

**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**Algumas classes de operadores integrais  
singulares com deslocamento e conjugação**

(Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática,  
especialização em Matemática para o Ensino)

Lina Isabel Fernandes Campos  
(Licenciada)

Orientador: Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez

Júri

Presidente: Doutor Viktor Grigorovitch Kravchenko

Vogais: Doutora Ana Isabel Baptista Moura Santos  
Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez  
Doutor Rui Carlos de Maurício Marreiros

Faro

2007

**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**Algumas classes de operadores integrais  
singulares com deslocamento e conjugação**

(Dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática,  
especialização em Matemática para o Ensino)

Lina Isabel Fernandes Campos  
(Licenciada)

Orientador: Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez

Júri

Presidente: Doutor Viktor Grigorovitch Kravchenko

Vogais: Doutora Ana Isabel Baptista Moura Santos  
Doutor Juan Carlos Sanchez Rodriguez  
Doutor Rui Carlos de Maurício Marreiros

Faro

2007

## Agradecimentos

Ao Professor Juan Carlos Rodriguez, meu orientador, pelo seu saber, incentivo, apoio e orientação permanentes, que tornaram possível a realização deste trabalho.

A todos os professores que leccionaram as cadeiras da parte curricular do Mestrado em Matemática e a todos os professores com quem tive o privilégio de aprender.

Ao Hugo pela sua amizade incondicional e pela força constante que me transmitiu.

À minha família e amigos por todo o carinho e dedicação.

## Resumo e palavras chave

**Nome:** Lina Isabel Fernandes Campos.

**Orientador:** Juan Carlos Sanchez Rodriguez, Professor Auxiliar.

**Título:** *Algumas classes de operadores integrais singulares com deslocamento e conjugação.*

**Resumo:** Neste trabalho vamos considerar o operador emparelhado  $T_{A,B} = AP_+ + BP_- : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , na circunferência unitária,  $\mathbb{T}$ , com um grupo finito de deslocamentos lineares fraccionários de Carleman  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , onde  $A$  e  $B$  são operadores funcionais com coeficientes em  $L_\infty(\mathbb{T})$ , da forma  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i0}U_1^i + a_{i1}U_1^iU_2)$ ,  $(U_j\varphi)(t) = u(t)\varphi(\alpha(t))$ ,  $j = 1, 2$ , são os operadores de deslocamento com peso associados a um deslocamento linear fraccionário de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$  ou a um deslocamento linear fraccionário de Carleman que inverte a orientação, respectivamente, e  $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$  são os operadores de projecção complementares gerados por  $(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$ , o operador integral singular com núcleo de Cauchy. Usamos o facto bem conhecido de que o estudo de um tal operador pode ser reduzido ao estudo de um operador integral singular, sem deslocamento, cujos coeficientes são funções matriciais. Nestas condições é possível caracterizar o núcleo do operador  $T_{A,B}$ . Será considerado o caso particular em que  $\alpha$  é um deslocamento linear fraccionário de Carleman de segunda ordem ( $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ ), que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$ , no qual é possível a construção de uma base do núcleo do operador  $T_{A,B}$ .

Um estudo análogo é feito na recta real,  $\mathbb{R}$ , para o operador  $T_{A,B} = AP_+ + BP_- : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  com deslocamento e conjugação, onde  $A$  e  $B$  são operadores funcionais com coeficientes em  $L_\infty(\mathbb{R})$ , da forma  $a_{00}I + a_{10}U + a_{01}C + a_{11}UC$ . Serão também considerados casos particulares para os quais é possível descrever o núcleo do operador  $T_{A,B}$ .

**Palavras chave:** operadores integrais singulares; grupo finito de deslocamentos; factorização; operador de deslocamento; operador de conjugação; núcleo.

## Abstract and key words

**Name:** Lina Isabel Fernandes Campos.

**Supervisor:** Juan Carlos Sanchez Rodriguez, Auxiliar Professor.

**Title:** *Sames classes of singular integral operator with shift and conjugation.*

**Abstract:** In this work we consider the paired operator  $T_{A,B} = AP_+ + BP_- : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , on the unit circle,  $\mathbb{T}$ , with a finite group of linear-fractional Carleman shift  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $A$  and  $B$  are functional operators with  $L_\infty(\mathbb{T})$  coefficients, of the form  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i0}U_1^i + a_{i1}U_1^iU_2)$ , where  $(U_j\varphi)(t) = u(t)\varphi(\alpha(t))$ ,  $j = 1, 2$ , are weighted shift operators associated to a  $n$ -order forward linear-fractional Carleman shift or a backward linear-fractional shift, respectively, and  $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$  are the complementary projections operators generated by  $(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$ , the singular integral operator with Cauchy kernel. We use the well-known fact that the study of this operator can be reduced to the study of a singular integral operator without shift, with matrix coefficients. Under these conditions it is possible to characterize the kernel of the operator  $T_{A,B}$ . It will be considered the particular case when  $\alpha$  is a forward linear fractional Carleman shift of order two ( $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ ), in which we can construct the basis of the kernel of the operator  $T_{A,B}$ .

A similar study is done on the real line,  $\mathbb{R}$ . We study the operator  $T_{A,B} = AP_+ + BP_- : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  with shift and conjugation, where  $A$  and  $B$  are functional operators with  $L_\infty(\mathbb{R})$  coefficients, of the form  $a_{00}I + a_{10}U + a_{01}C + a_{11}UC$ . Particular cases will also be considered, for which it is possible to describe the kernel of the the operator  $T_{A,B}$ .

**Key words:** singular integral operators; finite group of shifts; factorization; shift operator; conjugation operator; kernel.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Espaços . . . . .	5
1.2 O operador integral singular com núcleo de Cauchy . . . . .	9
1.3 Factorização de funções na circunferência unitária . . . . .	10
1.4 Factorização de funções matriciais . . . . .	14
1.5 Operadores integrais singulares emparelhados . . . . .	18
1.6 Função de deslocamento . . . . .	20
1.6.1 Algumas propriedades dos deslocamentos. Desloca- mentos de Carleman . . . . .	20
1.6.2 Classificação de grupos finitos de deslocamentos em curvas abertas ou fechadas . . . . .	24
1.6.3 Deslocamentos lineares fraccionários de Carleman . . . . .	28
1.7 Operador de deslocamento . . . . .	34
<b>2 Operadores integrais singulares com deslocamento linear frac- cionário de Carleman na circunferência unitária</b>	<b>38</b>
2.1 Operadores integrais singulares com um grupo finito de deslo- camentos . . . . .	40
2.2 Operadores integrais singulares com deslocamento de segunda ordem que preserva a orientação . . . . .	51
<b>3 Operadores integrais singulares com deslocamento linear frac- cionário de Carleman e conjugação na recta real</b>	<b>59</b>
3.1 Operadores integrais singulares com deslocamento e conjugação	60
3.1.1 Operadores integrais singulares com deslocamento . . . . .	73

3.1.2	Operadores integrais singulares com conjugação . . . .	80
	<b>Referências</b>	<b>88</b>

## Introdução

O tema deste trabalho insere-se na Teoria dos Operadores Lineares, na área dos operadores integrais singulares com deslocamento.

O estudo de temas relacionados com a teoria deste tipo de operadores remonta ao início do século passado. Em 1922, T. Carleman foi o primeiro matemático a estudar um problema de contorno com deslocamento para funções analíticas, onde o deslocamento satisfaz a condição (9) para  $n = 2$ , designada posteriormente com o seu nome.

A teoria clássica das equações integrais singulares e de problemas de contorno para funções analíticas foi criada essencialmente por matemáticos soviéticos no século XX, mais precisamente na década de quarenta. Entre os seus fundadores encontra-se F. Gakhov, que publicou o livro [3].

Nas décadas de sessenta e setenta foi criada a teoria de Fredholm dos operadores integrais singulares com deslocamento de Carleman devido, essencialmente, ao trabalho de G. Litvinchuk. Estes resultados fazem parte da sua obra [15], a qual reúne também resultados de cientistas como I. Gohberg, N. Krupnik, N. Karapetians, S. Samko, V. Kravchenko, entre outros.

De facto, os anos setenta e oitenta foram um período de intenso desenvolvimento da teoria dos operadores integrais singulares com deslocamento. Muitos dos resultados alcançados foram sumarizados no livro [13], da autoria de G. Litvinchuk e V. Kravchenko.

Mais recentemente, A. Lebre, A. Shaev, G. Drekova, J. Rodriguez, T. Ehrhart, V. Kravchenko, entre outros matemáticos, contribuíram para o desenvolvimento da teoria da solubilidade dos operadores integrais singulares com deslocamento e conjugação.

O presente trabalho tem como objectivo reunir alguns resultados já conhecidos relativamente a algumas classes de operadores integrais singu-

lares com deslocamento linear fraccionário de Carleman, na circunferência unitária,  $\mathbb{T}$ , e obter resultados sobre os operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman e com conjugação na recta real,  $\mathbb{R}$ .

Deste modo, começamos por introduzir, no Capítulo 1, toda a informação preliminar essencial para a compreensão dos restantes capítulos, nomeadamente, os conceitos e propriedades básicas acerca do operador integral singular com núcleo de Cauchy, alguns resultados relativos à factorização generalizada e à teoria dos operadores integrais singulares sem deslocamento (Secções 1.2 a 1.5). Nas Secções 1.6 e 1.7 apresentam-se algumas propriedades dos deslocamentos de Carleman, é feita a classificação de grupos finitos de deslocamentos, são estudadas as propriedades dos deslocamentos lineares fraccionários de Carleman na circunferência unitária, bem como apresentadas algumas propriedades do operador de deslocamento.

O artigo [12] é o ponto de partida do Capítulo 2. Vamos considerar o operador emparelhado, com um grupo finito de deslocamentos:

$$T_{A,B} = A P_+ + B P_- : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T}), \quad p \in (1, \infty),$$

onde  $A$  e  $B$  são os operadores funcionais

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i0} U_1^i + a_{i1} U_1^i U_2), \\ B &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i0} U_1^i + b_{i1} U_1^i U_2), \end{aligned}$$

com coeficientes em  $L_\infty(\mathbb{T})$ ,  $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$  são os operadores de projecção complementares gerados por  $(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$ , o operador integral singular com núcleo de Cauchy, e  $(U_j\varphi)(t) = u(t)\varphi(\alpha(t))$ ,  $j = 1, 2$ , são os operadores de deslocamento com peso associados a um deslocamento linear

fraccionário de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$  ou a um deslocamento linear fraccionário de Carleman que inverte a orientação, respectivamente.

A teoria de Fredholm dos operadores integrais singulares com deslocamento de Carleman é bem conhecida (ver [9], [13], [15]).

Habitualmente, o estudo das propriedades do operador  $T_{A,B}$  baseia-se na correspondente relação entre o operador  $T_{A,B}$  e o operador integral singular sem deslocamento e com coeficientes matriciais. No referido capítulo, o ponto de partida da nossa análise é a relação

$$T = \Delta^{-1}T_{A,B}\Delta,$$

a qual permite descrever o núcleo do operador  $T_{A,B}$ . Estabelece-se uma relação entre o operador integral singular com deslocamento  $T_{A,B}$  e o operador integral singular sem deslocamento  $T_{A,B}|_{\mathfrak{E}}$ , com coeficientes matriciais  $2n \times 2n$ , em que  $\mathfrak{E}$  é um subespaço de  $L_p^{2n}(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , caracterizado pelas condições (45). Essa relação é utilizada para determinar o núcleo do operador  $T_{A,B}$ , o que é feito segundo a observação de que descrever o espaço  $\ker T_{A,B}$  é equivalente a descrever o espaço  $\ker T_{A,B}|_{\mathfrak{E}}$ .

Na secção 2.2 será considerado o operador integral singular com deslocamento linear fraccionário de Carleman de segunda ordem ( $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$ ), que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$ , para o qual se determina a dimensão do núcleo.

Por último, o Capítulo 3 é dedicado ao estudo do núcleo do operador integral singular com deslocamento e conjugação

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_- : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

onde  $A$  e  $B$  são operadores funcionais com coeficientes em  $L_\infty(\mathbb{R})$ , da seguinte

forma

$$A = a_{00}I + a_{10}U + a_{01}C + a_{11}UC,$$

$$B = b_{00}I + b_{10}U + b_{01}C + b_{11}UC.$$

É conseguida uma descrição do núcleo do referido operador e nos casos particulares do operador com deslocamento linear fraccionário de Carleman ou do operador com conjugação são também determinadas as bases do respectivo núcleo.

# 1 Preliminares

Este primeiro capítulo será, essencialmente, uma compilação de definições e resultados indispensáveis à compreensão dos capítulos seguintes.

Ao longo deste trabalho, serão feitas referências às notações, conceitos e propriedades aqui expostos. Algum do material aqui incluído é apresentado de forma breve e, em regra geral, omitimos as demonstrações, podendo todos estes factos ser consultados nas referências bibliográficas citadas.

Começamos por introduzir os espaços que serão considerados ao longo deste trabalho e por apresentar algumas noções e características essenciais do operador integral singular com núcleo de Cauchy.

Relembramos alguns resultados da teoria dos operadores integrais singulares sem deslocamento e o conceito de factorização generalizada.

Posteriormente, apresentamos algumas propriedades dos deslocamentos lineares fraccionários de Carleman na circunferência unitária e na recta real.

Finalmente, introduzimos o operador de deslocamento.

## 1.1 Espaços

Consideremos a seguinte definição.

**Definição 1.1.1** *Uma curva de Lyapunov é uma curva de Jordan orientada, fechada ou aberta,  $\Gamma$ , que admite tangente em qualquer ponto  $t \in \Gamma$  e esta tangente forma com o eixo real um ângulo  $\theta(t)$  que satisfaz a condição de Hölder, i.e., existe  $A > 0$  tal que*

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| < A |t_1 - t_2|^\mu,$$

para  $0 < \mu \leq 1$  e  $t_1, t_2 \in \Gamma$ .

Uma curva de Lyapunov diz-se *fechada* se dividir o plano complexo estendido,  $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , em dois conjuntos abertos  $\Omega_\Gamma^+$  e  $\Omega_\Gamma^-$ , sendo o primeiro limitado, com fronteira comum  $\Gamma$ . A curva  $\Gamma$  diz-se orientada no sentido *positivo* se deslocando-se sobre  $\Gamma$  no sentido anti-horário o domínio  $\Omega_\Gamma^+$  permanece à esquerda.

Introduzimos agora os espaços com que iremos trabalhar ao longo desta exposição.

Por  $L_p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , representaremos o espaço das (classes de equivalência) funções complexas,  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , mensuráveis à Lebesgue tais que

$$\int_\Gamma |\varphi(t)|^p |dt|$$

é convergente.  $L_p(\Gamma)$  é um espaço de Banach (ver [5]), sendo a norma neste espaço dada por

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left( \int_\Gamma |\varphi(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usaremos  $L_\infty(\Gamma)$  para designar o espaço de Banach das (classes de equivalência) funções complexas  $\varphi$  essencialmente limitadas com a norma

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Gamma} |\varphi(t)|.$$

Também será considerado o espaço de Banach  $L_p^n(\Gamma)$  que consiste no conjunto de vectores de dimensão  $n$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , com componentes  $v_k \in L_p(\Gamma)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . A norma definida neste espaço é dada por

$$\|v\|_{L_p^n(\Gamma)} = \max_{1 \leq k \leq n} \|v_k\|_{L_p(\Gamma)}.$$

No contexto deste trabalho,  $\Gamma$  representará a circunferência unitária ou a recta real, curva de Lyapunov fechada ou aberta, respectivamente.

Designaremos por  $\mathbb{T}$  a circunferência unitária, i.e.,  $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$  e por  $\mathbb{T}_+(\mathbb{T}_-)$  o interior (exterior, respectivamente) de  $\mathbb{T}$ .

Como habitualmente,  $\mathbb{R}$  designa a recta real,  $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  representa a recta real compactificada a um ponto e  $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$  é o semi-plano complexo superior (inferior, respectivamente):  $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 (< 0)\}$ .

Por  $C(\mathbb{T})$  denotamos o espaço de Banach de todas as funções  $\varphi$  contínuas em  $\mathbb{T}$ , com a norma

$$\|\varphi\|_{\mathbb{T}} = \max_{t \in \mathbb{T}} |\varphi(t)|.$$

Por  $C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$  designa-se a álgebra das funções  $f$  com valores em  $\mathbb{C}$ , contínuas em  $\mathbb{R}$  e tais que

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t), \\ f(-\infty) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) \end{aligned}$$

são finitos e iguais, com a norma

$$\|f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Defina-se

$$\begin{aligned} C^{\pm}(\overset{\circ}{\mathbb{R}}) &= C(\overset{\circ}{\mathbb{R}}) \cap L_{\infty}^{\pm}(\mathbb{R}), \\ C_0^{-}(\overset{\circ}{\mathbb{R}}) &= \left\{ a \in C^{-}(\overset{\circ}{\mathbb{R}}) : a(-i) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

$C_{\mu}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$  representa o espaço das funções contínuas à Hölder em  $\overset{\circ}{\mathbb{R}}$ , com expoente  $\mu \in ]0, 1[$ , i.e., o subespaço das funções  $f$  em  $C(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ , tais que  $\tilde{f}$ , definida na circunferência unitária  $\mathbb{T}$  por  $\tilde{f}\left(\frac{t-i}{t+i}\right) = f(t)$ , para  $t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}$  satisfaz a condição:

$$m(\tilde{f}) = \sup \left\{ \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\mu}} : t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2 \right\} < \infty.$$

É definida a norma em  $C_{\mu}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$  da forma (ver [18])

$$\|f\|_{C_{\mu}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| + m(\tilde{f}).$$

Introduzimos ainda a notação  $\mathcal{L}(X, Y)$  para representar o espaço dos operadores lineares limitados do espaço  $X$  no espaço  $Y$ , e denotamos  $\mathcal{L}(X, X)$  por  $\mathcal{L}(X)$ .

Se  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach e  $A : X \rightarrow Y$  é um operador linear limitado, i.e.,  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , chama-se *núcleo* do operador  $A$  ao seguinte subespaço de  $X$

$$\ker A = \{x \in X : Ax = 0\}.$$

A imagem de  $A$  é dada por

$$\operatorname{im} A = \{Ax : x \in X\}.$$

A dimensão do espaço  $\ker A$ , i.e., o número de soluções linearmente independentes da equação  $Ax = 0$ , denota-se por  $\dim \ker A$ .

Um operador  $P \in \mathcal{L}(X)$  designa-se *projectão* se é idempotente, i.e.,

$$P^2 = P.$$

Se  $P$  é uma projectão então o operador  $Q = I - P$  é também uma projectão e designa-se *projectão complementar* de  $P$ . Note-se que

$$PQ = QP = 0,$$

para quaisquer duas projectões complementares.

Se  $X_1$  e  $X_2$  são subespaços de  $X$  tais que  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ , então a soma directa  $W = X_1 \oplus X_2$  define um subespaço consistindo em todos os elementos da forma  $x = x_1 + x_2$ , com  $x_1 \in X_1$  e  $x_2 \in X_2$ .

Considere-se o operador definido por  $Px = x_1$ . Este operador é idempotente e  $X_1 = \operatorname{im} P$ ,  $X_2 = \ker P$ . É um resultado bem conhecido que a soma directa  $W = X_1 \oplus X_2$  de dois subespaços  $X_1$  e  $X_2$  é fechada se e só se o operador  $P$  é limitado e, por conseguinte, é uma projectão. Neste caso,  $P$  designa-se uma projectão de  $W$  em  $X_1$  ao longo de  $X_2$ .

Toda a projecção  $P \in \mathcal{L}(X)$  gera a soma directa  $X = X_1 \oplus X_2$  com  $X_1 = \text{im}P$  e  $X_2 = \text{ker}P$ .

## 1.2 O operador integral singular com núcleo de Cauchy

O operador *integral singular com núcleo de Cauchy*,  $S : L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < \infty$ , é definido por

$$(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

onde o integral é considerado no sentido do valor principal de Cauchy. A função  $\frac{1}{\tau - t}$  chama-se *núcleo de Cauchy* e a função  $\varphi(t)$ , chamada *densidade do integral singular*, pertence ao espaço  $L_p(\Gamma)$ .

O operador  $S$  satisfaz as seguintes propriedades (ver, por exemplo, [3] e [8]):

- (i) O operador  $S$  é limitado no espaço  $L_p(\Gamma)$ , com  $1 < p < \infty$ . Em particular, se  $\Gamma = \mathbb{T}$ , então  $\|S\|_{L_2(\mathbb{T})} = 1$ .
- (ii) Se  $\Gamma = \mathbb{T}, \mathbb{R}$  então  $S$  é involutivo, i.e.,

$$S^2 = I,$$

onde  $I$  é o operador identidade.

