UNIVERSIDADE DO ALGARVE

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

A opção dos alunos pelas tecnologias:

Um olhar sobre a utilização do Sketchpad na resolução de problemas

Palmira da Luz André Valente Ferreira

Mestrado em Matemática

Especialização em Matemática para o Ensino

Orientadora: Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

FARO

2007

RESUMO

Este estudo tem como propósito investigar de que modo os alunos utilizam uma ferramenta tecnológica e reconhecem a sua utilidade na resolução de problemas de Matemática quando são incentivados a escolherem o seu próprio método de resolução. A investigação envolveu uma turma do 11º ano e foi conduzida desde Novembro de 2005 até Julho de 2006.

São objectivos deste estudo: (a) compreender o que leva os alunos a recorrerem ao uso das tecnologias na actividade da resolução de problemas na aula de Matemática; (b) averiguar como se reflecte na resolução de problemas e nos processos desenvolvidos pelos alunos a sua decisão de recorrerem ou não a uma ferramenta tecnológica e (c) identificar as vantagens e desvantagens do recurso às tecnologias, no processo de resolução de problemas.

Em consonância com os focos de investigação, seguiu-se uma metodologia de natureza qualitativa, com recolha e análise de dados assente na leitura e interpretação de informação obtida de diversas fontes: questionários, produtos emergentes do trabalho dos alunos, gravação em vídeo de aulas, registos da observação participante da professora-investigadora.

O trabalho de campo na sala de aula foi dividido em duas etapas. Na *1ª Fase,* todos os alunos resolveram os problemas pelo método computacional, com o The Geometer's Sketchpad, e pelo método analítico, podendo utilizar a calculadora gráfica sempre que se justificasse; na *Fase Final* os alunos podiam optar entre os dois métodos de resolução. Com base nos respectivos desempenhos, foram seleccionados para serem entrevistados, quatro grupos que constituíram casos, percorrendo o espectro desde o extremo dos "*analíticos convictos"* até ao dos *"tecnológicos convictos"*.

O estudo permitiu formular um conjunto de conclusões. Assim, de acordo com os dados, apesar do gosto e motivação que os alunos têm no trabalho com as tecnologias na resolução de problemas, todos valorizam mais o método analítico. Acham-no mais exigente comparativamente com os procedimentos a ter com o auxílio do computador. De certa forma, o computador é visto como um facilitador e como um atalho, em determinadas etapas. No domínio da resolução de problemas, nomeadamente no que diz respeito aos modelos conceptuais (como os de George Polya e de Alan Schoenfeld), podemos considerar que a fase da compreensão é determinante em ambos os métodos, enquanto que as duas fases seguintes, elaboração do plano e execução do plano, revelam características distintas nos dois modos de resolução. Com o recurso ao computador, os alunos oscilam regularmente entre a concepção de uma estratégia e a sua execução, pela capacidade de experimentação que a ferramenta lhes oferece. Não é, assim, claramente marcada a separação entre o delinear de uma acção e a sua execução, como acontece analiticamente. Apesar das diversas preferências reveladas pelos alunos, todos consideram que o computador tem vantagens, entre as quais destacam o poder de visualização, reconhecendo-lhe até importância para a resolução com papel e lápis. Por último, tornou-se evidente a influência do computador no modo como a natureza problemática da situação é sentida pelo aluno. O recurso ao computador altera o problema, podendo simplificar ou embaraçar a procura da solução.

Este estudo permitiu perceber que é possível encontrar desafios estimulantes nos recursos diários, como é o caso do manual escolar, bastando para isso um olhar diferente e motivado para a utilização de uma determinada ferramenta tecnológica. Como recomendação final, é de referir a importância de dar aos alunos espaço e tempo para irem ultrapassando obstáculos, mesmo que isso possa parecer um desperdício. Certamente, este investimento acaba por produzir resultados magníficos na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: *Resolução de problemas; tecnologias; Sketchpad; método computacional; método analítico; aula de Matemática.*

ABSTRACT

The aim of this study is to find out how students use technological tools and acknowledge their importance and usefulness when asked to solve mathematical problems by choosing their own problem solving method. This study was carried out from November 2005 to July 2006 with an 11th grade class.

In more specific terms the goals of the study are: (a) to understand what makes students use technology when solving problems in Math's lessons; (b) to find out how the decision of using or not a technological tool is reflected in problem solving activity as well as in the processes developed by the students; (c) to identify the pros and cons of the use of technology in that process.

According to the different research targets, a qualitative methodology of data collection and analysis was followed, based on reading and interpreting information from different sources, such as, questionnaires, the products of students' work, video recording of lessons, note-taking from participant observation by the teacher leading the research.

The field work inside the classroom was divided in two stages: in the *first stage* every student solved the problems using both the computational method with *The Geometer's Sketchpad* and the analytical method, being able to use the graphic calculator whenever needed; in the *final stage* the students could choose between the two methods. Based on their performance four groups of students were selected for interview, thus becoming case studies, fulfilling the continuum between the fully analytical ones and the ones fully in support of technology.

This study led to a set of conclusions. According to the data collected, although the students seemed motivated and attracted to technology in the problem solving process, they all valued the analytical method more. They find it more demanding comparing with their procedures when using the computer. In a way the computer is considered a facilitator and a shortcut in certain stages.

In problem solving, especially when dealing with the conceptual models (like those of George Polya and Alan Schoenfeld), we can consider that the comprehension stage is quite determining in both methods, while the next two stages, planning and executing the plan, show different features in both ways of solving the problems.

While working with the computer, students repeatedly oscillate between drawing a strategy and promptly executing it, due to the trial and solution facility offered by the machine. Thus there isn't a clear cut separation between the outlining of an action and the way it is carried out as it happens to be when using the analytical method.

In spite of the different preferences shown by the students, all of them consider the computer as a powerful tool, especially in terms of enhancing visualisation, and also acknowledge its importance when solving a problem even when using paper and pencil.

Ultimately the influence of the computer became obvious in the way the problematic nature of the situation is felt by the student. The use of the computer may change the problem, either simplifying, or making the search for a solution more difficult.

This study allowed us to understand that it is possible to find stimulating challenges in daily resources for the classroom work. Such is the case of the students' mathematics workbook. When used in a more inventive way and inspected under the intention of using technological tools it may provide us suitable material for genuine problem solving.

As a final recommendation, the study helped to appreciate the importance of giving the students time and space to overcome their own obstacles, even if that may seem to be a waste of time. This effort will produce, for sure, wonderful results in the students' learning process.

Key-Words: *Problem Solving; technology; Sketchpad; analytical method; computational method; math's lessons.*

Índice

Capítulo I - INTRODUÇÃO

Introdução ao estudo

Nesta introdução ao estudo, distinguirei duas componentes. Na primeira, exponho brevemente o meu percurso profissional e algumas motivações decorrentes dessa prática que estão na origem deste trabalho. Na segunda, apresento os contornos principais do estudo, referindo a pertinência, os objectivos e questões de investigação e a sua estrutura organizativa.

1.1. Motivações pessoais para a realização do estudo

Os meus primeiros contactos com os computadores remontam aos tempos de formação universitária, no início dos anos 90. Tive a minha primeira disciplina de Informática no segundo ano da licenciatura, em que o professor nos explicava como funcionava a máquina e eu me sentia algo constrangida pela minha ignorância nesta área. Ao mesmo tempo, não deixava de sentir um grande fascínio pelas possibilidades que se colocavam ao nosso alcance. Ainda me lembro do primeiro trabalho em que usei o computador para processamento de texto e da consciência que tive das potencialidades e facilidades em formatar, acrescentar, alterar; um deslize ou um esquecimento deixava de ser sinónimo de um árduo trabalho para remediar as falhas.

No ano em que fiz o meu estágio pedagógico, em 1993, conheci pela primeira vez um software desenvolvido especificamente para o ensino da Matemática, o programa *Funções*, que utilizei muito entusiasticamente quando leccionei no 10º ano a função quadrática. Achava deslumbrante que os alunos pudessem concluir sozinhos sobre as alterações que as parábolas sofriam, sem terem que passar pelo maçador e repetitivo processo de determinar uma quantidade de pontos das respectivas parábolas. A possibilidade de se obter rapidamente o gráfico da função era, para mim, extraordinária. Apesar de todas as peripécias por que tinha passado para conseguir leccionar aquela aula, numa sala equipada com computadores, no fim desse dia, senti-me muito feliz com o trabalho desenvolvido.

Comecei a ver o computador, não só como um excelente aliado no dia-a-dia do professor, para a construção de materiais para a sala de aula, mas também na perspectiva de permitir grandes inovações no processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

Nos anos seguintes, passei a ter contacto com as calculadoras gráficas e desde que comecei a leccionar no ensino secundário, trabalho com elas regularmente. Quanto aos computadores, o acesso tem sido mais difícil, cingindo-se, até aqui, a algumas actividades em momentos isolados.

A calculadora gráfica é hoje indispensável na sala de aula e a sua presença nas minhas aulas, associada ao projector, tem sido promotora de bons e enriquecedores momentos de discussão de ideias, sugestões e resultados positivos.

A primeira reacção dos alunos, em particular os do 10º ano, ao contacto com a calculadora é muito diversificada; uns vêem-na como uma potencial aliada para alcançar o sucesso na disciplina, porventura com menor esforço já que lhes vai servir para executar determinadas tarefas e cálculos enfadonhos, outros ficam desconfiados com tantas teclas e tantas funções, outros ainda na expectativa ou mesmo indiferentes e também há aqueles que a olham apenas numa perspectiva lúdica, devido aos jogos.

A maioria dos alunos espera que a calculadora execute automaticamente as suas instruções, começando as primeiras "dores de cabeça" quando carregam na tecla para obter o gráfico e nada aparece no ecrã. É nesta altura que começam a ganhar consciência dos seus pormenores e potencialidades e surgem as discussões, as trocas de ideias, a análise das sugestões, as simulações.

Na sala de aula, muitas das barreiras, que passam pela necessidade de resolução de equações de qualquer grau ou de inequações menos simples, desaparecem quando temos ao dispor esta ferramenta, abrindo-se, assim, novas e amplas perspectivas. O aluno pode investigar e confirmar resultados obtidos analiticamente e pode igualmente procurar soluções a partir da representação gráfica. Surge a oportunidade de trabalhar com modelos matemáticos mais elaborados e de utilizar a Matemática em problemas da vida real, tornando-se possível interpretar e criticar resultados em contextos muito mais alargados.

A utilização das tecnologias na sala de aula, de uma forma pensada e criativa, proporciona momentos de análise e discussão de ideias que são extremamente enriquecedores, quer para os alunos quer para o professor, aumentando substancialmente a qualidade das aprendizagens. Embora a visão de muitos alunos relativamente à aprendizagem da Matemática seja a de "saberem" toda a matéria que está no manual, a verdade é que isso decorre, em grande medida, das atitudes dos próprios professores, pela interpretação que fazem de cumprimento do programa, dos objectivos da Matemática ou da ênfase que colocam na avaliação dos conteúdos.

Os obstáculos à efectiva implementação das tecnologias na sala de aula, infelizmente, ainda são muitos e dos mais diversos tipos. A primeira limitação é a falta de recursos materiais nas escolas que não estão ainda dotadas do número de computadores suficiente para as necessidades da comunidade escolar. A maioria das escolas tem alguns computadores nas bibliotecas para utilização dos alunos, mas pelo seu número reduzido e pelo espaço em que estão inseridos não constituem uma opção para a realização de uma aula.

Quando a escola está munida de salas equipadas com computadores, estas destinam-se prioritariamente à leccionação das aulas das disciplinas específicas dos cursos tecnológicos de Informática e só no caso de alguma ficar disponível é que pode ser utilizada por professores de outras áreas. Às vezes, lá aparecem os cobiçados "buracos" nos mapas de ocupação das salas de informática, compatíveis com o nosso horário e então a tão desejada aula acontece. Uma aula com recurso aos computadores não é uma aula que possa ocorrer de improviso, exige da parte do professor uma grande atenção; desde a sua planificação até à sua efectiva realização implica muita disponibilidade e esforço.

Nos currículos para o ensino secundário é referido que todas as escolas secundárias devem dotar-se, quanto antes, de Laboratórios de Matemática, mas são muitas as que ainda não dispõem destes espaços; outras há que, estando equipadas com estes recursos, fazem deles um uso muito esporádico, pelo que continua a não ser efectiva a implementação das tecnologias na sala de aula.

Porventura, os próprios professores constituem uma das maiores barreiras à implementação das tecnologias, havendo diversos factores a contribuírem para esta realidade. Para além da falta de recursos que é desmotivante, muitos professores não acreditam nas potencialidades das novas tecnologias e entendem que a sua missão é a de transmitirem aos alunos, de forma clara e precisa, um conjunto de conhecimentos que estão compilados no programa. Nesta óptica, a melhor forma de cumprir os programas é recorrer ao quadro e ao giz, atribuindo ao aluno um papel passivo enquanto o professor expõe a matéria, esperando-se que, posteriormente, os alunos adquiram prática num conjunto de rotinas para a resolução das actividades propostas.

Muitos professores sentem-se confortáveis com o seu desempenho e não vêem a necessidade de proceder a alterações. Mantêm-se acomodados e desconfiados em relação às novas tecnologias. Alguns têm falta de formação na área das novas tecnologias e preferem "jogar pelo seguro" e não se expor perante os alunos. Na maioria das escolas, os diferentes departamentos curriculares não têm uma efectiva dinâmica de trabalho de grupo, faltando a troca de experiências e de ideias e continuando a haver professores que trabalham de forma muito isolada. Acresce ainda que muitos pais e encarregados de educação continuam a ver como bom professor aquele que é bom explicador e esta constitui também a principal qualidade para a maioria dos alunos.

As Universidades, quando formam os futuros professores, têm uma grande e legítima preocupação com a sua preparação científica mas descuram, por vezes, a formação específica na vertente educacional. Nos últimos anos, em Didáctica da Matemática, começou-se a trabalhar na utilização das novas tecnologias, mas fazem-se ainda abordagens superficiais aos diferentes *softwars* existentes, sem o necessário tempo para uma efectiva consolidação de novas práticas. O cenário piora quando se sabe que muitos dos jovens professores, que já possuem alguma experiência no domínio das tecnologias, ou não estão a trabalhar nas escolas ou quando conseguem ser colocados são obrigados a mudar todos os anos, dificultando o seu trabalho nesta área e a troca de experiências com os colegas.

Muito está por fazer até conseguirmos uma mudança nos papéis, quer dos professores quer dos alunos, pois esta mudança requer tempo. A implementação das novas tecnologias no ensino não se coaduna com os papéis que têm sido desempenhados ao longo de décadas: um professor que explica todos os conteúdos e um aluno que ouve a explicação e executa os procedimentos bem explicados pelo professor. Se o uso das tecnologias na aula de Matemática deve ser uma meta, esta coloca também outras metas ao professor e ao ensino da Matemática.

1.2. Pertinência e âmbito do estudo

A concepção de currículo tem sofrido, nas últimas décadas, profundas transformações, afastando-se decididamente da noção de um roteiro e de uma prescrição de conteúdos a serem transmitidos aos alunos que os receberiam de forma passiva e mais ou menos homogénea. Factores diversos, de natureza social e cultural, que acompanham a própria evolução do papel da escola na formação de cidadãos críticos e competentes para interpretarem, agirem e tomarem decisões esclarecidas, nas múltiplas esferas de actividade e participação dos indivíduos, têm motivado e impregnado as recentes reformulações curriculares do ensino básico e secundário. O professor é hoje entendido como um dinamizador de actividades e um facilitador de aprendizagens, que promove e abre caminhos de intervenção activa dos alunos nas suas próprias aprendizagens. Neste contexto, o professor deixa de ser um simples executor para lhe caber o papel de construtor do currículo. Ao professor é, então, confiada a tarefa de interpretar e traduzir as orientações curriculares numa prática que inclui a selecção e produção de tarefas, a organização e gestão do ambiente da sala de aula, a escolha das metodologias e dos instrumentos de trabalho mais adequados e a integração da avaliação de uma forma coerente com os objectivos que estabelece, tendo em conta a realidade concreta e particular dos seus alunos.

Uma experiência pedagógica, realizada no 11º ano de escolaridade, foi o suporte empírico para concretizar orientações curriculares como: a) a resolução de problemas na actividade matemática dos alunos, b) a introdução de novas tecnologias como ferramentas pedagógicas e c) a promoção de atitudes positivas e aprendizagens num ambiente de sala de aula motivador.

No âmbito da investigação em ensino da Matemática, o estudo ganha pertinência, ao focar-se na aula de Matemática e no papel das ferramentas tecnológicas como elementos mediadores do processo de resolução de problemas. É essencial que se compreenda o que pode ser um bom problema, num contexto de utilização das tecnologias, o que está subjacente a possíveis resistências dos alunos ou o que determina a disposição para o seu uso.

Do ponto de vista da prática pedagógica, o trabalho realizado apostou na exploração de estratégias de ensino/aprendizagem centradas no aluno e procurou desenvolver-se no sentido da criação de um espaço de descoberta e de resposta a desafios intelectuais, traços que são intrínsecos à própria natureza da Matemática.

As bases estruturais deste trabalho são a resolução de problemas e a utilização das tecnologias, articuladas numa perspectiva curricular e não numa experiência isolada da actividade lectiva. Muitos estudos têm sido realizados, nomeadamente no nosso país, sobre a resolução de problemas e também muitos outros sobre a implementação das tecnologias na sala de aula, maioritariamente baseados em experiências abreviadas feitas na sala de aula. O grande desafio inicial deste estudo foi o de integrar, de forma coerente, na sala de aula, estas três componentes: resolução de problemas, tecnologias (em particular, o computador) e currículo. Assim, encontrar respostas para as questões – *Que software? Que problemas? Como e quando?* – revestia-se de uma importância fulcral para alcançar os objectivos que me propunha.

Que software? Quanto ao software, na disciplina de Tecnologias no Ensino da Matemática, integrada na componente curricular do mestrado em que se insere este trabalho, foi-me dada a possibilidade de conhecer e trabalhar com vários programas, como *Cabri Geometry, Cabri 3D, Autograph, The Geometer's Sketchpad, Fathom, Modellus…* Contudo, sem grandes hesitações, a minha escolha recaiu sobre um programa de geometria dinâmica, o *Skechtpad*, pela sua abrangência curricular, francamente ampliada com a versão 4, ao passar a incluir a opção da representação gráfica de funções. Esta evolução do programa alargou consideravelmente as possibilidades de escolha de problemas, como no caso deste estudo, seleccionados a partir do próprio manual. Importa salientar que para trabalhar com este tipo de ferramentas na aula de Matemática, não é suficiente conhecer apenas a tecnologia – ter a noção dos programas que existem e do que permitem fazer – é necessário saber "descobrir". Trata-se de um esforço que vai muito para além de um conjunto de destrezas técnicas. Exige uma reflexão sobre os currículos e os objectivos do ensino e implica a introdução de novas propostas de trabalho que ponham em relevo as potencialidades da tecnologia na resolução de problemas.

Os ambientes informatizados, não garantem, por si só, a construção do conhecimento. Para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projecte com cuidado as actividades a serem desenvolvidas na sala de aula.

Que problemas? O ensino da Matemática torna-se muito mais interessante à medida que se utilizam bons problemas, ao invés de se centrar em tarefas rotineiras que remetem para a reprodução de técnicas, que se distanciam da realidade do aluno e não estimulam o raciocínio matemático.

Na selecção de problemas matemáticos têm de estar bem definidos os objectivos que pretendemos alcançar e as ferramentas de que dispomos. A selecção dos problemas para trabalhar com o Skechtpad constituiu para mim uma grande preocupação, atendendo a que os alunos nunca tinham trabalhado com o *software*. Embora este facto me tenha parecido uma dificuldade, acabou por me ajudar a definir uma linha orientadora, levando-me a concentrar no manual dos alunos e a escolher problemas que me pareceram adequados para quem nunca trabalhou com a ferramenta. Estes problemas foram usados como trampolim para a introdução de ideias e conceitos matemáticos ou para a sua consolidação e exploração. Foi necessário começar a ver os problemas com um "olhar dinâmico" e ganhar a noção das potencialidades dos mesmos; foi necessário adaptar, proceder a pequenas alterações num qualquer esquema, como uma amplitude de um ângulo que passava a variar num intervalo.

Como e quando? Na resolução de problemas com o Skechtpad a questão do momento oportuno é mais pertinente, uma vez que o "carácter problemático" do problema depende também do modo como os alunos actuam sobre a ferramenta. Por outro lado, determinados problemas foram seleccionados com um propósito curricular, ou seja, muitas vezes tinham que preceder determinadas aulas na sala normal, tendo em conta a sequência de leccionação dos temas curriculares.

O modo de iniciar os alunos numa ferramenta tecnológica foi uma grande dúvida no início. Faço uma preparação inicial? Entrego uma listagem dos menus com as respectivas descrições aos alunos? Acabei por não seguir nenhuma das opções anteriores e utilizar esse desconhecimento dos alunos como mais um ingrediente para a formulação de problemas. No início de cada problema, limitei-me a fazer breves apresentações sobre o indispensável para a execução de determinadas construções de suporte, acabando por tirar partido de problemas para cuja resolução não eram necessários grandes conhecimentos do software, mas onde era importante recorrer a um conjunto de conceitos matemáticos já estudados.

No ensino da Matemática, mais importante do que conhecimentos e técnicas bem treinadas, é uma intuição cultivada, capaz de fazer ressoar as informações dadas no problema com conhecimentos e experiências do aluno, bem como uma agilidade intelectual que lhe permita relacionar ideias entre si.

Historicamente, os sistemas de representação do conhecimento matemático têm carácter estático, facilmente constatado quando se consultam livros ou se assiste a uma aula 'clássica'. Este carácter estático, muitas vezes, dificulta a construção do significado e o aluno centra-se num conjunto de símbolos, palavras ou desenhos a ser memorizado. Assim sendo, não deve ser surpreendente que os alunos mostrem dificuldade em aplicar um conceito ou um resultado numa situação que não coincida com o protótipo apresentado no livro ou na aula pelo professor.

As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter um carácter dinâmico, reflectindo-se nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. Um mesmo objecto matemático adquire uma representação mutável, diferentemente da representação estática do tipo "lápis e papel" ou "giz e quadro". O dinamismo é obtido através da manipulação directa das representações no ecrã do computador com um simples movimento do rato.

1.3. O objectivo e as questões do estudo

Este estudo tem como propósito investigar de que modo os alunos utilizam uma ferramenta tecnológica e reconhecem a sua utilidade na resolução de problemas de Matemática, quando são incentivados a escolherem o seu próprio processo de resolução. Assim, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

a) O que leva os alunos a recorrerem ao uso das tecnologias na actividade de resolução de problemas na aula de Matemática?

b) Como se reflecte na resolução de problemas e nos processos desenvolvidos pelos alunos a sua decisão de recorrerem ou não a uma ferramenta tecnológica?

c) De que forma é que os alunos identificam vantagens e desvantagens no recurso às tecnologias, no seu processo de resolução de problemas?

Estas questões de investigação apontam para a busca de elementos clarificadores do "como" e do "porquê" de fenómenos que têm lugar na aula de Matemática. Pretende-se investigar de que forma a utilização de tecnologias, nomeadamente do computador, tem repercussões significativas nos processos e nas aprendizagens dos alunos. Procura-se analisar razões que levam os alunos a optar ou não pelo recurso ao computador, considerando eventuais resistências, obstáculos ou receios, bem como o aspecto motivador e apelativo da utilização do computador por parte dos jovens. Finalmente, interessa conhecer com maior detalhe em que medida a interligação das tecnologias e da resolução de problemas constituirá uma perspectiva de trabalho efectiva na aprendizagem da Matemática e na relação que os alunos desenvolvem com a disciplina e com a aula de Matemática.

Em consonância com estes focos de investigação foi adoptada uma metodologia de recolha e análise de dados assente na leitura e interpretação de informação qualitativa. Não se trata de saber se determinada causa gera um necessário efeito, numa lógica determinista, mas antes de ganhar um conhecimento sustentado pela prática e voltado para a compreensão.

A recolha de dados incluiu, deste modo, um conjunto substancial de observações, registos de observação e gravações de aulas em vídeo. Foram igualmente fontes de dados, entrevistas semi-estruturadas a um número limitado de alunos, considerados como casos ilustrativos ou paradigmáticos de situações e tendências verificadas no terreno da sala de aula. Os produtos dos alunos, como sejam, relatórios, outros documentos escritos e ficheiros electrónicos, constituíram também elementos fundamentais.

1.4. Estrutura organizativa do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos.

À Introdução do estudo segue-se o Capítulo II, no qual se faz um enquadramento teórico da investigação. Faz-se uma abordagem à *Resolução de Problemas*, começando por se analisar o que é um problema, à luz de critérios educativos. De seguida, apresentam-se os modelos de resolução de problemas de Polya e de Schoenfeld e, por fim, discute-se a resolução de problemas na aula de Matemática, incluindo a evolução das orientações curriculares e passando pelo papel do professor e pelas concepções em torno da actividade de resolução de problemas. No âmbito da *Utilização das Tecnologias no Ensino da Matemática*, tratam-se as potencialidades educativas das novas tecnologias e as mudanças que trazem para a sala de aula. Expõe-se, ainda, com alguma profundidade, a noção de ambientes geométricos dinâmicos, bem como as modificações e implicações que introduzem no ensino de Matemática. Termina-se com o foco da atenção centrado na descrição do programa The Geometer's Sketchpad.

No Capítulo III descreve-se o plano metodológico da investigação.

No Capítulo IV, *Análise de Dados*, começa-se pelo <u>*Questionário Inicial*</u> que permite perceber o ponto de partida dos alunos deste estudo. Na segunda secção, estão os episódios com os incidentes críticos da *1ª Fase*, em que toda a turma resolvia as actividades propostas com o Sketchpad e também analiticamente. A terceira secção do capítulo é referente ao desempenho dos quatro casos seleccionados na *Fase Final* da experiência, em que os alunos eram livres de optar pelo método de resolução que entendessem; inclui-se ainda a análise das entrevistas realizadas com os diferentes grupos/casos.

Termina-se o estudo, no Capítulo V, com as conclusões da investigação e algumas recomendações que emergiram deste estudo.

Capítulo II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

1. A resolução de problemas

A resolução de problemas tem sido, ao longo dos anos, reconhecida como essencial no ensino da Matemática, com maior intensidade em determinadas épocas, como aconteceu na década de 80, tanto em Portugal como noutros países. Este tema tem surgido em múltiplos trabalhos de investigação, verificando-se que os conceitos de problema e de resolução de problemas são entendidos de formas distintas por diferentes autores, de acordo com as suas concepções (Schoenfeld, 1992; Graça, 1995).

1.1. O que é um problema?

Referindo diferentes definições de problema, por exemplo Abrantes (1989), baseado nas ideias de Kantowski, considera que um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução. Nesta perspectiva, a resolução de problemas envolve dois aspectos − o processo e o produto ou solução − sendo o processo o conjunto de comportamentos e actividades que encaminham a procura da solução (Graça,1995).

Para Silveira (2001), um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado.

Também, segundo Newell & Simon (citados por Silveira, 2001), um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das acções necessárias para concretizar a sua intenção, ou segundo Chi e Glaser (1983), o problema é uma situação na qual um indivíduo actua com o propósito de alcançar uma meta, utilizando para tal alguma estratégia em particular.

Por último, Borralho (1990) apresenta uma distinção entre problema e exercício. Enquanto que num exercício se recorre apenas a um algoritmo ou a um dado conhecido, num problema é necessário conceber toda uma estratégia para a sua resolução. Para que se torne num efectivo problema, este tem que despertar a curiosidade de quem o vai resolver. Assim "*um problema é uma questão em que o estudante não dispõe de nenhum processo rotineiro conhecido para o resolver, mas que lhe excita a curiosidade e o desejo de o solucionar.*" (Borralho, 1990, p.74). Esta dicotomia é também referida por Schoenfeld (1992), ao apresentar duas definições de problema retiradas da enciclopédia Webster – um problema como alguma coisa que precisa de ser feita ou que requer uma actuação e um problema como uma questão que causa perplexidade ou que levanta alguma dificuldade. Estas duas definições mostram os dois extremos de um espectro de interpretações para o termo problema. Num dos pólos está o uso tradicional da palavra problema, como é o caso das propostas apresentadas nos manuais escolares que serão resolvidas a partir das técnicas que acabaram de ser ensinadas e treinadas. Neste caso, como afirma Schoenfeld (1992) estão longe de ser problemas à luz da segunda definição. No outro pólo estarão os problemas para os quais não é imediata uma estratégia ou uma técnica; são problemas que constituem efectivamente um desafio e que durante o processo de resolução permitem ao aluno passar por experiências matemáticas significativas, pressupondo um maior grau de dificuldade e de complexidade.

Pelas definições apresentadas entende-se que existe um *verdadeiro* problema quando há um propósito, um objectivo a ser alcançado e não se sabe previamente como o atingir; existe um problema quando há um resultado – conhecido ou não – a ser obtido ou demonstrado, utilizando a teoria matemática.

Para Silveira (2001), um problema é tanto mais valioso quanto a pessoa que se propõe resolvê-lo tenha de inventar estratégias e criar novas ideias para encontrar uma solução. Quem está a resolver o problema pode até saber o objectivo que quer alcançar, mas enquanto não dispõe dos meios para o fazer continuará a confrontar-se com um problema.

Moreira (1987) acrescenta a "dimensão subjectiva do problema" uma vez que ser ou não problema, depende também do indivíduo; é necessário que este o compreenda e esteja interessado em resolvê-lo, não deve dispor de nenhum procedimento que lhe possibilite alcançar directamente a solução, devendo chegar a esta após deliberadas tentativas para a encontrar.

Borralho (1990), Abrantes (1988) e Lester (1980) referem também o carácter relativo do conceito de problema. O que constitui problema para um indivíduo, não tem que o ser para outro; o facto de um indivíduo conhecer à partida o procedimento a seguir para resolver a situação transforma o problema num exercício, ou seja altera o valor educativo do problema.

Na revista *Educação e Matemática,* Paulo Abrantes (1988) escreve o artigo *Um (bom) problema (não) é (só)*... no qual expõe alguns exemplos de problemas que classifica à luz de critérios educativos, aclarando assim a diferença entre um exercício, um problema e um bom problema. A definição de um 'bom problema' é uma noção relativa, dependendo dos conhecimentos anteriores dos alunos e também de causas de natureza educativa, como o interesse do aluno e as práticas de aprendizagem que ele experimentou. Abrantes apresenta como factores decisivos e imperativos para a renovação do ensino da Matemática o alargamento e a clarificação das perspectivas sobre o que é um problema e sobre os métodos de trabalhar a sua resolução na sala de aula.

O autor, partindo de exemplos concretos, reflecte sobre o que designa por "exercício", "problema *de palavras*", "problema *para equacionar*", "problema *para demonstrar*", "problema *para descobrir*", "problema da vida real", "situação problemática" e "uma situação", mostrando como cada uma destas actividades sustenta diferentes aprendizagens. Abrantes considera ainda que nas aulas de Matemática predominam questões enquadradas nos quatro primeiros tipos de modalidades referidos.

Também Borasi (1986, citada por Porfírio, 1993) propõe uma classificação dos vários tipos de problemas, identificando quatro elementos estruturais a partir dos quais concebeu um instrumento para avaliação e classificação dos problemas de um ponto de vista educativo. Designou esses quatro elementos estruturais por: formulação do problema; contexto do problema; conjunto de soluções que o problema admite e métodos de abordagem que podem ser usados para obter a solução.

Abrantes aplicou os critérios do modelo de Borasi às oito categorias atrás referidas, como se pode ver na tabela seguinte.

<table>
<tr><th>EXEMPLOS</th><th>FORMULAÇÃO</th><th>CONTEXTO</th><th>SOLUÇÃO</th><th>MÉTODO</th></tr>
<tr><td>Exercício</td><td rowspan="5">Explícita
e
fechada</td><td>Inexistente</td><td rowspan="5">Única
e
exacta</td><td rowspan="4">Uso de algoritmos previamente conhecidos
…</td></tr>
<tr><td>Problema
“de palavras”</td><td rowspan="4">Totalmente explícito
no
enunciado</td></tr>
<tr><td>Problema
“para equacionar”</td></tr>
<tr><td>Problema
“para demonstrar”</td></tr>
<tr><td>Problema
“para descobrir”</td><td>insight</td></tr>
<tr><td>Problema da vida real</td><td rowspan="2">Implícita
e aberta</td><td rowspan="3">Só em parte
no enunciado</td><td rowspan="3">Várias</td><td rowspan="3">Exploração do contexto e criação de problemas</td></tr>
<tr><td>Situação problemática</td></tr>
<tr><td>Uma situação</td><td>Inexistente</td></tr>
</table>

Tabela 1. Aplicação do modelo de Borasi aos exemplos de Abrantes.

Um bom problema, além de representar um excelente desafio, também contribui para a expansão da própria Matemática, permitindo que se clarifiquem determinados conceitos e levando a resolver outros problemas que surgem no caminho e que estão relacionados, de alguma forma. É o exemplo do famoso Problema de Fermat que apesar da sua simplicidade exigiu mais de 350 anos de esforços até ser resolvido por A. Wilkes em 1995. As tentativas de demonstração produziram novas ideias e problemas que permitiram desenvolver vários ramos da Matemática, pelo que a importância de um problema está também associada à quantidade de ideias novas que ele traz à Matemática.

No contexto de sala de aula, um problema ainda que simples, pode desenvolver o gozo pelo trabalho mental, se desafiar a curiosidade e proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução. Assim, os problemas podem estimular o interesse do aluno e promover o gosto pela disciplina de Matemática, de modo que durante o processo de resolução de problemas, o aluno estimula a sua criatividade e aperfeiçoa o raciocínio, além de usar e aumentar os seus conhecimentos matemáticos.

Também Schoenfeld (1991), defende que os problemas deveriam servir como introduções ao pensamento matemático. A selecção dos problemas é importante para que funcionem como catalisadores em debates e discussões, conduzindo os alunos a pensarem matematicamente, que para o autor significa ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predilecção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair), bem como ter e ser capaz de aplicar os instrumentos necessários para ser bem sucedido na matematização. Para seleccionar um problema potencialmente valioso, Schoenfeld refere quatro propriedades que procura sempre ter em conta: a) enunciados simples para que sejam facilmente compreensíveis; b) problemas que possibilitem diferentes processos de resolução, procurando assim dar ênfase junto dos alunos não à resposta mas sim aos processos; c) problemas e respectivas soluções que possibilitem a introdução a importantes ideias matemáticas e por último d) problemas abertos ou semi-fechados que permitam ao aluno explorações matemáticas e também problemas que permitam extensões e generalizações.

Para Mason (1996), um dos mais amplos objectivos da educação é o de impulsionar os estudantes a colocarem as suas próprias perguntas, como uma iniciação à investigação nas diferentes disciplinas, de modo a saberem onde e como procurar, no futuro, as fontes e os recursos para a resolução dos problemas que se lhes irão colocar. "*A subtileza do ensino da resolução de problemas matemáticos, reside no equilíbrio do desafio e do sucesso, sem que nenhum deles se sobreponha.*" (Mason, 1996, p.81).

Se à resolução de problemas é conferida uma grande importância, o mesmo sucede quanto à formulação de problemas. Kilpatrick (1987) afirma mesmo que a criação de problemas pelos próprios alunos deve fazer parte da educação de todos. Também Porfírio

(1993) reforça a importância de facultar aos jovens a possibilidade de se questionarem face às diferentes situações com que se deparam, considerando que, com a formulação de problemas, os alunos desenvolvem o gosto por explorar, analisar conjecturas, desenvolver um espírito crítico e de investigação.

Mason (1996) defende que quando nos debatemos com os nossos próprios problemas, o envolvimento é muito maior, pelo que a probabilidade de terminar com sucesso o problema também aumenta; o contrário sucede quando são propostos aos alunos exercícios de "rotina" ou problemas um pouco sombrios, em que naturalmente são levados a terminar rapidamente a tarefa com o menor investimento possível. Este autor defende, assim, que devem ser propostos aos alunos situações de forma vaga, devendo ser os próprios a colocarem e apurarem as suas próprias questões. Para o autor, a descrição de resposta aberta e de questão aberta não são atributos das questões, mas antes dos raciocínios das pessoas, perante uma determinada situação. Para o autor a abertura é uma qualidade das pessoas, na medida em que perante o mesmo problema haverá respostas e questões diferentes na procura da solução, nas mais variadas extensões possíveis e no grau de motivação do sujeito que se confronta com o problema.

1.2. Modelos de resolução de problemas

"Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta." (Polya, 2003, p.11)

Modelo de Polya

Polya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas, específica para a Matemática. Constitui assim um incontornável marco na área da resolução de problemas, uma vez que as suas teorias representaram uma grande inovação em relação às ideias existentes até então. O seu trabalho e as suas publicações continuam a ser hoje uma referência para professores e investigadores.

Na sua obra, *Como resolver um problem*a, o autor define como objectivo da heurística o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Visa assim, uma melhor compreensão das operações mentais presentes durante o processo de resolução de problemas, no sentido de fornecer um conjunto de orientações úteis para a introdução de problemas no ensino da matemática. Apresenta, então, um "*catálogo*" de operações mentais relevantes na resolução de problemas, decorrentes das sugestões e interpelações presentes.

COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Primeiro. É preciso compreender o problema	**COMPREENSÃO DO PROBLEMA** *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição?* É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Faça uma figura. Escolha uma notação adequada. Separe as várias partes da condição. É possível anotá-las.
Segundo Descubra a conexão entre os dados e a incógnita. Pode ser forçado a considerar problemas auxiliares se não conseguir encontrar uma conexão imediata. Deverá chegar, eventualmente, a um plano de resolução	**ESTABELECIMENTO DE UM PLANO** Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema relacionado com o problema proposto?* Conhece um teorema que lhe possa ser útil? *Considere a incógnita!* E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Aí tem um problema relacionado com o problema proposto e que foi resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Será necessário introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não conseguir resolver o problema proposto, procure resolver, primeiro, algum problema relacionado com o problema original e que seja mais acessível. Um problema mais genérico? Um problema análogo? Consegue resolver parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condição, ponha a outra de lado; até que ponto fica, assim, determinada a incógnita? Como pode esta última variar? É possível extrair alguma coisa dos dados? Consegue pensar noutros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível mudar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de forma que a relação entre eles seja mais imediata? Utilizou todos os dados? Utilizou a condição na totalidade? Tomou em consideração todas as noções essenciais implicadas no problema?
Terceiro *Execute* o seu plano.	**EXECUÇÃO DO PLANO** Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. Consegue ver, com clareza, que o passo está correcto? Consegue demonstrar que ele está correcto?
Quarto *Examine* a solução obtida.	**VERIFICAÇÃO** É possível verificar *o resultado?* É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Consegue vê-lo, num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Figura 1. “A lista” publicada no livro *Como Resolver um Problema* (Polya, 2003, p.16-17)

Procurando organizar o processo de resolução de problemas, Polya dividiu-o em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação.

I - Compreensão do problema

Nesta primeira etapa temos que entender claramente o desafio que nos está a ser colocado, podendo ainda ser subdividida em duas:

a) Familiarização

b) Aperfeiçoamento da compreensão.

Na primeira, pretende-se que se "v*isualize o problema com tanta clareza e nitidez quanto possível.*" (Polya, 2003, p. 53). Não havendo preocupação com particularidades, desta forma familiarizamo-nos com o problema, podendo ocorrer um estímulo da memória e esta ficar preparada para a lembrança de pontos importantes.

Durante o aperfeiçoamento da compreensão faz-se novamente referência ao enunciado do problema e é dada a indicação de que só se deve prosseguir quando este estiver claro para quem o está a resolver.

É importante escolher uma notação adequada e se houver uma figura relacionada com o problema, dever-se-á nela indicar a incógnita e os dados. Desde que não se espere uma resposta concludente, por vezes ainda nesta fase preparatória, poderá ser útil questionar se as condições disponíveis são ou não suficientes para chegar à solução e averiguar se existem condições redundantes ou contraditórias.

II - Estabelecimento de um plano

Nesta fase, define-se a estratégia de actuação.

"Temos um plano quando conhecemos, pelo menos em linhas gerais, quais os cálculos ou as construções que temos de executar para obter a incógnita". (Polya, 2003, p. 29-30).

O percurso entre a compreensão e a estratégia de actuação pode ser longo e tortuoso pois é o plano o grande feito, o momento-chave na resolução de um problema.

Quando se tem que descobrir uma conexão entre os dados e a incógnita, pode ser conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares. Nesta fase, está-se claramente em "*perseguição da ideia útil*", tem que se analisar o problema sob diversas perspectivas, procurando ligações com conhecimentos que já se possuem.

"*Uma boa ideia é a que mostra todo o percurso a seguir ou parte dele; uma boa ideia sugere-lhe, com maior ou menor nitidez, como continuar."* (Polya, 2003, p.55)

Como pode uma ideia ser útil? As ideias podem ser mais ou menos completas, mas até as que são incompletas devem ser tidas em consideração. A ideia pode parecer promissora, consistente, devendo ser analisada detalhadamente e verificar-se até onde permite ir. Durante o processo de averiguação da potencialidade de certa ideia, pode surgir outra que encaminhe para a solução do problema.

"*Mesmo que, durante algum tempo, não lhe ocorra qualquer ideia apreciável, deverá sentir-se feliz se a sua concepção do problema se tornar mais completa ou mais coerente, mais homogénea ou mais equilibrada."* (Polya, 2003, p.55)

III - Execução do plano

Partindo da ideia feliz que permitiu elaborar uma estratégia para resolver o problema, é importante que exista a confiança necessária para realizar os pormenores fundamentais. Há que executar detalhadamente todas as operações, geométricas e/ou algébricas, trabalhando de forma cautelosa e verificando que não há falhas, quer com base no raciocino formal quer por via da intuição. Na execução da estratégia delineada, importa que se preste atenção a cada passo.

Por vezes há a tentação de realizar esta etapa de forma precipitada ou elaborar estratégias inadequadas, acabando por se dificultar a execução do plano e entravando a resolução do problema. Nesse caso, tem que se ser suficientemente persistente para voltar à etapa anterior e elaborar uma nova estratégia.

IV - Verificação

Segundo Polya, devemos começar esta fase após a resolução completa e correcta em todos os seus pormenores. Deve-se examinar a solução obtida, verificando os resultados e os argumentos utilizados. Faz-se uma depuração da argumentação usada, procurando simplificá-la, podendo-se chegar ao extremo de se procurarem outras maneiras de resolver o problema. Deve-se procurar modificar vantajosamente partes da resolução, de modo a torná-la mais intuitiva e, de uma forma natural, consolidá-la para que possa vir a constituir uma nova ferramenta para a resolução de outros problemas.

O objectivo é reflectir sobre o processo de resolução, procurar descobrir a essência do problema e do método de resolução utilizado; o alcançar com sucesso este objectivo poderá representar a possibilidade de aumentar os recursos pessoais na resolução de problemas. Assim, inspeccionar e examinar a resolução permitirá conquistar alguns conhecimentos bem estruturados, prontos a serem utilizados, ampliando a capacidade de resolver problemas.

Modelo de Schoenfeld

De acordo com Alan Schoenfeld (1985, citado por Borralho, 1990), a resolução de problemas assenta no pressuposto teórico de que há quatro categorias de conhecimento ou habilidades necessárias para se ser bem sucedido:

a) Recursos, conhecimento de procedimentos e questões da Matemática.

b) Heurísticas, conhecimento de estratégias e técnicas para resolução de problemas.

c) Controle, decisões sobre quando e quais recursos usar.

d) *Convicções*, uma visão matemática do mundo que determina como alguém aborda um problema.

A teoria de Schoenfeld é sustentada por uma vasta análise de protocolos de alunos a resolverem problemas. Para Schoenfeld, o conhecimento das heurísticas de resolução de problemas é uma habilidade importante para um bom matemático, não sendo suficiente dominar a teoria matemática para se ter sucesso na resolução de problemas.

"…Uma estratégia directiva para enfocar os problemas, utilizada conjuntamente com as heurísticas, pode ajudar os estudantes a aplicá-las e pode melhorar o desempenho na resolução de problemas" (Nickerson et al, 1987, citado por Borralho, 1990, p. 57).

Segundo Schoenfeld (1980), a estratégia directiva, com as respectivas heurísticas, apresenta-se em cinco fases:

I - Análise

Nesta primeira fase, o principal propósito é o da compreensão do problema e da percepção da importância de examinar dados, factores desconhecidos, etc., podendo passar-se por uma reformulação que visa a simplificação do problema sem perder a generalidade.

Para esta fase, algumas heurísticas são (Schoenfeld, l985, citado por Borralho, 1990):

1. Se possível, elabore um diagrama.

2. Examine os casos especiais:

2.1. Escolha valores especiais para exemplificar o problema e adquira consciência deles.

2.2. Examine os casos limite para explorar o espectro de possibilidades.

2.3. Iguale todos os parâmetros a números inteiros 1, 2, 3,... numa sucessão e procure um padrão idêntico.

3. Tente simplificar o problema através:

3.1. da exploração da simetria.

3.2. de argumentos sem perder generalidade.

II - *Desenho*

O objectivo nesta segunda fase é o de se continuar com a total percepção de todo o processo de resolução, definindo uma estratégia sobre o modo de actuação, acautelando que não se efectuem cálculos de forma precoce. Nesta fase Schoenfeld não indica heurísticas.

III - Exploração

Se não se definiu ainda um plano consistente para a resolução do problema, avança-se na sua exploração para ultrapassar as dificuldades. Esta fase contém três passos de heurísticas de crescente concretização:

1. Considere essencialmente problemas equivalentes.

1.1. Substitua as condições por outras equivalentes.

1.2. Reúna os elementos do problema de diferentes maneiras.

1.3. Introduza elementos auxiliares.

1.4. Volte a formular o problema:

1.4.1. mudando a perspectiva ou a notação.

1.4.2. considerando argumentos por contradição ou por contra- exemplos.

1.4.3. supondo uma resolução e aceitando as suas propriedades.

2. Considere problemas um pouco modificados.

2.1. Escolha sub-objectivos e obtenha uma realização parcial das condições.

2.2. Retire uma condição e de seguida tente colocá-la novamente, observando os resultados.

2.3. Decomponha o domínio do problema e trabalhe ponto por ponto.

3. Considere problemas profundamente modificados.

3.1. Construa um problema análogo com menos variáveis.

3.2. Mantenha fixa todas as variáveis excepto uma, com o intuito de averiguar o impacto desta variável.

3.3. Tente aproveitar qualquer problema afim que seja semelhante quanto a:

3.3.1. sua forma.

3.3.2. seus dados.

3.3.3. suas conclusões.

IV - Realização

Nesta fase adquire-se a consciência de que temos um plano para resolver o problema. Nesta altura, poderão existir equações a resolver ou outras condições ou então podemos ter "*... uma questão descoberta durante a exploração para registar ponto por ponto."* (Borralho, 1990, p.59)

Também não existem heurísticas específicas para esta fase.

V - Verificação

O objectivo desta fase é o de controlar o processo de resolução, existindo algumas heurísticas importantes a considerar:

1. A resolução passa por estes testes específicos?

1.1. Utiliza todos os dados pertinentes?

1.2. Enquadra-se com as estimativas?

1.3. Tem aprovação nas provas de simetria, análise de dimensão e escalas?

2. *A resolução passa pelos seguintes testes gerais?*

2.1. Pode obter-se de um modo diferente?

2.2. *Pode comprovar-se através de casos específicos?*

2.3. Pode reduzir-se a resultados conhecidos?

2.4. Pode ser utilizada para gerar algo que se conheça?

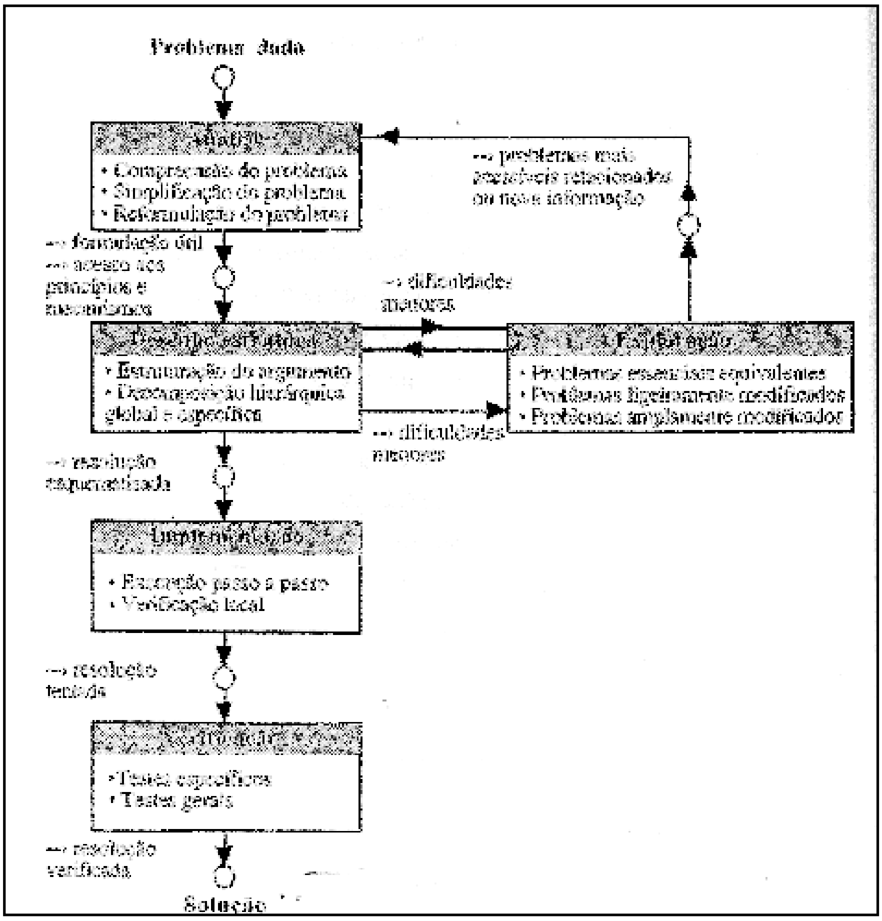


Figura 2. Modelo de resolução de problemas de Schoenfeld (apresentado por Borralho, 1990, p. 60)

Feita a descrição destes dois modelos de resolução de problemas, de Polya e de Schoenfeld, e comparando as duas esquematizações em termos de fases e heurísticas associadas, ressalta uma semelhança entre ambos. Nos dois casos, há uma preocupação com a clarificação e compreensão do problema, é dada grande ênfase à construção de uma estratégia e à verificação da solução e do processo de resolução. Existe, contudo, alguma diferença a nível da qualidade das heurísticas nos dois modelos. No caso do modelo de Polya, estas são bastante intuitivas e dão grande relevo, antes de mais, ao bom senso e a bons princípios a seguir durante o processo de resolução. Se considerarmos o modelo de

Schoenfeld, encontramos maior objectividade, mais técnica, mais minúcia e menos apelo às características naturais dos indivíduos. Isto reflecte um processo de trabalho subjacente ao modelo de Schoenfeld, que é mais centrado na prática de resolução de problemas com alunos universitários e revelando os processos exibidos por estes em sessões de resolução de problemas.

A minha maior identificação com a proposta de Polya assenta na sua capacidade de despertar a atenção para um conjunto de características importantes do papel do professor na sala de aula, mesmo que não se esteja a trabalhar especificamente a resolução de problemas. Neste sentido, tem também um carácter didáctico/pedagógico que pode encontrar eco nas práticas do professor de Matemática ou então ser um incentivo à mudança. A sua maior simplicidade, apesar de o tornar mais genérico, tem a vantagem de o tornar mais acessível para todos, professores e alunos. O de Schoenfeld é mais denso e assim menos flexível como orientador da actividade na sala de aula.

Em ambos os casos é importante não perder a noção de que se tratam de modelos, como tal são guias que auxiliam tanto o aluno, como o professor, a terem mais consciência de tudo o que implica a resolução de um problema. São situações correntes aquelas em que o aluno dá por encerrado o processo de resolução quando chega a uma solução, esquecendo a sua verificação.

Ambos os modelos especificam etapas muito demarcadas que nem sempre se percorrem de uma forma clara, ou pela natureza do problema, ou ainda pelas ferramentas disponíveis durante o processo de resolução. Em particular, o recurso às tecnologias altera um pouco a sequência das etapas que se vão executando; por exemplo, é mais frequente ocorrerem experiências e testes às ideias que vão surgindo. De certa forma, o plano é imediatamente executado e rapidamente testado, havendo um *feedback* constante sobre as operações que se efectuam.

A resolução de problemas na aula de Matemática

2.1. Evolução das orientações curriculares

Desde o início da década de 90 que se desenvolve uma expressiva dinâmica de reforma curricular em Portugal, marcando uma mudança com o que se passava até então *"…quer no que diz respeito ao processo global de desenvolvimento curricular, quer no que diz respeito ao seu conteúdo, …"* (Canavarro, 2005, p.43).

No seminário promovido em 1988 pela Associação de Professores de Matemática sobre *Renovação do Currículo de Matemática*, era destacada a resolução de problemas como devendo estar no centro do ensino e aprendizagem da Matemática, em todos os níveis de ensino. Consideram-se entre outras orientações, a resolução de problemas numa perspectiva de todo o trabalho desenvolvido em torno de situações problemáticas "*envolvendo processos e actividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar*" e a implementação "*dos instrumentos que a evolução tecnológica tem posto ao serviço…designadamente as calculadoras e os computadores*." (Canavarro, 2005, p. 46)

As orientações curriculares para o ensino da Matemática têm vindo a afirmar-se, no sentido de promoverem um desenvolvimento integral e equilibrado do aluno como pessoa, fomentando a sua auto-realização como individuo e cidadão. Assim, é essencial criar condições na sala de aula para que os alunos tenham a possibilidade de desenvolver a capacidade de usar a Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar.

As finalidades e os objectivos das orientações curriculares consideram aspectos quer de natureza cognitiva, quer de natureza mais sócio-afectiva, ao nível da aquisição e desenvolvimento dos conhecimentos, de capacidades e de valores e atitudes. Como grandes finalidades da disciplina de Matemática, pretende-se o desenvolvimento da capacidade de formular e resolver problemas, de raciocinar e comunicar matematicamente, de promover um aprofundamento técnico-científico que constitua um suporte cognitivo e metodológico que contribua para uma cidadania activa e participativa.

Também no documento *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais* (ME, 2001), se considera que ser competente matematicamente envolve, de forma integrada, um conjunto de valores e atitudes, de capacidades e conhecimentos. Torna-se essencial a predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica.

Nos *Principles 2000* é igualmente dada primazia à compreensão na aprendizagem em relação à memorização, sendo objecto de grande atenção, em especial no *princípio* dedicado à aprendizagem. "*...A compreensão é apresentada como condição ou pré-requisito facilitador do progresso da aprendizagem, bem como do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade para enfrentar novas situações e resolver novos problemas*". (Guimarães, 2005, p. 3).

De acordo com as orientações curriculares, cabe ao professor promover um ambiente propício à resolução de problemas, devendo constituir um dos pilares de sustentação da prática lectiva, uma vez que estabelece uma contribuição fundamental para desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar matematicamente e aplicar a Matemática em diferentes situações. Reforça-se a resolução de problemas como um método fundamental, considerada pelo programa curricular não só como uma indicação metodológica mas como um dos temas transversais e, assim sendo, devendo ser implementada ao longo dos três anos do ensino secundário. Contudo, a resolução de problemas surge no programa também como um factor de motivação e recuperação, constituindo o meio privilegiado para promover o espírito de pesquisa e suscitar a comunicação oral e escrita na aula de Matemática.

O tema da Resolução de Problemas continua, nos *Principles & Standards* (NCTM, 2000), a constituir um dos dez *standards*; porém é um dos cinco *standards* relativos aos processos matemáticos que surgem sempre em paralelo com os outros cinco relativos aos conteúdos matemáticos.

Já nas Normas (APM, 1991) o tema Resolução de Problemas surgia com grande destaque, defendendo-se que devia constituir a incidência particular do ensino da Matemática. O processo da resolução de problemas, para além de permitir aos alunos verificarem as potencialidades da Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo que os rodeia, é também um processo de investigação e aplicação, proporcionando um contexto consistente para a aprendizagem Matemática.

"...a resolução de problemas é muito mais do que a aplicação de técnicas específicas para resolver problemas tipo. É um processo pelo qual o edifício da Matemática, ... é simultaneamente construído e reforçado." (APM, 1991, p.163)

A forma como a Matemática é ensinada é considerada tão importante como o que é ensinado; é defendido que para introduzir novos assuntos se deve recorrer a problemas e a aplicações matemáticas, permitindo assim que os alunos desenvolvam simultaneamente a compreensão de novos conceitos e aprendam a aplicar e a rever processos anteriormente estudados.

A verificação de todo o processo de resolução do problema pode proporcionar a aquisição de conhecimentos bem estruturados e pode ainda levar a reformular a resolução e/ou desenvolver extensões do problema que enriquecerão a experiência matemática. (Polya, 2003; APM, 1991)

Porém, a realidade das escolas é ainda diferente daquilo que se defende nos vários documentos orientadores. O relatório *Matemática* 2001 (APM, 1998), baseado num estudo feito junto das escolas, denuncia a realidade das dificuldades de mudança, apesar da diversidade de ideias que constam nas orientações metodológicas dos programas oficiais. Segundo este relatório, apoiado em dados recolhidos em 1996/97, os exercícios são a situação de trabalho mais frequente, sendo que 93% dos professores recorrem a esta tarefa sempre ou em muitas aulas. Ainda de acordo com este estudo, a resolução de problemas vai perdendo expressão na prática dos docentes ao longo da escolaridade e também as actividades de exploração têm poucas referências em todos os anos de escolaridade.

Quanto ao recurso a tecnologias na aula de Matemática, nomeadamente calculadoras e computadores, as suas implementações nas escolas têm expressões diferentes. Enquanto que cerca de metade dos professores indicam o recurso com muita frequência à calculadora – principalmente no ensino secundário – quanto à utilização de computadores, esta é muito pouco significativa, havendo cerca de 88% dos professores que declara nunca ou raramente os utilizar (APM, 1998).

Deve também ser proporcionada ao aluno a possibilidade de observar a interacção entre a Matemática e outras disciplinas, dentro e fora da escola. A partir desta interdisciplinaridade, da integração da Matemática em outros domínios, o aluno poderá observar e apreender um significado prático para a simbologia e processos matemáticos. A resolução de problemas, descrevendo e modelando fenómenos do mundo real, permite ao aluno concluir sobre a utilidade da Matemática, ajudando-o na compreensão do mundo em que ele está inserido, permitindo-lhe interagir e comunicar conceitos complexos e informação de uma forma concisa e precisa.

"As diferentes representações dos problemas servem como diferentes lentes através das quais os alunos interpretam os problemas e as soluções" (APM, 1991, p. 101).

Os alunos que conseguem efectuar diferentes representações da mesma situação problemática ou conceito matemático disporão de um conjunto de instrumentos poderoso e flexível, ou seja, terão um maior domínio da Matemática e maior capacidade de estabelecer conexões.

As conexões e as interacções entre os vários temas matemáticos e suas aplicações devem ser incluídas no ensino da Matemática (APM, 1991). Desta forma, pretende-se que todos os alunos reconheçam e relacionem representações equivalentes do mesmo conceito, bem como utilizem e valorizem as conexões entre os diferentes temas matemáticos – conexões matemáticas – e também entre a Matemática e as restantes disciplinas – conexões de modelação. Estes dois tipos de conexões estão a seguir esquematizados.

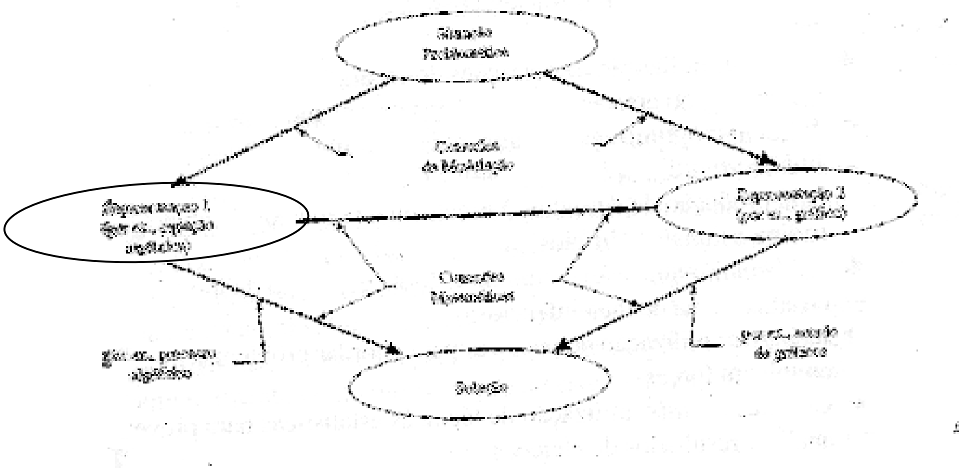


Figura 3. Representação das conexões matemáticas e das conexões de modelação. (APM, 1991, p. 175)

Habitualmente, a resolução de problemas é deslocada para os momentos em que já foram tratados todos os conteúdos de um certo tema, com o intuito de aplicar os conhecimentos adquiridos. Os problemas surgem, assim, de forma pontual, em muitos casos induzidos pela própria organização dos manuais escolares. Estas práticas não são promotoras da capacidade de resolução de problemas dos alunos, uma vez que esta se desenvolve ao longo do tempo, como resultado de um ensino continuado e com sucessivas oportunidades de resolver vários e diferentes tipos de problemas. Em certa medida, estas práticas são o resultado da própria experiência dos professores enquanto alunos e de um mecanismo de acomodação e resistência a novas metodologias de ensino. Porém, reconhecem-se cada vez mais ventos de mudança, quer no maior acesso a novas propostas, ideias e materiais, quer na própria filosofia subjacente à interpretação do currículo pelo professor, quer ainda nos manuais escolares que sugerem de uma forma mais visível e regular as actividades de resolução de problemas.

2.2. O papel do professor

A resolução de problemas na sala de aula deve ocorrer num ambiente que encoraje os esforços feitos pelos alunos. "*Os alunos aprendem mais e melhor num ambiente acolhedor, no qual se sintam livres para explorar ideias matemáticas, colocar questões, discutir as suas ideias e cometer erros*" (APM, 1991, p.69). Assim, o professor deve encorajar os seus alunos a desenvolver ideias e explorar sugestões apresentadas. Deve ainda ajudar os seus alunos a reflectirem criticamente sobre as sugestões de colegas e orientá-los na avaliação das suas próprias formas de pensar, promovendo assim a independência de uma autoridade exterior que lhes diga se está certo ou errado (Boavida, 1993). Neste contexto a atitude do professor é determinante na implementação de um ambiente de respeito mútuo, onde ouve os seus alunos e estes se ouvem entre si, criando-se assim uma atmosfera facilitadora da aprendizagem da Matemática e da resolução de problemas.

Também Polya refere a importância do papel do professor, definindo como uma das tarefas mais importantes a de ajudar os seus alunos, exigindo para isso tempo, prática, dedicação e bons princípios, devendo ser feita de forma discreta, oportuna e com naturalidade.

Borralho (1990) apresenta um esquema de procedimentos para o professor, assumindo o papel de controlador/moderador durante a discussão da resolução de problemas na turma. A função do professor deve ser a de auxiliar os alunos a rentabilizarem o que eles próprios produzem, ajudando-os a reflectir sobre a sua própria actuação. Durante o processo de discussão, o professor não deve avaliar as sugestões apresentadas pelos alunos, mas sim promover o debate em torno das ideias sob diferentes pontos de vista.

"*O importante é que os alunos, antes de decidirem por uma resolução, procurem boas representações, gerem e seleccionem aproximações para o problema, capitalizem* *oportunidades ...e evitem despender as suas energias em respostas que são claramente inapropriadas."* (Borralho, 1990, p.152)

Polya (2003) menciona o papel do professor em evitar que os alunos na sala de aula trabalhem de forma despropositada, ou seja, para um fim que não se deseja. Na aula, o professor deve interpelar para tentar confirmar que o aluno inequivocamente compreendeu o problema, caso contrário corre-se o risco de se estar a trabalhar inutilmente. "*É uma tolice responder a uma pergunta que não se tenha compreendido*." (Polya, 2003, p. 28)

Contudo, estas situações ocorrem muitas vezes; os alunos manifestam regularmente dificuldades associadas à interpretação do enunciado do problema. O professor deve procurar certificar-se de que o seu aluno compreendeu o enunciado do problema. Para isso, pode começar por solicitar ao aluno que o enuncie por palavras suas e que identifique as partes principais do problema, como a incógnita, os dados e as condições.

Para Mason (1996), há que capacitar os alunos de que o sucesso na resolução de problemas não consiste apenas em alcançar a solução, mas também na elaboração de conjecturas sustentáveis e construção de argumentos convincentes, desempenhando o professor, durante o processo, o papel de sustentação do raciocínio matemático nos momentos de dificuldade para os alunos. Características como sensibilidade, experiência, ponderação e bom senso são importantes para um desempenho eficiente deste papel, por parte do professor.

2.3. Concepções

Algumas práticas escolares pouco enriquecedoras sob o ponto de vista da aprendizagem da Matemática são referidas por Abrantes (1988). Existem hábitos enraizados no ensino com resolução de problemas, como a excessiva repetição de uma determinada estratégia, a preocupação por parte do aluno em abastecer-se de *uns quantos truques*, o decorar ou reproduzir demonstrações, a não apresentação de questões em aberto por parte dos professores, etc.

Ensinar Matemática, recorrendo diariamente à resolução de exercícios rotineiros para os quais os alunos se limitam a escolher fórmulas e/ou algoritmos para darem a resposta, não é certamente um ensino que promova o desenvolvimento de competências matemáticas, nem são estas propostas didácticas interessantes e motivadoras para os alunos. Porém, os próprios alunos têm concepções acerca da resolução de problemas. Frank (1992) refere, com base num estudo feito com alunos que frequentaram um curso de resolução de problemas em ambiente computacional, que para os alunos, de uma forma geral, os problemas de Matemática resolvem-se em poucos passos e rapidamente, sendo apenas tarefas de rotina, nas quais se podem aplicar os algoritmos estudados previamente.

Muitos professores ao mostrarem como resolver os problemas, na sala de aula, apresentam aos alunos uma resolução linear, muitas vezes explicando pormenorizadamente cada um dos passos, como se não fosse necessário fazer tentativas, testar ideias, haver avanços e recuos, e jamais surgissem hesitações. Ou seja, ele trata os problemas como ilustrativos, como exercícios de aplicação da teoria e não como verdadeiros problemas, que é o que eles deveriam representar para o aluno.

A compreensão por parte dos alunos da resolução destes problemas-tipo, que muitas vezes exigem um conhecimento e domínio dos conteúdos estudados, é vista pelo professor como condição suficiente para que o aluno consiga sozinho resolver os problemas que lhe são apresentados a seguir. Se posteriormente o aluno revela dificuldades ou incapacidade para resolver problemas, geralmente são diagnosticadas pelo professor como falha na compreensão dos temas estudados ou então falta de conhecimentos matemáticos.

