



Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

**O SIGNIFICADO MATEMÁTICO NA GEOMETRIA
DO 7.º ANO COM RECURSO AO GEOGEBRA:
UMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA**

Dora Luísa Alves Nunes

Dissertação apresentada para obtenção do grau de
Mestre em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências
Área de Especialização de Matemática

Orientadoras:

Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

Professora Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Faro

2011

RESUMO

Este estudo insere-se na problemática da construção do significado matemático, no que concerne à aprendizagem de conceitos e relações geométricas. Tem por base de trabalho a realização de tarefas com recurso a um programa de geometria dinâmica, o *GeoGebra*.

Para melhor concretizar o propósito desta investigação, foram traçadas algumas linhas orientadoras, que se relacionam entre si: i) o modo como a mediação semiótica está presente ao longo da construção do significado; ii) o papel da linguagem no processo de aprendizagem da geometria; iii) a influência da utilização do *GeoGebra* na aprendizagem de conceitos e relações geométricas.

O quadro teórico assenta em dois grandes pilares: a) a *semiótica e a construção do significado*, em que é dada especial ênfase ao sistema triádico do signo, denominado triângulo semiótico, que actua por meio de três elementos: o representante, o objecto e o interpretante; e b) a *geometria*, onde esclareço acerca do desenvolvimento conceptual e exponho de que modo a *tecnologia* pode contribuir para a melhoria das aprendizagens em geometria através do recurso a programas de geometria dinâmica.

A metodologia adoptada no estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, na modalidade de estudo de caso. O estudo incluiu uma componente de recolha de dados numa turma de 7.º ano de escolaridade durante o 3.º período do ano lectivo de 2009/2010. Esta investigação recaiu sobre três pares de alunos e a recolha de dados foi feita essencialmente através de registos escritos, dos ficheiros em *GeoGebra* e de registos áudio dos diálogos de cada par de alunos durante a realização das tarefas.

Os resultados deste estudo apontam evidências de que a aprendizagem da geometria é sustentada por processos de interpretação, de linguagem e de uma contínua e infinita construção de sistemas conceptuais que se vão organizando, tornando-se mais especializados, mais significativos e mais próximos do registo matemático.

Palavras-chave: Geometria; construção do significado; semiótica; linguagem; representação; *GeoGebra*; aprendizagem.

Abstract

This study addresses the process of mathematical meaning production, regarding the learning of geometric concepts and relationships. It is based on students' performance on tasks with the usage of dynamic geometry software, the *GeoGebra*.

To better define the purpose of this research, three standpoints were selected, which are related to: i) how semiotics develops throughout the production of meaning; ii) the role of language on the process of learning geometry; iii) how *GeoGebra* can influence the learning of concepts and relationships in geometry.

The theoretical framework is developed in two fundamental directions: a) *semiotics and the production of meaning*, with special emphasis on the triadic structure of the sign, called the semiotic triangle, which acts through three elements: sign, object and interpretant; and b) *geometry learning*, where I discuss conceptual development and clarify how *technology* can improve the learning of geometry through the use of dynamic geometry software.

The undertaken research methodology follows a qualitative and interpretative approach, specifically a case study design. This study includes an empirical work that involved data collection in a 7th grade class during the 3rd term of the 2009/2010 school year. It focused on three pairs of students and the collected data essentially consisted of students' written records, the *GeoGebra* files and the audio taping of students' dialogues while working on the tasks in the classroom.

The results of this study show evidences that learning geometry is supported by processes of interpretation, by language and by a continuous and infinite construction of conceptual systems that become more reorganized and more specialized as they approach semiotic forms of the mathematical register.

Key words: Geometry; meaning production; semiotics; language; representation; *GeoGebra*; learning.

Agradecimentos

À Professora Doutora Susana Carreira pela exímia forma como me orientou e guiou neste trabalho que se tornou longo e sinuoso. Pelo encorajamento dado, pela enorme disponibilidade concedida, apesar de ter todos os seus minutos ocupados, pelo material bibliográfico que me dispensou, sem o qual este trabalho não seria possível, o meu profundo agradecimento.

À Professora Doutora Nélia Amado, “minha professora” desde os tempos do ensino secundário, pelo apoio prestado, pelas palavras de incentivo nos momentos mais difíceis e por me ensinar que existe sempre um lado positivo em todas as realidades da nossa vida.

Aos meus alunos que acolheram de imediato a ideia de participar nesta investigação, colaborando comigo mesmo quando o tempo de aula já tinha terminado. Sem eles esta investigação não faria sentido.

À Direcção da escola onde realizei este estudo que concordou com a sua realização e aos colegas do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais que me apoiaram na concretização deste objectivo.

Aos colegas de mestrado que realizaram esta caminhada, pela partilha de experiências, informações e bibliografia.

A toda a minha família que acreditou ser possível e que, de formas muito diferentes, contribuíram para a realização desta grande etapa. À minha avó que durante a realização deste trabalho enfrentou momentos muito dolorosos. À Teresa e seus pais que superaram uma prova de vida muito, muito dura.

Aos meus pais que me apoiaram e colaboraram incondicionalmente desde o primeiro momento, cuja ajuda que facultaram (não só física, mas também mental) foi preciosa.

À Leonor que esteve sem a mãe muitas e muitas horas, recebendo-me sempre com um abraço apertado e que me mostrou que o carinho e o amor se mantêm mesmo sem a presença física.

Ao Thierry que foi o primeiro a lançar-me para a frente, apoiando-me e incentivando-me a continuar, sem nunca desistir. Agradeço a dedicação nas minhas ausências e a logística final que este trabalho envolveu.

ÍNDICE

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iii
Índice de figuras	viii
Índice de quadros	x
Capítulo I – Introdução	1
1.1. Génese do estudo	3
1.2. Raciocínio geométrico no ensino e na aprendizagem	4
1.3. Linguagem e pensamento na aprendizagem da geometria	6
1.4. Problema e questões de estudo	8
1.5. Organização do estudo	9
Capítulo II – Enquadramento teórico	11
2.1. O conhecimento matemático	13
2.1.1. A representação na aprendizagem da matemática	13
2.1.2. A linguagem na aprendizagem da matemática	15
2.1.3. A comunicação e a significação	17
2.2. A construção do significado matemático	19
2.2.1. Sentido e significado matemático	19
2.2.2. A semiótica na análise do significado	21
2.3. A semiótica na aprendizagem da matemática	23
2.3.1. Aprendizagem significativa	23
2.3.2. A mediação semiótica	25
2.3.3. Diferentes abordagens à semiótica	26
2.3.4. O desenvolvimento conceptual de Vygotsky	34
2.4. Síntese	37
2.5. A geometria no currículo	39
2.5.1. Um pouco de História... ..	39
2.5.2. A geometria no currículo do ensino básico em Portugal	41

2.6. O desenvolvimento conceptual em geometria	44
2.6.1. O raciocínio geométrico	44
2.6.2. O ensino e a aprendizagem da Geometria	46
2.7. A tecnologia e a geometria: uma união de facto	48
2.7.1. A mediação em ambientes computacionais	48
2.7.2. Os Ambientes de geometria dinâmica	52
2.7.3. O software de geometria dinâmica do estudo – GeoGebra	54
2.8. Síntese	58
Capítulo III – Metodologia de investigação	59
3.1. Opções metodológicas	61
3.2. Fases do estudo	67
3.2.1. As aulas	69
3.3. Participantes	72
3.3.1. A turma	72
3.3.2. Os pares	74
3.4. Recolha de dados	78
3.5. Análise de dados	79
Capítulo IV – Análise de dados	83
4.1. Par X	85
4.1.1. Tarefa 1 - Figuras semelhantes	85
4.1.2. Tarefa 2 - Tangram	94
4.1.3. Tarefa 3 - Relações entre ângulos	99
4.1.4. Tarefa 4 - Ângulos de um triângulo	104
4.2. Par Y	106
4.2.1. Tarefa 1 - Figuras semelhantes	106
4.2.2. Tarefa 2 – Tangram	113
4.2.3. Tarefa 3 - Relações entre ângulos	117
4.2.4. Tarefa 4 - Ângulos de um triângulo	121
4.3. Par Z	125
4.3.1. Tarefa 1 - Figuras semelhantes	125
4.3.2. Tarefa 2 – Tangram	131

4.3.3. Tarefa 3 - Relações entre ângulos	135
4.3.4. Tarefa 4 - Ângulos de um triângulo	138
Capítulo V – Conclusões	143
5.1. A construção do significado de conceitos geométricos	145
5.1.1. Semelhança e razão de semelhança	145
5.1.2. Posições relativas de rectas	147
5.1.3. Ângulos verticalmente opostos	148
5.1.4. Ângulos de lados paralelos	148
5.1.5. Ângulos externos	149
5.2. A construção do significado de relações geométricas	149
5.2.1. Comparação de razões de semelhança	149
5.2.2. Áreas e perímetros no Tangram	150
5.2.3. Soma de ângulos internos de um triângulo	151
5.3. Aspectos de linguagem na aprendizagem da Geometria	152
5.4. O papel das representações e o GeoGebra como ferramenta mediadora	153
5.5. Considerações finais.....	154
Referências Bibliográficas	157
Anexos	167
Anexo 1 – Tarefas propostas nas aulas	168
Anexo 2 - Pedido de autorização à Direcção da escola para a realização do estudo	175
Anexo 3 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação para a realização do estudo	177

Índice de figuras

Figura 2.1.	Dualidade saussuriana entre significante e significado	26
Figura 2.2.	O triângulo semiótico de Peirce	28
Figura 2.3.	A rede semiótica de Seeger	29
Figura 2.4.	Modelo onto-semiótico do conhecimento matemático, segundo Godino e Font	33
Figura 2.5.	Sistema conceptual de Vygotsky	36
Figura 4.1.	Construção da figura reduzida da questão 2 do par X	86
Figura 4.2.	Construção da figura ampliada da questão 3 do par X	86
Figura 4.3.	Construção de duas figuras semelhantes realizada pelo par X	87
Figura 4.4.	Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação	88
Figura 4.5.	Cadeia de significados evidenciados pela aluna X1	89
Figura 4.6.	Resposta do par X à questão 5	89
Figura 4.7.	Construção da Figura B da questão 6 do par X	90
Figura 4.8.	A resposta do par X para os valores das razões de semelhança	91
Figura 4.9.	Primeira figura da questão 7, realizada pelo par X	92
Figura 4.10.	Resposta do par X à questão 7	93
Figura 4.11.	Prolongamento da cadeia de significados evidenciados pelo par X	93
Figura 4.12.	Construção do Tangram feita pelo par X	95
Figura 4.13.	Uma concretização da semiose presente no significado de rectas perpendiculares	96
Figura 4.14.	Justificação dada pelo par X para a questão 2	96
Figura 4.15.	Relação apresentada junto ao Tangram construído pelo par X	97
Figura 4.16.	Resposta às questões 3.1 e 3.2. pelo par X	97
Figura 4.17.	Cadeia de significados evidenciados pelo par X	99
Figura 4.18.	Construção das duas rectas concorrentes (questão 1).....	100
Figura 4.19.	Tabela com os ângulos encontrados após a manipulação da construção obtida	100
Figura 4.20.	Resposta à questão 1.2	101
Figura 4.21.	Representação obtida para ilustrar ângulos verticalmente opostos (questão 1.3)	101
Figura 4.22.	Uma concretização da semiose presente no significado de ângulos verticalmente opostos	101
Figura 4.23.	Construção de duas rectas paralelas e uma oblíqua a esta (questão 2) ...	102
Figura 4.24.	Resposta do par X na questão 2	103
Figura 4.25.	Uma concretização da semiose para o significado de ângulos de lados paralelos	104
Figura 4.26.	Construção da aluna X1	105
Figura 4.27.	Redução realizada pelo par Y	107
Figura 4.28.	Construção de uma figura reduzida e outra ampliada, elaboradas pelo par Y	109
Figura 4.29.	Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação	109
Figura 4.30.	Resposta dada à questão 5	110
Figura 4.31.	Construção da figura B da questão 6	110
Figura 4.32.	Resposta do par Y à questão 6.2	111

Figura 4.33.	Resposta do par Y à questão 7	111
Figura 4.34.	Cadeia de significados evidenciados pelo par Y.....	112
Figura 4.35.	Construção do Tangram com as indicações dos perímetros e das áreas das figuras que o compõem	114
Figura 4.36.	Respostas da questão 2 do par Y	115
Figura 4.37.	Respostas à questão 3 do par Y	116
Figura 4.38.	Uma concretização da semiose no significado das relações entre polígonos no Tangram.....	117
Figura 4.39.	Construção realizada pelo par X na questão 1	118
Figura 4.40.	Tabela da questão 1.1	118
Figura 4.41.	Resposta à questão 1.2	118
Figura 4.42.	Resposta à questão 1.3	118
Figura 4.43.	Resposta à questão 1.4	119
Figura 4.44.	Construção da figura da questão 2	120
Figura 4.45.	Conclusão da questão 2 encontrada pelo par Y	121
Figura 4.46.	Construção do par Y	122
Figura 4.47.	Resposta à questão 1.1	122
Figura 4.48.	Resposta à questão 1.2	123
Figura 4.49.	Resposta à questão 1.3	124
Figura 4.50.	Uma concretização da semiose presente no significado de ângulo externo de um triângulo	124
Figura 4.51.	Construção da figura reduzida da questão 2	126
Figura 4.52.	Construção da figura B do par Z	127
Figura 4.53.	Construção da ampliação da questão 7 do grupo Z	129
Figura 4.54.	Resposta à questão 7 do par Z	129
Figura 4.55.	Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação	130
Figura 4.56.	Cadeia de significados e respectivo prolongamento evidenciados pelo par Z.....	131
Figura 4.57.	Tangram e respectiva zona algébrica construído pelo par Z	132
Figura 4.58.	Resposta à questão 3 do par Z	134
Figura 4.59.	Uma concretização da semiose presente nas relações entre as áreas das figuras que compõem o Tangram.....	134
Figura 4.60.	Construção da questão 1	135
Figura 4.61.	Resposta à questão 1.1	136
Figura 4.62.	Resposta à questão 1.2	136
Figura 4.63.	Representação geométrica e conclusão da questão 1.3	136
Figura 4.64.	Uma concretização da semiose presente no significado de ângulos verticalmente opostos	137
Figura 4.65.	Resposta à questão 1.4. do par Z	137
Figura 4.66.	Exemplo de duas rectas paralelas e uma oblíqua a estas	137
Figura 4.67.	Construção do par Z	139
Figura 4.68.	Resposta à questão 1.1. do par Z	139
Figura 4.69.	Resposta à questão 1.2. do par Z	140
Figura 4.70.	Resposta à questão 1.3. do par Z	140

Índice de quadros

Quadro 1.	Fases do estudo	69
Quadro 2.	Unidades temáticas, conteúdos e competências específicas das tarefas ..	71
Quadro 3.	Resumo das características relativas às capacidades de expressão oral e escrita dos participantes	74

Capítulo I

Introdução

Neste capítulo introdutório apresento as razões que motivaram este estudo, indico uma breve incursão pelo tema a investigar e enuncio o problema e as questões a que me proponho responder.

1.1. Génese do estudo

De acordo com o actual programa de matemática para o ensino básico, o processo de ensino-aprendizagem deve conter momentos de descoberta, trabalho em grupo, confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas.

O modo como os alunos se apropriam dos conceitos matemáticos nem sempre coincide com aquilo que é esperado pelos professores. Muitas vezes um professor considera que o seu modo de transmitir e de explicar é claro e que foi naturalmente entendido pelos seus alunos. Contudo, o significado atribuído por diversos alunos a determinado conceito não é, na maioria das vezes, aquele que o professor supõe ou admite ser.

Como refere Candeias (2008), a geometria tem vindo a ocupar um papel de destaque nos currículos de matemática nacionais, em todos os níveis de ensino, assumindo um considerável peso em relação a todo o programa da disciplina. Os ambientes de geometria dinâmica co-substanciados pelo uso da tecnologia suscitam o raciocínio geométrico, favorecendo a compreensão dos conceitos e das relações geométricas.

Este projecto de investigação incide essencialmente na construção do significado matemático em geometria e pretende, através de estudos de caso, contribuir para entender o modo como os alunos constroem o significado matemático de determinados conceitos de geometria, a partir de tarefas realizadas com recurso a um ambiente de geometria dinâmica.

Optei por efectuar o estudo numa turma de 7.º ano por considerar muito interessante a forma como os alunos se expressam e entendem os conceitos matemáticos nesta fase do seu percurso escolar.

Enquanto professora do 3.º ciclo do ensino básico e secundário, sinto a exigência de gerir, orientar e fomentar a comunicação matemática em sala de aula, de modo a promover a aprendizagem dos alunos na disciplina, concretamente no tema da geometria.

A geometria constitui uma área que desde sempre me fascinou, tanto no meu percurso escolar, como profissional. Existem actualmente múltiplas possibilidades e recursos que podem ser usados para abordar a geometria de forma atractiva, mas muitos alunos continuam a senti-la como uma parte difícil da Matemática. É também uma das melhores oportunidades para relacionar a Matemática com o mundo real, na medida em que a geometria “é mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio” (NCTM, 2000/2007, p. 44). Mas a descrição do pensamento, especialmente em tópicos de geometria, envolve uma forte mediação da linguagem, da figura, da representação. Assim, na aprendizagem da geometria ganha grande importância a partilha de ideias, de construções e de formas de representar e comunicar que facilitem a construção de um tecido de significações e de meios de simbolização.

1.2. Raciocínio geométrico no ensino e na aprendizagem

A consciência de que a aprendizagem da geometria tem aspectos específicos quando comparada com a aprendizagem de outras áreas da Matemática ressalta do facto de muito do trabalho de investigação em educação matemática, tanto em Portugal como em muitos outros países, incidir sobre problemas e questões que se colocam especialmente neste domínio. Exemplos deste facto podem encontrar-se em publicações de referência especificamente dedicadas a este assunto, como é o caso do ICMI Study sobre as perspectivas para o ensino e aprendizagem da geometria no século XXI (Mammana & Villani, 1998) ou o caso do Yearbook do NCTM sobre a compreensão da geometria num mundo em transformação (Craine & Rubenstein, 2009).

Temos hoje, portanto, um corpo de conhecimento baseado na investigação sobre o processo de ensino-aprendizagem da geometria na matemática escolar. Battista (2009) faz uma síntese deste conhecimento em torno da pergunta: como é que os alunos aprendem geometria?

Uma das teorias provavelmente mais referidas para descrever o raciocínio geométrico dos alunos é a teoria dos níveis de van Hiele, segundo a qual os alunos progredem no seu raciocínio geométrico por níveis sequenciais e qualitativamente diferentes, de uma forma hierárquica. A investigação tem apurado a teoria em alguns aspectos, além de ter revelado que o tipo de ensino a que os alunos são sujeitos pode influenciar o modo como se dá a sua evolução na escala de níveis.

Uma segunda teoria lida com a abstracção em geometria e dá importância aos chamados modelos mentais, isto é, à capacidade dos indivíduos de construir situações de forma mental que traduzam objectos, acções e ideias. A aprendizagem assenta em ciclos de transformação dos objectos físicos em objectos mentais. O resultado é a abstracção e a capacidade de elaboração de modelos mentais cada vez mais complexos.

Uma outra teoria refere-se aos conceitos. Muitas vezes os conceitos são descritos como imagens mentais de classes ou categorias de objectos. Um conceito pode ser constituído por exemplos, protótipos, imagens e descrições verbais. Esta perspectiva distingue o conceito como imagem mental do chamado conceito-definição que é a descrição verbal, formal e simbólica de uma classe de objectos. Outro aspecto desta perspectiva teórica é a distinção entre conceitos naturais ou espontâneos e conceitos formais. Considera as dificuldades dos alunos em reformular os seus conceitos espontâneos, de modo a conseguir conciliá-los com os conceitos formais, baseados em definições e na declaração precisa de propriedades.

Existe ainda uma vasta teoria acerca da representação em geometria, em especial no que se refere às figuras geométricas. Estas, por um lado, são usadas para retirar ideias que conduzem ao conceito geométrico, por outro lado, são entendidas como meios para representar um conceito geométrico formal. Uma das dificuldades que esta teoria reconhece é a de que os alunos se fixam, por vezes, em aspectos concretos de uma figura particular, esquecendo que esta pretende representar uma situação mais geral.

Por último, está a ganhar relevo a teoria da exploração e da justificação, associada à utilização de ambientes de geometria dinâmica. As capacidades dinâmicas e

de visualização destes ambientes impelem os alunos a observar regularidades, a explorar um grande número de situações e a procurar a justificação de propriedades e relações geométricas.

1.3. Linguagem e pensamento na aprendizagem da geometria

A investigação das aprendizagens feitas pelos alunos com o recurso a ambientes de geometria dinâmica tem dado ênfase ao papel mediador destes ambientes na construção do significado em geometria.

Por exemplo, Duval (1998) afirma que a utilização do computador vem tornar “os objectos geométricos um pouco como os objectos reais que podem ser manipulados” (p. 51). Mas o autor reconhece que esta abordagem “experimental” da geometria não resolve completamente o problema da complexidade cognitiva da geometria: “Será que o problema do ensino [da geometria] se altera completamente com o novo ambiente computacional?” (p. 51).

Na sua perspectiva, o software de geometria dinâmica está centrado essencialmente na construção de figuras. Mas desenvolver a apreensão da figura pode não ser suficiente para preencher a lacuna entre um comportamento ingénuo e um comportamento matemático.

“Os conceitos e as representações semióticas (figuras, diagramas, linguagem natural e linguagem simbólica) não podem ser colocados em extremos opostos, do tipo entidades mentais versus entidades materiais ou compreensão versus comunicação. Os processos matemáticos requerem a utilização de diferentes registos semióticos de representação. E de um ponto de vista cognitivo, o desenvolvimento do raciocínio e da aprendizagem é atingido pela interiorização de várias representações semióticas. É por isso que as representações mentais e as representações materiais não podem ser efectivamente opostas. São ambas representações semióticas” (Duval, 1998, p. 50).

Um estudo recente com alunos do ensino superior sobre o conceito de figuras semelhantes (Kallia & Panagiotis, 2010) incorpora as ideias teóricas de Duval, nomeadamente, a referência a três tipos de processos cognitivos fundamentais em geometria: a) visualização; b) construção; c) raciocínio. Os autores deste estudo detectam a dificuldade de alunos do ensino superior (futuros professores) na compreensão do conceito de semelhança e advertem que a construção pode ajudar à visualização e que esta última pode favorecer a intuição; contudo, as propriedades das figuras semelhantes requerem o domínio de uma linguagem própria.

“Numa abordagem em espiral da geometria, é importante saber quando é possível extrair conclusões no que concerne à noção de semelhança, em termos do seu significado em geometria ou em termos da linguagem corrente, antes do ensino da definição formal. Ao que parece, os alunos não usam a ideia de lados proporcionais para garantirem uma resposta exacta acerca da semelhança de figuras por ampliação ou redução de uma figura” (Kallia & Panagiotis, 2010, p. 738).

Outros investigadores têm reconhecido a importância de analisar de que forma os alunos dão significado a signos matemáticos, sobretudo quando esse significado se afasta do significado ingénuo ou espontâneo adquirido antes da aprendizagem escolar. A perspectiva da semiótica, em particular a teoria semiótica de Peirce, tem tido eco em vários estudos. Bloch (2007) refere que a significação não é de modo nenhum deduzida dos signos matemáticos, uma vez que a interpretação é um processo triádico que requer um interpretante. É o interpretante que estabelece a ligação entre um signo e uma determinada coisa – um objecto.

“A dinâmica de produção e interpretação de signos desempenha um papel fundamental na matemática onde uma primeira significação tem sempre de ser rearranjada, repensada para se ajustar a objectos novos e mais complexos” (Bloch, 2007, p. 1140).

Neste estudo, irei dar uma atenção especial aos signos matemáticos e às significações produzidas pelos alunos, face a objectos envolvidos na aprendizagem de

conceitos de geometria. Entre esses objectos estão as construções dos alunos mediadas pela utilização de um ambiente de geometria dinâmica.

1.4. Problema e questões de estudo

Este estudo tem como objectivo conhecer o modo como os alunos constroem o significado matemático, no que respeita a conceitos que se enquadram no tema da Geometria, e identificar o papel de elementos mediadores da aprendizagem, com destaque para a linguagem e o recurso a um ambiente de geometria dinâmica na sala de aula.

Para alcançar este propósito, foram desenvolvidas actividades geométricas baseadas na utilização do software *GeoGebra*, em sala de aula, com uma turma de 7.º ano de escolaridade, focando os seguintes tópicos: semelhança de figuras, perímetros e áreas de polígonos, ângulos definidos por rectas e ângulos do triângulo.

Sendo desejável delimitar e concretizar o objecto de estudo, foi formulado o seguinte conjunto de questões de investigação:

- i) Como se pode descrever, do ponto de vista da semiótica, a construção do significado matemático de conceitos e relações geométricas pelos alunos?
- ii) Que aspectos sobressaem relativamente ao papel da linguagem na construção do significado matemático em Geometria?
- iii) Em que sentido a utilização do *GeoGebra*, na realização de construções geométricas, cria diferentes situações de aprendizagem de conceitos e relações geométricas?

1.5. Organização do estudo

De acordo com as questões do estudo, foi escolhida uma metodologia de recolha de dados de natureza qualitativa, pois é valorizada a interpretação dos participantes e do próprio investigador, o que permite uma análise em profundidade dos fenómenos em contexto natural.

Esta recolha insere-se no contexto educacional de uma turma de 7.º ano de escolaridade de uma escola do concelho de Loulé, no âmbito do tema geometria, com recurso ao programa de geometria dinâmica *GeoGebra*.

Como professora da turma e investigadora tive a preocupação de facultar aos alunos apenas meras indicações acerca de cada tarefa a realizar; depois de organizados em pares, os alunos executaram cada tarefa, registaram as suas conclusões e gravaram os seus ficheiros das construções geométricas no *GeoGebra*.

A recolha de dados foi feita através de: registos escritos dos alunos em cada tarefa; ficheiros em *GeoGebra* de cada par de alunos em cada tarefa; captações áudio dos diálogos de cada par de alunos durante a realização de cada tarefa; e algumas notas de campo realizadas por mim durante a observação e leccionação das aulas.

No que respeita à organização deste trabalho, pretendi expor a perspectiva teórica que fundamenta este estudo, desenvolvendo as principais ideias em que assenta o capítulo II, concretizando-as na análise de dados e procurando que estas iluminassem as conclusões finais do estudo.

O capítulo II está dividido em duas secções. A primeira refere-se ao conhecimento matemático, à construção do significado matemático e à semiótica na aprendizagem da matemática, onde apresento as ideias fundamentais de diferentes autores no que concerne a esta última temática. A segunda parte está ligada à geometria e à forma como esta está presente no currículo do ensino básico. Ainda neste âmbito, refiro-me à tecnologia e à sua íntima ligação com a geometria, sendo explorada a mediação em ambientes computacionais, concretamente em ambientes de geometria dinâmica.

No capítulo III, descrevo as opções metodológicas tidas em conta neste estudo, faço uma descrição dos procedimentos adoptados, enumero os métodos de recolha e de análise de dados e descrevo os participantes seleccionados para esta investigação.

No capítulo IV são apresentados e discutidos os dados recolhidos, à luz do quadro teórico proposto no capítulo II. No capítulo V são expostos os principais resultados e conclusões desta investigação.

Capítulo II

Enquadramento Teórico

2.1. O conhecimento matemático

2.1.1. A representação na aprendizagem da matemática

“Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação (...)” (Ponte et al., 2007, p.4).

As representações matemáticas surgem no Programa de Matemática do Ensino Básico agora em vigor, e em muitos outros documentos de índole curricular, como elementos essenciais da compreensão matemática. Entre as várias formas de representar ideias e procedimentos matemáticos poderão encontrar-se as convencionais e as não convencionais, mas a existência de representações partilhadas é essencial para que possa haver comunicação e compreensão (Boavida et al., 2008).

Neste campo da representação em matemática, surge inevitavelmente o interesse pelos diversos modos de representação; alguns destes, tais como objectos físicos, desenhos, tabelas, gráficos e símbolos, são determinantes para ajudar os alunos a comunicar raciocínios (NCTM, 2000/2007, p. 332). O National Council of Teachers of Mathematics refere explicitamente a importância de encorajar os alunos a “representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido”, bem como o facto de que estes “deverão compreender que as representações escritas das ideias matemáticas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção de matemática” (p. 75).

No livro *A Experiência Matemática no Ensino Básico* é dada alguma atenção às representações, sendo estas classificadas de activas, icónicas e simbólicas, de acordo com a visão de Bruner (1962, referido por Boavida et al., 2008). As representações activas estão associadas à acção e à manipulação de objectos, quer sejam de uso corrente ou didáctico, contribuindo para a construção de conceitos. As que se baseiam na organização visual, como o uso de figuras, esquemas, imagens ou desenhos, para ilustrar conceitos, distanciando-se assim do concreto e do físico, denominam-se icónicas. As representações simbólicas reportam-se à tradução da experiência em

termos de linguagem simbólica. “Correspondem, não apenas aos símbolos que representam ideias matemáticas, mas a todas as linguagens que envolvem um conjunto de regras fundamentais quer para o trabalho com a Matemática, quer para a sua compreensão” (Boavida et al., 2008, p. 71).

Estas diferentes formas de representação não são autónomas e independentes. Poderão coexistir, estabelecendo-se conexões entre elas, e é através da comunicação que as ligações surgem.

Para que os alunos desenvolvam a capacidade de usar representações variadas no seu modo de explicar raciocínios, também os professores o deverão fazer. Como menciona Tripathi (2008), usar múltiplas formas de representação “é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, cada lente proporciona perspectivas diferentes que tornam o conceito mais rico e mais profundo” (p. 439).

O actual programa de matemática do ensino básico valoriza capacidades como “as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática, contempladas quer no trabalho com as capacidades transversais, quer no trabalho com os diversos temas matemáticos” (Ponte et al., 2007, p. 8). O conhecimento e a compreensão de diferentes tipos de representação, o saber usá-las em diferentes contextos e até seleccionar a mais adequada a uma dada situação, são sugestões a seguir de acordo com este novo programa. O processo de ensino-aprendizagem tem de prever, portanto, momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas.

As representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação. “Os alunos necessitam, por isso, de adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática no trabalho com os números e as operações aritméticas, os objectos geométricos, os dados estatísticos, o simbolismo algébrico e a representação cartesiana ou outros tipos de gráficos, tabelas, diagramas e esquemas” (Ponte et al., 2007, p. 9). É apropriado usar tanto as representações simbólicas como as icónicas. Os alunos podem sentir a necessidade de representar objectos e relações matemáticas, começando, para isso, por desenvolver as suas próprias representações não convencionais. À medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer surgir a

indispensabilidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais.

Associada à comunicação escrita vem a representação simbólica de dados, ideias, conceitos e situações matemáticas sob diversas formas. É importante que os alunos adquiram facilidade em passar informação de uma forma de representação para outra para obterem diferentes perspectivas de uma mesma situação.

“O aspecto simbólico da escrita matemática é uma das características mais evidentes e distintas. Os símbolos têm funções variadas na nossa cultura e o contexto matemático pode ajudar a ver a estrutura, permitir que manipulações rotineiras sejam automáticas e tornar possível a reflexão (...)” (Pimm, 1991, p. 19).

2.1.2. A linguagem na aprendizagem da matemática

“A educação matemática começa e prossegue na linguagem, avança e tropeça por causa da linguagem, e os seus resultados são frequentemente avaliados em linguagem.” (Durkin, 1991, p. 3)

A aprendizagem e o ensino da matemática actuam num palco linguístico muito particular, onde é exigido rigor, precisão, reflexão e formalismo. Durkin (1991) considera que uma das principais funções da linguagem é a transmissão do pensamento. Contudo, o vocabulário da matemática tem palavras dotadas de significados múltiplos, o que provoca entraves ao entendimento de tais vocábulos por parte dos alunos.

Menezes (1999) enfatiza que, em sentido lato, a linguagem corresponde a um meio de comunicação utilizado por uma comunidade para transmitir mensagens. Em sentido mais estrito, é vista como um sistema de signos directos ou naturais, pressupõe um sujeito falante e implica fenómenos ligados à transmissão da mensagem dentro de um contexto espaço-temporal e cultural, chamado situação. O estudo da linguagem comporta pois aspectos psicológicos, sociológicos, etnológicos e mesmo psicanalíticos.

São muitas as palavras novas introduzidas nas aulas de matemática e nem sempre os alunos as interpretam como os professores esperam; de facto, como aponta Pimm (1987), a matemática não é uma linguagem natural, nem sequer um dialecto de

uma língua. Daí ser por vezes difícil transpor para a aula de matemática termos familiares usados na linguagem do dia-a-dia dos alunos.

Em termos linguísticos, a relação existente entre a matemática e uma linguagem natural, é o registo, “um conjunto de significados que são apropriados para uma função particular da linguagem”, como especifica Halliday (1975), citado por Pimm (1991, p. 17), o que envolve a aquisição de formas com o intuito de aprender a falar e a significar como um matemático. Carreira (1998) refere que o registo matemático é composto por um conjunto de termos, formas de expressão e tipos de argumentação. Obter conhecimento das palavras individuais não implica necessariamente perceber o significado de expressões que são compostas por essas palavras. Os registos e a linguagem matemática vão evoluindo à medida que os alunos também vão adquirindo conceitos de múltiplos significados.

Ao comunicar ideias matemáticas, é dada ênfase à linguagem específica da matemática, pois esta “serve para pensar e comunicar sobre objectos que, sendo matemáticos, a ela se adequam” (Boavida et al., 2008, p. 75). É com a linguagem natural que os alunos iniciam o seu pensamento, progredindo depois, ao integrarem aspectos da linguagem matemática.

Exteriorizar o pensamento através da linguagem oral ou da linguagem escrita, leva a uma maior aproximação ao próprio pensamento, o que auxilia no processo de reflexão, sem o qual a aprendizagem não seria possível. A matemática, quando falada, resulta numa linguagem natural; quando escrita, exterioriza pensamentos estáveis e permanentes, reflectidos pela escrita.

“Uma característica da linguagem escrita é a necessidade de que ela seja auto-suficiente e capaz de se sustentar a si própria, contrariamente à linguagem falada que pode ser empregue para comunicar com sucesso” (Pimm, 1991, p. 20).

O desenvolvimento da linguagem matemática pode ser visto como um aspecto importante da aprendizagem da matemática. Certas palavras ou expressões em matemática convergem numa complexa teia de ideias que formam um conceito matemático (Lee, 2006).

Quando se fala em linguagem matemática, fala-se de termos convencionais, precisão e rigor, e estes devem ser apropriados pelos alunos através da linguagem simbólica. Esta é particularmente evidenciada quando se trata da dimensão escrita da comunicação matemática. Inerente ao trabalho em matemática está o recurso ao símbolo, que facilita a precisão, permite uma escrita condensada e auxilia o raciocínio matemático.

Contudo, esta apropriação simbólica não é fácil, nem tão pouco linear. Pimm (1991) aponta como razão para esta dificuldade a dupla função que um símbolo apresenta: primeiro a de nomear ou indicar algo, sem que haja relação directa com o referente e segundo, a de descrever algo ligado à realidade ou situação a que se reporta (Rodrigues, 1997).

2.1.3. A comunicação e a significação

“O processo de comunicação implica um permanente tráfico de signos, isto é, conteúdos amalgamados a expressões variadíssimas, agrupados em mensagens e, por sua vez, condicionados por riscos do próprio circuito que cruzam e por ocorrência distintas que envolvem tensionalmente emissores e destinatários” (Carmelo, 2003, p.89).

Menezes (1999) apresenta as principais razões para focar o ensino da Matemática na comunicação, ao citar Baroody (1993): “A primeira, é que a Matemática é essencialmente uma linguagem — uma segunda linguagem; a outra, é que a Matemática e o ensino da Matemática são, no seu âmago, actividades sociais” (p. 17).

A comunicação entre os alunos, tanto oral como escrita, constitui um aspecto que o professor deve fomentar, porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos. Quando os alunos comunicam, a compreensão do seu próprio pensamento torna-se mais refinada e mais adequada, sentindo posteriormente a necessidade de que as suas intervenções sejam claras para todos os ouvintes. Esta necessidade “contribui para que os alunos se tornem mais rigorosos, mais

pormenorizados e mais coerentes nas suas intervenções, tentando ser mais convincentes” (Fonseca, 2009, p. 2).

O conhecimento em sala de aula é construído a partir de novas descobertas, das discussões que ocorrem com colegas em ambiente colaborativo, em que a participação se torna mais espontânea. Ao falarem e ouvirem os outros, os alunos “vão clarificando os significados das palavras bem como os seus pensamentos e ideias e, além disso, o conhecimento pessoal, ao ser combinado com o conhecimento dos outros, torna-se útil” (Martinho, 2007, p. 31). Esta autora acrescenta ainda um potencial da discussão em grupo: o aluno, quando fala para a turma, tem um maior cuidado na oralidade e se não tiver a certeza da pertinência do comentário, acaba por não o fazer.

De acordo com o NCTM (2000/2007), ao serem desafiados a pensar, a raciocinar e a comunicar sobre a matemática, os alunos “aprendem a ser claros e convincentes” (p. 66).

Fonseca (2009) refere que falar e ouvir são duas vertentes que necessitam de se desenvolver em simultâneo para que os alunos possam aprofundar o seu raciocínio matemático. Para que tal aconteça, é necessário criar condições de modo a que os alunos possam explicar, justificar e avaliar as próprias ideias e/ou as apresentadas por colegas (Boavida, 2009).

Alro e Skovsmose (2005) falam do conceito de “zona de oportunidades”, que opera quando os alunos prestam atenção a diferentes aspectos dos desafios que eles encontram dentro e fora da sala de aula. Assim, a zona de oportunidades é uma metáfora para as oportunidades que estão disponíveis aos alunos em determinado contexto. Estes autores realçam ainda que aprender está relacionado com aspectos cognitivos, sociais e emocionais do contexto onde uma pessoa está situada.

Se a matemática for vista como uma construção cultural partilhada pelos intervenientes e as aulas caracterizadas por processos de interacção social entre professor e alunos, a comunicação matemática passa a ser entendida como um sistema de contextos múltiplos, onde ocorrem momentos de negociação de significados entre os intervenientes (Boavida, 2009).

Como salienta Carmelo (2003), todo o processo mental é complexo e é desencadeado através de um igualmente complexo conjunto de regras, chamadas de código, que vão actuar “sobre a significação em todos os circuitos comunicacionais” (p.

88). O processo de significação corresponde sempre a uma construção e só tem pertinência num determinado grupo, pois é nesse grupo que um conjunto de códigos possibilita a ligação entre as expressões veiculadas e os conteúdos transmitidos.

A comunicação coloca sempre em cena uma variedade de códigos, quer sejam sociais, lógicos, linguísticos, estéticos ou outros; estes constituem a forma ideal para um grupo poder organizar os conteúdos. Carmelo (2003) afirma que “a todo o momento da nossa vida, se desencadeiam e emergem conteúdos que interpretamos a partir do que ouvimos, vemos, saboreamos, inteligimos, lembramos ou tacteamos. (...) Viver é, pois, basicamente uma acto contínuo e ilimitado de ler e interpretar redes de significados” (p.90).

2.2. A construção do significado matemático

2.2.1. Sentido e significado matemático

“Vivemos no mundo do sentido. O sentido é o ar da comunicação. Cada vez que respiramos, estamos – digamo-lo de modo figurado – estamos a ordenar o sentido. Toda a comunicação é uma tarefa que consiste em ordenar e moldar as possibilidades ou o fluir de sentido que temos à nossa disposição (...). Significar é retalhar o sentido, reedificá-lo, moldá-lo” (Carmelo, 2003, p. 69).

São vários os autores que se debruçaram sobre a distinção entre sentido e significado matemáticos. Rodrigues (1997) foca a visão de Leont’ev (na sua teoria da actividade) e de Vygotsky (no estudo do pensamento e da linguagem) no que respeita a este tema.

Para Leont’ev, psicólogo soviético, a actividade é concebida como sistema dinâmico de três níveis hierárquicos: motivo, acção por objectivos e operação, existindo uma ligação entre *sentido* e *significado*. O *sentido* é pessoal e resulta das relações que o

indivíduo estabelece entre o motivo e a acção definida por objectivos. O *significado* é social, público, explícito e decorre das relações estabelecidas entre a acção definida por objectivos e a operação. O sentido concretiza-se em significados, mas não o significado em sentido, “uma vez que o sentido, apesar de contido potencialmente no significado, é formado pela experiência vivida pelo indivíduo e não pelo significado” (Rodrigues, 1997, p. 19).

Um dos principais focos de atenção de Vygotsky reside nas funções psicológicas superiores, ligadas a processos voluntários, acções conscientemente controladas e mecanismos intencionais. Estes são produto da presença do homem num determinado contexto sócio-histórico. A internalização de formas culturais de comportamento envolve a reconstrução da actividade psicológica, tendo por base as operações com signos. Oliveira (1992a) esclarece que “a cultura não é pensada por Vygotsky como um sistema estático ao qual o indivíduo se submete, mas como uma espécie de *palco de negociações* em que seus membros estão em constante processo de recriação de reinterpretção de informações, conceitos e significados” (p. 80).

