

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

TEMAS ESCOLHIDOS DE GEOMETRIA DO
TRIÂNGULO

(dissertação para a obtenção do grau de mestre em
Matemática - Especialização em Matemática para o Ensino)

Luís Miguel de Freitas Bernardino

Faro

2008

NOME: Luís Miguel de Freitas Bernardino

DEPARTAMENTO: Matemática

ORIENTADOR: Prof. Doutor Juan Carlos Sánchez Rodriguez

DATA: 6 de Maio de 2008

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo

JÚRI:

PRESIDENTE: Doutora Susana Paula Graça Carreira, Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

VOGAIS: Doutor Amílcar José Pinto Lopes Branquinho, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez, Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Agradecimentos

A realização deste trabalho não teria sido viável sem a ajuda de algumas pessoas a quem gostaria de deixar aqui o meu reconhecimento.

Agradeço muito especialmente ao meu Orientador Professor Doutor Juan Carlos Rodriguez todo o apoio e disponibilidade dispensados durante a realização desta investigação, as suas orientações, sugestões e críticas foram muito úteis, conduzindo ao desenvolvimento do trabalho e à permanente melhoria desta dissertação.

Agradeço, também, ao Professor Paulo Semião toda a colaboração que permitiu ultrapassar vários problemas relacionados com o programa Scientific Work Place.

Em especial, agradeço, ainda, à minha família o apoio me deu e a compreensão, pelo tempo que deixei de lhe dedicar para que fosse possível concluir este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, começaremos por abordar alguns resultados clássicos associados ao triângulo. Seguem-se outros resultados relacionados com circunferências notáveis e com centros do triângulo. A fim de ser possível apresentar algumas aplicações dos teoremas estudados, propomos algumas construções euclidianas que precisam dos resultados já referidos para a sua elaboração.

Propomos, ainda, o estudo das coordenadas baricêntricas, apresentando vários centros do triângulo em coordenadas baricêntricas. É ainda introduzida a noção de conjugado isogonal e conjugado isotómico, sendo estudado algumas relações entre centros notáveis.

Seguidamente é apresentada a equação de uma recta em coordenadas baricêntricas, particularizando com duas das rectas mais referidas: a recta de Nagel e a recta de Euler.

Finalmente será introduzida a noção de produto baricêntrico de dois pon-

tos, tanto em termos analíticos como em termos geométricos.

Abstract

In this study, we will begin with some classical results associated to the triangle, followed by other results related to notable circles and triangle centres. In order to present some uses of the studied theorems, we suggest some euclidean constructions that need the mentioned results for their resolution.

We also suggest the study of barycentric coordinates, presenting several triangle centres in barycentric coordinates. The notion of isogonal conjugate and isotomic conjugate are also presented, as well as the study of some relations among notable centres.

The next step will be the definition of lines in barycentric coordinates, particularly two of the most referred to: the Nagel line and the Euler line.

Finally, the notion of barycentric product of two points will be presented, both in analytical terms and in geometrical terms.

Palavras Chave

Triângulo

Circunferências notáveis

Centros

Construções euclidianas

Coordenadas baricêntricas

Pontos conjugados

A matemática é como uma catedral inacabada,
cuja construção começou há mais de 3000 anos.

Ricardo Moreno Castillo [4].

Índice

1	Alguns resultados clássicos	15
1.1	Resultados preliminares	17
1.2	Teoremas fundamentais	37
1.2.1	Teorema de Steiner	37
1.2.2	Fórmula de Herão	42
1.2.3	Teorema de Menelau	50
1.2.4	Teorema de Ceva	57
2	Alguns resultados envolvendo centros notáveis	69
2.1	Resultados envolvendo os raios de algumas circunferências as- sociadas ao triângulo	70
2.2	Circunferência inscrita	81
2.3	Circunferência dos nove pontos e recta de Euler	87

2.3.1	Triângulo medial	87
2.3.2	Triângulo médio e triângulo de Euler	92
2.3.3	Triângulo pedal e triângulo órtico	94
3	Problemas de construção	99
3.1	Construções elementares	100
3.1.1	Produto de segmentos	101
3.1.2	Quociente de segmentos	102
3.1.3	Raiz quadrada de um segmento	103
3.1.4	Raízes de uma equação do segundo grau	104
3.1.5	Rectângulos e quadrados com a mesma área	106
3.2	Circunferências tangentes e ortogonais	109
3.3	Triângulo rectângulo com circunferência inscrita tangente num ponto dado	113
3.4	Triângulo dados dois vértices e a recta de Euler	117
3.4.1	Construção	117
3.4.2	Número de soluções	123
4	Coordenadas baricêntricas	129
4.1	Preliminares	131

4.1.1	Coordenadas dos pontos de uma recta	131
4.1.2	Centros de semelhança de duas circunferências	132
4.1.3	Conjugados harmónicos	135
4.2	Coordenadas homogéneas baricêntricas	144
4.2.1	Coordenadas baricêntricas de um ponto	146
4.2.2	Coordenadas baricêntricas de centros notáveis	148
4.2.3	Coordenadas baricêntricas absolutas	154
4.2.4	Sinal das coordenadas baricêntricas	166
4.2.5	Cevianas e Traços	173
4.3	Conjugado isotómico e isogonal	183
4.3.1	Conjugado isotómico	183
4.3.2	Conjugado isogonal	188
4.4	Rectas	204
4.4.1	Equação de uma recta	205
4.4.2	Exemplos	205
4.5	Produto baricêntrico de dois pontos	208
4.5.1	Construção geométrica e coordenadas	209
4.5.2	Raiz quadrada de um ponto	214

Bibliografia

220

Introdução

De acordo com Tom Apostol [1] "A Matemática nasceu quando o homem primitivo sentiu a necessidade de contar. Evoluiu para uma linguagem escrita há mais de 5000 anos quando os inventores dos calendários calcularam a[s] datas das estações do ano". Já a Geometria, segundo o mesmo autor terá surgido devido ao desenvolvimento do comércio, o qual levou à necessidade de medir. O seu nome deriva da palavra Terra, a qual teve de ser medida, no Egipto e na Mesopotâmia, a fim de resolver problemas relacionados com a irrigação e a determinação de impostos.

Pelo anteriormente referido compreende-se que habitualmente se atribua aos Egípcios e aos Babilónios os primeiros estudos relacionados com a Geometria. Com efeito, os Egípcios, devido à necessidade de redistribuir as terras após as inundações do Nilo, foram obrigados a desenvolver a sua geometria a qual, nesta civilização, tinha um carácter experimental, sendo

as fórmulas empíricas, resultando alguns erros como os que são seguidamente referidos e que estão indicados em [9].

Por exemplo, a área de um quadrilátero de lados a , b , c e d era determinada segundo a fórmula

$$\frac{a + c}{2} \frac{b + d}{2},$$

que, como sabemos, só dá um resultado correcto se o quadrilátero for rectângulo.

Outro erro era cometido na determinação da área do triângulo isósceles, em que dois lados mediam a e o outro media b , visto que utilizavam a fórmula

$$\frac{ab}{2}.$$

Por outro lado, os Babilónios também tinham certos conhecimentos matemáticos, cuja origem, provavelmente, provinha também das necessidades de agrimensura e do comércio. Assim, encontraram-se vestígios datados de aproximadamente 2000 a.C. indiciadores de que este povo tinha a capacidade de resolver problemas envolvendo equações de segundo grau e biquadradas.

Relativamente aos Hindus, julga-se saber que este povo possuía conhecimentos de alguns casos particulares do teorema relacionado com

quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo.

Os conhecimentos geométricos, que os Egípcios e os povos orientais possuíam, foram levados até aos Gregos por via do comércio. Nesta civilização, Thales de Mileto, matemático grego que viveu cerca de 600 anos antes da nossa era, é considerado como o responsável pela introdução da geometria egípcia no seu país.

Pitágoras de Samos viveu no século VI a.C., fundou a chamada escola pitagórica, na qual a geometria deixou de ser desenvolvida unicamente com objectivo de ter uma aplicação prática, passando a ser tratada de forma dedutiva.

Mais tarde, por volta de 300 a.C., Euclides expôs nos seu livro *Os Elementos* os principais conhecimentos geométricos da época, sendo, ainda hoje, a base do ensino da geometria dita euclideana, a qual utiliza ainda hoje, as demonstrações publicadas nesse livro, quando se dedica ao estudo de temas aí tratados, tal como se pode ver em [21].

São ainda conhecidos os trabalhos de Arquimedes e de Apolónio que, conjuntamente com os de Euclides, correspondem ao período aureo da geometria Grega. Depois destes são de realçar os estudos feitos por Pappus que viveu em Alexandria no século III e os de Próculo que viveu no século

IV.

O conhecimento da matemática grega chegou ao mundo ocidental através do Império Romano e dos Árabes, todavia tal conhecimento foi ignorado durante a Idade Média tendo sido redescoberto com o aparecimento das primeiras Universidades (finais do século XII) e sobretudo no período da Renascença. Deste período ressalta Leonardo Fibonacci que, por volta de 1200, publicou os livros *Liber Abaci* e *Pratica Geometriae*, resultantes dos conhecimentos adquiridos nas suas viagens ao Oriente.

Avanços significativos na geometria, pós período grego, surgem apenas no século XVII através de René Descartes com a introdução do sistema de coordenadas cartesiano e do desenvolvimento, conjuntamente com Pierre de Fermat, da geometria analítica. No mesmo período surge a geometria projectiva, cujos responsáveis são Desargues e Pascal, mas esta só viria a sofrer grande impulso no século XVIII devido aos trabalhos de Monge e Carnot.

As geometrias não euclidianas surgem no século XIX, sendo um dos principais responsáveis Nicolái Lobachevski. A noção de grupo é introduzida na geometria devido aos trabalhos de Evaristo Galois, ao que se seguiu a introdução da topologia, destacando-se os trabalhos de S. Lie, F.

Klein, Riemann e Elie Cartan.

Como vimos a geometria já evoluiu muito desde o período grego até à actualidade, de facto, a geometria diferencial e topológica pouco têm a ver com a chamada geometria euclideana, no entanto, achamos pertinente continuar a estudar esta última por dois motivos. Por um lado, apesar da sua aparente simplicidade, parece-nos que ela ainda não está totalmente dominada pela comunidade escolar pré-universitária. O que poderá ser compreendido se tivermos em conta a ideia de um matemático francês, relativamente ao conhecimento matemático, citado em [12] quando diz que "uma teoria matemática não se considera completa enquanto não for tão clara que seja possível explicá-la ao primeiro homem que se encontre na rua". É também importante estudar estes conceitos pois eles serão os alicerces sobre os quais se constrói toda a geometria e, ainda segundo [12] por vezes não se compreendem conceitos mais avançados ou não se conseguem fazer demonstrações de grau de dificuldade mais elevada, por os problemas elementares não terem sido completamente apreendidos. Por outro lado, tal como referido em [2] e reforçado em [16], pensamos ser o ensino da geometria mal tratado ao nível do ensino pré-universitário, o que é um pouco revelador da maneira como a Matemática hoje em dia é vista.

De facto, esta perdeu relevância social face a outras, o que nos parece um pouco paradoxal, sobretudo se tivermos em conta a importância que esta ciência assumiu durante a II Guerra Mundial, tendo continuado durante a chamada Guerra Fria, devido às necessidades inerentes à exploração espacial. Neste período, segundo [10] "a investigação científica tornou-se tão importante para a sociedade como fascinante para os investigadores."

Ainda segundo os mesmos autores, cabe aos professores do ensino pré-universitário um importante papel na mudança do actual estado de espírito face à matemática, o que é tão mais importante quanto maior for o nível de desenvolvimento tecnológico pretendido para o nosso país. Com efeito, segundo [21], a matemática "desempenha um papel fundamental na ciência moderna" o que já é reconhecido pela comunidade científica uma vez que "uma parte quantitativamente importante da Matemática que se ensina nas universidades de todo o mundo é consagrada à educação de engenheiros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas e profissionais de várias outras disciplinas." Para se conseguir a mudança defendida, e no que à geometria, em particular, diz respeito, achamos que se deve combater o actual panorama do ensino da geometria, o qual se caracteriza por abordar vários assuntos de forma relativamente superficial e

espaçada no tempo. Tal facto é contraditório com a importância que a geometria assume, por exemplo, no exame nacional de nono ano, no qual é atribuída cerca de quarenta por cento da classificação às questões relacionadas com a geometria.

Assim, parece-nos pertinente rever a formação inicial dos professores de matemática, o que também é referido em [2] e corroborado por [16]. Pois, de facto, nos Cursos de Matemática ministrados nas nossas Universidades, ou se parte do princípio que determinados conhecimentos são dominados pelos alunos, aquando da sua entrada em tais estabelecimentos, o que não é sempre verdade, pelo que começam com o estudo de resultados mais avançados, levando a que os alunos sujeitos a estes cursos, ou não consigam ter aprovação, ou tendo-a, ficam com a ideia de a Geometria ser uma ciência com falta de fundamentação. Em alternativa, temos um estudo demorado e muito aprofundado sobre os alicerces da Geometria, fornecendo aos alunos bases muito sólidas para algo que provavelmente nunca será construído, visto que, muito possivelmente, alunos expostos a este tipo de ensino, nunca se aperceberão da beleza da geometria e ficarão com pouca vontade de continuar o seu estudo. Em qualquer um dos casos, os futuros professores sujeitos a este tipo de ensino, terão dificuldade em transmitir o

gosto pela Geometria aos seus alunos.

Não tendo nós a pretensão de sugerir alguma alteração ao nível do Universitário da Geometria, arriscaremos algumas ideias que, a serem adotadas ou reforçadas nos casos em que já são aplicadas, pensamos serem positivas para o ensino da Geometria ao nível pré-universitário, no entanto, a fim de apoiar as noças ideias, consideramos importante contar agora uma história retirada de [19].

Há cerca de dois mil e trezentos anos, Ptolomeu I reinava no Egípto, o qual começou a ler *Os Elementos* de Euclides, tendo-se cansado rapidamente, devido às longas cadeias de raciocínios aí presentes e nem sempre fáceis de seguir. Resolveu então chamar o famoso geómetra grego à sua presença, perguntando-lhe se não haveria uma forma mais fácil e rápida de aprender Geometria, ao que Euclides lhe terá respondido "Em matemática não existem vias especiais".

Tendo em conta esta história e, como sabemos qualquer atleta tem de treinar para atingir um bom desempenho desportivo, compreende-se que, de forma análoga, quem quiser aprender Geometria tem de habituar o seu cérebro a trabalhar. Deste modo, propomos que a Geometria vá sendo trabalhada ao longo de todo o percurso escolar do aluno, sem pausas, pois

nesta área, os algoritmos são reduzidos, pelo que temos de equacionar, frequentemente, a melhor estratégia de resolução de um determinado problema. No entanto, podemos dotar os nossos alunos de algumas ferramentas que os podem ajudar. Propomos que se comece pelo estudo de teoremas fundamentais, os quais poderão ser, inicialmente, problemas, mas depois passarão a mecanismos automáticos que possibilitam a passagem de um ponto ao outro, é também necessário ir dando problemas com grau de dificuldade cada vez maior, o que poderá ser feito recorrendo à introdução de teoremas mais complexos, à resolução de problemas que requeiram vários conhecimentos para a sua resolução, ou ao trabalhar de noções que estejam fora do âmbito da sala de aula, neste caso as coordenadas baricêntricas serão um bom exemplo, visto que requerem conhecimentos matemáticos ao alcance dos alunos do terceiro ciclo e, devido à sua forte componente geométrica, podem ser trabalhadas com os alunos mais interessados, desse nível de ensino, claro que neste caso estamos a pensar só nos conhecimentos introdutórios.

Para se conseguir o desenvolvimento de raciocínio preconizado anteriormente propomos que as actividades a desenvolver na sala de aula deverão ser complementadas com trabalhos realizados fora desta,

nomeadamente em clubes da matemática, os quais devem ter por objectivo a preparação de alunos para provas de matemática, destacando-se as que são dinamizadas, pela S. P. M, pela Universidade de Aveiro, pela Escola Superior de Educação de Lisboa e pela Universidade do Algarve, permitindo aos alunos pesquisar de modo a saber um pouco mais sobre a história da matemática donde poderá surgir a preparação de palestras, o aprofundar dos conteúdos leccionados. Num clube deverá ainda ser fomentada a utilização de jogos matemáticos, como por exemplo os que fazem parte do *Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos*, estimulando os alunos que revelem maior potencialidade e interesse.

Para além dos motivos apresentados para justificar o estudo de geometrias elementares no século XXI, existem outros que ainda não foram referidos, sendo que um deles se prende com o desenvolvimento que as tecnologias sofreram nos últimos trinta anos. De facto a capacidade dos actuais computadores pessoais, associados a softwares de geometria dinâmica, (como o *The Geometer's Sketchpad*, ou o programa de desenho assistido por computador *C.A.D.*), possibilitam um aprofundar de estudos que não era acessível aos antigos gregos. A outro nível, há a realçar o fascínio que, pelo menos para nós, é o facto de um triângulo ter um enorme número de

centros. Com efeito, é do conhecimento geral que uma circunferência tem um centro, mas já não é natural falar de centros de polígonos. Relativamente a um quadrado, ainda podemos pensar no seu centro, como o ponto equidistante dos seus vértices e dos seus lados, já não de todos os seus pontos. No que a um rectângulo não quadrado, diz respeito, já só poderíamos falar do ponto equidistante dos seus vértices, mas relativamente a um triângulo qualquer temos sempre, o ponto equidistante dos vértices e o ponto equidistante dos lados. Tais propriedades vêm dos antigos Gregos, os quais chamaram a tais pontos, circuncentro e incentro, respectivamente.

Essa civilização provou ainda a existência de mais dois centros, que resultam da intersecção das alturas e das medianas, referentes a cada vértice, originando o ortocentro e o baricentro, respectivamente, na actualidade já são conhecidos centenas de centros, graças sobretudo ao trabalho de Kimberling dos quais se destaca [13].

Com o intuito de dar resposta às preocupações referidas estruturámos este trabalho de modo a ser útil a docentes e alunos, do ensino pré-universitário, interessados em Geometria, tendo-o dividido em quatro partes, as quais passamos a descrever.

No Capítulo dois, apresentamos alguns resultados clássicos que

consideramos imprescindíveis à construção de uma boa preparação de base para quem pretenda ir mais além, são apresentados teoremas e alguns seus corolários ou proposições que dependam deles.

O terceiro Capítulo é composto por resultados que se distinguem dos anteriores por envolverem, na sua formulação, elementos relacionados com centros do triângulo, como por exemplo, circunferência inscrita, circunscrita ou ex-inscrita, bem como o centro e o raio de cada uma dessas circunferências, mais uma vez, surgem resultados clássicos.

No Capítulo quatro apresentaremos algumas construções euclidianas, ou seja, construções feitas com recurso exclusivamente à régua não graduada e ao compasso, começando pelas mais elementares, as quais serão necessárias às que se lhe seguem, visto serem mais complexas. No último caso, para além de apresentarmos a construção, analisaremos o número de soluções possíveis para o problema proposto.

Relativamente ao quinto Capítulo, serão abordadas as coordenadas baricêntricas, começando por alguns preliminares, necessários à sua compreensão. Serão introduzidas algumas noções que servem para ilustrar a riqueza deste sistema de coordenadas, possibilitando um aprofundar de conhecimentos para quem pretenda ir um pouco além da geometria de

Euclides. Se formos um bocado mais além do que é espectável ser trabalhado ao nível do ensino pré-universitário, é por considerarmos que o professor tem de ir a esse ponto para estar apto a preparar materiais com um grau de dificuldade adequado para a sua sala de aula ou para o seu clube de matemática. Para o estudo destes assuntos recomenda-se a leitura dos trabalhos de Yiu, salientando-se [23], [22] e [24], os quais são imprescindíveis, para todos os que queiram trabalhar nesta área, bem como para abrir portas a futuras investigações.

Com este trabalho, pensamos ainda ter dado um passo que nos permite ver mais longe e traçar novos rumos para investigação que nos propomos fazer no futuro. Assim, consideramos que a estrutura de Grupo Abeliano, constituída pela noção de soma e produto de pontos definidos em coordenadas baricêntricas, merece ser estudada com alguma profundidade.

Por outro lado, em [11] e com a correspondência trocada com Clodoveu Davis, ficámos com a ideia que os sistemas de informação geográficos, conhecidos por G.I.S., do inglês *Geographic Information System*, recorrem às coordenadas baricêntricas, pela sua facilidade em determinar se um ponto pertence ou não a um triângulo, o que é fundamental porque, em G.I.S., usam-se polígonos e linhas poligonais, em vez de curvas

paramétricas, arcos de curvas e outras formas, por uma questão de simplicidade e regularidade de armazenamento de dados. Pelo que a triangulação de polígonos oferece várias possibilidades interessantes.

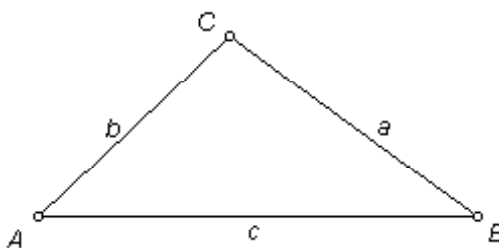
Capítulo 1

Alguns resultados clássicos

Neste capítulo demonstraremos alguns teoremas que nos serão úteis ao longo deste trabalho. Para além da necessidade que deles temos, pensamos que poderão ser úteis para a criação de problemas a propor aos nossos alunos, tanto em contexto de sala de aula, como na actividade regular de um clube de matemática, o qual esperamos e desejamos poder encontrar em cada estabelecimento de ensino do nosso país.

Ao longo de todo o trabalho, e sempre que nada seja dito em contrário, iremos enunciar os vértices de um triângulo, no sentido anti-horário, sendo que daremos prioridade às letras A , B e C para designar tais vértices, estas letras poderão também representar os ângulos internos do triângulo, assim,

quando nos referirmos ao ângulo A , estamos a pensar no ângulo interno, BAC , relativamente aos lados do triângulo, recorreremos às letras minúsculas a , b e c para nos referirmos aos lados que se opõem aos vértices A , B e C , respectivamente. Consoante o contexto a , b e c podem também, representar o comprimento do lado correspondente.



Os comprimentos dos lados de um triângulo também poderão ser representados com recurso aos vértices que o limitam, assim, quando nos referirmos a $|AB|$ estamos a pensar no comprimento do segmento de recta AB , neste sentido, $|AB|$ e $|BA|$ representarão o mesmo valor. Haverá, no entanto, situações em que a ordem dos pontos será importante, nesses casos, AB e BA terão o mesmo valor absoluto, igual ao comprimento do segmento de recta AB , mas terão sinais contrários.

Outras situações, que julgemos pertinentes, quer tenham a ver com notação ou com a definição de conceitos necessários ao tratamento de um determinado assunto, serão referidas quando surgir a necessidade de as

esclarecer pela primeira vez.

1.1 Resultados preliminares

Nestes resultados preliminares incluiremos o teorema dos senos, o teorema dos cossenos, o teorema da área, duas proposições de *Os Elementos de Euclides*, as quais estão relacionadas com o teorema da corda, que também será apresentado. Segue-se um teorema que já fez parte do programa do 8º ano sendo então chamado de teorema do cateto e, por fim, o teorema da bissetriz, tais resultados foram retirados de [2], [8], [14], [15], e [7].

Definição 1.1.1 *A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência, que passa pelos seus três vértices, o centro de tal circunferência, recebe o nome de circuncentro, sendo resultante da intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.*

Definição 1.1.2 *Por mediatriz de um lado do triângulo entendemos a recta equidistante dos vértices que definem tal lado, ou seja, a recta perpendicular ao segmento de recta que define tal lado, a passar pelo seu ponto médio.*

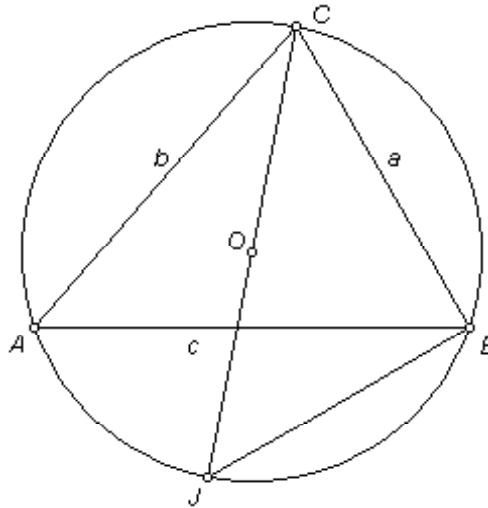
Teorema dos senos *Num triângulo com vértices A , B e C sendo R o raio da circunferência circunscrita, temos*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (1.1)$$

Demonstração

Seja O o circuncentro do triângulo ABC , temos dois casos a considerar, consoante a posição de O relativamente ao triângulo.

1ª Situação: Seja O um ponto interior do triângulo ABC .



Sendo o segmento de recta CJ um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , resulta que os ângulos A e J têm a mesma amplitude porque são ângulos inscritos associados ao mesmo arco. Por outro lado, aplicando o teorema do arco capaz, ao diâmetro CJ , concluímos que o

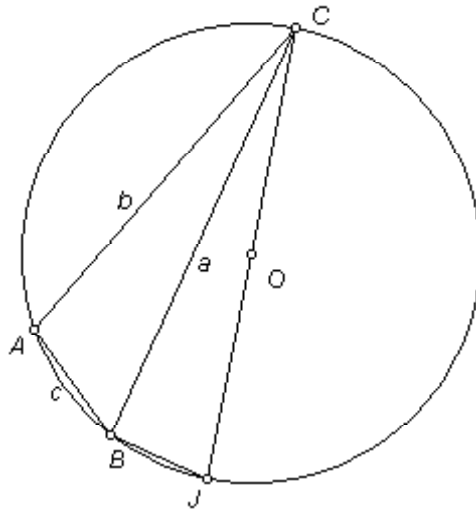
triângulo CJB é recto. Assim temos

$$\sin A = \sin J = \frac{a}{2R},$$

donde

$$2R = \frac{a}{\sin A}.$$

2ª Situação: Seja O um ponto exterior do triângulo ABC .



Pelo teorema do arco capaz, a soma dos ângulos A e J é 180° , ou seja, os ângulos A e J são suplementares, resultando que o seno destes ângulos tem o mesmo valor, deste modo, à semelhança da primeira situação, temos

$$2R = \frac{a}{\sin A}.$$

De forma análoga, obteríamos resultados semelhantes relativos aos ângulos

B e C o que nos leva a (1.1) ■

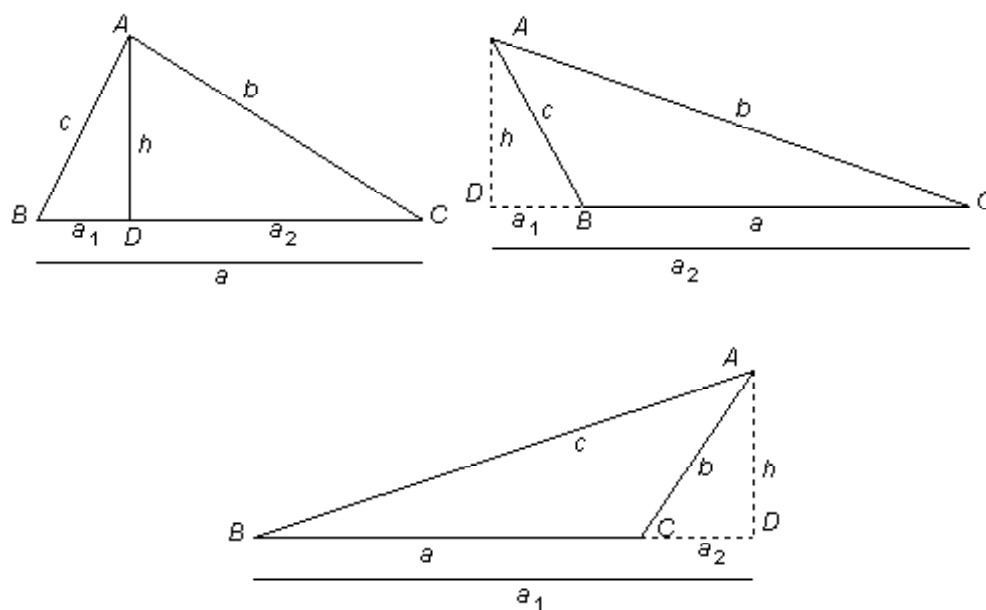
Teorema dos cossenos *Num triângulo com vértices A , B e C , se a , b e c forem os comprimentos dos lados opostos a A , B e C , respectivamente, temos.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Demonstração



De acordo com o comprimento dos segmentos de recta apresentados nas figuras, e sendo D o pé da perpendicular a BC a passar por A , temos três

situações a analisar:

$B - D - C$, em que D está entre B e C ;

$D - B - C$, em que D está à esquerda de B ;

$B - C - D$, em que D está à direita de C ,

pelo que

$$a_2 = a + a_1 \text{ se } D - B - C;$$

$$a_2 = a - a_1 \text{ se } B - D - C;$$

$$a_2 = -a + a_1 \text{ se } B - C - D.$$

Assim, escolhendo δ e ε valendo um ou menos um, consoante os três casos considerados, obtemos

$$\begin{aligned} b^2 &= a_2^2 + h^2 \\ &= (\delta a + \varepsilon a_1)^2 + h^2 \\ &= (\delta a + \varepsilon a_1)^2 + c^2 - a_1^2 \\ &= a^2 + c^2 + 2\delta\varepsilon a a_1 \\ &= a^2 + c^2 + 2\delta\varepsilon a c |\cos B| \end{aligned}$$

Tendo em conta que o valor absoluto do cosseno de B é igual ao simétrico do cosseno de B , quando D está à esquerda de B e de C , sendo o valor absoluto, do cosseno de B igual ao cosseno de B nos restantes casos e, por outro lado, o produto de δ por ε é igual a um, na situação anteriormente referida, sendo igual a menos um nos restantes casos, obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

em todas as situações.

De forma análoga se deduzem as restantes fórmulas. ■

Com o teorema seguinte, surge a necessidade de introduzir uma representação da área de um triângulo. Como este conceito será muitas vezes utilizado ao longo deste trabalho, entendemos ser este o momento oportuno para fixar uma notação que será adoptada ao longo do resto do texto. Assim, a área do triângulo ABC será representada por $\Delta_{[ABC]}$.

Teorema das áreas ¹ *A área de um triângulo pode ser calculada pela fórmula*

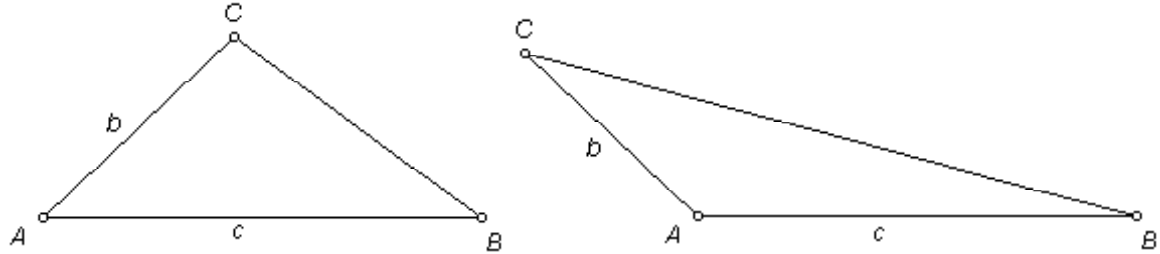
$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2}bc \sin A \tag{1.2}$$

em que b e c são os lados do triângulo que limitam o ângulo A .

¹Este teorema já fez parte do programa de matemática do 8º ano. Ver [10]

Demonstração

Temos dois casos a considerar consoante A seja um ângulo agudo ou obtuso



Se A for um ângulo agudo, então seno de A é igual ao quociente de h por b ,
em que h representa a altura do triângulo relativamente ao lado de
comprimento c , pelo que

$$h = b \sin A$$

e, tem lugar (1.2)

Se A for um ângulo obtuso

$$\sin(\pi - A) = \sin A = \frac{h}{b}$$

Conduzindo à mesma fórmula. ■

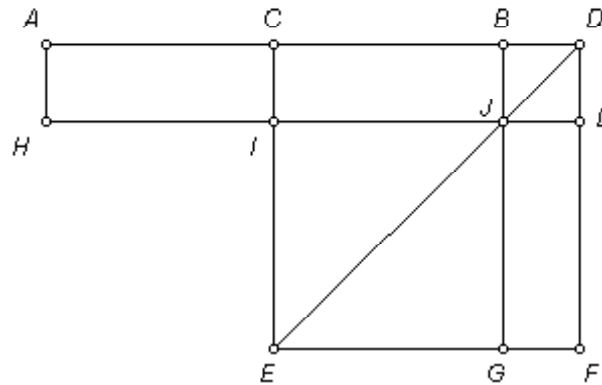
Proposição II 6 ² *Seja AB um segmento de recta com C como ponto médio, acrescentemos um segmento de recta BD , de tal forma que A, B, C e D sejam*

²Esta proposição é a número seis do livro dois dos Elementos de Euclides

colineares. Assim temos

$$|AD||DB| + |CB|^2 = |CD|^2. \quad (1.3)$$

Demonstração



Seja $CEFD$ um quadrado e $AHLD$ um rectângulo, DE é uma diagonal do quadrado anterior e BG é paralela a CE , a recta HL passa por J , sendo que este ponto resulta da intersecção de DE com BG .

