

NICOLE BOTA DOS SANTOS

**ESTRATÉGIAS PARA DETERMINAR A ÁREA DE
UMA SUPERFÍCIE IRREGULAR NO 2.º CICLO DO
ENSINO BÁSICO**



UNIVERSIDADE DO ALGARVE
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO

2023

NICOLE BOTA DOS SANTOS

**ESTRATÉGIAS PARA DETERMINAR A ÁREA DE
UMA SUPERFÍCIE IRREGULAR NO 2.º CICLO DO
ENSINO BÁSICO**

**Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e
Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico**

**Trabalho efetuado sob a orientação de:
Doutor António Manuel da Conceição Guerreiro**



UNIVERSIDADE DO ALGARVE
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO

2023

Estratégias para determinar a área de uma superfície irregular no 2.º ciclo do ensino básico

Declaração de autoria do trabalho

Declaro ser o autor deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Copyright

Nicole Bota dos Santos

A Universidade do Algarve tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

O meu percurso académico foi marcado por inúmeras conquistas, superações e pequenos grandes sucessos, que juntos contribuíram para a conclusão deste capítulo importantíssimo, tanto a nível pessoal como a nível profissional. Os últimos cinco anos, de licenciatura e mestrado, foram marcados por pessoas que me motivaram, influenciaram e inspiraram a alcançar esta etapa final, e é a todas essas pessoas que desejo manifestar o meu mais sincero agradecimento:

Ao professor doutor António Guerreiro, não só por toda a orientação para a realização do presente relatório, como pelo voto de confiança e motivação em mim depositados, pela vasta disponibilidade de ajuda e auxílio e, de igual forma, ao longo de todo o mestrado.

A todos os docentes da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve com quem me cruzei ao longo da realização da licenciatura e do mestrado. De certa forma, todos marcaram o meu percurso académico, tornando-o progressivamente mais rico, munindo-me de ferramentas e métodos, que indubitavelmente irão impactar o meu futuro profissional como professora.

Às professoras cooperantes, que se disponibilizaram para me receber nas suas salas de aula, realizando um trabalho e um acompanhamento extraordinário ao longo da realização da Prática de Ensino Supervisionada (PES), que me marcou pela positiva tanto a nível profissional como pessoal.

Às minhas queridas colegas de curso Joana, Sabrina e Catarina B., por todos os momentos de alegria, amizade, ajuda e motivação. Sem vocês os últimos cinco anos não teriam sido tão extraordinários e magníficos. De colegas de curso a melhores amigas.

Às colegas de mestrado Catarina G. e Marisa, por todo o apoio e cooperação nesta reta final. A vossa companhia tornou esta fase muito mais completa e memorável.

Às afilhadas que a universidade me deu, Beatriz R., Beatriz M. e Marta, por todos os momentos de festa, diversão, de companhia e convívio que me proporcionaram. Irei ficar eternamente agradecida por me escolherem como madrinha.

À minha família, Mãe, Pai, Avó Alda e Avô Vital, por todo o apoio incondicional, pelo incentivo à continuação da minha formação profissional, e pelo carinho, compromisso e preocupação, que me tornaram naquilo que hoje sou.

Aos meus amigos da vida, Jordana, Daniela, Ana, Marlene, Vanessa, David, Luís, entre outros, especialmente por toda a amizade construída, por me proporcionarem momentos de convívio e de diversão, que tornaram esta etapa mais leve e descomplicada, e por estarem sempre presentes quando eu mais preciso.

Ao Pedro, por me ter apoiado incondicionalmente nesta fase da minha vida, por estar do meu lado tanto nos momentos bons como nos maus, por acreditar em mim em tudo aquilo que eu sou capaz, por me proporcionar momentos de alegria, diversão e de companheirismo, por ser o meu melhor amigo e por suportar com o maior carinho e amor todos os meus caprichos e desvaneios.

Não seria quem hoje sou, sem a presença e o contributo destas pessoas.

A todos, um enorme Obrigada!

Resumo

A aprendizagem dos conteúdos de Geometria e Medida, particularidade a medição de áreas, está fortemente marcada no ensino básico pela sua abordagem apenas em figuras geométricas planas e regulares e pela introdução de fórmulas para o seu cálculo sem a atribuição de qualquer significado, o que geralmente resulta em inúmeras dificuldades relacionadas com o entendimento conceptual deste conteúdo.

Tendo em consideração a problemática levantada, definiu-se como objetivo principal de investigação analisar quais as estratégias que os alunos definem para medir a área de uma superfície irregular, tal como a folha de uma árvore, num contexto de conexão externa com o mundo real. O estudo apresenta como questão geral de investigação: Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinarem a área de uma superfície irregular?

O estudo foi realizado numa turma do 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, composta por um total de 21 alunos, com idades compreendidas entre os 11 e os 12 anos, numa escola do concelho de Loulé. De acordo com a questão de investigação e os objetivos definidos, utilizou-se para a realização do estudo uma metodologia de carácter qualitativo, englobando procedimentos metodológicos próximos dos da investigação-ação. Os instrumentos de recolha de dados foram: (i) as observações diretas, com registos áudios e fotográficos, e (ii) a análise documental das produções dos alunos.

Através da análise dos resultados obtidos, foi possível identificar cinco estratégias utilizadas pelos alunos para a medição da área numa superfície irregular: (i) subdividir; (ii) quantificar; (iii) estruturar espacialmente; (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas. Mediante os resultados de cada grupo, verificou-se que quantas mais estratégias aplicadas para medir a área de uma superfície irregular, maior é a complexidade de raciocínio utilizado para realizar tal medição.

Palavras-chave: 2.º ciclo do ensino básico; matemática; superfície irregular; área; conexões internas e externas.

Abstract

The learning of Geometry and Measurement contents, particularly the measurement of areas, is strongly marked in primary schools by its approach only in plane and regular geometric figures and by the introduction of formulas for its calculation without the attribution of any meaning, which usually results in numerous difficulties related to the conceptual understanding of this content.

Considering the problem raised, it was defined as the main research objective to analyse which strategies students define to measure the area of an irregular surface, such as the leaf of a tree, in a context of external connection with the real world. The study presents as general research question: What are the strategies developed by students of the 2nd cycle of basic education to determine the area of an irregular surface?

The study was carried out in a 6th grade class of the 2nd cycle of basic education, composed of a total of 21 students, aged between 11 and 12, in a school in the municipality of Loulé. In accordance with the research question and objectives defined, a qualitative methodology was used to conduct the study, encompassing methodological procedures close to those of action research. The data collection instruments were: (i) direct observations, with audio and photographic records, and (ii) documentary analysis of the students' productions.

Through the analysis of the results obtained, it was possible to identify five strategies used by students for the measurement of the area on an irregular surface: (i) subdivide; (ii) quantify; (iii) structure spatially; (iv) frame regular geometric figures; and (v) apply formulas. Through the results of each group, it was found that the more strategies applied to measure the area of an irregular surface, the greater the complexity of reasoning used to perform such measurement.

Keywords: 2nd cycle of basic education; mathematics; irregular surface; area; internal and external connections.

Índice

Agradecimentos.....	iv
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
Índice.....	viii
Índice de figuras.....	ix
Índice de tabelas.....	xi
Índice de gráficos	xi
Introdução	13
Capítulo I – Enquadramento teórico	15
Enquadramento curricular no ensino básico	15
As conexões internas e externas da matemática.....	18
Definição conceptual de área de uma superfície plana.....	21
Capítulo II – Enquadramento metodológico	25
Natureza do Design e questões de Investigação.....	25
Participantes e Contexto Educativo	26
Ensino Exploratório e Intervenção Educativa	28
Instrumentos de Recolha e Análise de Dados.....	31
Ética do Estudo	31
Capítulo III – Análise e Discussão dos Resultados	33
Influência da área da recolha de energia solar.....	33
Cálculo da área de um Painel Solar	44
Medição da área de superfície da folha de uma árvore.....	50
Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore.....	73
Estratégias e dificuldades dos alunos	93
Considerações finais	95
Referências Bibliográficas	98

Índice de figuras

Figura 3.1 – Fundamentação da Mariana	35
Figura 3.2 – Fundamentação do David.....	35
Figura 3.3 – Fundamentação do Pedro	35
Figura 3.4 – Fundamentação do Rúben	36
Figura 3.5 – Fundamentação do Hugo.....	36
Figura 3.6 – Fundamentação do Gabriel	36
Figura 3.7 – Fundamentação da Joana.....	37
Figura 3.8 – Tabela de registos do Gonçalo	39
Figura 3.9 – Tabela de registos do Gabriel.....	40
Figura 3.10 – Tabela de registos do David.....	40
Figura 3.11 – Tabela de registos da Joana.....	40
Figura 3.12 – Tabela de registos do Rafael	41
Figura 3.13 – Tabuleiro 1 [direita]; Tabuleiro 2 [esquerda].....	43
Figura 3.14 – Conclusão do Rafael	43
Figura 3.15 – Conclusão da Mariana.....	43
Figura 3.16 – Conclusão do Pedro.....	43
Figura 3.17 – Conclusão da Joana	44
Figura 3.18 – Conclusão do Afonso	44
Figura 3.19 – Cálculos corretos com unidades de medida	48
Figura 3.20 – Cálculos corretos sem unidades de medida.....	48
Figura 3.21 – Cálculos corretos, com colocação incorreta das unidades de medida (vermelho)	48
Figura 3.22 – Cálculos incorretos.....	49
Figura 3.23 – Registo em folha de papel milimétrico pelo grupo 1	53
Figura 3.24 – Registo do João	55
Figura 3.25 – Registo do Pedro	55

Figura 3.26 – Registo da Mariana	56
Figura 3.27 – Registo dos cálculos do Pedro	57
Figura 3.28 – Registo em folha de papel milimétrico pelo grupo 2	59
Figura 3.29 – Registos do Afonso	61
Figura 3.30 – Registos do David	61
Figura 3.31 – Registos da Joana	61
Figura 3.32 – Registos da Marlene.....	62
Figura 3.33 – Resposta final do grupo 2.....	62
Figura 3.34 – Registo dos cálculos do João	65
Figura 3.35 – Registo descritivo do João	65
Figura 3.36 – Esquema figurativo do raciocínio do grupo 3	66
Figura 3.37 – Registo em papel milimétrico pelo grupo 3	67
Figura 3.38 – Correção do grupo 3.....	68
Figura 3.39 – Registo na folha de papel milimétrico pelo grupo 4	70
Figura 3.40 – Registo do Hugo.....	71
Figura 3.41 – Registo do Gabriel	72
Figura 3.42 – Registo da Sabrina.....	72
Figura 3.43 – Resultado do grupo 4	73
Figura 3.44 – Tabela de registos do grupo 1	75
Figura 3.45 – Cálculos do grupo 1	78
Figura 3.46 – Tabela de registos do grupo 2	78
Figura 3.47 – Cálculos do grupo 2	84
Figura 3.48 – Tabela de registos do grupo 3	85
Figura 3.49 – Cálculos do grupo 3	88
Figura 3.50 – Tabela de registos do grupo 4	89
Figura 3.51 – Cálculos do grupo 4	92

Índice de tabelas

Tabela 2.1 – Organização da sequência didática.....	28
---	----

Índice de gráficos

Gráfico 3.1 – Distribuição das opções dos alunos.....	35
---	----

Gráfico 3.2 – Distribuição das classificações dos cálculos dos alunos	49
---	----

Lista de abreviaturas

PES	Prática de Ensino Supervisionada
CEB	Ciclo(s) do Ensino Básico
TCM	<i>Teaching Children Mathematics</i>
NCTM	<i>National Council of Teachers of Mathematics</i>
PASEO	Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória
AE	Aprendizagens Essenciais
DGE	Direção-Geral da Educação
ME	Ministério da Educação
NEE	Necessidades Educativas Especiais
PEA	Perturbação do Espectro do Autismo

Introdução

O presente relatório de investigação foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada (PES), integrada no plano de estudos do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico, da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve.

É intuito deste relatório a realização, aplicação e reflexão de um estudo empírico, que visa analisar as estratégias dos alunos para determinar a área de uma superfície irregular no 2.º ciclo do ensino básico. Este estudo decorreu durante o ano letivo de 2022/2023, com vinte e um participantes de uma turma do sexto ano, numa escola do concelho de Loulé.

A temática de investigação supramencionada, resultou da valorização das conexões externas entre a matemática e as ciências naturais, mais concretamente o estudo da medição de áreas em superfícies regulares, nomeadamente nos painéis solares, e em superfícies irregulares, nas folhas de uma árvore, realizando, simultaneamente, uma correlação direta entre a área de superfície total de ambas com a área de captação solar.

O plano de intervenção educativa foi realizado tendo em consideração uma perspetiva de valorização pelo ensino exploratório, como ferramenta de ensino na educação matemática. O ensino exploratório da matemática apresenta quatro fases na sua concretização: (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; (iii) discussão da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Guerreiro et al., 2015).

As tarefas propostas na aplicação do estudo do presente relatório foram adaptadas de um artigo denominado “Sun Catchers”, da autoria de Isabelle e Bell (2007), presente na revista científica *Teaching Children Mathematics* (TCM), publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Esta revista é a revista oficial do NCTM e tem como objetivo ser um recurso para estudantes, professores e formadores na área da educação, centrando-se em investigações na área da matemática com especial enfoque nas práticas educativas.

A estrutura organizativa do presente documento contempla, para além desta introdução, três capítulos e as considerações finais. O primeiro capítulo corresponde ao

enquadramento teórico, baseado numa revisão da literatura com vista a fundamentação do estudo. O segundo capítulo expõe o enquadramento metodológico, em que é apresentada a questão de investigação, a caracterização dos participantes do estudo e do seu respetivo contexto educativo, o plano de intervenção educativa, e os respetivos instrumentos de recolha e análise de dados. A apresentação, análise e discussão dos resultados obtidos são evidenciados no terceiro capítulo. É importante salientar que todos os dados apresentados neste último capítulo respeitam a ética de privacidade dos participantes no estudo. Por último, é apresentada, nas considerações finais, uma reflexão, detentora, não só de uma análise aos resultados do estudo aplicado, como também uma apreciação crítica a todo o processo de desenvolvimento de competências a nível profissional e de crescimento pessoal.

Capítulo I – Enquadramento teórico

Este capítulo apresenta o enquadramento teórico, baseado numa revisão da literatura, tendo em consideração o objetivo da presente investigação, que consiste na análise das estratégias que os alunos utilizam para determinar a área de uma superfície irregular no 2.º ciclo do ensino básico, num contexto real de conexões internas e externas da matemática.

Enquadramento curricular no ensino básico

O ensino da Matemática está presente em todo o currículo do ensino obrigatório português, nomeadamente no ensino dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino básico e ensino secundário. O currículo do ensino básico e do ensino secundário é definido por dois documentos orientadores, sendo estes o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) e as Aprendizagens Essenciais (AE).

O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO), homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho, afirma-se como “referencial para as decisões a adotar por decisores e atores educativos ao nível dos estabelecimentos de educação e ensino e dos organismos responsáveis pelas políticas educativas”, constituindo-se como “matriz comum para todas as escolas e ofertas educativas no âmbito da escolaridade obrigatória, designadamente ao nível curricular, no planeamento, na realização e na avaliação interna e externa do ensino e da aprendizagem” (Despacho n.º 6478/2017, 26 de julho). O PASEO é um documento que tem como objetivo promover a organização e a gestão curricular de todo o sistema educativo, propondo orientações significativas de estratégias, metodologias e procedimentos, orientados por princípios, valores, competências e por uma visão, que determinam o que é pretendido para os jovens enquanto cidadãos à saída da escolaridade obrigatória (ME, 2017).

As Aprendizagens Essenciais (AE) definem-se como documentos referenciais ao desenvolvimento curricular, nomeadamente à planificação e à realização do ensino e da aprendizagem, bem como a avaliação interna e externa das aprendizagens dos alunos, estando devidamente estruturados por ciclos e por anos de escolaridade. Estes documentos manifestam um conjunto de “conhecimentos, capacidades e atitudes” (*site* Direção-Geral da Educação [DGE]), que decorrem ao longo de todo o progresso

educativo, fazendo referência nomeadamente: (i) aos conteúdos inerentes a cada área curricular, estruturados por temas, tópicos e subtópicos, e articulados conceptualmente; (ii) aos processos cognitivos a executar e a desenvolver pelo aluno, a partir dos conteúdos e com o propósito de alcançar as aprendizagens intencionadas; e (iii) quais as evidências que demonstram que o aluno efetivamente realizou a aprendizagem expectável, não só numa dada área curricular, como também na articulação do conhecimento com as demais áreas, num determinado ano curricular (*site DGE*).

De acordo com o Despacho n.º 6944-A/2018, são documentos de orientação curricular que

correspondem a um conjunto comum de conhecimentos a adquirir, identificados como os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceptualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada componente do currículo ou disciplina, tendo, em regra, por referência o ano de escolaridade ou de formação (Despacho n.º 6944-A/2018).

As AE foram construídas a partir de documentos curriculares orientadores existentes, aquando da redefinição do Currículo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, tendo sido feita uma articulação com o PASEO, com o objetivo de promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas no mesmo.

O presente relatório está focado no estudo das áreas em superfícies planas. Este conteúdo, de acordo com o currículo português de matemática, está inserido no tema de Geometria e Medida. De acordo com as Aprendizagens Essenciais para a Matemática, a medição da área é abordada no 1.º ciclo do ensino básico, nos 2.º, 3.º e 4.º anos; no 2.º ciclo do ensino básico, nos 5.º e 6.º anos; e no 3.º ciclo do ensino básico, nos 7.º, 8.º e 9.º anos.

No 1.º ciclo do ensino básico, de acordo com as AE, os alunos iniciam o estudo das áreas no 2.º ano de escolaridade, a “comparar e ordenar objetos de acordo com diferentes grandezas (comprimento, massa, capacidade e área) identificando e utilizando unidades de medida convencionais e não convencionais” (ME, 2018, pp. 9 e 10). No ano

seguinte, 3.º ano, os alunos são incentivados a “estimar a medida de área de uma figura plana por enquadramento e explicar as razões da sua estimativa [e a] interpretar e modelar situações que envolvam a área e resolver problemas associados, comparando criticamente diferentes estratégias da resolução” (ME, 2021, pp. 44 e 45). Já no 4.º ano, os alunos medem “comprimentos, áreas, volumes, capacidades e massas, utilizando e relacionando as unidades de medida do SI e fazer estimativas de medidas, em contextos diversos” (ME, 2018, p. 9).

No 2.º ciclo do ensino básico, verifica-se uma evolução dos conteúdos do ciclo anterior, no sentido de alargar e aprofundar o mesmo tema. No 5.º ano, os alunos realizam a aprendizagem da “expressão para o cálculo da medida da área do paralelogramo a partir do retângulo” (ME, 2021, p. 41), e da “expressão para o cálculo da medida da área do triângulo a partir do paralelogramo” (p. 41), ambos com “recurso a material manipulável e/ou tecnológico” (p. 41). No ano subsequente, 6.º ano, realiza-se o cálculo dos “perímetros e áreas de figuras planas, incluindo o círculo, recorrendo a fórmulas, por enquadramento ou por decomposição e composição de figuras planas” (ME, 2018, p. 9).

No 3.º ciclo do ensino básico, mais precisamente no 7.º ano, os alunos aprendem a “generalizar e justificar as fórmulas das áreas do trapézio, do losango e do papagaio, recorrendo às de outras figuras” (ME, 2021, p. 39). No 8.º ano, os alunos são incentivados a “reconhecer o significado de fórmulas para o cálculo de áreas da superfície e de volumes de sólidos, incluindo pirâmides e cones, e usá-las na resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos” (ME, 2018, p. 9), realizando assim uma revisão das aprendizagens anteriores. Já no 9.º ano, os alunos realizam um aprofundamento do ano anterior ao ter que “reconhecer o significado de fórmulas para o cálculo de áreas da superfície e de volumes de sólidos, incluindo a esfera, e usá-las na resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos” (ME, 2018, p. 9).

No ensino secundário, os alunos têm várias opções no que diz respeito à sua formação académica. Dito isto, caso o aluno opte por enveredar pelos Cursos Científico-Humanísticos (OF), de acordo com o Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, tem como opção escolher os cursos de: (i) Ciências e Tecnologias; (ii) Ciências Socioeconómicas; (iii) Línguas e Humanidades; e (iv) Artes Visuais. Os cursos (i) e (ii) apresentam no seu plano de estudos a disciplina de Matemática A, como formação específica trienal e obrigatória. O curso (iii) apresenta como disciplina a Matemática Aplicada às Ciências

Sociais, como formação específica bienal e opcional. O curso (iv) apresenta como disciplina a Matemática B, também como formação específica bienal e opcional. No que diz respeito à abordagem do conteúdo da medição de áreas, não existem evidências explícitas, nas AE do ensino secundário, às disciplinas de Matemática A, Matemática B e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, da abordagem do mesmo.

As conexões internas e externas da matemática

A Matemática, como objeto de estudo no currículo educativo português, tem vindo a sofrer alterações significativas, nomeadamente no que diz respeito ao modo como os conceitos matemáticos são abordados ao longo dos vários níveis do ensino básico e secundário. Gradualmente, tem-se vindo a abandonar uma visão fragmentada e petrificada do ensino, isolado dos conteúdos matemáticos, e caminhando cada vez mais para uma visão mais antagónica, marcada pela desconstrução ideológica desta área como sendo única, mas sim fazendo parte de um currículo vasto e complexo, que deve ser volátil no que diz respeito às suas articulações e conexões.

Carreira (2010) corrobora esta ideologia ao afirmar que os currículos de Matemática têm vindo a realizar uma maior ênfase nas conexões matemáticas, de modo a “contrariar visões e perceções estreitas da Matemática e do trabalho em Matemática, que degeneram em resultados indesejáveis – compartimentação, fragmentação, isolamento, mecanização, incompreensão” (p. 13). Ferri (2010) sustenta que é imperativo que se demova a ideologia de que esta disciplina seja percecionada pelos alunos como aquela que na qual “só aprendem fórmulas e cálculos” (p. 19), sem realmente entenderem “o papel que a matemática desempenha no mundo real” (p. 19).

Dito isto, Carreira (2010) e Ponte (2010) definem o conceito de conexões matemáticas como sendo um conceito que pode ser interpretado de múltiplas formas. Para os mesmos autores existem as conexões: (i) entre os próprios temas matemáticos; (ii) da Matemática com outras áreas do saber; (iii) da Matemática entre os diversos ciclos e níveis de ensino; e (iv) da Matemática com situações e contextos do mundo real.

Jacinto e Pires (2019) classificam a capacidade de relacionar os conhecimentos anteriores com os novos pelo termo de “conexões intramatemáticas” (p. 190), caracterizando-as como “indispensáveis para a compreensão de conceitos, representações e correspondentes relações” (p. 190). Já Ponte (2010) caracteriza esta capacidade como

sendo as conexões internas da Matemática, e destaca uma dualidade na sua perspectiva de interpretação. A primeira interpretação é a possibilidade de existir conexões entre conceitos e representações matemáticas de um mesmo tema, como por exemplo no caso da Geometria, a realização de uma conexão entre os conceitos de perímetro e área, ou também, mais especificamente, as conexões entre representações para um mesmo conceito, no caso das representações decimais e fracionárias para os números racionais, no tema de Números. A segunda interpretação é a realização de conexões entre conceitos e representações de temas distintos, como por exemplo realizar uma representação geométrica de uma equação algébrica, para os temas de Geometria e Álgebra, respetivamente. Depreende-se, assim, que capacidade de estabelecer conexões entre os vários temas ou conteúdos matemáticos, incluindo as suas propriedades e diversas formas de representação, evidencia conhecimentos aprofundados de um dado conceito e a realização de uma interligação múltipla de relações matemáticas complexas (Jacinto & Pires, 2019; Paradinha & Leuca, 2010).