Também Mason (1996) refere a importância de o professor impulsionar e questionar os seus alunos, não se concentrando apenas na solução ou no método. Para isso, o professor deverá basear a sua confiança não em factos matemáticos ou técnicas automatizadas para resolver "problemas" padronizados, mas sim baseá-la na sua *"...percepção matemática, na sua intuição e consciência dos processos básicos de raciocínio matemático...*" (p.84). Deste modo, o professor conseguirá acompanhar e auxiliar o trabalho desenvolvido pelos alunos.

Embora muitas destas concepções façam parte da realidade dos nossos professores e alunos, têm ocorrido na sociedade transformações profundas às quais a escola não vai poder ficar indiferente. Começam a ser visíveis sinais de mudança, nas exigências dos alunos que estão hoje sentados nas carteiras e que fora da escola são sensorialmente estimulados de forma intensa, nos recursos disponíveis para a prática lectiva e nas necessidades que a sociedade vai impondo. Todos estes factores de pressão irão, certamente, actuar no sentido de levar os professores a reconhecer a necessidade de alterar muitos dos padrões de actuação instalados. Questões como a introdução da resolução de problemas na sala de aula e a implementação das tecnologias implicarão, inevitavelmente, novas visões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

3. As tecnologias no ensino da Matemática

Nos últimos anos, as tecnologias de informação e comunicação têm tido uma forte influência no desenvolvimento da Matemática. Em particular, o computador permitiu alargar o campo das aplicações da Matemática, trouxe novos processos de investigação e os próprios modelos computacionais originam problemas que têm impulsionado diferentes ramos da Matemática.

A relação do computador com a Matemática tem-se alterado ao longo dos tempos; começou por ser usado para realizar cálculos numéricos morosos, tendo a sua utilização vindo a diversificar-se e a tornar-se mais complexa. Porém, esta parceria entre o computador e a Matemática não tem sido sempre pacífica, havendo matemáticos a contestarem, por exemplo, as demonstrações assistidas por computador, como aconteceu em 1976 com a demonstração do Teorema das Quatro Cores, apresentada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken. A avaliação da demonstração depende, não só da capacidade de análise da comunidade matemática, mas também da convicção de que os computadores fazem correctamente o que é presumido que façam, podendo assim parecer que há uma certa deterioração do grau de exactidão e do rigor lógico-dedutivo que viola a própria natureza da Matemática.

3.1. Potencialidades das tecnologias

Actualmente, os professores e os alunos vivem e crescem num ambiente em que as tecnologias de informação, em particular os computadores, têm um papel relevante. A rapidez do acesso à informação, a quantidade e a qualidade dessa informação obrigam as pessoas a serem cada vez mais selectivas e a pressão vai no sentido de melhorar a capacidade dos indivíduos de lidar com tantos e tão rápidos fluxos de dados (Matos, 1991). Em vários aspectos, a implementação das tecnologias na sala de aula, em especial o computador, pode influenciar a forma como a Matemática é aprendida na escola. Entre outros, é de salientar a relação da experiência matemática com o desenvolvimento das concepções dos alunos sobre essa disciplina, que nos impele a considerar a importância das tecnologias neste domínio.

Sabe-se que as novas tecnologias de informação provocam o aparecimento de novos saberes e competências ligados ao tratamento da informação. Domingues (1999) refere que vivemos num mundo competitivo, pelo que é cada vez mais imprescindível o espírito crítico, a capacidade de abordar novas situações, enfrentar dificuldades e problemas e conseguir tomar decisões. Cabe assim à Escola um papel decisivo no desenvolvimento da capacidade empreendedora dos seus alunos, concebendo, implementando e avaliando projectos diversificados que incluam o recurso às tecnologias.

Ponte (2000) refere três perspectivas de integração das tecnologias na escola:

i) ensino assistido por computador

O computador surge como um "professor electrónico" com o objectivo de transmitir conhecimentos e desenvolver algumas destrezas básicas; existem os "programas tutoriais" com a função de explicarem novos conteúdos aos alunos, sendo o computador como um livro digital, e ainda os "programas de prática" estruturados de modo a que os alunos executem determinadas tarefas, com progressivos níveis de dificuldades. De acordo com o autor, esta é uma perspectiva muito limitada, enquadrando-se numa lógica de que a principal finalidade da escola é a da transmissão de conhecimentos e aquisição de destrezas.

"Na verdade, em termos de objectivos, considera-se hoje fundamental a construção de conhecimentos, competências, atitudes e valores que vão muito para além daquilo que se pode aprender por simples memorização e prática repetitiva." (Ponte, 2000, p.72)

Esta óptica pressupõe ainda que o professor é substituível, bem como prescindíveis as relações que se estabelecem, durante o processo de ensino-aprendizagem, entre o professor e o aluno.

ii) alfabetização informática

Nesta perspectiva é o próprio computador o objecto de estudo, servindo de base a uma nova disciplina curricular, com o objectivo de que os alunos conheçam as partes constituintes dos sistemas informáticos e o respectivo funcionamento. É o caso de disciplinas actualmente em vigor nos planos de estudo, como as TIC e outras, integradas nos diversos cursos com uma forte componente tecnológica na área da Informática.

iii) ferramenta de trabalho

As tecnologias podem e devem ser usadas na escola como instrumentos, de formas variadas e criativas, por professores e alunos, enquadrando-se esta perspectiva numa lógica de trabalho de projecto e atribuindo-se ao aluno o protagonismo no processo de ensino-aprendizagem.

Apesar de referir que esta última perspectiva é de longe a mais interessante, o autor considera que tem limitações, a começar pelos próprios currículos escolares que não têm em conta as inúmeras especificidades do processo de ensino-aprendizagem e também não estão ajustados à plena integração das tecnologias.

"A utilização das TIC como ferramenta tanto pode ser perspectivada no quadro de actividades de projecto e como recurso de investigação e comunicação, como pode ser

reduzida a uma simples aprendizagem, por processos formais e repetitivos, de uns tantos softwares e programas utilitários. Ficam, ainda, por equacionar novos papéis para a escola, novos objectivos educacionais e novas culturas de aprendizagem." (Ponte, 2000, p.73).

Para Ponte (2000), as tecnologias, num futuro, marcarão de forma mais visível a escola, com a criação de espaços de interacção e comunicação, possibilidades de expressão criativa, realização de projectos e formas de reflexão crítica. Para ocorrerem estas transformações, o autor refere duas condições essenciais: um acesso generalizado às TIC por parte da sociedade em geral e o protagonismo dos professores como principais actores do processo educativo.

Matos (1991) afirma que o ambiente de trabalho em que os alunos contactam com as ideias matemáticas, além de influenciar a forma e o conteúdo da aprendizagem, tende a contribuir para o desenvolvimento de concepções e atitudes em relação àquela disciplina, dando, por isso, grande ênfase à experimentação na sala de aula. Os alunos aprendem na escola muito mais do que os conteúdos curriculares, que constituem em geral o principal foco de atenção, desenvolvendo concepções sobre a Matemática, sobre os papéis dos alunos e professores, sobre a actividade matemática e a sua capacidade de a realizar. As experiências feitas com recurso ao computador conferem à actividade matemática uma dimensão que tradicionalmente os alunos não encontram nem conceptualizam no seu percurso escolar.

O contexto em que as ideias matemáticas são formuladas e discutidas pelos alunos pode beneficiar da implementação dos computadores como instrumentos de trabalho que são colocados ao serviço da formulação e exploração de situações problemáticas, permitindo aos alunos desenvolver o gosto pela Matemática e aumentando a sua capacidade de usarem os conhecimentos matemáticos que possuem. Matos (1991) refere que a introdução dos computadores no ensino da Matemática não deve ser apenas encarada como um benefício para a aquisição de conteúdos por parte dos alunos. Estes precisam de explorar e investigar, para assim poderem descobrir relações entre os diferentes conceitos e formular generalizações a partir de experiências.

"*Uma das finalidades importantes do ensino da Matemática é ajudar os alunos a desenvolver a concepção de que têm o poder de fazer Matemática e que podem aumentar o seu controlo sobre o seu sucesso. E esta é uma das dimensões em que a utilização dos computadores pode ter um papel relevante. O que está em causa é a mudança de relação dos alunos e dos professores com a aprendizagem e com o conhecimento matemático.*" (Matos, 1991, p. 36)

Carreira (1992) realça a implementação do computador na sala de aula como um importante passo para o ensino de uma Matemática mais realista, uma vez que os cálculos deixam de constituir obstáculos, viabilizando assim a análise de dados obtidos a partir de fenómenos reais, ou seja, de um modo geral, conceitos matemáticos mais avançados tornam-se acessíveis com o uso do computador.

O computador apresenta-se como um auxiliar electrónico para o aluno, permitindo-lhe a progressão durante uma actividade, ao ajudá-lo nas manipulações algébricas e no cálculo, que tantas vezes se tornam o motivo de fracasso e desilusão e diminuem o significado da experiência. Para além da funcionalidade de auxiliar o aluno, Carreira (1992) defende que os modelos computacionais têm uma forte conexão com os modelos matemáticos abstractos, quer na sua validação, quer na sua construção.

De acordo com Schultz (1994), a tecnologia tem um impacto no currículo de Matemática em pelo menos quatro vertentes:

a) Facilitar os cálculos, podendo assim utilizar-se dados reais nos problemas;

b) Facilitar a aprendizagem de conceitos;

c) Suscitar a necessidade de aprender novos conceitos;

d) Adquirir novas capacidades.

Para o autor, a tecnologia atribui poder matemático a um maior número de alunos, possibilitando-lhes a resolução de problemas, envolvendo até conteúdos ainda não leccionados; com uma calculadora ou um computador, o aluno passa a dispor da possibilidade de resolver o problema que de outra forma seria inacessível.

3.2. Que mudanças para a sala de aula?

A utilização das tecnologias implica alterações nas concepções sobre o ensino e a aprendizagem, impondo uma reflexão sobre que capacidades e processos devem ser valorizados.

Como salienta Carreira (1992), a implementação das tecnologias, em particular do computador, na sala de aula, por força das suas próprias características, impõe uma desvalorização das tarefas mecanizadas, nas quais o computador mostra todo o seu potencial. Assim, a professores e alunos será exigida a capacidade de supervisionar e controlar os processos automatizados e não que os executem. Contudo, para uma eficiente supervisão e controlo da máquina, impõe-se um domínio básico de conceitos, métodos matemáticos e também de procedimentos automatizados.

Canavarro e Ponte (1997) apresentam as influências significativas ocorridas, quer nas formas de trabalho, quer nos objectivos, pela utilização na sala de aula da calculadora e do computador (p. 98):

a) "*Impõe a relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica…*", uma vez que as máquinas fazem-no com mais rapidez e rigor do que o ser humano. A relativização do papel do cálculo constitui uma das mais profundas implicações que as novas tecnologias trazem ao currículo de Matemática;

b) "*Incentiva o investimento no desenvolvimento de capacidades intelectuais de ordem mais elevada, como o raciocínio, a resolução de problemas e a capacidade crítica que se situam para além do cálculo e da compreensão de conceitos e relações matemáticas simples*". As tecnologias disponibilizam ao aluno novas estratégias, podendo este resolver problemas que de outro modo seriam impossíveis de tratar.

c) "*Valoriza o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação…*"

d)"*Promove a realização de projectos e de actividades de modelação, de investigação e exploração pelos alunos…"*

e) "*Possibilita o envolvimento dos alunos em actividade matemática intensa e significativa…"*

Para Canavarro e Ponte (1997), as novas tecnologias implicam mudanças nos próprios conteúdos curriculares, repercutindo-se não só na importância dos temas estudados, mas também no modo de abordagem, bem como na sequência pela qual são leccionados. Como contrapartida à relativização do papel do cálculo no currículo, os autores referem que os alunos deverão prestar uma maior atenção à identificação das operações a efectuar numa dada situação. Sublinham ainda a importância de os alunos ganharem uma postura crítica perante os resultados obtidos pelas máquinas.

Farrel (1990) identifica mudanças nos papéis, quer dos professores, quer dos alunos, com a implementação das tecnologias. Os alunos tornam-se menos passivos, trabalhando mais em grupo, fazendo mais investigação. Quanto aos professores, desempenham um papel cada vez mais de consultores e menos de explicadores. O professor fica assim mais disponível para tarefas que só ele pode desempenhar, como por exemplo explorar conjecturas em conjunto com os seus alunos.

Também Amorim (1996) defende a reformulação dos papéis dos professores na sala de aula com o implementar das tecnologias, atribuindo-lhes novas tarefas: catalisador das aprendizagens e facilitador das interacções nos grupos – o professor passa a interagir mais com os alunos, dinamizando discussões e criando oportunidades de aprendizagem.

McCoy (1992) estudou esta mesma questão e concluiu que nos ambientes computacionais os alunos têm de comunicar com os colegas do grupo e com o professor, gerando discussões que obrigam a clarificar raciocínios e levando-os a aprender de uma forma mais intrínseca e profunda.

3.3. Pressupostos envolvidos na concepção de *software* para o ensino

Na década de 80, impôs-se uma teoria na educação, designada por construtivismo, que radica nos estudos de Piaget. Estabelece que o conhecimento é construído de forma única por cada indivíduo e que a aprendizagem é um processo de construção dinâmico e singular, no sentido em que é influenciada pelas experiências e vivências de cada um.

De acordo com esta teoria de aprendizagem, as pessoas aprendem efectivamente quando elas estão envolvidas na criação ou manipulação de objectos físicos e mentais. Este processo de criação de oportunidades de aprendizagem com a utilização de materiais significativos para o aluno, não dispensam na sala de aula as discussões entre alunos e professor, as quais envolvem, geralmente, a necessidade de exemplos, contra-exemplos, propostas de resolução de exercícios e problemas. Segundo Coelho (1996), os seres humanos constroem o seu saber a partir das percepções e experiências pessoais que são, por sua vez, mediadas por conhecimentos prévios.

As teorias construtivistas têm sido largamente estudadas e aprofundadas, ao mesmo tempo que têm servido de base de fundamentação para a concepção de diversos exemplos de *software* educativo. O paradigma construtivista clássico assenta na crença de que o conhecimento que todos nós possuímos não é "sobre" o mundo, mas antes uma parte integrante desse mundo e de que os indivíduos são agentes activos que se comprometem com a construção do seu próprio conhecimento.

Papert (1994, citado por Gravina e Santarosa, 1998), refere que a linguagem Logo foi projectada a partir de princípios pedagógicos construtivistas:

"...programar a tartaruga começa com a reflexão sobre como nós fazemos o que gostaríamos que ela fizesse; assim, ensiná-la a agir ou 'pensar' pode levar-nos a reflectir sobre as nossas próprias acções ou pensamentos...E à medida que as crianças progridem, passam a programar o computador para tomar decisões mais complexas e acabam engajando-se na reflexão de aspectos mais complexos do seu próprio pensamento." (p.13)

Numa perspectiva pedagógica, o computador, em si mesmo, pouco ou nada vale. O que interessa é aquilo que o *software* pode proporcionar. Hoje, quando o *hardware* já quase não impõe limitações, a tónica tem de ser colocada ao nível do *software* educativo. Sem dúvida, será através de programas cada vez mais poderosos e de utilização cada vez mais simples e intuitiva, que o computador provará a sua utilidade.

A evolução tecnológica fez com que surgissem novas formas de classificação do uso do *software* educativo. Sánchez (1999) apresenta uma classificação do *software* como:

a) *Software* para apresentar informação e conhecimento;

b) *Software* para representar informação e conhecimento;

c) *Software* para construir informação e conhecimento.

O *software* com o qual é possível construir conhecimento, contém elementos, materiais e ferramentas que favorecem e estimulam a construção de raciocínios e de conjecturas matemáticas. Apresenta uma maior eficácia no tratamento dos conteúdos, na interactividade e na sua adequação ao ensino. É o resultado da crescente procura de *software* educativo com o qual o aluno possa interagir intuitivamente. Estes ambientes computacionais facilitam a aprendizagem de conteúdos específicos e desenvolvem e estimulam a utilização de processos cognitivos de nível superior.

Segundo Sánchez (1999), impõe-se uma permanente visão educacional na construção de *software* para o ensino e na criação de metodologias para o seu uso. Novas propostas de interfaces que estimulem a aprendizagem, a construção do conhecimento e o desenvolvimento de competências, como o pensamento lógico-aritmético, a resolução de problemas, a análise crítica, etc., devem ser exploradas.

Furner (2005) refere que o processo de selecção do *software* para ser utilizado na sala de aula não é fácil; os professores debatem-se com dificuldades na selecção, ou por falta de experiência de trabalho com o *software*, ou por falta de critérios claros para se nortearem durante a escolha. Apesar de existir uma grande variedade de programas de computador, muitos professores têm um conhecimento limitado sobre o seu uso ou sentem dificuldades em identificar o modo de adequação da ferramenta aos objectivos da aula.

Hall & Martin (1999), (citados por Furner, 2005) referem, como alguns dos critérios para selecção de *software*: os objectivos que se pretendem alcançar, o nível etário dos alunos, a apresentação gráfica, o *feedback* fornecido pelo *software*, o possibilitar a aprendizagem colaborativa; deverá igualmente promover o pensamento crítico, a resolução de problemas, o tratamento de situações reais e permitir que o aluno tenha o domínio sobre o desempenho do software.

4. As tecnologias como ferramenta na resolução de problemas

Os computadores e as calculadoras são apontados como poderosas ferramentas para a resolução de problemas, devendo ser incorporadas de forma regular e apoiada.

Moreira (1989) apresenta três funções distintas para o computador na resolução de problemas: apresentação de problemas, simulação da actividade da resolução de problemas e desenvolvimento da capacidade da resolução de problemas. A mesma autora considera ainda que o computador desempenha um papel de relevo durante todo o processo de "fazer matemática".

1. Decidir qual é a questão, o problema, a investigação ou a hipótese.
2. Procurar e seleccionar a informação relevante.
3. Criar um modelo matemático.
4. Manipular o modelo, usando uma técnica seleccionada para o efeito.
5. Coligir, interpretar e explicar os resultados.
6. Comunicar as conclusões.

A importância do computador varia de acordo com as diferentes fases, identificando a 3 e 4, como as que podem ser completamente influenciadas, expandindo tanto as possibilidades de representação de uma determinada situação, como as de manipulação do próprio modelo e a fase 5, como a que é menos influenciada pelas tecnologias, podendo contudo ajudar a testar determinadas conjecturas.

Para Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl (1994), os ambientes computacionais sustentam o desenvolvimento das ideias dos alunos, permitindo-lhes fazer uma efectiva construção do seu conhecimento geométrico. Na resolução de problemas, os alunos começam por ensaiar determinadas soluções aproximadas que se sentem capazes de realizar, através dessas tentativas heurísticas adquirem intuições, formulam juízos que lhes permitem chegar à solução do problema. Estes ambientes são poderosos para a indução de descobertas em Geometria, que podem ser formuladas através de conjecturas (Schumann, 1991). Os alunos podem construir figuras, manipulá-las, intuir propriedades. Estes comportamentos são típicos dos geómetras e são também adoptados pelos alunos, o que lhes permite modelar e utilizá-los na resolução de problemas, incrementando desta forma a sua compreensão e o seu à-vontade na disciplina de Matemática.

Também Blum e Niss (1991) se referem ao papel e impacto da implementação dos computadores no ensino da Matemática como uma mais valia para a resolução de problemas, disponibilizando mais tempo para a análise dos processos de resolução, em detrimento das rotinas implementadas. O computador torna possível a resolução de problemas mais complexos e a utilização de dados reais; problemas até agora considerados inacessíveis sob o ponto de vista teórico, podem actualmente ser abordados numérica e/ou graficamente.

É consensual que o uso das tecnologias promove no aluno uma maior motivação para a sua aprendizagem, pelo que se tem assistido nos últimos anos a um grande desenvolvimento de produtos computacionais, visando estimular e apoiar o desenvolvimento da aprendizagem.

No trabalho desenvolvido em ambiente computacional é dada a possibilidade de construção de novos cenários. Quando o aluno interage com o *software*, ele constrói e reconstrói, desenha e redesenha, estrutura e reestrutura, ou seja está em actividade construtiva. A acção dos ambientes interactivos ocorre apenas se o aluno faz algo, toma decisões, constrói, não sucedendo se este tem uma atitude passiva.

Carreira (1992) dá grande notoriedade à eficiência que os computadores têm nas múltiplas representações, enquanto se procura a compreensão de um problema e a sua solução. Refere o carácter dinâmico das representações, a sua flexibilidade em se adaptarem aos objectivos do utilizador, o papel de intermediário entre o aluno e a abstracção e a versatilidade gráfica oferecida pelo *software*.

A utilização dos computadores na resolução de problemas permite ao aluno escolher a representação mais adequada, podendo simultaneamente ter o *feedback* que lhe permite controlar o processo. A tecnologia, através das representações computacionais, facilita a transição do pensamento concreto para uma forma de raciocínio mais simbólico e abstracto.

A mesma autora faz notar que o auxílio dos computadores em actividades de resolução de problemas conduz os alunos a aprender, a cooperar de forma efectiva e também permite aos professores refinar as suas qualidades de "facilitadores de interacções nos grupos". Assim, o papel do professor nestes ambientes é o de promotor e catalizador dos debates entre os pequenos grupos e entre toda a turma. Propõe ainda novas abordagens curriculares para se tirarem maiores benefícios dos ambientes computacionais na sala de aula, dando ênfase à compreensão de conceitos e ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

O professor deverá também recorrer ao computador para demonstrar processos de resolução de problemas a toda a turma, sendo importante que os alunos possam utilizar várias ferramentas tecnológicas (computadores e calculadoras) e diferentes modos de representação do mesmo problema.

Blum e Niss (1991, citados por Carreira, 1992) descrevem as vantagens do envolvimento dos computadores em actividades de aplicação e modelação:

1. Torna-se possível a resolução de problemas mais complexos e a utilização de dados reais em níveis de escolaridade mais baixos;

2. A superação de tarefas rotineiras possibilita uma maior concentração nos processos de resolução e nos aspectos conceptuais das aplicações;

3. É possível uma análise e uma compreensão mais profundas das situações problemáticas, através dos efeitos numéricos, algébricos ou gráficos da variação de parâmetros, segundo uma abordagem do tipo: " o que acontece se …?;

4. Certos problemas inacessíveis de um ponto de vista teórico, quer pela sua complexidade ou exigência de conhecimentos matemáticos, podem ser estudados através da sua simulação numérica ou gráfica no computador.

Contudo, os autores apresentam também alguns riscos a ter em conta. A existência de *software* demasiado feito à medida de actividades de modelação pode provocar o desenvolvimento de receitas e rotinas, despromovendo actividades fundamentais como a análise, a comparação e a reflexão. Por outro lado, o facto de o computador passar a assegurar tarefas que antes eram mecanizadas pelos próprios alunos, tornará o ensino mais exigente, principalmente para aqueles que dependiam dessas capacidades para alcançarem bons resultados nos momentos de avaliação.

Em contrapartida, para outros autores, uma grande vantagem da utilização das tecnologias é permitir desembaraçar os alunos das morosas e rigorosas construções, aumentando a disponibilidade para a reflexão sobre o problema. Por sua vez, o próprio processo de exploração por parte dos alunos, obriga a uma revisão de conceitos e propriedades já estudados, possibilitando a sua aplicação em novas situações.

Segundo Dunham (1992) a abordagem de um problema matemático pode ser feito de diversas formas, permitindo múltiplas abordagens, envolvendo cálculo numérico, álgebra e procedimentos viabilizados pela tecnologia, deslocando a preocupação dos cálculos para os conceitos. Assim o uso da tecnologia exige uma mudança nas finalidades do currículo e consequentemente nos métodos de ensino-aprendizagem.

4.1. Ambientes Geométricos Dinâmicos

A utilização de Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD) na sala de aula, possibilita diferentes e novas abordagens curriculares, permitindo valorizar e promover o desenvolvimento de competências e capacidades, nomeadamente, as que são propostas no documento " *Competências Essenciais"* (ME, 2001), como sejam a predisposição para raciocinar matematicamente, explorar situações problemáticas, formular e testar conjecturas, a aptidão para discutir e comunicar ideias matemáticas em diversas linguagens, disponibilidade para entender e compreender um problema, procurando estratégias de resolução, capacidade para optar pelo método mais eficaz na resolução de problemas, contemplando quer o lápis e papel quer o uso das tecnologias.

Os AGD, pelas suas capacidades, têm grande impacto no ensino e aprendizagem de Geometria e de outros tópicos matemáticos. Permitem construir configurações geométricas precisas, utilizando explicitamente as suas propriedades, as quais podem posteriormente ser alteradas em termos de posições, ângulos e dimensões, mantendo-se inalteradas as restrições estabelecidas na construção original, viabilizando-se assim a transformação dinâmica das construções e a visualização de muitas e diferentes representações de uma figura.

Ponte (1997) considera que os computadores oferecem a possibilidade de criação e manipulação de objectos matemáticos diversos, implicando alterações à abordagem de grande parte da Geometria. Assim, a aprendizagem pode tornar-se mais activa e interessante e realizar-se num ambiente experimental e de investigação, onde os alunos têm a oportunidade de formular e testar conjecturas, em especial quando apoiados por *software* que funcione como ambiente geométrico dinâmico.

No estudo sobre exploração de construções geométricas dinâmicas, Junqueira e Valente (1998), referem que, (re)descobrir propriedades geométricas com recurso apenas às ferramentas clássicas tem grandes inconvenientes, em especial, o tempo gasto, quer na construção de um número suficientemente grande de exemplos, quer na realização de medições e cálculos. Todas estas etapas são por vezes executadas de forma pouco precisa e as construções resultantes são estáticas, podendo tornar-se flexíveis apenas através da imaginação do aluno. Se a exploração das construções geométricas se fizer com recurso ao *software* de geometria dinâmica, ultrapassam-se facilmente estes obstáculos. Executando uma construção geométrica e observando as suas alterações, feitas em tempo real e segundo critérios do próprio aluno, este pode entender que características ficam invariantes ou não.

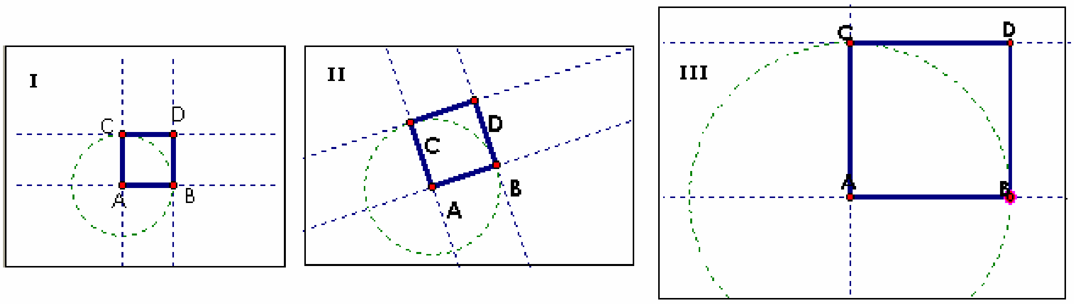


Figura 4. Exemplos de manipulação de um quadrado num ambiente geométrico dinâmico.

Num ambiente geométrico dinâmico é possível construir um quadrado, utilizando duas das suas propriedades, ângulos rectos e lados todos iguais, figura **I.** Ao deslocar-se com o auxílio do rato, os pontos de base da construção, esta toma diferentes aspectos, é possível rodá-la e também alterar as medidas do lado, como nas figuras **II** e **III**, respectivamente, ou seja, tem-se um quadrado *firme*. Procedendo à manipulação da construção, a figura mantém-se sempre um quadrado. O programa redesenha, dinamicamente, em sucessivas posições, respeitando sempre as propriedades da construção; o mesmo não aconteceria se este fosse somente construído com base em quatro pontos, escolhidos adequadamente, pois o quadrado assim obtido desmanchar-se-ia se deslocássemos, com o rato, um dos quatro vértices.

Junqueira (1995) estudou as aprendizagens da geometria em ambientes computacionais dinâmicos, analisando de que modo estes são poderosos, ao permitirem realizar construções geométricas, utilizando explicitamente as propriedades das figuras. Estes ambientes possibilitam a manipulação das construções feitas, mantendo inalteradas as propriedades definidas inicialmente; naturalmente, tudo isto altera profundamente a forma como se ensina e aprende Geometria, uma vez que assim é apropriado dizer que o aluno também faz Geometria.

O recurso a ambientes computacionais dinâmicos dá ao aluno a oportunidade de fazer construções, tendo em conta as propriedades das figuras geométricas, e de manipular essas mesmas construções, mantendo as referidas propriedades. Possibilita também o trabalho com objectos mais complexos, comparativamente com a utilização das ferramentas clássicas, como papel, lápis, régua e compasso. Os alunos contactam com um grande número de situações em tempo real, percebendo o domínio de validade das propriedades estudadas.

King e Schattschneider (1997, citados por Toledo 2007) e outros autores referem os principais benefícios e aplicações dos ambientes geométricos dinâmicos:

i) precisão e visualização

A construção da geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos que constituem a figura, como por exemplo, perpendicularidade, paralelismo, pertença, ângulo. Podem-se medir distâncias, ângulos e verificar relações entre os elementos, com rigor, o que possibilita facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Através da visualização, podem também ser compreendidos conceitos matemáticos. A precisão é igualmente importante pois se as construções são imprecisas, estas podem conduzir o aluno a conclusões erradas.

ii) exploração e descoberta

A manipulação de construções permite que se explore a Geometria e que sejam efectivamente descobertas novas relações e propriedades.

iii) provas de teoremas

A ferramenta ajuda os alunos a dar sentido ao processo da demonstração; apesar da geometria dinâmica não poder provar teoremas, o aluno sente-se mais motivado para a procura da demonstração do teorema, uma vez que a possibilidade de experimentação de hipóteses induz a convicção da sua validade. A aprendizagem decorre então por etapas, com a formulação de conjecturas e sua validação, com a análise de exemplos e contra-exemplos. Igualmente pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal.

iv) transformações e lugares geométricos

Pela sua capacidade de realizar transformações em figuras geométricas, os programas de geometria dinâmica são ideais para o estudo de isometrias, similaridades e outras relações. Animando figuras e traçando lugares geométricos de pontos predefinidos, estes aplicativos também são uma excelente ferramenta para explicar e/ou elucidar determinados problemas e propriedades, que por vezes, pelo seu grau de dificuldade, ou não são abordados, ou são pouco explorados.

v) Simulação e micromundos

As simulações que podem ser construídas com programas de geometria dinâmica, permitem a realização de experiências envolvendo conceitos mais avançados. Neste caso, a complexidade analítica dos modelos fica a cargo do programa e os alunos têm a exploração ao seu alcance sem a preocupação da dedução das relações matemáticas analíticas, que se evidenciam no dinamismo da representação de carácter visual. Esta abordagem permite que alunos, ainda sem grande formação matemática, investiguem fenómenos de natureza matemática complexa.

Jonassen (1999, citado por Figueiredo, 2000) define micromundos como ambientes de aprendizagem exploratória, espaços de descoberta onde os alunos podem criar objectos, manipulá-los e testar os efeitos das suas acções. Ora, isto é, exactamente, aquilo que se pode fazer com programas de geometria dinâmica como o *Cabri-Geomètre* e o *Geometer's Sketchpad*. Com qualquer destes, através da exploração interactiva e da sua criatividade, o aluno pode envolver-se em actividades significativas com experiências geométricas, algumas preconcebidas pelo professor e muitas outras descobertas ao acaso.

Schwartz (1993, citado por Coelho, 1996) refere-se aos micromundos como "espelhos intelectuais", ambientes computacionais onde os alunos podem testar o seu conhecimento, estabelecer relações entre os elementos, podendo generalizar e testar a validade de numerosas conjecturas.

Também Miskulin (2000) vê a importância fundamental deste tipo de interactividade no processo de construção do conhecimento, não só porque propicia a manipulação de objectos, mas acima de tudo porque possibilita a construção de modelos e simulações, nas quais um conceito ou uma ideia podem ser criados e generalizados em cenários virtuais de aprendizagem colaborativa.

Várias ferramentas computacionais, genericamente designadas de ambientes geométricos dinâmicos, como por exemplo *Cabri Geomètre, The Geometer's Sketchpad, Cinderella*, *Geometry Inventor, The Geometric Supposer,* são assim geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação de relações ou de medidas que se mantêm invariantes. O desenho, a manipulação e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal.

Segundo Junqueira (1993), numa situação problemática, os processos de resolução que ocorrem derivam da interacção entre o aluno, a situação/problema e o contexto, fazendo o computador parte deste último. Ferramentas computacionais como o *Sketchpad*, pela apresentação dinâmica das figuras, desenvolvem a capacidade imaginativa e criativa dos alunos, facilitam novas combinações e generalizações, contrariamente ao que sucede se o aluno tiver que fazer com papel e lápis construções de modo a procurar regularidades ou invariâncias.

4.2. O *Geometer's Sketchpad*

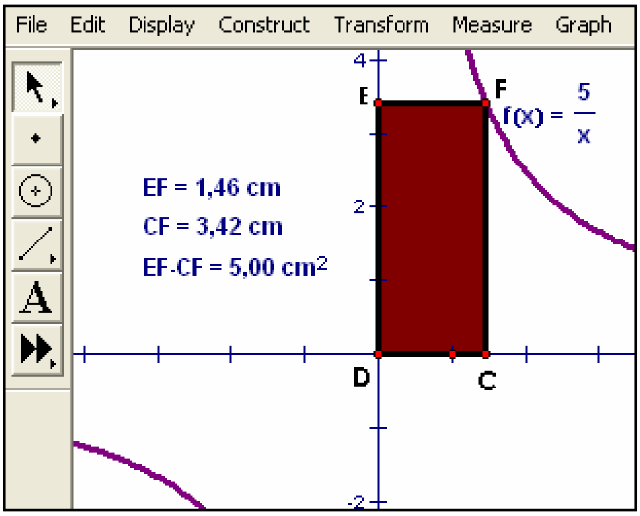
O *Geometer's Sketchpad* resultou do projecto *Visual Geometry*, desenvolvido sob a direcção de Eugene Klotz e Doris Schattschneider, tendo sido publicada a primeira versão em 1991 e a versão 4, a utilizada nesta experiência, em Outubro de 2001. Este ambiente computacional possibilita a exploração e o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos; trata-se de um poderoso instrumento para a construção e exploração de figuras que podem ser arrastadas e manipuladas, conservando sempre as relações definidas durante a sua construção.

Segundo a tipologia apresentada por Figueiredo (2000), o *Sketchpad* poderá ser considerado uma ferramenta, já que o aluno o utiliza como um instrumento, com grande margem de iniciativa na realização de tarefas que, directa ou indirectamente, se inscrevem no processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, note-se que o computador (e a aplicação) se comporta como um instruendo, uma vez que o aluno controla toda a acção. Para Figueiredo, o *Sketchpad* ingressará, então, na categoria dos micromundos. Muitos outros autores suportam esta afirmação, como é o caso de Squires (1994), referindo-se ao "*The Geometric Supposer*", antecessor muito limitado do *Sketchpad*, como amplificadores intelectuais que possuem várias características comparáveis às dos micromundos.

Também Laborde, criador do *Cabri-Géomètre*, apresenta-o como um " projecto de concepção e realização de micromundos de manipulação directa de objectos abstractos."

Como refere Figueiredo (2000), a *metáfora* do *Sketchpad* é a do papel com o material de desenho clássico – régua, compasso, transferidor e ainda calculadora. Estes instrumentos, dispostos numa ***Tool Box*** à esquerda da área de trabalho permitem desenhar livremente nessa área.

Entretanto, com a versão 4, aliam-se a estas ferramentas todas as potencialidades da representação das funções. Pode-se usar mais do que um sistema de coordenadas e estes não têm que ser monométricos, podendo-se ainda derivar funções, introduzir parâmetros, etc. Facilmente se constroem figuras com determinadas condições, áreas, perímetros, volumes, etc., que se pretendem fixos. Por exemplo, para construir um rectângulo de dimensões variáveis, mas área fixa 5, pode-se recorrer à função $y = \frac{5}{x}$.



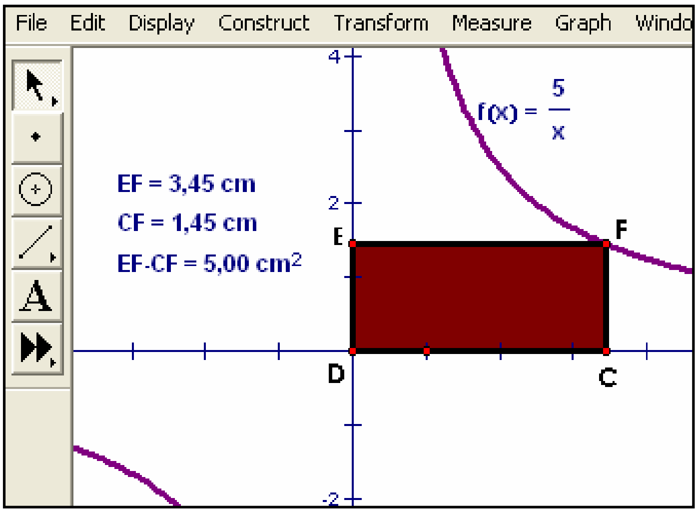


Figura 5. Construção de um rectângulo "dinâmico" com área 5, recorrendo às funções.

Outra característica importante do *Sketchpad* é o facto de todos os menus serem sensíveis ao contexto, isto é, só estão disponíveis as construções que puderem ser efectuadas a partir dos elementos seleccionados. Por exemplo, se tivermos seleccionado um segmento de recta, no menu ***Construct*** apenas surgem activas as opções marcar o ponto médio e um ponto sobre um segmento; contudo, se tivermos seleccionado um segmento de recta e um ponto, as hipóteses anteriores ficam desactivadas e passam a estar disponíveis as opções de construção de uma recta paralela, uma recta perpendicular e a construção de uma circunferência (com centro no ponto e raio com a medida do segmento de recta). Se nenhum elemento estiver seleccionado, nos menus ***Construct*** e ***Transform*** (onde estão, entre outras, as transformações geométricas, translação, rotação, homotetia e simetria) todas as opções estão desactivadas. Este detalhe é muito importante, uma vez que minimiza a possibilidade de uma construção errada tornando, ao mesmo tempo, a aprendizagem do manuseamento do programa mais rápida.

O menu ***Measure*** permite determinar comprimentos, distâncias, declives, amplitudes (de ângulos e de arcos), perímetros e áreas. Possibilita, ainda, determinar a equação de rectas, circunferências ou conhecer as coordenadas de determinado ponto, representando para isso automaticamente um referencial cartesiano. Este *menu* oferece ainda uma calculadora muito peculiar, pois para além das habituais características de uma calculadora comum, esta permite operar directamente com medições realizadas. Por exemplo, a partir do valor do declive de uma recta qualquer, pode-se determinar o valor da inclinação (claro, se o declive é negativo tem que se considerar 180º - $\tan^{-1}$ (declive IJ)) e

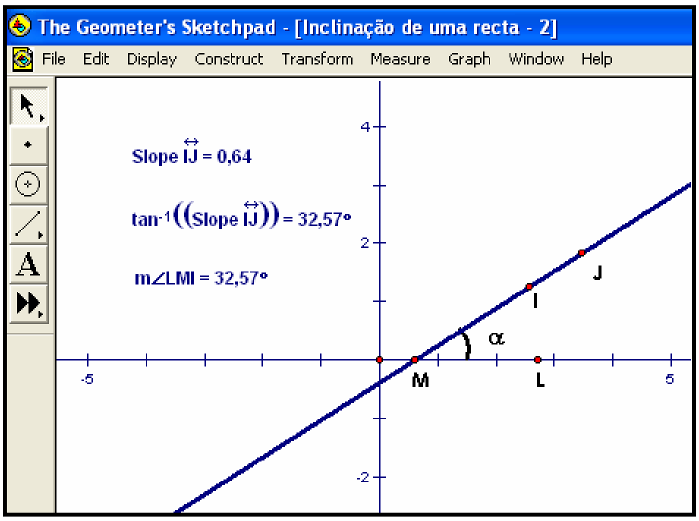


Figura 6. Exemplo da utilização da calculadora do Sketchpad.

constatar que é o ângulo formado pela recta e pelo semi-eixo positivo das abcissas.

Se movimentarmos os pontos J ou I, também o declive da recta IJ e o ângulo são automaticamente actualizados.

No *Sketchpad* é ainda possível gravar um processo de construção para utilização posterior, os ***scripts tools***, também chamados ***custom tools***. Um *script* é um ficheiro que contém um conjunto de instruções para a construção de determinada figura, evitando a repetição de construções. Na permanente gestão do tempo com que os professores se debatem diariamente nas escolas, esta apresenta-se como uma excelente ferramenta, uma vez que os professores podem criar estes *scripts tools* anteriormente, para uso dos alunos na sala de aula. Também são importantes, caso uma construção seja complexa, para serem utilizados pelos alunos. Como refere Veloso (2002), a potencialidade de se criarem scri*pts tools*, amplia de modo quase ilimitado as possibilidades do *Sketchpad*.

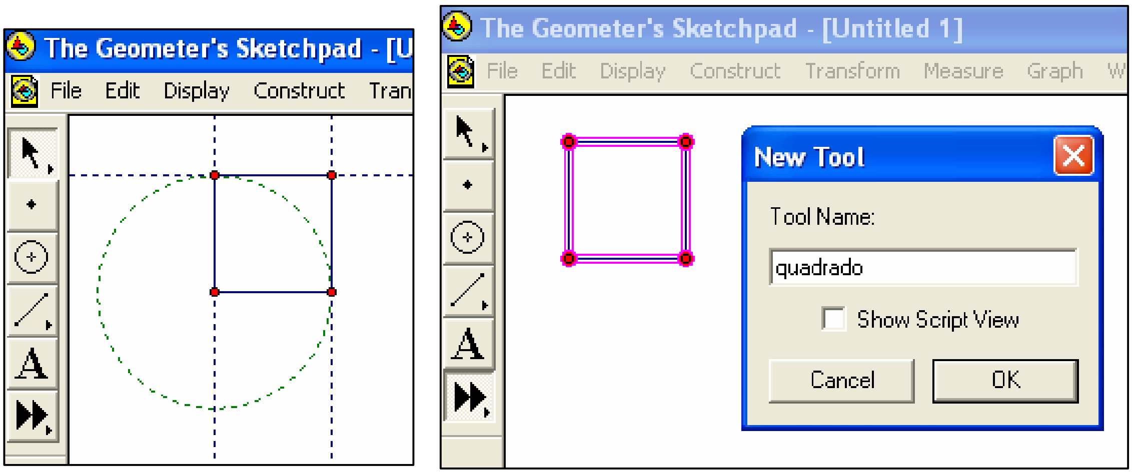


Figura 7. Construção de um quadrado e gravação como uma nova ferramenta (*New Tool*).

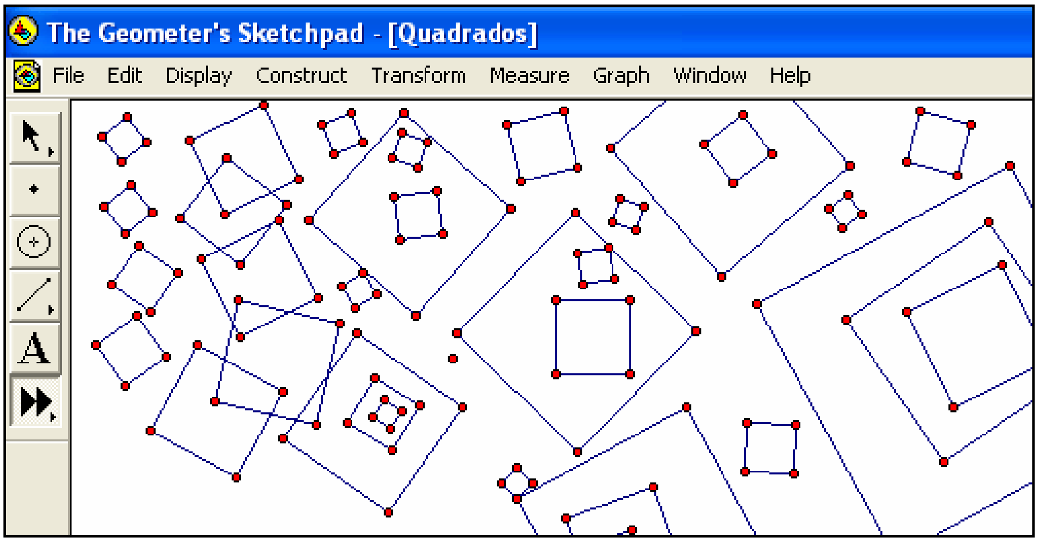


Figura 8. Utilização da *Tool* QUADRADO.
(Com um único "clique" do rato, obtém-se um quadrado *firme*.)

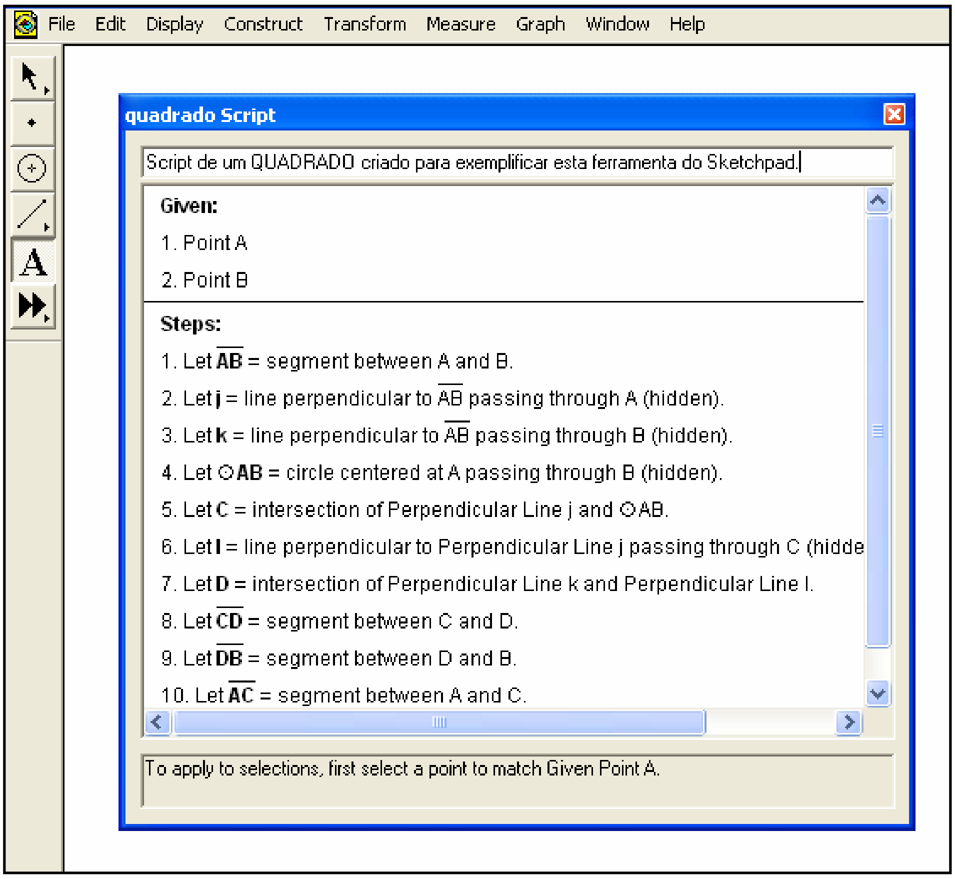


Figura 9. Descrição do *Script* do *QUADRADO*.

Schattschneider, um dos criadores do *Sketchpad*, enfatiza as possibilidades abertas pela aplicação dos sc*r*ipts, os quais poderão facultar a criação de novas ferramentas, abrindo as portas para micromundos de exploração de "novas geometrias".

O aluno tem assim a possibilidade de rever todos os procedimentos da sua construção, analisar o seu desenvolvimento. Isto permite reflectir sobre as suas acções e identificar possíveis razões para alguns desfechos. Este recurso também permite que o aluno explore construções feitas por outrem, o que sempre se apresenta como fonte de riqueza em ideias matemáticas. Ainda através dos *scripts*, construções particulares podem ser automaticamente generalizadas, gravadas e testadas em outras situações.

Capítulo III – METODOLOGIA

1. Abordagem qualitativa como metodologia de investigação

Este estudo assume-se, pelas suas características, como uma investigação qualitativa ou naturalista, usando a designação de Bogdan e Biklen (1982) que é frequentemente adoptada na investigação ligada ao ensino da Matemática. Este carácter decorre não só dos diferentes tipos de técnicas utilizadas durante a recolha de dados, mas principalmente dos objectivos que norteiam este estudo, os quais propõem a compreensão e esclarecimento de um determinado cenário educacional, centrado na sala de aula, na observação e na interacção constante e prolongada. Por outro lado, esta investigação tem um forte pendor descritivo, porque se quer analisar os dados em toda a sua riqueza de pormenores. Concretamente, pretende-se enfatizar mais os processos do que os resultados ou produtos. As estratégias heurísticas que os alunos usam na resolução de problemas, as suas opções, decisões, dificuldades, diálogos e opiniões são registados e analisados pormenorizadamente, ganhando maior importância do que o resultado final alcançado na realização das tarefas na aula.

Na fase final do projecto, adoptou-se uma abordagem mais próxima do estudo de caso, em particular com a escolha de determinados participantes sobre os quais a minha atenção se tornou mais intensa. Com base nas observações e desempenhos dos alunos nas duas primeiras fases de implementação do estudo, foram seleccionados quatro casos, por se considerarem particularmente ilustrativos e interessantes de analisar, tendo em conta os propósitos do estudo. Segundo Sousa (2005), esta opção possibilita ao investigador concentrar-se e focar-se mais no caso ou nos múltiplos casos, visando essencialmente a interpretação e a compreensão dos comportamentos. O mesmo autor refere que o estudo de um caso pode centrar-se num só sujeito, num grupo de sujeitos ou numa instituição. Neste estudo, cada caso é constituído por dois alunos, os mesmos dos grupos de trabalho na sala de aula.

Os dados também são de cariz qualitativo devido à riqueza de pormenores descritivos em que se manifestam as formas de pensamento, os obstáculos, as decisões e diferentes preferências dos alunos. Há igualmente uma preocupação de relatar os acontecimentos e as situações de uma forma autêntica, marcada pelas próprias reacções, sentimentos, expectativas de quem participa e é parte integrante da realidade em análise. Como professora desta turma de alunos, não me escuso a tornar claro o meu papel e a mostrá-lo de forma visível na apresentação e análise dos dados.

Este estudo tem o propósito de investigar de que modo os alunos utilizam uma ferramenta tecnológica e reconhecem a sua utilidade na resolução de problemas, quando incentivados a escolherem o seu próprio processo de resolução. Pretende-se, assim, dar conta de todas as opções e estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução dos problemas. Entendeu-se ser importante a realização das actividades em pequenos grupos de alunos, constituídos por dois elementos, excepcionalmente três, como forma de aumentar a possibilidade de exteriorizarem e partilharem ideias e estratégias.

Segundo Johnson e Johnson (1990), factores como a experiência dos alunos em aprendizagem cooperativa e o espaço de tempo destinado ao trabalho de grupo são condicionantes para o número de elementos de um grupo, defendendo a constituição de grupos de dois a quatro elementos.

2. Técnicas de recolha de dados

A recolha de dados incluiu um conjunto de procedimentos: questionários, observação participante das aulas, recolha de documentos realizados pelos alunos ao longo da experiência e entrevistas semi-estruturadas. Salientam-se ainda os registos em vídeo de algumas aulas que foram gravadas.

2.1.Observação participante

Geralmente associada a uma investigação qualitativa está a observação participante. *"A observação participante define-se como uma estratégia de campo que combina vários elementos: a análise documental, a entrevista de sujeitos e informantes, a participação e observação directas, ..."* (Denzin, 1989, citado por Flick, 2005, p.142).

Consiste num método em que o investigador se insere profundamente no terreno, desempenhando um ou mais papéis de participante, implicando a criação e manutenção de relações com os sujeitos no terreno. Valoriza-se a interpretação e compreensão da natureza humana, considerando-se essencial a comunicação com os que estão envolvidos no cenário em estudo.

Flink (2005) refere que a observação participante deve ser entendida como um processo em dois planos. Primeiro, o investigador tem de se ir tornando um participante e ir assim conquistando o acesso aos sujeitos e ao terreno. Segundo, a observação segue o processo de se ir concretizando e concentrando nos aspectos essenciais para a problemática do investigador.

Spradley (1980) distingue três fases da observação participante: a) *observação descritiva*. De início, serve para o investigador se orientar no terreno de estudo. Permite captar, da melhor forma possível, a complexidade do campo e definir linhas de orientação mais concretas; b) *observação focalizada*. O foco vai-se estreitando progressivamente sobre os problemas e processos mais pertinentes para o estudo e c) *observação selectiva*. Ocorre mais perto do final da recolha de dados, centrando-se na busca de mais evidências e exemplos de práticas e processos encontrados na fase anterior.

Nesta investigação, assumi o duplo papel de professora da turma e de observadora participante. Em grande medida, a minha qualidade de professora tornou imediata a minha inserção no terreno e a minha participação activa em todos os momentos e em todo o projecto de trabalho implementado na sala de aula. As aulas acontecem com os meus alunos e eu faço parte da realidade que me proponho compreender e conhecer. No estudo falo, obviamente, dos meus alunos, mas falo também com os meus alunos e para os meus alunos.

2.2.Entrevistas

A entrevista é uma técnica de recolha de dados que permite estabelecer um contacto directo com o entrevistado, proporcionando a criação de ambientes privilegiados na procura de significados, permitindo aprofundar concepções e interpretações sobre aspectos que vão sendo abordados ao longo do diálogo que se vai construindo.

A entrevista possibilita a captação objectiva da informação desejada, sendo utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito. Simultaneamente, permite ao investigador desenvolver uma ideia intuitiva sobre o modo como o entrevistado interpreta uma dada situação ou acção, proporcionando uma visão dos factos, não só através da linguagem verbal do entrevistado, mas também da comunicação não verbal tal como olhares, sorrisos, expressões faciais, gestos, etc.

Tratou-se aqui de entrevistas semi-estruturadas, ou de acordo com Santos (2005) semi-dirigidas, realizadas a quatro grupos, de dois alunos cada. Este tipo de entrevista é indicado, segundo Domingos (1994) e Santos (2005), quando se pretende obter uma verificação e um aprofundamento de uma dada situação vivida em condições precisas, como as que ocorreram na sala de aula com a implementação deste estudo. O entrevistado tem grande liberdade nas respostas, ainda que não saindo do tema proposto. O entrevistador pode introduzir novas questões como resultado da interacção entre este e o entrevistado, aproximando a entrevista de uma conversa ou de um diálogo em torno de aspectos que vão surgindo como relevantes.

3. Participantes

O presente estudo foi realizado numa turma do 11º ano de escolaridade, no ano lectivo de 2005/06. Eu sou a professora da turma e pertenço ao quadro de nomeação definitiva desta escola, onde estou a exercer funções docentes desde 1995/96.

3.1.A escola

A Escola Secundária de Pinheiro e Rosa, localizada em Faro, é uma escola que iniciou as suas actividades no ano lectivo de 1994/95. É constituída por um edifício com três blocos interligados, pavilhão gimnodesportivo, zonas verdes, campos de jogos e recreio. O edifício apresenta-se bem cuidado, sem sinais de degradação. A escola tem uma localização periférica e serve uma população proveniente de estratos sociais económica e culturalmente de nível médio-baixo.

Desde o início, a escola tem vindo a consolidar a sua posição no sistema educativo e no meio social onde se insere, quer no plano dos recursos humanos, quer no plano dos recursos físicos e tecnológicos. Devido à oferta educativa, a população escolar duplicou nos últimos três anos lectivos. Actualmente, tem cerca de 850 alunos, aproximadamente 115 professores, na sua larga maioria do quadro de nomeação definitiva, e 48 funcionários não docentes.

A escola tem várias salas específicas, equipadas com material diverso; no que se refere aos recursos informáticos, tem sete salas equipadas com computadores, destacando-se ainda o acesso de todas as salas de aula à Internet de banda larga. Há uma sala específica para o ensino da Matemática, onde existem alguns computadores, calculadoras gráficas, *viewscreen*, um conjunto diversificado de sensores, televisão e leitor de DVD. Foram recentemente adquiridos cinco quadros interactivos para a escola, dois dos quais para uso dos professores de Matemática.

A turma envolvida no estudo tinha três blocos semanais de Matemática A, com a duração de 90 minutos cada um. Desde o início do ano lectivo, no horário da turma, estava marcada semanalmente a realização de uma das aulas numa sala de informática e as outras duas numa sala de aula normal.

A sala de aula normal estava equipada com retroprojector, *Viewscreen*, que permite projectar na parede o trabalho desenvolvido na calculadora gráfica que lhe está conectada, televisão e leitor de DVD. Nestas aulas, os alunos sentavam-se em secretárias de dois lugares e os pares por carteira eram praticamente os mesmos grupos de trabalho das aulas que decorriam na sala de informática. Em todas as aulas, a calculadora estava presente de forma natural; todos os alunos traziam quase sempre a calculadora gráfica pessoal que possuíam desde o 10º ano. Quando alguém se esquecia da calculadora, era possível resolver a falta pois na sala existe um armário que contém cerca de 15 calculadoras gráficas para uso dos alunos.

A sala de informática estava equipada com 15 computadores, com ligação à Internet, mais um para o professor, ligado a um projector de vídeo. Dispunha de um conjunto de mesas, no centro, que os alunos usavam sempre que não necessitavam dos computadores.

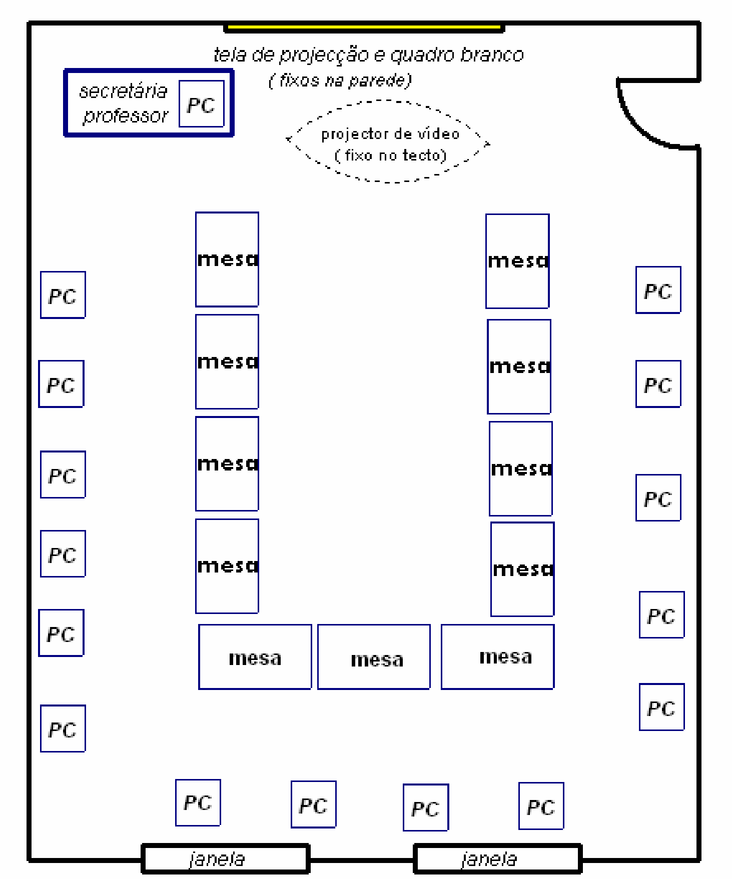


Figura 10. Planta da sala de informática onde decorreu a experiência.

3.2.A turma

A escolha da turma para a realização do estudo foi condicionada pela elaboração dos horários no início do ano lectivo, em particular pela disponibilidade de uma sala de informática. No ano lectivo em que decorreu a experiência leccionei três turmas do 11º ano de escolaridade. Só tinha sido professora, no ano anterior, de uma dessas três turmas; quanto às outras duas, tinha bastante informação sobre estas e conhecia os alunos pelo facto de ter sido, no ano anterior, a orientadora de estágio pedagógico de cada um dos respectivos professores do 10º ano. Qualquer uma das três turmas reunia, à partida, condições necessárias para a realização do trabalho, pelo que na fase que antecedeu o início do ano lectivo não tinha feito qualquer opção, acabando a decisão por surgir em função das definições dos horários e da disponibilidade de uma sala equipada com computadores.

A turma envolvida no estudo era do 11º ano de escolaridade dos Cursos Cientifico-Humanísticos. Era constituída inicialmente por 22 alunos, tendo havido, logo no 1º período, um aluno que fez a anulação da matrícula. Dos 21 alunos, 13 eram do sexo feminino e 8 do sexo masculino. A média das idades era 16 anos, oscilando entre os 15 e os 19 anos.

A turma mantinha praticamente a sua constituição do 10º ano, excepto um aluno que ficou retido e um aluno estrangeiro que ingressou na turma no 11º ano. Na disciplina de Matemática estavam matriculados mais três alunos do 12º ano, com a disciplina em atraso. Tratava-se de uma turma com um nível de aproveitamento satisfatório no 10º ano, havendo alunos muito bons, com notas superiores a 15, e alunos muito fracos, dois com classificação inferior a 10 valores e cinco tendo obtido a classificação de 10 valores no final do ano lectivo transacto.

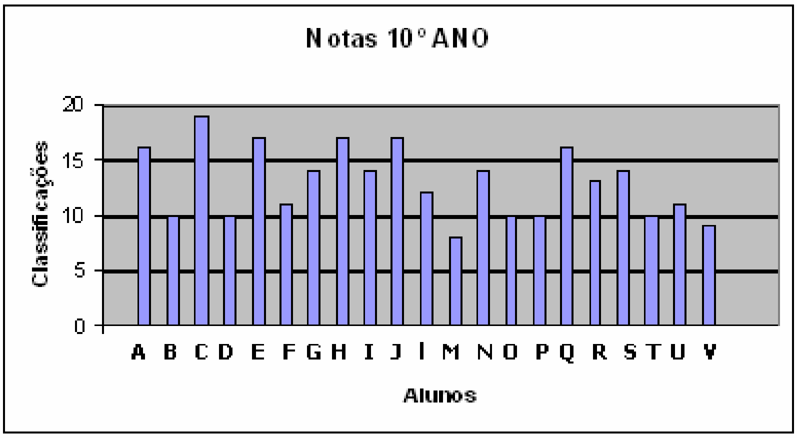


Figura 11 . Classificações dos 21 alunos obtidas no final do 10 º Ano.

De um modo geral, apresentavam melhores resultados nas outras disciplinas, com excepção da disciplina de Física e Química A, em que havia uma quase total consonância com as classificações obtidas na disciplina de Matemática.

Nas aulas, era uma turma interessada e participativa, havendo sempre um bom ambiente de trabalho, independentemente de a aula decorrer na sala de aula normal ou na sala de informática.

4. Procedimentos

Começaram a definir-se o tema e os objectivos do presente estudo em Dezembro de 2004, durante o primeiro semestre da parte curricular do Mestrado. Duas das disciplinas da componente curricular, *Desafios Matemáticos* e *Tecnologias no Ensino da Matemática*, foram determinantes na escolha do tema que deu origem ao projecto de investigação. Considerei que seria uma possibilidade muito interessante juntar na sala de aula a resolução de problemas e as tecnologias, tentando compreender de que modo os alunos as utilizam e reconhecem a sua utilidade ao lidarem com situações novas.

4.1.O Questionário Inicial

Este instrumento representou como que um pontapé de partida para o presente estudo. Através dele pretendia saber que tipos de práticas os alunos tinham experimentado, no campo das tecnologias, ao longo do seu percurso escolar (Anexo 1).

Conhecia apenas o trabalho desenvolvido no ano lectivo anterior, atendendo a que tinha sido orientadora de estágio do professor da turma, mas não tinha qualquer indicação relativamente ao trajecto pelo ensino básico. Uma vez que os alunos eram provenientes de diversas escolas básicas do concelho, poderiam ter tido experiências diversas no campo da utilização das tecnologias na aula de Matemática e essas vivências poderiam de alguma forma reflectir-se no desempenho dos alunos durante o estudo.

Com objectivos muito limitados e definidos, foi uma forma de conhecer um pouco mais dos alunos e da sua relação com os computadores, bem como das suas expectativas acerca do seu uso na sala de aula.

Dado que me interessava ter uma imagem geral da turma e não de cada aluno em particular, os alunos responderam anonimamente ao questionário.

Foi implementado em Novembro, antes de ter realizado qualquer actividade com os alunos no âmbito deste projecto. Tinha apenas utilizado o Sketchpad durante o estudo da Trigonometria, mas utilizando *sktechs*, previamente construídos, sobre o círculo trigonométrico e projectados para toda a turma, no fundo, como se se tratasse de "um acetato dinâmico".

Os dados obtidos através deste questionário foram apresentados no início da análise de dados, funcionando como um retrato da turma relativamente às suas experiências prévias de trabalho com as tecnologias na sala de aula.

4.2.A *1ª Fase* da experiência

Designarei por *1ª Fase* aquela que foi a primeira etapa da experiência no terreno, com os alunos. Nesta fase foi dada aos alunos a oportunidade de se familiarizarem e explorarem o *Sketchpad*, o programa de geometria dinâmica seleccionado para a realização do projecto, que foi utilizado desde o início como uma ferramenta na resolução de problemas. Explorar e resolver problemas num ambiente geométrico dinâmico, constituíam práticas nunca antes desenvolvidas pelos alunos.

Houve a preocupação de seleccionar problemas cuja resolução com o *Sketchpad* não exigisse conhecimentos profundos do funcionamento deste *software*. A utilização do computador era feita numa primeira abordagem aos problemas que posteriormente eram resolvidos na sala de aula normal, recorrendo à calculadora gráfica ou a processos analíticos, de acordo com os conhecimentos dos alunos. Antes de os alunos começarem a trabalhar sobre o problema, era feita uma breve apresentação de algumas ferramentas do programa *Sketchpad*, fornecendo-lhes directa e concisamente os conhecimentos necessários acerca do *software* para a execução das tarefas.

Alguns dos problemas apresentados à turma eram seleccionados, tendo igualmente como referência a planificação curricular para a disciplina estabelecida no início do ano escolar. As actividades implementadas enquadraram-se numa estratégia pedagógica com propósitos inovadores, trabalhando conceitos do programa, permitindo apresentar novos conteúdos ou consolidar temas estudados em aulas anteriores. A selecção dos problemas, a partir do manual escolar do aluno, foi uma das formas encontradas para alcançar este fim. Os problemas seleccionados, todos do manual escolar adoptado na escola excepto um, eram entregues aos alunos numa ficha de trabalho (Anexos 2 a 8).