Como os segmentos de recta AC e CB têm o mesmo comprimento, os rectângulos $AHIC$ e $CIJB$ são iguais, por outro lado, os rectângulos $CIJB$ e $JGFL$, são iguais, pelo que os três anteriores rectângulos são iguais entre si.

Assim, o polígono $AHIEGJLD$ e o quadrado $CEFD$ têm a mesma área. Tendo em conta que o primeiro é constituído pelo rectângulo $AHLD$ e pelo quadrado $IEGJ$ a igualdade entre ambos pode ser representada como se

segue

$$|AD| |DL| + |IJ| |JG| = |CD| |DF|.$$

Esta igualdade pode ser simplificada se tivermos em consideração que $BJLD$ é um quadrado, o que implica a igualdade entre os comprimentos dos lados BD e DL o mesmo acontecendo relativamente aos lados CD e DF do quadrado $CEFD$. Verifica-se, ainda, que os segmentos de recta CB , IJ e JG

têm o mesmo comprimento, pelo que se verifica (1.3) ■

Com o próximo teorema, surge a necessidade de representar circunferências dados o seu centro e raio, pelo que aproveitamos para fixar uma notação que será adoptada ao longo do resto deste trabalho. Assim, por $\mathcal{C}(O, r)$, entenderemos a circunferência de centro O e raio r .

Definição 1.1.3 *O valor $\mathcal{C}(P) := |OP|^2 - r^2$, diz-se potência de P relativamente à circunferência $\mathcal{C}(O, r)$, sendo negativa, zero, ou positiva, consoante P seja um ponto interior, fronteiro ou exterior a $\mathcal{C}(O, r)$.*

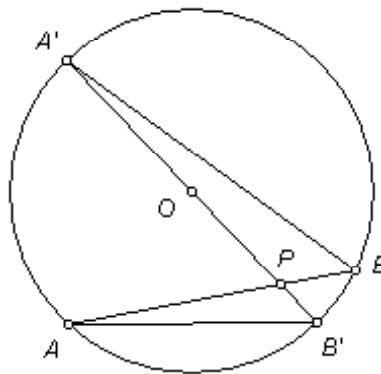
Teorema da corda *Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência, P um ponto da recta AB , em que os pontos A e B definem uma corda de \mathcal{C} . Então*

$$|PA| |PB| = |OP|^2 - r^2 = \mathcal{C}(P).$$

Demonstração

Temos de distinguir três casos, consoante P seja, interior, fronteiro ou exterior a \mathcal{C} .

(i) P está no interior de \mathcal{C} .



Neste caso $|OP|$ é menor do que r e, portanto, os vectores PA e PB têm sentidos contrários, pelo que

$$PA \cdot PB < 0.$$

Se construirmos o diâmetro de \mathcal{C} a passar por P , a sua intersecção com a circunferência definirá dois pontos, digamos A' e B' , teremos, então, o seguinte posicionamento dos pontos relativamente uns aos outros $A' - O - P - B'$ ou $A' - P - O - B'$, sem perda de generalidade consideremos a primeira situação relativamente à qual se verifica que o

produto de

$$PA' . PB' = - \left| PA' \right| \left| PB' \right|,$$

tendo ainda em conta, que

$$\left| A'P \right| = r + |OP|, \quad \left| PB' \right| = r - |OP|$$

temos

$$PA' . PB' = - (r + |OP|) . (r - |OP|).$$

Como o segundo membro da igualdade representa uma diferença de quadrados, podemos simplificá-lo obtendo a potência de P relativamente a \mathcal{C} .

$$PA' . PB' = |OP|^2 - r^2 = \mathcal{C}(P) < 0.$$

Se os segmentos de recta AB e $A'B'$ tiverem o mesmo comprimento, o produto de PA por PB será igual ao produto de PA' por PB' o qual, como vimos, é idêntico a $|OP|^2 - r^2$.

Caso contrário os ângulos $B'AB$ e $B'A'B$ terão a mesma amplitude, porque são ângulos inscritos, associados à mesma corda, por outro lado, os ângulos BPA' e APB' têm a mesma amplitude porque são verticalmente opostos,

pelo que os triângulos $BA'P$ e $AB'P$ são semelhantes, consequentemente

$$\frac{|AP|}{|PB'|} = \frac{|A'P|}{|PB|},$$

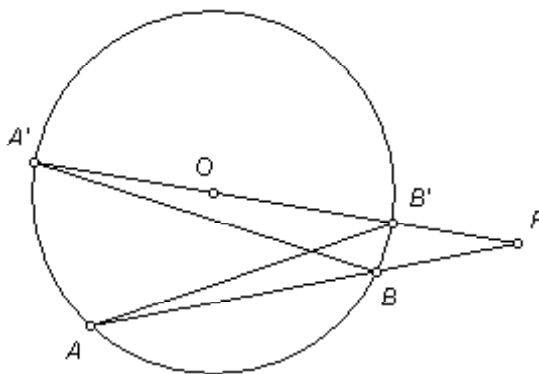
donde

$$|AP||PB| = |A'P||PB'|,$$

como P é interior aos segmentos de recta AB e $A'B'$ temos

$$PA.PB = PA'.PB' = |OP|^2 - r^2.$$

(ii) P está no exterior de \mathcal{C} .



Neste caso o segmento de recta OP , é maior do que r e os vectores PA e

PB têm o mesmo sentido pelo que

$$PA.PB > 0.$$

Consideremos um diâmetro $A'B'$ tal que os pontos estejam ordenados da seguinte maneira $A' - O - B' - P$, neste caso o produto de PA' por PB'

será positivo, pelo que, expressando os comprimentos dos segmentos de recta PA' e PB' , à custa de somas ou de diferenças, envolvendo o comprimento do segmento de recta PO e o raio, à semelhança do que já fizemos, obtemos

$$PA'.PB' = |PO|^2 - r^2$$

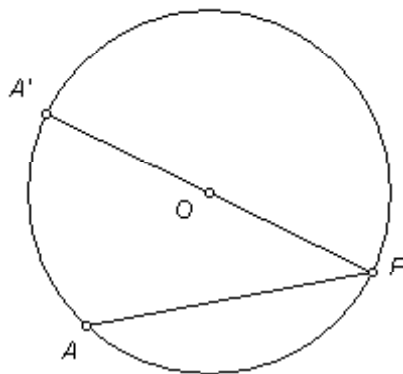
Mais uma vez os ângulos BAB' e $BA'B'$ são iguais, como o ângulo $B'PB$ é comum aos triângulos BPA' e APB' estes são semelhantes, resultando, de forma análoga à anterior,

$$PA'.PB' = PA.PB,$$

pelo que

$$PA.PB = |PO|^2 - r^2.$$

(iii) P está sobre C .



Neste caso, o comprimento do segmento de recta OP é igual a r , sendo a potência de P igual a zero. Verifica-se também que P assume o papel desempenhado por B nas situações anteriores, pelo que o segundo factor do produto dos segmentos PA por PB é agora o segmento de recta PP , o qual tem comprimento nulo, donde, tal produto é igual a zero. Desta forma

continuamos a ter

$$PA.PB = |PO|^2 - r^2.$$

■

O segundo caso considerado na demonstração anterior é equivalente à proposição trinta e seis do livro três de *Os Elementos de Euclides*, a qual, pela sua importância histórica, apresentamos de seguida.

Proposição III 36 *Seja P um ponto exterior à circunferência ABC , consideremos duas rectas incidentes com P , sendo uma delas PBA , secante à circunferência, e a outra PC , tangente à circunferência. Então, o rectângulo PA por PB é igual ao quadrado sobre PC .*

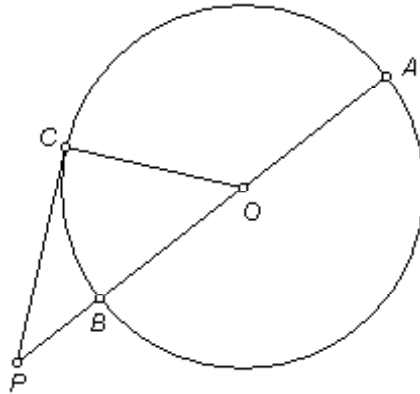
Demonstração

Pretendemos mostrar

$$|PA||PB| = |PC|^2 \tag{1.4}$$

Temos de considerar dois casos, consoante PBA passe ou não pelo centro da
circunferência.

(i) Seja a recta PBA incidente com o centro da circunferência.



Seja OC o raio definido pelo ponto de tangência da recta PC com a
circunferência, então, o ângulo PCO é recto. Como O é o ponto médio do
segmento de recta AB e P é colinear com AB , podemos recorrer a (1.3)
para afirmar que

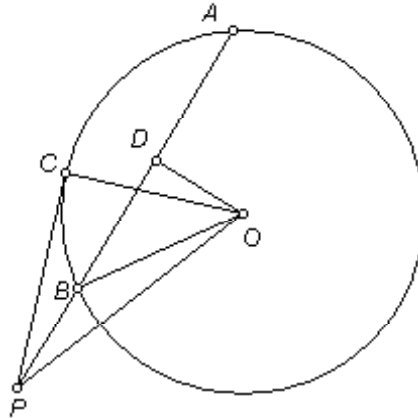
$$|AP||PB| + |OB|^2 = |PO|^2.$$

Tendo em conta a relação anterior bem como o facto de OB e OC serem
raios, logo terem o mesmo comprimento e ainda, devido à aplicação do
teorema de Pitágoras ao triângulo OCP , resulta que

$$|AP||PB| + |OC|^2 = |OC|^2 + |PC|^2, \quad (1.5)$$

o que equivale a (1.4).

(ii) Seja O um ponto exterior à recta PBA



Neste caso, construímos o segmento de recta OD perpendicular à corda AB pelo que os segmentos de recta AD e DB , têm o mesmo comprimento.

Aplicando a proposição (1.3) à recta $ADBP$, resulta

$$|AP| |PB| + |DB|^2 = |PD|^2,$$

adicionando o quadrado do comprimento do segmento de recta OD a ambos os membros da igualdade anterior e aplicando o teorema de Pitágoras aos

triângulos DBO e DPO , resulta

$$|AP| |PB| + |BO|^2 = |PO|^2.$$

Pelo que (1.4) é válida.

Qualquer das situações que acabámos de analisar é equivalente ao segundo caso estudado na demonstração do teorema da corda, porque o triângulo

OCP é rectângulo, pelo que

$$|PO|^2 = |OC|^2 + |CP|^2,$$

o que equivale a dizer que o quadrado do comprimento do segmento de recta PC é igual à potência de P relativamente à circunferência de centro

O e raio OB , por exemplo. ■

Proposição 1.1.4 *Se P for exterior à circunferência $\mathcal{C}(O, R)$, então a potência de P , com respeito a essa circunferência, assume o valor do quadrado do comprimento da tangente à circunferência defenida por P . Sendo que se entende por comprimento da tangente, o comprimento do segmento de recta defenido por P e pelo ponto de intersecção da tangente à circunferência $\mathcal{C}(O, R)$ defenida por P e a própria circunferência.*

Demonstração

Esta proposição equivale à proposição (III 36), de facto, se P for exterior à circunferência em análise, então o triângulo POC é rectângulo, pelo que,

aplicando-lhe o teorema de Pitágoras resulta que o quadrado do comprimento do segmento de recta PO é igual à soma dos quadrados dos

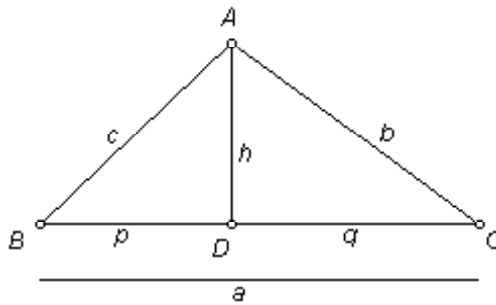
segmentos de recta OC e CP , o que conduz à seguinte igualdade equivalente

$$|CP|^2 = |PO|^2 - |OC|^2.$$

Como o segmento de recta OC representa um raio da circunferência, o segundo membro da igualdade anterior representa a potência de P relativamente à circunferência em análise, pelo que a observação fica justificada. ■

Teorema do cateto *Num triângulo rectângulo, o quadrado do comprimento de um cateto é igual ao produto do comprimento da hipotenusa pela projecção do referido cateto relativamente à hipotenusa, ou seja,*

$$c^2 = pa, b^2 = qa.$$



Demonstração

Pelo facto de o triângulo ABC ser rectângulo, verifica-se a igualdade entre o quadrado de a e a soma dos quadrados de b e de c , ou, de forma equivalente,

entre a soma dos quadrados de b e de c e o quadrado da soma de p com q .

Desenvolvendo este último quadrado, podemos obter a seguinte expressão

$$b^2 - q^2 + c^2 - p^2 = 2pq$$

Como os triângulos ABD e ADC são rectângulos temos, respectivamente,

que

$$c^2 = h^2 + p^2, b^2 = h^2 + q^2,$$

tendo em conta as últimas igualdades destacadas obtemos

$$h^2 = pq.$$

Da igualdade anterior e da relação existente entre os lados do triângulo

ABD , que advém do facto de este ser rectângulo, temos

$$c^2 = p(p + q).$$

Finalmente, como a soma de p com q é igual a a , obtemos.

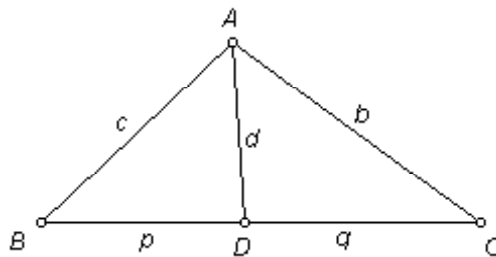
$$c^2 = pa.$$

Analogamente prova-se a outra igualdade enunciada no teorema. ■

Teorema da bissetriz *Dado um triângulo, a bissetriz de um dos seus ângulos define dois triângulos cujas bases, relativamente ao ângulo em causa,*

são proporcionais aos lados do triângulo inicial que definem o ângulo em questão, ou seja,

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}.$$



Demonstração

Como os triângulos ABD e ADC têm a mesma altura, temos

$$\frac{A_{[ABD]}}{A_{[ADC]}} = \frac{p}{q}.$$

Aplicando (1.2) aos triângulos ABD e ADC e, tendo em conta que os ângulos BAD e DAC têm a mesma amplitude, obtemos

$$\frac{A_{[ABD]}}{A_{[ADC]}} = \frac{c}{b}.$$

As duas igualdades anteriores conduzem-nos ao resultado enunciado no

teorema. ■

1.2 Teoremas fundamentais

Nestes teoremas fundamentais incluiremos o teorema de Steiner, a fórmula de Herão, o teorema de Menelau e o teorema de Ceva. Para cada um destes resultados será apresentada uma aplicação, um corolário, ou uma extensão.

Os resultados presentes nesta secção poderão ser encontrados em [2], [4], [17], [18], [7] e [11],

1.2.1 Teorema de Steiner

Este teorema permite relacionar os comprimentos dos segmentos de recta resultantes da partição, de um lado de um triângulo, definida pelas intersecções com duas rectas simétricas relativamente à bissetriz do ângulo oposto. Para compreender a utilidade deste teorema veremos que o teorema da bissetriz é um corolário deste teorema e apresentaremos ainda outros corolários.

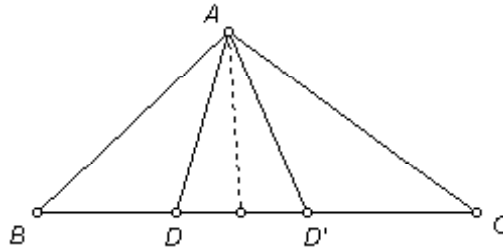
Teorema de Steiner ³ *Sejam D e D' dois pontos pertencentes ao lado BC do triângulo ABC , tais que as cevianas AD e AD' são simétricas, uma da*

³O teorema de Steiner surgiu inicialmente como a proposição 12 do livro VI da colecção de Pappus.

outra, relativamente à bissetriz do ângulo BAC , então temos

$$\frac{|BD|}{|DC|} \frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{|AB|^2}{|CA|^2}.$$

Demonstração



Aplicando o teorema dos senos aos triângulos ABD e ADC , obtemos

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}, \quad \frac{|CA|}{|DC|} = \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle DAC}.$$

Tendo em conta que os ângulos ADB e CDA são suplementares, os seus senos têm o mesmo valor, pelo que, simplificando o produto, membro a

membro, das duas anteriores igualdades, obtemos

$$\frac{|BD|}{|AB|} \frac{|CA|}{|DC|} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC}.$$

Recorrendo a um raciocínio análogo, aplicado aos triângulos ABD' e $AD'C$,
obtemos

$$\frac{|BD'|}{|AB|} \frac{|CA|}{|D'C|} = \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle D'AC}.$$

Multiplicando, membro a membro, as duas anteriores igualdades, obtemos

$$\frac{|BD|}{|AB|} \frac{|CA|}{|DC|} \frac{|BD'|}{|AB|} \frac{|CA|}{|D'C|} = \frac{\sin \angle BAD \sin \angle BAD'}{\sin \angle DAC \sin \angle D'AC}$$

Como as cevianas AD e AD' são simétricas uma da outra, relativamente à bissetriz do ângulo BAC , o mesmo acontecendo com as rectas AB e AC os ângulos BAD' e $D'AC$ têm a mesma amplitude, tal como BAD e $D'AC$. Assim o segundo membro da igualdade anterior será igual a um, pelo que

$$\frac{|BD|}{|DC|} \frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|CA|^2}{|AB|^2} = 1,$$

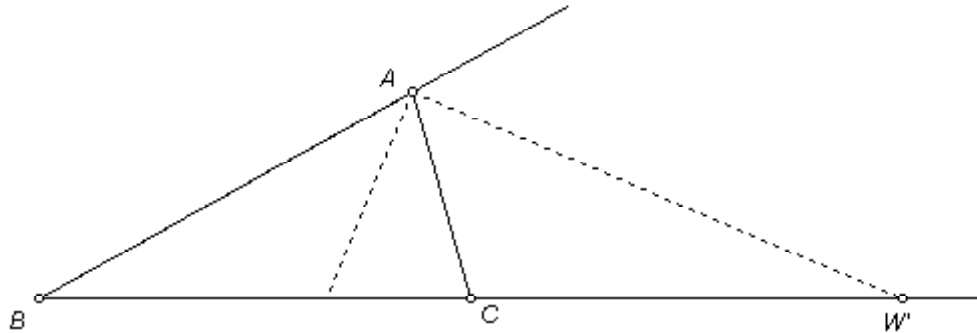
o que equivale à igualdade que pretendíamos demonstrar. ■

Observação 1.2.1 *O teorema da bissetriz é um corolário imediato deste, basta considerar que os pontos D e D' são coincidentes, correspondendo ao pé da bissetriz do ângulo A .*

Corolário 1.2.2 *Seja ABC um triângulo. Se a bissetriz externa do ângulo BAC , intersecta a recta BC no ponto W' , então*

$$\frac{BW'}{W'C} = -\frac{|AB|}{|CA|}. \quad (1.6)$$

Demonstração



A bissetriz de um ângulo divide-o em dois com metade da amplitude do inicial, o mesmo efeito é provocado pela bissetriz externa de um ângulo. Como os ângulos interno e externo associados a um vértice de um triângulo são suplementares um do outro, compreende-se que o ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa de um ângulo seja recto, pelo que, tais bissetrizes são perpendiculares. Assim, a reflexão da recta AW' em relação à bissetriz interna do ângulo BAC , dá origem à própria recta, deste modo, podemos aplicar o teorema de Steiner considerando os pontos D e D' coincidentes com W' , logo

$$\frac{|BW'|}{|W'C|} \frac{|BW'|}{|W'C|} = \frac{|AB|^2}{|CA|^2},$$

o que equivale a

$$\left(\frac{|BW'|}{|W'C|}\right)^2 = \frac{|AB|^2}{|CA|^2}.$$

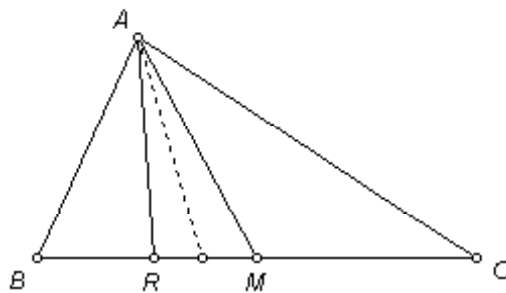
Como o ponto W' divide externamente o segmento de recta BC , a razão definida pelo quociente dos segmentos de recta BW' e $W'C$ é negativa, por outro lado, como as rectas AB e AC não têm a mesma direcção, a razão definida pelo quociente dos segmentos de recta AB e CA é positiva, pelo que, a última igualdade em destaque, equivale ao resultado que nos propusemos demonstrar. ■

Definição 1.2.3 *A semideana referente a um vértice é a recta que resulta da reflexão da mediana na bissetriz desse vértice.*

Corolário 1.2.4 *Seja ABC um triângulo, se a semideana relativamente ao vértice A intersectar a recta BC no ponto R , então*

$$\frac{|BR|}{|RC|} = \frac{|AB|^2}{|CA|^2}.$$

Demonstração



Seja M o ponto médio do segmento de recta BC e R a intersecção da semideana referente a A com a recta BC . Podemos aplicar o teorema de

Steiner, fazendo D e D' iguais a M e R , respectivamente, resultando

$$\frac{|BM| |BR|}{|MC| |RC|} = \frac{|AB|^2}{|CA|^2}.$$

Mas como M é o ponto médio do lado BC , a razão entre os comprimentos dos segmentos de recta BM e MC é igual a um, pelo que o resultado deste corolário é válido■

1.2.2 Fórmula de Herão

A fórmula de Herão é utilizada para determinar a área de qualquer triângulo dadas apenas as medidas dos seus lados. Para além desta fórmula, apresentaremos, também, uma sua extensão aplicável a quadriláteros cíclicos. Tal extensão é atribuída a Brahmagupta, matemático indiano, do século sete.

Com este teorema, surge a necessidade de introduzir a noção de semiperímetro.

Definição 1.2.5 *O semiperímetro de um triângulo ABC cujos lados medem a , b e c é o valor p representado pela seguinte igualdade*

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Teorema 1.2.6 *Seja ABC um triângulo com lados a , b e c sendo p o seu semiperímetro. Então a área $\Delta_{[ABC]}$ satisfaz a "fórmula de Herão"*

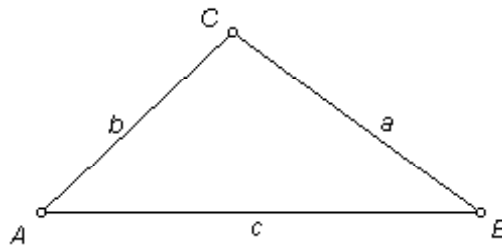
$$\Delta_{[ABC]} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

A qual é equivalente à fórmula

$$16\Delta_{[ABC]}^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4.$$

Demonstração

Relativamente à primeira fórmula, consideremos a seguinte figura



A igualdade (1.2) do teorema das áreas pode ser reescrita de forma
equivalente surgindo

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2}ab\sqrt{1 - \cos^2 C}.$$

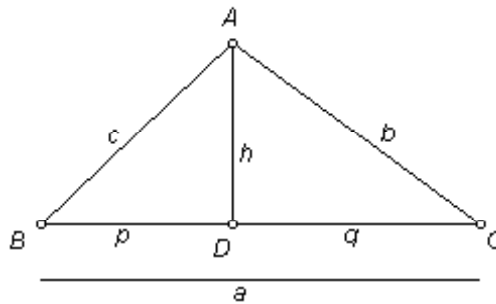
Aplicando o teorema dos cossenos ao ângulo C e substituindo o cosseno de C , derivado daquele teorema, na igualdade anterior, resulta sucessivamente

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)} \\
&= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)p}.
\end{aligned}$$

Ficando, assim demonstrada a primeira fórmula.

Relativamente à segunda fórmula, consideremos a seguinte figura



Um triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. Podemos supor que B e C são esses ângulos, se D for o pé da perpendicular a BC a passar por A , tal como mostra a figura, temos que p e q são os comprimentos dos segmentos de recta BD e DC , respectivamente. Pelo teorema de pitágoras podemos retirar duas expressões para o quadrado da altura do triângulo relativamente ao lado BC .

$$h^2 = c^2 - p^2; \tag{1.7}$$

$$h^2 = b^2 - q^2.$$

Tendo em conta que q é igual à diferença entre a e p , a segunda igualdade
pode ser simplificada, surgindo

$$h^2 = b^2 - a^2 + 2ap - p^2.$$

Por diferença, membro a membro, entre esta igualdade e (1.7), resulta

$$0 = c^2 - b^2 + a^2 - 2ap,$$

donde se pode definir p em função de a , b e c . Substituindo essa expressão
em (1.7), obtemos

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right)^2.$$

Tendo em conta que

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2}ah,$$

podemos simplificar a igualdade anterior, obtendo

$$\Delta_{[ABC]}^2 = \frac{a^2c^2}{4} - \frac{(c^2 - b^2 + a^2)^2}{16},$$

desembaraçando-nos de denominadores e desenvolvendo o quadrado,
obtemos

$$16\Delta_{[ABC]}^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

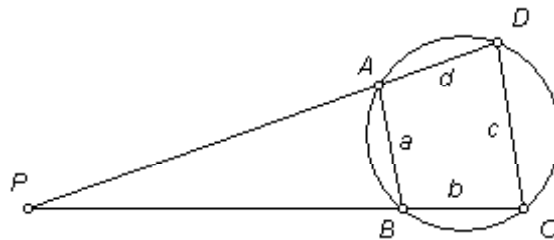
o que conclui a demonstração da segunda fórmula. ■

Definição 1.2.7 *Um quadrilátero cíclico é um quadrilátero que pode ser inscrito numa circunferência.*

Proposição 1.2.8 *Dado um quadrilátero cíclico, com vértices A, B, C e D e lados a, b, c e d , a fórmula que permite determinar a sua área é*

$$\Delta_{[ABCD]} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad (1.8)$$

Demonstração



Vamos dividir os quadriláteros cíclicos em rectângulos e não rectângulos, procedendo à demonstração para ambos os grupos de polígonos.

- Se $ABCD$ for um rectângulo, os comprimentos dos lados a e c serão iguais, o mesmo acontecendo relativamente a b e d , logo,

$$p = a + b.$$

Tendo em conta que

$$\sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)} = ab,$$

concluimos que a fórmula (1.8) de Brahmagupta é válida para os
rectângulos.

- Se $ABCD$ for um quadrilátero cíclico não rectângulo

Definamos P como a intersecção das rectas DA e CB , sendo

$$x = |PC|, y = |PD|,$$

pela Fórmula de Herão a área do triângulo DPC é

$$\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(-x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)}. \quad (1.9)$$

Como os ângulos ADC e CBA são suplementares, um em relação ao outro,

o mesmo acontecendo com os ângulos ABP e CBA , concluimos que os

ângulos ABP e ADC têm a mesma amplitude, analogamente, provamos a

igualdade entre as amplitudes dos ângulos PAB e DCB , deste modo, os

triângulos BAP e DPC são semelhantes sendo a razão de semelhança igual

ao quociente entre a e c , pelo que

$$\frac{\Delta_{[BAP]}}{\Delta_{[DPC]}} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Como a área do quadrilátero $ABCD$ pode ser determinada pela diferença entre as áreas dos triângulos DPC e BAP podemos expressar a razão, entre a área do quadrilátero e a do triângulo maior, recorrendo ao seguinte resultado

$$\frac{\Delta_{[ABCD]}}{\Delta_{[DPC]}} = \frac{c^2 - a^2}{c^2}. \quad (1.10)$$

Da semelhança entre os os triângulos BAP e DPC resultam igualmente, as seguintes relações

$$\frac{x}{c} = \frac{y - d}{a}, \quad \frac{y}{c} = \frac{x - b}{a}.$$

Adicionando, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos

$$\frac{x + y}{c} = \frac{x + y - b - d}{a},$$

o que equivale a

$$x + y = \frac{c}{c - a} (b + d),$$

finalmente

$$x + y + c = \frac{c}{c - a} (b + d + c - a).$$

Recorrendo a um processo análogo, podemos determinar as seguintes

relações

$$-x + y + c = \frac{c}{c+a} (a + c + d - b);$$

$$x + y - c = \frac{c}{c-a} (a + b + d - c);$$

$$x - y + c = \frac{c}{c+a} (a + b + c - d).$$

Substituindo as quatro últimas igualdades em (1.9), obtemos

$$\frac{c^2}{4(c^2 - a^2)} \sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d)},$$

como expressão representativa da área do triângulo DCP , mas a igualdade

(1.10) equivale a

$$\frac{c^2}{c^2 - a^2} = \frac{\Delta_{[DCP]}}{\Delta_{[ABCD]}}.$$

Das duas últimas igualdades resulta

$$\Delta_{[ABCD]} = \frac{1}{4} \sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d)},$$

o que equivale a

$$\Delta_{[ABCD]} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

■

1.2.3 Teorema de Menelau

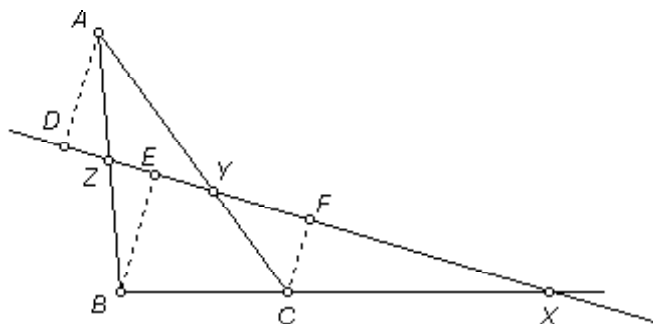
O teorema de Menelau de Alexandria, data de cerca do ano de 100 a. C..

Em 1678, o matemático italiano Giovanni Ceva publicou o teorema de Menelau e um segundo, da sua autoria, o qual recebeu o seu nome e, como iremos ver adiante, está relacionado com o primeiro. O teorema de Menelau é importante para resolver questões que envolvam a necessidade de provar a colinearidade de três pontos.

Teorema de Menelau *Seja ABC um triângulo e X , Y e Z pontos pertencentes às rectas, BC , AC , AB respectivamente, então afirmar que X , Y e Z são colineares, equivale a dizer que a seguinte igualdade é válida*

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

Demonstração



Admitamos, por hipótese, que existe uma recta r que contém os pontos X ,

Y e Z . Definamos sobre r os pontos D , E e F os pés das perpendiculares a r a passar, respectivamente, por A , B e C . Então o triângulo BXE é semelhante a CXF , CFY é-o a ADY e ADZ a BEZ , estas três semelhanças dão lugar às seguintes igualdades (o sinal negativo, significa que os segmentos BX e XC têm orientações opostas)

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{|BE|}{|CF|}, \frac{CY}{YA} = \frac{|CF|}{|AD|}, \frac{AZ}{ZB} = \frac{|AD|}{|BE|}.$$

multiplicando estas igualdades, membro a membro, obtemos

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

Reciprocamente, admitamos que os pontos X , Y e Z , pertencentes às rectas BC , AC e AB , respectivamente, satisfazem a relação de Menelau

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

Seja Z^* o ponto da recta XY que pertence à recta AB , temos, pela implicação anteriormente demonstrada,

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ^*}{Z^*B} = -1,$$

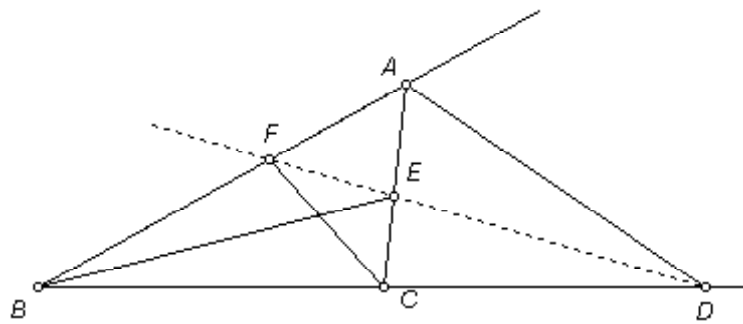
comparando esta igualdade com a que admitimos por hipótese, concluímos que os pontos Z e Z^* são coincidentes e, portanto, os pontos X , Y , Z são

colineares. ■

Com recurso aos teoremas de Steiner e de Menelau, podemos demonstrar os seguintes resultados interessantes.

Proposição 1.2.9 *As bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo intersectam as rectas, associadas aos lados opostos, definindo três pontos colineares.*

Demonstração



O triângulo tem de ser não isósceles pois, caso contrário, os segmentos de recta AF e AE teriam o mesmo comprimento, o mesmo acontecendo a BF e CE pelo que os triângulos AFE e ABC seriam semelhantes e, deste modo, a recta EF seria paralela à recta BC não a intersectando.

