quando ela se pesa com a Célia e com a Beta, ela fica sempre por volta dos 130 e picos kg.
A Célia é a mais pesada, pois, quando se pesa com a Beta o valor aumenta bastante. Com isto podemos concluir que a Beta está entra ambas.

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	131	20	21
2	130	21	23
3	129	22	25
4	128	23	27
5	127	24	29
54	78	73	127
55	77	74	129
56	76	75	131
57	75	76	133
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139
61	71	80	141

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	=132-D2	=151-E2	=F2+D2
2	=132-D3	=151-E3	=F3+D3
3	=132-D4	=151-E4	=F4+D4
4	=132-D5	=151-E5	=F5+D5
5	=132-D6	=151-E6	=F6+D6

O peso da Alice é 59 kg, o da Beta 73 kg e o da célia 78 kg.
Para resolver este problema, eu fui fazer uma coluna para a Alice, com valores até132 pois era o peso dela em conjunto com a Beta, depois, fiz uma coluna com a Beta e subtrai os valores da coluna 1 a 132, depois fiz uma coluna com a Célia e fiz 151 que é o peso da beta e da célia em conjunto e subtrai pelos valores da coluna da Beta, depois, por ultimo, fui somar os valores da coluna da Alice com os da Coluna da Célia, até obter 137 e depois, consegui obter os pesos das irmãs.

Fig. 7: Produção da Ana para a Tarefa C

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	102	49	79
31	101	50	81
32	100	51	83
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
30	=132-C4	=151-D4	=E4+C4
31	=132-C5	=151-D5	=E5+C5
32	=132-C6	=151-D6	=E6+C6
58	=132-C32	=151-D32	=E32+C32
59	=132-C33	=151-D33	=E33+C33
60	=132-C34	=151-D34	=E34+C34

Resposta	A Alice pesa 59kgs, a Beta pesa 73 kgs e a Célia pesa 78kgs.
Racíocinio	A primeira colkuna representa o peso da alice. Com os numeros normais, acima de 30, porque é obvio que nenhuma
	delas pesaria menos de 30kgs.
	Na segunda coluna o peso da Beta está dependente do peso da Alice, pois no enunciad só nos dãoo os pesos são das 2 juntas.
	Então, coloquei os 132 kgs, menos o peso da Alice.
	Na terceira coluna o pesoda Alice está relacionado também com o peso da Beta. Pois no enunciado só nos dão
	os pesos das 2 irmãs juntas, pesando elas 151.
	Então, coloquei os 151 kgs menos o peso da Beta.
	Na quarta coluna e por fim coloquei os pesos da Célia e da Alice somados, e procurei os 137kgs, que nos dão no enunciado como
	sendo o peso das 2 irmãs.
	Foi então que encontrei por fim os pesos das três irmãs.

Fig. 8: Produção de Carolina para a Tarefa C

Na discussão em sala de aula, a professora apela à escrita em linguagem algébrica das relações presentes no problema e à medida que os alunos as escrevem, registas-as no quadro (Fig. 9).

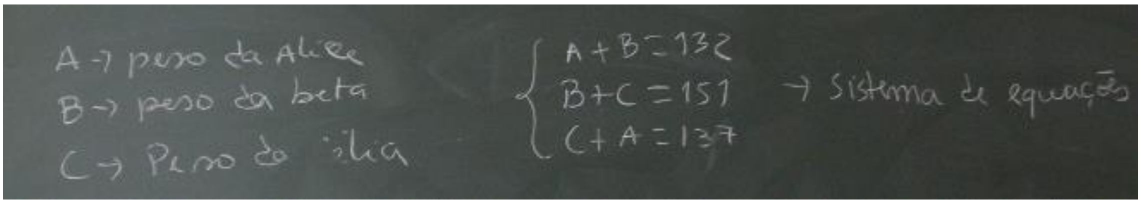

Fig. 9: O sistema de equações

Desta discussão surge o termo “sistema de equações”.

> Professora: O que está escrito no quadro são três condições que têm de ser cumpridas neste problema… E têm de ser cumpridas em simultâneo. A este conjunto de equações nós chamamos um sistema de equações. Neste caso temos um sistema de 3 equações com 3 incógnitas.