Em duas das aulas da *1ª Fase*, esteve presente a Professora Susana Carreira, que conjuntamente comigo, foi esclarecendo junto de cada grupo as dúvidas apresentadas e acompanhou o trabalho desenvolvido pelos alunos durante a aula. Os alunos reagiram de forma muito positiva à presença de outro professor na sala de aula, não diferenciando os desempenhos de cada uma.

Nesta fase, cada actividade decorria sempre na sala de informática, continuando na sala de aula normal quando os mesmos problemas eram posteriormente explorados com processos de resolução analítica ou com calculadora gráfica.

DATA	PROBLEMAS
28. 11. 05	Iniciação ao *Sketchpad* O Quadrado e o Triângulo Equilátero
05. 11. 05	Da Casa até à Rua Canalização da Fábrica (início)
12. 11. 05	Canalização da Fábrica
30. 01. 06	As Duas Aldeias… A Ilha (início)
06. 02. 06	A Ilha
13. 02. 06	A Ilha (conclusão) A Piscina (início)
20. 02. 06	A Piscina
27. 02. 06	A Piscina (conclusão) O Cilindro e o Cone

Tabela 2. Agenda da 1ª Fase da experiência (Anexos 2 a 8).

4.3.A *Fase Final* da experiência

A *Fase Final* foi uma etapa decisiva para o presente estudo em que foram apresentados três problemas e, para a resolução de cada um deles, os alunos eram livres de recorrerem ou não ao uso da tecnologia, podendo escolher entre um método de resolução analítica ou uma resolução computacional.

Antes de se iniciar a implementação desta nova etapa, era importante clarificar e demarcar todas as diferenças relativamente à *1ª Fase*. Assim, como professora, expliquei à turma os objectivos que se pretendiam alcançar com esta nova etapa do meu estudo. Reforcei, junto dos alunos, a importância de que fossem autênticos nas opções que fizessem e que não se sentissem coagidos pelo facto de estarem numa sala de informática e terem perto deles um computador, referindo que a realização desta fase na sala de informática se impunha para que tivessem ambos os meios à disposição – computadores e mesas no centro da sala (ver figura 10Figura 10). Esclareci que os três problemas que constituíam a *Fase Final,* não tinham que ser todos resolvidos com o mesmo processo e que eu, no papel de professora, não valorizaria mais qualquer dos processos de resolução relativamente a outro.

Deliberadamente, não foram impressos os enunciados dos problemas seleccionados, cujos textos eram muito pequenos, tendo sido apresentados oralmente aos alunos. O facto de estarem todos a escrever o problema conferia breves minutos em que individualmente tomavam contacto com o problema e funcionava como uma apresentação personalizada. Se o enunciado fosse entregue numa folha, como tinha acontecido na *1ª Fase,* sabendo que os alunos trabalham em grupos de dois, poderia acontecer que, num acto quase inconsciente, um deles avançasse para o computador de forma um pouco irreflectida. Era, também, mais uma forma de quebrar algumas das rotinas adoptadas durante a *1ª Fase.* Do mesmo modo, nesta fase, quando os alunos terminavam um problema, podiam solicitar-me o seguinte, o que me dava a oportunidade de os questionar e registar o estado de espírito com que iam trabalhando nos problemas e as razões das suas opções de resolução.

Mais do que as soluções dos problemas ou os processos de resolução, nesta fase importava conhecer o porquê das opções do grupo, interessava saber como se reflecte na resolução de problemas e nos processos desenvolvidos a decisão de recorrerem ou não a uma ferramenta tecnológica, quais as vantagens e desvantagens identificadas pelos alunos nos respectivos processos de resolução escolhidos.

Pretendia conhecer o estado de espírito, os sentimentos, as dúvidas, os níveis de confiança dos alunos durante a resolução de cada problema. Assim, mais do que um relatório, interessava que eles registassem também os pensamentos e o que os levava a optar por um ou outro processo e ferramenta de resolução. Por isso, pedi aos alunos que fizessem um *Diário da Resolução*. Nele deveriam "confidenciar" todos os sentimentos, registar as tentativas, explicar as decisões e descrever as opções bem ou mal sucedidas.

Durante a fase de selecção dos problemas para a *Fase Final*, foram muitos os problemas resolvidos, começando por ser eliminados todos os que não viabilizavam um dos processos de resolução: ou a computacional ou a analítica. A própria natureza do problema é obviamente um factor determinante no percurso e nas opções que se fazem durante o processo de resolução, pelo que era importante seleccionar um conjunto de problemas, nos quais as duas formas de resolução, a analítica e a computacional, fossem ambas viáveis e com um grau de dificuldade e volume de trabalho semelhante. Caso contrário, as opções de resolução dos alunos poderiam ser orientadas em função da essência do problema, o que se pretendia minimizar neste estudo.

Procurou-se seleccionar problemas que permitissem aos alunos optar exclusivamente por um dos processos de resolução. Se os alunos enveredassem por um caminho analítico, não se impedia o recurso à calculadora gráfica; contudo, aquando da selecção dos problemas pretendia-se que o seu uso não se tornasse obrigatório, mas sim uma opção. Este factor foi bastante limitador, uma vez que por serem alunos do 11º ano, os seus conhecimentos, por exemplo no tema das derivadas, eram ainda escassos, restringindo as hipóteses de escolha. Pretendendo que esta fase decorresse num menor período de tempo possível, procedi à troca de sala com outro professor de modo a ter acesso à sala de informática em todas as aulas.

Data	Problema
22. 05.2006	Registo de intenções dos alunos (falta de rede informática na sala)
29. 05. 2006	*O Canteiro*
05. 06. 2006	*O Cone*
08. 06. 2006	*As Vasilhas*

Tabela 3. Agenda da Fase Final.

4.4.Os Ficheiros

Para todas as aulas, ao longo da experiência implementada no terreno, foi criada uma pasta, com o nome igual à data de ocorrência da aula, na qual todos os grupos gravavam o trabalho realizado. Os ficheiros, em suporte digital, tornaram-se numa excelente fonte de dados, revelando informações pormenorizadas do trabalho desenvolvido pelos alunos, que por vezes não era possível acompanhar na aula, devido ao número elevado de grupos – cerca de onze – e também porque o meu papel era simultaneamente o de investigadora e de professora da turma.

O *Sketchpad*, durante a elaboração de qualquer construção, define automaticamente uma hierarquia entre os elementos utilizados, tornando possível, posteriormente, analisar toda a sequência seguida nas construções realizadas pelos alunos. Esta característica do *software* forneceu muitas informações úteis para a investigação, permitindo descrever e analisar de forma mais pormenorizada os procedimentos dos alunos na resolução de cada um dos problemas propostos.

Uma outra vantagem do programa a que muitas vezes se recorreu foi a opção *Documents Options* do menu *File*. Sempre que surgia na aula uma fase da construção que se pretendia analisar mais tarde, de forma pormenorizada e não querendo interromper a continuidade do trabalho dos alunos, pedia-lhes que duplicassem a presente página de trabalho. Deste modo, o grupo prosseguia a tarefa e o que estava feito até àquele momento ficava registado numa folha independente. No mesmo ficheiro, iam ficando arquivadas em separado, como as folhas no Excel, as diferentes fases das construções dos alunos.

4.5.Os Episódios

Os episódios são narrações dos incidentes críticos que ocorreram na sala de aula durante a resolução dos problemas. Descrevem diferentes etapas do desenvolvimento e da aprendizagem dos alunos ao longo do estudo. Segundo Sousa (2005), esta técnica permite obter informações específicas de modo descritivo, sobre comportamentos ou situações que não eram totalmente previsíveis de ocorrer.

Foram escritos a partir das observações e registos feitos durante ou após as aulas, dos registos de vídeo das aulas, dos relatórios elaborados pelos alunos e dos ficheiros de cada aula, com os *sketchs* realizados pelos alunos.

Na descrição dos episódios optei por escrever em discurso directo os diálogos que decorreram nas aulas, incluindo as intervenções dos alunos e as minhas. A captação destes diálogos foi feita, na maior parte das vezes, tendo por base o diário das aulas e ainda algumas gravações em vídeo. Quanto aos excertos dos relatórios dos alunos, farei a sua transcrição entre aspas e em itálico, complementando-os com a reprodução de esquemas e ou resoluções.

Durante a *1ª Fase*, em cada episódio, relatam-se todos os aspectos que foram julgados relevantes, ocorridos nas aulas referentes à resolução de um só problema. Descrevo e procuro tornar patentes algumas das dificuldades e dos sucessos obtidos pelos alunos da turma, exponho sentimentos e frustrações, individuais ou colectivos, pretendo transmitir realisticamente o ambiente vivido na sala de aula e a forma como os alunos interagiam com os computadores na resolução de problemas.

Na *Fase Final*, um episódio relata os acontecimentos e situações ocorridos durante a resolução de um problema, por cada um dos grupos seleccionados, sendo agora a questão temporal de menor relevância. Esta alteração tornou-se necessária, uma vez que os vários grupos de alunos não tinham o mesmo ritmo de trabalho. Em conformidade com os processos de resolução adoptados e com a velocidade da sua execução, houve diferentes tempos de resolução do mesmo problema, em diferentes grupos.

4.6.As Entrevistas

As entrevistas constituíram a última operação de recolha de dados junto dos alunos. Pretendia, então, que estes expusessem as suas ideias e opiniões sobre a utilização do computador na resolução de problemas durante as duas fases, as suas opções e preferências relativamente aos processos de resolução. A duração das mesmas oscilou entre

80 e 100 minutos e foram registadas através de uma gravação áudio, depois de os alunos escolhidos terem autorizado a sua realização. Cada uma das entrevistas foi feita a um grupo de alunos em simultâneo e todas foram integralmente transcritas num momento posterior.

Das transcrições das entrevistas foram retirados excertos que são apresentados no capítulo da análise de dados, entre aspas e usando itálico.

O guião da entrevista (Anexo 9) foi elaborado em consonância com os objectivos definidos para o presente estudo, tendo em conta as observações feitas durante a experiência na sala de aula e ainda uma primeira análise dos *Diários de Resolução* produzidos pelos alunos nas aulas que abrangeram a *Fase Final*. Percebi que estava perante um conjunto de temas sobre os quais pretendia recolher informação, designadamente, importava-me clarificar o que estava subjacente às opções de uso da tecnologia durante a resolução de problemas. Optei pelas entrevistas em grupo, uma vez que durante a realização do estudo também foi o trabalho em pequenos grupos a estratégia adoptada na sala de aula. Atendendo a que os alunos trabalharam sempre em grupos de dois, pareceu-me importante entrevistar os dois alunos de um grupo simultaneamente. Desta forma, seria possível conhecer melhor a dinâmica do grupo que estava por detrás das opções feitas ao longo de todo o percurso de resolução. Além disso, criaram-se também melhores condições para se recriarem e recordarem ambientes e situações da sala de aula a que se fizeram algumas referências ao longo da entrevista e acabou por se estabelecer um ambiente mais descontraído, favorecendo a troca de ideias e de opiniões com os entrevistados. Contudo, no início da entrevista, porque me importava conhecer um pouco do percurso escolar de cada um dos elementos do grupo, houve questões que foram colocadas individualmente a cada aluno.

Pretendia, acima de tudo, que os alunos durante a entrevista estivessem disponíveis e tranquilos, sem pressa e sem constrangimentos; após conversar com cada um dos grupos sobre a sua disponibilidade, ficou decidido que estas se realizariam depois de concluídos todos os exames nacionais de 11º ano, ou seja, nos finais de Junho, já no período de férias dos alunos, embora suficientemente próximo do termo das aulas e da experiência.

4.7.Calendarização

O projecto começou a definir-se em Dezembro de 2004, tendo a fase de implementação no terreno e o processo de recolha de dados decorrido desde Novembro de 2005 até Junho de 2006.

Data	Desenvolvimento
Dezembro 2004	-Elaboração do ante-projecto de investigação
Setembro 2005 –Novembro 2005	-Pesquisa bibliográfica -Pesquisa de problemas para a *1ª Fase* -Planificação das actividades e das aulas
Novembro 2005-Fevereiro 2006	-Implementação do *Questionário Inicial* -Pesquisa de problemas para a *1ª Fase* -Implementação da *1ª Fase* do projecto -Observação participante na turma -Recolha de dados
Março 2006 – Maio 2006	-Análise e interpretação dos dados recolhidos durante a *1ªFase* -Pesquisa de problemas para *a Fase Final*
Maio 2006 – Junho 2006	-Implementação da *Fase Final* -Observação participante na turma -Recolha de dados -Selecção dos grupos a serem entrevistados
Julho 2006	- Primeira análise dos dados recolhidos durante a *Fase Final* -Entrevistas aos grupos seleccionados

Tabela 4. Agenda das actividades para a execução do projecto.

Durante a recolha de dados, foram diversos os instrumentos utilizados, ainda que as técnicas usadas se tenham centrado essencialmente na observação de aulas, na recolha de documentos produzidos pelos alunos e na realização de entrevistas.

Instrumentos de Recolha	**Descrição**
Questionário Inicial	Registo da experiência dos alunos com tecnologias em anos anteriores.
Relatórios na *1ª Fase*	Registos, feitos pelos alunos, dos processos de resolução dos problemas da *1ª Fase.*
Diários de Resolução da *Fase Final*	Registos, feitos pelos alunos, dos seus pensamentos, intenções, escolhas e procedimentos durante a resolução dos problemas da *Fase Final.*
Diário de bordo	Registo, após observação, dos incidentes que ocorriam durante as aulas, posteriormente descritos nos episódios.
Ficheiros do Sketchpad	Registo, em suporte digital, dos *sketchs* criados pelos grupos.
Gravação em vídeo de aulas	Por questões de logística, só foram filmadas duas aulas.
Entrevistas de grupos	Gravadas em áudio, realizadas com grupos de dois alunos.

Tabela 5. Instrumentos de recolha de dados utilizados no estudo.

4.8. A selecção dos casos

O estudo pretendia investigar o desempenho dos alunos, com diferentes processos de resolução dos problemas, tendo em vista perceber o que está subjacente a possíveis resistências dos alunos à utilização das tecnologias bem como a uma eventual atitude favorável e entusiasta relativamente à sua utilização.

Os alunos foram seleccionados para serem entrevistados, em função das opções que evidenciaram quanto ao método escolhido para abordarem e conduzirem a resolução dos problemas durante a implementação da *Fase Final*. Interessava vir a entrevistar alunos que tivessem feito diferentes escolhas no processo de resolução dos problemas, para se conhecer e compreender o porquê das diferentes posições. Por outras palavras, havia a intenção de averiguar o que levava os alunos a recorrer ao *Sketchpad* ou o que os fazia descartar o uso do computador e preferir uma resolução analítica, com papel e lápis. Com base na observação e conhecimento do desempenho dos alunos durante as dez aulas em que foi implementada a *1ª Fase*, pareciam-me previsíveis algumas das opções que a maioria dos alunos iria fazer durante a resolução dos problemas finais. Assim, à partida, para a *Fase Final*, estavam quase definidos quais seriam os alunos que viriam a ser entrevistados, pelo que estes se tornariam um especial foco de atenção para a minha investigação. É de referir que a selecção não estava fechada, facto que me fez continuar expectante e receptiva a eventuais alterações às minhas suposições.

Como já referi, atendendo a que o trabalho desenvolvido ao longo da experiência foi quase sempre em grupos de dois elementos, optou-se por manter os mesmos pares durante as entrevistas. Os pares de trabalho mantiveram-se praticamente inalterados ao longo deste estudo, havendo apenas pequenas alterações quando faltava algum dos alunos. Assim delinearam-se quatro perfis de grupos para esta fase final, que vieram a definir-se como os quatro casos a aprofundar.

GRUPOS	ALUNOS
I	Élio e Bernardo
II	Isaura e Marisa;
III	Sónia e Inês;
IV	Irina e Anabela.

Tabela 6. Grupos pré-seleccionados para serem entrevistados e foco de maior atenção durante a *Fase Final.*

Os quatro grupos foram pré-seleccionados de acordo com o trabalho demonstrado durante a *1ª Fase*, pois apresentavam diferentes perfis de actuação que iam ao encontro dos propósitos deste estudo. Deve notar-se que os alunos nunca souberam que eram, ou poderiam vir a ser, alvos de um estudo mais particularizado. Houve a intenção de criar condições para que os alunos estivessem descontraídos, tentando anular qualquer pressão que os fizesse sentir-se especialmente avaliados ou observados. Dar a conhecer quais os alunos que viriam a ser entrevistados tornar-se-ia um factor constrangedor, uma vez que os alunos poderiam pensar que foram seleccionados porque a professora esperava um determinado desempenho da sua parte durante a *Fase Final*. Embora este fosse um facto verdadeiro, não me pareceu conveniente que os alunos o conhecessem antecipadamente para que não se sentissem condicionados nas suas opções e a tentar ir ao encontro daquilo que poderiam achar que a professora estava à espera. Ficou decidido que só depois de concluída a F*ase Final* é que os alunos seleccionados seriam informados da realização das entrevistas.

À partida, com os perfis e alunos definidos para focalizar o estudo, estariam contemplados os dois processos de resolução de problemas, o analítico e o computacional. Porém, havia naturalmente alguma incerteza quanto ao desempenho dos alunos, que poderiam ser variados nesta fase, pelo que era importante estar atenta ao trabalho de todos os outros alunos. Não interessavam, como é evidente, os alunos em particular, mas sim os seus processos de resolução e o porquê de determinadas escolhas.

Após a realização da *Fase Final*, confirmaram-se os grupos pré-seleccionados, à excepção do Grupo III, em que as duas alunas nem sempre trabalharam em conjunto, havendo aulas em que fizeram parceria com a Maria. Assim, esta aluna foi também incluída no grupo para ser entrevistada, o que não veio acontecer por não estar na cidade quando decorreu a entrevista. À medida que iam surgindo mais dados relativos a cada um dos grupos, que se iam demarcando as diferenças e os traços distintivos entre estes, foram surgindo, de forma espontânea "*rótulos*" para cada um dos grupos, que são esclarecedores do perfil de cada um.

GRUPOS	**ALUNOS**	***RÓTULOS***
I	Élio e Bernardo	*"Os Tecnológicos Convictos"*
II	Isaura e Marisa	*"As Tecnológicas Inseguras"*
III	Sónia, Inês	*" As Semi-Analíticas"*
IV	Irina e Anabela	*"As Analíticas Convictas"*

Tabela 7. Os grupos entrevistados e os respectivos Rótulos.

"*Os Tecnológicos Convictos*"

O Élio e o Bernardo formaram uma dupla desde o início da experiência, apesar de nas aulas, em sala normal, não estarem juntos na mesma secretária. Desde o início, mostraram-se entusiastas em relação ao trabalho com computadores na sala de aula. Eram quase sempre os primeiros a concluírem as propostas, investindo o resto da aula noutras tarefas, como ajudarem outros colegas ou explorarem novas potencialidades do programa *Sketchpad*, conseguindo várias vezes surpreender-me com os seus desempenhos. Ambos eram bons alunos na disciplina de Matemática, tendo obtido os dois no 2º período a classificação de 16 valores e eram alunos interessados em todas as aulas. O Élio, contudo, era mais estudioso e sempre cumpridor em todas as tarefas propostas, era um aluno um pouco nervoso e também preocupado com os resultados que ia obtendo. O Bernardo, muito inteligente, sempre manteve grande serenidade, mesmo em momentos de avaliação. Nem sempre totalmente cumpridor de todas as tarefas; os trabalhos de casa eram o seu "calcanhar de Aquiles", estudando só nas vésperas dos testes, mas as suas capacidades permitiam-lhe alcançar, de forma regular, bons resultados. Quando eu lhe dizia que podia fazer ainda melhor se se empenhasse um pouco mais, ele respondia sempre que já estava bem assim. Nas outras disciplinas, ambos apresentavam boas notas, todas acima dos 15 valores. Ambos ficaram, no final do 10º ano, no Quadro de Excelência da escola.

"*As Tecnológicas Inseguras*"

A Isaura e a Marisa eram duas alunas que, com mais duas colegas, formavam um quarteto inseparável; na sala de aula normal, na sala de informática e até nos intervalos, elas estavam sempre juntas! As duas alunas colocavam-se sempre ao fundo da sala e ambas tinham grandes dificuldades na disciplina de Matemática. Tiveram as duas a classificação de 7 valores no final do 2º período e várias negativas nas demais disciplinas.

Eram alunas que nunca ou raramente participavam na sala de aula normal, só o fazendo quando eu lhes dirigia uma questão. Muitas vezes, as duas distraíam-se, tendo que lhes chamar a atenção para o trabalho e para a aula. Contudo, nas aulas de resolução de problemas, na sala de informática, a sua postura era completamente diferente; mostravam-se interessadas, solicitavam a minha presença para as esclarecer em dúvidas que tinham ou para mediar discussões que as duas mantinham, relacionadas com o problema em que estavam a trabalhar. Nos debates que estabelecia com toda a turma, durante a resolução de problemas, várias vezes participavam espontaneamente, sobretudo a Marisa, e davam a sua opinião. Estas alunas foram uma revelação durante esta experiência, por manifestarem atitudes completamente diferentes no trabalho com os computadores, comparativamente com as que apresentavam nas aulas que decorriam na sala normal. Pelas observações feitas durante a *1ª Fase*, desde o primeiro momento, arrisquei que ambas avançariam sem olhar para trás para uma resolução dos problemas com o *Sketchpad* quando lhes fosse dito que teriam a liberdade de escolha do processo de resolução.

"*As Semi-Analíticas*"

A Sónia e a Inês eram duas grandes amigas, colegas de carteira nas aulas em sala normal e que na sala de informática, por vezes, alternavam a parceria com a Carolina e com a Maria, mantendo-se, contudo, sempre próximas. Durante a primeira fase do projecto, manifestaram algumas dificuldades na resolução de alguns problemas, principalmente nas tarefas a executar com o *Sketchpad*. Várias vezes, as suas construções eram menos conseguidas por falharem em pormenores durante a elaboração, o que fazia com que ficassem bastante desanimadas. As duas alunas, durante a resolução de problemas, discutiam entre si os procedimentos a tomar, não conseguindo, frequentemente, chegar a um consenso e solicitavam, regularmente, a minha presença para esclarecer questões relacionadas com a execução da construção.

A Sónia era uma aluna aplicada na disciplina de Matemática, colocando sempre muitas questões para esclarecimento, fruto do trabalho mais ou menos regular que tinha para a disciplina, fora da sala de aula. Estava sempre muito atenta, não tinha receio em participar e expressar a sua opinião. No final do 2º período, teve a classificação de 14 valores na disciplina de Matemática. Nas aulas de implementação deste projecto, com recurso ao computador, manifestou-se uma aluna menos confiante e participativa, por vezes bastante hesitante nos momentos de decisão.

A Inês era uma aluna menos trabalhadora, revelando grandes dificuldades na disciplina de Matemática, preocupada com as suas notas mas sem força anímica para lutar contra os entraves sentidos na disciplina de Matemática. No final do 2º período, teve a classificação de 8 valores. Era uma aluna que não participava muito mas que me ia solicitando regularmente esclarecimentos acerca do tema em estudo; outras vezes, pedia a ajuda da Sónia, a sua colega de grupo. Nas aulas com computadores, mostrava-se um pouco mais confiante, discutindo e afirmando mais as suas ideias com a Sónia do que nas aulas em sala normal.

Quanto aos possíveis desempenhos na resolução de problemas, na fase final, eram alunas relativamente às quais não se tornava seguro conjecturar sobre o processo de resolução que iriam escolher. Provavelmente, seria a natureza do problema a influenciar o caminho que iriam percorrer durante a resolução. Eram alunas com características mais incertas, que poderiam escolher tanto o processo analítico como o processo computacional.

"As Analíticas Convictas"

Por último, a Irina e a Anabela, não formaram grupo desde o início do projecto, tendo tido vários colegas de grupo. Contudo, na sala, elas colocavam-se sempre muito próximo, trocando regularmente impressões, apesar de trabalharem com outros colegas. Sempre as senti pouco confortáveis nas aulas de trabalho com o computador, comparativamente com a forma de estar que revelavam na sala de aula normal. Ambas eram muito aplicadas, apresentando sempre os relatórios de aula de uma forma muito cuidada.

A Anabela era uma excelente aluna, tendo obtido a classificação de 18 valores na disciplina de Matemática, no final do 2º período. Tratava-se de uma aluna muito cumpridora e batalhadora. Era um pouco tímida pelo que a sua participação nem sempre ocorria de forma espontânea.

A Irina obteve no 2º período a classificação de 16 valores a Matemática, mostrando-se sempre um pouco insegura em relação à sua aptidão na disciplina. Todavia era uma aluna muito trabalhadora, esforçando-se por superar as suas inseguranças e dificuldades, acabando por obter bons resultados. Nas aulas com computadores, várias vezes mostrou dificuldade em trabalhar na resolução de problemas com o recurso ao computador. Mostrava-se confusa em relação aos procedimentos a executar com o *Sketchpad*, solicitando regularmente a minha presença para proceder a esclarecimentos; por diversas vezes, quando chegava perto dela, esta mostrava-se confusa e descontente com a sua própria prestação, o que não acontecia tão regularmente nas outras aulas.

Mediante o percurso, atitude e desempenho apresentados pela Irina e pela Anabela, previa que nesta fase final escolhessem ambas decididamente um processo de resolução analítico.

Capítulo IV - ANÁLISE DE DADOS

1. Dados do Questionário Inicial

No início da implementação deste estudo no terreno, importava saber qual era o ponto de partida. Que práticas tinham os alunos experimentado ao longo do seu percurso escolar, no que concerne à utilização das tecnologias na aula de Matemática? Como tinham decorrido essas aulas? Quais as expectativas dos alunos sobre a utilização do computador nas aulas de Matemática? Que sugestões faziam?

Assim, no início, solicitou-se que respondessem a um questionário (anexo 1). Este foi implementado no início de Novembro, antes dos alunos terem tido a primeira aula com recurso aos computadores.

Resultados

Todos os alunos afirmaram que tinham computador em casa, havendo apenas um aluno que refere não o usar regularmente. O computador é utilizado essencialmente para navegar na Internet, realizar os trabalhos da escola e contactar com os amigos e colegas.

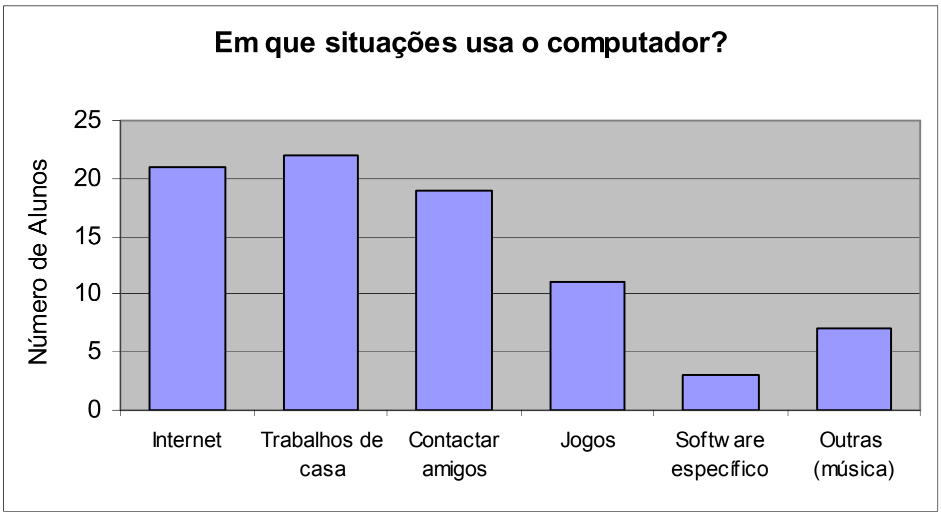


Gráfico 1. Resultados da questão 3 do Questionário Inicial

Nenhum aluno referiu a aplicação do computador, com *software* específico, para o aprofundamento e/ou consolidação dos conteúdos de alguma disciplina curricular.

A quase totalidade da turma já tinha trabalhado com computadores na aula de Matemática já que mantinha praticamente a mesma constituição do ano anterior; só dois alunos não tinham passado por esta prática porque eram novos na turma.

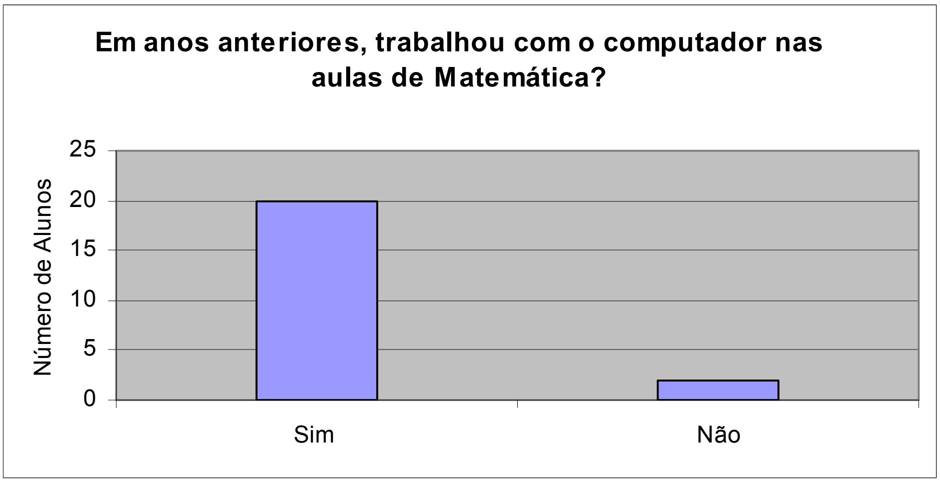


Gráfico 2. Resultados da questão 4.

Nenhum aluno faz referência à utilização de computadores durante o ensino básico, todos mencionam que essas aulas ocorreram apenas no 10º ano de escolaridade, apesar da turma no 10º ano ser constituída por alunos provenientes de cinco ou seis escolas básicas do concelho e oriundos de diferentes turmas, mesmo quando vindos da mesma escola.

Essas experiências no 10º ano foram episódios isolados. Quase todos os alunos referem que ao longo do ano lectivo tiveram cerca de três aulas, tendo sido implementadas para iniciar o estudo de novos conteúdos programáticos; alguns mencionam que essas aulas ocorreram no início do estudo dos vectores.

A generalidade dos alunos considerou as ditas aulas com utilização do computador como mais interessantes, mais simples, mais agradáveis, aulas diferentes em que podiam visualizar melhor o que estavam a estudar. A maioria considerou o uso do computador como um elemento facilitador das aprendizagens e inovador. Houve alunos que escreveram:

"*... é uma forma de cativar os alunos, aulas diferentes, fora do vulgar*."

"... com esse programa podíamos 'entrar' melhor e de uma maneira diferente na matéria"

"... foi mais fácil tomar atenção...."

"*... é uma maneira 'engraçada' de aprendermos Matemática."*

"*... aprendi Matemática de forma mais 'divertida'* ..."

De salientar que vários alunos, quando descreviam o modo como decorreram as aulas, faziam-no usando adjectivos como *divertida, engraçada*, mas sempre escritos entre aspas. Porquê esta necessidade? Pensarão eles que a aula de Matemática não deve ser rotulada com estes adjectivos? Tem que ser algo sério, sisudo e por isso quando se adjectiva deve ser feito com cuidado? Porquê qualificar com este constrangimento?

Surgiram contudo dois alunos com pareceres menos favoráveis quanto ao uso dos computadores na sala de aula, motivados ou pelo *software* ou pela gestão e planificação da própria aula.

" ...o programa era bom, mas um bocado complicado de usar."

"*Eu achei interessante e as aulas correram bem, mas eu acho um pouco monótono passar uma aula inteira a trabalhar com o computador. Portanto, penso que se deveria intercalar a aula, (metade computador, metade aula normal) de maneira a que o mesmo assunto possa ser tratado das 2 maneiras."*

Quando os alunos foram questionados se gostariam de vir a trabalhar com computadores na aula de Matemática, a resposta foi afirmativa por parte de todos. As expectativas eram altas, dizendo que esperavam vir a conseguir compreender a matéria mais facilmente.

Quanto às sugestões a fazer sobre o uso de computadores na aula de Matemática, mencionaram desejar trabalhar mais para poder aplicar a matéria, de modo mais frequente, e resolver problemas como forma inovadora de cativar os alunos.

Houve ainda sugestões, de vários alunos, no sentido de que a avaliação fosse também feita com recurso ao computador.

"... passar a aprender matemática através de meios informáticos, pois os alunos correspondem melhor e aprendem mais facilmente a matéria."

" ...seria interessante, se à medida que estudamos determinada matéria, fossemos tendo aulas em que observássemos as suas verdadeiras aplicações na vida real, assim talvez a matemática deixasse de ser vista por muitos como algo descontextualizado e passaria a ser algo real e que está presente em todo o lado."

"... para dar matéria nova e seria giro fazer um teste no computador."

Como síntese dos resultados obtidos a partir deste questionário, não surgiram grandes surpresas relativamente à realidade de que eu tinha conhecimento. Não foi estranho saber que os alunos tinham computador pessoal nem era novidade o facto de terem usado o computador no ano anterior, no estudo dos vectores. Eu estive presente nessas aulas como orientadora de estágio. Quanto ao modo de utilização do computador por parte dos alunos, as respostas eram também previsíveis por serem do conhecimento geral.

O aspecto mais curioso dos dados recolhidos com o questionário foi o ter constatado que os alunos nunca tinham experimentado o uso do computador na aula de

Matemática ao longo de todo o ensino básico. Esta noção é tanto mais surpreendente quanto se sabe que estes alunos são provenientes de muitas escolas e turmas do ensino básico. A ausência deste contacto dos alunos com o computador é reveladora de uma realidade escolar distante do mundo tecnológico em que os jovens estão completamente inseridos. É de realçar que isto ainda acontece passados mais de vinte anos sobre as primeiras orientações metodológicas e experiências que envolveram o uso dos computadores na aula de Matemática.

2. A 1ª Fase

A implementação de uma nova tecnologia ou *software*, na sala de aula, exige da parte do professor uma série de reflexões e a tomada de decisões, que nem sempre são fáceis, constituindo muitas vezes uma barreira à sua efectiva execução.

O contacto que alguns alunos envolvidos no presente estudo tiveram com o *Sketchpad* foi muito pontual, ocorreu de forma isolada em uma ou duas aulas, em anos lectivos anteriores; na prática não dominavam o *software*, nem a sua filosofia de funcionamento.

A implementação na sala de aula de um determinado *software* levanta sempre este problema, na medida em que para se poder tirar partido de uma determinada ferramenta tecnológica tem que se conhecer as suas potencialidades.

Como é que os alunos vão aprender a trabalhar com uma nova ferramenta?

Os professores têm como uma das referências o seu próprio processo de formação, aprendendo a trabalhar com uma dada ferramenta em acções de formação, sessões práticas em encontros, regionais e nacionais, de professores de Matemática, sendo por norma entregue uma longa e exaustiva listagem dos diferentes menus, com os respectivos desenhos e descrição do desempenho. De seguida, são propostas diversas actividades, geralmente com um grau de dificuldade crescente e nas últimas, por vezes, exige-se um bom domínio da ferramenta ou o auxílio dos formadores para se conseguir executar as etapas finais e obter-se um produto, quase sempre espectacular e vistoso, levando-nos a admirar a ferramenta pelas suas potencialidades e versatilidades. Muitas vezes, sai-se do curso ou da sessão com a cabeça cheia de planos de implementação e de actividades a desenvolver com os alunos.

O trabalho com os alunos é forçosamente diferente, com outros objectivos. Se nas acções de formação para professores, o intuito é mostrar o máximo de potencialidades de determinado programa, aos alunos é necessário proporcionar-lhes algum conhecimento da ferramenta para que estes possam tirar partido dela, definir estratégias, fazer opções sobre o percurso a seguir na execução de determinada tarefa.

Analisando algum material utilizado por professores na sala de aula com alunos, em que houve implementação das novas tecnologias, nota-se que algumas actividades apresentam uma exaustiva indicação dos diversos passos a seguir, cabendo ao aluno um papel um pouco redutor, como o de tirar algumas conclusões, relacionar resultados, etc.

Ponderei, por isso, diversas metodologias a utilizar. Até onde deveria ir na informação a fornecer aos meus alunos? Elaborar um pequeno guião com algumas instruções acerca dos aspectos mais relevantes? Ou elaborar fichas/guiões onde seriam dadas todas as indicações dos passos a seguir?

Atendendo a que o trabalho a realizar na sala de aula não seria pontual, mas ao longo do ano, pretendia que os alunos fossem livres de escolher o caminho a percorrer e não apenas executores de um rol de instruções previamente criadas, por sentir que esta é uma abordagem castradora do uso das tecnologias na aula de Matemática.

Depois de definida uma linha orientadora, debati-me com uma outra questão: Que actividades seleccionar para trabalhar com os alunos no *Sketchpad*?

Era importante e pertinente para o projecto pedagógico a que me tinha proposto, seleccionar problemas que pudessem ser resolvidos, tanto analiticamente como geometricamente. Nesta lógica, alguns problemas de optimização, apresentavam-se como boas hipóteses para serem trabalhados com um programa de geometria dinâmica. Porém, quando trabalhamos com uma turma do 11º ano e temos a preocupação de permitir resolução de problemas, também com processos algébricos, ficamos mais limitados na selecção, uma vez que só se estudam derivadas de funções polinomiais e racionais do tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ x \neq -\frac{d}{c}$, apesar de podermos recorrer sempre à calculadora gráfica.

Para além de pretender seleccionar problemas com possibilidade de resolução por dois processos, geométrico e algébrico, comecei também a preferir problemas do manual escolar adoptado na escola. Achei que seria pertinente mostrar aos alunos que, apesar dos problemas não serem colocados no manual com a indicação para uma resolução com recurso a um determinado *software*, isso é por vezes possível. Na minha perspectiva, é sempre uma vantagem para o aluno trabalhar problemas com diferentes abordagens, permitindo assim fazer conexões entre elas, revertendo num maior enriquecimento e desenvolvimento de competências para o aluno.

As dificuldades na escolha das propostas de trabalho para utilizar numa aula com computadores são comuns a muitos professores; talvez porque andamos demasiado preocupados com o cumprimento de programas, com a leccionação dos diferentes temas, com a resolução de exercícios de aplicação de todo o tipo, para que os nossos alunos, quando sujeitos a um exame nacional não sejam apanhados desprevenidos, etc.

As actividades que tratamos em sessões práticas são por vezes muito elaboradas e a aplicabilidade na sala de aula não é muito evidente. Por vezes, pesquisamos em documentos que vamos reunindo, de encontros de professores, de várias publicações e esquecemo-nos do manual, que está sempre ao nosso lado. Na hora da selecção, colocamo-lo frequentemente de parte, como se nele fosse impossível encontrar o que procuramos.

Para muitos de nós, professores, ao confrontarmo-nos com um problema dentro de um determinado tema, o primeiro processo de resolução é aplicando os conteúdos estudados no âmbito do respectivo tema. Há um vício de raciocínio inerente à localização do problema e só depois de nos debruçarmos um pouco mais sobre o dito problema é que surgem outros processos de resolução. Por várias razões, entre elas a pressão do tempo, a verdade é que muitas vezes nem os exploramos com os nossos alunos.

Contudo, para este estudo, à medida que ia clarificando e definindo para mim própria, o tipo de problemas e actividades que procurava dinamizar na sala de aula, aplicando o *Sketchpad*, comecei a deixar de sentir a necessidade de fazer acrobacias. Nem foi difícil "conseguir arranjar o tempo" para as implementar, nem foi necessário procurar noutras fontes para além do manual.

Foi essencial, isso sim, olhar para os problemas do manual com olhos diferentes, segundo um outro prisma, de quem está a pensar na utilização e na adequação do problema aos alunos, aos conteúdos e à ferramenta, em especial.

2.1.Episódio 0 – O Quadrado e o Triângulo Equilátero

2.1.1. Apresentação

Esta aula marcou o início de um projecto educativo que decorreu de forma regular ao longo do ano lectivo. Era a primeira vez que os alunos iam trabalhar com este programa, logo a forma como iria ser feita essa iniciação foi muito discutida e pensada. Para além da selecção da actividade inicial, tive que definir a forma como os alunos iriam começar a trabalhar com o *Sketchpad*, cujas potencialidades praticamente não conheciam. Ponderei se deveria apresentar uma listagem com os menus do programa e respectiva descrição, tendo acabado por decidir fazer apenas uma breve apresentação no início da aula de cada um dos menus.

As actividades pretendiam que os alunos criassem no computador duas figuras planas: um quadrado e um triângulo equilátero. Nestes polígonos "dinâmicos", que podem ser construídos por vários processos, se arrastarmos alguns dos vértices, as medidas dos lados são alteradas, contudo mantêm-se constantes os ângulos e as proporções da figura, pelo que temos sempre um quadrado ou um triângulo equilátero. Estas actividades foram escolhidas pela simplicidade de execução e por permitirem também esclarecer determinados procedimentos do programa.

2.1.2.A aula

Iniciei a aula com uma referência ao projecto educativo em que estávamos envolvidos e falei na forma como iria ser implementado ao longo do ano lectivo.

Foram ligados os computadores e indicada a *password* da turma, pois apesar de ter sido divulgada a todos os alunos no início do ano lectivo pela gestão da escola, havia vários alunos que não se recordavam. Eu também estava com dificuldade em entrar na rede da escola e optei por fazê-lo com a *password* da turma. Depois de todos termos os computadores ligados à rede, ainda estivemos um pouco desorientados a procurar localizar o programa *Sketchpad* na rede da escola. Porém, passados uns minutos, estas pequenas contrariedades inerentes ao uso de computadores numa sala de aula foram ultrapassadas.

Fazendo a projecção do ecrã do meu computador, apresentei o programa, começando por uma pequena demonstração de cada um dos comandos da barra lateral.

Figura 12. ***The Gemeter's Sketchpad.***

Os alunos estiveram aproximadamente quinze minutos da aula a explorar o programa. Iam marcando pontos, construindo segmentos, rectas, círculos, seleccionando, apagando; na maioria dos casos, os alunos ficaram com uma "folha de rascunho" como se se tratasse duns rabiscos numa folha de papel.

Os alunos abriam e fechavam menus, iam experimentando os comandos. Entretanto alguns desesperavam-se por não conseguirem deixar de construir circunferências ou rectas. No programa, se por exemplo, a opção para construir segmentos de recta está activa, ver figura 13, ao clicar no botão do rato e ao movimentar o cursor na janela é desenhado automaticamente um segmento. Só quando é desactivada essa opção, é que se deixa de construir segmentos quando se clica no botão do rato. Com algumas indicações minhas ou dos colegas, estas situações ficaram resolvidas.

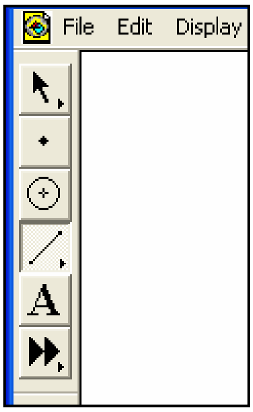


Figura 13.*Sketchpad* com uma opção seleccionada.

Passada esta primeira fase de experimentação e de primeiro contacto com o programa, pedi-lhes que construíssem um quadrado. Não lhes dei qualquer indicação acerca dos procedimentos a tomar. Os alunos construíram (como seria de esperar) quatro segmentos de recta, na maioria dos casos "quase" com o mesmo tamanho e que formavam (pelo menos a "olho nú") um ângulo que, se não era de noventa graus, era certamente muito próximo.

Todos os alunos construíram o quadrado numa "posição normal", ou seja, dois lados na horizontal e os outros dois, obviamente na vertical. Nesta fase os alunos claramente **desenhavam** um quadrado. Uns mais rápidos do que outros, não se baseavam em princípios matemáticos como a perpendicularidade, rotações, translações, etc. Desenhavam um segmento na horizontal e a partir de cada um dos seus extremos construíam dois segmentos verticais; com um pouco da perícia que têm no manuseamento do rato do computador, rapidamente obtinham o que pretendiam.

À medida que ia vendo os respectivos "desenhos" interrogar-se se eles tinham a certeza de que os lados eram efectivamente perpendiculares e tinham a mesma medida. Uns estavam mais convencidos do que outros. Uns alunos começaram a questionar-se mas outros estavam satisfeitos com o resultado.

Apresentei-lhes então um quadrado, construído previamente por mim, em que podia alterar a medida do comprimento do lado, rodá-lo preservando sempre a figura geométrica. Apresentei-lhes a possibilidade de se ocultarem estruturas auxiliares a uma determinada construção.

Os alunos reformularam o trabalho efectuado, questionando e discutindo as condições necessárias para garantir a perpendicularidade e a mesma medida do lado. Nesta fase, claramente, estavam a discutir e a aplicar conceitos matemáticos. Nessa altura, mexiam nas construções e verificavam que obtinham sempre um quadrado, com outras dimensões e noutra posição.

Entretanto, a Nidia e a Ana aguardavam desesperadamente por mim porque a construção delas tinha desaparecido.

– Só estava a apagar um ponto! – Dizia a Ana.

Mostrei-lhes a opção *Undo* do menu *Edit* e para alívio das alunas apareceu novamente todo o trabalho no ecrã.

A vários alunos sucedeu apagarem inadvertidamente as respectivas construções ou parte delas e como dizia a Carolina:

– Ainda bem que existe o *Undo*!

Eu concordei plenamente com a observação da aluna. Por experiência própria, sinto que não tenho receio em experimentar situações novas, pois com esta opção sei que posso retomar a situação anterior se assim o desejar.

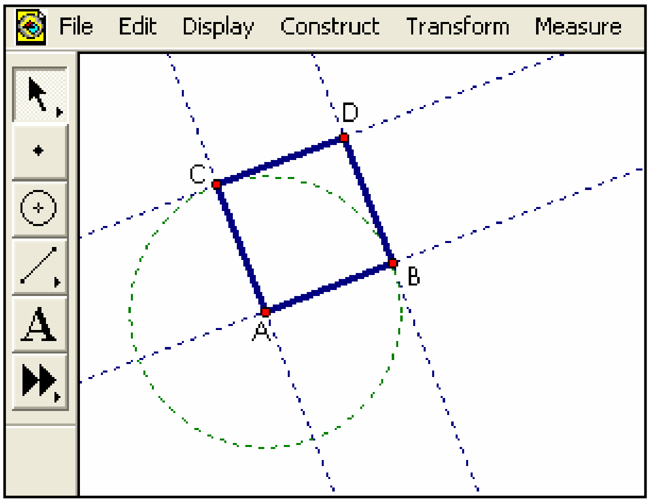


Figura 14.Construção do quadrado feita pelo Miguel.

Houve alunos que verificavam que os vértices do quadrado não funcionavam todos da mesma forma! Como observava o Miguel, se mexesse nos pontos A e B, as medidas do lado do quadrado alteravam-se e este rodava, mas se arrastasse os outros dois vértices só conseguia deslocar toda a construção pelo ecrã do computador.

Aproveitei a observação do Miguel e de outros alunos, para fazer um ponto da situação e esclarecer algumas das questões levantadas, para toda a turma. Recorrendo ao meu computador, com a imagem do ecrã projectada na parede, expliquei a hierarquia entre os elementos da construção com base na construção do Miguel:

1º O ponto A é um ponto livre, é o ponto#1, foi o primeiro ponto a ser marcado;

2º Um segundo ponto que não se vê na

Figura 14, é o ponto #2, através do qual se definiu a primeira recta;

3º Marcou-se B para definir a circunferência, logo B é o ponto #3 que pertence à recta inicial.

4º Os outros dois vértices obedecem à hierarquia da construção, resultam de intersecções entre rectas paralelas e perpendiculares.

Expliquei que, como consequência desta hierarquia:

1º Se deslocar o vértice A, conseguimos rodar e alterar as dimensões do quadrado;

2º Se deslocar o vértice B, não conseguimos rodar o quadrado, só alterar as dimensões do lado do quadrado, pois é o ponto que foi utilizado para definir o raio da circunferência, ou seja, o lado do quadrado;

Os vértices C e D ao serem arrastados só deslocam toda a figura.

Referi, ainda, que esta característica do programa explica o facto de ao apagarmos, por exemplo, um ponto, a consequência não ser sempre a mesma; por vezes desaparece só esse ponto, outras vezes só parte da construção, ou então tudo desaparece se o que eliminámos foi colocado no início da construção e se se elaborou toda a estrutura a partir dele. Em resumo, a hierarquia definida pelo programa entre os elementos que formam uma construção resulta do nosso próprio processo de construção. Tudo o que for construído a partir de um certo elemento (ponto, recta, circunferências, …) desaparecerá se este for eliminado; também o dinamismo de uma dada figura obedece à mesma hierarquia.

Construídos os quadrados, pedi-lhes de seguida que construíssem um triângulo equilátero. Surgiram novos desafios, como o de garantir que o ângulo compreendido entre os lados seja sempre 60º e apareceram dois tipos de resoluções. Alguns alunos construíram um segmento de recta e duas circunferências auxiliares, cada uma com centro num dos extremos da circunferência com a medida do raio a ser a medida do segmento de recta. A intersecção das duas circunferências era obviamente o terceiro vértice do triângulo equilátero.

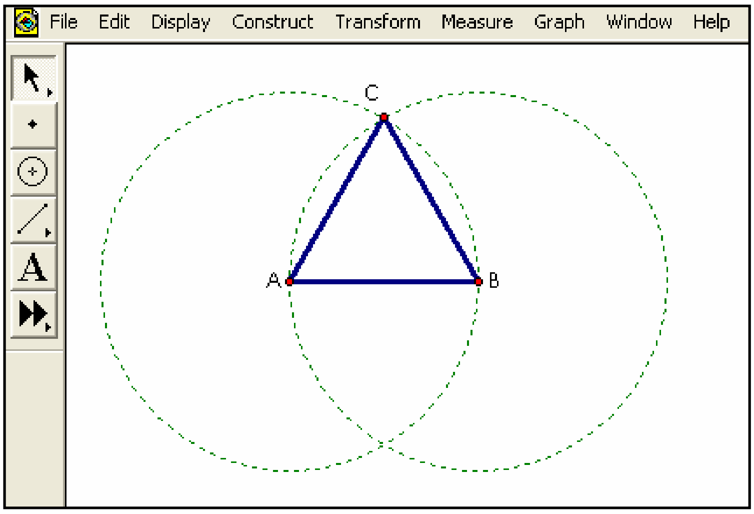


Figura 15.Uma construção do triângulo equilátero.

O Élio e o Bernardo descobriram as transformações geométricas do programa e aplicaram uma rotação de 60º a um dos extremos do segmento com centro de rotação no outro extremo.

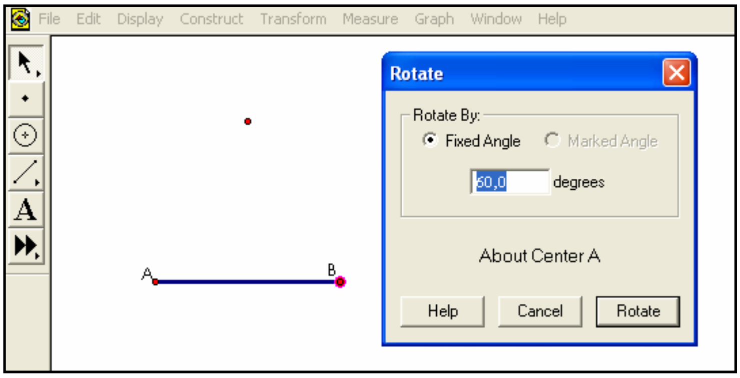


Figura 16.Uma construção do triângulo equilátero.

Os alunos mais rápidos mostravam-se sempre muito curiosos e alguns confirmaram se as medidas dos lados eram sempre iguais, quando faziam deslocar os vértices do segmento inicial, outros mediam os ângulos…

Entretanto a aula chegou ao fim.

2.1.3.Considerações Finais

Fiquei exausta mas muito satisfeita com a participação e entrega dos alunos, pude averiguar que, apesar das actividades apresentadas envolverem construções muito simples, foi possível aos alunos fazerem a sua primeira abordagem ao programa de uma forma bastante intuitiva, motivadora e ao mesmo tempo enriquecedora.

De quantas formas se pode construir um quadrado ou um triângulo equilátero no *Sketchpad*? São várias e todas elas aplicando diversos conceitos matemáticos.

Penso que a maioria dos alunos começou a perceber a filosofia do *Sketchpad* e a ter uma percepção do seu funcionamento.

Nunca pensei em referir, logo na primeira aula, a existência de hierarquias entre objectos de uma certa construção; porém, foi interessante ter surgido essa oportunidade. As observações de alguns alunos sobre os diferentes desempenhos de pontos que formam uma construção, mostravam uma atitude crítica por parte destes em relação à forma de funcionamento do *software*. Julgo que se impunha fazê-lo nesta aula, até porque as construções eram bastante simples, não envolvendo muitos elementos, tornando-se elas próprias um excelente exemplo para basear a minha explicação.

Pessoalmente não tive conhecimento das hierarquias logo que comecei a trabalhar com o programa, mas questionava-me sobre o facto de não surgir sempre a mesma "resposta" do programa, perante o mesmo procedimento, ou seja, seleccionar um único ponto e apagá-lo, não tem sempre a mesma consequência quando trabalhamos com o Sketchpad, provocando por isso algum desacerto com o *software*. Só mais tarde é que tive conhecimento destas propriedades dos objectos que podem ser consultadas no menu *Properties…* do programa em *Parents* e *children.*

Quando trabalhamos com um programa, julgo ser importante explicar aos alunos, não só como proceder para executar determinada tarefa, como também elucidar dentro do possível as formas de funcionamento da ferramenta. Estes esclarecimentos tornam-se ainda mais relevantes no momento de analisar resultados das instruções dadas ao programa.

Quase no término da aula solicitava aos alunos que gravassem todos os trabalhos na pasta criada para o efeito, cujo nome era a data do dia em que decorria a aula. No fim da aula, copiava tudo para uma *pen*, ficando desta forma com um registo em suporte digital do trabalho desenvolvido por todos os grupos.

2.2. Episódio 1 – Da Casa até à Rua

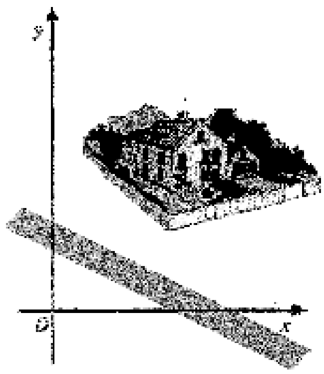
2.2.1. Apresentação

O tema 1 do programa de Matemática para o 11ºAno é " Geometria no Plano e no Espaço II", no qual um dos conteúdos a estudar é a perpendicularidade entre rectas. Não faz parte do programa o estudo da fórmula para a determinação da distância entre recta e ponto; no entanto, os autores do manual fazem-no como um dos exemplos de aplicação da perpendicularidade entre rectas no plano.

Os manuais escolares seguem por norma uma lógica na sua estrutura, que se baseia um pouco na sequência: apresentação do conteúdo – exemplificação – desenvolvimento – aplicação; nas margens do manual são indicados exercícios com o propósito de consolidar, aplicar e treinar um determinado conceito ou processo, terminando com a proposta de um conjunto de problemas finais.

Seleccionei o problema do manual dos alunos, Espaço 11 das Edições ASA, exercício 106, da página 135, e apresentei-o à turma na segunda aula em que trabalhámos com o programa.

"Pretende-se fazer a ligação do saneamento e água potável a uma vivenda em construção. Para isso, é necessário fazer ligações da casa à canalização principal que passa ao longo da rua



De acordo com o esquema da figura, relativamente ao referencial o.n. xOy, cuja unidade é o decâmetro, a casa situa-se em A(6, 9) e a rua obedece à equação x + 3y = 2.

Que quantidade de tubo é necessária para fazer as ligações?"

Deliberadamente, confrontei os meus alunos com uma situação nova, envolvendo processos nunca trabalhados anteriormente; também não tinham conhecimento da opção do *software* que permite obter prontamente a distância entre dois "objectos" representados no *Sketchpad*.

O problema, pela sua localização no manual, tem o objectivo de consolidar e treinar a situação descrita no interior da página do manual. Ao apresentá-lo à turma, antes de estudarmos a situação na sala de aula normal e sem recorrer ao manual, optei por transcrevê-lo numa ficha (Anexo 2). O mesmo problema ganha um novo interesse, surge numa fase diferente da sequência descrita anteriormente, passando a tratar-se de uma situação nova, inesperada e diferente da que o mesmo problema teria se fosse apresentado à turma na sequência do manual. O facto de os alunos desconhecerem, à partida, o procedimento a executar para resolver o problema transformou um exercício num problema (Borralho, 1990; Abrantes, 1988).

Tal como indica Silveira (2001), exercício é uma actividade de treino para aplicar alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo aluno, como seja, a aplicação de um algoritmo ou de uma fórmula previamente conhecida. O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa.

Pela antecipação da apresentação da proposta, antes de se estudar a situação na sala de aula, pelo facto de os alunos não terem conhecimento do problema através do manual e, por último, por desconhecerem a opção do *software* que permite obter de imediato a solução do problema, transformou-se um simples exercício de aplicação de uma fórmula ou procedimento (cálculo da distância de um ponto a uma recta) num problema. Assim, a sua resolução ofereceu uma oportunidade de trabalho mais enriquecedora para os alunos e impulsionadora de uma aprendizagem mais significativa.

2.2.2. A Aula

Quando estava a chegar à porta da sala já alguns alunos me perguntavam se iríamos trabalhar com computadores. Quando respondi afirmativamente, ficaram satisfeitos e ao entrarem na sala de aula rapidamente se sentaram aos pares diante dos computadores; poucos minutos depois comecei a ver alguns computadores já com o programa *Sketchpad* aberto.

Alguns alunos estavam um pouco desorientados sobre a forma de aceder ao programa. Os alunos que só estavam inscritos nesta turma à disciplina de Matemática, tentavam entrar com a *password* da turma do 12º ano, mas depois de algumas tentativas para se recordarem da palavra-passe e não conseguirem, decidiram entrar com a do 11º ano.

Entretanto, o Élio e o Bernardo circulavam pela sala para ajudar alguns colegas, ou com a *password* da turma para a rede da escola ou com o caminho para chegar à pasta onde estava instalado o programa. Eu própria estava com dificuldades para entrar na rede da escola e necessitei de recorrer à ajuda dos alunos.

Depois de estarem todos os computadores com o programa aberto e o projector de vídeo a funcionar, chamei a atenção da turma para uma breve apresentação sobre a forma de representar no *Sketchpad*: referenciais cartesianos, pontos a partir das suas coordenadas, rectas e gráficos de funções a partir da expressão analítica.

Entreguei aos alunos a folha com a proposta da actividade, que os alunos prontamente começaram a ler, alguns começaram por representar o ponto A(6,9) e outros optaram pela representação da estrada. O Miguel e o Gonçalo discutiam sobre a forma de representar a recta e decidiram recorrer às funções para o fazer. Depois de pesquisarem nos menus, encontraram a opção que lhes interessava, *New Function…*e começaram (tentaram!) a escrever a condição x+3y=2, mas rapidamente se aperceberam que não conseguiam escrever a equação como se esta fosse a expressão analítica de uma função:

– Como é que colocamos o y na expressão? Só temos o x! – dizia o Gonçalo.

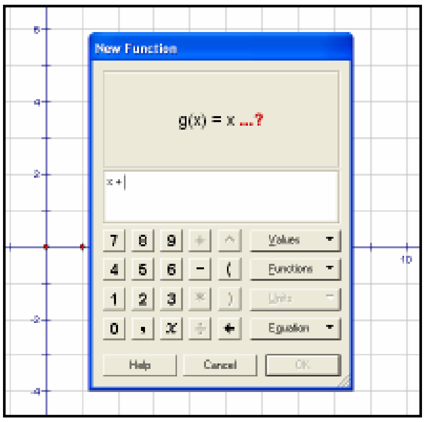


Figura 17-Janela do programa para escrever a expressão analítica de uma função.

Entretanto, o Miguel começou a pesquisar nas opções, *Values*, *Functions*… na esperança de encontrar algo que o ajudasse (talvez procurasse o y!).

Resolvi então questioná-los sobre o símbolo da igualdade:

– Então e se por acaso encontrarem o y, vão colocar depois o símbolo da igualdade? – E esperei que eles debatessem um pouco a questão.

– Eh pá! Não pode ser! Senão ficamos com dois iguais! – Referiu o Miguel.

– A opção que escolheram do programa serve para quê?

– Para representar funções. – Afirmava o Miguel.

– Para representar? – Questionei.

– Não! Para escrever a expressão de uma função e depois é que fazemos o gráfico. – Referiam quase os dois em simultâneo depois de pensarem um pouco mais.

– Qual é a vossa função?

– Pois não temos ainda… – E iam olhando para a condição.

Decidi deixar os dois a concluírem sobre os procedimentos a tomar. A confusão que estavam a sentir com a condição x+3y=2 e o facto de não perceberem que tinham que a escrever na forma $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, acontece muitas vezes com os alunos.

Ambos olhavam para o ecrã do computador, com um ar um pouco desiludido. Após alguma troca de ideias, acabaram por afirmar que queriam representar uma função, mas tinham era uma equação no enunciado do problema. O Miguel começou a referir a forma de representar rectas na calculadora gráfica e acabou por concluir que tinha que exprimir o y em função de x.

Continuei a circular pela sala e ia esclarecendo algumas dúvidas. A Sónia e a Maria discutiam qual seria a distância do ponto à recta. Tinham optado por construir vários segmentos de recta, acabando por concluir que a distância só podia ser a do menor comprimento, pois se fosse a do maior, a distância tomaria valores cada vez maiores, o que é impossível. Depois de olharem para o segmento perceberam que o de menor comprimento era o segmento perpendicular à recta.

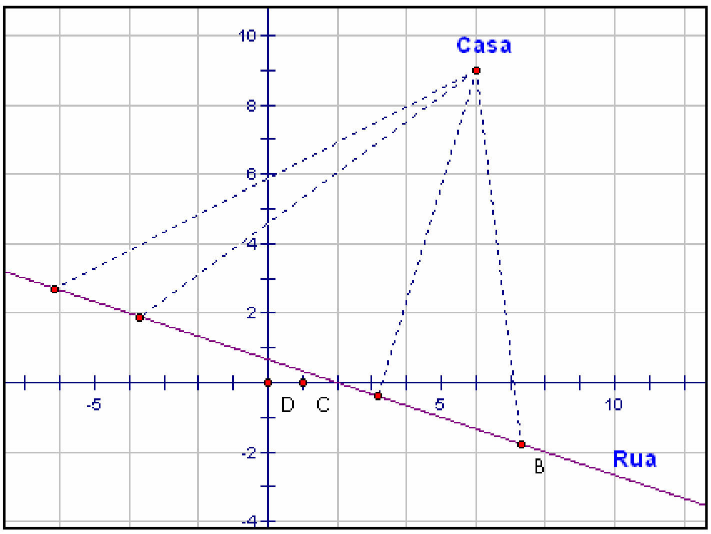


Figura 18. Esquema da Sónia e da Maria com alguns segmentos para concluir qual seria a distância.

Inicialmente, colocaram sem rigor um segmento (que parecia) perpendicular, sem recorrerem a nenhuma construção. Quando as questionei sobre se tinham a certeza de que o segmento era mesmo perpendicular, a Maria referiu:

– Ah, é como no quadrado, é melhor usar mesmo a recta perpendicular! – E sem grandes hesitações, seleccionou o ponto que representava a CASA e a recta que representava a RUA e escolheu a opção para a construção da recta perpendicular.

Entretanto, ao circular pela sala, apercebi-me de que havia alunos que já tinham resolvido o problema, estavam a fazer o relatório da actividade ou entretidos a explorar outras capacidades do programa. A Maria e a Sónia voltaram a chamar-me por não conseguirem traçar a recta perpendicular:

– A opção da perpendicular não está activada!– dizia a Sónia um pouco desanimada.

Inicialmente, sugeri que talvez tivessem outro objecto seleccionado e, não conseguindo detectar o erro, acabei por executar eu própria a tarefa e para meu espanto mantinha-se a situação! Não estava a perceber o motivo, apesar de algumas tentativas. Outro grupo de alunos estava a ter o mesmo problema, incluindo o Miguel e o Gonçalo. Depois de circular por outros grupos, apercebi-me de que só os grupos que tinham utilizado as funções para representar a RUA estavam com este problema. Eu própria, aquando da preparação da actividade, tinha recorrido a dois pontos para representar a recta e não às funções.

Para o *Sketchpad,* a recta que representa a rua não é identificada como uma recta, mas sim como um conjunto de pontos do gráfico de uma função, neste caso de $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Assim, tem lógica que quando se selecciona o gráfico de uma função e um ponto, a construção *perpendicular line* não esteja acessível, pois na perspectiva do programa não tem sentido a construção da perpendicular.

Depois de alguns minutos, consegui ultrapassar a situação marcando dois pontos quaisquer sobre o gráfico da função e construindo a recta. De seguida, marcou-se o ponto de intersecção entre as duas rectas: a perpendicular e a “rua”. A distância entre a casa e a rua obteve-se através da determinação da distância entre o ponto de intersecção das rectas e o ponto que representava a casa.

Quando todos os grupos já tinham resolvido o problema, decidi fazer um ponto da situação com toda a turma. Tive que chamar diversas vezes a atenção de alguns alunos, que estavam mais entusiasmados em descobrir novas potencialidades do programa do que propriamente no debate. Fui interpelando os alunos acerca dos procedimentos que tinham seguido para chegarem à resposta, surgindo diferenças na forma de representar a rua. Por fim, informei os alunos de que o problema estava no manual deles, na página 135, e questionei-os sobre o que fazer se não tivéssemos computador para resolver o problema.

Entretanto, o Élio referiu que não era preciso traçar a perpendicular, sendo suficiente recorrer à opção *Distance* do programa para se obter imediatamente a solução do problema.

Depois de algumas sugestões, chegaram à conclusão de que para resolver analiticamente o problema teriam que escrever a equação da recta perpendicular à recta da rua, que passasse no ponto A (6,9), determinar o ponto de intersecção e por fim calcular a distância entre os dois pontos. Propus então aos alunos que fizessem a resolução analítica e não surgiram grandes dúvidas quanto ao procedimento, apenas alguns hesitaram na determinação do ponto de intersecção das duas rectas.

2.2.3. Considerações Finais

No fim da aula estava ainda mais exausta! Mas satisfeita, uma vez mais, com o envolvimento da turma. Mesmo os alunos que sentem mais dificuldade na disciplina de Matemática e que são pouco participativos nas outras aulas, foram-se mostrando mais envolvidos nas actividades. Alunos que se distraem e têm dificuldades de concentração, estão muito mais empenhados nestas aulas, solicitando várias vezes a minha presença para esclarecimento de pequenas dúvidas.

Quanto à actividade seleccionada para a aula penso que com ela alcancei os meus objectivos iniciais.