Sendo E e F os pontos resultantes das intersecções das bissetrizes internas de B e C com as rectas AC e AB , respectivamente, e, tendo em conta o

teorema da bissetriz, temos

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad \frac{|BF|}{|FA|} = \frac{|BC|}{|CA|}.$$

Sendo D a intersecção da bissetriz externa de A com a recta BC , aplicando

o corolário (1.6) do teorema de Steiner, temos

$$\frac{CD}{DB} = -\frac{|CA|}{|AB|}.$$

Multiplicando, membro a membro, as três últimas igualdades e, tendo em conta que os pontos E e F dividem internamente os segmentos de recta AC e AB pelo que os quocientes envolvidos nas duas primeiras igualdades são positivos quando se considera a ordem, obtemos

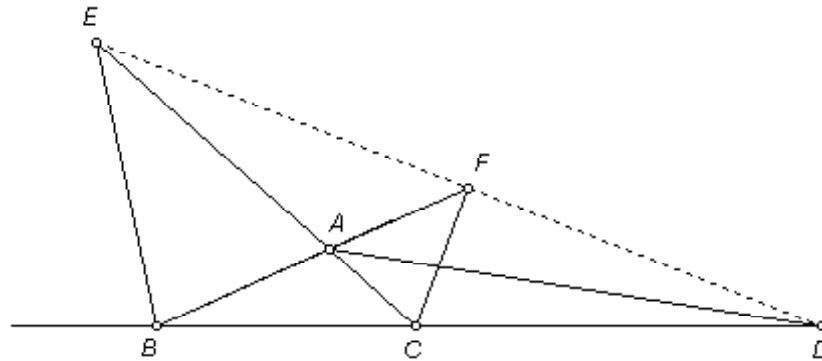
$$\frac{AE}{EC} \frac{CD}{DB} \frac{BF}{FA} = -\frac{AB}{BC} \frac{CA}{AB} \frac{BC}{CA} = -1$$

Deste modo, recorrendo ao teorema de Menelau, podemos afirmar serem os pontos D , E e F colineares. ■

Analisemos a proposição seguinte, a qual é semelhante à anterior.

Proposição 1.2.10 *As bissetrizes externas dos ângulos de um triângulo não isósceles intersectam as rectas, sobre os lados opostos, definindo três pontos colineares.*

Demonstração



O triângulo tem de ser não isósceles, pelo mesmo motivo referido na demonstração da proposição anterior.

Sejam os pontos D , E e F resultantes das intersecções das bissectrizes externa dos ângulo A , B e C com as rectas definidas pelos lados opostos, respectivos, temos, aplicando o corolário (1.6) do teorema de Steiner

$$\frac{CE}{EA} = -\frac{|CB|}{|BA|}, \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{|AC|}{|CB|}, \quad \frac{BD}{DC} = -\frac{|BA|}{|AC|}.$$

O que equivale a

$$\frac{CE}{EA} \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} = -\frac{|CB|}{|BA|} \frac{|AC|}{|CB|} \frac{|BA|}{|AC|} = -1,$$

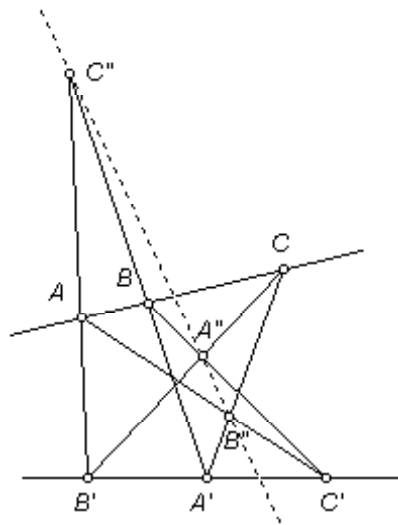
deste modo, recorrendo ao teorema de Menelau, podemos inferir que os pontos D , E e F são colineares. ■

Na proposição que se segue surge a noção de transversal a qual passamos a definir.

Definição 1.2.11 Chamamos de transversal a uma recta que cruze as rectas definidas pelos três lados de um triângulo.

Proposição 1.2.12 Sejam A, B e C três pontos colineares, o mesmo sucedendo a A', B' e C' . Se as rectas AB' e $A'B$ se intersectarem em C'' , ao passo que AC' e $A'C$ se encontram em B'' e BC' e $B'C$ se intersectarem em A'' , então A'', B'' e C'' são colineares.⁴

Demonstração



A recta $B'C$ cruza-se com $A'B$ em Y , $C'A$ intersecta $A'B$ em X e $B'C$ encontra-se com $C'A$ em Z .

⁴Esta proposição é atribuída a Pappus de Alexandria, por volta de 300 A. C.

Seja $C''AB'$ uma recta transversa ao triângulo XYZ então, pelo teorema de

Menelau

$$\frac{ZA}{AX} \frac{XC''}{C''Y} \frac{YB'}{B'Z} = -1.$$

Sendo agora, $A'B''C$ uma recta transversa ao triângulo XYZ , o teorema de

Menelau permite afirmar

$$\frac{ZB''}{B''X} \frac{XA'}{A'Y} \frac{YC}{CZ} = -1.$$

Finalmente, sendo agora $BA''C'$ outra recta transversa ao triângulo XYZ ,

uma vez mais, o teorema de Menelau leva-nos a

$$\frac{ZC'}{C'X} \frac{XBYA''}{BY A''Z} = -1.$$

Multiplicando, membro a membro, as três igualdades anteriores obtemos

$$\frac{ZB''}{B''X} \frac{XC''}{C''Y} \frac{YA''}{A''Z} \frac{YB'}{B'Z} \frac{ZC'}{C'X} \frac{XA'}{A'Y} \frac{ZA}{AX} \frac{XBYC}{BY CZ} = -1.$$

Como os pontos A , B e C são colineares, o mesmo acontecendo com A' , B'

e C' temos, pelo teorema de Menelau

$$\frac{ZA}{AX} \frac{XBYC}{BY CZ} = -1, \quad \frac{YB'}{B'Z} \frac{ZC'}{C'X} \frac{XA'}{A'Y} = -1,$$

substituindo estes resultados na igualdade, imediatamente anterior, temos

$$\frac{ZB''}{B''X} \frac{XC''}{C''Y} \frac{YA''}{A''Z} = -1,$$

deste modo, recorrendo uma vez mais ao teorema de Menelau, podemos

afirmar que os pontos A'' , B'' e C'' são colineares. ■

1.2.4 Teorema de Ceva

Como já referimos, o teorema estudado nesta secção foi publicado por Giovanni Ceva no século XVII. Sendo quase um corolário do teorema de

Menelau. Apresentaremos quatro demonstrações distintas, por considerarmos, conterem raciocínios enriquecedores para a preparação de

qualquer estudante interessado nesta área. No final mostramos uma aplicação deste teorema, a qual nos parece que poderá ser útil ao estudo

das coordenadas baricêntricas.

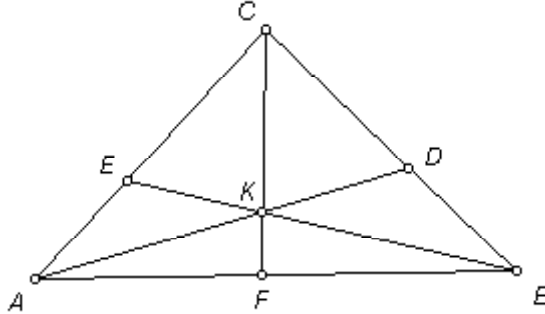
O teorema de Ceva é utilizado, sobretudo, com o intuito de demonstrar que

três rectas são concorrentes num determinado ponto.

Teorema de Ceva - 1ª versão *Num triângulo ABC três cevianas AD , BE e CF intersectam-se num único ponto K se e só se*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \quad (1.11)$$

Demonstração 1



Suponhamos que as três cevianas são concorrentes no ponto K , vejamos que

a igualdade (1.11) é válida.

Apliquemos o teorema de Menelau aos triângulos ABD e ADC , sendo o

primeiro atravessado pela recta CF e o segundo pela BE , resulta

$$\frac{AF}{FB} \frac{BC}{CD} \frac{DK}{KA} = -1, \quad \frac{AK}{KD} \frac{DB}{BC} \frac{CE}{EA} = -1,$$

multiplicando ambas as expressões, obtemos

$$\frac{AF}{FB} \frac{DB}{CD} \frac{CE}{EA} = 1,$$

o que equivale a (1.11).

Suponhamos agora, que a igualdade (1.11) é válida.

Seja K a intersecção das rectas BE e CF e seja D^* a intersecção das rectas

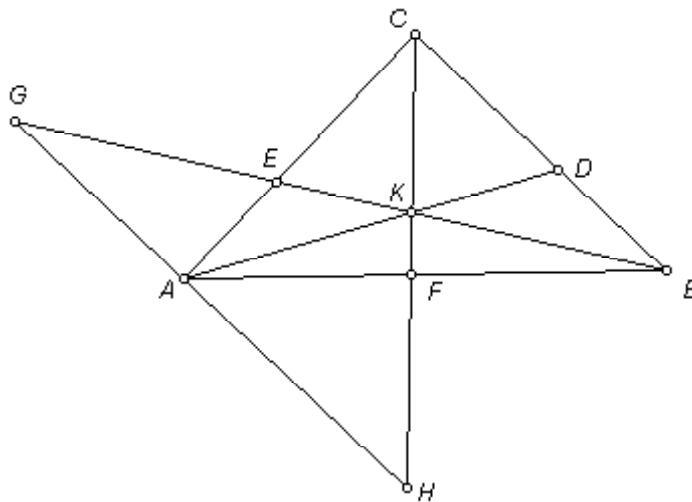
AK e BC , pela implicação anteriormente demonstrada temos

$$\frac{|AF|}{|FB|} \frac{|BD^*|}{|D^*C|} \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Comparando esta igualdade com (1.11), concluímos que D e D^* correspondem ao mesmo ponto, logo, as rectas AD , BE e CF são concorrentes. ■

Demonstração 2

Seja GH a recta paralela a BC a passar por A



Suponhamos que as três cevianas são concorrentes no ponto K , vejamos que a igualdade (1.11) é válida.

Os triângulos AHF e BCF são semelhantes, AEG é-o a BCE , AKG é semelhante a DKB e AHK a CKD , pelo que têm lugar as seguintes igualdades

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AH|}{|BC|}, \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|BC|}{|AG|}, \frac{|AG|}{|BD|} = \frac{|AK|}{|DK|} \text{ e } \frac{|AH|}{|CD|} = \frac{|AK|}{|DK|}.$$

Da terceira e da quarta igualdades resulta a igualdade entre os quocientes definidos pelos segmentos de recta AG e BD e por AH e CD , ou, de forma equivalente,

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AG|}{|AH|}.$$

Multiplicando os membros correspondentes desta última igualdade com as duas primeiras, anteriormente referidas, resulta

$$\frac{|AF|}{|FB|} \frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AH|}{|BC|} \frac{|AG|}{|AH|} \frac{|BC|}{|AG|} = 1.$$

A condição suficiente pode ser demonstrada por um raciocínio análogo ao utilizado na mesma implicação na primeira demonstração.■

Demonstração 3

Os triângulos AKF e BKF têm a mesma altura, pelo que existe proporcionalidade entre as suas áreas e as suas bases, o mesmo acontecendo com ACF e BCF , pelo que

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{\Delta_{[AFK]}}{\Delta_{[BKF]}} = \frac{\Delta_{[AFC]}}{\Delta_{[BCF]}}.$$

Destas igualdades, resulta

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{\Delta_{[AKC]}}{\Delta_{[BCK]}}.$$

de modo análogo temos as seguintes proporções

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{\Delta_{[BKA]}}{\Delta_{[CAK]}}, \quad \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{\Delta_{[CKB]}}{\Delta_{[ABK]}}.$$

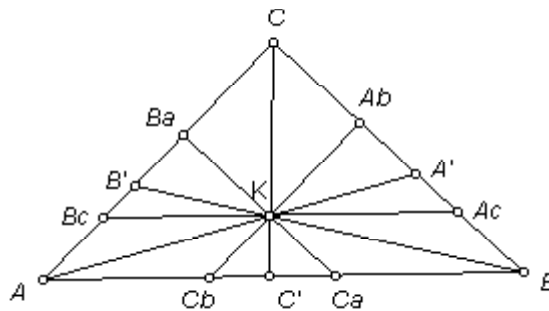
Das proporcionalidades, anteriormente referidas resulta

$$\frac{|AF|}{|FB|} \frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{\Delta_{[AKC]} \Delta_{[BKA]} \Delta_{[CKB]}}{\Delta_{[BCK]} \Delta_{[CAK]} \Delta_{[ABK]}}.$$

Como o segundo membro da anterior igualdade é igual a um, fica provada a

igualdade enunciada no teorema. ■

Demonstração 4



Sendo a recta $BcAc$ paralela a AB , o mesmo acontecendo às rectas $BaCa$ e

BC bem como a $AbCb$ e AC . Assim sendo, os triângulos $AC'C$ e $BcKC$

são semelhantes, o mesmo acontecendo com BCC' e $AcCK$. Destas

semelhanças resulta.

$$\frac{|AC'|}{|BcK|} = \frac{|CC'|}{|CK|}, \quad \frac{|C'B|}{|KAc|} = \frac{|CC'|}{|CK|}.$$

As igualdades anteriores conduzem a

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|BcK|}{|KAc|}.$$

Os triângulos ABB' e $BcKB'$ são semelhantes, assim como ABA' e $A'KAc$.

Destas semelhanças resulta

$$\frac{|BcK|}{|AB|} = \frac{|B'K|}{|B'B|}, \quad \frac{|KAc|}{|AB|} = \frac{|KA'|}{|AA'|},$$

dividindo, membro a membro, as igualdades anteriores e simplificando o

resultado obtido, temos

$$\frac{|BcK|}{|KAc|} = \frac{|B'K|}{|KA'|} \frac{|AA'|}{|BB'|},$$

desta igualdade e da antepenúltima, resulta

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|B'K|}{|KA'|} \frac{|AA'|}{|BB'|},$$

como o membro direito desta igualdade é positivo e o quociente definido

pelos segmentos de recta AC' e $C'B$ também o é, temos

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{|B'K|}{|KA'|} \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$

Analogamente temos

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{|C'K|}{|KB'|} \frac{|BB'|}{|CC'|}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{|A'K|}{|KC'|} \frac{|CC'|}{|AA'|}.$$

Multiplicando, termo a termo, as três anteriores igualdades obtemos

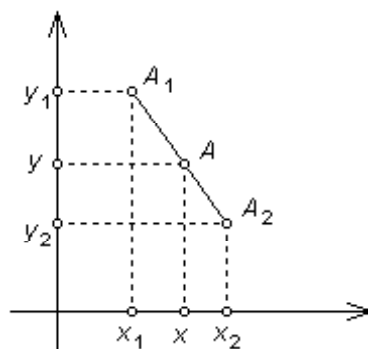
$$\frac{AC'}{C'B} \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

■

Teorema de Ceva - 2ª versão *Se os lados de um triângulo forem divididos por cevianas concorrentes, então serão divididos nas razões,*

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}. \tag{1.12}$$

Demonstração



Começemos por determinar as coordenadas de um ponto A que divide o segmento de recta A_1A_2 na razão definida pelo quociente de k_1 por k_2 .

Sejam x , x_1 , e x_2 as abcissas e y , y_1 , e y_2 as ordenadas de A , A_1 e A_2 ,

respectivamente.

Suponhamos que o segmento de recta A_1A_2 não é paralelo ao eixo das abcissas. Projectando os pontos A , A_1 e A_2 no eixo das ordenadas, obtemos.

$$\frac{|A_1A|}{|AA_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Resultando

$$y = \frac{y_1k_2 + y_2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Analogamente determina-se a abcissa de A ,

$$x = \frac{x_1k_2 + x_2k_1}{k_1 + k_2}.$$

Estas fórmulas são válidas para as coordenadas de A , independentemente

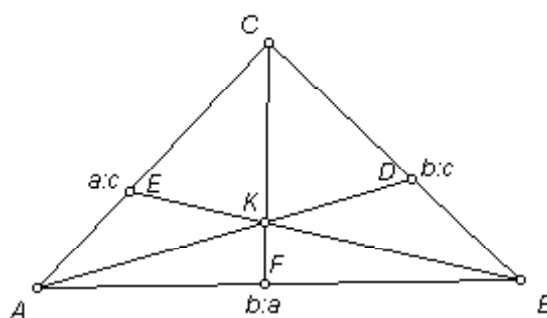
da localização dos pontos A_1 e A_2 .

Apliquemos estes resultados aos lados de um triângulo.

Sejam x_1 , x_2 e x_3 as abcissas e y_1 , y_2 e y_3 as ordenadas, respectivamente,

dos vértices A , B e C de um triângulo e D , E e F os pés das cevianas

relativamente a A , B e C respectivamente.



Determinemos as coordenadas de D .

Se D dividir o lado BC , na razão definida pelo quociente de c por b , temos:

$$x_D = \frac{bx_2 + cx_3}{b + c}, y_D = \frac{by_2 + cy_3}{b + c}.$$

Em relação aos outros lados do triângulo podemos determinar, de forma

análoga, as coordenadas de E e de F .

$$x_E = \frac{ax_1 + cx_3}{a + c}, y_E = \frac{ay_1 + cy_3}{a + c};$$

$$x_F = \frac{ax_1 + bx_2}{a + b}, y_F = \frac{ay_1 + by_2}{a + b}.$$

Portanto, dizer que os pés das cevianas dividem os lados do triângulo, nas razões (1.12), equivale a dizer que os pontos D , E e F têm as coordenadas acima indicadas.

Determinemos, agora, as coordenadas de K_A que divide o segmento de recta AD numa dada razão, digamos

$$\frac{r_1}{s_1},$$

pelo que

$$x_{k_A} = \frac{r_1 \frac{bx_2 + cx_3}{b+c} + s_1 x_1}{r_1 + s_1}, y_{k_A} = \frac{r_1 \frac{by_2 + cy_3}{b+c} + s_1 y_1}{r_1 + s_1}. \quad (1.13)$$

Analogamente, K_B divide o segmento de recta BE numa dada razão,
digamos

$$\frac{r_2}{s_2},$$

pelo que

$$x_{k_B} = \frac{r_2 \frac{ax_1+cx_3}{a+c} + s_2x_2}{r_2 + s_2}, y_{k_B} = \frac{r_2 \frac{ay_1+cy_3}{a+c} + s_2y_2}{r_2 + s_2}. \quad (1.14)$$

Ainda seguindo o mesmo raciocínio, se K_C divide o CF numa dada razão,
digamos

$$\frac{r_3}{s_3},$$

temos

$$x_{k_C} = \frac{r_3 \frac{ax_1+bx_2}{a+b} + s_3x_3}{r_3 + s_3}, y_{k_C} = \frac{r_3 \frac{ay_1+by_2}{a+b} + s_3y_3}{r_3 + s_3}. \quad (1.15)$$

Dizer que as três cevianas são concorrentes equivale a dizer que os pontos

K_A , K_B e K_C são coincidentes, o que é verdade quando

$$r_1 = b + c, s_1 = a, r_2 = a + c, s_2 = b, r_3 = a + b, s_3 = c,$$

o que conduz a

$$r_1 + s_1 = r_2 + s_2 = r_3 + s_3 = a + b + c,$$

assim, podemos definir K como o ponto comum aos segmentos de recta AD ,

BE e CF como se segue

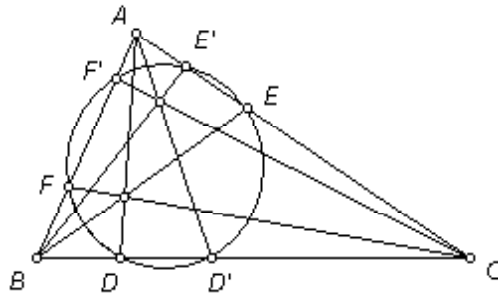
$$K = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} \right).$$

De (1.13), (1.14) e (1.15), podemos ainda referir que, se as três cevianas forem concorrentes num ponto, este divide-as nas razões

$$(b + c) : a, (a + c) : b, (a + b) : c,$$

consoante estejamos a referir-mo-nos a AD , BE e CF respectivamente. ■

Proposição 1.2.13 *Se um triângulo ABC intersectar um círculo nos pontos F, F', D, D', E e E' , conforme a figura seguinte, e se as cevianas AD, BE e CF forem concorrentes, então as cevianas AD', BE' e CF' também o são.*



Demonstração

Como as cevianas AD, BE e CF são concorrentes, então, pelo teorema de

Ceva, temos

$$\frac{|AF|}{|FB|} \frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Seja O o centro da circunferência e r o seu raio, aplicando o teorema da corda ao ponto A e às rectas AF e AE , temos

$$|AF| \cdot |AF'| = |AO|^2 - r^2, \quad |AE| \cdot |AE'| = |AO|^2 - r^2.$$

Como os segundos membros das anteriores igualdades são iguais, podemos dizer que

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AE'|}{|AF'|}.$$

Analogamente

$$\frac{|BD|}{|BF|} = \frac{|BF'|}{|BD'|} \text{ e } \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|CD'|}{|CE'|}.$$

Multiplicando, membro a membro, as três anteriores igualdades, obtemos

$$\frac{|AF|}{|AE|} \frac{|BD|}{|BF|} \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|AE'|}{|AF'|} \frac{|BF'|}{|BD'|} \frac{|CD'|}{|CE'|}.$$

Como o teorema de Ceva garante que o primeiro membro da igualdade anterior vale um, temos

$$\frac{|AE'|}{|AF'|} \frac{|BF'|}{|BD'|} \frac{|CD'|}{|CE'|} = 1.$$

Uma vez mais, recorrendo ao teorema de Ceva, podemos afirmar que as cevianas AD' , BE' e CF' são concorrentes. ■

Capítulo 2

Alguns resultados envolvendo centros notáveis

Ao longo deste capítulo vamos apresentar alguns resultados que envolvem
centros notáveis.

Assim, na primeira seção, os temas tratados envolvem raios de algumas
circunferências associadas ao triângulo, os quais serão expressos em função
do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos internos do referido
polígono.

Seguidamente, estudaremos algumas propriedades associadas à
circunferência inscrita.

Finalmente, na última secção, estudaremos a circunferência dos nove pontos e a recta de Euler, para o que será necessário introduzir as noções de triângulo medial, triângulo médio e triângulo pedal. Os resultados aqui estudados serão necessários para a compreensão de alguns conceitos e propriedades a que nos referiremos nos próximos capítulos.

2.1 Resultados envolvendo os raios de algumas circunferências associadas ao triângulo

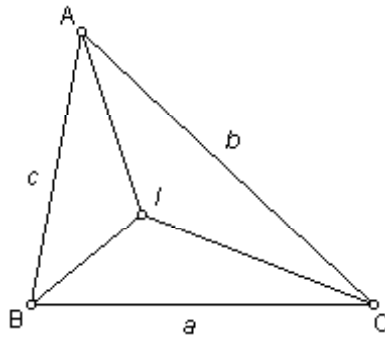
Nesta secção iremos expressar o raio da circunferência inscrita, o raio da circunferência circunscrita e o raio de uma circunferência ex-inscrita em função dos ângulos internos do triângulo de referência ABC ou do comprimento dos lados do referido polígono.

Proposição 2.1.1 *Seja $\Delta_{[ABC]}$ a área do triângulo ABC e p o semiperímetro do mesmo triângulo, temos*

$$r = \frac{\Delta_{[ABC]}}{p}, \quad (2.1)$$

em que r é o raio da circunferência inscrita.

Demonstração



A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos ABI , BCI e AIC pelo que

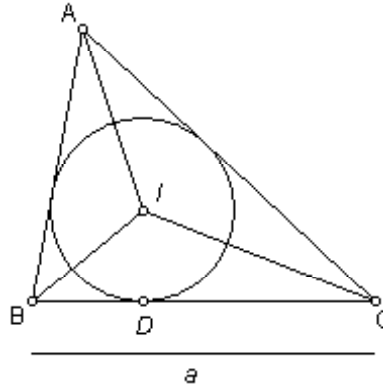
$$\Delta_{[ABC]} = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2},$$

o que equivale a dizer que a área do triângulo ABC é igual ao produto de p por r , o que conduz ao resultado pretendido. ■

Proposição 2.1.2 *O raio da circunferência inscrita (r) pode ser expresso em função dos ângulos internos do triângulo ABC e de um dos seus lados, através da igualdade*

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Demonstração



Sendo a igual à soma dos comprimentos dos segmentos de recta BD e DC e sendo BI e CI as bissetrizes de B e C , respectivamente, dos triângulos IBD e IDC , resulta

$$a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right).$$

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a r , substituindo as cotangentes, pelo quociente entre o cosseno e o seno e reduzindo ao mesmo denominador obtemos

$$r = \frac{a}{\frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}}.$$

Recorrendo à fórmula do seno de uma soma e aplicando propriedades das operações com fracções surge

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}.$$

Passando à co-função chegamos à seguinte igualdade

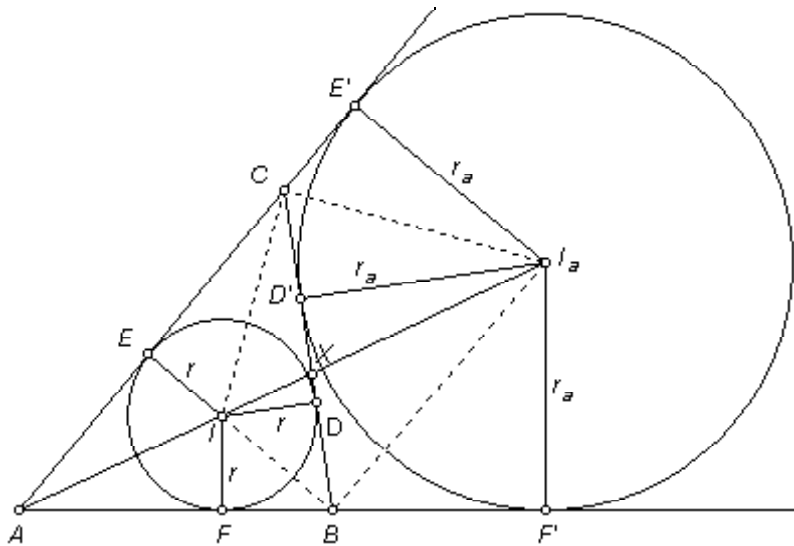
$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right)}.$$

Sabendo que o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo é pi radianos, podemos aplicar esse resultado ao triângulo ABC simplificando a igualdade anterior e obtendo a pretendida. ■

Proposição 2.1.3 *O raio da circunferência ex-inscrita (r_a), tangente ao lado BC , a área e o comprimento dos lados de um triângulo ABC relacionam-se através da igualdade*

$$r_a = \frac{\Delta_{[ABC]}}{p - a}.$$

Demonstração



Os ângulos IBF e DBI têm a mesma amplitude, a qual é metade da de B , o mesmo acontecendo aos ângulos rectos BFI e IDB como o lado BI é comum aos triângulos BIF e BDI estes são congruentes. Deste modo concluímos que os lados BF e BD dos respectivos triângulos têm o mesmo comprimento, de forma análoga, concluímos a congruência dos triângulos CID e CEI bem como de $CD'I_a$ e CI_aE' e ainda de $BF'I_a$ e BI_aD' .

Sendo CI e CI_a respectivamente, as bissectrizes interna e externa do ângulo C concluímos, de acordo com o exposto na demonstração do primeiro corolário do teorema de Steiner, que ICI_a é um ângulo recto. Como os triângulos CID e $CD'I_a$ são rectângulos, concluímos que os ângulos ICD e CI_aD' têm igual amplitude, o mesmo acontecendo a DIC e $D'CI_a$ logo, os triângulos CID e $CD'I_a$ são semelhantes. De forma análoga prova-se a semelhança dos triângulos BDI e BI_aD' .

Em síntese, podemos dizer que os triângulos CID , CEI , $CD'I_a$ e CI_aE' são semelhantes entre si, o mesmo acontecendo relativamente a BDI , BIF , BI_aD' e $BF'I_a$. Ao nível dos segmentos de recta, verifica-se a igualdade entre os comprimentos de CD e CE bem como de BF' e BD' e ainda, de BF e BD .

Da semelhança entre os triângulos CID e $CD'I_a$, resulta

$$\frac{r}{|CD|} = \frac{|CD'|}{r_a},$$

donde

$$r.r_a = |CD| |CD'|.$$

Recorrendo a um raciocínio análogo, aplicado aos triângulos BDI e BI_aD' ,

e tendo em conta que o segmento de recta BF e BD' tem o mesmo comprimento, resulta outra igualdade

$$r.r_a = |DB| |D'B|.$$

Das duas igualdades anteriores obtemos

$$|CD| |CD'| = |DB| |D'B|,$$

por outro lado temos

$$|BD| + |DC| = |BD'| + |D'C| = a,$$

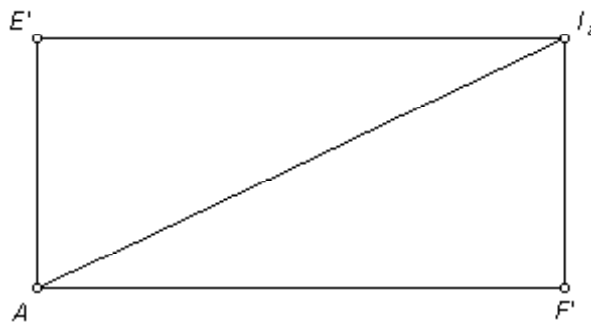
donde se conclui que os segmentos de recta BD e CD' têm o mesmo comprimento, acontecendo o mesmo relativamente a BD' e CD , em síntese,

temos

$$|CE| = |CD| = |BD'| = |BF'|, \quad |CE'| = |CD'| = |BD| = |BF|. \quad (2.2)$$

Para calcular a área do triângulo ABC , vamos socorrer-mo-nos do rectângulo $AF'I_aE'$ o qual é obtido a partir dos triângulos $AF'I_a$ e AI_aE'

conforme a seguinte figura



Como a área do triângulo ABC é a diferença entre o quadrilátero não rectângulo $AF'I_aE'$ e o pentágono $BF'I_aE'C$, conforme a figura inicial, temos de determinar a área destes polígonos para podermos saber a do triângulo em análise.

A área do quadrilátero não rectângulo $AF'I_aE'$ é igual à do rectângulo anterior, tendo como valor o produto dos comprimentos dos segmentos de recta AF' e $F'I_a$.

Note-se que o comprimento do segmento de recta AF' é igual à soma dos comprimentos dos segmentos de recta AB e BF' ou, equivalentemente, à

soma dos comprimentos dos segmentos de recta AB e CD .

Vejamos como podemos definir o comprimento do segmento de recta CD

em função de a , b e c .

Tendo em conta que os segmentos de recta CD e CE têm o mesmo comprimento, sendo que o primeiro pode ser obtido através da diferença

entre os de CB e de BD ou, equivalentemente,

$$|CD| = |CB| - |BF|,$$

de forma análoga

$$|CE| = |CA| - |AF|,$$

pelo que obtemos

$$2|CD| = |CB| + |CA| - |BF| - |AF|.$$

Como a soma dos comprimentos dos segmentos de recta BF e AF é c ,

podemos simplificar a igualdade anterior, surgindo

$$|CD| = \frac{a + b - c}{2},$$

donde o comprimento do segmento de recta AF' é igual à soma de c com o

segundo membro da igualdade anterior o que conduz a

$$|AF'| = \frac{a + b + c}{2}.$$

Deste modo, a área do rectângulo $AF'I_aE'$ é

$$\frac{a + b + c}{2}r_a. \quad (2.3)$$

Quanto ao pentágono $BF'I_aE'C$ a sua área é igual à da soma das áreas dos quadriláteros $F'I_aD'B$ e $D'I_aE'C$ tendo em conta a igualdade dos triângulos $BF'I_a$ e BI_aD' e dos triângulos $D'I_aC$ e CI_aE' podemos dizer que a área do pentágono $BF'I_aE'C$ é o dobro da soma das áreas dos triângulos BI_aD' e $D'I_aC$, ou seja, o dobro da área do triângulo BI_aC , ou ainda a área de um rectângulo com base a e altura r_a .

Deste modo, a área do triângulo ABC é igual à diferença entre a expressão (2.3) e a que acabamos de descrever, o que conduz a

$$\frac{b + c - a}{2}r_a.$$

Finalmente, podemos dizer que

$$\Delta_{[ABC]} = (p - a)r_a.^1$$

O que nos conduz à igualdade que pretendíamos demonstrar. ■

¹Na demonstração da proposição 3.2.1 será explicado o porquê de

$$b + c - a = p - a.$$

Proposição 2.1.4 *O raio da circunferência ex-inscrita, tangente ao lado oposto a A pode ser definido em função dos ângulos do triângulo ABC e do lado BC através da igualdade*

$$r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Demonstração

Tendo em conta a demonstração da proposição anterior e as considerações então feitas relativamente aos triângulos BI_aD' e $D'I_aC$ podemos afirmar que os ângulos $D'I_aB$ e CI_aD' valem, respectivamente, metade de B e de C

peço que

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{|D'B|}{r_a}, \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{|D'C|}{r_a}.$$

Somando, membro a membro, as anteriores igualdades e recordando que a soma dos segmentos de recta $D'B$ e $D'C$ é igual a a , podemos obter

$$r_a = \frac{a}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}.$$

Representado a tangente como o quociente entre o seno e o cosseno e reduzindo ao mesmo denominador temos

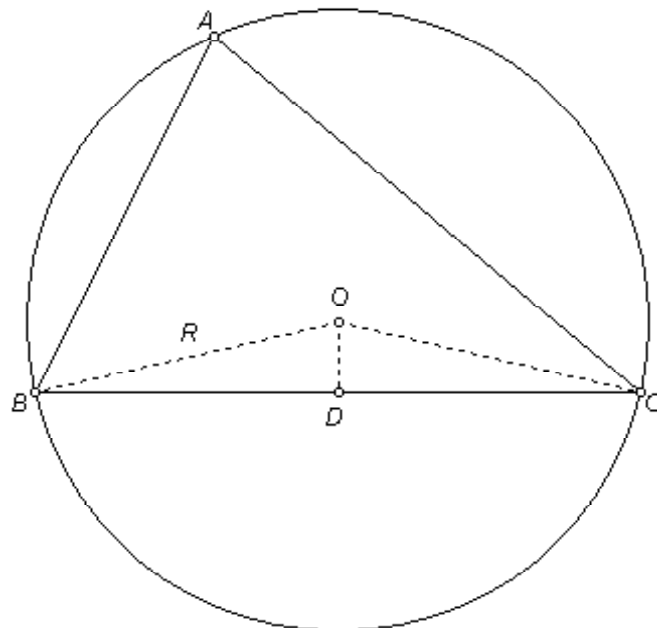
$$r_a = \frac{a}{\frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}}.$$

Recorrendo à fórmula do seno da soma e simplificando, obtemos o resultado pretendido. ■

Proposição 2.1.5 *O raio da circunferência circunscrita relaciona-se com a área e os comprimentos dos lados de um dado triângulo através das igualdades*

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4\Delta_{[ABC]}}. \quad (2.4)$$

Demonstração



Do teorema dos senos resulta

$$R = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Por outro lado do teorema das áreas obtemos

$$\sin A = \frac{2\Delta_{[ABC]}}{bc},$$

o que, aplicado na igualdade anterior, nos conduz a

$$\frac{a}{2R} = \frac{2\Delta_{[ABC]}}{bc},$$

ou equivalentemente

$$R = \frac{abc}{4\Delta_{[ABC]}}.$$

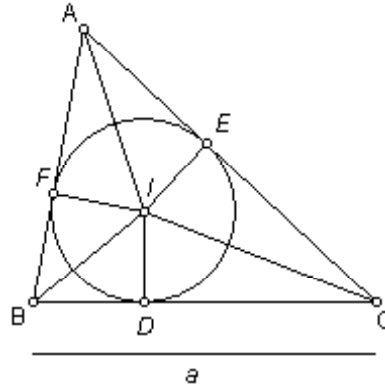
■

Observação 2.1.6 *Recorrendo à fórmula de Herão, à noção de semiperímetro e às proposições 3.1.1, 3.1.3 e 3.1.5 é possível definir o raio da circunferência inscrita, o raio da circunferência ex-inscrita e o raio da circunferência circunscrita em função dos comprimentos dos lados do triângulo ABC .*

2.2 Círculo inscrita

Como se sabe a circunferência inscrita é tangente a cada um dos três lados (sem extensão) de um triângulo ABC . O seu centro é chamado de incentro, sendo representado por I e resulta da intersecção das bissetrizes dos três

ângulos internos do referido triângulo.