Estas propriedades permitem introduzir em  $L_p(\Gamma)$  o par de operadores de projecção complementares:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S). \quad (2)$$

Estes operadores serão referidos como operadores de projecção gerados pelo operador  $S$  ou como *operadores de projecção de Cauchy* em  $L_p(\Gamma)$ .

Obviamente que

$$P_+ - P_- = S, \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0.$$

Usaremos a seguinte notação:

$$L_p^+(\Gamma) = P_+L_p(\Gamma), \quad \overset{\circ}{L}_p^-(\Gamma) = P_-L_p(\Gamma), \quad L_p^-(\Gamma) = P_-L_p(\Gamma) \oplus \mathbb{C}.$$

Ou seja, de acordo com a terminologia habitual dos espaços de Banach,  $P_+$  projecta  $L_p(\Gamma)$  em  $L_p^+(\Gamma)$  ao longo de  $\overset{\circ}{L}_p^-(\Gamma)$  e  $P_-$  projecta  $L_p(\Gamma)$  em  $\overset{\circ}{L}_p^-(\Gamma)$  ao longo de  $L_p^+(\Gamma)$ . O espaço  $L_p(\Gamma)$  é a soma directa  $L_p(\Gamma) = L_p^+(\Gamma) \oplus \overset{\circ}{L}_p^-(\Gamma)$ .

As propriedades do operador  $S$  anteriormente mencionadas mantêm-se válidas quando este é considerado no espaço  $L_p^n(\Gamma)$ .

Informação mais detalhada sobre os operadores  $S$ ,  $P_{\pm}$  e as chamadas fórmulas de *Sokhostsky-Plemeli* pode ser consultada em [3], [8] e [16].

### 1.3 Factorização de funções na circunferência unitária

**Definição 1.3.1** *Seja  $a \in C(\mathbb{T})$  uma função tal que  $a(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{T}$ . O índice da função  $a$  é o número inteiro*

$$\text{ind}_{\mathbb{T}} a = \frac{1}{2\pi} \{\arg a(t)\}_{\mathbb{T}},$$

onde  $\{\arg a(t)\}_{\mathbb{T}}$  representa a variação total do argumento da função  $a(t)$  quando a variável  $t$  percorre  $\mathbb{T}$  no sentido positivo (ver, por exemplo, [3]).

**Definição 1.3.2** *Diz-se que uma álgebra de Banach  $\mathcal{C} \subseteq C(\mathbb{T})$  é uma  $R$ -álgebra se  $R(\mathbb{T})$  é um conjunto denso em  $\mathcal{C}$ , onde  $R(\mathbb{T})$ , como habitualmente, representa o espaço das funções racionais sem pólos em  $\mathbb{T}$ .*

Seja  $\mathcal{C}$  uma álgebra de Banach de funções contínuas em  $\mathbb{T}$ ,  $\mathcal{C} \subseteq C(\mathbb{T})$  com as seguintes propriedades:

1.  $R(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}$ ;
2.  $\mathcal{C}$  tem a propriedade da invertibilidade, i.e.,

$$a \in \mathcal{C} \text{ e } a(t) \neq 0, t \in \mathbb{T} \Rightarrow a \in \mathcal{GC},$$

onde  $\mathcal{GC}$  representa o grupo dos elementos invertíveis da álgebra  $\mathcal{C}$ .

Designaremos por  $\mathcal{C}^+$ ,  $\mathcal{C}^-$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^-$  as subálgebras de  $\mathcal{C}$  definidas por

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cap C^+(\mathbb{T}), \quad \mathcal{C}^- = \mathcal{C} \cap C^-(\mathbb{T}), \quad \overset{\circ}{\mathcal{C}}^- = \mathcal{C} \cap \overset{\circ}{C}^-(\mathbb{T}),$$

em que  $C^\pm(\mathbb{T})$  são subálgebras de  $C(\mathbb{T})$  constituídas pelas funções contínuas em  $\overline{\mathbb{T}^\pm}$ , e analíticas em  $\mathbb{T}^\pm$ , sendo limitadas no infinito no caso de  $C^-(\mathbb{T})$ , e  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^-$  é a subálgebra de  $C^-(\mathbb{T})$  constituída pelas funções que se anulam no infinito.

**Definição 1.3.3** *Seja  $\mathcal{C}$  uma álgebra de funções contínuas em  $\mathbb{T}$ , satisfazendo as condições 1 e 2. Diz-se que  $\mathcal{C}$  é decomponível se*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \overset{\circ}{\mathcal{C}}_-.$$

Como se sabe,  $C(\mathbb{T})$  é uma  $R$ -álgebra que não é decomponível (ver, por exemplo, [1], oitavo capítulo). A álgebra de Wiener, das funções complexas contínuas em  $\mathbb{T}$  que admitem desenvolvimento em série de Fourier absolutamente convergente com  $\|a\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty$ , providencia um exemplo de uma  $R$ -álgebra decomponível.

**Proposição 1.3.4** *Nas condições da definição anterior,  $\mathcal{C}$  é decomponível se e só se o operador integral singular  $S$  é limitado em  $\mathcal{C}$ . Se  $\mathcal{C}$  é decomponível então  $P_+$  ( $P_-$ ) é o operador de projecção sobre  $\mathcal{C}^+$  ( $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^-$ ) ao longo de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^-$  ( $\mathcal{C}^+$ ).*

**Definição 1.3.5** *Seja  $\mathcal{C}$  uma álgebra decomponível de funções contínuas em  $\mathbb{T}$ . Sendo  $a \in \mathcal{C}$  chama-se factorização de  $a$  em  $\mathcal{C}$  qualquer representação da forma*

$$a = a_+ t^\kappa a_-,$$

em que  $a_+^{\pm 1} \in \mathcal{C}^+$ ,  $a_-^{\pm 1} \in \mathcal{C}^-$  e  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .

A factorização diz-se canónica se  $\kappa = 0$ .

Obviamente que apenas as funções  $a \in \mathcal{C}$  não singulares em  $\mathbb{T}$  (i.e., os elementos invertíveis de  $\mathcal{C}$ ) podem admitir factorização em  $\mathcal{C}$ . No caso das  $R$ -álgebras decomponíveis, a recíproca também é verdadeira. De facto, tem-se:

**Teorema 1.3.6** *Seja  $\mathcal{C}$  uma  $R$ -álgebra de funções contínuas em  $\mathbb{T}$ . Então qualquer função  $a \in \mathcal{C}$  não singular em  $\mathbb{T}$  admite uma factorização no sentido da Definição 1.3.5 se e só se  $\mathcal{C}$  é decomponível.*

O conceito de factorização generalizada não só permite garantir a existência de factorização para todas as funções  $a \in \mathcal{GC}(\mathbb{T})$ , como também alargar este conceito a uma classe de funções mais geral, as funções essencialmente limitadas em  $\mathbb{T}$ .

Sejam  $p, q \in (1, \infty)$ . O número  $q = \frac{p}{p-1}$  ( $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ) é designado expoente conjugado de  $p$ .

**Definição 1.3.7** *Sejam  $a \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{T})$  e  $p \in (1, \infty)$ . Diz-se que  $a$  admite uma factorização generalizada em (ou em relação a)  $L_p(\mathbb{T})$  se pode ser representada na forma*

$$a = a_+ t^\kappa a_- \tag{3}$$

em que  $\kappa \in \mathbb{Z}$  e

(i)  $a_+ \in L_p^+(\mathbb{T})$ ,  $a_+^{-1} \in L_q^+(\mathbb{T})$ ,  $a_- \in L_q^-(\mathbb{T})$ ,  $a_-^{-1} \in L_p^-(\mathbb{T})$ ,

(ii) o operador  $a_+^{-1}P_+a_-^{-1}$  é limitado em  $L_p(\mathbb{T})$ .

Façamos algumas observações relativamente à definição anterior:

1. Se  $a \in C(\mathbb{T})$  é tal que existe uma factorização de  $a$  em relação a  $\mathbb{T}$  então essa é uma factorização generalizada de  $a$  em  $L_p(\mathbb{T})$ , para qualquer  $p \in (1, \infty)$ .
2. De salientar que o conceito agora introduzido diz respeito a um espaço  $L_p(\mathbb{T})$ , em que  $p \in (1, \infty)$  está fixo. Pode acontecer que uma função admita factorização em  $L_p(\mathbb{T})$  para um determinado  $p \in (1, \infty)$  e não admita factorização em  $L_r(\mathbb{T})$ , com  $r \neq p$ .
3. Suponha-se que, para um determinado valor de  $p \in (1, \infty)$ ,  $a \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{T})$  admite duas factorizações em  $L_p(\mathbb{T})$ , digamos

$$a = a_-^{(s)} t^{\kappa_s} a_+^{(s)}, \quad s = 1, 2.$$

Então tem-se necessariamente

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \quad a_-^{(2)} = c a_-^{(1)}, \quad a_+^{(2)} = \frac{1}{c} a_+^{(1)},$$

em que  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

O número inteiro  $\kappa$  na representação (3), sendo univocamente determinado pela função  $a$ , é o *índice da função  $a$*  no espaço  $L_p(\mathbb{T})$ , representando-se por  $\kappa = \text{ind}_{\mathbb{T}} a$ .

Mais detalhes sobre a factorização generalizada de funções podem ser consultados, para além das referências bibliográficas já citadas, em [14].

## 1.4 Factorização de funções matriciais

Começamos por estabelecer o conceito de factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , de uma função matricial  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$ , o grupo dos elementos invertíveis da álgebra  $L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$ .

**Definição 1.4.1** *Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$ ,  $p, q \in (1, \infty)$  com  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Diz-se que  $\mathcal{A}$  admite uma factorização generalizada em (ou relativamente ao espaço)  $L_p(\mathbb{T})$  se*

(i) *a função matricial  $\mathcal{A}$  pode ser representada na forma*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-,$$

*em que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &\in [L_p^+(\mathbb{T})]^{n \times n}, & \mathcal{A}_+^{-1} &\in [L_q^+(\mathbb{T})]^{n \times n}, \\ \mathcal{A}_- &\in [L_q^-(\mathbb{T})]^{n \times n}, & \mathcal{A}_-^{-1} &\in [L_p^-(\mathbb{T})]^{n \times n}, \end{aligned}$$

*e  $\Lambda$  é um factor diagonal da forma*

$$\Lambda = \text{diag} \{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\},$$

*em que  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$  são números inteiros, designados por índices parciais da factorização.*

(ii) *o operador*

$$\mathcal{A}_+ P_- \mathcal{A}_+^{-1}$$

*representa um operador linear contínuo em  $L_p^n(\mathbb{T})$ .*

Relativamente a esta definição convém assinalar que a mesma também é conhecida como factorização generalizada esquerda de  $\mathcal{A}$  por oposição à

factorização generalizada direita que consiste em trocar os factores exteriores na factorização esquerda.

O número  $\kappa = \sum_{i=1}^n \kappa_i$  designa-se por *índice total* da factorização.

A factorização generalizada diz-se *canónica* se  $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ .

Não existe unicidade na representação de uma função em termos de uma factorização generalizada. Vejamos o seguinte teorema que estabelece uma importante propriedade dos factores  $\mathcal{A}_\pm$  e  $\Lambda$  da factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ . A sua demonstração pode ser consultada, por exemplo, em [17].

**Teorema 1.4.2** *Se  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+^{(s)} \Lambda^{(s)} \mathcal{A}_-^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ , são duas factorizações generalizadas de  $\mathcal{A}$  em  $L_p(\mathbb{T})$  então:*

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)}, \quad \mathcal{A}_+^{(1)} = \mathcal{A}_+^{(2)} \mathcal{H}, \quad \mathcal{A}_-^{(1)} = \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda \mathcal{A}_-^{(2)},$$

em que  $\mathcal{H}$  é uma matriz polinomial, de determinante constante e não nulo. Os índices parciais da factorização são univocamente determinados por  $\mathcal{A}$  e por  $p$ .

A matriz  $\mathcal{H}$  referida no teorema anterior é uma matriz polinomial triangular superior por blocos, os blocos da diagonal principal são constantes e têm dimensão igual à multiplicidade do respectivo índice parcial, as entradas não nulas,  $p_{ij}$ , são polinómios de grau inferior ou igual a  $\kappa_i - \kappa_j$ .

Recorde-se que  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , com  $X$  e  $Y$  espaços vectoriais normados, diz-se um *operador de Fredholm* se forem satisfeitas as condições seguintes:

- (i)  $\text{im } T$  é fechado em  $Y$ ,
- (ii)  $\dim \ker T < \infty$  e  $\text{codim im } T < \infty$ .

Sendo  $T$  um operador de Fredholm, ao número inteiro

$$\text{ind } T = \dim \ker T - \text{codim } \text{im } T,$$

chama-se índice de  $T$ .

De seguida serão enunciados alguns resultados igualmente importantes que podem ser consultados, por exemplo, em [4] e [17].

**Teorema 1.4.3** *Sejam  $p \in (1, \infty)$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}L_{\infty}^{n \times n}(\mathbb{T})$  e  $T_{\mathcal{A}}$  o operador integral singular em  $L_p^n(\mathbb{T})$  definido por*

$$T_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}P_+ + P_-. \quad (4)$$

*Então é condição necessária e suficiente para que  $\mathcal{A}$  admita uma factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$  que  $T_{\mathcal{A}}$  seja um operador de Fredholm em  $L_p^n(\mathbb{T})$ .*

**Teorema 1.4.4** *Sejam  $p \in (1, \infty)$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}L_{\infty}^{n \times n}(\mathbb{T})$  e  $T_{\mathcal{A}}$  o operador integral singular em  $L_p^n(\mathbb{T})$  definido por (4). É condição necessária e suficiente para que  $\mathcal{A}$  admita uma factorização generalizada canónica em  $L_p(\mathbb{T})$  que o operador  $T_{\mathcal{A}}$  seja invertível em  $L_p^n(\mathbb{T})$ .*

**Teorema 1.4.5** *Sejam  $r \in (1, \infty)$  e  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}C^{n \times n}(\mathbb{T})$ . Então qualquer factorização generalizada de  $\mathcal{A}$  em  $L_r(\mathbb{T})$  é também uma factorização generalizada de  $\mathcal{A}$  em  $L_p(\mathbb{T})$ , para qualquer  $p \in (1, \infty)$ .*

**Teorema 1.4.6** *Uma função matricial contínua  $\mathcal{A} \in C^{n \times n}(\mathbb{T})$  admite uma factorização generalizada no espaço  $L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , se e só se for não singular em  $\mathbb{T}$  e, neste caso, os factores externos da factorização pertencem a cada espaço  $L_r(\mathbb{T})$ ,  $r \in (1, \infty)$ , embora não sejam necessariamente contínuos.*

Por este motivo, para  $\mathcal{A} \in C^{n \times n}(\mathbb{T})$  fala-se apenas de factorização de  $\mathcal{A}$  em vez de factorização  $\mathcal{A}$  em  $L_p(\mathbb{T})$ . Para além disso, se  $\mathcal{A} \in C^{n \times n}$ , onde  $\mathcal{C}$  é uma álgebra decomponível de funções contínuas em  $\mathbb{T}$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \overset{\circ}{\mathcal{C}}^-$ , com  $\mathcal{C}_+ = P_+ \mathcal{C}$  e  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_- = P_- \mathcal{C}$ , então  $\mathcal{A}_{\pm} \in C_{\pm}^{n \times n}$ , onde  $\mathcal{C}_- = \overset{\circ}{\mathcal{C}}_- \oplus \mathbb{C}$ .

O conceito de factorização generalizada em  $L_p(\Gamma)$  pode ser também definido no caso de  $\Gamma = \mathbb{R}$ . Como necessitaremos para a aplicação, que apresentaremos no Capítulo 3, de considerar operadores integrais singulares em  $L_2(\mathbb{R})$ , interessa definir esse conceito em  $L_2(\mathbb{R})$ , o que pode ser feito directamente a partir da correspondente definição de factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{T})$ , se usarmos o isomorfismo entre  $L_2(\mathbb{R})$  e  $L_2(\mathbb{T})$  (ver [7], p. 37) definido por

$$B\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi - 1} \varphi\left(i \frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right), \quad (5)$$

cujos inverso é dado por

$$B^{-1}\varphi(t) = \frac{2i}{t + i} \varphi\left(\frac{t + i}{t - i}\right). \quad (6)$$

Como é conhecido, a transformação de Fourier é um isomorfismo vectorial topológico em  $L_2(\mathbb{R})$ . Representaremos por  $\widehat{L}_2^{\pm}(\mathbb{R})$  os subespaços de  $L_2(\mathbb{R})$ , formados pelas transformadas de Fourier dos elementos de  $L_2^{\pm}(\mathbb{R})$ .

**Definição 1.4.7** *Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{G}L_{\infty}^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Diz-se que a função matricial  $\mathcal{A}$  admite uma factorização generalizada relativamente a  $L_2(\mathbb{R})$  se*

(i)  *$\mathcal{A}$  pode ser representada na forma*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-,$$

em que

$$(t + i)^{-1} \mathcal{A}_+^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^+(\mathbb{R})\right]^{n \times n}, \quad (t - i)^{-1} \mathcal{A}_-^{\pm 1} \in \left[\widehat{L}_2^-(\mathbb{R})\right]^{n \times n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

e  $\Lambda$  é um factor diagonal da forma

$$\Lambda = \text{diag} \{ \theta^{\kappa_1}, \dots, \theta^{\kappa_n} \}, \quad \theta(t) = \frac{t-i}{t+i},$$

e  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$  inteiros, sendo estes denominados índices parciais da factorização.

(ii) o operador linear definido por

$$\mathcal{A}_+ P_- \mathcal{A}_+^{-1}$$

representa um operador linear contínuo em  $L_2^n(\mathbb{R})$ .

O inteiro  $\kappa = \sum_{i=1}^n \kappa_i$  designa-se por *índice total* da factorização. Quando  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_-$  a factorização diz-se canónica.

Supondo que  $\mathcal{A}$  admite uma factorização generalizada, os índices parciais da factorização são univocamente determinados pela matriz  $\mathcal{A}$ .

Duas factorizações diferentes de  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \Lambda \mathcal{A}_-$  e  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}_+ \Lambda \tilde{\mathcal{A}}_-$ ) têm os factores  $\mathcal{A}_+$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}_+$  e  $\mathcal{A}_-$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}_-$  relacionados por um factor matricial cujos elementos são funções racionais.

Em particular, se  $\mathcal{A}$  admite factorização canónica, há unicidade dos factores, a menos de um factor multiplicativo constante matricial.

## 1.5 Operadores integrais singulares emparelhados

Consideremos o seguinte resultado da teoria dos operadores integrais singulares, que é de extrema utilidade para o nosso propósito e pode ser consultado em [17].

**Teorema 1.5.1** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$  e considere-se em  $L_p^n(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , o operador*

$$T_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-.$$

Então o operador  $T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  é de Fredholm em  $L_p^n(\mathbb{T})$  se e só se são válidas as seguintes condições:

(i)  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$ ,

(ii)  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ .

No caso em que  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ , digamos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$ ,  $\Lambda = \text{diag} \{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ , na qual os factores externos são limitados, então

$$\ker T_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{\varphi : \varphi = (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) p, p \in \mathfrak{P}\}, \quad (7)$$

onde

$$\mathfrak{P} = \{p \in L_p^n(\mathbb{T}) : p_i \in P^{\kappa_i-1} \text{ se } \kappa_i \in \mathbb{N} \text{ ou } p_i \equiv 0 \text{ se } \kappa_i \leq 0\}, \quad (8)$$

e  $P^{\kappa_i-1}$  designa o espaço dos polinómios com grau menor ou igual a  $\kappa_i - 1 \in \mathbb{N}_0$ .

É possível considerar o análogo do teorema anterior quando  $\Gamma = \mathbb{R}$  e  $p = 2$  devido ao isomorfismo (5).

**Teorema 1.5.2** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$  e considere-se em  $L_2^n(\mathbb{R})$  o operador*

$$T_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-.$$

*O operador  $T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  é um operador de Fredholm em  $L_2^n(\mathbb{R})$  se e só se:*

(i)  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}L_\infty^{n \times n}(\mathbb{R})$ ,

(ii)  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$ .

*No caso em que  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$ ,  $\Lambda = \text{diag} \{\theta^{\kappa_1}, \dots, \theta^{\kappa_n}\}$ ,  $\theta(t) = \frac{t-i}{t+i}$ , então*

$$\ker T_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \{\varphi : \varphi = (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) v, v \in \mathfrak{P}\},$$

onde

$$\mathfrak{P} = \left\{ v \in L_2^n(\mathbb{R}) : v_j = r_+ p_j \left( \frac{t-i}{t+i} \right), j = 1, \dots, n \right\}, r_+(t) = (t+i)^{-1},$$

com  $p_j \in P^{\kappa_j-1}$  se  $\kappa_j \in \mathbb{N}$  ou  $p_j \equiv 0$  se  $\kappa_j \leq 0$ , onde  $P^{\kappa_j-1}$  denota o espaço dos polinómios com grau menor ou igual a  $\kappa_j - 1 \in \mathbb{N}_0$ .

