

Análise Matemática

Análise Matemática I

Ciências do Mar / Bioquímica, Biotecnologia, Química

Ana Conceição

2011/2012

Programa:

1. Funções Reais
2. Cálculo Integral
3. Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n
4. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Bibliografia:

Slides das aulas teóricas!

- ◆ 12^o matemática - M^a Neves, M^a Vieira, A. Alves
- Porto Editora, 1991
- ◆ Cálculo Diferencial e Integral, Vols I e II - N.
Piskounov - Lopes da Silva, 1978
- ◆ Problemas e Exercícios de Análise Matemática -
B. Demidóvich - Mir, 1977

1. Funções Reais

Definição: Uma correspondência

$$f : D_f \rightarrow B, \quad D_f, B \subset \mathbb{R},$$

é uma *função real de variável real* se e só se

$$\forall x \in D_f \exists^1 y \in B : f(x) = y.$$

— — — — —

D_f *domínio* de f

B *conjunto de chegada* de f

$D'_f = \{y \in B : y = f(x), x \in D_f\}$ *contradomínio* de f

Definição: Uma função f diz-se *crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

— — — — —

Definição: Uma função f diz-se *decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

— — — — —

As funções crescentes ou decrescentes chamam-se *monótonas*.

— — — — —

Definição: Uma função f diz-se *par* (*ímpar*) se

$$\forall x \in D_f : (-x) \in D_f \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Definição: A função

$$x = g(y), \quad y \in D'_f,$$

diz-se *inversa* da função $y = f(x)$, se

$$g[f(x)] \equiv x, \quad \forall x \in D_f.$$

Quando existe, designa-se $x = f^{-1}(y)$.

- - - - -

$$D_f = D'_{f^{-1}} \quad \text{e} \quad D_{f^{-1}} = D'_f$$

- - - - -

Nota: Dado o gráfico de uma função invertível f , o gráfico da função inversa f^{-1} pode ser obtido reflectindo o gráfico de f em relação a $y = x$.

Definição: Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto a (finito). Diz-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ (finito)}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$



Definição: A função f diz-se *contínua* no ponto $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definição: Se um ponto (x, y) se desloca continuamente por uma curva $y = f(x)$ de tal forma que, pelo menos uma de suas coordenadas tenda para o infinito, enquanto que a distância entre esse ponto e uma determinada reta tenda para zero, essa reta recebe o nome de **assímtota** da curva.

$x = a$ **assímtota vertical** se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

$y = mx + b$ **assímtota não vertical** se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = b$$

Definição: Diz-se que uma função $f(x)$ admite um **máximo** (**mínimo**) num ponto $a \in D_f$, se numa vizinhança \mathcal{V} de a

$$\forall x \in \mathcal{V} : f(x) \leq f(a) \quad (\forall x \in \mathcal{V} : f(x) \geq f(a)),$$

sendo $f(a)$ o máximo (mínimo).

Os máximos e mínimos da função $f(x)$ chamam-se **extremos** de $f(x)$.



Definição: Numa função contínua, ao ponto que separa uma parte da curva com 'concavidade voltada para cima', de uma parte da curva com 'concavidade voltada para baixo' chama-se **ponto de inflexão**.

Definição: O conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de uma função f chama-se o **gráfico** de f .

— — — — — — — —

Conhecido o gráfico de uma função f , podemos facilmente representar o gráfico de diversas funções relacionadas, como por exemplo:

◆ $g(x) = f(x \pm k), \quad k \in \mathbb{R}$

◆ $g(x) = f(x) \pm k, \quad k \in \mathbb{R}$

◆ $g(x) = f(-x)$

◆ $g(x) = -f(x)$

Definição: Chama-se *derivada* da função $y = f(x)$, no ponto $x = a$, a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Denotamos por $f'(a)$.

— — — — —

Definição: A função $y = f(x)$ diz-se *derivável* (ou *diferenciável*), no ponto $x = a$, se tem derivada finita nesse ponto.

— — — — —

Definição: A derivada de $f'(x)$ chama-se *derivada de 2ª ordem* ou *2ª derivada* da função $y = f(x)$.