Proposição 2.2.1 *Sejam D , E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo ABC , então*

$$|AE| = |AF| = \frac{b + c - a}{2};$$

$$|BF| = |BD| = \frac{c + a - b}{2};$$

$$|CD| = |CE| = \frac{a + b - c}{2},$$

ou de forma equivalente

$$|AE| = |AF| = p - a; \tag{2.5}$$

$$|BF| = |BD| = p - b;$$

$$|CD| = |CE| = p - c.$$

Tendo em conta que AI é a bissetriz do ângulo BAC os ângulos FAI e IAE são iguais. Por outro lado, como a circunferência inscrita é tangente

aos lados do triângulo ABC , então os raios, IE e IF são perpendiculares a AC e a AB , respectivamente, como o lado AI é comum aos triângulos IAF e AIE , estes são congruentes, resultando

$$|AE| = |AF|.$$

Provemos agora, sem perda de generalidade, que

$$|AE| = \frac{b + c - a}{2}.$$

Da igualdade entre os comprimentos dos segmentos de recta AE e AF ,
resulta

$$2|AE| = b + c - |CE| - |BF|.$$

Da mesma maneira que provamos a igualdade entre os comprimentos dos segmentos de recta AE e AF , podemos obter as igualdades

$$|BF| = |BD| \text{ e } |CD| = |CE|,$$

pelo que

$$2|AE| = b + c - |CD| - |BD|.$$

Recorrendo ao facto de a ser igual à soma dos comprimentos dos segmentos de recta CD e DB e dividindo ambos os membros da igualdade anterior por

dois, obtemos

$$|AE| = |AF| = \frac{b + c - a}{2}.$$

De forma análoga poderíamos provar que

$$|BF| = |BD| = \frac{a + c - b}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a + b - c}{2},$$

completando a nossa demonstração.

Tendo em conta a expressão que demonstrámos ser representativa do comprimento do segmento de recta AE , obtemos somando e subtraindo

metade de a .

$$|AE| = \frac{b + c + a - 2a}{2}.$$

Levando em consideração a definição de semiperímetro, a expressão

anterior, equivale a

$$|AE| = p - a.$$

De forma análoga poderíamos provar

$$|BF| = |BD| = p - b, \quad |CD| = |CE| = p - c,$$

completando a nossa demonstração.

■

Proposição 2.2.2 *As três cevianas definidas pelos pontos de tangência da circunferência inscrita num triângulo ABC , com os lados do referido triângulo são concorrentes num ponto.*

Demonstração

Tendo em conta as igualdades

$$|AE| = |AF|, |BF| = |BD|, |CD| = |CE|,$$

resultantes da proposição anterior, temos

$$1 = \frac{|AF| |BD| |CE|}{|FB| |DC| |EA|},$$

desta igualdade, recorrendo ao teorema de Ceva, concluímos que as linhas

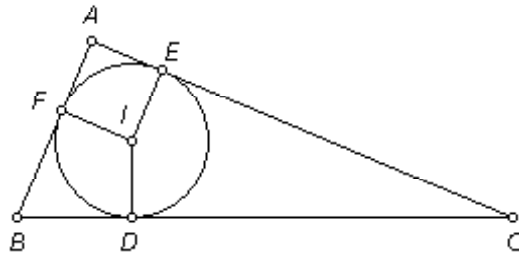
AD , BE e CF são concorrentes. ■

Definição 2.2.3 *O ponto de Gergone (G_e) resulta da intersecção das três cevianas definidas pelos pontos de tangência da circunferência inscrita num triângulo ABC com os lados do referido triângulo.*

Proposição 2.2.4 *O raio da circunferência inscrita num triângulo rectângulo tem comprimento igual à diferença entre o semiperímetro e o comprimento da hipotenusa, ou seja,*

$$r = p - a.$$

Demonstração



O quadrilátero $AFIE$ é um quadrado porque tem todos os ângulos rectos e dois lados consecutivos com o mesmo comprimento, caso dos lados IE e IF ,

logo

$$r = |AF| = |AE|.$$

De (2.5), temos

$$|AF| = |AE| = p - a,$$

pelo que

$$r = p - a.$$

■

2.3 Circunferência dos nove pontos e recta de Euler

Definição 2.3.1 *A transformação de semelhança*

$$h(T, r),$$

que transforma um ponto X no ponto X' tal que

$$\frac{TX'}{TX} = r,$$

é chamada de homotetia de centro T e raio r .

2.3.1 Triângulo medial

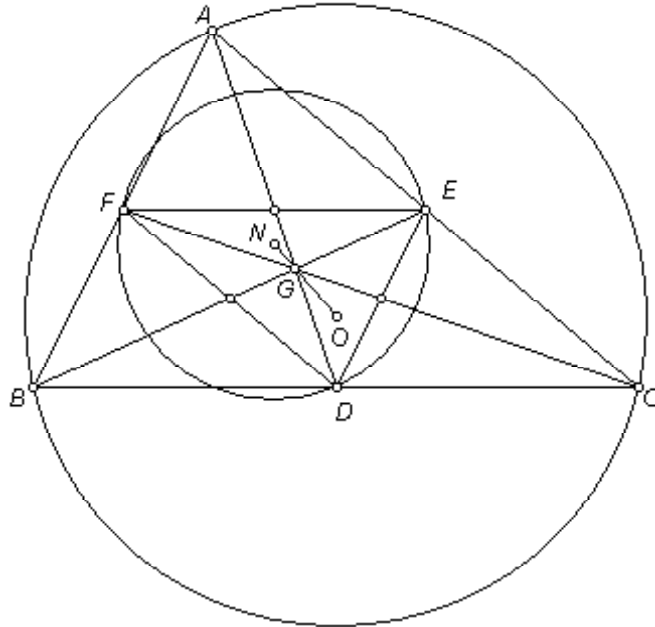
Definição 2.3.2 *Triângulo medial é o triângulo formado pelos pontos médios dos lados de um dado triângulo.*

Como sabemos as três medianas de um triângulo intersectam-se no centroide, o qual divide cada mediana na razão 2 : 1

Por exemplo, se D , E e F forem os pontos médios dos lados BC , CA e AB do referido triângulo, o centroide G divide a mediana AD na razão

$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}.$$

Proposição 2.3.3 *O triângulo medial DEF é uma redução de ABC através da homotetia $h(G, -\frac{1}{2})$.*



Demonstração

Como

$$|AG| = 2|GD|$$

e os vectores GA e GD têm orientação contrária, temos

$$\frac{GD}{GA} = \frac{-1/2}{1},$$

deste modo compreende-se que a imagem de A por meio da homotetia $h(G, -\frac{1}{2})$ seja D . Analogamente, podemos dizer que as imagens de B e de

C , por meio da homotetia anterior, são, respectivamente, E e F , donde a imagem do triângulo ABC , por meio da homotetia em análise, é o triângulo medial DEF .■

Da proposição anterior resulta ainda que a circunferência circunscrita ao triângulo medial tem raio $\frac{1}{2}R$ e, sendo o seu centro o ponto N , este é a imagem por meio da homotetia $h(G, -\frac{1}{2})$ do ponto O , pelo que, podemos concluir que os pontos O, G, N são colineares.

Proposição 2.3.4 *O ponto G divide o segmento de recta ON na razão*

$$\frac{OG}{GN} = \frac{2}{1}. \quad (2.6)$$

Demonstração

Se N é a imagem de O por meio da homotetia $h(G, -\frac{1}{2})$, então

$$\frac{GN}{GO} = \frac{-1/2}{1},$$

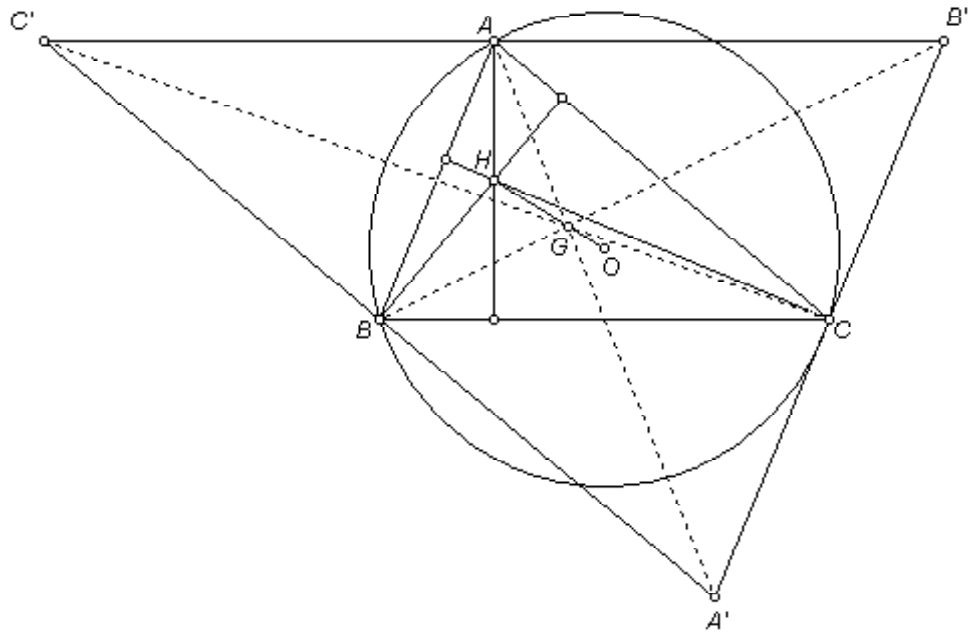
donde

$$\frac{OG}{GN} = \frac{2}{1}.$$

■

Proposição 2.3.5 *Seja $A'B'C'$ o triângulo que resulta da intersecção das rectas que passam por cada um dos vértices do triângulo ABC e é paralelo ao*

lado oposto ao referido vértice, então $A'B'C'$ é uma ampliação do triângulo ABC , por meio da homotetia $h(G, -2)$.



Demonstração

Tendo em conta a maneira como $A'B'C'$ foi construído, concluímos que os lados deste triângulo são paralelos aos de ABC , pelo que $AC'BC$ é um paralelogramo, donde os triângulos $AC'B$ e ABC , são congruentes. Através de raciocínios análogos, podemos concluir que os triângulos ABC , $AC'B$, $BA'C$ e $CB'A$ são congruentes, deste modo, podemos concluir duas coisas

1. Os lados do triângulo $A'B'C'$ têm o dobro do comprimento dos do triângulo ABC . Por outro lado temos

$$\frac{BG}{B'G} < 0,$$

donde se conclui que o triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC por meio da homotetia $h(G, -2)$;

2. A, B, C são os pontos médios dos lados do triângulo $A'B'C'$, pelo que, as rectas que definem as alturas do triângulo ABC , são as mediatrizes de $A'B'C'$ donde, o circuncêntrico do triângulo $A'B'C'$ corresponde ao ortocentro de ABC , o que implica que H seja a imagem de O por meio da homotetia $h(G, -2)$. esta última afirmação permite concluir que os pontos O, G e H são colineares, definindo a chamada recta de Euler.

■

Durante a anterior demonstração ficou claro que

$$H = h(G, -2)(O),$$

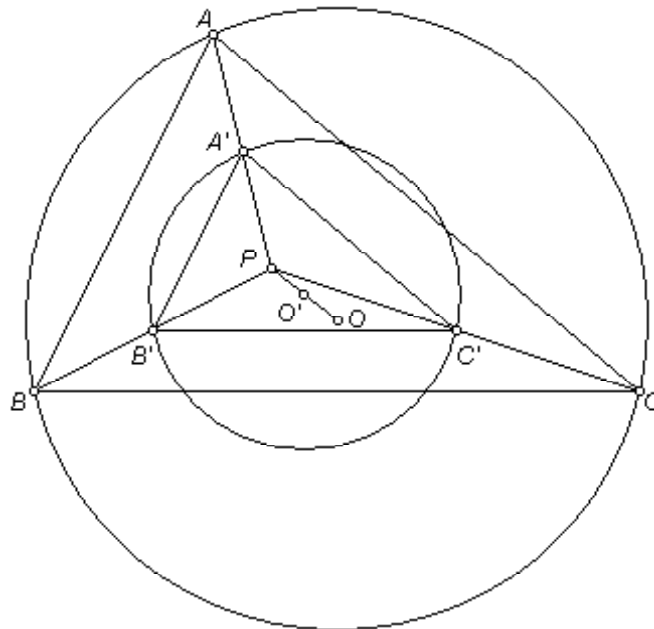
pelo que temos

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

2.3.2 Triângulo médio e triângulo de Euler

Definição 2.3.6 A imagem de um triângulo ABC , por meio de uma homotetia $h(P, \frac{1}{2})$, é chamado de triângulo médio de P .

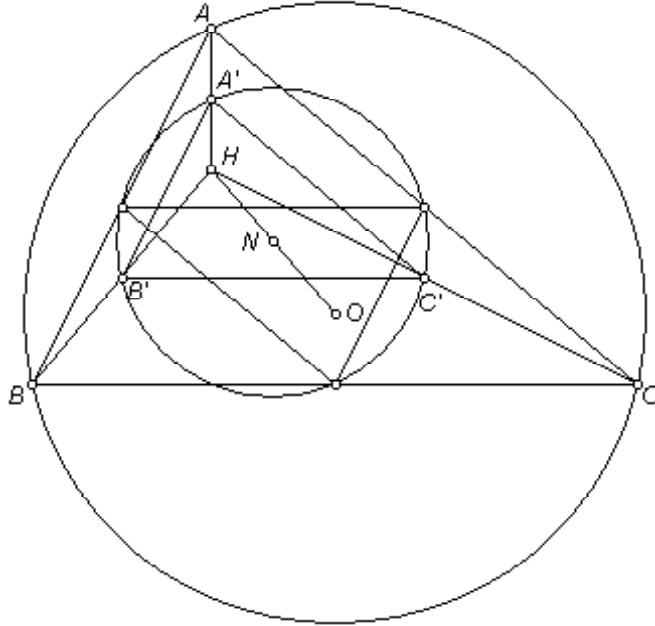
Observação 2.3.7 Como o circuncentro (O') do triângulo médio, obtido a partir de um ponto P , é a imagem de O por meio da homotetia $h(P, \frac{1}{2})$, concluímos que se trata do ponto médio de OP .



Definição 2.3.8 O triângulo médio do ortocentro (H) é chamado de triângulo de Euler.

Proposição 2.3.9 O circuncentro do triângulo de Euler é o ponto N , ou seja, é o circuncentro do triângulo medial.

Demonstração



Como já referimos anteriormente, os pontos O, G, N são colineares, o mesmo acontecendo com os pontos O, G, H pelo que, os pontos O, G, H, N também são colineares.

A colinearidade dos quatro pontos anteriormente referidos, juntamente com as razões (2.6) e (2.7), levam-nos a concluir que os pontos se encontram alinhados pela ordem e de acordo com a razão

$$OG : GN : NH = 2 : 1 : 3,$$

o que pode ser esquematizado como a seguir se apresenta,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2 & & 1 & & 3 \\
 \circ & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \circ \\
 O & & G & & N & & H
 \end{array} \tag{2.8}$$

Da relação anteriormente apresentada conclui-se que N seja o ponto médio do segmento de recta OH , ou seja,

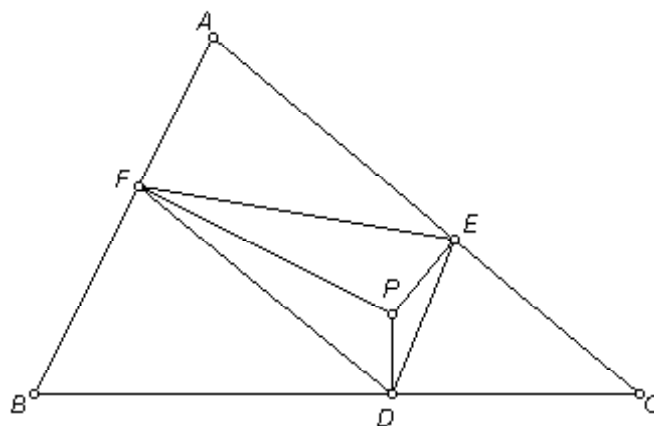
$$N = h\left(H, \frac{1}{2}\right)(O),$$

donde resulta ser N o circuncentro do triângulo de Euler. ■

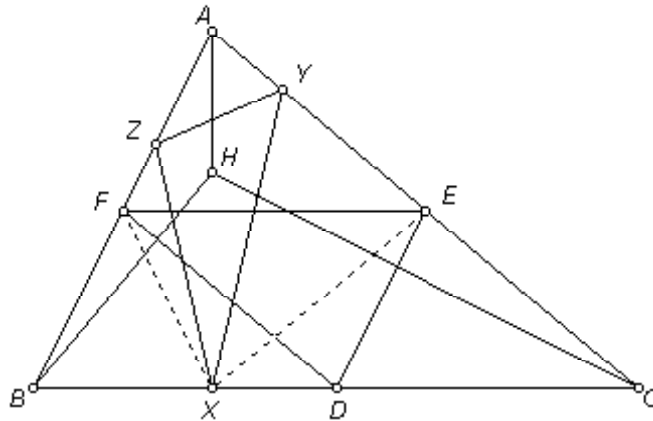
2.3.3 Triângulo pedal e triângulo órtico

Como sabemos, os pontos pedais de um ponto P , relativamente a um triângulo ABC , são as intersecções dos lados do triângulo com as correspondentes perpendiculares a passar por P .

Definição 2.3.10 *O triângulo formado pelos pontos pedais, relativamente a um dado ponto, é o chamado triângulo pedal.*



Definição 2.3.11 *O triângulo pedal construído a partir do ortocentro H é chamado de triângulo órtico.*



Proposição 2.3.12 *O circuncentro do triângulo órtico coincide com o circuncentro do triângulo medial.*

Demonstração

Seja DEF o triângulo medial do triângulo ABC e XYZ o triângulo órtico relativamente ao mesmo polígono. Compreende-se que o ponto X , pedal de H relativamente ao lado BC sendo também o pé da perpendicular de A relativamente ao mesmo lado, pode ser visto como uma reflexão de A relativamente à recta EF , pelo que

$$\angle EXF = \angle FAE,$$

por outro lado, como A, F, D, E definem um paralelogramo, concluimos que

$$\angle FAE = \angle EDF.$$

Das igualdades anteriormente referidas, podemos afirmar que X pertence à circunferência definida pelos pontos E, D, F visto que neste caso, os ângulos inscritos EDF e EXF teriam de ter a mesma amplitude devido ao facto de estarem associados à mesma corda, o que de facto acontece. Analogamente, podemos provar que os pontos Y e Z também pertencem à circunferência definida pelos pontos E, D, F pelo que a afirmação da proposição fica justificada. ■

Pelo que referimos anteriormente, o triângulo medial, o triângulo de Euler e o triângulo órtico têm a mesma circunferência circunscrita, como a essa circunferência pertencem os vértices dos três triângulos em análise, chamamos-lhe circunferência dos nove pontos do triângulo ABC e o seu centro N é chamado centro dos nove pontos do triângulo ABC .

Observação 2.3.13 *Pelo exposto, o círculo dos nove pontos, pode ser definido como o círculo que contém os pés das perpendiculares, relativamente a cada um dos lados do triângulo, a passar pelo respectivo vértice oposto, contém, igualmente, os pontos médios de cada um dos lados do triângulo e, ainda, o*

ponto médio dos segmentos definidos pelo ortocentro e cada um dos vértices do triângulo.

Proposição 2.3.14 *Quando P é um ponto sobre o circuncentro, a trajetória definida pelo ponto médio do segmento de recta PH , corresponde à circunferência dos nove pontos.*

Demonstração

A imagem por meio da homotetia $h(H, \frac{1}{2})$, de um triângulo ABC é o seu triângulo de Euler, pelo que a imagem da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , por meio da referida homotetia, será a circunferência definida pelos vértices do triângulo de Euler, ou seja, a circunferência dos nove pontos.

Como a imagem de um ponto P por meio da homotetia $h(H, \frac{1}{2})$ é o ponto médio do segmento de recta PH , compreende-se que, quando P é um ponto sobre a circunferência circunscrita, a trajetória definida pelo ponto médio do segmento de recta PH , corresponde à circunferência dos nove pontos. ■

Capítulo 3

Problemas de construção

Neste capítulo apresentaremos algumas construções euclidianas, as quais se podem fazer recorrendo exclusivamente a uma régua não graduada e a um compasso.

Na secção inicial apresentaremos construções elementares, as quais, na nossa opinião, poderão ser trabalhadas ao nível da escola, tanto em contexto de sala de aula, como de clube, para o que se recomenda a consulta de [3].

Seguem-se duas secções nas quais continuaremos a estudar construções euclidianas, mas agora, devido ao seu grau de complexidade limitar-nos-emos a dizer como seria possível realizá-las, referindo que determinados passos poderão ser feitos recorrendo a algumas das

construções elementares já estudadas.

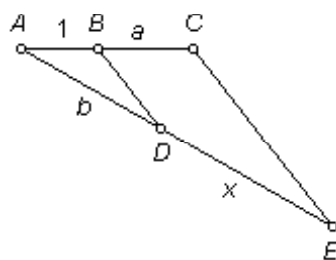
Na última secção iremos um pouco mais além, uma vez que não só se apresenta a construção como também se analisa o número de soluções possíveis para o problema em estudo.

3.1 Construções elementares

Ao longo deste capítulo e do seguinte, iremos precisar de construir segmentos de recta com comprimentos derivados de outros a partir de operações elementares ou da aplicação da raiz quadrada. Partindo dos elementos a , b e da unidade e recorrendo ao conhecimento dos antigos Gregos, vamos apresentar a construção de um segmento de recta com o comprimento igual ao resultado do produto de a por b , ao quociente entre a e b , ao quadrado de a e à raiz quadrada de a . Não apresentaremos a construção da soma e da diferença de a e b por as considerarmos óbvias e, como tal, pouco interessantes. Iremos, ainda, apresentar outras construções elementares propostas por Descartes.

3.1.1 Produto de segmentos

Para construirmos um segmento de recta com comprimento igual ao produto de a por b , começamos por construir um segmento AC com comprimento superior a a em uma unidade, seguidamente, constrói-se o segmento de recta AD , com comprimento b , sendo B um ponto de AC , tal que AB tem uma unidade de comprimento, traça-se o segmento de recta BD e a recta CE , paralela àquela, o ponto E , resulta da intersecção da última recta construída com a recta AD .



Proposição 3.1.1 *Seja x o comprimento do segmento de recta DE , temos*

$$x = ab.$$

Demonstração

Os triângulos ADB e AEC são semelhantes, pelo que

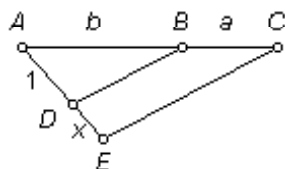
$$a = \frac{x}{b},$$

donde resulta, ser x igual ao produto de a por b . ■

Observação 3.1.2 *Para construir um segmento de recta com comprimento igual ao quadrado de a basta, na construção anterior, fazer b igual a a .*

3.1.2 Quociente de segmentos

Para construirmos um segmento de recta com comprimento igual ao quociente definido por a e b , começamos por construir um segmento AC , com comprimento igual à soma de a com b , seguidamente, constrói-se o segmento de recta AD , com uma unidade de comprimento, sendo B um ponto do segmento de recta AC , tal que AB tenha comprimento b , traça-se o segmento de recta BD e a recta CE paralela àquela, o ponto E , resulta da inteseccção da última recta construída com a recta AD .



Proposição 3.1.3 *Se x o comprimento do segmento de recta DE , temos*

$$x = \frac{a}{b}.$$

Demonstração

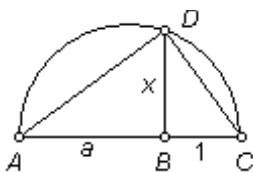
Os triângulos ADB e AEC são semelhantes, pelo que

$$x + 1 = \frac{a + b}{b}.$$

o que equivale à igualdade que pretendemos demonstrar. ■

3.1.3 Raiz quadrada de um segmento

Para construirmos um segmento de recta com comprimento igual à raiz quadrada de a , começamos por construir um segmento de recta AC , com comprimento superior a a em uma unidade. Seguidamente, constrói-se uma semi-circunferência com diâmetro AC , sendo B um ponto do segmento de recta AC , tal que a seja o comprimento de AB , traça-se o segmento de recta BD , perpendicular a AC , o ponto D resulta da inteseccção deste segmento de recta com a semi-circunferência.



Proposição 3.1.4 *Sendo x o comprimento do segmento de recta BD , o seu valor será igual à raiz quadrada de a .*

Demonstração

Os triângulos rectângulos ABD e DBC são semelhantes. Da semelhança dos triângulos ABD e BCD , temos

$$x = \frac{a}{x},$$

donde resulta ser x igual à raiz quadrada de a . ■

3.1.4 Raízes de uma equação do segundo grau

Outra construção legada pelos gregos permite-nos determinar as raízes de uma equação do segundo grau do tipo

$$x^2 - ax + b = 0, \text{ com } (a^2 > 4b).^1 \quad (3.1)$$

Para tal, devemos proceder da seguinte maneira:

- Construir uma circunferência com diâmetro AB , tal que

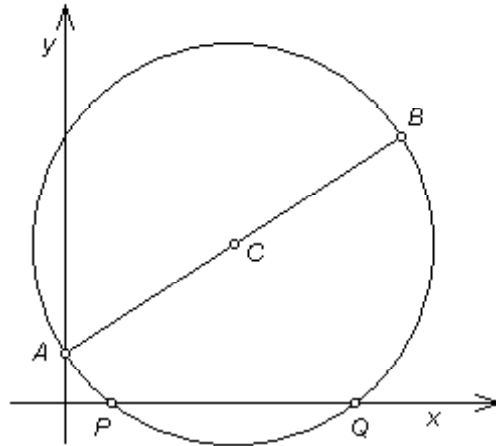
$$A = (0, 1) \text{ e } B = (a, b);$$

- Marcar os pontos P e Q resultantes da intersecção da circunferência com o eixo das abcissas.

Proposição 3.1.5 *As abcissas dos pontos P e Q referidos na construção anterior são as raízes da equação (3.1)².*

¹Se se verificasse a igualdade, a equação teria uma única solução pelo que esta poderia ser determinada como sendo a raiz quadrada de um segmento de recta. Se a desigualdade fosse ao contrário, a equação não teria raízes reais.

²Como toda a equação de segundo grau pode ser reduzida à forma em análise, podemos, por este método, construir as raízes de qualquer equação do segundo grau.



Demonstração

A abscissa de C é igual a metade de a e a sua ordenada vale metade da soma entre b e uma unidade. O quadrado do raio da circunferência pode ser representado pelo quadrado da distância entre A e C , ou seja

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Assim, a equação que define a circunferência será

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Como os pontos P e Q pertencem ao eixo das abscissas, para determinarmos as suas abscissas, basta substituir y por 0 na equação da circunferência, o que, após multiplicarmos ambos os membros por quatro, nos leva à seguinte

equação

$$(2x - a)^2 + (b + 1)^2 = a^2 + (b - 1)^2.$$

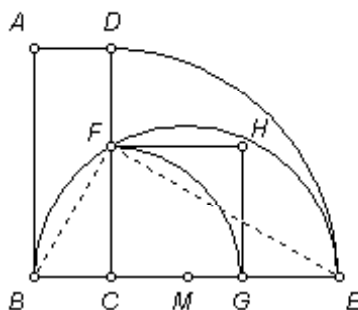
Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos a equação

$$4x^2 - 4ax + 4b = 0,$$

a qual é equivalente a (3.1).■

3.1.5 Rectângulos e quadrados com a mesma área

Neste ponto pretendemos mostrar como construir, recorrendo exclusivamente a uma régua não graduada e a um compasso, um quadrado com área igual à de um rectângulo dado³.



Partindo de um rectângulo $ABCD$, traça-se um quarto de circunferência com centro em C , a passar por D , definindo o ponto E , de tal modo que, B ,

³Esta construção foi proposta por Réne Descartes, no século XVII, e poderá ser consultada em [4].

C e E são colineares. Seguidamente determinamos o ponto médio (M) do segmento de recta BE e traça-se uma semicircunferência de diâmetro BE , de modo a definir o ponto F como a intersecção desta semicircunferência com a recta DC . Com centro em C e raio igual à distância entre C e F , traça-se um quarto de circunferência, o qual intersecta BE no ponto G , finalmente, traçam-se duas rectas, uma paralela a BC a passar por F e outra paralela a DC a passar por G , da intersecção destas duas rectas resulta o ponto H .

Proposição 3.1.6 *O rectângulo $ABCD$ e o quadrado $FCGH$, assim definido, têm a mesma área.*

Demonstração

O triângulo BEF é rectângulo em F , porque está inscrito numa circunferência, relativamente à qual o segmento de recta BE é um diâmetro. Deste modo, os triângulos BCF e FCE são semelhantes. Deste facto resulta a igualdade

$$\frac{|CE|}{|CF|} = \frac{|CF|}{|BC|},$$

ou seja, o produto dos comprimentos dos segmentos de recta CE e BC é igual ao quadrado do comprimento do de CF , mas os segmentos de recta

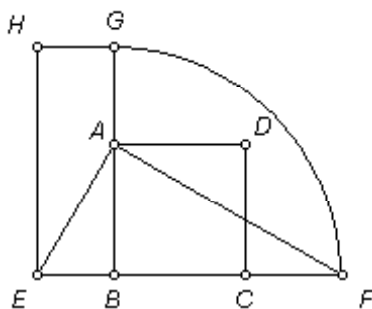
CE e CD têm o mesmo comprimento, pelo que temos

$$|CD| |BC| = |CF|^2,$$

o que equivale a dizer que a área do rectângulo $ABCD$ é igual à área do

quadrado $FCGH$.■

De seguida estudaremos como construir, recorrendo exclusivamente a uma régua não graduada e a um compasso, um rectângulo com área igual à de um quadrado dado, conhecendo um dos lados do rectângulo.



Partindo de um quadrado $ABCD$, traça-se uma circunferência com centro

em B e raio igual ao comprimento do lado do rectângulo conhecido,

definindo E como a intersecção desta circunferência com a recta BC onde

B um ponto interior ao segmento de recta EC . Seguidamente, traça-se o

segmento de recta AE e uma recta perpendicular a esta, passando por A . O

ponto F resulta da intersecção da recta anteriormente construída e EC .

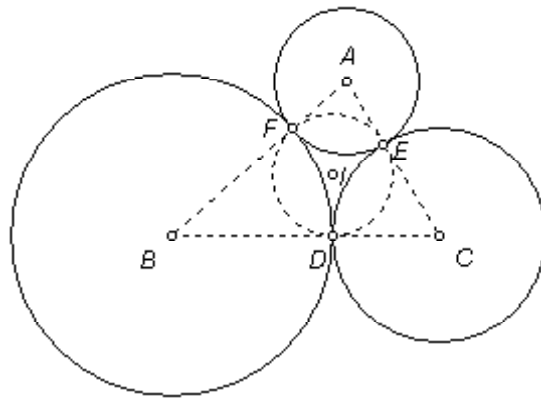
Com centro em B , traça-se um quarto de circunferência que passa por F , de

modo a definir o ponto G pertencente à recta AB . Finalmente, determina-se o ponto H como sendo a intersecção de duas rectas, sendo que uma passa por E e é paralela a GB e a outra passa por G e é paralela a BE .

O rectângulo $HEBG$ satisfaz as condições iniciais.