## 1.6 Função de deslocamento

Nesta secção vamos apresentar alguns resultados sobre deslocamentos, a sua classificação e propriedades, que podem ser consultados em [9], [13] e [15].

### 1.6.1 Algumas propriedades dos deslocamentos. Deslocamentos de Carleman

**Definição 1.6.1** *Seja  $\Gamma$  uma curva simples orientada, fechada ou aberta, chama-se função de deslocamento ou simplesmente deslocamento a um homeomorfismo  $\alpha(t) : \Gamma \rightarrow \Gamma$ .*

É assumido que o deslocamento  $\alpha(t)$  tem derivada  $\alpha'(t)$  que satisfaz a condição de Hölder, para  $\forall t \in \Gamma$ , e  $\alpha'(t) \neq 0$ , também para  $\forall t \in \Gamma$ .

**Definição 1.6.2** *Um ponto  $t_0 \in \Gamma$  diz-se ponto fixo do deslocamento  $\alpha(t)$  se*

$$\alpha(t_0) = t_0.$$

Qualquer deslocamento  $\alpha(t)$  pode preservar ou inverter a orientação considerada na curva  $\Gamma$ , e pode ou não ter pontos fixos em  $\Gamma$ .

Chamamos *deslocamento directo* a um deslocamento que preserva a orientação sobre  $\Gamma$  e *deslocamento inverso* a um deslocamento que inverte a orientação.

**Definição 1.6.3** Um deslocamento  $\alpha(t)$  diz-se um deslocamento de Carleman se satisfaz a condição de Carleman para algum  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$\alpha_n(t) \equiv t, \quad t \in \Gamma, \quad (9)$$

onde  $\alpha_1(t) = \alpha(t)$ ,  $\alpha_k(t) \equiv \alpha[\alpha_{k-1}(t)]$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Ao menor valor de  $n \in \mathbb{N}$  que verifica a relação (9) chama-se ordem do deslocamento.

**Exemplo 1.6.4** Seja  $\Gamma = \mathbb{T}$ , então  $\alpha(t) = te^{\pi i}$  é um deslocamento de Carleman de segunda ordem, que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$ . Em geral,  $\alpha(t) = te^{\frac{2\pi i}{n}}$  é um deslocamento de Carleman de ordem  $n$ , que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$ . A função  $\alpha(t) = \frac{1}{t}$  é um deslocamento de Carleman de segunda ordem que muda a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

Seja  $\Gamma$  uma curva simples fechada orientada.

**Lema 1.6.5** Um deslocamento de Carleman,  $\alpha(t)$ , de ordem  $n \geq 2$  que preserva a orientação sobre  $\Gamma$  não tem pontos fixos:

$$\alpha(t) \neq t, \quad t \in \Gamma.$$

**Dem.:** Para qualquer deslocamento de Carleman de ordem  $n$  que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$  é possível indicar um ponto  $t_0$  e um número inteiro  $k$  para que os pontos

$$t_0, \alpha_k(t_0) = t_1, \alpha_{2k}(t_0) = t_2, \dots, \alpha_{(n-1)k}(t_0) = t_{n-1}$$

estejam ordenados no sentido positivo (ver [15]) e o número  $k$  seja definido pela condição  $t_2, t_3, t_{n-1} \notin (t_0, t_1)$ , onde  $(t_0, t_1)$  denota o arco da curva  $\Gamma$  entre  $t_0$  e  $t_1$  no sentido positivo.

Suponhamos que existe um ponto  $t^*$  tal que  $\alpha(t^*) = t^* \in (t_j, t_{j+1})$ . Então  $\alpha_k(t^*) = \alpha(t^*) = t^* \in (\alpha_k(t_j), \alpha_k(t_{j+1})) = (t_{j+1}, t_{j+2})$ , o que não é possível, visto que  $t^* \in (t_j, t_{j+1})$ . ■

**Lema 1.6.6** *Um deslocamento de Carleman, que muda a orientação de  $\Gamma$ , tem exactamente dois pontos fixos.*

**Dem.:** Seja  $t_1$  um ponto não fixo arbitrário, tal que  $\alpha(t_1) = t'_1$ . Vamos provar que em cada um dos arcos orientados no sentido positivo  $(t_1, t'_1)$  e  $(t'_1, t_1)$  existe um ponto fixo do deslocamento  $\alpha(t)$ .

Seja  $t_2$  o ponto médio do arco orientado  $(t_1, t'_1)$ , i.e., o ponto que divide o arco em duas partes de igual comprimento, e seja  $t'_2 = \alpha(t_2)$ . A demonstração fica concluída se  $\alpha(t_2) = t_2$ . Se  $\alpha(t_2) \neq t_2$ , vamos supor que o arco  $(t_2, t'_2)$  tem a mesma orientação que o arco  $(t_1, t'_1)$ . Caso contrário, considera-se o arco  $(t'_2, t_2)$ .

Designa-se por  $t_3$  o ponto médio do arco orientado  $(t_2, t'_2)$ . Como resultado, obtemos uma sequência de arcos encaixados  $(t_k, t'_k)$ ,  $t'_k = \alpha(t_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  e  $|t_k - t'_k| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Seja  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \lim_{k \rightarrow \infty} t'_k = t^*$ . Passando o limite para a igualdade  $t'_k = \alpha(t_k)$  e usando a continuidade de  $\alpha(t)$ , obtemos

$$t^* = \lim_{k \rightarrow \infty} t'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) = \alpha\left(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k\right) = \alpha(t^*),$$

o que significa que  $t^*$  é um ponto fixo.

Analogamente para o arco  $(t'_1, t_1)$ .

É evidente que o deslocamento  $\alpha(t)$  não pode ter três pontos fixos, pois três pontos fixos distintos determinam a orientação sobre  $\Gamma$ . ■

**Lema 1.6.7** *Não existem deslocamentos de Carleman de ordem  $n > 2$  que mudam a orientação de  $\Gamma$ .*

**Dem.:** Naturalmente que, se  $\alpha(t)$  é um deslocamento de Carleman de ordem  $n > 2$  que muda a orientação sobre  $\Gamma$ ,  $n$  não pode ser ímpar, pois nesse caso  $\alpha_n(t)$  movimenta-se no sentido contrário ao movimento do ponto  $t$ , o que contradiz o facto de  $\alpha_n(t) \equiv t$ ,  $t \in \Gamma$ .

No caso de  $n$  ser um número par,  $\alpha_2(t)$  é um deslocamento de Carleman de ordem  $\frac{n}{2}$  ( $\alpha_{2\frac{n}{2}}(t) = \alpha_n(t) \equiv t$ ) que preserva a orientação sobre  $\Gamma$ . Mas o deslocamento inicial  $\alpha(t)$  tem um ponto fixo  $t_0$ , pois é um deslocamento inverso. Consequentemente,  $\alpha_2(t_0) = t_0$ , o que contradiz o Lema 1.6.5. ■

**Corolário 1.6.8** *Se  $\Gamma$  é uma curva simétrica relativamente ao eixo real, então não existem deslocamentos de Carleman  $\alpha(t)$  de ordem  $n > 2$  tais que*

$$\overline{\alpha(t)} = \alpha(\bar{t}). \quad (10)$$

**Dem.:** Suponhamos, com vista ao absurdo, que esse deslocamento existe. Se  $n > 2$ , então o deslocamento só pode preservar a orientação sobre  $\Gamma$ . Consequentemente, o deslocamento  $\overline{\alpha(t)}$  muda a orientação sobre  $\Gamma$  e por (10) satisfaz a condição

$$\underbrace{\overline{\alpha[\overline{\alpha[\dots[\overline{\alpha(t)}]\dots]}}]}_n = \begin{cases} t, & \text{se } n \text{ é par} \\ \bar{t}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mas neste caso, o deslocamento  $\overline{\alpha(t)}$  altera a orientação e tem ordem  $n > 2$ , se  $n$  é par, e ordem  $2n > 2$ , se  $n$  é ímpar, o que não é possível em qualquer caso, pelo lema anterior. ■

No caso em que  $\Gamma$  é uma curva aberta, o conjunto de deslocamentos de Carleman é mais pobre. Não existem deslocamentos de Carleman que preservam a orientação sobre  $\Gamma$  e os deslocamentos de Carleman que mudam a orientação sobre  $\Gamma$  só podem ser de segunda ordem. Estes deslocamentos têm um único ponto fixo em  $\Gamma$  e, se  $t_1$  e  $t_2$  são os pontos extremidades de  $\Gamma$ , então  $\alpha(t_1) = t_2$  e  $\alpha(t_2) = t_1$ .

**Exemplo 1.6.9** *Seja  $\Gamma = \mathbb{R}$ . As funções de deslocamento*

$$\alpha(t) = -t + h, h \in \mathbb{R},$$

$e$

$$\alpha(t) = \begin{cases} -2t, & t \leq 0 \\ t, & t > 0 \\ -\frac{t}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

são deslocamentos de Carleman, de segunda ordem.

### 1.6.2 Classificação de grupos finitos de deslocamentos em curvas abertas ou fechadas

Nesta subsecção apresentam-se alguns resultados relativos à classificação de um grupo finito de deslocamentos, que podem ser consultados, por exemplo, em [9].

Seja  $\Gamma$  uma curva fechada e orientada e  $G = \{e, v^1, v^2, \dots, v^p\}$  um grupo finito de deslocamentos que preservam ou mudam a orientação sobre  $\Gamma$ , com identidade  $e$ . O lema seguinte descreve a classificação deste grupo.

**Lema 1.6.10** *São válidas as seguintes afirmações:*

a) *um grupo finito constituído apenas por deslocamentos directos é um grupo cíclico:*

$$G = \{e, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^p\},$$

onde  $\alpha_k(t) \equiv \alpha[\alpha_{k-1}(t)]$ ,  $k = 2, \dots, p$ ;

b) *um grupo finito constituído simultaneamente por deslocamentos directos e inversos tem a forma:*

$$G = \{e, \alpha^1, \dots, \alpha_{n-1}^1, \alpha^2, \alpha^1\alpha^2, \dots, \alpha_{n-1}^1\alpha^2\}, \quad (11)$$

onde  $\alpha^1(t)$  preserva a orientação sobre  $\Gamma$  e  $\alpha^2(t)$  muda-a.

**Dem.:** a) Seja  $t_0$  um ponto arbitrário de  $\Gamma$ . O conjunto

$$\{t_0, v^1(t_0), v^2(t_0), \dots, v^p(t_0)\}$$

é constituído por  $p + 1$  pontos diferentes, pois se  $v^i(t_0) = v^j(t_0)$ , para alguns  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $i \neq j$ , então  $t_0 = (v^i)^{-1}[v^j(t_0)]$  seria um ponto fixo do deslocamento  $(v^i)^{-1}[v^j(t)]$ , que preserva a orientação sobre  $\Gamma$ . Uma vez que  $G$  é um grupo finito, o deslocamento  $(v^i)^{-1}[v^j(t)]$  só poderá ser um deslocamento de Carleman de alguma ordem  $n$  e  $t_0 = (v^i)^{-1}[v^j(t_0)]$  um ponto fixo desse deslocamento. O que é impossível, pelo Lema 1.6.5. Assim,  $v^i(t_0) \neq v^j(t_0)$ ,  $i \neq j$ .

Alterando, se necessário, a ordem dos elementos do grupo, podemos considerar a ordem

$$t_0 \prec v^1(t_0) \prec v^2(t_0) \prec \dots \prec v^p(t_0) \quad (12)$$

no sentido positivo. Aplicando o deslocamento  $v^1(t)$ , obtemos

$$v^1(t_0) \prec v^1[v^1(t_0)] \prec v^1[v^2(t_0)] \prec \dots \prec v^1[v^p(t_0)]. \quad (13)$$

Como o grupo é finito, os elementos dos conjuntos em (12) e (13) coincidem. Consequentemente,  $v^2(t_0) = v^1v^1(t_0)$ . De modo idêntico, se verifica que  $v^k(t_0) = [v^1(t_0)]^k$ , para qualquer inteiro  $k$ . Tendo em conta que  $t_0$  é um ponto arbitrário de  $\Gamma$ , resulta que  $v^k(t) = [v^1(t)]^k$ ,  $t \in \Gamma$ . Portanto,  $G = \{e, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha_{n-1}\}$  com  $\alpha = v^1(t)$ .

b) Seja  $\alpha^1$  um deslocamento de Carleman directo de ordem  $n$  e  $\alpha^2$  um deslocamento de Carleman inverso.

Provámos em a) que um subgrupo finito  $G_0$  de deslocamentos que preservam a orientação tem a forma  $G_0 = \{e, \alpha^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{n-1}^1\}$ .

Sejam

$$\alpha^2, \alpha^{2(2)}, \dots, \alpha^{2(s)}$$

deslocamentos inversos do grupo  $G$ . Para algum  $i \neq 1$ , o deslocamento  $\alpha^{2(i)}(\alpha^2)^{-1}$  preserva a orientação sobre  $\Gamma$  e, consequentemente,  $\alpha^{2(i)}(\alpha^2)^{-1} =$

$\alpha_k^1$ , para algum  $k$ , i.e.,

$$\alpha^{2(i)} = \alpha_k^1(\alpha^2), i = 2, 3, \dots, s.$$

■

**Corolário 1.6.11** *Se  $\alpha(t)$  e  $\gamma(t)$  são dois deslocamentos de Carleman de segunda ordem que comutam e preservam a orientação sobre  $\Gamma$ , então eles coincidem  $\alpha(t) \equiv \gamma(t)$ .*

**Dem.:** Temos que  $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ ,  $\gamma[\gamma(t)] \equiv t$  e  $\alpha[\gamma(t)] = \gamma[\alpha(t)]$ . Consideremos o grupo finito  $G = \{e, \alpha, \gamma, \alpha\gamma\}$ . Pelo Lema 1.6.10, este grupo tem a forma  $G = \{e, \mu, \mu_2, \mu_3\}$ , com  $\mu_2 = \mu(\mu)$ ,  $\mu_3 = \mu(\mu_2)$ , onde apenas só uma destas três possibilidades pode acontecer:

$$1)\mu = \alpha; \quad 2)\mu = \gamma; \quad 3)\mu = \alpha\gamma.$$

Considerando o primeiro caso:  $\mu = \alpha$ ,  $\mu_2 = \alpha\alpha = e$  e  $\mu_3 = \alpha$ . Assim, temos que  $\alpha = \gamma$  e que  $G = \{e, \alpha\}$ . De igual modo se verifica, para os outros dois casos, que  $\alpha = \gamma$ . ■

**Lema 1.6.12** *Seja  $\alpha^2(t)$  um deslocamento de Carleman que muda a orientação sobre  $\Gamma$  e  $\alpha^1(t)$  um deslocamento de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação sobre  $\Gamma$  e, para algum  $j$ ,*

$$\alpha^2\alpha^1 = \alpha_j^1\alpha^2, \quad 1 < j \leq n - 1.$$

Então  $j = n - 1$ .

**Dem.:** Como  $\alpha^2(t)$  é um deslocamento de Carleman que muda a orientação sobre  $\Gamma$  então, pelo Lema 1.6.7,  $\alpha_2^2(t) = t$ . Seja  $\gamma = \alpha^2\alpha^1$ , o qual é obviamente um deslocamento que altera a orientação sobre  $\Gamma$ . Então

$$\gamma_2 = \alpha^2\alpha^1\alpha^2\alpha^1 = \alpha_j^1\alpha^2\alpha^2\alpha^1 = \alpha_j^1\alpha^1 = \alpha_{j+1}^1, \quad \text{para algum } j, \quad 1 < j \leq n - 1,$$

de onde resulta que  $\gamma_{2n}(t) = \alpha^1_{(j+1)n}(t) \equiv t$ . Consequentemente,  $\gamma(t)$  é um deslocamento de Carleman de ordem menor ou igual a  $2n$ , que muda a orientação sobre  $\Gamma$ . Assim, necessariamente,  $\gamma_2(t) \equiv t$  e daí  $\alpha^1_{j+1} = e$ . Como  $\alpha$  é um deslocamento de ordem  $n$  então  $j = n - 1$ . ■

**Corolário 1.6.13** *Seja  $\alpha^1(t)$  um deslocamento de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação e  $\alpha^2(t)$  um deslocamento de Carleman que muda a orientação sobre  $\Gamma$ . O grupo gerado por esses dois deslocamentos e pelas respectivas iterações é finito se e só se*

$$\alpha^2\alpha^1 = \alpha^1_{n-1}\alpha^2. \quad (14)$$

**Dem.:** A condição suficiente é óbvia. Provemos a condição necessária.

De acordo com o Lema 1.6.10, o grupo  $G$  gerado por  $\alpha^1, \alpha^2$  e as respectivas iterações tem a forma (11). Visto que  $G$  é um grupo finito e  $\alpha^2\alpha^1 \in G$ , então  $\alpha^2\alpha^1 = \alpha^1_j\alpha^2$ , para algum  $j$ . Pelo lema anterior, necessariamente  $j = n - 1$ .

■

Seja  $\Gamma$  uma curva aberta. Vamos classificar os grupos finitos de deslocamentos em  $\Gamma$ .

**Lema 1.6.14** *Um grupo finito de deslocamentos numa curva aberta tem uma única forma:*

$$G = \{e, \alpha^2\},$$

onde  $\alpha^2(t)$  é um deslocamento de Carleman que muda a orientação sobre  $\Gamma$ .

**Dem.:** Seja  $G$  um grupo finito de deslocamentos e  $\alpha^2 \in G$ . Visto que a curva é aberta, o deslocamento  $\alpha^2(t) \neq e$  muda a orientação sobre  $\Gamma$  e só pode ter ordem 2. Assim,  $\alpha^2[\alpha^2(t)] \equiv t$ .

Suponhamos que existe  $\delta \in G$  e  $\delta \neq \alpha^2$ . Sabemos que  $\delta(t)$  altera a orientação sobre  $\Gamma$  e  $\delta[\delta(t)] \equiv t$ . Como tal, o deslocamento  $\delta\alpha^2$  preserva a orientação sobre a curva aberta  $\Gamma$  e é um deslocamento de Carleman, o que só é possível se  $\delta\alpha^2 = e$ , ou seja,  $\delta = \alpha^2$ . ■

### 1.6.3 Deslocamentos lineares fraccionários de Carleman

Consideremos, em  $\mathbb{T}$ , a transformação linear fraccionária na forma geral

$$\alpha(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

onde  $ad - bc \neq 0$ ,  $c \neq 0$  e  $\frac{d}{c} \notin \mathbb{T}$ .

Como se sabe (ver [2]), para que  $\alpha$  seja um deslocamento em  $\mathbb{T}$ , então

$$\alpha(t) = \frac{1}{t}, \quad (15)$$

ou

$$\alpha(t) = \theta \frac{t - \beta}{\beta t - 1}, \quad \theta \in \mathbb{T}, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}. \quad (16)$$

Note-se que (15) pode ser considerado como o caso limite do anterior quando  $\theta = 1$  e  $\beta$  tende para o infinito ao longo do eixo imaginário.

Estamos interessados em estudar deslocamentos lineares fraccionários em  $\mathbb{T}$  que satisfaçam a condição de Carleman, para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.6.15** *Um deslocamento linear fraccionário da forma (16) é um deslocamento de Carleman de segunda ordem em  $\mathbb{T}$  se e só se  $\theta = 1$ :*

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1}, \quad t \in \mathbb{T}, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}. \quad (17)$$

A escolha da constante  $\beta$  determina a natureza do deslocamento  $\alpha$ : se  $|\beta| < 1$  então o deslocamento  $\alpha$  preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$  e se  $|\beta| > 1$

então  $\alpha$  é um deslocamento que muda a orientação sobre  $\mathbb{T}$ . Claro que, (15) é um deslocamento que muda a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

Convém assinalar que se  $\beta \neq 0$ , considerando o deslocamento (17) como uma função definida em  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\beta} \right\}$ , então o deslocamento tem dois pontos fixos, raízes do polinómio

$$p(t) = \bar{\beta}t^2 - 2t + \beta.$$

São eles

$$t_{\pm} = \frac{1 \pm \lambda}{\beta}, \quad \lambda = \sqrt{1 - |\beta|^2}.$$

Se  $\alpha$  é um deslocamento que preserva a orientação então  $t_{\pm} \in \mathbb{T}_{\pm}$ . No caso em  $\alpha$  é um deslocamento que muda a orientação tem-se que  $t_{\pm} \in \mathbb{T}$ .