Relativamente às conexões da Matemática com outras áreas do saber ou com situações e contextos do mundo real, Ponte (2010) caracteriza-as como sendo as conexões externas da Matemática, que frequentemente “aparecem de forma natural e devem ser devidamente exploradas” (p. 6), visto que são fundamentais no desenvolvimento dos conceitos e das ideias matemáticas, bem como na capacidade de resolução de problemas matemáticos transversais aos vários temas. Ferri (2010) caracteriza a conexão externa entre a Matemática e o mundo real pelo termo de “modelação matemática” (p. 19), definindo-a como “um processo que liga o mundo real e a matemática nos dois sentidos: da realidade para a matemática e [...] da matemática para a realidade” (p. 19). Jacinto e Pires (2019) corroboram todas as afirmações supramencionadas por ambos os autores, Ponte (2010) e Ferri (2010), no entanto classifica esta conexão pelo termo “conexões extramatemáticas” (p. 190).

No que diz respeito às orientações curriculares, as Aprendizagens Essenciais (AE) de Matemática do Ensino Básico definem como um dos oito objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática precisamente a valorização pela capacidade de estabelecer as conexões matemáticas, afirmando que “a exploração de conexões matemáticas pelos alunos é uma condição indispensável para o reconhecimento da relevância da Matemática” (2021, p. 4). Este documento realiza uma distinção evidente entre conexões internas e externas. As primeiras fazem referência a todas as conexões realizadas de todos

os conceitos e representações entre os diversos temas da Matemática e nos diversos níveis de ensino, e as segundas fazem referência a todas as conexões entre a Matemática e outras áreas distintas do conhecimento, ou com situações e contextos da realidade dos alunos.

Este documento orientador não só assinala as conexões internas e externas como um objetivo geral de aprendizagem do aluno, como também uma orientação metodológica para o professor, em todos os anos de escolaridade e temas de aprendizagem. O Ministério da Educação (2021) define que a articulação de conteúdos faz parte de uma das sete orientações metodológicas, alegando que:

É importante que os alunos trabalhem de forma intencionalmente explícita com conhecimentos de diferentes temas na abordagem de uma mesma situação/tarefa, mobilizando conexões internas da Matemática. Só assim o aluno pode desenvolver uma visão coerente e integrada, não compartimentada, desta área do saber, o que releva para a qualidade das aprendizagens e está em relação com a abordagem em espiral (p. 6).

Quanto ao papel do professor, é intrínseco ao seu trabalho propor “tarefas significativas e desafiantes e com recursos apropriados e oportunos” (Jacinto & Pires, 2019, p. 190), que apresentem um nível de exigência cognitiva elevado, de modo a permitir que o aluno não só reconheça as conexões, como também o leve a pensar conceptualmente sobre elas, utilizando-as entre conceitos, procedimentos e representações matemáticas.

Ao longo das AE de Matemática no ensino básico, tanto no 1.º ciclo como no 2.º ciclo, este documento realiza diversas referências à realização das conexões. No 1.º ciclo do ensino básico, de uma forma generalizada, as AE salientam a importância das “conexões internas e externas da Matemática com outras áreas do currículo, em especial o Estudo do Meio” (ME, 2021, p. 9) e fazem referência à importância de “mobilizar para a sala de aula os conhecimentos que as crianças trazem das suas vivências pessoais” (idem, p. 10). Mais precisamente no tema de Álgebra, as orientações curriculares referem que este tema confere uma “transversalidade e facilidade de articulação interna com os outros temas matemáticos, em especial com Números” (idem, p. 10) e que as situações

da realidade dos alunos servem para “usar e/ou construir modelos matemáticos, [...] contribuindo para valorizar o papel e relevância da Matemática” (idem, p. 10). No tema de Dados e Probabilidades, as conexões também são valorizadas no que diz respeito ao “estudo de situações concretas reais de interesse [...] e em conexão com outras áreas curriculares” (idem, p. 10). Em Geometria e Medida, valoriza-se o reconhecimento da presença de elementos geométricos na realidade em redor, e da utilização de técnicas de medida de diversas grandezas, em vários contextos do quotidiano e da realidade dos alunos.

Já no 2.º ciclo do ensino básico, no que diz respeito às capacidades matemáticas, as AE ressaltam o estabelecimento das conexões internas “através da resolução de problemas” (ME, 2021, p. 9) e das conexões externas “com outras áreas disciplinares, num contexto de pluridocência, através de projetos ou outras atividades mais pontuais, procurando ainda a ligação à realidade dos alunos” (idem, p. 9). No tema de Números, a realização de associações entre diferentes representações, tais como as representações decimais, fracionárias e percentagem, também promove conexões internas dentro do mesmo conteúdo, como mencionado anteriormente por Ponte (2010). Os temas Álgebra, Dados e Probabilidades e Geometria e Medida seguem as mesmas linhas orientadoras que no 1.º ciclo do ensino básico, no que diz respeito à valorização e implementação das conexões internas e externas da Matemática.

O presente relatório de investigação apresenta um conjunto de tarefas que se distinguem pela presença notável das conexões internas e externas da Matemática. As conexões internas são valorizadas pela interligação do tema principal de Geometria e Medida com conteúdos pertencentes aos temas das Capacidades Matemáticas, Números e Álgebra. Quanto às conexões externas, estas são valorizadas de duas formas, através da realização de uma articulação com as Ciências Naturais e através da correlação das tarefas com conhecimentos da realidade do quotidiano dos alunos.

Definição conceptual de área de uma superfície plana

De acordo com a definição dada por Batista (2014), este autor define que área “é um número que atribuímos à extensão de uma superfície qualquer” (p. 19), seja esta plana ou curva, de modo que se consiga comparar e determinar das superfícies qual é maior e qual é menor, de acordo com a unidade de medida específica adotada para expressar essa

área. Clements et al. (2017), por outras palavras, define área como “a quantidade de espaço bidimensional que uma região plana fechada contém” (p. 71).

Para Baturó e Nason (1996), o conceito de área deve ser considerado de duas formas, nomeadamente de forma: (i) *static*, estática, que diz respeito à relação entre a área e uma região ou superfície que se encontra delimitada, tendo em consideração que essa superfície pode ser quantificada; ou (ii) *dynamic*, dinâmica, que se foca essencialmente na relação entre a delimitação de uma forma e a quantidade de superfície que esta engloba, de modo que, à medida que esta delimitação se aproxima de uma linha, conseqüentemente a área irá aproximar-se do zero. Para os mesmos autores, o facto de a perspectiva dinâmica da área não estar frequentemente presente nos documentos dos currículos educativos e, conseqüentemente, não prevalecer tanto quanto a perspectiva estática, resulta numa limitação no entendimento da área, que leva os alunos a realizar conceções alternativas, tais como assumir que figuras geométricas com o mesmo perímetro também possuem a mesma área.

No que diz respeito à abordagem do conceito de área nos currículos escolares, vários autores alegam que o ensino deste conceito é fortemente marcado pela introdução de fórmulas sem atribuição de qualquer significado, que marca o processo de ensino e de aprendizagem deste conteúdo por inúmeras dificuldades. Vários estudos revelam que, de facto, os alunos do ensino básico apresentam uma compreensão deste conteúdo, no entanto baseiam-se em procedimentos ou fórmulas memorizadas, apresentando dificuldades em apresentar exemplos ou contraexemplos a conjecturas (Baturó e Nason, 1996; Candeias et al., 2006; Clements et al., 2017; Costa et al., 2020; Runnalls e Hong, 2019; Santos & Santos, 2015; Wickstrom et al., 2017; Zacharos, 2006).

A título exemplificativo, Runnalls e Hong (2019) referem dois estudos, o primeiro realizado por Kamii & Kysh (2006), que demonstra que os alunos de vários níveis não percecionavam o quadrado como uma unidade de medida para a área, e o segundo realizado por Zacharos (2006), que demonstra que alunos do ensino básico utilizavam a fórmula de cálculo para a área de um retângulo em qualquer problema relacionado com a descoberta da área, utilizando esta fórmula mesmo em problemas onde não se aplicava.

Outros estudos revelam que são os professores em formação inicial que apresentam algumas fragilidades, no que diz respeito ao seu *Pedagogical Content*

Knowledge (PCK), Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, e ao seu *Content Knowledge* (CK), Conhecimento de Conteúdo. Estas fragilidades caracterizam-se pela utilização de estratégias altamente procedimentais, baseadas em explicações e representações de conceitos através de fórmulas memorizadas e transmitidas aos alunos, ao invés da produção de um entendimento conceitual (Costa et al., 2020; Wickstrom et al., 2017).

Não obstante, considera-se que a aprendizagem da área confere uma importância significativa à capacidade de visualização espacial, ao desenvolvimento da capacidade de estimativa, às relações existentes entre números e medidas, à percepção de diversos conceitos geométricos, entre outros. Runnalls e Hong (2019) corroboram, ao afirmar que,

a aprendizagem sobre a área marca uma mudança precoce, para os alunos do ensino básico, da matemática unidimensional para a bidimensional e tem um forte potencial para ser utilizada como uma ferramenta para desenvolver competências de estimativa, manipulação visual e representação múltipla (p. 630).

Candeias et al. (2006) e Runnalls e Hong (2019) defendem uma perspectiva semelhante, ao afirmarem que uma das formas mais eficazes dos alunos aprenderem sobre áreas é que, inicialmente, os alunos desenvolvam uma compreensão conceptual de área como uma superfície que pode ser quantificada, através da “medição concreta com instrumentos de medida” (Candeias et al., 2006, p. 2), e, posteriormente, transitarem “da contagem sistemática de quadrados para o desenvolvimento de fórmulas geométricas para a área numa variedade de contextos” (Runnalls e Hong, 2019, p. 632), realizando assim uma transição da estruturação conceptual até à sua generalização e desenvolvimento de fórmulas.

Clements et al. (2017) defendem quatro técnicas que suportam o desenvolvimento da compreensão da medição da área de superfície pelos alunos: (i) *covering*, como o ato de cobrir ou interagir com a unidade, de modo a cobrir espaços para determinar a área; (ii) *quantifying*, como o ato de quantificar ou “enumerar as unidades da área que cobrem uma região” (p. 73), que progride no sentido de contar unidades uma a uma, para alunos dos níveis elementares, para uma contagem mais organizada por grupos, nos níveis mais complexos, que evidencie a substituição de uma “adição repetitiva com a multiplicação” (p. 73); (iii) *subdividing*, como o ato de subdividir uma superfície completa em partes,

para que seja possível a sua contagem de forma mais eficiente, como por exemplo dividir um retângulo em unidades iguais; e (iv) *spatial structuring*, “é a operação mental de construção de uma organização ou forma, para um objeto ou conjunto de objetos no espaço” (p. 74), como por exemplo, para uma região retangular, o esquema de estruturação espacial “envolve o reconhecimento do objetivo de dividir uma região em partes e a atividade de organizar a região numa estrutura de linhas e colunas, tendo como resultado uma região totalmente dividida e quantificável” (p. 74), sendo esta a operação mental que representa um entendimento significativo para calcular a área ou qualquer outro tipo de medição bidimensional e tridimensional.

As orientações curriculares nacionais de Matemática, no tema de Geometria e Medida, apenas contemplam o estudo das áreas em figuras geométricas planas e regulares. Jesusz (2023) defende que “calcular a área de triângulos, quadriláteros notáveis, polígonos regulares e círculos não é suficiente para a formação de um estudante autônomo” (p. 1). Para este autor, o estudo das áreas no currículo escolar deve possibilitar a sua aplicabilidade na vida real do cotidiano dos alunos, o que sugere que restringir o estudo das áreas apenas a superfícies regulares não cumpre uma compreensão ampliada da geometria e da medida. Quando eventualmente surgem problemas para determinar a área em figuras planas irregulares, Scartazzini et al. (2005) alega que “normalmente é proposta uma divisão da figura em diversas partes, de forma a torná-las próximas de pequenas figuras regulares com equações próprias para cálculo de área” (p. 66) e posteriormente feito o somatório dessas áreas individuais, resulta na área total da figura.

Dito isto, considerou-se importante realizar uma investigação para entender se os alunos do 2.º ciclo do ensino básico possuem ou não capacidades de medir uma superfície irregular, tal como a folha de uma árvore, num contexto de conexão externa com o mundo real.

Capítulo II – Enquadramento metodológico

Neste capítulo é apresentada a metodologia utilizada para a realização da investigação e da recolha de dados, as questões de investigação inerentes ao estudo, a caracterização dos participantes e do contexto educativo, a descrição das tarefas matemáticas propostas e a seleção de instrumentos de recolha e análise dos dados.

Natureza do Design e questões de Investigação

De acordo com Gonçalves (2010),

A investigação em educação deve ser guiada por um conceito amplo de racionalidade, o qual inclui a intuição e a imaginação, deve partir da complexidade do mundo humano e dos fenómenos e assentar na capacidade de questionar pressupostos, conceitos e propostas em análise; é neste sentido, essencialmente problematizadora. Nesta medida, distingue-se de uma concepção meramente lógica e descritiva ancorada numa certa racionalidade instrumental que domina as ciências humanas (p. 47).

A presente investigação tem como objetivo analisar as estratégias que os alunos definem para medir a área de uma superfície irregular. O estudo apresenta como questão geral de investigação:

Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinarem a área de uma superfície irregular?

Deste modo, de acordo com a questão base de investigação, este estudo é caracterizado por uma metodologia de carácter qualitativo, englobando procedimentos metodológicos próximos dos da investigação-ação.

A metodologia de investigação qualitativa é uma metodologia em que o investigador procede diretamente no meio onde o objeto de estudo se desenvolve, ou seja, centra-se no contato direto entre o investigador e o contexto a ser estudado, fazendo com

que este faça parte do estudo (participação ativa) e é o principal responsável pela recolha e interpretação de dados (Ribeiro, 2008; Silva & Dixe, 2020).

Este estudo é caracterizado por apresentar um posicionamento metodológico aberto e flexível, podendo ser adaptado às características da problemática e, inclusive, às condições e objetivos da investigação (Aires, 2015; Gonçalves, 2010). Este tipo de metodologia, segundo Gonçalves (2010) e Guerra (2014), assenta numa perspetiva compreensiva, ou seja, o investigador aprofunda a compreensão dos fenómenos em estudo, interpreta-os, descreve-os e realiza uma análise crítica e reflexiva, que, conseqüentemente, resulta num aumento do “caráter reflexivo das práticas propostas educativas do campo em estudo” (Gonçalves, 2010, p. 48).

Quanto à postura do investigador, de acordo com Gonçalves (2010) e Ribeiro (2008), a investigação qualitativa pressupõe que este deva apresentar uma postura interrogativa em permanente diálogo e observação, e uma atitude autoquestionadora relativa às opções e percursos de investigação, de forma a realizar um confronto constante entre os dados recolhidos e as evidências literárias, que fundamentam tal interpretação.

No que se refere à investigação-ação, este estudo foi planeado e resultou de várias intervenções, em que o verdadeiro objetivo foi, de acordo com Ribeiro (2008), resolver um problema em conjunto e, paralelamente, criar “alterações na comunidade em que se realiza” (Silvia & Dixe, 2020, p. 11), alterações estas necessárias e importantes, tendo em conta a problemática inicialmente levantada.

Participantes e Contexto Educativo

O presente estudo de investigação foi aplicado numa instituição pública, na escola sede do Agrupamento de Escolas Padre João Coelho Cabanita, presente no concelho de Loulé, que integra as valências de segundo e terceiro ciclos do ensino básico. Esta escola é composta por três blocos de dois pisos interligados entre si, com vinte e nove salas de aula; um pavilhão gimnodesportivo; cinco gabinetes; um refeitório; uma sala de professores; uma biblioteca; um amplo espaço de recreio com dois polidesportivos exteriores; e várias outras zonas de serviços. A população escolar desta escola conta com cerca de oitocentos e cinquenta alunos, distribuídos por trinta e nove turmas; oitenta docentes; e quarenta funcionários não docentes.

Relativamente aos participantes, o estudo foi realizado numa turma do sexto ano do 2.º ciclo do ensino básico, composta por um total de vinte e um alunos, dos quais seis são do sexo feminino e quinze do sexo masculino, com idades compreendidas entre os onze e os doze anos. Na turma encontram-se integrados quatro alunos com medidas adicionais de suporte à aprendizagem e à inclusão, abrangidos pelo Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, sendo referenciados: (i) dois alunos a usufruir de medidas universais, por apresentarem um diagnóstico de dislexia; (ii) uma aluna com medidas seletivas, por apresentar um ligeiro défice cognitivo; e (iii) um aluno com medidas adicionais, por apresentar um défice cognitivo severo, sendo que este frequenta um apoio externo à sala de aula na disciplina de matemática. Há um aluno em que o português não é a sua língua materna, porém não apresenta obstáculos de compreensão no que diz respeito aos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

No que diz respeito às competências atitudinais, esta turma apresenta um comportamento predominantemente instável, nem sempre se inserindo dentro dos parâmetros normais do bom funcionamento da aula. São alunos que criam alguns conflitos com os seus pares, revelam poucas regras de participação e autonomia, e apresentam sérias dificuldades em saber ouvir e a aceitar as opiniões dos colegas. Não obstante, são alunos interessados e participativos, que com alguma persistência têm vindo a desenvolver uma evolução significativa nas suas aprendizagens, considerando-se o aproveitamento global como satisfatório.

De forma a impulsionar o aproveitamento global dos alunos, face à indisciplina dentro da sala de aula, a professora cooperante tem vindo a adotar métodos e estratégias, das quais foram tidas em consideração na realização deste plano de intervenção. Algumas destas estratégias são: (i) a promoção de atividades com materiais diversificados; (ii) o incentivo ao trabalho cooperativo; (iii) o estímulo das competências e interesses dos alunos; (iv) o reforço da avaliação formativa; (v) a utilização de situações problemáticas do interesse dos alunos; (vi) o desenvolvimento de tarefas que fomentem a autonomia e a responsabilidade; e (vii) a valorização sistemática dos progressos dos alunos; entre outras.

É importante referir que todos os alunos têm a possibilidade de frequentar um tempo semanal de apoio ao estudo, que tem como propósito reforçar a aprendizagem e o esclarecimento de dúvidas, permitindo aos alunos, de forma autónoma, trabalharem sobre

os conteúdos matemáticos ao seu ritmo ímpar de aprendizagem, proporcionando um auxílio complementar.

Ensino Exploratório e Intervenção Educativa

As tarefas matemáticas selecionadas para o estudo do presente relatório foram adaptadas de um artigo denominado “Sun Catchers”, da autoria de Isabelle e Bell (2007), presente na revista científica *Teaching Children Mathematics* (TCM), publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

Relativamente à organização da sequência didática desenvolvida, é possível categorizá-la em quatro atividades, conforme ilustra a tabela 2.1. Os participantes do estudo desenvolveram as tarefas apresentadas numa sequência de três aulas de cem minutos cada, como contempladas no Plano de Intervenção Educativa (apêndice A).

Tabela 2.1 – Organização da sequência didática

Duração	Tarefa	Tema
100 minutos	Tarefa 1A	A área influencia a captação de energia solar?
	Tarefa 1B	Descoberta da área total de um Painel Solar através de cálculos
100 minutos	Tarefa 2	Medição da área de superfície de uma folha de árvore
100 minutos	Tarefa 3	Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore

Conforme a tabela 2.1, a primeira tarefa proposta foi a tarefa 1A, denominada “A área influencia a captação de energia solar?”. Esta tarefa teve como objetivo propor um desafio aos alunos, que os levou a explorar como é que a área de uma superfície desempenha um papel fundamental na recolha de energia solar:

À vossa frente estão dois tabuleiros de alumínio. Um tem o dobro da área da base do outro. Se despejarmos meio litro de água, à temperatura ambiente, em cada um

dos tabuleiros e estes forem colocados ao sol por vinte minutos, o que é que acham que vai acontecer à temperatura da água em cada um dos tabuleiros?

Os alunos foram motivados a partilhar com a turma as suas previsões e a registá-las na folha de apoio à tarefa 1A (apêndice B). Após a colocação do desafio em prática, os alunos registaram os resultados e realizaram um confronto entre as suas previsões e o resultado real. Através desta tarefa, realizou-se uma conexão entre a recolha de energia solar e os painéis solares, e investigou-se o seu propósito e as suas características.

A segunda tarefa proposta foi a tarefa 1B, denominada “Descoberta da área total de um Painel Solar através de cálculos”, e foi realizada na mesma aula que a tarefa 1A. Esta tarefa consistiu na proposta de uma questão-problema aos alunos, que teve como objetivo calcular a área de superfície de um painel solar, através da utilização de algoritmos matemáticos. Os registos foram realizados na folha de apoio à tarefa 1B (apêndice C).

Na segunda aula foram lembradas as aprendizagens adquiridas através das duas tarefas supramencionadas, e foi feita uma conexão entre o propósito dos painéis solares com as folhas das árvores, visto que estas são captadoras naturais de energia solar. Através desta conexão, propôs-se a tarefa 2, denominada Medição da área de superfície de uma folha de árvore, que teve como objetivo a medição da área de uma superfície irregular, que, neste caso, utilizou-se a folha de uma árvore, através de estratégias de medição propostas pelos alunos, registadas na folha de apoio à tarefa 2 (apêndice D).

Por fim, a última tarefa proposta foi a tarefa 3, denominada “Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore”. Esta tarefa teve como objetivo propor aos alunos o desafio de descobrir a área aproximada da superfície total de folhas da árvore, em função de uma contagem estimada do número total de folhas da árvore, através do cálculo multiplicativo em diagrama. Os registos foram realizados na folha de apoio à tarefa 3 (apêndice E).

Posto isto, a intervenção educativa proposta define-se pelos seguintes objetivos: (i) descobrir como é que a área de uma superfície afeta a recolha de energia solar; (ii) comparar a forma irregular de uma folha de árvore com a forma regular de um painel solar; (iii) medir a área de superfície de um painel solar; (iv) medir a área da superfície

de uma variedade de folhas da mesma árvore, através de estratégias propostas pelos alunos; (v) utilizar diferentes técnicas de aproximação na medição da área da superfície de uma folha; (vi) utilizar a multiplicação em diagrama para estimar o número total de folhas de uma árvore; e (vii) determinar a área aproximada da superfície total de folhas de uma árvore.

As tarefas desenvolvidas tiveram como principal propósito estabelecer a realização das conexões internas e externas da matemática, sendo que as conexões internas são privilegiadas através da interligação do tema principal de Geometria e Medida com conteúdos pertencentes aos temas das Capacidades Matemáticas, Números e Álgebra, enquanto que as conexões externas são valorizadas de duas formas: através da articulação com as Ciências Naturais e da articulação das tarefas com conhecimentos da realidade do quotidiano dos alunos.

O plano de intervenção educativa foi realizado tendo em consideração uma perspectiva de valorização pelo ensino exploratório, como ferramenta de ensino na educação matemática. Entende-se por ensino exploratório da matemática, segundo Canavarro (2011), o tipo de ensino em que “os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva” (p. 11). A sequência de tarefas concretizada no presente estudo teve em consideração as quatro fases inerentes ao ensino exploratório da matemática: (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; (iii) discussão da tarefa; e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Guerreiro et al., 2015).

No que diz respeito à organização dos alunos, há momentos de trabalho individual, momentos de discussão em grande grupo e momentos de trabalho autónomo, em que os alunos se encontram organizados em grupos de 4 a 5 elementos. A escolha dos elementos dos grupos de trabalho autónomo foi realizada previamente pela professora/investigadora, permitindo assim um melhor aproveitamento e sucesso da tarefa, através da heterogeneidade dos mesmos.