Quando questionada, na entrevista, acerca das aprendizagens realizadas com a folha de cálculo nestes dois problemas, Ana afirma: “Aprendi a usar melhor o Excel, aprendi formas mais claras de mostrar o raciocínio…”. Nesta afirmação, Ana mostra o contributo da folha de cálculo na expressão do seu raciocínio. Por seu lado, Carolina refere “…o que é que eu aprendi? Sei lá… Isto era introdução aos sistemas…” revelando ter dado pouca importância a esta tarefa.

A ideia de substituição de variáveis usando papel e lápis

A tarefa D foi concebida com o objetivo de abordar a noção de substituição, com lápis e papel, apresentado um conjunto de quatro situações como a que surge na Fig. 10.

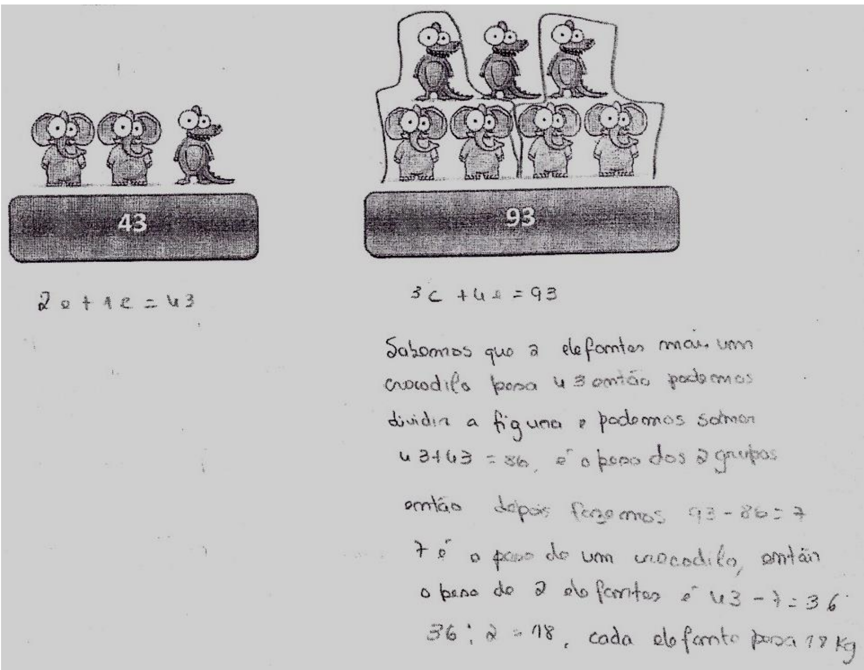

Fig. 10: Produção de Ana para a situação 2 da Tarefa D

Ana traduz as relações para equações, mas não as usa, optando por traçar uma linha a delimitar um grupo de animais (Fig.10). Neste procedimento utiliza a informação fornecida pela primeira imagem e cria dois conjuntos, o que lhe permitem descobri de imediato o valor de uma das incógnitas. Em seguida, substitui esse valor na informação da primeira imagem e obtém, através de uma estratégia *unwind* o valor do elefante, ou seja, o valor da outra incógnita. Ana não utiliza a linguagem algébrica mas este processo revela a compreensão da ideia de substituição, fundamental neste método. Por seu lado, Carolina representa o valor de cada animal por uma letra e escreve as equações correspondentes (Fig. 11). Tal como Ana, Carolina também delineia os dois grupos na segunda imagem encontrando assim os valores das incógnitas.

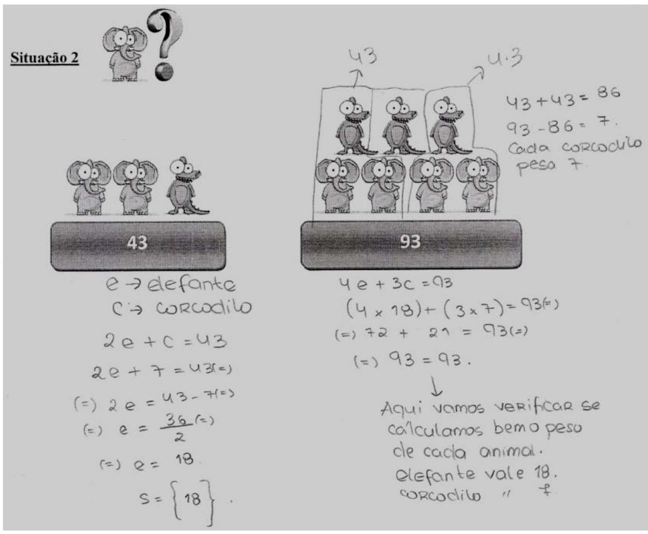

Fig. 11: Produção de Carolina para a situação 2 da Tarefa D

Em ambos os casos, as substituições efetuadas correspondem ao que se faz formalmente no método de substituição (Fig. 12).