As análises de Vygotsky sobre a linguagem centram-se na questão do significado, sendo este entendido como uma componente essencial da palavra e, ao mesmo tempo, um acto de pensamento (Oliveira, 1992a). Na concepção de Vygotsky, o *sentido* é pessoal e decorre das relações que o indivíduo estabelece entre o objecto e o seu contexto. Assim sendo, este autor considera a ambiguidade como uma característica da natureza dos objectos, já que um mesmo objecto pode ter múltiplas representações. O *significado* permanece estável ao longo de todas as alterações de sentido que decorrem de diferentes contextos, sendo construído através da partilha de diferentes sentidos contextualizados (Rodrigues, 1997; Carreira, 1998). O *sentido* de uma palavra é o acumular de todos os acontecimentos psicológicos que se desencadeiam na consciência, é fluído, dinâmico, complexo, enquanto o *significado* representa apenas uma das zonas do sentido, a mais estável (Vygotsky, 1993). Esta visão do significado é também defendida por Voigt (1994), que não se assume como um teórico, mas como um investigador no âmbito da educação matemática.

“O sentido de uma palavra varia conforme o contexto em que a palavra se insere; em contraste, o significado tem uma forma dicionarizada que se torna

estável ao longo de diferentes contextos. O significado é pois, como diz Vygotsky, apenas uma pedra no edifício do sentido” (Carreira, 1998, p. 242).

Ao entrar num mundo partilhado por todos, um indivíduo, através das interações com outros indivíduos, faz emergir as propriedades do mundo em seu redor, atribuindo-lhe, assim, significado. Deste modo, e segundo Rodrigues (1998), o *significado*, no seu âmago, é baseado na actividade social. Voigt (1994, referido por Rodrigues, 1998) considera mesmo que a negociação do significado matemático é uma condição essencial para que a aprendizagem da matemática se concretize. É através da partilha de múltiplos sentidos dos objectos matemáticos, por parte de alunos e professor, que se produzem significados matemáticos consensuais na sala de aula.

Para Lave, Murtaugh e de La Rocha (1984, referidos em Rodrigues, 1997), existem dois conceitos que se podem relacionar com *sentido* e *significado* na perspectiva de Leont’ev: são os conceitos de cenário e palco. O palco, espaço físico e público, no qual tem lugar a actividade, reveste-se de um cunho firme e é organizado socialmente. O cenário, pessoal, flexível, decorre da actividade dos participantes. Mediante a descrição de ambos os conceitos, a associação é inevitável: o palco está para o significado assim como o cenário está para o sentido.

2.2.2. A semiótica na análise do significado

“Defendo (...) que o nosso destino é o de permanentemente encontrar significado para aquilo que são os objectos, os factos, as acções, as sensações, os símbolos que se entrecem na criação da nossa condição de seres que interpretam. Defendo ainda que nenhuma interpretação é definitiva, única, universal. O significado evolui, transforma-se, transfigura-se, desenvolve-se numa infinita ramificação. O saber é uma insustentável teia de significados e a imponderabilidade do saber é o reflexo exacto da forma como erramos pelos elos dessa teia” (Carreira, 1997, p.70).

A semiótica, com origem na Antiguidade Clássica, é a ciência que estuda os signos ou os sistemas de signos. Carmelo (2003) define a semiótica como a “actividade interpretativa do entendimento e da significação ligada ao signo e aos seus

instrumentos” (p. 112). Um signo pode ser definido como um meio usado com propósitos sociais: um modo de influenciar primeiramente os outros e só depois influenciar o próprio. Pressupõe uma intenção de comunicação e funciona como um estímulo com o objectivo de aludir a uma imagem mental (Carreira, 1998; Ernest, 2005).

Deste modo, um signo nunca é usado individualmente, ele integra um sistema semiótico com referência implícita ou explícita a outros signos. Ernest (2005) enfatiza que a perspectiva semiótica da actividade matemática constitui uma alternativa às perspectivas psicológicas, apenas centradas em estruturas e funções mentais. Esta corrente apresenta formas de encarar o ensino e a aprendizagem da matemática impulsionadas pelo signo e pelo uso do signo. É dada ênfase à apropriação pessoal do signo e à estrutura de significado subjacente que contém a relação entre os signos. O mesmo autor sugere ainda que o modelo do uso e da apropriação do signo se desenrola ciclicamente, de acordo com quatro fases: i) processo de apropriação (há uma resposta irreflectida para a imitação do uso do signo), ii) processo de transformação (são feitas diversas associações ao signo, a nível privado, particular), iii) processo de publicação (o signo é usado num diálogo, sai da esfera privada e volta a entrar na esfera social) e iv) processo de convencionalização (a produção de signos alimenta-se do social, ou seja, está sujeita à crítica, atenção, negociação, reformulação e aceitação/rejeição de outros).

Ernest (2005), além do fenómeno comportamental, está preocupado com os padrões de uso e de produção dos signos, com a criatividade individual na utilização destes e com os contextos sociais. Adianta também que a abordagem semiótica engloba as “dimensões individual e social da actividade matemática, sendo estes entendidos como aspectos mutuamente dependentes e constitutivos do ensino e da aprendizagem da matemática” (p. 23).

O sistema semiótico compreende, para Ernest (2005), três componentes: um conjunto de signos (podem ser falados, pronunciados, escritos, desenhados ou codificados), um conjunto de relações entre os signos (tendo em conta uma estrutura subjacente que contém o significado dessas relações) e um conjunto de regras de produção de signos.

2.3. A semiótica na aprendizagem da matemática

2.3.1. Aprendizagem significativa

“A aprendizagem da matemática escolar é, em parte, a tentativa de adquirir competência comunicativa no registo matemático, e as actividades de sala de aula podem ser privilegiadamente examinadas a partir desta perspectiva, a fim de se perceber as oportunidades de aprendizagem que estão a ser dadas aos alunos. Os professores não podem obrigar os alunos a aprender – no máximo, podem dar situações bem pensadas que possam providenciar oportunidades aos alunos para colaborar com ideias matemáticas e linguagem” (Pimm, 1991, p. 22).

Rodrigues (1997) enuncia o papel fundamental dos valores, crenças, atitudes e intenções dos sujeitos na aprendizagem da matemática. Tal como se percebe, na visão de Abreu (1995), ao estudar a relação entre a matemática escolar e não escolar, a cognição matemática é mediada por identidades sociais através das quais são evocadas representações sociais específicas da matemática, quer as relações sociais imediatas entre aluno e professor, quer as relações sociais simbólicas, ou seja, as crenças trazidas para uma dada situação.

Para Brown et al. (1988) e Matos et al. (1995), referidos por Rodrigues (1997), a aprendizagem é um processo de enculturação. Esta relação está presente no facto de as pessoas adoptarem, de forma consciente ou inconsciente, “o comportamento e os sistemas de crenças dos novos grupos sociais a que vão pertencendo ao longo das suas vidas” (p. 40). Existe, deste modo, uma partilha de conhecimentos e de cultura, fundindo-se na internalização dos valores dos grupos sociais.

Rodrigues (1997), seguindo as ideias de D’Ambrosio (1997), salienta que só existe aprendizagem quando os alunos se sentem envolvidos na actividade matemática, quando participam nela, quando esta é significativa para eles, ou dito de outra forma, quando um aluno “tem a oportunidade de sentir a alegria de ter descoberto algo, de ter investigado algo, quando este tem a oportunidade de fazer matemática de um modo criativo” (p. 65).

Para desenvolver uma aprendizagem significativa, Carreira (1998) refere que os alunos deverão manipular de forma consciente os objectos em estudo. Esta manipulação de objectos constitui o elemento básico para a sua interpretação e prevê o desencadear de referências concretas (Bussi et al., 2005). Os conceitos do quotidiano, previamente assimilados pelo aluno, actuam como elementos mediadores na aprendizagem de novo conhecimento. “Numa situação ideal, os conhecimentos científicos, irão, a dada altura, adquirir significados concretos para o aluno, ao passo que os espontâneos irão, com o tempo, tornar-se racionais e acessíveis às suas estratégias conscientes e voluntárias” (Carreira, 1998, p. 239). Os conceitos espontâneos entrelaçam-se em diferentes etapas do desenvolvimento conceptual, tornando o processo de fusão entre os dois tipos de conceitos, lento e exigente.

É com base na interacção social que se processa a transição entre o pensamento contextualizado e o pensamento descontextualizado. O desenvolvimento conceptual, de acordo com Vygotsky, resulta da progressiva descontextualização dos signos, isto é, da relação entre diversas palavras na ausência dos objectos concretos a que se referem (Carreira, 1998). Rodrigues (1997) menciona analogamente que existe uma alimentação recíproca entre o contexto e o significado.

São vários os autores, como refere Carreira (1998), que dão ênfase ao desenvolvimento intelectual e à produção de formas de pensamento que sejam diferentes das que acontecem no quotidiano. Quando o significado é construído pelo indivíduo, o conhecimento produzido é eficaz e significativo.

Para Seeger (2010) a construção do significado passa pela partilha, quer como um estado cognitivo (processos de generalização, formação de conceitos, dar sentido aos objectos), quer como um estado emocional (processos de compreensão das intenções dos outros, ajuda mútua, solidariedade, participação, cooperação e comunicação). Esta construção de significados é, portanto, baseada em formas de empatia e na reciprocidade partilhada, sendo a cooperação uma parte integrante do desenvolvimento humano. Esta autor acrescenta ainda que:

“como educadores matemáticos temos de reconhecer que tudo o que é feito na sala de aula é produzir significado – mesmo quando queremos que se abstenham dele. Temos também de reconhecer que tudo o que é feito na sala

de aula desperta sentimentos e emoções – e que estes sentimentos e emoções são parte integral do processo de significação (...)” (Seeger, 2010, p. 17).

2.3.2. A mediação semiótica

Acerca da perspectiva de Vygotsky, Bussi et al. (2005) descrevem a aplicação didáctica da mediação semiótica baseada em três pólos: histórico-cultural, didáctico e cognitivo. No pólo histórico-cultural, Vygotsky distingue a função de mediação dos instrumentos técnicos da dos instrumentos psicológicos, os quais têm a potencialidade de criar novas formas de um processo psicológico baseado na cultura prevalente. O pólo didáctico é usado para descrever a forma de concepção, execução e análise de processos de mediação semiótica. No plano da consciência individual, situa-se o pólo cognitivo, ligado aos processos de internalização da actividade psicológica.

Para o desenvolvimento conceptual ocorrer, os sistemas de signos ocupam um papel central. Nunes (1995) explicita a função mediadora dos referidos sistemas: “têm um papel estruturante na formação de conceitos e influenciam o tipo de conceitos que se desenvolvem durante as experiências de aprendizagem” (p. 7). Esta autora concorda com Luria (1979), ao mencionar que sem a mediação, “estaríamos restringidos ao aqui e agora” (p. 8).

Rodrigues (1997) expõe a concepção de Lave (1992), ao salientar a aprendizagem da matemática enquanto processo de construção de significado associado à participação dos indivíduos em práticas sociais. Aos alunos devem ser facultadas situações que propiciem experiências matemáticas, como modelar, investigar, conjecturar, explorar. Deste modo, há uma maior envolvência nas actividades escolares que poderão levar os alunos a pensar matematicamente enquanto participam numa prática *situada*.

O crescente corpo de pesquisa que se tem vindo a desenvolver no que respeita à compreensão da construção de significados na educação matemática, é evidenciado por Seeger (2010). Para este autor, aprender matemática é mais do que um processo de aquisição cognitivo e racional (explícito), é também sócio-emocional (implícito). Seeger (2010) defende que o carácter implícito ou indirecto do ensino e aprendizagem está profundamente associado ao legado de ser e de se tornar ser humano.

“A aprendizagem implícita é a aquisição de conhecimentos que ocorre, em grande parte, de tentativas, independentemente da consciência de aprender e principalmente na ausência de conhecimento explícito sobre o que foi adquirido; (...) é um direito fundamental, a raiz do processo, que se encontra no cerne do repertório comportamental adaptativo de cada organismo complexo” (Reber, 1993, citado por Seeger, 2010, p. 6).

2.3.3. Diferentes abordagens à semiótica

Meyer (2009) aborda algumas investigações realizadas no âmbito da análise dos conceitos e de como os alunos os usam. A teoria de Saussure pressupõe uma dualidade entre significante e significado, onde o signo é uma entidade de dupla faceta. Saussure considera que existe uma relação arbitrária inerente ao sistema linguístico a que pertencem estes dois elementos e que os une. Como afirma Carreira (1998), para este autor, “o sentido de um termo consiste nas relações de significação que ele adquire no contraste com outros termos” (p. 166). Carmelo (2003) refere que a estrutura diática do signo saussureano define uma estratégia mentalista e privilegia os signos linguísticos.

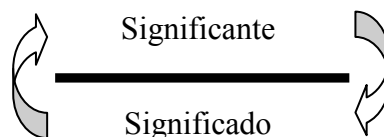


Figura 2.1. Dualidade saussuriana entre significante e significado

Como Bauersfeld (1995) aponta, esta visão acarreta problemas, pois “se houvesse uma correspondência entre a linguagem e a realidade, então, certamente poder-se-ia chegar a verdadeiras declarações verbais sobre o mundo” (Meyer, 2009, p. 34). O ensino tornar-se-ia num caso único de selecção adequada, fornecendo precisão dos meios verbais e uma adaptação desses meios ao objecto. A relação saussuriana entre significante e significado rapidamente se revelou insuficiente para descrever factos linguísticos muito evidentes na aula de matemática, como refere Carreira (1998).

Outra corrente fundadora da semiótica pertence a Peirce, um semiotista americano e um dos fundadores do pragmatismo. Nesta corrente, “o mundo é o resultado da relação entre fenómenos e, portanto, todas as explicações se devem encontrar no uso da experiência, na dúvida, e jamais em qualquer princípio anterior e metafísico que explicasse os factos sem conexão directa com estes” (Carmelo, 2003, p. 112/113).

Carreira (1997, 1998) explicita a perspectiva de Peirce para quem todos os signos partilham uma estrutura comum, já que são definidos em termos de relações que se estabelecem entre três elementos: (a) *representante* (sinónimo de significante ou signo), a unidade perceptível que transporta ou conduz o significado do signo; (b) *objecto*, algo que não tem de ser físico ou real, ou seja, aquilo que o significante representa ou por que é tomado, podendo mesmo ser um outro signo; (c) *interpretante*, o produto mental da interpretação do signo para a significação do objecto.

Deste modo, um signo apenas se torna signo se este é envolvido no acto de significação, “o acto em que recebe uma interpretação e determina um outro signo para o mesmo objecto” (Carreira, 1998, p. 156).

Hoffmann (2005) afirma que a teoria semiótica de Peirce tem ênfase numa outra função fundamental do signo: actua como meio de pensamento, de compreensão, de raciocínio e de aprendizagem. Assim, os signos são condições das referidas actividades e não são subjectivos.

Carreira (1997) vê como fundamental o legado de Peirce na filosofia da linguagem, na semiótica e na linguística, nomeadamente na introdução do conceito de *interpretante* como “nova forma de compreender o signo e o processo de significação” (p. 72). Ao introduzir o interpretante, Peirce estabelece uma base triangular de relações que actua por meio de três elementos (representante, objecto e interpretante): o triângulo semiótico (Carreira, 1998; Seeger, 2005).

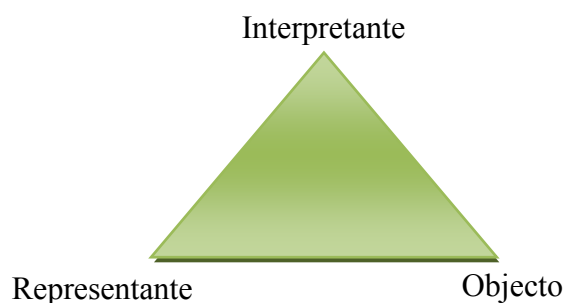


Figura 2.2. O triângulo semiótico de Peirce

A relação que exprime é triádica e portanto não fará sentido reduzi-la a pares de relações. A mediação semiótica produzida pelo interpretante não actua apenas como uma tradução. O interpretante é ele próprio um desenvolvimento do signo.

Deste modo, a significação é como que um suplemento no que se refere ao conhecimento que um sujeito tem ao interpretar um signo, é “ir além do signo pelo encadeamento de sucessivas relações significativas” (Carreira, 1998, p. 169). É um processo que se encontra em permanente construção, pois se cada interpretante pode ser visto como um novo signo, então irá ter o seu novo interpretante e assim por diante.

Já Eco (1973/81) tinha descrito este fenómeno como regressão infinita ou cadeia semiótica ilimitada, onde cada um dos elos interpretantes é um elemento mediador indispensável que, simultaneamente, prolonga e reinicia a cadeia semiótica.

Peirce considerava que “toda a vida mental é uma contínua organização de significados” (Carreira, 1997, p. 75) e entende o signo “como ‘séries de interpretantes’ *ad infinitum*, no quadro de uma sequência ininterrupta de interacções que se desencadeia entre a realidade (objecto) e os procedimentos mentais (os interpretantes)” (Carmelo, 2003, p. 159). Defendia, ainda, que se todo o pensamento for considerado um signo e se a vida for um comboio de pensamentos, então o homem é um signo (Seeger, 2005).

Seeger (2005) vai mais longe na perspectiva de Peirce, ao não considerar apenas a existência de um triângulo semiótico capaz de reproduzir o acto de significação. Este autor encara a estrutura mental como uma rede, onde existem diversos triângulos entrelaçados num processo infinito de semiose, onde não há um fim determinado.

Esta ideia provém do conceito de rizoma apresentado por Deleuze (1987). Seeger (2005) explicita que um rizoma inicia o seu crescimento no meio, mas não tem centro, cada ponto do rizoma pode ser conectado a qualquer outro ponto e que se este for interrompido ou cortado, ele continuará a crescer para outro lado. Este autor assemelha esta noção de rizoma a um mapa, onde as representações “não são camadas hierarquicamente organizadas, mas sim espalhadas por toda a superfície do mapa” (p. 73). Carmelo (2003) caracteriza igualmente esta perspectiva, acrescentando que “no rizoma, os circuitos semióticos que estão conectados são de naturezas diferenciadas e são conectados por codificações diversas (...)” (p. 202).

Seeger (2005) traz a ideia de uma rede semiótica sem fim, baseada na actividade incessante do interpretante, de acordo com os diferentes contextos onde se insere essa actividade. O esquema seguinte ilustra como o interpretante muda de posição, ao tornar-se o objecto de uma outra relação triádica presente num diferente contexto e onde existe um outro interpretante. Representa apenas o primeiro passo de uma interminável rede tecida nos processos de semiose infinita.

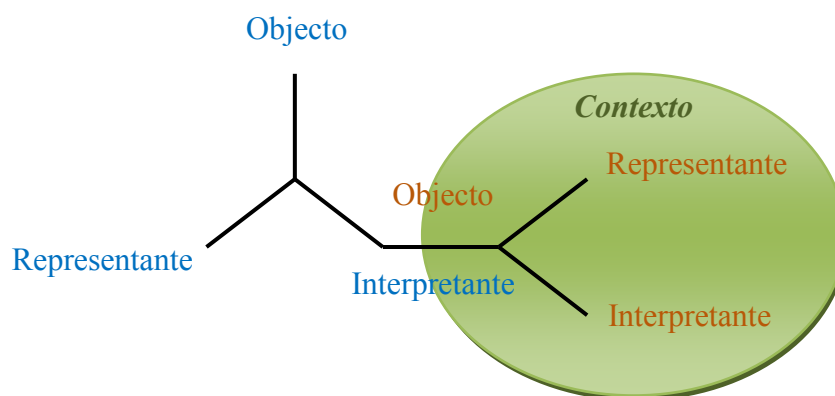


Figura 2.3. A rede semiótica de Seeger

A imagem de uma cadeia de significação ilimitada, “é rica em implicações quando se deseja estudar os processos de significação dos alunos na aprendizagem de ideias matemáticas. A forma como os significados se jogam nesta semiose progressiva” (Carreira, 1997, p.76), fortalece o papel da interpretação e confere aos objectos matemáticos a função organizadora de fenómenos.

Tendo em atenção as relações estabelecidas entre significante e objecto, como refere Carreira (1998), Peirce denomina três tipos de signos: i) índices ou signos

lexicais, em que o significante está em relação com o objecto, de uma forma física; ii) ícones ou signos icónicos, onde o significante se relaciona com o objecto através de uma relação de semelhança (quer sejam figuras, diagramas ou imagens); e iii) símbolo, em que o signo se torna arbitrário e cuja relação significante-objecto é convencional, ou seja, advém de uma lei ou de um conjunto de convenções linguísticas, ao invés de ter origem na necessidade ou na semelhança, como têm os dois primeiros tipos (por exemplo, palavras, frases, livros).

Hoffmann (2005) apresenta este quadro teórico, dirigindo o seu foco para um aspecto da perspectiva de Peirce: a noção de *raciocínio diagramático*. Esta noção pressupõe o uso de um diagrama, definido por Peirce como um representante que é predominantemente um ícone de relações, auxiliado por convenções e não se restringe a imagens ou a representações gráficas. Deve ser realizado mediante um sistema perfeitamente coerente de representação, fundado sobre uma ideia simples e facilmente compreensível. Por outras palavras, um diagrama é visto como um signo complexo.

O raciocínio diagramático de Peirce diz respeito à ideia de que o melhor pensamento, especialmente em matemática, é feito através da experimentação no imaginário, usando um diagrama ou outros esquemas. Este desenrola-se mediante três passos: i) construção de representações; ii) experimentação das representações e iii) observações de resultados. Ao representar um problema num diagrama, “podemos experimentar com os nossos próprios processos cognitivos e assim desenvolvê-los” (Hoffmann, 2005, p. 45).

A teoria de Wittgenstein é ainda mais enquadrada numa filosofia pragmática que a de Peirce. De acordo com sua teoria, as palavras só têm significado através do seu uso e não transportam qualquer tipo de significado atribuído. Não há nenhuma relação fixa entre palavras e objectos.

Meyer (2009), reportando-se às ideias de Wittgenstein (1953), salienta a importância do contexto onde determinada acção está inserida e acrescenta que “não há transporte directo de significação do professor para o aluno, nem uma compreensão directa” (p. 35). Refere ainda que só é possível

“analisar o significado de uma palavra se olharmos para o uso dessa palavra num determinado *jogo de linguagem* que é, ao mesmo tempo, influenciado por outros jogos de linguagem. (...) As palavras podem ser usadas em mais

do que um jogo de linguagem e, portanto, cada palavra pode apresentar significados diferentes. Se o professor vai introduzir um novo conceito, os alunos podem imediatamente associar-lhe algum significado – devido ao uso da palavra noutra jogo de linguagem em que o aluno participou” (Meyer, 2009, p. 35).

Puig (1994) estabelece uma divisão entre dois tipos de signos no seio da linguagem matemática: os próprios da matemática, designados de artificiais, e os da linguagem natural. Contraria a semiótica da matemática dirigida para o estudo dos signos, preferindo focalizar a sua atenção nos sistemas de significação e nos processos de produção de sentido.

Lorenzo (1971, citado por Puig, 1994) assinala que “a caracterização do texto matemático não vai estar na mera utilização do signo artificial, mas na forma através do qual se dá um referente ou conteúdo semântico posterior” (p. 5), surgindo daqui o interesse em elaborar uma tipologia que recaia sobre os modos de uso dos signos matemáticos nos textos matemáticos. Assim, este autor distingue seis tipos de signos artificiais: *signos estritamente artificiais*, como os símbolos matemáticos (tais como os símbolos de intersecção ou de pertença), que não têm qualquer referência na linguagem natural; *signo gráfico único*, como as letras dos diversos alfabetos através das quais se designa convencionalmente diversos objectos matemáticos (tais como o conjunto dos números naturais ou o número pi); *signo composto por várias letras*, que provém da abreviatura das palavras que designam termos técnicos (como por exemplo tg, dx); *signo final*, que existe na linguagem natural, mas que se usa nos textos matemáticos com um significado para além do campo semântico da linguagem natural (tais como anel, corpo, matriz); *figura*, como as figuras geométricas ou diagramas de Venn; *signo artificial*, cujo uso não é exclusivo dos textos matemáticos, como é o caso do número 0,1.

Tal como sucede com a teoria da significação de Peirce, a abordagem da mediação semiótica de Vygotsky baseia-se no papel central dos processos do signo. Seeger (2005) sublinha que, segundo Vygotsky, a mediação entre o social e a actividade do sujeito é feita através dos signos. Esta é uma abordagem instrumentalista, uma vez que o poder do signo não surge do próprio signo, mas do seu uso como meio. Rodrigues

(1997), refere que, nesta concepção, os signos têm origens sociais e transformam-se em meios capazes de influenciar o próprio indivíduo.

Na perspectiva de Godino et al. (2007) a educação matemática não pode descurar as contribuições de várias disciplinas como a Psicologia, a Pedagogia, a Sociologia ou a Filosofia. Os autores consideram mesmo necessário articular coerentemente as diversas dimensões implícitas, como a ontológica, a epistemológica e a sócio-cultural, com as ligadas ao ensino e aprendizagem na escola.

A abordagem onto-semiótica, como os autores denominam, teve como ponto de partida “uma ontologia dos objectos matemáticos, que tem em conta o aspecto triplo da matemática como uma actividade de resolução de problemas socialmente partilhada, uma linguagem simbólica e um sistema conceptual organizado de forma lógica” (Godino et al., 2007, p. 129). Aliada a esta visão, os autores definem como

“prática matemática qualquer acção ou manifestação (linguísticas ou outras) realizadas por alguém para resolver problemas matemáticos, para se comunicar a solução para outras pessoas, de modo a validar e generalizar esta solução para outros contextos e problemas (...) e pode ser idiossincrática, de uma pessoa ou partilhada dentro de uma instituição. Uma instituição é constituída pelas pessoas envolvidas na mesma classe de situações-problema, cuja solução implica a realização de certas práticas sociais partilhadas e a utilização comum de determinados instrumentos e ferramentas” (Godino et al., 2007, p. 129).

No quadro onto-semiótico, “a actividade matemática desempenha um papel central e é modelada em termos de sistemas operativos e das práticas discursivas” (Godino e Font, 2010, p. 191). O ensino compreende a participação dos estudantes em comunidades de prática, onde se partilha o significado institucional e onde a aprendizagem é a apropriação desses significados pelos alunos.

Nos sistemas de práticas emergem os diferentes tipos de objectos matemáticos (problemas, linguagens, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos). Se o sistema de práticas é partilhado dentro de uma instituição, os objectos emergentes são considerados *objectos institucionais*, ao passo que se o sistema corresponde a uma pessoa, eles são considerados *objectos pessoais* (Godino e Batanero, 1998; Godino et al., 2007).

Os objectos matemáticos são interligados e formam configurações cognitivas ou epistémicas, como mostra a figura 2.4., no hexágono preto. Dependendo do jogo de linguagem em que participam (Wittgenstein, 1953, referido por Godino e Font, 2010), os objectos que aparecem nas práticas matemáticas e aqueles que aí emergem, podem ser considerados a partir de cinco facetas de dupla dimensão: pessoal/institucional, unitário/sistémico, expressão/conteúdo, ostensivo/não-ostensivo e extensivo/intensivo, tal como surgem no decágono maior na figura 2.4. A abordagem onto-semiótica selecciona uma lista de processos considerados importantes na actividade matemática, (a que se refere o decágono menor da figura 2.4.). Contudo, estes processos não se esgotam aqui, havendo outros considerados importantes para a actividade matemática.

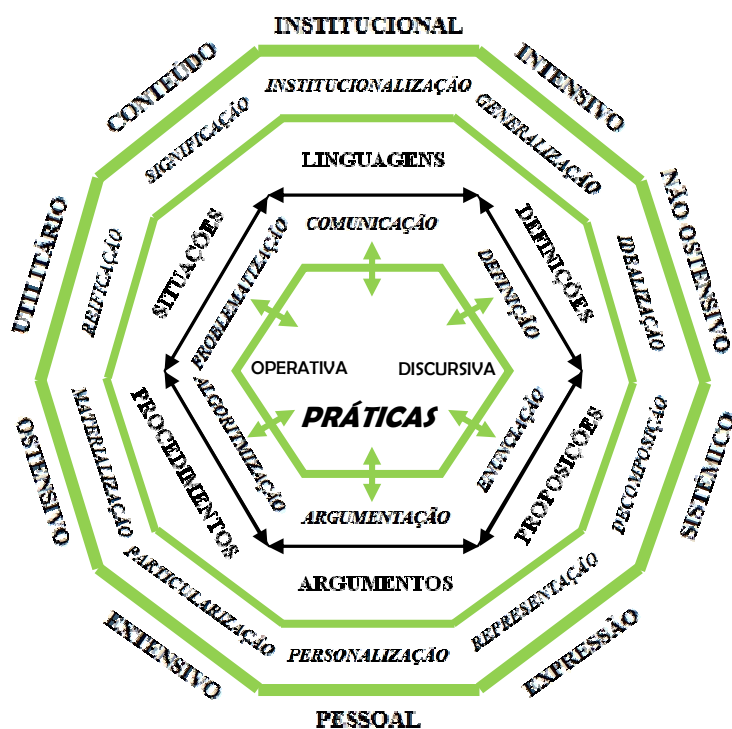


Figura 2.4. Modelo onto-semiótico do conhecimento matemático, segundo Godino e Font.

“Os seis tipos de objectos primários ampliam a tradicional distinção entre as entidades conceptuais e procedimentais, que consideramos insuficiente para descrever os objectos que intervêm e emergem da actividade matemática. As situações-problema promovem e contextualizam a actividade; as linguagens

(símbolos, notações, gráficos, etc.) representam outras entidades e servem como ferramentas para a acção; argumentos justificam os procedimentos e as propriedades relacionam-se com os conceitos. Estas entidades têm de ser consideradas como funcionais e relativas ao jogo de linguagem (os quadros institucionais e contextos de uso) em que participam; têm também um carácter recursivo, no sentido em que cada objecto pode ser composto de outras entidades, em função do nível de análise, por exemplo, e os argumentos podem envolver conceitos, propriedades, operações, etc” (Godino e Font, 2010, p. 191).

Esta abordagem onto-semiótica incide sobre as dimensões epistemológica, cognitiva e educativa. É de notar que a mesma continua em desenvolvimento, pois na opinião de Godino e Font (2010), pode ainda ser articulada com outras dimensões.

2.3.4. O desenvolvimento conceptual de Vygotsky

“A linguagem humana, sistema simbólico fundamental na mediação entre sujeito e objecto de conhecimento, tem, para Vygotsky, duas funções básicas: a de intercâmbio social e a de pensamento generalizante. Isto é, além de servir de propósito de comunicação entre indivíduos, a linguagem simplifica e generaliza a experiência, ordenando as instâncias do mundo real em categorias conceituais cujo significado é partilhado pelos usuários dessa linguagem.” (Oliveira, 1992b, p. 27)

A aprendizagem e a mediação sócio-cultural são temas bem demarcados na abordagem ao pensamento e à linguagem de Vygotsky. Na perspectiva vygotskiana, os conceitos são “fenómenos evolutivos que não se arrumam definitivamente num qualquer reservatório mental” (Carreira, 1998, p. 229), pois vão adquirindo novas posições dentro do sistema conceptual, ao serem ligados com outros conceitos existentes.

Oliveira (1992b) aborda a questão da formação dos conceitos na perspectiva de Vygotsky; refere que “os conceitos são construções culturais, internalizadas pelos indivíduos ao longo do seu processo de desenvolvimento” (p. 28), não sendo estes modos naturais do pensamento ou da fala. Os principais aspectos na formação de

conceitos são os signos, os meios pelos quais essa formação é concretizada. “Na formação de conceitos esse signo é a *palavra*, que em princípio tem o papel de meio na formação de um conceito e, posteriormente, torna-se o seu símbolo” (Vygotsky, 1993, p.48).

Na questão da formação de conceitos, Vygotsky sugere a existência de:

“uma luta incessante entre o pensamento conceitual e o legado do pensamento primitivo por complexos. O nome criado por um complexo, com base em um atributo, entra em conflito com o conceito que passou a representar. Na luta entre o conceito e a imagem que deu origem ao nome, a imagem gradualmente desaparece; desaparece da consciência e da memória, e o significado original da palavra é finalmente obliterado” (Vygotsky, 1993, p. 64).

O processo de criação de uma palavra inicia-se com uma imagem, uma figura, um esboço mental, um breve relato do conceito. A semelhança visual e funcional actua como mediadora das transferências de nomes para novos objectos. Esta transferência “pode ser determinada pelas mais variadas associações, e se ela ocorreu num passado já muito distante é impossível reconstruir as conexões sem conhecer exactamente o contexto histórico do acontecimento” (Vygotsky, 1993, p. 64).

Vygotsky diferencia dois tipos de conceitos: os *espontâneos* e os *científicos* ou formais. O desenvolvimento dos conceitos espontâneos e não espontâneos está relacionado e estes influenciam-se mutuamente num sentido construtivo (Carreira, 1998; Rodrigues, 1997). Considera necessário que “o desenvolvimento de um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato” (Vygotsky, 1993, p. 93).

Os conceitos *espontâneos* surgem da experiência individual no quotidiano, pertencem à história individual, originados pelo confronto com uma situação concreta e muito limitados pelo contexto. Os conceitos adquiridos na escola, que surgem em situações formais de aprendizagem, são denominados de *científicos*. Estes carecem de riqueza de conteúdo proveniente da experiência individual e não são aprendidos de forma definitiva, fazendo parte de um processo evolutivo.

Segundo a teoria de Vygotsky, o processo de aprendizagem escolar advém da “aproximação entre os dois tipos de conceitos até se fundirem, resultando formas de

conhecimento mais complexas e integradas num sistema de conceitos” (Rodrigues, 1997, p. 51). Esta autora fala inclusivamente de um duplo paralelismo: i) entre conceitos espontâneos e a noção de sentido, e ii) entre os conceitos científicos e a noção de significado.

Os conceitos científicos são abstractos e desenvolvem-se em movimento descendente por meio dos espontâneos, que por seu turno, providenciam significado e enriquecimento aos científicos num movimento ascendente. Como refere Carreira, (1998), não só Vygotsky detém esta visão; também Pimm (1987, 1995), Davis (1984) e Freudenthal (1983) reconhecem a importância e o papel significativo dos conceitos espontâneos no desenvolvimento dos conceitos científicos.

“Os conceitos espontâneos, num movimento ascendente, abrem curso aos conceitos científicos, possibilitando que estes se tornem mais próximos da realidade. São os conceitos espontâneos que conferem corpo e vitalidade aos conceitos formais, impedindo que a abstracção se torne irremediavelmente em aridez. Os conceitos científicos evoluem num sentido descendente, de progressiva concretização, isto é, de enriquecimento constante das suas ligações e conexões. Assim, servem de impulso ao progresso ascendente dos conceitos espontâneos, permitindo torná-los mais conscientes e operacionais, num nível de abstracção cada vez mais elevado” (Carreira, 1998, p. 235).

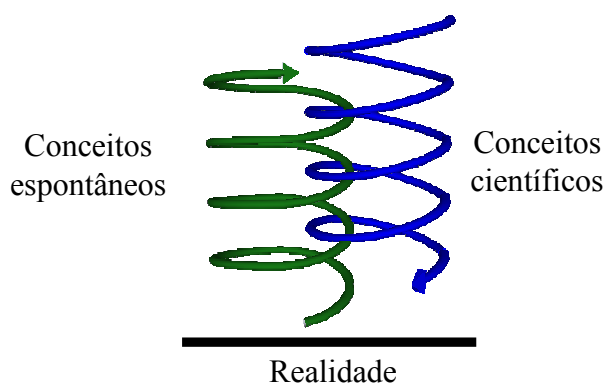


Figura 2.5. Sistema conceptual de Vygotsky

Vygotsky considera que existe uma forte ligação entre os dois tipos de conceitos, embora estes se movam em direcções opostas. Ao abrir caminho na sua trajectória ascendente, os conceitos espontâneos permitem o desenvolvimento dos conceitos

científicos. Por outro lado, os conceitos científicos providenciam as bases necessárias para o desenvolvimento dos conceitos espontâneos (Oliveira, 1992b).

2.4. Síntese

Ao ensino e à aprendizagem da matemática é exigido rigor, precisão e formalismo. O seu vocabulário é constituído por palavras dotadas de significados múltiplos, formando assim obstáculos ao entendimento dos alunos. Pimm (1987) refere que as interpretações que os alunos fazem dos termos usados nas aulas de matemática são diferentes das que os professores esperam.

As representações partilhadas são fundamentais para haver compreensão e os diferentes modos de representação (objectos físicos, desenhos, tabelas, gráficos ou símbolos) são determinantes para ajudar os alunos a comunicar raciocínios. É então necessário encorajar os alunos a representar as suas ideias através de formas que façam sentido para eles.

O pensamento dos alunos inicia-se com a linguagem natural e depois vai progredindo ao integrar termos próprios da linguagem matemática e que convergem numa complexa teia de ideias formando deste modo um conceito matemático. A própria linguagem actua como um sistema de signos, cuja principal função é transmitir ideias, mensagens, pensamentos. O processo de comunicação implica um permanente tráfico de signos e o conhecimento é construído a partir de novas descobertas e das discussões que ocorrem em sala de aula. Carmelo (2003) refere que em todos os momentos da nossa vida são desencadeados conteúdos que interpretamos; viver é pois um acto contínuo e ilimitado de ler e interpretar redes de significados.

Seeger (2010) considera que a construção do significado é baseada na reciprocidade partilhada, na cooperação e na comunicação, e que está relacionada com o próprio estado emocional do indivíduo. Aprender matemática é portanto, mais do que um processo cognitivo e racional, é também sócio-emocional.

No final deste tema expus o modo como diferentes autores encaram a semiótica. A teoria de Saussure pressupõe uma estrutura diática do signo, uma dualidade entre significante e significado, existindo uma relação arbitrária inerente ao sistema linguístico a que pertencem estes dois elementos. Peirce considera que existe um triângulo semiótico, um sistema de relações que actuam por meio de três elementos: o representante (ou signo), o objecto e o interpretante. Nesta perspectiva, um signo apenas se torna signo se este é envolvido no acto de significação, em que se recebe uma interpretação e determina um outro signo para o mesmo objecto. É um processo em permanente construção, na medida em cada interpretante pode ser visto como um novo signo e logo com o seu novo interpretante e assim por diante. No fundo é uma cadeia semiótica ilimitada, uma contínua organização de significados. Seeger por sua vez, traz a ideia de uma rede semiótica sem fim, onde o interpretante muda de posição, ao tornar-se objecto de uma outra relação triádica presente num diferente contexto e onde existe outro interpretante. Godino subscreve uma abordagem onto-semiótica que incide sobre as dimensões epistemológica, cognitiva e educativa. Considera que os objectos matemáticos estão interligados e formam configurações entre si.

Vygotsky diferencia dois tipos de conceitos: os *espontâneos* e os *científicos* ou formais. Os conceitos *espontâneos* surgem da experiência individual no quotidiano, originados pelo confronto com uma situação concreta. Os conceitos adquiridos na escola, que surgem em situações formais de aprendizagem, são denominados de *científicos*. Estes carecem de riqueza de conteúdo proveniente da experiência individual e não são aprendidos de forma definitiva, fazendo parte de um processo evolutivo. Vygotsky considera que existe uma forte ligação entre os dois tipos de conceitos, embora estes se movam em direcções opostas. Ao abrir caminho na sua trajectória ascendente, os conceitos espontâneos permitem o desenvolvimento dos conceitos científicos. Por outro lado, os conceitos científicos providenciam as bases necessárias para o desenvolvimento dos conceitos espontâneos (Oliveira, 1992b).

2.5. A geometria no currículo

“A Geometria está fortemente ligada ao sentido humano da visão e à percepção visual da forma. Está intimamente ligada com a acção de desenhar, com a criação das formas, com a trama de imagens. Mas a geometria também invoca a sua manipulação dinâmica. Há vários tipos e fontes de imagens: imagens desenhadas à mão, que diferem das imagens de um ecrã, que são diferentes das imagens mentais” (Pimm, 1995, p. 33).

2.5.1. Um pouco de História...

As origens da geometria remontam a tempos longínquos, ligadas a culturas muito antigas (como a indiana, babilónica, egípcia, chinesa ou grega). Por essa altura, a geometria estava relacionada com comprimentos, áreas e volumes de objectos, com o medir a terra ou ainda com a construção de artefactos religiosos ou culturais (Jones, 2002).

Por volta de 300 a.C., *Os Elementos* de Euclides, compreendiam quase todo o conhecimento existente na área da geometria. Jones (2002) refere que “nos 13 livros que compunham *Os Elementos* e com base em 10 axiomas e postulados, várias centenas de teoremas foram provados pela lógica dedutiva” (p. 123), tornando-se assim este o símbolo do método axiomático-dedutivo durante séculos. *Os Elementos* dominam todos os aspectos da geometria, incluindo o seu ensino e foi a obra que, ao longo dos tempos, mais influência exerceu no pensamento científico.

Ao longo do século XX a geometria foi perdendo importância no campo da investigação matemática um pouco por todo o mundo. Este decréscimo iniciou-se com uma palestra proferida por David Hilbert em que apresentava vinte e três problemas que deveriam configurar a Matemática para o século XX; apenas três desses problemas eram referentes à geometria discreta. Em 1976, no Simpósio de Matemáticas Puras na Northern Illinois University, foram apresentados vinte e oito conjuntos de problemas mas nenhum deles se referia à área da geometria (Silva, 2002).