De acordo com Miskulin (2000), a própria formulação e definição do problema constituem tarefas estimulantes para os alunos. Os alunos criam hipóteses e conjecturas à medida que vão criando a sua construção, definem estratégias que vão relacionando com os seus objectivos e de acordo com o contexto do problema. Com esta actividade, os alunos procuraram sozinhos a forma de chegar à solução, como tinham várias ferramentas, conseguiam experimentar, testar, movimentar. Se tivéssemos optado logo pelo método analítico, alguns alunos teriam sentido dificuldade em começar e outros certamente até desistiriam. Penso que, porque testaram e construíram eles próprios o caminho para chegarem à solução, a aprendizagem foi mais consistente do que se tivesse sido feita sem recurso ao computador. Depois de terem resolvido a actividade com recurso à tecnologia, os alunos conseguiram, no final da aula, definir claramente a estratégia para uma resolução analítica.

Com o recurso ao computador para actividades simples como a desta aula, que consistia em determinar a distância de um ponto a uma recta, eu previ a possibilidade de os alunos descobrirem ou já conhecerem esta opção que o programa disponibiliza automaticamente. Nesse caso, teria solicitado aos alunos que elaborassem uma construção que permitisse obter os dados para chegar à solução por um processo analítico. Reformula-se a questão inicial, o problema deixa de ser a procura da solução, e passa a ser o de obter uma construção que permita chegar à solução.

Quando estou a dar uma aula com recurso a computadores, o meu primeiro problema é o de aceder à rede da escola, pois não estou familiarizada com o uso dos computadores da escola, talvez por utilizar sempre o meu computador pessoal. E depois, durante a aula, temos que estar prontos para situações que não conseguimos resolver de imediato e para as quais não temos logo resposta, como acontece na sala de aula normal; temos que estar preparados para dizer aos alunos que não estamos a perceber e manter a calma para procurarmos a resposta. Ao próprio professor, vão surgindo ao longo da aula problemas (e não exercícios, para os quais temos de imediato a resposta!). Nesta, também fui confrontada com uma situação nova quando pretendia construir a perpendicular e a opção estava desactivada. É claramente importante para o utilizador de um determinado *software* perceber um pouco da sua forma de funcionamento para resolver e evitar determinados problemas. Mas também é importante sublinhar que este domínio técnico não tem que ser exaustivo, o próprio professor tem de se colocar na posição de ser capaz de aprender e de resolver problemas no momento em que estes surgem na aula com computadores.

De acordo com as resoluções apresentadas durante a aula, as capacidades dinâmicas do programa *Sketchpad* não foram exploradas, podendo constituir uma terceira forma de resolver o problema; colocar um ponto livre sobre a recta, calcular a distância ao ponto que representa a casa, e procurar a menor distância por meio do arrastamento do ponto ao longo da recta. Seria uma possibilidade para a aula seguinte…

2.3. Episódio 2 – A Canalização da Fábrica

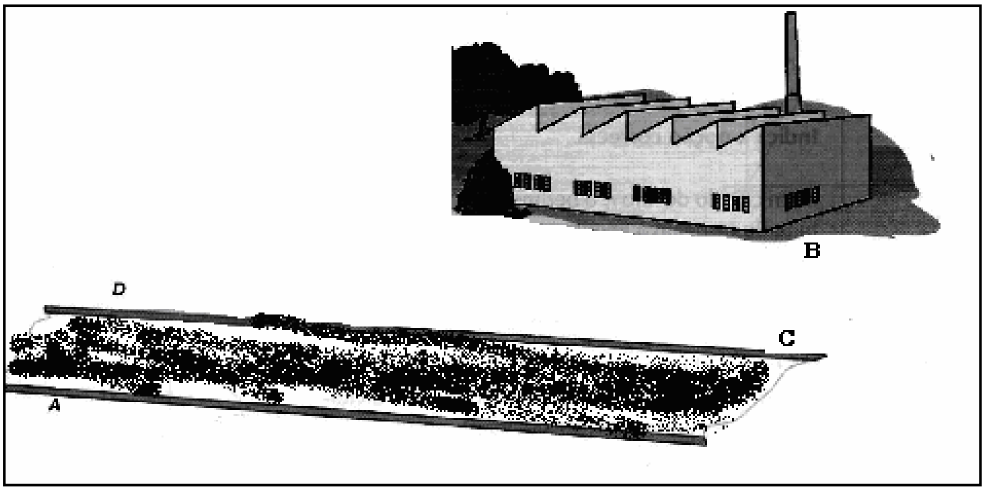
2.3.1. Apresentação

Decorridas as duas primeiras actividades, entendeu-se que era altura de se propor aos alunos um problema em cuja resolução as potencialidades do programa pudessem ser exploradas, em particular as suas capacidades de geometria dinâmica.

O manual adoptado na escola tem, na página 85, uma proposta de trabalho na qual são apresentadas três alternativas para um percurso de canalização. Pretende-se ligar uma margem de um rio a uma fábrica, que se encontra do outro lado da margem. Os custos, por metro, da canalização em meio aquático e em terra são diferentes e os alunos têm que determinar o custo de cada alternativa e no final elaborar um relatório.

A proposta como é apresentada no manual não permitiria tirar grande partido de um programa de geometria dinâmica. Procedi a adaptações com o objectivo de o tornar num problema cujo esquema fosse activo, permitindo uma construção dinâmica. Retirei as três alternativas e os dados que tornavam a estrutura fixa, introduzi também alterações nas unidades das distâncias, para que o esquema fosse compatível com a escala *standard* do programa e para que a sua representação coubesse num rectângulo de aproximadamente 26x17 unidades. Apesar de ser possível modificar a escala *standard*, entendi que nesta fase não era importante trabalhar essa possibilidade com os alunos. Adaptou-se a proposta inicial para um problema de optimização de custos.

Uma canalização de gás vai ser instalada a partir do ponto central (A) até uma fábrica (B), atravessando um rio.



Dados da figura

- *Largura do rio,* $\overline{AD} = 5m$
- *Distância da fábrica ao rio,* $\overline{CB} = 7\ m$
- $\overline{CD} = 15$

Custos:

• cada metro de canalização instalada em meio aquático tem o preço de 140,00 €;

• cada metro de canalização instalada em terra tem o preço de 100,00 €.

Pretende-se saber como efectuar a canalização de modo a minimizar os custos.

Nesta actividade os alunos tinham que procurar a canalização com custo mínimo. Iniciaram o trabalho neste problema, nos últimos trinta minutos da aula, depois de se ter concluído o problema Casa-Rua, e continuou na semana seguinte. Porque o problema envolvia medições de segmentos de recta, na construção do esquema tinha que se considerar este facto e assegurar que as medidas referidas no enunciado não eram alteradas, pelo que se achou importante chamar a atenção para este facto e logo no enunciado da actividade constava essa nota (Anexo3).

2.3.1. As Aulas

Os alunos começaram por construir as duas margens do rio através de dois segmentos paralelos, quase todos recorreram à representação de quatro pontos para um rectângulo com base 15 e altura 5 e um quinto ponto localizava a fábrica. Para manterem as medidas inalteráveis recorreram à opção *Plot Points*, representando assim os pontos através das suas coordenadas cartesianas.

A Isaura e a Marisa ainda tentaram definir a segunda margem a partir da primeira recorrendo a uma circunferência, mas tiveram dificuldade em construí-la com a medida do raio fixa. Eu nunca tinha referido nas pequenas apresentações do programa a opção, *Circle By Center + Radius*, por isso, desistiram da ideia, acabando por recorrer às coordenadas dos pontos como os colegas. Os alunos não sentiram dificuldade na construção do esquema representativo do problema.

A Leonor e a Fátima escreveram no relatório o seguinte:

"*Representámos os pontos fixos no referencial, traçámos linhas para definir o rio* $\left(\overline{AM}, \overline{DC}\right)$*. Depois representámos um ponto livre no segmento de recta* $\overline{DL}$ *(ponto L). Traçámos um segmento* $\overline{AL}, \overline{LFábrica}$ *depois calculámos* $(AL \times 140) + (Lfábrica \times 100)$ *e deu-nos o preço necessário para construir a canalização. Depois mexeu-se no ponto L ao longo do segmento* $\overline{DC}$ *até encontrar o melhor preço (2199,98€).*"

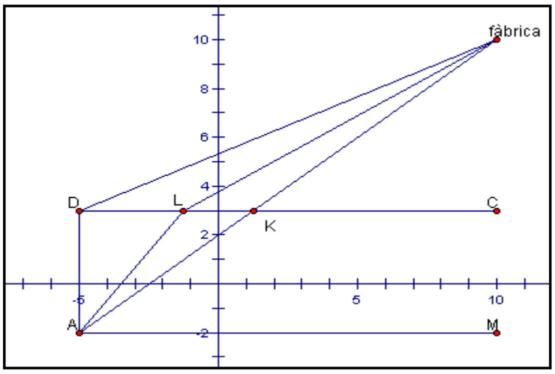


Figura 19. Construção da Leonor e da Fátima no Sketchpad.

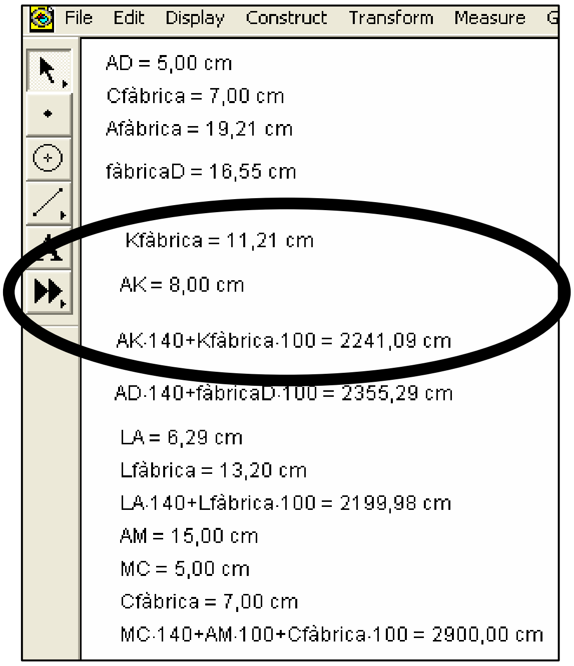


Figura 20.Excerto das medições e cálculos feitos pela Leonor e Fátima.

Contudo, ao analisar a construção, medições e cálculos efectuados pelas alunas, apercebi-me de que não faziam referência no relatório ao facto de terem experimentado o traçado mais curto (segmento de recta $[Afábrica]$). Marcaram a fronteira entre o meio aquático e a terra (ponto K) e investigaram o respectivo custo da canalização (assinalado com uma forma elíptica na figura 20). A julgar pela sequência dos cálculos e medições foi feito antes de "representarem o ponto livre L" sobre o segmento $[DC]$.

Entretanto, a Anabela e o José não exploraram logo de início as potencialidades dinâmicas do programa. Construíram o esquema de acordo com os dados do problema e quando começaram a procurar o traçado com menor custo não recorreram ao "ponto livre". Eles referem no relatório da actividade:

"…é *possível fazer infinitas canalizações, porém nós apenas realizámos 6/7 tentativas.* "

Na primeira aula em que estavam a trabalhar a actividade utilizavam o *Sketchpad* numa lógica de "fita métrica". Marcavam os pontos, faziam as medições e depois na folha de papel, recorrendo à calculadora pessoal, é que determinavam o custo. Não utilizavam a calculadora do programa que já tinha sido apresentada à turma. A Anabela só com a possibilidade de obter todas as medidas que pretendia já se mostrava satisfeita com a performance do programa.

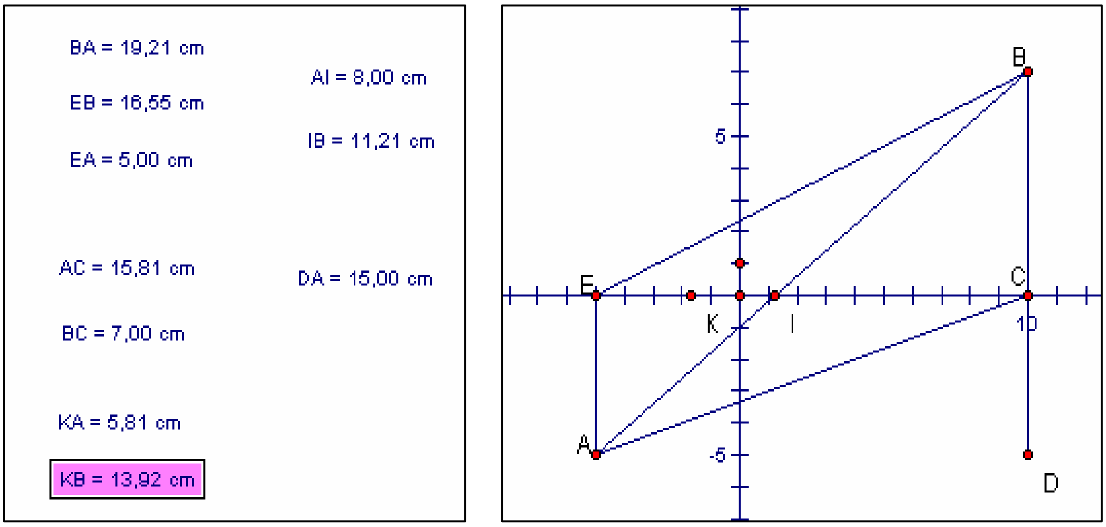


Figura 21. Excertos das medições e construção Anabela e do José na 1ª aula.

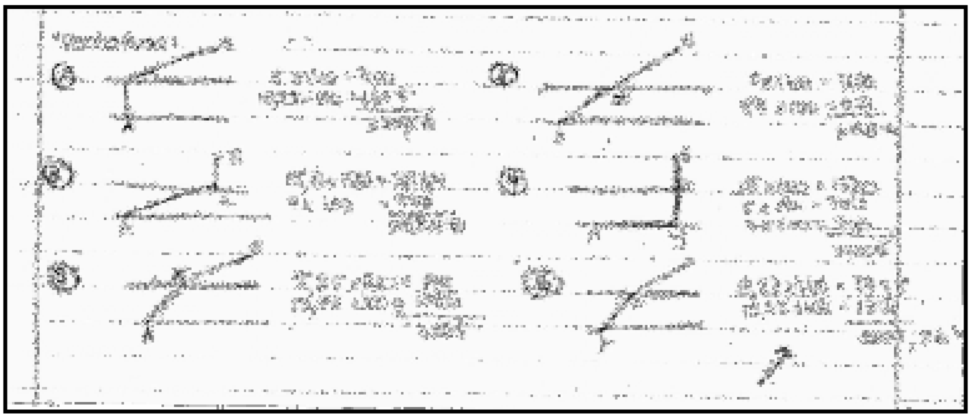


Figura 22.Excerto do relatório da Anabela e do José.

As quatro primeiras tentativas são casos particulares de possíveis traçados: a (1) e a (3) correspondem respectivamente ao menor e maior percurso por meio aquático; a (2) equivale à menor distância entre A e B; a (4) é uma canalização em se pode questionar o seu custo uma vez que não está explícito se o percurso AJ é feito por terra ou por água, os alunos consideraram-no por terra (de acordo com os cálculos) e sendo o problema de optimização de custos, não se justificaria que fosse pelo meio aquático, uma vez que os custos por metro de canalização são superiores; a (5) é apenas mais um traçado possível, e por último a (6) corresponde à solução óptima que não existe no registo em suporte digital da 1ª aula pelo que se conclui que só foi obtida na 2ª aula. Devo referir que o relatório nem sempre era entregue por aula mas, por vezes, era feito por problema.

A Anabela e o José tal como os restantes alunos, não terminaram o problema na 1ª aula e continuaram na semana seguinte. Entretanto, na segunda aula, mantiveram a estratégia de efectuar tentativas; todavia estavam com alguma dificuldade em encontrar a solução. Havia grupos que estavam a terminar sem dificuldade o problema. A Anabela e o José apesar de saberem a solução por terem ouvido os colegas comentarem e confirmarem resultados entre grupos, não chegavam ao mesmo valor, começando a pôr em causa o método das tentativas. O José tomou então a iniciativa de reformular um pouco a estratégia.

A Anabela observava e, apesar de ter muito melhor nota na disciplina de Matemática do que o José, apresentava uma atitude mais passiva, mantinha-se de papel e lápis na mão, pronta para registar os resultados que a qualquer momento pudessem surgir.

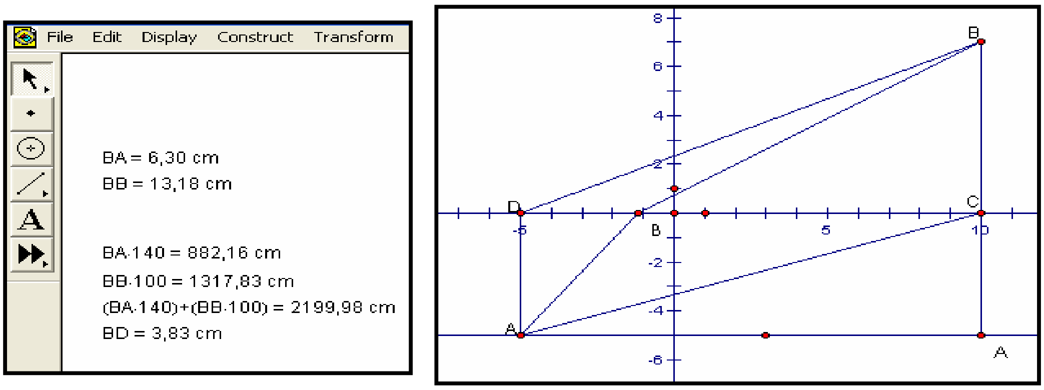


Figura 22.1. Medições, cálculos e construção da Anabela e do José na 2ªaula.

Nos registos do trabalho desenvolvido na segunda aula, pela Anabela e pelo José, verifica-se que procuraram a solução para o problema recorrendo às capacidades dinâmicas do programa; contudo no relatório da aula não fazem referência a este processo para obterem a solução, como aconteceu com a Leonor e Fátima, e apresentam-na apenas como sendo a 6ª tentativa (ver excerto do relatório Figura 22).

Pela observação na sala de aula e análise do ficheiro com a resolução do José e da Anabela percebe-se que começaram a explorar mais o programa, indo mais além do que a "lógica da fita métrica".

Entretanto, começaram a surgir outros resultados para a solução óptima, deixando os alunos um pouco agitados com a situação. Eu e a professora Susana Carreira, que esteve presente nesta aula, comentámos entre nós a situação. Alunos com a mesma construção não obtinham a mesma solução para o problema. Inicialmente, pensei que a causa poderia ser um pormenor na elaboração do esquema e estive a verificar todos os procedimentos até que percebi que era a escala que estava alterada. Os alunos inadvertidamente mexeram no ponto que define a escala do referencial, consequentemente as medições ficaram modificadas e por último os custos da canalização. Rectificada a situação nos grupos em que tal tinha acontecido, alertei todos os alunos para que passassem a ocultar o ponto unitário, com a opção *Hide Unit Point* do menu *Display* depois deste estar seleccionado.

No final, promoveu-se um debate com a turma onde se apresentaram as diferentes resoluções, pormenores de construção, dificuldades sentidas. Projectei na parede uma construção do problema, chamando a atenção dos alunos para algumas outras particularidades do *Sketchpad*.

Quando questionei a turma sobre a solução do problema, todas as respostas referiam insistentemente o valor 2199,88 euros. Apelei então para uma leitura mais atenta do problema, mas as respostas continuavam a ser as mesmas, com a diferença que havia menos alunos a responderem, dado que a confiança na solução ia diminuindo. Havia agora alunos calados, a pensar nas minhas persistentes instigações. Questionei então a turma:

– Suponham que vocês tinham que dar as indicações ao construtor da canalização, iam-lhe dizer para construir uma canalização com 2199,88 euros?

Recorrendo ao quadro desenhei o esquema com o rio e a fábrica e as respectivas medidas

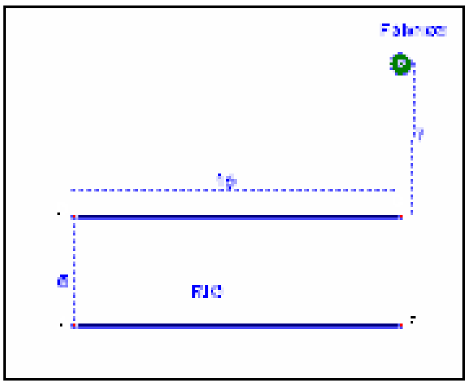


Figura 23. Esquema feito no quadro.

Os alunos começaram a discutir e a olhar para o computador com as respectivas construções.

– Então como é que vamos dar as instruções ao construtor? – Voltei a colocar a questão com a convicção de que os alunos estavam finalmente a perceber o que eu lhes estava a perguntar. Muitos alunos voltavam a mexer no computador.

Um aluno afirmava que na água a canalização media 6,27 metros. Coloquei à consideração da turma se com essa indicação o construtor ficaria elucidado de como iria ficar a canalização. Passado algum tempo começaram a surgir respostas de que não era suficiente, pois, como referia o Miguel:

– A canalização pode acabar na água e não na outra margem.

De acordo com as indicações decidi ilustrar no quadro o que ele afirmava.

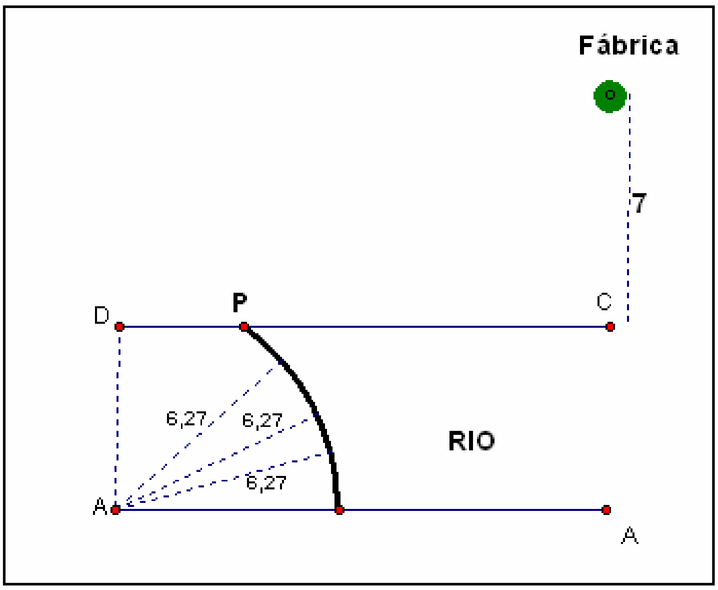


Figura 24. Esquema construído no quadro baseada na justificação do aluno.

Começaram então a surgir respostas de vários alunos que iam sendo complementadas e criticadas pela turma. Alguns continuavam a mexer no computador e começaram finalmente a surgir respostas como: “Parte de A e vai unir na outra margem com o ponto que está para a direita de D, a 3,8 metros de distância, e depois é sempre em linha recta até à fábrica.”

Finalmente faziam referência ao valor 3,8 (a distância de D a P), pois não sendo este dado necessário para obter o custo mínimo da canalização, os alunos não tinham medido o segmento. Porém, para a resposta ao problema, como construir a canalização, esta informação era essencial.

Com as indicações dos alunos, construí no quadro o esquema representativo da resposta ao o problema.

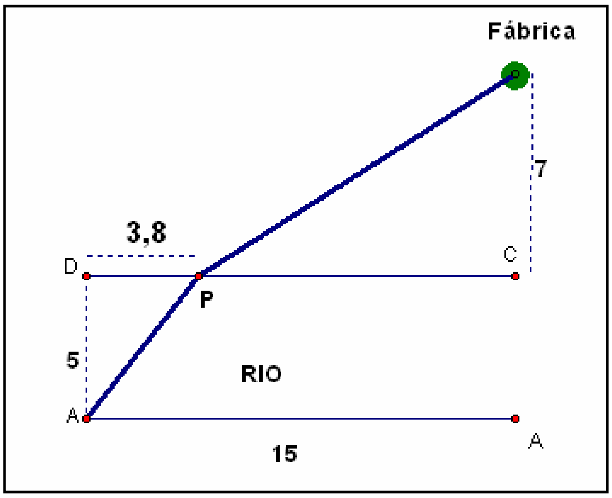


Figura 25.Esquema no quadro com a resposta ao problema.

Analisando os ficheiros com as resoluções dos alunos, em quase todas as listagens de medidas e cálculos efectuados durante a resolução do problema esta medida ($\overline{DP}$ ou equivalente) é a última. Só o Élio e o Bernardo apresentam este dado como o terceiro da lista. Apesar de ser possível alterar a ordem das medições, este facto é um bom indicador, pois os alunos nesta fase ainda não mexiam muito na ordem das medições.

Passámos então a analisar a última questão:

– Como resolver o problema sem computador? Recorrendo à calculadora gráfica?

Questionei a turma sobre o que pretendíamos saber e várias vozes associaram, no esquema feito no quadro, o segmento $[DP]$ à incógnita x e o segmento $[PC]$ à expressão 15-x.

Contrariamente ao que eu tinha pensado não se começou a discutir qual seria a expressão para obter o custo da canalização.

A Sónia sugeriu que recorrêssemos às listas da calculadora.

– Às listas da calculadora que estão na opção STAT?! – Perguntei eu, e ao mesmo tempo questionando-me como tal poderia ser feito.

A Sónia respondeu afirmativamente mas com uma expressão que mostrava que ela própria não sabia muito bem como proceder, talvez esperasse que eu adiantasse um pouco mais a sugestão.

De início não visualizei como poderia proceder e não tinha sugestões. Os alunos também não avançavam com nenhuma ideia. Eu pessoalmente nunca tinha utilizado as listas em situações parecidas. As utilizações que tinha feito das listas da calculadora tinham sido em trabalho com os sensores ou na introdução directa dos dados em problemas de Estatística. Não me ocorria nenhuma ideia.

Optei por abandonar a ideia e pedi à turma que fizesse mais sugestões. Entretanto a professora Susana interveio e propôs que se explorasse um pouco mais a sugestão da Sónia. O José sugeriu então que colocássemos valores entre 0 e 15 em L_1, correspondendo assim aos valores da incógnita x. No quadro desenhei o que aparece no visor da calculadora quando se escolhe a opção *STAT , Edit...* (apesar da escola ter vários ViewSreen não tinha nenhum na sala). Questionava-me em voz alta como fazer. Lembrei-me e referi a opção

Seq que gera sequências nas listas. Em todo o caso, ficou para ser explorada numa outra aula a forma de colocar valores entre 0 e 15 numa lista da calculadora. Partindo do princípio que temos os valores em L_1 o que fazer a seguir?

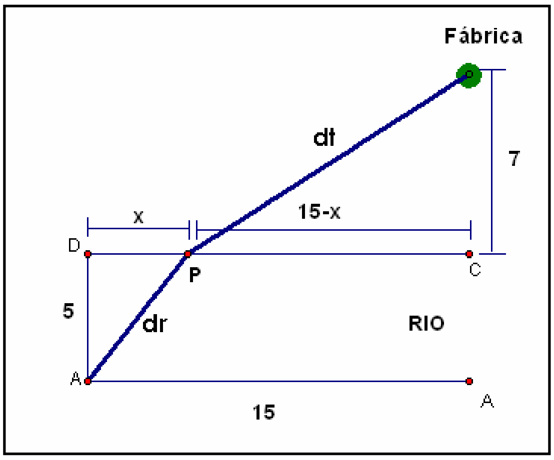


Figura 26.Esquema no quadro quando se escreviam as expressões.

Eu e a professora Susana, nesta altura, estávamos as duas no quadro e questionávamos a turma sobre o passo seguinte e alguém sugeriu que em L_2 colocássemos 15-x.

– Pode-se fazer $L_2=15\text{-}L_1$. – E escreveu-se no quadro, foi consensual quando se decidiu considerar $\overline{AP}$ como d_R, $\overline{PF}$ como d_T e o comprimento da canalização como d_R+d_T. O mesmo não aconteceu quando se questionou a turma sobre a expressão do comprimento d_R; os alunos calaram-se, a professora Susana relembrava os dados que já tínhamos e questionava-os sobre o que pretendíamos. Um dos alunos falou então em utilizarmos o Teorema de Pitágoras, mas não foi de imediato que se chegou à expressão. Só com várias interpelações das professoras é que os alunos conseguiram chegar à igualdade $d_R = \sqrt{25+x^2}$. Retomando a ideia da Sónia sobre o recurso às listas da calculadora, representando em L_3 os valores de d_r conclui-se quase de forma unânime que ficaria $L_3 = \sqrt{25 + (L_1)^2}$.

Quando se perguntou à turma a expressão para d_T, rapidamente concluíram $d_T = \sqrt{49 + (15 - x)^2}$ logo $L_4 = \sqrt{49 + (L_2)^2}$, ou $L_4 = \sqrt{49 + (15 - L_1)^2}$. Os alunos estavam a perceber o processo com o recurso às listas. Referi a existência de uma opção na calculadora gráfica que permite identificar o menor valor de uma lista, *min(L?)*, e ficou como tarefa para casa terminar a resolução por este processo. Confessei-lhes que estava curiosa para ver o resultado de todo o processo.

Entretanto, chegou-se à expressão do custo da canalização. Os alunos representaram o gráfico da função e procuraram o mínimo da função e muitos mostravam-se satisfeitos por encontrar o mesmo valor.

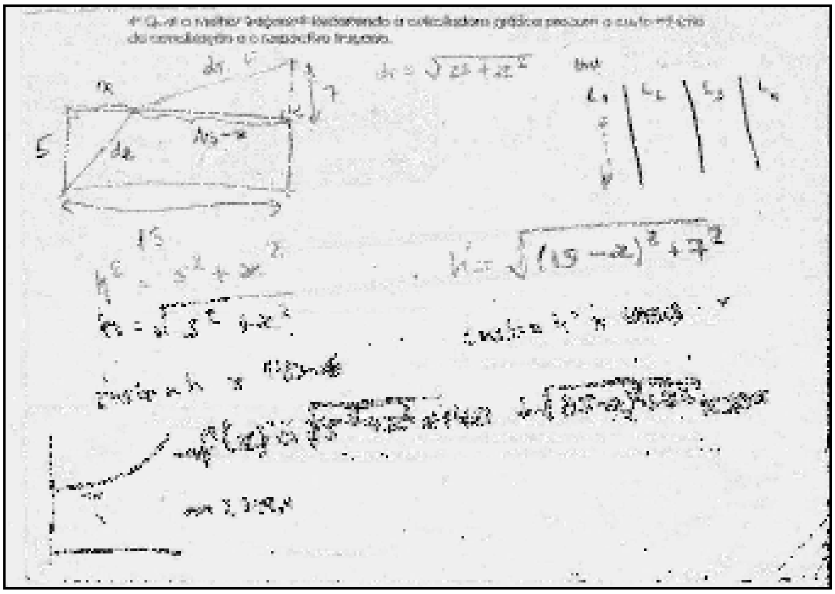


Figura 27.Excerto do relatório António e Carlos

Resolução do problema A Canalização com a calculadora gráfica mas seguindo a lógica do Excel…

Tal como os alunos tinham sugerido, na aula seguinte, retomou-se o problema a ser resolvido, agora com a calculadora gráfica, mas sem recorrer à expressão da função $f(x) = 140 \times \sqrt{25 + x^2} + 100 \times \sqrt{49 - (15 - x)^2}$.

Seria uma resolução com o recurso à calculadora gráfica, não usando o editor de funções, mas sim as listas. Comecei por desenhar no quadro um esquema da canalização onde se registaram as correspondências entre os segmentos e as listas da calculadora.

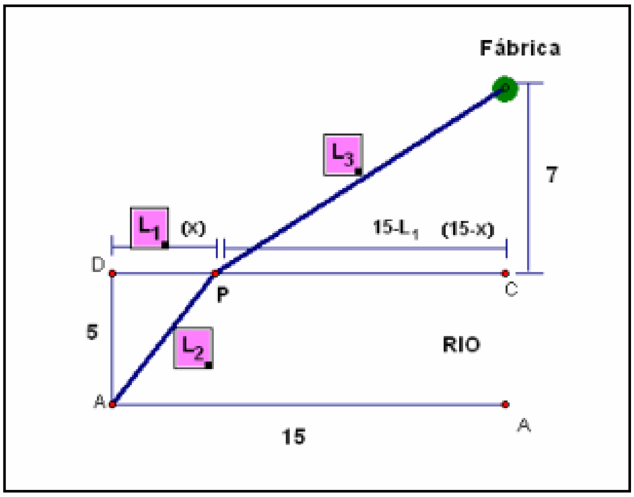
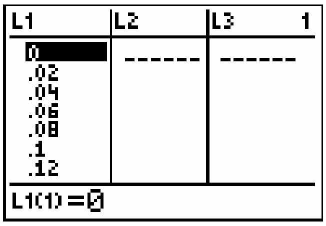


Figura 17.1. Esquema da canalização feito no quadro

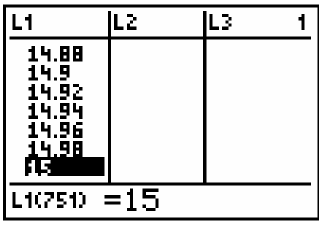
Depois de algumas discussões sobre qual deveria ser o incremento, optou-se pelo valor 0,02. Recorrendo ao *Editor de Listas*, escreveu-se para a primeira lista $L_1 = Seq(x, x,\ 0,\ 15,\ 0.02)$, em que:

$$L_1 = Seq(x, x,\ \underbrace{0}_{\text{minimo}},\ \underbrace{15}_{\text{máximo}},\ \underbrace{0.02}_{\text{incremento}})$$

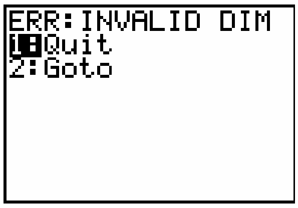
Em L_1 ficaram registados os possíveis valores para o comprimento do segmento $[DP]$. A lista ficou com 751 entradas, ou seja, estávamos a trabalhar com 751 canalizações diferentes.



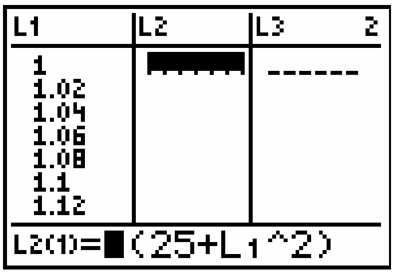
…

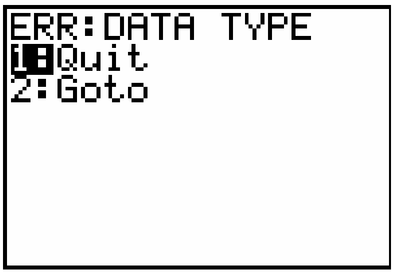


Houve alguns alunos que tentaram valores menores para o incremento, como 0,0001 no intervalo de 0 a 15, percebendo que não era possível pela dimensão excessiva das listas.

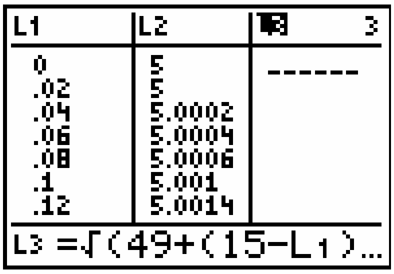


Aplicando o Teorema de Pitágoras, chegou-se à expressão para L_2. Apesar de estar a projectar o ecrã da calculadora com o *Viewscreen*, vários alunos cometeram o mesmo erro, ao escreverem a expressão obtida, não em L_2, onde se define o conteúdo da lista, mas na primeira linha da lista $L_2(1)$. A calculadora apresentava então a informação de erro "DATA TYPE".





Este erro apareceu várias vezes e os alunos tiveram alguma dificuldade em compreendê-lo de imediato. No entanto, com a minha ajuda ou de outros colegas rapidamente se resolveu a situação. Depois, quando escrevemos o conteúdo de L_3 surgiu nova mensagem de erro! Estávamos com problemas de memória!



– E agora? Quais são as opções que temos?

– Aumentar o incremento para não ter tantos valores! – Sugeria um aluno.

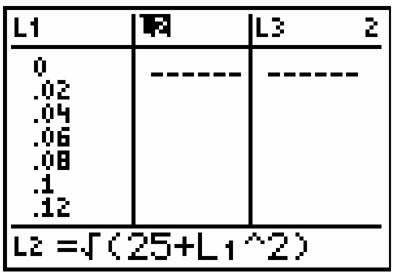
– Sim. Mas se calhar ficamos com um valor da solução mais distante do valor exacto.

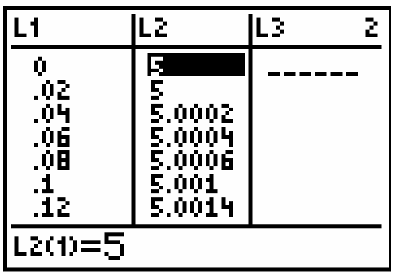
– Ou então… Não precisam de uma lista tão grande!

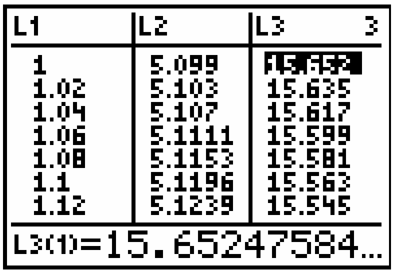
– Não precisamos de ter valores próximos de 0, fica muito comprida.

– Nem de 15, porque assim a canalização vai ficar muito mais cara, já se sabe que não interessa.

Depois de alguma discussão com a turma, e com base na resolução anterior, optámos por manter o incremento e trabalhar com os valores só de 1 a 8. Alteraram-se os extremos do intervalo da lista L_1, actualizou-se a lista L_2 e escreveu-se novamente $L_3 = \sqrt{49 + (15 - L_1)^2}$.

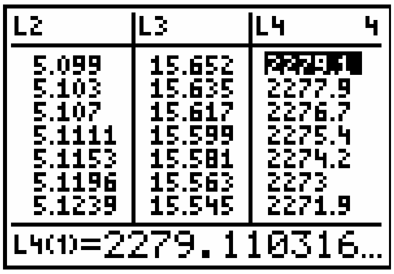






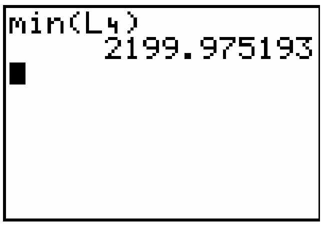
Importava ir interpretando, com os alunos, os valores que apareciam nas listas. Assim, em L_2 tínhamos as medidas do comprimento da canalização feita no rio e em L_3 as da canalização feita por terra.

Uma vez que se pretendia saber o custo, fez-se $L_4 = 140 \times L_2 + 100 \times L_3$.



Portanto, em L_4 estavam os custos das 352 canalizações que tínhamos obtido no intervalo de 1 a 8, com o incremento 0,02. Pretendíamos descobrir qual seria a de menor custo, mas certamente que usar o cursor para pesquisar o menor valor não se apresentava uma tarefa agradável.

Depois de alguma procura, pois já não me recordava onde estava a funcionalidade da calculadora que dava o valor mínimo da lista, consegui localizá-la e encontrámos o valor pretendido. Tínhamos obtido, deste modo, o custo mínimo.



Considerações Finais

No fim d resolução deste problema estava bastante satisfeita com o desempenho da turma, pela forma como se entregaram às actividades e corresponderam às indagações.

Durante a segunda aula, fui apoiada pela minha orientadora que desempenhou o papel de professora junto dos alunos. Foi sem dúvida uma grande ajuda, quer durante o acompanhamento do trabalho desenvolvido pelos alunos, quer na fase de debate com a turma, para dar sentido e apoio às propostas dos alunos. Por vezes, quando estamos sozinhos na sala de aula, com uma turma com vinte e dois alunos, e cerca de onze grupos, não é fácil dar apoio e fazer um acompanhamento de todos.

Quando se desenvolve um projecto pedagógico, onde a professora desempenha também o papel de investigadora, as dificuldades naturalmente aumentam. Durante a aula, num dado momento, tenho a necessidade de acompanhar um determinado grupo, o que faz com que preste uma menor atenção aos outros grupos. Contudo, o *Sketchpad* tornou-se um excelente aliado na minha investigação. Com as propriedades que todos os elementos de uma construção têm, é possível ao investigador reconstruir o procedimento do aluno numa dada tarefa. Outra particularidade do programa é a de permitir que se façam cópias de páginas; assim se a dada altura pretendia analisar uma construção de um aluno, mas no momento não tinha oportunidade para o fazer, pedia aos alunos que usassem a opção *Documents Options…; Add page; Duplicate*, duplicassem a página e continuassem com a construção numa outra *Page*. Deste modo, após a aula, é possível com outras condições de tempo e outra concentração analisar o trabalho desenvolvido pelos alunos. Como investigadora, penso que teria sido também interessante analisar a sequência de cálculos e medições que os alunos fizeram durante a resolução do problema, contudo não me apercebi deste facto pelo que não o solicitei até aqui, mas achei que deveria torná-lo numa prática daí em diante.

Quanto ao desempenho dos alunos com o *Sketchpad*, começa-se a notar diferença entre a adesão dos alunos. Torna-se notório que há alunos que manifestam interesse pelo programa, explorando as diferentes potencialidades da ferramenta e há até alguma competição saudável entre alguns alunos para descobrirem novas “habilidades”. Trabalham, inclusivamente, a apresentação da resolução no seu aspecto gráfico, com novas cores, tipos de letras, rótulos, etc.

Durante esta actividade começou a constatar-se que os desempenhos dos alunos em sala de aula normal e na aula com recurso aos computadores são diferentes. Há alunos, em geral desmotivados, que nestas aulas têm um bom desempenho e outros em que sucede o contrário, não se manifestando muito entusiasmados com o decurso da aula centrada na utilização do computador.

Houve alunos que não apreenderam logo a filosofia do *Sketchpad*, como por exemplo a Anabela e o José, que só na segunda aula da resolução do problema é que começaram a tirar maior partido do programa, abandonando a “lógica da fita métrica” e começando a explorar a deslocação de pontos sobre rectas ou outro objecto geométrico, e respectivas medidas que são automaticamente actualizadas.

Foi notória a dificuldade dos alunos em darem uma resposta ao problema, avançando apenas com o custo mínimo da canalização e não referindo como deveria ser feita a construção. O valor obtido 2199,8 era para os alunos a resposta ao problema, mostrando dificuldade em se libertar deste valor e em considerar o contexto para dar a resposta ao que se pedia.

Os alunos não sentiram de imediato a necessidade de fazerem outras medições; depois de terem encontrado o valor do custo mínimo da canalização, ficaram como que hipnotizados. Só depois de várias instigações, quer da minha parte quer da professora Susana, é que os alunos começaram a procurar uma resposta ao problema, pois já tinham encerrado a investigação.

Nos debates com a turma o papel moderador, do professor, reveste-se de grande importância, é um papel exigente que implica analisar os comentários dos alunos e de imediato dar um sinal de validação ou não. É importante estarmos receptivos a esta chuva de opiniões para que não nos escapem boas ideias; naturalmente, os alunos quando as apresentam, estas muitas vezes ainda estão numa fase tosca, pouco trabalhada, cabe ao professor apurar e ajudar o aluno a polir a sua ideia. Deve ter o princípio de não rejeitar, à partida, pois a verdade é que vale a pena investigarmos as opiniões dos alunos. Por vezes, quando parece que não há grande cabimento é quando surgem as excelentes propostas. Os alunos, neste tipo de aula, apresentam-se com uma postura diferente comparativamente às outras aulas, estão com um espírito mais livre e mais dispostos a fazer experiências e a tentar. Vale a pena investir em clarificar as sugestões, pois surgem muitas propostas e ideias interessantes que merecem ser trabalhadas e discutidas.

Estes debates são ainda promotores do desenvolvimento das competências no âmbito da comunicação e do desenvolvimento do espírito crítico.

Neste problema, a procura de valores que fossem adequados à escala inicial do programa, criou uma situação pouco real quer em termos métricos e quer monetários, já não se constrói uma canalização com cerca de 2200 euros! Ficámos com um rio com apenas cinco metros de largura e uma fábrica a 7 metros deste. Claro que seria suficiente alterar a unidade de metro para decâmetro, hectómetro,…

A escala inicial, definida em cada um dos eixos de um referencial do *Sketchpad*, pode ser alterada em função dos dados do problema, com o movimento do ponto *Unit Point*, porém nesta fase inicial optei por não mexer na escala.

É possível manter as medidas inalteradas apesar de se alterar a escala, se se considerar uma proporcionalidade directa em que a constante é a medida inicial.

Consideremos o exemplo: Distância entre os pontos E (2,3) e F(4,5). No *Sketchpad*, se marcarmos os pontos através das suas coordenadas, determinamos a distância $\overline{EF} = 2{,}24$ (figura 28) quando não se procedeu a nenhuma alteração na escala inicial.

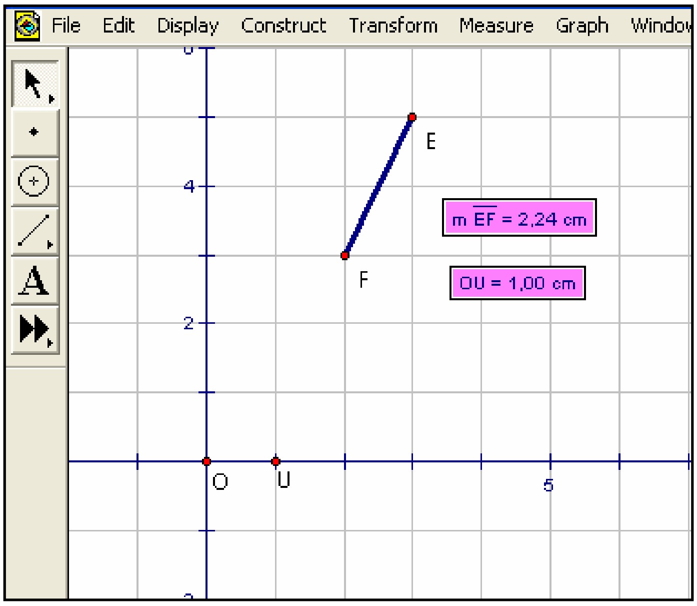


Figura 28.Cálculo da distância $\overline{EF}$ sem alteração da escala standard.

Contudo, se deslocarmos o ponto unitário da escala, U, as medidas de $\overline{OU}$ e $\overline{EF}$ alteram-se, passando a ser $\overline{OU} = 0{,}39$ de $\overline{EF} = 0{,}88$. Porém, é possível continuar a ser o valor $\overline{EF}$ (figura 29) sendo apenas necessário que se mantenha o valor inicial, bastando para o efeito calcular com a opção *Calculate* o quociente entre as grandezas $\overline{EF}$ e $\overline{OU}$.

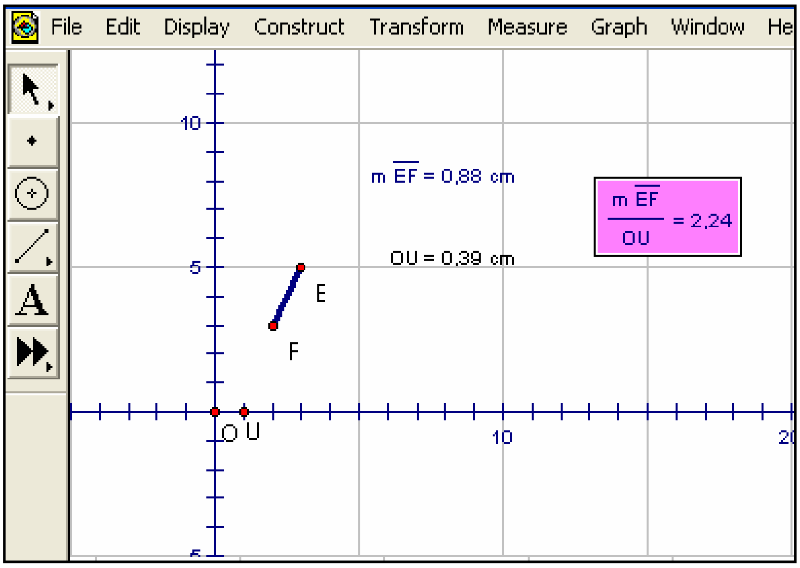


Figura 29. Cálculo da distância $\overline{EF}$ com alteração da escala standard.

Quando coloquei o recurso à calculadora gráfica, nunca pensei na hipótese das listas. Reforçou também as potencialidades do recurso à calculadora. Achei a ideia interessantíssima, um dos pensamentos que tive foi de que com este processo poderíamos simular muitas situações, funcionando a calculadora gráfica como uma folha de cálculo, como *o Excel*.

2.4. Episódio 3 – A Ilha

2.4.1. Apresentação

Neste problema os alunos tinham que determinar o local ideal para a construção de uma casa numa ilha com a forma de um triângulo equilátero.

Um milionário surfista comprou uma ilha nos mares do sul em forma de triângulo equilátero. Cada um dos lados é uma praia óptima para fazer surf, ele pretende construir uma casa num ponto tal que a soma das distâncias da casa às três praias seja a mínima possível. Isto para que o conjunto das três estradas a abrir no arvoredo tropical custem o menos possível — é milionário mas é poupado. Em que posição da ilha deve construir a casa?

Para quem não conhece o problema, a resposta é sempre surpreendente. O *Sketchpad* é uma excelente ferramenta para trabalhar este problema. As suas capacidades dinâmicas permitem constatar, ver efectivamente, que a soma das distâncias, de um ponto qualquer do interior de um triângulo equilátero aos lados é sempre constante. Com o programa vêem-se as três distâncias, a cada um dos lados, a serem alteradas enquanto deslocamos o ponto pelo interior do triângulo, e a soma das três mantém-se inalterada.

A aula não começou com este problema, antes foi proposto aos alunos a resolução de um problema, um pouco análogo ao último que fora resolvido pelos alunos – A Canalização da Fábrica. Como tinha passado mais de um mês, sem trabalharmos com o computador, pois decorreu entretanto a interrupção de Natal, entendi começar a aula propondo uma situação em que à partida os alunos não teriam grande dificuldade, foi um exercício para que estes recordassem algumas das potencialidades do programa.

Problema/exercício (Anexo 4) apresentado no início da aula:

As aldeias de Cicouro e de Constantim encontram-se do mesmo lado do rio. As distâncias mínimas de Cicouro e Constantim ao rio, são respectivamente de 5 Km e 2 km, A distância entre as duas aldeias, medida na horizontal é de 15 km.

Dizem as pessoas destas aldeias que as águas desse rio são milagrosas. O Sr. Nuno vive em Cicouro e vai a Constantim visitar a mãe que se encontra doente. Ele decidiu então passar pelo rio para apanhar água e levar à sua mãe. Qual o percurso que ele deve seguir de modo que a distância percorrida seja mínima?

Tal como o previsto, algumas das dificuldades que surgiram prendiam-se com pormenores do programa, que já tinham esquecido, por não trabalharem regularmente com o *software*.

2.4.2. A 1ª Aula

Sensivelmente a meio da aula, os alunos, sem grandes hesitações, começaram a realizar construções que lhes permitiam analisar o problema. Começaram pela construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento de recta [AB] e duas circunferências de raio [AB] uma com centro em A e outra com centro em B.

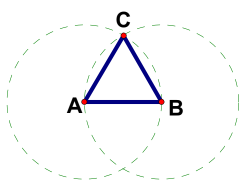


Figura 30- Uma construção do triângulo equilátero.

Os alunos tinham resolvido a actividade de construir um triângulo equilátero há mais de dois meses. Nesta fase os alunos ainda não tinham trabalhado com as transformações no *Sketchpad* pelo que as construções auxiliares para obter um triângulo equilátero se mantinham. As pequenas dúvidas que iam surgindo eram rapidamente esclarecidas. Ocorreram algumas dificuldades porque, ou terceiro vértice (C),não era efectivamente a intersecção das duas circunferências, ou os pontos A e B eram o centro das circunferência

De seguida, colocaram um ponto no interior do triângulo e determinaram as distâncias a cada um dos lados do triângulo (as praias). A situação já tinha sido trabalhada, os procedimentos eram os mesmos que tinham sido realizados na actividade *Da Casa até à Rua*. Todavia surgiram dois processos diferentes: uns seleccionaram o ponto no interior do triângulo e cada um dos segmentos, depois com a ferramenta do *Sketchpad* ***distance*** obtiveram de imediato os valores pretendidos; outros traçaram as perpendiculares a cada um dos lados do triângulo, marcaram os pontos de intersecção com os respectivos lados e definiram os três segmentos. As rectas perpendiculares foram ocultadas e por fim com a opção *lenght* obtiveram os comprimentos dos segmentos.

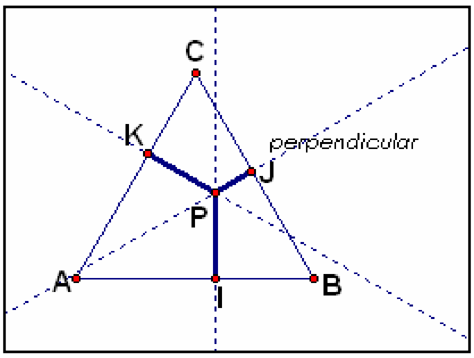


Figura 31-Uma construção para obter as distâncias.

Numa segunda fase, com a opção *Calculate,* determinaram a soma das três distâncias e começaram à procura da localização do ponto onde deveria ser construída a casa. Movimentavam o ponto P e iam observando as alterações produzidas, quer nas medições, quer nos cálculos. Para espanto dos alunos, verificavam que a soma das distâncias não se alterava:

– Não se mexe! – Afirmava a Carolina, enquanto movimentava o rato e olhava atentamente para o ecrã. Aquele resultado era de todo inesperado e rapidamente começou a avançar com uma explicação:

– Construímos alguma coisa mal! – Comentava a Carolina com a Maria – Se calhar foi no *Calculate!* – Continuava.

Começaram por verificar se o triângulo era efectivamente equilátero, mediram os três lados e confirmaram que os lados eram realmente iguais, depois apagaram a expressão que determinava a soma das três distâncias e escreveram-na de novo.

Entretanto, outros grupos começaram a deparar-se com o mesmo resultado até que começaram a pôr a hipótese de que a casa podia efectivamente ficar localizada em qualquer ponto da ilha!

Como vários alunos começaram a chegar ao mesmo resultado, este começou a ser aceite. O José e a Anabela foram os primeiros a apresentarem uma resposta ao problema, não se mostrando muito convictos da mesma.

O passo seguinte, de acordo com o guião da actividade, era procurarem uma justificação para a solução do problema. A Carolina e a Maria continuavam a arrastar o ponto dentro do triângulo e a analisarem os resultados, entre elas comentavam o facto de as três distâncias às respectivas praias se alterarem quando arrastavam o ponto do interior e rapidamente avançaram com a justificação:

– Ah! É porque é equilátero!

E eu questionei-as:

– Sim, o triângulo é equilátero, é um dado do problema, mas qual é a particularidade/propriedade do triângulo equilátero que faz com que tenhamos este resultado?

Ao movimentar-me pela sala e abordando um novo grupo, a discussão era a mesma, os alunos apresentavam a mesma justificação. Eu ia conversando com os alunos e repetidamente era levada a fazer as mesmas perguntas.

Nesta fase, senti alguma dificuldade em fazer com que os alunos percebessem o porquê da justificação por eles apresentada não ser satisfatória. Os alunos concentraram-se num facto e estavam a ter resistência em abandoná-lo e em explorar a construção, de forma a encontrarem outros argumentos.

– Mas porque é que isto acontece se o triângulo é equilátero? O que tem o triângulo equilátero de ESPECIAL? – Continuava a interrogá-los, sentindo que começava a ser repetitiva.

Optei por fazer um ponto da situação com os alunos, tinha a percepção de que todos estavam com as mesmas dificuldades, também se impunha fazer um balanço pois a aula aproximava-se do fim e eu pretendia que fossem apresentados à turma os resultados obtidos até então, e assim tentava aproveitar outros elementos. Penso que os alunos insistiam na mesma justificação por esta lhes parecer óbvia, acho que provavelmente alguns não percebiam o porquê da minha insistência em não aceitar a justificação do triângulo equilátero.

Entretanto, a aula chegou ao fim, ficando a indicação para pensarem numa justificação para a resposta.

Considerações finais da 1ªAula

No fim do dia, foi com alguma ansiedade que comecei a ler os relatórios da actividade entregues pelos alunos. Apesar de durante a aula ter ficado razoavelmente elucidada sobre o tipo de justificações que deveriam estar registadas, estava com curiosidade e esperança de poder encontrar uma justificação, um elemento novo, diferente dos que já tinha tido na aula. Por outro lado, como há onze grupos de trabalho na sala de aula, é difícil aperceber-me integralmente do que sucede em todos eles.

Depois de ler todas as respostas, estas reflectiam o que se tinha passado na sala de aula, havia respostas mais sucintas que outras, umas com desenhos, esquemas, outras só com texto, mas de um modo geral todas do tipo:

" *A soma das distâncias em ambos os triângulos é igual, porque quando se move o ponto para um sítio, há umas rectas que diminuem e outras que aumentam, fazendo com que a distância permaneça igual.*"

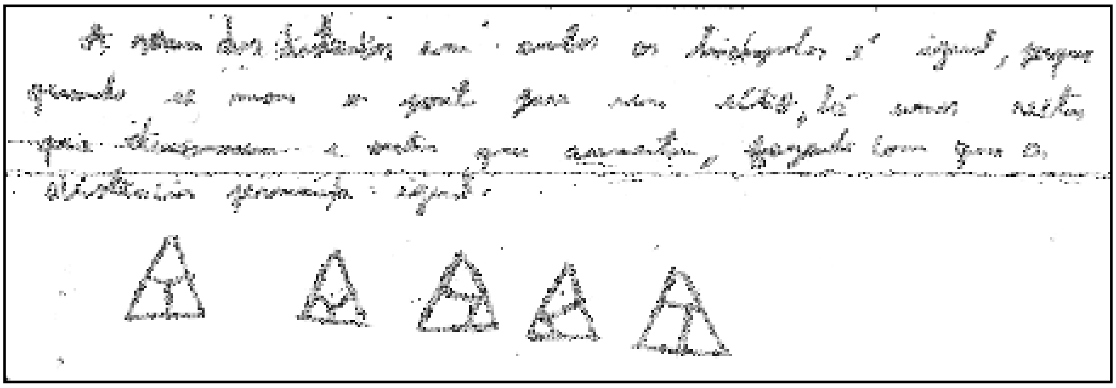


Figura 32.Justificação do Élio e Bernardo.

Esta justificação do Élio e do Bernardo para além da incorrecção matemática "rectas diminuem" e de no final se referirem à soma das três distâncias por "a distância", elucida a generalidade das respostas que os alunos apresentaram nos respectivos relatórios.

As minhas expectativas tinham-se confirmado. Ao ver os resultados, comecei a preparar a próxima sessão e propus-me construir em *Sketchpad* uma possível demonstração, como justificação para a solução do problema. Mais do que a demonstração, pretendia fazer uma construção na qual facilmente se visualizasse a explicação da solução do problema.

Por P, ponto interior do triângulo equilátero, tracei paralelas aos três lados do triângulo, defini as intersecções com os lados, em cada lado obtive dois pontos, definindo com eles os triângulos internos.

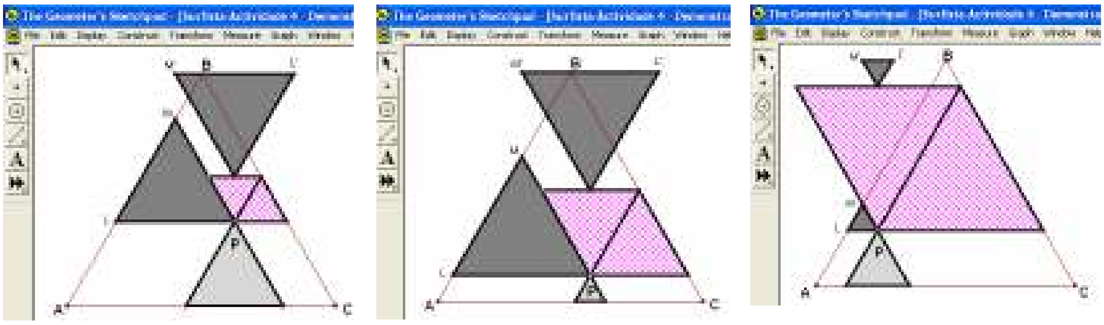


Figura 33.Construção em Sketchpad de uma demonstração

Fiquei muito entusiasmada com o resultado e fui-me apercebendo de que só a construção da demonstração era por si só um novo problema, devendo por isso ser colocado aos alunos. Apresentei à minha orientadora o trabalho, fomos conversando sobre as observações e resultados obtidos na aula anterior e entendemos que se deveria dar prosseguimento na aula seguinte à elaboração de uma demonstração/justificação. Acrescentei ao guião da aula anterior duas novas questões:

1) E se o triângulo não for equilátero?

2) Como se pode construir uma das demonstrações do problema?

Tinha a intenção deliberada de desfocar a atenção dos alunos do triângulo equilátero, parecendo por isso oportuno colocar a questão.

A construção de um *sktech* para demonstrar o resultado obtido na aula anterior implicava o recurso a outras potencialidades do *Sketchpad*.

2ª AULA

Na aula da semana seguinte, contei novamente com a presença da minha professora Susana na sala de aula. Os alunos começaram a abrir os ficheiros da semana anterior. O Élio e o Bernardo, sem nenhum pedido da minha parte, começaram a circular para ajudar os colegas, uns com as *passwords,* outros para aceder aos ficheiros da aula anterior. Depois de todos os alunos terem o computador e o programa aberto, comecei a fazer uma breve síntese sobre o que tinha ocorrido na aula da semana anterior e os alunos iam-me ajudando na reconstrução de alguns factos. Descrevi, de forma sucinta, as respostas apresentadas nos relatórios, tentando elucidá-los da incompletude e incorrecções cometidas, justifiquei o porquê de retomarmos o mesmo problema e referi que um dos objectivos da aula seria procurar uma justificação para a solução encontrada na aula anterior.

Os alunos começaram a trabalhar na primeira questão da aula:

– E se o triângulo não for equilátero? Iríamos obter a mesma solução?

De imediato os alunos construíram um triângulo qualquer, determinaram as três distâncias a cada um dos lados e constataram que a soma das distâncias já não era a mesma.

– O que é que acontece quando alteramos a localização do ponto no interior do triângulo?

– Umas aumentam e outras diminuem, como no triângulo equilátero. – Referia a Irina.

– Certo, contudo a soma não é a mesma.

– É porque o triângulo não é equilátero – Afirmavam vários alunos.

– Sim, mas porque é que, se o triângulo é equilátero, isso acontece?

– Já sabemos que os lados são iguais. Os ângulos internos também?

– Que outras particularidades é que tem o triângulo equilátero?

Nesta fase, continuava com alguma dificuldade em fazer com que os alunos procurassem uma justificação que não fosse uma das condições, um dos dados do problema.

Os alunos estavam convictos de que a soma das três distâncias era sempre a mesma, apenas se o triângulo dado fosse equilátero e este facto era a justificação para o resultado encontrado, notando-se alguma resistência em ir mais além. Houve alguma discussão na aula até que eles entenderam que o facto de o triângulo ser equilátero era um dos dados do problema e não poderíamos aceitá-lo como justificação para a resposta.

– Analisem as vossas construções e vejam se descobrem algum pormenor, regularidades…

Resolveram explorar novamente as respectivas construções e passados uns minutos, alguns alunos começaram a referir algumas particularidades não expostas anteriormente.

– Os ângulos são iguais! – Concluíam quase em simultâneo a Irina e o Telmo, em grupos diferentes.

Inicialmente pensava que se referiam aos ângulos internos; só quando me aproximei do computador é que percebi que se referiam aos ângulos definidos pelo ponto do interior do triângulo e os pontos de intersecção das perpendiculares com os lados do triângulo.

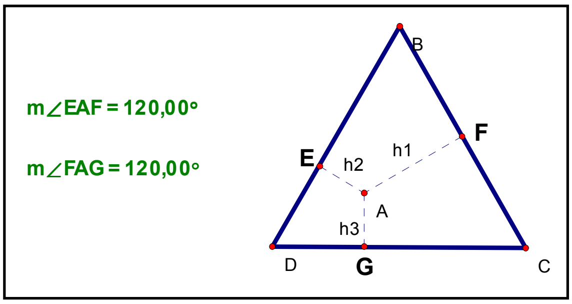


Figura 34-Excerto da construção do Telmo.

– Se o ponto coincide com um vértice, a distância é igual à soma – Referia o José

Perguntei-lhe se acontecia sempre, com qualquer vértice, e ele continuou a manipular a sua construção.

Entretanto, alguns alunos estavam a observar o mesmo resultado do José, outros, porém, estavam um pouco desorientados, movimentavam o rato, mas sem grande critério, pelo que continuavam sem concluir nada.

Assim, entendemos que era um bom momento para discutir, de novo, em conjunto, as conclusões a que tinham chegado alguns alunos.

O José foi mostrar aos colegas o que tinha observado, usando o computador que estava ligado ao projector de vídeo.

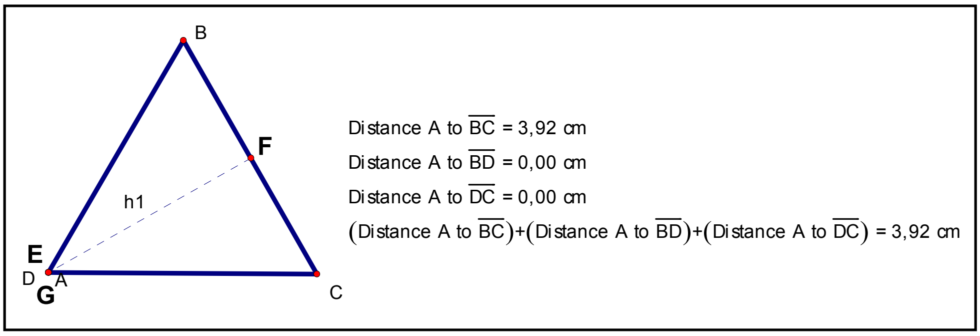


Figura 35.Exemplo da particularidade apresentada pelo José à turma.

– O que é que vocês acham que se pode concluir?

O José apesar de ter observado esta situação, não concluiu que a soma das três distâncias era a altura do triângulo, nem nenhum aluno depois do José ter apresentado à turma este facto. Contudo, eu sentia que os alunos começavam a aproximar-se da resposta.

Alguns alunos tentaram obter nas respectivas construções esta situação limite e não o estavam a conseguir porque, ao deslocarem o ponto para perto de um dos vértices, o referido ponto ficava no exterior do triângulo, mas rapidamente chegaram à mesma conclusão.

– Professora, qualquer lado pode ser a base do triângulo? – Perguntavam a Sónia e a Inês.

– Sim. – Respondi e continuei:

– E isso é verdade para qualquer triângulo, não só para o equilátero.

– Só que neste, a altura é sempre a mesma qualquer que seja a base. – Afirmava a Anabela a olhar para o computador.

– Porquê Anabela?

– Porque é equilátero – respondeu.

– Exacto, porque se o triângulo não é equilátero, qualquer lado pode ser a base mas o que é que se passa com as respectivas alturas?

– Também vão mudar! – Responderam vários alunos.