$$\begin{cases}2e+c=43\\4e+3c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\\boxed{(2e+c)+(2e+c)}+c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\\boxed{43+43}+c=93\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+c=43\\c=93-86\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e+\boxed{7}=43\\c=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e=18\\c=7\end{cases}$$

Os dois grupos formados por dois elefantes e um crocodilo, cada um.

Substituição pelo valor obtido da primeira imagem

Substituição pelo valor obtido da segunda imagem

Fig. 12: Resolução formal da situação 2 proposta na Tarefa D

Da folha de cálculo para o método formal de substituição

O problema "galinhas e coelhos"

Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo são 212 cabeças e 700 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Fig. 13: Tarefa F

Na resolução desta tarefa Ana começa por escolher como variável independente, o número de coelhos, e estabelece as relações entre esta e as outras variáveis. Utiliza a coluna “Soma das patas" para controlo (Fig. 14).

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	4	422	426
2	210	212	8	420	428
3	209	212	12	418	430
4	208	212	16	416	432
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7
137	75	212	=F140*4	=G140*2	=L140+K140
138	74	212	=F141*4	=G141*2	=L141+K141
139	73	212	=F142*4	=G142*2	=L142+K142

Fig. 14: Produção de Ana para a Tarefa F

Ana apresenta a sua resolução à turma e a tradução algébrica foi feita a partir do diálogo entre a professora e os alunos. O objetivo foi relacionar o trabalho na folha de cálculo com o método de substituição (Fig. 15).

F	G	I	J	K	L	N
Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças		Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212		=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212		=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212		=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212		=F7*4	=G7*2	=L7+K7

136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

$$\begin{cases}\boxed{g=212-c}\\\boxed{4c+2g=700}\end{cases} \qquad \begin{cases}\\4c+2\boxed{(212-c)}=700\end{cases} \qquad \begin{cases}g=212-138\\c=138\end{cases} \qquad \begin{cases}\boxed{g=74}\\c=138\end{cases}$$

Fig. 15: A tradução da folha de cálculo para lápis e papel da produção de Ana

Esta correspondência serve de base para começar a resolver os sistemas pelo método formal de substituição. A professora explica aos alunos que na resolução de sistemas, pelo método de substituição, quando, em qualquer passo, uma equação não é transformada, ou volta-se a escrevê-la ou coloca-se um traço horizontal.

A tarefa G envolve a resolução de diversos problemas e exercícios. Para Ana "foi muito importante professora, porque quando eu comecei a resolver esta ficha, eu não conseguia resolver sistemas com fluência…". Questionada acerca do que significa resolver com fluência, explica: "é saber resolver. Sabe? Assim rápido sem pensar e demorar muito tempo". De modo semelhante, Carolina refere "eu já sabia isso praticamente. Para mim foi mais treinar as equações que é preciso treinar muito, mas já é fácil, muito fácil!" Ambas as alunas reconhecem nesta tarefa importância para resolverem com maior rapidez sistemas de equações, em particular pelo método de substituição, como confessam.

Uso do método gráfico

Problema: A corrida de cavalos

O Russo e o Relinchão são dois cavalos que participam numa corrida de 2400 metros. O Russo teve um bónus de 140 metros e partiu com esse avanço em relação ao relinchão. O Russo correu a uma velocidade de 11m/s e o Relinchão a 14m/s.

Qual dos dois cavalos ganhou a corrida?