A geometria assumia um papel secundário no ensino, dando lugar à Álgebra e à Análise Infinitesimal. No entanto, com a descoberta dos fractais em 1975 por Benoit

Mandelbrot e o desenvolvimento dos computadores (o que permitiu modelar objectos muito irregulares), esta área da Matemática foi impulsionada.

Outros matemáticos, como Freudenthal, opuseram-se à ideia de afastar a geometria dos currículos escolares e mais tarde, o NCTM publica duas adendas relacionadas com este tema, contribuindo assim para estimular o ensino da Matemática e em particular, da geometria.

Goldenberg em 1998 sugere diversos eixos orientadores para a geometria: descrever; traduzir informação verbal para visual; fazer experiências; procurar invariantes; misturar experimentação e dedução; construir explicações sistemáticas e demonstrações para invariantes observados e raciocinar por continuidade.

Silva (2002) refere-se à importância que a geometria tem ganho nos últimos anos. Esta, associada ao rápido progresso dos meios informáticos, tem inúmeras aplicações em diferentes contextos, como na indústria automóvel, aérea e naval, na arquitectura, na engenharia, na robótica, na tomografia, entre outros. A geometria é assim fundamental para a compreensão do nosso mundo e pode ajudar a resolver problemas que surgem a par e passo do avanço tecnológico: “velhas técnicas geométricas são novamente estudadas e reavaliadas às luzes da geometria computacional” (p. 21).

De acordo com o NCTM (2000/2007), a geometria é uma das normas de conteúdo, sendo este um dos temas que os alunos deverão aprender desde o pré-escolar até ao 12.º ano. Como consta dos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, “as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas em outras áreas da matemática e em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível com outras áreas” (p. 44) do saber.

Jones (2002) refere-se à Geometria como “uma área maravilhosa para ensinar (...) cheia de problemas interessantes e de teoremas surpreendentes” (p. 122). Ensinar bem geometria está para além de problemas e teoremas, tem igualmente a ver com o contexto histórico e cultural da geometria e com as suas aplicações. O estudo da geometria contribui para o desenvolvimento da visualização, do pensamento crítico, da intuição, da perspectiva, da resolução de problemas, do raciocínio dedutivo, do argumento lógico e da prova. As representações geométricas podem ser usadas para ajudar os alunos noutras áreas da matemática: fracções e multiplicação na aritmética ou

a relação entre gráficos de funções e a representação gráfica na estatística. O raciocínio espacial é importante tanto para a matemática como para outras áreas como ciências, geografia, artes, design e tecnologia.

2.5.2. A geometria no currículo do ensino básico em Portugal

“Vivemos num planeta sólido, num mundo a três dimensões e, como grande parte da nossa experiência é através do estímulo visual, isso significa que a capacidade de interpretar a informação visual é fundamental para a existência humana. (...) A geometria oferece uma forma rica de desenvolver habilidades de visualização” (Jones, 2002, p. 125).

Neste sub-capítulo apresento uma pequena sinopse acerca da presença da geometria no currículo do ensino básico em Portugal ao longo das últimas décadas.

No Programa de Matemática de 1991, a Geometria surgia associada à vertente conhecimento, *Desenvolver o conhecimento do espaço*, cujos objectivos eram “identificar, descrever e comparar figuras geométricas; conhecer e aplicar propriedades e relações geométricas, nomeadamente a igualdade e a semelhança na análise de figuras e na resolução de problemas; realizar construções geométricas usando instrumentos adequados; efectuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro; aplicar conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes na resolução de problemas; reconhecer e aplicar simetrias, translações e rotações a um estudo dinâmico do plano” (ME, 1991, p. 11).

De um modo muito amplo, eram fornecidas sugestões para concretizar cada um dos temas a leccionar: Geometria, Cálculo, Funções e Estatística. Por exemplo na Geometria do 7.º ano de escolaridade:

“Ao resolver problemas geométricos, individualmente ou em grupo – através de construções, fazendo experiências, seleccionando estratégias, formulando hipóteses, descrevendo processos e justificando o modo de proceder – o aluno vai desenvolvendo não só a capacidade de raciocínio como também a capacidade de comunicação” (ME, 1991, p. 15).

No 9.º ano apela-se a “uma tentativa de unificar o estudo da geometria feita no ciclo, e de abrir novas perspectivas, numa leve referência à geometria como teoria hipotético-dedutiva” (ME, 1991, p. 47).

Para cada ano de escolaridade, era apresentado o peso atribuído a cada um dos temas a leccionar. À Geometria era conferido 25% do peso no 7.º ano e 50% nos 8.º e 9.º anos de escolaridade.

Em 2000 surge o termo *competência matemática*, como o conjunto de atitudes, capacidades e conhecimentos que todos devem desenvolver e ser capazes de usar, através de actividades significativas, reflectindo sobre essas actividades.

Em 2001, com a publicação pelo Departamento de Educação Básica do documento Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, o Ministério da Educação define um conjunto de competências, consideradas essenciais e estruturantes no âmbito do desenvolvimento do currículo nacional, para cada um dos ciclos do ensino básico, o perfil de competências de saída deste nível de ensino e, ainda, os tipos de experiências educativas que devem ser proporcionadas a todos os alunos. Inclui ainda as competências de carácter geral, a desenvolver ao longo de todo o ensino básico, assim como as competências específicas que dizem respeito a cada uma das áreas curriculares.

No domínio da geometria, algumas das competências específicas que os alunos devem desenvolver, ao longo do 3.º ciclo são:

“a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar raciocínios; a aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos; a compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes; a aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados; o reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas; a predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica; e a tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais” (ME/DEB, 2001, p. 63).

De acordo com as orientações deste documento, é recomendada a utilização de recursos diversos, como materiais manipuláveis e o uso das tecnologias na aprendizagem da matemática. No que respeita às tecnologias, “encontram-se recursos como a calculadora científica e o computador, nomeadamente com o recurso à folha de cálculo ou às capacidades educativas da Internet ou programas educativos, onde se incluem os de geometria dinâmica” (ME, 2001, p. 71).

Em 2007, surge o actual Programa de Matemática para o ensino básico, sendo este um reajustamento do anterior programa cuja revisão se tornara urgente, justificada pelo desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos, e pela necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos.

Este programa apresenta as finalidades e objectivos gerais para o ensino da Matemática que definem as principais metas para esse ensino e que são comuns aos três ciclos do ensino básico. Enumera os temas matemáticos e as capacidades transversais trabalhados em todo o ensino básico e explicita as orientações metodológicas de gestão curricular e de avaliação bem como as indicações programáticas por ciclo e por tema.

Apresenta uma estrutura, ao longo dos ciclos, dividida em quatro grandes temas: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados. No entanto, no 1.º ciclo do ensino básico não surge o tema da Álgebra e a Geometria está associada à Medida.

A Geometria está também presente nos três ciclos e tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. O estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais continua a ter um papel importante neste tema. Este estudo inicia no 1.º ciclo, no 2.º ciclo os alunos são já chamados a relacionar propriedades geométricas, e no 3.º ciclo surgem situações de raciocínio hipotético-dedutivo, proporcionando aos alunos um primeiro contacto com este modo de pensamento.

No 3.º ciclo, o propósito principal de ensino do tema geometria é:

“desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (Ponte et al., 2007, p. 51).

São objectivos gerais de aprendizagem no tema Geometria: “i) desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar; ii) compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço; iii) compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos; iv) desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças; v) compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos; vi) ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos” (Ponte et al., 2007, p. 51).

O programa apresenta ainda indicações metodológicas, os tópicos do tema e respectivos objectivos específicos. Uma das sugestões didácticas para o tópico Triângulos e Quadriláteros do Programa de Matemática do Ensino Básico é o desenvolvimento de tarefas de cunho exploratório e investigativo. Pretende-se, com recurso a material de escrita ou ao computador que as actividades da aula não sejam apenas exercícios de aplicação de conhecimentos previamente aprendidos.

2.6. O desenvolvimento conceptual em geometria

“A geometria é a parte mais divertida do currículo de matemática. É visual, intuitiva, criativa e exigente. Como professor, use sua imaginação e toque na dos seus alunos. Crie na sala de aula, suspenda modelos geométricos no tecto, envolva os seus alunos a fazer as coisas e a imaginar coisas, leve-os a decidir sobre as definições e, em seguida, explore as consequências lógicas. (...) A geometria é o lugar onde todas estas capacidades são nutridas. Envolve-se com a geometria e ponha os seus alunos a pensar geometricamente” (Jones, 2002, p. 134).

2.6.1. O raciocínio geométrico

Clements e Battista (1992) referem que, de acordo com a teoria de van Hiele, os alunos progridem através de diferentes níveis de conhecimento. Esta teoria assenta nos seguintes pressupostos: o ensino é um processo descontínuo; os níveis de conhecimento

são sequenciais e hierárquicos; os conceitos implicitamente percebidos num nível tornam-se explicitamente percebidos no nível seguinte e cada nível tem a sua linguagem, o seu conjunto de símbolos e de relações entre eles.

O modelo de van Hiele do desenvolvimento do raciocínio geométrico é formado pelos seguintes níveis:

Nível 1 - Visual: os alunos identificam e operam sobre formas geométricas de acordo com a sua aparência; os estudantes não reconhecem as propriedades das figuras; o raciocínio é dominado pela percepção.

Nível 2 - Descritivo/Analítico: os alunos reconhecem e identificam as formas geométricas pelas suas propriedades; as propriedades são apreendidas experimentalmente através de observações, de medições, de desenhos e de modelações; apercebem-se que um determinado conjunto de propriedades determina uma dada classe de figuras.

Nível 3 - Abstracto/Relacional: os alunos conseguem formar definições abstractas, distinguem entre condições necessárias e suficientes e algumas vezes utilizam argumentos lógicos no domínio da geometria; conseguem classificar figuras hierarquicamente e dar justificações informais para justificar a sua classificação; conseguem também descobrir propriedades de classes de figuras de uma forma dedutiva informal.

Nível 4 - Dedução formal: os alunos conseguem demonstrar teoremas com base num sistema axiomático; reconhecem a diferença entre definições, axiomas e teoremas utilizando-os no raciocínio lógico e formal; conseguem construir demonstrações originais.

Nível 5 - Rigor/Metamatemática: os alunos raciocinam formalmente sobre sistemas matemáticos; conseguem estudar geometria sem utilizar modelos e manipular formalmente axiomas, definições e teoremas (Silva, 2002).

O casal van Hiele descreveu um modelo de aprendizagem que valoriza a aprendizagem da Geometria como um processo gradual, global e construtivo. Gradual, porque considera que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstracções isoladas, inter-relacionam-se e pressupõem diversos níveis que levam a outros significados.

Construtivo, porque pressupõe que não existe transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos (Matos e Serrazina, 1996).

Silva (2002) aponta como um aspecto importante deste modelo: “a transição entre níveis depende pouco do desenvolvimento biológico mas, principalmente, do processo de ensino/aprendizagem. Assim, o professor tem um papel importante na evolução do conhecimento dos alunos” (p. 44).

Jones (2002) adverte como ainda permanece incerto o quanto esta teoria reflecte as representações mentais dos alunos no que concerne aos conceitos geométricos. Este autor sublinha que foram detectados vários problemas com a especificação dos níveis. Como exemplos, Jones refere que o nível inferior é o denominado de Visual, mas em todos os níveis é exigida a visualização; e “os alunos parecem mostrar sinais de estar a pensar em mais do que um nível em tarefas iguais ou diferentes, em diferentes contextos” (p. 130). Há ainda pouca pesquisa sobre estes aspectos do modelo e, portanto, poucas certezas se ele é bem sucedido.

2.6.2. O ensino e a aprendizagem da Geometria

Steinbrig (2008) afirma que o conhecimento matemático “não é concebido como um produto já feito, caracterizado por notações correctas, definições claras e teoremas provados” (p. 4). Se o conhecimento matemático que resulta do processo de aprendizagem pudesse ser reduzido a esta descrição, a interpretação da comunicação matemática passaria a ser simples e directa.

A geometria é uma das melhores oportunidades de relacionar a Matemática com o mundo real, pois “é mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio” (NCTM, 2000/2007, p. 44). Para que ocorra esta descrição de pensamento é necessário que surja comunicação, partilha de ideias e de saberes.

Relativamente à geometria no ensino da matemática, Alsina (1999, citado por Costa, 2000) refere que esta

“deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação

aconselhada comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espço; aberta à interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma da modelação matemática; predadora de aplicações assombrosas e relações interessantes” (p. 158).

Segundo Panaoura (2011), os investigadores acreditam que o desenvolvimento de conceitos geométricos é multifacetado e concordam que a formação de conceitos em geometria é diferente da formação de conceitos noutras áreas da matemática. Esta autora considera que em geometria são usados três tipos de registo: o da linguagem natural, o da linguagem simbólica e o registo figurativo. Uma figura constitui a representação externa e icónica de um conceito ou de uma situação em geometria e pertence a um sistema semiótico específico, que está ligado ao sistema de percepção visual.

Jones (2002) considera que “apresentar a geometria de uma forma que estimule a curiosidade e incentive a exploração, pode melhorar a aprendizagem do aluno e a sua atitude em relação à matemática” (p. 125). Este autor nota que para ensinar eficazmente geometria a alunos de qualquer idade, é importante garantir que não aprendam apenas as regras; devem sim compreender os conceitos que estão a aprender e os passos envolvidos nos processos. Abordagens de ensino mais eficazes encorajam os alunos a reconhecer as conexões entre as diferentes formas de representar as ideias geométricas com, inclusivamente, outras áreas do saber matemático. Existem evidências que indicam ser provável que, deste modo, os alunos possam reter conhecimentos e competências, dotando-os de alguma confiança para novas abordagens a problemas geométricos.

Ao planificar abordagens de ensino e de aprendizagem da geometria, é importante garantir que desde os primeiros anos do ensino básico, se desenvolva um incentivo e um entusiasmo para o assunto, proporcionando oportunidades para investigar e resolver problemas da vida real. É igualmente fundamental que se adquira uma boa compreensão dos conceitos básicos e da linguagem própria da geometria, de

modo a criar as fundações para o trabalho futuro e a dotar os alunos de meios para comunicar ideias, fazer descrições, demonstrações e justificações, essenciais ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio (Jones, 2002).

2.7. A tecnologia e a geometria: uma união de facto

“A tecnologia não deverá ser utilizada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar; pelo contrário, poderá e deverá ser usada para estimular essa compreensão e intuição” (NCTM, 2000/2007, p. 26).

2.7.1. A mediação em ambientes computacionais

A tecnologia, como um dos princípios para a Matemática Escolar enunciados pelo NCTM (2000/2007), “é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (p. 11).

A introdução do computador como uma variável na situação de aprendizagem, é evidenciada por Hoyles et al. (1991) e estes consideram que os alunos vêem a sua experiência matemática de uma forma diferente, sob uma nova luz. A linguagem combina com as acções no ecrã e só faz sentido quando há referências ao trabalho realizado. Os ambientes computacionais desempenham o papel de andaime em relação às tarefas matemáticas e as interacções aluno-aluno e aluno-computador operam em diferentes pontos na generalização do processo.

“(…) quando os alunos trabalham juntos num ambiente computacional, as suas discussões influenciam a interacção com o computador, mas é esta interacção com o computador que provoca o conflito cognitivo necessário ao desenvolvimento conceptual” (Hoyles et al., 1991, p. 175).

Uma actividade que utiliza o computador não actua de forma isolada ou independente. Contrariamente, Rodrigues (1997) destaca a rede de relações sociais e o contexto de comunicação que está subjacente ao desenvolvimento de práticas com

recurso ao computador. Recorrendo às ideias de Falbel (1990), esta autora considera que “o computador, por si só, não faz coisa alguma” (p. 95) e acrescenta que devemos focar a atenção nas pessoas e no que elas fazem com os computadores. Borba (1993) vai mais longe ao referir que os alunos incorporam o computador no seu pensamento matemático, tornando-se parte real desse mesmo pensamento.

Morgan (1994) considera que quando o computador é integrado na cultura da aula de matemática, novas relações entre o professor, os alunos e a própria matemática se irão desenvolver. O computador torna-se, na perspectiva de Papert (1980), “um meio de concretizar conceitos abstractos que, de outra forma só seriam acessíveis através de processos formais”, produzindo deste modo, um *micromundo*, onde há uma contínua dialéctica entre o formal e o informal (Rodrigues, 1997, p. 99).

“A concepção de contextos baseados nas tecnologias é um processo complexo que também requer mudanças na organização dos conteúdos e na gestão das actividades da aula, o que se torna difícil a um professor para as realizar de forma eficaz” (Bottino e Robotti, 2007, p. 184).

Os computadores podem transformar a natureza de um problema. A presença da tecnologia transforma a relação entre o problema e o conhecimento que ele gera em dois aspectos: o tipo de problemas propostos e os processos de resolução que podem ser usados (Mariotti, 2002).

Como refere Amado (2011), um adequado uso da tecnologia pode levar os alunos a aprender mais matemática e de um modo mais profundo. Pelo contrário, se usada de modo inadequado, a tecnologia não produz mudanças importantes na aprendizagem (Smith, 2002, referido por Amado, 2011). “Ainda assim, o computador permite a realização de alguns tipos de actividade, como a descoberta, e facilita o desenvolvimento da intuição matemática de tal modo que seria muito difícil ou mesmo impossível alcançar sem a tecnologia” (p. 1).

Contudo, Amado (2011) sublinha que, de forma a promover a aprendizagem, o acesso ao computador na sala de aula deve ser feito através de actividades ricas e apropriadas. As actividades baseadas na tecnologia diferem de actividades de papel e lápis. Esta autora alerta ainda para determinados modos de uso da tecnologia, afirmando que este “não deve ser reduzido a um meio de confirmar respostas ou de ilustrar

objectos matemáticos, mas tem a função de levantar questões, criar situações que conduzam os alunos a pensar e a incentivar a sua participação no trabalho das aulas” (p. 3).

Utilizar um programa de computador pode mediar a aprendizagem através da linguagem matemática e do sistema de notação que é parte integrante do programa. Forsythe (2010) concorda com o que Noss e Hoyles (1996) enfatizam e afirma que “os computadores fornecem uma janela através da qual podemos observar a aprendizagem das crianças e ajudam-nos a ver o que nós, normalmente, não somos capazes de ver” (p. 12).

Mariotti (2005) apresenta uma perspectiva baseada na mediação semiótica de Vygotsky e orientada por uma intenção educacional. Esta abordagem instrumental torna possível analisar e interpretar a complexidade cognitiva de uma acção instrumentada. O processo de construção de significados matemáticos não está directamente relacionado com a prática. Os significados “podem ficar limitados estritamente à esfera da prática dentro dos quais eles foram gerados: os alunos aprendem a usar uma ferramenta correctamente, realizando tarefas específicas, mas o significado envolvido pode não chegar a ser significado matemático” (p. 5), este pode permanecer “matemático” apenas aos olhos do observador.

De acordo com a visão de Mariotti (2002), a linguagem do computador potencia a comunicação entre o aluno e a máquina, e simultaneamente abre um canal de comunicação entre o aluno e o professor. Ou seja, ao introduzir o computador nas aulas, “a relação entre aluno e professor pode ser alterada, tornando a comunicação entre eles mais eficiente e recíproca” (p. 705).

Mariotti (2002, 2005) explicita que o processo de mediação semiótica é centrado no uso particular do artefacto: i) o aluno usa o artefacto, de acordo com certos esquemas de utilização; desta forma, o artefacto pode funcionar como um mediador semiótico, ou seja, os significados emergem do envolvimento do sujeito na actividade; ii) o professor utiliza o artefacto de acordo com esquemas de utilização educacionais específicos; neste caso, a utilização dos esquemas pode consistir em estratégias de comunicação centradas no artefacto.

“Nos dialectos entre estes dois níveis, a construção dos significados matemáticos ocorre como um produto de um processo de internalização guiado pelo professor” (Mariotti, 2002, p. 708).

Reportando-se às ideias de Wertsch e Addison Stone, Falcade (2007) refere que o processo de internalização ocorre através de processos semióticos, em especial pelo uso de um sistema semiótico em interacção social. Embora não se limite à linguagem natural, o centro da análise do processo de interiorização recai sobre o funcionamento do sistema de signos envolvidos na actividade (tais como palavras, desenhos ou gestos). De acordo com esta visão, os dois principais componentes da actividade social, os sistemas de signos e os processos semióticos, tornam-se componentes básicos da actividade individual e do processo de internalização.

Falcade (2007) descreve o modo como uma ferramenta actua como um mediador semiótico:

“primeiro, orientada para o exterior, uma ferramenta é usada numa determinada acção para realizar uma tarefa específica; de seguida, sob a orientação de um especialista (professor) e através das acções com a ferramenta são gerados novos signos, e a sua articulação pode promover um processo de internalização produzindo este, uma nova ferramenta psicológica.” (p. 5)

Mariotti (2003) reforça a ideia de que os ambientes de geometria dinâmica oferecem um poderoso meio de integrar o domínio semântico de espaço e tempo, onde as noções chave da geometria podem ser alcançadas. Esta autora esclarece ainda a perspectiva de Vygotsky; ele distingue a função de mediação de *ferramentas técnicas* e de *ferramentas psicológicas* (ou signos ou ferramentas da mediação semiótica). O uso do termo *ferramentas psicológicas*, refere-se a signos orientados internamente, é baseado na analogia entre ferramentas e signos. Através do complexo processo de internalização, uma ferramenta torna-se uma ferramenta psicológica e irá moldar novos significados; assim, uma ferramenta pode ser considerada como um mediador semiótico.

2.7.2. Os Ambientes de geometria dinâmica

Forsythe (2010), acredita que um ambiente de geometria dinâmica actua como um mediador para o conceito de figura e, como tal, tem potencial para apoiar a aprendizagem dos alunos em conceitos geométricos e proporcionar um meio para compreender as propriedades de figuras geométricas. O ensino da geometria está muito agarrado às representações em papel, sendo estas por vezes imperfeitas, como a largura das linhas num desenho. No entanto, espera-se que os alunos ignorem as imperfeições e trabalhem nos desenhos como se fossem objectos geométricos ideais. Laborde (1993) explica que a introdução dos ambientes de geometria dinâmica permite redefinir a distinção entre o objecto teórico e a sua representação material. Existe agora uma figura no ecrã e este é um novo tipo de mediador para o objecto teórico. É diferente de um desenho em papel, na medida em que ele é dinâmico (pode ser arrastado) e, quando arrastado, o seu comportamento é determinado pelo método usado para construí-lo, ou seja, as propriedades geométricas tidas em conta na sua construção.

Mariotti (1995) prolonga este ponto, afirmando que os desenhos actua como mediadores entre objectos concretos e teóricos. As imagens do ecrã representam a versão externa do conceito de figura. Para construir um objecto num ambiente de geometria dinâmica, os aspectos conceituais devem ser explicitados no processo de construção. Desta forma, usar um ambiente de geometria dinâmica é útil para desenvolver a correcta interacção entre figuras e conceitos do raciocínio geométrico. A lógica interna da figura geométrica torna-se aparente quando ele é arrastado, já que as relações geométricas que tenham sido definidas permanecem constantes. Invocando Laborde (1993), Forsythe (2010) refere ainda que um programa de geometria dinâmica faz a ligação entre conceitos geométricos e o campo experimental das construções geométricas. Para tornar mais útil o trabalho em ambientes de geometria dinâmica, os alunos devem raciocinar activamente sobre as construções geométricas, como refere Hollebrands (2007).

Aliar as opções arrastar e medir, faz com que os alunos se movimentem entre o campo gráfico e experimental, onde se sentem mais confortáveis, e o campo teórico, a área dos conceitos e da compreensão. De acordo com Forsythe (2010), esta aliança pode

ajudar a apoiar os alunos à medida que eles desenvolvem níveis mais sofisticados do raciocínio geométrico.

Forsythe (2011) refere-se a Jones (2000) quando observa que este arrastamento possível em ambientes de geometria dinâmica permite aos alunos validar a sua construção e esse teste pode fornecer a motivação para que os alunos aprendam os princípios geométricos. “A natureza dinâmica do programa influencia o modo como os alunos raciocinam sobre objectos geométricos” (p. 2).

Outra importante funcionalidade dos ambientes de geometria dinâmica, entre outras, é a ferramenta de medição; medidas de comprimento, ângulos e áreas que podem ser continuamente actualizadas quando a figura é arrastada (Forsythe, 2011).

De acordo com Jones (2000), os ambientes de geometria dinâmica têm o potencial para quebrar a separação entre a teoria e a prática; proporcionar a concentração dos alunos acerca do que é variável e invariável numa construção geométrica; e capacitar os alunos para obterem uma ideia significativa da dedução e da prova.

De uma perspectiva sócio-cultural, usar um ambiente de geometria dinâmica é mais do que utilizar um artefacto físico. Enquanto os alunos interagem quando resolvem problemas geométricos através de um software de geometria dinâmica num ambiente social de sala de aula, eles utilizam linguagem geométrica, mesmo antes de lhes ser facultada a terminologia técnica. Desta forma, os alunos podem progredir na forma como justificam e comunicam o seu raciocínio, enquanto que o professor “tem o papel de garantir que os alunos passam de um raciocínio *ao estilo do software* para uma linguagem matemática geral” (Jones, 2000, p. 57).

A geometria dinâmica é valorizada por fazer os alunos trabalharem com as figuras de forma mais fácil, mais rápida e precisa. Segundo Ruthven (2008), permite tornar propriedades geométricas compreensíveis; ao arrastar uma figura, os alunos vêem-na mudar, tornando algumas propriedades óbvias, aliado ainda ao importante facto de este não se tratar apenas de um exemplo ou de funcionar apenas numa condição.

“Uma das funções disponibilizada pelos programas de geometria dinâmica, e uma das mais estudadas empiricamente, é o arrastamento de pontos ou partes de figuras. Esta função é uma ferramenta poderosa que enfatiza a diferença

entre desenhar e construir figuras neste tipo de ambientes, constituindo uma mais valia para a aprendizagem dos conceitos geométricos” (Candeias, 2005, p. 16).

Os ambientes de geometria dinâmica “permitem aos alunos explorar e descobrir mais facilmente relações entre figuras, procurar invariantes e resolver problemas geométricos” (Ponte, 2009, p. 13), uma vez que este tipo de “software respeita as propriedades das figuras geométricas” (Candeias, 2005, p. 20).

Na perspectiva de Ruthven (2008), o uso da geometria dinâmica ajuda na abordagem da descoberta pelos próprios alunos. Este autor indica as principais diferenças entre os papéis de professores e de alunos: enquanto os professores estruturam, fornecem pistas, orientam e guiam, os alunos descobrem como funciona e qual regra sem o professor lhes dizer sentindo que detêm o poder sobre a situação.

Quando o professor e o aluno interagem durante a utilização de um programa de geometria dinâmica, ambos adoptam o idioma do software, uma linguagem depois usada para comunicar uns com os outros. Podem também comunicar as ideias matemáticas através das imagens visuais no ecrã.

Num estudo de Jones, referido por Forsythe (2010), acerca do desenvolvimento da linguagem matemática durante a utilização de ambientes de geometria dinâmica, observou-se que em várias situações, os alunos usaram mais terminologia matemática (não só quando se referiam ao que visualizavam no ecrã, mas também quando justificavam com conteúdos matemáticos).

2.7.3. O software de geometria dinâmica do estudo – *GeoGebra*

De entre os vários softwares disponíveis, o *GeoGebra* foi o escolhido para esta investigação. É um software de geometria dinâmica desenvolvido pelo alemão Markus Hohenwarter e, tal como o próprio nome sugere (GEOMETRIA + álGEBRA), tem o potencial de unir geometria, álgebra e cálculo.

De forma simples e muito intuitiva é uma ferramenta que possibilita, entre outras funcionalidades, construções geométricas. Devido ao seu carácter intuitivo, ao seu livre

acesso e ao facto de este estar disponível em cinquenta línguas, a utilização deste software tem sido de franca expansão (Little, 2008).

Pode ser usado por alunos desde o 2.º ciclo até ao ensino secundário, iniciando com construções simples até às mais complexas funções. Os resultados das experiências dos alunos com o *GeoGebra* devem constituir a base para discussões em sala de aula. Isso dá aos professores mais tempo para se concentrarem nas ideias fundamentais e no raciocínio matemático dos seus alunos (Hohenwarter e Fuchs, 2004).

O *GeoGebra* possui três vistas distintas: a gráfica, a algébrica e a folha de cálculo. A zona gráfica apresenta-se de cor branca e mostra a representação gráfica dos objectos matemáticos (como pontos, vectores, segmentos, polígonos, funções, curvas, secções cónicas); nas construções aqui realizadas é possível modificar propriedades dos objectos (cor, estilo da linha, visibilidade), medir ângulos, distâncias ou calcular áreas. A representação algébrica dos objectos matemáticos (como valores, coordenadas ou equações) é mostrada na zona algébrica. É também possível criar e modificar objectos usando a entrada de comandos que se encontra na base do ecrã do *GeoGebra*. Deste modo, o programa reúne ferramentas tradicionais de geometria, com as da álgebra e do cálculo. Tem a vantagem didáctica de apresentar simultaneamente, duas representações diferentes de um mesmo objecto que interagem entre si: a sua representação geométrica e a algébrica.

Keith Jones é um dos investigadores que tem desenvolvido alguns estudos sobre a utilização do *GeoGebra*. Os professores participantes salientam diversos aspectos deste software: contrariamente à transmissão directa pelo professor, este possibilita a descoberta de certas regras pelos próprios alunos, levando assim “a uma experiência de aprendizagem mais poderosa” (Edwards e Jones, 2006, p. 29); a utilização deste programa é muito fácil e uma vez que os alunos o podem ter em casa, também contribui para a melhoria do ambiente de aprendizagem dos alunos.

Hohenwarter e Fuchs (2004) assinalam diferentes formas de utilização do *GeoGebra* no ensino: como demonstração e visualização; como uma ferramenta de construção; para a descoberta matemática e ainda para a preparação de materiais de ensino.

Este programa permite ainda o acesso a diversos materiais educacionais no sítio da internet GeogebraWiki. Os utilizadores deste software partilham recursos e experiências de aplicação em sala de aula e ajudam alunos e professores de mais de 190 países no fórum *GeoGebra*.

As características próprias do *GeoGebra* possibilitam a criação de cenários para actividades de investigação, nos quais o aluno pode verificar propriedades de uma figura através de um rápido processo.

Ao longo de uma década de existência, o software *GeoGebra* recebeu diversos prémios internacionais, entre eles:

- 2002 EASA – Suécia;
- 2004 Digita – Alemanha;
- 2004 Comenuis – Alemanha;
- 2005 Learnie Award – Áustria;
- 2006 eTwinning Award – Áustria;
- 2006 Learnie Award – Áustria;
- 2008 AECT Distinguished Development Award – Estados Unidos da América;
- 2008 SourceForge.net Community Choice Awards;
- 2009 BETT Award – Reino Unido;
- 2009 Tech Award – Estados Unidos da América;
- 2010 NTLC Award – Estados Unidos da América;

Em Portugal é possível aceder ao sítio da internet do Instituto GeoGebra Portugal (<http://geogebra.es.e.ipp.pt/>), onde se encontram disponíveis tarefas para o ensino básico e secundário, um fórum de utilizadores, e ainda tarefas relacionadas com a formação de professores.

Até à data da conclusão desta dissertação encontravam-se já realizadas em Portugal algumas teses baseadas na utilização do *GeoGebra*.

Silva (2009) explorou o tema “Função Quadrática” com recurso a este software com alunos do 10.º ano de escolaridade. De acordo com este estudo, os alunos

utilizadores consideraram que este programa foi uma ferramenta facilitadora do seu processo de aprendizagem.

Afonso (2009) recorreu ao *GeoGebra* para a realização de um estudo no primeiro ciclo sobre investigações matemáticas com recurso às tecnologias de informação e comunicação. As investigações deste estudo desenvolveram-se em três momentos (introdução, desenvolvimento e discussão) e uma delas visou a exploração de construções geométricas e a análise de aspectos considerados relevantes com recurso ao *GeoGebra*.

Marques (2009) explorou actividades, utilizando o quadro interactivo no ensino da matemática e, entre outros, recorreu ao software *GeoGebra*. As tarefas apresentadas aos alunos deste estudo propunham a realização de construções geométricas e a exploração de propriedades que se poderiam encontrar nessas construções. Esta investigação permitiu a criação de estratégias diferenciadas, contextualizadas e ligadas ao quotidiano, o que se traduziu numa maior motivação dos alunos, tornando-os mais autónomos e capazes.

Maneca (2010) propõe a exploração do tema “Semelhança de Figuras” através deste software no 9.º ano de escolaridade. A principal finalidade desta investigação foi, através do desempenho dos alunos, analisar de que modo a utilização do *GeoGebra* contribuiu para uma nova aprendizagem do tema. Os resultados deste estudo sugerem que este software aliado a tarefas adequadas pode contribuir para um processo de ensino-aprendizagem mais rico, mais autónomo e motivador. Cada aluno trabalha ao seu próprio ritmo e envolve-se mais activamente nas tarefas propostas; aqui o computador e o professor são companheiros nas suas descobertas.

Candeias (2010) debruçou-se na aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *GeoGebra*. O objectivo primordial deste estudo foi analisar de que forma tarefas de investigação e exploração com este software podem contribuir para a aprendizagem do referido tema e para o seu uso na interpretação de situações que envolvem resolução de problemas. Como resultados, salienta-se a motivação conseguida através do uso do software; a abrangência de formas de representação, sendo fácil a transição entre elas; a interactividade com os objectos matemáticos e o incentivo à formulação de conjecturas.

2.8. Síntese

A Geometria surge como uma excelente oportunidade para relacionar a Matemática com o mundo real e é, porventura, a área mais visual, intuitiva e criativa dos currículos escolares. O desenvolvimento de conceitos geométricos é multifacetado e, como tal, a aprendizagem dos alunos pode ser melhorada se a Geometria for apresentada de forma que estimule a curiosidade e incentive a exploração. Abordagens de ensino mais eficazes e que encorajem os alunos a aprender Geometria são imperativas, desde os primeiros anos do ensino básico, sendo claro, à luz da investigação existente, que é importante dar aos alunos oportunidades para investigação e para a descoberta.

A melhoria das aprendizagens dos alunos, resultante de novas abordagens de ensino, passa hoje pela utilização das novas tecnologias e dos ambientes computacionais. O computador torna-se um meio poderoso de concretizar conceitos abstractos que só seriam acessíveis através de processos formais, podendo levar os alunos a aprender mais matemática e de um modo mais profundo.

Mariotti (2005) refere que a linguagem do computador potencia a comunicação entre o aluno e a máquina e simultaneamente entre o aluno e o professor, tornando esta última mais eficiente.

Os ambientes de geometria dinâmica podem ser vistos como um mediador semiótico de grande alcance, em que uma figura ou construção geométrica actua como um objecto que gera um ou mais interpretantes para um determinado conceito geométrico.

O software de geometria dinâmica escolhido para a realização deste estudo foi o *GeoGebra*, por ser de utilização simples e muito intuitiva, permitindo descobertas matemáticas significativas, através da realização bastante facilitada de numerosas construções geométricas.

Capítulo III

Metodologia de Investigação

“Os professores e os seus alunos definem conjuntamente o mundo real de cada vez que interagem diariamente nas salas de aula” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 284).

Neste capítulo apresento as opções metodológicas do estudo, caracterizadas por seguirem uma abordagem qualitativa e interpretativa, na modalidade de estudo de caso. Faço uma descrição dos procedimentos adoptados, das fases do estudo e respectiva calendarização. Enumero os métodos de recolha e de análise de dados e elaboro uma breve descrição acerca dos participantes seleccionados para esta investigação.

3.1. Opções metodológicas

As questões em estudo estão relacionadas com os processos e a dinâmica da prática educacional e, por essa razão, optei por um estudo de caso, de natureza qualitativa. Em traços gerais, pretendo estudar, pormenorizadamente, as diferentes questões de investigação formuladas, recolhendo evidências no ambiente natural dos participantes – a sala de aula de Matemática – indo ao encontro do que é defendido nos pressupostos metodológicos que sustentam a investigação qualitativa.

Neste estudo é valorizada a interpretação dos participantes e do próprio investigador, a compreensão das situações em toda a complexidade que é inerente à presença de factores humanos. Uma investigação deste tipo permite ao investigador, por um lado, estudar as questões seleccionadas em profundidade e detalhe e, por outro, investigar toda a complexidade dos fenómenos em contexto natural (Bogdan e Biklen, 1994).

“O objectivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiência humanos. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados. Recorrem à observação empírica por considerarem que é em função de instâncias concretas do comportamento

humano que se pode reflectir com maior clareza e profundidade sobre a condição humana (Bogdan e Biklen, 1994, p. 70).

Bogdan e Biklen (1994) enumeram um conjunto de características que marcam e constituem o lastro da investigação qualitativa:

- i)** a valorização do ambiente natural dos fenómenos;

Estes autores reforçam a preocupação que os investigadores qualitativos têm com o contexto e com a influência deste no comportamento humano, afirmando que “para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra e o gesto do seu contexto é perder de vista o significado” (p. 48).

- ii)** o seu carácter descritivo

Bogdan e Biklen (1994) referem que os investigadores qualitativos “tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos” (p. 48).

- iii)** a importância dada ao processo de investigação e não exclusivamente aos resultados;

Os autores salientam que “a ênfase qualitativa no processo tem sido particularmente útil na investigação educacional” e que “as estratégias qualitativas patentearam o modo como as expectativas se traduzem nas actividades, procedimentos e interacções diários” (p. 49).

- iv)** a atitude indutiva (parte-se de dados e não de premissas);

Os investigadores qualitativos “não recolhem dados ou provas com o objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando” (p. 50).

- v)** a importância primordial do significado;

Os investigadores qualitativos “estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas, (...) preocupam-se com aquilo que se designa

por *perspectivas participantes*” (p. 50), e “fazem questão em se certificarem de que estão a apreender as diferentes perspectivas adequadamente” (p. 51).

Ponte (2002) refere que a investigação sobre a própria prática é uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente e para as instituições educativas onde eles estão inseridos, reformulando as suas formas de trabalho, os seus objectivos ou até os modos de relacionamento com o exterior. Este autor, pronunciando-se sobre a investigação como o processo privilegiado de construção do conhecimento, enumera quatro motivos para que os professores realizem pesquisas na sua própria prática:

“ (i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e (iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos” (Ponte, 2002, p. 3).

Ainda a propósito da figura do professor-investigador, Ponte (2002) enfatiza que este “pode tomar como ponto de partida problemas relacionados com o aluno e a aprendizagem, mas também com as suas aulas, a escola ou o currículo” (p. 11). A prática da investigação tem por base dois alicerces: ter uma disposição para questionar, o que está relacionado com a atitude reflexiva e crítica do investigador, mas também com os seus próprios afectos; e o saber como fazer, diversificando os instrumentos metodológicos.

“Deste modo, a investigação não é algo que se possa realizar de forma rotineira, sem paixão, sem um verdadeiro investimento intelectual e afectivo. Ou seja, a investigação (...) requer o espírito de protagonista social. Fazer parte de um projecto sem assumir, desde o início, uma posição de compromisso e empenhamento significa representar nesse projecto um papel secundário, não chegando a viver uma verdadeira experiência de investigação” (Ponte, 2002, p. 11).

Bogdan e Biklen (1994) também se debruçam sobre a condução de investigação qualitativa por parte dos educadores. A abordagem qualitativa “requer que os educadores sejam mais rigorosos e observadores na recolha da informação, no sentido de reconhecerem os seus pontos de vista e de neutralizarem imagens estereotipadas” (p. 284) que podem condicionar o seu comportamento. Na perspectiva teórica da abordagem qualitativa, a realidade é construída pelas próprias pessoas, à medida que vão vivendo as suas vidas; elas podem modificar e alterar o comportamento dos outros. Os autores consideram que, neste enquadramento, a perspectiva qualitativa pode revelar-se muito útil, pois todas as pessoas detêm “o potencial para se modificarem, tanto a elas próprias como ao meio, e de se transformarem em agentes de mudança nas organizações em que trabalham” (p. 284), tornando-se mais reflexivas acerca da sua própria prática.

“Incorporar a perspectiva qualitativa não significa mais do que tornar-se autoconsciente, pensar activamente e agir de maneira semelhante a um investigador qualitativo. (...) Adoptar esta perspectiva quer dizer que começará a ter menos certezas sobre si próprio e a ver-se mais como um objecto de estudo. Tornar-se-á mais reflexivo” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 285).

A modalidade desta investigação é um estudo de caso e integra três unidades de análise – três pares de alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade.

Segundo a perspectiva de Merriam (1988), um estudo de caso é referente à observação pormenorizada de um indivíduo, contexto, acontecimento ou fonte de dados. Também segundo Merriam (1988), um estudo de caso começa por ter hipóteses de trabalho preliminares que vão sendo reformuladas à medida que a investigação avança. É de extrema importância o enquadramento teórico de um estudo e o seu valor global provém tanto das suas propriedades intrínsecas como da forma como ele se situa em relação a estudos anteriores e como expande os seus resultados.