Os alunos continuavam a olhar para os ecrãs dos computadores e experimentavam estes casos referidos.

– A soma das três distâncias é a altura do triângulo! – Afirmou o Élio.

Os colegas, apesar de terem ouvido a resposta do Élio continuaram a trabalhar no computador e passado uns minutos é que reagiram, repetindo a mesma resposta.

– Exacto, a soma das três distâncias é a altura do triângulo que é sempre a mesma no triângulo equilátero e não importa a base que se considera, as três alturas são iguais.

Finalmente tínhamos chegado a uma conclusão. Conversámos um pouco sobre as conclusões alcançadas e tínhamos, afinal, um novo desafio!

Como construir no *Sketchpad* uma demonstração do problema?

– Como efectuar uma construção que permita ver que a soma das três distâncias coincide com a altura do triângulo?

Perante a falta de sugestões, interroguei-os:

– Se o triângulo equilátero estivesse construído por exemplo em cartolina, como é que podíamos mostrar este resultado?

Começou a haver alguma discussão, até que o Élio veio ao quadro com uma folha na mão. No quadro estava desenhada uma representação do problema, um triângulo com um ponto no interior e assinaladas as respectivas distâncias a cada um dos três lados. Começou por marcar uma das distâncias (h1) a partir de um dos cantos da folha, seguidamente marcou a segunda (h2) e a terceira (h3). Por fim, confirmou que a marca resultante na folha de papel coincidia com a altura do triângulo.

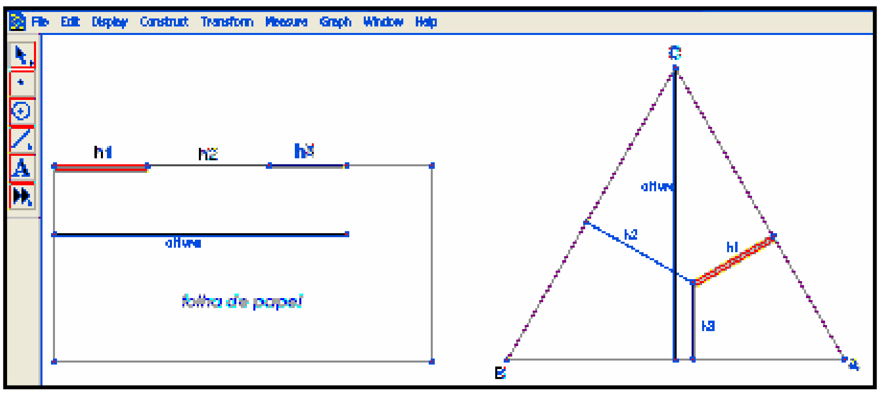


Figura 36.Construção em Sketchpad da explicação feita no quadro pelo Élio.

Para se construir uma demonstração era necessário conhecer um pouco das transformações geométricas que se podem efectuar no *Sketchpad*, que constituem uma importante ferramenta em diversas aplicações. O programa permite fazer translações, rotações e outras transformações geométricas. Recorrendo ao projector de vídeo, no entanto, optei por fazer uma pequena exposição apenas sobre as translações e rotações.

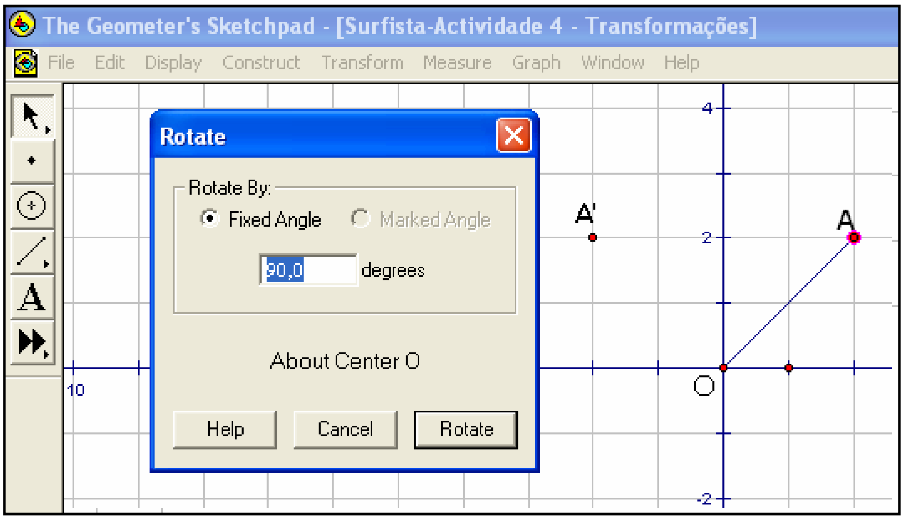


Figura 37.Exemplo de rotação de 90º, do ponto A, com centro em O, obtendo A'.

De acordo com o exemplo, se movimentar o ponto A pelo monitor, o ponto A', vai acompanhar sempre o ponto A, mantendo assim a rotação de 90º com centro em O.

Seleccionando um objecto, por exemplo um ponto, se lhe aplicarmos determinada translação, esta mantém-se sempre, ou seja, quando arrasto pelo ecrã o ponto, este é seguido pela sua imagem.

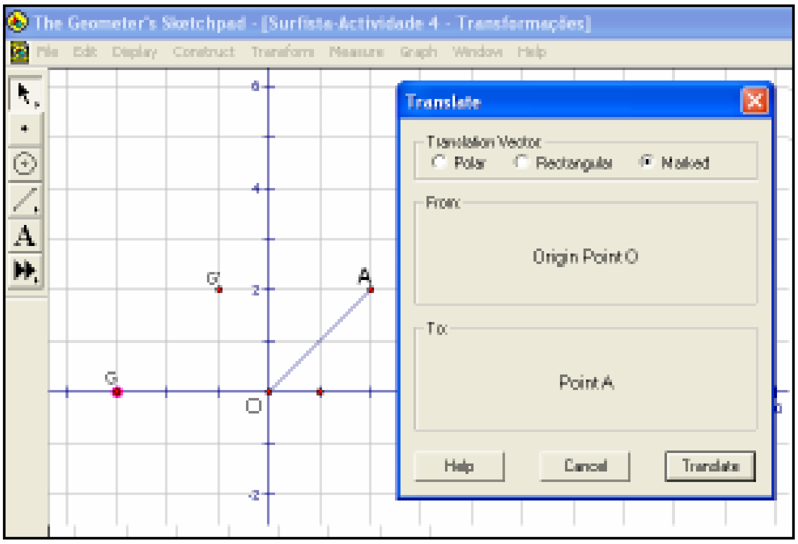


Figura 38.Exemplo de translação do ponto G, associada ao vector $\vec{OA}$.

Os alunos experimentaram trabalhar um pouco com as transformações, mas a aula estava quase a terminar e mais uma vez não se conseguiu terminar o que faltava do problema!

O Bernardo, entretanto, já tinha começado a fazer uma demonstração um pouco menos vistosa, mas certíssima.

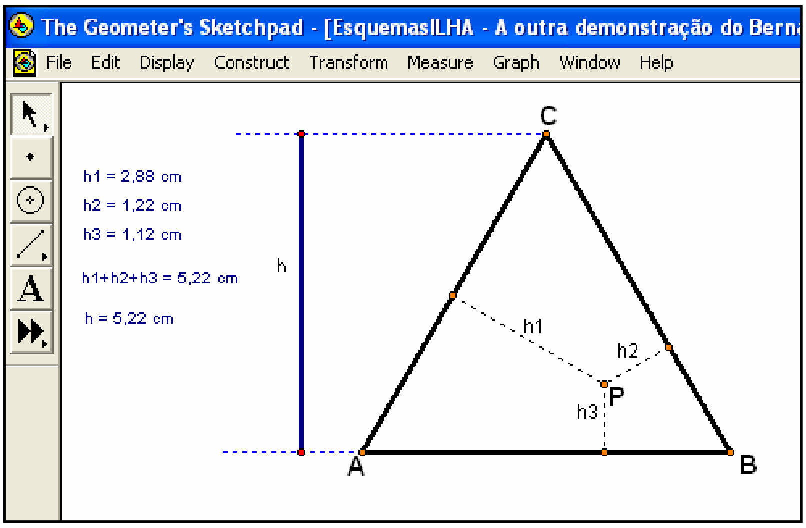


Figura 39.Demonstração do Bernardo sem recorrer às transformações.

Começou por traçar duas rectas paralelas, AB e outra a passar no terceiro vértice C, construiu uma recta perpendicular às duas rectas paralelas, marcou as intersecções, definindo o segmento h, de medida igual à da altura do triângulo relativa a AB. Movimentando um dos dois vértices do triângulo, A ou B, o segmento h acompanha o movimento do triângulo, mantendo-se sempre a medida da sua altura.

De seguida, mediu as três distâncias de P a cada um dos lados (h_1, h_2 e h_3) e calculou a soma das três, finalmente mediu *h*, verificando que qualquer que seja o triângulo equilátero, *h* tem sempre a mesma medida da soma das três distâncias.

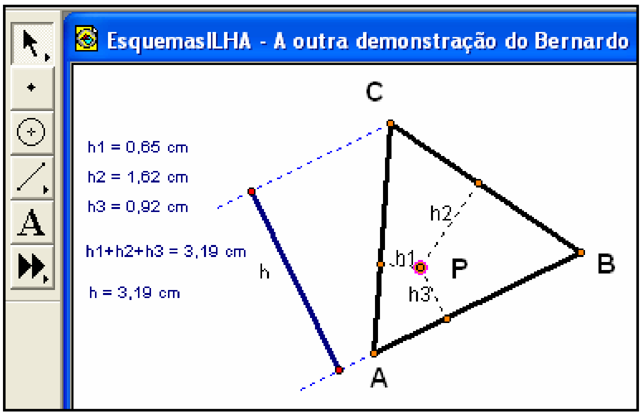


Figura 40. Demonstração do Bernardo (outra posição do triângulo).

Os alunos começavam a recorrer à opção *Documents Options* do menu *File* para duplicarem páginas com os trabalhos no *Sketchpad*, pois quando o problema tem várias etapas é possível apresentar as várias fases separadas como se se tratasse de uma folha de cálculo. A aula terminou e teríamos que retomar na semana seguinte o que estava feito para concluir o trabalho.

3ªAULA

Iniciei a aula, mais uma vez, com uma breve síntese do que tinha sido feito nas duas aulas anteriores e expliquei qual era a proposta de trabalho para aquela aula. Apresentei aos alunos a minha demonstração (ver Figura 33) uma outra construção elaborada por mim em *Sketchpad,* a partir da explicação feita pelo Élio, na aula anterior, com uma folha de papel e o esquema do problema desenhado no quadro (ver Figura 36). Em ambas, movimentei o ponto do interior do triângulo e os alunos ficaram encantados com o efeito das construções; pelo dinamismo e pelas cores associadas, as demonstrações ficam muito intuitivas. Abriram os ficheiros da aula anterior e começaram a criar as respectivas demonstrações. Inicialmente surgiram algumas um pouco desorganizadas.

A Isaura, aluna com grandes dificuldades na disciplina de Matemática, estava encantada com o seu desempenho no uso do *Sketchpad* :

– Isto é espectacular! Fica muito giro! – Afirmava muito satisfeita.

Este sentimento era o que pairava na generalidade dos alunos, estavam muito animados com os resultados que iam obtendo.

A Carolina confessava, enquanto movimentava o ponto pela construção e ia observando as alterações na construção:

– Nunca pensei que com as transformações fosse possível fazer coisas tão giras!

– E dá para ver mesmo! – Reforçava a Maria.

Entretanto a Irina e a Ana estavam um pouco desorientadas e tinham segmentos separados pelo ecrã, mas com alguma ajuda da minha parte lá conseguiram ver o que estava a falhar na construção e resolver os seus problemas. Havia grupos que terminavam a construção da demonstração e melhoravam a apresentação do *Sktech*, exploravam a palete de cores do programa e tornavam os trabalhos mais atractivos na apresentação.

2.4.3. Considerações Finais

Os alunos, talvez induzidos pelas soluções de outros problemas, mostraram alguma resistência em aceitar o resultado; certamente esperavam uma única localização para a construção da casa e não que esta pudesse ser edificada em qualquer ponto da ilha. Começaram por colocar em causa as respectivas construções e só quando perceberam que havia vários colegas com o mesmo resultado é que começaram a aceitá-lo.

Senti alguma dificuldade em explicar aos alunos o porquê de não ser aceitável como justificação, apenas o facto do triângulo ser equilátero. Este tipo de ocorrências é frequente nos alunos. Como exemplo:

– Porque é que as rectas são perpendiculares?

– Porque formam um ângulo de 90º.

– Sim isso é verdade, mas…

Os alunos justificam muitas vezes as suas respostas com base nos dados do problema e entram em ciclo vicioso, exigindo da parte do professor alguma prática, tempo e dedicação para elucidar os alunos quanto ao caminho, sem lhes fornecer a resposta.

Auxiliar os alunos é tal como Polya (2003) refere, um dos mais importantes deveres do professor, contudo reconhece-se que não é fácil, exigindo tempo, prática e objectivos bem determinados.

Até onde podemos ajudar os alunos para que estes não se desmotivem, durante o processo de resolução, para que possam adquirir experiência e satisfação por alcançarem a resposta?

Nestas aulas, debati-me para que os alunos apresentassem uma justificação correcta; apesar das repetidas perguntas que lhes coloquei, estes olhavam para as respectivas construções e não lhes ocorria referir mais nada. Só quando lhes propus que verificassem se o mesmo resultado se mantinha se o triângulo não fosse equilátero, é que os alunos fizeram uma construção para averiguar o que sucedia, começando então a procurar e a encontrar outras particularidades do triângulo equilátero, ficando mais perto de uma conclusão válida.

Mesmo quando um aluno referiu que, se o ponto móvel coincidisse com um dos vértices, duas distâncias eram nulas e a terceira coincidia com a soma das três, (ver figura 35) os alunos não atingiram a justificação. Durante esta fase, estava sempre a questionar-me sobre a forma de orientar os alunos, sem os ajudar em demasia.

Contudo, este problema foi revelando um potencial cada vez maior. É um problema que não termina com o encontrar de uma solução, ou inclusive com a sua justificação (como pensei inicialmente!); esta ainda se revelou uma nova porta para uma boa exploração matemática. O recurso às tecnologias mostrou ser um elemento fundamental que permitiu passar à elaboração de um *Sketch* para a realização da demonstração. A demonstração constitui, por si só, um excelente problema, como se evidenciou neste caso. Na minha perspectiva, podem ser muito interessantes as extensões que decorrem do problema e que se tornam em novos desafios. A percepção dos alunos é muitas vezes a de que com a solução termina a resolução do problema. Por questões de tempo, cumprimento de programas, são poucos os momentos que restam para discutir processos, resultados e a ênfase é dada à procura da solução.

Descobrir o porquê da solução e depois construir um *sktech* para demonstrar essa justificação, foram as duas etapas mais gratificantes para mim, como professora, permitindo assim uma abordagem mais profunda e pormenorizada de determinadas questões, constituindo, portanto, uma conquista para os alunos e a própria professora.

Nesta fase da experiência, alguns alunos começaram a utilizar frequentemente ferramentas do programa, em particular as medições para comprovarem se as suas construções estavam efectivamente bem realizadas. Acontece com alguma frequência elas falharem porque, por exemplo, o ponto que define um segmento não está ainda seleccionado e a partir dessa falha a construção já não está de acordo com o pretendido. Era também notório o começo do à-vontade para trabalharem com o programa. Alguns alunos optaram por explorar autonomamente algumas das potencialidades gráficas do *software*, em particular, as cores, os diferentes traços, utilização de rótulos nos *sktechs* para clarificar e melhor elucidar quem vai observar.

Neste trabalho, as transformações apresentaram-se como uma ferramenta poderosa! Permitem, em ambientes computacionais dinâmicos, criar grandes efeitos, por fazerem preservar os ângulos, nas rotações, ou manter em duas construções as respectivas distâncias iguais, através do recurso às translações.

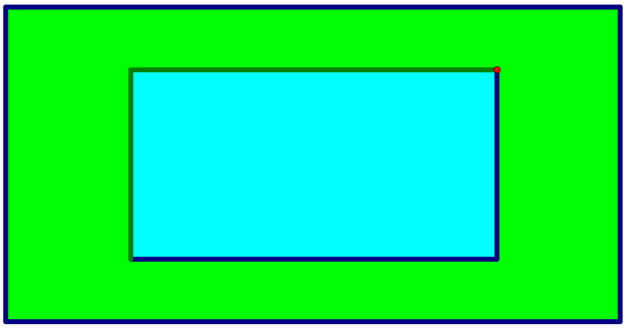
2.5.Episódio 4 – A Piscina …e a Relva

2.5.1. Apresentação

O problema seleccionado para esta aula está resolvido no manual dos alunos na página 268. Trata-se de um problema de optimização que surge para aplicação do estudo das derivadas. Numa primeira abordagem, pareceu-me interessante apresentar aos alunos um problema que mais tarde iríamos trabalhar na sala de aula quando estudássemos as derivadas das funções racionais.

"*Pretende-se construir uma piscina rectangular com 18 m*^{2} *de área. A piscina vai ser rodeada por um relvado, que terá nos topos 2 m de largura e 1 m nas partes laterais.*

Calcula as dimensões do terreno para que a área do mesmo seja mínima."



Naturalmente, a selecção dos problemas estava condicionada pelo facto de estes poderem ser resolvidos pelos dois processos. Neste caso, já tinha a resolução analítica pelo que me debrucei numa construção em *Sketchpad*. Durante a planificação da actividade, o meu primeiro obstáculo foi o de construir a piscina com uma área fixa. Os alunos estavam a resolver um teste escrito enquanto eu circulava na sala e pensava no problema, quando me lembrei que podia recorrer ao gráfico de uma hipérbole para o fazer! Fiquei encantada com a ideia e contribuía para este contentamento o facto de nas últimas aulas termos iniciado o estudo de funções racionais cujos gráficos são hipérboles. A construção do relvado implicava recorrer às transformações geométricas. Era um problema que à partida apresentava boas perspectivas para ser proposto aos alunos.

2.5.2. 1ª Aula

No início da aula distribuí a folha onde constava o problema e os alunos começaram a ler o enunciado (Anexo 7). Não se manifestaram em relação ao grau de dificuldade deste e de imediato iniciaram a construção de um *sketch*. Todos, sem hesitação, se debruçaram sobre a elaboração de uma piscina com os 18 m^2 de área, ou seja, o primeiro desafio era a maneira de criar um rectângulo com área fixa e dimensões variáveis.

O António e o Carlos começaram por construir um rectângulo, não se preocuparam com a condição de a medida da área ser constante; só depois é que se aperceberam desse facto, determinaram o valor da área e repararam que não correspondia ao que pretendiam. Reconheceram então que teriam que alterar o rectângulo, pois o que tinham, não respeitava as condições do problema. Nesta fase, estes alunos procuravam UM rectângulo com área 18 m^2. Só após a minha recomendação para fazerem uma leitura mais atenta do enunciado é que o Carlos fez a observação de que se pretendia a área mínima do terreno, ou seja, o rectângulo da piscina não podia ser fixo.

Os alunos perceberam que precisavam de construir um rectângulo, que representaria o terreno, cujas dimensões seriam variáveis e teriam de procurar o de área mínima. Nele estaria inserido um rectângulo mais pequeno, a piscina, mas este com área fixa de 18 m^2 e também com dimensões variáveis.

A Inês e a Sónia construíram vários rectângulos, com a área pedida, (6x3), (9x2), mas não estavam muito convencidas da sua própria resolução:

– Mas assim como é que encontramos o terreno com a área mínima? – Dizia a Sónia.

– Então, mas a área do terreno não vai ser sempre a mesma? Vamos aumentar o mesmo em todos os rectângulos! – Respondia a Inês, mas não estava muito convicta do que acabava de afirmar.

A Inês achava que, se tinha vários rectângulos com dimensões diferentes mas todos com a mesma área, quando adicionava aos lados de cada um dos rectângulos o mesmo valor, neste caso 2 m nas laterais e 1 m nos topos, a área final do terreno manter-se-ia também constante para todos os rectângulos, ou seja, para a aluna, como os rectângulos tinham todos a mesma área, ao acrescentar o mesmo em todos os rectângulos, então a área do terreno seria a mesma em todos eles.

Continuavam as duas a mexer nos rectângulos que tinham no computador, entretanto a Sónia decidiu recorrer à folha de rascunho e determinou a área do terreno de alguns dos rectângulos, que tinham sido construídos no computador, verificando que a afirmação da colega estava incorrecta.

Nenhum dos alunos conseguia construir a piscina que verificasse as condições e começavam a solicitar de uma forma mais persistente a minha presença numa tentativa de desbloquear a situação. Optei, então, por não os esclarecer muito, uma vez que o tempo investido ainda não tinha sido demasiado. Era necessário que os alunos explorassem mais a situação, sentissem efectivamente do que precisavam e procurassem uma solução. Uma parte do tempo utilizado até ao momento tinha servido para compreenderem que tinham que construir um rectângulo com dimensões alteráveis e área fixa. A segunda etapa era arranjar forma de o fazer. Eu, como professora, não devia, nesta fase, dizer-lhes logo qual o caminho; era necessário dar tempo aos alunos para explorarem o problema e tentarem pelos seus próprios meios definirem um plano para o resolverem. Certamente que uma parte do gozo que se desfruta quando se resolve um problema está também associado ao tempo e às tentativas efectuadas para o resolver.

Entretanto, dois grupos vizinhos introduziram um referencial cartesiano, construíram um rectângulo no primeiro quadrante, em que um dos vértice era a origem do referencial, marcaram mais dois vértices como pontos livres sobre os semi-eixos positivos Ox e Oy e traçaram perpendiculares, obtendo assim o quarto vértice. Definiram o rectângulo e determinaram a sua área. Passaram depois à procura de rectângulos com a área pretendida. Movimentavam o ponto de intersecção das duas rectas, (P), à procura da área 18. Concluíram que havia vários rectângulos mas não sabiam como os marcar, para além de nem sempre conseguirem obter o valor exacto, ficando um pouco desanimados.

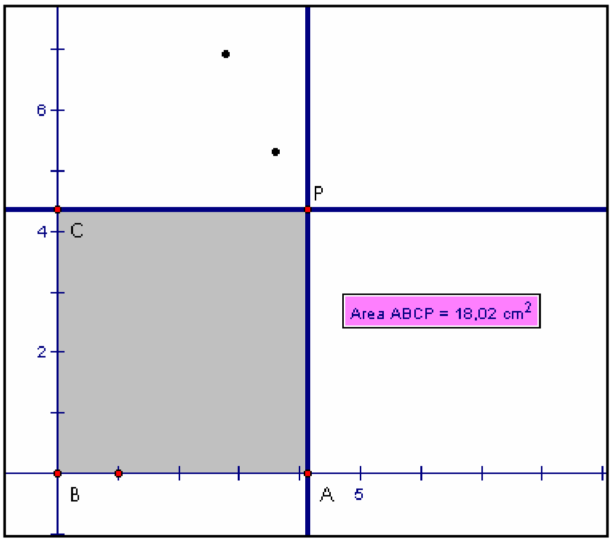


Figura 41-À procura de rectângulos com área 18, por arrastamento do ponto P.

Todos tinham, na verdade, um problema para resolver:

Como construir um rectângulo em que só as dimensões são alteráveis mas cuja área seja sempre 18 m^2?

O princípio do estudo das funções tinha ocorrido há duas semanas atrás, numa aula em sala normal, sem computadores. Nessa aula, iniciei o tema, colocando à turma uma situação análoga:

– Quais as dimensões de um rectângulo com área igual a 1m^2?

Introduzi, deste modo, o estudo de funções racionais do tipo $\frac{1}{x}$ e, recorrendo à calculadora gráfica, obtivemos a respectiva hipérbole. No entanto, até ao momento, no problema da piscina nenhum aluno tinha referido o recurso às funções para abordar o desafio, nem mesmo tratando-se de funções com as quais estavam, nessa altura, a trabalhar nas restantes aulas.

Na resolução da actividade em que era preciso determinar a distância de uma casa à estrada, eu tinha apresentado à turma algumas potencialidades do *Sketchpad* no campo das funções. Em particular, estas tinham sido apresentadas como uma alternativa para representar rectas a partir da respectiva equação reduzida.

Considerei, então, necessária a minha intervenção para fazer o ponto da situação, pelo que propus um pequeno debate com toda a turma, iniciando uma troca de ideias de modo a tentar ultrapassar esta dificuldade; comecei por questionar:

– Estão todos a fazer tentativas para construir o quê?

Os alunos responderam, quase em coro, que pretendiam obter um rectângulo que tivesse sempre área 18 e no qual se pudessem alterar as suas dimensões, base e altura, mantendo constante o valor da área. Coloquei questões e fiz uma síntese no sentido de resumir perante a turma toda a informação que se tinha obtido até ao momento e continuei:

– Como determinam a área de um rectângulo?

Alguns alunos referiram: "base x altura" e um aluno adiantava também que queríamos números que multiplicados dessem o produto 18.

Muitos alunos já tinham encontrado e referido exemplos de pares de números, ou seja, medidas das dimensões para o rectângulo, mas não estavam a conseguir construir um só rectângulo em que, aplicando as capacidades dinâmicas do *Sketchpad* e alterando as medidas da base e da altura, deixasse fixo o valor da área. Continuavam a não sugerir nada sobre as funções!

Perante este impasse, decidi apresentar a situação de outra forma. Desenhei no quadro um rectângulo e questionei a turma sobre a área do rectângulo. Alguns alunos referiram que havia duas incógnitas “x” e “y”, outros avançaram e expressaram a condição “$x \times y = 18$” e só quando se escreveu no quadro é que a Leonor, uma aluna tímida cujas intervenções nas aulas são num tom de voz muito baixo, referiu a função racional $y = \frac{18}{x}$ como a solução para o problema da turma. Referiu ainda que depois de se representar o gráfico da função, marcava-se um ponto livre sobre a hipérbole a partir do qual se construía o tão ambicionado rectângulo!

Finalmente, eles tinham chegado à forma de construir a piscina no *Sketchpad*. Foi um caminho longo, com várias tentativas, muitos esclarecimentos, em que por momentos me senti de braços atados, por ter a convicção de que não poderia simplesmente dizer que com a função $y = \frac{18}{x}$ conseguiriam fazer a construção. Desbloqueou-se assim a situação e os alunos construíram a piscina com as condições exigidas no enunciado.

Todos começaram a realizar as respectivas construções no computador mas o estado de espírito era diferente de grupo para grupo. Havia alunos que estavam descontentes consigo, surgindo comentários de como parecia impossível que não se tivessem lembrado das hipérboles se nas outras aulas andávamos a falar delas. Outros alunos não se questionaram acerca do facto e passaram, com facilidade, a elaborar o esquema que se segue.

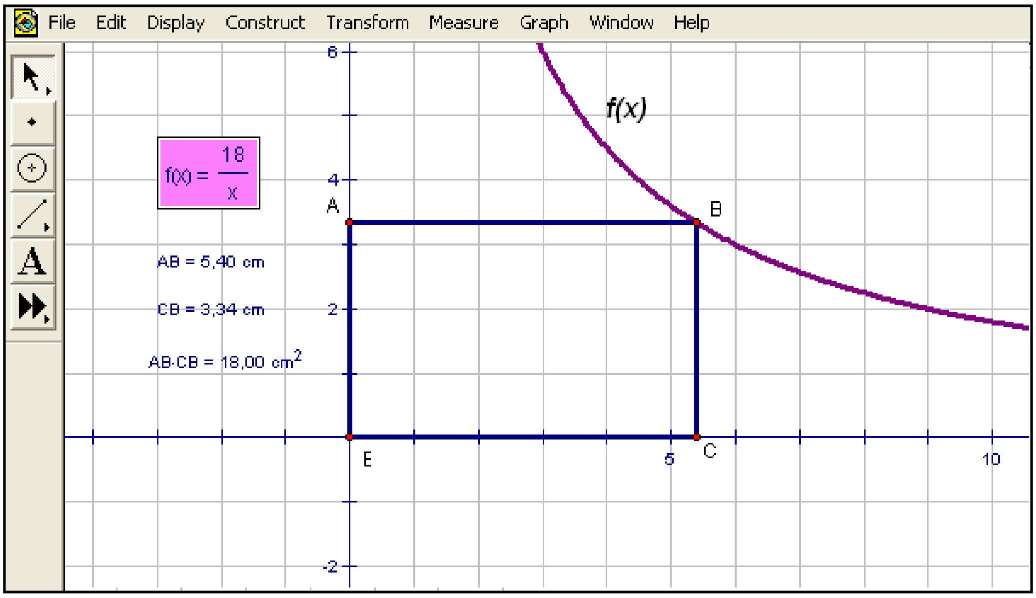


Figura 42.A construção do rectângulo com área fixa 18.

Entretanto a aula chegou ao fim.

Ao longo da resolução deste problema, os alunos realizaram uma grande procura e apesar de estarem a estudar funções racionais nas outras aulas, não conseguiram vê-las como o meio para alcançarem os seus objectivos, revelando algum distanciamento entre o que é leccionado nas restantes aulas e o seu trabalho com recurso aos computadores.

2.5.3. A 2ª Aula

Passada uma semana, voltámos a ter aula na sala de computadores. Desta vez, contava com a presença de uma amiga que filmou toda a aula. Quando informei os alunos da presença da câmara, estes teceram apenas alguns comentários engraçados quanto à aparência deles, mas não se mostraram incomodados com o facto.

Nesta aula, continuámos a trabalhar na resolução do problema iniciado na aula anterior. No início, fiz um balanço do que tinha sido realizado na aula anterior, em que se tinha construído a piscina, recorrendo à hipérbole que constitui o gráfico da função $y = \frac{18}{x}$.

Era agora necessário colocar o relvado em torno da piscina, de acordo com as dimensões indicadas no problema, isto é, 1 m nas partes laterais e 2 m nos topos.

Na aula anterior, não quis ser eu a apresentar aos alunos a construção em *Sketchpad* do problema por entender que tal diminuiria o interesse da actividade matemática e porque estaria a queimar etapas que devem ser percorridas pelos alunos para que a resolução seja efectivamente gratificante e uma experiência enriquecedora.

Nesta aula, porém, optei por apresentar aos alunos, com recurso ao videoprojector, uma construção da piscina já rodeada pelo relvado. Desta forma, fez-se um ponto da situação e reforçou-se para toda a turma o novo desafio.

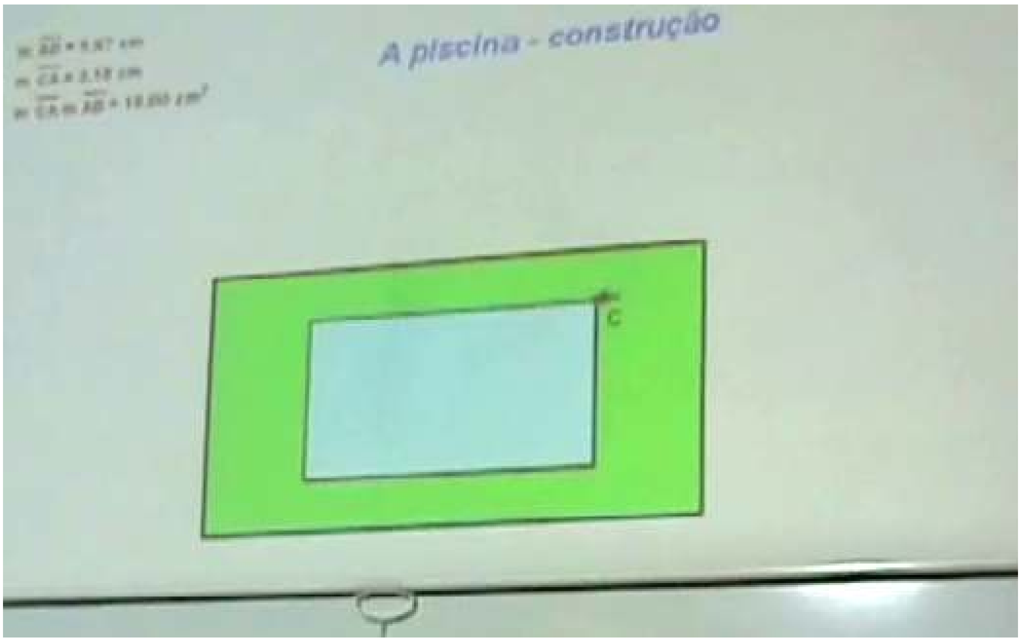


Figura 43.Imagem da sala aula quando apresentei a minha construção em *Sketchpad*.

Alguns alunos começaram a fazer analogias com o que tinha sucedido na semana anterior. Entenderam que, se pretendíamos também um rectângulo no qual estava inserida a piscina, se podia recorrer novamente às funções para definir os novos vértices que iriam determinar o terreno.

Uma proposta apresentada por vários grupos era a de representar a função $y = 1 + \left(\frac{18}{x} - 2 \right)$; uma aluna argumentava que deste modo o vértice se deslocava 2 unidades para a direita e 1 para cima:

– Era como se definíssemos outra piscina à volta.

Achei que seria interessante devolver à turma uma nova discussão sobre o recurso às funções. No quadro, escrevi a expressão e questionei os alunos sobre a viabilidade da proposta. Uma aluna observou que a expressão deveria ser $y = 1 + \frac{18}{x-2}$ para ocorrerem as translações que se pretendiam.

Interroguei os alunos sobre o tipo de gráfico que iríamos obter e se ficaríamos com um rectângulo em torno da piscina como se queria. Depois de algumas conversas, uma aluna respondeu que, com este processo, só um dos quatro vértices é que seria deslocado como pretendíamos.

Mas a ideia de recorrer às funções parecia bastante eficaz para alguns grupos e assim continuavam a explorar o recurso às mesmas, aparecendo ainda durante o debate a proposta do José:

– E se, na expressão, em vez de 1 colocarmos 2 e em vez de 2 colocarmos 4?

Seria, portanto, a função $y = 2 + \frac{18}{x-4}$ e o aluno justificava que assim estaríamos a prever a alteração para os dois lados. O José não conseguia visualizar a função pelo que decidiu solicitar a minha ajuda e, com o meu apoio na representação, rapidamente concluiu que não obtinha o resultado pretendido.

Outros dois grupos continuavam a tentar resolver o problema recorrendo às funções e solicitavam a minha intervenção. Perguntei então:

– Mesmo que obtivessem duas funções, uma para a piscina, que já tinham, e outra para o relvado, como só irão movimentar um ponto móvel, o que aconteceria à outra função?

– A área do relvado também é fixa? – Interroguei-as.

As alunas, depois de reflectirem sobre as funções que tinham e sobre as questões que levantei, decidiram mudar de plano.

Adoptei a estratégia de ir colocando algumas questões aos alunos sobre o recurso às funções, mas disse-lhes que a decisão tinha que ser tomada pelos elementos do grupo. Para além disso, o tema que estava a ser leccionado nas outras aulas era funções, pelo que todas as oportunidades de as utilizar, a análise dos gráficos e a sua interpretação constituíam, sem dúvida, momentos de aprendizagem enriquecedores.

Os alunos não desistiam facilmente de pensar em funções, talvez influenciados pelo desenrolar da aula anterior, em que estas tinham sido a estratégia para construir a piscina e também porque geometricamente as situações eram muito análogas. Em ambos os casos, pretende-se construir um rectângulo, só que no primeiro pretendia-se uma área fixa e no segundo obviamente não, pois de outro modo não faria sentido o problema inicial. Antes de construírem o rectângulo para definir o relvado, nenhum aluno fez a observação de que a sua área seria precisamente a do terreno, que se queria minimizar.

O programa *Sketchpad* permite fazer translações, rotações e outras transformações geométricas. Eu decidi apresentar, nesta altura, apenas as translações e rotações.

Seleccionando um objecto, por exemplo um ponto, se lhe aplicarmos determinada translação, esta mantém-se sempre, ou seja, quando arrasto o ponto pelo ecrã, este é seguido pela sua imagem por meio da translação.

No caso da piscina, para construir o relvado nas laterais, com medidas fixas, é suficiente que se aplique a cada um dos vértices que definem o rectângulo da piscina, uma determinada translação.

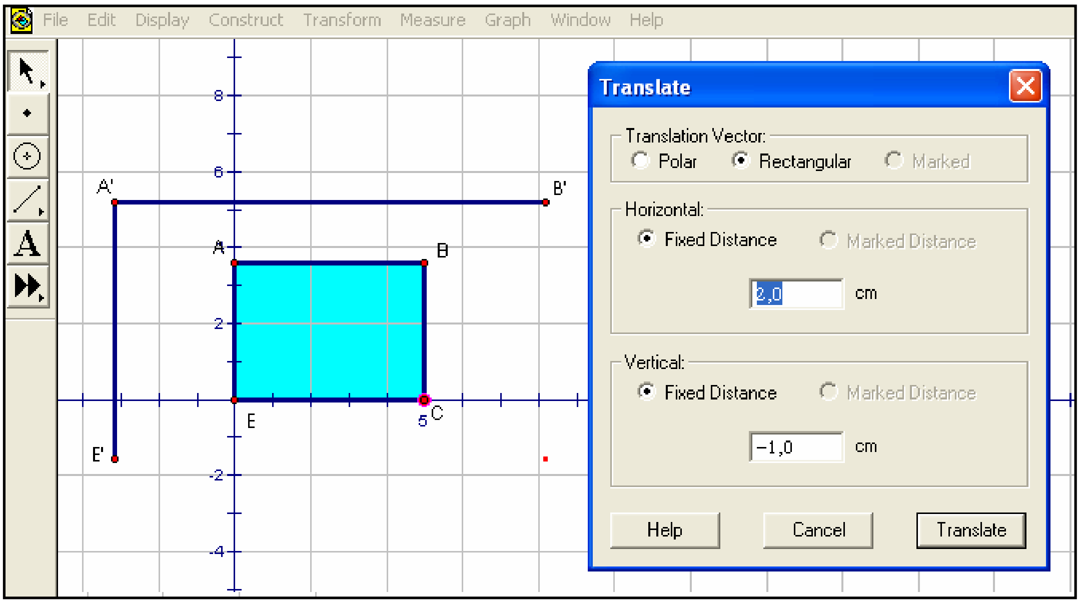


Figura 44.Construção do relvado, recorrendo às translações (no quadro, a translação do ponto C).

Entretanto, vários grupos já tinham resolvido o problema, recorrendo às translações dos vértices que definiam a piscina.

Todos os grupos, talvez sugestionados pelo esquema que eu tinha projectado no início da aula também, usaram as mesmas cores. Alguns sentiram dificuldade em pintar de verde só o relvado; como pintavam o rectângulo exterior de verde, obviamente o rectângulo do interior (piscina) também ficava verde:

– Era bom que existisse o excepto! – Referia em tom de brincadeira a Inês.

– Pois era, parece que a pintura é outro problema para resolver! – Respondi.

À medida que a aula ia decorrendo, todos iam sendo bem sucedidos na construção, conseguindo ultrapassar as pequenas contrariedades que iam surgindo.

Interessa, ainda, referir que houve dois grupos que fizeram o registo nos relatórios que me entregaram, de uma tentativa para a construção do relvado recorrendo a circunferências com um raio fixo.

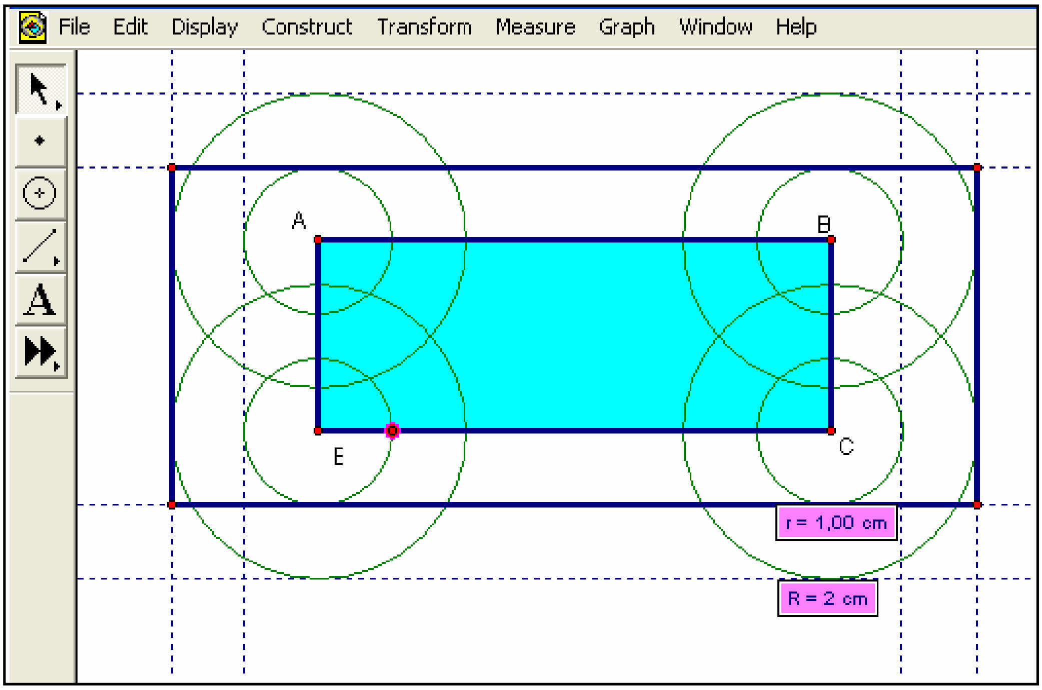


Figura 45. Tentativa da Anabela e do António para construírem o relvado.

Traçavam tangentes às circunferências e a partir dos pontos de intersecção definiam os vértices do terreno. Em ambos os casos esta construção falhou porque não conseguiram construir no *Sketchpad* as circunferências com raio fixo 1 e 2, respectivamente, como escreveu o António e a Anabela:

"Ao movermos um dos vértices da piscina, verificámos que as dimensões do terreno não respeitavam as medidas propostas, (...)".

Quando todos já tinham feito uma construção, fiz novamente um ponto da situação, expondo à turma as situações mais pertinentes que observei, ao circular por entre os grupos.

Não houve outras dificuldades na obtenção das dimensões do terreno com área mínima. Foi apenas preciso alertar a turma para uma leitura mais cuidada do enunciado e reparar que eram pedidas as dimensões do terreno e não a sua área.

Enquanto movimentavam o ponto livre para procurar a solução, alguns alunos aperceberam-se de uma situação curiosa. Se o ponto se localizava no ramo da hipérbole correspondente a valores negativos da abcissa, a construção não se mantinha, ou seja, o rectângulo exterior era a piscina e o rectângulo interior era o relvado.

Alguns alunos ficaram surpreendidos com o resultado. A Ana exclamava:

– A relva fica dentro da piscina!

Eu também fui surpreendida por este imprevisto e, logo de imediato, não estava a encontrar uma justificação. Só quando me concentrei na análise das translações dos pontos é que entendi o porquê da situação.

Recorri à projecção da sua construção e questionei a turma sobre a explicação do facto.

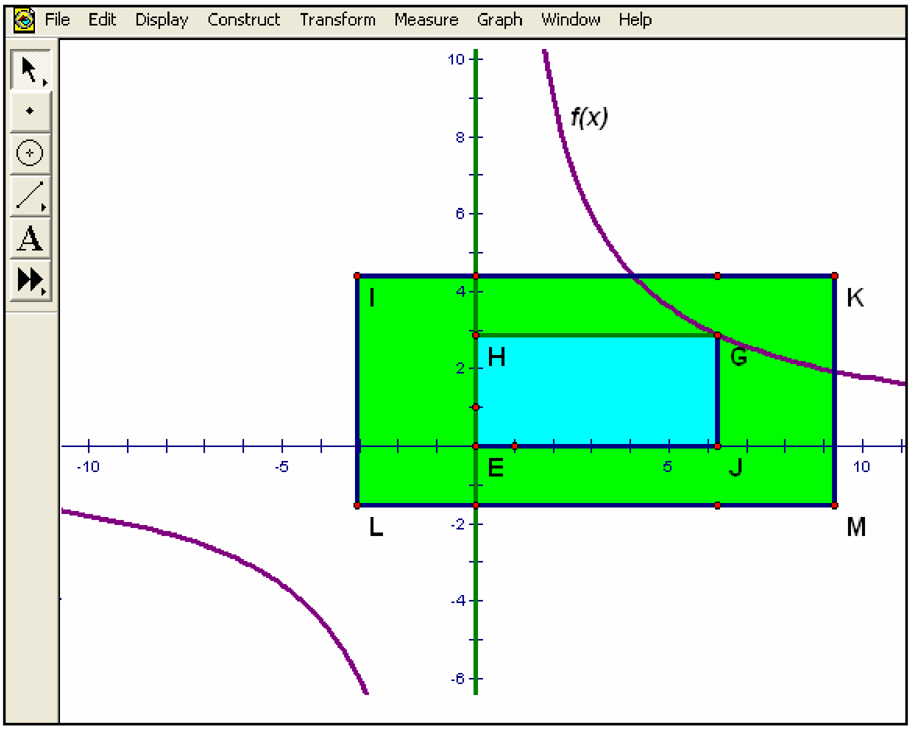


Figura 46.O esquema em que o ponto móvel (ponto G) tem abcissa positiva.

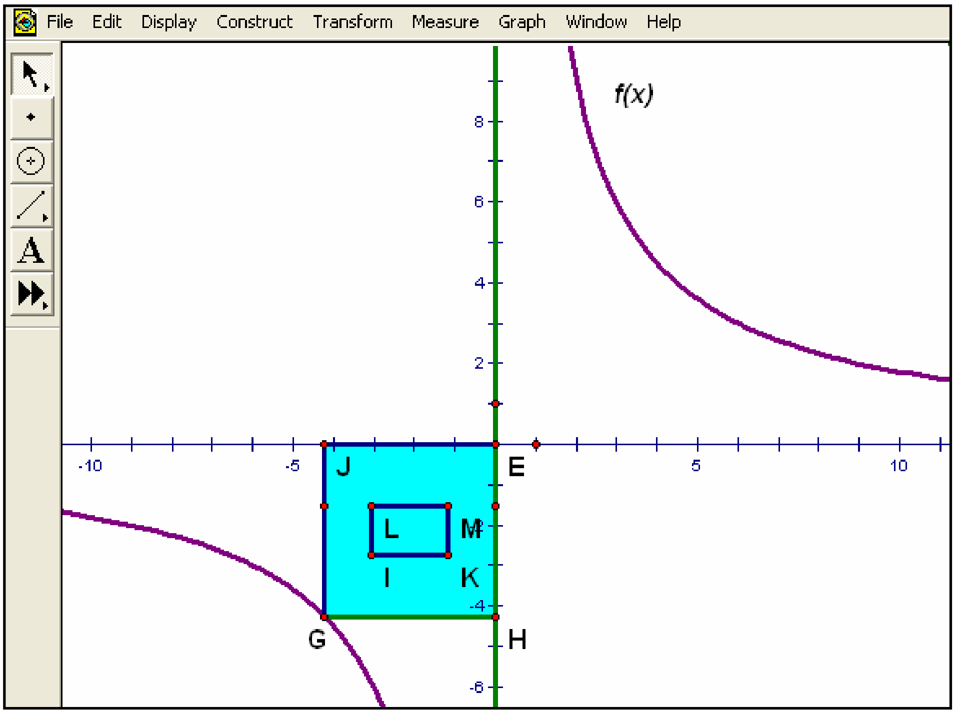


Figura 47.O esquema em que o ponto móvel (ponto G) tem abcissa negativa.

Alguns alunos disseram que se devia ao facto de os valores de x serem negativos; a pouco e pouco, começaram a surgir justificações correctas e inclusive apareceram soluções para inverter a situação.

Finalmente, passou-se a uma resolução semi-analítica, recorrendo às tecnologias, uma vez que ainda não se tinham estudado as derivadas de funções para o cálculo dos extremos desta função. Houve alunos que usaram a calculadora gráfica para encontrar graficamente a solução enquanto outros recorreram mais uma vez ao *Sketchpad* para traçar o gráfico da função e visualizar o extremo, na mesma lógica da calculadora gráfica.

Alguns alunos, ao representarem a função que definia a área do terreno no computador, sentiram algumas dificuldades para visualizar o gráfico da função g(x) devido à escala. Neste *sketch* eles têm, ao mesmo tempo, duas construções com dimensões um pouco díspares; para a construção da piscina, temos dimensões razoáveis para a piscina entre 0 e 10, aproximadamente, enquanto que as imagens da função, ou seja, os valores da área são superiores a 50.

Mais tarde, no ficheiro da aula, do Bernardo e do Élio, encontrei uma construção interessante. Na figura que se segue, alterei a escala para se poder visualizar, em simultâneo, o gráfico e a piscina, pelo que as dimensões do relvado não estão correctas, uma vez que foi obtido a partir das translações e estas não se actualizam com a nova escala.

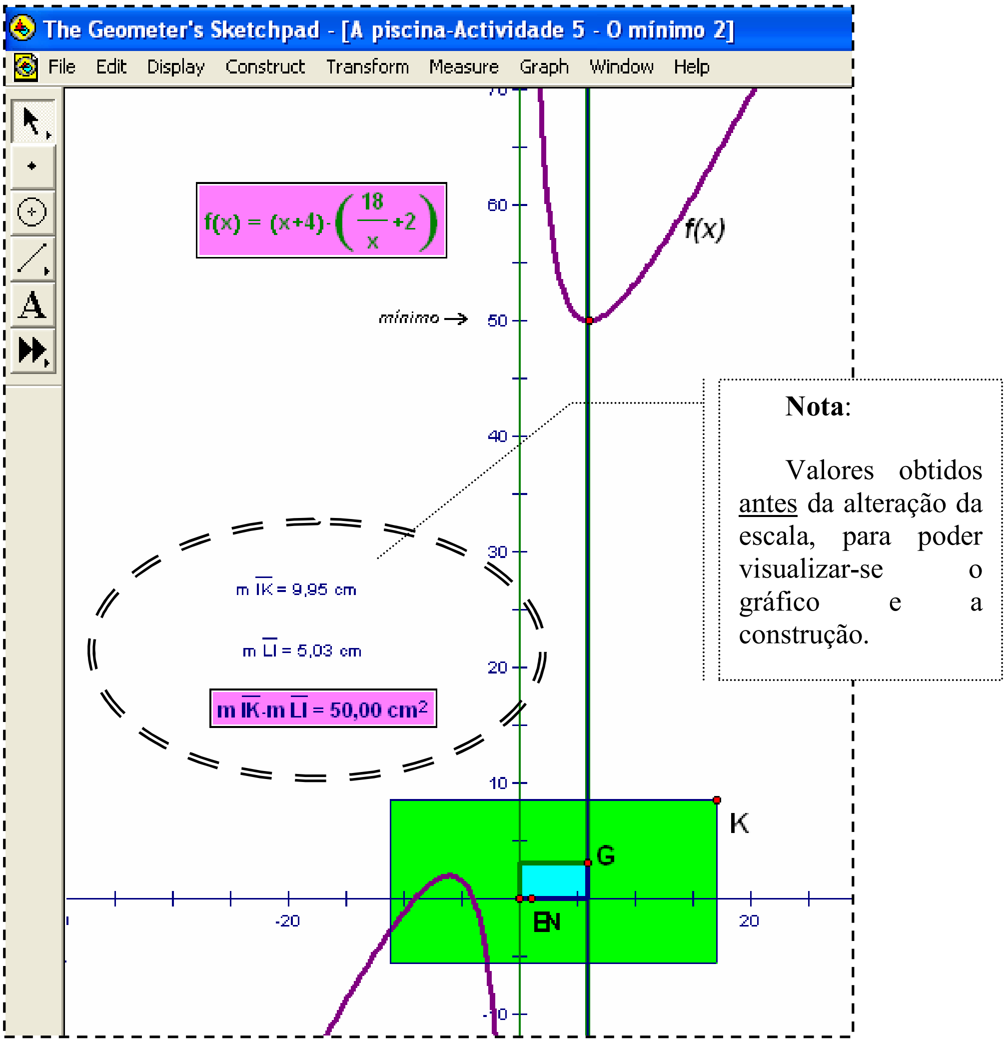


Figura 48.Imagem da construção do ficheiro do Élio e do Bernardo.

No início não lhe dei importância, mas a recta paralela ao eixo das ordenadas e a passar pelo ponto móvel G deixou-me intrigada. Após uma análise mais atenta, reparei que o ponto C se encontrava na posição para a qual se obtinha a área mínima do terreno e simultaneamente a recta vertical intersectava o gráfico da função f(x) no ponto que tem como imagem o mínimo da função.

Chegou, assim, a hora das rotinas habituais de uma aula na sala de computadores, guardar os ficheiros e desligar as máquinas.

Considerações Finais

Foi para mim muito interessante e estimulante ter trabalhado este problema com os meus alunos num ambiente computacional.

Era um problema que estava no manual como um exemplo de aplicação das derivadas e que veio a mostrar-se uma autêntica caixa de surpresas. Foi todo um desencadear de novos desafios que se iam colocando:

– Como construir a piscina?

– Como fazer o relvado?

– Como pintar SÓ a relva de verde? Uma vez que não existe o excepto, o que fazer? Como referia uma aluna.

– O que se passa? A relva dentro da piscina!

E no final, ainda havia de ter mais uma surpresa, que quase deixava passar:

– A recta paralela ao eixo das ordenadas, que bela conexão!

Certamente, outras situações ficaram por relatar, ou porque não me apercebi delas ou porque não foram registadas, mas os alunos seguramente tiveram experiências importantes que deixaram boas marcas.

Como professora de Matemática, não deixo de me preocupar com os conteúdos que precisam de ser aprendidos e quando penso nas respostas aos desafios surgidos e no que se discutiu enquanto se tentavam ultrapassar estas dificuldades, percebo a vastidão de conhecimentos que estiveram a ser mobilizados: proporcionalidade inversa, funções racionais, hipérboles, transformações de funções, transformações geométricas, translações e/ou rotações, decomposição de figuras geométricas, outra vez as transformações! E, por fim, a ligação entre o gráfico de uma função racional e a representação geométrica do problema, a capacidade de perceberem que no mesmo ecrã podiam observar os dois, ou seja, ver o mínimo da função e lá "em baixo" visualizar o terreno, com as respectivas dimensões, quando a área é mínima. Tudo isto em duas aulas!

Depois, já sozinha, sem poder partilhar com toda a turma, percebi que dois alunos construíram uma recta vertical, a passar no ponto móvel – o ponto que permite alterar as dimensões do terreno – e a intersectar o gráfico da função *f(x)* que exprime a área do terreno. A ordenada do ponto de intersecção dessa recta com o gráfico corresponde também ao valor da área do terreno. Estabeleceu-se assim uma conexão dinâmica entre a construção "piscina+relva" e o gráfico da função que representa a sua área.

Por vezes, senti algumas hesitações em relação à forma de actuar na sala de aula. Tentei que o meu papel na aula fosse o de auxiliar os meus alunos mas por vezes não é fácil pois, se por um lado é importante deixarmos os alunos realizar as suas experiências de forma independente, há casos em que se pode correr o risco de que sem um pouco de auxílio, os alunos não façam progressos. Por outro lado, se os ajudar demais, não resta nada para eles fazerem a não ser confirmar ou verificar o que lhes disse. O professor não pode dizer tudo, mas não pode deixar cair por terra o esforço dos alunos e vê-los desistir.

Quando circulava pela sala, alguns alunos acabavam por me interpelar, no sentido de lhes confirmar determinadas ideias ou conjecturas, mesmo antes de as terem testado no computador, talvez por receio (ou se calhar por uma questão de tempo…) e eu acabava sempre por insistir em que deveriam testar as suas ideias, sem temor de que alguma coisa corresse mal, uma vez que não comprometeriam o trabalho realizado até ao momento.

O *Sketchpad* tem a funcionalidade da opção *Undo* do menu *Edit*, que permite aos alunos, no caso de engano ou de um resultado não previsto, regressar à situação anterior. Esta opção tem um papel desinibidor em relação ao uso do computador. Faz com que os alunos experimentem e explorem, sem receio de consequências nefastas para o trabalho realizado até aí; há sempre a certeza de que, se não estivermos satisfeitos com as opções tomadas, poderemos voltar à situação anterior.

Verifiquei como é importante que o professor seja paciente, dê tempo aos alunos para explorarem e para se enganarem. O aparecimento de situações novas e imprevistas implica da parte do professor uma análise cuidada do trabalho dos seus alunos, no próprio momento, o não ter receio de dizer "não estou a ver!" e o dar sempre atenção às respostas dos alunos, explorando-as mesmo que pareçam disparatadas, à partida; por vezes, há grandes e agradáveis surpresas e vale a pena esse investimento. É muito gratificante sentir os alunos a descobrirem novas situações e a tentarem diferentes abordagens.

Mesmo com as tentativas falhadas, os alunos estão a fazer aprendizagens significativas e fundamentais. Por exemplo, neste problema, quando os alunos tentavam construir o relvado, recorrendo às transformações dos gráficos das funções, certamente houve momentos de clarificação destas noções, houve um relembrar de conceitos que são importantes. Apesar de não terem funcionado como meio para resolver o problema, foi útil discutir o porquê de tais sugestões não resultarem.

2.6.Episódio 5 – O Cilindro Inscrito no Cone

2.6.1. Apresentação

Até a este momento, os alunos ainda não tinham trabalhado com nenhum problema que envolvesse sólidos ou construções tridimensionais. Como é que iriam reagir ao tentarem fazer uma construção no *Sketchpad* para analisarem um problema que implicava geometria no espaço?

A *Fase Final* do estudo estava a aproximar-se e alguns problemas que iriam ser propostos envolviam sólidos geométricos, pelo que entendi ser importante que os alunos contactassem previamente com esta situação. Não queria que este fosse um factor a ter em conta no momento em que os alunos poderiam optar por um dos processos de resolução, utilizando o computador ou resolvendo por processos analíticos ou "semi-analíticos", dado que poderia ser necessário recorrer à calculadora gráfica.

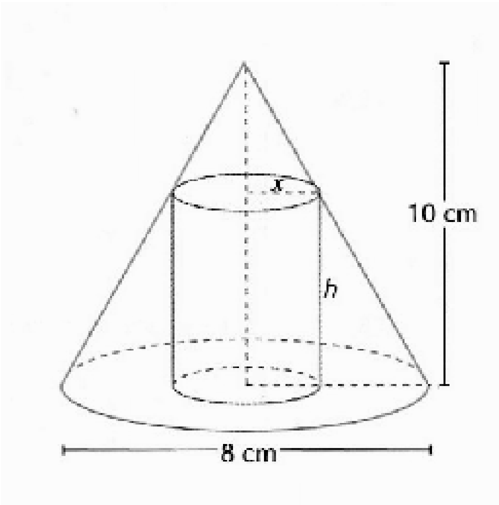
Outra questão, também importante para mim, era a de que os alunos utilizassem o *Sketchpad* na resolução de problemas escolhidos directamente do manual. Por norma, os problemas do manual são resolvidos por processos analíticos, havendo alguns com a indicação para recurso à calculadora gráfica. Para mim, era um objectivo importante que os alunos ganhassem a noção de que poderiam continuar a utilizar o *Sketchpad* para resolverem questões que lhes são colocadas no dia-a-dia, para além desta experiência que estavam a viver nas aulas de Matemática.

O problema faz parte de um conjunto de actividades apresentado no fim do estudo das funções. Está orientado para uma resolução analítica, prevendo que se deverá encontrar a expressão de uma função e, com aplicação da derivada, determinar o máximo dessa função (anexo 8).

Problema:

" A partir de um cone de madeira com 10 cm de altura e 8 cm de diâmetro de base pretende-se construir um cilindro. Designa por x o raio do cilindro e por h a altura.

Determina as dimensões do cilindro para que o volume seja máximo."



2.6.2. A aula

Comecei a aula, indicando aos alunos que iríamos resolver o problema 29 da página 321 do manual. Nem todos tinham consigo o manual mas depois de alguns empréstimos, havia pelo menos um manual por cada grupo.

Não fiz nenhuma consideração inicial e comecei a circular pela sala. De imediato, comecei a constatar que todos os alunos se debatiam com a questão de representar o cone no *Sketchpad*.

O Miguel e o Gonçalo tiveram como primeira preocupação construir uma figura igual à do manual. Não tendo encontrado nas ferramentas do programa a possibilidade de construírem sólidos, decidiram recorrer a arcos de circunferências (figura 49). Marcaram os pontos M, K e L através de coordenadas, de modo a respeitar as medidas do cone, altura 10 e raio 8. Para a base do cone, marcaram um ponto livre no eixo das ordenadas e com os pontos K e L, construíram um arco de circunferência. De seguida com a opção *Reflect* do menu *Transform*, fizeram uma reflexão (ou simetria axial) em relação ao eixo das abcissas. Eu nunca tinha antes explicado ou feito referência a esta transformação geométrica que o *Sketchpad* tem disponível. Os alunos, naturalmente, procuravam e começavam a usar funcionalidades do *Sketchpad* que não tinham sido apresentadas anteriormente.

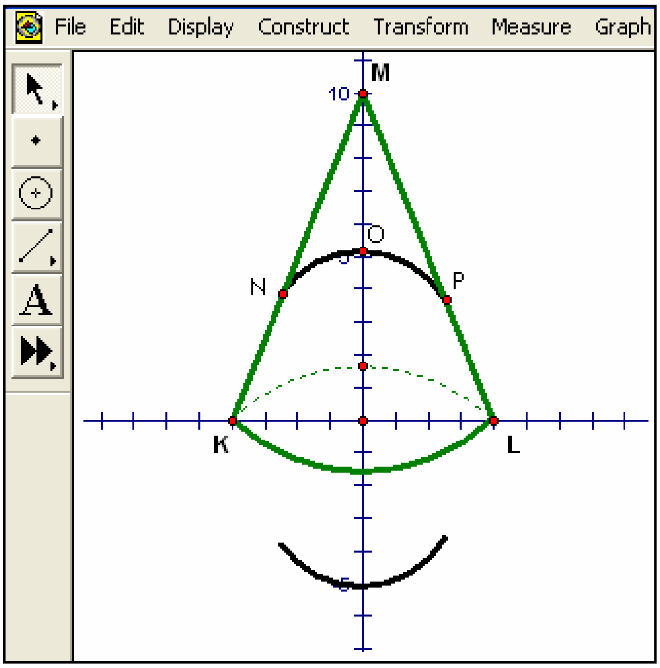


Figura 49.Excerto da construção do Miguel e Gonçalo.

Tentaram o mesmo procedimento para construir as bases do cilindro inscrito. Colocaram N e P como pontos livres dos segmentos $[KM]$ e $[LM]$, respectivamente, o ponto livre, O, a pertencer ao eixo das ordenadas, e construíram o arco de circunferência definido por N, O e P. Quando pediram ao programa para desenhar a imagem simétrica, cometeram o erro de o fazer usando como eixo de simetria o das abcissas.

– Agora temos que fazer subir esta parte de baixo! – Referia o Gonçalo.

– Pois, só que não estamos a ver os pontos para fazer o vector – Respondia o Miguel, apontando para o arco que se encontrava ao fundo do ecrã.

Para fazerem a simetria, o Miguel e o Gonçalo tinham apenas seleccionado o arco de circunferência e não os pontos que o definiam, de modo que obtiveram, como reflexão, apenas o arco e não os pontos nos seus extremos.

Note-se que, para a resolução do problema, os arcos de circunferência não têm a menor influência, pelo que não necessitam de ser desenhados, contudo quase todos os alunos se preocuparam em construí-los e alguns, como o Miguel e o Gonçalo, logo no início da construção.

Optei por não interferir com as resoluções dos alunos, nunca referindo o facto de ser desnecessário construírem-se os arcos de circunferência. Estes são aqui meros adornos, que tornam apenas o esquema mais perceptível visualmente. Mas para alguns alunos, estes adereços são importantes como forma de se integrarem no contexto do problema, conseguindo assim recolher a informação necessária e terem sucesso na resolução.

A Carolina e a Sónia não se preocuparam, à partida, com a representação das bases do cilindro e do cone, avançando para a construção só de um triângulo e de um rectângulo. Contudo, quando fui testar a construção, esta não funcionava por não terem representado os vértices do triângulo através de coordenadas, o que lhes permitiria fixar as dimensões, altura e base do triângulo. Assim, quando se deslocava um ponto, deixavam de ter o triângulo que representava o cone e consequentemente o rectângulo do seu interior que representava o cilindro.

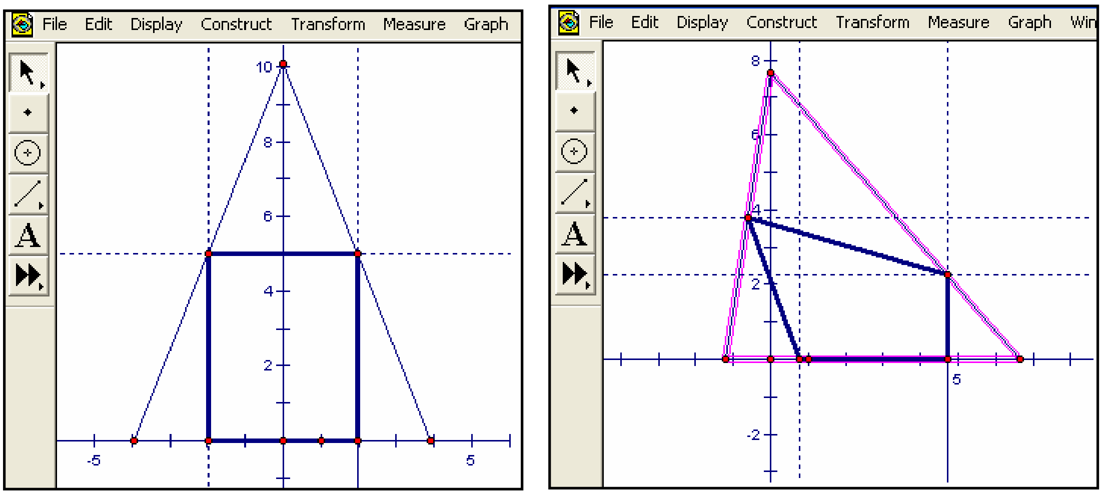


Figura 50.Construção da Carolina e Sónia, antes e depois de mexer um dos vértices do rectângulo.

Porém, quando eu mexi na construção e a Carolina se apercebeu de que o triângulo que representava o cone se alterava, de imediato referiu:

– Ah pois, tínhamos que usar as coordenadas!

Prontamente, criaram uma nova página e iniciaram uma outra construção para o problema.

A questão principal que se colocou neste problema foi essencialmente o impacto que os alunos sentiram logo no início. Quase todos me questionavam se se conseguia construir sólidos com o *Sketchpad*. E, por vezes, eu desafiava-os:

– Mas por que precisam que o programa construa sólidos?

Alguns alunos ficavam um pouco confusos e eu prosseguia:

– Sim, então o esquema está feito a três dimensões?

– Não – afirmava a Nídia – Então, podemos fazer SÓ o desenho?

A esta questão eu optava por não responder claramente, sugerindo aos alunos que pensassem e discutissem um pouco mais sobre o assunto.