3.2 Circunferências tangentes e ortogonais

Pretendemos agora estudar, como dados três pontos não colineares, A , B , e C , podemos construir, recorrendo exclusivamente a uma régua não graduada e a um compasso, três circunferências, com centros A , B , e C , tangentes duas a duas.



Dados A , B , e C , se construirmos a circunferência inscrita ao triângulo definido por aqueles pontos, poderemos definir os pontos D , E e F , como a intersecção de tal circunferência com os lados do triângulo que se opõem a

A , B , e C , respectivamente.

Proposição 3.2.1 *As circunferências de centro em A , B , e C , a passar por E , F e D , respectivamente, são tangentes duas a duas.*

Demonstração

Recordando a proposição 3.2.1 temos

$$|AE| = |AF| = p - a, \quad |BF| = |BD| = p - b \text{ e } |CD| = |CE| = p - c$$

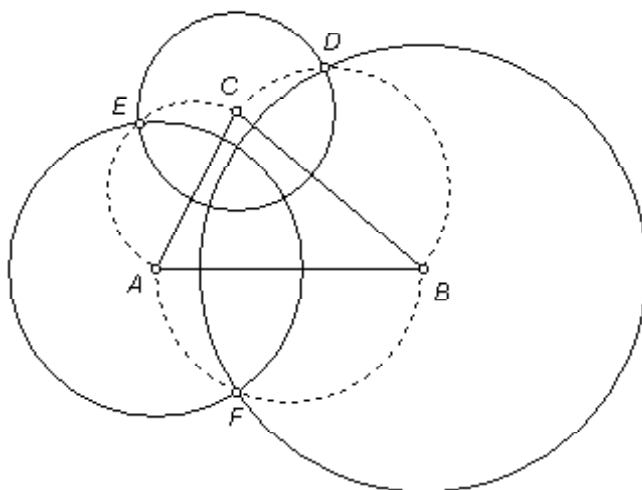
pelo que existem três circunferências com centro, respectivamente, em A , B e C tangentes duas a duas nos pontos D , E e F . ■

Precisamos agora de definir o que são circunferências ortogonais, pois vamos precisar deste conceito para o problema que vamos estudar a seguir.

Definição 3.2.2 *Duas circunferências dizem-se ortogonais se as respectivas tangentes são perpendiculares nos pontos de intersecção.*

De seguida, pretendemos resolver o problema de, dados três pontos não colineares, A , B e C , como construir três circunferências, ortogonais duas a duas, com tais pontos como centros.

A solução para este problema é descrita de seguida.



Assumindo que existem três circunferências centradas em A , B e C , respectivamente, ortogonais duas a duas, seja D o ponto de intersecção das circunferências de centro em B e em C , exterior ao triângulo ABC , as duas rectas tangentes às circunferências em D são perpendiculares aos raios nesse ponto, ou seja, são perpendiculares às rectas BD e CD , pelo que estas rectas são perpendiculares entre si e, assim, podemos afirmar que D pertence à circunferência que tem o segmento de recta BC por diâmetro. De igual modo, compreende-se que E e F pertencem às circunferências de diâmetro AC e AB , respectivamente. Finalmente, podemos referir que os triângulos AFB , BDC e ACE são rectângulos, pelo que lhes podemos

aplicar o teorema de Pitágoras, resultando

$$|AF|^2 + |FB|^2 = |AB|^2;$$

$$|BD|^2 + |DC|^2 = |BC|^2;$$

$$|CE|^2 + |EA|^2 = |CA|^2.$$

Os segmentos de recta AF e AE são raios da mesma circunferência, pelo que são iguais, o mesmo acontecendo com BF e BD e ainda com CD e CE ,

pelo que podemos reescrever as igualdades anteriores

$$|AF|^2 + |BD|^2 = |AB|^2;$$

$$|BD|^2 + |CE|^2 = |BC|^2;$$

$$|CE|^2 + |AF|^2 = |CA|^2,$$

donde resulta

$$|AF|^2 = \frac{1}{2} (|CA|^2 + |AB|^2 - |BC|^2);$$

$$|BD|^2 = \frac{1}{2} (|BC|^2 + |AB|^2 - |CA|^2);$$

$$|CE|^2 = \frac{1}{2} (|BC|^2 + |CA|^2 - |AB|^2),$$

que prova a existência de uma solução do problema.

Para construir tais raios de circunferência teríamos de recorrer às

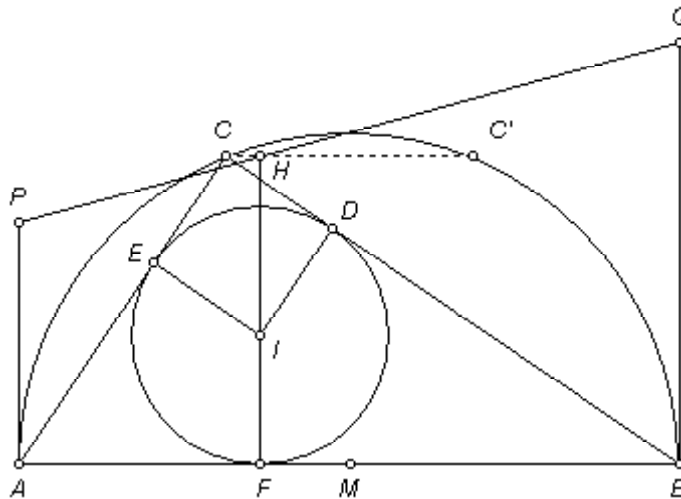
construções básicas, apresentadas no início do capítulo.

3.3 Triângulo rectângulo com circunferência inscrita tangente num ponto dado

Neste tópicó pretendemos resolver o seguinte problema.

Dado um ponto F pertencente ao segmento de recta AB , como construir um triângulo rectângulo ABC , cuja circunferência inscrita seja tangente à

hipotenusa AB em F ?



Sendo a , b e c o comprimento dos lados que se opõem a A , B e C , respectivamente, e D , E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo ABC com os lados BC , AC e AB , respectivamente, os segmentos de recta ID e IE têm o mesmo comprimento e são perpendiculares aos lados BC e AC , respectivamente. Como o ângulo ACB

é recto, concluímos que o quadrilátero $CEID$ é um quadrado em que os seus lados têm o comprimento do raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC .

Pelo exposto, e invocando a proposição 2.2.4, compreende-se que

$$r = |CE| = |EI| = |ID| = |DC| = p - c.$$

Sejam

$$u = |AF|, v = |BF|,$$

podemos representar os lados do triângulo ABC em função de u , v e r , sendo

$$c = u + v, b = u + r, a = v + r,$$

porque da proposição 3.2.1 os segmentos de recta AE e AF têm o mesmo comprimento, o mesmo acontecendo relativamente a BD e BF .

Como ABC é um triângulo rectângulo, podemos aplicar-lhe o teorema de

Pitágoras, resultando

$$(u + v)^2 = (u + r)^2 + (v + r)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e dividindo por dois ambos os membros da

anterior igualdade, obtemos

$$r^2 + ru + rv = uv.$$

Somando uv a ambos os membros e simplificando o primeiro, vem

$$(r + u)(r + v) = 2uv$$

O primeiro membro da última igualdade representa o produto dos catetos,

pelo que a área do triângulo ABC , pode ser expressa, como metade das expressões presentes em cada um dos membros dessa igualdade. Por outro lado, se h for a altura relativamente à hipotenusa, a área do triângulo será

metade do produto de h pelo comprimento da hipotenusa, pelo que

$$\frac{h}{2}(u + v) = uv.$$

Estas conclusões levam-nos à seguinte construção:

1. Construa os segmentos de recta AP e BQ , perpendiculares a AB , medindo u e v respectivamente;
2. Construa o segmento FH , perpendicular a AB , sendo H um ponto da recta PQ ;
3. Construa a recta paralela a AB a passar por H , a qual intersecta a circunferência de diâmetro AB nos pontos C e C' ;

Deste modo, aceitamos que esta construção satisfaz as nossas condições.

3.4 Triângulo dados dois vértices e a recta de Euler

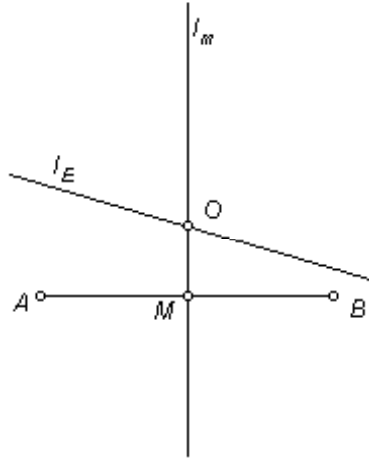
Nesta secção pretendemos estudar o problema de, dados os vértices A e B e a recta l_E , como construir um triângulo ABC tal que l_E seja a sua recta de Euler.

Estudaremos, também, o número de soluções deste problema. Esta secção foi elaborada tendo como ponto de partida o artigo [20].

3.4.1 Construção

Para descrever esta construção precisamos de algumas notações. Sejam M e l_m , respectivamente, o ponto médio e a mediatriz do segmento AB .

Denotamos a intersecção de l_m e l_E por O .



Obviamente, se existir um triângulo ABC , tal que l_E seja a sua recta de Euler, então l_m e l_E intersectam-se, sendo a sua intersecção O , o circuncentro de ABC . Mas esta intersecção nem sempre existe, pelo que temos dois casos a analisar:

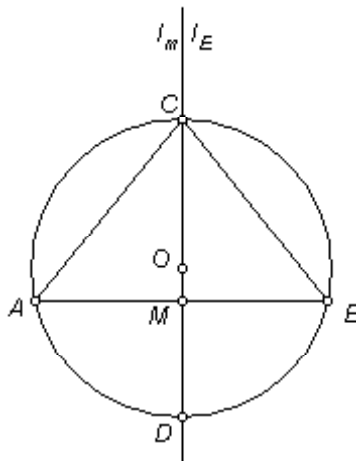
- A linha l_E é perpendicular a AB .

Neste caso, l_m e l_E são coincidentes ou são estritamente paralelas.

Logo, quando a linha l_E é perpendicular a AB , podemos afirmar que:

Se M não pertence a l_E , então não existe nenhum ponto C , tal que l_E seja a recta de Euler do triângulo ABC .

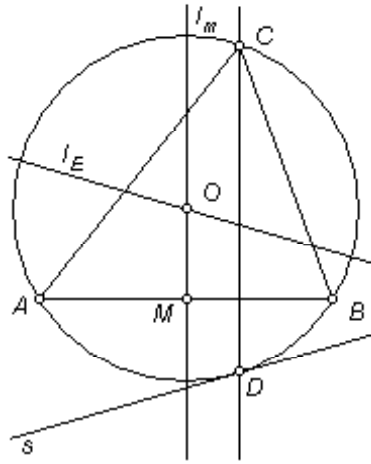
Se M pertence a l_E , então para todo o ponto C , pertencente a l_E , tal que, C seja distinto de M , l_E é a recta de Euler do triângulo ABC , o qual será isósceles.



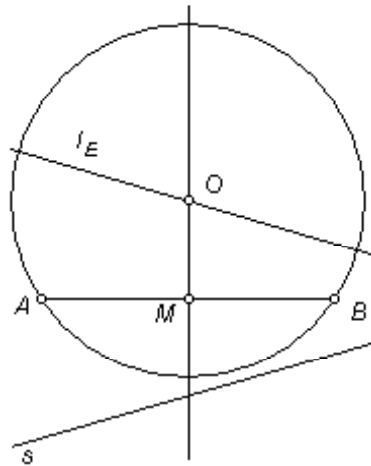
- A linha l_E não é perpendicular a AB .

Neste caso a linha l_m não é paralela a l_E , pelo que existe a intersecção O .

Seja \mathcal{C} a circunferência de centro O e raio igual ao comprimento do segmento de recta OA , por exemplo. É obvio que o ponto C , procurado pertence a \mathcal{C} . Seja s a reflexão de l_E no eixo que contém A e B e sejam D_1 e D_2 os pontos definidos pela intersecção de s com \mathcal{C} , podendo ser coincidentes, se s for tangente a \mathcal{C} , neste caso, teremos só uma solução.

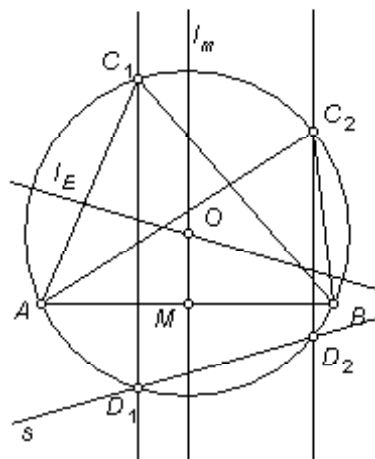


Pode dar-se o caso de s não intersectar \mathcal{C} , pelo que não seria possível definir D_1 e D_2 , neste caso o problema não tem solução.



Se existir D_1 e D_2 distintos, definimos as rectas t_1 e t_2 perpendiculares a AB e a passar por D_1 e D_2 , respectivamente. Os outros dois pontos em que t_1 e t_2 intersectam \mathcal{C} serão denotados por C_1 e C_2 , neste caso poderemos

definir dois triângulos, AC_1B e AC_2B , os quais satisfazem as condições do
nosso problema.



Proposição 3.4.1 *A recta de Euler dos triângulos ABC_1 e ABC_2 coincidem com l_E .*

Demonstração

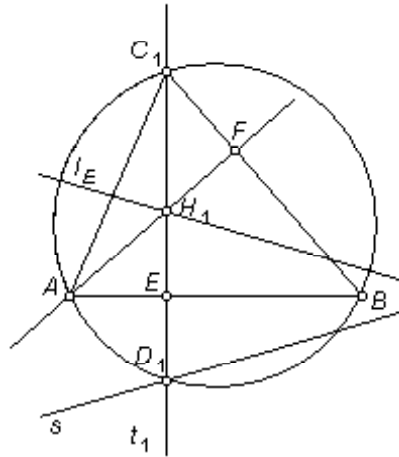
Tendo em conta que a recta de Euler pode ser definida pelo circuncentro e ortocentro de um triângulo, como l_E , por construção dos triângulos ABC_1 e

ABC_2 , contém o circuncentro, basta provar que também contém o ortocentro, o que iremos fazer apenas para ABC_1 , sendo análoga a

demonstração para ABC_2 .

Seja E a intersecção de t_1 com a recta AB , é óbvio que C_1E corresponde a uma das alturas do triângulo ABC_1 . Seja H_1 a intersecção de C_1E com l_E e

seja F a intersecção de AH_1 com BC_1 , basta-nos provar que AF é também uma das alturas do triângulo ABC_1 , isto é, o ângulo AFB é recto.



Como a recta s é obtida por reflexão de l_E em AB , compreende-se que os segmentos de recta H_1E e ED_1 tenham o mesmo comprimento e AE é perpendicular a H_1D_1 , pelo que o triângulo D_1AH_1 é isósceles, sendo AE a bissetriz do ângulo D_1AH_1 , o que implica a igualdade das amplitudes dos ângulos D_1AE e EAH_1 . Verifica-se, também, a igualdade das amplitudes dos ângulos D_1AB e D_1C_1B porque se trata de triângulos inscritos associados a uma mesma corda. Destas duas igualdades podemos concluir que

$$\angle EAH_1 = \angle H_1C_1F.$$

Por outro lado

$$\angle AH_1E = \angle FH_1C_1,$$

visto que se trata de ângulos verticalmente opostos, das duas anteriores igualdades, resulta a semelhança dos triângulos C_1H_1F e H_1AE , logo

$$\angle H_1EA = \angle C_1FH_1,$$

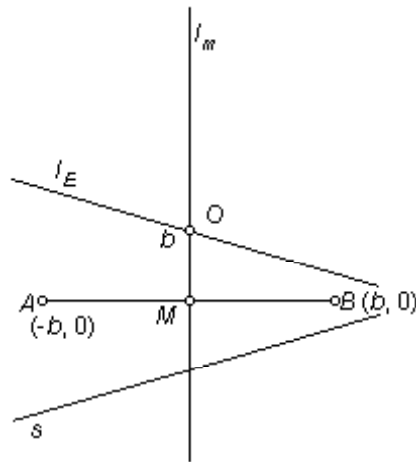
como o primeiro é um ângulo recto, o segundo também o é, pelo que AFB é, igualmente, um ângulo recto■

3.4.2 Número de soluções

O número de soluções deste problema varia consoante a intersecção de l_E com a circunferência de centro O e raio igual ao comprimento do segmento de recta OA , define zero, um, ou dois pontos.

Sem perda de generalidade, consideremos um sistema de coordenadas tal que

$$A = (-k, 0), B = (k, 0), l_E : y = mx + b.$$



Como s é obtida de l_E , por reflexão sobre o eixo definido por A e B e l_m é a mediatriz do segmento de recta AB , temos

$$s : y = -mx - b, l_m : x = 0,$$

pelo que o circuncentro tem abscissa nula e ordenada b , visto que resulta da intersecção de l_E com l_m . Como o raio da circunferência circunscrita é igual à distância entre o circuncentro e um dos vértices, o seu quadrado será dado pela soma dos quadrados de k e de b , assim, a circunferência circunscrita, é definida pela equação

$$x^2 + (y - b)^2 = k^2 + b^2$$

Deste modo, a intersecção de s com a circunferência circunscrita, é definida pela equação

$$x^2 + (-mx - 2b)^2 = k^2 + b^2,$$

a qual, após simplificação, conduz a

$$(1 + m^2)x^2 + 4mbx + 3b^2 - k^2 = 0. \quad (3.2)$$

Proposição 3.4.2 *A equação (3.2) tem zero, uma, ou duas soluções, consoante*

$$\Delta := b^2(m^2 - 3) + k^2(1 + m^2) \quad (3.3)$$

é negativo, igual a zero, ou positivo.

Demonstração

Seja δ o binómio discriminante da equação (3.2), temos

$$\delta = 16m^2b^2 - 4(1 + m^2)(3b^2 - k^2).$$

Como

$$\delta = 4\Delta,$$

a proposição fica demonstrada. ■

De seguida estudaremos o sinal de Δ

- Se

$$m^2 - 3 \geq 0,$$

então, podemos afirmar que Δ é positivo. Logo

$$\Delta > 0,$$

sempre que

$$|m| \geq \sqrt{3}.$$

- No caso contrário quando

$$|m| < \sqrt{3},$$

podemos afirmar que

$$\Delta \geq 0,$$

se e só se

$$-k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}} \leq b \leq k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}}.$$

Para o mesmo valor absoluto de m , dizer que

$$\Delta < 0,$$

equivalerá a

$$b < -k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}} \vee b > k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}}.$$

Veamos então as condições que definem o número N de soluções.

- $N = 0$

$$|b| > k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}} \wedge |m| < \sqrt{3};$$

- $N = 1$

$$b = \pm k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}} \wedge |m| < \sqrt{3};$$

- $N = 2$

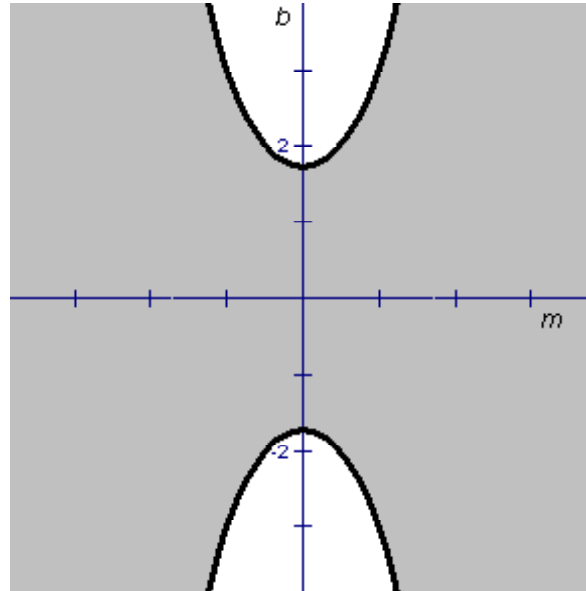
$$|m| \geq \sqrt{3},$$

ou

$$|b| < k\sqrt{\frac{1+m^2}{3-m^2}} \wedge |m| < \sqrt{3}.$$

Ou seja, o número de soluções é 0 na região branca, 1 na linha preta e 2 na

região cinzenta.



A construção apresentada nesta secção permite confirmar os resultados apresentados no artigo inicialmente referido.

Capítulo 4

Coordenadas baricêntricas

Neste capítulo introduziremos a noção de coordenadas baricêntricas homogêneas ou simplesmente coordenadas baricêntricas, relativamente a dois ou a três pontos.

Relativamente à primeira situação, apresentaremos três maneiras distintas de representar um ponto pertencente a uma recta definida por dois pontos quaisquer. Tais sistemas de coordenadas serão melhor compreendidos com a noção de centros de semelhança de duas circunferências e de conjugados harmónicos, dos quais apresentaremos a definição e o processo de construção.

No que ao segundo caso diz respeito, os três pontos serão entendidos como

os vértices de um triângulo e as coordenadas relacionar-se-ão com a área de cada uma das partes resultantes da partição de tal triângulo.

Este estudo insidirá principalmente sobre as coordenadas baricêntricas referentes a um triângulo, relativamente às quais, apresentaremos a sua definição, exemplificando a sua aplicação com a apresentação das coordenadas de alguns centros do triângulo. Referir-nos-emos ao sinal das coordenadas de um ponto, salientado que ele varia consoante o sentido segundo o qual indicamos os vértices do triângulo de referência, ou de acordo com a posição do ponto relativamente a tal triângulo e salientaremos a facilidade em obter as coordenadas dos traços de um ponto, quando se utiliza este sistema de coordenadas.

Com recurso às coordenadas baricêntricas, será, ainda, apresentada a noção de conjugado isotómico, conjugado isogonal e produto de dois pontos. A operação anteriormente referida, permitirá construir um grupo abeliano, relativamente ao qual, referiremos a importância que os conjugados isogonal e isotómico assumem.

4.1 Preliminares

4.1.1 Coordenadas dos pontos de uma recta

Sejam B e C dois pontos fixos da recta \mathcal{L} . Cada ponto X em \mathcal{L} pode ser definido através de diferentes sistemas de coordenadas:

- Pela razão definida pela divisão

$$t = \frac{|XC|}{|BX|};$$

- Utilizando as coordenadas baricêntricas homogêneas, nas quais a proporção

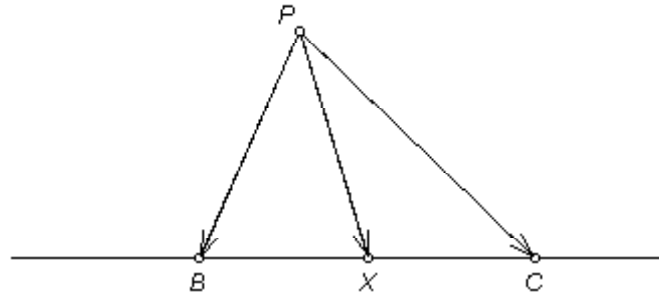
$$\frac{|XC|}{|BX|},$$

define as massas a colocar em B e C , de modo a que o sistema resultante (de duas partículas) tenha X como centro de massa;

- Recorrendo a coordenadas baricêntricas absolutas, as quais definem X como uma combinação convexa de B e C :

$$X = (1 - t)B + tC,$$

expressando, para um ponto P exterior a \mathcal{L} , o vector PX como combinação dos vectores PB e PC .



A diferença entre coordenadas baricêntricas e coordenadas baricêntricas absolutas prende-se com o facto de, nas segundas, a soma das coordenadas

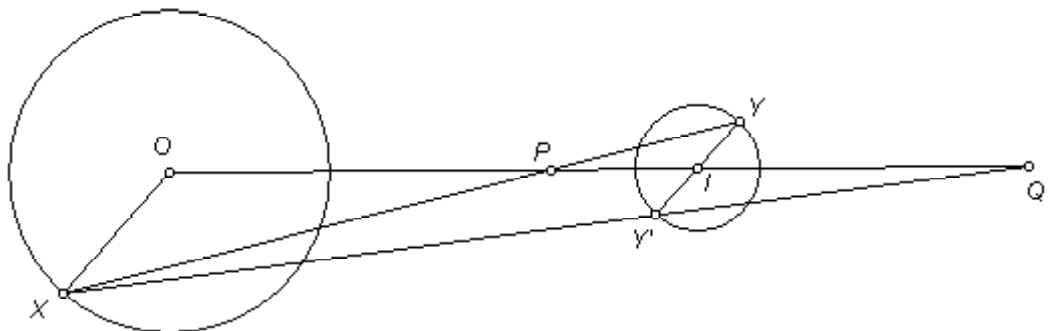
ser igual a um, ou seja,

$$(1 - t) + t = 1.$$

4.1.2 Centros de semelhança de duas circunferências

Considerem-se duas circunferências $\mathcal{C}(O, r_1)$ e $\mathcal{C}(I, r_2)$, com centros O e I e

raios r_1 e r_2 , respectivamente.



Centro de semelhança interno

Proposição 4.1.1 *Dado um ponto X em $\mathcal{C}(O, r_1)$ e construindo um raio em $\mathcal{C}(I, r_2)$ paralelo e oposto ao raio OX ¹, intersectando $\mathcal{C}(I, r_2)$ no ponto Y . Temos que as rectas XY e OI intersectam-se sempre no mesmo ponto P , chamado de centro de semelhança interno das duas circunferências. P divide o segmento de recta OI na proporção*

$$\frac{OP}{PI} = \frac{R}{r}.$$

Sendo as coordenadas baricêntricas absolutas de P relativamente a OI definidas pela igualdade

$$P = \frac{RI + rO}{R + r} = \frac{R}{R + r}I + \frac{r}{R + r}O.$$

Demonstração

Os ângulos OPX e IPY têm a mesma amplitude porque são verticalmente opostos. Os ângulos PXO e PYI são iguais porque têm lados paralelos, deste modo, conclui-se que os triângulos OXP e IYP são semelhantes, como os segmentos de recta OX e IY têm comprimentos constantes, deduz-se

¹Relativamente a duas circunferências $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ e $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, dois raios dizem-se paralelos e opostos, se forem paralelos entre si e não pertencerem ao mesmo semiplano definido pela recta O_1O_2 .

que o mesmo acontece com OP e PI , pelo que a razão definida pelo quociente entre OP e PI é sempre constante sendo, neste caso

$$\frac{OP}{PI} = \frac{OX}{IY} = \frac{R}{r}.$$

■

Centro de semelhança externo

Proposição 4.1.2 *Por outro lado, se construirmos o raio em $\mathcal{C}(I, r_2)$ directamente paralelo ao raio OX^2 , da intersecção com $\mathcal{C}(I, r_2)$, resulta Y' , as rectas XY' e OI intersectam-se sempre no mesmo ponto Q , chamado de centro de semelhança externo das duas circunferências. Q divide o segmento de recta OI na razão definida pela igualdade*

$$\frac{OQ}{QI} = -\frac{R}{r}.$$

Deste modo, as coordenadas baricêntricas absolutas de Q relativamente a OI são

$$Q = \frac{R \cdot I - r \cdot O}{R - r} = \frac{R}{R - r} I - \frac{r}{R - r} O.$$

²Relativamente a duas circunferências $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ e $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, dois raios dizem-se directamente paralelos, se forem paralelos entre si e pertencerem ao mesmo semiplano definido pela recta O_1O_2 .

Demonstração

Tendo em conta que as rectas OX e IY' são paralelas e o ângulo Q é comum aos triângulos OXQ e $IY'Q$, concluímos que estes são semelhantes,

pelo que

$$\frac{OQ}{IQ} = \frac{OX}{IY'} = \frac{R}{r},$$

donde

$$\frac{OQ}{QI} = -\frac{R}{r}.$$

■

4.1.3 Conjugados harmónicos

Definição 4.1.3 *Dois pontos X e Y dividem harmonicamente outros dois pontos B e C , se são colineares com eles e*

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{BY}{YC}.$$

Diremos, então, que X e Y são conjugados harmónicos um do outro, relativamente ao segmento de recta BC .

Proposição 4.1.4 *Os centros de semelhança internos e externos de duas circunferências dividem, harmonicamente, os centros de tais circunferências.*

Demonstração

Seja P , o centro de semelhança interna de O e de I e seja Q , o centro de semelhança externa, relativamente aos mesmos pontos, então

$$\frac{OP}{PI} = \frac{R}{r}, \quad \frac{OQ}{QI} = -\frac{R}{r},$$

donde

$$\frac{OP}{PI} = -\frac{OQ}{QI}.$$

■

Proposição 4.1.5 *Se X e Y dividem B e C harmonicamente, então B e C dividem X e Y harmonicamente.*

Demonstração

Se X e Y dividem B e C harmonicamente, então

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{BY}{YC},$$

mudando de membro, XC e BY e invertendo a ordem dos vértices dos segmentos de recta não envolvidos nesta troca, obtemos

$$\frac{XB}{BY} = -\frac{XC}{CY},$$

donde se conclui que B e C dividem X e Y harmonicamente. ■

Vejamos duas proposições que envolvem centros de semelhaça, conjugados harmônicos, o circuncentro e o centro da circunferência dos nove pontos.

Proposição 4.1.6 *O baricentro e o ortocentro são conjugados harmônicos um do outro, relativamente ao segmento de recta ON , pelo que o baricentro e o ortocentro são centros de semelhança da circunferência circunscrita e da circunferência dos nove pontos.*

Demonstração

De (2.8) concluímos

$$\frac{OG}{GN} = \frac{2}{1}, \quad \frac{OH}{HN} = -\frac{2}{1},$$

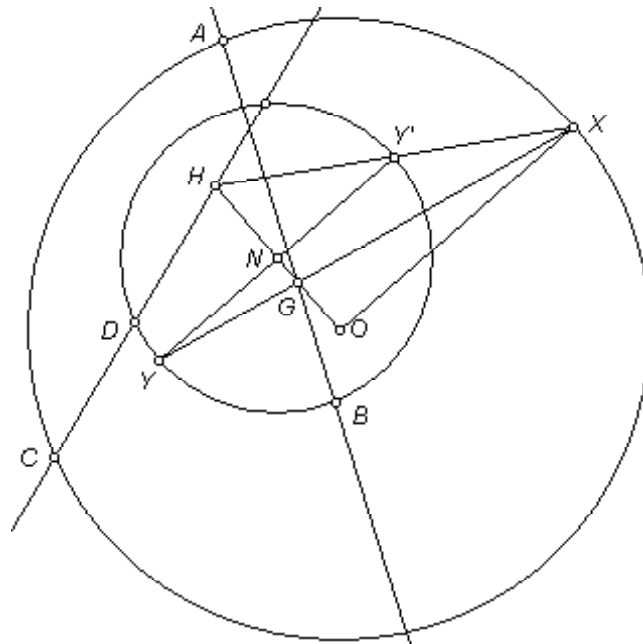
donde resulta

$$\frac{OG}{GN} = -\frac{OH}{HN}, \tag{4.1}$$

pelo que de (4.1) concluimos que o baricentro e o ortocentro são conjugados harmônicos um do outro, relativamente ao segmento de recta ON , donde, de acordo com a proposição 4.1.4 se conclui que o baricentro e o ortocentro são centros de semelhança da circunferência circunscrita e da circunferência dos nove pontos. ■

Proposição 4.1.7 *Qualquer recta a passar pelo baricentro ou pelo ortocentro é dividida pela circunferência circunscrita e pela circunferência dos nove pontos na razão 2 : 1.*

Demonstração



De facto, da construção dos centros de semelhança G e H , relativamente à circunferência circunscrita e à circunferência dos nove pontos e tendo em conta que

$$\frac{OG}{GN} = \frac{2}{1},$$

concluimos que G divide o segmento de recta XY na razão

$$\frac{XG}{GY} = \frac{2}{1},$$

deste modo, qualquer segmento de recta AB , a passar por G , em que A e B são pontos de intersecção desse segmento de recta, respectivamente, com a circunferência circunscrita e com a circunferência dos nove pontos, está dividido na razão

$$\frac{AG}{GB} = \frac{2}{1},$$

para confirmar tal afirmação basta "deslocar" o ponto X para A , ficando o ponto Y sobre B .

Por outro lado, a construção dos centros de semelhança G e H e o facto de (3.7) nos permitir afirmar

$$\frac{HO}{HN} = \frac{2}{1},$$

implica que

$$\frac{HX}{HY'} = \frac{2}{1},$$

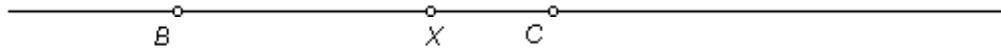
pelo que, deslocando o ponto X para C , confirmamos a razão

$$\frac{HC}{HD} = \frac{2}{1}.$$

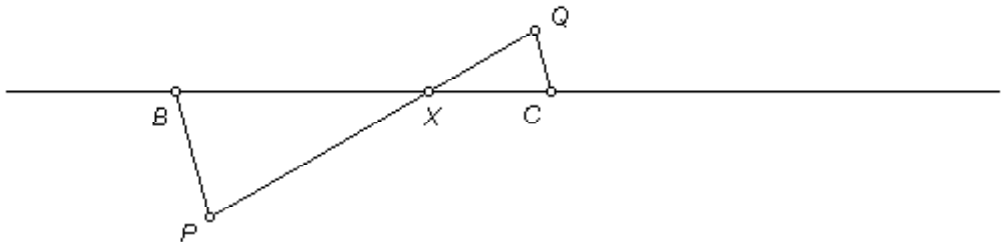
■

Importa, agora, ver como se pode construir um ponto Y , conjugado harmónico de outro X , relativamente aos pontos B e C . Para tal, devemos proceder como seguidamente se descreve:

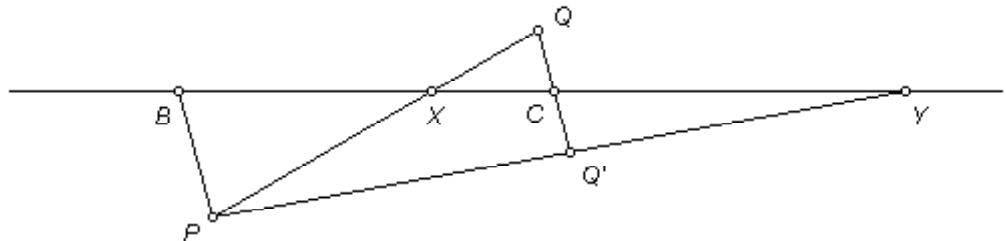
Em primeiro lugar, se X divide BC internamente, temos a seguinte situação inicial



Em seguida, tomamos um ponto P , exterior à recta BC , traçamos a recta PX e a recta paralela a BP a passar por C , a intersecção das rectas que acabámos de construir, define o ponto Q .