Fig. 16: Tarefa E

Ana seleciona o tempo como variável independente e a distância percorrida por cada um dos cavalos como variáveis dependentes. Esta aluna opta por gerar sequências numéricas, com incremento fixo (Fig. 17).

tempo (s)	Relinchão	Russo
0	0	140
1	14	151
2	28	162
3	42	173

170	2380	2010
171	2394	2021
172	2408	2032
173	2422	2043

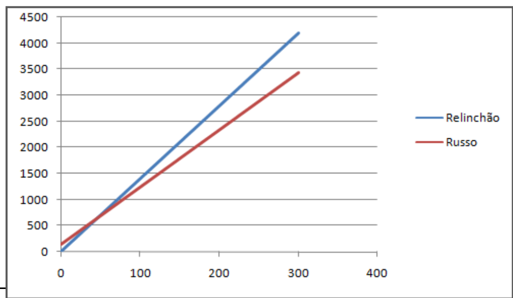

Fig. 17: Produção de Ana para a primeira situação da Tarefa E

Tal como foi solicitado noutra questão, Ana faz a representação gráfica com a relação entre o tempo e a distância percorrida por cada cavalo. Carolina, segue um procedimento similar ao de Ana, embora utilizando fórmulas para explicitar as relações entre tempo e distância (Fig. 18).

Tempo (s)	Russo	Relinchão
1	140	0
2	=B3+11	=C3+14
3	=B4+11	=C4+14
172	=B173+11	=C173+14
173	=B174+11	=C174+14

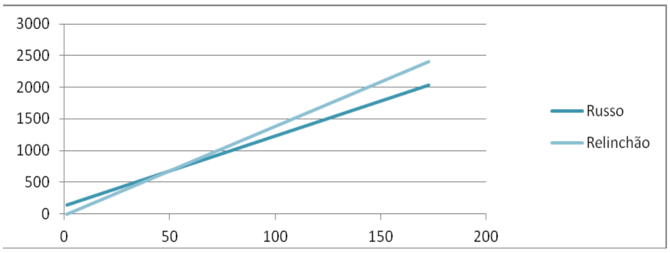

Fig. 18: Produção de Carolina para a primeira situação da Tarefa E

Carolina ao considerar para instante inicial 1 segundo não obtém a resposta correta.

Ambas seguem os procedimentos adotados inicialmente nas duas situações seguintes, em que os cavalos corriam à mesma velocidade, numa delas seguindo Russo com avanço e, por fim, sem qualquer avanço (Fig. 19 e 20).

tempo	Relinchão	Russo
0	14	140
1	28	154
2	42	168
3	56	182
4	70	196
5	84	210
6	98	224
7	112	238
8	126	252
9	140	266
10	154	280

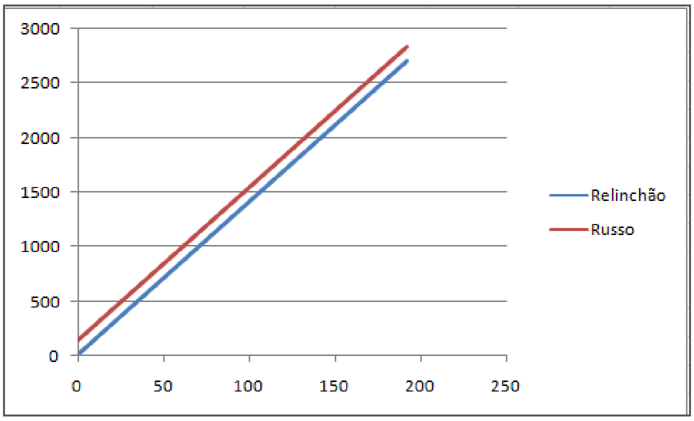

Fig. 19: Produção de Ana para a segunda situação da Tarefa E

Temp	Russo	Relinchão
1	0	0
2	=C3+11	=D3+11
3	=C4+11	=D4+11
219	=C220+11	=D220+11
220	=C221+11	=D221+11

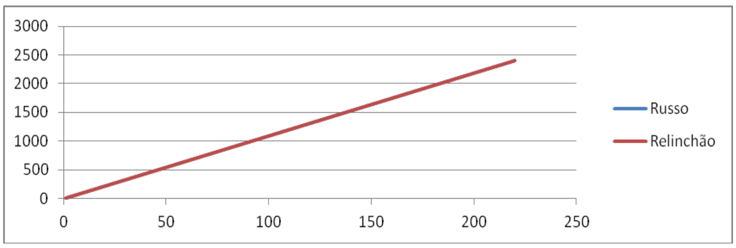

Fig. 20: Produção de Carolina para a terceira situação da Tarefa E

Após a discussão, os alunos escrevem a equação que representa a distância percorrida por cada um dos cavalos e cada um dos sistemas associado à situação foi classificado. Na entrevista, Ana reconhece a importância desta tarefa na aprendizagem do método gráfico "Foi daí que obtivemos os gráficos para aprender a resolver sistemas graficamente". Carolina confessou na entrevista não se recordar da tarefa, reconhecendo não ter estado muito atenta. Apesar de descrever corretamente as três situações, é durante a entrevista que percebe a importância da tarefa para a compreensão da classificação de sistemas.