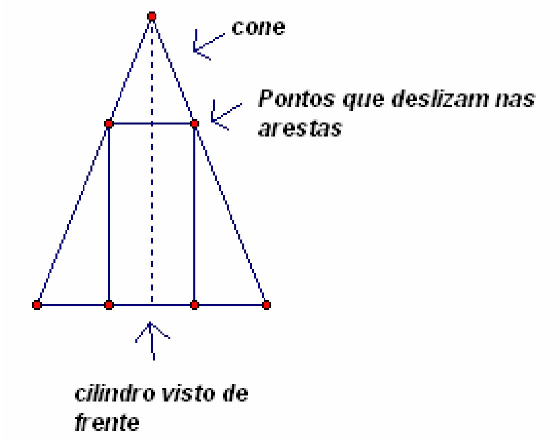
– Vejam o que precisam de saber para resolver o problema… – E continuava a circular pela sala.

Entretanto, o Élio e o Bernardo já tinham a solução do problema que se ilustra a seguir, com um excerto do relatório por eles apresentado.

"Procurámos fazer elipses, mas não encontrámos.

Pensámos em resolver o problema através de medidas, ou seja, alturas e larguras.

Construímos um triângulo, como que se se visse o cone de frente e pusemos dois pontos a deslizar nas arestas para se variar o raio do cilindro que está contido no cone. A partir desses pontos construímos um rectângulo que simboliza a cilindro visto de frente.



Depois, medimos as distâncias necessárias para os cálculos, sendo x = 2,65 cm e h=3,37 cm. Seguidamente, com as medidas retiradas, descobrimos o volume, sendo este =74,47cm^3."

Figura 51.Transcrição do relatório de aula do Bernardo e Élio .

Nos relatórios desta aula quase todos os grupos referem a dificuldade que sentiram por se tratar de um problema com sólidos e o programa trabalhar apenas com figuras planas. O José e o Carlos começavam o seu relatório dando conta de que:

"*Como era mais difícil e nós também não conseguimos fazer o cilindro e o cone em 3D, fizémo-los em 2D, ou seja, um triângulo e um rectângulo, assim em vez de trabalharmos em volumes, trabalhámos com áreas*".

Houve algumas confusões e faltas de rigor na linguagem, tanto nos relatórios, como nas conversas que ia mantendo com os alunos.

Quando a aula se começou a aproximar do fim, decidi fazer um balanço em que os alunos apresentaram as suas formas de resolver o problema e eu fiz alguns esclarecimentos para toda a turma. De seguida, os alunos – alguns deles com pouca vontade – passaram à resolução das alíneas apresentadas através de uma via analítica.

2.6.3. Considerações finais

Ao analisar o ficheiro da aula do Bernardo e do Élio, comecei por deslocar o ponto móvel de uma das "arestas" (como escreveram os alunos), verificando que o rectângulo interior alterava as suas dimensões e pude confirmar o resultado obtido pelos alunos. Porém, como faço com todos os ficheiros para analisar as construções, desloquei um dos vértices do triângulo e apercebi-me de que algo falhava na construção, sem no entanto conseguir detectar a falha. Fiquei intrigada e decidi analisar com mais rigor. Assim, recorrendo à opção *Properties*... dos diferentes elementos que formam a construção, averiguei os *parents* e *childrens* de cada elemento. Nestes dois campos, aparece a listagem de todos os objectos obtidos directamente a partir do elemento que estamos a analisar – *childrens* – bem como os objectos de que depende o nosso elemento – *parents*. Na listagem dos *parents* ou *childrens*, colocando o cursor sobre um dos objectos da lista, este aparece identificado com outra cor na construção, mesmo que se trate de um objecto escondido. Ao seleccioná-lo, passamos automaticamente a poder consultar os objectos dependentes e independentes do mesmo. Assim, pude averiguar, com facilidade, o que estava errado na construção dos meus alunos e isso permitiu-me verificar toda a construção. Fiquei agradavelmente surpreendida com esta faceta do *Sketchpad*, pois constitui uma mais valia para professores e investigadores. A possibilidade de refazer posteriormente a construção dos alunos a partir das propriedades dos elementos é uma excelente ferramenta para o professor.

Também é de grande utilidade a possibilidade de podermos ficar com o registo de uma determinada construção que pode estar mal. O aluno faz *documents options* e *blank page* ou *duplicate page* e continua, podendo o professor analisar em casa, com mais calma, os procedimentos dos seus alunos, sendo ainda uma boa maneira de documentar todos os passos que os alunos fizeram, em particular, no caso deste projecto.

3. A Fase Final

Esta fase constitui um momento fulcral do estudo. É a etapa em que os alunos escolheram os seus processos de resolução dos problemas propostos, recorrendo ou não ao computador.

Os problemas para a *Fase Final*

Foram seleccionados três problemas para os alunos resolverem nesta *Fase Final*.

I. O Canteiro   *Num jardim com a forma de um triângulo rectângulo isósceles de hipotenusa 10 metros, pretende-se construir um canteiro rectangular.*   *Quais as dimensões do canteiro que tem área máxima?*
II. O Cone   *Qual o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 dm?*
III. As Vasilhas.   *O petróleo é transportado em vasilhas com forma cilíndrica de 160 litros de capacidade.*   *Quais as dimensões do cilindro de modo a que o material utilizado na sua construção seja mínimo?*

Todos os problemas permitem uma resolução analítica e computacional. Quanto ao grau de dificuldade, os problemas apresentavam algumas diferenças. De ressalvar que a dificuldade aqui expressa é tomada tendo por base as minhas resoluções, que podem naturalmente não ter contemplado o caminho mais rápido e eficaz. O grau de dificuldade de um problema não é uma grandeza mensurável por instrumentos fiáveis, dependendo de vários factores como a experiência, conhecimentos, estado de espírito, se se está ou não em situação de *stress*, como acontece por exemplo em momentos de avaliação. Até sobre o mesmo problema, muitas vezes, a mesma pessoa avalia em momentos diferentes, de forma diferente. Quantas vezes, a opinião do professor não é discordante da dos seus alunos em relação ao grau de dificuldade de uma determinada questão? Contudo, tentei fazer uma avaliação do nível de dificuldade na óptica do aluno.

O problema do *Canteiro* é uma situação clássica dos manuais, a resolução analítica é mais trabalhosa do que a resolução computacional; no problema do *Cone*, o processo analítico é também mais trabalhoso do que o processo com o uso do *Sketchpad*, contudo após a resolução do primeiro problema torna-se mais acessível; no terceiro problema invertem-se os graus de dificuldade, a via analítica é quase rotineira, enquanto que o recurso ao computador se torna mais moroso, uma vez que não é imediato o modo de elaborar uma construção para encontrar a resposta ao problema.

Assim, analisando o conjunto dos três problemas, pode-se dizer que do primeiro até ao terceiro problema, o grau de dificuldade pela via analítica é quase constante, enquanto que a resolução computacional apresenta um grau de dificuldade crescente. Se analisarmos o grau de dificuldade/trabalho dos dois processos de resolução para cada problema isoladamente temos situações inversas; enquanto que no primeiro e segundo problema a resolução analítica é marcadamente mais trabalhosa do que a resolução no *Sketchpad*, no terceiro problema, As *Vasilhas*, a resolução com recurso ao computador torna-se mais difícil porque não é imediato para os alunos a forma de construir um cilindro com volume fixo, enquanto que a resolução analítica é quase rotineira.

No início da aula de implementação da *Fase Final*, comecei por solicitar aos alunos que não ligassem os computadores e se sentassem nas mesas do centro da sala. Fiz junto dos alunos um breve balanço do projecto em que estávamos envolvidos, marcando as diferenças entre a *1ª Fase* que já tinha sido realizada e a *Fase Final* que agora começava.

Referi que na etapa anterior um dos objectivos era que eles aprendessem a trabalhar com o computador na resolução de problemas, em particular com o *Sketchpad*. Agora iríamos entrar na *Fase Final* da experiência, na qual os problemas apresentados seriam resolvidos pelo processo que eles preferissem, recorrendo ao computador ou por uma via analítica. Para mim, como investigadora, o importante era perceber o porquê das opções feitas por eles. Preferi não fazer nenhum comentário sobre as entrevistas previstas a realizar posteriormente com alguns alunos.

Referi que o ideal era eu estar sempre ao lado de cada um deles para assim poder fazer o registo de todas as opções, dúvidas, sentimentos, mas como isso seria impossível, pedi aos alunos que registassem tudo nas folhas; não queria só um relatório, queria algo mais completo! Desejava um registo detalhado de todos os passos percorridos, os erros, os sucessos, as hesitações, ou seja, queria aquilo a que vim a dar o nome de *Diário da Resolução*.

Referi ainda que estávamos numa sala de informática, só porque não seria possível implementar esta fase do trabalho noutra sala normal, e que não se deveriam sentir coagidos a recorrerem ao computador. Além disso, expliquei que, para a resolução do mesmo problema, poderiam alternar entre diferentes processos se assim o entendessem.

Como já foi referido na metodologia não forneci os enunciados dos problemas impressos em papel. Optei por ditar o enunciado e quando já todos tinham escrito e lido o problema, muitos começaram a ligar os computadores e acederem à pasta com o programa. Porém, a rede da escola não estava a funcionar, pelo que era impossível ter acesso ao programa *Sketchpad*. Depois de breves instantes para me adaptar à circunstância inesperada (convém estarmos sempre preparados para estes imprevistos quando se trabalha com computadores!), resolvi suspender a experiência até à semana seguinte. Contudo, entendi que seria importante que os alunos fizessem um registo das suas primeiras intenções sobre o processo de resolução que tinham começado a delinear. Solicitei que o fizessem por escrito na folha que posteriormente me foi entregue.

As intenções dos alunos estão registadas na seguinte tabela.

INTENÇÕES	**Nº de Alunos**
Resolver no computador	12
Resolver analiticamente	5
Apresentaram só um desenho ou sem resposta	5

Tabela 8.Intenções registadas pelos alunos para a resolução do problema do Canteiro.

Seguem-se também transcrições dos registos de alguns alunos:

"Pensei fazê-lo analiticamente, apesar de ter imaginado o problema no computador. Comecei por imaginar desenhar o triângulo, o ponto móvel, tudo pelo computador, mas prefiro fazê-lo analiticamente no papel."

"Pensei que como estávamos na sala de computadores, íamos resolver o problema nos computadores, fiquei um bocado preocupado quando vi que os computadores não funcionavam, porque não gosto de problemas e resolvê-los no Sketchpad parece-me mais acessível."

3.1.O caso "*Tecnológicos Convictos*"

3.1.1. O percurso escolar

O Élio

É um bom aluno a todas as disciplinas e refere:

"Costumo fazer exercícios, mais ou menos regularmente, tento sempre fazer os trabalhos de casa para estar dentro da matéria e depois na véspera dos testes claro que estudo mais."

Sobre o seu percurso escolar na disciplina de Matemática, fez a seguinte observação:

"Eu não me lembro muito bem da primária, sei que não era a minha disciplina favorita, depois no 5º e 6º ano correu bem, entretanto no 7º ano, saí do colégio e apanhei um professor muito exigente e então voltei a ter negativa. Depois, no 8º e no 9º, já correu um bocadinho melhor. Dependia muito dos professores, da forma como começava a correr, às vezes quando tinha uma negativa, começava a achar que não dava e então desistia um pouco."

Sobre o que gosta mais na disciplina de Matemática, afirma:

"Problemas com equações, não aprecio muito trigonometria, faço mas não é uma coisa que eu goste."

Para se ser um bom aluno à disciplina de Matemática, o aluno considera que é fundamental perceber, referindo a subordinação do que se aprende àquilo que se percebeu antes:

"É importante ir sempre estudando para se perceber a matéria e não só decorar para se despejar nos testes, senão fica-se sem bases para o que vem a seguir".

Descreve o que acha ser o perfil de um bom professor de Matemática, destacando a importância do modo de explicar e do lado humano do professor:

"Explicar bem, de modo que os alunos percebam, e como há uns alunos que percebem de uma maneira e outros de outra, o professor deve… tentar explicar de maneiras diferentes. Deve também ser sociável para os alunos estarem à vontade. Em todas as disciplinas é importante, mas a Matemática é ainda mais, porque normalmente os alunos têm mais dificuldade e é preciso tirarem dúvidas."

O Bernardo

O Bernardo é um bom aluno a todas as disciplinas, bastante inteligente e perspicaz mas pouco trabalhador, como ele próprio reconhece:

"Hábitos de estudo não são muitos, estou atento nas aulas e depois na véspera dos testes vou estudando umas coisas."

Afirma passar muito tempo com o computador, com jogos, a conversar com os amigos, tem uma cópia do *Sketchpad* em casa mas afirma que só a abriu duas ou três vezes. Usa regularmente o computador para fazer pesquisas para a escola e para trabalhos.

Quanto ao seu percurso escolar, refere:

"*Não me recordo muito bem, eu sempre fui um aluno regular, não tinha hábitos de estudo, mas tinha bases. Depois no 10º ano, no início, senti-me um pouco desorientado, mas depois lá consegui*."

Sobre o que acha necessário para se ser um bom aluno a Matemática, disse:

"Ter boas bases, como sempre me disseram os meus pais, quem conseguir assentar as bases… no 7º e 8º ano… se não conseguir nessa altura, no secundário dificilmente irá conseguir."

Fala sobre o que acha ser o perfil de um bom professor de Matemática:

"Explicar bem, de modo que os alunos percebam e deve também dar espaço aos alunos, por exemplo, deixar tempo para os alunos resolverem os problemas sozinhos."

3.1.2. Desempenho na *Fase Final*

Problema – *O Canteiro*

Na aula de apresentação do problema, não tendo sido possível usar os computadores porque a rede da escola não estava a funcionar, ambos os alunos afirmaram ter pensado em resolver o problema recorrendo ao *Sketchpad*.

O Élio afirmou:

"Pensei em resolver através das duas formas. Iria inserir uma função para depois se demarcar um triângulo."

O Bernardo declarou:

"Pensei em resolver no computador. Pensei em desenhar um triângulo e um rectângulo dentro dele."

Na aula da semana seguinte, o Bernardo e o Élio começaram a trabalhar individualmente apesar de, nas aulas anteriores, terem trabalhado sempre em grupo. Inicialmente, pensei que tivessem optado por processos de resolução diferentes, o que me surpreenderia, mas de facto ambos escolheram resolver o problema recorrendo ao computador.

O Bernardo começou a construção do jardim, tomando as coordenadas dos vértices do triângulo. Tal como escreveu no seu diário:

"*A minha ideia foi criar dois pontos fixos (plot points) e fazer o triângulo com esses pontos. Depois, construí um ponto na hipotenusa e construí um rectângulo inscrito no triângulo através de paralelas.*"

Cerca de vinte minutos após a aula ter começado, o Bernardo já tinha resolvido o problema. Perguntei-lhe se não tinha ponderado a hipótese de resolvê-lo analiticamente e ele confessou que nunca duvidou do processo que preferia para resolver o problema. Com o *Sketchpad*, sente-se mais à vontade e mais confiante do que quando está a resolver os problemas por processos analíticos. Quanto ao grau de dificuldade do problema, classificou-o no final como sendo muito fácil.

O Élio resolveu o problema de forma análoga, contudo, para definir o triângulo recorreu à função $y = 10 - x$, obtendo dois dos vértices através dos pontos de intersecção daquela recta com os eixos coordenados e colocando o terceiro vértice na origem do referencial.

No fim da resolução do problema estavam os dois satisfeitos e convictos, não colocando sequer a hipótese de utilizarem outro processo de resolução.

– Só se a professora disser! – Afirmava o Élio, em tom de brincadeira.

O Bernardo registava no fim do problema.

"...senti que foi mais fácil no Sketchpad enquanto que analiticamente seria mais difícil. É pena não podermos usar o Sketchpad nos exames."

Problema – *O Cone*

Neste segundo problema, os alunos mantiveram a estratégia adoptada no primeiro, mas passaram a trabalhar novamente em grupo. Não sentiram grandes embaraços durante a resolução, embora tenham achado que este tinha um grau de dificuldade superior ao problema do *Canteiro*.

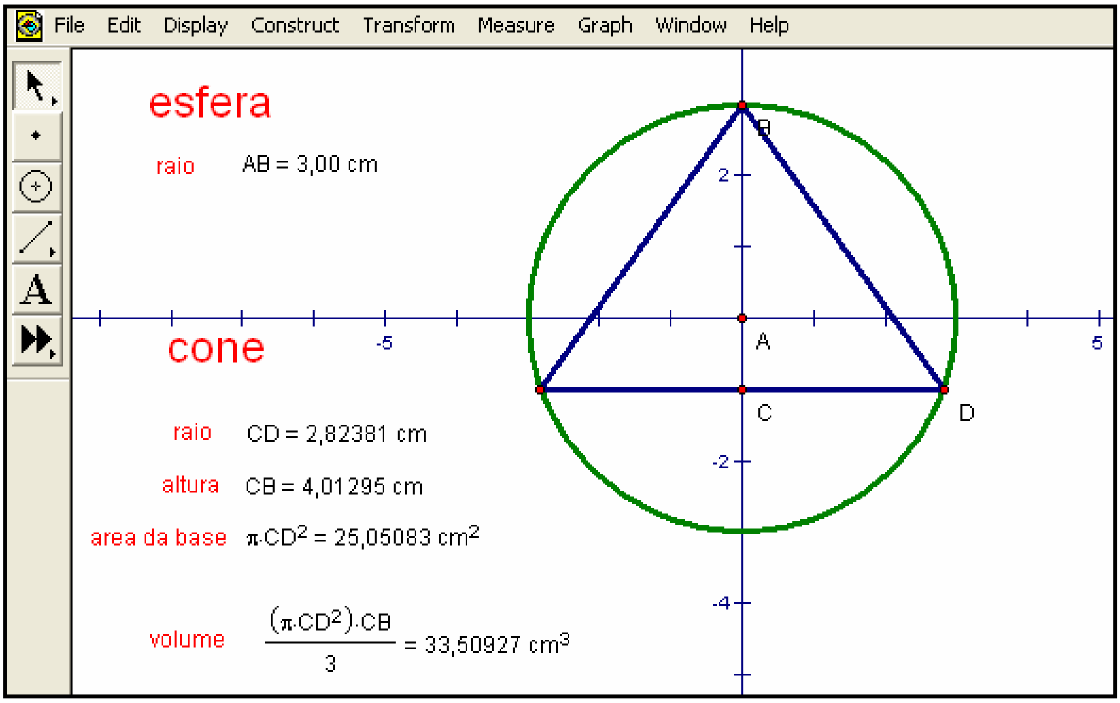


Figura 52. ***Sketch*** **do Élio e Bernardo para resolver o problema** ***O Cone*****.**

O ponto D é um ponto móvel que pertence à circunferência; movimentando-o sobre a circunferência, as dimensões do cone vão sendo automaticamente alteradas e então procura-se a localização para a qual se obtém o cone de maior volume, atendendo aos valores que surgem para o volume, calculados no *Sketchpad*.

O Bernardo escreveu no seu diário:

"*...depois do problema resolvido, achei um pouco mais difícil do que o anterior, embora estes problemas sejam facilmente resolvidos no computador. Eu acho que este problema requer alguma visão espacial, pois temos de fazer cálculos de volumes num plano 2D.*"

No fim da primeira aula, os dois alunos estavam já a terminar a resolução deste problema e sentiam-se seguros do seu trabalho.

Problema – *As Vasilhas*

Na segunda aula, os alunos terminaram a resolução do problema do cone, trabalhando essencialmente em questões de apresentação, e cerca de quinze minutos depois da aula ter começado, solicitaram-me o enunciado do terceiro problema.

Depois de lerem o problema, questionaram-me:

– O litro é igual a quê?

– Como? – De imediato não estava a perceber a pergunta. Só depois de pensar no problema das vasilhas é que percebi o porquê da questão.

– Sim, professora, 1 litro é igual a quantos decímetros cúbicos?

– A um ou a dez? – Perguntava o Bernardo

– Então, pensem qual poderá ser. Dez decímetros são quantos metros?

– É um metro.

– Sim, e têm a noção de quanto é um metro?

– Sim é mais ou menos esta distância – E limitava-a com as mãos no tampo da secretária.

– Exacto, é mais ou menos isso. E agora o que é um metro cúbico?

O Bernardo e o Élio olhavam-se e o Bernardo afirmou:

– Bom, um metro quadrado é a área deste quadrado com um metro de lado.

– Eh! E um metro cúbico é o volume de uma caixa com aresta um metro – Acrescentava o Bernardo.

– Assim, um litro não pode ser um metro cúbico, é muito mais pequeno – Continuava.

– Pois é. Então um litro tem que ser um decímetro cúbico e não dez. – Concluía o Élio a rir-se.

– Exactamente – Afirmei eu, satisfeita com a conversa dos dois.

– Nunca tinha visto isto assim e ficava sempre na dúvida. – Dizia o Élio, enquanto continuava com as mãos a limitar aproximadamente 1 decímetro.

Esclarecida a dúvida, os alunos continuaram a analisar o problema e eu dirigi-me para o grupo da Isaura e da Marisa que esperavam para eu lhes esclarecer uma dúvida.

Estava com particular curiosidade de conhecer a forma como o Élio e o Bernardo iriam trabalhar neste problema. Sem grandes surpresas, nos dois desafios anteriores tinham optado pela resolução com recurso ao *Sketchpad*; os problemas eram fáceis de ser tratados com o computador. Porém, neste problema, uma construção no *Sketchpad* não era imediata, não era só traçar algumas rectas, umas circunferências e fazer as medições.

Como construir uma vasilha com volume fixo? Esta era a maior dificuldade na construção a fazer para abordar o problema e implicava o recurso às funções. Será que estes alunos o iriam conseguir ou pensariam em desistir e tentariam mudar de método?

Depois de algumas tentativas, talvez influenciados pelo problema da "Piscina…e a relva", traçaram a função $y = \frac{160}{x}$ mas depois não sabiam como usar a função.

– Desta forma obtemos os valores da base e da altura – Dizia o Bernardo.

– Sim? Mas como? – Questionei-os.

– Esta função dá-nos sempre dois números que multiplicados dão 160. – Continuava o Bernardo – Assim, esses dois números podem ser os valores da base e da altura do cilindro.

Estava curiosa com a estratégia delineada pelos alunos e ainda fiquei mais atenta à evolução do seu trabalho.

Entretanto, a aula estava quase a chegar ao fim e certamente só na aula seguinte, que excepcionalmente seria daí a dois dias, é que iria ver o desenvolvimento do processo de resolução.

Na terceira aula desta *Fase Final*, o Élio e o Bernardo retomaram o problema, tentando construir o cilindro de volume fixo.

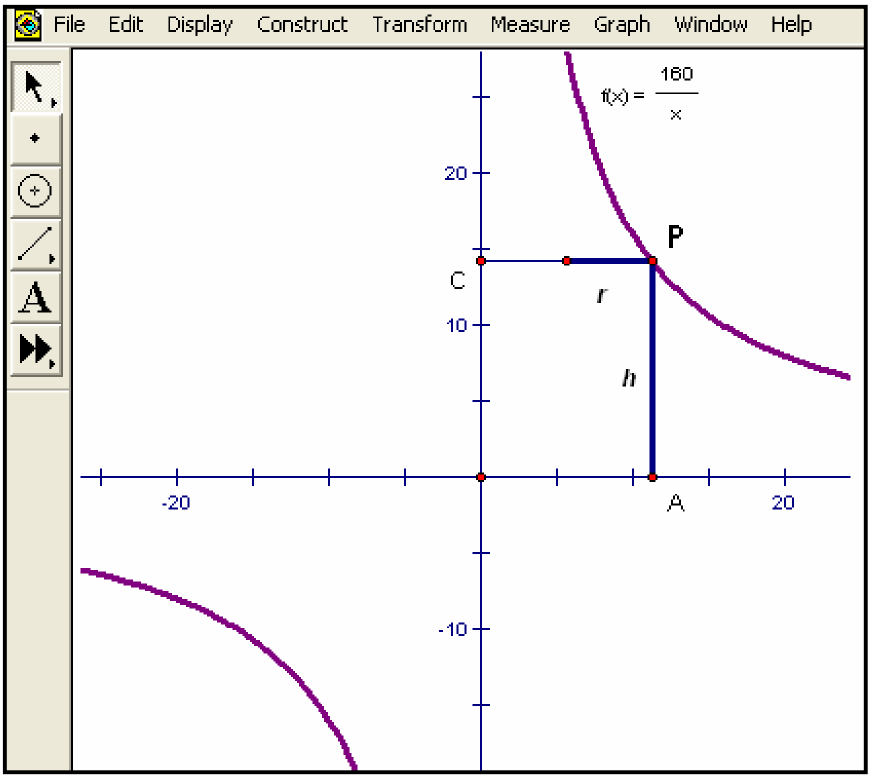


Figura 53.Tentativa de construção da vasilha na 3ª aula, feita pelo Élio e o Bernardo.

Depois de algumas medições e cálculos, recorrendo à opção *Calculate*, percebi que não estavam a conseguir construir a vasilha. Apesar de, na aula anterior, já terem referido que um dos dois números era a altura da vasilha e o outro o valor da base, estavam com dificuldades e não conseguiam avançar, porque o tal valor da base, como eles diziam, teria que ser a área da base, ou seja, πr^2. Sozinhos, tinham considerado que $\overline{CP}$ era o dobro do raio e não a área da base.

– Professora, assim não dá porque a área da base não é 2r. – Afirmava o Élio, um pouco desanimado.

– Vamos ver, então esses dois valores que multiplicados dão 160, o que podem representar? – Perguntei.

Os alunos não respondiam.

Pensei então em indagar:

– A que é igual a volume do cilindro?

– Área da base vezes altura. – Referiu o Bernardo.

– E então?

– Pois, como queremos o volume do cilindro, um dos valores é a área da base e o outro é a altura. – Explicou o Bernardo.

– Pois é! E nós estávamos a fazer como se fosse o dobro do raio.

– Um dos valores é a área da base ou seja a área do círculo. – Continuava o Élio.

– Muito bem! Então continuem. – Parecia-me que estavam no caminho certo, mas perguntei:

– Já pensaram em mudar de processo de resolução? Resolver o problema analiticamente?

– Não, pois mesmo assim acho mais fácil desta maneira, podemos fazer variar as coisas, é diferente – respondeu o Bernardo.

– Este é bem mais difícil do que os outros problemas, mas estar a tentar com o computador é muito melhor do que estar a fazer tentativas manualmente – Continuou o Élio. Deixei os dois a trabalhar e fui circular pela sala para averiguar como estavam a avançar os outros grupos.

No seu diário, registaram várias manipulações que tentaram fazer a partir da fórmula do volume e as suas tentativas de encontrar a expressão de uma função. Mas acabaram por conseguir fazer uma construção no *Sketchpad* em que representaram a situação do cilindro variável com volume fixo.

Depois de representarem a função $f(x)=\dfrac{160}{\pi \times r^2}$, para se certificarem de que a construção estava de acordo com os dados do problema, resolveram efectuar os cálculos e medições (ver figura Figura 54) que lhes permitissem confirmar isso mesmo.

Estavam, então, um pouco ansiosos para verificarem se finalmente tinham conseguido alcançar o seu objectivo.

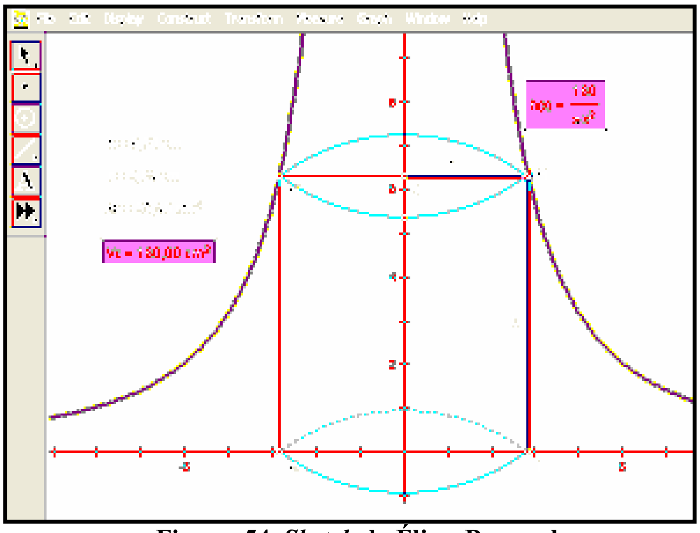


Figura 54. ***Sketch*** **do Élio e Bernardo.**

O Bernardo registou no diário:

"Finalmente, conseguimos fazer um cilindro com o volume 160, este foi difícil, mas mesmo assim preferimos resolver desta forma, é muito mais giro estar a fazer tentativas com o Sketchpad do que à mão..."

Depois de verificarem que finalmente tinham conseguido obter um cilindro com dimensões variáveis mas volume fixo de 160, não resistiram (palavras do Bernardo) em recorrer às transformações geométricas e à utilização de arcos de circunferência, de modo a tornarem a construção do cilindro mais perceptível visualmente.

Avançaram então para a procura da resposta ao problema, começando por calcular as áreas necessárias e por manipulação do ponto móvel (H) encontraram a solução para o problema.

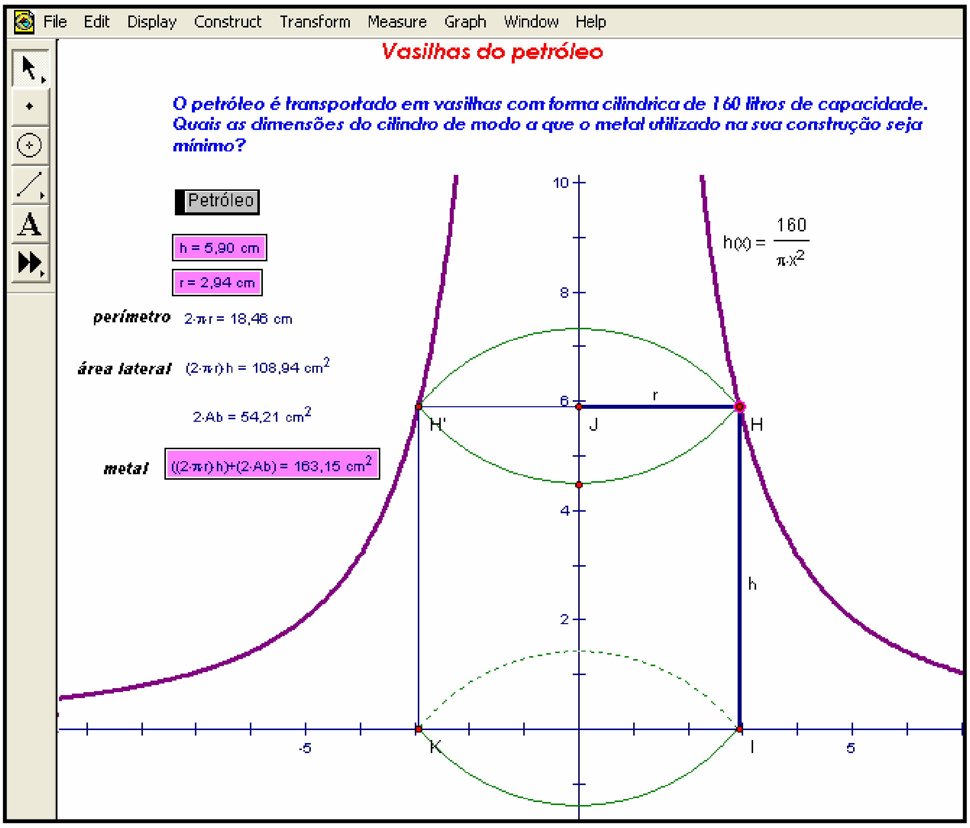


Figura 55. ***Sketch*** **final do Élio e Bernardo no problema As Vasilhas.**

Depois de conseguirem resolver o problema, cuidaram da apresentação do *sketch* e satisfeitos com o desempenho e o resultado, foi com orgulho que me mostraram o trabalho final. O Élio, para além da resposta ao problema, acrescentou no diário:

"Este problema deu-nos muito mais trabalho do que os outros, mas no fim também nos deu mais gozo.

Analiticamente não sei como teria sido, mas se puder escolher, não tenho dúvidas que é este processo que gosto mais, é muito melhor estar a tentar com o computador, é pena não haver mais hipóteses destas."

3.1.3. À conversa com o Élio e o Bernardo

A tecnologia na aula de Matemática

Quando questionados sobre a importância das tecnologias na sala de aula os alunos dão a seguinte opinião:

"O uso da tecnologia ajuda o professor a explicar…se calhar para os alunos que não conseguiram perceber, é outra forma de verem as coisas."

Quanto ao programa *Sketchpad*, afirmaram ter gostado e não o acharam muito difícil de utilizar, reconhecendo, porém, que os colegas que não estão tão habituados a trabalhar com o computador poderão ter sentido mais dificuldades.

Quanto às potencialidades do software, o Élio diz:

"Depende um pouco da personalidade de cada pessoa… Eu gostei, acho que… facilita um bocado as coisas, é um método de aprendizagem diferente, são processos de resolução diferentes, mas outras pessoas já poderão não achar muita piada."

Quando os questionei sobre o porquê de alguns dos colegas não gostarem tanto, comentam:

"Acham que com o computador se pensa menos, comparativamente com o processo de resolução analítico, mas há muitas coisas que ao fazermos no computador vão ajudar a fazer depois analiticamente."

Quanto às aulas com recurso à tecnologia, consideram:

"São abordagens diferentes, é uma aula diferente das outras, normalmente temos aulas em que, ou temos que ouvir ou escrever. Ali a postura é outra, para estas aulas acho que a maioria dos alunos vão mais relaxados."

Quanto ao papel do aluno, nas aulas com recurso ao computador, vêem-no como mais activo e interveniente:

"Nestas aulas [com computador] *dá para intervir mais mas eu, pelo menos, trabalhava menos, pois como é a dois, um está a fazer e o outro pode-se distrair um pouco, ou então quando acabávamos, estávamos a explorar os menus… e a aperfeiçoar as nossas construções, enquanto que na aula normal, nós temos que estar sempre a trabalhar e sempre mais atentos."*

Falaram ainda sobre a diferença entre copiar uma resolução feita com recurso ao *Sketchpad* e copiar uma resolução analítica:

"*Acho que é mais difícil copiar no computador, porque se por exemplo nós vamos muito mais à frente, ao olharem para o ecrã podem não perceber nada, enquanto que analiticamente está lá tudo."*

Acerca da sua visão sobre a resolução de problemas com o computador, o Élio referiu:

"Gosto mais de ir pelo computador, tenho mais agilidade porque se faz muito mais tentativas, apesar de as poder fazer analiticamente, iria demorar muito mais tempo e às vezes nem sabia como fazer…"

Quanto ao processo de resolução de problemas que mais valorizam, o Bernardo declara:

"Para mim, acho que analiticamente tem mais valor, até porque para mim é mais difícil dessa maneira, ter que estar a ver tudo, equacionar… acho que todos os alunos acabam por dar mais valor à resolução analítica".

O Élio também é da opinião do colega:

"*Eu acho que com o computador há mais ajuda, porque consegue-se fazer a função, desenhar, mexer e pronto, é muito mais rápido e mais fácil, mas aí nós estamos a ver o que estamos a fazer, enquanto que ao fazer analiticamente estamos mais às cegas."*

Atendendo a que os alunos encararam a resolução com o computador como mais fácil, confrontei-os com o facto de, durante a *Fase Final*, ambos terem demorado muito tempo a resolver o problema das Vasilhas. Utilizei as próprias palavras dos alunos para contrapor que com o computador também estavam às cegas. Mesmo assim, eles mantêm a sua posição e o Élio responde:

"Isso já tem a ver também com a questão de uma pessoa chegar ao raciocínio, os caminhos que nós íamos escolhendo…"

Mesmo reconhecendo as dificuldades que tiveram para resolver esse problema, continuam a valorizar e a atribuir mais mérito à resolução analítica. Houve entre ambos algum debate:

– Se calhar nós, por estarmos ao computador, o nosso método era mais ou menos sempre o mesmo… traçar rectas, fazer paralelas ou perpendiculares, marcar pontos, …– continuava o Bernardo.

– Enquanto que elas, ao fazerem analiticamente, não tinham tantas referências, tinham que se lembrar de coisas que nós já demos antes – explicava o Élio.

– Ah sim, mas também já tínhamos feito alguns, como por exemplo o da piscina – referia o Bernardo.

– Mas mesmo assim continuam a dar mais mérito à resolução analítica! – Eu ia insistindo.

– O que eu acho que é lógico! – Rematava o Élio.

– Para encontrar a solução, só tenho que mexer no ponto e observar os valores, enquanto que analiticamente temos que, por exemplo, derivar e por aí fora… temos mais trabalho – explicava o Bernardo

– Mas para chegares à situação de estar a mexer no ponto e encontrar a solução, tens que fazer antes uma construção que nem sempre é imediata! – Eu contrapunha.

– Mas não estamos sozinhos, temos a ajuda do computador, por exemplo ao mexermos nos menus, vamos encontrando, às vezes, sugestões para continuarmos – Retorquia o Bernardo.

Quando quis saber se o facto de a avaliação escrita não passar pela resolução com o computador, influenciava ou não a sua opinião de dar mais valor ao método analítico do que ao computacional, os alunos responderam:

"Pode influenciar, nós sabemos que no computador fazemos naquela altura, mas depois quando estivermos a fazer, por exemplo, o exame, temos que fazer analiticamente, e o trabalho que tivemos ajuda-nos é a visualizar…mas pouco mais."

Questionei-os sobre o que entendiam como um problema:

"*São situações em que nós temos que andar ali a ver como é… andar à procura… não é chegar e fazer logo! Para chegar à solução, temos que experimentar várias coisas novas… diferentes*."

Pedi-lhes que imaginassem que o computador passaria a ser de uso obrigatório e que me dissessem se isso mudaria a sua forma de encarar as duas resoluções:

" Se calhar mudava… não sei bem… nós estamos habituados a fazer sempre tudo analiticamente ou, às vezes, com calculadora, e como quase nunca usamos, vê-se o computador como uma coisa… não sei… passageira."

Entre o computador e a calculadora

Fiquei surpreendida quando, ao questioná-los sobre o uso da calculadora gráfica, o Élio afirmou que não apreciava muito trabalhar com a calculadora:

" [silêncio] *Eu não gosto muito do trabalho com a calculadora. Acho que é porque não a domino muito, fico às vezes um pouco baralhado*."

Entretanto, o Bernardo lembra:

– Se calhar, é porque nós tínhamos todos uma Texas e tu eras o único que tinhas uma Casio.

– Não sei… nunca senti um grande controlo a trabalhar com a calculadora!

O Bernardo declarou gostar de trabalhar tanto com a calculadora como com o computador, usando muitas vezes a calculadora para confirmar os resultados que obtém analiticamente.

3.2. O caso "*Tecnológicas inseguras*"

O percurso escolar

A Marisa

A Marisa é uma aluna com dificuldades na disciplina de Matemática, mas nem sempre foi assim.

"*Eu não quero ser convencida, mas na primária era das melhores alunas a Matemática… no 5º, 6º e 7º ano tinha quatro, depois é que comecei a baixar a partir do 8º.*"

Apesar dos fracos resultados a Matemática, continua a afirmar que gosta da disciplina.

"*É mesmo falta de estudo, de praticar mais exercícios.*"

Não manifestou uma preferência especial por nenhum dos temas matemáticos estudados até à data.

Identifica como características para se ser bom aluno a Matemática:

"*Fazer montes de exercícios e… estar com atenção nas aulas.*"

Depois de alguma hesitação, a Marisa explica o que entende por um bom professor:

"*É importante dar bem as aulas e tentar perceber mais ou menos o método dos alunos, de aprendizagem e… conhecer bem os alunos.*"

Quando lhe pedi para especificar um pouco mais o que é "*dar bem as aulas*", a aluna respondeu:

"*É saber bem a matéria, mas também é dá-la de maneira diferente… como por exemplo com o Sketchpad, acho que é uma maravilha! Pelo menos, eu não tive nenhum professor que fizesse isso… Só explicar e usar o quadro é pouco, tem que arranjar formas de cativar os alunos… e também de ajudá-los.*"

A Isaura

A Isaura é uma aluna com dificuldades e não apenas na disciplina de Matemática, tendo ficado retida no 11º ano, no final do ano lectivo em que decorreu a experiência.

Quanto ao seu percurso escolar, relatou:

"*É assim… na primária era razoável, no ciclo (2º e 3º) era muito variável, dependendo dos anos… Eu sempre tive um bocado de dificuldades a Matemática… Sempre estive nos três, no 6º e 7º ano é que tive 2.*"

Quando a questionei sobre os factores que conduziam a esses resultados a Isaura afirmou:

"*Era a falta de atenção nas aulas e também não estudar muito.*"

Continuando, a Isaura, não refere quaisquer factores exteriores a ela:

"*…eu tinha metido na cabeça que não era uma disciplina de estudo (Matemática) … é uma disciplina de praticar, mas era naquela, se tinha conseguido fazer um exercício e está bem, então também consigo fazer os outros, mas depois nos testes…*"

Identifica a Trigonometria, estudada no início do ano, como a sua matéria preferida. Apesar de reconhecer ter dificuldades, apresenta como justificação o facto de não se lembrar de ter dado esta matéria antes (ainda que faça parte do programa do 9º ano).

Acrescenta que, por vezes, o ter estudado o mesmo tema em anos anteriores e não ter gostado, pode influenciar negativamente o seu desempenho nas aulas e refere as funções, de que nunca gostou desde o 8º ano.

Para se ser bom aluno a Matemática, a Isaura salienta as seguintes características:

"…é praticar muito, ter atenção nas aulas e acima de tudo ter bases."

Como perfil de um bom professor, indica:

"Acho que, acima de tudo, tem que ser expressivo, tem que saber explicar bem as coisas, às vezes ser rigoroso ajuda um bocado… rigoroso no sentido de estar sempre a chamar a atenção quando os alunos se distraem e ... como é que hei-de explicar... (risos) …e brincalhão, ter os momentos de brincadeira e ter os momentos que é a sério…"

3.2.2. Desempenho na *Fase Final*

Problema – *O Canteiro*

Como já foi referido anteriormente, na primeira aula prevista da *Fase Final* do projecto, os alunos não tiveram acesso à rede da escola, mas registaram que as suas intenções eram:

Isaura: *"O que me veio logo à ideia é que preferia fazer no computador, pois pareceu-me a melhor maneira de resolver."*

Marisa: *"Preferia resolver este problema no computador. Desenhava um triângulo…"*

Na aula da semana seguinte, quando o problema foi retomado, não hesitaram e mantiveram a posição da semana anterior. No início, indaguei se elas não tinham pensado ou colocado a hipótese de resolverem analiticamente, ao que prontamente responderam:

– Nem pensar! De longe prefiro fazer no computador – Dizia a Isaura enquanto a Marisa abria o *Sketchpad*.

– Se fizéssemos sem o *Sketchpad*, acho que dificilmente conseguiríamos resolver o problema – reforçava a Marisa.

Começaram por construir um triângulo rectângulo isósceles. Representaram os vértices, recorrendo à marcação de pontos a partir das coordenadas. Traçaram os segmentos de recta para definirem os lados e marcaram um ponto livre na hipotenusa e a partir desse ponto construíram rectas paralelas e perpendiculares.

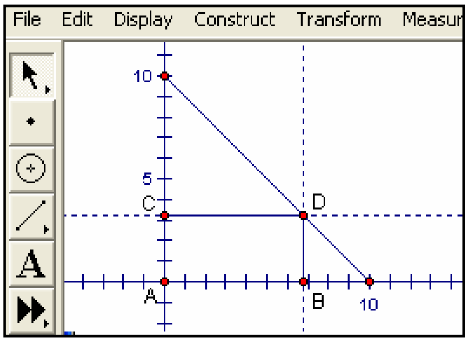


Figura 56.*Sketch* elaborado pela Isaura e Marisa.

"*À medida que estávamos a resolver o problema reparámos que as nossas colegas estavam a resolver o problema de maneira diferente.*"

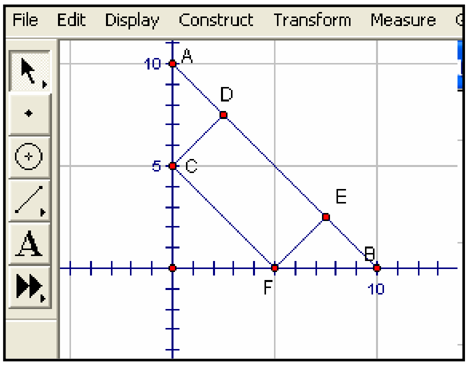


Figura 57.Construção das colegas do lado.

Contudo, apesar de hesitarem um pouco, não desistiram da sua resolução e avançaram, efectuando os procedimentos necessários para responder ao problema. Calcularam a área do rectângulo e procuraram o de maior área, todavia com dúvidas…

"…os lados do rectângulo para construir o canteiro têm que medir 5m. Porém, achamos que não pode haver um rectângulo com 4 lados iguais… Estamos um pouco confusas, mas ao mesmo tempo achamos que a nossa resolução está correcta."

Entretanto, solicitaram a minha presença e quando cheguei perto delas tinham a solução mas estavam com dificuldade em validar a resposta por entenderem que os valores obtidos talvez não pudessem ser as medidas das dimensões de um rectângulo. Por ter os quatro lados iguais, para elas era um quadrado e não um rectângulo.

A Isaura ria-se, sem saber muito bem o que dizer, a Marisa relatou-me todos os procedimentos que tinham executado até aí e quais as dúvidas que pairavam. Eu, como professora, estava contente com o facto de elas se estarem a questionar em relação ao resultado. Hesitei em esclarecê-las, optando por questionar:

– E então, acham que alguma coisa pode estar mal?

– Nós achamos que a construção está bem feita, mas o resultado é que nos está a deixar confusas!

– O que é um quadrado? – Perguntei.

– Tem os lados todos iguais.

– Só?

– Sim – Respondia a Isaura, mas não muito convencida.

– Então e um triângulo equilátero? Ou um hexágono regular?

– Ah! Tem os lados todos iguais e tem quatro lados.

Procurei quatro canetas, todas com tamanhos muito próximos, comecei por formar na mesa um quadrado, mas depois empurrei dois vértices opostos de modo a obter um losango e questionei-as:

– Então esta figura é um quadrado?
– Não, é um losango!
– Pois é, então qual a diferença entre um losango e um quadrado?

Elas não responderam logo. Passados uns instantes falou a Marisa:

–Também tem os ângulos rectos.

– Então e o que é um rectângulo?

A Isaura fazia rabiscos na folha do diário, até que referiu:

– Tem os ângulos rectos…

– Como o quadrado.

Conversámos então sobre a classificação dos quadriláteros e elas concluíram a resolução. Entretanto, registaram no diário:

"*Depois de reflectirmos um pouco sobre este problema, chegámos à conclusão de que um quadrado é um rectângulo porque tem os ângulos rectos.*"

Às dúvidas da Isaura e da Marisa acrescia ainda o facto de os grupos vizinhos, quer à direita, quer à esquerda, terem feito uma construção diferente para a resolução do problema, (ver figura 57), de tal modo que a solução óptima corresponde a um rectângulo com base e altura de medidas diferentes e não a um rectângulo com os lados todos iguais.

Quando os alunos estão a fazer a resolução de um problema num ambiente computacional, é natural olharem para os ecrãs dos computadores dos colegas e verem as respectivas resoluções. Este olhar, no caso da Isaura e Marisa, fez com que elas se questionassem sobre a sua própria resolução, tivessem que investigar mais para validarem a sua resposta, permitindo assim esclarecer e consolidar conceitos presentes no problema. Este olhar teve um papel importante e positivo na atitude das alunas durante a aula.

Problema – *O Cone*

Faltavam cerca de trinta minutos para a aula terminar quando a Isaura e a Marisa começaram a ver o problema *O Cone.*

Também não vacilaram quanto ao processo que pretendiam utilizar, continuando a utilizar o computador nas suas resoluções.

A Marisa escrevia no diário:

" *Não hesitei*! *Para mim assim é mais fácil… e é mais engraçado.*"

As duas começaram a ler o problema e, passados alguns minutos, pediram-me para verificar se tinham escrito correctamente a fórmula para determinar o volume de um cone. Não estava correcta, faltava dividir por 3.

As duas estavam um pouco inseguras pelo facto de o problema envolver o volume de um sólido. Apesar de já terem resolvido um problema que envolvia sólidos, com o *Sketchpad*, estavam paradas, sem fazerem nada. Na resolução do problema *O Cilindro e o Cone*, verifiquei que as alunas não tinham terminado a actividade. Apenas tinham feito uma construção mas não efectuaram todos os cálculos necessários para obterem a solução.

Passado algum tempo, as duas alunas estavam a construir o triângulo inscrito numa circunferência e registaram no diário:

"*Tivemos alguma dificuldade no início, não sabíamos muito bem por onde começar. Mas depois com a ajuda das nossas colegas, começámos a fazer a construção.*"

As alunas elaboraram bem a construção, mas não a conseguiram analisar correctamente de forma a encontrarem o volume máximo do cone. Não interpretaram a construção feita no *Sketchpad* como sendo uma secção plana dos dois sólidos (a esfera e o cone) que lhes permitia obter todos os dados necessários à determinação do volume do cone e por manipulação da construção, ou seja, arrastando o ponto móvel, encontrar o de volume máximo. Terminaram a resolução anotando no diário:

"...Calculámos a área do triângulo e chegámos à conclusão que a área máxima do cone é 11,69 cm^2*."*

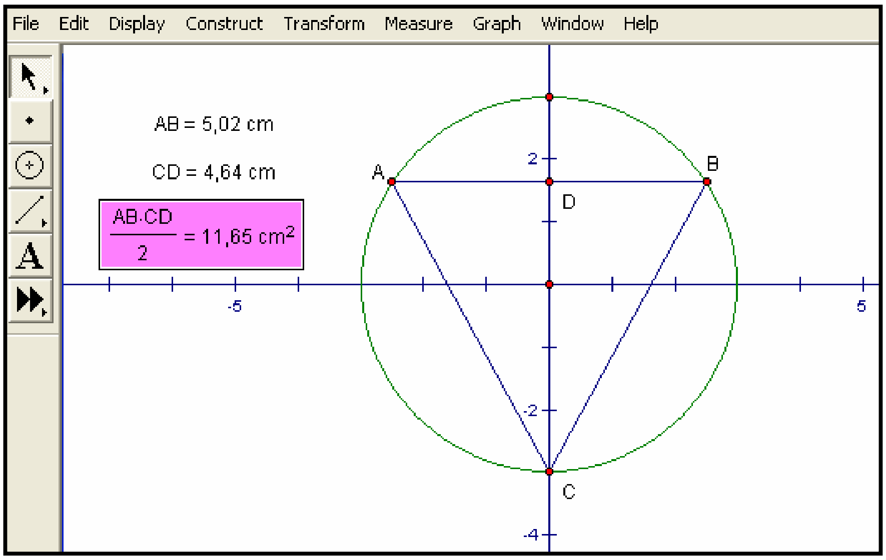


Figura 58. ***Sketch*** **da Isaura e Marisa para resolver o 2º problema.**

A aula estava a terminar. Julgo que as dificuldades que as alunas sentiram são semelhantes às que teriam sentido se tivessem optado por um processo de resolução analítico. As alunas não conseguiram fazer uma análise correcta da construção, confundindo uma secção com o próprio sólido. Tiveram dificuldade em determinar o volume do cone a partir do triângulo $[ABC]$, considerando que o triângulo de área máxima seria o volume máximo pretendido, ou seja, a solução do problema.

Estas dificuldades de abstracção estão diariamente presentes na sala de aula e apesar de existirem ferramentas tecnológicas para o processo de resolução, as mesmas dificuldades não deixam de se manifestar.

Na aula seguinte as alunas ainda não tinham recebido nenhum *feedback* da minha parte relativamente à solução do problema. Comecei a aula junto delas que, de imediato, abriram o ficheiro da aula anterior. Só quando foram confrontadas com a resposta dada – "*…a área máxima do cone é 11,69 cm*^{2}", – e depois de lhes chamar a atenção para o enunciado do problema, é que elas perceberam que a resposta não podia estar correcta.

– Ah, pois é! É pedido o volume e nós respondemos a área! – Dizia a Marisa.

Quando as questionei sobre o porquê de terem feito aquela construção, (ver figura 58) um triângulo inscrito numa circunferência, as alunas hesitaram um pouco na resposta, mas depois a Isaura afirmou, um pouco timidamente:

– Nós, no início não estávamos a ver como representar o problema e então foram as nossas colegas que nos ajudaram.

Apesar de ter o ficheiro da aula anterior guardado, pedi às alunas que duplicassem a página onde estavam a trabalhar para mais tarde eu poder analisar, recolher informação para documentar todo o seu processo de resolução.

Quando deixei as alunas, penso que elas perceberam o que falhava na primeira resolução e que o objectivo era determinar o volume do cone. Na fase inicial da resolução deste problema, tinham-me questionado sobre a fórmula para determinar o volume do cone, mas acabaram por não a utilizar (pelo menos não havia registo no diário, nem as alunas a tinham referido oralmente), tendo-se concentrado na determinação da área do triângulo (secção do cone). Pensei se deveria ou não chamar-lhes a atenção para este facto, mas optei por não o fazer e assim observar o caminho que as alunas iriam percorrer e de que forma iriam procurar a solução para o problema.

As alunas começaram a reformular a resolução. Passado algum tempo, após ter circulado pelos outros grupos, verifiquei que já tinham determinado área da base do cone.

A Marisa afirmava:

– Nós, no início, quando fizémos o triângulo, não tínhamos visto que era com a base do triângulo que íamos determinar a área da base do cone.

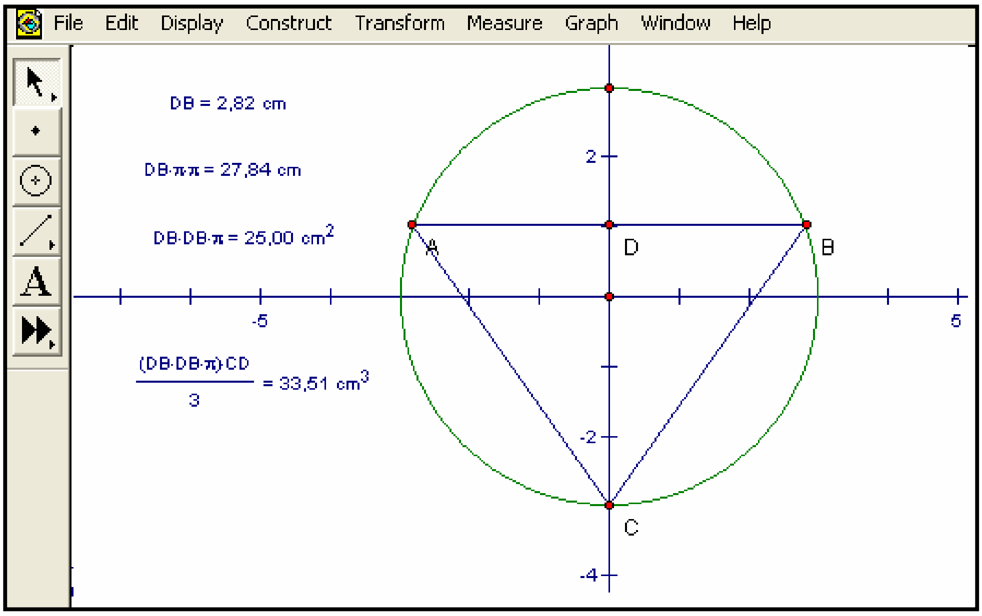


Figura 59. Segundo sketch da Marisa e Isaura.

No fim da resolução, a Isaura comentava:

– Este problema foi mais difícil do que o do Canteiro, porque era um problema com três dimensões e não conseguimos fazer no *Sketchpad*.

– Tínhamos a fórmula para determinar o volume, mas não estávamos a ver como é que íamos calcular a área da base.

Ao analisar os cálculos efectuados pela Isaura e pela Marisa, apercebi-me de passos desnecessários para o problema, que talvez tenham feito enquanto tentavam determinar a área da base do cone.

Problema – ***As Vasilhas***

Quase no fim da segunda aula, começaram a resolver o último problema. Antes de lerem o enunciado, quis saber se nalgum momento tinham pensado em mudar de método de resolução:

"...analiticamente se calhar não conseguíamos fazer nada e ficávamos logo paradas, nem com a ajuda de colegas... Assim [com o computador] *dá para irmos experimentando e podemos demorar mais tempo, mas acabamos por conseguir e aprender coisas."*

Quando leram o enunciado, não reagiram de nenhuma forma especial e começaram a abrir um novo *sketch*.

A primeira dificuldade que sentiram foi com os 160 litros.

"Quando calculamos o volume temos sempre qualquer coisa ao cubo nas unidades, como é que fazemos com os litros?"

Vários grupos tinham colocado a mesma questão, ou então convertiam mal as unidades. Por exemplo, alguns grupos escreviam que 160 dm^3 era igual a 1600cm^3. Perante as dúvidas de tantos alunos, optei por esclarecer a turma toda.

No diário, iam desenhando planificações de cilindros e exploravam os menus do *Sketchpad*, talvez na esperança de encontrar algo que as pudesse ajudar. Nesta fase estava quase toda a turma a começar a resolução deste problema, e nenhum aluno estava a conseguir fazer uma construção.

"Como é que construímos um cilindro com o volume fixo 160?"

Esta era a questão que muitos colocavam, mas não esperavam da minha parte uma resposta para a questão.

– É parecido com o da *Piscina* – afirmava a Isaura.

A aula terminou e prosseguiríamos daí a cinco dias.

Quando retomaram o problema das *Vasilhas*, procuraram novamente a forma de construir um cilindro com volume fixo.

No diário, fizeram algumas planificações de cilindros e tentaram desenhar uma no *Sketchpad*. A primeira dificuldade que sentiram foi a de construírem um círculo com o mesmo perímetro da largura (ou altura) do rectângulo.

O grupo das colegas do lado também estava a tentar construir uma planificação; depois de várias tentativas conseguiram construir a planificação (o perímetro do círculo de raio CD é igual à altura do rectângulo) mas não conseguiram construir uma que correspondesse ao volume fixo de 160 dm^3.

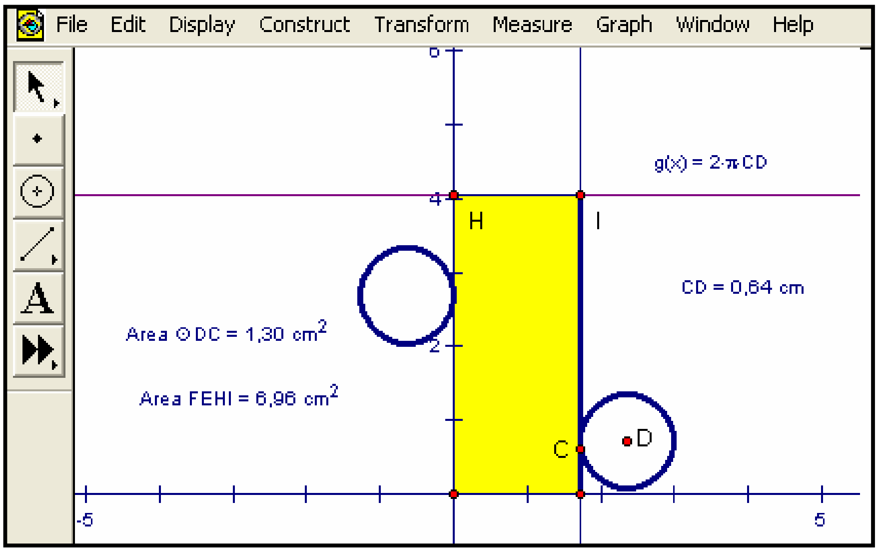


Figura 60. Construção de uma planificação de um cilindro.

"Para fazermos a planificação não podia ser só um rectângulo e uma circunferência qualquer, tem que bater certo. Com a função $f(x) = 2\pi r$, *em que r era o CD, fizemos uma planificação do cilindro, mas não conseguimos fazer com que o volume seja sempre o mesmo."*

A Isaura escreveu no seu diário:

"Eu acho que analiticamente não tinha conseguido fazer mesmo nada, também ainda não conseguimos resolver o problema, está difícil, mas da outra maneira acho que já tinha desligado e estava só à espera que a aula terminasse, assim estou a fazer coisas…"

Nesta fase, as alunas estavam com dificuldade em avançar, tal como a maioria da turma que tinha optado por uma resolução com o *Sketchpad*. Porém, no fim da aula o registo do ficheiro da Isaura e da Marisa tinha o problema inacabado.

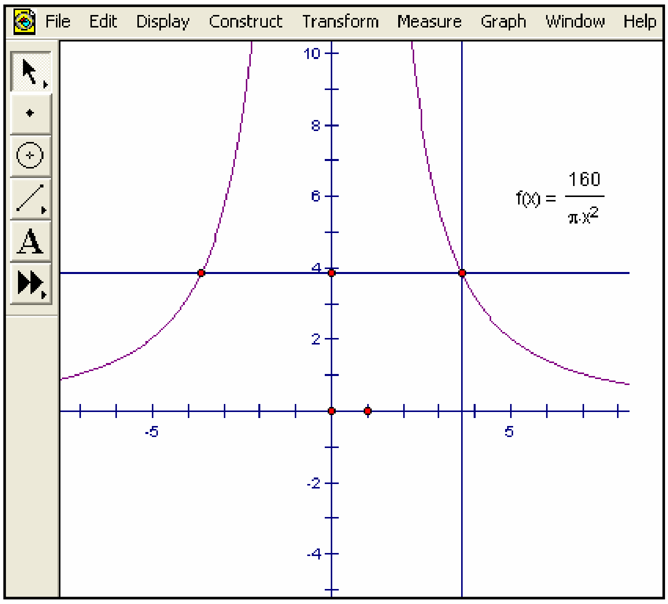


Figura 61. *Sketch* inacabado da Marisa e Isaura.

No diário não havia referência à forma como chegaram à expressão. Mais tarde, as alunas viriam a afirmar que tinha sido com ajuda das colegas que chegaram à expressão da função $f(x) = \frac{160}{\pi \times x^2}$, confessando que por isso não escreveram nada no diário.

No fim, não tiveram tempo para fazer mais nada, pelo que não chegaram a efectuar os cálculos, nem a manipulação para procurarem a solução óptima.

3.2.3. À conversa com a Isaura e Marisa

O trabalho com o Sketchpad

Nenhuma das alunas conhecia o programa, tendo trabalhado com ele apenas de forma pontual, dizendo a Marisa.:

"*Eu gostei de trabalhar com o Sketchpad, só achei que para o fim não era muito fácil…procurar como é que as coisas se fazem. É preciso pensar, procurar…não é logo assim…Tinha a ver com os problemas.*"

A Isaura também refere que gostou de trabalhar com o *Sketchpad* mas classifica-o como um pouco difícil:

"*Eu senti mais dificuldades, principalmente no início, perceber como é que as coisas funcionavam, aquela lógica toda… as coisas não são imediatas.*"

Uma vez que referiram dificuldades iniciais em trabalhar com o *Sketchpad*, pedi-lhes a sua opinião sobre o modo para se começar a trabalhar com o software. A Isaura respondeu:

"*Não, acho que nós tínhamos mesmo é que experimentar, mesmo que as instruções estivessem escritas ia dar ao mesmo, porque temos é que ir lá ver, e depois com a professora ou os colegas íamos esclarecendo as dúvidas. Acho que assim foi mais prático.*"

A Marisa também avançava como justificação para as dificuldades que por vezes sentiu com o *Sketchpad*, o facto de os seus desempenhos na disciplina de Matemática não serem os melhores.

A aula com computadores

Quando comparam as aulas que decorrem na sala de aula normal e na de informática, a Marisa fala sobre o que achou das aulas com os computadores:

"Ah é diferente!... Porque [na sala de informática] *estávamos sempre a trabalhar em conjunto…e estávamos mais a experimentar, a mexer…"*

As duas alunas eram normalmente parceiras de carteira e várias vezes na sala de aula normal, quando se distraíam, tinha que lhes chamar a atenção. Raramente participavam de forma espontânea, ao contrário do que acontecia nas aulas com computadores em que várias vezes intervinham e se envolviam na resolução dos problemas. A Isaura comenta a esse respeito:

"*Eu acho que nestas aulas* [com computadores] *nós conversávamos mas era sobre os problemas, distraíamo-nos muito menos. Apesar de termos mais hipóteses de conversas,*[sobre assuntos extra aula] *acho que falávamos muito menos…"*

Quanto ao facto de participarem mais nas aulas com tecnologias, a Isaura diz:

"É que ali nós discutíamos, nós dávamos as nossas opiniões e parece que não tinha tanto medo de dizer alguma coisa mal, como nas outras aulas…ali cativa mais os alunos, não nos sentimos tão sozinhos."

Entretanto a Marisa acrescenta:

"Pois e depois nestas aulas parece que estávamos todos em igualdade, nenhum conseguia logo fazer tudo direitinho e então não sei ...está-se mais à vontade."

O papel do professor numa aula com computadores...

Ambas reconhecem que às vezes tinham que esperar um pouco pela professora, referindo como muito positivo os dias em que a professora Susana Carreira esteve na sala de aula. A Isaura começa por salientar:

"Uma coisa que eu gostava muito era quando tínhamos dúvidas e a chamávamos, a professora não nos dava logo a resposta, dava-nos pistas para nós conseguirmos chegar lá."

Entretanto a Marisa completa:

"É. Depois íamos experimentar e tentar. Se dissesse logo, acho que perdia a graça, não dava tanto gozo."

E o papel do aluno

Entendem que o aluno também tem outra postura nas aulas com computadores, referindo a Isaura:

"Nessas aulas nós estávamos mais à vontade, não é que nas outras não estivéssemos, mas é diferente, podíamos comunicar, não era porque ... não sei, acho que estávamos todos mais envolvidos e entretidos com os problemas e com o Sketchpad."

Ambas afirmam que sentem mais confiança nas resoluções que faziam com a ajuda do computador, do que nas analíticas. Dizem ainda que nas aulas de resolução de problemas com computadores os alunos estão *"mais nivelados",* mesmo os alunos com bons desempenhos e melhores notas a Matemática manifestavam as suas dificuldades.

A resolução dos problemas

Quanto ao desempenho na *Fase Final*, referem que estiveram mais de uma aula a tentar resolver o problema *"As Vasilhas"*. Trocaram ideias e fizeram muitas tentativas, tendo-se sentido um pouco frustradas por não terem conseguido chegar à solução. Reconhecem que se tivessem que resolver o problema analiticamente não teriam permanecido mais de uma aula a tentar resolver o mesmo problema, dizendo a Isaura:

"Eu basicamente quando olhava, acho que [se tivesse que resolver analiticamente] *... logo pensava que não ia conseguir, por isso nem tentava."*

Ambas as alunas referem que gostavam mais das resoluções computacionais do que das analíticas; entendem que durante as resoluções analíticas tinham que estar muito atentas, ao contrário do que acontecia durante as resoluções computacionais. Como podiam depois experimentar, isso permitia-lhes compreender melhor a situação. As alunas distinguem a atitude que tomam nos diferentes tipos de aulas. Acham que nas aulas sem computadores precisam de estar sempre a ouvir a professora com muita atenção, não podem desligar-se e têm que seguir o ritmo da turma.