No caso particular em que  $\beta = 0$ , isto é, se  $\alpha(t) = -t$ , consideraremos que os pontos fixos são  $t_+ = 0$  e  $t_- = \infty$ .

Note-se que não estamos a usar o conceito de ponto fixo no sentido da Definição 1.6.2, pois nesse caso, para  $|\beta| < 1$  e  $\beta = 0$  o deslocamento (17) não tinha pontos fixos. Estamos a referir-nos aos pontos fixos de  $\alpha$  como uma função definida em  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\beta} \right\}$ .

O deslocamento (17) admite a factorização

$$\alpha(t) = \alpha_+(t)t^{\kappa}\alpha_-(t), \quad (18)$$

em relação a  $\mathbb{T}$ , onde

$$\alpha_+(t) = \frac{\lambda}{\bar{\beta}t - 1}, \quad \alpha_-(t) = \frac{t - \beta}{\lambda t}, \quad \lambda = \sqrt{1 - |\beta|^2}, \quad \kappa = 1, \quad (19)$$

se  $|\beta| < 1$  e

$$\alpha_+(t) = \frac{t - \beta}{i\lambda}, \quad \alpha_-(t) = \frac{i\lambda t}{\bar{\beta}t - 1}, \quad \lambda = \sqrt{|\beta|^2 - 1}, \quad \kappa = -1, \quad (20)$$

se  $|\beta| > 1$ . Em ambos os casos, as funções  $\alpha_+(t)$  e  $\alpha_-(t)$  são analíticas nos domínios  $\mathbb{T}_+$  e  $\mathbb{T}_-$ , respectivamente, e não têm zeros.

O índice desta factorização é dado pelo factor central,  $\text{ind}_{\mathbb{T}} \alpha(t) = \kappa$ , e expressa o facto do deslocamento  $\alpha$  preservar ou mudar a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

Verifica-se ainda que

$$\alpha_{\pm}(\alpha(t)) = [\alpha_{\pm}(t)]^{-1}, \quad \text{se } |\beta| < 1,$$

e

$$\alpha_{\pm}(\alpha(t)) = \alpha_{\mp}(t), \quad \text{se } |\beta| > 1.$$

Foi anteriormente provado, no Lema 1.6.7, que não existem deslocamentos de Carleman de ordem superior a dois que mudem a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

Vamos, seguidamente, caracterizar os deslocamentos lineares fraccionários de Carleman, de ordem  $n > 2$ , que preservam a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

**Proposição 1.6.16** *Se  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  é um deslocamento linear fraccionário de Carleman, que preserve a orientação, de ordem  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , então pode ser representado na forma*

$$\alpha(t) = \frac{(\omega t_- - t_+)t + (1 - \omega)t_- t_+}{(\omega - 1)t + t_- - \omega t_+}, \quad (21)$$

onde a constante  $\omega$  é a raiz primitiva de ordem  $n$  da unidade:

$$\omega^n = 1, \quad \omega^m \neq 1, \quad \forall m \in \mathbb{N} : m < n,$$

e os complexos  $t_{\pm} \in \mathbb{T}_{\pm}$ , os pontos fixos de  $\alpha$ , satisfazem a igualdade

$$t_+ \overline{t_-} = 1.$$

**Dem.:** Como se sabe (ver [6] e [11]), qualquer deslocamento linear fraccionário da circunferência unitária  $\mathbb{T}$  admite a representação (21). Basta em (16) tomar

$$\theta = \frac{\omega t_- - t_+}{\omega t_+ - t_-} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{(\omega - 1)t_- t_+}{\omega t_- - t_+},$$

onde  $\omega$  é determinada de maneira única por  $\alpha$ . Por indução matemática prova-se facilmente que

$$\alpha_n(t) = \frac{(\omega^n t_- - t_+)t + (1 - \omega^n)t_- t_+}{(\omega^n - 1)t + t_- - \omega^n t_+}. \quad (22)$$

Como  $\alpha$  é um deslocamento de Carleman de ordem  $n$ ,  $\alpha_n(t) \equiv t$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , podemos concluir que  $\omega$  é uma raiz primitiva de ordem  $n$  da unidade.

Relativamente à segunda afirmação do enunciado, seja  $t_+ \in \mathbb{T}_+$  um dos pontos fixos do deslocamento e  $t' = \frac{1}{t_+} \in \mathbb{T}_-$  o seu simétrico em relação a  $\mathbb{T}$ , então, atendendo a que um deslocamento linear fraccionário transforma pontos simétricos em pontos simétricos em relação a  $\mathbb{T}$ , podemos concluir que  $\alpha(t') = t'$  e, portanto,  $t_- = t'$ . ■

O deslocamento (21) satisfaz ainda as seguintes propriedades:

**Proposição 1.6.17** *O deslocamento (21) admite a factorização*

$$\alpha(t) = \alpha_+(t)t\alpha_-(t),$$

em relação a  $\mathbb{T}$ , onde

$$\alpha_+(t) = \frac{\omega(t_- - t_+)}{(\omega - 1)t + t_- - \omega t_+}, \quad (23)$$

$$\alpha_-(t) = \frac{(\omega t_- - t_+)t + (1 - \omega)t_- t_+}{\omega(t_- - t_+)t}. \quad (24)$$

*Os factores externos da factorização satisfazem as igualdades*

$$\alpha_-(t_-) = 1, \quad \alpha_+(t_+) = \omega \quad (25)$$

e

$$\alpha_{\pm}\alpha_{\pm}(\alpha) \dots \alpha_{\pm}(\alpha_{n-1}) \equiv 1, \quad t \in \mathbb{T}.$$

**Dem.:** Facilmente se verifica que  $\alpha = \alpha_+ t \alpha_-$  é uma factorização de  $\alpha$ , que  $\alpha_-(t_-) = 1$  e que  $\alpha_+(t_+) = \omega$ .

Atendendo à condição de Carleman  $\alpha_n(t) \equiv t$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , pode concluir-se que

$$\alpha_{\pm} \alpha_{\pm}(\alpha) \dots \alpha_{\pm}(\alpha_{n-1}) \equiv c, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Como  $\alpha_-(t_-) = 1$ , é possível afirmar que  $c = 1$ . ■

**Proposição 1.6.18** *As funções (23) e (24) satisfazem as igualdades*

$$\begin{aligned} \alpha_+ \alpha_+(\alpha) \dots \alpha_+(\alpha_m) &= \frac{\omega^{m+1}(t_- - t_+)}{(\omega^{m+1} - 1)t + t_- - \omega^{m+1}t_+}, \\ \alpha_- \alpha_-(\alpha) \dots \alpha_-(\alpha_m) &= \frac{(\omega^{m+1}t_- - t_+)t + (1 - \omega^{m+1})t_- t_+}{\omega^{m+1}(t_- - t_+)t}, \end{aligned}$$

onde  $m \in \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n - 1$  e  $n$  é a ordem do deslocamento (21).

**Dem.:** Por (22)

$$\alpha_{m+1}(t) = \frac{(\omega^{m+1}t_- - t_+)t + (1 - \omega^{m+1})t_- t_+}{(\omega^{m+1} - 1)t + t_- - \omega^{m+1}t_+}.$$

Então

$$\alpha_{m+1}(t) = \left[ \frac{\omega^{m+1}(t_- - t_+)}{(\omega^{m+1} - 1)t + t_- - \omega^{m+1}t_+} \right] t \left[ \frac{(\omega^{m+1}t_- - t_+)t + (1 - \omega^{m+1})t_- t_+}{\omega^{m+1}(t_- - t_+)t} \right]$$

e

$$\alpha_{m+1}(t) = [\alpha_+ \alpha_+(\alpha) \dots \alpha_+(\alpha_m)] t [\alpha_- \alpha_-(\alpha) \dots \alpha_-(\alpha_m)]$$

são duas factorizações de  $\alpha_{m+1}$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$ . Seguindo as ideias da demonstração anterior é agora possível afirmar que têm lugar as afirmações do enunciado. ■

**Proposição 1.6.19** *Seja  $\alpha^1(t)$  um deslocamento linear fraccionário de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação de  $\mathbb{T}$  e  $\alpha^2(t)$  um deslocamento linear fraccionário de Carleman que inverte a orientação de  $\mathbb{T}$ . Então o grupo  $G$  gerado por  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$  é finito se e só se*

$$t_{\pm} = \alpha^2(t_{\mp}), \quad (26)$$

onde  $t_{\pm} \in \mathbb{T}_{\pm}$  são os pontos fixos do deslocamento  $\alpha^1$ .

**Dem.:** De acordo com a igualdade (14),  $G$  é um grupo finito de deslocamentos se e só se  $\alpha^2\alpha^1 = \alpha_{n-1}^1\alpha^2$ . Assim, tem-se que

$$\alpha^2[\alpha^1(t_{\pm})] \equiv \alpha_{n-1}^1[\alpha^2(t_{\pm})],$$

o que é equivalente a

$$\alpha^2(t_{\pm}) \equiv \alpha_{n-1}^1[\alpha^2(t_{\pm})],$$

o que significa que  $\alpha^2(t_{\pm})$  são os pontos fixos de  $\alpha_{n-1}^1$ . Por outro lado,  $\alpha^1$  e  $\alpha_{n-1}^1$  têm os mesmos pontos fixos, pelo que os de  $\alpha^1$  são  $\alpha^2(t_{\pm}) \in \mathbb{T}_{\mp}$ . Portanto,  $t_{\pm} = \alpha^2(t_{\mp})$ .

Para provar a outra implicação, vamos escrever a relação (26) na seguinte forma

$$t_{\pm}(\bar{\beta}t_{\mp} - 1) = t_{\mp} - \beta, \quad |\beta| > 1.$$

Usando a Proposição (1.6.16) temos que,

$$\begin{aligned} (\alpha^2\alpha^1)(t) &= \alpha^2 \left[ \frac{(\omega t_- - t_+)t + (1 - \omega)t_-t_+}{(\omega - 1)t + t_- - \omega t_+} \right] = \\ &= \frac{[\omega(t_- - \beta) - (t_+ - \beta)]t - [-\omega t_+(t_- - \beta) + t_-(t_+ - \beta)]}{[\omega(\bar{\beta}t_- - 1) - (\bar{\beta}t_+ - 1)]t + [-\omega t_+(\bar{\beta}t_- - 1) - t_-(\bar{\beta}t_+ - 1)]}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\alpha_{n-1}^1 \alpha^2)(t) &= \alpha_{n-1}^1 \left( \frac{t - \beta}{\beta t - 1} \right) = \\ &= \frac{[\omega t_+ (\overline{\beta} t_- - 1) - t_- (\overline{\beta} t_+ - 1)] t + [-\omega t_+ (t_- - \beta) + t_- (t_+ - \beta)]}{[\omega (\overline{\beta} t_- - 1) - (\overline{\beta} t_+ - 1)] t + [-\omega (t_- - \beta) + (t_+ - \beta)]}, \end{aligned}$$

em que para obter a última igualdade usámos a conhecida fórmula (22) para iterações de um deslocamento de Carleman  $\alpha^1$ :

$$\alpha_n^1(t) = \frac{(\omega^n t_- - t_+) t + (1 - \omega^n) t_- t_+}{(\omega^n - 1) t + t_- - \omega^n t_+},$$

onde  $\omega$  é uma raiz primitiva de ordem  $n$  da unidade.

Como, por hipótese,  $t_{\pm}(\beta t_{\mp} - 1) = t_{\mp} - \beta$ ,  $|\beta| > 1$ , conclui-se que

$$\alpha^2 \alpha^1 = \alpha_{n-1}^1 \alpha^2,$$

ou seja,  $G$  é um grupo finito.

De modo idêntico se prova esta proposição para o caso em que tomamos  $\alpha^2$  como o deslocamento (15). ■

Como já foi referido anteriormente, para uma curva aberta  $\Gamma$  não existem deslocamentos de Carleman que preservam a orientação e os deslocamentos de Carleman que mudam a orientação de  $\Gamma$  são apenas de segunda ordem.

Na recta real, o deslocamento linear fraccionário de Carleman de segunda ordem, que muda a orientação sobre  $\mathbb{R}$ , tem a forma geral

$$\alpha(t) = -t + h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

## 1.7 Operador de deslocamento

Resta introduzir o operador de deslocamento.

Sejam  $\Gamma$  uma curva simples orientada, fechada ou aberta, e  $\alpha(t)$  um deslocamento tal que  $\alpha'(t) \neq 0$ , para  $\forall t \in \Gamma$ , que satisfaz a condição de Hölder para  $\forall t \in \Gamma$ .

O operador de deslocamento,  $W$ , define-se por

$$(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)).$$

Este operador satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $W$  é um operador linear limitado e continuamente invertível em  $L_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < \infty$ .
- (ii) Se  $\alpha_n(t) \equiv t$ ,  $t \in \Gamma$ , ( $\alpha$  é um deslocamento de Carleman de ordem  $n$ ) então  $W^n = I$ . Em particular, para  $n = 2$ , o operador  $W$  satisfaz a condição  $W^2 = I$ , i.e.,  $W$  é um operador involutivo.

As propriedades do operador  $W$  anteriormente mencionadas mantêm-se válidas quando este é considerado no espaço  $L_p^n(\Gamma)$ .

Vamos também considerar o operador de deslocamento com peso,  $U \in \mathcal{L}(L_p(\Gamma))$ , definido por

$$(U\varphi)(t) = u(t)(W\varphi)(t).$$

Nalguns casos particulares o operador de deslocamento e o operador integral singular com núcleo de Cauchy comutam, ou anticomutam, considerando um operador de deslocamento linear fraccionário com um peso  $u(t)$  adequado (ver [16]).

No caso em que  $\Gamma = \mathbb{T}$  consideremos o operador de deslocamento linear fraccionário de Carleman com peso,  $U : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$  :

$$(U\varphi)(t) = u(t)\varphi(\alpha(t)), \tag{27}$$

em que

$$u(t) = \begin{cases} \omega^{-1}\alpha_+(t), & \text{quando } \alpha \text{ é definido por (21),} \\ t^{-1}\alpha_-(t), & \text{quando } \alpha \text{ é definido por (17) e } |\beta| > 1, \\ t^{-1}, & \text{quando } \alpha \text{ é definido por (15),} \end{cases} \quad (28)$$

onde  $\alpha_+$  é o factor externo esquerdo (23) da factorização do deslocamento (21) e  $\alpha_-$  é o factor externo direito da factorização do deslocamento (17) apresentada em (18), se  $|\beta| > 1$ .

O operador  $U$ , definido por (27)-(28), satisfaz as propriedades:

$$(i) U^n = I, \quad (ii) US = \pm SU, \quad (29)$$

onde  $n$  é a ordem do deslocamento  $\alpha$  e em (ii) o sinal é  $+$  ou  $-$  consoante  $\alpha$  é um deslocamento que preserva ou muda a orientação sobre  $\mathbb{T}$ , respectivamente.

As demonstrações das propriedades acerca do operador  $U$  que acabámos de expor podem encontradas em [16] (ver também [11] e [13]).

Vamos agora considerar o operador de deslocamento na recta real,  $U : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ,

$$(U\varphi)(t) = \varphi(-t + h), \quad h \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

Este operador satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) U^2 = I, \quad (ii) US = -SU \quad (31)$$

Note-se que ao operador de deslocamento na recta real definido por (30) e  $h \neq 0$  corresponde o operador de deslocamento linear fraccionário que inverte a orientação na circunferência unitária definido por

$$(U\varphi)(t) = t^{-1}\alpha_-(t)\varphi(\alpha(t)), \quad (32)$$

onde  $\alpha$  é dado por (17) e  $|\beta| > 1$  e  $\alpha_-$  é o factor externo direito da factorização de  $\alpha$  apresentada em (18), para  $|\beta| > 1$ .

De facto, considere-se o operador  $B$  definido por (5), o seu inverso  $B^{-1}$  definido por (6) e o operador  $U$  dado por (30) e  $h \neq 0$ . Determinemos o operador

$$BUB^{-1} : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T}).$$

Obtemos

$$(BUB^{-1}\varphi)(t) = \frac{i\sqrt{|1 - \frac{2i}{h}|^2 - 1}}{(1 + \frac{2i}{h})t - 1} \varphi\left(\frac{t - 1 + \frac{2i}{h}}{(1 + \frac{2i}{h})t - 1}\right),$$

i.e., o operador definido por (32) com  $\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1}$ ,  $\beta = 1 - \frac{2i}{h}$ .

Ao operador de deslocamento definido por (30) e  $h = 0$  :

$$(U\varphi)(t) = \varphi(-t),$$

corresponde o operador de deslocamento linear fraccionário que inverte a orientação na circunferência unitária definido por

$$(U\varphi)(t) = t^{-1}\varphi(\alpha(t)), \tag{33}$$

onde o deslocamento  $\alpha$  é dado por (15).

## 2 Operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman na circunferência unitária

**Definição 2.0.1** *Um operador actuando em  $L_p(\mathbb{T})$  da forma*

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i0}U_1^i + a_{i1}U_1^iU_2), \quad n \geq 1,$$

onde  $a_{ij} \in L_\infty(\mathbb{T})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $j = 0, 1$ , são funções definidas em  $\mathbb{T}$  e  $U_{1,2}$  são operadores de deslocamento de Carleman, designa-se por operador funcional e as funções  $a_{ij}$  por coeficientes do operador  $A$ .

Assume-se que  $U_1$  e  $U_2$  são operadores de deslocamento com peso satisfazendo as propriedades (29), o primeiro associado a um deslocamento linear fraccionário de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação sobre  $\mathbb{T}$  e o segundo associado a um deslocamento linear fraccionário de Carleman que muda a orientação sobre  $\mathbb{T}$ .

Usando algumas propriedades da Secção 1.6.3 derivam-se relações entre os operadores de deslocamento de Carleman  $U_1$  e  $U_2$ , que são apresentadas na seguinte proposição:

**Proposição 2.0.2** *Seja  $\alpha^1$  um deslocamento linear fraccionário de Carleman, de ordem  $n$ , que preserva a orientação de  $\mathbb{T}$  e  $\alpha^2$  um deslocamento linear fraccionário de Carleman que muda a orientação de  $\mathbb{T}$ . Se  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$  geram o grupo finito  $G$ , descrito no Lema 1.6.10,*

$$G = \{e, \alpha^1, \dots, \alpha_{n-1}^1, \alpha^2, \alpha^1\alpha^2, \dots, \alpha_{n-1}^1\alpha^2\}, \quad (34)$$

então

$$U_2U_1 = \omega^{-1}U_1^{n-1}U_2, \quad (35)$$

onde  $U_i$  é o operador de deslocamento associado a  $\alpha^i$ ,  $i = 1, 2$ , de acordo com (27)-(28).

**Dem.:** Da definição dos operadores  $U_1$  e  $U_2$ , para qualquer  $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$ , temos que

$$U_2 U_1 \varphi = \omega^{-1} t^{-1} \alpha_-^2 \alpha_+^1(\alpha^2) \varphi(\alpha^1 \alpha^2),$$

e

$$U_1^{n-1} U_2 \varphi = \omega \alpha_+^1 \alpha_+^1(\alpha^1) \dots \alpha_+^1(\alpha_{n-2}^1) (\alpha_{n-1}^1)^{-1} \alpha_-^2(\alpha_{n-1}^1) \varphi(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1). \quad (36)$$

De acordo com o Corolário 1.6.13,

$$\alpha^1 \alpha^2 = \alpha^2 \alpha_{n-1}^1. \quad (37)$$

Usando a factorização  $\alpha^2 = \alpha_+^2 t^{-1} \alpha_-^2$  (ver (20)), tem-se que

$$\alpha^2 \alpha_{n-1}^1 = \frac{\alpha_+^2(\alpha_{n-1}^1) \alpha_-^2(\alpha_{n-1}^1)}{\alpha_{n-1}^1}, \quad (38)$$

e, usando a factorização  $\alpha^1 = \alpha_+^1 t \alpha_-^1$ , vem que

$$\alpha_{n-1}^1 = \alpha_+^1 \alpha_+^1(\alpha^1) \dots \alpha_+^1(\alpha_{n-2}^1) t \alpha_-^1 \alpha_-^1(\alpha^1) \dots \alpha_-^1(\alpha_{n-2}^1).$$

Logo, a igualdade (38) toma a forma

$$\alpha^2 \alpha_{n-1}^1 = \frac{\alpha_+^2(\alpha_{n-1}^1)}{\alpha_+^1 \alpha_+^1(\alpha^1) \dots \alpha_+^1(\alpha_{n-2}^1)} t^{-1} \frac{\alpha_-^2(\alpha_{n-1}^1)}{\alpha_-^1 \alpha_-^1(\alpha^1) \dots \alpha_-^1(\alpha_{n-2}^1)}. \quad (39)$$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha^1 \alpha^2 &= \alpha_-^1(\alpha^2) \alpha^2 \alpha_+^1(\alpha^2) \\ &= \alpha_-^1(\alpha^2) \alpha_+^2 t^{-1} \alpha_-^2 \alpha_+^1(\alpha^2). \end{aligned} \quad (40)$$

De acordo com (37), as igualdades (39) e (40) representam duas factorizações da mesma função, pelo que, de acordo com a terceira observação relativa à Definição 1.3.7,

$$\exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{\alpha_+^2(\alpha_{n-1}^1)}{\alpha_+^1 \alpha_+^1(\alpha^1) \dots \alpha_+^1(\alpha_{n-2}^1)} = c \alpha_-^1(\alpha^2) \alpha_+^2.$$

Determinando ambos os membros da última igualdade no ponto fixo  $t_+$  do deslocamento  $\alpha^1$ , usando a relação  $\alpha^2(t_+) = t_-$  (ver Proposição 1.6.19) e a igualdade (25), obtém-se que

$$c = \frac{1}{\omega^{n-1}} = \omega,$$

e, assim,

$$\alpha_+^1 \alpha_+^1(\alpha^1) \dots \alpha_+^1(\alpha_{n-2}^1) = \omega^{n-1} \frac{\alpha_+^2(\alpha_{n-1}^1)}{\alpha_-^1(\alpha^2) \alpha_+^2}.$$

Substituindo este resultado em (36) e considerando a igualdade que se obtém de (38) e de (40) fica provada a relação (35).