Ao abrigo do Decreto-Lei n.º 55/2018, a avaliação que irá ser utilizada nesta sequência de tarefas é de carácter formativa, visto que o principal objetivo é o acompanhamento do aluno de modo a entender se os objetivos estão ou não a ser

atingidos, podendo ser identificadas dificuldades e/ou obstáculos que comprometam a sua aprendizagem. Esta avaliação formativa irá ser realizada através de uma grelha de observações (apêndice F), que tem como objetivo realizar o registo dos alunos em três níveis, de acordo com os descritores de desempenho referidos. Estes descritores de desempenho fazem referência às competências demonstradas durante todo o processo de aprendizagem dos alunos, que neste caso referem-se: (i) ao cumprimento das tarefas; (ii) à qualidade da participação oral; (iii) à colaboração, ao interesse e ao empenho demonstrados; (iv) ao grau de dificuldades apresentadas; e (v) à adequação da linguagem matemática utilizada.

Instrumentos de Recolha e Análise de Dados

Como referido anteriormente, o estudo apresenta uma metodologia de carácter qualitativo, que privilegia os princípios da investigação-ação. Deste modo, foram tidos como recursos as seguintes técnicas de recolha de dados: (i) observação direta, com registos áudio e fotográficos e (ii) análise documental.

O conjunto de tarefas propostas aos alunos e inerentes ao estudo, apresentam procedimentos aliados ao ensino exploratório. Deste modo, as técnicas de recolha de dados são variadas e vão incidir, essencialmente, na observação direta dos participantes, com recurso a gravações em áudio, nas ocasiões em que se privilegia o diálogo e o debate em pequeno e grande grupo, e aos registos fotográficos das várias produções realizadas pelos alunos, e na análise documental do preenchimento das fichas complementares às tarefas. É essencial destacar a observação direta e participante como a forma primordial de recolha de dados, a par da gravação áudio das intervenções dos alunos. Estas intervenções podem ocorrer entre os alunos e a professora/investigadora ou por meio de interações entre os próprios alunos.

Ética do Estudo

De acordo com os princípios éticos, o presente estudo seguiu um procedimento capaz de garantir o anonimato dos alunos (através da utilização de nomes fictícios), protegendo assim a integridade dos participantes. Os participantes do estudo foram informados acerca do propósito da presença da professora/investigadora, ao longo do

decorrer da PES, bem como dos objetivos da aplicação do plano de intervenção educativa e da investigação intrínseca.

Capítulo III – Análise e Discussão dos Resultados

Este capítulo apresenta os resultados mais relevantes obtidos através da aplicação do processo investigativo na íntegra. São expostas as contribuições dos participantes do estudo, através das diferentes técnicas de recolha de dados, face às tarefas propostas.

Influência da área na recolha de energia solar

Como proposta de primeira tarefa, foi lançada a seguinte questão problema aos alunos e sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – À vossa frente estão dois tabuleiros de alumínio. Um tem o dobro da área da base do outro. Se despejarmos meio litro de água, à temperatura ambiente, em cada um dos tabuleiros e estes forem colocados ao sol por vinte minutos, o que é que acham que vai acontecer à temperatura da água em cada um dos tabuleiros?

Gabriel: – Acho que um deles vai ficar mais quente que o outro.

Professora: – E qual deles é que vai ficar mais quente?

Gabriel (pausa longa para pensar): – Acho que é... não tenho a certeza.

Professora: – Qual é o que tem maior área?

Gonçalo (aponta para o tabuleiro maior): – É aquele.

Professora: – Então e qual deles é que vocês acham que a água vai atingir uma maior temperatura?

Gabriel: – Acho que é o da esquerda (refere-se ao maior).

Professora: – Porquê?

Gabriel: – Porque a água está mais dividida, não está tão junta.

Professora: – Obrigada Gabriel. Mais alguém quer dar opinião?

Pedro: – É que a mais pequenina vai atingir uma temperatura mais quente porque é menor, então, ou seja, absorve mais.

Professora: – Aqui temos outra opinião diferente. Mais alguém quer participar?

Sim Rafael.

Rafael: – Acho que a pequenina vai atingir uma temperatura mais alta porque o sol bateu mais nela?

Professora: – O que queres dizer com isso?

Rafael: – Porque é mais pequena...

Professora: – Porque a área é menor?

Rafael (um pouco incerto): – Sim.

Através do diálogo acima transcrito, podemos observar que existem dois alunos que expressam claramente e justificadamente duas opiniões opostas, como já era expectável. Houve um terceiro aluno que partilhou a sua opinião, porém não soube expressar de forma clara o seu raciocínio. Foi possível observar que os restantes alunos estavam bastante receosos de participar e de partilharem a sua opinião, por esse motivo foi solicitado que preenchessem por escrito e individualmente as suas previsões na folha da tarefa 1A (apêndice B), seguida de uma breve fundamentação. De forma a focalizar o pensamento dos alunos, as previsões foram sugeridas através de três opções:

Seleciona a tua previsão nas opções abaixo:

(a) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com menor área.

(b) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com maior área.

(c) A temperatura final vai ser igual nos dois tabuleiros.

Através da análise documental do preenchimento das previsões, foi possível constatar que, dos 15 alunos, 12 consideraram a opção (a); 2 consideraram a opção (b); e 1 considerou a opção (c). Através dos resultados obtidos, tendo em conta que a opção correta é a (b), verifica-se que a grande maioria não depreende de que forma é que a área de uma superfície influencia a recolha de energia solar.

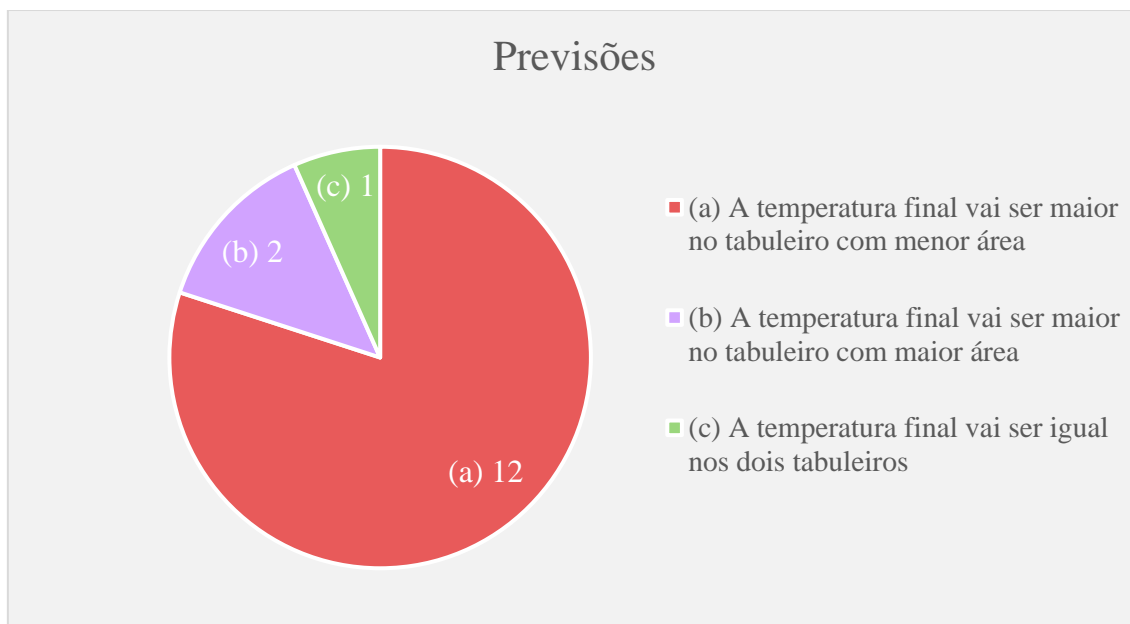


Gráfico 3.1 – Distribuição das opções dos alunos

Na escolha da opção (a), salienta-se as seguintes fundamentações individuais:

Fundamenta a tua escolha: *Eu escolhi essa opção porque como a frigideira 1 é menor e consegue aquecer e acumular mais calor dentro dela.*

[Eu escolhi essa opção porque como a frigideira 1 é menor e consegue aquecer [sic.] (aquecer) e acumular [sic.] (acumular) mais calor dentro dela.]

Figura 3.1 – Fundamentação da Mariana

Fundamenta a tua escolha: *A temperatura da frigideira com a área menor vai absorver mais calor porque como tem menor área vai conseguir absorver mais temperatura.*

[A temperatura da frigideira com a área menor vai absorver mais calor porque como tem menor área vai conseguir absorver mais temperatura.]

Figura 3.2 – Fundamentação do David

Fundamenta a tua escolha: *Eu escolhi a opção a porque tem menor área então é mais fácil para absorver o calor.*

[Eu escolhi a opção a porque tem menor área então é mais fácil para absorver o calor.]

Figura 3.3 – Fundamentação do Pedro

Fundamenta a tua escolha: Porque com menor área há mais espaço para os raios- ultravioletas.

[Porque com menor área há mais espaço para os raios-ultravioletas.]

Figura 3.4 – Fundamentação do Rúben

Todos os alunos que escolheram a opção (a), apresentam justificadamente a conceção alternativa de que uma menor área absorve mais energia solar. A título exemplificativo demonstram-se as fundamentações de quatro alunos, apresentadas nas figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. O aluno Rúben (figura 3.4) apresenta uma contradição notória, quando afirma que o tabuleiro com *menor área* apresenta *mais espaço para os raios-ultravioletas*.

Através das evidências acima mencionadas, está explícito que a grande maioria dos alunos apresentam várias conceções alternativas quanto à influência que a área tem na recolha de energia solar.

Na escolha da opção (b), salienta-se as seguintes fundamentações individuais:

Fundamenta a tua escolha: A temperatura mais alta vai ser a da frigideira 2, porque a água fica menos junta.

[A temperatura mais alta vai ser a da frigideira 2, porque a água fica menos junta.]

Figura 3.5 – Fundamentação do Hugo

Fundamenta a tua escolha: A temperatura da frigideira com maior área vai ficar mais quente porque a água está mais dispersa portanto a quantidade de água quente irá ser maior.

[A temperatura da frigideira com maior área vai ficar mais quente porque a água está mais dispersa [sic.], (dispersa) portanto a quantidade da água quente irá ser maior.]

Figura 3.6 – Fundamentação do Gabriel

Ambos os alunos acima citados (figuras 3.5 e 3.6) apresentam noções da influência que a área de uma superfície tem na absorção de energia solar. Ambos demonstram compreender que a área da base do tabuleiro maior resulta numa dispersão maior da mesma quantidade de água e que, conseqüentemente, vai possuir uma profundidade menor, o que faz com que a absorção de energia solar seja maior, resultando numa maior subida de temperatura.

Na escola da opção (c), salienta-se a seguinte fundamentação individual:

Fundamenta a tua escolha: Eu acho que vai ser igual porque as duas têm quantidades iguais e as duas áreas conseguem acumular mais temperatura e tinha atingido a mesma coisa.

[Eu acho que vai ser igual porque as duas têm quantidades iguais e as duas áreas conseguem acumular [sic.] (acumular) mais temperatura e tinha atingido a mesma coisa.]

Figura 3.7 – Fundamentação da Joana

Esta aluna (figura 3.7) não apresenta noções sobre a influência que a área tem sobre a recolha de energia solar, uma vez que afirma que a temperatura da água irá ser igual em ambos os tabuleiros, independentemente da área da base de cada um.

Devido à presença de uma grande maioria de conceções alternativas, a colocação da atividade em prática tornou-se crucial, na iminência de desconstruir estas perspetivas e favorecer momentos de aprendizagem exploratória, através de um paradigma de investigação-ação.

A preparação da tarefa foi realizada através da sua demonstração, juntamente com a participação ativa dos alunos. Primeiramente, foi feito o cálculo da área de cada uma das bases do tabuleiro, para verificar que um era aproximadamente o dobro da área do outro:

Professora: – Como é que nós vamos medir a área da base destes tabuleiros?

David: – Medindo.

Professora: – Mas como?

Gonçalo: – Com o raio e o Pi.

Professora: – O raio e o Pi servem para medir a área de que figura geométrica?

(não foram obtidas respostas). – O que é que nós fizemos nas aulas anteriores? Aprendemos a medir a área do quê?

Vários alunos (simultaneamente): – Do círculo!

Professora: – E a base deste tabuleiro parece-vos um círculo?

Vários alunos (simultaneamente): – Não.

Rúben: – É um retângulo.

Professora: – Muito bem. E como é que se mede a área de um retângulo?

Hugo: – Lado vezes lado.

Professora: – Lado vezes lado se fosse...

Hugo: – Um quadrado.

Professora: – Neste caso como são retângulos como é que se calcula?

Rafael: – A altura mais a largura.

Professora: – A altura mais a largura?

Rúben: – O comprimento e a largura.

Pedro: – É o comprimento vezes a largura.

Através deste diálogo com os alunos foi possível analisar que um aluno confundiu conceitos de medição da área de outras figuras geométricas, neste caso do círculo, com a medição da área de um retângulo. Esta confusão de conceitos foi realçada pela professora/investigadora, pois nas aulas anteriores foram trabalhados conhecimentos de como calcular o perímetro e a área de um círculo, daí o aluno precipitar-se para responder sem realizar um raciocínio lógico de conexão correta entre conceitos matemáticos.

Verificou-se, também, que a turma não realizou essa mesma conexão de conceitos, ao serem questionados sobre o propósito do raio e do Pi no cálculo de qual figura geométrica. Visto que, do ponto de vista da professora/investigadora, esta confusão de conceitos deveu-se ao facto de nas aulas anteriores terem sido trabalhados tais

conceitos, e ao lembrá-los do seu propósito, os alunos rapidamente aperceberam-se que se estava a trabalhar sobre uma figura geométrica diferente do círculo.

Quando questionados sobre como medir a área de um retângulo, o Hugo soube identificar que se multiplicava um lado pelo outro, no entanto a terminologia de *lado vezes lado* é utilizada quando se fala de uma figura geométrica com os lados todos iguais, como é o caso do quadrado. Quando questionados sobre a terminologia correta, o Rafael menciona que é através do cálculo *altura mais a largura*. Novamente, um aluno demonstra confundir conceitos matemáticos de medida, entre diferentes figuras geométricas, os quais foram imediatamente corrigidos por dois colegas.

Os dados recolhidos, tais como o cálculo da área da base do tabuleiro, a quantidade de água despejada para cada tabuleiro e a temperatura inicial da água foram registados na tabela de registos na folha da tarefa 1A (apêndice B).

É de salientar que o preenchimento foi realizado de forma semelhante por todos os alunos, à semelhança dos exemplos nas figuras abaixo. Quanto ao registo na coluna da área, todos os alunos registaram as medidas do comprimento, da largura e o resultado da multiplicação entre elas (exemplo nas figuras 3.8, 3.9, 3.11 e 3.12), enquanto que dois alunos apenas registaram o resultado final (exemplo na figura 3.10).

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
Frigideira 1	1-20 1-30 600 cm ²	0,5L	22°C 22°C	a frigideira com menos area vai dar mais temperatura	26°C
Frigideira 2	0-27 0-45 1215 cm ²	0,5L	22°C	a frigideira com menos area vai dar menos temperatura	28°C

Figura 3.8 – Tabela de registos do Gonçalo

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
Frigideira 1	20 cm largura 600 cm ² 30 cm comprimento	meio litro	22°C	A frigideira 1 fique mais fria	26°C
Frigideira 2	27 cm largura 1215 cm ² 45 cm comprimento	meio litro de água	22°C	A frigideira 2 vai ficar mais quente	28°C

Figura 3.9 – Tabela de registos do Gabriel

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
Frigideira 1	600 cm ²	500 ml	22°C	vai ter mais temperatura	26°C
Frigideira 2	1215 cm ²	500 ml	22°C	vai ter menor temperatura	28°C

Figura 3.10 – Tabela de registos do David

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
Frigideira 1	largura=20 Comprimento=30=600cm ²	meio litro 0,5L	22°C graus	A Frigideira 1 vai ter igual a 2	26°C
Frigideira 2	largura=27 Comprimento=45=1215	meio litro 0,5L	22°C graus	A Frigideira 2 vai ter igual a 1	28°C

Figura 3.11 – Tabela de registos da Joana

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
600 Frigideira 1	20 cm largura 30 cm comprimento	0,50 litros	22°C	30°C	26°C
1215 Frigideira 2	27 cm largura 45 cm comprimento	0,50 litros	22°C	27°C	28°C

Figura 3.12 – Tabela de registos do Rafael

O registo da quantidade de água foi realizado de diversas formas: seis alunos representaram *0,5L* (exemplo nas figuras 3.8, 3.11 e 3.12); oito alunos representaram por extenso *meio litro* (exemplo nas figuras 3.9 e 3.11); e dois alunos representaram *500ml* (exemplo na figura 3.10). Relativamente ao registo da temperatura inicial, a maioria dos alunos evidenciou um registo acompanhado da simbologia correta dos graus *Celsius* (°C), no entanto houve dois alunos que não registaram a simbologia da temperatura corretamente (exemplo na figura 3.11). No que diz respeito ao preenchimento da coluna do prevejo que, a maioria dos alunos descreveu aquilo que achavam que iria acontecer à temperatura da água por comparação com a outra, à exceção de um aluno que previu as temperaturas exatas que a água iria atingir (figura 3.12).

Após a preparação da atividade, os alunos demonstraram noções sobre a utilização de um isolante térmico:

Professora: – Turma, trouxe um objeto que achei necessário para a nossa atividade. Alguém sabe o que é?

Pedro: – Cortiça!

Professora: – Boa! E para o que é que vai servir a cortiça?

Pedro: – Para absorver o calor.

Professora: – Para absorver o calor?

Pedro: – Aí, não! O contrário. Para... não é bem repelir, é... diminuir o calor.

Professora: – Ok. Então diriam que a cortiça é um bom condutor térmico ou um mau condutor térmico?

Alguns alunos (em simultâneo): – Mau condutor térmico.

Professora: – Então se eu colocar isto por baixo do tabuleiro, a cortiça vai impedir o quê?

Pedro: – Vai impedir que o tabuleiro aqueça em baixo.

Professora: – Ou seja, vai impedir que a temperatura passe do tabuleiro para onde?

Pedro: – Para o chão.

Através do diálogo acima transcrito, verifica-se que houve um aluno que imediatamente soube identificar a cortiça e, apesar de expressar o seu raciocínio de forma confusa e pouco clara, foi perceptível a intenção da sua afirmação e foi necessário ajudá-lo a clarificar o seu vocabulário através da colocação de perguntas que o guiassem nesse sentido.

Os tabuleiros foram colocados ao sol durante vinte minutos e, no tempo de espera pelos resultados, foi realizada a tarefa do cálculo da área de um painel solar, contemplada no subcapítulo seguinte.

Após os vinte minutos de espera, realizou-se a medição da temperatura final, em ambos os termómetros dentro dos tabuleiros (figura 3.13), e chegou-se ao resultado de uma temperatura da água de 28°C no tabuleiro 1 (maior área), e 26°C no tabuleiro 2 (menor área). Assim foi possível comprovar a relação direta que a área tem na influência da captação de energia solar.



Figura 3.13 – Tabuleiro 1 [direita]; Tabuleiro 2 [esquerda]

Antes da reflexão em grande grupo sobre os resultados obtidos, foi solicitado aos alunos que realizassem as suas reflexões individuais por escrito. Saliem-se as seguintes:

Concluo que quanto menos for a altura da água
mais bate no fundo aquecendo mais a água.

[Concluo que quanto menos for a altura da água mais bate no fundo aquecendo mais a água.]

Figura 3.14 – Conclusão do Rafael

Concluo que a frigideira maior aqueceu mais porque a maior frigideira
tem a água mais rasa porque o tabuleiro é maior.
E a mais pequena ~~é~~ demora mais para aquecer.

[Concluo que a frigideira maior aqueceu mais porque a maior frigideira tem a água mais rasa porque o tabuleiro é maior. E a mais pequena demora mais para aquecer.]

Figura 3.15 – Conclusão da Mariana

Concluo que A frigideira maior como tem mais área
absorveu melhor o calor.

[Concluo que a frigideira maior como tem mais área absorver melhor o calor.]

Figura 3.16 – Conclusão do Pedro

Concluo que Nós vimos que eu e a minha colega estávamos erradas e a frigideira 2 ficou com mais temperatura que a outra. E era porque a frigideira 2 tem mais espaço e consegue apanhar mais raios solares.

[Concluo que nós vimos que eu e a minha colega estávamos erradas e a frigideira 2 ficou com mais temperatura que a outra. E era porque a frigideira 2 é mais espaçosa e consegue apanhar mais raios solares.]

Figura 3.17 – Conclusão da Joana

Concluo que a maior frigideira como tem maior área tem mais espaço para os raios do sol bater em mais área.

[Concluo que a maior frigideira como tem maior área tem mais espaço para os raios do sol bater em mais área.]

Figura 3.18 – Conclusão do Afonso

Todos os alunos evidenciaram uma conclusão correta, com justificações plausíveis face aos resultados obtidos. É notável que alguns alunos enfatizaram mais a justificação da diferença de temperaturas baseando-se na maior dispersão e menor profundidade da água no tabuleiro de maior área de base (exemplos nas figuras 3.14 e 3.15), enquanto outros alunos focaram-se mais em justificar esta diferença como resultado da diferença de áreas de ambas as bases do tabuleiro (exemplos nas figuras 3.16, 3.17 e 3.18). Como forma de conclusão e reflexão em grande grupo, chegou-se à conclusão de que a diferença de temperaturas se deveu a ambas razões supramencionadas.

Cálculo da área de um Painel Solar

De forma a realizar uma conexão entre a atividade anterior e os painéis solares, sucedeu-se o seguinte diálogo em grande grupo:

Professora: - Esta atividade, dos tabuleiros ao sol para aquecer a água, faz-vos lembrar alguma coisa do nosso dia a dia?

Hugo: – Um fogão.

Pedro: – Um forno

Sabrina: – A cozinha

Professora: – Mais alguma opinião?

Afonso: – O fogão quando é para aquecer a água.

Professora: – Ok. Mas neste caso estamos a utilizar o quê para aquecer a água?

Alguns alunos (em simultâneo): – O sol!

Professora: – Muito bem. E para que serve o sol, no nosso dia a dia, nas nossas casas?

Mariana: – Secar roupa.

Professora: – Sim, por exemplo. Mais alguma coisa?

Gabriel: – Aquecer a casa.

Professora: – Como é que nós podemos aquecer as nossas casas com o sol?

Pedro: – Abrimos as janelas para entrar o sol.

Professora: – Boa. Então, e alguma vez vocês já viram em cima das casas umas coisas estranhas que absorvem...

Pedro (interpolando): – Painéis solares!

Professora: – E o que são os painéis solares?

Pedro: – Servem para dar energia.

Professora: – Como?

Pedro: – Absorvendo os raios solares.

Professora: – Ou seja, os painéis solares absorvem os raios solares, e depois o que é que acontece?

Pedro: – Vai formando energia.

Professora: – E para que é que serve essa energia?

Pedro: – Para várias coisas.

Professora: – Que tipo de coisas?

Rúben: – Energia eólica!

Professora: – Sabes o que é a energia eólica, Rúben?

Pedro (interpolando): – É a do vento.

Professora: – Sim, Pedro, é a transformação da energia do vento. E nós estamos a falar de que energia?

Rúben: – Do sol.

Professora: – Muito bem. Então para que é que serve os painéis solares?

Afonso: – Para produzir energia.

Professora: – E para que serve essa energia?

Afonso: – Para utilizar nas nossas casas.

Professora: – Muito bem.