“O plano geral do estudo de caso pode ser representado como um funil. (...) O início do estudo é representado pela extremidade mais larga do funil: os investigadores procuram locais ou pessoas que possam ser objecto de estudo

ou fontes de dados e, (...) organizam então uma malha larga, tentando avaliar o interesse do terreno ou das fontes de dados para os seus objectivos. Procuram indícios de como deverão proceder e qual a possibilidade de o estudo se realizar. Começam pela recolha de dados, revendo-os e explorando-os, e vão tomando decisões acerca do objectivo do trabalho. Organizam e distribuem o seu tempo, escolhem as pessoas que irão entrevistar e quais os aspectos a aprofundar. Podem pôr de parte algumas ideias e planos iniciais e desenvolver outros novos. À medida que vão conhecendo melhor o tema em estudo, os planos são modificados e as estratégias seleccionadas. A área de trabalho é delimitada” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 89).

Ponte (1994) refere que um estudo de caso pode ser descrito como “um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social” (p. 2). Clardy (1997, citado por Dooley, 2002) define um estudo de caso como uma história rica e detalhada sobre uma situação específica, “descrevendo o quê, quem, quando, onde e como” (p. 349).

Ponte (1994) destaca que no estudo a desenvolver há todo o interesse em conhecer em profundidade o seu “como” e os seus “porquês”. É uma investigação assumidamente “particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse” (p. 2).

Bogdan e Biklen (1994) diferenciam diversos tipos estudos de caso: os de organizações numa perspectiva histórica, os de observação e as histórias de vida, todos eles com as suas características próprias. Para o estudo que realizei, importa salientar os estudos de caso de observação. Estes dois autores referem que neste tipo de estudos, a melhor técnica de recolha de dados é a observação participante e o foco de estudo centra-se num aspecto particular de uma organização (por exemplo, uma escola). Caracterizam igualmente este tipo de investigação em torno do facto de se debruçar tipicamente sobre um local específico dentro da organização (por exemplo, a sala de aula), sobre um grupo específico de pessoas (por exemplo, alunos ou professores) ou sobre qualquer actividade da escola (por exemplo, o currículo de determinada disciplina).

Nos estudos de observação participante procura-se conhecer os processos, dinâmicas e perspectivas dos intervenientes numa dada situação (Ponte, 1994).

“A escolha de um determinado foco, seja ele um local na escola, um grupo em particular, ou qualquer outro aspecto, é sempre um acto artificial, uma vez que implica a fragmentação do todo onde ele está integrado. O investigador qualitativo tenta ter em consideração a relação desta parte com o todo, mas, pela necessidade de controlar a investigação, delimita a matéria de estudo. Apesar de o investigador tentar escolher uma peça que constitua, por si só, uma unidade, esta separação conduz sempre a alguma distorção” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 91).

Ponte (1994) enuncia três características dos estudos de caso:

- i)** Apresenta “um forte cunho descritivo”, em que “o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é”, apoiando-se “para isso numa *descrição grossa (thick description)*, isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objecto de estudo” (p. 2). Ponte considera ainda que um estudo de caso não tem de ser apenas descritivo; ele poderá ter um alcance analítico, questionando a situação ou confrontando-a com outras situações conhecidas e com as teorias existentes, ajudando eventualmente na criação de novas teorias ou novas questões para investigação futura.
- ii)** Não é uma investigação experimental. “Recorre-se a ele quando não se tem controlo sobre os acontecimentos e não é portanto possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (p. 3). Ponte (1994) considera ainda que é necessário um distanciamento da situação em si e uma capacidade para questionar de modo muito livre o que essa situação acarreta.
- iii)** É uma investigação de natureza empírica, muito baseada no trabalho de campo e na análise documental, em que, a partir do contexto real da situação, são retiradas evidências de diversas fontes (como entrevistas, documentos, artefactos).

Ponte (1994) aponta ainda as formas como os resultados de um estudo de caso podem ser conhecidos: textos escritos, comunicação oral ou registos em vídeo. Estes são apresentados de forma narrativa e descritiva, expondo e explorando a situação em estudo, com o intuito de adicionar algo de interessante e significativo ao conhecimento existente.

Dooley (2002) considera que o investigador que se empenha na elaboração de um estudo de caso está interessado num fenómeno específico e deseja compreendê-lo completamente através da “observação de todas as variáveis e das suas relações de interacção” (p. 336). Os estudos de caso reflectem situações reais e como tal, “devem representar boas e más práticas, sucessos mas também falhas” (p. 337).

A presente investigação contempla as características enunciadas anteriormente, dado que os participantes no estudo são alunos do 3.º ciclo do ensino básico no contexto da aula de Matemática, os dados foram recolhidos no contexto natural da sua actividade escolar, os registos documentais recolhidos (produzidos pelos alunos ou transcritos) visam conhecer a perspectiva dos participantes e a sua interpretação constitui o instrumento principal de análise, tendo como ponto de ancoragem conceitos teóricos iluminadores da produção de significado na aprendizagem da Matemática.

Acrescento ainda que este estudo não foi realizado com a pretensão de generalização de resultados. Apenas tive a intenção de investigar o trabalho de três pares de alunos, tendo por base as questões inicialmente formuladas, e assim obter resultados específicos relativos a esses participantes. Os investigadores em diversas disciplinas usam o estudo de caso como método de pesquisa para produzir novas teorias, para desafiar uma teoria, para explicar uma situação, para construir soluções, para explorar ou descrever fenómenos. Como vantagens do estudo de caso, Dooley (2002) aponta a sua aplicabilidade à vida real, a contemporaneidade e a acessibilidade através dos relatórios escritos.

O foco do meu estudo reside na análise exploratória do fenómeno complexo da aprendizagem da Matemática, vista sob a óptica da atribuição de significados a acções, palavras, ideias, questões, dificuldades, numa palavra, tendo em conta o contexto natural da aula de Matemática em que o aluno desenvolve a aprendizagem.

3.2. Fases do estudo

O estudo que apresento desenvolveu-se em várias fases.

Na primeira fase da investigação, que decorreu entre os meses de Novembro de 2009 e Fevereiro de 2010, realizei pesquisa bibliográfica e fiz uma primeira revisão da literatura no que diz respeito ao tema da Aprendizagem da Geometria. No que se refere à definição das opções metodológicas de investigação, procedi de igual modo a leituras neste domínio de especialidade, sobretudo com o propósito de decidir acerca dos métodos de recolha de dados no terreno.

Durante os meses de Fevereiro e Abril de 2010, foram criadas as tarefas a implementar na sala de aula e escolhidos os participantes que seriam alvo de uma observação mais intensiva. A elaboração das tarefas teve em consideração o facto de o tema Geometria ser leccionado no final do ano lectivo, sendo esta efectivamente a última unidade curricular a abordar no 7.º ano de escolaridade. Como o tempo o demonstrou, as aulas concedidas para leccionar esta unidade revelaram-se insuficientes, por motivos que se prenderam essencialmente com actividades de final de ano, organizadas na escola, não sendo possível concretizar as seis tarefas inicialmente previstas, mas apenas quatro destas.

Tratando-se de um estudo de índole naturalista e sendo o ambiente próprio da sala de aula considerado como elemento integrante da investigação a desenvolver, toda a turma participou na realização das tarefas, tendo estas sido sempre resolvidas pelos alunos organizados em pares.

Na segunda fase, que decorreu em Maio e Junho de 2010, foram implementadas as tarefas seleccionadas, duas delas em toda a turma e outras duas apenas com os três pares de alunos em estudo. Foram feitas observações dos pares durante a resolução das tarefas, efectuados os registos áudio dos diálogos estabelecidos entre os dois elementos de cada par e recolhidos os seus registos escritos.

Ao longo da terceira fase do estudo, que decorreu entre os meses de Julho de 2010 e Junho de 2011, procedi à transcrição dos registos áudio de cada par e à análise pormenorizada dos dados. Realizei leituras complementares às feitas anteriormente, de forma a elaborar as conclusões da investigação, de modo sustentado sob o ponto vista analítico e científico.

No quadro seguinte, apresentam-se sucintamente as diferentes fases do estudo, as respectivas acções desenvolvidas e a sua calendarização.

Etapa do estudo	Ação	Calendarização
1ª Fase Preparação da Intervenção na Aula de Matemática	- Revisão da literatura. - Elaboração das tarefas a aplicar.	Novembro de 2009 a Abril de 2010
2ª Fase Intervenção na Aula de Matemática	- Implementação das tarefas em sala de aula. - Observação e registo de dados nas aulas.	Maio de 2010 a Junho de 2010
3ª Fase Aprofundamento do Quadro Teórico, Análise de Dados e Elaboração de Conclusões	- Transcrição dos registos áudio dos três pares de alunos. - Revisão da literatura; desenvolvimento do enquadramento teórico. - Análise e interpretação dos dados. - Identificação de resultados e formulação de respostas às questões de investigação.	Julho de 2010 a Junho de 2011

Quadro 1. Fases do estudo

3.2.1. As aulas

A intervenção feita na aula de Matemática decorreu de Maio a Junho de 2010 e as tarefas incidiram sobre as temáticas Semelhança de Figuras e Do espaço ao plano, previstas no Currículo Nacional do Ensino Básico de 2001. Como as tarefas a realizar não prevêem uma continuidade, as aulas em que foi a feita intervenção não foram consecutivas.

Na planificação elaborada pelos professores do grupo disciplinar de Matemática da escola, todos os temas relacionados com a Geometria foram leccionados no final do ano lectivo. Devido a diversas actividades de final de período e visitas de estudo, não foram leccionadas algumas aulas, o que atrasou o início destes temas. Assim, foi tardiamente que a turma iniciou estas unidades temáticas e consequentemente este facto protelou a minha recolha de dados nas aulas.

A turma encontrava-se organizada em pares (8 pares, pois a turma nesta altura do ano lectivo apenas tinha 16 alunos dos 20 iniciais, por razões diversas) e as aulas decorreram geralmente em blocos de 90 minutos, tendo lugar numa sala de computadores. A escola possui duas salas equipadas com computadores, uma no bloco de 3.º ciclo e outro no bloco de 2.º ciclo, sendo estas reservadas às aulas de TIC e de Área de Projecto. Em cada uma destas salas existem 11 computadores e um projector multimédia. Em função da disponibilidade das salas, todas as turmas da escola podem utilizá-las desde que sejam devidamente requisitadas pelo professor da disciplina.

Desde cedo, uma das duas salas foi requisitada para os alunos poderem realizar as tarefas que pretendia implementar, verificando-se ser a única sala disponível de acordo com o horário dos alunos (para aulas de 90 minutos). No entanto, e devido ao início tardio da unidade Semelhança de figuras, foi necessário proceder a um reajustamento nas datas das aulas em que iria ser feita a intervenção. A tarefa 2 foi, por isso, realizada em salas diferentes, em dois dias consecutivos e não num bloco de 90 minutos, como estava inicialmente previsto.

Procurei formular tarefas (Anexo 1) que envolvessem os alunos nas mesmas, que promovessem a comunicação matemática e que apelassem à compreensão e ao raciocínio matemático. As tarefas 1 e 2 incidem essencialmente sobre Semelhança de figuras e as tarefas 3 e 4 enquadram-se na temática Do espaço ao plano. São tarefas que pressupõem a construção geométrica de figuras com o recurso ao software GeoGebra e em que é solicitado aos alunos que obtenham algumas conclusões acerca de propriedades e relações geométricas. Na tarefa 1, várias das questões colocadas pretendiam também que os alunos ganhassem algum à vontade com o GeoGebra. Para além da recolha das respostas escritas, foram feitos registos áudio dos diálogos entre pares e gravados os ficheiros das construções geométricas realizadas no GeoGebra. As tarefas são predominantemente de cunho exploratório, sendo de realçar que o GeoGebra era um software desconhecido para os alunos desta turma.

Tarefas	Unidades Temáticas e Conteúdos	Competências específicas	Duração
Tarefa 1 Figuras semelhantes	Semelhança de figuras - Noção de figuras semelhantes. - Razão de semelhança. Propriedades das figuras semelhantes. - Construção de figuras semelhantes.	- A aptidão para realizar construções geométricas. - A compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes.	90 minutos
Tarefa 2 Tangram	Semelhança de figuras - Construção de figuras semelhantes. - Propriedades dos polígonos semelhantes. Do espaço ao plano - Ponto, recta e plano. - Posições relativas de rectas no plano.	- A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios. - A aptidão para identificar posições relativas de rectas no plano.	45 + 45 minutos
Tarefa 3 Relações entre ângulos	Do espaço ao plano - Ângulos verticalmente opostos. - Ângulos de lados paralelos.	- A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, assim como para justificar os processos utilizados. - Tendência para procurar invariantes em figuras geométricas.	90 minutos
Tarefa 4 Ângulos de um triângulo	Do espaço ao plano - Soma dos ângulos internos de um triângulo. - Ângulo externo de um triângulo.	- Tendência para procurar invariantes em figuras geométricas. - A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios.	90 minutos

Quadro 2. Unidades temáticas, conteúdos e competências específicas das tarefas.

No início de cada aula foi distribuído, a cada par de alunos, um enunciado da tarefa a realizar. Para cada um dos pares em estudo foi colocado na respectiva mesa de trabalho um gravador digital para captar o diálogo entre os elementos do par. Os ficheiros em *GeoGebra* de cada tarefa foram guardados no computador onde o par de alunos se encontrava a trabalhar.

Como professora e investigadora, acompanhei a realização das tarefas, gerindo o ambiente de aprendizagem da aula e esclarecendo algumas dúvidas que foram surgindo. Logo após a distribuição das tarefas percorria a sala e acompanhava cada par de alunos, orientando o trabalho e esclarecendo algumas dúvidas que os alunos iam colocando.

As principais dificuldades manifestadas pelos alunos da turma surgiram ao longo da primeira tarefa, justificadas pela utilização de um software que os alunos não conheciam. Nenhum dos alunos da turma tinha tido contacto com o programa *GeoGebra*, nem nunca tinham tido aulas de Matemática com recurso a um computador.

No final da aula, todos os registos escritos de cada par foram recolhidos e todos os ficheiros em *GeoGebra* guardados no computador em que trabalharam (numa pasta previamente criada com a identificação de cada par e com o número da tarefa).

Após a realização de cada tarefa e já no meu computador pessoal, as captações áudio de cada par de alunos em estudo foram transcritas na totalidade. Os ficheiros em *GeoGebra* de cada tarefa foram posteriormente guardados por mim para serem analisados em simultâneo com as captações áudio e com os registos escritos de cada par de alunos.

3.3. Participantes

3.3.1. A Turma

Os participantes do estudo são alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade, de uma escola básica com 2.º e 3.º ciclos, da cidade de Loulé. A classe económica das famílias dos alunos é, no geral, média ou média-alta e os encarregados de educação, na sua maioria, têm o ensino secundário como habilitações académicas.

A turma era composta inicialmente por 20 alunos, 11 raparigas e 9 rapazes, com idades compreendidas entre os 11 e os 14 anos de idade, sendo que 4 alunos já tinham reprovado em anos anteriores. Trata-se de uma turma de dimensão reduzida devido à presença de uma aluna abrangida pela Lei 3/2008 e, portanto, com necessidades

educativas especiais, sendo acompanhada por uma docente do ensino especial num dos blocos semanais de 90 minutos da disciplina de Matemática. É uma turma que revela falta de hábitos e de métodos de trabalho, mas que é receptiva a novas tarefas e com vontade de aprender. Durante o primeiro período lectivo, os alunos da turma apresentaram, no geral, um aproveitamento satisfatório, mas com ritmos de trabalho muito díspares no seu conjunto. No segundo período parte da turma manteve-se participativa e com vontade de aprender e outra parte, para além de dificuldades evidentes na disciplina (e noutras), revelava interesses diferentes dos escolares e que os motivava a ausentar-se frequentemente das aulas. Denota-se um grupo de alunos muito interessado e empenhado e outro grupo mais pequeno, pouco assíduo às aulas, que revela dificuldades e por isso não avança ao mesmo ritmo. De um modo geral, os encarregados de educação estão atentos à situação escolar dos seus educandos e a grande maioria acompanha-os academicamente.

A partir do 3.º período a turma ficou reduzida a 16 elementos presentes na aula de Matemática (9 rapazes e 7 raparigas). Duas alunas encontravam-se em fuga à escolaridade, a aluna com necessidades educativas especiais passou a beneficiar de aulas de apoio fora da sala de aula, não estando a frequentar a disciplina, e uma outra aluna solicitou a transferência de escola por motivos de ordem familiar.

Para definir os três pares de alunos que são os focos deste estudo de caso, optei por seleccionar, à partida, três alunos, assumindo nesta escolha o meu papel de professora da turma e de investigadora. Para este processo de selecção tive em consideração os seguintes critérios: i) manifestação de interesse pelo aluno(a) em participar nas actividades da aula, ii) comportamento adequado do aluno(a) na sala de aula e iii) diversidade de características dos alunos no que respeita à sua capacidade de expressão oral e escrita. Estes alunos serão designados por X1, Y1 e Z1.

Tendo em conta a natureza das tarefas e a organização das salas de informática que foram utilizadas no conjunto de aulas realizado, todos os alunos foram agrupados em pares. Deixei aos alunos a liberdade de escolherem os colegas com quem desejavam formar pares, pretendendo sobretudo evitar desentendimentos nos pares e fomentar um bom ambiente de interacção na sala de aula. Os alunos que formaram pares com X1, Y1 e Z1 serão designados por X2, Y2 e Z2, respectivamente.

3.3.2. Os pares

A aluna X1 revela, de forma equilibrada, uma razoável participação oral e escrita nas aulas, e escolheu para seu par a aluna X2, que apresenta algumas dificuldades na disciplina e cuja participação é um pouco desorganizada.

A aluna Y1 revela um bom desempenho na comunicação escrita mas, no que respeita à oralidade, mostra alguma timidez em expor as suas ideias e trabalhou com a aluna Y2, que tem um fraco desempenho nas aulas, quer ao nível da participação oral, quer da escrita.

O aluno Z1 revela um raciocínio rápido e uma oralidade adequada, mas demonstra, no entanto, ter dificuldades na produção escrita; escolheu para seu par o aluno Z2, que é interessado e curioso perante as actividades propostas nas aulas, situando-se num nível intermédio de desempenho na disciplina de Matemática.

Pares		Capacidades de expressão	
		Oral	Escrita
Par X	X1	- Participação razoável	- Participação razoável
	X2	- Participação desorganizada	- Dificuldades na produção
Par Y	Y1	- Timidez em expor ideias	- Bom desempenho
	Y2	- Fraca participação	- Fraca participação
Par Z	Z1	- Adequada participação	- Dificuldades na produção
	Z2	- Participação razoável	- Participação razoável

Quadro 3. Resumo das características relativas às capacidades de expressão oral e escrita dos participantes.

O par X

X1 é uma aluna proveniente do Montijo, que está nesta escola pela primeira vez. Integrou-se bem na turma, é comunicativa, estabelece uma relação cordial com professores e auxiliares, é bem-educada e simpática para com os seus colegas.

Tem 14 anos, não tem irmãos, vive apenas com a mãe, após a separação dos seus pais que coincidiu com a sua vinda para Loulé. A sua disciplina preferida é Educação Visual, justificando a sua escolha pelo facto de querer um dia ser pintora, incentivada pela sua mãe e pelo avô. Afirma ter mais dificuldades nas disciplinas de Língua Portuguesa e História, pois não gosta de ler. Nos seus tempos livres, X1 pratica natação, ouve música e pinta.

Na disciplina de Matemática, X1 encontra-se atenta nas aulas, embora por vezes se distraia a conversar com algumas colegas. Não apresenta dificuldades nesta disciplina, tem uma participação muito positiva e não revela dificuldades em se expressar oralmente. Tem habitualmente o seu caderno diário em ordem, fazendo gosto em apresentá-lo organizado e limpo. Utiliza uma linguagem correcta, falando de forma calma e tranquila.

Neste estudo, X1 escolheu para seu par a sua colega de carteira de todo o ano lectivo, a aluna X2.

X2 mora perto da cidade de Loulé, tem 13 anos e vive com os pais e dois irmãos mais velhos. É uma menina muito extrovertida e comunicativa. As disciplinas de que mais gosta são Língua Portuguesa, Inglês e Matemática, afirmando ser as que a motivam mais e onde tem mais interesse em aprender. Considera que as disciplinas de História e Geografia são “difíceis”. Nos seus tempos livres, prefere a leitura, a pintura e passear com os amigos. Um dia gostaria de ser Engenheira ou Arquitecta.

Na disciplina de Matemática, é uma aluna com intervenções desorganizadas, com comportamento por vezes perturbador, fruto de alguma falta de concentração nas tarefas da aula. Apresenta o caderno diário bem organizado mas por vezes não realiza os trabalhos solicitados.

O par Y

Y1 mora numa aldeia do concelho de Loulé situada a cerca de 7 km de distância. É uma aluna bem integrada na turma, tendo progredido para o 7.º ano em conjunto com alguns dos seus colegas de turma. É muito introvertida, calada, mas é boa companheira, sabendo separar os contextos de dentro e de fora da sala de aula.

Tem 13 anos, não tem irmãos, vive com os pais e gostaria de ser Médica Pediatra. A sua disciplina preferida é Educação Física, justificando a sua escolha pelo

facto de gostar imenso de desporto. Afirmar ter mais dificuldades na disciplina de Educação Visual, por não saber desenhar bem. Nos seus tempos livres, a aluna Y1 ouve música e pratica natação de competição, o que a ocupa por inteiro, treinando duas vezes por dia, uma antes de ir para as aulas e outra ao fim do dia, seis vezes por semana.

Na disciplina de Matemática, Y1 está sempre atenta nas aulas, revelando facilidade na compreensão e aplicação dos conteúdos leccionados. Apesar da sua timidez, a aluna sabe participar de forma positiva quando solicitada. Apresenta o seu caderno diário em ordem e extremamente organizado. Dirige-se a colegas e professores de forma calma e tranquila e utiliza uma linguagem correcta.

Embora se sentasse habitualmente sozinha nas aulas de Matemática, a aluna Y1 escolheu para seu par a aluna Y2, que passou a ser a sua colega de carteira na parte final do ano lectivo.

Y2 tem 13 anos e mora dentro da cidade de Loulé, bem perto da escola. Vive com a mãe, o padrasto e uma irmã. Tem mais dois irmãos, fruto do primeiro casamento de sua mãe e num dos dias da aplicação das tarefas relativas a este estudo, nasceu a irmã mais nova da aluna.

A disciplina de que mais gosta é Educação Visual, pois tem um gosto especial pela pintura e pelo desenho. A disciplina em que tem mais dificuldades é a Matemática, pois afirma que não entende a matéria leccionada. Nos seus tempos livres pratica karaté, ouve música e lê. A profissão que um dia gostaria de ter é Educadora de Infância, por gostar muito de crianças.

Na disciplina de Matemática é uma aluna que revela muitas dificuldades na consolidação dos conhecimentos adquiridos nas aulas. A sua participação na aula é quase inexistente, apenas o faz quando solicitada e após alguma insistência da minha parte. É uma menina calma e afável com colegas e professores.

O par Z

Z1 é proveniente da mesma localidade da aluna Y1, nos arredores de Loulé. É um menino de 13 anos, pequeno e franzino. É pouco comunicativo, não estabelecendo uma relação cordial com todos os seus colegas, apenas dialogando com alguns da sua confiança. Por vezes, fora da sala de aula, é um pouco troçado por outros alunos da

escola, talvez pela sua estatura e falta de empatia que tem com os outros. Habita num mundo um pouco só dele.

Z1 vive com os pais e uma irmã mais velha que está a frequentar um curso universitário, tendo-me relatado esse facto logo no início do ano lectivo. As suas áreas preferidas do currículo escolar são as Ciências e a Língua Portuguesa. Um dia gostaria de exercer advocacia. Nos seus tempos livres, Z1 pratica BTT, ouve música, estuda e gosta especialmente de cinema, sendo um espectador assíduo.

Na disciplina de Matemática, o aluno Z1 senta-se na primeira carteira. Numa primeira análise da sua participação nas aulas, poder-se-ia dizer que habitualmente está alheio ao que se passa, mas quando solicitado, o aluno revela ter conhecimentos, resolvendo a maior parte das tarefas da aula de forma mental. Embora não apresente dificuldades, o seu caderno diário está desorganizado e com falta de elementos, justificado pelo facto de, uma vez resolvido mentalmente, não considerar necessário escrever no caderno, apesar da minha insistência para tal. Revela um raciocínio rápido e uma oralidade adequada, mas demonstra, no entanto, ter dificuldades na produção escrita. A participação nas aulas é positiva e não revela dificuldades em se expressar oralmente. Saliento o facto de este aluno explicar o seu raciocínio de forma superior ao que é esperado nesta faixa etária; de facto, na maioria das vezes a sua explicação só consegue ser compreensível por ele e por mim.

Neste estudo, o aluno Z1 escolheu para seu par o seu colega de carteira de todo o ano lectivo, o aluno Z2.

Z2 tem 13 anos, mora dentro da cidade de Loulé com os pais e a irmã mais nova. É um menino simpático, estabelecendo boas relações com todos os colegas e elementos da comunidade educativa, sendo contudo, um pouco reservado.

Gosta particularmente das disciplinas relacionadas com a área das Ciências, segundo ele, por gostar da matéria e da natureza. Revela ter dificuldades na disciplina de Inglês, por não saber falar bem. No futuro gostaria de ser Biólogo Marinho.

Na disciplina de Matemática é interessado, revela ter conhecimentos razoáveis e é muito aplicado, realizando todas as tarefas propostas. Tem uma participação correcta nas aulas e apresenta o caderno diário organizado.

3.4. Recolha de dados

De acordo com a visão de Bogdan e Biklen (1994), o investigador qualitativo utiliza três formas privilegiadas de recolher dados: através de observações, entrevistas e documentos.

Ponte (2002) refere-se à forma como se deve proceder na recolha de dados, salientando que, quer com dados quantitativos, quer com dados qualitativos, “o mais importante não é recolher muitos dados, mas recolher dados adequados ao fim que se tem em vista e que sejam merecedores de confiança” (p. 15). Para que tal se verifique, é essencial que “os dados sejam recolhidos sempre da mesma forma, com procedimentos claros e bem definidos, de modo a possibilitar a sua posterior interpretação” (p. 15), respeitando um plano de trabalho que antecipe as diferentes etapas da investigação.

Para Ponte (2002), o investigador deve assumir o controlo de todo o processo, sem perder de vista os objectivos da sua investigação, o intuito de cada actividade e o calendário previsto. Todas as acções devem no entanto contemplar alguma flexibilidade e visão crítica, ajustando-se, sempre que se considere necessário, o plano de trabalho.

Nesta investigação, a recolha de dados teve dois momentos principais: antes e durante a aplicação das tarefas. Inicialmente pedi autorização para a realização do estudo em sala de aula à Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), através de uma aplicação disponibilizada na internet, *Monitorização de inquéritos em meio escolar*. Posteriormente, e já com a autorização por parte da DGIDC, solicitei autorização à Direcção da escola para a realização do estudo (Anexo 2), a qual me foi prontamente concedida se os encarregados de educação também anuíssem, o que foi feito seguidamente. Pedi aos encarregados de educação que me autorizassem não só a realização da investigação (Anexo 3), mas também a gravação áudio como forma de recolha de dados, garantindo o anonimato dos alunos e o uso do áudio exclusivamente para a investigação em causa. Todos os encarregados de educação da turma concordaram e concederam autorização para a realização das captações áudio.

Durante a intervenção pedagógica a recolha de dados foi feita através de: registos escritos dos alunos em cada tarefa; os ficheiros em *GeoGebra* de cada par de alunos em cada tarefa; as captações áudio de cada par de alunos durante a realização de

cada tarefa; e algumas notas de campo realizadas pela investigadora durante a observação e leccionação das aulas, enquanto os alunos resolviam as tarefas.

A observação teve como objectivo compreender o percurso de aprendizagem dos alunos bem como as dificuldades que manifestaram durante a realização das tarefas, procurando desta forma perceber como estes estruturam o seu pensamento, inter-relacionam as suas ideias e lhes dão significado.

3.5. Análise de dados

“A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 205).

No final da recolha de dados começa a desenvolver-se a fase mais formal da análise. Este período inicia-se com várias leituras de todo o material recolhido, de onde devem surgir padrões para a organização de todo material em categorias de análise – categorias de codificação (Bogdan e Biklen, 1994) sem que, no entanto, se deva perder de vista o todo recolhido.

Segundo Merriam (1988), a análise de dados é efectuada em três fases: redução de dados; apresentação de dados; interpretação e verificação de dados. Numa investigação qualitativa a análise de dados assume um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando-se relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspectiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas.

Este é o momento em que o investigador avalia os dados com o objectivo de detectar características que se relacionem com as questões de investigação. Dooley (2002) distingue dois tipos de análise: a estrutural e a reflexiva. Na análise estrutural, o processo de examinação dos dados tem o objectivo de encontrar padrões inerentes a discursos, textos, eventos ou outros fenómenos. A utilização da análise reflexiva

envolve a decisão do investigador de se apoiar na sua intuição e julgamento pessoal para analisar os dados e não em procedimentos técnicos que impliquem os sistemas de categorias de classificação. Este autor acrescenta ainda que “é importante classificar os dados de todas as formas possíveis para encontrar resultados involuntários que poderão não ser visíveis no início” (p. 343).

O desenvolvimento de um sistema de codificação envolve a procura de regularidades, padrões e de tópicos presentes nos dados que surgem após a leitura dos mesmos; posteriormente, procede-se à escrita de palavras e frases que representam os tópicos e padrões – estas formam as categorias de codificação. “As categorias constituem um meio de organizar os dados descritivos (...) de forma a que o material contido num determinado tópico possa ser fisicamente apartado dos outros dados” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 221).

Logo após a recolha de dados, procedi à transcrição integral das gravações áudio captadas durante a realização das tarefas. Tendo em consideração o objectivo deste estudo, de acordo com alguns elementos estruturantes do quadro teórico e com os dados recolhidos, optei pelas seguintes categorias de análise e respectiva codificação:

- i) Razão de semelhança: a) signos (S-Rs), b) interpretantes (I-Rs), c) potenciais cadeias semióticas (CS-Rs)
- ii) Comparação de duas razões de semelhança: a) signos (S-CoRs), b) interpretantes (I-CoRs), c) potenciais cadeias semióticas (CS-CoRs)
- iii) Posições relativas de rectas: a) signos (S-PosRe), b) interpretantes (I-PosRe), c) potenciais cadeias semióticas (CS-PosRe)
- iv) Polígonos, perímetros e áreas: a) signos (S-PeAr), b) interpretantes (I-PeAr), c) potenciais cadeias semióticas (CS-PeAr)
- v) Ângulos em duas rectas concorrentes: a) signos (S-Acon), b) interpretantes (I-Acon), c) potenciais cadeias semióticas (CS-Acon)
- vi) Ângulos definidos entre duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas: a) signos (S-Apar), b) interpretantes, (I-Apar) c) potenciais cadeias semióticas (CS-Apar)
- vii) Ângulos internos de um triângulo: a) signos (S-Atri), b) interpretantes (I-Atri), c) potenciais cadeias semióticas (CS-Atri)

- viii) Relações entre os quatro ângulos de um vértice de um triângulo: a) signos (S-Avtri), b) interpretantes (I-Avtri), c) potenciais cadeias semióticas (CS-Avtri)
- ix) Ângulos internos e externos de um triângulo: a) signos (S-Ainex), b) interpretantes (I-Ainex), c) potenciais cadeias semióticas (CS-Ainex)

A principal tarefa que presidiu a toda a análise de dados foi de carácter assumidamente interpretativo e consistiu na procura de evidências, nos dados empíricos, para explicitar o processo de construção de significados matemáticos por cada um dos pares de alunos. A minha preocupação primordial foi a de mapear e reconstruir os modos de pensamento dos alunos perante as tarefas propostas, procurando sinalizar as formas de mediação semiótica presentes nas suas abordagens e conclusões, em particular, na sua interacção com o programa *GeoGebra*. Foram essenciais todos os actos comunicativos, tanto orais como escritos como computacionais, para apurar formas de registo matemático, elementos da linguagem utilizada, posicionamentos dos elementos dentro de cada par – numa palavra, todo o universo de signos foi escrutinado tão longe quanto possível para compreender as interpretações e os significados dados pelos alunos aos conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas propostas.

Capítulo IV

Análise de dados

Neste capítulo são apresentados e discutidos os dados recolhidos à luz do quadro teórico elaborado. Optei por organizar a análise de dados segundo o trabalho realizado por cada um dos pares de alunos que estão no foco da investigação. Em cada um dos pares é feita a descrição e a análise da actividade e dos significados que são construídos no decurso de cada tarefa.

4.1. Par X

4.1.1. Tarefa 1 – Figuras semelhantes

O par de alunas acolheu com muito entusiasmo a ideia de participarem neste estudo e logo na primeira tarefa foi possível ver essa reacção, querendo realizar apressadamente todas as questões (Anexo 1).

Razão de semelhança

Sem dificuldades, realizam no *GeoGebra* a construção de uma figura semelhante à dada, reduzindo-a para metade (questão 2), embora não se encontre totalmente correcta.

[1] X1: Redução para metade?

[2] X2: Faz lá aí divisões...

Para este par de alunas, reduzir uma figura significa *dividir* e esta divisão aparece claramente concretizada em [2]. O que estas alunas fizeram na sua construção foi dividir por 2 cada um dos comprimentos dos segmentos de recta da figura e criar novos segmentos de recta com novos comprimentos reduzidos para metade. A construção da nova figura baseou-se na transformação dos segmentos de recta horizontais e verticais, tendo em conta a grelha quadriculada, deixando os segmentos oblíquos para colocar *a posteriori* nas posições correspondentes à da figura inicial. Tendo em conta esta forma de construção da figura reduzida, podemos concluir também

que, para estas alunas, a redução significa não apenas divisão mas também conservação da forma. No entanto, não dizem qual é a razão de semelhança entre a figura dada e a construída.

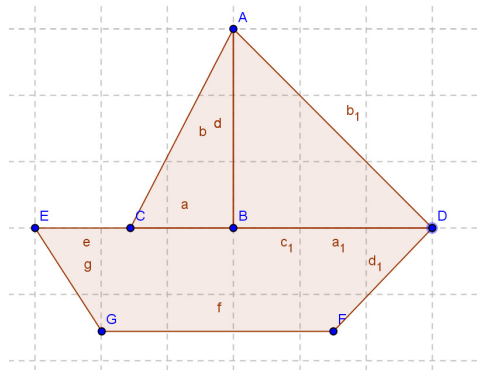


Figura 4.1. Construção da figura reduzida da questão 2 do par X.

Este par de alunas construiu correctamente a ampliação da figura original, respeitando o número de quadriculas (questão 3).

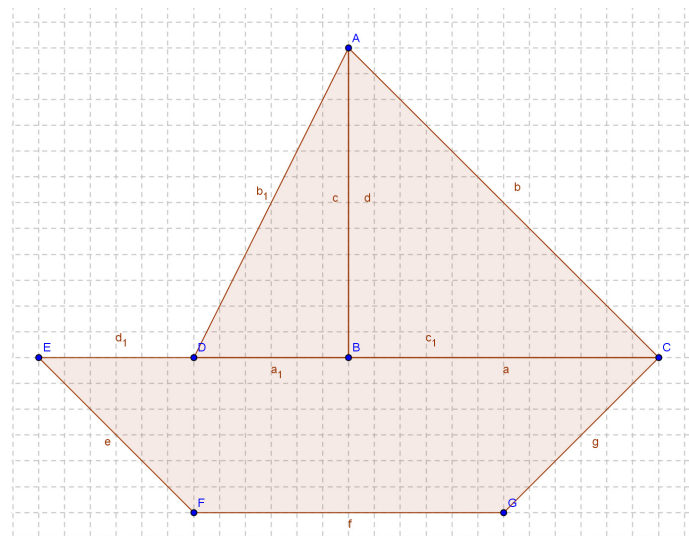


Figura 4.2. Construção da figura ampliada da questão 3 do par X.

Para a realização da construção de uma nova figura e de duas semelhantes a essa (questão 4), este par de alunas não solicitou qualquer ajuda.

[3] X1: Faz outra [figura] ampliada!

[4] X1: A razão é igual a vezes 2... não sei...

[5] X2: A razão é vezes 2, sim.

[6] X2: Não. É duas figuras semelhantes, acho que é uma ampliada e outra reduzida.

Este par realizou a construção de dois triângulos semelhantes e indicou a respectiva razão de semelhança ($r = 2$). Tal como se verificou com a divisão, relativamente ao conceito de redução, o conceito de ampliação aparece relacionado com a operação de multiplicação, como se evidencia em [4] e [5]. Da análise destas duas questões sobressai a associação entre o conceito de ampliação e o de multiplicação, bem como entre o conceito de redução e o de divisão.

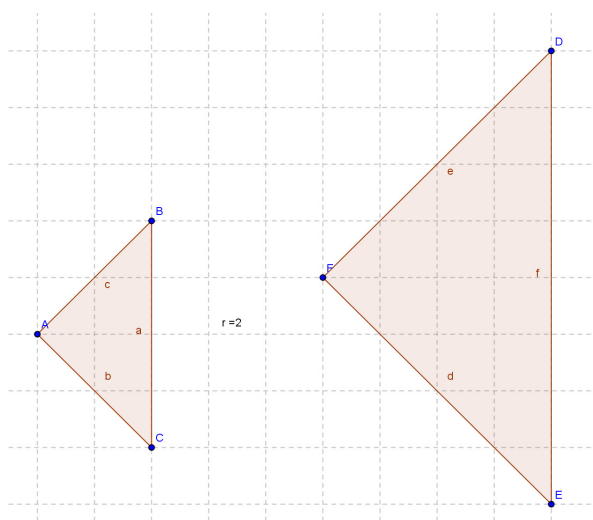


Figura 4.3. Construção de duas figuras semelhantes realizada pelo par X.

Na figura seguinte ilustra-se o triângulo semiótico envolvido nestes significados, apontando-se os representantes, interpretantes e objectos que estão envolvidos na atribuição de significados.

Ainda em relação à resolução desta questão, há que salientar o facto de este par de alunas ter apenas construído duas figuras semelhantes (e não três: um objecto e duas imagens). Apesar da aluna X2 ter alertado para a necessidade de construir uma terceira figura semelhante [6], a aluna X1 não acolheu esta sugestão, o que se justifica pelo seu maior domínio dentro do par. Por outro lado, os interpretantes portadores de significado nesta questão sugerem a ideia de uma operação inversa entre a ampliação e a redução, por analogia com o que acontece com a multiplicação e a divisão. A aluna X1 pode ter considerado que bastariam duas figuras para satisfazer o que era pedido na questão, pois

a primeira pode ver-se como redução da segunda e a segunda como ampliação da primeira.

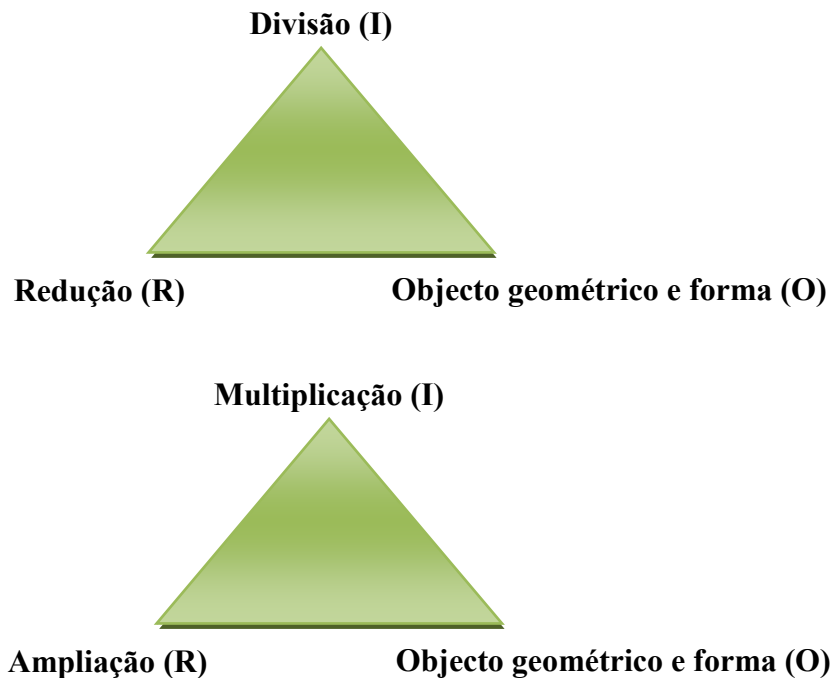


Figura 4.4. Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação.

Esta situação, que se traduz na construção de duas únicas figuras, leva a sugerir uma cadeia de significados que vai revelando um processo de construção onde vários conceitos se vão organizando, pois há maneiras de pensar que se vão interligando.