De modo idêntico se demonstra este resultado no caso em que o deslocamento  $\alpha^2$  é dado por (15). ■

## 2.1 Operadores integrais singulares com um grupo finito de deslocamentos

Neste capítulo vamos considerar o operador emparelhado

$$T_{A,B} = A P_+ + B P_- \quad (41)$$

onde  $A, B : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$  são os operadores funcionais

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i0} U_1^i + a_{i1} U_1^i U_2), \\ B &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i0} U_1^i + b_{i1} U_1^i U_2), \end{aligned} \quad (42)$$

com  $a_{ij}, b_{ij} \in L_\infty(\mathbb{T})$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j = 0, 1$ , onde  $U_l$  é o operador associado ao deslocamento linear fraccionário de Carleman  $\alpha^l$ ,  $l = 1, 2$ , e se supõe que  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$ , introduzidos na Proposição 2.0.2, geram o grupo finito  $G$  dado por (34).

Seja  $\mathfrak{E} = \{\Phi \in L_p^{2n}(\mathbb{T}) : \Phi_1 = \dots = \Phi_{2n} = \varphi, \varphi \in L_p(\mathbb{T})\}$ . Podemos definir

$$\pi : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow \mathfrak{E}, \quad (43)$$

a aplicação que associa cada função  $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$  a  $\Phi \in \mathfrak{E}$ , e  $\tilde{\mathfrak{E}}$  o subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}} = \text{im } \Delta$ , onde  $\Delta : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}$  designa o operador invertível

$$\Delta = \text{diag}(I, U_1, \dots, U_1^{n-1}, U_2, U_1 U_2, \dots, U_1^{n-1} U_2) |_{\mathfrak{E}}. \quad (44)$$

Usando a relação (35) é possível caracterizar  $\tilde{\mathfrak{E}}$ :

**Proposição 2.1.1** *O subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}}$  é caracterizado pelas igualdades*

$$U_1 \Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Psi, \quad U_2 \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi \in \tilde{\mathfrak{E}}, \quad (45)$$

onde  $\mathcal{E}_{1,2}$  são as matrizes constantes de dimensão  $n$

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \omega & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Supomos que os operadores  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ , actuam componente a componente.

**Dem.:** A demonstração é uma simples verificação, usando a relação (35) e a primeira igualdade de (29). ■

Introduza-se o operador  $T : L_p^{2n}(\mathbb{T}) \rightarrow L_p^{2n}(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , definido por

$$T = \text{diag}(T_{A,B}, \dots, T_{A,B}) |_{\mathfrak{E}}.$$

A principal vantagem de considerar esta extensão do operador  $T_{A,B}$  é o facto do operador  $T$  ser equivalente a um operador integral singular sem deslocamento com coeficientes matriciais, tal como se enuncia no seguinte teorema:

**Teorema 2.1.2** *Verifica-se a seguinte relação para o operador  $T$  :*

$$T = \Delta^{-1}T_{A,B}\Delta, \quad (47)$$

onde  $T_{A,B} : L_p^{2n}(\mathbb{T}) \rightarrow L_p^{2n}(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$  é o operador integral singular sem deslocamento,

$$T_{A,B} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-,$$

e os coeficientes matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , de dimensão  $2n$ , satisfazem as seguintes igualdades:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha^1) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{B}(\alpha^1) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

e

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha^2) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

**Dem.:** Sejam  $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $\Phi = \pi\varphi$  e  $\Psi = \Delta\Phi$ . Para uma questão de simplificação da linguagem, considerem-se os vectores

$$E_1 = (a_{00}, \dots, a_{n-1 \ 0}), \quad E_2 = (b_{01}, \dots, b_{n-1 \ 1}),$$

$$F_1 = (b_{00}, \dots, b_{n-1 \ 0}), \quad F_2 = (a_{01}, \dots, a_{n-1 \ 1}).$$

Dado que  $U_1P_{\pm} = P_{\pm}U_1$  e  $U_2P_{\pm} = P_{\mp}U_2$  (de acordo com (ii) de 29), tem-se que

$$T_{A,B}\varphi = (E_1 \dot{:} E_2)P_+\Psi + (F_1 \dot{:} F_2)P_-\Psi,$$

onde  $(E_1:E_2)$  e  $(F_1:F_2)$  representam vectores de dimensão  $2n$  e os operadores  $P_{\pm}$  actuam componente a componente. Usando a Proposição 2.1.1, tem-se que, para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} U_1^j T_{A,B} \varphi &= \left( E_1(\alpha_j^1) : E_2(\alpha_j^1) \right) P_+ U_1^j \Psi + \left( F_1(\alpha_j^1) : F_2(\alpha_j^1) \right) P_- U_1^j \Psi = \\ &= \left( E_1(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j : E_2(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j \right) P_+ \Psi + \left( F_1(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j : F_2(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j \right) P_- \Psi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_1^j U_2 T_{A,B} \varphi &= \\ &= \left( E_1(\alpha^2 \alpha_j^1) : E_2(\alpha^2 \alpha_j^1) \right) P_- U_1^j U_2 \Psi + \left( F_1(\alpha^2 \alpha_j^1) : F_2(\alpha^2 \alpha_j^1) \right) P_+ U_1^j U_2 \Psi = \\ &= \left( F_2(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j : F_1(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j \right) P_+ \Psi + \left( E_2(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j : E_1(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j \right) P_- \Psi. \end{aligned}$$

Denotem-se por  $\mathcal{A}_{kl}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , as funções matriciais  $n \times n$  em que a linha  $j+1$  é o vector

$$E_l(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j, \text{ se } k = 1 \text{ e } F_{3-l}(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j, \text{ se } k = 2.$$

Analogamente, sejam  $\mathcal{B}_{kl}$  as funções matriciais  $n \times n$  em que a linha  $j+1$  é o vector

$$F_l(\alpha_j^1) \mathcal{E}_1^j, \text{ se } k = 1 \text{ e } E_{3-l}(\alpha^2 \alpha_j^1) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^j, \text{ se } k = 2.$$

Considerando as funções matriciais por blocos:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

tem-se que

$$\Delta T \Phi = (\mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-) \Psi = T_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \Delta \Phi,$$

ou seja, (47) para  $\Phi = \pi \varphi$  arbitrário.

Para completar a demonstração resta provar as igualdades (48)-(50).

Aplicando a Proposição 2.1.1, para  $\Psi$  e para  $\Delta T\Phi \in \tilde{\mathfrak{E}}$ , tem-se que

$$U_1\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Psi, \quad U_1\Delta T\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Delta T\Phi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi,$$

$$U_2\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad U_2\Delta T\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Delta T\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi.$$

Usando as igualdades anteriores temos que,

$$U_1\Delta T\Phi = U_1T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi = T_{\mathcal{A}(\alpha^1),\mathcal{B}(\alpha^1)}U_1\Psi = T_{\mathcal{A}(\alpha^1),\mathcal{B}(\alpha^1)} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Psi,$$

e

$$U_2\Delta T\Phi = U_2T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi = T_{\mathcal{B}(\alpha^2),\mathcal{A}(\alpha^2)}U_2\Psi = T_{\mathcal{B}(\alpha^2),\mathcal{A}(\alpha^2)} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Consequentemente,

$$T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} T_{\mathcal{A}(\alpha^1),\mathcal{B}(\alpha^1)} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix},$$

e, como  $\mathcal{E}_2^{-1} = \mathcal{E}_2$ ,

$$T_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} T_{\mathcal{B}(\alpha^2),\mathcal{A}(\alpha^2)} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

A primeira das duas últimas identidades acima dá origem às igualdades (48) e (49) e a segunda à igualdade (50). ■

De acordo com a demonstração do último teorema, é fácil escrever os blocos das funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , dadas por (51), em termos dos coeficientes dos operadores funcionais  $A$  e  $B$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{n-10} \\ a_{n-10}(\alpha^1) & a_{00}(\alpha^1) & \cdots & a_{n-20}(\alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10}(\alpha_{n-1}^1) & a_{20}(\alpha_{n-1}^1) & \cdots & a_{00}(\alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_{12} &= \begin{pmatrix} b_{01} & b_{11} & \cdots & b_{n-11} \\ b_{n-11}(\alpha^1) & b_{01}(\alpha^1) & \cdots & b_{n-21}(\alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11}(\alpha_{n-1}^1) & b_{21}(\alpha_{n-1}^1) & \cdots & b_{01}(\alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_{21} &= \begin{pmatrix} a_{01}(\alpha^2) & \omega a_{n-11}(\alpha^2) & \cdots & \omega^{n-1} a_{11}(\alpha^2) \\ \omega^{n-1} a_{11}(\alpha^2 \alpha^1) & a_{01}(\alpha^2 \alpha^1) & \cdots & \omega^{n-2} a_{21}(\alpha^2 \alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega a_{n-11}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \omega^2 a_{n-21}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \cdots & a_{01}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_{22} &= \begin{pmatrix} b_{00}(\alpha^2) & \omega b_{n-10}(\alpha^2) & \cdots & \omega^{n-1} b_{10}(\alpha^2) \\ \omega^{n-1} b_{10}(\alpha^2 \alpha^1) & b_{00}(\alpha^2 \alpha^1) & \cdots & \omega^{n-2} b_{20}(\alpha^2 \alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega b_{n-10}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \omega^2 b_{n-20}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \cdots & b_{00}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{B}_{11} &= \begin{pmatrix} b_{00} & b_{10} & \cdots & b_{n-10} \\ b_{n-10}(\alpha^1) & b_{00}(\alpha^1) & \cdots & b_{n-20}(\alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{10}(\alpha_{n-1}^1) & b_{20}(\alpha_{n-1}^1) & \cdots & b_{00}(\alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{B}_{12} &= \begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & \cdots & a_{n-11} \\ a_{n-11}(\alpha^1) & a_{01}(\alpha^1) & \cdots & a_{n-21}(\alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}(\alpha_{n-1}^1) & a_{21}(\alpha_{n-1}^1) & \cdots & a_{01}(\alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{21} = \begin{pmatrix} b_{01}(\alpha^2) & \omega b_{n-11}(\alpha^2) & \cdots & \omega^{n-1} b_{11}(\alpha^2) \\ \omega^{n-1} b_{11}(\alpha^2 \alpha^1) & b_{01}(\alpha^2 \alpha^1) & \cdots & \omega^{n-2} b_{21}(\alpha^2 \alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega b_{n-11}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \omega^2 b_{n-21}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \cdots & b_{01}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{22} = \begin{pmatrix} a_{00}(\alpha^2) & \omega a_{n-10}(\alpha^2) & \cdots & \omega^{n-1} a_{10}(\alpha^2) \\ \omega^{n-1} a_{10}(\alpha^2 \alpha^1) & a_{00}(\alpha^2 \alpha^1) & \cdots & \omega^{n-2} a_{20}(\alpha^2 \alpha^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega a_{n-10}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \omega^2 a_{n-20}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) & \cdots & a_{00}(\alpha^2 \alpha_{n-1}^1) \end{pmatrix}.$$

De acordo com a Definição 1.4.1, uma função matricial  $\mathcal{C} \in L_\infty^{n \times n}(\mathbb{T})$  admite uma factorização generalizada em (ou relativamente ao espaço)  $L_p(\mathbb{T})$  se:

(i) é válida a representação

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$$

onde

$$\mathcal{C}_+ \in [L_p^+(\mathbb{T})]^{n \times n}, \mathcal{C}_+^{-1} \in [L_q^+(\mathbb{T})]^{n \times n}, \mathcal{C}_- \in [L_q^-(\mathbb{T})]^{n \times n}, \mathcal{C}_-^{-1} \in [L_p^-(\mathbb{T})]^{n \times n},$$

e  $\Lambda = \text{diag}\{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ ,  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$  são inteiros;

(ii) o operador linear  $D$  actuando de acordo com a regra  $D\varphi = \mathcal{C}_+ P_- \mathcal{C}_+^{-1} \varphi$  é limitado em  $L_p^n(\mathbb{T})$ .

Os números  $\kappa_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são univocamente determinados pela função matricial  $\mathcal{C}$ , e designam-se por índices parciais de  $\mathcal{C}$ . Por vezes, é conveniente considerar apenas os valores distintos, dois a dois, que tomam os índices parciais. Para tal será usada a seguinte notação:

$$\Lambda = \text{diag}\{t^{\kappa_1} \mathcal{I}_{d_1}, \dots, t^{\kappa_l} \mathcal{I}_{d_l}\},$$

onde  $\varkappa_1 > \dots > \varkappa_l$  e  $d_i$  é a multiplicidade do índice parcial  $\varkappa_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l \leq n$ .

**Proposição 2.1.3** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  as funções matriciais (51). Se*

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}, \quad (52)$$

*admite uma factorização em  $L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , digamos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{t^{\varkappa_1} \mathcal{I}_{d_1}, \dots, t^{\varkappa_l} \mathcal{I}_{d_l}\}$ , então os factores exteriores satisfazem as seguintes identidades:*

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+(\alpha^1) \Lambda (\alpha_+^1) \mathcal{H}_1, \quad (53)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_1^{-1} \Lambda \Lambda (\alpha_-^1) \mathcal{C}_-(\alpha^1) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

e

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha^2) \Lambda^{-1} (\alpha_+^2) \mathcal{H}_2, \quad (55)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda \Lambda (\alpha_-^2) \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha^2) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

onde  $\mathcal{E}_{1,2}$  são as matrizes (46), e  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$  é uma função matricial polinomial, triangular superior por blocos

$$\mathcal{H}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{i1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_{il} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

onde cada bloco  $\mathcal{H}_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , na diagonal principal é uma matriz constante não singular de dimensão  $d_j$ , a multiplicidade do índice parcial  $\varkappa_j$ .

**Dem.:** Tendo em conta que as matrizes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  satisfazem as relações (48), (49) e (50), podemos concluir que para a matriz  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  são válidas as igualdades:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{C}(\alpha^1) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1}(\alpha^2) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando as factorizações de  $\alpha^1$  e de  $\alpha^2$ ,  $\alpha^1 = \alpha_+^1 t \alpha_-^1$  e  $\alpha^2 = \alpha_+^2 t^{-1} \alpha_-^2$ , tem-se que  $\Lambda(\alpha^1) = \Lambda(\alpha_+^1) \Lambda \Lambda(\alpha_-^1)$  e  $\Lambda(\alpha^2) = \Lambda(\alpha_-^2) \Lambda^{-1} \Lambda(\alpha_+^2)$ . Assim, obtemos duas factorizações da matriz  $\mathcal{C}$  em  $L_p(\mathbb{T})$ :

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+(\alpha^1) \Lambda(\alpha_+^1) \right] \Lambda \left[ \Lambda(\alpha_-^1) \mathcal{C}_-(\alpha^1) \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \right],$$

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha^2) \Lambda^{-1}(\alpha_+^2) \right] \Lambda \left[ \Lambda^{-1}(\alpha_-^2) \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha^2) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Todas as outras conclusões são consequência de resultados conhecidos sobre a relação entre duas factorizações da mesma função matricial, apresentados no Teorema 1.4.2. ■

**Teorema 2.1.4** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular (41). Se as funções matriciais (51) são invertíveis em  $L_\infty^{2n \times 2n}(\mathbb{T})$  e*

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$$

*admite uma factorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ , digamos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}\}$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \dim (\ker Q_1 \mid \mathfrak{P} \cap \ker Q_2 \mid \mathfrak{P}),$$

$\ker T_{A,B} = \{\pi^{-1}(\Phi) : \Phi = \Delta^{-1} (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) p, p \in \ker Q_1 \mid \mathfrak{P} \cap \ker Q_2 \mid \mathfrak{P}\},$

onde  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ , são os operadores lineares

$$Q_1 = I - (\Lambda (\alpha_+^1) \mathcal{H}_1)^{-1} U_1,$$

$$Q_2 = I + (\Lambda^{-1} \Lambda (\alpha_-^2) \mathcal{H}_2)^{-1} U_2,$$

$\mathfrak{P}$  é o subespaço (8),  $\Delta$  é o operador invertível (44),  $\pi$  é a aplicação (43) e  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ , é a função matricial polinomial (57) satisfazendo (53)-(54), se  $i = 1$ , e (55)-(56), se  $i = 2$ .

**Dem.:** Se  $\varphi \in \ker T_{A,B}$  então, tendo em conta (47),  $\Psi = \Delta\pi(\varphi) \in \ker T_{A,B}$ .

Logo, pelo Teorema 1.5.1 tem-se

$$\Psi = \Delta\Phi = (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) p, p \in \mathfrak{P}.$$

É evidente que

$$\Psi_+ = P_+ \Psi = \mathcal{C}_+ p, \quad \Psi_- = P_- \Psi = -\mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1} p. \quad (58)$$

Naturalmente que  $\Psi \in \tilde{\mathfrak{E}}$ , portanto satisfaz as condições (45), e então

$$P_{\pm} U_1 \Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}, \quad P_{\pm} U_2 \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}.$$

Como  $P_{\pm} U_1 = U_1 P_{\pm}$ ,  $P_{\pm} U_2 = U_2 P_{\mp}$  (de acordo com (ii) de (29)), vem que

$$U_1 \Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}, \quad U_2 \Psi_{\mp} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}. \quad (59)$$

Das igualdades (58) e (59) temos que

$$\mathcal{C}_+ (\alpha^1) U_1 p = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+ p, \quad (60)$$

$$\mathcal{C}_-^{-1} (\alpha^1) \Lambda^{-1} (\alpha^1) U_1 p = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1} p, \quad (61)$$

e que

$$\mathcal{C}_+(\alpha^2)U_2p = - \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}\Lambda^{-1}p, \quad (62)$$

$$\mathcal{C}_-^{-1}(\alpha^2)\Lambda^{-1}(\alpha^2)U_2p = - \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+p. \quad (63)$$

De acordo com (53) e (54),

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_+(\alpha^1) &= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+(\Lambda(\alpha_+^1)\mathcal{H}_1)^{-1}, \\ \mathcal{C}_-(\alpha^1) &= \Lambda^{-1}(\alpha_-^1)\Lambda^{-1}\mathcal{H}_1\Lambda\mathcal{C}_- \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, (60) e (61) tomam a forma

$$\begin{aligned} (\Lambda(\alpha_+^1)\mathcal{H}_1)^{-1}U_1p &= p, \\ \mathcal{H}_1^{-1}\Lambda\Lambda(\alpha_-^1)\Lambda^{-1}(\alpha^1)U_1p &= p. \end{aligned}$$

Estas duas últimas igualdades são equivalentes e permitem concluir que  $Q_1p = 0$ ,  $p \in \mathfrak{P}$ .