Através do diálogo acima transcrito foi possível analisar de que forma é que os alunos realizaram uma conexão entre a atividade anteriormente realizada e o propósito dos painéis solares, através da colocação de questões que os conduziram a realizar essa conexão de conhecimentos. A falta de participação oral demonstrada pela maioria dos alunos às questões realizadas, à exceção dos que participaram frequentemente, evidência conhecimentos pouco aprofundados sobre o tema das energias renováveis. Em virtude desta eventualidade já ser expectável, realizou-se um breve aprofundamento sobre os conceitos inerentes aos painéis solares, bem como a sua funcionalidade.

Após a discussão, deu-se início ao trabalho autónomo para realizar o cálculo da área de um painel solar (apêndice C). Ao longo da realização do trabalho autónomo, a pares, foi feita uma circulação pelos alunos, de modo a auxiliar possíveis dúvidas. Durante este momento, foram evidenciadas várias dúvidas, relacionadas com conceções acerca do cálculo das áreas. Realça-se a questão da Joana:

Joana: – O que é cm^2 ?

Professora: – É centímetros quadrados.

Joana: – Mas é vezes dois?

Professora: – Não, não é vezes dois. Centímetros quadrados é a unidade de medida da área, que neste caso refere-se á área da célula.

A Joana demonstrou confundir a representação das unidades de medida de área com a multiplicação pelo número dois, visto que dois é o expoente da unidade de medida da área. O Rafael também demonstrou confundir conceitos sobre o cálculo de áreas, quando questionou se o painel solar *é para calcular a área com o pi?*

Através da análise documental dos cálculos realizados, foi possível constatar que, dos 15 alunos, 10 apresentaram cálculos corretos e 5 apresentaram cálculos incorretos. Dos 10 alunos que apresentaram os cálculos corretos, cinco apresentaram os cálculos totalmente corretos e acompanhados das respetivas unidades de medida (figura 3.19). Dos outros cinco, três não apresentaram as respetivas unidades de medida (figura 3.20) e dois

colocaram incorretamente as unidades de medida (figura 3.21), como é possível analisar através do gráfico 3.2.

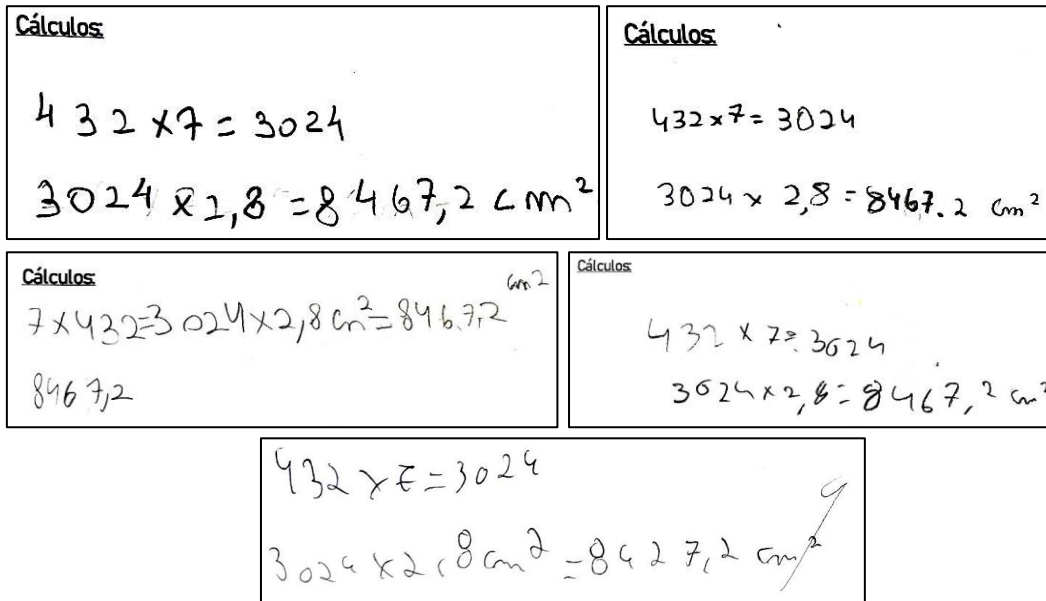


Figura 3.19 – Cálculos corretos com unidades de medida

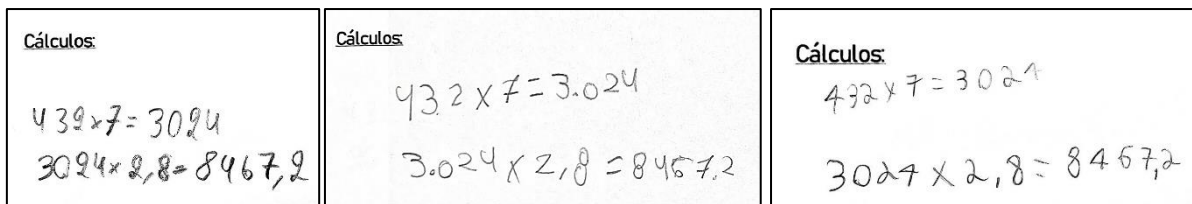


Figura 3.20 – Cálculos corretos sem unidades de medida

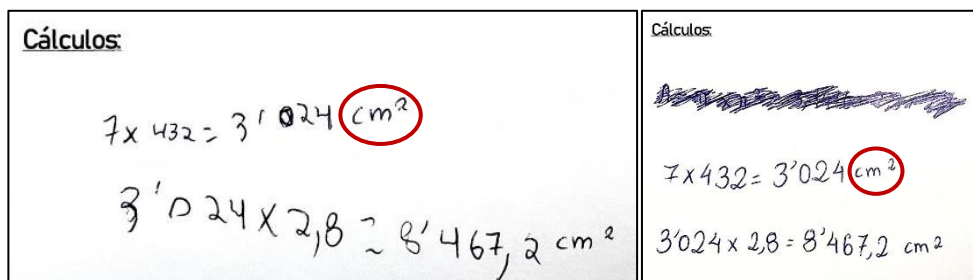


Figura 3.21 – Cálculos corretos, com colocação incorreta das unidades de medida (vermelho)

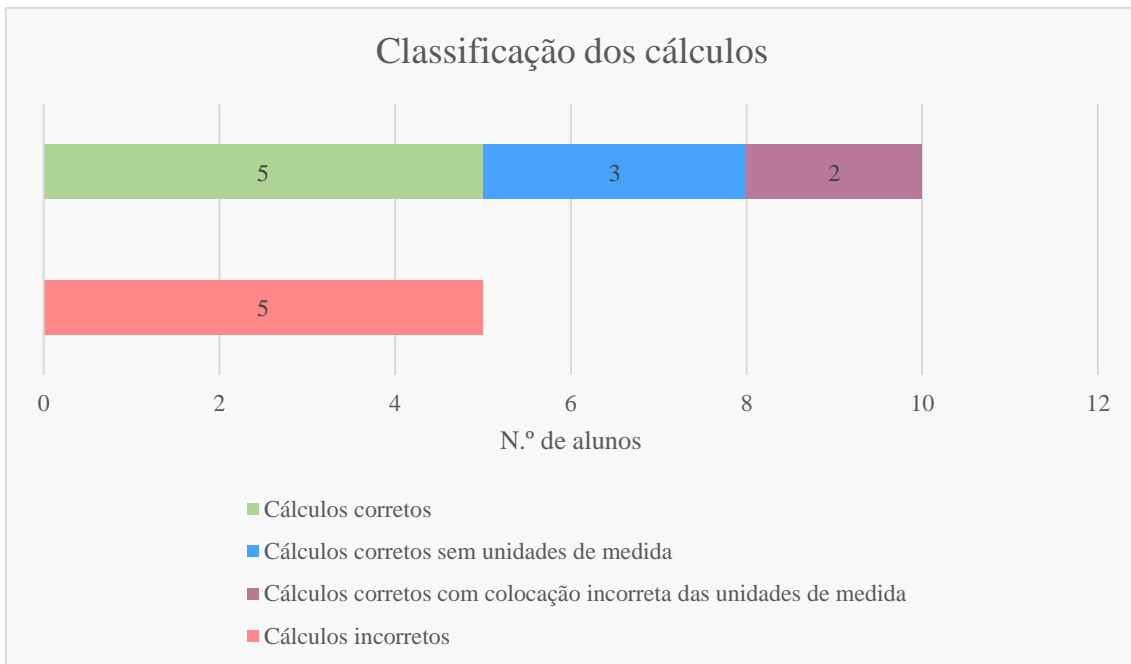


Gráfico 3.2 – Distribuição das classificações dos cálculos dos alunos

Os 5 alunos que apresentaram os cálculos incorretos (figura 3.22) revelaram falta de compreensão relativamente aos dados fornecidos no enunciado do problema, o que demonstrou uma ausência de conexão entre os dados do problema e os cálculos matemáticos adequados.

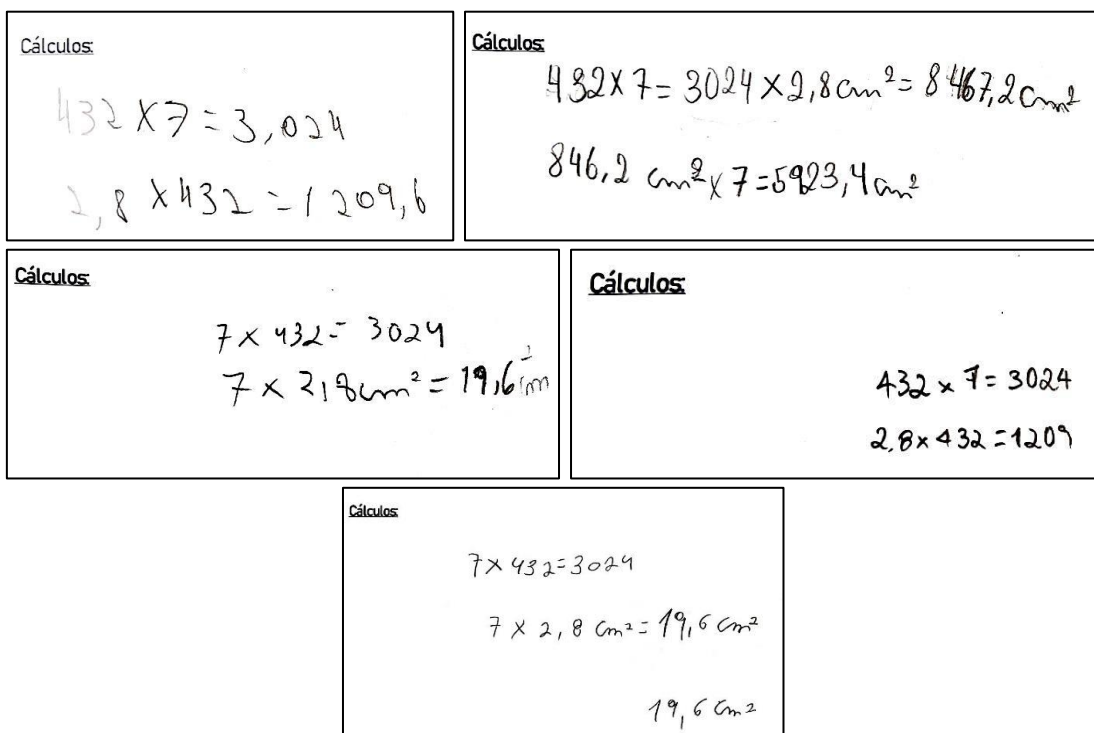


Figura 3.22 – Cálculos incorretos

Medição da área de superfície da folha de uma árvore

A proposta da segunda tarefa foi realizada através da conexão entre as tarefas anteriores, ou seja, a relação entre a área de superfície e a recolha de energia solar, com as folhas das árvores, visto que estas são captadoras naturais de energia solar. Esta tarefa consiste na medição da área de superfície da folha de uma árvore, através de métodos de medição sugeridos pelos alunos. Sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Descobrimos na aula anterior que os painéis solares servem para quê?

Rafael: – Transformam a energia do sol em energia elétrica.

Professora: – Muito bem. E vocês conhecem alguma coisa na natureza que também capte a energia do sol?

Rafael: – Um para-raios!

Gonçalo: – Não! Na natureza!

Rafael: – Então as nuvens! As nuvens não são da natureza? Estão lá em cima.

Professora: – Então as nuvens transformam...?

Rafael (interpolando): – Em raios, são energia!

Professora: – Mas os raios não têm nada a ver com a energia solar ou têm Rafael?

Alguns alunos (em simultâneo): – Não!

Professora: – Recapitulando, qual é a resposta à questão que eu coloquei?

Gonçalo: – É as árvores, as flores...

Professora: – O que é que as árvores e as flores fazem Gonçalo?

Gonçalo: – Dão oxigénio.

Professora: – Sim, e como é que elas se alimentam?

Pedro: – Pela água e pelo sol.

Professora: – E o que é que o sol faz às plantas?

Gabriel: – A fotossíntese!

Professora: – E o que é a fotossíntese?

Gabriel: – É quando elas absorvem sol para crescer.

Professora: – Sim, as plantas absorvem os raios solares e transformam esses raios em quê? (não foram obtidas respostas). – O que é que nós, seres vivos, precisamos para viver?

Gonçalo: – Oxigénio!

Professora: – Também, mais o quê?

Hugo: – Energia.

David: – Água.

João: – Luz.

Marlene: – Vitaminas.

Professora: – Muito bem, então nós os seres humanos para termos vitaminas precisamos de comer, mas as plantas não comem. Então como é que elas se alimentam?

Pedro: – Bebem água.

Professora: – Sim, bebem água e captam a energia luminosa do sol, logo realizam a fotossíntese. E onde é que as plantas realizam a fotossíntese?

Pedro: – Nas folhas.

Rafael: – E no caule também.

Professora: – Muito bem, então se nós compararmos as folhas elas são parecidas com o quê?

Alguns alunos (em simultâneo): – Painéis solares!

Professora: – Muito bem, então na aula passada nós calculamos a área de um painel solar. O que acham de hoje calcularmos a área da folha de uma árvore?

Através do diálogo com os alunos foi possível realizar uma conexão entre os painéis solares com o das folhas das árvores, através da colocação de questões pertinentes que os conduzissem nesse sentido. É perceptível que existem participações menos corretas, em consequência de concepções alternativas sobre o tema, no entanto, o diálogo entre alunos e também com a professora/investigadora ajudou a clarificar certos conceitos.

Como proposta de tarefa, os alunos foram desafiados a calcular a área de superfície de uma folha de uma árvore, que foi previamente escolhida pelos próprios alunos, dentro do recinto escolar. Os alunos foram reunidos em quatro grupos de cinco elementos cada, e foi distribuído a folha de registos da tarefa (apêndice E) e o material de trabalho: duas folhas de árvore; calculadora; régua; tesoura; material de escrita; e papel milimétrico. O papel milimétrico era desconhecido por todos os alunos, tendo sido necessário realizar, grupo a grupo, uma breve explicação do mesmo.

É importante referir que o método de cálculo da área de superfície das folhas ficou inteiramente ao critério dos alunos, tendo sido os mesmos a discutir, dentro dos pequenos

Professora: – Como é que vocês realizaram o cálculo da área entre o retângulo e a margem da folha?

Mariana: – Nós tínhamos um total de dezasseis quadrados completos à volta, mas nós descobrimos que se nós completarmos... está aqui meio quadrado, nós encontramos dentro da folha outro pedacinho que pode completar ele. Então fica um quadrado completo novo e ao total nós encontramos, nós estávamos com dezasseis e passamos a ter vinte e oito completos à volta do retângulo.

Pedro: – E depois somamos os vinte e oito aos quarenta que já tínhamos.

(...)

Professora: – Qual foi o resultado?

Pedro: – Deu oitenta e quatro centímetros quadrados ao todo em toda a folha.

Professora: – Então quer dizer que todas as folhas têm oitenta e quatro centímetros quadrados?

João: – Pelo menos esta aqui tem, não é, não são todas iguais.

Através do registo no papel milimétrico (figura 3.23), dos diálogos acima transcritos e dos registos realizados por cada aluno (figuras 3.24, 3.25 e 3.26) é possível verificar que o grupo 1 definiu como técnica de medição da área a sobreposição da folha da árvore, em papel milimétrico, o rodear pela sua extremidade e a realização de cálculos e contagens. Para a realização da medição, primeiramente, constataram que existe dentro da folha um retângulo, o qual desenharam e realizaram a multiplicação do comprimento pela largura, resultando 40 cm^2 . Posteriormente, contaram mais *dezasseis quadrados completos à volta* do retângulo, e quanto aos restantes quadrados incompletos, os alunos

optaram por realizar uma contagem através da junção de *pedacinhos* que aproximadamente se completam, formando assim doze quadrados completos de 1 cm².

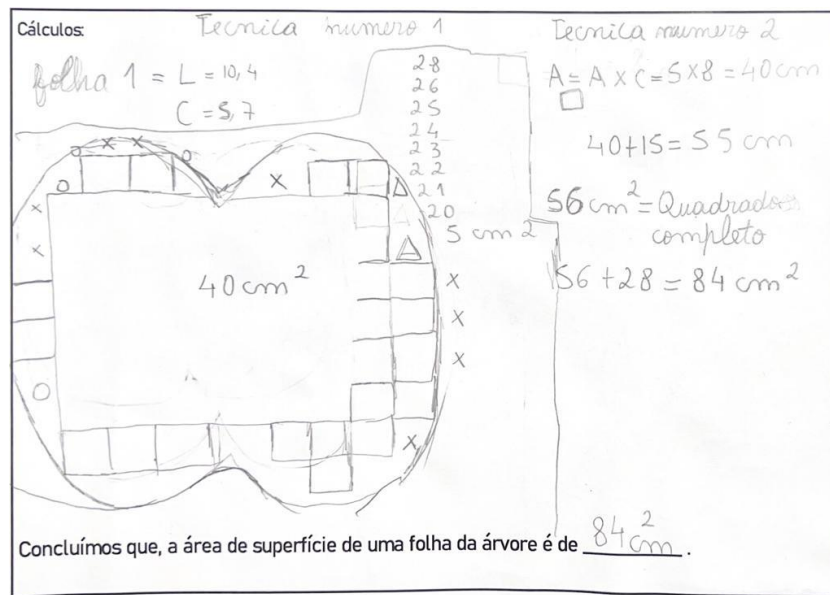
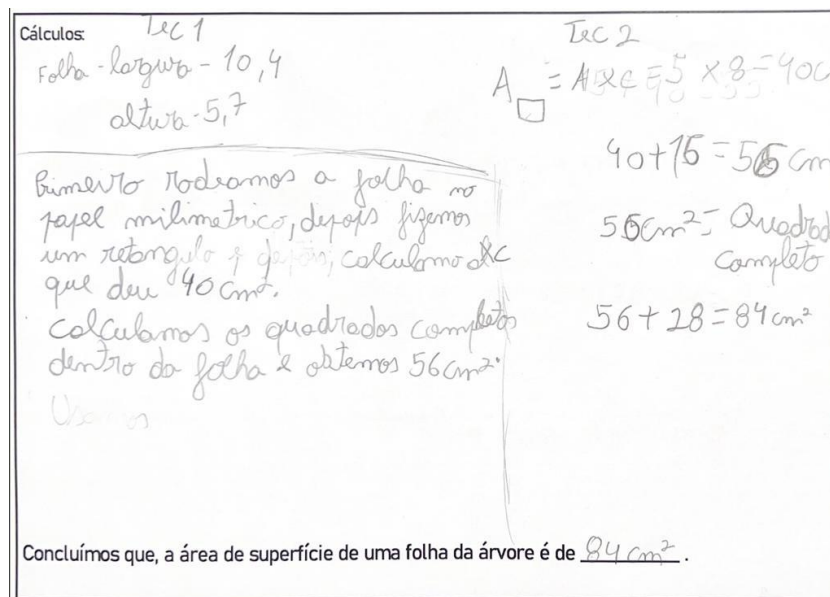
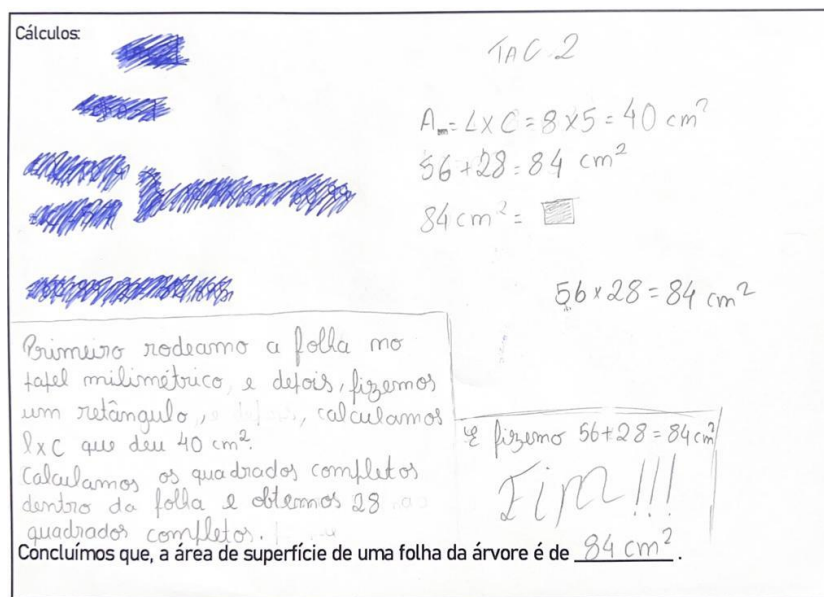


Figura 3.24 – Registo do João



[Primeiro rodeamos a folha no papel milimétrico, depois fizemos um retângulo e depois calculamos que deu 40 cm². Calculamos os quadrados completos dentro da folha e obtemos 56 cm².]

Figura 3.25 – Registo do Pedro



[Primeiro rodeamos a folha no papel milimétrico e depois, fizemos um retângulo, calculamos $l \times c$ que deu 40 cm^2 . Calculamos os quadrados completos dentro da folha e obtemos 28 quadrados completos.]

Figura 3.26 – Registo da Mariana

De modo a analisar o trabalho do grupo 1, considera-se como correta a técnica dialogada pelos alunos à professora/investigadora, para a medição da área da folha da árvore. Através da sobreposição e contorno da folha da árvore em papel milimétrico, os alunos enquadraram uma figura geométrica por eles conhecida, um retângulo, dentro da delimitação da região a medir e calcularam a sua área. Depois maximizaram a contagem dos quadrados unitários em redor do retângulo, e com os espaços que sobraram os alunos comunicaram uma técnica de compensação, que consistia em juntar espaços menores dispersos para formar um conjunto de quadrados unitários, por estimativa.

Assumindo a análise dos registos do Pedro (figuras 3.25 e 3.27), visto que os registos do João e da Mariana são semelhantes, é possível verificar que os alunos realizam corretamente o cálculo da área do retângulo central ($8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$), e somaram corretamente a área do retângulo central aos quadrados unitários completos à volta do retângulo ($40 + 16 = 56 \text{ cm}^2$).

Depois, calcularam a soma dos 56 com 28, no entanto o 56 resulta da soma da área do retângulo com a área dos quadrados unitários completos ($40 + 16$), e o 28 resulta da soma dos quadrados unitários completos com o conjunto de quadrados unitários incompletos ($16 + 12$). Dito isto, os alunos somaram duas vezes o valor 16 (número de quadrados unitários completos) na execução dos seus algoritmos.

$$A_{\square} = A_{\square} = 5 \times 8 = 40$$

$$40 + 15 = 55 \text{ cm}$$

$$55 \text{ cm}^2 = \text{Quadrados completos}$$

$$56 + 28 = 84 \text{ cm}^2$$

Figura 3.27 – Registo dos cálculos do Pedro

Justifica-se que o 28 resulta da soma anteriormente mencionada visto que no diálogo acima transcrito, a Mariana afirmou que *nós tínhamos um total de dezasseis quadrados completos à volta e passamos a ter vinte e oito completos à volta do retângulo*, assim sendo o valor 28 corresponde à soma dos 16 quadrados completos à volta mais os 12 quadrados incompletos formados por compensação ($16 + 12 = 28$). Corrobora-se com a intervenção do Pedro, que afirmou que *depois somamos os vinte e oito aos quarenta que já tínhamos*, para dar o resultado da área da folha da árvore, o que evidenciou que, antes da realização do registo dos cálculos, o aluno tinha realizado o raciocínio de forma correta.