> Carolina: Agora é que eu estou a perceber porque é que a professora fez isto!
>
> Professora: O que é que aprendeste com esta tarefa?
>
> Carolina: Aprendemos gráficos [risos] que representam as diferentes equações, os diferentes… como é que se diz?…Tipos de sistemas de equações.

Uso do método da adição ordenada

A abordagem a este método surgiu de uma resolução de Carolina a uma situação proposta na tarefa D (Fig. 21).

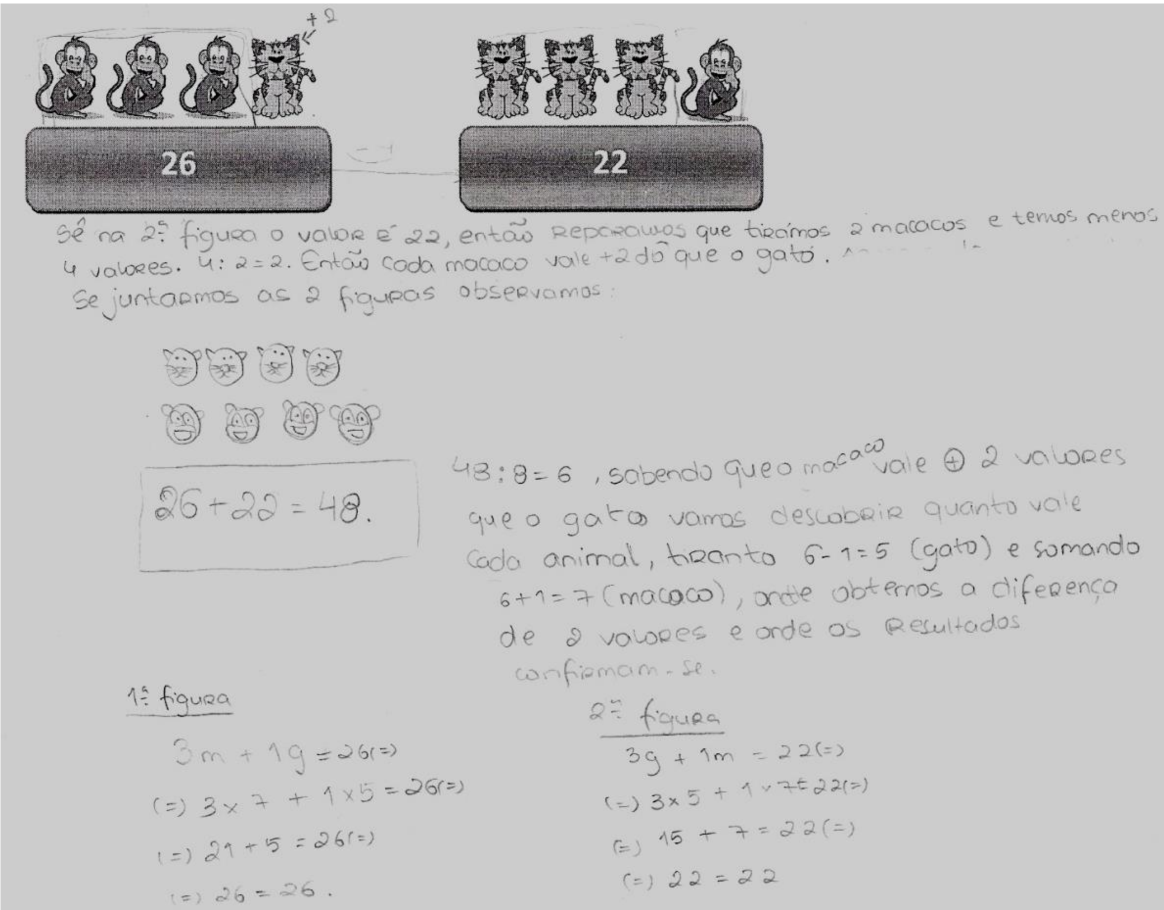

Fig. 21: Produção de Carolina para a situação 4 da Tarefa D

Carolina apresenta a sua resolução aos colegas.

