

ENSINANDO MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO PROPORCIONAL - O MÉTODO DE HAMILTON E OS PARADOXOS

Susana Fernandes
Universidade do Algarve FCT DM
Campus de Gambelas
8005-139 Faro, Portugal
e-mail: sfer@ualg.pt

Resumo: O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui nos seus conteúdos programáticos métodos de representação proporcional; uns de origem norte-americana e outros de origem europeia. O método de Hamilton (norte-americano) foi há muito abandonado por estar sujeito a diversos paradoxos. Neste documento são expostas as características deste método que tornam possível a ocorrência de paradoxos. Conhecer estas características permite ao professor construir exercícios que confrontem os alunos com a existência destes paradoxos.

Abstract The subject of proportional representation is currently taught in portuguese high schools. It is included in the syllabus of a course dedicated to Applications of Mathematics in Social Sciences (MACS). The methods taught are north-american and european. The north-american Hamilton's method was deprecated a long time ago due to it's paradoxes. We will focus on the characteristics of this method which allow paradoxes to happen. By mastering these characteristics a teacher can recreate test cases where such paradoxes occur.

palavras-chave: MACS ; Hamilton ; paradoxos.

keywords: MACS ; Hamilton ; paradoxes.

1 Introdução

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui, sob o tema da teoria da partilha equilibrada, a representação proporcional, que é uma aplicação da teoria da divisão proporcional no caso discreto. No entanto a maioria dos professores de matemática não teve formação nesta área e os materiais de apoio existentes são escassos e apresentam algumas lacunas.

O que é a representação proporcional? Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento proporcional à sua população, segundo o último censo realizado. Em inúmeros países da Europa, como é o caso de Portugal, cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

Porque são necessários métodos para determinar uma representação proporcional? Seja P o número total de cidadãos, que se distribuem por N estados, sendo p_i o total da população do estado i . Seja M o número total de mandatos a distribuir pelos estados, de acordo com a sua proporção populacional (p_i/P). Seja $D = P/M$ o divisor que representa o número de cidadãos representados por cada mandato. A quota de mandatos no parlamento do estado i será $q_i = M \times p_i/P$ (ou $q_i = p_i/D$), que em geral não é um número inteiro. Encontramos uma solução para o problema ao determinar o número de mandatos m_i a atribuir a cada estado i , sendo os m_i inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^N m_i = M$.

Na disciplina MACS são abordados alguns métodos de representação proporcional de origem norte-americana (Hamilton, Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill), pelo seu interesse histórico, e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente (D'Hondt e Sainte-Laguë).

O método de Hamilton foi há muito abandonado por estar sujeito aos paradoxos do Alabama, da população e dos novos estados. Neste documento são expostas as características do método de Hamilton que tornam possível a ocorrência destes paradoxos. O conhecimento destas características permite ao professor construir exercícios que confrontem os alunos com a existência destes paradoxos.

Todos os restantes métodos de representação proporcional abordados são métodos de divisores modificados, que não estão sujeitos aos paradoxos [1]. Os métodos norte americanos determinam de uma só vez a distribuição dos lugares no parlamento pelos estados, necessitando de algumas iterações até acertar no número total de lugares a distribuir. Os métodos europeus vão distribuindo um a um os mandatos do parlamento pelas listas eleitorais. Na verdade o método de Jefferson e o método de D'Hondt são formas computacionais distintas do mesmo método. O mesmo sucede com os métodos de Webster e de Sainte-Laguë. Já em 1928 Hamilton havia desenvolvido as formas recursivas dos métodos de divisores modificados propostos até então [2].

O artigo [3] apresenta uma descrição dos métodos de divisores modificados evidenciando as diferentes formas computacionais dos mesmos. O livro

[1] apresenta a evolução histórica do problema de representação proporcional no parlamento dos Estados Unidos da América, assim como a formulação matemática do problema e dos métodos para o resolver, incluindo também demonstrações de inúmeras propriedades destes.