Dito isto, é possível concluir que os alunos do grupo 1, apresentaram uma técnica de medição adequada para uma superfície plana irregular, com três tipos de abordagens diferenciadas na realização dessa medição. Na realização dos algoritmos, os alunos desassociaram os valores dos seus significados, em contexto de resolução do problema. Conclui-se que, para que o cálculo da área da folha ficasse efetivamente correto era necessário que os alunos realizassem a soma de 40 com 28, resultando em 68 cm^2 .

Para além dos registos comentados, é possível verificar que os alunos registaram uma primeira técnica de medição, onde se verifica a medição da altura e da largura, que são as medições da folha da árvore, porém não se verifica qualquer desenvolvimento para além do registo das medições. Quando questionados pela professora/investigadora, os alunos afirmaram que tiveram uma ideia melhor, daí terem iniciado a segunda técnica, que os levou ao resultado supramencionado.

Grupo 2

Após ter sido explicado o objetivo da tarefa e distribuídos os materiais, sucedeu-se o seguinte diálogo com o grupo 2:

Professora: – Que técnicas de medição vocês já pensaram?

Rúben: – Isso é uma folha quê?

Professora: – Isto é uma folha de papel milimétrico. Para que é que serve Rúben?

Rúben: – Para medir milímetros, centímetros, as coisas.

Joana: – A área!

Professora: – Sim. Também dá para medir a área, por exemplo.

David: – Podemos cortar a folha com a tesoura?

Professora: – Da árvore?

David: – Sim.

Professora: – Podes. Também podem cortar a folha de papel milimétrico.

Joana: – Tive uma ideia!

Professora: – Tiveste? Diz lá qual foi a ideia Joana.

Joana: – Se nós traçarmos aqui isto, rodear, e depois nós cortamos, se calhar nós podemos fazer as contas e meio que descobrir.

Professora: – Parece-me uma ideia interessante. Ouviram grupo?

Afonso: – Não percebi.

Professora: – Ok. Joana explica lá a tua ideia outra vez com mais calma.

Joana: – Se nós traçarmos aqui (apontado para a extremidade da folha da árvore), e rodearmos, depois nós cortarmos tudo pela medida da folha, se calhar nós podemos fazer as contas com a folha e nós podemos descobrir a área.

Inicialmente, alguns alunos mostraram-se confusos com a ideia da Joana, porém a professora/investigadora sugeriu ao grupo que colocassem a ideia da Joana em prática e verificassem se era viável ou não. Assim, o grupo 2 avançou com a proposta de sobrepor a folha da árvore sobre o papel milimétrico, rodear a folha pelas extremidades e depois recortar com a tesoura a folha de papel milimétrico (figura 3.28).

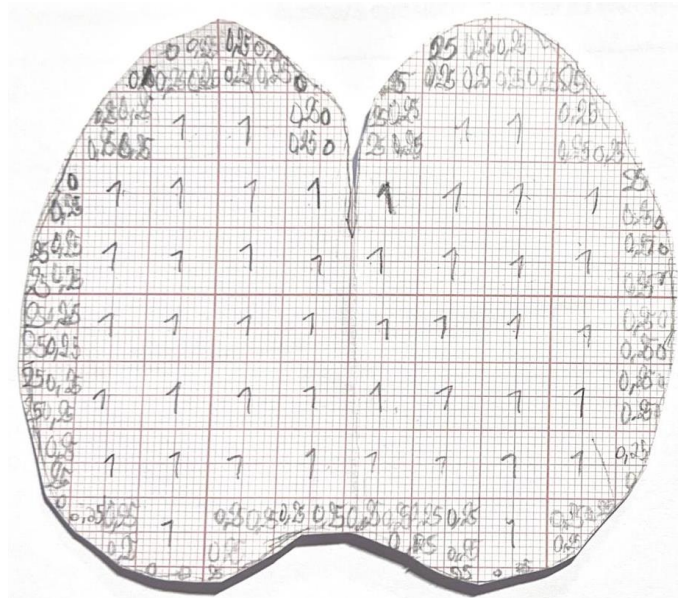


Figura 3.28 – Registo em folha de papel milimétrico pelo grupo 2

Após alguns momentos de trabalho autónomo, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Então grupo dois, como é que mediram a área?

Marlene: – Então, a gente contou os uns e depois a Joana escreveu os zero vírgula vinte e cinco no resto dos quadrados mais pequenos, e depois contámos tudo e agora vamos fazer uma conta dos uns mais os zeros vírgula vintes e cinco.

Afonso: – Mas ainda nos falta contar aqui alguns cantinhos.

Professora: – Muito bem, e quantos quadrados completos contaram?

Afonso: – Contámos quarenta e seis.

Professora: – E quantos quadrados de zero vírgula vinte e cinco centímetros quadrados?

David: – Cinquenta e dois.

Professora: – E qual é a área que eles ocupam?

David: – Fizemos cinquenta e dois vezes os zero vírgula vinte e cinco.

Professora: – E qual foi o resultado?

David: – Deu treze.

Professora: – Então e os restantes quadrados mais pequenos, como é que os contaram?

Afonso: – A gente não contou.

Professora: – Ignoraram?

Afonso: – Sim.

Professora: – Tentem lá arranjar uma forma de contarem também os mais pequenos.

Através do registo no papel milimétrico (figura 3.28), dos diálogos acima transcritos e dos registos realizados por cada aluno (figuras 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32) é possível verificar que o grupo 2 definiu como técnica de medição da área a sobreposição

da folha de árvore em papel milimétrico, rodear pela sua extremidade, recortar o papel milimétrico e realizar contagens e cálculos. Para a realização da medição, primeiramente, reconheceram a existência de quadrados unitários, ou seja, com 1 cm^2 de área, realizando a sua contagem. Posteriormente, reconheceram que, na folha de papel milimétrico, este quadrado unitário estava dividido em quatro partes iguais e, com a ajuda da calculadora, realizaram a operação da divisão de 1 por 4, obtendo assim o valor de $0,25 \text{ cm}^2$ de área para os quadrados menores, devidamente assinalados pelos alunos na figura 3.28.



<p>Cálculos: $0,25 =$ </p> <p>$1 \text{ cm}^2 =$  1</p> <p>$0,25 \times 52 = 13$</p> <p>$1 \times 46 \times 13 = 59$</p>	<p>$46 \times 1 \text{ cm}^2 = 46 \text{ cm}^2$</p> <p>$52 \times 0,25 \text{ cm}^2 = 13$</p> <p>$46 + 13 = 59 \text{ cm}^2$</p>
---	---

Figura 3.29 – Registos do Afonso



<p>Cálculos:</p> <p>$0,25 =$ </p> <p>$1 \text{ cm}^2 =$  $\rightarrow 0,25$</p> <p>$0,25 \times 52 = 13$</p> <p>$1 \times 46 + 13 = 59$</p>	<p>$46 \times 1 \text{ cm}^2 = 46$</p> <p>$52 \times 0,25 \text{ cm}^2 = 13$</p> <p>$46 + 13 = 59 \text{ cm}^2$</p>
---	--

Figura 3.30 – Registos do David



<p>Cálculos: $0,25 =$ </p> <p>$1 \text{ cm}^2 =$  $\rightarrow 0,25$</p> <p>$0,25 \times 52 = 13$</p> <p>$1 \times 46 + 13 = 59$</p>	<p>$46 \times 1 \text{ cm}^2 = 46 \text{ cm}^2$</p> <p>$52 \times 0,25 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2$</p> <p>$46 + 13 \text{ cm}^2 = 59 \text{ cm}^2$</p>
--	---

Figura 3.31 – Registos da Joana

Handwritten calculations showing the area calculation of a leaf:

$$46 \times 1 \text{ cm}^2 = 46 \text{ cm}^2$$
$$52 \times 0,25 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2$$
$$46 + 13 = 59 \text{ cm}^2$$

Figura 3.32 – Registos da Marlene

De modo a analisar o trabalho do grupo 2, considera-se correta a técnica dialogada à professora/investigadora e evidenciada pelas produções dos alunos, para a medição da área da folha da árvore. Através da sobreposição e contorno da folha da árvore em papel milimétrico, os alunos realizaram a contagem de 46 quadrados unitários e realizaram corretamente a operação da multiplicação dos 46 quadrados pela área de cada um, que é 1 cm^2 , obtendo assim 46 cm^2 de área de todos os quadrados unitários completos. Posteriormente, realizaram a contagem de 52 quadrados menores e realizaram corretamente a operação da multiplicação pela sua respetiva área, que é $0,25 \text{ cm}^2$, obtendo assim 13 cm^2 de área de todos os quadrados. Após obterem ambos os valores, realizaram a soma dos 46 com os 13, obtendo o resultado de 59 cm^2 para a área de superfície de uma folha da árvore (figura 3.33).

Concluimos que, a área de superfície de uma folha da árvore é de 59 cm^2 .

Figura 3.33 – Resposta final do grupo 2

É importante salientar que, através dos registos realizados pelos alunos na folha de papel milimétrico (figura 3.28), os alunos registaram o valor 0,25 mesmo em zonas onde não se encontravam quadrados com a quarta parte da unidade completos. Através de uma análise mais rigorosa, é possível verificar que, apesar dos registos na folha não estarem totalmente corretos, os alunos nos seus registos de cálculos apenas consideraram 52 quadrados. Dito isto, deduz-se que quando foi feita a contagem os alunos contaram corretamente apenas aqueles que apresentavam na sua totalidade $0,25 \text{ cm}^2$ de área, caso contrário o valor seria muito superior a 52.

Tendo em conta a análise anterior, é possível concluir que, à exceção dos quadrados unitários completos e dos quadrados com a quarta parte da unidade também

completos, o grupo 2 não teve em consideração qualquer método para realizar a medição/contagem das restantes zonas incompletas próximas da extremidade da folha, resultando numa estimativa da medição da área por defeito.

Grupo 3

Após ter sido explicado o objetivo da tarefa e distribuídos os materiais, sucedeu-se o seguinte diálogo com o grupo 3:

Professora: – Quais são as técnicas que vocês já pensaram?

João: – A do quadrado.

Professora: – Qual quadrado?

João: – Lado vezes lado. Nós medimos os lados (apontando para uma das metades da folha).

Professora: – E acham que esta metade se parece com um quadrado?

Luís: – Não.

Professora: – A mim parece-me mais um retângulo do que um quadrado.
Pensaram em mais alguma técnica de medição?

Tomás: – Mais nenhuma.

Professora: – Então tentem lá fazer da forma que me explicaram.

Após dado alguns momentos para o grupo trabalhar autonomamente, sucedeu-se um novo diálogo:

Professora: – Grupo três, o que é que estamos a fazer?

João: – Estamos a medir os retângulos. Nós dividimos a folha ao meio e estamos a medir os retângulos, e depois com as pontas fazemos um círculo para medir. Fizemos com os dois lados da folha e agora vou somar.

Professora: – Não percebi muito bem a vossa ideia. Depois dos cálculos podem fazer um desenho daquilo que estão a fazer?

João: – Sim, eu já escrevo no fim.

Professora: – E essa foi a única técnica que arranjaram para medir ou alguém teve alguma ideia diferente?

Tomás: – Estava a pensar colocar a folha aqui em cima e contar os quadrados (referindo-se à folha de papel milimétrico).

Professora: – Parece-me outra ideia a explorar.

João: – Então temos de alterar tudo.

Professora: – Não é necessário alterar nada, vocês acabam esta ideia que estão a fazer e depois tentam pela ideia do Tomás e vêm os resultados que dá nas duas.

Após dados alguns momentos de trabalho autónomo, a professora/investigadora retornou ao grupo 3 e verificou que dois alunos tentaram avançar com a ideia do Tomás, e que o João continuava a realizar os cálculos explicados anteriormente com a Catarina:

Professora: – João, como é que estão os cálculos?

João: – Eu medi seis vírgula cinco aqui, seis vírgula cinco aqui...

Professora: – Esse valor é o quê?

João: – É o comprimento.

Professora: – Sim, de cada lado da folha. E que mais?

João: – Depois eu fiz vezes a largura.

Professora: – De cada metade?

João: – Sim. Depois agora vou fazer os círculos.

Foram feitas novas tentativas de diálogo com o grupo 3, no entanto optaram por explicar a técnica que utilizaram pelo registo escrito (figuras 3.34 e 3.35)

Cálculos

$A_1 = C \times l = 6,3 \times 4,4 = 27,72$

$A_2 = C \times l = 6,4 \times 4,4 = 28,16 \text{ cm}^2$

$A_1 = \pi \times r^2 = 3,1416 \times 1,5^2 = 3,1416 \times 2,25 = 7,0686$

$A_2 = \pi \times r^2 = 3,1416 \times 1,6^2 = 3,1416 \times 2,56 = 8,042496$

$A_1 = 27,72 + 7,0686 = 34,7886$

$A_2 = 28,16 + 8,042496 = 36,202496$

Concluimos que, a área de superfície de uma folha da árvore é de 70,991096.

$A_{\text{folha}} = 34,7886 + 36,202496 = 70,991096 \text{ cm}^2$

Figura 3.34 – Registo dos cálculos do João

Nós dividimos a folha ao meio e medimos o comprimento e a largura e calculamos a área. Usamos as pontas como fosse círculos e no final calculamos a área de cada parte da folha e no final calculamos as duas partes e deu a área final.

[Nós dividimos a folha ao meio e medimos o comprimento e a largura e calculámos a área. Usámos as pontas como fosse círculos e no final calculámos a área de cada parte da folha e no final calculámos as duas partes e deu a área final.]

Figura 3.35 – Registo descritivo do João

Através do registo dos cálculos efetuados pelo João (figura 3.34) e do registo descritivo (figura 3.35), é possível verificar que os alunos dividiram a folha da árvore ao meio na vertical, mediram o comprimento e a largura de cada metade e realizaram o cálculo da área como se de um retângulo se tratasse, ou seja a multiplicação do comprimento pela largura, obtendo um total de 27,72 cm² de área para a metade 1, e 28,16 cm² para a metade 2. Para uma melhor compreensão do raciocínio dos alunos, realizou-se um esquema figurativo (figura 3.36).

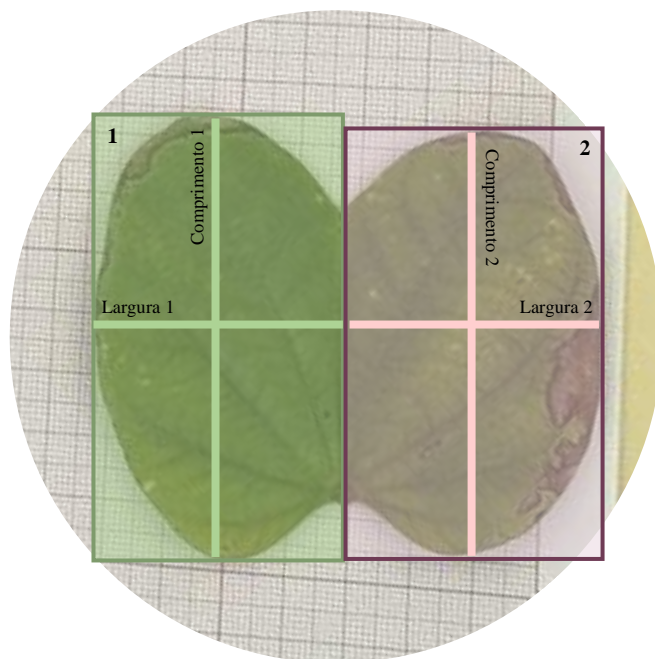


Figura 3.36 – Esquema figurativo do raciocínio do grupo 3

Posteriormente, verifica-se que os alunos utilizaram a fórmula do cálculo da área de um círculo ($\pi \times r^2$), alegando *usamos as pontas como fosse círculos e no final calculámos a área de cada parte da folha*. Através destes registos pressupõe-se que os alunos visualizaram cada metade da folha como a forma de um círculo, utilizando como valor para o raio 1,5 cm na metade 1, e 1,6 cm para a metade 2. A utilização desta fórmula, neste contexto de resolução, demonstra falta de entendimento conceptual sobre o cálculo de áreas de círculos, e da falta de entendimento de que esta fórmula apenas serve para círculos que detêm do mesmo raio, que não é de todo o caso das metades da folha desta árvore.

Adiante, o João realiza a operação da adição da área do retângulo com a área do círculo ($27,72 + 7,0686$), relativamente à metade 1, obtendo 34,7886 cm², e a mesma adição para os valores da metade 2 ($28,16 + 8,042496$), obtendo 36,202496 cm². Por fim,

realiza a operação da adição destes dois valores ($34,7886 + 36,202496$), obtendo o resultado $70,991096 \text{ cm}^2$, alegando que este é o valor da área de superfície da folha da árvore.

Através da análise aos registos do grupo 3, é possível concluir que a realização do cálculo da área de cada metade através do enquadramento de dois retângulos em cada uma das metades, como é possível observar no esquema figurativo (figura 3.36), representa uma técnica válida e aproximadamente correta para calcular a área da folha da árvore por excesso. Já a realização do cálculo da área de um círculo em cada uma das metades da folha e adicionar essa área à área do retângulo inicialmente calculado, não faz qualquer tipo de sentido perante o objetivo definido pela tarefa proposta.

É possível constatar que os alunos do grupo 3 conhecem os procedimentos matemáticos do cálculo da área do retângulo e do círculo, no entanto, não obstante à possibilidade da utilização destas fórmulas, os alunos relacionaram-nas de forma incorreta e sem sentido, o que demonstra falta de entendimento conceptual sobre a aplicação de fórmulas para o cálculo da área em contexto de resolução de problemas.

Visto que o valor da área de superfície da folha da árvore era necessário para a tarefa da aula seguinte, sugeriu-se ao grupo 3 a realização de uma nova tentativa, desta vez pela ideia sugerida pelo Tomás, que não chegou a ser terminada na sala de aula. Os alunos aceitaram o desafio e apresenta-se de seguida as suas resoluções.

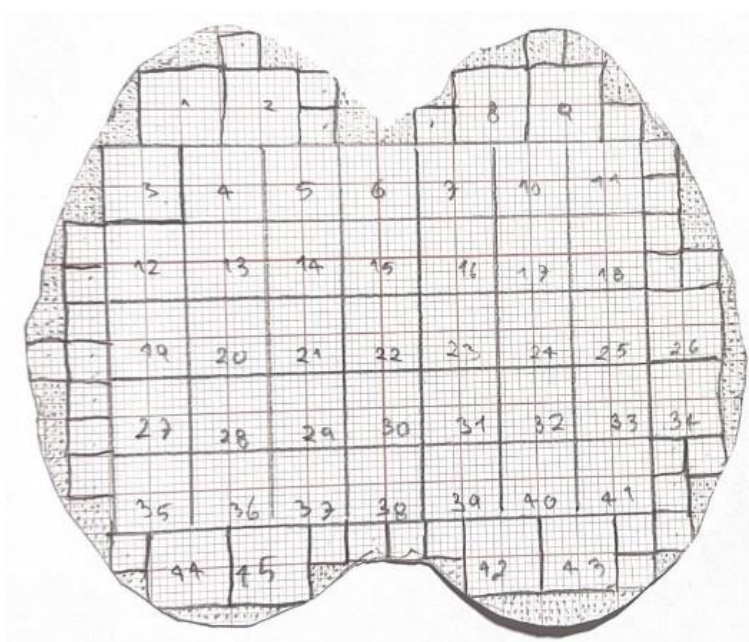
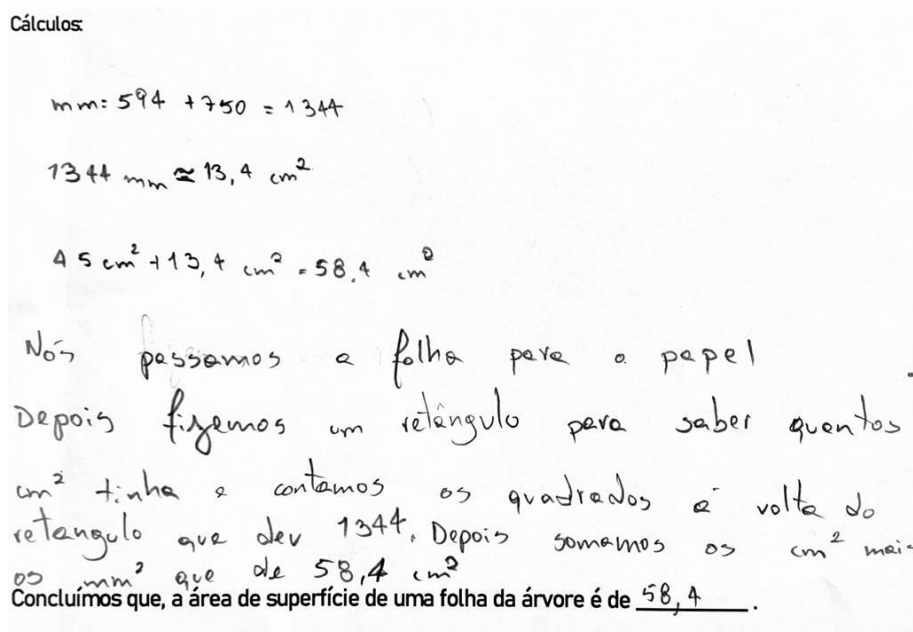


Figura 3.37 – Registo em papel milimétrico pelo grupo 3



[Nós passamos a folha para o papel. Depois fizemos um retângulo para saber quantos cm^2 tinha e contamos os quadrados à volta do retângulo que deu 1344. Depois somamos os cm^2 mais os mm^2 que deu 58,4 cm^2 .]

Figura 3.38 – Correção do grupo 3

Através dos registos realizados pelos alunos do grupo 3 (figura 3.37 e 3.38), é possível verificar que, de facto, colocaram em prática a técnica sugerida pelo Tomás, dito pelo mesmo *colocar a folha aqui em cima e contar os quadrados*, ou seja, sobrepor a folha da árvore em papel milimétrico, rodear pela sua extremidade, recortar o papel milimétrico e realizar contagens e cálculos. Para a realização da medição, primeiramente, reconheceram a existência de quadrados unitários completos, ou seja, com 1 cm^2 de área, e realizaram a sua contagem que resultou 45 cm^2 . Posteriormente, registaram o cálculo $594 + 750$, indicando-o como a soma dos milímetros, que, através de uma análise detalhada à folha de papel milimétrico (figura 3.37), verifica-se que os alunos dividiram o espaço restante de duas formas: traçaram 30 quadrados mais pequenos que representam a quarta parte da unidade, ou seja $30 \times 0,25 = 7,5 \text{ cm}^2$ ou 750 mm^2 ; e assinalaram os quadrados mais pequenos de 1 mm^2 , realizando a sua contagem um a um, que corresponde ao valor 594 mm^2 . Desta soma obteve-se 1344 mm^2 , que convertidos para cm^2 resultou aproximadamente $13,4 \text{ cm}^2$. Depois efetuou-se a operação da adição dos 45 com 13,4, resultando em $58,4 \text{ cm}^2$.