Tabela de derivadas

$k' = 0$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$(a^u)' = u' a^u \ln a$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\operatorname{senu})' = u' \operatorname{cosu}$	$(\operatorname{cosu})' = -u' \operatorname{senu}$
$(\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$	$(\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$

$$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$k \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

Propriedades da derivação

$$(k f)' = k f', \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f g)' = f' g + f g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$$

$$(f^g)' = g f^{g-1} f' + f^g g' \ln f$$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)|_{x=f^{-1}(y)}}$$

2. Cálculo Integral

Definição: Diz-se que $F(x)$ é uma **primitiva** da função $f(x)$ sobre $[a, b]$, se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema: Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são duas primitivas da função $f(x)$ sobre $[a, b]$, a sua diferença é uma constante, ou seja,

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Definição: Chama-se **integral indefinido** da função $f(x)$, e denota-se por

$$\int f(x)dx,$$

a toda a expressão da forma $F(x) + C$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e $C \in \mathbb{R}$.

— — — — —

Nota: $\int f(x)dx$ representa o conjunto de todas as primitivas da função $f(x)$.

Propriedades do integral indefinido

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$\int a f(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

Regra útil

□ Se $\int f(x)dx = F(x) + C$, então

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C .$$

Nota:

Nem todas as funções possuem uma primitiva.

Nota:

Toda a função contínua possui uma primitiva/
um integral indefinido.

Tabela de integrais

$$1) \int u' u^\alpha dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$2) \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$3) \int u' e^u dx = e^u + C$$

$$4) \int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5) \int u' \operatorname{senu} dx = -\operatorname{cosu} + C$$

$$6) \int u' \operatorname{cosu} dx = \operatorname{senu} + C$$

$$7) \int u' \operatorname{tgu} dx = -\ln|\operatorname{cosu}| + C$$

$$8) \int u' \operatorname{ctgu} dx = \ln|\operatorname{senu}| + C$$

$$9) \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tgu} + C$$

$$10) \int \frac{u'}{\sin^2 u} dx = -\operatorname{ctgu} + C$$

$$11) \int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctgu} + C$$

$$11') \int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$12) \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsenu + C$$

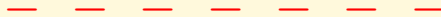
$$12') \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \arcsen\frac{u}{a} + C$$

$$13) \int \frac{u'}{u^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-u}{a+u} \right| + C$$

$$14) \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} dx = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

Integração por partes

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx, \quad v = \int v' dx$$



Nota: Esta fórmula utiliza-se para calcular o integral de funções que podem ser postas sob a forma do produto de u e v' , tais que a procura de v e o cálculo de $\int u' v dx$ sejam um problema mais simples do que o cálculo de $\int u v' dx$.

Integração por mudança de variável

Teorema: Seja $x = \varphi(t)$, onde φ e φ' são funções contínuas e φ é invertível. Tem-se que

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

— — — — —

Nota: Por vezes é preferível escolher a mudança sob a forma $t = \psi(x)$ em vez de $x = \varphi(t)$.

□ Funções racionais

Toda a função racional regular pode ser representada através de uma soma de **frações racionais elementares**:

$$1) \frac{A}{x - a}$$

$$3) \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

$$2) \frac{A}{(x - a)^k}$$

$$4) \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

$$k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \quad b^2 - 4ac < 0$$

□ Decomposição em f. racionais elementares

Seja $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}$ regular.

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{x-a_1} + \cdots \\ & + \frac{A_{n1}}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_{n2}}{(x-a_n)^{\alpha_n-1}} + \cdots + \frac{A_{n\alpha_n}}{x-a_n} \\ & + \frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \cdots + \frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots \\ & + \frac{M_{m1}x+N_{m1}}{(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}} + \cdots + \frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{x^2+b_mx+c_m} \end{aligned}$$

□ Integração de frações racionais elementares

$$\text{I)} \int \frac{A}{x-a} dx \underbrace{=}_{2)} A \ln|x-a| + C$$

$$\text{II)} \int \frac{A}{(x-a)^k} dx \underbrace{=}_{1)} \frac{A}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + C$$

$$\text{III)} \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$= \frac{A}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx}_{2)} + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \underbrace{\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d^2}}_{11')}$$

$$= \frac{A}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + \frac{1}{ad} \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \operatorname{arctg} \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{d} + C$$

$$d^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{IV)} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^k} dx}_{1)} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{(*)}$$

para $x + \frac{b}{2a} = t$:

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{1}{a} \int \frac{dt}{(t^2 + d^2)^k} &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{d^2 + t^2 - t^2}{(t^2 + d^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{ad^2} \int \frac{dt}{(t^2 + d^2)^{k-1}} - \frac{1}{2} \int \underbrace{t}_u \underbrace{\frac{2t}{(t^2 + d^2)^k}}_{v'} dt \end{aligned}$$

por partes

Integral definido $\int_a^b f(x)dx$

↪ conceito que surgiu associado ao cálculo de áreas de regiões planas como limite da soma de várias subáreas (somadas de Riemann).