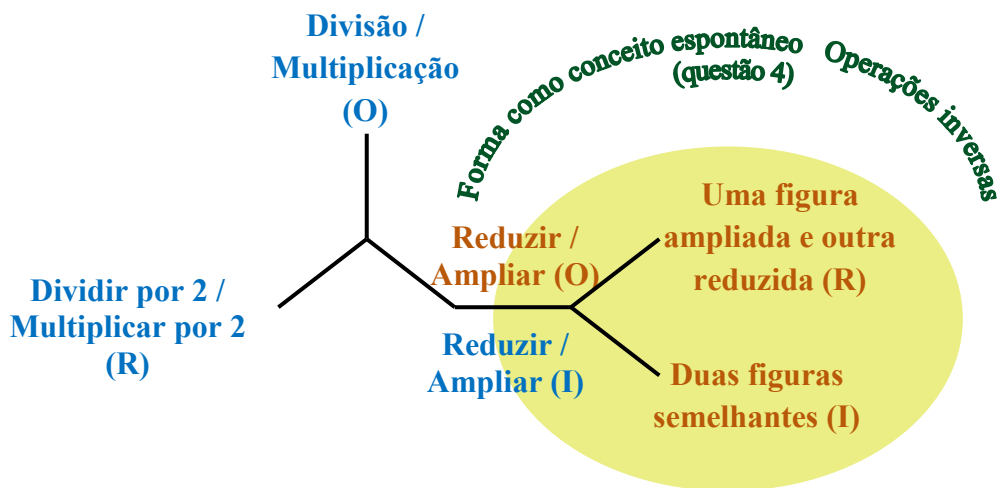


Figura 4.5. Cadeia de significados evidenciados pela aluna X1.

No que respeita à questão 5, este par de alunas classifica apenas o tipo de semelhança, sem apresentar uma explicação.

R: Trata-se de uma razão redução.

Figura 4.6. Resposta do par X à questão 5.

Relativamente à questão 6, o par deveria completar uma figura semelhante à dada e indicar depois a razão de semelhança de A para B e também de B para A.

[7] X2: Temos que ver pelo que é que se está a dividir!

[8] X1: de 3 para 1.

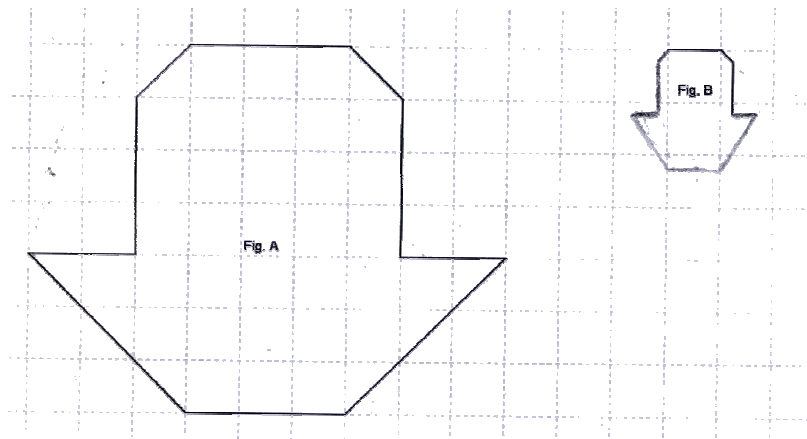


Figura 4.7. Construção da Figura B da questão 6 do par X.

O par X completou quase correctamente a figura mas a determinação da razão de semelhança revelou-se particularmente difícil e foi necessária a minha ajuda.

- [9] X2: Professora, de A para B, tem que se...?
- [10] Eu: A razão é...
- [11] X1: Professora, é de 3 para 1.
- [12] Eu: Vamos ver: a razão é um número. Se aqui havia 3 quadradinhos e aqui há 1, qual é a razão de semelhança?
- [13] X2: É a dividir por 3.
- [14] Eu: Então, qual é a dúvida?
- [15] X1: Então estava certo!
- [16] Eu: E agora de B para A?
- [17] X2: É de 3 para 1.
- [18] Eu: Isso. Expliquem agora o que se verifica quando comparamos as duas.

Mais uma vez, a redução surge associada à divisão [7] e [13], mas o conceito de razão não parece claro. A ideia de semelhança está muito ancorada, para estas alunas, em ampliar ou reduzir, o que para elas significa multiplicar ou dividir. Além disso, a semelhança está intimamente ligada a uma acção e, portanto, passar para a razão de semelhança é entrar numa fase seguinte à acção, ou seja, é comparar as duas figuras, como resultado da acção que se realizou.

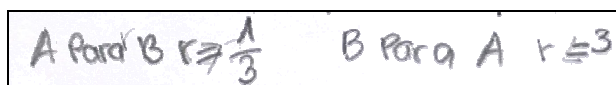
Para estas alunas, o conceito de semelhança continua muito preso à noção de operação (por exemplo, evidenciado em [12] e [13]) e, por outro lado, o conceito de razão de semelhança afasta-se dessa operação concreta.

Ainda neste último excerto é visível a utilização da expressão “de ... para” com significados bastantes diferentes. Para estas alunas, dizer “de A para B” [9] é similar a dizer “dividir por 3” [13] e daí decorre o sentido que dão à expressão “de 3 para 1” [11]. Esta forma de interpretar o que significa “de 3 para 1” (passar do comprimento 3 para o comprimento 1) contradiz o significado matemático de uma razão de 3 para 1 (3:1). Esta confusão pode ter persistido pois a aluna X2, quando responde à razão de semelhança de B para A, usa correctamente a expressão “de 3 para 1” [17], contrariando o que a colega X1 tinha referido momentos antes [11]. Neste diálogo não estava em causa a utilização da notação matemática usual para uma razão ou uma proporção, mas posso encontrar indícios que poderão justificar dificuldades posteriores associadas à interpretação desta forma de representar uma razão de semelhança.

A comparação de duas razões de semelhança

Na questão que pedia o valor das razões de semelhança de A para B e de B para A, as alunas não responderam com números, indicando apenas o tipo de semelhança que se verifica em cada caso (redução, ampliação). Este facto leva a pensar que as alunas continuam a associar semelhança a multiplicar ou a dividir por um número e assim sendo, para as alunas, a razão de semelhança não parece transmitir esta informação.

O par veio a indicar correctamente as razões de semelhança de A para B e de B para A na questão 6.2, embora sem as ter associado à comparação das figuras. De facto, não apresentaram uma explicação para o que se verifica quando comparamos as duas razões, como era solicitado.



A Para B $r = \frac{1}{3}$ B Para A $r = 3$

Figura 4.8. A resposta do par X para os valores das razões de semelhança.

Ao ler o enunciado da questão 7, a aluna X1 revela novamente a associação redução-divisão já surgida anteriormente:

[19] X1: amplie ou reduza conforme... aqui é 1 para 2, portanto é para dividir!

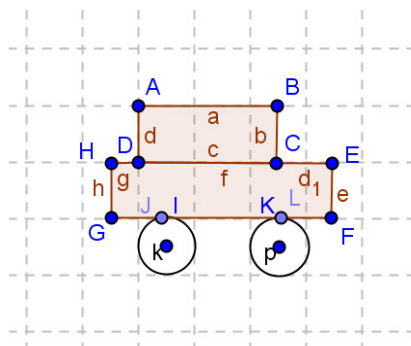


Figura 4.9. Primeira figura da questão 7, realizada pelo par X.

No que respeita à construção da segunda figura, o par estava sem saber o que fazer e solicitou a minha intervenção.

[20] X1: Professora, o que é para fazer?

[21] Eu: Então qual é a razão de semelhança?

[22] X2: 3 para 1.

[23] Eu: O que vai acontecer a esta figura?

[24] X1: Vai ficar maior!

[25] Eu: Escrevam uma conclusão no que respeita à forma, comprimento dos lados e amplitude de ângulos.

A hesitação que levou ao pedido de ajuda das alunas, principalmente da aluna X1, revela que ainda há dúvida em interpretar correctamente o significado da notação 3:1. Aparentemente, a razão de semelhança continua a não ser entendida como um número [22], apesar da resposta correcta dada à questão 6.3. A razão de semelhança mantém-se presa à realização de uma operação de multiplicação ou de divisão, sendo mais marcada a associação redução-divisão.

Finalmente, este par não formalizou conclusões no que respeita à forma, comprimento de lados e amplitudes de ângulos de figuras semelhantes, como era solicitado na tarefa. Fez apenas uma referência ao tipo de semelhança: uma redução na primeira figura e uma ampliação na segunda.

Cheguei à conclusão que a 1ª redução e a 2ª aumentou

Figura 4.10. Resposta do par X à questão 7.

Existem evidências de que o conceito de razão não está claro para este par de alunas, pois não o associam a uma comparação de figuras, mas antes a uma “operação” que leva de uma figura para outra. A ideia de redução e ampliação como operações inversas sobre uma figura revela-se muito presente e arrasta consigo a noção de operações inversas sobre números, isto é, multiplicar e dividir. Por outro lado, a semelhança torna-se muito ligada à ideia de transformação, isto é, à existência de uma acção sobre um objecto que o transforma, mantendo-lhe a forma. É este o sentido que parece prevalecer na cadeia semiótica ilustrada a seguir. Duas figuras semelhantes pressupõem uma operação “de... para” e, como tal, a razão de semelhança não adquire o sentido de uma comparação (estática) entre duas figuras.

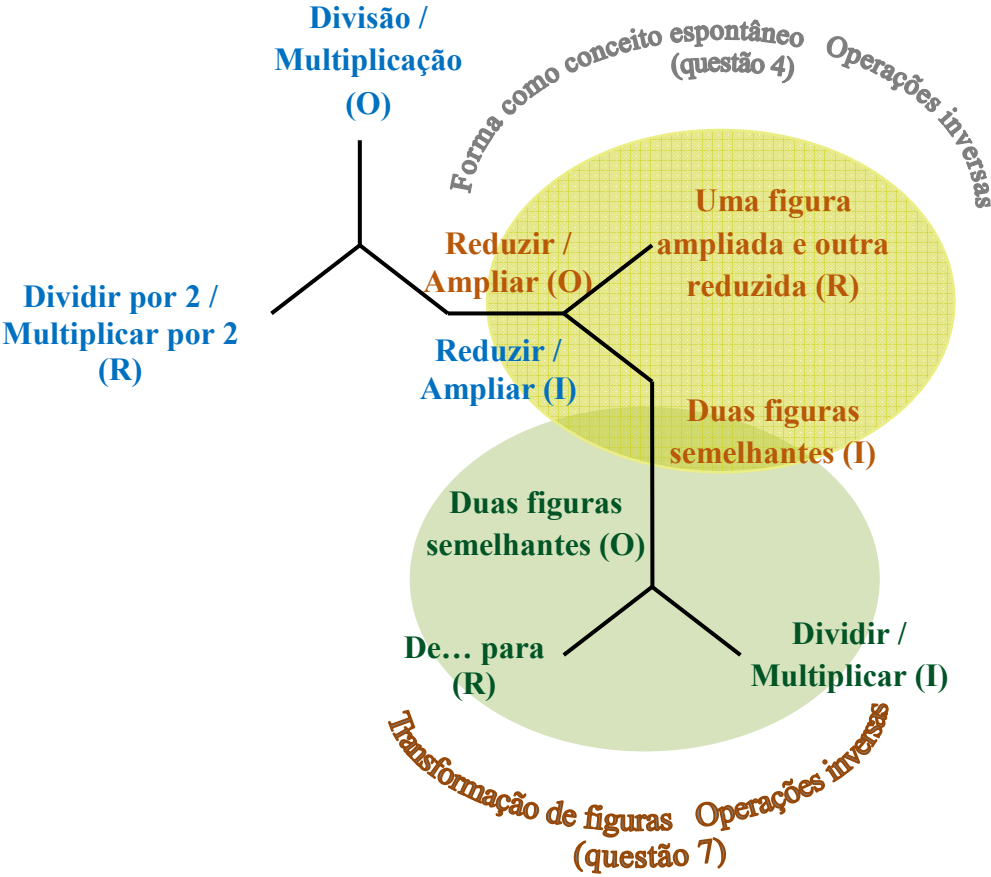


Figura 4.11. Prolongamento da cadeia de significados evidenciados pelo par X.

No final da tarefa 1, as alunas deste par escreveram no caderno uma síntese das principais conclusões a que chegaram. Explicaram que depois de abrirem o *GeoGebra*, utilizaram “pontos nas linhas quadriculadas e depois rectas para ligar os pontos e resolver os exercícios”. Nesta síntese sobressai também a classificação das semelhanças em ampliação e redução, como esteve sempre constante no raciocínio destas alunas.

4.1.2. Tarefa 2 - Tangram

Contrariamente ao verificado durante a realização da primeira tarefa, este par de alunas esteve particularmente distraído e irrequieto nesta segunda tarefa (Anexo 1).

Posições relativas de rectas no Tangram

A questão 1 solicitava que os alunos construíssem um Tangram no *GeoGebra*, seguindo algumas sugestões dadas.

[26] X2: Primeiro vou fazer um quadrado!

(As alunas já tinham avançado na construção da figura, mas sem seguir as sugestões dadas; ao invés construíram os dois triângulos maiores inseridos no quadrado).

[27] Eu: Não seguiram o que eu pedi...

[28] Eu: Ferramentas... ponto médio...segmento de recta, já puseram este ponto médio? [ponto médio do segmento que liga o vértice H ao centro do quadrado]

[29] X1: Como se faz o ponto médio?

[30] Eu: Seleccionam o segmento e agora criam o ponto médio deste segmento f; agora sim, já está no meio.

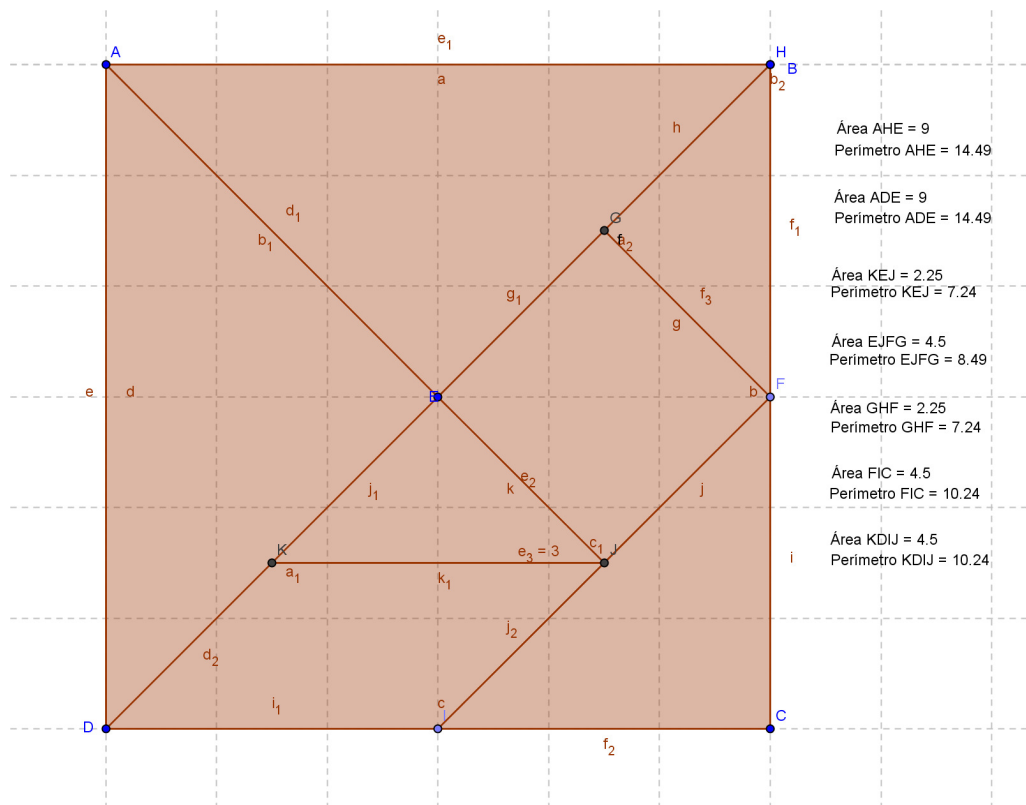


Figura 4.12. Construção do Tangram feita pelo par X.

Na questão 2, os alunos deveriam identificar rectas paralelas, perpendiculares e concorrentes, usando os pontos do Tangram construído anteriormente.

[31] X1: Professora, é assim que se faz uma [recta] paralela?

[32] Eu: Não é preciso fazer nenhuma. Nesta figura como está construída, com estas letras, identificam rectas paralelas...

[33] X1: Ah...

[34] X1: As linhas paralelas são... AB e DC.

[35] X1: Perpendicular... o que é uma linha perpendicular?

[36] X1: Concorrentes... AE e BE.

Este par de alunas não indicou rectas perpendiculares na figura construída. Em vez disso, indicou o ângulo AEB que tem uma amplitude de 90° . Segundo as suas palavras [35] e de acordo com o ângulo AEB indicado pelas alunas, a noção de rectas perpendiculares não está completamente apreendida, mas o significado que elas estão a atribuir-lhe não se encontra muito afastado do real. Posso então afirmar que estas alunas

estabelecem uma associação entre rectas perpendiculares e um ângulo de 90° de amplitude.

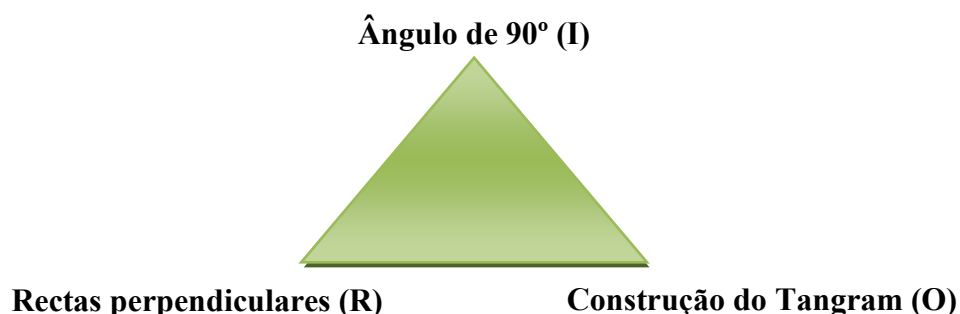


Figura 4.13. Uma concretização da semiose presente no significado de rectas perpendiculares.

Quando lhes é solicitada uma justificação, as alunas usam a linguagem icónica para ilustrar o seu ponto de vista e que se inspira na própria construção que fizeram anteriormente:

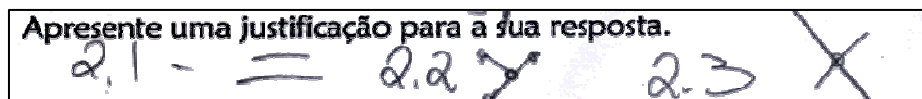


Figura 4.14. Justificação dada pelo par X para a questão 2.

Através da representação anterior depreendo que este par de alunas apresenta uma ideia clara do que significam rectas paralelas e concorrentes. No entanto, devido à associação referida anteriormente entre rectas perpendiculares e o ângulo de 90° de amplitude, diria que esta noção não se encontra completamente esclarecida para este par. É interessante notar que o esquema das alunas para indicar rectas perpendiculares reflecte as posições de pontos e de segmentos semelhantes aos que encontraram no Tangram. Trata-se de um indício de que o Tangram funcionou como objecto concreto ou como referente real para a construção do significado de rectas perpendiculares. É interessante verificar que as alunas parecem ter escolhido uma “posição” para desenhar as rectas perpendiculares que não é a mais comum. Por exemplo, as rectas DC e BC

seriam eventualmente mais evidentes como rectas perpendiculares para a maioria dos alunos.

Componentes do Tangram: lados, perímetros e áreas dos polígonos

Na questão 3 era solicitado que encontrassem relações entre os lados, entre os perímetros e entre as áreas dos polígonos que constituem o Tangram que construíram. Este par de alunas não entende a questão e começa por pedir ajuda.

[37] X1: Professora, o que é para fazer na 3?

[38] Eu: A questão é: Como é que relacionam os comprimentos das figuras que compõem o Tangram? Como relacionam o lado do quadrado grande com o lado do quadrado pequeno, os lados dos triângulos... Quero que descubram isso.

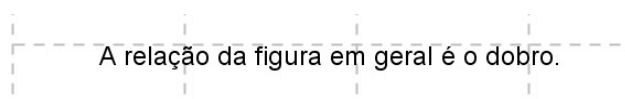
[39] X1: Mas isso é difícil...

[40] Eu: E nesta questão é a relação entre os perímetros...

[41] Eu: E depois as áreas...

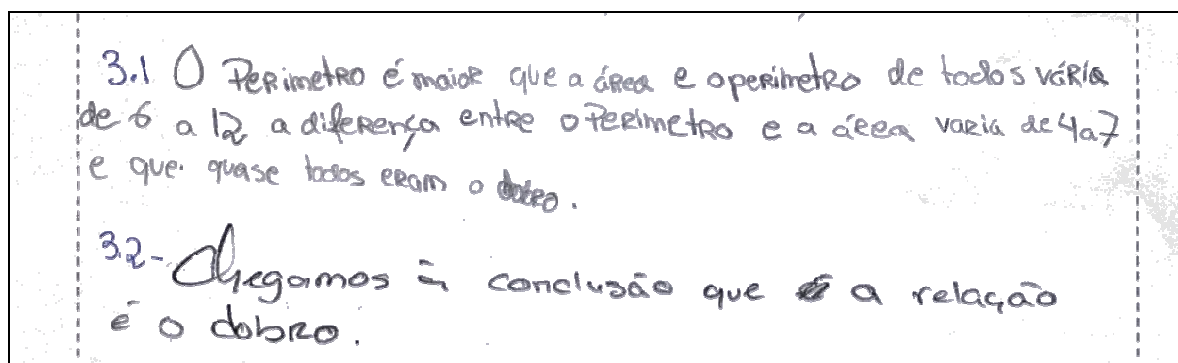
[42] X1: Professora, e os comprimentos...?

[43] Eu: 3... 6... Qual a relação que existe? Comparem os diferentes comprimentos todos.



A relação da figura em geral é o dobro.

Figura 4.15. Relação apresentada junto ao Tangram construído pelo par X.



3.1. O Perímetro é maior que a área e o perímetro de todos varia de 6 a 12 a diferença entre o perímetro e a área varia de 4 a 7 e que quase todos eram o dobro.

3.2. Chegamos à conclusão que a relação é o dobro.

Figura 4.16. Resposta às questões 3.1 e 3.2. pelo par X.

Considero necessário clarificar as conclusões a que chegaram estas alunas. Para qualquer figura do Tangram, elas verificaram que:

- i) O perímetro é sempre maior do que a área.
- ii) O perímetro varia entre 6 e 12.
- iii) A diferença entre o perímetro e área varia entre 4 e 7.
- iv) “Quase todos eram o dobro”.

Apesar de não terem respondido directamente às questões colocadas, estas alunas encontraram diferentes relações, usando os valores dos perímetros e das áreas das figuras do Tangram que construíram. No que respeita à primeira conclusão, esta verifica-se pois em qualquer figura, o perímetro é sempre maior do que a sua área. A segunda não é verdadeira, pois existem no Tangram figuras com um perímetro superior a 12. A terceira relação foi encontrada, fazendo as diferenças entre os perímetros e as áreas, o que é curioso, pois não era solicitado nas questões. O intervalo de 4 a 7 apontado pelo par para esta diferença não está correcto na totalidade, pois no máximo esta diferença é de (no caso da construção deste par) 5,74 e não 7 como escreveram as alunas. Relativamente à quarta conclusão, não está claro a que se referiam as alunas, mas depois da minha intervenção junto delas, como se observa em [42] e [43] posso deduzir que estejam a pensar nos comprimentos dos segmentos de recta das figuras, estando as medidas encontradas junto do Tangram, da figura 4.12.

Este par de alunas não respondeu à questão 3.3, não apresentou nenhuma relação entre as áreas das figuras que compõem o Tangram, mas considero que é de valorizar as relações encontradas por este par de alunas, mesmo não tendo seguido as propostas na tarefa.

Houve, aparentemente, uma tentativa de encontrar alguma forma de relacionar os vários polígonos presentes no Tangram e as alunas parecem ter-se focado essencialmente em medidas. A ideia de que “a relação da figura em geral é o dobro” ou “chegámos à conclusão que a relação é o dobro” parece sugerir que as alunas encontraram diversas medidas que seriam o dobro de outras. É de salientar que na tarefa anterior era desse tipo de relação que se tratava, isto é, perceber que existia uma relação entre todos os comprimentos de uma dada figura e os correspondentes comprimentos de uma figura semelhante. Possivelmente, terá havido uma permanência deste tipo de raciocínio, embora no caso das figuras do Tangram não estivesse explícito o que poderia

ser considerado um polígono-objecto e um polígono-transformado. Por outras palavras, a situação da análise do Tangram é novamente uma situação de comparação estática, em que nenhuma acção é realizada sobre uma dada figura. Porventura, isso explicará a razão pela qual as alunas falam numa relação “em geral”, ou seja, parece haver uma noção de que há alguns casos de polígonos que têm um perímetro ou uma área que é duas vezes o perímetro ou a área de outros.

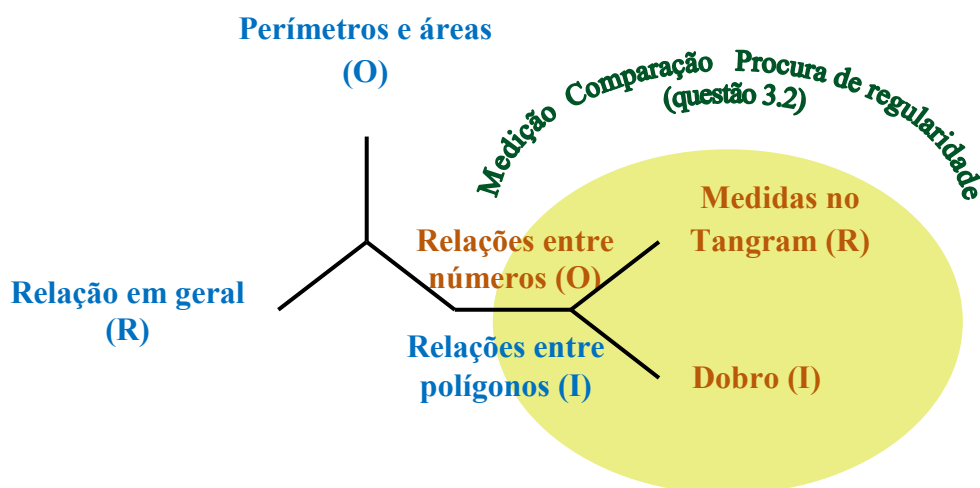


Figura 4.17. Cadeia de significados evidenciados pelo par X.

4.1.3. Tarefa 3 – Relações entre ângulos

Na realização desta tarefa os alunos construíram duas rectas concorrentes, identificando e justificando depois as relações entre os diferentes ângulos encontrados depois de moverem um ou mais pontos da figura.

Ângulos em duas rectas concorrentes

Sem dificuldades, este par de alunas realiza a construção e completa a tabela com os vários ângulos encontrados depois de movimentar um ou mais pontos.

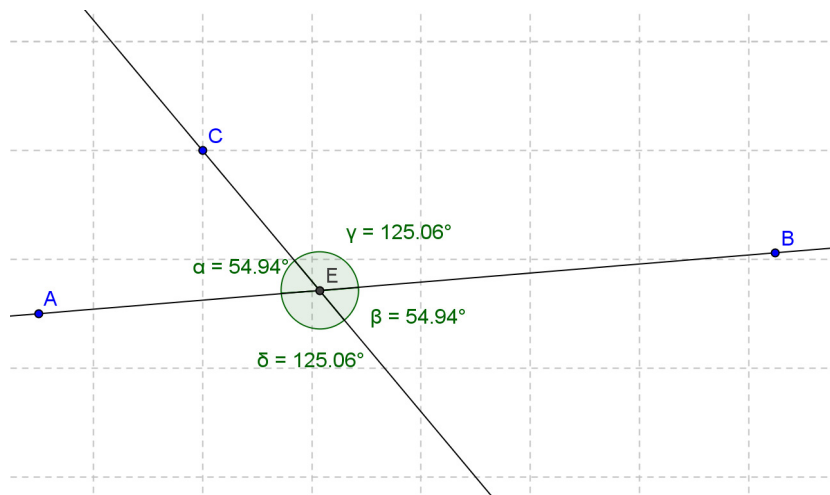


Figura 4.18. Construção das duas rectas concorrentes (questão 1).

Ângulos	Ângulo AEC	Ângulo BEC	Ângulo BED	Ângulo AED
1ª Experiência	50.19°	129.81°	50.19°	129.81°
2ª Experiência	31.36°	148.64°	31.36°	148.64°
3ª Experiência	101.49°	78.53°	101.49°	78.53°
4ª Experiência	19.86°	160.14°	19.86°	160.14°

Figura 4.19 . Tabela com os ângulos encontrados após a manipulação da construção obtida.

- [44] Eu: Portanto... a partir desta tabela, encontra alguma relação entre os ângulos? Qual é?
- [45] X1: Os ângulos opostos são sempre iguais.
- [46] Eu: E vê mais alguma? Pode procurar outra relação, se é que existe.
- [47] Eu: Faça um esboço e escreva a conclusão a que chegou.
- [48] X1: Professora... aqui é mais outras coisas?
- [49] Eu: É para escrever a soma, apenas tem que registar.
- [50] X1: Então é só a soma...

Depois de observarem a tabela, as alunas anotam a relação que encontraram e que já foi referida em [45]:

A relação é que os ângulos do lado oposto são sempre iguais.

Figura 4.20. Resposta à questão 1.2.

Na questão 1.3 da tarefa, é solicitado que elaborem uma representação da figura construída e que ilustrem a relação encontrada anteriormente.

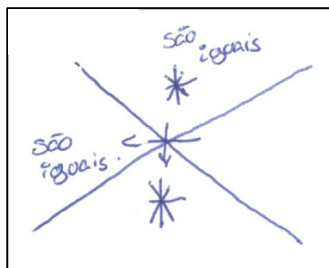


Figura 4.21. Representação obtida para ilustrar ângulos verticalmente opostos (questão 1.3).

As alunas realizam uma representação esquemática muito idêntica à figura que construíram para ilustrar uma situação em que existem ângulos verticalmente opostos e assinalam aqueles que são geometricamente iguais.

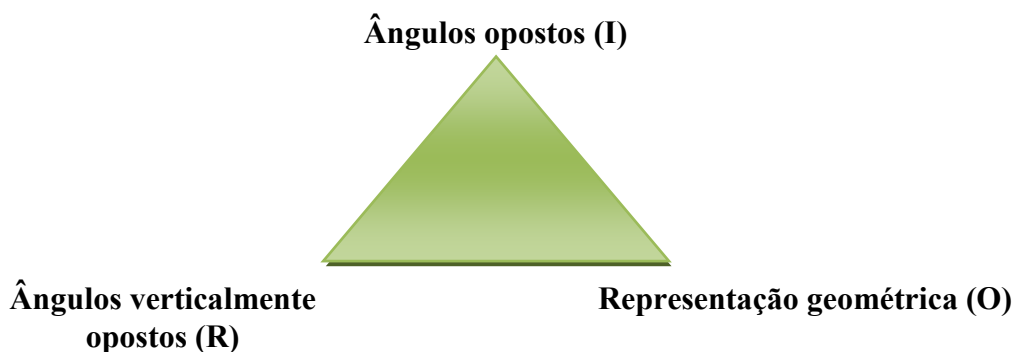


Figura 4.22. Uma concretização da semiose presente no significado de ângulos verticalmente opostos.

Na questão 1.4. sobre ângulos suplementares, este par de alunas apenas completou correctamente a tabela com as somas dos ângulos AEC com BEC e dos

ângulos BED com AED (as somas são sempre iguais a 180°). Não formalizou qualquer conclusão, nem recorreu a uma figura para ilustrar a situação.

Ângulos definidos entre duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas

Quando as alunas solicitaram ajuda, já tinham construído uma figura composta por duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas. Não compreendiam que as relações entre os ângulos identificados na construção poderiam estender-se às três rectas e apenas estavam a considerar um ponto de intersecção de duas rectas.

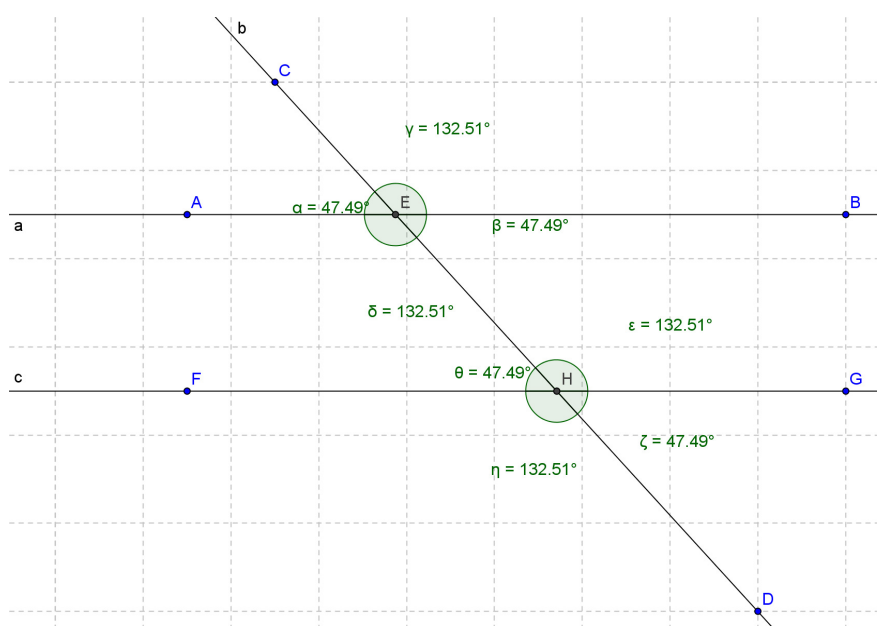


Figura 4.23. Construção de duas rectas paralelas e uma oblíqua a esta (questão 2).

[51] X1: Professora, não percebo a [questão] 2.

[52] Eu: Ok, marcou os quatro ângulos que viu, meça todos os ângulos que ficaram definidos na figura. Que relações encontra entre todos os ângulos que vê?

[53] X1: Ah, é para fazer sobre as duas (rectas).

[54] X1: Professora, já está.

[55] Eu: Deixe ver... vamos então gravar.

[56] Eu: De certeza que não chega a mais conclusões? Veja lá melhor esta figura.

- [57] X1: Professora, as únicas é que este é igual a este e este é igual a este.
[apontando para a figura e concretamente para um par de ângulos verticalmente opostos]
- [58] Eu: E quando soma estes dois quanto dá? [indiquei dois ângulos suplementares]
- [59] X1: Dá sempre 180°.
- [60] Eu: Escrevam todas as conclusões na folha.

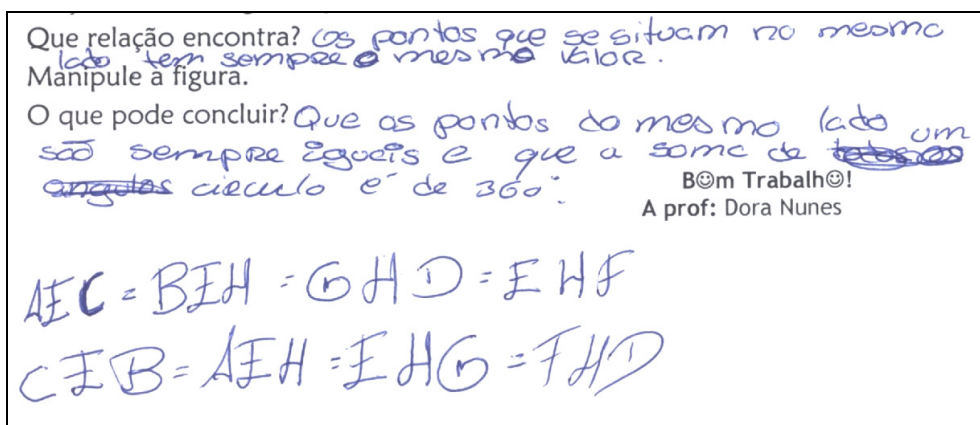
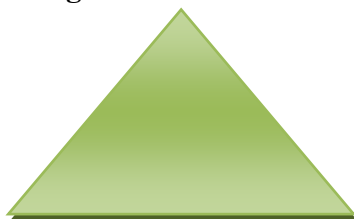


Figura 4.24. Resposta do par X na questão 2.

Quando as alunas se referem aos “pontos que se situam no mesmo lado”, ou quando dizem que “os pontos do mesmo lado são sempre iguais”, julgo que estas estão a falar de ângulos, pois só assim as frases anteriores têm sentido. Assim, o par de alunas concluiu que existem dois conjuntos de quatro ângulos iguais na figura e que soma das amplitudes dos ângulos de cada um dos conjuntos é 360°. A noção de ângulos verticalmente opostos surge novamente e sobressai algo relacionado com ângulos de lados paralelos (“os pontos do mesmo lado são sempre iguais”).

Ângulos do mesmo lado (I)



Pontos do mesmo lado (R)

3 pontos que definem o ângulo no *GeoGebra* (O)

Ângulos de lados paralelos (I)



Do mesmo lado (R)

Dois lados na recta oblíqua (O)

Figura 4.25. Uma concretização da semiose para o significado de ângulos de lados paralelos.

Ainda acerca desta conclusão, realço que estas alunas não se referiram a ângulos suplementares uma vez que nada concluíram sobre este tipo de ângulos na questão 1.4. e portanto ainda não têm presente esta noção.

4.1.4. Tarefa 4 – Ângulos de um triângulo

No dia em que foi realizada esta tarefa, a aluna X2 não esteve presente e aluna X1 teve que sair um pouco mais cedo, não tendo finalizado toda a tarefa. Os diálogos que existiram foram comigo, pois a aluna não tinha par.

A tarefa consistia em construir três rectas de modo a formar um triângulo no meio. Posteriormente, eram solicitadas três conclusões: uma sobre os ângulos internos do triângulo, outra acerca dos quatro ângulos de um vértice do triângulo e outra que relacionasse os ângulos internos com os externos. Depois da minha intervenção, esta aluna não teve dificuldades na construção da figura.

[61] X1: Professora, como é que se faz isto? [a aluna referia-se à construção da figura]

[62] Eu: Precisa de 3 rectas de modo a formar um triângulo com elas.

[63] X1: Três? Ah...

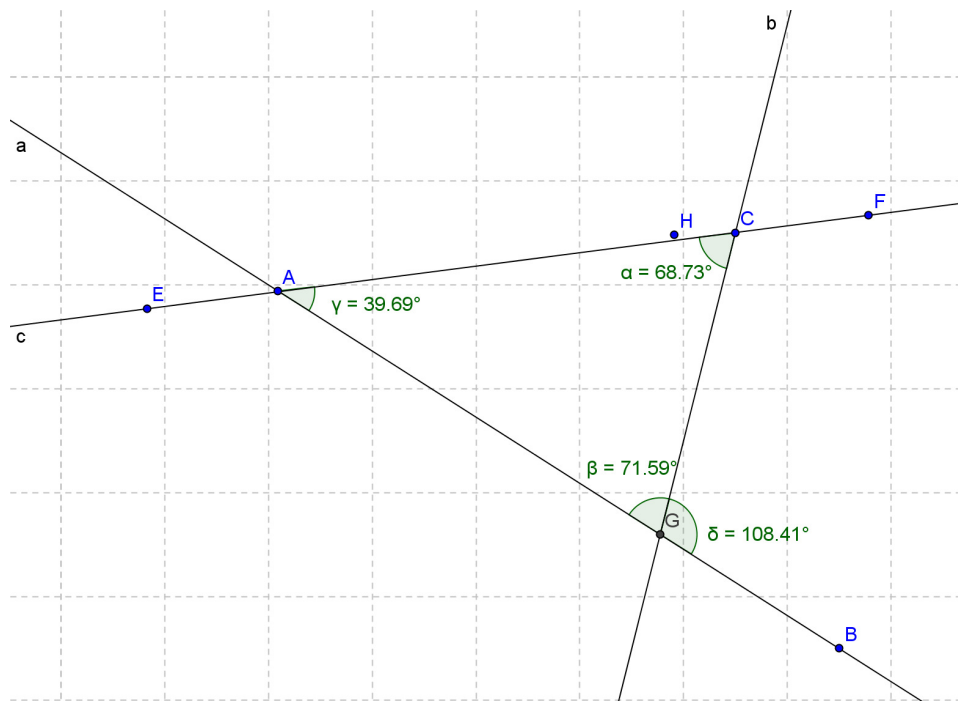


Figura 4.26. Construção da aluna X1.

Ângulos internos de um triângulo

A primeira questão da tarefa estava relacionada com os ângulos internos do triângulo e com a sua soma.

[64] X1: Professora, já está. E agora?

[65] Eu: Marque os ângulos internos. Como se marcam os ângulos? A partir da ferramenta...

[66] X1: O que conclui acerca dos ângulos internos?

[67] Eu: Quando soma os três quanto dá?

[68] X1: 360° ...

[69] Eu: Dá 360° quando soma os três?

[70] X1: Não... dá 180° .

[71] X1: Professora, já está, tenho de sair.

[72] X1: Professora, posso sair, já gravei?

[73] Eu: Pois, terá de ser.

Sem par e com a condicionante de tempo, pois teve que sair mais cedo da aula, esta aluna realizou a tarefa de forma apressada e sem reflectir muito sobre ela. Não terminou as questões da tarefa, realizou apenas a primeira, tendo concluído que “a soma dá 180° ”, como escreveu na folha. Esta conclusão surge mais de uma “intuição” da aluna do que da verificação do valor da soma dos três ângulos. Isto revela que a aluna possui a ideia de que a soma dos três ângulos internos tem um valor “especial” e vai lançando hipóteses de valores que constituem casos especiais para ela (360° e 180°).