Considera-se a técnica utilizada como adequada e os cálculos efetuados como totalmente corretos. Os alunos realizaram uma técnica de medição e contagem que se aproximou ao máximo do valor real da área de superfície desta folha da árvore.

Grupo 4

Após ter sido explicado o objetivo da tarefa e distribuídos os materiais, sucedeu-se o seguinte diálogo com o grupo 4:

Professora: – Grupo quatro, o que é que nós estamos a fazer?

Hugo: – Ele está a cortar.

Gabriel: – Nós estamos a rodear e a cortar.

Professora: – Muito bem, continuem. Isto aqui é o quê?

Hugo: – Isso aí foi outra coisa que nos tentamos, que era o diâmetro da folha, mas depois nós percebemos que não dava.

Através deste primeiro diálogo, a professora/investigadora apercebeu-se que os alunos já tinham iniciado duas tentativas de técnicas para o cálculo da área da folha da árvore. Quando questionados sobre o registo de uns cálculos, que, entretanto, foram apagados pelo grupo, justificaram que tentaram calcular a área da folha através da medição do diâmetro da mesma, no entanto, aperceberam-se que a medida do diâmetro não é igual em toda a folha, pois apesar desta se assemelhar a um círculo, o resultado não iria se aproximar tanto da medida real da área. A segunda tentativa evidenciada no momento do diálogo foi a sobreposição da folha da árvore em papel milimétrico, rodear pela sua extremidade e recortar o papel milimétrico.

Após alguns momentos de trabalho autónomo, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Este valor sessenta e cinco é o quê?

Gabriel: – É os quadrados completos.

Professora: – E os sete vírgula vinte e cinco?

Sabrina: – São os quadrados de zero vírgula vinte e cinco.

Professora: – Então dá quanto a conversão?

Gabriel: – Dá vinte e oito.

Professora: – Não é vinte e oito. Dos milímetros quadrados para centímetros quadrados recuamos a vírgula dois algarismos. Façam la a conversão.

Hugo: – Dá dois vírgula oito.

Professora: – Dois vírgula oito quê?

Hugo: – Centímetros quadrados.

Através do registo no papel milimétrico (figura 3.39), dos diálogos acima transcritos e dos registos realizados por cada aluno (figuras 3.40, 3.41 e 3.42) é possível verificar que o grupo 4 definiu como técnica de medição da área a sobreposição da folha de árvore em papel milimétrico, rodear pela sua extremidade, recortar o papel milimétrico e a realização de contagens e cálculos. Para a realização da medição, primeiramente, reconheceram a existência de quadrados unitários completos, ou seja, com 1 cm^2 de área, realizando a sua contagem. Posteriormente, os alunos evidenciaram algumas dúvidas relativamente às partes que não estavam completas, tendo sido necessário fazer uma explicação mais detalhada do papel milimétrico. Após esta explicação, os alunos registaram os quadrados mais pequenos com $0,25 \text{ cm}^2$ de área (figura 3.39).

Cálculos

$$69 \text{ cm}^2 =$$
$$280 \text{ mm}^2 = 2,8 \text{ cm}^2$$
$$29 = 0,25 \text{ cm}^2 = 7,25 \text{ cm}^2$$
$$72,25 \text{ cm}^2 + 2,8 = 75 \text{ cm}^2$$
$$69 + 7,25 = 72,25 \text{ cm}^2$$

Figura 3.40 – Registo do Hugo

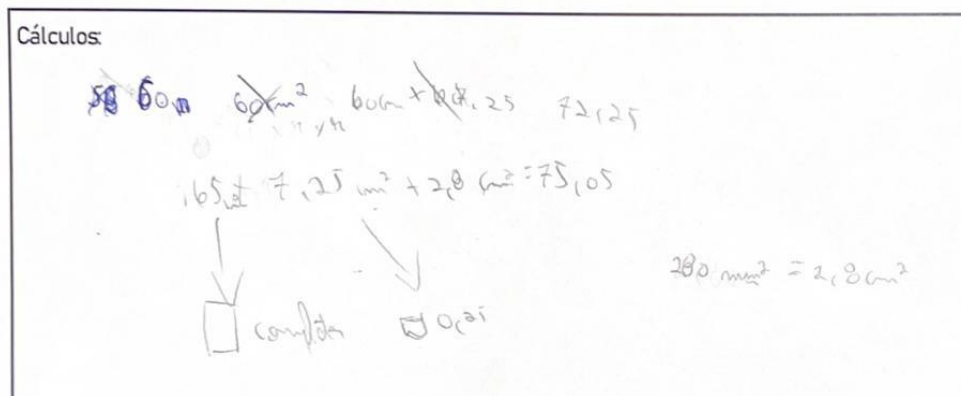


Figura 3.41 – Registo do Gabriel

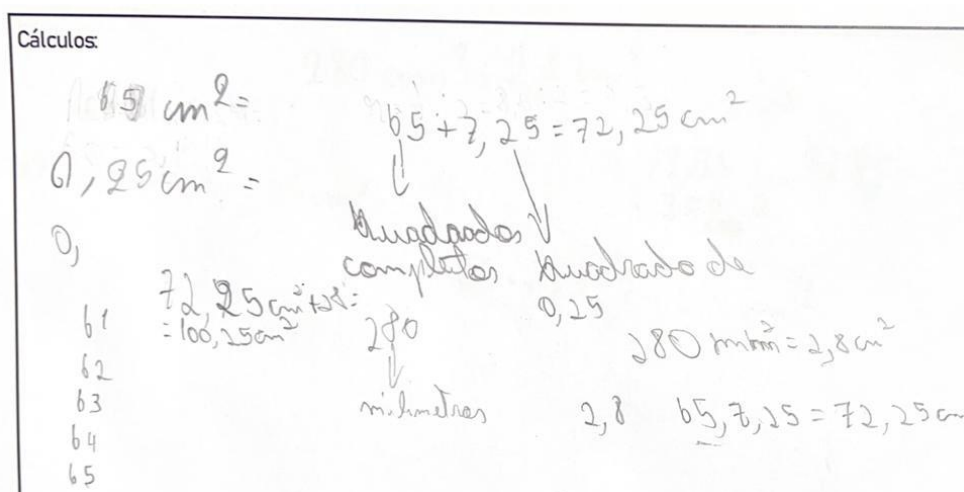


Figura 3.42 – Registo da Sabrina

De modo a analisar o trabalho do grupo 4, considera-se correta a técnica evidenciada pelas produções dos alunos, para a medição da área da folha da árvore. Através da sobreposição e contorno da folha da árvore em papel milimétrico, os alunos realizaram a contagem de 65 quadrados unitários completos, ou seja 65 cm². Posteriormente, realizaram a contagem de 29 quadrados mais pequenos, que representam a quarta parte da unidade, e realizaram corretamente a operação da multiplicação pela sua respetiva área, que é 0,25 cm², obtendo assim 7,25 cm² de área de área todos os quadrados. Depois os alunos realizaram a contagem dos quadrados com 1 mm² de área, que deu um total de 280 mm², converteram para 2,8 cm², com o auxílio da professora/investigadora. Por fim, realizaram a soma destes três valores (65 + 7,25 + 2,8), resultando aproximadamente 75 cm² de área de superfície da folha da árvore (figura 3.43).

Concluimos que, a área de superfície de uma folha da árvore é de 75 cm².

Figura 3.43 – Resultado do grupo 4

Considera-se a técnica utilizada como adequada e os cálculos efetuados como totalmente corretos. Os alunos realizaram uma técnica de medição e contagem que se aproximou ao máximo do valor real da área de superfície desta folha da árvore.

Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore

A terceira e última tarefa consiste na realização do cálculo de uma estimativa do número de folhas de uma árvore e área da superfície total, através da técnica de multiplicação em diagrama, e a consequente descoberta da área de superfície total das folhas da mesma árvore. Primeiramente, foram levantadas questões aos alunos, quanto à possibilidade de realização deste desafio. Seguiu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Nós na última aula calculamos a área da superfície de uma folha, acham que nós somos capazes de calcular a área de superfície de todas as folhas de uma árvore?

Alguns alunos (em simultâneo): – Sim!

Alguns alunos (em simultâneo): – Não!

Hugo: – Tenho uma dúvida! Por exemplo, é para calcular todas de uma em uma ou ver uma de uma e fazer vezes...

Professora: – O que é que vocês acham que é mais fácil? Calcular a área de todas as folhas de uma árvore, uma a uma, ou calcularmos de uma e depois fazermos cálculos para descobrir?

Alguns alunos (em simultâneo): – Fazer cálculos!

Rafael (interpolando): – Professora! Professora! Na árvore há um ramo que é o grande, não é? E esse separa-se em vários e depois esses vários transformam-se nuns mais pequeninos, e nesses mais pequeninos temos de contar quantas folhas é que há. Fazer vezes o número de ramos que tem, não é? E depois juntar tudo.

Professora: – Parece-me o início de uma boa ideia. O que acharam da opinião do Rafael? Alguém tem alguma opinião diferente?

Pedro: – Eu acho que é uma boa ideia!

Professora: – Então e quem disse que não era possível calcular a área de todas as folhas de uma árvore, o que dizem da técnica do Rafael?

Gonçalo: – Não!

Professora: – Porquê Gonçalo? Diz lá a tua opinião do porquê que não é possível.

Gonçalo: – Porque são demasiadas folhas.

Professora: – Pois é, mas existe uma técnica, que é mais ou menos parecida ao que o Rafael sugeriu. Vamos aprender como se faz.

Seguiu-se a entrega das folhas de apoio à tarefa 3 (apêndice E) e fez-se uma leitura em grande grupo sobre a sugestão de técnica de contagem da estimativa do total de folhas de uma árvore. Esta técnica é a técnica de multiplicação em diagrama, que consiste na contagem: de ramos principais na árvore; de ramos secundários num ramo principal; de galhos num ramo secundário; e de folhas num galho. Após obtidas estas contagens, realiza-se o cálculo multiplicativo de todos os números e obtém-se uma estimativa do número total de folhas da árvore.

Os alunos deslocaram-se até à árvore em estudo, que se encontra dentro do recinto escolar, e, organizados nos respetivos grupos de trabalho, recolheram as informações necessárias e preencheram a respetiva tabela de registos. De seguida, retornaram à sala de aula e realizaram os cálculos necessários para responder à questão-problema. Segue-se os registos e os cálculos realizados por cada grupo.

Grupo 1

O grupo 1 recolheu e realizou o registo correto de todas as informações necessárias para a estimativa do número de folhas da árvore, anotados na respetiva tabela de registos (figura 3.44).

Tabela de registos:

✓		
✓	Número de ramos principais na árvore	21
✓	Número de ramos secundários num ramo principal	4
✓	Número de galhos num ramo secundário	4
✓	Número de folhas num galho	29
✓	Número total de folhas	464
✓	Área média de uma folha	84 cm ²
✓	Área aproximada do total de folhas	38'976 cm ²

Figura 3.44 – Tabela de registos do grupo 1

Após o regresso à sala de aula, a professora/investigadora realizou uma circulação por todos os grupos e sucedeu-se o seguinte diálogo com os alunos do grupo 1:

Professora: – Quantas folhas é que tem a vossa árvore?

Gonçalo: – Quatrocentas e sessenta e quatro.

Professora: – E quanto é que mede a área de uma folha?

Gonçalo: – Humm... (pausa). Oitenta e quatro!

Professora: – Oitenta e quatro quê?

Pedro: – Centímetros quadrados.

Professora: – Muito bem. E como é que vão descobrir a área de todas as folhas da árvore?

Gonçalo: – Temos que fazer quatrocentos e sessenta e quatro vezes oitenta e quatro centímetros quadrados.

Professora: – Porquê?

Mariana: – Porque nós precisamos...

Gonçalo (interpolando): – Porque nós queremos saber a área das folhas.

Professora: – De todas as...

Gonçalo (interpolando): – Folhas!

Professora: – Mariana, ias dizer?

Mariana: – É isso que o Gonçalo disse.

Pedro: – Dá três oito nove sete seis. Trinta e oito mil novecentos e setenta e seis.

Professora: – Não se esqueçam das unidades de medida.

Após este diálogo, a professora/investigadora ausentou-se do grupo para que os alunos continuassem a tarefa de forma autónoma. Momentos mais tarde, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Já descobriram?

Pedro: – Sim!

Professora: – Então digam-me lá como é que descobriram a área aproximada do total de folhas?

Pedro: – Eu explico! Primeiro vimos quantos ramos principais tinha, depois vimos o número de ramos secundários, que eram quatro. O número de galhos num ramo secundário, que no nosso foi quatro. E o número de folhas num galho, no galho que nós escolhemos, foi vinte e nove. E multiplicamos um vezes quatro, vezes quatro, vezes vinte e nove, que deu quatrocentos e sessenta e quatro. E a área da medida de uma folha, que a gente calculou na última aula, foi oitenta e quatro. Então fizemos quatrocentos e sessenta e quatro vezes oitenta e quatro, que deu trinta e oito mil novecentos e setenta e seis centímetros quadrados.

Através do diálogo realizado com o grupo 1, juntamente com a análise do registo dos cálculos realizados (figura 3.45), foi possível constatar que os alunos compreenderam e aplicaram corretamente a técnica de multiplicação em diagrama, para calcular a estimativa do número total de folhas da árvore, o que demonstrou a realização de uma conexão entre os dados do problema e um raciocínio matemático correto. Quanto ao cálculo da área de superfície do total de folhas, previamente ao diálogo com o grupo, os alunos demonstraram já ter debatido entre eles qual o cálculo matemático a efetuar e todos já tinham realizado o registo desse mesmo cálculo. Neste grupo está inserida uma aluna com medidas seletivas, no entanto a aluna não evidenciou dificuldades na operacionalização dos cálculos matemáticos e verificou-se a compreensão das conexões dos dados do problema, através do auxílio dos colegas do grupo.

Todos os alunos evidenciaram compreender que, para obter o valor da área aproximada da superfície do total de folhas, é necessário realizar a operação da multiplicação da área média de uma folha, que foi previamente calculada na tarefa anterior, pela estimativa do número total de folhas da árvore. O grupo concluiu que, de acordo com a área da folha em estudo e do número total de folhas calculado, estima-se que a área de superfície de todas as folhas seja de 38 976 cm². Os alunos foram

incentivados a converter o valor final de cm^2 para m^2 , tendo obtido um resultado de $3,8976 \text{ m}^2$.

Cálculos:

$$1 \times 4 \times 4 \times 29 = 464$$

$$464 \times 84 = 38'976 \text{ cm}^2 = 3,8976 \text{ m}^2$$

R: A área aproximada é $38'976 \text{ cm}^2$

Figura 3.45 – Cálculos do grupo 1

Grupo 2

O grupo 2 recolheu e realizou o registo correto de todas as informações necessárias para a estimativa do número de folhas da árvore, anotados na respetiva tabela de registos (figura 3.46).

Tabela de registos:

✓		
	Número de ramos principais na árvore	1
	Número de ramos secundários num ramo principal	4
	Número de galhos num ramo secundário	3
	Número de folhas num galho	43
	Número total de folhas	516
	Área média de uma folha	59 cm^2
	Área aproximada do total de folhas	$30444 \text{ cm}^2 = 3,0444 \text{ m}^2$

Figura 3.46 – Tabela de registos do grupo 2

Após o regresso à sala de aula, a professora/investigadora realizou uma circulação por todos os grupos e sucedeu-se o seguinte diálogo com os alunos do grupo 2:

Marlene: – Professora! Nós pensamos multiplicar isto tudo e deu quinhentos e dezasseis. Só que, acho que foi o David que disse que nas árvores todas em cada ramo tinha quinhentas e dezasseis folhas.

Professora: – O que vocês calcularam foi que o número total de folhas, se todos os galhos tiverem quarenta e três folhas, se todos os ramos secundários tiverem três galhos, ...

Afonso: – Mas isso é impossível ter!

Professora: – Era possível se a árvore fosse toda exatamente igual, mas nós sabemos que esta árvore não é.

Afonso: – Pois não.

Professora: – Então o que nós estamos a fazer é uma estimativa, uma aproximação ao número total de folhas desta árvore.

Afonso: – Ahhh!

Professora: – Todos perceberam?

Grupo 2 (em simultâneo): – Sim!

Professora: – Então vocês estimaram que esta árvore tem um total de quinhentas e dezasseis folhas. E qual foi a área média da folha que vocês calcularam na última aula?

Afonso: – Cinquenta e nove centímetros quadrados.

Professora: – Muito bem. Então vocês já sabem a área média de uma folha e já sabem o número total de folhas na árvore, aproximado atenção! Então e agora como é que vocês descobrem a área...

Afonso (interpolando): – É este a dividir por este?

David: – Dividimos.

Rúben: – Dividindo... Multiplicamos! Menos...

Professora: – Afonso, dividimos o quê?

David: – Quinhentos e dezasseis por cinquenta e nove.

Joana: – É vezes!

David: – Vezes?

Marlene: – Vai dar um número muito grande.

Professora: – Então vamos lá pensar. Vocês descobriram que o número total de folhas da árvore é quinhentos e dezasseis e a área média de uma folha é cinquenta e nove centímetros quadrados.

David: – Eu acho que é a dividir quinhentos e dezasseis por cinquenta e nove.

Rúben: – Eu também acho que é a dividir.

Professora: – Então façam la esse cálculo na calculadora. Quanto é dá?

Rubén: – Já fiz! Dá oito ponto setenta e quatro.

Professora: – E vocês acham que oito ponto setenta e quatro é a área aproximada do total de folhas?

Grupo 2 (em simultâneo): – Não!

Rúben: – Nada a ver!

Professora: – Muito bem, oito virgula sete centímetros quadrados é muito pouco para ser a área de todas as folhas da árvore. Então já percebemos que a divisão destes dois valores não dá.

David: – Então é vezes. Multiplicação.

Professora: – Multiplicação de que valores?

Rúben: – O quinhentos e dezasseis vezes o cinquenta e nove.

Professora: – Porquê?

Rúben: – Porque se não era a dividir, tinha de ser a multiplicar.

Professora: – Mas compreendeste o porquê de teres de multiplicar esses dois valores?

Joana: – Porque nós fizemos a multiplicar nós vamos descobrir o número, vamos fazer o número maior. E esse número maior pode ser o número total de folhas.

Professora: – Acho que é melhor fazermos um desenho do problema em conjunto.

Através do diálogo acima transcrito, é possível verificar que existe alguma dificuldade em relacionar os dados fornecidos e interligá-los em contexto de resolução de problemas. O facto de os alunos sugerirem a multiplicação e a divisão como operações

de resolução do problema com dois valores numéricos, sem a realização de uma justificação ou conexão lógica entre o significado do produto desses dois valores, é um indicador de que os alunos não estão a conseguir interpretar ou compreender o problema.

Tendo em consideração a fundamentação anterior, sentiu-se necessidade de realizar um desenho, de modo a promover uma melhor compreensão, através da visualização dos elementos, e de certa forma propiciar conexões que favoreçam a resolução do problema. Desenhou-se: um ramo principal; quatro ramos secundários; em cada ramo secundário desenhou-se três galhos; e apenas num dos galhos desenhou-se quarenta e três folhas. Pediu-se aos alunos para imaginarem que todos os galhos possuíam 43 folhas e que foi assim que eles estimaram que a árvore tinha 516 folhas. Preencheu-se uma das folhas da árvore com giz e fez-se o apontamento de que esta tem 59 cm^2 de área. Após a realização do desenho, seguiu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Nós sabemos a área de uma folha, esta folha tem de área cinquenta e nove centímetros quadrados. Então como é que nós vamos descobrir a área de todas as quinhentas e dezasseis folhas da árvore?

David: – É vezes.

Professora: – Uma multiplicação?

David: – Sim, isso.

Professora: – Uma multiplicação do quê?

Joana: – É cinquenta e nove vezes quinhentas e dezasseis.

Professora: – Muito bem. É área de uma folha vezes o número total de folhas, para descobrirem a área de todas as folhas.

Rúben: – Professora! Dá trinta mil quatrocentos e quarenta e quatro.

Professora: – Trinta mil quatrocentos e quarenta e quatro quê?

Rúben: – Centímetros quadrados.

Após este diálogo, a professora/investigadora ausentou-se do grupo para que os alunos continuassem a tarefa de forma autónoma. Momentos mais tarde, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Grupo dois, o que é que vocês fizeram para resolver o desafio?

Rúben: – Nós fizemos um vezes quatro vezes três vezes quarenta e três. O um significa o número de ramos principais na árvore, o quatro significa o número de ramos secundários num ramo principal, o três significa o número de galhos num ramo secundário, e o quarenta e três o número de folhas num galho. E o número total de folhas foi quinhentos e dezasseis. Explica o resto Marlene.

Marlene: – A área média de uma folha é cinquenta e nove centímetros quadrados. E a área das folhas fizemos uma conta de multiplicar, quinhentos e dezasseis vezes cinquenta e nove, e a área aproximada do total de folhas é três mil quatrocentos e quarenta e quatro centímetros quadrados.

Professora: – Deu quanto?

Marlene: – Três mil quatrocentos...

Joana: – Não é três mil, é trinta mil.

Marlene: – Ah, sim! Trinta mil quatrocentos e quarenta e quatro.

Professora: – Muito bem, e as unidades?

Marlene: – Centímetros quadrados.

Através do diálogo realizado com os alunos do grupo 2, juntamente com a análise do registo dos cálculos realizados (figura 3.47), foi possível confirmar que os alunos aplicaram corretamente a técnica de multiplicação em diagrama, para calcular a estimativa do número total de folhas da árvore, no entanto verificou-se que, inicialmente, os alunos demonstraram alguma dificuldade em compreender que o resultado que obtiveram era uma estimativa do total de folhas de toda a árvore e não o valor real.

Quanto ao cálculo da área de superfície do total de folhas, inicialmente, foi verificado a existência de alguma dificuldade por todos os alunos do grupo 2 em realizar uma conexão matemática dos dados fornecidos, de modo a aplicá-los em contexto de resolução de problemas. Foi necessário recorrer a formas diferenciadas de representar o problema, neste caso utilizou-se a representação dos dados pelo desenho, tendo sido verificada uma progressão de raciocínio através da visualização concreta da árvore. A realização de um diálogo mais extenso e detalhado com os alunos, conduzindo-os através da colocação de questões que os fez refletir acerca da validade das suas intervenções, ao invés de reprimi-las de imediato, evidenciou-se como uma técnica fulcral para o desenvolvimento das conexões matemáticas a serem realizadas.

Cálculos:

$$1 \times 4 \times 3 \times 43 = 516$$
$$516 \times 59 = 30444 \text{ cm}^2$$

R: Área aproximada do total de folhas é 30444 cm^2

Figura 3.47 – Cálculos do grupo 2

Nos registos dos cálculos realizados (figura 3.47), os alunos corroboraram corretamente as fundamentações transmitidas oralmente, demonstrando cálculos totalmente corretos e acompanhados das devidas unidades de medida, que sustentaram um raciocínio correto e a realização de conexões matemáticas entre os dados do problema e a sua resolução, não obstante às dificuldades iniciais apresentadas. O grupo concluiu que, de acordo com a área da folha em estudo e do número total de folhas calculado, estima-se que a área de superfície de todas as folhas seja de $30\,444 \text{ cm}^2$. Os alunos foram

incentivados a converter o valor final de cm^2 para m^2 , tendo obtido um resultado de $3,0444 \text{ m}^2$ (figura 3.40).

Grupo 3

O grupo 3 recolheu e realizou o registo correto de todas as informações necessárias para a estimativa do número de folhas da árvore, anotados na respetiva tabela de registos (figura 3.48).