2 O método de Hamilton e os paradoxos

O estadista norte americano Alexander Hamilton propôs em 1791 o seguinte método para resolver o problema da representação proporcional dos estados no parlamento: (1) - Uma vez definido D , calcular a quota de cada estado ($q_i = p_i/D$). (2) - Atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota mínima ($m_i = \lfloor q_i \rfloor$). (3) Se sobraem lugares por atribuir, adicionar um lugar por estado, por ordem decrescente da parte decimal da sua quota ($q_i - \lfloor q_i \rfloor$), até completar o parlamento.

No final do século XIX foi detetado que este método estava sujeito ao que ficou conhecido como o paradoxo do Alabama; que ocorre sempre que, mantendo os valores das populações dos estados e aumentando o total de mandatos a distribuir, há um estado que perde um mandato. No início do século XX descobriu-se que o método de Hamilton está também sujeito aos paradoxo da população e paradoxo dos novos estados. O primeiro acontece quando, mantendo-se o total de mandatos a distribuir e tendo um estado A uma taxa de crescimento populacional superior à de um estado B, o estado A perde um lugar para o estado B. O segundo ocorre quando a inclusão de um novo estado, sendo acrescentados ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota populacional, provoca alterações na distribuição de lugares dos restantes estados.

Porque é que isto acontece? Ao atribuir os mandatos extra pela parte decimal da quota o método de Hamilton desvia-se do princípio de proporcionalidade [1]. Em geral, a uma variação de quotas em igual proporção não correspondem variações iguais em termos absolutos, sendo que a quotas maiores corresponderá uma maior variação absoluta.

No caso do paradoxo do Alabama, o aumento do número de mandatos ($M' > M$) produz um aumento em igual proporção das quotas de todos os estados ($q'_i = M' \times p_i/P$, $q'_i/q_i = M'/M \forall i$), no entanto para estados maiores o aumento absoluto da quota será superior, podendo implicar a perda de um mandato para algum dos estados com menos população, que anteriormente tenha sido contemplado na distribuição dos mandatos extra.

No caso do paradoxo da população, mantendo-se o total de mandatos a distribuir e considerando um aumento populacional, existirão uns estados

com uma proporção de crescimento superior à proporção do crescimento global ($p'_k/p_k > P'/P$) e outros com uma taxa de crescimento inferior ($p'_i/p_i < P'/P$). Para aqueles as quotas subirão ($q'_k/q_k > 1$), para estes as quotas diminuirão ($q'_i/q_i < 1$). No grupo de estados com taxas de crescimento inferior à taxa de crescimento global (por exemplo), a mesma proporção de redução da quota em dois estados provocará uma maior redução em valor absoluto da quota do estado com mais população. Assim, poderá ocorrer a perda de um mandato deste estado mais populoso, no hipótese de que antes tenha recebido um dos mandatos extra a distribuir.

No caso do paradoxo dos novos estados, considera-se a inclusão de um novo estado (j), sendo a sua população acrescentada à população total ($P' = P + p_j$), e acrescentando ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota mínima ($M' = M + \lfloor q_j \rfloor$). Dado o aumento populacional global todos os estados (exceto o novo) vêem as suas quotas diminuir em igual proporção ($q'_i/q_i = (M' \times p_i/P') / (M \times p_i/P) = M'P/MP'$). A mesma proporção de redução da quota provocará uma maior redução em valor absoluto das quotas de estados com mais população, podendo implicar a perda de mandato para um destes estados, que antes tenha sido contemplado na atribuição de mandatos extra.

Nos diapositivos da comunicação apresentada no ENSPM2012 [4], encontram-se exemplos de aplicação desta análise do método de Hamilton na construção de exercícios para trabalhar em sala de aula.

Referências

- [1] M. Balinsky e H. Young, *Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Bookings Institution Press 2001. (primeira edição em 1982)
- [2] E. Huntington, “The Apportionment of Representatives in Congress”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30, (1928), pp. 85-110.
- [3] S. Fernandes, “Representação proporcional - Métodos dos Divisores”, *Educação e Matemática*, No. 118 (2012), pp. 35-43.
- [4] S. Fernandes, “Ensinando métodos de representação proporcional”, Sapiencia - Repositório Institucional da Universidade do Algarve, 2012, <http://hdl.handle.net/10400.1/1654>