4.2. Par Y

4.2.1. Tarefa 1 – Figuras semelhantes

O par Y é formado por alunas muito reservadas e tímidas, mas apesar disso é notório que se encontram satisfeitas por participar neste estudo e por realizar actividades com recurso a um computador. A aluna Y2 é muito insegura (pelo menos no que respeita à disciplina de Matemática) e esse aspecto transparece quando o seu par avança nas ideias que vai tendo e por vezes Y2 ainda necessita de reflectir mais.

Razão de semelhança

Este par de alunas não solicitou ajuda para construir uma figura geometricamente igual à dada (questão 1), mas começou por utilizar vectores entre os pontos em vez de segmentos de recta, o que não foi impeditivo de compreender o que se pretendia na questão 1.

Na questão 2, depois da minha ajuda relativamente à construção de segmentos de recta, o par iniciou a construção de uma figura semelhante sem dificuldade aparente:

[1] Y2: Deixa lá contar as quadrículas...

- [2] Y1: 6 reduz para 3.
 [3] Y2: E agora?
 [4] Y1: Agora é 1,5.
 [5] Y1: Agora é só marcar os pontos!
 [6] Y1: Agora é metade disto.
 [7] Y2: 7 a dividir por 2 dá 3,5.
 [8] Y1: Então 3... calma, não é assim, tem de ser 1,5.

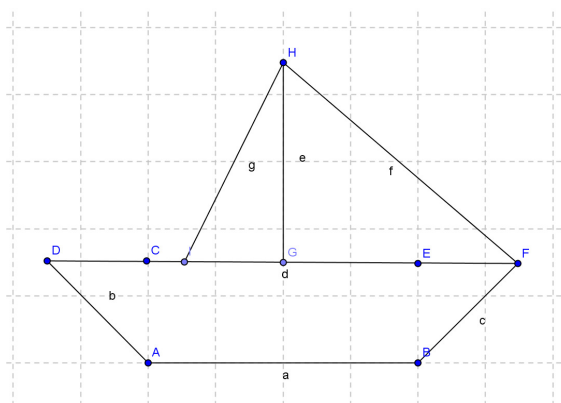


Figura 4.27. Redução realizada pelo par Y

Como este par de alunas refere em [1], o processo de resolução adoptado foi a contagem das quadrículas de cada segmento de recta e posterior divisão destas por 2 [6] e [7]. Construíram depois novos segmentos de recta, tendo estes metade do comprimento. O par Y associa a razão de semelhança à operação divisão, como se verifica em [2], [6], [7] e [8]. No entanto a figura reduzida realizada não se encontra totalmente correcta, existindo segmentos de recta com comprimentos incorrectos. Deste modo, a forma não foi preservada na construção das alunas, embora isso não seja completamente evidente, à primeira vista. De acordo com a marcação dos pontos no *GeoGebra*, houve um engano inicial das alunas na construção do segmento AB (redução do segmento que forma a base do barco). Daí em diante, as alunas vão sempre medindo sucessivos segmentos e dividindo sempre por dois para obter os segmentos reduzidos. Aparentemente nunca se aperceberam de que as novas linhas não estavam paralelas às linhas da figura original. Se não tivesse havido o engano inicial, o segmento g da figura corresponderia à união dos pontos C e H, o que não acontece. Verifica-se que as alunas se fixam nos valores numéricos dos comprimentos e não fazem uma

correspondência entre as posições dos segmentos originais e dos segmentos transformados, obtendo assim uma figura “parecida” com a inicial (ou semelhante na linguagem corrente).

No que respeita à ampliação de razão 2, solicitada na questão 3 desta tarefa, este par de alunas realiza a construção sem dificuldades, salientando-se associação da ampliação à operação de multiplicação como se observa nos diálogos [9], [10] e [23].

[9] Y1: 6 vai dar 12.

[10] Y2: 12 dá 24.

[11] Y1: Temos de dar espaço para as outras coisas...

[12] Y1: Agora tens de contar essas para cima.

[13] Y1: Vá...

[14] Y2: De onde, daqui?

[15] Y1: Não daqui!

[16] Y2: 1,2,3,4,5,6.

[17] Y1: Agora faz no meio dos pontos.

[18] Y1: Tens que contar mais 6 para o lado.

[19] Y1: Não é assim.

[20] Y2: Como é que fazemos? [dificuldade em mover a zona gráfica]

[21] Y1: Agora vai para cima.

[22] Y1: Não é esse, é daqui.

[23] Y1: 6 dá 12.

[24] Y2: Já está!

Na questão 4, este par de alunas apresentou uma alternativa de construções de forma clara e correcta, revelando algum cuidado ao identificar a figura original. No entanto, a razão de semelhança correspondente à redução encontra-se incorrecta. As alunas escreveram $r=2$ nas duas figuras, a ampliada e a reduzida.

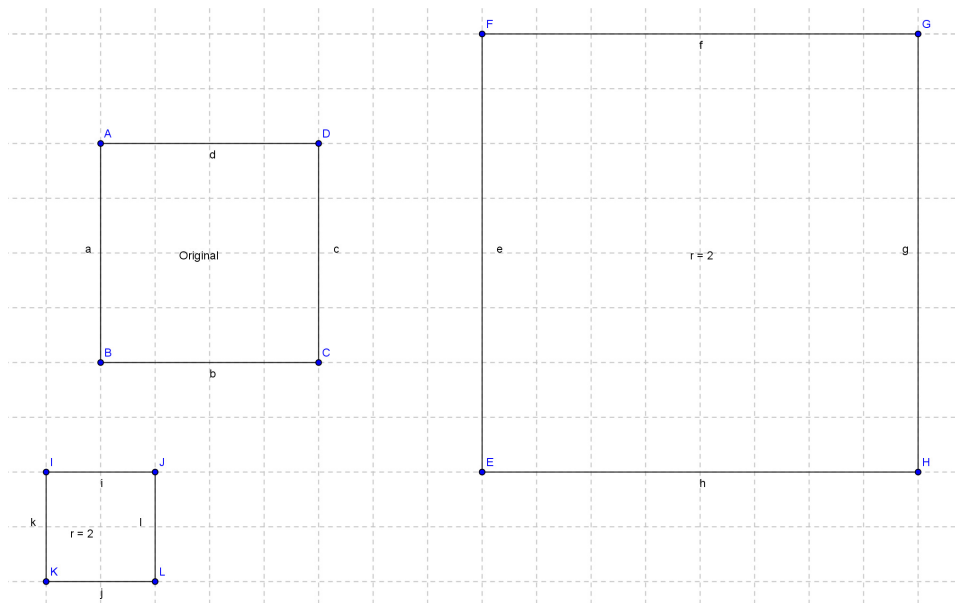


Figura 4.28. Construção de uma figura reduzida e outra ampliada, pelo par Y.

Para este par de alunas, os conceitos de redução e de ampliação aparecem relacionados com as operações de divisão e de multiplicação, respectivamente. No entanto, a preservação da forma não parece estar presente na forma como as alunas executam algumas das construções, facto que foi responsável por alguns dos seus erros.

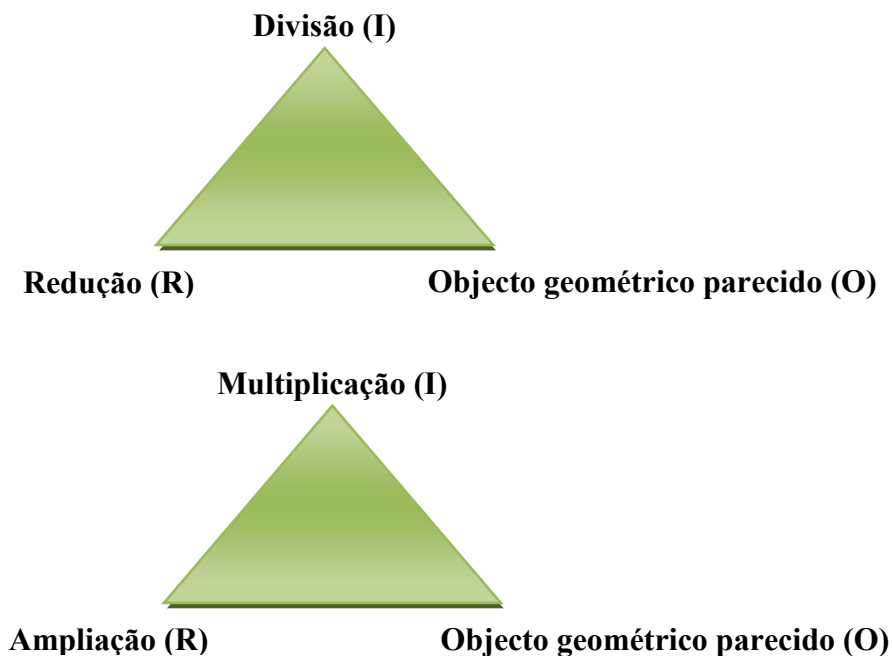


Figura 4.29. Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação.

O par de alunas apresenta uma resposta correcta com respectiva justificação para a questão 5 desta tarefa. Para este par uma razão de semelhança de $\frac{4}{5}$:

Trata-se de uma redução. Porque a razão de semelhança é menor que 1.

Figura 4.30. Resposta dada à questão 5.

Este par não completou correctamente a figura reduzida do exercício 6.1., pois existem segmentos de recta incorrectos.

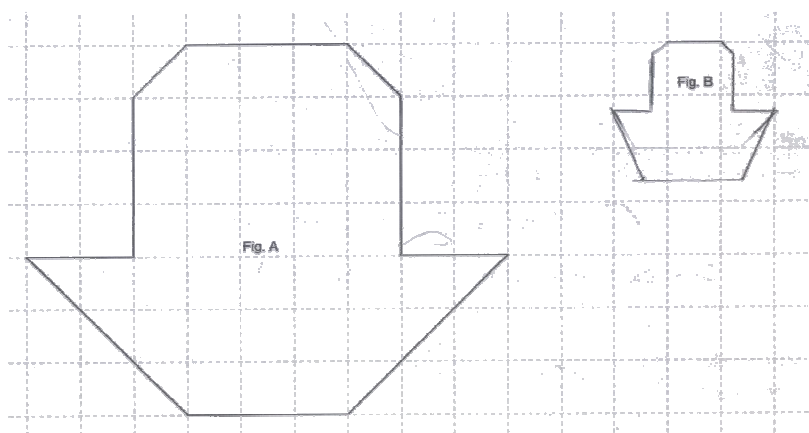


Figura 4.31. Construção da figura B da questão 6.

Através da observação das construções realizadas por este par, evidencia-se alguma dificuldade na construção das reduções, pois as figuras reduzidas das questões 2 e 6.1. não se encontram correctas na totalidade. Na questão 4 e apesar de o par ter realizado a construção correctamente, a razão de semelhança correspondente à redução não está certa. Nos registos áudio deste par de alunas não existem diálogos que possam sustentar esta dificuldade. Contudo, existe uma evidência forte que sobressai da questão 5, quando as alunas afirmam que a razão de semelhança de $\frac{4}{5}$ corresponde a uma redução pois este é um número menor do que 1. Concluo então que além da associação redução-divisão, este par de alunas associa a redução a uma razão menor do que 1.

A comparação de duas razões de semelhança

Estas alunas revelam alguma confusão no valor da razão de A para B e de B para A. Embora trocados, os valores que apresentaram estavam correctos.



Figura 4.32. Resposta do par Y à questão 6.2.

Apesar de terem pensado em valores trocados, este par de alunas apresentou uma relação entre as duas razões, conforme conversa áudio com a professora

[25] Y1: Professora, o que é para fazer na 6.3?

[26] Eu: Comparar as duas razões. Quando comparamos os dois números eles são o quê? $3/1$ e $1/3$ são o quê?

[27] Y1: O inverso? Então é isso que temos de dizer.

Existe em [27] uma comparação de duas razões de semelhança. Este par de alunas associa a razão de semelhança a um número e evidencia saber que uma é o inverso da outra. No entanto, esta comparação apenas surge depois da minha intervenção em [26], o que as ajudou a chegar a esta relação.

Na questão 7, este par de alunas não construiu figuras semelhantes às dadas. Contudo, tentou responder ao que se altera relativamente ao comprimento dos lados e à amplitude dos ângulos:

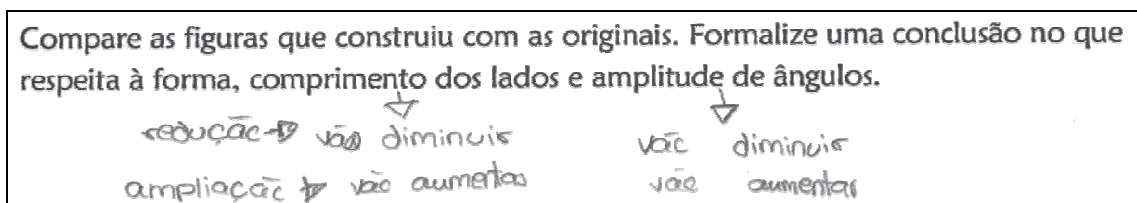


Figura 4.33. Resposta do par Y à questão 7.

A resposta das alunas parece indiciar que o conceito de razão não está completamente claro, pois não se referem à forma da figura e consideram ainda que as

amplitudes dos ângulos de duas figuras semelhantes vão alterar-se consoante o tipo de semelhança em causa. De facto, este par nunca revelou uma clara percepção de que a semelhança preserva a forma da figura, dado que o seu processo de construção geométrica, em particular das figuras reduzidas, não foi eficaz. Isto parece ter acentuado essencialmente a componente numérica envolvida no conceito de figuras semelhantes, ou seja, centrando-se essencialmente no cálculo dos comprimentos dos transformados sem atender à sua posição. Assim, com figuras mais complexas, as alunas chegaram a imagens reduzidas que são “parecidas” com as iniciais. Este facto pode ilustrar a presença forte de interpretantes espontâneos para o signo “semelhante” que tem um significado bem diverso no registo matemático.

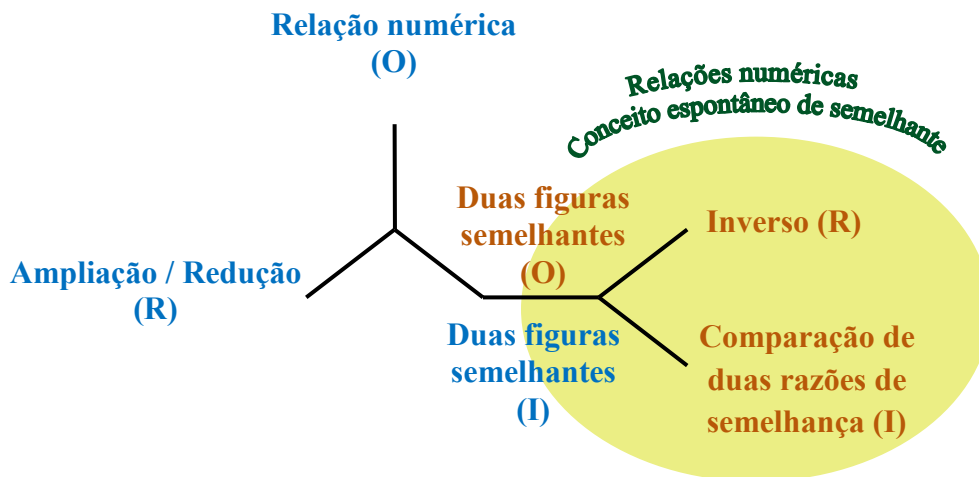


Figura 4.34. Cadeia de significados evidenciados pelo par Y.

Verifico que este par tem uma interpretação muito mais “numérica” do que geométrica da semelhança. Aparentemente, o processo de construção não trouxe significado ao conceito de semelhança do ponto de vista geométrico.

4.2.2. Tarefa 2 - Tangram

Posições relativas de rectas no Tangram

Este par de alunas foi avançando na construção do Tangram e só quando passei por elas, vi que a figura não estava bem construída, pois não tinham marcado bem o ponto médio da diagonal.

[28] Y1: Tem que ser no meio!

[29] Y2: Mas estava no meio!

[30] Eu: Este é o meio? Não quero pela contagem. Vejam o que digo aqui: ponto médio. Se seleccionarem o ponto médio, garantem que aparece o ponto médio deste segmento. [referia-me ao segmento DB]

(passado algum tempo)

[31] Y2: Agora é de onde?

[32] Y1: Daqui a aqui.

[33] Y1: Agora juntas estes três... [para formar um polígono]

[34] Y2: Este?

[35] Y1: Sim.

[31] Y2: Professora, já está. Onde se guarda?

[32] Eu: Já está tudo feito?

[33] Y1: Já.

[34] Eu: Se vocês tiverem bem feito, vão tentar responder a estas questões (questão 2). Deixem-me ver a zona algébrica... Sim. Ah, não têm letras nos pontos que marcaram. Escolhem *exibir rótulo* e fazem isso para todos os pontos.

[35] Eu: Vocês identificaram algumas rectas paralelas? Quais são?

[36] Y1: Esta... [referindo-se a AD].

[37] Eu: E como a identificam? Com as letras.

[38] Y1: Põe AD...

[39] Y2: AD?

[40] Y1: Sim.

[41] Y2: Mas há mais...

- [42] Y1: FH e IJ, JH e FI
- [43] Y2: Perpendiculares.
- [44] Y1: Põe AF e DB.
- [45] Y2: HI
- [46] Y1: HI não...
- [47] Y2: Concorrentes.
- [48] Y1: IA e GI, FI e IK, DG...
- [49] Y1: Professora? [alguns problemas técnicos com o monitor, mas que foram depressa resolvidos].
- [50] Y2: Guardar como...

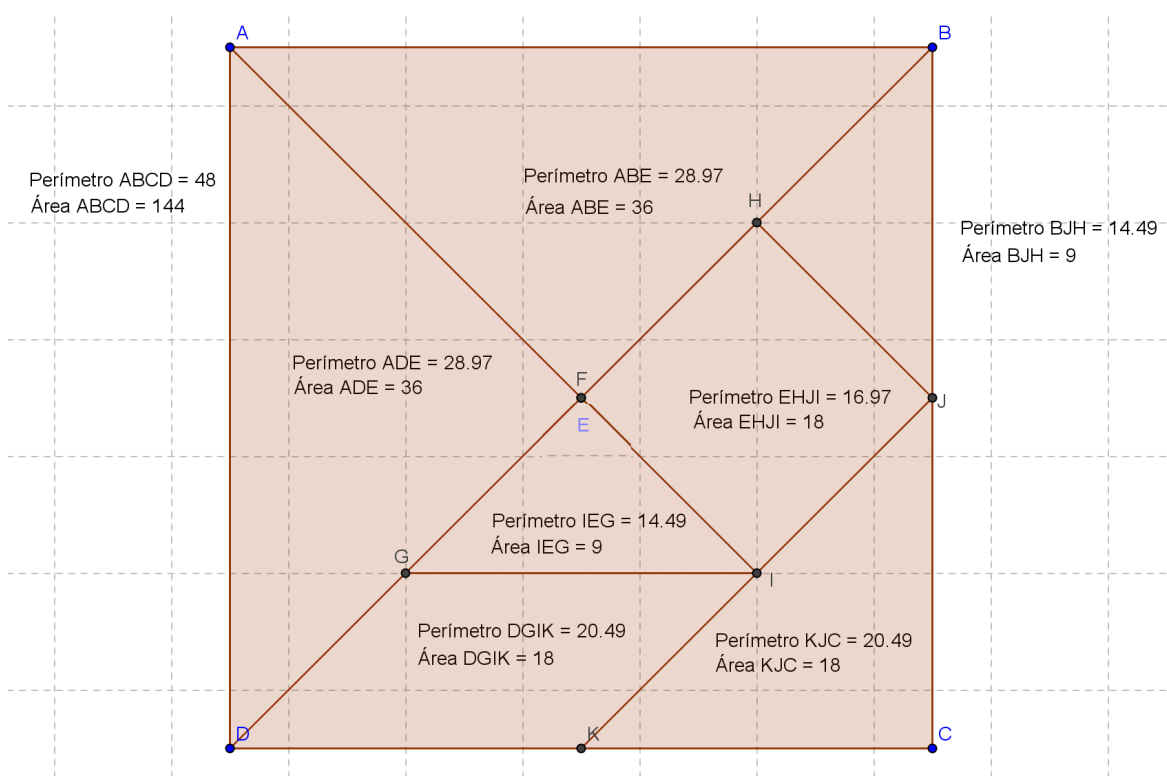
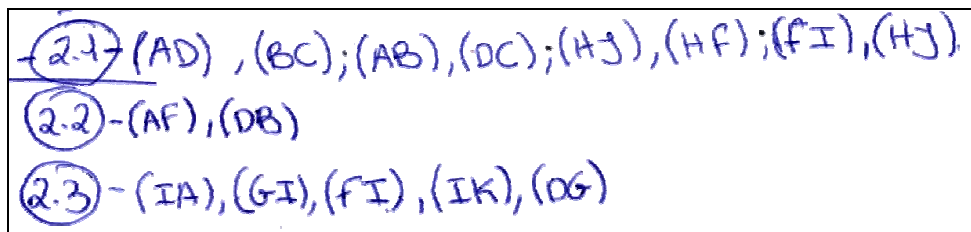


Figura 4.35. Construção do Tangram com as indicações dos perímetros e das áreas das figuras que o compõem.

Dos diálogos anteriores denota-se que a aluna Y1 tem uma participação dominante sobre Y2, cabendo a esta última a tarefa de anotar as respostas que Y1 esteve a enunciar. Sobressaem ainda dúvidas por parte de Y2 em relação ao que Y1 refere em

[39] e a única sugestão que Y2 dá não é aceite pelo seu par (em [45] e [46]), pois não se refere a um segmento de recta do Tangram.



2.1 - (AD), (BC); (AB), (DC); (HJ), (HF); (FI), (HJ)
2.2 - (AF), (DB)
2.3 - (IA), (GI), (FI), (IK), (DG)

Figura 4.36. Respostas da questão 2 do par Y.

No que respeita à identificação de rectas concorrentes, este par de alunas indicou pelo menos duas possibilidades, como se observa na resposta dada (as rectas IA e GI ou as rectas FI e IK). No entanto, surge ainda a indicação de uma recta (a recta DG) não sendo perceptível se esta seria concorrente com FI ou se houve um esquecimento relativamente à indicação de uma segunda recta concorrente com DG. Com efeito, na resposta à questão 2.1 houve o cuidado de separar os vários pares de rectas por um ponto e vírgula, facto que não aconteceu na resposta à questão 2.3.

Componentes do Tangram: lados, perímetros e áreas dos polígonos

Para a realização da questão 3, as alunas abriram o ficheiro em *GeoGebra* com o Tangram construído no dia anterior. Com as ferramentas *perímetro* e *área*, colocaram estas duas medidas dentro de cada figura do Tangram.

[51] Y2: Não estamos a perceber nada...

[52] Eu: Se seleccionarem a opção *Perímetro* e carregarem em cima do polígono vai surgir o perímetro do polígono e o mesmo acontecerá para a área. Se fizerem isso para as sete peças do Tangram vão conseguir encontrar uma relação entre os perímetros e as áreas de cada peça. Vejam lá.

(passado algum tempo, fui ver os progressos deste par de alunas)

[53] Eu: Esta [área] é do grande e esta é do pequeno. Comparem, vejam se existe alguma relação entre os perímetros e as áreas. E agora comparem entre o grande e os mais pequenos, vejam se existe alguma relação. Estudem os números.

- [54] Eu: O perímetro do ABE tem metade do perímetro da área? Vejam lá melhor....
- [55] Eu: Por exemplo aqui. Vamos pensar em perímetros, estes dois perímetros são o quê?
- [56] Y1: Metade.
- [57] Eu: Já perceberam que é metade um do outro. E a área será também metade?
- [58] Y2: Não.
- [59] Eu: Será o quê? Agora, estes dois supostamente são iguais (têm um valor aproximado). Provavelmente este ponto está mal... Agora já estão iguais. Tinham os pontos incorrectos.
- [60] Eu: Vejam se existe alguma relação com estes valores? E para as áreas é o mesmo.
- [61] Y1: É metade!
- [62] Eu: Então anotem todas as relações que encontrarem em relação aos perímetros e às áreas.
- [63] Y1: Perímetros... hum... $ADF=EGI$. Agora, mais perímetros...
- [64] Y1: Professora, pode ser assim?
- [65] Eu: Estão a dizer os que são iguais. Sim.
- [66] Y1: E estes dois são metades...
- [67] Eu: Mas depois especificam melhor, está bem?

③

3.1 - os comprimentos dos lados do quadrado grande são iguais mas os outros não.

3.3 - Perímetros - $\frac{ADF}{ABF}$ metade EGI / $EGI = BJH$ / $ABE = ABF$

Áreas - $\frac{ADF}{ABF}$ metade $GIDK / KJC = HEJI / EGI = BJH$ /

$ABE = ADE / ABCD = ADE$ e ABE .

Figura 4.37. Respostas à questão 3 do par Y.

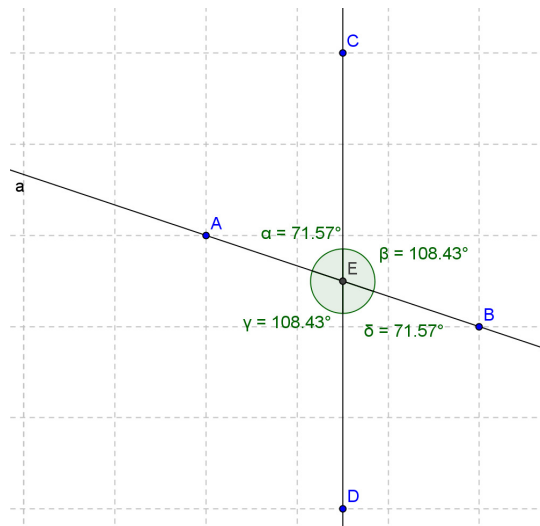


Figura 4.39. Construção realizada pelo par X na questão 1.

De imediato este par de alunas completou a tabela com as diferentes experiências.

Ângulos	Ângulo AEC	Ângulo BEC	Ângulo BED	Ângulo AED
1ª Experiência	90°	90°	90°	90°
2ª Experiência	96,23°	83,77°	96,23°	83,77°
3ª Experiência	77,8°	102,2°	77,8°	102,2°
4ª Experiência	71,57°	108,43°	71,57°	108,43°

Figura 4.40. Tabela da questão 1.1.

Na questão 1.2., este par apresenta uma relação correcta, sem aparente dificuldade:

Os ângulos opostos ~~se~~ tem amplitude iguais.

Figura 4.41. Resposta à questão 1.2.

Relativamente à questão 1.3., apresentam uma conclusão correcta, mas não ilustram a situação:

Porque tem o mesmo vértice entre si e estão opostos

Figura 4.42. Resposta à questão 1.3.

Na questão 1.4., o par usou a calculadora do computador para efectuar os cálculos necessários.

[68] Y1: Tás a ver, também vai dar 180!

[69] Y2: Como é que sabes?!

[70] Y1: É capaz de dar... têm dado.

Ângulos	Ângulo AEC+BEC	Ângulo BED+AED
1ª Experiência	180°	180°
2ª Experiência	180°	180°
3ª Experiência	180°	180°
4ª Experiência	180°	180°

Figura 4.43. Resposta à questão 1.4.

Embora não tivessem formalizado uma conclusão, conseguiram chegar a uma relação, como se observa nos diálogos anteriores (em [68]) e pelo registo escrito. Não ilustraram a situação, nem associaram a soma de 180° a ângulos suplementares.

Ângulos definidos entre duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas

Na questão 2 era solicitado que construíssem duas rectas paralelas e uma oblíqua a estas. Sem pedirem auxílio, aproximei-me do par de alunas e questionei sobre o desenrolar do exercício. A aluna Y1 encontrava-se a realizar a tarefa.

[71] Eu: Terminaram?

[72] Y1: Não...

[73] Y2: Isto aqui são... são coisas paralelos, não é?

[74] Eu: São duas rectas paralelas e uma concorrente, sim. Meçam todos os ângulos que definiram. Marcam o ponto de intersecção primeiro.

[75] Y2: Olha aquele ponto! [diz a aluna Y2 para a aluna Y1]

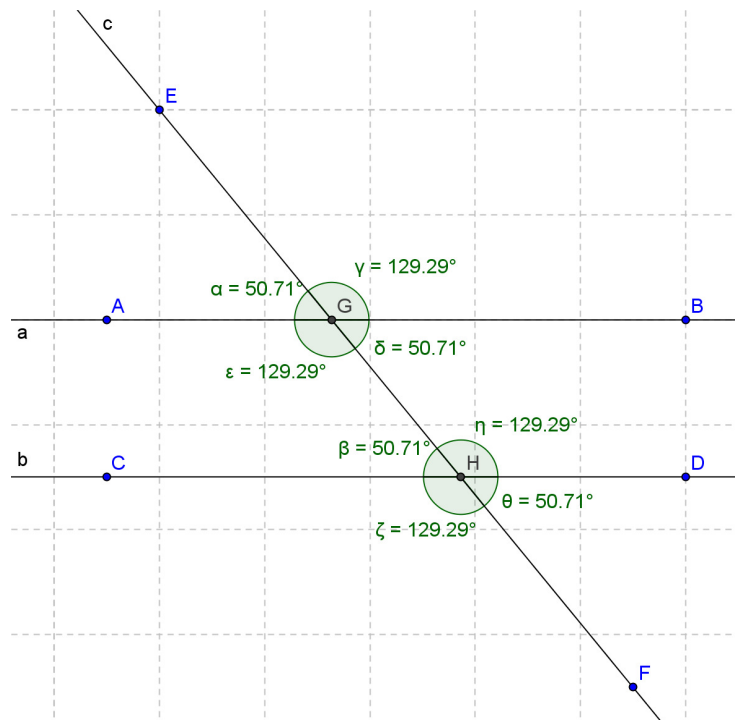


Figura 4.44. Construção da figura da questão 2.

- [76] Eu: E os ângulos aí marcados? Já encontraram relações entre os ângulos? De certeza que já.
- [77] Y2: Estes dois são iguais.
- [78] Eu: Podem usar as letras das figuras.
- [79] Y2: Mas não é preciso pôr os números?
- [80] Eu: Não, basta dizer o nome do ângulo.
- [81] Y1: Não consigo fazer estas letras.
- [82] Eu: Ou se não souberem, dizem que é o ângulo AGE...
- [83] Y2: Professora, AGE é igual a quê?
- [84] Y1: É igual a BGH.
- [85] Y2: Quais são as letras Y1?
- [86] Y1: DHF é igual a CHG. Agora em baixo: EGB é igual a AGH, igual a CHF e igual a DHG.
- [87] Y2: Só?
- [88] Y1: Só.
- [89] Y2: Professora, já fizemos.

Claramente Y2 apenas escreve as ideias de Y1, cabendo a esta última a resolução do exercício.

$$\begin{array}{l} AGE = BGH = DHF = CHG \\ EGB = AGH = CHF = DHG \end{array}$$

Figura 4.45. Conclusão da questão 2 encontrada pelo par Y.

Apesar de terem encontrado dois conjuntos de quatro ângulos iguais, não existem na conclusão apresentada evidências de que estas alunas tenham associado as relações numéricas às noções de ângulos de lados paralelos ou até mesmo de ângulos suplementares. Tal como nas tarefas 1 e 2, verifico que este par faz uma interpretação muito mais “numérica” do que geométrica. As relações encontradas entre os números não têm uma tradução imediata para conclusões geométricas.

Em jeito de balanço desta tarefa, posso dizer que este par de alunas trabalhou bem, sem conflitos, mas também sem partilha de ideias, o que se pode depreender dos registos áudio.

4.2.4. Tarefa 4 – Ângulos de um triângulo

Sem necessitar da minha ajuda, este par de alunas realizou a construção de três rectas de modo a formar um triângulo no meio, mas consideraram que a figura obtida era muito pequena.

[90] Y1: Professora, consegui construir um triângulo... pequenino, é uma coisa muito pequenina.

[91] Eu: Está aí um triângulo.

[92] Eu: Se acham o triângulo pequenino, alteram os pontos para que fique maior.

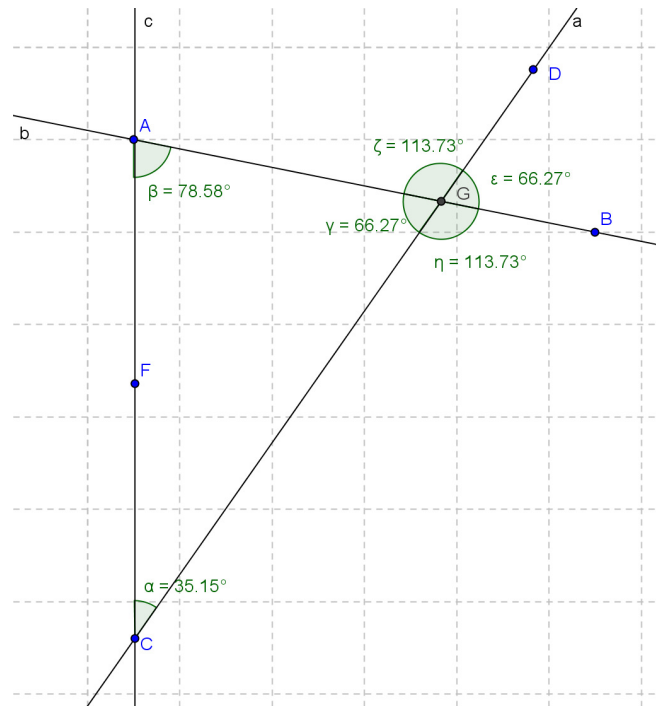


Figura 4.46. Construção do par Y.

Ângulos internos de um triângulo

- [93] Y1: O que é manipule a figura, professora?
- [94] Eu: Mudem de lugar os pontos para poderem encontrar novos ângulos.
- [95] Y1: E depois, o que conclui sobre a sua soma?
- [96] Eu: O que é que dá a soma desses três ângulos?
- [97] Y1: Dá 180°!

A ~~figura~~ soma dos ângulos de figura é 180°

Figura 4.47. Resposta à questão 1.1.

Existem evidências que a aluna Y1 tem a noção clara de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, pois no diálogo anterior (em [96] e [97]), ao ser questionada sobre a soma, a aluna responde de imediato, não sendo possível ter efectuado previamente os cálculos. Esta noção está presente e actua como um conceito científico (usando a terminologia de Vygotsky).

Relações entre os quatro ângulos de um vértice de um triângulo

[98] Y1: Professora, como é que consigo marcar o ângulo do meio?

[99] Y2: E também não dá para mover este.

[100] Eu: É porque ficou mal definido. Vamos ver...

[101] Eu: É melhor definirem outra recta para ficar mais visível.

(depois de algum tempo...)

[102] Eu: Não conseguem arranjar uma relação?

[103] Y1: Não.

[104] Eu: Estes 4 ângulos que se vêem aqui.

[105] Y2: Ah! Vejo dois ângulos geometricamente iguais...

[106] Eu: Sim, porque....

[107] Y1: São verticalmente opostos.

[108] Eu: Então façam uma figura ou escrevam.

Nesta questão este par de alunas concretizou a situação, sem generalizar ou sem recorrer a uma imagem que ajudasse na formalização da conclusão.

A soma de C com A é $110,73^\circ$
e existem 2 ângulos verticalmente
opostos de $66,27^\circ$

Figura 4.48. Resposta à questão 1.2.

As alunas revelam alguma dificuldade em usar uma notação adequada para referir os ângulos presentes na figura e mostram uma tendência para associar cada ângulo ao vértice do mesmo. Por outro lado, verificam relações entre os ângulos marcados na figura mas não as traduzem, nesta fase, em relações acerca dos ângulos externos e internos do triângulo.

Ângulos internos e externos: que relação?

[109] Eu: Como relacionam os internos com os externos do triângulo?

- [110] Y1: Então é a soma.
 [111] Eu: De quais?
 [112] Y1: Destes dois...
 [113] Y2: É a soma dos outros dois internos.
 [114] Y1: É a soma do ângulo C com o ângulo A.

É a soma do ângulo C com o ângulo A

Figura 4.49. Resposta à questão 1.3.

Apesar de ter surgido apenas com a minha intervenção, este par de alunas formaliza uma conclusão que se aproxima muito da noção de ângulo externo de um triângulo. Como as alunas afirmaram em [113], um ângulo externo “é a soma dos outros dois internos”, sendo os “outros dois” clarificados depois com as letras dos respectivos vértices (C e A) [114]. Contudo, na formalização da conclusão acabaram por concretizar com a figura que construíram, não generalizaram para qualquer figura, não ilustraram com um exemplo, nem utilizaram a noção de ângulos adjacentes, o que facilitaria.

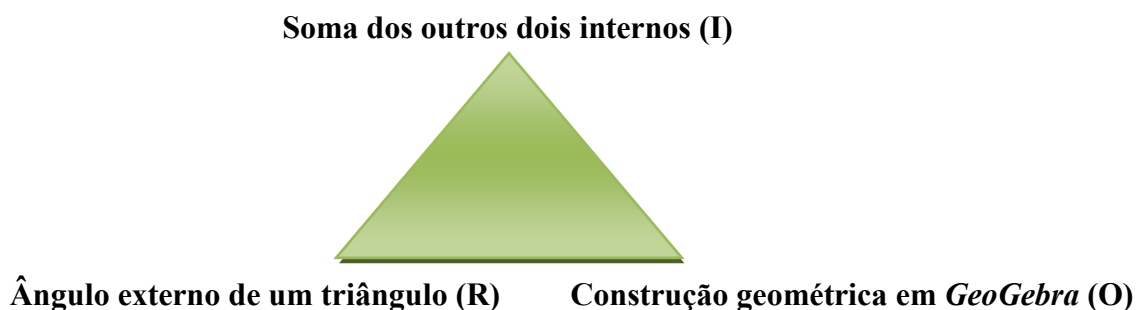


Figura 4.50. Uma concretização da semiose presente no significado de ângulo externo de um triângulo.

4.3. Par Z

4.3.1. Tarefa 1 – Figuras semelhantes

Este par de alunos é formado por dois rapazes e abraçaram esta primeira tarefa de forma curiosa. Por um lado, estavam com muito entusiasmo para a terminar e por outro lado, estavam com uma postura muito descontraída, parecendo estar muito à vontade, apesar de esta ter sido a primeira vez que trabalharam em Matemática na sala de informática e com o programa *GeoGebra*.

Razão de semelhança

O par começou a sua tarefa pela questão 2. Não solicitou ajuda para construir a redução, apenas para lhes dar feedback no final. Oportunamente trocaram ideias sobre o cálculos dos segmentos de recta a definir:

- [1] Z1: Põe 2 barra 1, não..., 1 barra 2.
- [2] Z2: 2 barra 1 ou 1 barra 2?
- [3] Z1: 1 barra 2.
- [4] Z1: Daqui aqui vai 1,5 [referindo-se ao segmento ED].
- [5] Z2: Não... 1,5?
- [6] Z2: Os 3 fica 1,5.
- [7] Z2: 6... e agora vai ficar 3.
- [8] Z1: E ali vai ficar quanto? 1, 2, 3,....., 8.
- [9] Z2: Fica 4.
(passado algum tempo)
- [10] Z2: Professora, veja lá se está bem.

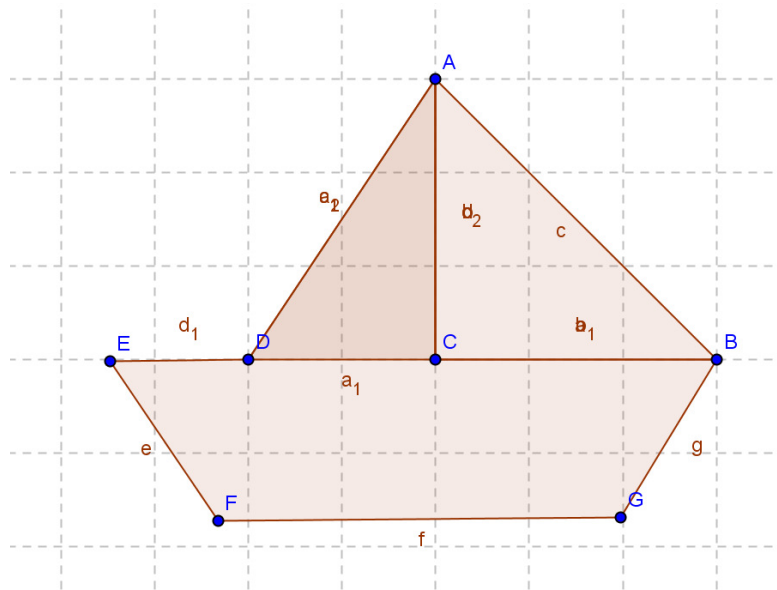


Figura 4.51. Construção da figura reduzida da questão 2.