Tabela de registos:

✓		
	Número de ramos principais na árvore	1
	Número de ramos secundários num ramo principal	4
	Número de galhos num ramo secundário	3
	Número de folhas num galho	46
	Número total de folhas	552
	Área média de uma folha	58 cm^2
	Área aproximada do total de folhas	$32\,016 \text{ cm}^2$

Figura 3.48 – Tabela de registos do grupo 3

Após o regresso à sala de aula, a professora/investigadora realizou uma circulação por todos os grupos e sucedeu-se o seguinte diálogo com os alunos do grupo 3:

Professora: – Como é que vocês calcularam o número total de folhas?

João: – Multiplicação.

Professora: – Do quê?

Alexandre: – Fazemos este vezes este, vezes este, vezes este (apontando para os respetivos valores na tabela de registos).

Professora: – Estás a referir-te a valores do quê?

João: – Números de ramos principais na árvore vezes o número de ramos secundários no ramo principal, depois o que der vezes o número de galhos no ramo secundário, depois o que der vezes o número de folhas no galho.

Professora: – Muito bem, e qual foi o resultado?

Luís: – Quinhentas e cinquenta e duas.

Professora: – E qual é a área média da folha que vocês calcularam na aula passada?

João: – Cinquenta e oito.

Professora: – Não se esqueçam dos centímetros quadrados. Então e agora como é que vocês vão calcular a área aproximada do total de folhas?

Alexandre: – Fazemos este vezes este.

Professora: – Estás a referir-te ao quê?

Alexandre: – Fazemos quinhentos e cinquenta e dois vezes cinquenta e oito.

Professora: – Porquê? Conseguem justificar? (não foram obtidas respostas)

Porque é que nós temos de multiplicar o número total de folhas pela área média de uma folha?

João: – Para saber o total.

Alexandre: – Para saber a área de todas as folhas.

Luís: – Para saber a área média de todas as folhas.

Após este diálogo, a professora/investigadora ausentou-se do grupo para que os alunos continuassem a tarefa de forma autónoma. Momentos mais tarde, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Já terminaram?

Alexandre: – Sim!

Professora: – Querem-me explicar como é que resolveram?

Alexandre: – Então nós fizemos o número de ramos principais da árvore vezes o número de ramos secundários, depois fizemos o número de galhos num ramo secundário vezes quarenta e seis.

Luís: – Depois nós fizemos um vezes quatro vezes três vezes quarenta e seis, que deu quinhentos e cinquenta e dois. E a área média de uma folha que nós medimos foi cinquenta e oito centímetros quadrados. Agora és tu Tomás.

Tomás: – Eu não quero falar.

João: – Vá então eu falo. Nós fizemos quinhentos e cinquenta e dois vezes cinquenta e oito, que deu a área aproximada do total de folhas na árvore, que é trinta e dois mil e dezasseis centímetros quadrados.

Através do diálogo realizado com os alunos do grupo 3, juntamente com a análise do registo dos cálculos realizados (figura 3.49), foi possível confirmar que os alunos compreenderam e aplicaram corretamente a técnica de multiplicação em diagrama, para calcular a estimativa do número total de folhas da árvore, o que evidenciou a realização de uma conexão entre os dados do problema e um raciocínio matemático correto. Quanto ao cálculo da área do total de folhas, os alunos demonstraram já ter debatido entre eles qual o cálculo matemático a efetuar, antes do diálogo da professora/investigadora com o grupo, porém ainda não tinham feito o registo do mesmo. Quando questionados sobre a justificação do cálculo matemático, os alunos não demonstraram saber justificar de

imediate, no entanto, quando questionados novamente, de forma mais clara, o João, o Alexandre e o Luís souberam exprimir corretamente a finalidade do cálculo matemático. A Catarina e o Tomás optaram por não participar oralmente, porém demonstraram estar envolvidos na tarefa e a acompanhar o trabalho realizado em grupo.

O grupo evidenciou compreender que, para obter o valor da área aproximada da superfície do total de folhas, é necessário realizar a operação da multiplicação da área média de uma folha, que foi previamente calculada na tarefa anterior, pela estimativa do número total de folhas da árvore. O grupo concluiu que, de acordo com a área da folha em estudo e do número total de folhas calculado, estima-se que a área de superfície de todas as folhas seja de 32 016 cm². Os alunos foram incentivados a converter o valor final de cm² para m², tendo obtido um resultado de 3,2016 m².

Cálculos

$$1 \times 4 = 4 \times 3 = 12 \times 46 = 552$$
$$552 \times 58 = 32\ 016\ \text{cm}^2 = 3,2016\ \text{m}^2$$
$$\begin{array}{r} 552 \\ \times 58 \\ \hline \end{array}$$

A área aproximada do total de folhas é
32 016 m²

Figura 3.49 – Cálculos do grupo 3

Verifica-se que o grupo 3 corroborou as fundamentações transmitidas oralmente, demonstrando cálculos totalmente corretos e acompanhados das devidas unidades de medida, que sustentam um raciocínio correto e a realização de conexões matemáticas entre o dados do problema e a sua resolução.

Grupo 4

O grupo 4 recolheu e realizou o registo correto de todas as informações necessárias para a estimativa do número de folhas da árvore, anotados na respetiva tabela de registos (figura 3.50).

Tabela de registos:

✓		
	Número de ramos principais na árvore	1
	Número de ramos secundários num ramo principal	4
	Número de galhos num ramo secundário	3
	Número de folhas num galho	47
	Número total de folhas	564
	Área média de uma folha	75 cm ²
	Área aproximada do total de folhas	442300 cm ²

Figura 3.50 – Tabela de registos do grupo 4

Após o regresso à sala de aula, a professora/investigadora realizou uma circulação por todos os grupos e sucedeu-se o seguinte diálogo com os alunos do grupo 4:

Professora: – Então como é que descobriram o número total de folhas?

Hugo: – Fizemos uma conta de vezes de todos os números.

Professora: – E que números multiplicaram?

Hugo: - Um vezes quatro vezes três vezes quarenta e sete.

Professora: – E qual foi o resultado?

Gabriel: – Deu quinhentas e sessenta e quatro.

Professora: – E sabem o que é esse valor?

Gabriel: – É as folhas todas.

Professora: – Uma estimativa das folhas todas. E qual foi a área média da folha que calcularam na aula passada?

Rafael: – Foi setenta e cinco.

Hugo: – Mas a folha é dessa árvore?

Professora: – É sim, a folha que vocês mediram a área é da árvore que vocês foram fazer a contagem agora.

Rafael (interpolando): – Professora! Professora! Agora temos de fazer quinhentos e sessenta e quatro vezes setenta e cinco.

Gabriel: – Não! Isso é a área... Aí é? Ahhhh! Pois é. Já percebi.

Professora: – Rafael, explica aos teus colegas o teu raciocínio.

Após este diálogo, a professora/investigadora ausentou-se do grupo para que os alunos continuassem a resolução do problema de forma autónoma. Momentos mais tarde, sucedeu-se o seguinte diálogo:

Professora: – Grupo quatro, expliquem-me lá como é que vocês descobriram a área aproximada do total de folhas?

Rafael: – Fizemos um vezes quatro vezes três vezes quarenta e sete, que deu quinhentos e sessenta e quatro. Fizemos quinhentos e sessenta e quatro a área e a área deu quarenta e dois mil e trezentos.

Professora: – Espera aí. Fizeste o quê? Quatrocentos e sessenta e quatro é o quê?

Rafael: – É o número total de folhas vezes a área.

Professora: – Vezes a área do quê?

Rafael: – Da folha.

Hugo: – Vezes a área média de uma folha.

Professora: – Que é quanto?

Hugo: – Setenta e cinco centímetros quadrados.

Professora: – E depois o que é que vocês fizeram para calcular a aproximação...

Hugo (interpolando): – Fizemos o número total de folhas vezes a área média de uma folha, para dar a área aproximada do total de folhas, que é quarenta e dois mil e trezentos centímetros quadrados.

Professora: – Muito bem! E porque é que vocês utilizaram a operação da multiplicação da área média de uma folha pelo número total de folhas?

Rafael: – Porque é o número de folhas vezes a área de uma.

Hugo: – Área média de uma folha!

Professora: – E essa multiplicação dá o quê?

Rafael: – Dá o número da área total.

Hugo: – De toda a árvore.

Professora: – Da superfície de todas as folhas da árvore?

Rafael: – Sim, isso.

Através do diálogo realizado com os alunos do grupo 4, juntamente com a análise do registo dos cálculos realizados (figura 3.51), foi possível constatar que, no cálculo da estimativa do número total de folhas da árvore, os alunos não só compreenderam a técnica

de multiplicação em diagrama, como souberam aplicá-la corretamente, demonstrando assim uma conexão entre os dados do problema e um raciocínio matemático correto.

Quanto ao cálculo da área do total de folhas, o Rafael realizou o raciocínio matemático correto e, com muita convicção, afirmou-o antes mesmo dos colegas refletirem sobre o passo seguinte do problema. O Gabriel, ao ouvir a intervenção do Rafael, inicialmente mostrou-se confuso, mas rapidamente percebeu que o raciocínio do colega estava correto. O Rafael prosseguiu com a explicação do seu raciocínio aos restantes colegas. Após o momento de trabalho autónomo, sucedeu-se outro momento de diálogo no qual os alunos Rafael e Hugo comunicaram como é que descobriram o resultado pretendido, demonstrando um raciocínio matemático correto, embora com algumas dificuldades de se exprimirem de forma clara. A Sabrina e o Ricardo não participaram oralmente nos momentos dos diálogos transcritos, porém demonstraram estar envolvidos na tarefa, juntamente com os colegas de grupo.

Cálculos

$$A = 47 \times 4 = 188 \times 3 = 564 \times 75 = 42\,300 \text{ cm}^2$$
$$A = 42\,300 \text{ cm}^2$$

R: A Área aproximada do total de folhas é 42 300 cm²!

Figura 3.51 – Cálculos do grupo 4

Através dos cálculos demonstrados (figura 3.51), o grupo 4 evidenciou compreender que, para obter o valor da área aproximada da superfície do total de folhas, é necessário realizar a operação da multiplicação da área média de uma folha, que foi previamente calculada na tarefa anterior, pela estimativa do número total de folhas da árvore. O grupo concluiu que, de acordo com a área da folha em estudo e do número total de folhas calculado, estima-se que a área de superfície de todas as folhas seja de 42 300 cm². Os alunos foram incentivados a converter o valor final de cm² para m², no entanto não realizaram o registo da conversão.

Verifica-se que o grupo 4 corroborou as fundamentações transmitidas oralmente, demonstrando cálculos totalmente corretos e acompanhados das devidas unidades de medida, que sustentam um raciocínio correto e a realização de conexões matemáticas entre os dados do problema e a sua resolução.

Estratégias e dificuldades dos alunos

De forma a realizar uma síntese da análise dos resultados provenientes das produções dos alunos, relembra-se que o objetivo do estudo é investigar quais as estratégias que os alunos definem para determinar a área de uma superfície irregular. Após esta análise detalhada dos dados, é possível identificar três estratégias de medição da área, defendidas na literatura por Clements et al. (2017): (i) subdividir; (ii) quantificar; e (iii) estruturar espacialmente; e duas estratégias matemáticas convencionais: (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas.

Relativamente às estratégias de (i) subdividir e (ii) quantificar, verificou-se que todos os grupos utilizaram estas técnicas para subdividir a área da folha em unidades de área ou partes da unidade e quantificá-las, com o auxílio da folha de papel milimétrico, nomeadamente, a divisão em quadrados unitários com 1 cm^2 , quadrados menores com a quarta parte da unidade ($0,25 \text{ cm}^2$) e, apenas em dois grupos (grupos 3 e 4), a divisão de quadrados com a centésima parte da unidade ($0,01 \text{ cm}^2$). Num dos grupos (grupo 1) verificou-se o a técnica de quantificar quadrados unitários por compensação de pequenas áreas restantes.

Afere-se que dois dos quatro grupos (grupos 1 e 3) utilizaram as estratégias de (iv) enquadrar figuras geométricas regulares e (v) aplicar fórmulas, sendo que num dos grupos (grupo 3) foi feito o enquadramento de dois retângulos e dois círculos, em cada uma das metades da folha, e foram calculadas as áreas pelas suas respetivas fórmulas, enquanto o outro grupo (grupo 1) enquadrou um retângulo no interior do perímetro delimitado e calculou a área pela sua respetiva fórmula.

No que diz respeito à técnica de (iii) estruturar espacialmente, esta técnica foi apenas reconhecida num dos grupos (grupo 1), uma vez que evidenciaram a utilização de todas as técnicas supramencionadas, o que demonstra uma complexidade superior de medição e evidencia a capacidade de estruturar espacialmente a medição da área de figuras irregulares bidimensionais (Clements et al., 2017).

É importante salientar que os resultados obtidos resultaram de um processo caracterizado por várias etapas e constrangimentos, que resultou em medidas desiguais de grupo para grupo. Ressalta-se o tamanho das folhas utilizadas para calcular a área das mesmas, que apesar de serem da mesma árvore e recolhidas com tamanhos semelhantes, os cálculos e as aproximações por excesso e por defeito dos alunos, fez com que os valores da sua área fossem diferentes. Sublinha-se também a decisão dos alunos na escolha de qual dos ramos secundários e qual dos galhos utilizaram para realizar a contagem, o que resultou, também, em valores diferentes na estimativa do número de folhas da árvore.

Quanto às tarefas restantes, tal como demonstrado pela literatura, houve diversos indicadores ao longo deste estudo de que os alunos se basearam em procedimentos e em fórmulas memorizadas, no cálculo para a medição de áreas. Resume-se alguns indicadores: (i) certas intervenções despropositadas de alunos, como sugerir a utilização do *raio e o Pi* ou realizar a *altura mais a largura* para o cálculo da área de um retângulo; (ii) a confusão entre a simbologia do centímetro quadrado com a multiplicação pelo número dois; (iii) a realização de cálculos corretos sem estarem acompanhados das respetivas unidades de medida ou a colocação incorreta das unidades de medida; (iv) a incapacidade de aplicar as noções do cálculo de área em contexto de resolução de problemas, relacionando corretamente os dados do problema e os cálculos matemáticos adequados; (v) alguma dificuldade de visualização do quadrado como unidade de medida para a área; e (vi) a aplicação e a utilização de fórmulas do cálculo do círculo e do retângulo sem sentido no contexto de resolução do problema (Baturó e Nason, 1996; Candeias et al., 2006; Clements et al., 2017; Costa et al., 2020; Runnalls e Hong, 2019; Santos & Santos, 2015; Wickstrom et al., 2017; Zacharos, 2006).

Considerações finais

Fruto da análise dos resultados da investigação implementada, estas considerações finais compreendem as conclusões obtidas através do estudo, como as considerações positivas, as limitações do mesmo e possíveis sugestões de melhoria.

A abordagem pedagógica apresentada suscitou de um interesse significativo em explorar uma ótica do campo conceptual e pedagógico matemático, relativamente a um tema evidentemente pouco aprofundado teoricamente: a determinação de áreas em superfícies irregulares com alunos do 2.º ciclo do ensino básico (Jesus, 2023). Atendendo à problemática definida pela presente investigação, definiu-se como questão geral de investigação: Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico para determinarem a área de uma superfície irregular? Após a análise dos dados, é possível concluir que as estratégias podem compreender-se em cinco categorias: (i) subdividir; (ii) quantificar; (iii) estruturar espacialmente (Clements et al., 2017); (iv) enquadrar figuras geométricas regulares; e (v) aplicar fórmulas. Através da análise dos resultados de cada grupo, verifica-se que quantas mais estratégias aplicadas para medir a área de uma superfície irregular, maior é a complexidade de raciocínio utilizado para realizar tal medição.

A escolha das quatro tarefas matemáticas apresentadas demonstrou-se adequada à faixa etária presente no 6.º ano do 2.º ciclo do ensino básico. As tarefas propostas foram propositadamente planificadas de modo a criar um fio condutor entre elas, seguindo uma sequência intencional, acompanhada de diálogos, que permitissem realizar uma ponte entre vários conhecimentos, com especial enfoque no estabelecimento de ligações entre a matemática e as ciências naturais, promovendo, assim, as conexões externas, como defendido por Ponte (2010). A natureza exploratória e prática das tarefas, aliada a situações desafiadoras e aos próprios interesses dos alunos, tornou todo o processo de ensino e de aprendizagem mais rico e cativante para os mesmos.

Através de uma análise geral dos dados recolhidos e da observação participante, foi possível verificar que as tarefas matemáticas propostas de cariz experimental e prático revelaram ser uma mais valia, ao atingir os objetivos gerais e específicos definidos para este estudo, particularmente em contexto de aprendizagem com alunos cujas competências atitudinais são caracterizadas por um comportamento predominantemente

instável, nem sempre se inserindo dentro dos parâmetros normais do bom funcionamento das aulas.

Relativamente ao interesse e ao empenho, verificou-se um maior envolvimento e interesse dos alunos pelas atividades, sobretudo nos momentos de trabalho autónomo. No que diz respeito à participação oral, verificou-se que houve alguns alunos que se evidenciaram muito mais participativos do que outros, o que revela uma necessidade acrescida de realizar um trabalho contínuo, no que diz respeito ao incentivo pela participação. E quanto às competências atitudinais, considera-se que os alunos, na sua maioria, demonstraram um comportamento adequado ao longo da concretização das tarefas propostas, contudo, houve ligeiras ocorrências onde foi crucial a aplicação de métodos de gestão de sala de aula acrescidos.

A respeito da prestação da professora/investigadora, procurou-se ao máximo adotar uma postura que não influenciasse as produções dos alunos nas diferentes tarefas, com principal enfoque na tarefa da medição da área da folha da árvore, de modo a obter resultados investigativos inteiramente fruto dos conhecimentos e capacidades dos mesmos. Não obstante, adotou-se simultaneamente uma postura que privilegiasse uma observação participante, aliada a um acompanhamento particularizado ao longo da realização do trabalho autónomo pelos alunos, de modo a “interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam” (Canavarro, 2011, p. 11), e, também, à provocação de diálogos que se focaram, essencialmente, na participação dos alunos, de modo a realizar pontes de interligação entre conhecimentos.

Considera-se que o diálogo e o debate em grande grupo foram uma mais-valia para, não só favorecer a aquisição de novos conhecimentos, através da partilha entre cada aluno e o respetivo grupo, como também trabalhar sobre diversas conceções alternativas que os alunos possuem e, inclusive, a realização de conexões erradas entre diversos conceitos matemáticos, como foi possível observar em certos alunos nas diversas tarefas implementadas.

Por último, tendo em consideração a importância e a falta de representatividade que esta temática representa no contexto das aprendizagens matemáticas, denota-se a importância da continuidade de investigar e desenvolver estudos que permitam oferecer

práticas pedagógicas diferenciadas, para o estudo das medições de área em superfícies irregulares. Como sugestões futuras, propõe-se a realização de novas investigações com outras superfícies irregulares, de preferência tendo sempre em consideração as conexões externas da matemática com outras áreas do saber e com a realidade do quotidiano dos alunos (Jesus, 2023). Outra sugestão é o fornecimento de material de medição diferenciado, de modo a ampliar as hipóteses de escolha e de aprendizagens dos alunos que, conseqüentemente, resulta num maior número resultados também eles diferenciados. Por fim, considera-se outra mais-valia a realização da presente investigação, ou de futuras investigações dentro do mesmo tema, com uma maior quantidade de grupos de participantes, de modo a correlacionar os resultados e obter conclusões mais amplas, exatas e precisas.

Referências Bibliográficas

- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.
- Batista, F. S. (2014). *Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não-convexos* (Tese de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande). Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFCG.
- Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student Teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, (115), 11-17.
- Candeias, N., Costa, S., Molarinho, M., Simões, A, Garcia, C., Marques, I., Marques, S., Rocha, G., Silvestre, A. & Ponte, J. (2006). Estratégias e dificuldades dos alunos portugueses do 2.º ciclo do ensino básico em visualização, medida e área. *Actas do XVII SIEM*.
- Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas – Ligar o que se foi desligado. *Educação e Matemática*, 110, 13-18.
- Carreira, S. (2010). Conexões no ensino da Matemática – Não basta vê-las, é preciso fazê-las! *Educação e Matemática*, 110, 1.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Miller, A. L. (2017). Area. In J. E. Barrett, D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.). *Children's measurement: a longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume* (pp. 71–82). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Costa, A. P., Vilaça, M. M., Melo, L. V. (2020). O ensino de Grandezas e Medidas em um documento curricular oficial para o ensino básico. *Ensino em Re-Vista*, 27(3), 934-955.
- Direção-Geral da Educação (s.d.). *Aprendizagens Essenciais*. (website)

- Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.
- Gonçalves, T. N. R. (2010). Investigar em educação: Fundamentos e dimensões da investigação qualitativa. In M. Alves, & N. Azevedo (Eds.). *Investigar em educação: Desafios da construção de conhecimento e da formação de investigadores num campo multi-referenciado* (pp. 39-63). UIED.
- Guerra, E. L. A. (2014). *Manual de Pesquisa Qualitativa*. Instituto Federal de Santa Catarina.
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L. & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, Campinas*, 23 (44), 279 – 295.
- Isabelle, A. D., & Bell, K. N. (2007). Sun Catchers. *Teaching Children Mathematics*, 13(8), 414–423.
- Jacinto, H. & Pires, M. V. (2019). Tarefas e recursos para a promoção de conexões matemáticas. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2019, Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 189-195). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM).
- Jesuz, D. A. F. (2023). Cálculo de áreas de regiões irregulares com o teorema de Pick: Relato de experiência com estudantes. *Anais do XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM)*.
- Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Editorial do Ministério da Educação – Direção Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais – 1.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais – 2.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.

- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais – 3.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens essenciais – 1.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens essenciais – 2.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.
- Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens essenciais – 3.º ciclo do ensino básico – matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção-Geral da Educação.
- Paradinha, H. & Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das Sucessões. *Educação e Matemática*, 110, 27-32.
- Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 110, 3-6.
- Ribeiro, E. A. (2008). A perspectiva de entrevista na investigação qualitativa. *Evidência: Olhares e Pesquisa em Saberes Educacionais*, 4(4), 129-148.
- Runnalls, C. & Hong, D. S. (2019). “Well, they understand the concept of area”: pre-service teachers’ responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 629-651.
- Santos, M. R. & Santos, M. C. (2015). O conceito de área de figuras geométricas planas no livro didático de matemática do 6.º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 6(2), 1-22.
- Scartazzini, L. S., Silva, J. T. V & Consul, R. Á. (2005). Metodologias para determinar áreas em superfícies irregulares no ensino da geometria aplicando a proporcionalidade. *Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 7(2), 65-70.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Silva, S. & Dixe, M. A. (2020). *Sebenta de apoio à Unidade Curricular de Investigação II: Conteúdo Programático P3 – Investigação Qualitativa*. Politécnico de Leiria.

Wickstrom, M. H., Fulton, E. W. & Carlson, M. A. (2017). Pre-service elementary teachers' strategies for tiling and relating area units. *Journal of Mathematical Behavior*, 48, 112-136.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 224-239.

Decretos-Lei

Decreto-Lei n.º 139/2012 de 5 de julho. Diário da República, 1.ª série, n.º 129. Lisboa:
Ministério da Educação.

Despacho n.º 6478/2017 de 26 de julho. Diário da República, 2.ª série, n.º 143. Lisboa:
Ministério da Educação.

Despacho n.º 6944-A/2018 de 19 de julho. Diário da República, 2.ª série, n.º 138. Lisboa:
Ministério da Educação.