"Estar com predisposição a ouvir o que a professora diz é sempre um bom passo!", concluía a Marisa.

Em contrapartida, nas aulas com computadores têm a possibilidade de seguir ao seu ritmo individual, não dependendo do percurso da turma.

Analítico ou computacional?

Quando comparam duas resoluções para o mesmo problema, uma analítica e outra computacional, atribuem mais valor à resolução analítica, tendo entrado num pequeno diálogo:

– É porque analiticamente dá mais trabalho!

– Não houve a ajuda do computador!

– Teve que se puxar tudo pela cabeça…

– Tudo sozinha.

– As ideias…

– No computador também se puxa pela cabeça e dão-se ideias, mas é diferente, pode-se procurar… e às vezes encontram-se ideias.

Mesmo quando confrontadas com o problema *"As Vasilhas"*, que não conseguiram resolver de imediato com o computador, mantêm a mesma opinião. Acham que com os menus do *software* se encontram pistas, ao contrário do que sucede com o processo analítico e a Marisa acrescenta:

" (...) Porque por vezes nós estamos a resolver um problema e não nos lembramos de qualquer coisa…vamos aos menus e ao vermos as opções por vezes lembramo-nos, ou porque já fizemos ou porque pelo nome conseguimos chegar lá."

Quando se compara uma resolução analítica com a computacional, o mérito que atribuem à segunda é em função dos conhecimentos teóricos. Assim, a Isaura refere:

"Acho que se soubermos fazer analiticamente e soubermos que o computador também vai chegar a esse resultado, acho que é mais válida uma resolução sem o computador...como sabemos fazer analiticamente mais vale fazer assim, acho que tem mais valor! ...Só se não sabemos fazer analiticamente é que tem valor a do computador."

Computador e calculadora

Quando comparam o computador e a calculadora referem que com o primeiro há mais ajudas nos menus, oferece mais pistas. A Marisa menciona:

"Eu não gosto muito da calculadora, não sei ...desde o ano passado quando comecei a trabalhar com ela, sentia-me um pouco desorientada…e então muitas vezes acabo por desistir!... Esqueço-me daqueles passos que temos que fazer…não sei bem…"

Argumentei que ambos têm menus, mas a aluna continuou:

"Sim, ambos têm menus, mas são diferentes, na calculadora estão muito mais escondidos do que no computador, temos que saber umas coisinhas que se não fizermos dá logo erro e então atrapalho-me um pouco, com o computador não dá aqueles erros, o que acontece é ficar desactivado, não é estar a fazer aquilo tudo e no fim…ERRO! Vamos logo corrigindo, na calculadora não."

A Isaura acrescentou:

"No computador [*Sketchpad*] *os menus estão mais visíveis, não há tantos menus e sub-menus, como na calculadora, e se calhar também é porque o computador chama mais a atenção, cativa mais…"*

3.3. O caso "*Semi – Analíticas*"

3.3.1. O percurso escolar

A Sónia

É uma aluna bastante interessada e trabalhadora na disciplina de Matemática, tendo mantido quase sempre este perfil ao longo do seu percurso escolar.

"Sempre fui boa a Matemática, tive muito boas bases. Na primária, era uma aluna normal, depois quando passei para o 5º ano é que foi diferente, sempre tive cincos até ao 9º ano, no 9º também, tinha nota 4 no primeiro e segundo períodos e depois no terceiro

tinha 5… quando passei para o 10º mudou … Era muito diferente, no 9º ano a matéria era realmente muito fácil, era mais calmo, muito menos matéria…"

Mencionou que a matéria de que menos gosta é a que envolve vectores, manifestando o seu agrado relativamente aos outros temas estudados.

Para se ser bom aluno a Matemática, a Sónia reforça a necessidade de se resolverem regularmente exercícios.

"…para se estar sempre em contacto com a matéria".

Como características importantes num professor de Matemática alvitra, depois de alguma hesitação:

"Não sei… há professores muito diferentes, há vários métodos… dou-me melhor com uns do que com outros… Gosto que o professor explique bem aquilo que está a fazer, que faça exercícios, para termos a noção de como se faz, para conhecermos as regras. Também é importante estarmos à vontade, para podermos tirar as dúvidas que temos …"

Quando questionada sobre o papel das tecnologias na sala de aula, em particular o computador e a calculadora, argumenta do seguinte modo:

"Eu não acho muito importante usar o computador ou a calculadora, mas se calhar há alunos que conseguem visualizar melhor dessa forma. Eu gosto mais de usar o quadro, giz e pouco mais… antigamente não havia estas coisas e também havia bons alunos. Se calhar, na parte dos gráficos é que pode ser um pouco diferente e mais importante recorrer à tecnologia".

A Inês

Até ao 8º ano, a Inês sempre gostou de Matemática e tinha quase sempre nível 4.

"Quando vim para Faro, no 8ºAno, é que tive negativa e depois também no 9º ano… o 10º ano é que correu um pouco melhor."

A matéria que mais gostou de estudar foi a trigonometria e as funções; não apreciou muito a geometria.

No perfil de um bom professor de Matemática, considera relevantes os seguintes aspectos:

"... tem que explicar bem. Para mim, tem que dizer podes resolver assim e assim..."

Quanto à importância do recurso às tecnologias na aula de Matemática, afirma:

" ... Para mim, o quadro e o giz chegavam, contudo há representações em que é mais fácil com o computador. Em determinadas matérias, o Sketchpad pode ajudar, como por exemplo para percebermos o círculo trigonométrico... mas não é essencial."

Problema – *O Canteiro*

No registo da sua intenção para a resolução deste problema, a Sónia escreveu:

"Quando me deparei com o problema, pensei nas duas hipóteses de resolver, ou no computador ou analiticamente. Eu, pessoalmente, prefiro analiticamente, mas de qualquer forma pensei como faria se optasse pelo computador. Tentei visualizar a forma mais prática de resolver o problema.

Por fim decidi fazer analiticamente, mas também não ponho de parte a hipótese de experimentar pelo computador."

A Inês fez o seguinte registo:

"*Pensei fazer analiticamente mas também pensei como é que seria fazer pelo computador e como é que iria obter os resultados pelo computador mas por fim decidi fazer analiticamente."*

Na aula da semana seguinte, a Inês formou grupo com a Maria para trabalharem juntas no computador, a Sónia sentou-se sozinha numa das mesas do centro da sala (sem computador) e começou a resolver o problema analiticamente.

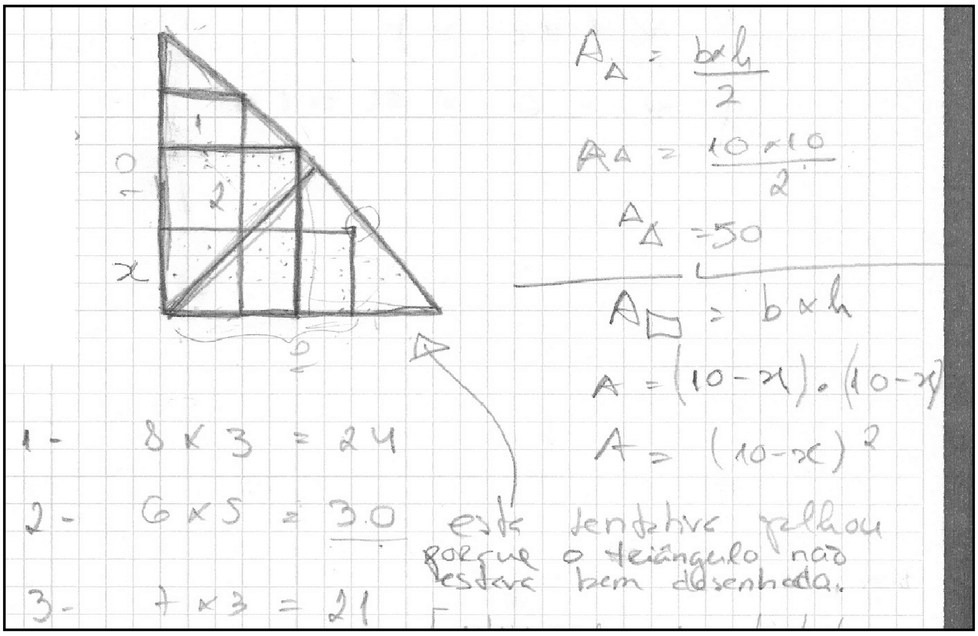


Figura 62. Excerto do diário de resolução da Sónia.

Desenhou um triângulo rectângulo, usando como unidade de medida a quadrícula da folha do caderno. Desenhou três rectângulos "inscritos" no triângulo e determinou os respectivos valores das áreas. Porém, como no terceiro rectângulo um dos vértices não coincidia com a hipotenusa, concluiu que "*o triângulo estava mal desenhado*".

Tentou então obter uma expressão e depois de algumas tentativas, acabou por escrever a expressão $A = (10 - x)(10 - y) \Leftrightarrow A = 100 - 10y - 10x + xy$. Depois, começou a procurar obter uma condição; igualou a zero a expressão da área, passando todos os termos com *y* para o seu forjado 2º membro. Então, resolveu a condição em ordem a y.

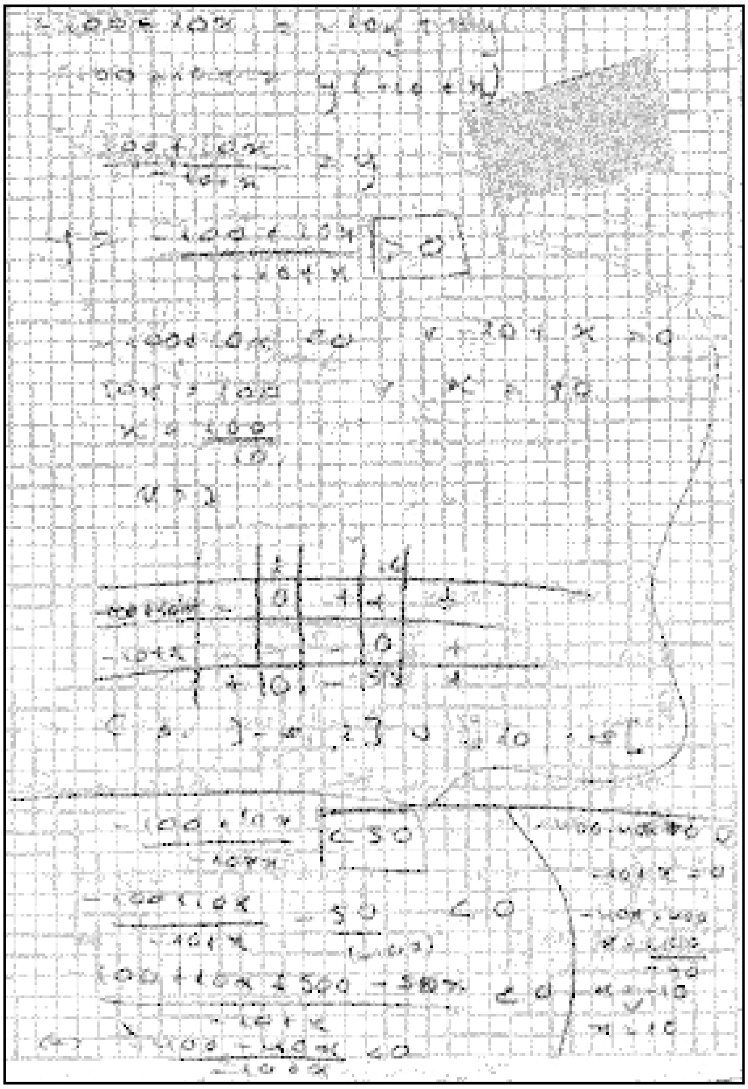


Figura 63. Excerto do diário da Sónia durante a resolução do problema *O Canteiro.*

A Sónia procurava, assim, a todo o custo, obter uma expressão e impor condições. Por se tratar de uma área, esta não poderia ser negativa e por estar inscrito no triângulo, a área do rectângulo tinha que ser inferior à do triângulo; assim impôs a condição da área ser maior que 0 e menor que 50 (área do triângulo). A aluna pretendia ter uma equação ou uma inequação para resolver e, desse modo, encontrar a solução para o problema.

A dada altura, escreve:

“Já tentei por algumas formas, mas não está a dar certo, vou tentar recorrer à semelhança de triângulos…”

$$\frac{10-y}{10}=\frac{x}{10}\Leftrightarrow y=10-x$$

Apesar de escrever y em função de x, a Sónia não estava a ver uma forma de utilizar este seu resultado.

Eu, pessoalmente, estava admirada com a determinação da Sónia durante a resolução do problema. Apesar de já ter feito várias tentativas e de ter resolvido várias inequações fraccionárias, não estava interessada em desistir.

Quando a questionei, nesta fase, sobre a sua opção, ela referiu:

– Já pensei em mudar, mas sinceramente gosto mais desta maneira, apesar de achar que se calhar com o computador é mais prático.

– Prefiro estar a escrever, equações, inequações… Tenho mais confiança!

Apesar da extensão das suas resoluções e de estas serem inconclusivas, a Sónia não queria mudar o processo de resolução.

Entretanto, começou a observar os ecrãs dos computadores dos colegas, constatando que alguns tinham o triângulo numa outra posição, um dos lados do triângulo estava assente na hipotenusa.

– Será que se mudar a posição do rectângulo a área vai ser a mesma?

A Sónia estava um pouco desanimada…

Nesta altura, a Inês e a Maria estavam a trabalhar com um computador, muito próximas da Sónia.

A Inês, na semana anterior, tinha registado a intenção de resolver analiticamente, embora dissesse que também tinha pensado em como resolver no computador. De facto, nesta aula começou por uma resolução computacional. Eis o que as alunas fizeram:

- Construíram um triângulo rectângulo de catetos iguais a 10;
- Colocaram um ponto móvel sobre a hipotenusa;
- Traçaram uma recta perpendicular e uma paralela à base do triângulo;
- Marcaram os pontos de intersecção com os catetos;
- Definiram o rectângulo;
- Mediram a base e a altura;
- Calcularam a área e procuraram o rectângulo de maior área, movendo o rectângulo.

Quando chegaram ao fim, julgaram que o processo de resolução tinha sido muito fácil, pelo que começaram a desconfiar do resultado. Perguntaram-me, então, se podiam resolver analiticamente.

Fiquei curiosa com a questão levantada pelas alunas e interroguei-as:

– Porque sentem a necessidade de resolver o problema analiticamente?

– É que achamos que foi muito rápido com o computador … – Respondeu a Inês.

– Ainda por cima fizemos poucos cálculos, comparando com os outros problemas – Reforçava a Maria.

– Pois, professora, foi só fazer o triângulo, paralelas, ponto móvel, a área e já está!

– Podemos fazer das duas maneiras?

– Sim, claro que sim! – Respondi prontamente.

E as duas avançaram para uma outra resolução, começando por escrever no diário:

"Analiticamente, para confirmar o processo utilizado no computador…"

Começaram por desenhar um triângulo com um rectângulo inscrito, determinaram a área do triângulo e depois seguiram um processo de resolução muito semelhante ao da Sónia. As duas alunas discutiram bastante sobre o processo de resolução analítico, não conseguindo chegar a um consenso. Assim, decidiram retomar o trabalho com o *Sketchpad*.

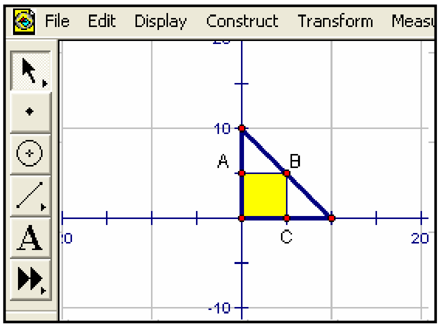


Figura 64. Primeira construção da Inês e Maria.

Contudo, as alunas continuavam a sentir a necessidade de confirmarem o resultado obtido na primeira construção, em que tinham feito um rectângulo "direito" como lhe chamaram as alunas."*Será que se nós mudarmos a posição do rectângulo, a área máxima vai ser a mesma?"*

Fizeram uma nova construção, desta vez com o rectângulo assente na hipotenusa, ou rectângulo "torto", segundo as alunas, confirmando a solução já encontrada anteriormente.

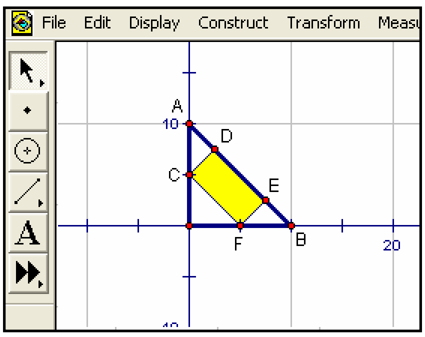


Figura 65. Segunda construção da Inês e Maria.

Faltavam cerca de quinze minutos para a aula terminar. A Inês já tinha terminado a construção do segundo *sketch*. A Sónia continuava às voltas com a resolução analítica do problema. Juntaram-se as três e tentaram resolver em conjunto o problema.

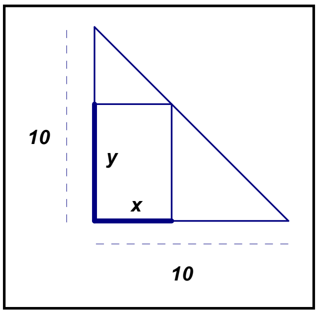


Figura 66. Esquema feito pela Sónia.

Aplicando a semelhança de triângulos, obtiveram a expressão $y=10-x$.

A Sónia escreveu $A = x \times y$ e a Inês fez a observação:

– Já sabemos a que é igual o y!

– Pois, é $y=10-x$ – Referiu a Sónia, que substitui o y na expressão da área e obteve $A = 10x - x^2$.

Entretanto, ficaram novamente num impasse, não sabendo como poderiam usar a informação para chegar à solução do problema.

Depois de as questionar sobre o tipo de função que tinham e o que pretendiam é que as alunas referiram que procuravam o máximo da função $A(x)=10x-x^2$, e a Sónia disse:

– Podemos usar as derivadas para calcular o máximo da função.

As alunas conseguiram, então, resolver o problema analiticamente. Principalmente para a Sónia, este facto era muito importante, sendo visível a satisfação da aluna pelo seu feito, apesar de ter demorado bastante mais tempo.

Quanto à Inês, alternou várias vezes entre os dois processos de resolução:

1º Resolveu no computador;

2º Encontrou uma resolução muito fácil e desconfiou da solução;

3º Experimentou resolver analiticamente, mas não conseguiu;

4º Construiu no *Sketchpad* outro esquema ("rectângulo torto") e obteve a mesma solução;

5º Finalmente, resolveu o problema analiticamente, em conjunto com a Sónia.

Problema – *O Cone*

Na aula seguinte, a Sónia e a Inês começaram a resolução do problema, utilizando o *Sketchpad*. Começaram por representar uma circunferência de raio 3, centrada na origem; inicialmente, tiveram dificuldade em representar o cone na sua construção, pelo que a Inês decidiu começar a tentar analiticamente:

– É para ver como é sem o computador, talvez nos ajude um pouco – Afirmava a Inês, quando a questionei sobre a mudança de processo.

Porém, analiticamente, também estavam com dificuldades e iam cometendo o erro de considerar que o raio do cone era fixo de medida 3.

Tanto na resolução computacional, como na analítica, consideravam a base do cilindro fixa (um círculo máximo da esfera) porque o cone aparecia inscrito numa semiesfera. Só após uma conversa com as alunas, é que elas entenderam a incorrecção na resolução:

– Assim estamos a desperdiçar metade da esfera – Concluía a Sónia.

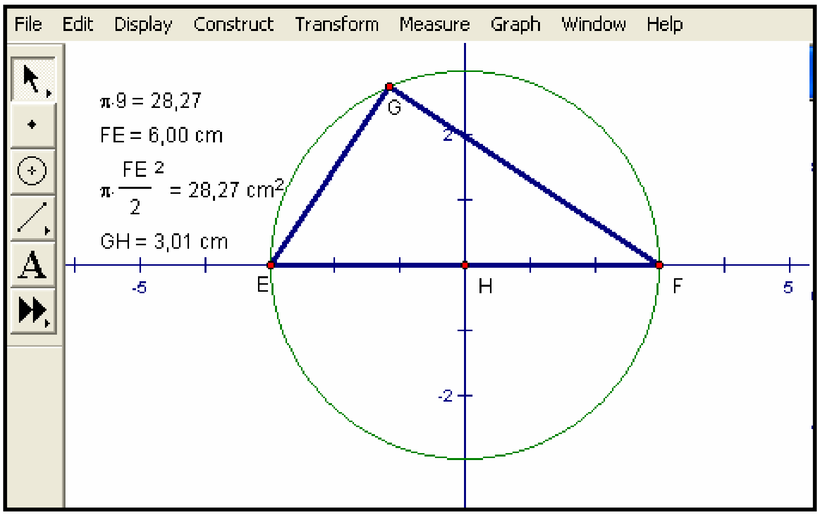


Figura 67. Primeira tentativa de construção da Sónia e Inês no problema O Cone.

Após algumas tentativas de resolução no computador e analiticamente, optaram pelo computador e terminaram a resolução do problema apenas no *Sketchpad*, não tendo concluído a resolução analítica.

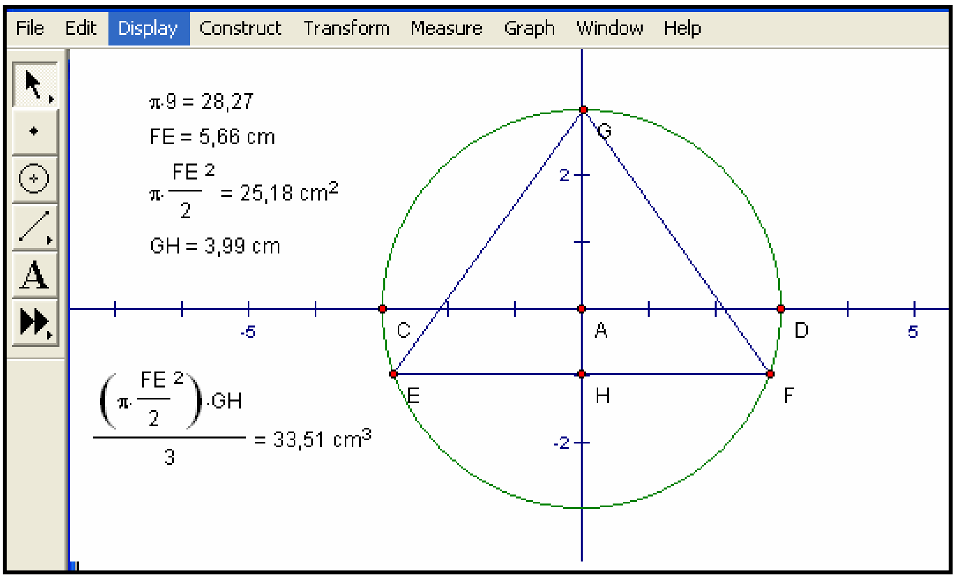


Figura 68. *Sketch* final do problema *O Cone.*

Veja-se o que as alunas registaram nos seus diários:

"Nós estamos na dúvida sobre qual o processo que devíamos resolver, acabámos por optar primeiro pelo computador."

As alunas manifestaram sempre alguma hesitação relativamente ao método de resolução do problema, pelo que a meio do percurso decidiram tentar uma resolução analítica, um pouco na esperança de conseguirem encontrar alguma ideia que lhes permitisse concluir a resolução.

Problema – ***As Vasilhas***

Começaram a resolução do problema cerca de vinte minutos depois de se ter iniciado a aula. Quando acabaram de ler o enunciado, questionei-as sobre o processo de resolução que iriam escolher mas ambas referiram que não tinham a certeza.

Começaram por explorar o problema pelos dois processos, analiticamente e com o computador; só após uma primeira abordagem é que iriam optar por um deles. Assim, a Sónia começou por representar uma planificação de um cilindro, marcou nela alguns elementos e procurou escrever uma expressão.

A Inês estava a trabalhar no computador mas não sabia por onde começar, sentindo-se um pouco desmotivada, acabando por voltar a juntar-se à colega para explorar o problema analiticamente.

Após algumas tentativas, acabaram por chegar à expressão $y = \frac{160}{\pi x^2}$ e tentaram novamente no computador usar esta expressão, definindo deste modo a altura do cilindro de volume fixo 160.

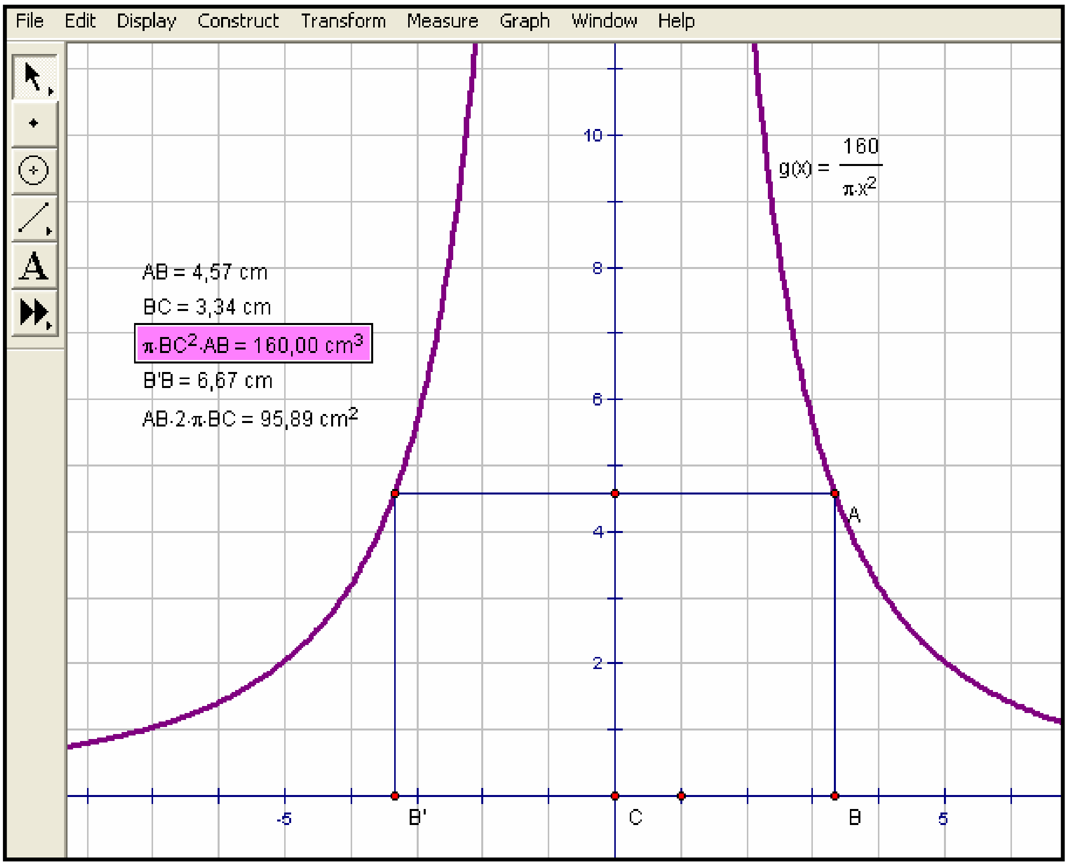


Figura 69. Resolução incompleta do problema *As Vasilhas.*

3.3.3. **À conversa com a Sónia e a Inês**

A tecnologia na aula de Matemática

A Sónia, apesar de achar que as tecnologias não são muito importantes para o ensino da Matemática, encara a sua implementação como um factor de adaptação à sociedade que está sempre a evoluir tecnologicamente:

"Porque tudo está a evoluir, há professores que são mais antigos e que não utilizam a calculadora e os seus alunos vão sentir a diferença… Esses alunos que não usam vão achar diferença em relação a nós, que trabalhamos com computadores, calculadora gráfica…"

Entende o uso das tecnologias na sala de aula, como a calculadora gráfica ou o computador, como uma ajuda, para visualizar determinados conceitos, por exemplo. Porém, não vê a sua utilização como determinante para que se seja um bom professor ou um bom aluno a Matemática.

Relativamente à experiência com o *software*, ambas as alunas tinham apenas trabalhado pontualmente com o *Sketchpad*, no ano lectivo anterior. As duas acharam interessantes as demonstrações feitas na sala de aula com o programa, aquando do estudo da Trigonometria.

Quanto às aulas em que trabalharam com o *Sketchpad*, a Sónia diz:

"Acho interessante poder-se visualizar a outra parte da Matemática de forma diferente, achei engraçado e o programa está acessível. Talvez eu não tenha é muita aptidão para trabalhar com ele, mas não acho muito difícil, acho que fica bastante bem visível".

A Inês refere também:

"Eu gostei. Por exemplo, a gente a fazer o problema dos triângulos era mais fácil com o programa do que à mão, traçava logo as rectas, dava logo a área. Se fossemos nós [à mão] *tínhamos que estar a fazer as distâncias, assim é muito mais fácil."*

A Sónia achou que o programa tinha uma limitação; seria bom se se conseguisse trabalhar a três dimensões:

"Às vezes achava-o um bocado limitado, se fosse possível fazer as construções a 3D, era mais engraçado, mas também mais complicado. Sentia algumas limitações, por exemplo, no problema do Cone se calhar ajudava."

Não sentiram necessidade de ter um manual de instruções, afirmando:

"Com aquilo que a professora dizia, às vezes, no início da aula e nós íamos abrindo os menus, conseguíamos mais ou menos ver as hipóteses."

Consideraram agradável a apresentação que podiam fazer da resolução dos problemas, com o programa, que podiam sempre melhorar se investissem um pouco de tempo.

O uso dos computadores na sala de aula

Quando comparam as aulas que decorreram na sala de aula normal e na de informática, a Sónia diz que preferia as aulas sem computadores:

"Não sei, gosto de estar ali à frente do quadro e eu ir resolvendo as coisas ou ouvir o que a professora está a dizer, não é que detestasse as outras, mas pronto, preferia estar sem computador."

A Inês gostava dos dois tipos de aulas, apesar de serem muito diferentes. Quanto ao papel do professor nas aulas com computadores, a Inês começa por dizer:

"O professor não pode estar em dois sítios ao mesmo tempo, é um bocado difícil, explica o essencial de um problema ou diz como nós fazemos e depois a gente chama quando tem uma dúvida e, por um lado, enquanto estamos à espera, às vezes acabamos por conseguir perceber qual era o problema."

Quanto ao papel do aluno nas aulas, ambas identificam diferenças.

"Na sala de aula normal é mais pacífico, estar a ouvir, estar a ver, a fazer exercícios, enquanto que nas aulas com computadores temos que estar sempre a trabalhar, a experimentar, vamos ver se dá, se não dá, é mais aventureiro, nas outras aulas [o papel] *é mais limitado."*

A Inês continua:

"Ali não dá para estar sem fazer nada, senão não aparece nada no ecrã, ali (na aula com computadores) temos que estar todos a trabalhar, enquanto que nas outras aulas acho que há colegas que se desligam mais."

Quando questionadas sobre o desempenho dos alunos nas aulas com computadores, a Sónia afirma:

"Há pessoas que gostam muito do computador e assim colegas que são piores alunos que eu a Matemática, naquelas aulas [com computador] *faziam as coisas primeiro do que eu."*

A Inês acrescenta:

"Outra coisa que é diferente é que nas aulas de computadores os alunos mais "craques" estão ao mesmo nível dos outros… a tecnologia ajuda essas pessoas que têm mais dificuldade, são diferentes formas…"

Assim, constatam vantagens no recurso ao computador, essencialmente para os alunos mais fracos, constituindo um processo de também conseguirem resolver os problemas podendo mesmo, no futuro, vir a motivá-los para um maior estudo e empenho na disciplina. Quanto ao facto de alguns dos melhores alunos terem certas dificuldades, pensam que também é natural porque estão habituados a trabalhar doutra maneira e não vêem que isso seja um inconveniente para eles, até porque podem sempre resolver analiticamente.

A influência de observar o trabalho dos colegas

Durante as aulas com computadores, a Sónia e a Inês olhavam muitas vezes para os computadores dos colegas.

"Quando estamos no computador, acontece muitas vezes olhar para o lado, vamos ver o que eles estão a fazer… Depende dos problemas… Às vezes é uma ideia e depois dá para discutir entre nós como é que eles terão feito e nem sempre conseguimos logo fazer também, temos que estar a pensar e ver como será!"

"*Ver uma resolução analítica muitas vezes não ajuda muito, continuamos sem perceber o que está ali, a não ser que se faça só uma cópia! No computador, temos, no mínimo, que perceber. Eu vejo e depois tenho que fazer, até porque às vezes há coisas escondidas…"*

Durante as aulas com computadores entendem que há mais discussão entre os colegas. Apesar de na aula normal existir também troca de ideias não é tão intensa. Consideram ainda que, com a conversa, há uma apropriação diferente das sugestões como explica a Inês:

"Quer dizer, numa sala normal, às vezes… fazemos sem saber muito bem o que estamos a fazer… Discutimos e ela [a Sónia] *diz: agora faz esta conta, o resultado é assim. E eu faço, mas por vezes não percebi muito bem."*

A Sónia continua:

"Enquanto que, quando estamos a trabalhar com o Sketchpad, isso nunca acontece, não chega só uma dizer e a outra fazer, temos que perceber porquê."

Com ou sem computador?

Sobre os diferentes métodos de resolução, a Sónia refere:

"Eu prefiro estar a resolver analiticamente, é mais individual, eu gosto mais… Não é bem gostar mais… mas prefiro estar ali… tenho as minhas ideias, prefiro fazer sozinha mesmo que esteja ali às voltas, da outra maneira fico mais confusa"

No caso da Inês:

"Eu para mim é mais ou menos igual, gosto de estar a trocar ideias, tenho algumas dificuldades das duas maneiras... por exemplo, no problema da Piscina, eu gostei muito mais no computador, mas nem sempre foi assim, dependia…"

A Sónia, apesar de normalmente gostar mais de resolver os problemas pelo método analítico, no problema da Piscina (descrito no episódio 4) também preferiu a resolução no computador, por conseguir visualizar melhor.

"Sinto mais confiança do que no computador, porque analiticamente fui eu sozinha que fiz os passos todos e no computador não sei se a construção está bem feita ou não…além disso se preciso de ver a resolução… para saber onde é que está o erro, custa menos se estiver a resolver analiticamente."

A Inês admite que não tem muita confiança nas suas resoluções analíticas e que sente mais confiança na resolução com o computador. Quando lhe perguntei porque é que tem mais confiança nessa resolução, sublinhando que é ela que está a dar as instruções e não o computador a trabalhar sozinho, respondeu:

"Mas com o computador sempre tenho aquela ajuda e isso dá-me mais confiança."

Comparação entre os processos, analítico e computacional, na resolução de problemas.

Ao pedir-lhes para compararem duas resoluções, uma obtida através de um método analítico e outra recorrendo ao computador, a Sónia e a Inês tomaram diferentes posições, estabelecendo-se entre as duas um pequeno debate sobre os dois processos de resolução. A Sónia defendia o processo analítico e a Inês defendia o computacional.

– A analítica, para chegar lá, teve que se pensar e fazer, tentar… e depois o resultado estar correcto… Eu acho que dá mais orgulho, por se ter conseguido…

– Mas no computador também teve que se pensar e muitas vezes nós nem conseguimos chegar lá… Olha como aconteceu com aquele do petróleo… – Afirmava a Inês.

– Está bem! Mas são coisas diferentes. Analiticamente, tens que pensar e depois ainda tens ainda que estar a fazer, a ter aquele trabalho todo! – Defendia a Sónia.

– E no computador também! Temos que pensar e depois temos que estar a fazer as construções – Contrapunha a Inês.

–Acho que a resolução analítica vale mais porque tem muito mais trabalho, enquanto que quem faz com o computador tem mais elementos para a resolução, tem mais instrumentos. Analiticamente, começa-se com uma folha em branco, como nos testes, também é assim.

Quis saber se o cenário e as convicções se alterariam se o uso do computador fosse obrigatório nos testes ou exames, como acontece com a calculadora gráfica. A Sónia respondeu:

"Sim, com a calculadora isso já acontece e eu às vezes também não consigo resolver as questões. Ainda agora, no último teste, não fiz a pergunta da calculadora. Analiticamente, sinto que se estudar controlo mais as coisas. Podem ser contas um pouco diferentes mas nunca aparecem coisas que não estudámos… Enquanto que no computador aparecem coisas muito diferentes, ou seja, tem que se pensar, contextualizar, interpretar. Não acho muita piada quando tenho que descobrir coisas novas, fico insegura, gosto mais quando vejo coisas parecidas com outros exercícios que já fiz, tenho receio de andar perdida e não chegar a lado nenhum."

Durante a Fase Final

Relativamente à sua oscilação entre os dois métodos de resolução durante a *Fase Final*, a Sónia justifica:

"Resolvi ir fazer o segundo problema para o computador porque, como demorei tanto tempo no primeiro, achei que não me iria desenrascar analiticamente nestes problemas."

O facto de a Maria**,** parceira da Inês, ter faltado na aula anterior, incitou a que a Sónia se juntasse à Inês para resolverem juntas o segundo problema, mas aparentemente a aluna não o estava a fazer de forma muito convicta. Parece ter havido um conjunto de factores que a levaram a isso, além ter afirmado que nunca começaria uma resolução sozinha no computador, como faz, sem receio, analiticamente.

A Inês declara que não tem muita confiança no seu desempenho em nenhum dos processos, pelo que as suas opções dependem dos problemas e não coloca à partida nenhum dos métodos de lado.

Entre o computador e a calculadora…

Quanto às diferenças entre o computador e a calculadora, a Inês considera:

"Acho que a calculadora e o computador não estão no mesmo pé de igualdade. Se calhar, a calculadora só é mais prática porque é mais pequena e dá para andar sempre com ela. Por exemplo, ter um computador durante o teste... é mais complicado…Mas para trabalhar, o computador é mais acessível, tem mais espaço. Na calculadora é mais difícil aceder às coisas, os caminhos estão mais escondidos. No computador é mais acessível, está tudo a vista."

3.4. O caso *"Analíticas Convictas*"

3.4.1. Ideias sobre a Matemática, o professor e o aluno

A Anabela

A Anabela é uma excelente aluna a todas as disciplinas e refere:

"Sempre gostei e fui boa aluna, não tive grandes dificuldades, não me aborreço por ter que estudar Matemática, sempre tive gosto em estudar e tirei boas notas."

Quando lhe é pedido para identificar o que gosta mais em Matemática salienta:

"De tudo um pouco, não gostei muito da última matéria que demos [sucessões] *mas eu acho que foi porque não entrei bem na matéria…"*

Quanto ao que é necessário para se ser um bom aluno de Matemática, afirma:

"Ter boas bases, dar atenção nas aulas, só por termos atenção na aula é quase metade do estudo, percebe-se muito melhor…"

Como perfil de um bom professor de Matemática, indica:

"Tem que saber cativar os alunos e não é só DAR matéria, tem que explicar a matéria".

A Irina

É uma aluna muito interessada e aplicada a todas as disciplinas. No final do ano lectivo teve a classificação de 16 valores a Matemática. Quanto ao seu percurso na disciplina, diz:

" Sempre gostei, é engraçado, (...) o percurso correu muito bem, com boas notas até ao 7ºano, nessa altura houve como que uma reviravolta na Matemática. Quando comecei a aprender as equações, tive um período em que faltei às aulas e então a partir daí comecei a sentir-me insegura até hoje, mas vou melhorando. No 10º ano eram notas muito boas, intercaladas com notas menos boas, ficava muito nervosa antes de ir para os testes, não tinha confiança em relação aos conteúdos, sentia-me insegura em relação à disciplina."

Quanto aos temas que mais gosta, refere:

"Gostei imenso de trigonometria, o que gostei menos são algumas partes da geometria, figuras, volumes, confundo-me toda. Gosto de resolver as equações, sistemas, apesar de me enganar em coisas pequenas…"

Sobre o que é necessário para se ser bom aluno a Matemática, comenta:

"É preciso gostar da disciplina, depois é preciso ter boas bases, as primeiras coisas que se aprende em Matemática têm que ficar bem sabidas porque tudo se constrói a partir dali. Se há alguma falha, essa falha arrasta-se até sempre, é como fazer uma casa, tem que ter bons alicerces…"

Para se ser bom professor de Matemática identifica como relevante:

"Alguém que goste muito da disciplina e principalmente consiga transmitir aos alunos esse gosto e essa paixão, porque um aluno sente quando é que o professor gosta do que está a fazer. E é importantíssimo que o aluno sinta esse amor, gosto por ensinar. Claro, se é bom, se sabe muita Matemática, e aquilo torna-se… A Matemática é muito fascinante quando temos alguém que nos ensina, que gosta daquilo e em cada situação mais complicada mostra-a de uma maneira que se torna acessível, simples e bonita…"

Acrescenta que se pode ser bom professor só com quadro e giz, sem necessidade de outros recursos.

3.4.2.Desempenho na *Fase Final*

Problema – *O Canteiro*

As alunas resolveram este problema separadamente, apesar de se encontrarem próximas e de trocarem algumas ideias esporadicamente.

O percurso da Anabela

Na aula sem acesso à rede informática da *Fase Final*, a Anabela registou:

"Em primeiro lugar, tinha pensado fazer analiticamente, porque gosto desta maneira de chegar à solução. Porém acho que vou optar por fazer com o auxílio do computador."

Na aula seguinte, contrariamente ao que tinha registado na semana anterior, iniciou a resolução do problema por um método analítico.

Começou por fazer uma representação dos dados do problema, identificando as dimensões do rectângulo como x e y e registou no seu diário:

"Decidi fazer analiticamente. Sendo as dimensões do canteiro 10-x, a área máxima terá de ser um quadrado de 5 por 5, sendo a área máxima 25 m^2. O canteiro não poderá ter dimensões maiores porque sairia fora do triângulo e dimensões menores também não, porque não nos daria a área máxima…"

Que resposta! A aluna não estava realmente a resolver o problema mas sim a avançar com uma solução baseada em convicções criadas a partir da resolução de problemas de optimização de áreas. Temos área máxima quando o rectângulo é um quadrado! Quando me apercebi de que a Anabela tinha avançado com a solução do problema, sem nenhuma resolução, questionei-a sobre o facto, ao que respondeu:

– Nestes problemas, muitas vezes a solução é um quadrado, e depois foi só ver qual a medida do lado.

Entretanto, expliquei-lhe a necessidade da resolução e começou a escrever uma expressão para a área do rectângulo. Decompôs o triângulo inicial em dois triângulos e um rectângulo, determinou a área dos dois triângulos (A_1 e A_2), obteve a área do rectângulo, subtraindo à área do triângulo inicial (50) a dos dois mais pequenos.

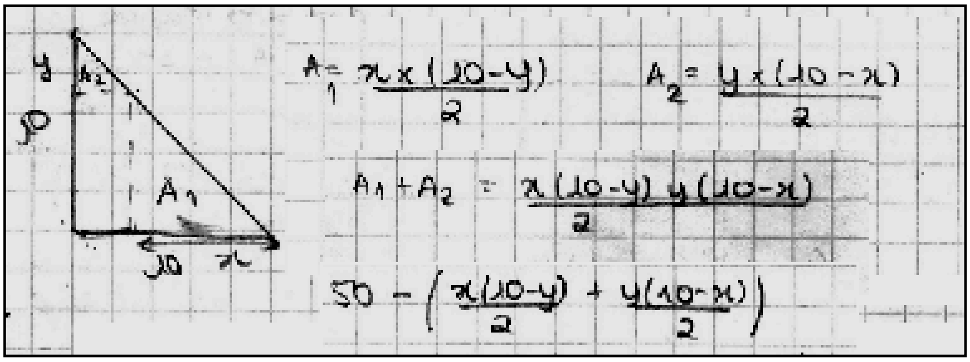
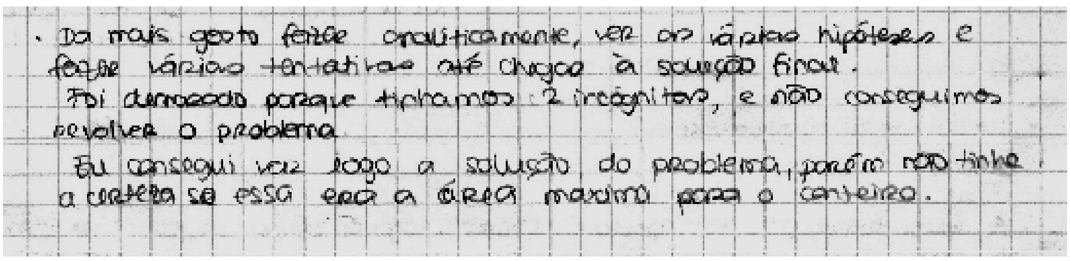


Figura 70.Excerto do diário do problema da Anabela.

Contudo, não conseguia, estava num impasse por não ser capaz de definir a área em função de uma só variável. Após algumas questões que lhe ia colocando, acabou por referir a semelhança de triângulos para definir y em função de x. Tomando as dimensões do rectângulo como x e y e obteve $y = -x + 10$. Como a área do rectângulo é $A = x \times y$, então $A(x) = 10x - x^2$. Recorrendo à função derivada e estudo do seu sinal, conclui que o máximo da função era o valor que antes tinha referido, confirmando assim a solução do problema. Como considerações finais escreveu:

"*Dá mais gosto fazer analiticamente, ver as várias hipóteses e fazer várias tentativas até chegar à solução final. Foi demorado porque tínhamos 2 incógnitas e não conseguí(a)mos resolver o problema.*

Eu consegui ver logo a solução do problema, porém não tinha a certeza se essa era a área máxima para o canteiro."



· Da mais gosto fazer analiticamente, ver as várias hipóteses e fazer várias tentativas até chegar à solução final.
Foi demorado porque tínhamos 2 incógnitas, e não conseguimos resolver o problema.
Eu consegui ver logo a solução do problema, porém não tinha a certeza se essa era a área máxima para o canteiro.

Figura 71.Excerto da parte final do diário da Anabela.

O percurso da Irina

Na aula 0 da *Fase Final* não escreveu nenhum comentário, mas iniciou uma resolução com o processo analítico.

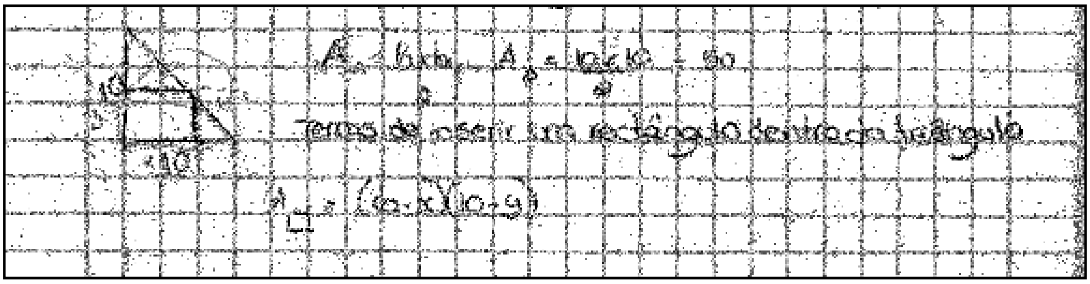


Figura 72. Registo feito pela Irina na aula sem computadores.

De acordo com os dados da figura, a expressão que a Irina escreveu para a área do rectângulo está incorrecta. Na aula da semana seguinte, retomou a resolução, fazendo a correcção nos dados do problema, passando a corresponder às dimensões do rectângulo as expressões *10-x* e *10-y*. Porque a área do rectângulo nunca pode ser maior que a do triângulo, impôs a condição de que a área fosse menor do que 50, acabando por obter uma inequação com duas incógnitas, $(10-x)(10-y)<50$. Escreveu-a em função de x, obtendo $y<\dfrac{-50+10x}{-10+x}$ mas rapidamente acabou por perceber que não conseguiria avançar, identificando estes passos com uma "bacorada", como ela própria escreveu.

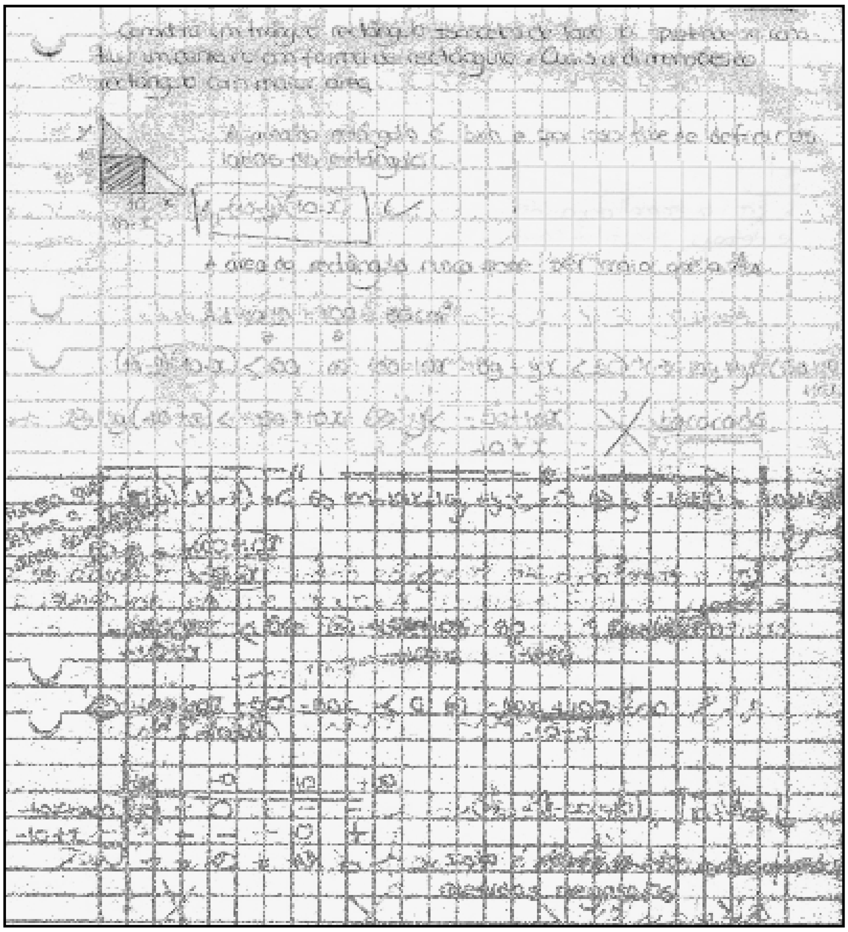


Figura 73. Tentativas de resolução da Irina no problema *O Canteiro.*

A Irina percebeu que não conseguiria avançar na resolução e fez outras tentativas no sentido de obter condições que, ao serem resolvidas, a levassem à solução do problema. A dificuldade sentida era a de escrever a expressão em função de uma só variável. Desta vez, incorreu noutro erro que acabou por conduzir a um resultado que a própria aluna invalidou, escrevendo o comentário "isto é estúpido, não pode haver medidas negativas".

Julgo que os alunos que optaram pela resolução por um processo analítico, não procuraram inicialmente uma função da qual iriam determinar os extremos. Quase todos eles, tentaram escrever condições, equações e/ou inequações, procurando desta forma chegar à solução do problema. Assim, impuseram a condição de que a área do rectângulo teria que ser inferior à do triângulo, ou seja, inferior a 50 e superior a 0.

Depois de alguns ensaios, a Irina começou a colocar a hipótese de recorrer às funções para encontrar a solução do problema, acabando por utilizar um processo semelhante ao da Anabela.

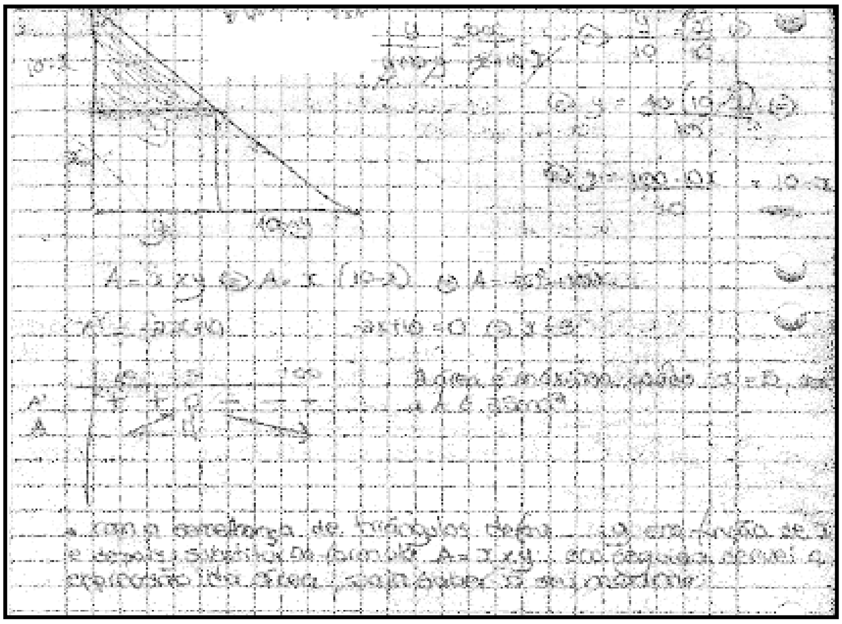


Figura 74. Resolução da Irina no problema *O Canteiro*.

A Irina escreveu também no seu *Diário de Resolução*:

"Não pensei em desistir e não me senti tentada a resolver com o computador, apesar do outro método ser mais rápido, para mim não é tão aliciante. Assim dá-me gozo, mesmo sendo 'aselha' gosto de pensar."

No fim da aula, quando ambas conseguiram resolver o problema, questionei-as sobre o que sentiam por ter optado por este processo, uma vez que a maioria dos colegas tinha resolvido o problema mais rapidamente com o recurso ao computador e todos estavam já a resolver o segundo.

– Da outra maneira [computacional] não envolve tanta Matemática – afirmava a Anabela.

– No computador, é mais ou menos pensar-se num ponto, numa recta, mexer-se, para mim não é tão aliciante.

Quando perguntei se a questão do tempo tinha influência nas opções que tomavam, responderam:

– Acho que logo no início não estávamos muito concentradas e não encontrámos logo o melhor caminho – disse a Anabela.

– Eu preocupei-me em arranjar uma condição para resolver e perdi-me um pouco, não me lembrei logo de utilizar as derivadas.– Acrescenta a Irina.

Entretanto, a aula chegou ao fim e só na aula seguinte é que conheceram o segundo problema.

Problema – *O Cone*

Na segunda aula, a Irina e a Anabela optaram por se juntar em grupo e assim resolverem o segundo problema. Contudo, cada uma das alunas resolvia o problema no respectivo *Diário*.

Não ponderaram resolver o problema com o computador e factores como o tempo de resolução não eram suficientemente fortes para as fazer mudar de estratégias. Estavam a resolver o problema analiticamente, com uma postura orgulhosa por o fazerem desse modo.

Neste problema, as alunas procuraram uma função, definida com uma só variável, para posteriormente encontrarem o extremo. A resolução foi feita com menos tentativas falhadas; na primeira tentativa não tiveram sucesso porque definiram mal a altura do cone.

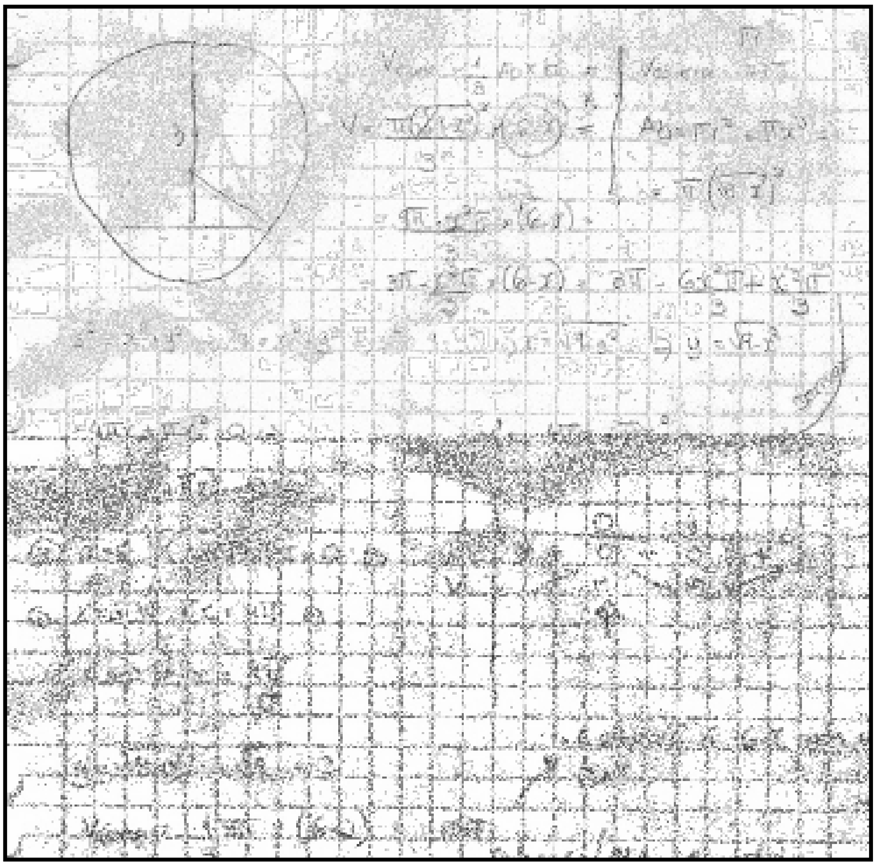


Figura 75. Resolução da Irina no problema *O Cone*.

Cometeram alguns erros algébricos que as impediram de chegarem rapidamente à solução; porém os erros não as fizeram vacilar, chegando a Irina a afirmar:

"Assim estou com alguma dificuldades, mas não estou desanimada porque acho que se fizesse com o computador ainda seria pior, aí teria logo dificuldades em começar."

A resolução deste problema foi mais rápida que a anterior e as alunas estavam contentes, apesar de sentirem que estavam mais atrasadas do que a quase totalidade dos colegas.

Problema – *As Vasilhas*

Neste problema as alunas decidiram trabalhar em conjunto, apresentando uma única resolução de grupo.A Irina e a Anabela consideraram este último problema como o mais fácil desta *Fase Final*. Cometeram alguns erros no início da resolução, mas acabaram por os identificar e prosseguiram a resolução.

Sem grandes dúvidas escreveram a expressão da área total do cilindro que tem volume 160 litros.

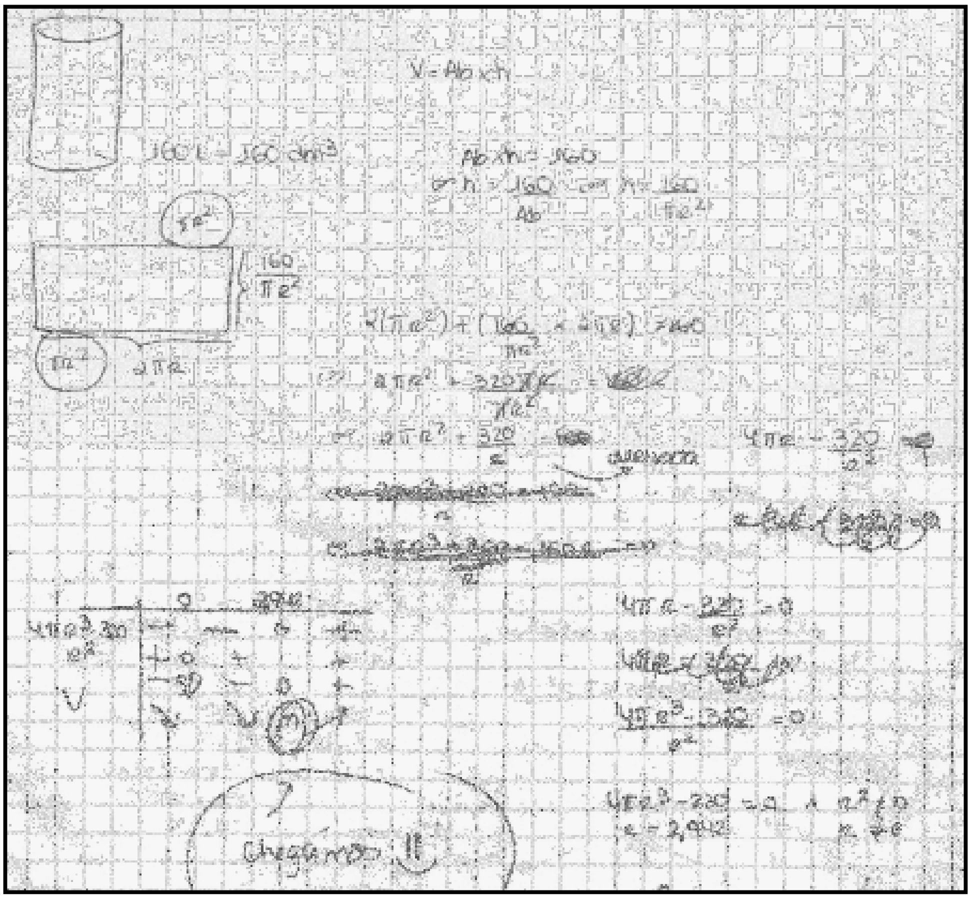


Figura 76. Resolução do problema *As Vasilhas*.

No fim as alunas estavam satisfeitas com a sua prestação, principalmente porque perceberam que acabaram por resolver todos os problemas da *Fase Final*, quase ao mesmo tempo dos colegas que estavam a resolver recorrendo ao computador.

As alunas, ao terem resolvido todos os problemas por um método analítico, no último problema, acabaram por definir, com naturalidade, a altura em função do volume e da área da base. Pelo contrário, os colegas que resolveram os problemas anteriores recorrendo ao computador, manifestaram grandes dificuldades em chegar à mesma função.

3.4.3. À conversa com a Irina e a Anabela

A tecnologia na aula de Matemática

As alunas não consideram importante que o professor recorra às tecnologias na sala de aula para desempenhar as suas funções, referindo a Irina:

"É um complemento, é uma maneira diferente, mas antigamente não havia nada destas tecnologias e havia grandes professores, portanto…"

O trabalho com o Sketchpad durante o ano lectivo

Nenhuma das alunas conhecia o programa, apenas o tinham utilizado pontualmente no ano anterior, mas numa perspectiva de trabalho diferente, segundo a Irina.

"Eu como não conhecia o programa então fui tentar aprender. Nunca gostei [um pouco receosa] *muito daquela forma de resolver os problemas* (risos) *...Não gostava muito daquilo, custava-me visualizar e tomar decisões, nunca sabia o que é que tinha que fazer. Tinha os problemas, começava a pensar como é que havia de resolver analiticamente e depois não conseguia perceber como é que havia de começar no computador, não é? Não sabia que construção… era isso…"*

Quanto à Anabela:

"Eu gostei de resolver daquela maneira, mas não… mas não consegui entrar bem no programa…Eu, nos primeiros [problemas] *que começámos a fazer, tentei começar logo a resolvê-los a partir do computador, com o programa, mas só nos últimos é que comecei a ver também analiticamente."*

Ambas as alunas referiram que no intervalo de uma semana, período mínimo entre as aulas que decorriam na sala de computadores, se esqueciam de determinados procedimentos, devido a não trabalharem regularmente com o programa. Contudo, as duas consideram que o *software* é acessível *"…relativamente fácil…",* acrescenta a Anabela.

A Irina descreve deste modo as dificuldades nas aulas de computadores:

"*…aquelas decisões que tínhamos que tomar, por exemplo com as funções, é preciso relembrar as hipérboles. No problema da piscina, por exemplo, NUNCA NA MINHA CABEÇA passaria a ideia de fazer alguma coisa desse género!*"

Esta afirmação da Irina surpreendeu-me um pouco, principalmente por ter vindo de uma aluna que, sem hesitar, optou durante a *Fase Final*, sempre pelo método analítico para as resoluções dos problemas. São as mesmas funções que utiliza para resolver analiticamente que permitem as construções no *Sketchpad*, pelo que questionei:

– Mas tu, quando resolves analiticamente, tens que usar essas mesmas funções! Ou seja, analiticamente, tens que recorrer a elas, porque é que quando estás a trabalhar com o computador, achas que é "uma coisa do outro mundo"!?

– Porque o que me vem à cabeça é desenhar as coisas e…ponho completamente de lado as funções …e depois pegar nelas e… é assim um bocado complicado, fica tudo muito confuso! – Conclui a Irina.

Potencialidades do Sketchpad. Vantagens do seu uso na sala de aula

Apesar de não serem muito apreciadoras do trabalho desenvolvido com o *Sketchpad*, quando questionadas sobre as suas potencialidades, reconhecem vantagens na sua utilização na sala de aula, como por exemplo a maior facilidade na visualização. A este propósito a Anabela conta:

"(...) principalmente é fácil a visualização, torna as coisas mais visíveis, mais concretas e dá para ajudar, como por exemplo naquele exercício do exame."

A aluna referiu como exemplo o problema que saiu no Exame Intermédio de Matemática, implementado pela primeira vez no ano em que decorreu este estudo a alunos do 11º ano, sem carácter obrigatório, mas que a escola decidiu implementar.

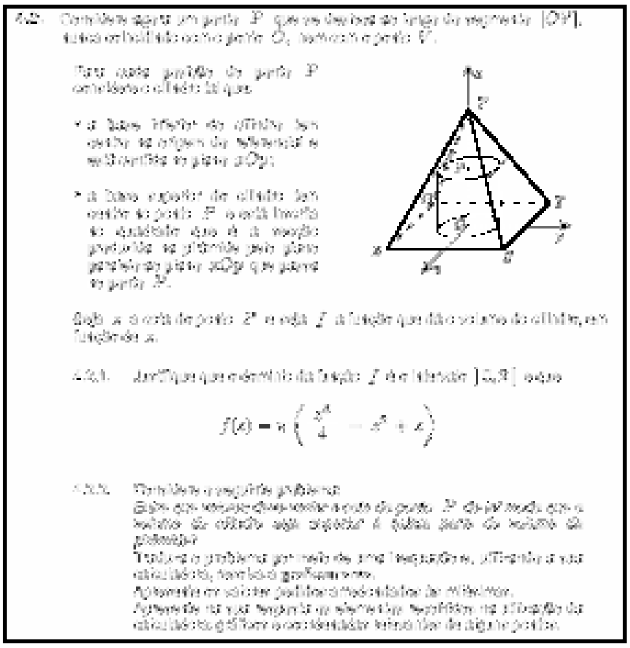


Figura 77. Problema a que se refere a Anabela do Exame Intermédio de Matemática do 11º ano. (Realizado pelos alunos em Maio de 2006 (versão 1).)