Este par de alunos começou por realizar divisões, já que em [1], [2] e [3] surge no diálogo a ideia de Z1 acerca da expressão “1 barra 2”. Aparentemente o que Z1 quer dizer com a expressão “barra” é o símbolo de divisão, pois esta expressão não surge escrita nos registos, e este par poderá ter realizado a divisão com o auxílio da calculadora. Esta está associada à divisão dos comprimentos dos segmentos de recta que constituem a figura dada, como também se verifica em [6], [7], [8] e [9]. Foi este o método utilizado para a construção da figura reduzida. Contudo, verifica-se que a redução da figura não está totalmente correcta. Tal como sucedeu com o par Y, há uma atenção focada nos valores dos comprimentos que não atende à posição relativa dos segmentos da figura transformada. Assim, depreende-se que os alunos fazem a associação redução-divisão.

Na realização da questão 3, este par de alunos mais uma vez partilhou algumas ideias.

[11] Z2: Razão igual a 2, temos que fazer o dobro não é?

[12] Z1: Sim.

(passado algum tempo)

[13] Z1: Esta aqui é mesmo fácil! [referindo-se à questão 3]

Relativamente à questão 4, as dúvidas que surgiram prenderam-se com o saber como mover a folha de desenho para puderem completar a figura ampliada e como inserir um texto.

[14] Z2: Professora, isto vai dar para fazer o dobro?

[15] Z1: Vai!

[16] Z2: Professora, agora como é que eu escrevo?

[17] Eu: Aqui, inserir texto.

O ficheiro com a construção das questões 3 e 4 não se encontrava no computador onde este par Y trabalhou. Provavelmente os alunos realizaram as construções, pois existem diálogos acerca delas, mas não as gravaram correctamente.

O aluno Z1 revela-se muito curioso em ver o que há mais para resolver. Apressa-se em responder apenas “redução” na questão 5, e não apresentou qualquer justificação para esta resposta, mantendo-se sempre a cantarolar.

Na questão 6.1., o par completa a figura, mas de forma incorrecta (e muito apressada):

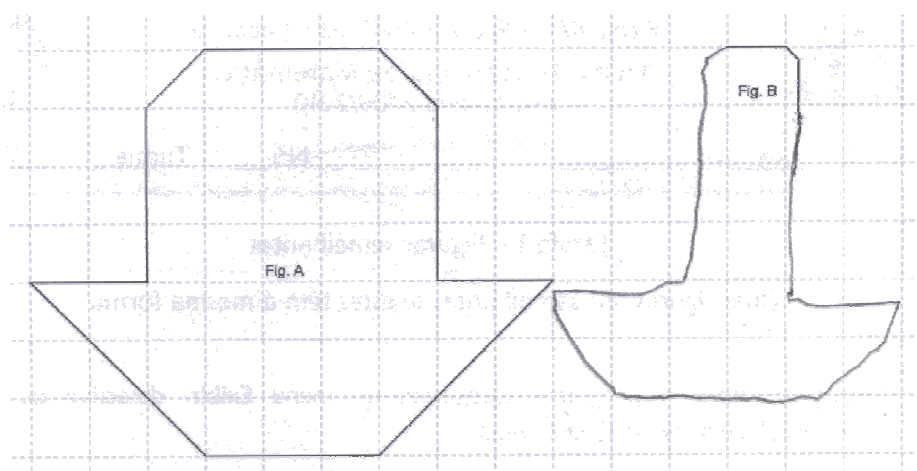


Figura 4.52. Construção da figura B do par Z.

É notório que o aluno Z1 queria avançar na realização das questões da tarefa, pois enquanto o seu colega Z2 acabava a construção da figura da questão 4 (que não se encontra gravada), ele apressa-se em responder às próximas questões que não necessitavam do recurso ao *GeoGebra*.

A comparação de duas razões de semelhança

Na questão 6.2., este par de alunos apresenta a razão de A para B correctamente. Não indica a razão de B para A e, a única comparação que estabelece é relativa às figuras e não aos valores das razões, dado que a resposta foi “uma mais grande e outra menos”.

[18] Z1: A razão de semelhança de A para B... 3... $1/3$.

(Para realizar a questão 7, este par de alunos decidiu ficar no intervalo da aula).

[19] Z1: Professora, a gente pode não sair?

[20] Z1: Professora, podemos ficar aqui?

[21] Eu: E o que querem ficar a fazer aqui? O trabalho?

[22] Z1: Não temos nada para fazer lá fora. Ficamos aqui.

[23] Z1: Professora, como é que eu faço um pneu? [refere-se à primeira figura da questão 7]

[24] Eu: O centro do seu círculo não está bem! Está a ver?

[25] Z1: Já está!

Mais uma vez este par de alunos não gravou o seu ficheiro respeitante a este diálogo e portanto, não me é possível analisar a figura construída.

O aluno Z1 em particular, revela-se muito entusiasmado com a tarefa, mas apresenta também pouca persistência para elaborar tudo o que lhe é solicitado. A partir do momento em que entende o que se pergunta prepara-se para outro desafio, não anotando quaisquer ideias que lhe surjam.

[26] Z1: Ainda falta a casinha... com o triplo do tamanho! 3 vezes o tamanho.

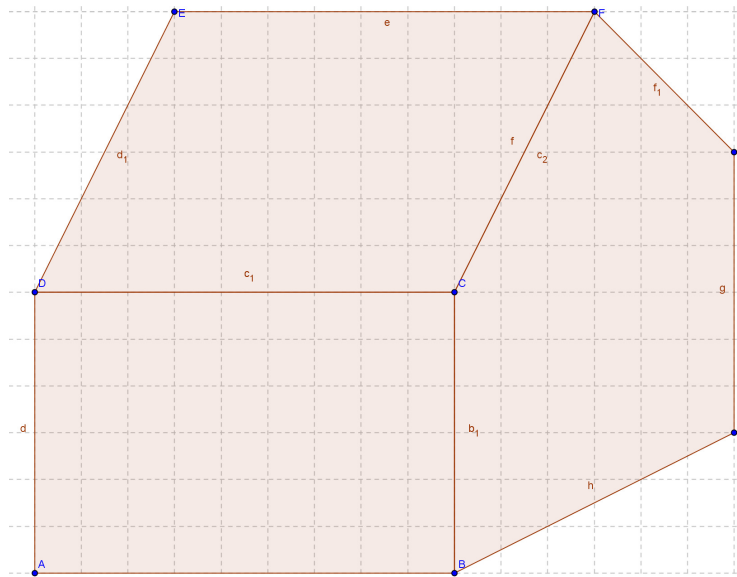


Figura 4.53. Construção da ampliação da questão 7 do grupo Z.

Mesmo sem formalizar uma conclusão no que respeita à forma das figuras semelhantes, este par fez referência ao tamanho da figura e ao facto de os ângulos permanecerem iguais:

as figuras diminuem ou aumentam e os ângulos ficam iguais!!!

Figura 4.54. Resposta à questão 7 do par Z.

Tal como para os outros dois pares em estudo, para este par de alunos o conceito de redução aparece relacionado com a operação de divisão, mas o conceito de ampliação surge associado ao dobro ou triplo de um número.

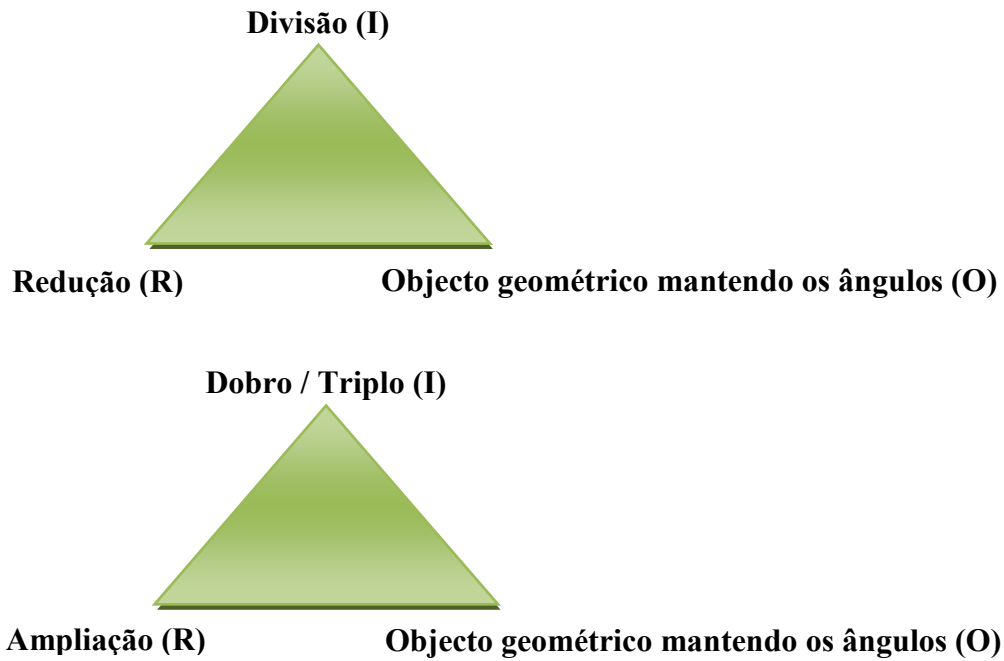


Figura 4.55. Uma concretização da semiose presente no significado de redução e ampliação.

Este par de alunos revelou nesta tarefa vontade de realizar as questões, mas muito apressadamente, sem a preocupação de registar cuidadosamente as respostas e formalizar conclusões, como era pretendido. Talvez mesmo esta pressa tenha originado os lapsos nas gravações dos dois ficheiros de *GeoGebra* que não foram encontrados.

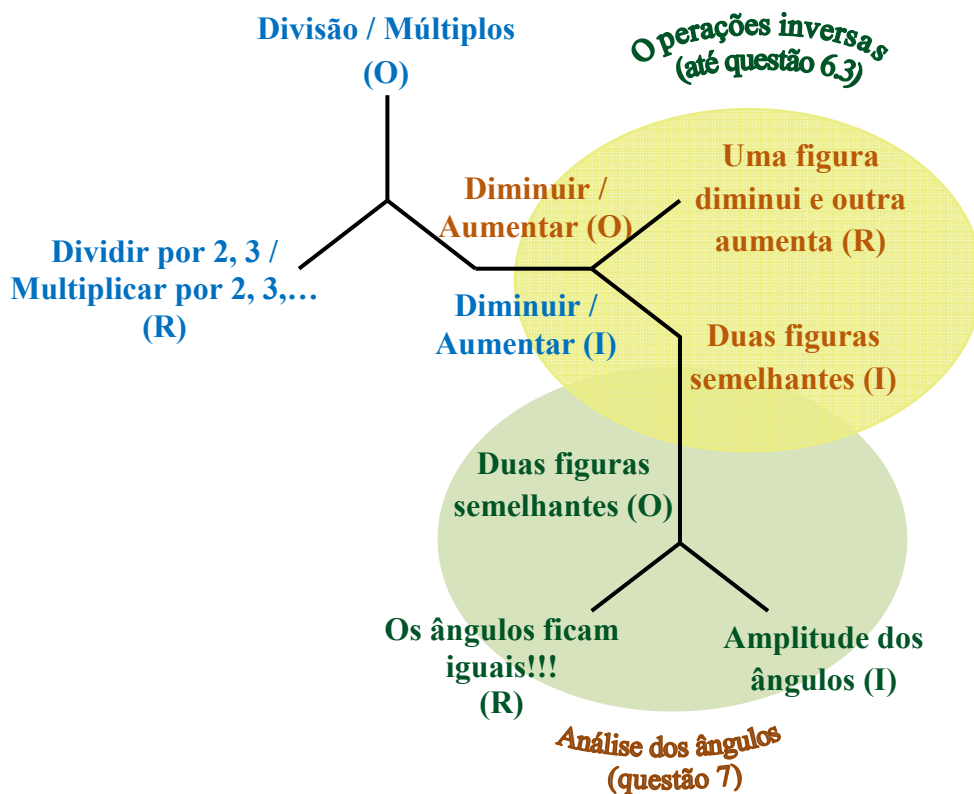


Figura 4.56. Cadeia de significados e respectivo prolongamento evidenciados pelo par Z.

4.3.2. Tarefa 2 - Tangram

Posições relativas de rectas no Tangram

[27] Eu: Construíram a diagonal, agora através das ferramentas *Ponto médio* e *Segmento de recta* vão construir estes segmentos necessários para a construção do Tangram. Ou seja, seleccionam o segmento de recta e com o ponto médio, marcam e seleccionam... aparece logo o ponto médio. A partir daqui um novo segmento e assim sucessivamente.

[28] Z1 e Z2: Ahhh!

(passado algum tempo)

[29] Z2: Professora, não conseguimos fazer isto...

(não conseguiram definir os pontos médios de metade de uma diagonal, porque não tinham a diagonal dividida em 2 segmentos de recta)

[30] Eu: Vamos ver... o que precisamos agora? O ponto médio? Vamos definir novos segmentos para encontrar os novos pontos médios.

[31] Z2: Percebi professora!

(depois de construída a figura, gravaram o ficheiro em *GeoGebra*)

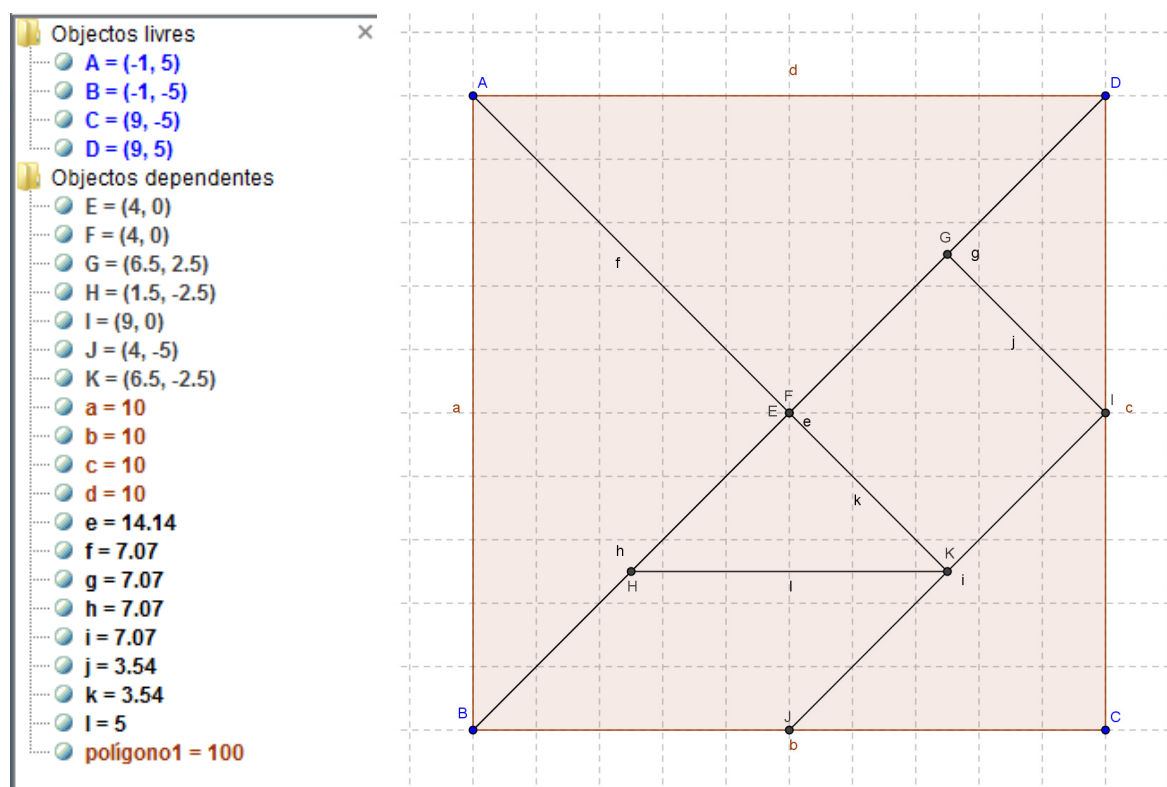


Figura 4.57. Tangram e respectiva zona algébrica construído pelo par Z.

[32] Z1: Tens que fazer ainda as paralelas, perpendiculares e concorrentes... [referindo-se à questão 2].

[33] Z2: Sim.

[34] Eu: Fizeram com os pontos médios?

[35] Z1: Sim.

[36] Eu: Muito bem! Identifiquem, com as letras dos vértices, rectas paralelas, perpendiculares e concorrentes.

Durante a realização da questão 2, este par de alunos não troca ideias, Z1 limita-se a escrever as respostas.

Questão 2.1. : AB e CD

Questão 2.2. : AF e BD

Questão 2.3. : KA e HG

No que respeita à identificação de rectas quer paralelas, quer perpendiculares, este par não aparenta ter dificuldades, respondendo correctamente.

Componentes do Tangram: lados, perímetros e áreas dos polígonos

Para a realização da questão 3, este par de alunos avança directamente para a relação entre as áreas das figuras que compõem o Tangram e curiosamente é o único par que relaciona todas as outras áreas com a área do quadrado maior. A construção do Tangram deste par de alunos facilita as relações que eles foram encontrando, pois o quadrado inicial tem lado 10.

[37] Z1: A área ABCD é igual a 100 cm^2 . Acabámos!

[38] Eu: Eu queria que relacionassem o comprimento dos segmentos de recta.

[39] Z1: Já fizemos isso!

[40] Eu: Vejam lá se existe uma relação.

[41] Z1: Mas estes dois juntos dão este. [Z1 refere-se ao facto da soma de dois lados dos triângulos pequenos ser igual a um grande].

[42] Eu: Pronto... Agora os perímetros e as áreas.

[43] Z1: É sempre 40.

[44] Eu: Mas vão fazer para todos os polígonos que constituem o Tangram. Vão fazer também a área dos polígonos para a questão seguinte.

[45] Z1: Depois acabou?

[46] Eu: Sim.

3.1 3.2 3.3
~~existe muitas~~ IJC = $\frac{1}{8}(ABCD)hB)k = \frac{1}{8}(ABCD)$
 ADF = $\frac{1}{4}(ABCD)$ ABF = $\frac{1}{4}(ABCD)$ GDI = $\frac{1}{16}(ABCD)$ Fhk = $\frac{1}{16}(ABCD)$
 GFKI = $\frac{1}{8}(ABCD)$

IJC = 1/8 ABCD

HBJK = 1/8 ABCD

ADF = 1/4 ABCD

ABF = 1/4 ABCD

GDI = 1/16 ABCD

FHK = 1/16 ABCD

GFKI = 1/8 ABCD

Figura 4.58. Resposta à questão 3 do par Z.

Este par de alunos não fez distinção entre as questões 3.1., 3.2. e 3.3., apresentando uma resposta única, mas que apenas relaciona as áreas dos polígonos do Tangram com a área do quadrado inicial.

Tudo indica que os alunos não fizeram a medição das áreas dos polígonos que referem na sua resposta. Estes valores não aparecem na zona gráfica nem na algébrica e também não surgem em diálogos do par. Isto leva-me a afirmar que os alunos se concentraram na construção do Tangram para encontrar relações entre as áreas. Possivelmente, usaram a decomposição da figura para concluir acerca do número de polígonos de determinada forma que cabem no quadrado inicial. Ao contrário do que se passou com os pares X e Y, este par usou a construção como um verdadeiro objecto capaz de produzir interpretantes geométricos para as relações entre as áreas das figuras que compõem o Tangram.

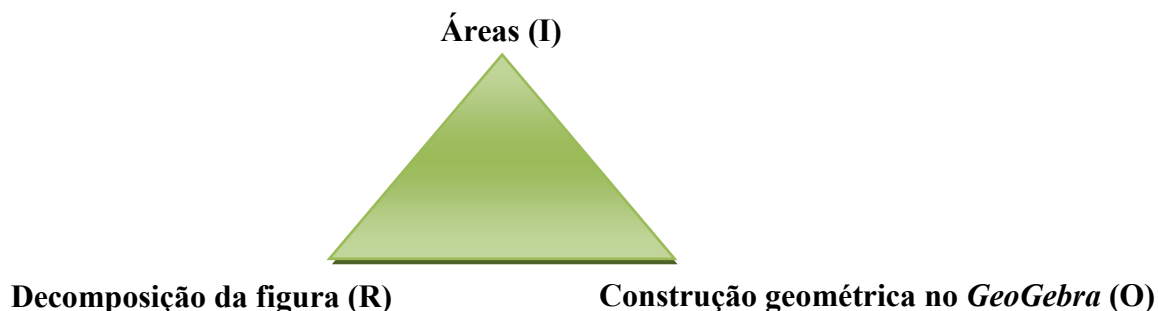


Figura 4.59. Uma concretização da semiose presente nas relações entre as áreas das figuras que compõem o Tangram.

De referir ainda que este par terminou a tarefa mais cedo que os restantes pares (cerca de 15 minutos), pois a sua estratégia foi utilizar o ditado, sendo também visível nos diálogos que o aluno Z1 (quem ditou) intervém mais, não deixando muitas oportunidades para que Z2 (quem escreveu) participe.

4.3.3. Tarefa 3 – Relações entre ângulos

Na realização desta tarefa os alunos construíram duas rectas concorrentes, identificando e justificando depois relações entre os diferentes ângulos encontrados depois de mover um ou mais pontos da figura.

Ângulos em duas rectas concorrentes

Este par de alunos não encontrou dificuldades em realizar a construção solicitada na questão 1.

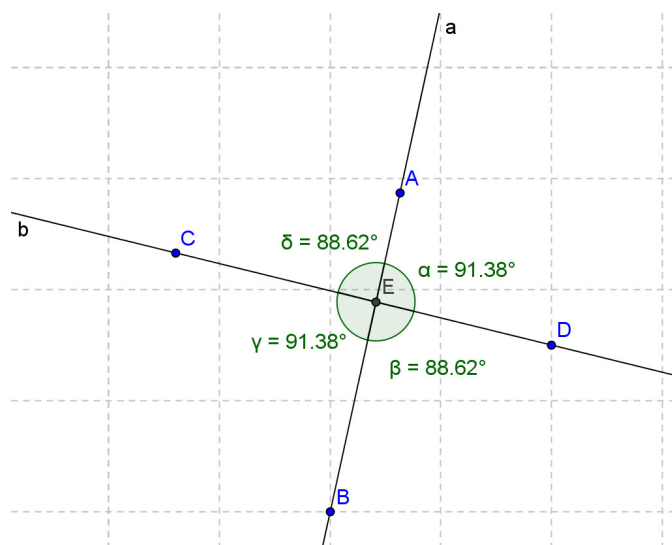


Figura 4.60. Construção da questão 1.

Para completar a tabela os alunos manipularam a figura e registaram os ângulos obtidos:

Ângulos	Ângulo AEC	Ângulo BEC	Ângulo BED	Ângulo AED
1ª Experiência	90°	90°	90°	90°
2ª Experiência	88,62	91,38	88,62	91,38
3ª Experiência	129,67	50,33	129,67	50,33
4ª Experiência	112,74	67,26	112,74	67,26

Figura 4.61. Resposta à questão 1.1.

Na questão 1.2., o par de alunos apresenta uma relação entre os diferentes ângulos:

ângulos. Na primeira experiência os ângulos são todos iguais na 2ª o ângulo AEC e o BED são iguais e o ângulo AEC e o AED na terceira os ângulos AEC e BED são iguais e AED e BEC são iguais na 4ª o AEC e BED são iguais e BEC e AED também são iguais.

Figura 4.62. Resposta à questão 1.2.

Apesar de terem apresentado uma resposta confusa e repetitiva, o par concluiu que existem dois pares de ângulos iguais entre si (ângulos AEC e BED; ângulos BEC e AED). Na realização da questão 1.3., este par de alunos revelou dificuldades e pediu o meu auxílio.

- [47] Z2: Professora, não percebo a 1.3....
 [48] Eu: Sim?
 [49] Z2: Os ângulos AEC e BED são iguais porque são opostos.

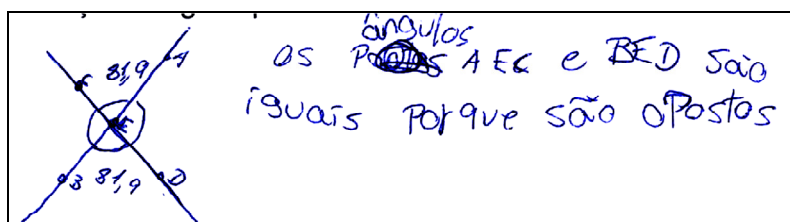


Figura 4.63. Representação geométrica e conclusão da questão 1.3.

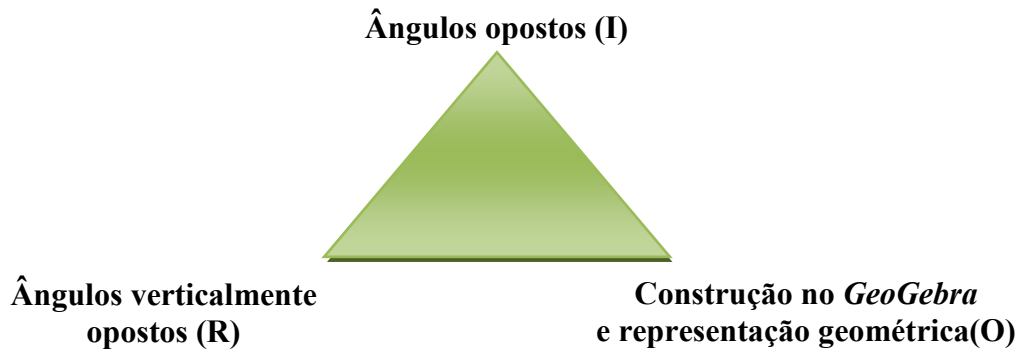


Figura 4.64. Uma concretização da semiose presente no significado de ângulos verticalmente opostos.

Na questão 1.4, o par completou a tabela realizando as somas com o auxílio da calculadora.

[50] Z1: Somar os ângulos?

a soma de dois ângulos são ângulos suplementares porque é sempre 180

Figura 4.65. Resposta à questão 1.4. do par Z.

O par verificou que a soma das amplitudes dos ângulos indicados na tabela se mantém sempre igual a 180° e portanto é esta relação que lhes permite concluir que dois ângulos suplementares somam 180° .

Ângulos definidos entre duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas

Este par não apresentou a construção de duas rectas paralelas e uma oblíqua a estas e não formalizou uma conclusão, tendo ilustrado a situação apenas com um exemplo.

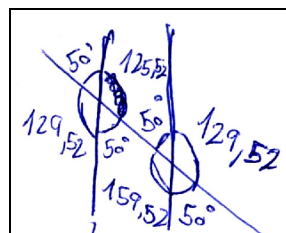


Figura 4.66. Exemplo de duas rectas paralelas e uma oblíqua a estas.

Tendo em conta as amplitudes dos ângulos constantes na figura anterior, é obvio que o par de alunos realizou a construção geométrica em causa. Dado que em questões anteriores mostraram entender o que são ângulos verticalmente opostos (questão 1.3.) e ângulos suplementares (questão 1.4.), também aqui poderiam ter aprofundado a conclusão com essas informações. Julgo que mais uma vez resolveram apressadamente a tarefa, desejando ser os primeiros a terminar.

4.3.4. Tarefa 4 – Ângulos de um triângulo

Sem a minha ajuda, este par de alunos construiu a figura pedida, tendo Z1 entendido logo o que se pretendia, apesar de alguma resistência por parte de Z2.

[51] Z1: Marcamos duas em cima e colocamos uma aqui no meio.

[52] Z2: Não percebi...

[53] Z1: Marca lá, aqui, aqui...

[54] Z1: Pronto agora falta-te uma.

[55] Z1: Queres saber onde está o triângulo?

[56] Z1: Queres mesmo ver? Está aqui...

[57] Z2: Professora, venha lá aqui!

[58] Eu: O que se passa aí?

[59] Z2: Temos vários triângulos...

[60] Eu: Só vejo um... está ótimo.

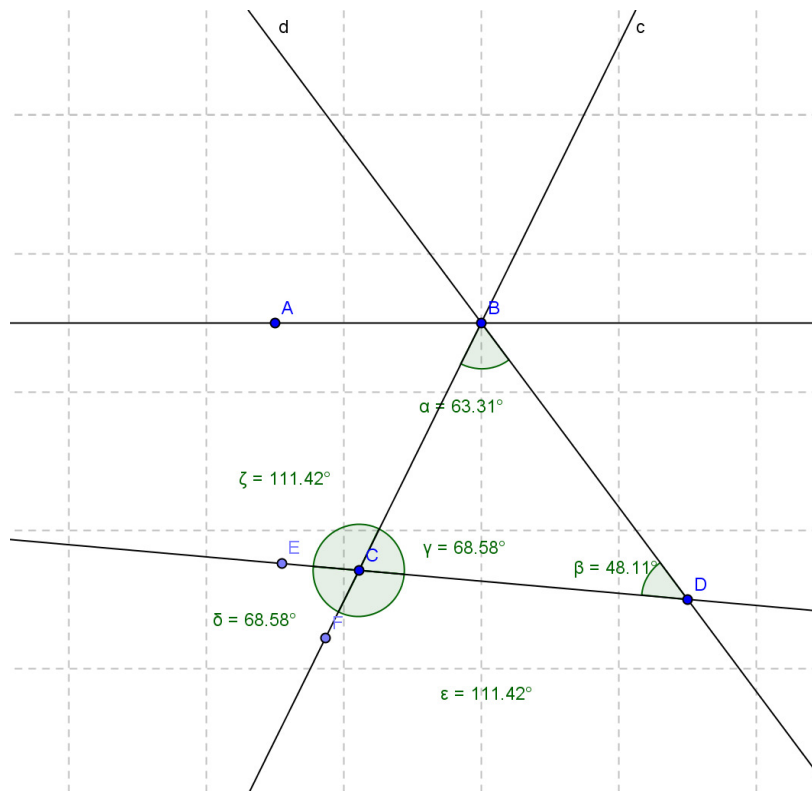


Figura 4.67. Construção do par Z.

Ângulos internos de um triângulo

[61] Eu: Agora têm que marcar os três ângulos internos e vão concluir acerca da soma.

[62] Z1: Dá 180°!

[63] Z2: Como é que sabes?

[64] Z1: Queres uma aposta?

(Depois de verificarem...)

[65] Z1: Eu disse que era 180!”

[66] Z2: Já está!

[67] Z1: Professora, venha aqui.

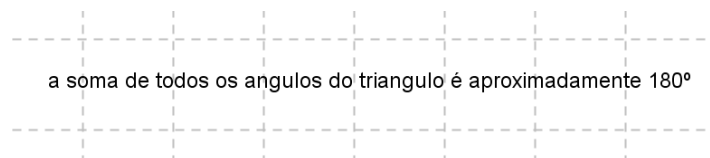


Figura 4.68. Resposta à questão 1.1. do par Z.

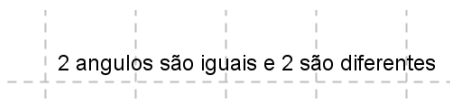
Para a resolução das questões 1.2. e 1.3. este par de alunos não partilhou quaisquer ideias. Z1 apenas escreve as respostas falando alto. Z1 tem a clara noção de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , como se depreende do diálogo anterior, concretamente em [62], [63], [64] e [65].

Este par revela uma noção idêntica à que surgiu no par X de que a soma dos três ângulos internos do triângulo é um valor especial. E neste caso, não mostram ter dúvidas sobre qual é esse valor.

Relações entre os quatro ângulos de um vértice de um triângulo

Este par de alunos não partilhou quaisquer ideias acerca das duas últimas questões da tarefa (1.2 e 1.3), falando apenas dos seus assuntos não estando estes relacionados com a aula. Acabaram por responder a ambas as questões no ficheiro em *GeoGebra* e não ilustraram nenhuma das situações.

Da resposta à questão 1.2, saliento que este par não teve a preocupação em relacionar os quatro ângulos, mais uma vez devido à rápida e irreflectida resposta dada. Se se tivessem debruçado um pouco mais sobre esta questão, a conclusão poderia ser muito mais rica e completa.

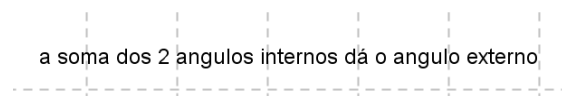


2 angulos são iguais e 2 são diferentes

Figura 4.69. Resposta à questão 1.2. do par Z.

Ângulos internos e externos: que relação?

Como foi referido anteriormente, este par limitou-se a escrever a conclusão acerca da relação dos ângulos internos com os externos.



a soma dos 2 angulos internos dá o angulo externo

Figura 4.70. Resposta à questão 1.3. do par Z.

Relativamente a esta questão, não existem dados suficientes que possam certificar que este par tivesse a noção clara de ângulo externo. De facto, quando se referem à “soma dos dois ângulos internos”, julgo que não associam a que estes “dois” sejam específicos, podendo até ser quaisquer dois ângulos internos. Acabam por compreender que o ângulo externo se relaciona com a soma de dois internos, mas penso que não é uma noção muito sólida e presente.

Na folha do par Z foi apontada a seguinte afirmação: “a soma dos 2 correspondentes do ângulo externo dá o ângulo externo”. Esta anotação é reveladora de uma certa noção de que há dois ângulos internos que se relacionam com um ângulo externo mas os alunos ainda não se apropriaram da linguagem específica deste domínio da geometria para se conseguirem exprimir de forma clara e inequívoca dentro de um certo registo matemático. Aparentemente ainda se nota a falta dos signos simbólicos que traduzam eficazmente os objectos a que os alunos se querem referir.

Capítulo V

Conclusões

Neste capítulo apresento uma síntese dos resultados do estudo, tendo por base a análise de dados dos pares em estudo durante a realização das tarefas propostas. Procuo ainda fazer a ponte entre os resultados obtidos e a perspectiva teórica conducente a esta investigação.

5.1. A construção do significado de conceitos geométricos

De acordo com o exposto no quadro teórico subjacente a este estudo, ao longo das diferentes etapas do desenvolvimento conceptual, os conceitos espontâneos, (os que são previamente assimilados pelo aluno), agem como mediadores na aprendizagem de um novo conhecimento. O processo de fusão entre conceitos espontâneos e conceitos científicos é lento e exigente. Os resultados desta investigação vão ao encontro desta linha teórica, pois existiram conceitos geométricos que estavam (e estão ainda) em fase de construção e de apropriação pelos alunos.

5.1.1. Semelhança e razão de semelhança

O significado de semelhança aparece a ser construído por formas diferentes pelos três pares de alunos.

O par X associa figuras semelhantes a ampliações e reduções e às operações de multiplicação e divisão (tal como acontece com todos os pares). O conceito de razão não está claro para este par de alunas, pois não o associam a uma comparação de figuras, mas antes a uma “operação” que leva de uma figura para outra. A ideia de redução e ampliação como operações inversas sobre uma figura revela-se muito presente e arrasta consigo a noção de operações inversas sobre números, isto é, multiplicar e dividir. Por outro lado, a semelhança torna-se muito ligada à ideia de transformação, isto é, à existência de uma acção sobre um objecto que o transforma, mantendo-lhe a forma. Tendo em atenção as construções geométricas que as alunas realizaram na Tarefa 1, posso encontrar evidências de que, para estas alunas, a redução

e ampliação estão ambas ligadas à conservação da forma, estando aqui presente o conceito de figuras semelhantes. Este é o par mais próximo do conceito científico, embora tivesse apresentado dificuldades na razão de semelhança.

Para o par Y, semelhança significa multiplicar e dividir e o conceito espontâneo de semelhante (“algo que é parecido com”, em linguagem corrente) é ainda muito evidente, uma vez que não foi tida em conta a conservação da forma, nem a manutenção dos ângulos das figuras em causa. Verifica-se que o foco das alunas são os valores numéricos dos comprimentos dos segmentos de recta das figuras e não fazem uma correspondência entre as posições dos segmentos originais e dos segmentos transformados, obtendo assim uma figura “parecida” com a inicial. Além do que foi já referido, este par de alunas associa a redução a uma razão menor do que 1, o que mais uma vez realça que a atenção central destas alunas recai sobre o número. Mais uma vez, destaca-se o facto de estas alunas estarem a atribuir um sentido ao conceito de semelhança que é centrado, antes de mais, numa relação numérica.

O par Z associa a semelhança à divisão e a múltiplos (ou diminui ou aumenta) e a permanência dos ângulos verifica-se, mas a palavra forma está ausente de todos os registos deste par. Pelo contrário, encontram-se alterações na forma da figura em algumas construções do par, principalmente nas reduções. Tal como sucedeu com o par Y, há uma atenção focada nos valores dos comprimentos que não atende à posição relativa dos segmentos da figura transformada.

Existem evidências que me permitem ainda concluir que, para todos os pares em estudo, realizar uma redução é mais susceptível de erro, justificada talvez pela própria dimensão dos valores divididos (por 2 ou por 3) e que a isso se aliou o facto de não atenderem à geometria da figura (mas apenas aos valores numéricos dos comprimentos). De salientar ainda que as reduções solicitadas na tarefa encontram-se maioritariamente incorrectas, contrariamente às ampliações construídas pelos pares, que estão todas certas.

5.1.2. Posições relativas de rectas

Para o par X, a noção de rectas perpendiculares não se encontra completamente esclarecida. Estas alunas estabelecem uma associação entre rectas perpendiculares e um ângulo de 90° de amplitude. Quando lhes é solicitada uma justificação, as alunas usam a linguagem icónica para ilustrar o seu ponto de vista e que se inspira na construção que fizeram do Tangram, no Geogebra, reproduzindo no papel aspectos específicos dessa figura, desenhando as duas diagonais do quadrado como exemplo de rectas perpendiculares. Através desta representação, depreendo que este par apresenta uma ideia clara do que significam rectas paralelas e concorrentes, pois o esquema que o par construiu é claro e elucidativo. É interessante ainda notar que o esquema das alunas para indicar rectas perpendiculares reflecte as posições de pontos e de segmentos semelhantes aos que encontraram no Tangram. Trata-se de um indício de que o Tangram funcionou como objecto concreto ou como referente real para a construção do significado de rectas perpendiculares.

O par Y identificou rectas com as letras dos vértices que constam na construção do seu Tangram. Não restam dúvidas de que este par sabe distinguir entre rectas paralelas, perpendiculares e concorrentes, pois indicam várias possibilidades de resposta em cada situação. No entanto não apresentaram qualquer justificação para as suas escolhas, o que dificulta a compreensão da construção do significado dos conceitos em causa.

No que respeita à identificação de rectas quer paralelas, quer perpendiculares, o par Z não aparenta ter dificuldades, respondendo correctamente a todas as situações com apenas uma possibilidade. Tal como o par Y, não justificaram as suas opções, sendo difícil entender o significado que estes alunos atribuem a estas posições relativas de rectas.

Em jeito de balanço sobre este sub-tema, existem evidências que me permitem afirmar que todos os pares sabem como identificar posições relativas de rectas. Apesar de solicitado na tarefa, os pares Y e Z não apresentam qualquer justificação, nem mesmo uma representação icónica, o que se explica talvez pela atenção mais dirigida para elementos numéricos do que geométricos, verificada anteriormente nestes alunos.

5.1.3. Ângulos verticalmente opostos

As alunas do par X, logo a partir da tabela que construíram após a manipulação da figura, identificaram que “os ângulos opostos são sempre iguais”, o que denota uma noção clara de ângulos verticalmente opostos. Formalizaram a conclusão a que chegaram e realizaram uma representação esquemática muito idêntica à figura que construíram (sem concretizarem com amplitudes de ângulos) para ilustrar uma situação em que existem ângulos verticalmente opostos e assinalam aqueles que são geometricamente iguais.

O par Y depois de completar a tabela, refere sem dificuldade que “os ângulos opostos têm amplitudes iguais” e acrescenta uma justificação relacionada com o facto de terem o mesmo vértice, mas não ilustra a situação. Depreendo que estas alunas detêm a noção de ângulos verticalmente opostos, mas não conseguem verbalizar formalmente o que são ângulos verticalmente opostos.

Os alunos do par Z manipularam a figura e registaram os ângulos obtidos na tabela, tendo concluído que existem dois pares de ângulos iguais entre si. Este foi o único par de alunos que se referiu a um caso concreto das experiências realizadas e construiu um esquema com a indicação das amplitudes dos ângulos verificados numa das experiências.

5.1.4. Ângulos de lados paralelos

O par X concluiu, a partir da sua construção geométrica, que existem dois conjuntos de quatro ângulos iguais na figura e sobressai algo relacionado com ângulos de lados paralelos (“os pontos do mesmo lado são sempre iguais”). Aos ângulos de lados paralelos associam ângulos do mesmo lado e esse facto parece indicar que o significado atribuído a esta noção ainda pode estar em construção.

Apesar do par Y ter encontrado dois conjuntos de quatro ângulos iguais, não existem evidências de que estas alunas tenham associado as relações numéricas às noções de ângulos de lados paralelos. Tal como referido anteriormente, verifico que este par faz uma interpretação muito mais numérica do que geométrica. As relações

encontradas entre os números não têm uma tradução imediata para conclusões geométricas.

O par Z não apresentou a construção geométrica solicitada e não formalizou uma conclusão, tendo apenas ilustrado a situação com um caso concreto. Assim, somente posso referir que a noção de lados paralelos é ainda pouco sólida e consistente para este par de alunos.

5.1.5. Ângulos externos

O par X não respondeu às questões relacionadas com ângulos externos, pelo que, não é possível a análise sobre a construção do significado neste sub-tema.