Índice de Apêndices

Apêndice A – Plano de Intervenção Educativa	103
Apêndice B – Folha de apoio à Tarefa 1A	112
Apêndice C – Folha de apoio à Tarefa 1B.....	113
Apêndice D – Folha de apoio à Tarefa 2	115
Apêndice E – Folha de apoio à Tarefa 3	116
Apêndice F – Grelha de observações	118

Plano de Intervenção Educativa					
Disciplina	Matemática	Turma	6.º ___	Data(s)	20 abril (100 min.) 27 abril (100 min.) 11 maio (100 min.)
Tema	Geometria e Medida (GM)				
Tópicos/Subtópicos	Figuras planas; Medida; Resolução de problemas; Raciocínio Matemático				

Objetivos essenciais de aprendizagem

- “Calcular perímetros e áreas de figuras planas, incluindo o círculo, recorrendo a fórmulas, por enquadramento ou por decomposição e composição de figuras planas.”
- “Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas usando ideias geométricas, em contextos matemáticos e não matemáticos e avaliando a plausibilidade dos resultados.”
- “Desenvolver a capacidade de visualização e construir explicações e justificações matemáticas e raciocínios lógicos, incluindo o recurso a exemplos e contraexemplos.”

(Aprendizagens Essenciais de Matemática, 6.º ano, 2.º Ciclo, 2018, pp. 9 e 10)

PASEO

De acordo com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO), pretende-se trabalhar as seguintes áreas de competências:

- C – Raciocínio e resolução de problemas;
- D – Pensamento crítico e pensamento criativo;
- E – Relacionamento interpessoal;
- F – Desenvolvimento pessoal e autonomia;
- I – Saber científico, técnico e tecnológico.

(PASEO, 2017, p. 20)

Sumário

- Tarefa prática de descoberta de como a área afeta a recolha de energia solar.

- Cálculo da área de superfícies regulares e irregulares.
- Determinação da área aproximada da superfície total de folhas de uma árvore.

Intenção Pedagógica

Objetivos gerais:

- (1) Descobrir como é que a área de uma superfície afeta a recolha de energia solar;
- (2) Comparar a forma irregular de uma folha de árvore com a forma regular de um painel solar;
- (3) Medir a área da superfície de um painel solar;
- (4) Medir a área de superfície de uma variedade de folhas da mesma árvore, através de estratégias propostas pelos alunos;
- (5) Utilizar diferentes técnicas de aproximação na medição da área da superfície de uma folha;
- (6) Utilizar a multiplicação em diagrama para estimar o número total de folhas de uma árvore;
- (7) Determinar a área aproximada da superfície total de folhas de uma árvore.

Objetivos específicos:

O plano de intervenção educativa é composto por três aulas, com o tempo de duração de cem minutos cada. O desafio para a primeira aula consiste na realização de uma investigação para prever e verificar qual de dois tabuleiros com água atinge uma maior temperatura, sendo que um deles possui o dobro da área de superfície da base do que o outro, e realizar uma conexão com os painéis solares, investigando o seu propósito e as suas características, refletindo sobre a relação entre área de superfície e a recolha de energia. Na segunda aula é feita uma conexão entre o propósito dos painéis solares com as folhas das árvores, sendo que estas são captadoras naturais de energia solar, e é feita a medição da área de uma folha através de estratégias de medição propostas pelos alunos. A terceira aula tem como objetivo a descoberta de uma estimativa do número total de folhas de uma árvore, através do cálculo multiplicativo em diagrama e, por fim, a determinação da área aproximada da superfície total de folhas de uma árvore.

Organização da sala:

No que diz respeito à organização dos alunos, há momentos de discussão em grande grupo; momentos de trabalho autónomo, onde se encontram organizados em grupos de 4 a 5 elementos; e momentos de trabalho individual. A escolha dos elementos dos grupos de trabalho autónomo será realizada previamente pela professora/investigadora, permitindo assim um melhor aproveitamento e sucesso da tarefa, através da heterogeneidade dos mesmos.

Material:

- Material de escrita
- Quadro interativo
- 2 tabuleiros de alumínio
- 2 termómetros
- 2 garrafas de 0,5L de água
- 2 bases de cortiça (isolante térmico)
- Folhas de árvores
- Papel milimétrico
- Calculadoras
- Réguas
- Tesouras
- Fichas de trabalho (apêndices B, C, D e E)

Desenvolvimento da tarefa

A tarefa é composta por três aulas, com o tempo de duração de cem minutos cada:

1ª aula

Introdução (15 minutos)

A aula inicia com a colocação da questão problema: “À vossa frente estão dois tabuleiros de alumínio. Um tem o dobro da área da base do outro. Se despejarmos meio litro de água, à temperatura ambiente, em cada um dos tabuleiros e estes forem colocados ao sol por vinte minutos, o que é que acham que vai acontecer à temperatura da água em cada um dos tabuleiros?”. Esta questão é colocada propositadamente, não só para suscitar o interesse e a curiosidade para a realização da tarefa, como também gerar um pequeno debate entre as várias opiniões e pontos de vista dos alunos.

Após alguns momentos de debate, é proposto a colocação da tarefa em prática, tendo como finalidade a possibilidade de confrontar as previsões e reflexões dos alunos com os resultados reais.

Tarefa prática (20 minutos)

A preparação da tarefa é realizada através da sua demonstração, juntamente com a participação ativa dos alunos. Primeiramente, é feita a verificação através do cálculo da área que, de facto, um dos tabuleiros possui aproximadamente o dobro da área da base que o outro. Logo após é colocado um isolante térmico entre os tabuleiros e a mesa, sendo este passo fundamental para que não haja fuga de calor dos tabuleiros para o chão. Seguidamente, são preparados dois recipientes de plástico com meio litro de água cada, a temperatura ambiente, e é feita a medição da temperatura inicial da água com um termómetro e é efetuada a sua anotação na tabela de registos da folha da tarefa 1A (apêndice B). Após esta medição, despeja-se a água para cada um dos tabuleiros e coloca-se ambos num local onde incida luz solar direta. Durante esta demonstração é importante relembrar que todas as variáveis se mantiveram iguais, à exceção do tamanho da base dos tabuleiros.

Após toda a preparação, dá-se início ao cronómetro com trinta minutos. Os alunos são incentivados a realizar previsões, a refletir e a partilhar as suas opiniões e dúvidas com a turma. De forma a ajudar a focalizar o pensamento dos alunos, são sugeridas três possíveis respostas à questão inicial: (a) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com menor área; (b) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com maior área; (c) A temperatura final vai ser igual nos dois tabuleiros. Os registos são realizados individualmente na folha da tarefa 1A (apêndice B), seguida de uma breve fundamentação individual.

Trabalho autónomo (30 minutos)

Durante o tempo de espera pelos resultados, é realizada uma conexão entre a tarefa prática a ser realizada e o propósito dos painéis solares. Numa breve discussão, são realizadas questões que levam os alunos a refletir, em grande grupo, sobre alguns aspetos importantes dos painéis solares, tais como a forma, o tamanho, a utilidade, e a relação direta existente entre a área e a recolha de energia.

A pares, os alunos realizam autonomamente uma tarefa matemática (apêndice C – ficha tarefa 1B), que tem como objetivo a descoberta da área total de um painel solar, através do cálculo multiplicativo.

Resultados e discussão (20 minutos)

Após os trinta minutos de espera pelos resultados, é feita a medição final da temperatura da água em cada um dos tabuleiros e, através dos resultados anotados na tabela de registos, é feito um confronto entre as previsões e o resultado real. Conclui-se que a temperatura final é maior no tabuleiro com maior área de base e, de forma a realizar conexões externas com exemplos do nosso quotidiano, são partilhados exemplos por comparação, tal como o facto da roupa secar mais rapidamente se a esticarmos e que alguns pássaros abrem as asas para aquecerem mais rapidamente ao sol.

Seguidamente, discute-se os resultados obtidos na tarefa do cálculo da área de um painel solar e realiza-se uma análise aos procedimentos matemáticos que os pares utilizaram para chegar ao resultado final.

Síntese final (15 minutos)

Em grande grupo é feita uma síntese final das aprendizagens adquiridas através da participação oral. Conclui-se que quanto maior uma área de superfície, maior a será a quantidade de energia solar recolhida.

2ª aula

Introdução (10 minutos)

A aula inicia formando uma articulação entre os conhecimentos adquiridos na aula anterior, ou seja, a relação entre área de superfície e a energia solar, com as folhas das árvores, sendo que estas são captadoras naturais de energia solar. No primeiro momento

são feitas breves questões relativamente às conceções prévias sobre a forma de como funciona a relação entre a energia solar e as folhas das árvores, por exemplo: “Que relação existe entre a luz solar e as plantas?”; “O que é que acham que aconteceria se privássemos as folhas das árvores da luz solar?”. Estas questões servem de fio condutor para relembrar os alunos acerca das suas conceções prévias sobre a fotossíntese – a planta produz o seu próprio alimento através da captação de energia solar –, bem como conduzir o seu raciocínio a realizar uma conexão com a aula anterior, concluindo que quanto maior a área da folha de uma árvore maior será a quantidade de energia solar absorvida.

Explicação da tarefa (15 minutos)

Após ter sido feita uma breve introdução teórica, é lançado o segundo desafio: “Será que vocês são capazes de medir a área de superfície de uma folha de uma árvore? Se sim, como?”. Estas questões são relevantes, pois a forma geométrica da folha de uma árvore é irregular e visto que o estudo das áreas se centra essencialmente nas formas regulares, é interessante perceber o raciocínio e as sugestões dos alunos sobre as técnicas que utilizariam para realizar esta medição.

Após ouvidas as sugestões, são explicados os objetivos e o procedimento da tarefa (apêndice D – ficha tarefa 2). São entregues a cada grupo folhas de uma árvore específica de dentro do recinto escolar e é pedido que realizem a medição da área de superfície aproximada de uma ou mais folhas, ficando ao critério dos alunos escolher a técnica de medição que considerem mais adequada, tendo em conta o material disponibilizado.

Trabalho autónomo (40 minutos)

Dá-se início à realização da tarefa por grupos, através do trabalho autónomo.

Durante este momento da tarefa é feita uma circulação pelos grupos, de modo a acompanhar os alunos no cumprimento do procedimento da tarefa e no auxílio de possíveis dúvidas, bem como gerir o comportamento e a cooperação entre os elementos dos grupos de trabalho.

Após as medidas da área das folhas estarem calculadas é pedido que considerem como resultado final a área de apenas uma das folhas medidas.

Resultados e discussão (20 minutos)

Após todas as etapas do trabalho autônomo estarem cumpridas, cada grupo apresenta à turma a/s técnica/s que utilizaram na medição, bem como todos os cálculos efetuados e o resultado final da área de uma folha da árvore.

Durante este momento favorece-se a participação dos restantes grupos relativamente a questões que considerem pertinentes e/ou apreciações construtivas ao trabalho realizado, conjuntamente com a realização pela professora de uma boa mediação relativamente às partilhas em grande grupo, bem como o fornecimento de *feedback* oral construtivo.

Síntese final (15 minutos)

Em grande grupo é feita uma síntese final das aprendizagens adquiridas ao longo desta aula, através da participação oral.

3ª aula

Introdução e explicação da tarefa (20 minutos)

A aula inicia com a articulação do desafio da aula anterior, que foi descobrir a área média da superfície de uma folha de uma determinada árvore, com a proposta de um novo desafio: “Será que vocês são capazes de descobrir a área aproximada da superfície total de folhas da árvore? Se sim, como?”. Esta questão incide essencialmente no propósito final da tarefa e requer que surja alguma reflexão sobre os métodos e estratégias que devem realizar para conseguir chegar à resposta final. Após alguns momentos de debate, pressupõe-se que alguns alunos proponham que seja necessário realizar a contagem do número total de folhas da árvore, e que este resultado multiplicado pela área de superfície de uma das folhas dará a resposta final pretendida, que é a área da superfície total de folhas da árvore.

É questionado aos alunos como é que irão realizar a contagem do número total de folhas da árvore e, após algumas sugestões, caso não surjam sugestões de métodos adequados, sugere-se a técnica da multiplicação em diagrama. Esta técnica consiste na contagem: de ramos principais na árvore; de ramos secundários num ramo principal; de galhos num ramo secundário; e de folhas num galho. Após obter estas contagens, realiza-

se o cálculo multiplicativo de todos os números e obtém-se uma estimativa do número total de folhas da árvore.

Trabalho autónomo (40 minutos)

Após debatido o procedimento, os alunos deslocam-se até à árvore em estudo¹ e, organizados pelos respetivos grupos de trabalho, realizam autonomamente a recolha de informação necessária para a contagem, na respetiva tabela de registos (apêndice E – ficha tarefa 3). Após recolhida a informação, a turma retorna à sala de aula e são realizados os procedimentos matemáticos necessários para a realização final da tarefa.

Tal como na aula anterior, durante este momento da tarefa é feita uma circulação pelos grupos, de modo a acompanhar os alunos no cumprimento do procedimento da tarefa e no auxílio de possíveis dúvidas, bem como gerir o comportamento e a cooperação entre os elementos dos grupos de trabalho.

¹ Nota: A árvore em estudo encontra-se dentro do recinto escolar e foi escolhida e analisada de perto pelos alunos, num momento não letivo entre a segunda e a terceira aula deste plano.

Resultados e discussão (25 minutos)

Após todas as etapas propostas estarem cumpridas, cada grupo apresenta à turma os resultados obtidos através das suas contagens, medições e cálculos matemáticos, de forma a obter a área aproximada da superfície total de folhas da árvore. É expectável e importante lembrar que, apesar da árvore em estudo ser a mesma, os resultados finais de cada grupo não o são, devido ao facto de se estar a realizar estimativas por aproximação ao resultado real.

Durante este momento favorece-se a participação dos restantes grupos relativamente a questões que considerem pertinentes e/ou apreciações construtivas ao trabalho realizado, conjuntamente com a realização pela professora de uma boa mediação relativamente às partilhas em grande grupo, bem como o fornecimento de *feedback* oral construtivo.

Síntese final (15 minutos)

Em grande grupo é feita uma síntese final das aprendizagens adquiridas ao longo desta aula e de todo o conjunto de tarefas, através da participação oral. É importante que

os alunos concluíam que a área total da superfície das folhas de uma árvore é, de facto, a área total de captação solar dessa mesma árvore. Através desta reflexão é possível comparar a área total de captação solar de uma árvore com a de um painel solar e, inclusive, pedir aos alunos que descubram o número de células necessárias para cobrir a mesma área de captação solar que a árvore em estudo.


Avaliação

Ao abrigo do Decreto-Lei n.º 55/2018, a avaliação que irá ser utilizada neste plano é de carácter formativa, visto que o principal objetivo é o acompanhamento do aluno de modo a entender se os objetivos estão ou não a ser atingidos, podendo ser identificadas dificuldades e/ou obstáculos que comprometam a sua aprendizagem.

Esta avaliação formativa irá ser realizada através de uma grelha de observações (apêndice F), que tem como objetivo realizar o registo dos alunos em três níveis, de acordo com os descritores de desempenho referidos. Estes descritores de desempenho fazem referência às competências demonstradas durante todo o processo de aprendizagem dos alunos, neste caso referem-se: (i) ao cumprimento das tarefas; (ii) à qualidade da participação oral; (iii) à colaboração, ao interesse e ao empenho demonstrados; (iv) ao grau de dificuldades apresentadas; e (v) à adequação da linguagem matemática utilizada.

(Planificação sujeita a alterações)

Apêndice B – Folha de apoio à Tarefa 1A

	Escola E.B. 2, 3 Padre João Coelho Cabanita		
	Ficha de trabalho de Matemática – 6.º ano		
Nome: _____ N.º: _____ Ano/Turma: _____ Data: ____/____/____			

Tarefa 1A - A área influencia a captação de energia solar?

Objetivo: Através desta tarefa estás a explorar como é que a área de uma superfície desempenha um papel fundamental na recolha de energia solar.

Desafio: À vossa frente estão dois tabuleiros de alumínio. Um tem o dobro da área da base do outro. Se despejarmos meio litro de água, à temperatura ambiente, em cada um dos tabuleiros e estes forem colocados ao sol por vinte minutos, o que é que acham que vai acontecer à temperatura da água em cada um dos tabuleiros?

Seleciona a tua previsão nas opções abaixo:

(a) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com menor área.

(b) A temperatura final vai ser maior no tabuleiro com maior área.

(c) A temperatura final vai ser igual nos dois tabuleiros.


Fundamenta a tua escolha: _____

Tabela de registos:

	Área (cm ²)	Quantidade água	Temperatura água inicial	Prevejo que...	Temperatura água final
Tabuleiro 1					
Tabuleiro 2					

Concluo que _____

Apêndice C – Folha de apoio à Tarefa 1B

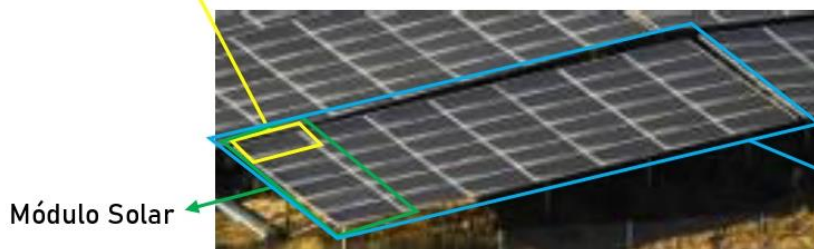
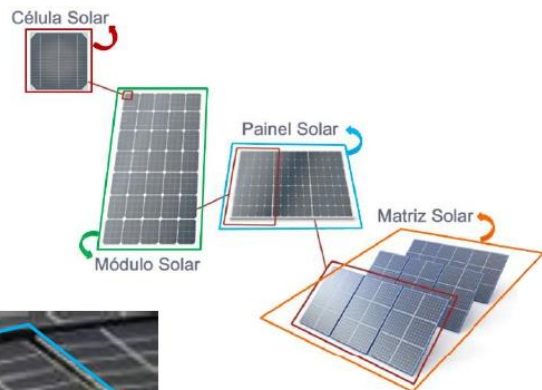
	Escola E.B. 2, 3 Padre João Coelho Cabanita
	Ficha de trabalho de Matemática – 6.º ano
Nome: _____ N.º: _____ Ano/Turma: _____ Data: ____/____/____	

Tarefa 1B – Descoberta da área total de um Painel Solar através de cálculos

A imagem abaixo representa uma fotografia aérea da “Central Fotovoltaica Riccardo Totta”, localizada no concelho de Alcoutim, no Algarve. Esta central é a maior a operar em Portugal e uma das maiores da Europa, conta com 661 500 painéis instalados e ocupa uma área descontínua de 320 hectares.



Cada Célula Solar mede $2,8 \text{ cm}^2$ de área.



Módulo Solar

Painel Solar

Desafio


Através dos dados apresentados acima, calcula a área da superfície total de um Painel Solar desta central fotovoltaica. Apresenta todos os cálculos que efetuares. Apresenta o resultado final arredondado às unidades em metros quadrados (m^2).

Tabela de registos:

Nº de painéis solares	1
Nº de módulos num painel	7
Nº de células num módulo	432
Nº total de células num painel	
Área de 1 célula	2,8 cm^2
Área total de um Painel Solar	

Cálculos:

Apêndice D – Folha de apoio à Tarefa 2

	Escola E.B. 2, 3 Padre João Coelho Cabanita
	Ficha de trabalho de Matemática – 6.º ano
Nome: _____ N.º: _____ Ano/Turma: _____ Data: ____/____/____	

Tarefa 2 – Medição da área de superfície de uma folha de árvore

Desafio: Será que és capaz de medir a área de superfície de uma folha de uma árvore? Se sim, como?

Tarefa: À tua frente estão folhas de uma árvore. Discute com os colegas do teu grupo a/as técnica/s, que vocês consideram mais adequada/s para medir a área de superfície das folhas.

✓ Procedimento:

- 1. Discute com os colegas do teu grupo a melhor forma de calcular a área de superfície das folhas da árvore;
- 2. Regista a/as técnica/s que utilizaram para realizar a medição;
- 3. Realiza a medição da área de superfície de uma ou mais folhas;
- 4. Regista todos os cálculos que efetuares e os resultados finais (considera como resultado final a área de apenas uma das folhas);
- 5. Apresenta à turma a/as técnica/s que utilizaram para realizar a medição.

Cálculos:

Concluimos que, a área de superfície de uma folha da árvore é de _____ .



Escola E.B. 2, 3 Padre João Coelho Cabanita

Ficha de trabalho de Matemática – 6.º ano

Nome: _____ N.º: _____ Ano/Turma: _____ Data: ___/___/___

Tarefa 3 – Cálculo da área aproximada da superfície total de folhas da árvore

Desafio: Será que és capaz de descobrir a área aproximada da superfície total de folhas da árvore? Se sim, como?

Objetivo: Através desta tarefa estás a estimar o número total de folhas de uma árvore e a área aproximada da superfície total de folhas da mesma árvore.

Tarefa: Agora que já descobriste a área de superfície de uma folha da árvore, é necessário descobrir a área de todas as folhas, visto que a área de superfície de todas as folhas é a área total de captação solar daquela árvore. Para isso é necessário descobrir o número total de folhas da árvore.

Como é que irás fazer essa contagem?

Contar todas as folhas de uma árvore pode parecer uma tarefa impossível, mas não tem de o ser!

Sugestão: Por ser muito trabalhoso e demorado contar todas as folhas, vamos utilizar a matemática para realizar a contagem do total de folhas através de uma estimativa. Para isso utiliza-se a técnica de multiplicação em diagrama. Esta técnica consiste na contagem: de ramos principais na árvore; de ramos secundários num ramo principal; de galhos num ramo secundário; e de folhas num galho. Após obterem estas contagens, realiza-se o cálculo multiplicativo de todos os números e obtém-se uma estimativa do número total de folhas da árvore.

- ✓ **Procedimento:**
1. Juntamente com o teu grupo de trabalho, desloquem-se até à árvore em estudo e recolham todas as informações necessárias para preencher a tabela de registos abaixo;
 2. Retornem à sala de aula e, em grupo, realizem todos os cálculos matemáticos necessários para descobrir uma estimativa do número total de folhas da árvore (**importante:** registar todos os cálculos matemáticos efetuados na ficha de trabalho);
 3. Após o ponto anterior estar terminado, em grupo, realizem os cálculos necessários para descobrir a área aproximada da superfície total de folhas da árvore (**importante:** registar todos os cálculos matemáticos efetuados na ficha de trabalho);
 4. Apresentem os resultados obtidos à turma.

Tabela de registos:

✓		
	Número de ramos principais na árvore	
	Número de ramos secundários num ramo principal	
	Número de galhos num ramo secundário	
	Número de folhas num galho	
	Número total de folhas	
	Área média de uma folha	
	Área aproximada do total de folhas	

Cálculos:

Apêndice F – Grelha de observações

Grelha de observações					
Descritores de desempenho		Alunos			
		Tarefa 1A	Tarefa 1B	Tarefa 2	Tarefa 3
Cumprimento da tarefa	Cumpriu				
	Cumpriu parcialmente				
	Não cumpriu				
Participação oral	Participou frequentemente e partilhou as suas opiniões com o grupo				
	Participou e partilhou parcialmente as suas opiniões com o grupo				
	Não participou nem partilhou as suas opiniões com o grupo				
Colaboração, interesse e empenho	Evidencia colaboração com os colegas, respeita a opinião dos outros, interessa-se pela tarefa e realiza-a com empenho				
	Colabora parcialmente com os colegas, respeita em parte a opinião dos outros, revela uma ligeira falta de interesse e empenho pela tarefa				
	Não colabora com os colegas, não respeita a opinião dos outros, não demonstra interesse e empenho pela tarefa				
Dificuldades	Realiza a tarefa sem apresentar dificuldades				
	Realiza a tarefa com algumas dificuldades				
	Apresenta dificuldades acentuadas				
Linguagem matemática	Utiliza linguagem matemática adequada				
	Utiliza parcialmente linguagem matemática adequada				
	Não utiliza linguagem matemática adequada				
Observações					