Definição: Uma função $f(x)$, definida em $[a, b]$, para a qual $\exists \int_a^b f(x)dx$, diz-se **integrável** em $[a, b]$.

Nota: Existem funções integráveis que não são contínuas em $[a, b]$.

Propriedades dos integrais definidos

Propriedade 1.

Se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$, então $(kf)(x)$, onde k é uma constante, também é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Propriedade 2.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a, b]$, então $(f \pm g)(x)$ são integráveis em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx .$$

Propriedade 3.

Seja $c \in]a, b[$. Se $f(x)$ é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Propriedade 4.

Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

Propriedade 5.

Se $f(x)$ é uma função par, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx .$$

Se $f(x)$ é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 .$$

Teorema do valor médio

Seja $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) .$$

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$.

Fórmula de Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nota: O cálculo de integrais definidos de funções contínuas está reduzido à procura de primitivas e ao cálculo de valores das primitivas em a e em b .

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Integração por partes (integrals definidos)

$$\int_a^b u v' dx = (u v)|_a^b - \int_a^b u' v dx$$

— — — — —

Integração por mudança de variável (integrals definidos)

Teorema: Seja $x = \varphi(t)$, onde φ e φ' são funções contínuas e φ é invertível. Tem-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Aplicações geométricas dos integrais definidos

◇ **Cálculo de áreas planas:** A área de uma região plana, limitada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, corresponde ao valor do integral definido

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Nota: Se $y = g(x)$ coincide com o eixo OX , então a área é dada pelo integral definido

$$\int_a^b f(x) dx.$$

◇ **Cálculo de volumes de corpos de revolução:**

O volume de um corpo gerado pela rotação, em torno do eixo OX , de uma região plana limitada por $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$, corresponde ao valor do integral definido

$$\pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

Nota: Se $y = g(x)$ coincide com o eixo OX , então o volume é dado pelo integral definido

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

◇ **Cálculo de comprimento de curvas:** O comprimento, entre $x = a$ e $x = b$, de uma curva dada pela equação $y = f(x)$, onde $f(x)$ tem derivada contínua, corresponde ao valor do integral definido

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

3. Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

Definição: Se a cada par (x, y) de valores de duas variáveis independentes x e y , pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, corresponde um valor bem determinado de variável z , diz-se que z é uma **função de duas variáveis independentes x e y** . Denotamos por $z = f(x, y)$.

Exemplo: $z = x^2y + \text{sen}x$

Definição: Chama-se **domínio** de definição da função $z = f(x, y)$ ao conjunto dos pares (x, y) de valores de x e de y para os quais $f(x, y)$ faz sentido. Denotamos por D .



Nota: Geometricamente, o domínio de definição de uma função $z = f(x, y)$ está representado no plano OXY .

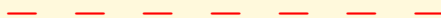
Definição: Se a todo n -úpla (x_1, \dots, x_n) de valores de n variáveis independentes $x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, pertencente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, corresponde um valor bem determinado de variável y , diz-se que y é uma **função de variáveis independentes** x_1, \dots, x_n e denotamos por $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Exemplo: $w = x^2yz + \operatorname{sen}x e^z (= f(x, y, z))$

- - - - -

Nota: O domínio de definição define-se de forma análoga ao caso $n = 2$.

Definição: O lugar geométrico de todos os pontos P cujas coordenadas verificam a equação $z = f(x, y)$ chama-se **gráfico** da função.



A equação $z = f(x, y)$ define uma superfície no espaço, cuja projeção no plano OXY é o domínio desta função. Cada perpendicular ao plano OXY não corta a superfície em mais do que um ponto.

Definição: Chama-se **derivada parcial** em relação a x (y), da função $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) , ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \right).$$

Nota: A derivada de $z = f(x, y)$ em relação a x (y) é calculada derivando a função considerando \underline{x} (\underline{y}) variável e supondo \underline{y} (\underline{x}) constante.

Interpretação geométrica das derivadas parciais

O valor da derivada parcial em relação a x , no ponto (x_0, y_0) , é igual à tangente do ângulo formado pela reta tangente à curva, definida pela interseção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $y = y_0$, e o plano OXY . Analogamente, define-se a derivada parcial em relação a y , no ponto (x_0, y_0) .

Definição: Chama-se **derivada parcial** em relação a x_i , da função $z = f(x_1, \dots, x_n)$, no ponto (x_0^1, \dots, x_0^n) , ao limite

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_0^1, \dots, x_0^n) =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^i + h, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{h}.$$

Nota: A derivada de $z = f(x_1, \dots, x_n)$ em relação a x_i é calculada derivando a função $f(x_1, \dots, x_n)$ considerando x_i variável e supondo $x_j, j \neq i$ constantes.