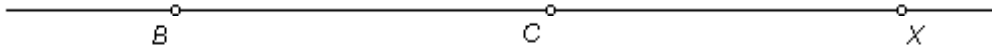


Marcamos o ponto Q' , de tal forma que o segmento de recta QQ' , possa ser um diâmetro de uma circunferência com centro em C . A intersecção das rectas BC e PQ' define o ponto Y .

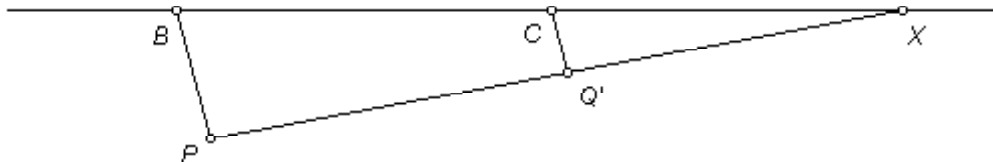


Se, contrariamente, X dividir BC externamente, temos a seguinte situação

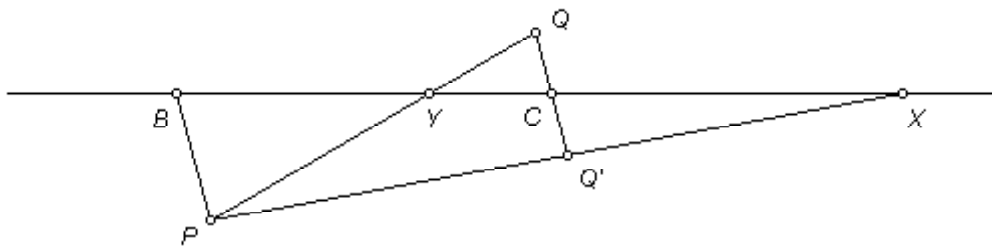
inicial



Em seguida, tomamos um ponto Q' exterior à recta BC , traçamos a recta XQ' e a recta paralela a CQ' a passar por B , a intersecção das rectas que acabámos de construir, define o ponto P .



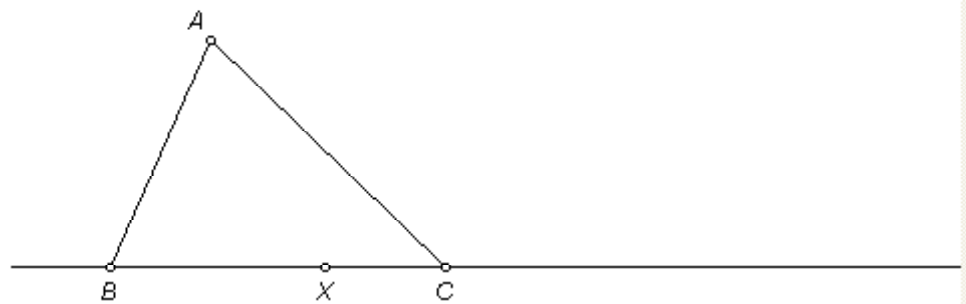
Marcamos o ponto Q , de tal forma que o segmento de recta QQ' , possa ser um diâmetro de uma circunferência com centro em C . A intersecção das rectas BC e PQ' define o ponto Y .



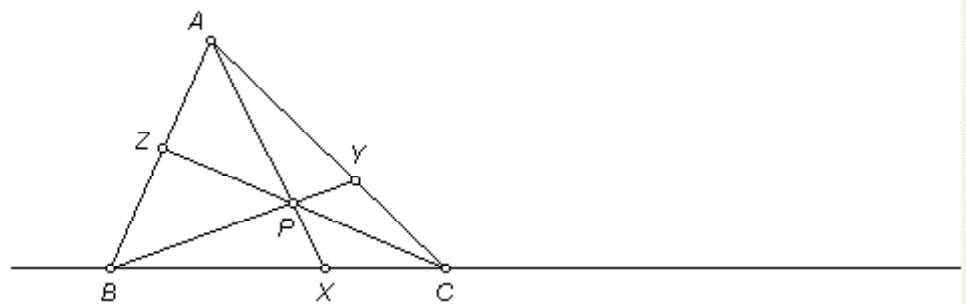
Vejamos uma outra possível construção do conjugado harmónico de dois pontos, a qual se baseia nos teoremas de Menelau e de Ceva.

Seja X um ponto pertencente à recta BC . Para construir o conjugado harmónico de X , relativamente ao segmento de recta BC , podemos proceder do seguinte modo:

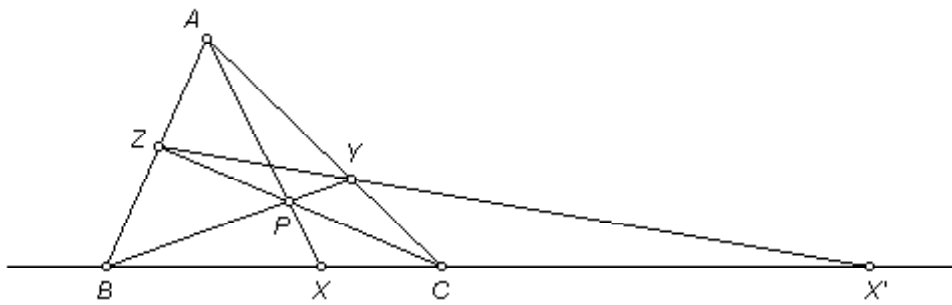
1. Marcamos um ponto arbitrário A exterior a BC e construímos os segmentos de recta, AB e AC ;



2. Marcamos um ponto arbitrário P , no segmento de recta AX , e construímos as rectas BP e CP , as quais intersectam, respectivamente, as rectas CA e AB em Y e Z ;



3. Construímos a linha YZ que intersecta BC em X' .



Proposição 4.1.8 *O ponto X' , definido na construção anterior, é o conjugado harmónico de X relativamente ao segmento de recta BC .*

Demonstração

Tendo em conta que os pontos Z , Y e X' são colineares e pertencem a AB , AC e BC , respectivamente, podemos aplicar o teorema de Menelau, o qual origina a igualdade

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX'}{X'C} \frac{CY}{YA} = -1.$$

Por outro lado, tendo em conta que os pontos X , Y e Z resultam da intersecção de três cevianas, concorrentes em P , com os lados do triângulo ABC , definidos pelas rectas BC , AC e AB , respectivamente, podemos recorrer ao teorema de Ceva para obter a igualdade

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = 1.$$

Das duas igualdades anteriores resulta

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{BX'}{X'C'}$$

o que equivale a afirmar que os pontos X e X' são conjugados harmônicos um do outro relativamente a B e C .■

4.2 Coordenadas homogêneas baricêntricas

As coordenadas homogêneas de um ponto num plano definido por um dado triângulo ABC foram introduzidas por Möbius. Kimberling [13], cita H. S.

M. Coxeter, para expressar a sua opinião relativamente a este tema, dizendo que "a criação das coordenadas homogêneas por Möbius foi uma das ideias mais ricas da história da matemática".

Quando se pretende estudar propriedades geométricas do triângulo, somos confrontados com dois tipos de coordenadas homogêneas que possibilitam a representação de um ponto, por um lado as coordenadas trilineares e, por outro, as coordenadas baricêntricas. As primeiras destas coordenadas são dadas por um tripleto de números que representam a relação entre as três distâncias definidas entre o ponto e cada um dos lados do triângulo ABC .

Propriedades do triângulo, como por exemplo, as coordenadas trilineares de

inúmeros centros do triângulo, bem como relações definidas entre alguns deles, poderão ser estudadas recorrendo aos trabalhos de Kimberling, de entre os quais ressalta a obra anteriormente citada. Relativamente às coordenadas baricêntricas, estas serão o tema do resto deste capítulo, o qual se subdividirá em quatro secções, baseando-se nos trabalhos de Yiu, [22], [23] e [24], visto ser este um autor incontornável no que a estas coordenadas diz respeito.

Deste modo, nesta secção, apresentaremos a definição de coordenadas baricêntricas de um ponto em geral, pertencente ao plano definido pelos vértices de um triângulo dado e as de três centros notáveis, baricentro, incentro e circuncentro, após o que introduziremos a noção de coordenadas baricêntricas absolutas, que nos permitirão obter as coordenadas baricêntricas do ortocentro e do centro da circunferência dos nove pontos.

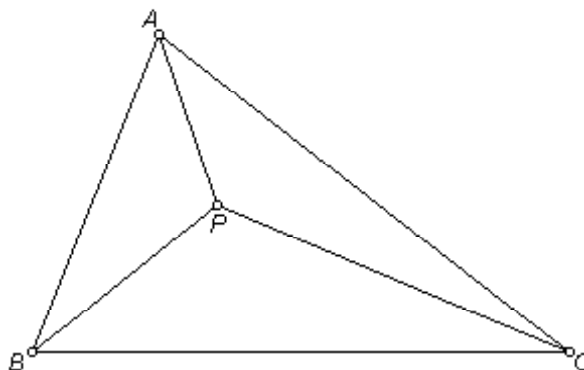
Segue-se a referência ao significado do sinal de tais coordenadas, o que possibilitará a determinação das coordenadas baricêntricas dos centros das circunferências ex-inscritas. Após o que estudaremos as coordenadas dos traços de um ponto, ou seja, da intersecção de cada uma das cevianas definidas por esse ponto e o lado que se opõe ao vértice em que ela incide. Tal estudo possibilitar-nos-á a obtenção das coordenadas baricêntricas do

ponto de Gergonne e do ponto de Nagel.

4.2.1 Coordenadas baricêntricas de um ponto

Dado um triângulo ABC , todo o ponto P , pertencente ao plano definido pelos vértices de tal triângulo, pode ser expresso por um tripleto de valores $(u : v : w)$, de tal modo que, se se aplicassem três pesos de massa u , v e w nos vértices A , B e C , respectivamente, o centro de massa do triângulo ABC , estaria sobre P .

Definição 4.2.1 O tripleto $(u : v : w)$, anteriormente referido, corresponde às coordenadas baricêntricas do ponto P relativamente ao triângulo ABC .



Estas massas podem ser definidas pela relação entre as áreas dos triângulos

PBC , PCA e PAB , da seguinte forma,

$$\frac{u}{\Delta_{[PBC]}} = \frac{v}{\Delta_{[PCA]}} = \frac{w}{\Delta_{[PAB]}}$$

pelo que o ponto P admite a seguinte representação trivial:

$$P = (\Delta_{[PBC]} : \Delta_{[PCA]} : \Delta_{[PAB]}),$$

ou de forma equivalente

$$P = \Delta_{[PBC]} A + \Delta_{[PCA]} B + \Delta_{[PAB]} C.$$

Da definição de coordenadas baricêntricas fica claro que os ternos $(u : v : w)$

e $(ku : kv : kw)$, com k não nulo, definem o mesmo ponto, isto é,

$$P = (u : v : w) = (ku : kv : kw), \quad k \neq 0.$$

Considera-se que a área de um triângulo XYZ é zero se X , Y e Z forem colineares, considera-se positiva se a orientação dos vértices for anti-horária e considera-se negativa se os vértices tiverem orientação no sentido horário,

deste modo, temos por exemplo

$$\Delta_{[ABC]} > 0, \quad \Delta_{[ACB]} < 0.$$

Assim, se P pertencer a BC , temos que os pontos P , B e C são colineares,

pelo que a área do triângulo PBC será nula, resultando

$$P = (0 : \Delta_{[PCA]} : \Delta_{[PAB]}). \quad (4.2)$$

Tendo em conta que as coordenadas homogêneas trilineares, relativas a um

ponto, são um tripleto proporcional às distâncias desse ponto a cada um

dos lados do triângulo ABC , torna-se evidente que um ponto com coordenadas homogêneas baricêntricas $(u : v : w)$ pode ser definido em coordenadas trilineares, por

$$P = \left(\frac{u}{a} : \frac{v}{b} : \frac{w}{c} \right),$$

em que a , b e c são os comprimentos dos lados que se opõem aos vértices A , B e C , respectivamente. Inversamente, um ponto com coordenadas trilineares $(u : v : w)$ tem coordenadas homogêneas baricêntricas da forma

$$P = (au : bv : cw).$$

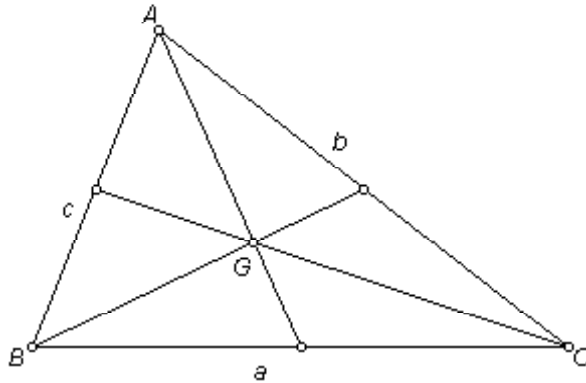
4.2.2 Coordenadas baricêntricas de centros notáveis

Baricentro

Proposição 4.2.2 *O baricentro G , também designado por centróide ou centro de massa, é representado, em termos de coordenadas baricêntricas, por*

$$G = (1 : 1 : 1). \tag{4.3}$$

Demonstração



Seja G o baricentro de um triângulo ABC , temos

$$G = (\Delta_{[GBC]} : \Delta_{[GCA]} : \Delta_{[GAB]}).$$

Como se sabe, de acordo com [8], o baricentro de um triângulo divide-o em três com a mesma área. Deste modo, compreende-se que os triângulos

GBC , GCA e GAB tenham a mesma área, pelo que

$$G = (\Delta_{[GBC]} : \Delta_{[GBC]} : \Delta_{[GBC]}),$$

por exemplo. Como $\Delta_{[GBC]}$ é não nula, podemos multiplicar o terno que define G , pelo inverso do valor de tal área, resultando

$$G = (1 : 1 : 1).$$

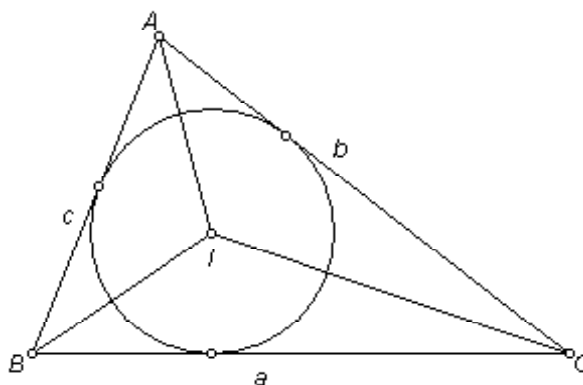
■

Incentro

Proposição 4.2.3 *O incentro I admite a seguinte representação, em termos de coordenadas baricêntricas,*

$$I = (a : b : c). \quad (4.4)$$

Demonstração



Seja r o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC , temos

$$\Delta_{[IBC]} = \frac{1}{2}ra, \quad \Delta_{[ICA]} = \frac{1}{2}rb, \quad \Delta_{[IAB]} = \frac{1}{2}rc.$$

Visto que r é a altura de cada um destes triângulos, relativamente a cada um dos lados derivados do triângulo original, tal como no exemplo anterior, podemos multiplicar os valores das áreas por uma constante não nula, neste

caso $\frac{2}{r}$, o que nos conduz a

$$I = (a : b : c).$$

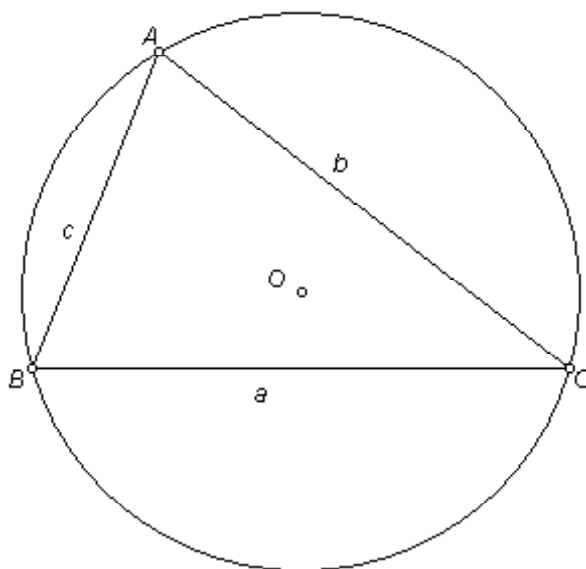
■

Circuncentro

Proposição 4.2.4 Podemos representar o circuncentro, em termos de coordenadas baricêntricas, por

$$O = (a^2 (b^2 + c^2 - a^2) : b^2 (c^2 + a^2 - b^2) : c^2 (a^2 + b^2 - c^2)). \quad (4.5)$$

Demonstração



Seja R o raio da circunferência circunscrita, temos

$$R = |OA| = |OB| = |OC|.$$

Estando o ângulo ao centro BOC , associado à mesma corda do ângulo inscrito BAC , compreende-se que o primeiro tenha o dobro da amplitude do

segundo. Um raciocínio análogo pode ser desenvolvido relativamente às cordas definidas pelos outros lados do triângulo ABC , pelo que

$$\angle BOC = 2A, \quad \angle COA = 2B, \quad \angle AOB = 2C.$$

Por outro lado, aplicando o teorema das áreas aos ângulos associados a cada um dos vértices do triângulo ABC , temos

$$\begin{aligned} \Delta_{[OBC]} &= \frac{1}{2} R^2 \sin A = R^2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}; \\ \Delta_{[OCA]} &= \frac{1}{2} R^2 \sin B = R^2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}; \\ \Delta_{[OAB]} &= \frac{1}{2} R^2 \sin C = R^2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Do teorema dos senos, resulta

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

O teorema dos cossenos conduz-nos a:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Aplicando os resultados, anteriormente enunciados, às expressões que representavam as áreas, obtemos

$$\Delta_{[OBC]} = \frac{Ra}{2} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\begin{aligned}\Delta_{[OCA]} &= \frac{Rb}{2} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \\ \Delta_{[OAB]} &= \frac{Rc}{2} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.\end{aligned}$$

Deste modo

$$O = \left(\frac{Ra}{2} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{Rb}{2} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} : \frac{Rc}{2} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right),$$

multiplicando os valores das coordenadas pela constante k , tal que

$$k = \frac{2abc}{R},$$

obtemos o resultado pretendido. ■

Proposição 4.2.5 *A soma das coordenadas do circuncentro, referida anteriormente, é igual a dezasseis vezes o quadrado da área do triângulo ABC, ou seja,*

$$a^2 (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 (a^2 + c^2 - b^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta_{[ABC]}^2. \quad (4.6)$$

Demonstração

O primeiro membro da igualdade que pretendemos demonstrar é equivalente a

$$4 \frac{abc}{R} \frac{R}{4} \left(a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right).$$

Tendo em conta a igualdade (2.4), equivalente a

$$4\Delta_{[ABC]} = \frac{abc}{R}$$

e, por outro lado, o facto de, durante a demonstração das coordenadas baricêntricas do circuncentro, ter ficado implícito que a área do triângulo ABC (sendo a soma das áreas dos triângulos OBC , OCA e OAB) vale

$$\frac{R}{4} \left(a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right),$$

resulta que a soma das coordenadas do circuncentro, tem o seguinte valor,

$$4.4\Delta_{[ABC]} \cdot \Delta_{[ABC]} = 16\Delta_{[ABC]}^2.$$

■

4.2.3 Coordenadas baricêntricas absolutas

Seja P um ponto com coordenadas baricêntricas homogêneas $(u : v : w)$, se

$$u + v + w \neq 0,$$

podemos obter as coordenadas baricêntricas absolutas de tal ponto, determinando coeficientes proporcionais aos anteriores, de tal forma que, a

sua soma seja a unidade:

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w},$$

pelo que, o ponto P admite a seguinte representação trivial

$$P = \frac{1}{\Delta_{[ABC]}} (\Delta_{[PBC]}A + \Delta_{[PCA]}B + \Delta_{[PAB]}C). \quad (4.7)$$

Se dois pontos, P e Q , forem dados em coordenadas baricêntricas absolutas,

então, o ponto X que divide o segmento de recta PQ na razão

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{p}{q}$$

tem coordenadas baricêntricas absolutas, definidas como se segue

$$X = \frac{qP + pQ}{p + q}. \quad (4.8)$$

Estas coordenadas têm o inconveniente de, por vezes, serem representadas

sob a forma de fracção. Para evitar tal facto, podemos adoptar um

processo, tendente à obtenção das coordenadas de um ponto X , com

características idênticas às anteriormente referidas. Assim, sendo

$$P = (u : v : w), \quad Q = (u' : v' : w'),$$

a representação em coordenadas bariênticas dos pontos P e Q , tal que

$$u + v + w = u' + v' + w', \quad (4.9)$$

o ponto X , que divide PQ na razão

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{p}{q}$$

tem coordenadas baricêntricas

$$X = (qu + pu' : qv + pv' : qw + pw'). \quad (4.10)$$

Neste caso, o ganho de garantirmos não ter fracções nas coordenadas, custa a perda das coordenadas baricêntricas absolutas, de facto, agora apenas podemos falar de coordenadas baricêntricas.

Centro da circunferência dos nove pontos

Recorrendo às coordenadas baricêntricas absolutas de um ponto que divide um determinado segmento de recta numa dada razão, a partir de (4.8), é possível determinar as coordenadas baricêntricas do centro da circunferência dos nove pontos.

Proposição 4.2.6 *Em termos de coordenadas baricêntricas, o centro da circunferência dos nove pontos de um triângulo pode ser definido, em função dos lados de tal triângulo, por*

$$N = (\alpha, \beta, \gamma), \quad (4.11)$$

sendo

$$\alpha = b^2 (a^2 + c^2 - b^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2);$$

$$\beta = a^2 (b^2 + c^2 - a^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2);$$

$$\gamma = a^2 (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 (a^2 + c^2 - b^2),$$

ou, em função dos ângulos internos do mesmo triângulo, por

$$N = (a \cos(B - C) : b \cos(C - A) : c \cos(A - B)). \quad (4.12)$$

Demonstração

De (2.8), resulta

$$\frac{ON}{NG} = -\frac{3}{1}.$$

Por outro lado, de (4.5) e (4.6), podemos determinar as coordenadas

baricêntricas absolutas do circuncentro

$$O = \left(\frac{a^2 (b^2 + c^2 - a^2)}{16\Delta_{[ABC]}^2} : \frac{b^2 (a^2 + c^2 - b^2)}{16\Delta_{[ABC]}^2} : \frac{c^2 (a^2 + b^2 - c^2)}{16\Delta_{[ABC]}^2} \right),$$

relativamente ao baricentro, este pode ser representado através de

coordenadas baricêntricas absolutas, da seguinte maneira

$$G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right).$$

Das igualdades anteriores, e tendo em conta (4.8), resulta que a primeira

coordenada do centro da circunferência dos nove pontos é

$$\alpha = \frac{-\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16\Delta_{[ABC]}^2} + 1}{2},$$

esta primeira coordenada pode ser simplificada do seguinte modo

$$\frac{b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{32\Delta_{[ABC]}^2}.$$

Através de permutações cíclicas, podemos obter as restantes coordenadas baricêntricas do centro dos nove pontos, as quais podem ser simplificadas, se eliminarmos o denominador comum a todas elas, o que nos permite obter

(4.11).

Para provarmos (4.12), vamos procurar demonstrar a equivalência entre esta igualdade e (4.11).

Recordando que

$$\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$$

e de acordo com o teorema dos cossenos, temos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

donde

$$\cos B \cos C = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2bc},$$

por outro lado, do teorema das áreas, 2.1.5., temos

$$\sin B = \frac{2\Delta_{[ABC]}}{ac}, \quad \sin C = \frac{2\Delta_{[ABC]}}{ab},$$

resultando

$$\sin B \sin C = \frac{4\Delta_{[ABC]}^2}{a^2bc}.$$

Das igualdades anteriores, vem que

$$a \cos (B - C) = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 16\Delta_{[ABC]}^2}{4abc}.$$

Como as restantes coordenadas podem ser obtidas desta, através de permutações cíclicas, compreende-se que todas elas terão denominadores iguais, pelo que podem ser suprimidos, assim, podemos restringir-nos ao numerador da fracção anterior, o qual de acordo com (4.6), admite a seguinte expressão

$$2b^2 (a^2 + c^2 - b^2) + 2c^2 (a^2 + b^2 - c^2).$$

Dividindo por dois a anterior expressão, obtemos a primeira coordenada presente em (4.11), pelo que fica provada a equivalência entre tal forma de representar o centro dos nove pontos e (4.12), donde se conclui a validade desta última igualdade. ■

Vejamos ainda, como se pode determinar os centros de semelhança das circunferências circunscrita e inscrita num mesmo triângulo, recorrendo agora a (4.10).

Proposição 4.2.7 *Sejam T e T' , o centro de semelhança interno e o centro de semelhança externo, respectivamente, das circunferências circunscrita e inscrita num mesmo triângulo, temos:*

$$T = (a^2(b+c-a) : b^2(a+c-b) : c^2(a+b-c))$$

$$T' = \left(\frac{a^2}{b+c-a} : \frac{b^2}{a+c-b} : \frac{c^2}{a+b-c} \right).$$

Demonstração

De acordo com 5.1.2, T e T' dividem o segmento de recta delimitado pelo centro da circunferência circunscrita e pelo centro da circunferência inscrita

na razão definida pelos raios de tais circunferências, ou seja,

$$\frac{OT}{TI} = \frac{R}{r} \text{ e } \frac{OT'}{T'I} = -\frac{R}{r}.$$

Recorrendo às igualdades (3.4) e (3.1), resulta

$$\frac{R}{r} = \frac{pabc}{4\Delta_{[ABC]}^2}.$$

Considerando as coordenadas do circuncentro (4.5), cuja soma é dada pela igualdade (4.6) e as coordenadas do incentro (4.4), com soma igual ao perímetro do triângulo ABC , podemos determinar coordenadas equivalentes para o circuncentro e para o incentro, de tal forma que, as somas das componentes de cada ponto sejam iguais, o que se consegue multiplicando

as coordenadas (4.5) por p e as (4.4) por $8\Delta_{[ABC]}^2$, obtendo

$$O = (pa^2(b^2 + c^2 - a^2) : pb^2(a^2 + c^2 - b^2) : pc^2(a^2 + b^2 - c^2));$$

$$I = (8\Delta_{[ABC]}^2 a : 8\Delta_{[ABC]}^2 b : 8\Delta_{[ABC]}^2 c).$$

Assim, o centro interno de semelhança pode ter, como primeira coordenada,

a seguinte expressão:

$$4\Delta_{[ABC]}^2 pa^2(b^2 + c^2 - a^2) + 8pa^2bc\Delta_{[ABC]}^2,$$

o que é equivalente, a

$$4\Delta_{[ABC]}^2 pa^2((b+c)^2 - a^2),$$

ou ainda a

$$8\Delta_{[ABC]}^2 p^2 a^2(b+c-a).$$

Por permutações cíclicas podemos obter as outras duas componentes de tal

forma que

$$T = (\alpha : \beta : \gamma),$$

sendo

$$\alpha = 8\Delta_{[ABC]}^2 p^2 a^2(b+c-a);$$

$$\beta = 8\Delta_{[ABC]}^2 p^2 b^2(a+c-b);$$

$$\gamma = 8\Delta_{[ABC]}^2 p^2 c^2(a+b-c).$$

Finalmente, dividindo todas as coordenadas por $8\Delta_{[ABC]}^2 p^2$, obtemos

$$T = (a^2 (b + c - a) : b^2 (a + c - b) : c^2 (a + b - c)).$$

Recorrendo a um raciocínio semelhante podemos determinar T' , o centro de semelhança externo de OI , o qual terá como primeira coordenada a seguinte expressão

$$4\Delta_{[ABC]}^2 p a^2 (b^2 + c^2 - a^2) - 8p a^2 b c \Delta_{[ABC]}^2,$$

o que é equivalente a

$$4\Delta_{[ABC]}^2 p a^2 ((b - c - a) (b - c + a)).$$

Por permutações cíclicas podemos obter as restantes coordenadas e, se dividirmos todas as coordenadas por $-4\Delta_{[ABC]}^2 p$, obtemos

$$T' = (\alpha, \beta, \gamma),$$

sendo

$$\alpha = a^2 (a + b - c) (a + c - b);$$

$$\beta = b^2 (a + b - c) (b + c - a);$$

$$\gamma = c^2 (a + c - b) (b + c - a),$$

ou, equivalentemente

$$T' = \left(\frac{a^2}{b+c-a} : \frac{b^2}{a+c-b} : \frac{c^2}{a+b-c} \right).$$

■

Ortocentro

Proposição 4.2.8 *Em termos de coordenadas baricêntricas o ortocentro de um triângulo pode ser definido, em função dos lados de tal triângulo, por*

$$H = \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right), \quad (4.13)$$

ou, em função dos ângulos internos do mesmo triângulo, por

$$H = (\tan A : \tan B : \tan C). \quad (4.14)$$

Demonstração

De (3.7), sabemos que o ortocentro divide externamente o segmento de recta OG , na razão

$$\frac{OH}{HG} = -\frac{3}{2},$$

pelo que, tendo em conta as coordenadas baricêntricas do circuncentro (4.5), a sua soma (4.6) e as coordenadas baricêntricas do baricentro (4.3),

obtemos a igualdade da soma das coordenadas, tal como foi referido em (4.9), se multiplicarmos as coordenadas do circuncentro por três e as coordenadas do baricentro por $16\Delta_{[ABC]}^2$.

Assim, a primeira coordenada do ortocentro será

$$-6a^2(b^2 + c^2 - a^2) + 48\Delta_{[ABC]}^2,$$

dividindo por seis, e tendo uma vez mais em consideração (4.6), obtemos

$$\frac{1}{2} [b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) - a^2(b^2 + c^2 - a^2)],$$

como expressão da primeira componente do ortocentro, ou equivalentemente

$$\frac{1}{2} [(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)].$$

Da anterior expressão, através de permutações cíclicas, podemos obter as restantes coordenadas do ortocentro, as quais podem ser simplificadas se as multiplicarmos por

$$\frac{2}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)},$$

surgindo finalmente

$$H = \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Para demonstrarmos (4.14), vamos provar a equivalência entre esta
igualdade e (4.13).

Tendo em conta o teorema das áreas, aplicado ao ângulo A do triângulo
 ABC , temos

$$\sin A = \frac{2\Delta_{[ABC]}}{bc},$$

por outro lado, do teorema dos cossenos, resulta

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Das duas anteriores igualdades, vem que

$$\tan A = \frac{4\Delta_{[ABC]}}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Como

$$4\Delta_{[ABC]},$$

é um factor constante e, de forma análoga, poderíamos obter resultados
semelhantes referentes às restantes coordenadas do ortocentro, aceitamos a
equivalência entre (4.13) e (4.14).

■

4.2.4 Sinal das coordenadas baricêntricas

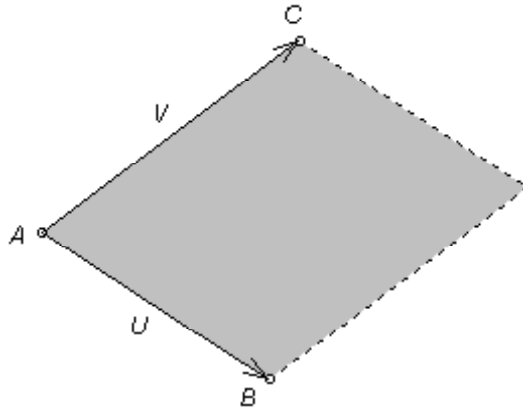
Como já referimos, o sinal das coordenadas baricêntricas de um ponto depende do facto de ele pertencer ao interior, à fronteira, ou ao exterior do triângulo ABC . Importa, agora, explicar por que tal situação acontece.

Como vimos anteriormente, as coordenadas baricêntricas de um ponto estão intimamente ligadas à área de triângulos, para a qual a álgebra linear oferece dois métodos que possibilitam a sua determinação. O primeiro refere-se ao produto externo, ou vectorial, de dois vectores, para determinar a área de um paralelogramo, correspondendo ao dobro da área que pretendemos determinar. O segundo método determina a área do triângulo em estudo, recorrendo a um determinante de ordem três.