Por outro lado, de acordo com (55) e (56),

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha^2) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+\mathcal{H}_2^{-1}\Lambda(\alpha_+^2), \\ \mathcal{C}_+(\alpha^2) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}\Lambda^{-1}\mathcal{H}_2^{-1}\Lambda\Lambda^{-1}(\alpha_-^2), \end{aligned}$$

e, assim, (62) e (63) tomam a forma

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1}\Lambda(\alpha_-^2)\mathcal{H}_2)^{-1}U_2p + p &= 0, \\ (\Lambda^{-1}(\alpha_+^2)\mathcal{H}_2)^{-1}\Lambda^{-1}(\alpha^2)U_2p + p &= 0. \end{aligned}$$

Estas duas últimas igualdades são equivalentes e permitem concluir que  $Q_2p = 0$ ,  $p \in \mathfrak{P}$ . ■

## 2.2 Operadores integrais singulares com deslocamento de segunda ordem que preserva a orientação

Considerando o método anteriormente descrito para determinar o núcleo do operador

$$T_{A,B} = A P_+ + B P_-, \quad (64)$$

analisemos o caso particular em que  $A$  e  $B$  são os operadores funcionais

$$A = a_{00}I + a_{10}U, \quad B = b_{00}I + b_{10}U, \quad (65)$$

com  $a_{00}, a_{10}, b_{00}, b_{10} \in L_\infty(\mathbb{T})$ , onde  $U \in \mathfrak{L}(L_p(\mathbb{T}))$ ,  $1 < p < \infty$ , é o operador de deslocamento associado ao deslocamento de Carleman de segunda ordem que preserva a orientação de  $\mathbb{T}$ :

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\beta t - 1}, \quad |\beta| < 1, \quad (66)$$

definido por

$$(U\varphi)(t) = -\alpha_+(t) \varphi(\alpha(t)),$$

onde  $\alpha_+$  é um dos factores da factorização do deslocamento  $\alpha$  (ver (19)).

O operador  $U$  satisfaz as propriedades (29).

Neste caso, é possível identificar uma base do núcleo do operador  $T_{A,B}$  e, conseqüentemente, determinar a sua dimensão.

Para os resultados análogos aos da secção anterior não serão apresentadas demonstrações.

Seja  $\mathfrak{E} = \{\Phi \in L_p^2(\mathbb{T}) : \Phi_1 = \Phi_2 = \varphi, \varphi \in L_p(\mathbb{T})\}$ . Podemos definir

$$\pi : L_p(\mathbb{T}) \rightarrow \mathfrak{E}, \quad (67)$$

a aplicação que associa cada função  $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$  a  $\Phi \in \mathfrak{E}$ , e  $\tilde{\mathfrak{E}}$  o subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}} = \text{im } \Delta$ , onde  $\Delta : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}$  designa o operador invertível

$$\Delta = \text{diag}(I, U) |_{\mathfrak{E}}. \quad (68)$$

**Proposição 2.2.1** *O subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}}$  é caracterizado pela igualdade*

$$U\Psi = \mathcal{E}\Psi, \quad \Psi \in \tilde{\mathfrak{E}}, \quad (69)$$

$$\text{onde } \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 2.2.2** *Seja  $T : \mathfrak{E} \rightarrow L_p^2(\mathbb{T})$ , o operador definido por*

$$T = \text{diag}(T_{A,B}, T_{A,B})|_{\mathfrak{E}}.$$

*Este operador satisfaz a relação*

$$T = \Delta^{-1}T_{A,B}\Delta, \quad (70)$$

*onde  $T_{A,B} : L_p^2(\mathbb{T}) \rightarrow L_p^2(\mathbb{T})$ , é o operador integral singular sem deslocamento,*

$$T_{A,B} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-,$$

*com coeficientes matriciais de dimensão 2:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & b_{10} \\ a_{10}(\alpha) & b_{00}(\alpha) \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & a_{10} \\ b_{10}(\alpha) & a_{00}(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

**Proposição 2.2.3** *As matrizes  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{T})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  satisfazem as seguintes relações:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}\mathcal{A}(\alpha)\mathcal{E},$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{E}\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{E},$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{E}\mathcal{C}(\alpha)\mathcal{E}.$$

**Proposição 2.2.4** *Se  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma fatorização em  $L_p(\mathbb{T})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}\}$ , então os factores externos satisfazem as seguintes igualdades:*

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{E}\mathcal{C}_+(\alpha)\Lambda_+\mathcal{H}, \quad (72)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1}\mathcal{H}^{-1}\Lambda\Lambda_-\mathcal{C}_-(\alpha)\mathcal{E}, \quad (73)$$

onde

$$\Lambda_{\pm} = \text{diag}\{\alpha_{\pm}^{\kappa_1}, \alpha_{\pm}^{\kappa_2}\},$$

e  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante  $2 \times 2$ , se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são iguais, ou polinomial triangular superior, no caso contrário.

**Proposição 2.2.5** *Nas condições da Proposição 2.2.4, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes,  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , a matriz  $\mathcal{H}$  tem a seguinte estrutura*

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & p \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (74)$$

onde  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $p$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ , tal que

$$p(\alpha) = \alpha_+^{\kappa_1 - \kappa_2} p,$$

em que  $\kappa_1 - \kappa_2$  é um número par.

**Dem.:** De acordo com a Proposição 2.2.4 sabemos que, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes, a matriz  $\mathcal{H}$  é da forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & p \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_{1,2} \in \mathbb{C}$  e  $p$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ .

Calculando o determinante de ambos os membros de cada uma das igualdades (72) e (73) e tomando  $t = t_+$  e  $t = t_-$ , respectivamente, obtém-se que

$$\epsilon_1 \epsilon_2 (-1)^{\kappa_1 + \kappa_2} = -1 \quad \text{e} \quad \epsilon_1 \epsilon_2 = -1,$$

tendo em conta as igualdades  $\alpha_+(t_+) = -1$  e  $\alpha_-(t_-) = 1$ . Assim,  $\kappa_1 + \kappa_2$ , e também  $\kappa_1 - \kappa_2$ , é necessariamente um número par, pelo que os índices parciais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  têm a mesma paridade.

Por outro lado, a partir de (72), conclui-se que

$$\mathcal{I} = \Lambda_+ \mathcal{H} \Lambda_+ (\alpha) \mathcal{H} (\alpha),$$

e, como tal,  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$ . Decorre ainda desta igualdade que

$$p(\alpha) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \alpha_+^{\kappa_1 - \kappa_2} p.$$

Portanto,  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$ ,  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ , o que conclui a demonstração. ■

**Proposição 2.2.6** *Nas condições da Proposição 2.2.4, a matriz  $\mathcal{H}$  é involutiva:*

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{I}.$$

**Dem.:** No caso em que  $\kappa_1 = \kappa_2$ , a matriz  $\mathcal{H}$  é constante e a partir de (73), temos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}_- \mathcal{E} \mathcal{C}_-^{-1} (\alpha) \Lambda_-^{-1}.$$

Seja  $t_-$  o ponto fixo do deslocamento  $\alpha$  pertencente a  $\mathbb{T}_-$ . Então, por (25),

$$\mathcal{H} = \mathcal{C}_- (t_-) \mathcal{E} \mathcal{C}_-^{-1} (t_-),$$

de onde resulta a igualdade do enunciado.

No caso em que  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , verifica-se facilmente, usando o resultado da proposição anterior, que a matriz  $\mathcal{H}$  é involutiva. ■

**Teorema 2.2.7** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular (64)-(65). Se as funções matriciais (71) são invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{T})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite uma fatorização generalizada em  $L_p(\mathbb{T})$ , digamos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}\}$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \dim (\ker Q | \mathfrak{P}),$$

$$\ker T_{A,B} = \{ \pi^{-1}(\Phi) : \Phi = \Delta^{-1} (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) v, v \in \ker Q | \mathfrak{P} \},$$

onde  $Q$  é o operador linear

$$Q = I - (\Lambda(\alpha_+) \mathcal{H})^{-1} U,$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ v = (p_1, p_2)^T \in L_p^2(\mathbb{T}) : p_i \in P^{\kappa_i-1} \text{ se } \kappa_i \in \mathbb{N} \text{ ou } p_i \equiv 0 \text{ se } \kappa_i \leq 0, i = 1, 2 \right\},$$

$P^{\kappa_i-1}$  é o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a  $\kappa_i - 1$ ,  $\Delta$  é o operador invertível (68),  $\pi$  é a aplicação (67) e  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante, se  $\kappa_1 = \kappa_2$ , ou a matriz polinomial (74), no caso contrário.

Por  $Q^{(\kappa_i)} \in \mathfrak{L}(P^{\kappa_i-1})$  representaremos os operadores de projecção em  $L_p(\mathbb{T})$ ,  $p \in (1, \infty)$  :

$$Q^{(\kappa_i)} = \frac{1}{2} (I - \epsilon_i \alpha_+^{-\kappa_i} U), \quad i = 1, 2, \quad (75)$$

em que  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ ,  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

**Lema 2.2.8** *Nas condições do último teorema, e no caso em que  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ ,  $v = (p_1, p_2)^T \in \ker Q$  se e só se*

$$p_2 \in \ker Q^{(\kappa_2)}$$

e

$$p_1 = -\frac{\epsilon_1}{2} p_2 p + p_1^*, \quad p_1^* \in \ker Q^{(\kappa_1)},$$

onde  $p$  é o polinómio da matriz  $\mathcal{H}$ , apresentada em (74).

Então

$$\dim \ker Q = \dim \ker Q^{(\kappa_1)} + \dim \ker Q^{(\kappa_2)}.$$

**Dem.:** Seja  $v = (p_1, p_2)^T \in \ker Q$ . Pela Proposição 2.2.5,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & p \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ ,  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$  e  $p$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ , tal que  $p(\alpha) = \alpha_+^{\kappa_1 - \kappa_2} p$ .

Facilmente se verifica que,  $Qv = 0$  é equivalente a

$$\begin{cases} p_1 - \epsilon_1 \alpha_+^{-\kappa_1} U p_1 = p \alpha_+^{-\kappa_2} U p_2 \\ p_2 - \epsilon_2 \alpha_+^{-\kappa_2} U p_2 = 0 \end{cases}.$$

Da segunda equação do sistema resulta que  $p_2 \in \ker Q^{(\kappa_2)}$ . A primeira é uma equação funcional não homogénea que admite  $-\frac{\epsilon_1}{2} p_2 p$  como solução particular. Deste modo constatamos que

$$p_1 = -\frac{\epsilon_1}{2} p_2 p + p_1^*, \quad p_1^* \in \ker Q^{(\kappa_1)}.$$

Podemos, assim, concluir que  $v = (p_1, p_2)^T \in \ker Q$ , se e só se,

$$v = (1, 0)^T p_1^* + \left(-\frac{\epsilon_1}{2} p, 1\right)^T p_2.$$

Portanto,  $\dim \ker Q = \dim \ker Q^{(\kappa_1)} + \dim \ker Q^{(\kappa_2)}$ . ■

**Lema 2.2.9** *Se  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ , sejam  $Q^{(\kappa_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , os operadores de projecção (75). Então*

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left\lceil \frac{\kappa_i}{2} + \frac{1 - \epsilon_i}{4} \right\rceil,$$

em que  $[x]$  denota a parte inteira do número  $x$ .

Além disso, uma base dos espaços  $\ker Q^{(\kappa_i)}$  é constituída pelas funções

$$q_m^{(i)} = t^{\kappa_i - 1} (\alpha_-^{m-1} + \epsilon_i \alpha_-^{\kappa_i - m}), \quad m = 1, \dots, \dim \ker Q^{(\kappa_i)}.$$

**Dem.:** Para provar o lema basta considerar a seguinte base de  $P^{\kappa_i - 1}$

$$\{t^{\kappa_i - 1} \alpha_-^{m-1}\}, \quad m = 1, \dots, \kappa_i,$$

onde  $\alpha_-$  é o factor externo da factorização de (66) apresentado em (19), e ter em conta as igualdades

$$Q^{(\kappa_i)}(t^{\kappa_i - 1} \alpha_-^{m-1}) = \frac{1}{2} t^{\kappa_i - 1} (\alpha_-^{m-1} + \epsilon_i \alpha_-^{\kappa_i - m}), \quad m = 1, \dots, \kappa_i, \quad i = 1, 2.$$

Estas igualdades permitem concluir que para  $\epsilon_i = -1$

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left[ \frac{\kappa_i + 1}{2} \right],$$

e para  $\epsilon_i = 1$

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left[ \frac{\kappa_i}{2} \right].$$

■

**Teorema 2.2.10** *Sejam  $T_{A,B}$  o operador integral singular definido por (64)-(65) e  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  funções matriciais com a forma (71), associadas a  $T_{A,B}$  de acordo com a igualdade (70). Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{T})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_p^2(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , com índices parciais  $\kappa_{1,2} : \kappa_1 > \kappa_2$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \begin{cases} 0, & \kappa_1 \leq 0 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 - \epsilon}{4} \right], & \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0, \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, & \kappa_2 > 0 \end{cases},$$

com  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

**Dem.:** A partir do Teorema 2.2.7 e dos Lema 2.2.8 e Lema 2.2.9, temos que

$$\dim \ker T_{A,B} = \begin{cases} 0, & \kappa_1 \leq 0 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} \right], & \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0, \epsilon_1 = 1 \\ \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right], & \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0, \epsilon_1 = -1 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} \right] + \left[ \frac{\kappa_2 + 1}{2} \right], & \kappa_2 > 0, \epsilon_1 = 1 \\ \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] + \left[ \frac{\kappa_2}{2} \right], & \kappa_2 > 0, \epsilon_1 = -1 \end{cases}.$$

Assim, se  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0$ , temos que

$$\dim \ker T_{A,B} = \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 - \epsilon_1}{4} \right],$$

com  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ , e se  $\kappa_1 > 0$ ,  $\kappa_2 > 0$  então

$$\dim \ker T_{A,B} = \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 - \epsilon_1}{4} \right] + \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 - \epsilon_2}{4} \right] = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

■

É necessário assinalar que os resultados desta secção, coincidem com os resultados obtidos por Kravchenko V., Lebre A. e Rodriguez J. no artigo [10] e por Rodriguez J. na Tese de Doutoramento [19], onde se consideram os operadores funcionais  $A$  e  $B$ , (65), com coeficientes numa álgebra decomponível de funções contínuas na circunferência unitária. Nesse artigo, os referidos autores utilizam um outro método, baseado na noção de factorização em subálgebras de funções matriciais contínuas.

### 3 Operadores integrais singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman e conjugação na recta real

Considere-se na recta real o deslocamento linear fraccionário de Carleman que inverte a orientação

$$\alpha(t) = -t + h, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (76)$$

É um resultado conhecido que a transformação homográfica

$$z = \theta(t) = \frac{t - i}{t + i}$$

é um homeomorfismo de  $\mathring{\mathbb{R}}$  em  $\mathbb{T}$ , sendo a sua transformação inversa

$$\theta^{-1}(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Além disso,  $\theta$  é uma transformação conforme de  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  em  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , sendo o semiplano aberto  $\mathbb{C}_+$  transformado no interior da circunferência unitária,  $\mathbb{T}_+$ .

No que se segue ser-nos-á útil a seguinte factorização de  $\theta(\alpha)$ , em  $\mathbb{R}$ ,

$$\theta(\alpha) = \theta_+ \theta^{-1} \theta_-, \quad (77)$$

onde  $\theta_+ = \frac{t + i - h}{t + i}$  e  $\theta_- = \frac{t - i}{t - i - h}$ .

Os factores externos de (77),  $\theta_{\pm}$ , estão relacionados pelas igualdades

$$\theta_{\pm}(\alpha) = \theta_{\mp}, \quad (78)$$

$$\overline{\theta_{\pm}(\alpha)} = \theta_{\pm}^{-1} \quad (79)$$

e

$$\overline{\theta_{\pm}} = \theta_{\mp}^{-1}. \quad (80)$$

O deslocamento (76) tem, em  $\mathbb{R}$ , um ponto fixo, é ele  $t_0 = \frac{h}{2}$ . No ponto fixo  $t_0$ , os factores  $\theta_{\pm}$  satisfazem as seguintes relações

$$\theta_{\pm}(t_0) = -\theta(t_0). \quad (81)$$

### 3.1 Operadores integrais singulares com deslocamento e conjugação

Sejam  $\tilde{L}_2(\mathbb{R})$  e  $\tilde{L}_{\infty}(\mathbb{R})$  os espaços  $L_2(\mathbb{R})$  e  $L_{\infty}(\mathbb{R})$  sobre o corpo dos números reais, respectivamente.

Associado ao deslocamento  $\alpha(t) = -t + h$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , considere-se o operador de deslocamento  $U : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  definido por

$$(U\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por  $C : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  representaremos o operador de conjugação complexa

$$(C\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (82)$$

O operador  $C$  é limitado e antilinear em  $L_2(\mathbb{R})$ , é limitado e linear em  $\tilde{L}_2(\mathbb{R})$  e goza das seguintes propriedades:

$$(i) \ C^2 = I, \quad (ii) \ P_{\pm}C = CP_{\mp}, \quad (iii) \ CU = UC, \quad (83)$$

onde  $P_{\pm} : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  são os operadores de projecção definidos por (2) (com  $S : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  o operador integral singular definido por (1)).

Considere-se o operador integral singular emparelhado

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_-, \quad (84)$$

onde  $A, B : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$  são os operadores funcionais

$$A = a_{00}I + a_{10}U + a_{01}C + a_{11}UC, \quad (85)$$

$$B = b_{00}I + b_{10}U + b_{01}C + b_{11}UC,$$

em que  $a_{ij}, b_{ij} \in \tilde{L}_\infty(\mathbb{R})$ ,  $i, j = 0, 1$ , são funções definidas em  $\mathbb{R}$ , e designam-se *coeficientes* do operador  $A$  (ou  $B$ ).

O nosso principal objectivo é descrever o núcleo do operador (84), utilizando o método descrito no capítulo anterior.

Seja  $\mathfrak{E} = \left\{ \Phi \in \tilde{L}_2^4(\mathbb{R}) : \Phi_1 = \dots = \Phi_4 = \varphi, \varphi \in \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \right\}$ , podemos definir a aplicação

$$\pi : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{E} \quad (86)$$

que faz corresponder cada função  $\varphi \in \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  a  $\Phi \in \mathfrak{E}$ . Seja  $\tilde{\mathfrak{E}}$  o subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}} = \text{im } \Delta$ , onde  $\Delta : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}$  denota o operador invertível

$$\Delta = \text{diag}(I, U, C, UC) |_{\mathfrak{E}}. \quad (87)$$

**Proposição 3.1.1** *O subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}}$  é caracterizado pelas seguintes igualdades*

$$U\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \Psi, \quad C\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi \in \tilde{\mathfrak{E}}, \quad (88)$$

onde  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{I}$  são as matrizes constantes

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

e os operadores  $U$  e  $C$  actuam componente a componente.

**Dem.:** A demonstração é imediata, utilizando as propriedades (31) e (83).

■

Vamos introduzir o operador  $T : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{L}_2^4(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , definido por

$$T = \text{diag}(T_{A,B}, \dots, T_{A,B}) | \mathfrak{E}.$$

Como no capítulo anterior, a vantagem de considerar o operador  $T$ , extensão do operador  $T_{A,B}$ , é o facto deste ser semelhante a um operador integral singular sem deslocamento com coeficientes matriciais, tal como se demonstra seguidamente.