Seja $z = f(x, y)$. Assim, $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ também são funções de x e y .

Definição: As derivadas parciais de $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ chamam-se **derivadas parciais de 2ª ordem** da função $z = f(x, y)$.

— — — — —

Em geral, as derivadas parciais das derivadas de ordem $n - 1$ da função $z = f(x, y)$ chamam-se **derivadas parciais de ordem n** , de $z = f(x, y)$.

Derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = f(x, y)$:

$$\diamond \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx}$$

$$\diamond \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy}$$

$$\diamond \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx}$$

$$\diamond \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ derivadas mistas

Teorema: Se a função $z = f(x, y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

são contínuas no ponto (x_0, y_0) e numa vizinhança de (x_0, y_0) , então

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Derivadas parciais de 3ª ordem da função $z = f(x, y)$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, & \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, & \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \end{array}$$

$z = f(x, y)$ tem 2^p derivadas parciais de ordem p .

$w = f(x, y, z)$ tem 3^p derivadas de ordem p .

— — — — —

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ tem n^p derivadas parciais de ordem p .

— — — — —

Nota: Caso as derivadas parciais sejam contínuas então o resultado da derivação múltipla não depende da ordem dessa derivação.

Seja $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$.

Definição: Se existe uma vizinhança \mathcal{V} de (x_0, y_0) tal que $\forall (x, y) \in \mathcal{V} \cap D_f, (x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)),$$

diz-se que a função $z = f(x, y)$ admite um **máximo** (mínimo) no ponto (x_0, y_0) .

Ao(s) máximo(s)/mínimo(s) de $z = f(x, y)$ chamam-se **extremos** da função.

Teorema (condição necessária para a existência de extremo):

Se a função $z = f(x, y)$ admite um extremo no ponto (x_0, y_0) , então as derivadas parciais de 1ª ordem anulam-se no ponto (x_0, y_0) ou não existem.

— — — — —

Definição: Seja $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$. Se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

então (x_0, y_0) chama-se **ponto estacionário da função**.

Algoritmo ($n = 2$)

Passo 1: Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \implies (x_0, y_0) \text{ ponto estacionário}$$

Passo 2: Determinar

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Passo 3:

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad D_2 = |H(x_0, y_0)|$$

Passo 4:

- ◇ Se $D_1 > 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ mínimo
- ◇ Se $D_1 < 0$ e $D_2 > 0 \implies f(x_0, y_0)$ máximo
- ◇ Se $D_2 < 0 \implies f(x_0, y_0)$ não é extremo
- ◇ Se $D_2 = 0 \implies$ nada se pode concluir (por este método)

4. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Definição: Chama-se **equação diferencial ordinária** a uma igualdade que estabelece uma relação entre uma variável independente x , uma função desconhecida $y = y(x)$, e as suas derivadas, y' , y'' , \dots , $y^{(n)}$, i. e. uma equação da forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Exemplos: a) $y' - \frac{x}{y} = 0$ b) $y'' - 6x - 2 = 0$

Equação diferencial **ordinária** porque $y = y(x)$ é função de apenas uma variável independente x .

Nota: Se y fosse uma função de duas ou mais variáveis independentes, por exemplo $y = y(x, t)$, então teríamos uma equação diferencial de derivadas parciais.

Definição: Chama-se **ordem** de uma eq. dif. a ordem da derivada de maior ordem presente na eq. dif.

Exemplos: a) ordem 1 b) ordem 2

Definição: Chama-se **solução** da eq. dif., num intervalo $]a, b[$, a uma função $y = \varphi(x)$, tal que, substituída na eq. dif., a transforma numa identidade, $\forall x \in]a, b[$.

— — — — —

Nota: Nem sempre é possível explicitar y como função de x . Ou seja, a solução de uma dada eq. dif. pode apresentar-se na forma **explícita** $y = \varphi(x)$ ou na forma **implícita** $\phi(x, y) = 0$.

Nota: Nem todas as eq. dif. são solúveis.

— — — — —

Uma **solução particular** de uma eq. dif. é qualquer solução da mesma.

Definição: Chama-se **solução geral** da eq. dif., de ordem n , à função $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, desde que esta seja solução da eq. dif. para quaisquer valores das constantes C_1, C_2, \dots, C_n . Chama-se **integral geral** à solução geral dada na forma implícita $\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.



Nota: A solução geral de uma eq. dif. nem sempre pode ser expressa mediante uma fórmula única.

Exemplo: A eq. dif. $y' + y^2 = 0$ admite as soluções $y \equiv 0$ e $y = \frac{1}{x-C}$, $C \in \mathbb{R}$.