Produto vectorial

Sejam U e V , dois vectores tais que

$$U = B - A, V = C - A. \quad (4.15)$$



A área do paralelogramo com lados U e V corresponde ao produto vectorial definido por tais vectores, sendo que esse produto pode ser calculado pelo seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_U & y_U & z_U \\ x_V & y_V & z_V \end{vmatrix}, \quad (4.16)$$

donde resulta

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2} ((y_U z_V - z_U y_V) x + (z_U x_V - x_U z_V) y + (x_U y_V - y_U x_V) z),$$

em que x , y e z formam um sistema ortonormado. Sem perda de generalidade podemos considerar que

$$z_U = z_V = 0.$$

Assim, a área do triângulo ABC pode ser determinada pela igualdade

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{x_U y_V - y_U x_V}{2}.$$

Recorrendo a (4.15), as coordenadas cartesianas dos vectores U e V são

$$U = (x_B - x_A, y_B - y_A, 0), \quad V = (x_C - x_A, y_C - y_A, 0),$$

logo, a igualdade relativa à área do triângulo ABC , pode ser reescrita como

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2} (x_A y_B - y_A x_B + y_A x_C - x_A y_C + x_B y_C - y_B x_C). \quad (4.17)$$

A área calculada pela expressão anterior será positiva se os vértices A , B e

C formarem um circuito em sentido anti-horário, porque nesse caso os

vectores U e V formam um sistema directo com um vector unitário

perpendicular ao plano definido por tais vectores.

Se os vértices A , B e C formarem um circuito em sentido horário,

passaremos a ter o produto vectorial de V por U e, como

$$U \times V = -V \times U,$$

a área determinada pela igualdade (4.17), será negativa.

Se os vértices A , B e C forem colineares, os vectores U e V terão a mesma

directão, pelo que o determinante (4.16) será nulo. Nesse caso os vectores U

e V não definem um triângulo.

Determinante de ordem três

A expressão (4.17), também pode ser obtida com recurso a um determinante, composto pelas coordenadas cartesianas de A , B e C , substituindo a terceira coordenada de cada vértice por 1, donde

$$\Delta_{[ABC]} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

Mais uma vez a inversão do sentido do circuito formado pelos vértices, implica uma troca de linhas no determinante e, por consequência, o sinal deste também muda. Se os pontos A , B e C forem colineares temos

$$\frac{x_A}{y_A} = \frac{x_B}{y_B} = \frac{x_C}{y_C},$$

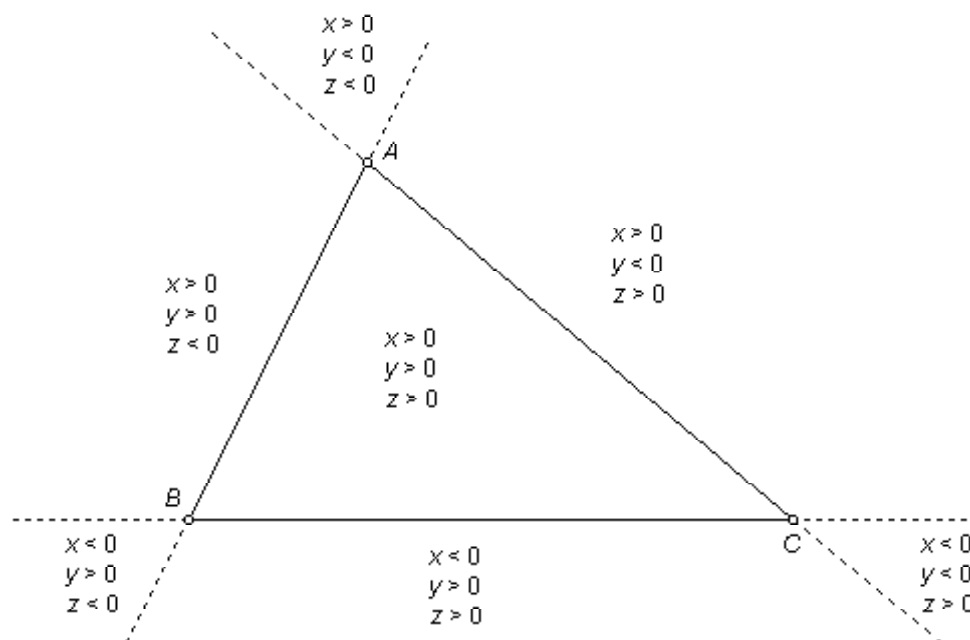
pelo que o determinante será nulo.

Seja P um ponto do plano ABC , tal que as suas coordenadas baricêntricas absolutas, podem ser expressas por

$$P = xA + yB + zC.$$

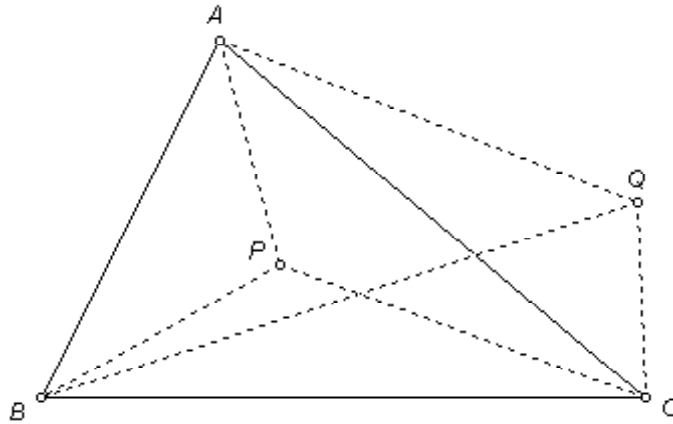
A análise do sinal das coordenadas baricêntricas (para isso as áreas devem ser orientadas) indica a região do plano em que se encontra P , em relação

ao triângulo ABC , de acordo com o seguinte esquema.



Com este resultado, torna-se simples implementar um algoritmo que determine se um ponto está contido ou não no interior de um triângulo, para isso basta obter as coordenadas baricêntricas do ponto relativamente ao triângulo. Se todas forem positivas, o ponto pertence ao interior do triângulo, se houver pelo menos uma que seja nula e as restantes positivas, o ponto pertence à fronteira do triângulo, se houver uma coordenada negativa, o ponto pertence ao exterior do triângulo.

A título de exemplo, analisemos o seguinte caso:



Sendo x_P , y_P e z_P as coordenadas baricêntricas de P , definidas pelas áreas dos triângulos

$$PBC, PCA \text{ e } PAB, \tag{4.19}$$

respectivamente, serão positivas visto que os vértices são referidos segundo o sentido anti-horário.

Vejamos o que acontece com as coordenadas x_Q , y_Q e z_Q , de Q , as quais representam as áreas dos triângulos que se obtêm de (4.19), substituindo P por Q . Deste modo verifica-se que as coordenadas x_Q e z_Q continuam a ser positivas, mas y_Q , é agora negativa porque os vértices QCA são referidos no sentido horário.

Centros das circunferências ex-inscritas

A relação existente entre o sinal das coordenadas de um ponto e a posição deste relativamente ao triângulo ABC permite determinar as coordenadas dos centros das circunferências ex-inscritas.

Proposição 4.2.9 *Sejam I_A , I_B e I_C os centros das circunferências ex-inscritas, tangentes aos lados que se opõem a A , B e C , respectivamente, então as suas coordenadas são as seguintes*

$$I_A = (-a : b : c);$$

$$I_B = (a : -b : c);$$

$$I_C = (a : b : -c).$$

Demonstração

Tendo em conta que

$$I = (a : b : c),$$

podemos dizer que

$$I_A = (-a : b : c),$$

porque a única característica que distingue estes pontos é o facto de se situarem em lados opostos da recta BC , o que implica apenas a troca do

sinal da primeira coordenada.

Analogamente, podemos determinar as coordenadas dos centros das restantes circunferências ex-inscritas o que nos conduz ao resultado pretendido.■

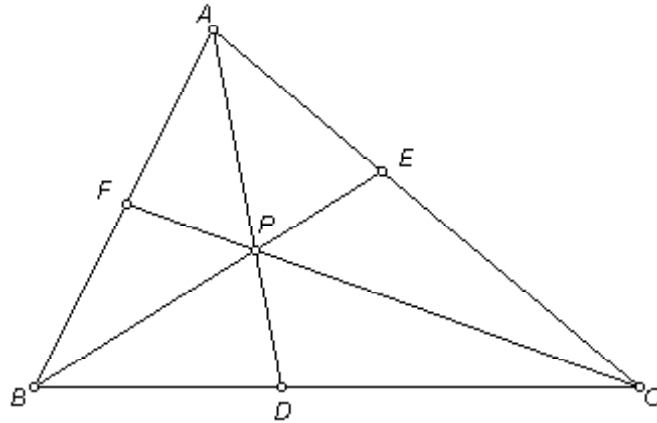
4.2.5 Cevianas e Traços

Devido à importância que o teorema de Ceva tem na geometria do triângulo, as rectas definidas por um ponto P e cada um dos vértices de um triângulo ABC são chamadas de cevianas de P . As intersecções D , E e F , de cada uma dessas rectas com o lado oposto ao vértice que a define, são chamadas de traços de P .

Proposição 4.2.10 *Se P tem coordenadas baricêntricas $(x : y : z)$, então as coordenadas baricêntricas dos traços serão*

$$D = (0 : y : z), \quad E = (x : 0 : z), \quad F = (x : y : 0).$$

Demonstração



A relação entre as áreas dos triângulos PAB e PCA é igual à razão entre z e y . Como a área de PAB pode ser definida pela diferença das áreas dos triângulos DAB com DPB e a área de PCA resulta da diferença entre a de DCA com DCP , temos

$$\frac{z}{y} = \frac{\Delta_{[PAB]}}{\Delta_{[PCA]}} = \frac{\Delta_{[DAB]} - \Delta_{[DPB]}}{\Delta_{[DCA]} - \Delta_{[DCP]}}.$$

Por outro lado, a razão entre as áreas dos triângulos DAB e DCA é igual à razão entre as áreas dos triângulos DPB e DCP , visto que os triângulos envolvidos em cada razão têm a mesma altura e os primeiros triângulos de cada razão têm a mesma base, o mesmo acontecendo com os segundos.

Assim, utilizando o facto de a razão entre a área de triângulos com a

mesma altura ser igual à razão das suas bases, obtemos

$$\frac{\Delta_{[DAB]}}{\Delta_{[DCA]}} = \frac{\Delta_{[DPB]}}{\Delta_{[DCP]}} = \frac{\Delta_{[DAB]} - \Delta_{[DPB]}}{\Delta_{[DCA]} - \Delta_{[DCP]}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

Das duas igualdades apresentadas resulta

$$\frac{z}{y} = \frac{\Delta_{[PAB]}}{\Delta_{[PCA]}} = \frac{|BD|}{|DC|},$$

pelo que, tendo em conta (4.2), temos

$$D = (0 : |DC| : |BD|) = (0 : y : z). \quad (4.20)$$

Recorrendo a um raciocínio análogo, poderemos demonstrar que as

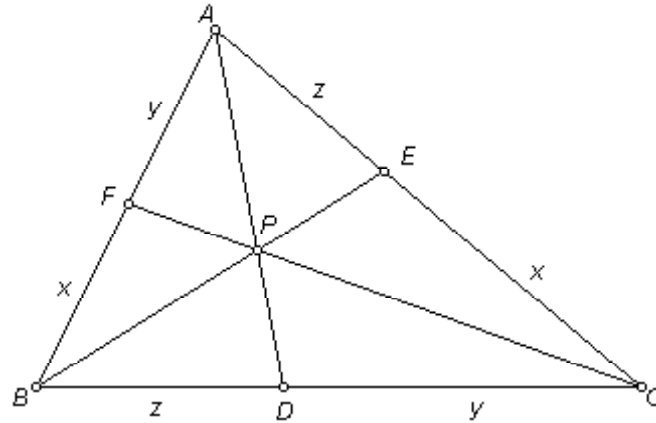
coordenadas apresentadas para os pontos E e F são correctas. ■

Proposição 4.2.11 *Três pontos D , E e F pertencentes a BC , CA e AB , respectivamente, são os traços de um ponto se e somente se, eles tiverem coordenadas da forma*

$$D = (0 : y : z), E = (x : 0 : z), F = (x : y : 0),$$

para algum terno (x, y, z) .

Demonstração



Da demonstração anterior resulta que se

$$D = (0 : y : z),$$

então a razão entre os comprimentos dos segmentos de recta DC e BD é igual à razão entre y e z . Recorrendo a um raciocínio semelhante temos

$$\frac{|DC|}{|BD|} = \frac{y}{z}, \quad \frac{|EA|}{|CE|} = \frac{z}{x}, \quad \frac{|FB|}{|AF|} = \frac{x}{y}. \quad (4.21)$$

Como o produto dos segundos membros das três anteriores igualdades vale um, podemos invocar o teorema de Ceva para afirmar que se os pontos D , E e F tiverem coordenadas da forma apresentada, equivale a dizer que eles são os traços de um ponto P com coordenadas $(x : y : z)$. ■

A relação entre as coordenadas de um ponto e a dos seus traços que acabámos de apresentar, permite-nos determinar as coordenadas de alguns

centros do triângulo. Para ilustrar tal facto apresentaremos as coordenadas baricênticas do ponto de Gergonne (G_e) e do ponto de Nagel (N_a).

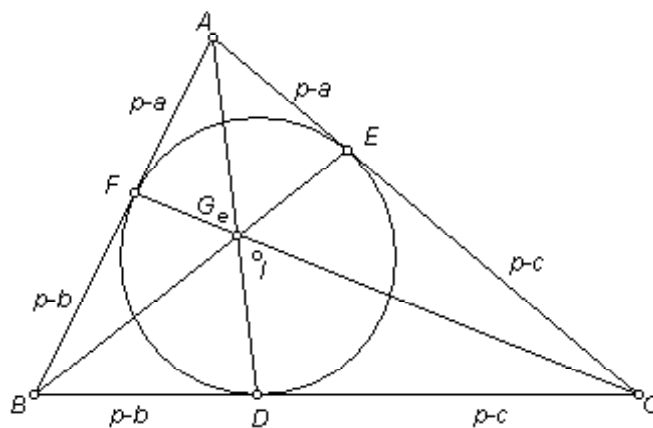
Ponto de Gergonne

Proposição 4.2.12 *As cevianas definidas pelos pontos de tangência da circunferência inscrita são concorrentes num ponto (Ponto de Gergonne - G_e) cujas coordenadas baricênticas são*

$$G_e = \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right). \quad (4.22)$$

Demonstração

Sendo D , E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados BC , CA e AB , respectivamente, e tendo em conta as igualdades definidas em (2.5), obtemos a situação ilustrada pela seguinte figura



De acordo com (4.20), podemos determinar as coordenadas de D e, de

forma análoga, as de E e de F , pelo que obtemos

$$D = (0 : p - c : p - b);$$

$$E = (p - c : 0 : p - a);$$

$$F = (p - b : p - a : 0).$$

Se dividirmos as coordenadas de D , E e F por $(p - b)(p - c)$,

$(p - a)(p - c)$ e $(p - a)(p - b)$, respectivamente, obtemos

$$D = \left(0 : \frac{1}{p - b} : \frac{1}{p - c}\right), \quad E = \left(\frac{1}{p - a} : 0 : \frac{1}{p - c}\right), \quad F = \left(\frac{1}{p - a} : \frac{1}{p - b} : 0\right).$$

Pela proposição 5.2.10, D , E e F são os traços de um certo ponto com coordenadas baricêntricas (4.22).■

Ponto de Nagel

Proposição 4.2.13 *As cevianas definidas pelos pontos de tangência das circunferências ex-inscritas são concorrentes num ponto cujas coordenadas baricêntricas são*

$$N_a = (p - a : p - b : p - c). \quad (4.23)$$

Demonstração

Para esta demonstração teremos de considerar seis pontos definidos sobre os lados do triângulo ABC , assim, sendo D' , E' e F' os pontos de tangência das circunferências ex-inscritas, tangentes aos lados BC , AC e AB , respectivamente, e, relativamente aos mesmos lados deste triângulo, os pontos de tangência da circunferência inscrita serão D , E e F . Podemos dizer, de acordo com (2.2), que as seguintes igualdades são válidas

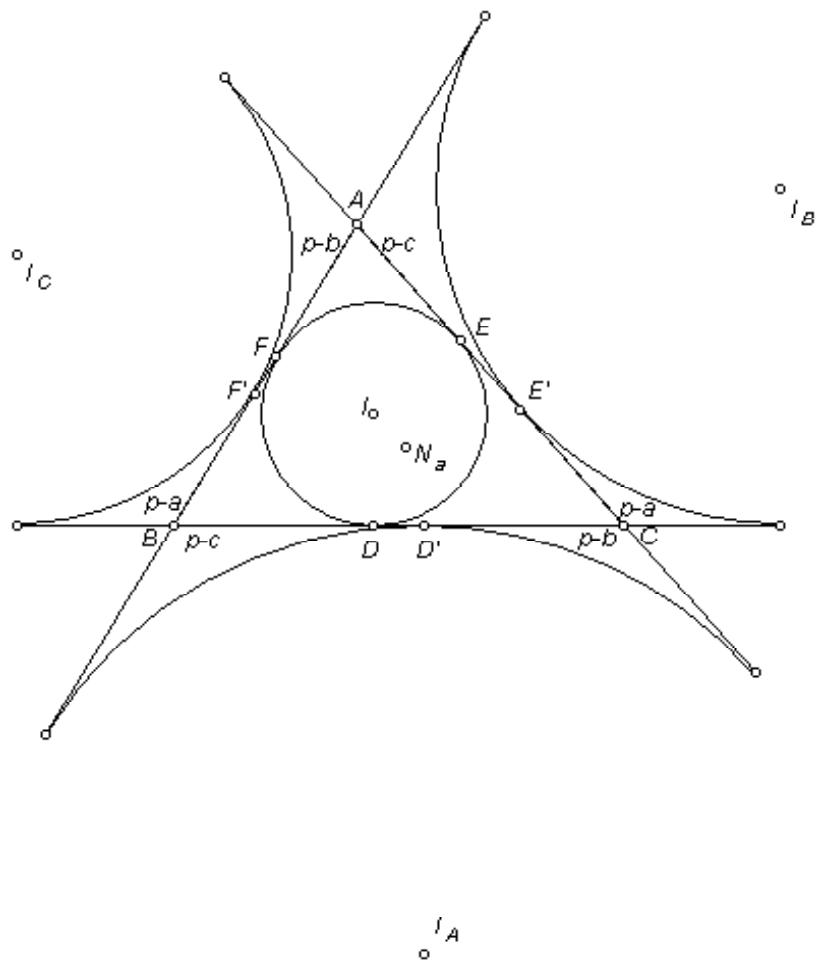
$$\left|BD'\right| = |CD|, \quad \left|CD'\right| = |BD|,$$

por um raciocínio análogo obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \left|BF'\right| &= |AF|, \quad \left|AF'\right| = |BF|; \\ \left|AE'\right| &= |CE|, \quad \left|CE'\right| = |AE|. \end{aligned}$$

Recorrendo às igualdades identificadas por (2.5) obtemos

$$\left|BF'\right| = \left|CE'\right| = p - a, \quad \left|AF'\right| = \left|CD'\right| = p - b, \quad \left|AE'\right| = \left|BD'\right| = p - c.$$



Seguindo um caminho semelhante ao percorrido aquando da análise das coordenadas do ponto de Gergonne, podemos dizer que as coordenadas baricêntricas dos traços do ponto de Nagel podem ser representadas da seguinte maneira

$$D' = (0 : p - b : p - c), \quad E' = (p - a : 0 : p - c), \quad F' = (p - a : p - b : 0),$$

destes traços, resulta que D' , E' e F' , são os traços dum certo ponto com coordenadas baricêntricas (4.23).■

Definição 4.2.14 *O ponto de Nagel resulta da intersecção das cevianas definidas pelos pontos de tangência das circunferências ex-inscritas, com os lados do triângulo ABC .*

Proposição 4.2.15 *O baricentro de um triângulo divide o segmento de recta definido pelo incentro e pelo ponto de Nagel na razão*

$$\frac{|N_a G|}{|GI|} = \frac{2}{1}.$$

Demonstração

Admitindo que o ponto de Nagel, o baricentro e o incentro, são colineares, conforme será provado na sub-secção 5.4.2 aquando do estudo da recta de Nagel, vamos recorrer a (4.8) para determinar as coordenadas baricêntricas absolutas de um ponto, que divida o segmento de recta $N_a I$, na razão enunciada, após o que mostraremos serem tais coordenadas equivalentes às que já definimos como sendo as coordenadas baricêntricas do baricentro.

Começemos por determinar as coordenadas baricêntricas absolutas do incentro e do ponto de Nagel, para tal temos de determinar as somas das coordenadas de cada um.

A soma das coordenadas do incentro, apresentadas em (4.4), é igual ao perímetro do triângulo, ou seja, é igual ao dobro do semiperímetro, donde as coordenadas baricêntricas absolutas do incentro serão

$$\frac{1}{2p} (a : b : c).$$

Relativamente ao ponto de Nagel, tendo em conta (4.23), as coordenadas baricêntricas absolutas do ponto de Nagel serão

$$\frac{1}{p} (p - a : p - b : p - c).$$

Assim, sendo X um ponto que divide o segmento de Recta $N_a I$, na razão $2 : 1$, terá as seguintes coordenadas baricêntricas absolutas

$$\frac{2 \frac{1}{2p} (a : b : c) + 1 \frac{1}{p} (p - a : p - b : p - c)}{2 + 1},$$

de forma equivalente, teremos

$$X = \frac{(p : p : p)}{3p}$$

O ponto X , assim definido, tem coordenadas baricêntricas absolutas iguais às do baricentro, pelo que aceitamos que este divide o segmento de recta em

análise na proporção enunciada. ■

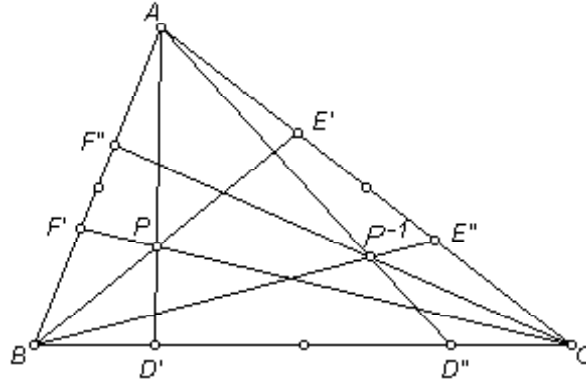
4.3 Conjugado isotómico e isogonal

Na secção preliminares, referimo-nos à noção de conjugados harmónicos, nessa altura estávamos a considerar coordenadas baricêntricas relativas a dois pontos. Na secção anterior começámos a estudar algumas propriedades das coordenadas baricêntricas relativas a três pontos, estas propriedades permitem introduzir outras noções de pontos conjugados, dentre estes, apresentaremos a noção de conjugado isotómico e de conjugado isogonal de um ponto.

4.3.1 Conjugado isotómico

Proposição 4.3.1 *Seja P um ponto do plano definido pelo triângulo ABC . As reflexões das rectas AP , BP e CP com respeito às medianas dos ângulos A , B e C , respectivamente, são concorrentes num ponto P^{-1} .*

Demonstração



Sejam D' , E' e F' os pés das cevianas definidas pelo ponto P e D'' , E'' e F'' , os pontos que resultam das reflexões de D' , E' e F' , nos pontos médios dos lados BC , CA e AB , respectivamente.

As cevianas AD' e AD'' são simétricas relativamente à mediana incidente com o vértice A , pelo que

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{|D''C|}{|BD''|},$$

analogamente, relativamente aos outros ângulos, obtemos

$$\frac{|CE'|}{|E'A|} = \frac{|E''A|}{|CE''|}, \quad \frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{|F''B|}{|AF''|}.$$

Como as cevianas definidas por D' , E' e F' são concorrentes em P , do teorema de Ceva, resulta

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|CE'|}{|E'A|} \frac{|AF'|}{|F'B|} = 1,$$

pele que

$$\frac{|D''C|}{|BD''|} \frac{|E''A|}{|CE''|} \frac{|F''B|}{|AF''|} = 1,$$

mas a igualdade anterior equivale a

$$\frac{|BD''|}{|D''C|} \frac{|CE''|}{|E''A|} \frac{|AF''|}{|F''B|} = 1,$$

donde, pelo teorema de Ceva, podemos afirmar que as cevianas definidas

por D'' , E'' e F'' , são concorrentes ■

Definição 4.3.2 *Dois pontos P e P^{-1} , dizem-se conjugados isotômicos, se os traços das cevianas por eles definidos forem simétricos relativamente aos pontos médios dos lados respectivos do triângulo de referência. Ou seja,*

$$\begin{aligned} |BD'| &= |D''C|, & |D'C| &= |BD''|; & (4.24) \\ |CE'| &= |E''A|, & |E'A| &= |CE''|; \\ |AF'| &= |F''B|, & |F'B| &= |AF''|. \end{aligned}$$

Observação 4.3.3 *Tendo em conta a forma como P^{-1} é obtido a partir de P , compreende-se que*

$$(P^{-1})^{-1} = P.$$

Proposição 4.3.4 *Dado um ponto P , com coordenadas baricêntricas não nulas, tal que*

$$P = (x : y : z),$$

o seu conjugado isotômico tem coordenadas baricêntricas

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right).$$

Demonstração

Admitamos que

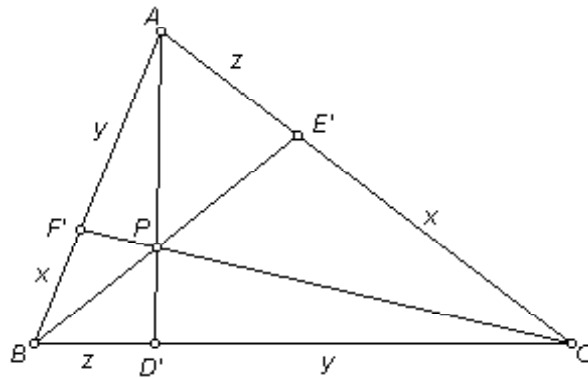
$$P^{-1} = (\alpha : \beta : \gamma),$$

vamos provar que

$$P^{-1} = (\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right).$$

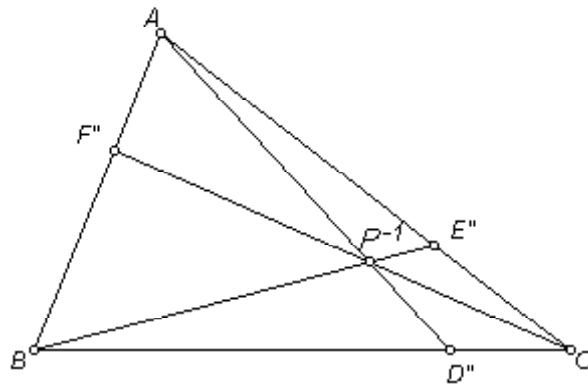
Tendo em conta as coordenadas baricêntricas do ponto P , sabemos que as cevianas definidas por tal ponto dividem os lados do triângulo ABC , nas seguintes razões

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{z}{y}, \quad \frac{|CE'|}{|E'A|} = \frac{x}{z}, \quad \frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{y}{x}.$$



Relativamente ao ponto P^{-1} e ao mesmo triângulo temos

$$\frac{|BD''|}{|D''C|} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{|CE''|}{|E''A|} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{|AF''|}{|F''B|} = \frac{\beta}{\alpha}.$$



Tendo em conta as igualdades anteriores e (4.24), obtemos

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{y}{z}.$$

Evidentemente

$$P^{-1} = (\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\beta} : 1 : \frac{\gamma}{\beta} \right),$$

logo, das igualdades anteriores resulta

$$P^{-1} = \left(\frac{y}{x} : 1 : \frac{y}{z} \right),$$

estas coordenadas podem ser simplificadas, recorrendo à multiplicação por

um factor constante, neste caso

$$\frac{1}{y},$$

o que nos conduz a

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right).$$

■

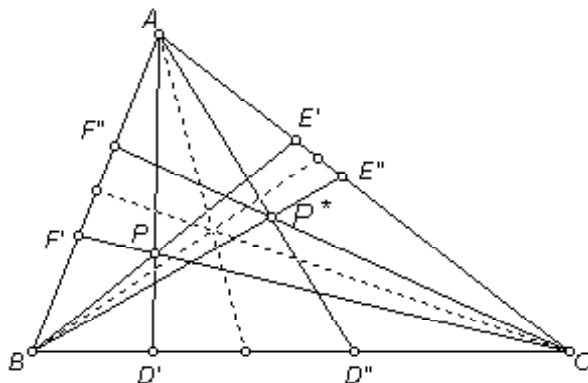
4.3.2 Conjugado isogonal

Proposição 4.3.5 *Seja P um ponto do plano definido pelo triângulo ABC .*

As reflexões das rectas AP , BP e CP com respeito às bissetrizes dos ângulos

A , B e C , respectivamente, são concorrentes num ponto P^ .*

Demonstração



Sejam os pontos D' , E' e F' os pontos que resultam das intersecções, das rectas AP , BP e CP com as rectas definidas pelos lados BC , CA e AB , respectivamente, e D'' , E'' e F'' os pontos que resultam das intersecções das reflexões das rectas AP , BP e CP nas bissetrizes dos ângulos A , B e C , respectivamente, com os lados do triângulo ABC opostos aos vértices em questão.

As rectas AD' e AD'' são simétricas relativamente à bissetriz do ângulo A , pelo que podemos aplicar-lhes o teorema de Steiner, resultando

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|BD''|}{|D''C|} = \frac{|AB|^2}{|CA|^2}.$$

Analogamente, em relação aos outros ângulos, obtemos

$$\frac{|CE'|}{|E'A|} \frac{|CE''|}{|E''A|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} \text{ e } \frac{|AF'|}{|F'B|} \frac{|AF''|}{|F''B|} = \frac{|CA|^2}{|BC|^2}.$$

Multiplicando membro a membro as três igualdades anteriores, temos

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|CE'|}{|E'A|} \frac{|AF'|}{|F'B|} \frac{|BD''|}{|D''C|} \frac{|CE''|}{|E''A|} \frac{|AF''|}{|F''B|} = \frac{|AB|^2 |BC|^2 |CA|^2}{|CA|^2 |AB|^2 |BC|^2},$$

o segundo membro desta igualdade é igual a um, por outro lado, as rectas

AD' , BE' e CF' são concorrentes em P , pelo que, devido ao teorema de

Ceva

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|CE'|}{|E'A|} \frac{|AF'|}{|F'B|} = 1.$$

Assim, temos

$$\frac{|BD''|}{|D''C|} \frac{|CE''|}{|E''A|} \frac{|AF''|}{|F''B|} = 1.$$

Pelo que devido ao teorema de Ceva, podemos concluir que as rectas AD'' ,

BE'' e CF'' são concorrentes, o que confirma a proposição.■

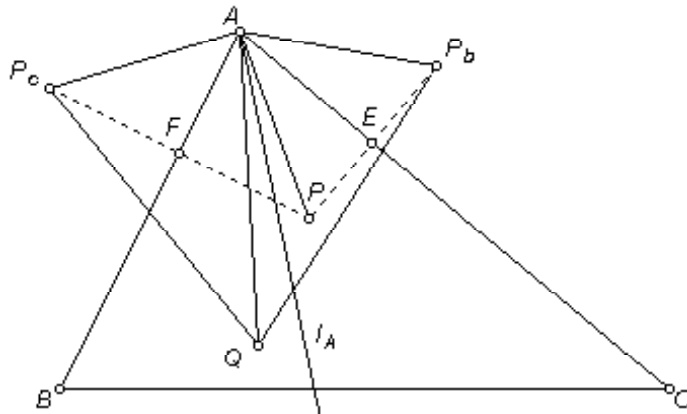
Definição 4.3.6 *Duas cevianas, incidentes num mesmo vértice de um triângulo, dizem-se isogonais se uma resultar da outra por reflexão na bissectriz desse mesmo ângulo.*

Definição 4.3.7 *O ponto P^* , resultante da intersecção das três rectas isogonais às três cevianas que contêm o ponto P , é chamado de conjugado isogonal de P , relativamente ao triângulo ABC .*

A noção de conjugado isogonal de um ponto P , relativamente a um triângulo ABC , pode ser introduzida de outra forma.