**Teorema 3.1.2** *Verifica-se a seguinte relação para o operador  $T$  :*

$$T = \Delta^{-1} T_{A,B} \Delta, \quad (90)$$

onde  $T_{A,B} : \tilde{L}_2^4(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2^4(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , é um operador integral singular, sem deslocamento e conjugação, com coeficientes matriciais de dimensão 4,

$$T_{A,B} = \mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-,$$

e as funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  satisfazem as seguintes relações:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{B}^{(\alpha)} \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

**Dem.:** Seja  $\varphi \in \tilde{L}_2(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $\Phi = \pi\varphi$  e  $\Psi = \Delta\Phi$ . Como

$$UP_{\pm} = P_{\mp}U, \quad CP_{\pm} = P_{\mp}C, \quad UC = CU, \quad UCP_{\pm} = P_{\pm}UC, \quad U^2 = I, \quad C^2 = I,$$

vem que

$$\begin{aligned} T_{A,B} = & a_{00}P_+ + b_{10}P_+U + b_{01}P_+C + a_{11}P_+UC + \\ & + b_{00}P_- + a_{10}P_-U + a_{01}P_-C + b_{11}P_-UC, \end{aligned}$$

$$UT_{A,B} = a_{10}(\alpha)P_+ + b_{00}(\alpha)P_+U + b_{11}(\alpha)P_+C + a_{01}(\alpha)P_+UC + \\ + b_{10}(\alpha)P_- + a_{00}(\alpha)P_-U + a_{11}(\alpha)P_-C + b_{01}(\alpha)P_-UC,$$

$$CT_{A,B} = \overline{a_{01}}P_+ + \overline{b_{11}}P_+U + \overline{b_{00}}P_+C + \overline{a_{10}}P_+UC + \\ + \overline{b_{01}}P_- + \overline{a_{11}}P_-U + \overline{a_{00}}P_-C + \overline{b_{10}}P_-UC,$$

$$UCT_{A,B} = \overline{a_{11}}(\alpha)P_+ + \overline{b_{01}}(\alpha)P_+U + \overline{b_{10}}(\alpha)P_+C + \overline{a_{00}}(\alpha)P_+UC + \\ + \overline{b_{11}}(\alpha)P_- + \overline{a_{01}}(\alpha)P_-U + \overline{a_{10}}(\alpha)P_-C + \overline{b_{00}}(\alpha)P_-UC.$$

Tomando as matrizes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  de dimensão 4 ,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & b_{10} & b_{01} & a_{11} \\ a_{10}(\alpha) & b_{00}(\alpha) & b_{11}(\alpha) & a_{01}(\alpha) \\ \overline{a_{01}} & \overline{b_{11}} & \overline{b_{00}} & \overline{a_{10}} \\ \overline{a_{11}}(\alpha) & \overline{b_{01}}(\alpha) & \overline{b_{10}}(\alpha) & \overline{a_{00}}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (93)$$

e

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & a_{10} & a_{01} & b_{11} \\ b_{10}(\alpha) & a_{00}(\alpha) & a_{11}(\alpha) & b_{01}(\alpha) \\ \overline{b_{01}} & \overline{a_{11}} & \overline{a_{00}} & \overline{b_{10}} \\ \overline{b_{11}}(\alpha) & \overline{a_{01}}(\alpha) & \overline{a_{10}}(\alpha) & \overline{b_{00}}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (94)$$

temos que

$$\Delta T\Phi = (\mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-)\Psi = T_{A,B}\Delta\Phi.$$

Fica, assim, provada a igualdade (90).

As igualdades (91) e (92) constataam-se facilmente, por verificação directa.

■

**Proposição 3.1.3** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{GL}_{\infty}^{4 \times 4}(\mathbb{R})$  as funções matriciais (93) e (94). Se*

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}, \quad (95)$$

então

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (96)$$

e

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} (\overline{\mathcal{C}})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Se  $\mathcal{C}$  admite uma fatorização em  $L_2(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\varkappa_1} \mathcal{I}_{d_1}, \dots, \theta^{\varkappa_l} \mathcal{I}_{d_l}\}$ , onde  $\varkappa_1 > \dots > \varkappa_l$ ,  $l \leq 4$ , são os índices parciais da fatorização, então os factores externos verificam as seguintes igualdades:

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha) \Lambda_+^{-1} \mathcal{H}_1, \quad (98)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_1^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad (99)$$

e

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \mathcal{H}_2, \quad (100)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

onde  $\Lambda_{\pm} = \text{diag}\{\theta_{\pm}^{\varkappa_1} \mathcal{I}_{d_1}, \dots, \theta_{\pm}^{\varkappa_l} \mathcal{I}_{d_l}\}$ ,  $\theta_{\pm}$  são os factores da fatorização (77),  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{I}$  denotam as matrizes (89), e  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$  é uma matriz racional, de dimensão 4, triangular superior por blocos, com a seguinte estrutura

$$\mathcal{H}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{i1} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_{il} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

onde cada bloco  $\mathcal{H}_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, l$ , na diagonal principal, é uma matriz constante não singular de dimensão  $d_j$ , multiplicidade do índice parcial

$\varkappa_j$ , e cujas entradas não nulas são tais que

$$(\mathcal{H}_i)_{ms} = p_{ms}^i(\theta), m < s, m, s = 1, \dots, 4,$$

onde  $p_{ms}^i$  é um polinómio, na variável  $\theta$ , de grau inferior ou igual a  $\kappa_m - \kappa_s$ .

**Dem.:** As igualdades (96) e (97) verificam-se facilmente partindo da definição de  $\mathcal{C}$ , de (91) e de (92).

Como  $\Lambda(\alpha) = \Lambda_- \Lambda^{-1} \Lambda_+$  então

$$\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}_+(\alpha) \Lambda_- \Lambda^{-1} \Lambda_+ \mathcal{C}_-(\alpha)$$

e

$$\mathcal{C}^{-1}(\alpha) = \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha) \Lambda_+^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha). \quad (103)$$

De (96) e (103) tem-se que

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha) \Lambda_+^{-1} \right] \Lambda \left[ \Lambda_-^{-1} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \right].$$

Assim, obtemos duas factorizações diferentes de  $\mathcal{C}$  em  $L_2(\mathbb{R})$ , pelo que  $\exists \mathcal{H}_1$ :

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}(\alpha) \Lambda_-^{-1} \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_1^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{H}_1$  tem a estrutura (102).

Por outro lado, como  $\overline{\theta(t)} = \theta^{-1}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , vem que

$$(\overline{\mathcal{C}})^{-1} = (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \Lambda (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1}. \quad (104)$$

De (97) e (104) obtém-se que

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \right] \Lambda \left[ (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \right].$$

De modo semelhante, obtemos duas factorizações diferentes de  $\mathcal{C}$  em  $L_2(\mathbb{R})$ , pelo que  $\exists \mathcal{H}_2$ :

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $\mathcal{H}_2$  tem a estrutura (102). ■

A função matricial  $\mathcal{H}_1$  introduzida na proposição anterior satisfaz as seguintes propriedades.

**Proposição 3.1.4** *Nas condições da proposição anterior, a matriz  $\mathcal{H}_1$  é tal que*

$$\mathcal{H}_1(\alpha) = \Lambda_- \Lambda^{-1} \mathcal{H}_1^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1}, \quad (105)$$

e os blocos da diagonal principal,  $\mathcal{H}_{1j}$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , satisfazem a igualdade

$$\mathcal{H}_{1j}^2 = \mathcal{I}_{d_j}. \quad (106)$$

**Dem.:** De (98) vem que

$$\mathcal{C}_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda_+^{-1}(\alpha) \mathcal{H}_1(\alpha)$$

o que equivale a

$$\mathcal{H}_1(\alpha) = \Lambda_+(\alpha) \mathcal{C}_- \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+(\alpha).$$

Usando (99), o facto de  $\Lambda_+(\alpha) = \Lambda_-$  (por (78)) e de  $\begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}$  obtém-se (105), de onde resulta

$$\Lambda_- \Lambda^{-1} \mathcal{H}_1 \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{H}_1(\alpha) = \mathcal{I}. \quad (107)$$

Considerando as matrizes  $\Lambda_-$ ,  $\Lambda$  e  $\mathcal{H}_1$  por blocos, a igualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11}^2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_{1l}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{I},$$

donde se conclui que  $\mathcal{H}_{1j}^2 = \mathcal{I}_{a_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . ■

**Corolário 3.1.5** *Se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são todos iguais, então a matriz  $\mathcal{H}_1$  é involutiva:  $\mathcal{H}_1^2 = \mathcal{I}$ .*

**Proposição 3.1.6** *Se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são todos diferentes, então a matriz  $\mathcal{H}_1$  toma a forma*

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & \epsilon_2 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & \epsilon_3 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_4 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  e  $p_{ij}$ ,  $i < j$ , são polinómios na variável  $\theta$  de grau inferior ou igual a  $\kappa_i - \kappa_j$ , tal que

$$p_{i,i+1}(\alpha(\theta)) = -\epsilon_i \epsilon_{i+1} \theta_-^{k_i - k_{i+1}} \theta^{k_{i+1} - k_i} p_{i,i+1}.$$

**Dem.:** A partir de (106), conclui-se que  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

De (107) decorre que:

$$\epsilon_1 p_{12}(\alpha) + \epsilon_2 \theta_-^{k_1 - k_2} \theta^{k_2 - k_1} p_{12} = 0, \text{ logo}$$

$$p_{12}(\alpha) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \theta_-^{k_1 - k_2} \theta^{k_2 - k_1} p_{12};$$

$$\epsilon_1 p_{13}(\alpha) + \theta_-^{k_1 - k_2} \theta^{k_2 - k_1} p_{12} p_{23}(\alpha) + \epsilon_3 \theta_-^{k_1 - k_3} \theta^{k_3 - k_1} p_{13} = 0,$$

$$\epsilon_1 p_{14}(\alpha) + \theta_-^{k_1 - k_2} \theta^{k_2 - k_1} p_{12} p_{24}(\alpha) + \theta_-^{k_1 - k_3} \theta^{k_3 - k_1} p_{13} p_{34}(\alpha) + \epsilon_4 \theta_-^{k_1 - k_4} \theta^{k_4 - k_1} p_{14} = 0;$$

$$\epsilon_2 p_{23}(\alpha) + \epsilon_3 \theta_-^{k_2-k_3} \theta^{k_3-k_2} p_{23} = 0, \text{ logo}$$

$$p_{23}(\alpha) = -\epsilon_2 \epsilon_3 \theta_-^{k_2-k_3} \theta^{k_3-k_2} p_{23};$$

$$\epsilon_2 p_{24}(\alpha) + \theta_-^{k_2-k_3} \theta^{k_3-k_2} p_{23} p_{34}(\alpha) + \epsilon_4 \theta_-^{k_2-k_4} \theta^{k_4-k_2} p_{24} = 0,$$

$$\epsilon_3 p_{34}(\alpha) + \epsilon_4 \theta_-^{k_3-k_4} \theta^{k_4-k_3} p_{34} = 0, \text{ logo}$$

$$p_{34}(\alpha) = -\epsilon_3 \epsilon_4 \theta_-^{k_3-k_4} \theta^{k_4-k_3} p_{34} = 0.$$

■

A função matricial  $\mathcal{H}_2$  anteriormente referida satisfaz as propriedades seguintes.

**Proposição 3.1.7** *Nas condições da Proposição 3.1.3, a matriz  $\mathcal{H}_2$  é tal que*

$$\overline{\mathcal{H}_2} = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda,$$

e os blocos da diagonal principal,  $\mathcal{H}_{2j}$ ,  $j = 1, \dots, l$  satisfazem a igualdade

$$\overline{\mathcal{H}_{2j}} \mathcal{H}_{2j} = \mathcal{I}_{dj}.$$

**Dem.:** A igualdade (100) é equivalente a  $\overline{\mathcal{C}_+} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1} \overline{\mathcal{H}_2}$ . De modo

idêntico, (101) é equivalente a  $\overline{\mathcal{C}_+} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda$ . Estas duas igualdades permitem concluir que  $\overline{\mathcal{H}_2} = \Lambda^{-1} \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda$ , logo

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{H}_{21}} \mathcal{H}_{21} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \overline{\mathcal{H}_{2l}} \mathcal{H}_{2l} \end{pmatrix} = \mathcal{I},$$

donde se conclui que  $\overline{\mathcal{H}_{2j}} \mathcal{H}_{2j} = \mathcal{I}_{dj}$ ,  $j = 1, \dots, l$ .

**Teorema 3.1.8** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular (84). Se as funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  (93) e (94) são invertíveis em  $L_\infty^{4 \times 4}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \dots, \theta^{\kappa_4}\}$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \dim (\ker Q_1 | \mathfrak{P} \cap \ker Q_2 | \mathfrak{P}),$$

$$\ker T_{A,B} = \{\pi^{-1}(\Phi) : \Phi = \Delta^{-1} (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) r_+ v\}, \quad r_+(t) = (t+i)^{-1},$$

onde  $v \in \ker Q_1 | \mathfrak{P} \cap \ker Q_2 | \mathfrak{P}$ ,  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ , são os operadores de projecção lineares

$$Q_1 = \frac{1}{2} [I - \mathcal{H}_1^{-1} \Lambda \Lambda^{-1} \chi^{-1} U], \quad \chi = \theta \theta^{-1},$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} [I + \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda \theta^{-1} C],$$

e

$$\mathfrak{P} = \left\{ v \in \tilde{L}_2^4(\mathbb{R}) : v_i = p_i(\theta), \quad i = 1, \dots, 4 \right\},$$

com  $p_i \in \tilde{P}^{\kappa_i-1}$  se  $\kappa_i \in \mathbb{N}$  ou  $p_i \equiv 0$  se  $\kappa_i \leq 0$ , em que  $\tilde{P}^{\kappa_i-1}$  denota o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a  $\kappa_i - 1 \in \mathbb{N}_0$ , sobre o corpo dos números reais.

■

**Dem.:** Seja  $\varphi \in \ker T_{A,B}$ , então, tendo em conta (90),  $\Psi = \Delta \pi(\varphi) \in \ker T_{A,B}$ .

Pelo Teorema 1.5.2 tem-se que

$$\Psi = \Delta \Phi = (\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1}) r_+ v,$$

$$r_+(t) = (t+i)^{-1} \text{ e } v \in \mathfrak{P}.$$

É evidente que

$$\Psi_+ = P_+ \Psi = \mathcal{C}_+ r_+ v \tag{108}$$

e

$$\Psi_- = P_- \Psi = -\mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1} r_+ v. \tag{109}$$

Naturalmente que  $\Psi \in \tilde{\mathfrak{E}}$ , portanto satisfaz as condições (88), e assim

$$\begin{aligned} P_{\pm}U\Psi &= \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \Psi_{\pm}, \\ P_{\pm}C\Psi &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}. \end{aligned}$$

Por (ii) de (31) e de (83),

$$U\Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \Psi_{\mp}, \quad (110)$$

$$C\Psi_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \Psi_{\mp}. \quad (111)$$

Das igualdades (108), (109) e (110) resulta que

$$\mathcal{C}_+(\alpha)r_+(\alpha)Uv = - \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1}\Lambda^{-1}r_+v, \quad (112)$$

$$\mathcal{C}_-^{-1}(\alpha)\Lambda^{-1}(\alpha)r_+(\alpha)Uv = - \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+r_+v. \quad (113)$$

Atendendo a que

$$r_+(\alpha) = -r_+\chi, \quad \chi = \theta\theta_-^{-1},$$

e usando as igualdades (98) e (99), verifica-se que (112) e (113) são equivalentes e tomam a forma

$$\mathcal{H}_1^{-1}\Lambda\Lambda_-^{-1}\chi^{-1}Uv = v,$$

permitindo concluir que  $Q_1v = 0$ ,  $v \in \mathfrak{B}$ .

Das igualdades (108), (109) e (111) resulta que

$$\overline{\mathcal{C}}_+ C r_+ v = - \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_-^{-1} \Lambda^{-1} r_+ v, \quad (114)$$

$$(\overline{\mathcal{C}}_-)^{-1} (\overline{\Lambda})^{-1} C r_+ v = - \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{C}_+ r_+ v. \quad (115)$$

De acordo com (100) e (101), atendendo a que  $\frac{\overline{r}_+}{r_+} = \theta^{-1}$  e que  $\theta = (\overline{\theta})^{-1}$ , as igualdades (114) e (115) são equivalentes a

$$v + \mathcal{H}_2^{-1} \Lambda \theta^{-1} C v = 0,$$

o que permite concluir que  $Q_2 v = 0$ ,  $v \in \mathfrak{P}$ . ■

No caso em que os coeficientes dos operadores  $A$  e  $B$ , definidos por (85), são elementos de  $C_\mu(\mathring{\mathbb{R}})$  é possível formular o seguinte resultado.

**Proposição 3.1.9** *Nas condições da Proposição 3.1.3, para  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}C_\mu^{4 \times 4}(\mathring{\mathbb{R}})$ ,*

$$\det \mathcal{H}_1 = 1.$$

**Dem.:** De (98) vem que

$$\mathcal{H}_1 = \Lambda_+ \mathcal{C}_- (\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+.$$

Tomando  $t = t_0$ , temos que:

$$\mathcal{H}_1(t_0) = \Lambda_+(t_0) \mathcal{C}_-(t_0) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{C}_+(t_0). \quad (116)$$

A igualdade (81) implica que

$$\Lambda_+(t_0) = \text{diag} \{(-1)^{\kappa_1}, \dots, (-1)^{\kappa_4}\} \Lambda(t_0)$$

e, portanto,

$$\det \Lambda_+(t_0) = (-1)^\kappa \det \Lambda(t_0),$$

onde  $\kappa$  é o índice de  $\mathcal{C}$ ,  $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_4$ , para  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \theta^{\kappa_2}, \theta^{\kappa_3}, \theta^{\kappa_4}\}$ .

Vejamus que  $\kappa$  é um número par.

De (91),

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix},$$

logo

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \mathcal{A}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Assim,

$$\text{ind } \mathcal{C} = \text{ind } \mathcal{A}^{-1} + \text{ind } \mathcal{A} \text{ ind } \alpha = -\text{ind } \mathcal{A} - \text{ind } \mathcal{A} = -2 \text{ind } \mathcal{A},$$

donde se conclui que  $\kappa$  é um número par, pelo que

$$\det \Lambda_+(t_0) = \det \Lambda(t_0).$$

Da igualdade anterior e de (116) resulta que

$$\det \mathcal{H}_1(t_0) = \det \Lambda(t_0) \det \mathcal{C}_-(t_0) \det \mathcal{C}_+(t_0),$$

isto é,

$$\det \mathcal{H}_1(t_0) = \det \mathcal{C}(t_0).$$

Por outro lado, usando a igualdade (117) vem que

$$\det \mathcal{C}(t_0) = \det \mathcal{A}^{-1}(t_0) \det \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \det \mathcal{A}(t_0) \det \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\det \mathcal{C}(t_0) = 1.$$

Logo,  $\det \mathcal{H}_1(t_0) = 1$ . Como  $\mathcal{H}_1$  é uma matriz triangular superior por blocos e estes são constantes, então

$$\det \mathcal{H}_1(t_0) = \det \mathcal{H}_1 = 1.$$

■

### 3.1.1 Operadores integrais singulares com deslocamento

Considerando o método anteriormente utilizado para determinar o núcleo do operador

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_-, \quad (118)$$

analisemos o caso particular em que os operadores funcionais  $A$  e  $B$  são

$$A = a_{00}I + a_{10}U, \quad B = b_{00}I + b_{10}U, \quad (119)$$

com coeficientes em  $L_\infty(\mathbb{R})$ , e onde  $U \in \mathfrak{L}(L_2(\mathbb{R}))$ , definido por (30),

$$(U\varphi)(t) = \varphi(-t + h), \quad h \in \mathbb{R},$$

satisfaz as propriedades (31).

Neste caso, é possível descrever uma base do núcleo do operador  $T_{A,B}$  e, conseqüentemente, determinar a sua dimensão.

Para os resultados análogos aos da secção anterior não serão apresentadas demonstrações.

Sejam  $\mathfrak{E} = \{\Phi \in L_2^2(\mathbb{R}) : \Phi_1 = \Phi_2 = \varphi, \varphi \in L_2(\mathbb{R})\}$  e

$$\pi : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{E},$$

a aplicação que associa cada função  $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$  a  $\Phi \in \mathfrak{E}$ . Por  $\tilde{\mathfrak{E}}$  denote-se o subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}} = \text{im } \Delta$ , onde  $\Delta : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}$  é o operador invertível

$$\Delta = \text{diag}(I, U) |_{\mathfrak{E}}.$$

**Teorema 3.1.10** *Seja  $T : \mathfrak{E} \rightarrow L_2^2(\mathbb{R})$ , o operador definido por*

$$T = \text{diag}(T_{A,B}, T_{A,B}) | \mathfrak{E}.$$

*O operador verifica a relação*

$$T = \Delta^{-1} T_{A,B} \Delta,$$

*onde  $T_{A,B} : L_2^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2^2(\mathbb{R})$ , é o operador integral singular sem deslocamento,*

$$T_{A,B} = \mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-,$$

*com coeficientes matriciais:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & b_{10} \\ a_{10}(\alpha) & b_{00}(\alpha) \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & a_{10} \\ b_{10}(\alpha) & a_{00}(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (120)$$

**Proposição 3.1.11** *As matrizes  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  satisfazem as seguintes relações:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{E}, \quad (121)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} \mathcal{A}(\alpha) \mathcal{E}, \quad (122)$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} \mathcal{C}^{-1}(\alpha) \mathcal{E}, \quad (123)$$

*onde  $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .*

**Proposição 3.1.12** *Se  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  admite uma factorização em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \theta^{\kappa_2}\}$ , então os factores externos satisfazem as seguintes igualdades:*

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{E} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha) \Lambda_+^{-1} \mathcal{H}, \quad (124)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{C}_+^{-1}(\alpha) \mathcal{E},$$

onde

$$\Lambda_{\pm} = \text{diag}\{\theta_{\pm}^{\kappa_1}, \theta_{\pm}^{\kappa_2}\},$$

$\theta_{\pm}$  são os factores externos de  $(\gamma\gamma)$  e  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante  $2 \times 2$ , se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são iguais, ou uma matriz racional triangular superior, no caso contrário.