> Carolina: Aqui temos 3 macacos e aqui temos 3 gatos e um macaco. Aqui tirámos estes macacos mas ficámos com este, não é? Não é?
>
> Vários alunos: Sim.

Carolina: Então quer dizer que aqui está uma diferença de 4, então quer dizer que cada macaquinho é mais 2 do que os gatos.

Patrícia: ya.

Professora: E depois a partir daí? Já chegámos à conclusão que o macaco tem que valer mais 2 do que o gato. E a partir daqui como fizeste?

Carolina: Estes são os gatos… estes são os macacos.

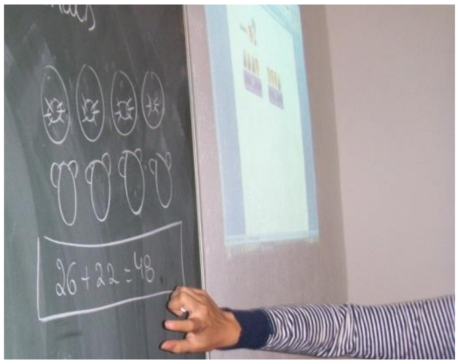

Fig. 22: Carolina a explicar a sua resolução

Tatiana: Eles todos juntos pesam o quê?

Carolina: Pesam os 26 mais os 22 que é 48.

Tatiana: ya!

Carolina: Então eu depois dividi os 48 pelos 8 animais, não é?… que dá 6, quer dizer se eles fossem, valessem todos a mesma coisa, valiam 6 cada um mas como a gente sabe os macacos pesam mais 2 então tiramos 1 dos 6 que é o valor dos gatos e fica 5 e somamos 1 aos 6 que é os macacos e fica 7 que é aquilo que vocês já disseram no início e depois a gente vai escrever as expressões… as….

Ana: O sistema de equações!

Carolina: O sistema de equações e verificamos que a resposta está certa.

A explicação da aluna serve de suporte para a professora formalizar o método de adição ordenada, com recurso ao simbolismo algébrico.

Ana recorre à tentativa e erro por não ser tão evidente o estabelecimento de relações entre as informações presentes nas imagens, como refere na entrevista, dando evidências de ter aprendido o método de adição ordenada:

> Mas nestas aqui [referindo-se às três situações anteriores] conhecíamos a relação, só tínhamos um animal e nas outras dá para fazer conjuntos e obter o mesmo valor que estes… e no 4 já não dá porque como temos 3 macacos e 1 gato e aqui só tenho um gato e não tenho 3 macacos e estão ao contrário... isto aqui dá para fazer com… aquela soma 4 macacos e 4 gatos é igual a…26 mais 22 que dá 48, depois dividia… um gato e um macaco, dá 48 a dividir por 4 e depois o valor que me dava era de 1 gato e de 1 macaco…

Na entrevista, são propostos dois problemas, para além de outros tipos de tarefas. Para a resolução dos problemas, Ana recorre ao método de substituição para resolver um deles e ao gráfico para resolver o outro.

Carolina, por seu lado, opta por recorrer em primeiro lugar à folha de cálculo.

Professora: Porque é que tu escolheste… decidiste assim de repente ir para o Excel?

> Carolina: Ai mãe!… No teste é que vai ser bonito não o tenho… Se tivéssemos o Excel em todo o lado… já é mais fácil e já estou mais habituada ao Excel… porque ele pensa por mim, inspira-me…é mais fácil, não é preciso a gente estar a ir à calculadora... sei lá… é inspiração professora!

Carolina demonstra assim grande apreço pela folha de cálculo na resolução de problemas. Em seguida, a professora pede a Carolina para resolver o mesmo problema com lápis e papel. A aluna escreve o sistema e resolve-o através do método de substituição mas em momento algum relaciona esta nova resolução com a anterior realizada na folha de cálculo.