Proposição 4.3.8 *Sejam P_b e P_c as reflexões do ponto P , relativamente às rectas AC e AB , respectivamente. Seja Q um ponto pertencente à recta isogonal a AP , relativamente ao ângulo A . Então, Q é equidistante de P_b e de P_c .*

Demonstração



Seja E o ponto resultante da intersecção das rectas AC e PP_b , tendo em conta a maneira como o ponto P_b foi construído, concluímos que E é o ponto médio do segmento de recta PP_b , donde os segmentos de recta PE e EP_b têm o mesmo comprimento. Temos também a igualdade entre os ângulos P_bEA e AEP . Das igualdades anteriores e do facto de o lado AE ,

ser comum aos triângulos APE e AEP_b resulta que estes triângulos são
congruentes, logo

$$|AP| = |AP_b|.$$

De forma análoga, poderíamos provar a congruência entre os triângulos AP_cF e AFP em que F é o ponto médio do segmento de recta PP_c , donde,

$$|AP| = |AP_c|.$$

Das igualdades, destacadas, resulta

$$|AP| = |AP_b| = |AP_c|.$$

Tendo em conta a maneira como o ponto P_b , foi construído, podemos afirmar que os ângulos PAE e EAP_b têm a mesma amplitude. Da simetria, existente entre as rectas AP e AQ , relativamente à bissectriz interna do ângulo A , resulta a igualdade entre as amplitudes dos ângulos PAE e FAQ , bem como dos ângulos formados pelas rectas AQ e l_A e pelas rectas l_A e AP . Sendo β a amplitude do ângulo PAE e α , a amplitude do ângulo formado pelas rectas l_A e AP , temos

$$\angle FAQ = \angle PAE = \angle EAP_b = \beta,$$

$$\angle QAP = 2\alpha.$$

Da congruência entre os triângulos AP_cF e AFP resulta

$$\angle P_cAF = \angle FAP = \beta + 2\alpha,$$

temos ainda

$$\angle P_cAQ = \angle QAP_b = 2(\alpha + \beta).$$

Das igualdades já demonstradas e do facto de o lado AQ ser comum aos triângulos AP_cQ e AQP_b resulta a congruência destes triângulos, donde

$$|QP_b| = |QP_c|.$$

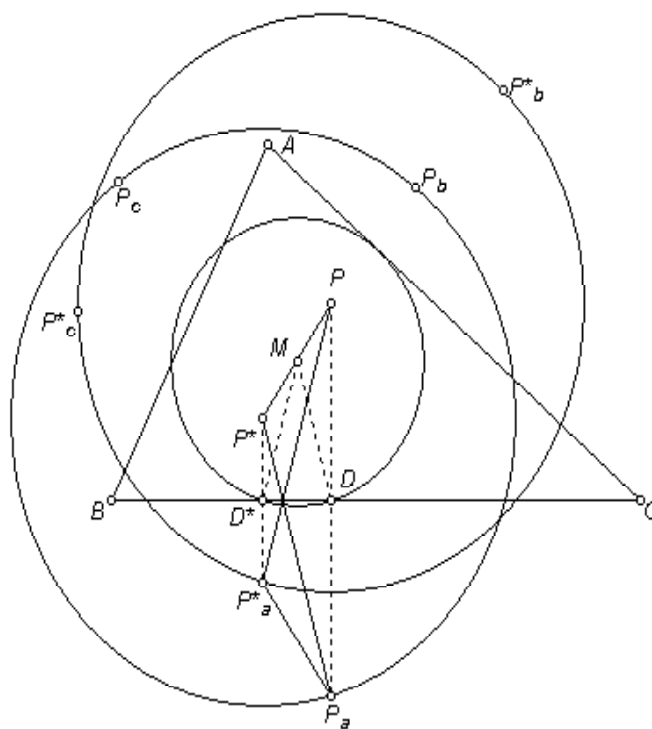
■

Para completar a introdução da noção de conjugado isogonal de um ponto P , temos de analisar o que se passa relativamente à reflexão de P na recta BC . Assim, sendo P_a , a reflexão do ponto P , relativamente à recta, BC e aplicando a proposição anterior, podemos dizer que qualquer ponto, pertencente à recta isogonal a BP é equidistante de P_a e P_c . Pelo que se compreende que, sendo P^* o ponto resultante da intersecção das duas rectas isogonais a AP e a BP é equidistante de P_a , P_b e P_c . Como P^* é equidistante de P_a e P_b , pertence à recta isogonal a CP . Logo, o ponto P^* é a intersecção das três rectas isogonais a PA , PB e PC .

Observação 4.3.9 Tendo em conta a forma como P^* , o conjugado isogonal, é construído, compreende-se que

$$(P^*)^* = P.$$

Proposição 4.3.10 A circunferência contendo as reflexões P_a , P_b e P_c de P é congruente com a que é definida pelas reflexões de P^* , sendo que a primeira tem centro em P^* e a segunda em P .



Demonstração

Já vimos que P^* é equidistante de P_a , P_b e P_c , pelo que é o centro da circunferência definida por aqueles três pontos.

Tendo em conta que P e P^* são o conjugado isogonal um do outro, aplicando a proposição 4.3.8 a P^* concluímos que P é equidistante dos pontos P_a^* , P_b^* e P_c^* obtidos por reflexão de P^* nas rectas AB , BC e CA pelo que P é o centro da circunferência que contém tais pontos.

Falta-nos, agora, provar que tais circunferências têm o mesmo raio. Como os segmentos de recta $P_a^*P_a$ e P^*P são a reflexão um do outro na recta BC , compreende-se que tenham o mesmo comprimento e que o trapézio $P^*P_a^*P_aP$ seja isósceles, logo as suas diagonais PP_a^* e P^*P_a têm o mesmo comprimento. Como tais segmentos de recta representam os raios das circunferências em estudo, fica provado que estas são congruentes. ■

Proposição 4.3.11 *Seja M o ponto médio do segmento de recta P^*P . Então, M é o centro da circunferência formada pelos pontos pedais de P e P^* .*

Demonstração

Os triângulos MP^*D^* e $PP^*P_a^*$ são semelhantes porque têm um ângulo em comum e os lados que os definem são proporcionais devido ao facto de M e D^* serem os pontos médios dos respectivos segmentos de recta.

Seja M o ponto médio do segmento de recta PP^* e sendo as rectas P^*D^* e PD perpendiculares ao lado BC , compreende-se que o ponto D seja a

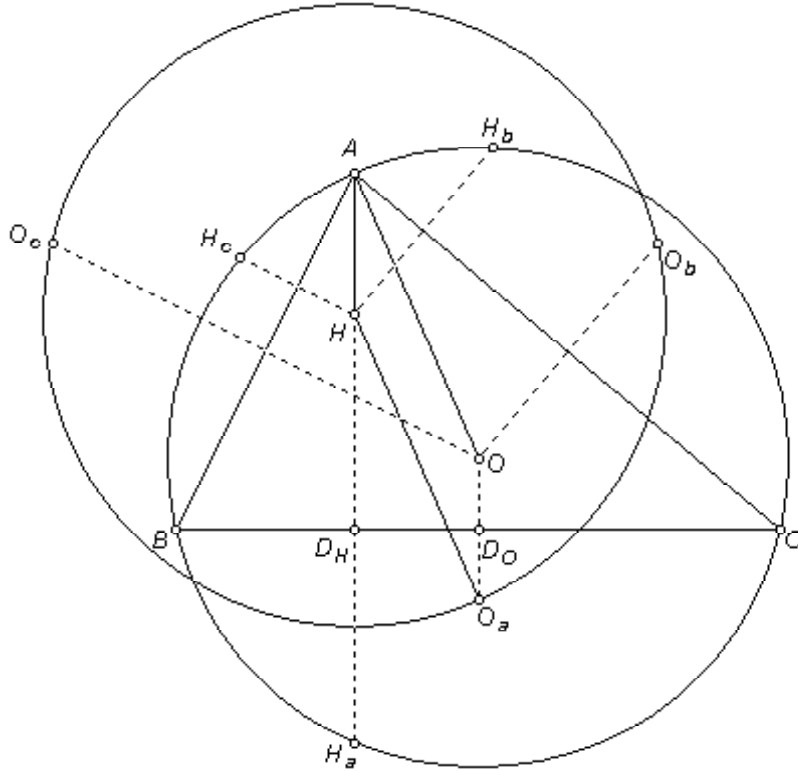
reflexão de D^* na recta vertical a BC a passar em M . Deste modo,
compreende-se que M seja equidistante de D^* e D .

Como podemos construir um trapézio isósceles com diagonais iguais às de $P^*P_a^*P_aP$, relativamente a cada lado do triângulo ABC , haverá sempre um par de triângulos semelhantes que nos permitirão concluir que M é equidistante dos pés das perpendiculares de P e P^* , relativamente a cada um dos lados do triângulo ABC .■

Definição 4.3.12 *A circunferência referida na proposição anterior é chamada de circunferência pedal de P e P^* .*

Proposição 4.3.13 *O circuncentro e o ortocentro são conjugados isogonais um do outro.*

Demonstração



Da segunda conclusão da demonstração da proposição (2.2.5) compreende-se que o ortocentro do triângulo medial corresponde ao circuncentro do triângulo ABC , como o triângulo medial é obtido do triângulo ABC , através da homotetia

$$h\left(G, -\frac{1}{2}\right),$$

compreende-se que o comprimento do segmento de recta AH seja o dobro do de OD_O , sendo D_O o ponto médio do segmento de recta OO_a , pelo que

se infere

$$|AH| = |OO_a|.$$

Por outro lado, da construção do ponto O_a resulta a perpendicularidade do segmento de recta OO_a relativamente à recta BC , pelo que OO_a é paralelo a AH , o que, juntamente com a igualdade em destaque, nos leva a concluir que o quadrilátero AHO_aO é um paralelogramo, donde resulta

$$|AO| = |HO_a|.$$

Assim, podemos afirmar que a distância entre o ortocentro e a reflexão O_a , do circuncentro na recta BC é igual ao raio da circunferência circunscrita.

Como é possível construir paralelogramos de forma análoga relativamente aos outros vértices, concluímos que o ortocentro é equidistante das três reflexões O_a , O_b e O_c do circuncentro em todos os lados do triângulo ABC ,

ou seja, o ortocentro é o centro da circunferência defenida por estas reflexões e o seu raio é igual ao da circunferência circunscrita, pelo que estas são congruentes.

Como, dados três pontos não colineares, existe no máximo um ponto equidistante de tais pontos, tendo nós mostrado que o ortocentro é equidistante das três reflexões O_a , O_b e O_c , invocando a proposição 4.3.10

concluimos que o ortocentro e o circuncentro são conjugados isogonais um do outro. ■

Proposição 4.3.14 *A circunferência pedal definida pelo ortocentro e pelo circuncentro corresponde à circunferência dos nove pontos.*

Demonstração

Quando estudámos a circunferência dos nove pontos, verificámos que os vértices do triângulo órtico pertencem a esta circunferência.

Sendo o ortocentro e o circuncentro conjugados isogonais um do outro, de acordo com a proposição 4.3.11, compreende-se que os pontos pedais do circuncentro pertencem à circunferência definida pelos do ortocentro, ou seja, pertencem à circunferência dos nove pontos. Ainda de acordo com a proposição invocada, podemos dizer que o ponto médio do segmento de recta HO corresponde ao centro da circunferência dos nove pontos. ■

Observação 4.3.15 *As conclusões anteriores são mais uma maneira de demonstrar a colinearidade do ortocentro, do circuncentro e do centro da circunferência dos nove pontos, os quais definem a recta de Euler.*

Proposição 4.3.16 *Dado um ponto P com coordenadas baricêntricas não nulas, tal que*

$$P = (x : y : z),$$

podemos definir as coordenadas baricêntricas do seu conjugado isogonal, relativo ao triângulo ABC , do seguinte modo

$$P = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right), \quad (4.25)$$

em que a , b e c são os comprimentos dos lados opostos aos vértices A , B e C , do referido triângulo.

Demonstração

Admitamos que

$$P^* = (\alpha : \beta : \gamma),$$

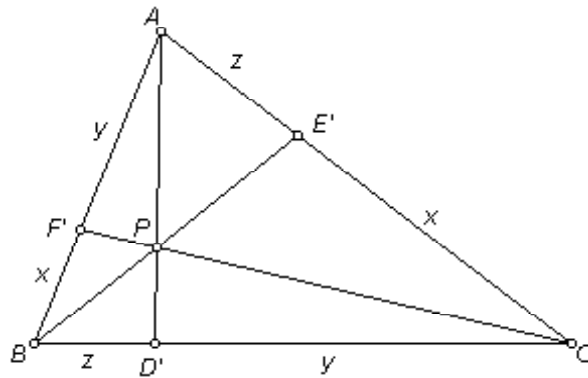
vamos tentar provar que

$$P^* = (\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right).$$

Tendo em conta as coordenadas baricêntricas do ponto P sabemos que as cevianas a passar por tal ponto dividem os lados do triângulo ABC nas

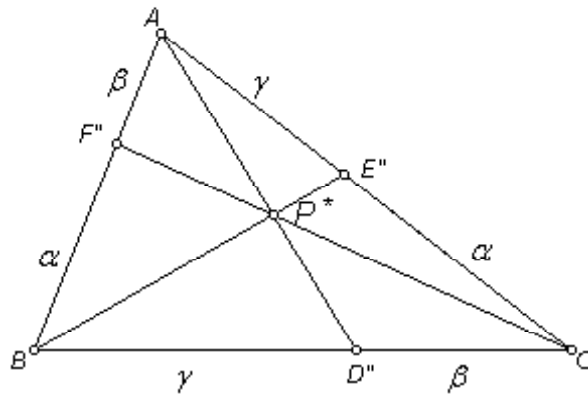
seguintes razões

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{z}{y}, \quad \frac{|CE'|}{|E'A|} = \frac{x}{z}, \quad \frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{y}{x}.$$



Relativamente ao ponto P^* e ao mesmo triângulo temos

$$\frac{|BD''|}{|D''C|} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{|CE''|}{|E''A|} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{|AF''|}{|F''B|} = \frac{\beta}{\alpha}.$$



Aplicando o teorema de Steiner ao lado BC , do triângulo ABC , obtemos

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} \frac{|BD''|}{|D''C|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

o que equivale, tendo em conta as igualdades anteriormente referidas, a

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{yc^2}{zb^2}.$$

Desenvolvendo um raciocínio análogo ao anterior, relativamente ao lado

BA , podemos obter

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ya^2}{xb^2}.$$

Como sabemos

$$P^* = (\alpha : \beta : \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\beta} : 1 : \frac{\gamma}{\beta} \right).$$

Das três últimas igualdades destacadas, resulta

$$P^* = \left(\frac{ya^2}{xb^2} : 1 : \frac{yc^2}{zb^2} \right),$$

estas coordenadas podem ser simplificadas, mais uma vez, recorrendo à

multiplicação por um factor constante, neste caso

$$\frac{b^2}{y},$$

o que nos conduz a

$$P^* = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right).$$

■

Corolário 4.3.17 *O ortocentro e o circuncentro são o conjugado isogonal um do outro.*

Demonstração

Tendo em conta (4.5) e (4.25), temos

$$O^* = \left(\frac{a^2}{a^2(b^2 + c^2 - a^2)} : \frac{b^2}{b^2(a^2 + c^2 - b^2)} : \frac{c^2}{c^2(a^2 + b^2 - c^2)} \right) = H.$$

Tendo em conta (4.13) e (4.25), temos

$$H^* = \left(\frac{a^2}{\frac{1}{b^2+c^2-a^2}} : \frac{b^2}{\frac{1}{a^2+c^2-b^2}} : \frac{c^2}{\frac{1}{a^2+b^2-c^2}} \right) = O.$$

■

Corolário 4.3.18 *O incentro é o conjugado isogonal de si próprio.*

Demonstração

Tendo em conta (4.4) e (4.25), temos

$$I^* = \left(\frac{a^2}{a} : \frac{b^2}{b} : \frac{c^2}{c} \right) = I.$$

■

Definição 4.3.19 *As semideanas de um triângulo são as rectas que resultam da reflexão das medianas nas bissectrizes correspondentes.*

Definição 4.3.20 *O ponto semideano (K) ³, é o ponto resultante da intersecção das semideanas de um triângulo.*

³Segundo Honsberg, citado por Yiu [24]. O ponto semideano é considerado "a jóia da coroa da geometria moderna" devido ao elevado número de propriedades interessantes que com ele estão relacionados. Tais propriedades saem do âmbito deste trabalho.

Proposição 4.3.21 *As coordenadas baricêntricas do ponto semideano podem ser expressas por*

$$K = (a^2 : b^2 : c^2).$$

Demonstração

Da definição de ponto semideano, compreende-se que este seja o conjugado isogonal do baricentro, pelo que, tendo em conta (4.3) e (4.25), temos

$$K = G^* = \left(\frac{a^2}{1} : \frac{b^2}{1} : \frac{c^2}{1} \right),$$

o que equivale ao resultado enunciado. ■

4.4 Rectas

Nesta secção apresentaremos a equação, em coordenadas baricêntricas, de uma recta definida por dois pontos. Em particular serão obtidas em coordenadas baricêntricas as equações que definem a recta de Euler e a de Nagel. Relativamente a estas últimas confirmaremos, ainda, que alguns pontos, notáveis, pertencem a tais rectas.

4.4.1 Equação de uma recta

A equação de uma recta definida por dois pontos P_1 e P_2 , tais que

$$P_1 = (x_1 : y_1 : z_1) \text{ e } P_2 = (x_2 : y_2 : z_2),$$

é definida, pela igualdade

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

logo

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1) x + (z_1 x_2 - z_2 x_1) y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z = 0. \quad (4.26)$$

é a equação, em coordenadas baricêntricas, da recta definida por P_1 e P_2 .

4.4.2 Exemplos

Recta de Euler

Definição 4.4.1 *A recta de Euler é a recta definida pelo, baricentro, pelo ortocentro e pelo circuncentro.*

Proposição 4.4.2 *A recta de Euler pode ser definida pela equação*

$$(\tan C - \tan B) x + (\tan A - \tan C) y + (\tan B - \tan A) z = 0.$$

Demonstração

Ao longo deste trabalho apresentámos as coordenadas baricêntricas de tais pontos, pelo que estamos em condições de determinar a equação da referida recta. Para tal, e a fim de facilitar os cálculos, vamos socorreremo-nos das coordenadas do baricentro e do ortocentro. Assim, a recta de Euler poderá ser definida pela equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \tan A & \tan B & \tan C \end{vmatrix} = 0,$$

ou, de forma equivalente

$$(\tan C - \tan B)x + (\tan A - \tan C)y + (\tan B - \tan A)z = 0.$$

■

Do mesmo modo é possível obter a equação da recta de Euler em função do comprimento dos lados do triângulo ABC .

A recta de Euler, em coordenadas baricêntricas, admite a seguinte equação

$$E_x x + E_y y + E_z z = 0,$$

sendo

$$E_x = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} - \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2};$$

$$E_y = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2};$$

$$E_z = \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} - \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2},$$

ou equivalentemente

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 - b^2)x + (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 - c^2)y + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 - a^2)z = 0.$$

Torna-se então evidente o facto de o o circuncentro pertencer à recta de Euler.

Recta de Nagel

Definição 4.4.3 *A recta de Nagel é definida pelo baricentro, o incentro e pelo ponto de Nagel.*

Proposição 4.4.4 *A recta de Nagel é definida pela equação*

$$(c - b)x + (a - c)y + (b - a)z = 0.$$

Demonstração

Uma vez mais, vamos recorrer a um determinante, para definir a equação da recta em estudo, neste caso, utilizaremos as coordenadas do baricentro e

do incentro. Teremos então

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Assim, a recta de Nagel pode ser expressa através da seguinte equação polinomial

$$(c - b)x + (a - c)y + (b - a)z = 0.$$

■

Para confirmar a incidência desta recta com o ponto de Nagel, vamos agora recorrer à equação polinomial, obtendo

$$(c - b)(p - a) + (a - c)(p - b) + (b - a)(p - c) = 0.$$

Simplificando esta equação chegamos a uma condição universal, pelo que se confirma a incidência da recta de Nagel com o ponto de igual nome.

4.5 Produto baricêntrico de dois pontos

Começaremos esta secção apresentando a construção geométrica da multiplicação de dois pontos de um segmento, o qual conduzirá à noção de

multiplicação de dois quaisquer pontos do plano definido pelo triângulo de referência ABC . Veremos, ainda, que o conjugado isotômico de um ponto corresponde ao inverso do mesmo ponto relativamente ao produto baricêntrico de dois pontos. Terminaremos, esta secção, apresentando a noção e a construção geométrica da raiz quadrada de um ponto.

4.5.1 Construção geométrica e coordenadas

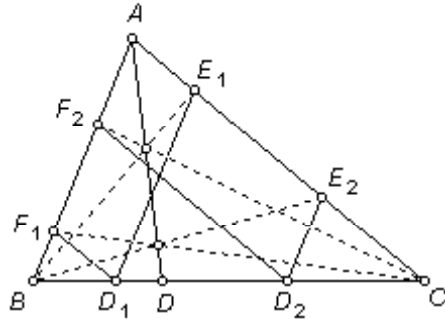
Multiplicação de pontos pertencentes a um lado do triângulo.

Proposição 4.5.1 *Sejam D_1 e D_2 dois pontos do lado BC , diferentes dos vértices, com coordenadas baricênticas*

$$D_1 = (0 : y_1 : z_1), D_2 = (0 : y_2 : z_2),$$

se se construírem os paralelogramos $AF_1D_1E_1$ e $AF_2D_2E_2$, com F_1 e F_2 pertencendo ao lado AB e E_1 e E_2 pertencendo ao lado AC . A linha definida pela intersecção de BE_1 com CF_2 e BE_2 com CF_1 passa pelo vértice A e intersecta o lado BC no ponto D com coordenadas baricênticas

$$D = (0 : y_1y_2 : z_1z_2).$$



Demonstração

Do paralelismo entre as rectas AB e D_1E_1 resulta a semelhança dos triângulos ABC e CE_1D_1 , pelo que

$$\frac{|CE_1|}{|E_1A|} = \frac{|CD_1|}{|D_1B|} = \frac{y_1}{z_1}.$$

De forma análoga, dos triângulos ABC e BD_2F_2 , resulta

$$\frac{|AF_2|}{|F_2B|} = \frac{|CD_2|}{|D_2B|} = \frac{y_2}{z_2}.$$

Pelo teorema de Ceva, se as cevianas AD , BE_1 e CF_2 são concorrentes,

então

$$\frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE_1|}{|E_1A|} \frac{|AF_2|}{|F_2B|} = 1.$$

Das igualdades em destaque resulta

$$\frac{|BD|}{|DC|} \frac{y_1}{z_1} \frac{y_2}{z_2} = 1,$$

o que equivale a

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{z_1 z_2}{y_1 y_2},$$

donde D é definido em coordenadas baricêntricas por

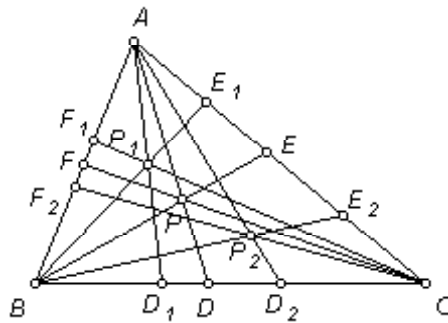
$$D = (0 : y_1 y_2 : z_1 z_2).$$

■

Definição 4.5.2 O ponto D , referido na proposição anterior, é o produto baricêntrico dos pontos D_1 e D_2 sendo representado por

$$D = D_1 D_2 = (0 : y_1 y_2 : z_1 z_2). \quad (4.27)$$

Multiplicação de dois pontos.



Proposição 4.5.3 Sejam P_1 e P_2 dois pontos com coordenadas baricêntricas não nulas definidas por

$$P_1 = (x_1 : y_1 : z_1), \quad P_2 = (x_2 : y_2 : z_2),$$

o produto de tais pontos, com respeito ao triângulo ABC , é o ponto P , tal que

$$P = P_1P_2 = (x_1x_2 : y_1y_2 : z_1z_2).$$

Demonstração

Multiplicando os traços definidos por P_1 e P_2 sobre cada um dos lados do triângulo ABC , com recurso a (4.27), obtemos três pontos D , E e F com coordenadas baricêntricas

$$D = (0 : y_1y_2 : z_1z_2);$$

$$E = (x_1x_2 : 0 : z_1z_2);$$

$$F = (x_1x_2 : y_1y_2 : 0).$$

Como

$$\frac{|BD|}{|DC|} \frac{|CE|}{|EA|} \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{z_1z_2}{y_1y_2} \frac{x_1x_2}{z_1z_2} \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = 1,$$

pelo teorema de Ceva, concluímos que as cevianas AD , BE e CF concorem,

num ponto P , com coordenadas baricêntricas

$$P = (x_1x_2 : y_1y_2 : z_1z_2).$$

■

A operação apresentada anteriormente define um grupo abeliano do conjunto de pontos com nenhuma coordenada nula. O baricentro é o elemento neutro desta estrutura. O inverso de um ponto

$$P = (x : y : z)$$

é o seu conjugado isotómico.

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right).$$

Assim se compreende o porque de se recorrer ao expoente -1 , para representar o conjugado isotómico de um dado ponto.

Definição 4.5.4 *O quadrado de um ponto P resulta do produto de um ponto por si próprio e é representado por P^2 , ou seja,*

$$P^2 = PP.$$

Proposição 4.5.5 *O ponto semideano corresponde ao quadrado do incentro.*

Demonstração

Tendo em conta (4.4), resulta que

$$I^2 = (a : b : c)(a : b : c) = (a^2 : b^2 : c^2) = K.$$

■

Proposição 4.5.6 *O ponto semideano é o produto de um ponto P , pelo seu conjugado isogonal.*

Demonstração

Tendo em conta (4.25), temos

$$PP^* = (x : y : z) \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z} \right) = (a^2 : b^2 : c^2) = K.$$

■

A operação produto, anteriormente referida, representa uma das vantagens da utilização das coordenadas homogêneas, visto que permite a factorização das coordenadas de um ponto, em função de outras mais simples.

4.5.2 Raiz quadrada de um ponto

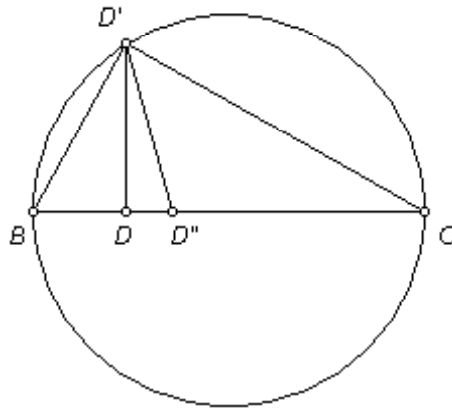
Já vimos uma construção geométrica do produto baricêntrico de dois pontos o que possibilita a obtenção do quadrado de um ponto. Vejamos agora uma construção que possibilita a obtenção de um ponto, correspondente à raiz quadrada de um dado ponto. Tal construção baseia-se numa proposição que passamos a apresentar.

Proposição 4.5.7 *Seja D um ponto do segmento de recta BC e D' a intersecção da recta perpendicular ao referido lado a passar por D , com a circun-*

ferência de diâmetro BC em D' . Então

$$\left(\frac{BD''}{D''C}\right)^2 = \frac{|BD|}{|DC|}, \quad (4.28)$$

em que D'' é a intersecção da bissectiz interna do ângulo $BD'C$ com o lado BC .



Demonstração

Como $D'D''$ bissecta o ângulo recto $BD'C$ temos, recorrendo ao teorema da bissectriz,

$$\frac{|BD'|}{|D'C|} = \frac{|D''B|}{|D''C|},$$

donde

$$\left(\frac{BD'}{D'C}\right)^2 = \frac{|D''B|^2}{|D''C|^2}.$$

Tendo em conta o teorema do cateto, podemos concluir que

$$\frac{|D'B|^2}{|D'C|^2} = \frac{|BC||BD|}{|BC||DC|},$$

pelo que

$$\frac{|BC||BD|}{|BC||DC|} = \frac{|D''B|^2}{|D''C|^2},$$

o que equivale ao resultado enunciado. ■

Definição 4.5.8 *Seja P um ponto interior do triângulo ABC , com traços D , E e F . A raiz quadrada de P é o ponto interior Q , tal que*

$$Q^2 = Q \cdot Q = P,$$

ou seja

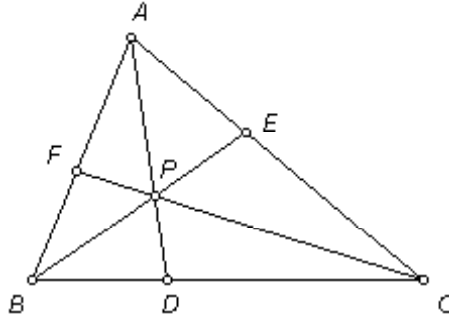
$$\sqrt{P} = Q.$$

Construção de \sqrt{P}

Seja

$$P = (x : y : z)$$

e D , E e F os traços de P , nos lados BC , CA e AB , respectivamente.



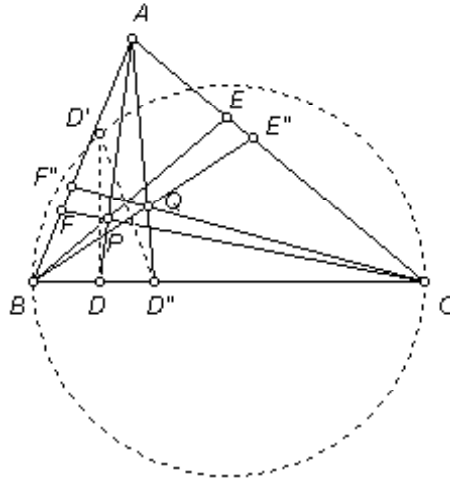
A construção do ponto Q , tal que

$$Q = \sqrt{P},$$

segue os seguintes passos:

1. Construir a circunferência de diâmetro BC ;
2. Construir a perpendicular a BC , a passar por D , intersectando tal circunferência no ponto D' ;
3. Construir a bissetriz interna do ângulo $BD'C$, a qual intersecta o lado BC , em D'' ;
4. Analogamente obter os pontos E'' e F'' nos lados CA e AB , respectivamente;
5. Construir as cevianas definidas por D'' , E'' e F'' .

6. Definir Q como a intersecção das três cevianas construídas anteriormente.



Proposição 4.5.9 *Os pontos P e Q referidos na construção anterior satisfazem a seguinte igualdade*

$$Q = \sqrt{P}.$$

Demonstração

Como sabemos os pontos D e D'' podem ser representados, em termos de coordenadas baricêntricas, como se segue

$$D = (0 : |DC| : |DB|), \quad D'' = (0 : |D''C| : |D''B|).$$

Por outro lado, de (4.28) e pelo facto de D e D'' pertencerem ao lado BC , concluímos que

$$|BD''|^2 = |BD| \quad \text{e} \quad |D''C|^2 = |DC|.$$

Tendo em conta as coordenadas baricêntricas de D e D'' bem como as relações entre elas, temos

$$\left(D''\right)^2 = D.$$

Passando-se o mesmo com os traços relativos aos outros lados do triângulo ABC , pelo que se pode concluir que

$$Q^2 = P,$$

o que equivale ao resultado enunciado.■

Bibliografia

- [1] Apostol, Tom, "Os Primórdios da História da Matemática", in *Boletim da S.P.M. n° 48*, Lisboa Maio de 2003 pp. 1-26.

- [2] Araujo, Paulo, *Curso de Geometria*, trajectos ciência, Gradiva, Lisboa 1998.

- [3] Bold, Benjamim, *Famous Problems of Geometry and how to Solve Them*, Dover publications, Inc., New York 1982.

- [4] Castillo, Ricardo, Plücker y Poncelet *Dos modos de entender la geometría*, La matemática en sus personajes, nivola libros ediciones, 2005.

- [5] Costa, Belmiro, et alli, *Espaço 10*, Edições ASA, Porto 2004

- [6] Davis, Clodoveu, *Geometria de triângulos e polígonos*, 2001, disponível em <http://www.pbh.gov.br/prodabel/cde/publicacoes/2001/davis2001e.pdf>
- [7] Delfos, projecto, "Textos de apoio de Geometria", in *Escola de matemática para jovens*, disponível em <http://www.mat.uc.pt/~delfos/geome.pdf>
- [8] Euclides, *Elementos de Euclides*, disponível em <http://aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/java/elements/elements.html>
- [9] Godeaux, Lucien, *As Geometrias*, Coleção Saber, Publicações Europa-América, Lisboa 1960.
- [10] Griffiths, Phillip, "Las Matemáticas ante el cambio de milenio", in *La Gaceta de la real sociedad matemática Espanola*, volume 3, nº1, Enero-Abril 2000, pp. 23-41, disponível em <http://www.mat.uc.pt/~delfos/Griffiths.pdf>
- [11] Grinberg, Darij, "The Steiner theorem about isogonal cevians", in *WOOT - Worldwide Online Olympiad Training (Art of Problem Solving)*, disponível em <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/topic-58872.html>

- [12] Hilbert, David, "Mathematical Problems", Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, disponível em <http://www.mat.uc.pt/~delfos/hilbertprob.pdf>
- [13] Kimberlig, Clark, *Triangle Centers and Central Triangles*, Congressus Numeratium, volume 129, 1998.
- [14] Manuel, Paula, *Tópicos de Geometria do Triângulo*, Dissertação para a obtenção do grau de mestre, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, 2007
- [15] Neves, M. Augusta, Vieira, M. Teresa, *Matemática 8º*, Porto editora, Porto 1992.
- [16] Oliveira, Franco, "Geometrias: Sinais de um interesse que renasce", *Boletim da S.P.M. nº 40*, Lisboa Abril de 1999 129-132.
- [17] Pogorelov, A., *Geometry*, Mir Publishers, Moscovo 1987.
- [18] Posamentier, Alfred e Salkind, Charles, *Challenging Problems in Geometry*, Dover publications, Inc., New York 1996.
- [19] Radice, Lucio, *A Matemática de Pitágoras a Newton*, Biblioteca Básica de Ciência, Edições 70, Lisboa 1985.

- [20] Rodríguez, Juan et alli, "A conic associated with Euler lines", in *Forum Geometricorum*, volume 6 (2006) pp. 17-23, disponível em <http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200602index.html>
- [21] Vásquez, Juan, "Matemática, Ciência e Tecnologia: Uma relação profunda e duradora", in *Boletim da S.P.M. n.º 49*, Lisboa Outubro de 2003 pp. 19-70.
- [22] Yiu, Paul, *The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane Euclidean geometry*, 2000, disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/barycentricpaper.pdf>
- [23] Yiu, Paul, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Department of Mathematics of Florida Atlantic University, Florida 2002, disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf>
- [24] Yiu, Paul, *A tour of triangle geometry*, Comunicação apresentada no 37th Annual Meeting of the Florida Section of MAA, University of Central Florida, Orlando, 25 e 26 de Fevereiro de 2004, disponível em <http://www.math.fau.edu/yiu/TourOfTriangleGeometry/MAAFlorida37040428.pdf>