**Proposição 3.1.13** *Nas condições da Proposição 3.1.12, se  $\kappa_1 > \kappa_2$ , a matriz  $\mathcal{H}$  tem a seguinte estrutura*

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & p(\theta) \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$  e  $p(\theta)$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ , tal que

$$p(\theta(\alpha)) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \chi^{\kappa_2 - \kappa_1} p(\theta),$$

onde  $\chi = \theta \theta_-^{-1}$ .

A matriz  $\mathcal{H}$  satisfaz a igualdade

$$\mathcal{H}(\alpha) = \Lambda_- \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda \Lambda_-^{-1}.$$

No caso em que  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante tal que

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{I}.$$

**Dem.:** Da Proposição 3.1.12 sabemos que, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes, então a matriz  $\mathcal{H}$  é da forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & p(\theta) \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_{1,2} \in \mathbb{C}$  e  $p(\theta)$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ . Tendo em conta (124) e (78), conclui-se que

$$\Lambda_- \Lambda^{-1} \mathcal{H} \Lambda \Lambda_-^{-1} \mathcal{H}(\alpha) = \mathcal{I},$$

e, portanto,  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$ . Decorre ainda desta igualdade que

$$p(\theta(\alpha)) = -\epsilon_1\epsilon_2\chi^{\kappa_2-\kappa_1}p(\theta), \chi = \theta\theta_-^{-1}.$$

■

**Teorema 3.1.14** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular definido por (118)-(119). Se as funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+\Lambda\mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \theta^{\kappa_2}\}$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \dim (\ker Q \mid \mathfrak{P}),$$

$$\ker T_{A,B} = \{\pi^{-1}(\Phi) : \Phi = \Delta^{-1}(\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1}\Lambda^{-1})r_+v\}, r_+(t) = (t+i)^{-1},$$

onde  $v \in \ker Q \mid \mathfrak{P}$ ,  $Q$  é o operador de projecção linear

$$Q = \frac{1}{2} [I - \mathcal{H}^{-1}\Lambda\Lambda_-^{-1}\chi^{-1}U], \chi = \theta\theta_-^{-1},$$

e

$$\mathfrak{P} = \{v \in L_2^2(\mathbb{R}) : v_i = p_i(\theta), i = 1, 2\},$$

com  $p_i \in P^{\kappa_i-1}$  se  $\kappa_i \in \mathbb{N}$  ou  $p_i \equiv 0$  se  $\kappa_i \leq 0$  e  $P^{\kappa_i-1}$  denota o espaço dos polinómios, na variável  $\theta$ , com grau menor ou igual a  $\kappa_i - 1 \in \mathbb{N}_0$ .

Por  $Q^{(\kappa_i)} \in \mathfrak{L}(P^{\kappa_i-1})$  representaremos os operadores de projecção:

$$Q^{(\kappa_i)} = \frac{1}{2} (I - \epsilon_i\chi^{\kappa_i-1}U), i = 1, 2, \quad (125)$$

onde  $\epsilon_i^2 = 1$ .

**Lema 3.1.15** *Nas condições do último teorema, e no caso em que  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ ,  $v = (p_1(\theta), p_2(\theta))^T \in \ker Q$  se e só se*

$$p_2(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_2)}$$

e

$$p_1(\theta) = -\frac{\epsilon_1}{2}p_2(\theta)p(\theta) + p_1^*(\theta), \quad p_1^*(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_1)}.$$

Então

$$\dim \ker Q = \dim \ker Q^{(\kappa_1)} + \dim \ker Q^{(\kappa_2)}.$$

**Dem.:** Seja  $v = (p_1(\theta), p_2(\theta))^T \in \ker Q$ . Usando o resultado da Proposição 3.1.13,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & p(\theta) \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

verifica-se que a equação

$$Qv = 0$$

é equivalente a

$$\begin{cases} p_1(\theta) - \epsilon_1 \chi^{\kappa_1-1} U p_1(\theta) = -\epsilon_1 \epsilon_2 p(\theta) \chi^{\kappa_2-1} U p_2(\theta) \\ p_2(\theta) - \epsilon_2 \chi^{\kappa_2-1} U p_2(\theta) = 0 \end{cases}.$$

A primeira equação trata-se de uma equação não homogénea que admite  $-\frac{\epsilon_1}{2}p_2(\theta)p(\theta)$  como solução particular e, daí,

$$p_1(\theta) = -\frac{\epsilon_1}{2}p_2(\theta)p(\theta) + p_1^*(\theta), \quad p_1^*(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_1)}.$$

Da segunda equação vem que  $p_2(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_2)}$ .

Podemos concluir que,  $v = (p_1(\theta), p_2(\theta))^T \in \ker Q$  se e só se

$$v = (1, 0)^T p_1^*(\theta) + \left(-\frac{\epsilon_1}{2}p(\theta), 1\right)^T p_2(\theta)$$

e, portanto,

$$\dim \ker Q = \dim \ker Q^{(\kappa_1)} + \dim \ker Q^{(\kappa_2)}.$$

■

**Lema 3.1.16** *Se  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ , sejam  $Q^{(\kappa_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , os operadores de projecção (125). Então*

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left[ \frac{\kappa_i}{2} + \frac{1 + \epsilon_i}{4} \right],$$

em que  $[x]$  denota a parte inteira do número  $x$ .

Além disso, uma base dos espaços  $\ker Q^{(\kappa_i)}$  é constituída pelas funções

$$q_m^{(i)} = \chi^{m-1} - \epsilon_i \chi^{\kappa_i - m}, \quad m = 1, \dots, \dim \ker Q^{(\kappa_i)}.$$

**Dem.:** Para provar o lema vamos considerar a seguinte base de  $P^{\kappa_i - 1}$

$$\{\chi^{m-1}\}, \quad m = 1, \dots, \kappa_i.$$

As igualdades (77) e (78) implicam que  $\chi(\alpha) = \chi^{-1}$ . Portanto,

$$Q^{(\kappa_i)}(\chi^{m-1}) = \frac{1}{2}(\chi^{m-1} - \epsilon_i \chi^{\kappa_i - m}), \quad m = 1, \dots, \kappa_i.$$

Estas igualdades permitem concluir que, para  $\epsilon_i = -1$ ,

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left[ \frac{\kappa_i}{2} \right],$$

e, para  $\epsilon_i = 1$ ,

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \left[ \frac{\kappa_i + 1}{2} \right].$$

■

**Teorema 3.1.17** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular definido por (118)-(119). Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são funções matriciais invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$  com índices parciais  $\kappa_{1,2}$  :  $\kappa_1 > \kappa_2$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \begin{cases} 0, & \kappa_1 \leq 0 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 + \epsilon_1}{4} \right], & \kappa_2 \leq 0, \kappa_1 > 0 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1 + \epsilon_1}{4} \right] + \left[ \frac{\kappa_2}{2} + \frac{1 + \epsilon_2}{4} \right], & \kappa_2 > 0 \end{cases}.$$

Se os coeficientes dos operadores funcionais  $A$  e  $B$  definidos por (119) são elementos de  $C_\mu(\mathring{\mathbb{R}})$ , é possível extrair resultados adicionais. Vejamos:

**Proposição 3.1.18** *Nas condições da Proposição 3.1.12, para  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{GC}_\mu^{2 \times 2}(\mathring{\mathbb{R}})$ ,*

$$\det \mathcal{H} = -1.$$

**Dem.:** Seguindo as ideias da demonstração da Proposição 3.1.9, constata-se que  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$  é um número par.

Tendo em conta que, no ponto fixo  $t_0$  do deslocamento  $\alpha$ , a primeira igualdade em (124) pode ser escrita do seguinte modo

$$\mathcal{H}(t_0) = \Lambda_+(t_0) \mathcal{C}_-(t_0) \mathcal{E} \mathcal{C}_+(t_0),$$

e que, usando a igualdade (122),

$$\det \mathcal{C}(t_0) = 1,$$

tem-se que

$$\det \mathcal{H}(t_0) = -\det \mathcal{C}(t_0) = -1.$$

■

**Proposição 3.1.19** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{GC}_\mu^{2 \times 2}(\mathring{\mathbb{R}})$  matrizes com a estrutura (120).*

*Nas condições da Proposição 3.1.12, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes, a matriz  $\mathcal{H}$  tem a seguinte forma:*

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & p(\theta) \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  e  $p(\theta)$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ , tal que

$$p(\theta(\alpha)) = \chi^{\kappa_2 - \kappa_1} p(\theta).$$

**Dem.:** A demonstração é consequência directa da proposição anterior e da Proposição 3.1.13. ■

**Teorema 3.1.20** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular definido por (118)-(119). Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são funções matriciais em  $\mathcal{GC}_\mu^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\kappa_{1,2} : \kappa_1 > \kappa_2$  são os índices parciais da factorização de  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ , então  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  têm a mesma paridade e*

$$\dim \ker T_{A,B} = \begin{cases} 0, & \kappa_1 \leq 0 \\ \left[ \frac{\kappa_1}{2} + \frac{1+\epsilon}{4} \right], & \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0 \\ \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, & \kappa_2 > 0 \end{cases},$$

onde  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

### 3.1.2 Operadores integrais singulares com conjugação

Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular emparelhado:

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_-, \quad (126)$$

onde  $A$  e  $B$  são os operadores funcionais

$$A = a_{00}I + a_{10}C, \quad B = b_{00}I + b_{10}C, \quad (127)$$

com coeficientes em  $\tilde{L}_\infty(\mathbb{R})$ , e  $C$  é o operador de conjugação complexa (82) que, como sabemos de (83), anti-comuta com o operador  $S$ .

Sejam  $\mathfrak{E} = \left\{ \Phi \in \tilde{L}_2^2(\mathbb{R}) : \Phi_1 = \Phi_2 = \varphi, \varphi \in \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \right\}$  e

$$\pi : \tilde{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{E},$$

a aplicação que associa cada função  $\varphi \in \tilde{L}_2(\mathbb{R})$  a  $\Phi \in \mathfrak{E}$ . Por  $\tilde{\mathfrak{E}}$  denote-se o subespaço  $\tilde{\mathfrak{E}} = \text{im } \Delta$ , onde  $\Delta : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}$  é o operador invertível

$$\Delta = \text{diag}(I, C) |_{\mathfrak{E}}.$$

**Teorema 3.1.21** *Seja  $T : \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{L}_2^2(\mathbb{R})$ , o operador definido por*

$$T = \text{diag}(T_{A,B}, T_{A,B}) | \mathfrak{E}.$$

*O operador verifica a relação*

$$T = \Delta^{-1} T_{A,B} \Delta,$$

*onde  $T_{A,B} : \tilde{L}_2^2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{L}_2^2(\mathbb{R})$ , é o operador integral singular*

$$T_{A,B} = \mathcal{A} P_+ + \mathcal{B} P_-,$$

*com coeficientes matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  de dimensão 2:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & b_{10} \\ \overline{a_{10}} & \overline{b_{00}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{E} \overline{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (128)$$

*A matriz  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  satisfaz*

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} (\overline{\mathcal{C}})^{-1} \mathcal{E}, \quad (129)$$

*para  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .*

**Proposição 3.1.22** *Se*

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$$

*admite uma factorização em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \Lambda \mathcal{C}_-$ , com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \theta^{\kappa_2}\}$ , então os factores externos satisfazem as seguintes igualdades:*

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{E} (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \mathcal{H} \quad (130)$$

$$\mathcal{C}_- = \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1} \mathcal{E}, \quad (131)$$

*onde*

$$\Lambda_\pm = \text{diag}\{\theta_\pm^{\kappa_1}, \theta_\pm^{\kappa_2}\},$$

*$\theta_\pm$  são os factores externos de (77) e  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante  $2 \times 2$ , se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são iguais, ou uma matriz racional triangular superior, no caso contrário.*

**Dem.:** Basta tomar em consideração que a relação (129) implica que

$$\mathcal{C} = \mathcal{E} (\overline{\mathcal{C}_-})^{-1} \Lambda (\overline{\mathcal{C}_+})^{-1} \mathcal{E},$$

o que constitui outra factorização de  $\mathcal{C}$  em  $L_2(\mathbb{R})$ . ■

No resto do capítulo, por  $\tilde{P}^n$  representaremos o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a  $n \in \mathbb{N}_0$ , sobre o corpo dos números reais.

**Proposição 3.1.23** *Nas condições da proposição anterior, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes,  $\kappa_1 > \kappa_2$ , então  $\exists \mu_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\exists p(\theta) \in \tilde{P}^{\kappa_1 - \kappa_2}$ :*

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} e^{i\mu_1} & p(\theta) \\ 0 & e^{i\mu_2} \end{pmatrix},$$

onde o polinómio  $p(\theta)$  satisfaz a igualdade

$$p(\theta(\alpha)) = -e^{-i(\mu_1 + \mu_2)\theta^{\kappa_2 - \kappa_1}} p(\theta).$$

A matriz  $\mathcal{H}$  satisfaz a igualdade

$$\overline{\mathcal{H}} = \Lambda^{-1} \mathcal{H}^{-1} \Lambda.$$

No caso em que  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\mathcal{H}$  é uma matriz constante tal que

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{-1}.$$

**Dem.:** Da Proposição 3.1.22 sabemos que, se os índices parciais de  $\mathcal{C}$  são diferentes, então a matriz  $\mathcal{H}$  é da forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & p(\theta) \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix},$$

onde  $\epsilon_{1,2} \in \mathbb{C}$  e  $p(\theta)$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $\kappa_1 - \kappa_2$ . Tendo em conta (130) e (131), conclui-se que

$$\Lambda \overline{\mathcal{H}} \Lambda^{-1} \mathcal{H} = \mathcal{I}.$$

Desta igualdade resulta que  $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = 1$ . Assim,  $\exists \mu_j \in \mathbb{R} : \epsilon_j = e^{i\mu_j}$ ,  $j = 1, 2$ . Decorre ainda que

$$p(\theta(\alpha)) = -e^{-i(\mu_1+\mu_2)}\theta^{\kappa_2-\kappa_1}p(\theta).$$

Se  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\Lambda\overline{\mathcal{H}}\Lambda^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{I}$  é equivalente a  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{-1}$ . ■

**Teorema 3.1.24** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular com conjugação (126). Se as funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+\Lambda\mathcal{C}_-$  com  $\Lambda = \text{diag}\{\theta^{\kappa_1}, \theta^{\kappa_2}\}$ , então*

$$\dim \ker T_{A,B} = \dim (\ker Q \mid \mathfrak{P}),$$

$$\ker T_{A,B} = \{\pi^{-1}(\Phi) : \Phi = \Delta^{-1}(\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-^{-1}\Lambda^{-1})r_+v\}, \quad r_+(t) = (t+i)^{-1},$$

onde  $v \in \ker Q \mid \mathfrak{P}$ ,  $Q$  é o operador de projecção linear

$$Q = \frac{1}{2} [I + \mathcal{H}^{-1}\Lambda\theta^{-1}\mathcal{C}],$$

e

$$\mathfrak{P} = \left\{ v \in \widetilde{L}_2^2(\mathbb{R}) : v_i = p_i(\theta), \quad i = 1, 2 \right\},$$

com  $p_i \in \widetilde{P}^{\kappa_i-1}$  se  $\kappa_i \in \mathbb{N}$  ou  $p_i \equiv 0$  se  $\kappa_i \leq 0$ .

**Lema 3.1.25** *Sejam  $Q^{(\kappa_i)} \in \mathfrak{L}(\widetilde{P}^{\kappa_i-1})$  os operadores de projecção:*

$$Q^{(\kappa_i)} = \frac{1}{2} (I + e^{-i\mu_i}\theta^{\kappa_i-1}\mathcal{C}), \quad i = 1, 2. \quad (132)$$

*Nas condições do último teorema, e no caso em que  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ ,  $v = (p_1(\theta), p_2(\theta))^T \in \ker Q$  se e só se*

$$p_2(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_2)}$$

e

$$p_1(\theta) = -\frac{e^{-i\mu_1}}{2}p_2(\theta)p(\theta) + p_1^*(\theta), \quad p_1^*(\theta) \in \ker Q^{(\kappa_1)}.$$

Então

$$\dim \ker Q = \dim \ker Q^{(\kappa_1)} + \dim \ker Q^{(\kappa_2)}.$$

**Lema 3.1.26** *Se  $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ , sejam  $Q^{(\kappa_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , os operadores de projecção definidos em (132). Então*

$$\dim \ker Q^{(\kappa_i)} = \kappa_i.$$

**Dem.:** Considerando a base de  $\tilde{P}^{\kappa_i-1}$

$$\{\theta^j, i\theta^j\}, \quad j = 0, \dots, \kappa_i - 1,$$

temos que

$$\ker Q^{(\kappa_i)} = \begin{cases} \text{span} \{q_m^+, iq_m^-\}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \text{span} \{q_m^+, iq_m^-, iq^*\}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad i = 1, 2,$$

onde

$$q_m^\pm = \theta^{m-1} \pm e^{-i\mu_i} \theta^{\kappa_i-m}, \quad m = 1, \dots, \left\lfloor \frac{\kappa_i}{2} \right\rfloor,$$

e

$$q^* = e^{-\frac{i\mu_i}{2}} \theta^{\frac{\kappa_i-1}{2}}, \quad \text{se } n \text{ é ímpar.}$$

■

Tendo em conta o último teorema e os últimos dois lemas é possível formular o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.27** *Seja  $T_{A,B}$  o operador integral singular definido por (126)-(127). Se as funções matriciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são invertíveis em  $L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e*

$\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  admite uma factorização generalizada em  $L_2(\mathbb{R})$  com índices parciais  $\kappa_{1,2} : \kappa_1 > \kappa_2$ , então

$$\dim \ker T_{A,B} = \begin{cases} 0, & \kappa_1 \leq 0 \\ \kappa_1, & \kappa_1 > 0, \kappa_2 \leq 0 \\ \kappa_1 + \kappa_2, & \kappa_2 > 0 \end{cases} .$$

Conclui-se deste modo que, no caso do operador emparelhado com conjugação, a dimensão do núcleo do operador  $T_{A,B}$  depende unicamente dos índices parciais da factorização da matriz  $\mathcal{C}$ .

## Referências

- [1] Bari N. K., *Trigonometric Series*. Fizmatgiz, Moscow, 1961.  
English transl.: Macmillan, New York, Pergamon Press, 1964.
- [2] Donald J. N., Bak J., *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] Gakhov F. D, *Boundary value problems*. 3rd ed., Moscow, Nauka, 1977  
(in russian).  
English transl.: Oxford, Pergamon Press, 1986.
- [4] Clancey K., Gohberg I. C., *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 3, Birkhäuser, 1981.
- [5] Folland G. B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. New York, John Wiley, 1984.
- [6] Ford L. R., *Automorphic Functions*. New York, Chelsea Publishing, 1957.
- [7] Gohberg I. C., Krupnik N., *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations*. Operator Theory: Advances and Applications, OT 53, vol. 1, Birkhäuser, 1992.
- [8] Gohberg I. C., Krupnik N., *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations*. Operator Theory: Advances and Applications, OT 54, vol. 2, Birkhäuser, 1992.
- [9] Karapetiants N., Samko S., *Equations with Involutive Operators*. Birkhäuser, 2001.

- [10] Kravchenko V. G., Lebre A. B., Rodriguez J. S., *Factorization of Singular Integral Operators with a Carleman Shift and Spectral Problems*. Journal of Integral Equations and Applications, vol 13, No 4, Winter 2001.
- [11] Kravchenko V. G., Lebre A. B., Rodriguez J. S., *Factorization of Singular Integral Operators via Factorization of Matrix Functions*. In Operator Theory: Advances and Applications, vol. 142, 189-211, Birkhäuser, 2003.
- [12] Kravchenko V. G., Lebre A. B., Rodriguez J. S., *The kernel of Singular Integral Operators with a Finite Group of Linear-Fractional Shifts*. In Operator Theory 20, 143-154, Theta Series in Advanced Mathematics, Bucharest, 2006.
- [13] Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S., *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with shift*. Mathematics and its Applications, vol. 289, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1994.
- [14] Lebre, A. B., *Álgebras de Operadores Integrais Singulares*. AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.
- [15] Litvinchuk G. S., *Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Nauka, Moscow, 1977 (in russian).
- [16] Litvinchuk G. S., *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1-378, 2000.
- [17] Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M., *Factorization of Measurable Matrix Functions*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 25, Birkhäuser, 1987.

- [18] Mikhlin, S. G., Prössdorf S., *Singular integral operators*, Springer, Berlin, 1986.
- [19] Rodriguez J. C., *Operadores Integrais Singulares com Deslocamento Linear Fraccionário de Carleman e Conjugação*. Tese de Doutoramento, Universidade do Algarve, Faro, 2002.