> Carolina: Foi fácil, foi fácil e ali [referindo-se à folha de cálculo] não sei como é que eu fiz aquilo ali…
>
> Professora: Então?
>
> Carolina: Sei lá, às vezes parece que não sou eu que penso…

Neste diálogo a aluna volta a destacar a importância que atribui à folha de cálculo como uma alternativa a um método formal.

No enunciado do segundo problema foram apresentadas duas equações que descrevem as rotas de dois cruzeiros e pretende-se saber se existe algum ponto comum às duas rotas. Carolina resolve este problema utilizando o método de substituição mas no final admite não ter escolhido o melhor método.

> Carolina: … Eu fui parva! Podia ter feito… resolvido em ordem a *y*… é verdade! Fui mesmo parva!
>
> Professora: Estavas a falar em ordem a *y*. Era o quê?
>
> Carolina: Era para fazer o gráfico e depois no gráfico a gente fazia as tabelas…

A aluna resolve depois o problema utilizando o método gráfico, revelando dificuldade em escolher uma escala adequada para fazer a representação gráfica. Confirma, por fim, que as soluções obtidas através dos dois métodos coincidem.

Conclusão

As tarefas apresentadas no estudo dos sistemas de equações permitiram às alunas uma aprendizagem gradual de métodos formais a partir de experiências informais. Num primeiro momento, Ana apesar de não recorrer muito à linguagem algébrica, não fica inibida de desenvolver o pensamento algébrico. Tal como referem Haspekian (2005) e Friedlander (1998), a folha de cálculo apoiou o percurso das alunas na transição da Aritmética para a Álgebra. Mostrou também ser uma ferramenta útil na resolução de problemas, proporcionando um ambiente sem o constrangimento do uso de simbolismo algébrico.

Na aprendizagem do método de substituição, as alunas começaram por desenvolver a compreensão da escrita de relações, recorrendo inicialmente a uma linguagem mais aritmética depois ao ambiente híbrido da folha de cálculo e, por fim, usando a linguagem algébrica chegaram, com a intervenção da professora, à noção de sistema de equações. A ideia de substituição, em que geralmente os alunos apresentam dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004), acabou por surgir naturalmente tendo sido formalizada na articulação entre o trabalho na folha de cálculo e com papel e lápis. A folha de cálculo destaca-se, em particular, na aprendizagem deste método pela proximidade entre os procedimentos típicos para resolver os problemas neste ambiente e o método formal com lápis e papel, permitindo assim uma melhor compreensão da sequência de passos envolvidos. A folha de cálculo foi igualmente útil no método gráfico por permitir rapidamente a visualização da representação gráfica, possibilitado a comparação entre diferentes situações. Contudo, esta abordagem revelou-se insuficiente pois Carolina já não se recordava dos procedimentos para efetuar a representação gráfica com lápis e papel. As alunas raramente recorreram a este método na resolução das tarefas. Finalmente, o método da adição ordenada foi o menos trabalhado. Apenas Carolina recorreu a este método na resolução de uma tarefa. No entanto, quando na entrevista revisitámos as tarefas realizadas ao longo do estudo dos sistemas, ambas as alunas mostraram saber utilizá-lo.

A partir do momento que aprendeu os métodos formais, Ana começou a utilizá-los preferencialmente. Carolina apesar de conhecer e saber utilizar os métodos formais, encara a folha de cálculo como uma alternativa com muitas potencialidades na resolução de problemas, que apresenta a vantagem de a libertar dos cálculos e lhe fornece inspiração para as resoluções. O tempo despendido numa fase informal de aprendizagem dos métodos formais parece ter sido suficiente para as alunas os compreenderem, como defendem Herscovics & Lincheviski (1994). Além disso, a nossa preocupação no estabelecimento de relações entre os métodos informais e formais (Küchemann, 1981), parece ter proporcionado flexibilidade matemática na resolução de situações novas.

Referências

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of PME 28* (Vol. 2, pp. 391-398). Bergen University College.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, *91*(50), 382-383.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59–78.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16(1), pp. 5-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (pp. 102-119). London: Murray.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nobre, S., Amado, N. & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, 31, 11-19.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479-510). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474- 479.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 356–387.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Agradecimento

Este trabalho é parcialmente financiado pelo Projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 – "Resolução de Problemas de Matemática: perspetivas sobre uma competição interativa na web - Sub12&Sub14", e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/69917/2010, da FCT.