Definição: Um **problema de valor inicial** consiste numa eq. dif., juntamente com condições relativas à função $y = y(x)$ e suas derivadas, tudo para um mesmo valor da variável independente x .

Se as condições se referem a mais de um valor da variável independente temos um **problema de valores de contorno**.

— — — — — — —

Definição: Uma **solução de um problema de valor inicial**, ou de **valores de contorno**, é uma função $y(x)$ que satisfaz não só a eq. dif. dada, mas também todas as condições.

Equações diferenciais de primeira ordem

Definição: Uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação da forma

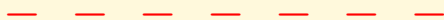
$$F(x, y, y') = 0.$$

Definição: Chama-se solução geral da equação $F(x, y, y') = 0$ à função

$$y = \varphi(x, C)$$

desde que esta seja solução da eq. dif. para qualquer valor da constante C .

Definição: Chama-se **integral geral** à solução geral da eq. dif., na forma implícita, $\phi(x, y, C) = 0$.



Definição: É possível que uma equação diferencial $F(x, y, y') = 0$, com a solução geral $y = \varphi(x, C)$, admita uma solução

$$y = \psi(x) : \psi(x) \neq \varphi(x, C), \forall C \in \mathbb{R}.$$

Neste caso diz-se que $y = \psi(x)$ é uma **solução singular** da eq. dif.

Exemplo: A eq. dif. $y' + y^2 = 0$ admite as soluções $y \equiv 0$ (singular) e $y = \frac{1}{x-C}$, $C \in \mathbb{R}$.

■ Equações diferenciais do tipo normal:

$$y' = f(x, y)$$

Outra forma de representar uma equação diferencial de primeira ordem do tipo normal, isto é, que é resolúvel relativamente à derivada

$$y' = f(x, y),$$

é a chamada forma diferencial ou simétrica

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

onde $N(x, y) \neq 0$.

— — — — —

Exemplos: Equações diferenciais de variáveis separadas, de variáveis separáveis, homogéneas, exatas e lineares.

◇ Equações diferenciais de variáveis separadas

Definição: Chama-se equação diferencial de variáveis separadas a uma equação diferencial da forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$



$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

◇ Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição: Chama-se **equação diferencial de variáveis separáveis** a uma equação diferencial da forma

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$$

— — — — —



$$: N_1(y)M_2(x)$$



$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$



$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

◇ Equações diferenciais homogéneas

Definição: Chama-se equação diferencial homogénea a uma equação diferencial da forma

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

$$y = ux \quad \rightarrow \quad y' = u'x + u$$

$$y' = f(x, y) \rightarrow u'x + u = f(x, ux) \rightarrow u'x + u = f(1, u)$$

↪ eq. dif. de variáveis separadas/separáveis
(edvs/s)

$$\hookrightarrow u = \frac{y}{x}$$

◇ Equações diferenciais exatas

Definição: Chama-se **equação diferencial exata** a uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

se existir uma função $u(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

— — — — —

A igualdade

$$u(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

é o **integral geral** da equação.

Sejam M e N funções com derivadas contínuas.

Teorema: Para que a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

seja exata, é necessário e suficiente que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\hookrightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx = \dots + C_1(y)$$

$$\hookrightarrow u(x, y) = \int N(x, y)dy = \dots + C_2(x)$$

\hookrightarrow

$$u(x, y) = C$$

◇ Equações diferenciais lineares

Definição: Chama-se **equação diferencial linear** de primeira ordem a uma equação diferencial da forma

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

- - - - -

▷ $Q(x) \equiv 0 \rightarrow$ (edvs/s).

▷ Caso contrário,

$$y = uv \rightarrow y' = u'v + uv' \rightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

$$\hookrightarrow v' + P(x)v = 0 \quad (\text{edvs/s}) \quad \rightarrow \quad v_p$$

$$\hookrightarrow u'v_p = Q(x) \quad (\text{edvs/s}) \quad \rightarrow \quad y = uv_p$$

Seja $x(t)$ a quantidade de uma substância (ex: subst. radioactiva) ou o nº de elementos de uma população (ex: pessoas, bactérias) no momento t . Admitamos que a taxa de variação de $x(t)$, $\frac{dx}{dt}$, é proporcional a $x(t)$, isto é, $\frac{dx}{dt} = k x$, onde k é a constante de proporcionalidade (positiva ou negativa conforme $x(t)$ aumentar ou diminuir ao longo do tempo). Seja $x(0) = x_0$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \hookrightarrow \quad x(t) = x_0 e^{k t}$$