O par Y formaliza uma conclusão que se aproxima muito da noção de ângulo externo de um triângulo, ao afirmar que um ângulo externo “é a soma dos outros dois internos”, sendo estes clarificados com letras dos respectivos vértices. Contudo, na formalização da conclusão concretizaram a partir da construção geométrica realizada, não generalizando para qualquer figura.

Na construção geométrica, o par Z marca e mede um ângulo externo, o que é revelador de que estes alunos sabem (geometricamente) o que é um ângulo externo. Existem também evidências de que estes alunos compreendem que o ângulo externo se relaciona com a soma de dois internos, pois afirmam que “a soma de dois ângulos internos dá o externo”, mas penso que não é uma noção muito clara e sólida, pois não especificam quais são estes internos.

5.2. A construção do significado de relações geométricas

5.2.1. Comparação de razões de semelhança

As alunas do par X não relacionaram as duas razões de semelhança com números, indicaram apenas o tipo de semelhança que se verifica em cada caso (redução,

ampliação), o que se justifica com a associação da semelhança às operações de multiplicação ou de divisão. O par indicou correctamente as razões de semelhança, embora sem as ter confrontado na comparação das figuras. De facto, não apresentaram uma explicação para o que se verifica quando comparamos as duas razões (inversas), como era solicitado.

O par Y revelou alguma confusão nos valores das razões solicitados. Estes, embora trocados, apresentam-se correctos. Este par de alunas associa a razão de semelhança a um número e mostra saber interpretar que uma é o inverso da outra, havendo portanto uma comparação com sentido das duas razões de semelhança.

O par Z apresenta apenas uma razão de semelhança e a única comparação que estabelece é relativa às figuras e não aos valores das razões, dado que a sua resposta se ficou por “uma mais grande e outra menos”.

5.2.2. Áreas e perímetros no Tangram

As alunas do par X encontraram diferentes relações entre os números, usando medidas das figuras do Tangram que construíram, mas não apresentaram nenhuma relação entre áreas. Mesmo não tendo seguido a análise das relações propostas na tarefa, considero que é de valorizar as relações encontradas por este par de alunas. As alunas afirmaram que “a relação da figura, em geral, é o dobro” ou “chegámos à conclusão que a relação é o dobro”, o que parece sugerir que as alunas encontraram diversas medidas que seriam o dobro de outras. Esta situação, da análise do Tangram, é novamente um caso de comparação estática, em que nenhuma acção é idealizada sobre uma dada figura para obter outra. Existem evidências de que este par de alunas tem a noção de que há alguns casos de polígonos que têm um perímetro ou uma área que é duas vezes o perímetro ou a área de outros.

O par Y não identificou quais os segmentos iguais e de que modo certos segmentos de recta que compõem o Tangram se relacionam com outros, em função da construção realizada. Apresentaram uma relação entre os perímetros das figuras e também o fizeram para as áreas (o perímetro ou a área de algumas figuras era metade do perímetro ou área de outras). Aparentemente, as relações encontradas fixam-se sobre os

valores apresentados pelo *GeoGebra* e não têm uma interpretação que as alie a relações geométricas presentes nos elementos do Tangram. Assim, parece evidente que a construção geométrica não actuou como uma fonte de interpretantes para a compreensão de relações numéricas.

Os alunos do par Z relacionam as áreas das figuras que compõem o Tangram e curiosamente é o único par que compara estas áreas com a área do quadrado maior. Os alunos parecem não ter feito a medição das áreas dos polígonos que referem na sua resposta. Estes valores não são visíveis na zona gráfica nem na algébrica do Geogebra e também não surgem nos diálogos do par, tendo os alunos analisado a construção do Tangram para encontrar as relações entre as áreas. Possivelmente, usaram a decomposição da figura para concluir acerca do número de polígonos de determinada forma que cabem no quadrado inicial. Ao contrário do que se passou com os pares X e Y, este par usou a construção como um verdadeiro objecto capaz de produzir interpretantes geométricos para as relações entre as áreas das figuras que compõem o Tangram.

5.2.3. Soma de ângulos internos de um triângulo

Ao longo da realização desta tarefa, o par X esteve reduzido à aluna X1, sendo que esta teve ainda necessidade de se ausentar mais cedo da aula. A aluna concluiu que “a soma dá 180°”, e esta conclusão surge mais como uma espécie de “intuição” da aluna do que da verificação do valor da soma dos três ângulos. Isto revela que a aluna possui a ideia de que a soma dos três ângulos internos tem um valor “especial” e vai lançando hipóteses de valores que constituem casos especiais para ela (nos diálogos surge 360° e 180°).

O par Y, mais concretamente aluna Y1 tem a noção clara de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, pois a aluna responde de imediato 180°, não sendo possível ter efectuado previamente os cálculos. Esta noção está presente e actua como um conceito científico, segundo a terminologia de Vygostsky.

Como se depreende dos diálogos entre os elementos do par Z, o aluno Z1 tem a clara noção de que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Sem margem para dúvidas, este par revela uma noção idêntica à que surgiu no par X de que a soma dos três ângulos internos do triângulo é um valor especial.

5.3. Aspectos de linguagem na aprendizagem da Geometria

O pensamento matemático dos alunos é um processo evolutivo que vai progredindo à medida que os termos usados na linguagem corrente se vão interligando com os termos próprios da linguagem matemática. A Geometria não é exceção e esta é uma área que tem por um lado, uma linguagem muito própria e por outro, algumas noções que se confundem com os conceitos espontâneos que os alunos adquiriram ao longo da sua vida.

Ter a consciência de que o signo, a linguagem, o modo como interpretamos, o que dizemos e o que fazemos são matéria de interpretação, deita por terra a ideia de que a aprendizagem é um processo de assimilação. Estamos num constante processo de aprendizagem, de construção de significados (com alunos ou com todas as pessoas).

A questão do semelhante é, como outras (por exemplo, a ideia de sucessão com limite e sucessão limitada) que geram alguma ambiguidade, porque na linguagem corrente têm um certo sentido e na linguagem matemática têm um sentido completamente diferente. A interpretação que se faz do conceito científico (usando a terminologia de Vygotsky) não é de leitura directa ou fácil.

O *GeoGebra*, escolhido para a realização deste estudo, possui também ele, uma linguagem própria. A forma de definir um ângulo é feita a partir de três pontos e o *GeoGebra* interpreta automaticamente o segundo ponto como vértice. O que o programa faz é nomear um ângulo com uma letra grega e, portanto, há uma interferência de notações (linguagens simbólicas ou formas de registo matemático). Existem diferentes notações, simultaneamente, o que pode gerar entraves no modo como os alunos se expressam relativamente aos ângulos. O ângulo fica muito agarrado a uma sequência de três pontos. Um signo não tem só o papel de notação ou designação, tem também o

papel de dar sentido às coisas. No caso do ângulo, esse sentido transformou-se no facto do ângulo ser visto como três pontos, como foi verificado na tarefa 3 do par X.

O professor não se deve dar, imediatamente, por satisfeito com uma resolução correcta de determinado exercício pois, por vezes, tal como na resolução incorrecta, há falhas na interpretação do significado. Ter esta perspectiva deixa-nos mais sensíveis e atentos aos significados que os alunos estão a construir. A aprendizagem passa pela construção do significado e, portanto, a aprendizagem não é feita de uma forma definitiva.

5.4. O papel das representações e o *GeoGebra* como ferramenta mediadora

Tudo o que fazemos na aula de Matemática é feito através de signos e estes são portadores de significado. Neste caso, os significados que podem emergir são distribuídos por uma variedade de signos diferentes. Para além das representações, dos símbolos, das imagens, temos uma máquina geradora de signos como o computador. Usar o *GeoGebra* como meio de produção de signos e, portanto, de significados, não é o mesmo que usar papel e lápis. O universo semiótico está a ampliar-se com a manipulação de tipos de signos diferentes.

As tarefas utilizadas para a realização deste estudo envolvem tendencialmente medições, pois focam uma parte da Geometria com muita medida. Aliás, há autores, como Kallia e Panagiotis (2010), que referem a semelhança como um dos conceitos que permite fazer a ponte entre a geometria e a álgebra. Apesar de se distinguir uma parte de construção e outra de medição, a partir do momento em que os alunos começam a fazer as medições no *GeoGebra*, parece haver uma tendência para se alhearem das relações geométricas. Os alunos podem ter dificuldades em manter um raciocínio focado nas regularidades numéricas que não perca de vista a justificação geométrica. É como se a figura servisse para gerar valores numéricos (parecendo ser esta a principal função desempenhada pela construção geométrica no *GeoGebra*). Pode ser uma forma de criar

uma brecha entre o que os números “querem dizer” e o que a construção geométrica “diz”.

Segundo a perspectiva teórica assumida, os ambientes de geometria dinâmica podem ser vistos como um mediador semiótico, em que uma figura actua como um objecto que gera um ou mais interpretantes para um determinado conceito geométrico. Ao longo da análise das tarefas deste estudo, verificou-se que a parte da construção geométrica poucas vezes foi uma fonte de interpretantes. O *GeoGebra* ajuda a que as relações numéricas surjam com maior clareza, rapidez e prontidão. Os alunos tiveram a tendência para realizarem a construção, centrando-se seguidamente nos números (medidas de comprimentos, perímetros, áreas, amplitudes de ângulos). Deste modo, afastaram a construção geométrica do seu campo de desenvolvimento conceptual, não lhe conferindo sentido geométrico. Existem contudo exemplos contrários verificados na análise de dados. Por exemplo, na análise do par Y, respeitante à Tarefa 2, pode observar que o esquema que as alunas construíram para indicar rectas perpendiculares reflecte as posições de pontos e de segmentos semelhantes aos que encontraram no Tangram construído no *GeoGebra*. Trata-se de um indício de que o Tangram funcionou como objecto concreto ou como referente real para a construção do significado de rectas perpendiculares.

5.5. Considerações finais

Os alunos gostaram deste tipo de actividades como eles referiram nas suas folhas de resposta: “Queremos mais aulas destas”, “Gostaria de ter mais aulas assim”, “Este trabalho foi muito interessante e divertido” ou “O trabalho foi interessante, aprendi imensas coisas e melhorei muito neste tema”.

Referiram-se também à utilização do *GeoGebra*, demonstrando o seu apreço por aulas com recurso a este programa de geometria dinâmica: “Gostei muito desta experiência com o *GeoGebra*”, “Os trabalhos no *GeoGebra* são difíceis mas mais divertidos”, “Nós utilizámos o *GeoGebra* para facilitar a resolução dos exercícios” ou ainda “Aprendi a fazer figuras geométricas e a mexer no *GeoGebra*”. Contudo, o facto

de os alunos utilizarem o computador não constituiu um motivo para estes se debruçarem mais sobre algumas questões que poderiam ter originado um maior aprofundamento.

Relativamente à Tarefa 1, pude verificar que para o par X a expressão “de...para” constituiu um entrave para o bom entendimento do que se pretendia na questão 6.2, tendo esta assumido significados bastantes diferentes. Para estas alunas, dizer “de A para B” é o mesmo que dizer “dividir por 3” e daí decorre o sentido que dão à expressão “de 3 para 1”. Esta forma de interpretar o que significa “de 3 para 1” (passar do comprimento 3 para o comprimento 1) contradiz o significado matemático de uma razão de 3 para 1 (3:1).

Os três pares de alunos que participaram neste estudo apresentaram características diferentes, o que permitiu um quadro mais completo das dificuldades e das cadeias semióticas estabelecidas, com desenvolvimentos bem diferentes. Esta diversidade contribuiu ainda para revelar que a construção do significado não é linear e unívoca, constituindo um processo complexo e em permanente construção. Este necessita da interpretação pessoal que cada aluno faz de um objecto, dos conhecimentos já adquiridos previamente, mas também da predisposição sócio-emocional para realizar determinada tarefa (como se verificou, por exemplo, com o par X na Tarefa 4).

Gostaria ainda de salientar que, o que foi exposto relativamente às capacidades de expressão (quer na oralidade, quer na escrita) dos participantes no estudo teve ecos ao longo da análise de dados dos pares em causa. O elemento Z1, de raciocínio rápido e com oralidade adequada, apressou-se a resolver grande parte das questões propostas nas tarefas, sem reflectir muito sobre elas e sem apresentar conclusões ou justificações que ajudassem a clarificar o seu pensamento.

Em cada par existe um elemento dominante (principalmente nos pares X e Z) e isso sobressai na partilha de ideias e na forma como o outro elemento aceita incontestavelmente as sugestões do outro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, G. (1995). A teoria das representações sociais e a cognição matemática. *Quadrante*, Vol. 4, Nº1, p. 25-41.
- Afonso, J. (2009). *Investigações matemáticas com TIC no primeiro ciclo do ensino básico*. (Tese de Mestrado). Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa. (Acedido em 06 de Março de 2011 de <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2095>).
- Alro, H. e Skovsmose, O. (2005). Challenging perspectives. In A. Chronaki e I. Christiansen, (Eds). *Challenging perspectives on mathematics classroom communication*, (p. 339-348). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Alsina, C. (1999). Painel “Geometria no currículo de Matemática”. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte e P. Abrantes (Orgs), *Ensino da geometria no virar do milénio*, (p. 65-66). DEFCUL, Universidade de Lisboa.
- Amado, N. (2011). *Mathematics student teachers’ pedagogical use of technologies – differences in classroom practices*. Artigo aceite no CERME7, Working Group 15 - Technologies and resources in mathematics education. University of Rzeszów, Poland. (Acedido em 5 de Janeiro de 2011 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/15a/CERME7-WG15A-Paper25_Amado.pdf).
- Battista, M. T. (2009). Highlights of Research on Learning School Geometry. In T. V. Craine e R. Rubenstein, (Eds). *Understanding Geometry for a Changing World – Seventy-first Yearbook*, (p. 91-108). Reston, VA: NCTM.
- Baroody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically*. New York: Macmillan.
- Bauersfeld, H. (1995). Language games in the mathematics classroom. In H. Bauersfeld e P. Cobb, (Eds.). *The emergence of mathematical meaning*. (p. 271- 292). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Boavida, A. et al. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.
- Boavida, A. (2009). *Comunicação e Argumentação*. (Documento não publicado, disponibilizado pela autora no Seminário de Investigação do Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências, realizado na Universidade do Algarve).

- Bloch, I. (2007). How mathematical signs work in a class of students with special needs: Can the interpretation process become operative?. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (p. 1140-1149). Lanarca: Department of Education, University of Cyprus.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- Borba, M. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multirepresentational software*. (Tese de doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Bottino, R. M. e Robotti, E. (2007). Transforming classroom teaching & learning through technology: Analysis of a case study. *Educational Technology & Society*, 10 (4), p. 174-186.
- Brown, J. et al. (1988). *Situated cognition and the culture of learning*. (Report N° IRL 880008). Palo Alto: Institute for Research on Learning.
- Bruner (1962). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- Bussi, M., Mariotti, M. e Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school. In M. Hoffman, J. Lenhard e F. Seeger, (Eds). *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, (p. 77-90). New York: Springer.
- Candeias, N. (2008). Geometria no ensino da Matemática. In A. P. Canavarro, (Org.). *20 Anos de Temas na EeM*, (p. 114-125). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Candeias, N. e Ponte, J. (2010). *Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8.º ano*. (Acedido em 07 de Março de 2011 de www.spce.org.pt/sem/Montegordo/7XV.pdf).
- Carmelo, L. (2003). *Semiótica – uma introdução*. Mem-Martins: Publicações Europa-América.
- Carreira, S. (1997). A insustentável leveza do saber – contributos da semiótica para a análise da construção de significados em matemática. In A. Azevedo et al. (Eds.), *VIII Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas*, (p. 69-82). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da Matemática: Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Clardy, A. (1997). *Studying your workforce: Applied research methods and tools for training and development practitioners*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Clements, D. e Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (p. 420-464). New York: Macmillan.
- Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria*, (p. 157-184). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.
- Craine, T. V. & Rubenstein, R. (Eds). (2009). *Understanding Geometry for a Changing World – Seventy-first Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- D'Ambrosio, U. (1997). Formação de professores de Matemática: Dificuldades e possibilidades, com uma referência às universidades portuguesas. In Associação de Professores de Matemática (Ed). *Actas do ProfMat 97*, (p. 75-85). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Routledge.
- DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. (Acedido em 19 de Junho de 2003, de http://www.deb.minedu.pt/curriculo/LivroCompetenciasEssenciais/indice_competencias_essenciais.htm).
- Deleuze, G. & Guattari, F. (1987). *A Thousand Plateaus. Capitalism and Schizophrenia*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Dooley, L. (2002). Case Study Research and Theory Building. *Advances in Developing Human Resources*. Vol. 4, n.º 3, p. 335-354.
- Durkin, K. (1991). Language in mathematical education: An introduction. In K. Durkin e B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice*, (p. 3-16). Milton Keynes: Open University Press.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (p. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Eco, H. (1973/81). *O signo*. Lisboa: Editorial Presença.
- Edwards, J. e Jones, K. (2006). Linking Geometry and Algebra with GeoGebra. *Mathematics Teaching – MicroMath* N.º 194, p. 28-30. (Acedido de http://eprints.soton.ac.uk/19198/1/Edwards_Jones_linking_geometry_and_algebra_MT_2006.pdf em 20 de Março de 2011).
- Ernest, P. (2005). Agency and creativity in the semiotics of learning mathematics. In Hoffman, M., Lenhard, J. e Seeger, F. (Eds). *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, (p. 23-34). New York: Springer.

- Falbel, A. (1990). The computer as a convivial tool. In I. Hadel e S. Papert (Eds.), *Constructionism*. Cambridge, Massachusetts: MIT Media Lab.
- Falcade, R., Laborde, C. e Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, **66**, p. 317-333.
- Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula. *Educação e Matemática*, N.º 103, p. 4.
- Forsythe, S. (2010). A study of the effectiveness of a Dynamic Geometry Program to support the learning of geometrical concepts of 2D shapes. In M. Joubert, (Ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 30(2).
- Forsythe, S. (2011). *Generating shapes in a dynamic environment*. Artigo aceite no CERME7, Working Group 4 - Geometry Teaching and Learning. University of Rzeszów, Poland. (Acedido em 5 de Janeiro de 2011 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG4/WG4_Forsythe.pdf).
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. e Batanero, C. (1998). Funciones Semióticas en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. In I. Vale e J. Portela, (Eds.). *IX Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas*, (p. 25-45). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Godino, J. et al. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **39**, p.127-135.
- Godino, J. e Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 9, n.º 1, p.189-210.
- Halliday, M. A. K. (1975). Some aspects of sociolinguistics. In E. Jacobsen (Ed.). *Interactions between language and mathematical education*, (p. 64-73). Paris: UNESCO.
- Hoffmann, M. (2005). Signs as means for discoveries. In M. Hoffman, J. Lenhard e F. Seeger, (Eds). *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, (p. 45-56). New York: Springer.
- Hohenwarter, M. e Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. (Acedido em 21 de Março de http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf).

- Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38**(2), p. 164-192.
- Hoyles, C., Sutherland, R. e Healy, L. (1991). Children talking in computer environments: New insights into the role of discussion in mathematics learning. In K. Durkin e B. Shire. *Language in mathematics education – research and practice*, (p. 162-175). Milton Keynes: Open University Press.
- Kallia, M. & Panagiotis, S. (2010). The role of teaching in the development of basic concepts in geometry: how the concept of similarity and intuitive knowledge affect student's perception of similar shapes. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (p. 736-745). Lyon: INRP.
- Jones, K. (2000). Learning Geometrical Concepts using Dynamic Geometry Software. In K. Irwin, (Ed). *Mathematics Education Research: A catalyst for change*, (p. 50-58). Auckland: University of Auckland.
- Jones, K. (2002), Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, (p. 121-139). London: Routledge Falmer. (Acedido em 20 de Janeiro de 2011 de http://eprints.soton.ac.uk/13588/1/Jones_teach_learn_geometry_2002.pdf)
- Laborde, C. (1993). Do the Pupils Learn and What do they Learn in a Computer Based Environment? The Case of Cabri-geomètre. In B. Jaworski, (Ed). *Proceedings of Technology in Mathematics Teaching: A Bridge between Teaching and Learning*. Birmingham, University of Birmingham.
- Lave, J., Murtaugh, M., e de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff e J. Lave, (Eds.). *Everyday cognition: Its development in social context*. Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.
- Lave, J. (1992). Word Problems: A microcosm of theories of learning. In. P. light e G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing*. Hempstead: Harvester Wheatsheaf.
- Lee, C. (2006). *Language for learning mathematics: Assessment for learning in practice*. McGraw-Hill Education, OUP.
- Little, C. (2008). Interactive geometry in the classroom: old barriers and new opportunities. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28(2).
- Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.
- Luria, A. R. (1979). *Curso de Psicologia Geral*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

- Mammanna, C. & Villani, V. (Eds). (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, (p. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Maneca, C. (2010). *Semelhança de figuras*. (Relatório de estágio). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. (Acedido em 06 de Março de 2011 de http://www.run.unl.pt/bitstream/10362/5141/1/Maneca_2010.pdf).
- Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland e J. Mason (Eds), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. Berlin: Springer.
- Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning. In L. English, (Ed). *Handbook of international research in mathematics education*, (p. 695-723). London: Lawrence Erlbaum.
- Mariotti, M. A. (2003). *Geometry: dynamic intuition and theory*. (Acedido em 05 de Janeiro de 2011 de <http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/mariotti.pdf>).
- Mariotti, M. A. (2005). New artefacts and mathematical meanings in the classroom. In F. Sutherland, (Ed). *Visions of mathematics education: embedding technology in learning. Proceedings of ICTMT7*, (p. 2-11). Bristol, University of Bristol.
- Marques, V. (2009). *Os quadros interactivos no ensino da matemática*. (Tese de Mestrado). Universidade Portucalense. (Acedido em 06 de Março de 2011 de <http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/350/1/TMMAT%20109.pdf>).
- Martinho, M. H. (2007). *A Comunicação na sala de aula de Matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa.
- Matos, J. F. et al. (1995). Matemática e realidade: Pensar a aprendizagem. In Associação de Professores de Matemática, (Ed). *VI Seminário de Investigação em Educação Matemática: Actas*, (p. 149-172). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Matos, J. e Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Menezes, L. (1999). Matemática, linguagem e comunicação. In APM (Ed). *ProfMat 99*, (p. 123-145). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Merriam, S. B. (1988). *The case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

- Meyer, M. (2009). Use of word – Language-games in mathematics education. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 904-1013). Lyon: INRP.
- Ministério da Educação (1991). *Organização curricular e programas (3º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Morgan, C. (1994). The computer as a catalyst in the mathematics classroom? In S. Lerman, (Ed.). *Cultural perspectives on the mathematics classroom*, (p. 115-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- NCTM (2001). *Adenda: Geometria 2º e 3º ciclos*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- NCTM (2000/2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Tradução Portuguesa editada pela Associação de Professores de Matemática). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Noss, R. e Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Nunes, T. (1995). Sistema de signos e aprendizagem conceptual. *Quadrante*, Vol. 4, N.º 1, p. 7-24.
- Oliveira, M. (1992a). O problema da afectividade em Vygotsky. In Y. Taille, M. Oliveira, H. Dantas. *Piaget, Vygotsky, Wallon – Teorias Psicogenéticas em discussão*, (p. 75-84). São Paulo: Summus editorial.
- Oliveira, M. (1992b). Vygotsky e a formação de conceitos. In Y. Taille, M. Oliveira, H. Dantas. *Piaget, Vygotsky, Wallon – Teorias Psicogenéticas em discussão*, (p. 23-34). São Paulo: Summus editorial.
- Panaoura, A., Deliyianni, E., Gagatsis, A. e Elia, I. (2011). *Self-beliefs about using representations while solving geometrical problems*. Artigo aceite no CERME7, Working Group 8 - Affect and mathematical thinking. University of Rzeszów, Poland. (Acedido em 5 de Janeiro de 2011 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/8/CERME%207_WG8_Panaoura.pdf).
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. London: Harvester.

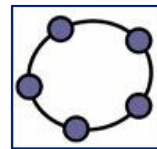
- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically – Communication in Mathematics Education*. London: Routledge.
- Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. In K. Durkin e B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice*, (p. 17-24). Milton Keynes: Open University Press.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, **3**(1), p. 3-18.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional*, (p. 5-28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (Acedido em 04 de Março de 2009 de <http://www.dgidec.minedu.pt/matematica/Documents/Programa/Matematica.pdf>).
- Ponte, J. P., Oliveira, P. e Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano*. DGIDC, Ministério da Educação. (Acedido em 14/10/09 de http://sitio.dgidec.min-edu.pt/matematica/Documents/npmeb/triangulos_quadrlateros.pdf).
- Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas. *Eutopias*, 2ª época, série Documentos de Trabajo, Vol. 51. Valencia: Ediciones Episteme.
- Reber, A. (1993). *Implicit Learning and Tacit Knowledge: An Essay on the Cognitive Unconscious*. Oxford: Oxford University Press.
- Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Rodrigues, M. (1998). A construção de Significado na Aprendizagem da Matemática. In I. Vale e J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas*, (p. 247-261). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ruthven, K. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, **51**, p. 297-317.
- Seeger, F. (2005). Notes on a semiotically inspired theory of teaching and learning. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, (p. 67-76). New York: Springer.

- Seeger, F. (2010). On meaning making in mathematics education: social, emotional, semiotic. *Educational Studies in Mathematics*, **77**(2-3), p. 207-226.
- Silva, F. (2009). *Explorando a função quadrática com o software Geogebra numa turma do 10º ano*. (Relatório de Estágio Pedagógico). Universidade da Madeira. (Acedido em 06 de Março de 2011 de <http://www.digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/56/3/MestradoFilipaSilva.pdf>).
- Silva, J. (2002). *A Geometria Dinâmica no âmbito do ensino/aprendizagem: um protótipo para o estudo do círculo no 9.º ano do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. (Acedido em 22 de Janeiro de 2011 de <http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/10466>).
- Steinbrig, H. (2008). *Mathematical Knowledge as a Social Construct of Teaching-Learning Processes – The Epistemology Oriented Mathematical Interaction Research*. (Acedido em 3 de Janeiro de 2011 de <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG5/Papers/STEINB.pdf>).
- Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol.13, Nº 8, p. 438-445.
- Vygostsky, L. (1993). *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **26**, p. 275-298.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. Oxford: Blackwell.

Anexos

Anexo 1

Tarefas propostas nas aulas



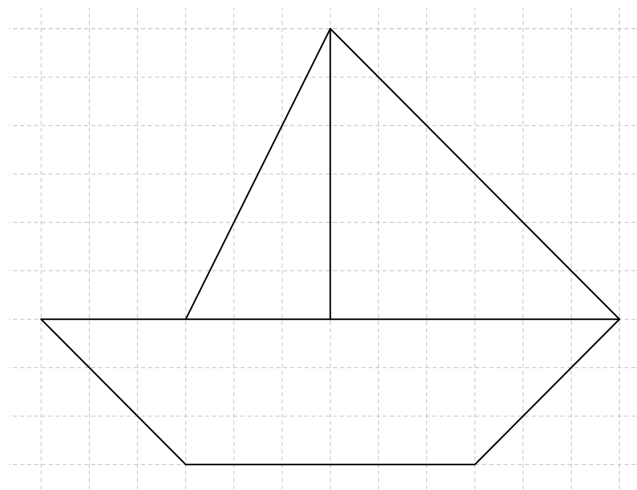
Nome: _____ Nº: _____ Turma: _____ 7ºAno

Tarefa 1 – Figuras semelhantes

Duas figuras são **semelhantes** se estas têm a mesma forma.

Depois de abrir o programa *Geogebra*, no menu **Exibir**, desactive os *Eixos coordenados* e active o *Quadriculado*.

1. Reproduza a figura seguinte, respeitando as medidas.



Nota: Grave o seu ficheiro (Figsem1)

2. Desenhe uma figura semelhante à da questão 1., reduzindo-a para metade.

Qual a razão de semelhança entre a figura dada e a que obteve?

Nota: Grave o seu ficheiro (Figsem2)

3. Desenhe uma figura semelhante à da questão 1., que corresponda a uma ampliação de razão igual a 2.

Nota: Grave o seu ficheiro (Figsem3)

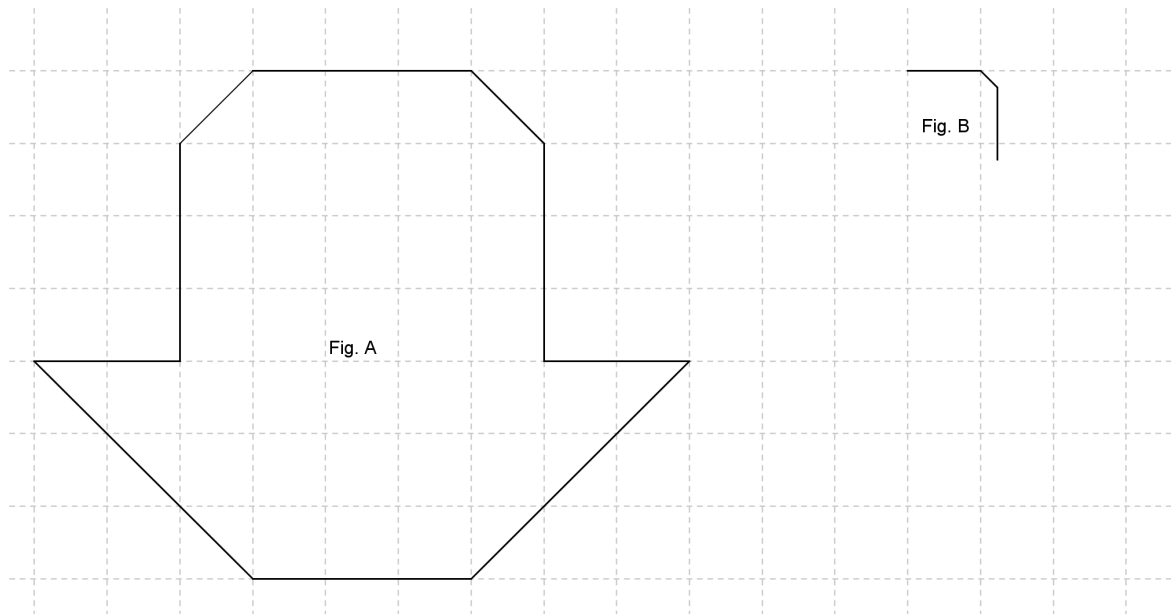
4. Num novo ficheiro, construa uma nova figura. Desenhe duas figuras semelhantes à que construiu, indicando a respectiva razão de semelhança.

Nota: Grave o seu ficheiro (Figsem4)

5. O António desenhou uma figura semelhante a outra, sendo a razão de semelhança $\frac{4}{5}$.

Trata-se de uma ampliação ou de uma redução? Explique.

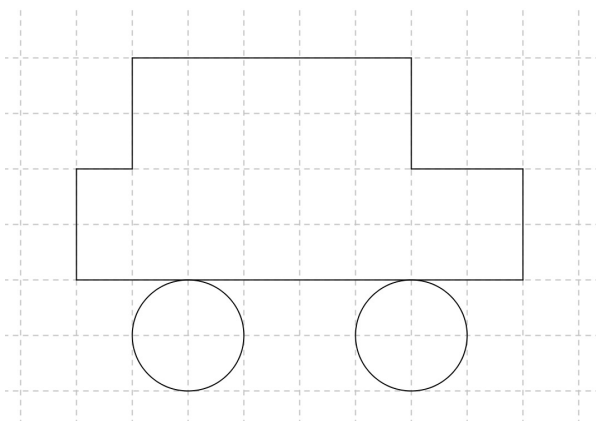
6. Observe a figura A.



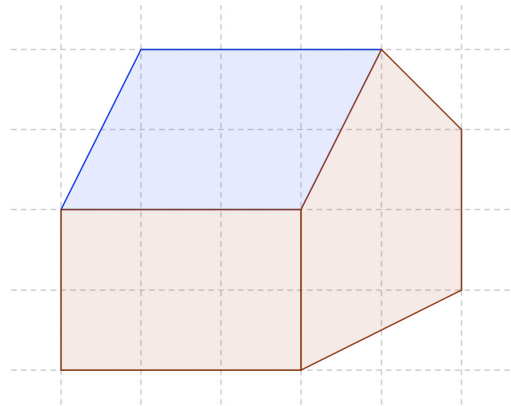
- 6.1. Complete a figura B, de modo que esta seja semelhante à figura A.
- 6.2. Qual a razão de semelhança de A para B? E de B para A?
- 6.3. Explique o que se verifica quando comparamos as duas razões.

7. Amplie ou reduza cada figura, respeitando a escala indicada.

1:2

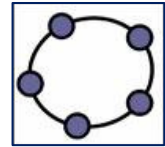


3:1



Compare as figuras que construiu com as originais. Formalize uma conclusão no que respeita à forma, comprimento dos lados e amplitude de ângulos.

Bom Trabalho!
A prof: Dora Nunes

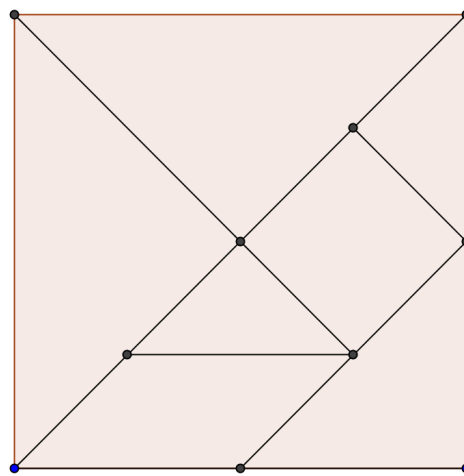


Nome: _____ Nº: _____ Turma: _____ 7ºAno

Tarefa 2 – Tangram

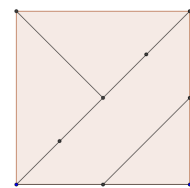
O **Tangram** é o puzzle mais antigo que é conhecido e foi inventado na China há mais de 4 mil anos. É constituído por 7 peças que formam um quadrado e que depois de separadas permitem obter novas figuras.

1. Com a ajuda do Geogebra, construa um Tangram.



Sugestões:

- Comece por construir um quadrado.
- Construa uma diagonal do quadrado.
- Através das ferramentas *Ponto Médio* e *Segmento de recta*, construa sucessivamente os segmentos necessários para completar o Tangram.



2. No Tangram que construiu identifique rectas:

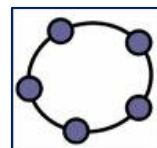
- 2.1. paralelas;
- 2.2. perpendiculares;
- 2.3. concorrentes;

Apresente uma justificação para a sua resposta.

3. O que conclui relativamente:

- 3.1. aos comprimentos dos diferentes segmentos de recta que compõem o tangram;
- 3.2. aos perímetros das figuras que compõem o Tangram;
- 3.3. às áreas das figuras que compõem o Tangram.

Bom Trabalho!
A prof: Dora Nunes



Nome: _____ Nº: _____ Turma: _____ 7ºAno

Tarefa 3 – Relações entre ângulos

Depois de abrir o programa *Geogebra*, no menu **Exibir**, desactive os *Eixos coordenados* e o *Quadriculado*.

1. Construa duas rectas concorrentes.

Sugestão: Marque dois pontos (A e B) e construa a recta definida por estes dois pontos. Repita esta operação para os pontos C e D, de modo a que estes não pertençam à recta anterior. Intersecte as duas rectas, encontrando o ponto em comum: ponto E.

1.1. Complete a tabela com as medidas da amplitude dos ângulos indicados.

Ângulos	Ângulo AEC	Ângulo BEC	Ângulo BED	Ângulo AED
1ª Experiência				
2ª Experiência				
3ª Experiência				
4ª Experiência				

Sugestão: Depois de observar e registar as amplitudes dos ângulos indicados, mova um ou mais pontos para obter amplitudes diferentes; faça então um novo registo. Repita esta operação até obter 4 registos de amplitudes diferentes.

1.2. A partir da tabela anterior apresente uma relação entre os diferentes ângulos.

1.3. Os ângulos AEC e BED têm o mesmo vértice (o ponto E) e são opostos entre si. Formalize uma conclusão acerca da relação encontrada, recorrendo a uma representação da figura que construiu.

- 1.4.** Some as medidas das amplitudes dos ângulos AEC e BEC encontradas no item 1.1., depois de movidos os pontos e registe-as na tabela seguinte:

Ângulos	Ângulo AEC+BEC	Ângulo BED+AED
1ª Experiência		
2ª Experiência		
3ª Experiência		
4ª Experiência		

Os ângulos AEC e BEC dizem-se suplementares, pois existe uma relação entre eles. Formalize a conclusão acerca da relação encontrada e exemplifique com uma figura.

- 2.** Construa duas rectas paralelas e uma recta oblíqua a estas.

Sugestões: A partir de dois pontos (A e B) defina uma recta.

Marque um ponto (C) que não pertença à recta e a partir deste ponto, marque uma recta paralela à AB.

Defina a recta AC, que é concorrente às duas rectas definidas anteriormente.

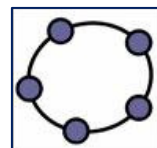
Meça todos os ângulos que ficaram definidos na figura.

Que relação encontra?

Manipule a figura.

O que pode concluir?

B😊m Trabalh😊!
A prof: Dora Nunes



Nome: _____ Nº: _____ Turma: _____ 7ºAno

Tarefa 4 – Ângulos de um triângulo

Depois de abrir o programa *Geogebra*, no menu **Exibir**, desactive os *Eixos coordenados* e o *Quadriculado*.

Dois ângulos dizem-se **adjacentes** quando têm o mesmo vértice.

1. Construa três rectas de modo a obter um triângulo no meio.
 - 1.1. Marque os ângulos internos do triângulo. Manipule a figura. O que conclui sobre a sua soma?
 - 1.2. Considere um vértice do triângulo cujo ângulo seja agudo. Nesse vértice, marque os quatro ângulos que ficaram definidos. Procure relacionar cada um dos quatro ângulos com os ângulos internos do triângulo. Manipule a figura e formalize uma conclusão.
 - 1.3. Marque um ângulo externo. Como relaciona os ângulos internos com os ângulos externos do triângulo? Formalize uma conclusão e ilustre com um exemplo.

Nota: Grave o seu ficheiro (AnguloExt)

Bom Trabalho!
A prof: Dora Nunes

Anexo 2

Pedido de autorização à Direcção da escola para a realização do estudo

Exmo. Sr. Director do Agrupamento

Vertical de Escolas _____

Eu, Dora Luísa Alves Nunes, PQND do grupo de recrutamento 500, venho solicitar autorização para realizar a recolha de dados para uma investigação nesta escola.

Encontro-me, neste momento, a frequentar o curso de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. Neste âmbito, estou a realizar a minha dissertação subordinada ao tema *A Comunicação Matemática no estudo da Geometria de 7º ano*. Esta investigação visa dar novos contributos sobre o modo como a comunicação matemática está presente no estudo da Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica. A concretização do estudo em causa implica a recolha de dados na turma D do 7º ano.

A intervenção pedagógica decorrerá ao longo das duas últimas unidades temáticas do presente ano lectivo, 2009/2010, em algumas aulas de da disciplina de Matemática. Esta estratégia alia-se, de forma harmoniosa, às medidas previstas no Plano da Matemática II, uma vez que esta investigação incidirá sobre as capacidades transversais ao ensino da Matemática e sobre o tema Geometria.

Informo ainda que todos os participantes e respectivos encarregados de educação serão informados sobre os objectivos do estudo e será solicitada autorização para efectuar gravações (áudio). Será assegurado o anonimato a todos os participantes envolvidos no estudo, com os quais assumirei o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o da realização desta investigação.

Em anexo, encontram-se o Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação e a Ficha de Inquérito – Monitorização de Inquéritos em Meio Escolar, com a respectiva aprovação da DGIDC.

Loulé, 03 de Maio de 2010

Peço deferimento,

Dora Luísa Alves Nunes

Anexo 3

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação para a realização do estudo

Ex.mo(a) Sr(a). Encarregado(a) de Educação:

No âmbito do curso de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve estou a desenvolver um estudo subordinado ao tema *A Comunicação Matemática no estudo da Geometria de 7º ano*. Este projecto de investigação visa dar novos contributos sobre o modo como a comunicação matemática está presente no estudo da Geometria com recurso a ambientes de geometria dinâmica.

A concretização do estudo em causa implica observação e a recolha de dados sobre o trabalho dos alunos em algumas aulas de Matemática. Esta estratégia alia-se, de forma harmoniosa, às medidas previstas no Plano da Matemática II, uma vez que esta investigação incidirá sobre as capacidades transversais ao ensino da Matemática e sobre o tema Geometria.

A recolha de dados basear-se-á na gravação em áudio de diálogos de alunos durante a realização de tarefas matemáticas com recurso a ambientes de geometria dinâmica, bem como na produção escrita de relatórios. Com estes dados procuro compreender melhor as formas de comunicação e de raciocínio geométrico dos alunos.

Face ao exposto, solicito autorização para proceder à recolha de dados, junto do seu educando, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato dos alunos e assumindo o compromisso de não utilizar os dados recolhidos para outro fim que não seja o da realização desta investigação.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, apresento os meus melhores cumprimentos.

Loulé, 03 de Maio de 2010
A professora

✂ -----

Eu, _____, autorizo o(a) meu (minha) educando (a) _____ nº ____ da turma ____ do 7º ano, a participar na recolha de dados dirigida pela professora Dora Nunes, no âmbito da sua dissertação de Mestrado.

Assinatura: _____

Data: ____ / ____ /2010