Quando questionada de que modo a utilização do *Sketchpad* na sala de aula a ajudou no exame, a aluna refere:

“ (…) *Por exemplo, no problema da Piscina* [Episódio 4, da *1ª Fase*]*, eu lembro-me que nós movíamos o ponto e tínhamos as opções, as várias piscinas… o poder mover o ponto e ver as diferentes posições, isso ajudou-me… era como no círculo trigonométrico, é mais fácil visualizar …ajuda imenso, mesmo quando estamos a resolver analiticamente…”*

Sobre a versatilidade do *Sketchpad* no 11º ano, a Irina diz:

“*Em relação ao programa do 11º ano, acho que é muito versátil porque permite trabalhar na Trigonometria, depois Geometria, Funções, não é demasiado específico, não é daqueles que só pode ser utilizado naquela altura e mais nada…”*

As duas alunas preferiam as aulas que decorriam na sala de aula normal às que ocorriam na sala de computadores e acrescentaram:

– Para os rapazes eram óptimas estas aulas. – Afirma a Irina

– Também há raparigas que devem gostar! –Acrescenta a Anabela.

Alterações aos papéis de alunos e professores

Ambas identificam diferenças nos papéis quer dos alunos, quer dos professores. A Irina expõe:

“*Acho que o professor deve guiar um bocado, direccionar um aluno quando ele não sabe, mostrar algumas curiosidades do programa para os alunos gostarem mais do programa… apoiar mais individualmente, tirando as dúvidas de cada um, e depois se forem pertinentes mostrá-las à turma.”*

Quanto ao papel dos alunos a Anabela menciona:

“*O professor deve deixar o aluno… é importante descobrir o programa e tentar…têm que se fazer várias tentativas para chegar à conclusão…vamos descobrindo o programa. Deve dirigir o aluno, mas deixar espaço…”*

Quanto ao desempenho dos alunos na sala de aula, ambas reconhecem que há diferenças a nível do envolvimento e participação por parte dos alunos; para além da maior motivação inicial por parte dos rapazes já mencionada, acrescentam:

"...Julgo que por exemplo a Isaura, a Marisa e a Fátima, acho que participavam muito mais nestas aulas, nas outras aulas estão sempre caladas, não participam."

Perguntei-lhes se encontravam alguma justificação para as diferenças na participação dos colegas e a Irina argumenta:

"*Em relação a elas, acho que é porque é uma forma diferente de aprender Matemática e se calhar para algumas pessoas é mais acessível, por isso gostam mais das aulas e empenham-se nas aulas, era diferente. Para os rapazes, acho que só pelo facto de ser com computadores eles querem logo mexer!"*

O desempenho dos alunos durante a resolução dos problemas

Durante a resolução dos problemas todos os grupos se envolviam na procura da solução, experimentando e testando as diferentes ideias que iam surgindo. Ao perguntar-lhes se sem o computador os colegas fariam de igual modo tantas tentativas, a Anabela respondeu:

"Não, porque é uma abordagem diferente à situação, mesmo que não comecem a pensar na função, começam a pensar, por exemplo, no problema da piscina, nas dimensões. É uma forma diferente, acho que se estivessem em frente ao papel não conseguiriam estar tanto tempo a tentar. Acho que com o computador fazem mais tentativas."

Durante as aulas em que se realizou este estudo, os alunos passavam períodos de tempo a executar diferentes tentativas, sem conseguir encontrar um caminho para resolver o problema. Naturalmente olhavam para os computadores dos colegas, que se estivessem mais adiantados teriam uma qualquer construção. Será que ao verem as construções dos colegas, estão a copiar? É diferente de copiar uma resolução analítica?

De forma peremptória responderam que era diferente!

"...porque só vemos o resultado e não vemos os passos que eles fizerem para conseguir pôr aquilo no programa."

"Enquanto que analiticamente vemos passo a passo o que é que a outra pessoa fez. Ele no computador vê só o resultado e tem que pensar quais os passos para chegar lá…analiticamente não… é… quer dizer não tem benefícios, é só copiar! Enquanto que no Sketchpad vê o resultado tudo bem…vê uma recta lá! Mas precisa de pensar o que é preciso fazer."

E a Irina continua:

"*Bem, para mim não dá resultado nenhum, vejo, por exemplo, lá uma recta e não sei como fazer, mas a outros colegas acho que sim que ajuda. Eu ficava mais baralhada, como é que pôs aquilo ali? Andava às voltas e não saía nada igual, às vezes parecia que estava, mas mexia um bocadinho e pronto!*

Eu preferia muitas vezes não olhar, estar concentrada só no meu a tentar resolver, porque se estava a olhar para os outros, enervava-me porque não tinha nada daquilo e não sabia como chegar lá."

A Irina acrescentou ainda que se sentia muitas vezes desorientada e bloqueada, só conseguindo progredir quando eu a ajudava. Quanto à Anabela:

"*Eu não me sentia assim tão desorientada, mas não gostava, não sentia muita segurança naquilo que estava a fazer."*

Quanto ao desempenho nas aulas com recurso ao computador, dos alunos com mais dificuldades na disciplina de Matemática, a Anabela refere:

"Eu acho que há muito mais participação, ali dá mais possibilidades, eles sentem-se menos inibidos porque na sala de aula [normal] *sentem que não percebem nada daquilo, não participam, acham que mais vale estar calado enquanto que ali dão sugestões! Não são ...são ...são coisas mais práticas, mais visíveis, qualquer pessoa pode ter uma opinião sobre como proceder sem ter, sem ... sem se sentir inferiorizado."*

Quanto ao facto de os alunos estarem mais dispostos para discutir nas aulas com os computadores, a Irina respondeu:

"Pois…eles ali sentem que estão em pé de igualdade porque ninguém teve preparação para ...para trabalhar com o programa."

A Anabela completa:

"Nenhuns alunos tiveram, logo o ponto de partida é o mesmo, enquanto que nas outras aulas, analiticamente, já tem a ver com o trabalho feito nos outros anos e aí alguns alunos sentem mais dificuldades…"

Comparação entre os métodos analítico e computacional

Ao longo da experiência, foram propostos vários problemas. Sobre o método de resolução com recurso ao computador, a Anabela defende que:

"Eu acho que nós pensamos mais!...É um modo diferente de visualizar o problema e vamos aplicando algumas construções anteriores que íamos fazendo em problemas anteriores, nos novos problemas. É como analiticamente, em que vamos aplicando coisas que aprendemos antes"

Quase todos os problemas foram resolvidos por dois métodos, analítico e computacional; as duas alunas preferiram sempre o processo analítico e quando puderam optar, como aconteceu na *Fase Final*, não hesitaram na escolha, apesar de todas as dificuldades que passaram e já descritas neste capítulo.

Importava, contudo, saber qual o valor, qual o mérito que as alunas atribuíam às resoluções obtidas pelos dois métodos. Assim expus a situação de terem para o mesmo problema duas resoluções, ambas correctas, só que uma obtida analiticamente e outra a partir do computador. Se tivessem que escolher uma delas qual seria?

"*A analítica, porque nós por experiência víamos que por exemplo nos máximos, problemas de máximos, havia sempre valores muito próximos, mas não iguais…e além disso, analiticamente, nós vemos toda a demonstração de como chegar à solução e no computador há muita coisa que nós nem sabemos como é que faz, apenas vemos os resultados e pronto!*"

A Irina complementa:

"…as duas resoluções podem estar correctas mas com o processo analítico conseguimos obter o valor exacto!"

Questionei-as se consideravam este factor importante, o de obter o valor exacto. Ambas afirmaram categoricamente que sim.

– É que analiticamente, está ali o raciocínio todo e com o computador não.

– Então com o computador há um pouco de… batota? É isso?– Questionei.

– Sim… simplifica um bocadinho o computador, há mais raciocínio enquanto que o computador faz algumas coisas. Sem nada é um desafio maior. – Refere a Anabela.

A *Fase Final* foi constituída por três problemas, o Canteiro, O Cone, e As Vasilhas. Na resolução do primeiro problema da *Fase Final*, O Canteiro, as duas alunas optaram pelo método analítico e passaram toda a aula com a sua resolução, terminando na aula seguinte. Contrariamente, os alunos que optaram por uma resolução com o computador terminaram rapidamente. Todavia, no problema *As Vasilhas*, o último, os alunos que escolheram o método computacional demoraram também mais de uma aula e só após muitas tentativas é que conseguiram resolver o problema. Por sua vez, A Irina e a Anabela que o resolveram analiticamente, fizeram-no num intervalo de tempo muito menor. Ou seja, o uso do computador na resolução de problemas não implica necessariamente rapidez ou menos trabalho. Assim, será que o trabalho desenvolvido pelos colegas tem menos valor?

"Não, é claro que tem valor pelo menos em relação a mim, acho que tem esse valor, pois eu pelo computador acho que nem conseguia. Só que eu prefiro analítico. Não é ter mais valor, só que acho que o raciocínio é diferente, um desafio maior."

Que influência tem, no momento de optar entre os dois processos de resolução, o facto de a avaliação, testes e exames, não obrigar à utilização do computador? Será que se o seu uso fosse obrigatório, como acontece com a calculadora gráfica, o cenário e as convicções se alterariam? A Irina responde:

"Acho que é bom nós sabermos fazer com o computador, mas a verdade é que nos exames não vamos ter essa ajuda."

A Anabela afirma:

"Seria simplesmente mais fácil, mas não sei se iria gostar mais de utilizar o computador… eu, a calculadora uso-a para corrigir, mas também não acho muita piada. Se nós soubermos como é que ela funciona, aí torna-se fácil, mas quando não sabemos aquilo dá um erro e fico desorientada, sem saber como resolver o problema enquanto que analiticamente tenho a minha resolução e tenho algo para ver e corrigir mais facilmente.

Nas perguntas para fazer só com a calculadora fico sempre mais insegura, nunca sei se a resposta está totalmente certa."

Sobre a mesma questão a Irina afirma:

"*Eu só uso a calculadora para as coisas mais básicas, às vezes para confirmar ou se analiticamente não consigo chegar lá… Depende tudo de uma grande concentração, senão sai tudo torto ou dá erros. Mas também não tem muita piada."*

Quanto às diferenças entre o computador e a calculadora, a Anabela termina:

"A calculadora tem muitas mais limitações [do que o computador] *e em termos visuais não é tão atractiva, eu acho a calculadora um pouco complexa. Às vezes também não me consigo orientar muito bem."*

Casos	Alunos	**Aula 0** Tinha intenção de usar o computador?	**1ª Aula**	**2ª Aula**	**3ªAula**	
Tecnológicos Convictos	**Bernardo**	Sim	*O Canteiro*	*O Cone*	*As Vasilhas*	FIM
	método		Computacional			
	Élio	Sim	*O Canteiro*			
	método		Computacional	Computacional	Computacional	
Tecnológicas Inseguras	**Isaura**	Sim	*O Canteiro*	*O Cone*	*As Vasilhas*	
	método					
	Marisa	Sim				
	método		Computacional	Computacional	Computacional	
Semi–Analíticas	**Sónia**	Não	*O Canteiro*	*O Cone*	*As Vasilhas*	
	método		Analítico			
	Inês	Não	*Canteiro*			
	método		Comp.–analítico – comp. - analítico	Computacional-analitico	Computacional	
Analíticas Convictas	**Anabela**	Não	*O Canteiro*	*O Cone*	*As Vasilhas*	FIM
	método		Analítico			
	Irina	Não	*O Canteiro*			
	método		Analítico	Analítico	Analítico	

Tabela 9. Resumo das opções e desempenhos dos grupos - caso durante a Fase Final.

Capítulo V – CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresentam-se as principais conclusões do estudo, de acordo com os resultados obtidos, assim como algumas considerações finais.

Este estudo pretendia investigar de que modo os alunos utilizam uma ferramenta tecnológica na resolução de problemas. Para atingir estes objectivos, foram definidas as seguintes questões de investigação:

a) O que leva os alunos a recorrerem ao uso das tecnologias na actividade de resolução de problemas?

b) Como se reflecte na resolução de problemas e nos processos desenvolvidos pelos alunos, a sua decisão de recorrerem ou não a uma ferramenta tecnológica?

c) De que forma é que os alunos identificam vantagens e desvantagens no recurso às tecnologias, no seu processo de resolução de problemas?

1. Razões para o recurso à tecnologia na resolução de problemas

Motivação

À excepção das alunas "*Analíticas Convictas*", que optaram sempre por um processo analítico, a maior motivação para o uso do computador foi claramente identificada pelos alunos como um dos factores que concorrem para o recurso às tecnologias nas actividades de resolução de problemas.

Os alunos sentem-se, de um modo geral, naturalmente motivados para a utilização das tecnologias na sala de aula. Neste estudo, constatou-se que havia sempre uma maior animação à porta da sala de informática do que da sala normal e sempre alguma expectativa acerca das propostas que lhes seriam apresentadas. Embora semanalmente houvesse uma aula na sala de informática, a mesma não era sempre destinada a trabalhar com os computadores. Por isso, muitas vezes, à entrada da sala, era habitual os alunos perguntarem-me “Vamos trabalhar com os computadores?”. As reacções dos alunos eram mais favoráveis quando lhes respondia afirmativamente.

Essa motivação é justificada pelos alunos com várias razões. Uma delas prende-se com o facto de os alunos sentirem que, à partida, durante a aula, não deveriam ser muito avaliados sobre os seus *conhecimentos* matemáticos (nem sempre na “ponta da língua”), como de um modo mais regular acontece na sala de aula normal. Este facto contribuía para uma maior descontracção, deixando os alunos mais descansados.

A circunstância de os alunos trabalharem em grupos de dois, nos computadores, permitindo uma constante troca de ideias dentro do grupo e mesmo entre os diferentes grupos, é apontada pela quase generalidade dos alunos como um factor que favorece o gosto dos alunos por este tipo de aula.

O próprio computador é, por si só, um elemento atractivo na sala de aula para muitos dos alunos. Como se considerou, em termos teóricos, esta predisposição para as tecnologias de informação e comunicação resulta do facto de o computador ser hoje um instrumento presente e relevante no quotidiano dos jovens, ao qual associam momentos e actividades de lazer e de satisfação. Posso corroborar esta afirmação a partir das observações feitas nas aulas em que vários alunos prolongavam a sua exploração do *software* ou ajudavam os colegas a manusear o programa, depois de concluírem as suas actividades. Nunca deram por encerradas as suas descobertas, procurando novos caminhos e não cruzando os braços após uma resolução nem ficando à espera de uma outra proposta de trabalho da professora.

Importa notar que, apesar de menos entusiastas da utilização do computador, as alunas “mais analíticas” também se envolveram sempre nas actividades propostas com o recurso ao computador. De acordo com os dados das entrevistas e com as observações que realizei, estas alunas preferiam usar um processo analítico mas não mostravam qualquer desagrado ou aversão pelo trabalho nos computadores. Só perante a possibilidade de escolha é que estas alunas enveredaram pela resolução analítica com a qual se identificavam mais. Durante a primeira fase, nunca manifestaram recusa ou rejeição pelo trabalho com o computador, empenhando-se, independentemente da dificuldade que pudessem sentir. O seu interesse era visível pelas solicitações frequentes que me faziam para esclarecer, dar apoio, ajudar na execução de determinados procedimentos com o *Sketchpad*.

Apoio

Os alunos encaram o computador como um aliado durante o processo de resolução de problemas. Todos os alunos entrevistados consideraram que resolver os problemas com recurso ao computador é mais fácil do que analiticamente. De acordo com os testemunhos recolhidos, embora o computador execute apenas as instruções dadas e não seja autónomo, todos consideram que há uma ajuda. O computador faz algumas coisas e, como tal, não têm que executar tudo sozinhos. Há a necessidade de elaborar uma construção de base mas, daí para a frente, para chegar a uma solução, o aluno sente que só tem de arrastar um ponto e examinar os valores para encontrar a posição correspondente à solução óptima. Para a maioria dos alunos, esta etapa de manipular a construção, corresponderia, na resolução analítica, à execução de um conjunto de procedimentos morosos e trabalhosos. É neste sentido que o computador funciona como um aliado ou amigo, evitando a fase dura da resolução analítica. Apesar de perceberem que a construção é o suporte essencial, permanece uma certa ideia de que há alguma parte que é o computador que faz…

O facto de eles sentirem que o computador é uma ajuda não é sinónimo de que o seu uso seja a via mais rápida e simples em todos os casos. Porém, verifica-se que os alunos não partilham desta ideia. Por exemplo, mesmo quando confrontados com o problema das *Vasilhas* da *Fase Final,* que muitos não terminaram ou estiveram cerca de uma aula a tentar resolver, todos os alunos entrevistados consideraram ter mais mérito a resolução analítica ainda que a computacional fosse mais exigente. Apesar de se sentirem mais apoiados quando usam o computador, ou talvez por isso, acabam por retirar valor ao seu próprio desempenho na resolução com o computador. Mesmo que a construção no Sketchpad para resolver um problema possa ser mais elaborada e demorada, os alunos atribuem essa menor eficácia a um desempenho menos perspicaz da sua parte.

Este dado está naturalmente associado às concepções que os alunos têm acerca da Matemática. Para um grande número de alunos, a Matemática é calculo e durante a resolução de problemas a ênfase é dada à resposta e não ao processo. Assim, se na resolução de problemas com o computador – em que a tónica está centrada nos processos – é o computador que executa todos os cálculos, os alunos encaram isso como uma grande ajuda, desvalorizando o seu papel de engendrar todo o processo que sustenta a solução que é obtida.

<u>*Género*</u>

As alunas *"Analíticas Convictas"* referiram ainda o facto dos colegas do sexo masculino estarem naturalmente motivados para as aulas com tecnologias, fazendo durante a entrevista os seguintes comentários:

"Para os rapazes eram óptimas estas aulas."

"*Só pelo facto de ser com computadores eles querem logo mexer!"*

Apesar de este estudo não ter como objectivo investigar a influência do sexo na apetência para as tecnologias, constata-se que na turma nenhum dos oito rapazes optaram pelo processo analítico e desde o início que nas aulas mostraram, de um modo geral, um grande desembaraço com o uso dos computadores.

Sabe-se que, por questões sócio-culturais, as crianças desde tenra idade são estimuladas de forma diferente atendendo ao sexo da criança, ficando essa diferença bem patente no tipo de diversões e brincadeiras que desde cedo começam a ter. Assim, podem-se associar às crianças do sexo masculino entretenimentos com jogos electrónicos enquanto que as do sexo feminino têm outro tipo de brincadeiras, com uma maior carga afectuosa, como é o exemplo das brincadeiras com bonecas.

Se bem que a ala direita da sala (ocupada só por rapazes) fosse a mais activa na utilização dos computadores, tem que se reconhecer que havia alunas com excelentes desempenhos no manuseamento do *software*. Nalgumas situações foi uma rapariga que primeiro avançou com ideias e sugestões pertinentes que permitiram desbloquear impasses gerados durante a elaboração dos *sketchs*. Foi o caso da ideia, proposta por essa aluna, de recorrer a uma função racional para construir um rectângulo de área fixa, no problema da *Piscina* (veja-se o Episódio 4).

Experiência

Outra questão oportuna é a de perceber qual a influência do trabalho desenvolvido com os alunos, até à implementação da *Fase Final,* nas opções que fizeram durante a mesma.

Com base no *Questionário Inicial*, sabe-se que os alunos tinham uma experiência muito pontual (duas ou três aulas) na utilização das tecnologias na aula de Matemática.

Nessa experiência episódica, usaram o *Sketchpad* para trabalhar com vectores. No presente ano lectivo, apenas tinham presenciado a utilização do *Sketchpad* como um "acetato dinâmico" no estudo da Trigonometria. Em suma, no início deste projecto, nenhum aluno tinha utilizado o computador na resolução de problemas de Matemática.

Ao longo do período de implementação da *1ª Fase*, estes alunos puderam trabalhar de forma prolongada e consistente na resolução de problemas com e sem o recurso ao computador. Desta forma, foi-lhes dada a possibilidade de experimentar e de comparar dois métodos de resolução – o computacional seguido do analítico, podendo recorrer, em qualquer momento, ao uso da calculadora gráfica.

Quando chegados à *Fase Final*, na qual os alunos podiam escolher o método a adoptar, constata-se que a esmagadora maioria enveredou pelo uso do computador. É razoável admitir-se que as experiências anteriormente realizadas nas aulas tenham exercido uma influência no momento da opção. Sem dúvida que os alunos ganharam treino, familiaridade, preparação no manejo do *Sketchpad* como uma ferramenta na resolução de problemas. Só assim, passando por um processo de aprendizagem em que os problemas foram sempre trabalhados pelos dois métodos, os alunos estavam em condições de fazer uma escolha ponderada. Se apenas um dos métodos tivesse sido alvo da prática nas aulas, isso implicaria que as opções feitas pelos alunos seriam distorcidas. Além do mais, julgo que a escolha ponderada não teria sido possível se os alunos tivessem aprendido a usar o *Sketchpad* sem ser com base na resolução de problemas.

2. Implicações da escolha dos alunos nos respectivos estratégias de resolução de problemas

Computacional

Os alunos referem que há uma maior abertura durante as resoluções com computadores do que no método analítico

Quando começaram a trabalhar com o *Sketchpad*, não tinham naturalmente apreendido a lógica de funcionamento do *software*. Assim, no processo de resolução, para os primeiros problemas, recorriam inicialmente à representação de um caso particular e só depois partiam para a generalização. Como exemplo, houve situações em que os alunos usaram o *Sketchpad* numa "lógica de fita-métrica" (veja-se Episódio 2). Também quando procuravam a distância da casa à rua (veja-se Episódio 1), os alunos não recorreram prontamente às capacidades dinâmicas, ou seja, ao arrastar dos pontos para encontrar o valor procurado. Em vez disso, fizeram várias medições, marcando sucessivamente novos pontos sobre a recta representativa da rua.

O uso do *software* na resolução de problemas amplia as possibilidades, tanto de manipulação como de visualização, favorecendo a formação de conjecturas, provocando a reflexão e estimulando a formulação e resolução de novos problemas.

De facto, o *Sketchpad* pode constituir-se como suporte tecnológico de um grupo de trabalho que procura resolver problemas. Neste quadro, quer o professor quer os alunos interagem, procurando pistas para a resolução dos mesmos. Ao professor compete assistir o aluno, proporcionando-lhe apoio e recursos, de modo que este seja capaz de fazer aquilo que dificilmente seria possível sem essa ajuda. Foi esta a filosofia subjacente à opção de fazer, sempre que me pareceu necessário, uma breve exposição de potencialidades e funcionalidades do software. Constatei que os alunos aplicavam essas capacidades da ferramenta e tiravam partido delas para a resolução do problema.

Atalho (batota)

Quando os alunos entrevistados se pronunciaram sobre o valor que atribuíam às resoluções produzidas por cada um dos métodos, todos, sem excepção, consideraram a resolução analítica como a mais meritória. Como justificação, e sabendo que eu valorizava igualmente as duas formas de resolução, basearam-se no facto de que o aluno, ao usar um método analítico, está entregue a si próprio e conta apenas com os seus conhecimentos, habilidades e capacidade de activação do seu saber matemático. Por outro lado, sentem que nos momentos de avaliação a resolução analítica é aquela que lhes é pedida e é com este método que têm de demonstrar os seus conhecimentos.

Em contrapartida, a resolução computacional, na perspectiva dos alunos, envolve uma componente que lhe é alheia, ou seja, sobre a qual o aluno não exerce nenhuma acção directa. O aluno encara o computador como o executor de uma parte da resolução do problema. Apesar de reconhecerem valor no trabalho da construção subjacente à resolução, a partir desta fase, sentem que é o computador o responsável pela obtenção da solução. Como consequência, o método computacional surge-lhes como uma espécie de subterfúgio, como um certo tipo de batota.

No computador, a dada altura, o aluno apenas precisa de arrastar um elemento da construção dinâmica e observar os efeitos dessa acção. Pelo contrário, no método analítico é sempre o aluno que está a executar procedimentos (algébricos, numéricos, geométricos…) até chegar à solução. Para alguns alunos, estes procedimentos revelam-se barreiras à progressão na resolução do problema ou pela dificuldade que lhe encontram ou pelo insuficiente domínio das técnicas exigidas. Neste cenário, é natural que estes alunos vejam a resolução computacional como um *atalho* que lhes permitiu alcançar o resultado pretendido sem ter que passar por caminhos que poderiam vir a ser tortuosos ou com obstáculos intransponíveis. Em certo sentido, o atalho funciona como um benefício mas retira valor à resolução do problema, à semelhança de uma comparação entre a comida caseira e a comida congelada pré-confeccionada que se vai comprar ao supermercado.

De novo, há uma interferência das concepções e das experiências vividas ao longo de todo um percurso escolar, já considerável, ligadas ao que entendem que é a actividade matemática, nomeadamente, na ênfase dada ao cálculo e aos procedimentos no ensino da Matemática.

Temos hoje orientações curriculares que apontam no sentido de alterar estas concepções e dar uma particular relevância aos processos e ao raciocínio matemático, em detrimento da execução rotineira de algoritmos e técnicas. Assim, parece inquestionável a importância do uso do computador na aula de Matemática e, em particular, como ferramenta para o aluno na resolução de problemas estimulantes.

Fases

As fases de resolução de problemas propostas por Polya ou Schoenfeld, não constituem por si só uma 'poção mágica' para resolver todo e qualquer problema matemático, no entanto, podem ajudar bastante a quem se propõe resolver problemas ou aperfeiçoar a sua técnica.

Certamente, quando Polya apresentou as quatro fases do seu modelo, há mais de meio século, não estava a pensar na resolução de problemas com o auxílio do computador. De que forma a utilização do computador se reflecte nas fases identificadas durante a resolução de problemas? O que é que o método computacional traz de novo e de particular às fases do modelo de Polya?

As heurísticas são um instrumento válido em ambos os tipos de resolução, com e sem computador, no sentido em que ajudam a organizar as ideias e a manter uma actividade sequencial mais coerente. Nos episódios descritos não sobressai o recurso a heurísticas por parte dos alunos no decurso da resolução dos problemas. Porém, estas estiveram presentes, principalmente pelo papel que desempenhei na sala de aula, nos momentos em que a turma não conseguia avançar, através das múltiplas interpelações a um aluno em particular ou a toda a turma. Eram os momentos da conversa aberta a todos, da discussão, do balanço do que já se tinha conseguido alcançar, tentando abrir um caminho para ultrapassar os impasses. É, assim, muito relevante o papel do professor em tornar as heurísticas presentes nos raciocínios dos alunos.

No que respeita às diferentes fases do modelo de Polya, os resultados apontam para algumas diferenças, em função do método utilizado na resolução do problema. Como decorre a compreensão do problema quando se recorre ao computador ou ao papel e lápis? É indiscutível que a compreensão do problema é essencial em qualquer das circunstâncias. Em todo o caso, na resolução analítica poderá haver casos em que os alunos passam por esta fase de uma forma mais ligeira, parecendo que têm uma compreensão completa mas tendo, muitas vezes, uma assimilação superficial da essência do problema apesar de serem capazes de chegar à solução exacta. Muitas vezes, há processos já rotinados ou o aluno possui uma bagagem de recursos matemáticos que lhe permite ir avançando de forma um tanto automatizada. Na resolução com o recurso ao *Sketchpad* parece que esta automatização é menos provável, uma vez que o aluno tem de conceber e criar uma construção de suporte. Essa construção dificilmente resultará ou mesmo surgirá sem uma compreensão efectiva do problema e das suas especificidades.

A passagem para a fase de elaboração de um plano poderá ocorrer de forma diferenciada. No método computacional as fases de elaboração e de execução do plano estão mais entrelaçadas e menos demarcadas. Na maioria dos episódios, os incidentes críticos testemunham o enlaçar destas duas fases. O aluno não define na íntegra uma estratégia ou um plano mas passa rapidamente à experimentação de uma ideia, hipótese, sugestão que surja, com o *Sketchpad*. Esta oscilação entre a ideia e a experimentação ocorre de uma forma natural. Dificilmente, um aluno avança para uma elaborada construção que venha a redundar em total fracasso. O que vai fazendo são pequenos testes às sucessivas ideias que lhe ocorrem com rapidez e sem a frustração inerente à falha após um grande investimento de esforços. É certo que o aluno pode igualmente fazer experiências com o papel e lápis, contudo parece que estas são mais morosas, mais penosas em caso de fracasso e mais susceptíveis de caírem por terra. Veja-se a resolução do problema *O Canteiro* efectuada pelas alunas que optaram pelo método analítico. Em contrapartida, no problema *As Vasilhas*, que tantas dificuldades levantou a quem optou pelo uso do *Sketchpad*, não se observaram construções trabalhosas que se tenham vindo a revelar como infrutuosas. A construção no computador parece obrigar, desde logo, a uma certa consistência; não há espaço para grandes "devaneios". É isso que se relata nos episódios. Mesmo que se notem avanços e recuos no uso do *Sketchpad* na resolução dos problemas, os erros que possam acontecer são erros que ensinam e se existe alguma falha, esta é detectada com mais facilidade e rapidez. Muitas vezes, o simples arrastar de um ponto móvel numa construção é suficiente para aferir da existência de falhas.

O teste da resistência das construções é um razoável indicador de que o percurso traçado está, à partida, correcto. Neste sentido, a quarta fase do modelo de Polya, a verificação, está um pouco disseminada pelas duas fases anteriores. Apesar disso, continua a ser importante após a obtenção da solução. De certa forma, o *Sketchpad* permite exibir a solução sob a forma de uma representação geométrica, dificultando o reconhecimento da necessidade de responder à questão colocada. Como exemplo desta resistência, pode referir-se, entre outros, o episódio relativo ao problema da *Canalização* no qual os alunos exibiam no ecrã a representação da solução óptima, com o respectivo custo. Contudo, não apresentavam a resposta ao problema, isto é, não referiam o modo de construir a canalização desde a central de gás até à fábrica. Só depois de lhes ter colocado várias questões e de contrapor as respostas desadequadas que iam surgindo é que os alunos acabaram por apresentar uma descrição do traçado de custo mínimo. O caso do problema da *Ilha* também exemplifica a riqueza da fase de verificação. Não estava em causa a validade da solução mas a justificação para a mesma, acabando por constituir, tal como Polya afirma, um novo problema.

No método analítico, a fase de verificação está mais demarcada e surge mais tardiamente. Como explicaram as alunas entrevistadas, a revisão dos procedimentos ocorre no fim do percurso, estando visíveis todos os passos efectuados. Assim, a verificação fica facilitada porque se pode avaliar toda a resolução, fazendo a sua reprodução. Nessa verificação, os alunos podem apoiar-se também no recurso à calculadora, mesmo que só parcialmente, como meio de confirmação dos seus resultados.

3. Vantagens e desvantagens do recurso às tecnologias

Visualização

A visualização foi uma das primeiras vantagens do uso das tecnologias referidas pelos alunos ao longo do estudo. Segundo Hitt (1995) visualizar não é o mesmo que ver, é uma habilidade para criar ricas imagens mentais que o indivíduo possa manipular na sua mente, ensaiando diferentes representações do conceito e, se necessário, usar o papel e o computador para melhor expressar a ideia matemática em causa.

Todos os alunos referem a visualização como uma vantagem da utilização do computador. Até quando o aluno opta pelo método analítico reconhece que o trabalho desenvolvido com o *Sketchpad* o ajuda a visualizar a situação do problema com mais facilidade. Deste ponto de vista, o computador contribui para o desenvolvimento da capacidade de visualização, isto é, torna o aluno mais capaz de criar e manipular imagens mentais. É usual encontrarmos nos exames nacionais e nos manuais escolares questões com esquemas que apelam a uma imagem dinâmica, em que há um elemento que não é fixo: um ângulo ou uma medida de um segmento. Aos alunos que nunca tiveram a experiência de trabalhar com um ambiente de geometria dinâmica é-lhes exigido um maior esforço de visualização e de interpretação da situação em comparação com outros que tenham manipulado uma construção dinâmica.

Apresenta-se, a título de exemplo, uma dessas questões em que a experiência do dinamismo sobressai e impulsiona a rápida visualização e compreensão do problema.

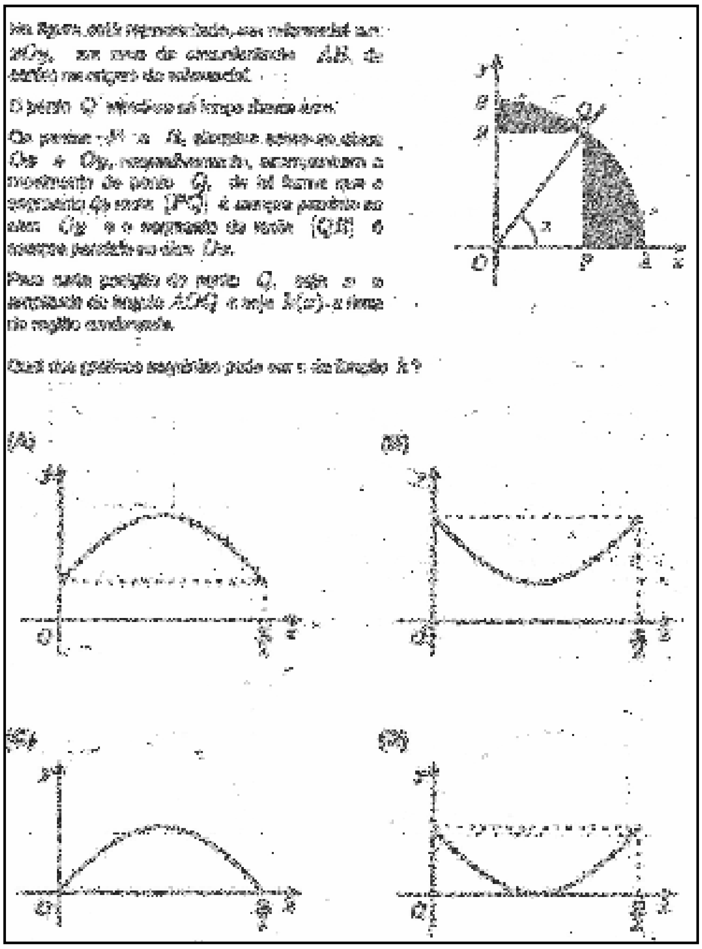


Figura 78. Questão de escolha múltipla saída em exame nacional.

Apesar de não terem o computador durante a realização de exames ou de testes escritos, os alunos reconhecem a importância do trabalho desenvolvido com o *Sketchpad* como forma de treinar a visualização e/ou a compreensão do problema. Esta foi uma das afirmações feitas pelas alunas "*Analíticas Convictas*" durante as entrevistas, como foi documentado oportunamente. Esta vantagem da utilização do computador não se sente apenas no acto da sua utilização e não termina com o desligar do computador, perdurando nas capacidades que se desenvolvem nos alunos.

A utilização das tecnologias na aula de Matemática é, por vezes, encarada como um adorno para motivar os alunos e tornar as aulas mais atractivas e interessantes. Reconhecendo este efeito das tecnologias, parece-me, contudo, uma visão limitada do seu papel. Como se constatou pelos comentários dos alunos, em especial das "*Analíticas Convictas*", a implementação das tecnologias na sala de aula deixa marcas significativas ao nível das competências e aptidões que os alunos têm oportunidade de desenvolver.

Isto contraria a noção que, por vezes, sobressai entre professores, de que o computador pode ser um entrave ao cumprimento do programa. Esta concepção denuncia uma visão estreita do currículo confinado aos conteúdos matemáticos. Olhando o currículo na sua íntegra, percebe-se que o computador e, em particular o Sketchpad, é um elemento impulsionador da concretização das finalidades do ensino da Matemática.

Solução exacta

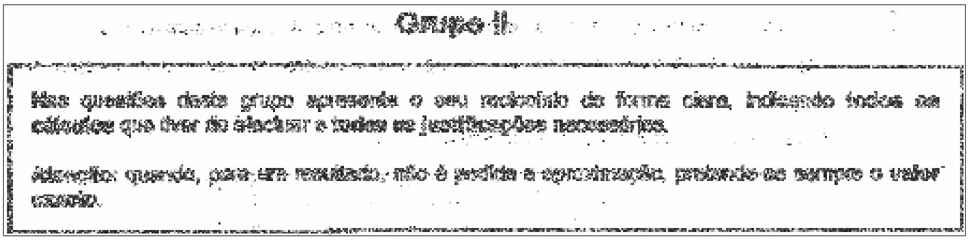
Uma das vantagens do método analítico referidas durante as entrevistas pelas *"Analíticas Convictas"* era a de obterem a solução exacta para o problema. As alunas mantiveram esta posição, mesmo quando eu tentei relativizar um pouco essa questão, contrapondo que isso só era possível porque os dados dos problemas eram escolhidos "à medida", ou seja, deliberadamente seleccionados de modo a permitir um método de resolução exclusivamente analítico, não podendo, por exemplo, envolver uma qualquer equação do terceiro grau.

Porém, entendo que a posição das alunas e mesmo a minha, de certa forma, é a imagem do ensino da Matemática prevalecente. Apesar das mudanças que se têm vindo a sentir com a implementação das tecnologias nas sala de aula, em particular com a calculadora gráfica, temos ainda uma escola muito baseada no ensino de algoritmos, de técnicas de cálculo ou resolução, de situações quase sempre especiais, ou seja, cuidadosamente seleccionadas de modo a permitirem a aplicação das técnicas tratadas. Com a chegada da calculadora e dos computadores à sala de aula, algumas destas técnicas, em que até aqui tanto se investia, deixaram de fazer sentido nesta perspectiva tecnológica.

No entanto, muitas vezes, na sala de aula surge a necessidade de justificar perante os alunos o ensino de determinadas técnicas e assim a razão alegada fundamenta-se na viabilidade de se encontrar o valor exacto. Por exemplo, no estudo da trigonometria, muitas vezes o aluno questiona a pertinência de ter que conhecer os valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, ou o porquê de ter que saber reduzir ao primeiro quadrante, quando tem uma calculadora que permite determinar o valor de qualquer razão trigonométrica, para qualquer ângulo, figurem ou não na tabela. A justificação, muitas vezes apresentada ao aluno, baseia-se na obtenção do valor exacto.

Também é prática corrente no ensino recorrer-se ao pormenor do valor exacto, para obrigar os alunos a seguir determinados processos de resolução, envolvendo técnicas e algoritmos estudados e treinados na sala de aula. Inclusive, os Exames Nacionais estão estruturados segundo esta filosofia.

Esta é uma evidência de como se manipulam as abordagens das questões, impondo uma determinada forma de actuar. No exame, os alunos sabem que só podem utilizar valores aproximados quando isso está expresso na questão, com indicação do número de casas decimais com que deve trabalhar, caso contrário, é-lhes vedada essa possibilidade.


Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o valor exacto.

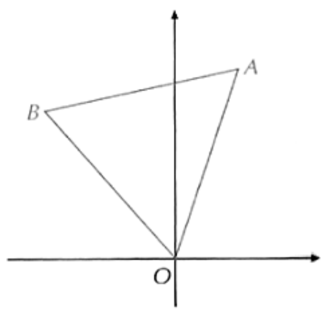
Figura 79. Informação que consta nos Exames Nacionais de 12º ano de Matemática no início do grupo com questões de desenvolvimento.

Há outras situações em que o processo de resolução fica condicionado pela obtenção de um valor exacto, sendo esta uma lógica habitual nos problemas dos manuais e dos exames nacionais, bem como nos respectivos critérios de resolução. O valor exacto funciona como uma sentença que determina o método de resolução.

O seguinte exemplo, extraído do manual escolar Espaço 12, das Edições Asa, é elucidativo da forma como se condiciona o caminho para a resolução.

No plano complexo, os pontos *O*, *A* e *B* são os vértices de um triângulo equilátero. Sabe-se que o ponto *A* é a imagem geométrica do número complexo $z_A = 1 + 3i$.

Determina as coordenadas do vértice *B*.



As coordenadas do vértice B, tal como são apresentadas nas soluções do manual, são: $B\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$. Um processo de resolução mais perspicaz passaria por escrever o número complexo Z_A na forma trigonométrica, necessariamente com um argumento que não corresponde a nenhum ângulo tabelado. O passo seguinte seria adicionar ao argumento de Z_A o ângulo de $\frac{\pi}{3}$, obtendo prontamente a solução se o aluno escolher usar as coordenadas polares.

Porém esta forma expedita de responder à questão fica interdita e, no caso de um exame nacional, será fortemente penalizada. O aluno tem sempre de identificar a rotação de A, centrada na origem e de amplitude $\frac{\pi}{3}$, como a multiplicação de Z_A por $cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$, mas é obrigado a trabalhar até ao fim na forma algébrica.

Percebe-se que seja natural que os alunos, estando sujeitos a estes tipos de constrangimentos, encarem os resultados obtidos no *Sketchpad* como menos rigorosos já que o programa apresenta valores aproximados. Portanto, esta é uma desvantagem que encontram no método computacional, apesar de acharem que o computador facilita e alivia as questões de cálculo.

Esta filosofia desperdiça o poder de execução de tarefas mecânicas e rotineiras que as ferramentas tecnológicas nos oferecem. Assim, na verdade, não estamos perante uma desvantagem do computador mas sim de uma vantagem que é inutilizada em determinado tipo de situações nas quais está implícita uma sobrevalorização do resultado em detrimento do processo.

4. Considerações Finais e Recomendações

Utilização pedagógica do computador

Os ambientes computacionais têm um importante papel na construção das aprendizagens quando são interactivos, flexíveis, mediados, controlados pelo aluno, assim como quando proporcionam as ferramentas para suportar um trabalho de grupo que permita construir novo conhecimento.

O que cabe observar é que cada uma destas ferramentas necessita de uma pedagogia apropriada e de uma metodologia a ser pensada e implementada. Ao querermos que o aluno comece a pensar matematicamente pretendemos que haja uma aprendizagem dos conceitos matemáticos, através da resolução de problemas, centrando mais as preocupações nos processos do que nos produtos. "A Matemática é sobretudo, saber fazer: é uma ciência na qual o método predomina sobre o conteúdo" (Guzmán, 1989, em Borralho, 1995). O trabalho desenvolvido com o *Sketchpad* é um bom exemplo da prioridade que deve ter o método sobre o resultado. No caso da construção de um quadrado, o produto pode ter a aparência de quadrado mas não ser mais do que o seu "desenho", ou seja, não verificar as propriedades necessárias para que a construção seja a de um quadrado resistente. Como professores de Matemática, o que nos interessa não é obviamente que os alunos rabisquem com o *Sketchpad* mas sim que recorram aos seus conhecimentos matemáticos e os apliquem na elaboração das construções.

A ideia pré-concebida de muitos professores de que os alunos têm de ter uma "formação" na utilização de um dado *software* antes de se iniciar um trabalho sério de realização de actividades matemáticas, é um equívoco. Neste estudo, o começo do manuseamento da ferramenta foi associado à própria actividade matemática e à resolução de problemas. Com efeito, a construção de um quadrado só constitui um problema quando o aluno desconhece a forma de trabalhar com a ferramenta. Para quem a domina minimamente é apenas uma rotina e uma construção trivial. Ao professor cabe o papel de apresentar o estritamente necessário das funcionalidades do programa em função das actividades propostas e dos conhecimentos dos seus alunos. Este trabalho de iniciação a certas potencialidades do *Sketchpad* deve ser feito de forma incisiva e integrada com a actividade matemática. A forma de ensinar os alunos a trabalharem com o *Sketchpad* constituiu para mim uma grande preocupação; várias hipóteses foram consideradas e ponderadas, acabando por ter optado pela metodologia referida que desde logo se mostrou eficaz, continuando a dar bons resultados.

Em suma, o facto de os alunos desconhecerem a ferramenta computacional não deve ser um factor inibidor mas antes ser visto como mais um recurso para a aula e como uma fonte de novos problemas interessantes do ponto de vista matemático.

Quando os alunos falam sobre a utilização da tecnologia na sala de aula, fazem-no segundo a perspectiva do professor e a do aluno que utiliza uma ferramenta. A tecnologia não é vista como uma componente essencial do processo de ensino-aprendizagem, mas como um importante aliado do professor, apoiando-o e funcionando como um complemento à função de explicar. Quando usada pelo aluno, funciona como uma ferramenta não discriminatória no desenvolvimento de actividades de exploração, uma vez que permite que todos os alunos experimentem, que se envolvam e que participem, mesmo os que frequentemente sentem embaraços com a Matemática, uma vez que todos estão munidos dos mesmos instrumentos que lhes permitem progredir.

Durante a resolução de problemas com o *Sketchpad*, o aluno cria os seus próprios modelos (tomando o conceito em sentido amplo) para expressar ideias e pensamentos e as suas concretizações mentais são exteriorizadas. Uma vez construído o modelo, através dos ambientes dinâmicos, o aluno pode reflectir, experimentar, ajustando e/ou modificando as suas concepções. Neste sentido, estes ambientes são veículos de materialização de ideias e pensamentos.

O produto do trabalho do grupo pode ser apresentado com benefício sob a forma de relatório escrito, que contenha os passos dados, as conjecturas resultantes das evidências, e, sempre que possível, a demonstração das conjecturas formuladas. Esta forma de apresentação permite, para além da avaliação dos conhecimentos apreendidos, a avaliação dos processos utilizados, ao mesmo tempo que incentiva o desenvolvimento da capacidade de expressão e comunicação escrita, e promove a valorização de atitudes de respeito interpessoal e de cooperação, tão importantes para uma cidadania responsável.

Outros produtos relevantes são os ficheiros com os *sketchs* dos alunos, gravados ao longo da aula. O facto de os alunos terem a possibilidade de fazerem gravações sequenciais (com a opção *Documents Options*) e de o *Sketchpad* atribuir uma hierarquia aos objectos que compõem a construção, permite ao professor analisar detalhadamente o percurso realizado na resolução do problema.

Carácter problemático

Como discutido no enquadramento teórico deste estudo, há um carácter relativo no conceito de problema, ou seja, o que constitui um problema para um indivíduo não tem que o ser para outro. Porém, deste trabalho ressalta ainda que a utilização do computador na resolução de problemas influencia a própria natureza do problema, ou como menciona Schoenfeld (1992), pode tornar o *problema problemático*. Analisando em particular os problemas resolvidos na *Fase Final*, torna-se evidente que o mesmo problema tem diferentes graus de desafio e de dificuldade quando se utiliza ou não o computador. Neste estudo, o problema *O Canteiro* mostra de que modo o recurso ao *Sketchpad* altera a sua essência problemática. Todos os alunos que optaram por esta via mostraram alguma destreza na construção e apresentação da solução. Constitui pouco mais do que uma tarefa rotineira quando se utiliza o computador. Porém, a mesma proposta tornou-se bem mais exigente e complexa quando as alunas optaram por uma via analítica. A mesma situação ocorre, de modo inverso, no problema *As Vasilhas*. Aqui, os alunos que optaram pelo método computacional foram os que se depararam com uma situação para a qual um plano não era imediato.

Neste estudo ficou também patente o modo como a utilização do computador pode alterar este *carácter problemático* dos problemas. O uso da tecnologia possibilita a antecipação de um problema naquilo que seria a sequência curricular habitual. Esta antecipação altera o carácter problemático do problema, muitas vezes, tornando-o maior.

Como exemplo, o problema da Piscina (veja-se o Episódio 4) apresentava-se como uma aplicação do estudo das derivadas, uma situação rotineira envolvendo apenas o estudo da monotonia e extremos de uma função. Todavia, quando este problema foi apresentado aos alunos na *1ª Fase*, ainda não se tinha iniciado o estudo das derivadas. Assim, transformou-se no problema de construir no *Sketchpad* "todos" os rectângulos com área 18. A abordagem alterou-se completamente!

Uma vez encontrada a solução, analiticamente ou com o recurso ao computador, a resolução dinâmica permitida pelo Sketchpad promove uma consciência diferente da natureza do problema. Enquanto que uma resolução analítica é mais fechada, a resolução computacional faz emergir inúmeras situações particulares, com o arrastamento do ponto móvel, favorecendo junto do aluno a criação de uma imagem mais completa das implicações do problema e da solução.

Pares pedagógicos

Um dos aspectos que os alunos referiram e eu senti, como professora, foi a dificuldade em atender ao mesmo tempo todas as solicitações dos alunos. Quando se trabalha com uma turma onde há um número considerável de grupos – neste estudo eram onze – o apoio aos alunos fica um pouco mais dificultado. Estes aspectos foram referidos pelos alunos entrevistados, fazendo notar como uma boa ocorrência o facto de a professora Susana Carreira se encontrar na sala de aula com computadores, apoiando os alunos.

Assim, seria interessante que as escolas promovessem parcerias entre professores de Matemática, permitindo um maior apoio na sala de aula e mesmo fora dela, com o intercâmbio de ideias entre colegas, no sentido de propiciarem mais e melhores momentos de ensino e aprendizagem. Do que me pude aperceber através desta experiência, entendo que uma forma de operacionalizar os pares pedagógicos poderia ser a marcação semanal de uma aula, na qual o par de professores trabalharia em conjunto, podendo envolver ou não o recurso aos computadores. Em todo o caso, parece oportuno que se promovam nestas aulas actividades que sejam centradas nos alunos, como é o caso da resolução de problemas.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. e Veloso, E. (1997*). MAT789 - Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só) … Revista de Educação. Nº2. pp 7-10,35.

Abrantes, P. (2005). *Viagem de ida e volta*. Lisboa: APM.

Abrantes, P. (2005). *Intervenções em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Abreu, M. (2003). *Os Professores de Matemática e a Resolução de Problemas na Gestão do Currículo*. Lisboa: APM.

Amorim, I. (1996). *Jogar na Bolsa com uma Folha de Cálculo*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

APM. (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM., IIE. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

APM. (1998). *Matemática 2001*. Lisboa: APM.

Belmiro, C., Resende, L., Rodrigues, E. (2004). *Espaço 11*. Porto: Edições ASA.

Belmiro, C., Resende, L., Rodrigues, E. (2005). *Espaço 12*. Porto: Edições ASA.

Blanco, L. (2000). La resolución de problemas de primaria. Una propuesta para la formación inicial de professorado. In J. Carrillo e L. Contreras (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del Siglo XXI: una visión internacional desde múltiples prespectivas y niveles educativos* (pp. 207-235). Huelva: Hergué

Blum,W. e Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Others Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics, Instructions. *Educations Studies in Mathematics, nº22, Vol. 1*, pp. 36-68.

Boavida, A. (1993). *Resolução de problemas em Educação matemática: contributo para uma análise epistemological e educative das representações pessoais dos professores*. Lisboa: APM.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1982*). Qualitative Research for Education*. Bóston:Allyn and Bacon, inc.,

Borasi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies in Mathematics vol 17 (2),* pp.125-141.

Borralho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção*. Lisboa: APM.

Brown, M.,Fernandes, D., Matos, J. e Ponte, J. (1992). *Educação e Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Canavarro, A. (2005). O currículo do ensino básico em Matemática em Portugal:caminhos e encruzilhadas. In Encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes – Actas, (pp. 43-68). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Carreira, S. (2003). Problems solving with technology. How it changes students mathematical activity. *Technology in Mathematics Teaching*. Volos: New Technology Publications.

Chi, M.,Glaser, R. (1983). Expertise in problem solving. In R. Sternberg(Ed*), Advances in the psychology of human intelligence*, Hillsdale, N.J. :Lawrence Erlbaum Associates.

Coelho, M. (1996). *O Cabri-Géomètre na resolução de problemas*. Lisboa: APM.

Denzin, N. (1989*). Interpretive Interactionism*. London: Sage.

Domingos, A.(1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Lisboa: APM.

Domingues, M. (1999*). A calculadora gráfica no ensino/aprendizagem das funções*. Lisboa: APM.

Dunham, P.(1992)..Teaching with Graphing Calculators: A Survey of Research on Graphing Tecnhonology. *In Proceeding of the Fourth Internacional Conference on Technonology in Collegiate Mathematics*. Adisson-Wesley Publishing Co.

Farrel, M.(1990). *Teaching and Learning Beahviors in Technology-Oriented Precalculus Classrooms*. (P.h.D. diss.).Ohio State University.

Flick, Uwe. (2005). *Métodos qualitativos na Investigação Científica*. Lisboa: Monitor – Projectos e Edições Lda.

Fonseca, L. (2000). Problemas com Aparatos. *ProfMat 2000 - Actas*, (pp. 311-325). Lisboa: APM.

Frank, M. (1992).Resolução de problemas e concepções acerca da Matemática. *Educação e Matemática, nº21*. Lisboa: APM.

Furner, J. (2005). *Geometry Sketching Software*. Cheapeake,VA :AAC

Gomes, F., Viegas, C. (2005). *XEQMAT*. Lisboa: Texto Editores.

Graça, M. (1995). *Avaliação da resolução de problemas: Contributo para o estudo das relações entre as concepções e as práticas pedagógicas dos professores*. Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2005). Os novos Standards do NCTM na entrada do século XXI. *Educação e Matemática, nº84*, pp. 2-5.

Guzmán, M. (1989). Tendências actuais do ensino da Matemática. Jornal de Matemática Elementar,88, 8-15.

Johnson, D. e Johnson, R. (1990). Using cooperative learning in Math. In Neil Davidson. *Cooperative learning in mathematics*. Addisson-Wesley

Jonassen, D. et al. (1999). *Learning With Technology: a constructivist perspective*. Upper Sadle River: Prentice Hall.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante, 2* (1), pp. 63-78.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da Geometria em Ambientes Computacionais Dinâmicos*. Lisboa: APM.

Junqueira, M. e Valente, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Were Do Good Problems Came From? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale. Lawrence Erlbaum Associates.

King, J. e Schattschneider, D. (1997). *Geometry turned On-dinamic software in learning, teaching and research*. Washington: Mathematical Association of America.

Laborde, C. e Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177-192). Berlin. Springer-Verlag.

Lester, F. K & Charles, R. I (1992). A framework for research on problem-solving instruction. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 1-15). Berlin: Springer-Verlag.

Lester, F. K. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de matemática? A situação nos Estados Unidos. *Resolução de problemas: processos* *cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13- 31). Lisboa: IIE.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reúno Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. Leal e J. Ponte (orgs). *Investigar para Aprender Matemática* (textos seleccionados), pp. 73- 88. Lisboa. APM.

Matos, J. (1991). *LOGO na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de doutoramento). Lisboa: Projecto Minerva, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. (1992). Atitudes e Concepções dos Alunos: Definições e Problemas de Investigação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática*, pp. 105-114. Lisboa: IIE.

Miskulin, R. (2000). Aprendizagem Colaborativa em Educação Matemática: Uma Abordagem Interativa através do Ambiente Computacional E-Team. *ProfMat 2000 – Actas* (pp. 175-180) Lisboa: APM.

Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática, nº1*, pp.10-12.

Moreira, L. (1989). *A folha de cálculo na Educação da Matemática: uma experiência com alunos do ensino Preparatório*. Lisboa: APM.

Newell, A. e Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall.

Nickerson, R., Perkins, D.e Smith, F. (1987). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual*. Madrid: Paidós/MEC.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L. Hoelzl, R.(1994). Constructing meaning for constructing: na exploraty study with Cabri Géomètre. Em J.P. Ponte e J.F.Matos (Eds.), *Proceeding of the Eighteenth Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education (III)* (pp.360-367).Lisboa:Program Committee of the 18th PME Conference.

Papert, S. (1994*). A Máquina das crianças: repensando a escola na era Informática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Paupitz, S. (2003). *Avaliação da aprendizagem de geometria em ambientes dinâmicos: um novo olhar no processo mediado pela tecnologia*. Lisboa: APM.

Poggioli, L. (2001). *Estrategias de resolución de problemas*. Serie Enseñhando a aprender. Caracas: Polar.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. e Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Oliveira, H., Cunha, M. e Segurado, M. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. (2000). Tecnologias de informação e comunicação de professores: que desafios?. *Revista Ibero-Americana, nº.24*. pp. 63-90.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Lisboa: APM.

Sanchez. J. (1999). *Nuevo Software para Nuevos Médios. Ambientes de Software Interactivos para Aprender (ASIA).* San Juan. Universidade do Chile.

Santos, L. (2005). *Estudo comparativo entre pontos e testes.* Almada: ESE Jean Piaget.

Scho*enfeld, A. (1980). Teaching problem solving skills.* American Matematical Monthly, 87(10), 794-805.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*(p. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding throught continous variation of geometric configuration. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 10*(3), 81-105.

Schwartz, J. (1993). A personal view of the Supposer: Reflections on particularities and generalities in educational reform. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 3-15), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sousa, A. (2005). *Investigação em educação*. Lisboa: Livros Horizonte.

Spradley, (1980). *Participant Observations*. New York: Rinehart and Winston.

Squires, D. (1994). *Choosing and Using Educational Software: A Teacher's Guide*. London: The Flamer Press.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis*. Lisboa: APM.

Veloso, E. (1998) *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (2002). The Geometer's Sketchpad (versão 4). *Educação e Matemática, nº66*, pp 20-23.

Yánez, J.. (2001). Aprender desde la resolución de problemas. *ProfMat 2001 – Actas* (pp. 71-80). Lisboa: APM.

Sites da Internet:

Figueiredo.(2000).http://users.prof2000.pt/agnelo/comunicar/avalsoft.html;site (acedido em 20-01-2007)

NCTM.(2000).http://standardstrial.nctm.org/document/chapter2/techn.html.site (acedido em 30-03-2007)

Silveira. (2001). http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html; site (acedido em 12-02-2007)

ANEXOS

ANEXO 1 – Questionário Inicial

Este questionário insere-se num estudo para uma tese de mestrado, sobre a implementação de novas tecnologias na aula de Matemática. É anónimo! Obrigada.

1. Tem computador em casa? ☐ Sim Não ☐

2. Usa regularmente o computador? Sim ☐ Não ☐

3. Em que situações usa o computador? (assinale com **x** as opções correctas)

3.1. Internet ☐

3.2. Trabalhos da escola ☐

3.3. Contactar amigos ☐

3.4. Jogos ☐

3.5. Software específico Qual? ☐ ___________________________

3.6. Outras? ____

4. Já trabalhou alguma vez com computadores na aula de Matemática?

Sim ☐ Não ☐

4.1. Se respondeu **SIM** à questão anterior:

4.1.1. Quantas vezes? (aproximadamente) ___________

4.1.2. Em que ano (s) de escolaridade? __________________

4.1.3. Recorda-se qual o programa utilizado ou em que matérias teve essas aulas?

4.1.4. Como decorreram essas aulas?

(Na sua resposta refira, por exemplo, alguns destes aspectos: se gostou…; se corresponderam às expectativas…; se gostou do(s) programa(s) de software… ; se percebeu qual o objectivo da aula …;como gostaria que tivessem decorrido...)

____

____

____

____

4.2. Se respondeu **NÃO** à questão anterior:

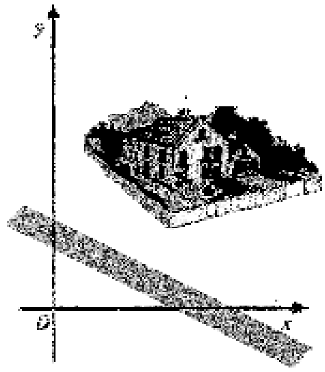
4.2.1.Gostaria de vir a trabalhar com computadores na aula de Matemática?

Sim ☐ Não ☐

4.2.2. Quais as expectativas relativamente às aulas de Matemática em que se utilizem computadores ?

5. Tem alguma sugestão a fazer sobre o uso de computadores na aula de Matemática?

ANEXO 2 – Actividade: Da Casa até à Rua



Pretende-se fazer a ligação do saneamento e água potável a uma vivenda em construção. Para isso, é necessário fazer ligações da casa à canalização principal que passa ao longo da rua

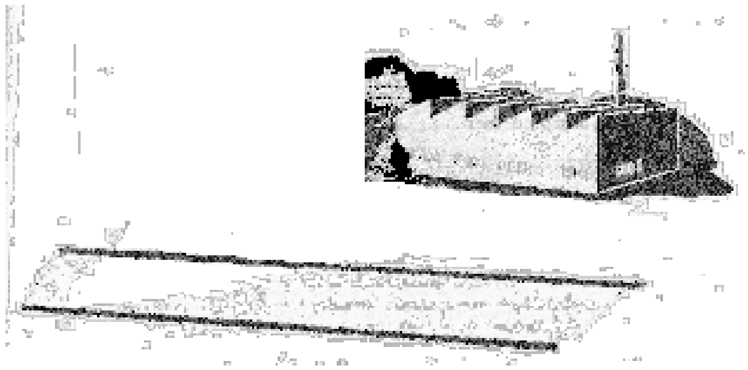
De acordo com o esquema da figura, relativamente ao referencial o.n. xOy, cuja unidade é o decâmetro, a casa situa-se em A(6, 9) e a rua obedece à equação x + 3y = 2. Que quantidade de tubo é necessária para fazer as ligações?

1ª Como foi representado o esquema?

2º Como procedeu para obter a distância da casa à rua?

ANEXO 3 – Actividade: Canalização da Fábrica

Uma canalização de gás vai ser instalada a partir do ponto central (A) até uma fábrica(B), atravessando um rio.



Condições da figura :

• Largura do rio , $\overline{AD} = 5$m

• Distância da fábrica ao rio, $\overline{CB}$ =7 m

• $\overline{CD} = 15$

Custos:

• cada metro de canalização instalada em meio aquático tem o preço de 140,00 €;

• cada metro de canalização instalada em terra tem o preço de 100,00 €.

Pretende-se saber como efectuar a canalização de modo a minimizar os custos.

1ª Como representou o esquema do problema?

ATENÇÃO: As medidas apresentadas nas condições da figura são fixas.

2º Quantos traçados da canalização é possível fazer? Qual o mais caro?

3º Como obter o custo total da canalização?

4º Qual o melhor traçado? Recorrendo à calculadora gráfica procure o custe mínimo da canalização e o respectivo traçado.

ANEXO 4 – Actividade: As Duas Aldeias…

As Duas Aldeias…

As aldeias de *Cicouro* e de *Constantim* encontram-se do mesmo lado do rio. As distâncias mínimas de *Cicouro* e *Constantim* ao rio, são respectivamente de 5Km e 2 km, A distância entre as duas aldeias, medida na horizontal é de 15 km.

Dizem as pessoas destas aldeias que a água desse rio é milagrosa!

O Sr. Nuno vive em *Cicouro* e vai a *Constantim* visitar a mãe, que se encontra doente. Ele decidiu então passar pelo rio, para apanhar água e levar à sua mãe.

Qual o percurso que ele deve seguir de modo que a distância percorrida seja mínima?

1ª Como representou o esquema do problema?

ATENÇÃO: As medidas apresentadas no enunciado são fixas.

2º Quantos percursos são possíveis fazer? Qual o mais longo?

3º Qual o percurso mínimo? Qual a posição desse ponto, que representa o local onde se deve retirar a água do rio, relativamente à localização das aldeias?

4ºRecorrendo à calculadora gráfica procure a distância mínima percorrida e o respectivo percurso.

ANEXO 5 – Actividade: A Ilha (parte I)

Um milionário surfista comprou uma ilha nos mares do sul em forma de triângulo equilátero. Cada um dos lados é uma praia óptima para fazer surf,ele pretende construir uma casa num ponto tal que a soma das distâncias da casa às três praias seja a mínima possível. Isto para que o conjunto das três estradas a abrir no arvoredo tropical custem o menos possível — é milionário mas é poupado. Em que posição da ilha deve construir a casa?

1º Descreva os passos efectuados para obter a solução do problema.

2º Procure uma justificação para a solução do problema.

ANEXO 6 – Actividade: A Ilha (parte II)

Um milionário surfista comprou uma ilha nos mares do sul em forma de triângulo equilátero. Cada um dos lados é uma praia óptima para fazer surf, ele pretende construir uma casa num ponto tal que a soma das distâncias da casa às três praias seja a mínima possível. Isto para que o conjunto das três estradas a abrir no arvoredo tropical custem o menos possível — é milionário mas é poupado. Em que posição da ilha deve construir a casa?

1º Descreva os passos efectuados para obter a solução do problema.

2º Procure uma justificação para a solução do problema.

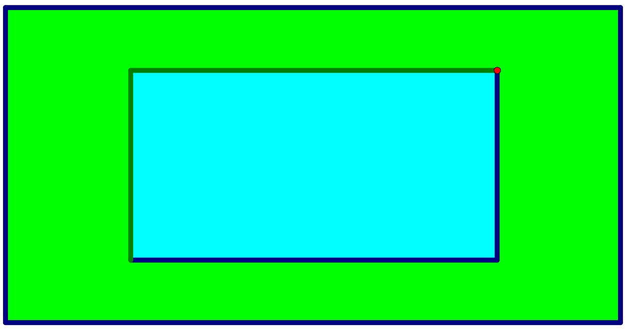
3º E se o triângulo não for equilátero?

4º Como se pode construir uma das demonstrações do problema?

ANEXO 7 – Actividade: A Piscina

Pretende-se construir uma piscina rectangular com 18 m^2 de área. A piscina vai ser rodeada por um relvado, que terá nos topos 1m de largura e 2m nas partes laterais.

Calcule as dimensões do terreno para que a área do mesmo seja mínima.



1º Descreva os passos para construir a piscina.

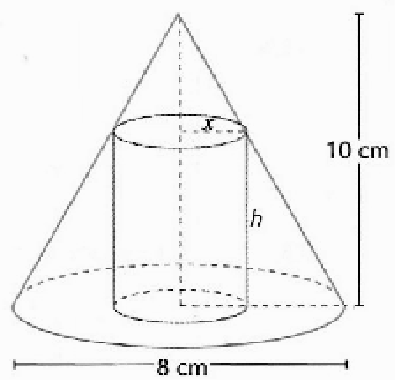
2º Descreva os passos para construir o relvado.

3º Quais as dimensões do terreno para que a sua área seja mínima? Utilizando as funções no SKETCHPAD procure a solução do problema.

ANEXO 8 – Actividade: O Cilindro e o Cone

A partir de um cone de madeira com 10 cm de altura e 8 cm de diâmetro de base pretende-se construir um cilindro. Designa por x o raio do cilindro e por h a altura.

Determina as dimensões do cilindro para que o volume seja máximo.



ANEXO 9 – Guião das entrevistas

(INDIVIDUALMENTE)

Relação com a Matemática

1– Desde a primária, como foi o percurso escolar na disciplina de Matemática?

2– Quais os hábitos de estudo em casa?

3–O que é necessário para se ser um bom aluno de Matemática?

4–O que é relevante num professor de Matemática para ser um bom professor?

5– O que gostam mais e menos em Matemática?

Relação dos alunos com as tecnologias

6–Como ocupa o tempo no computador? O que faz?

7–Tem uma cópia do Sketchpad?

Se responde afirmativamente à questão anterior

8–Fora das aulas, dedicaram tempo a explorar SKETCHPAD?

9–Recorreu ao Sketchpad, para a resolução de algo específico? Num trabalho de casa? Ou só para explorar o software?

EM GRUPO

Este ano….

10–Qual a vossa opinião sobre o programa Sketchpad, utilizado durante as aulas?

11–Quais as potencialidades que encontraram no programa? Como o classificariam?

12– Qual a diferença entre o ambiente das aulas que decorreram na sala de informática e as outras na sala de aula normal?

13– Qual o papel do professor nas aulas com recurso aos computadores?

14–E o papel do aluno, é o mesmo?

15–Copiar com as construções do Sketchpad é como copiar uma resolução analítica de um problema?

16– O que sentiram / qual a impressão da utilização do computador na resolução dos problemas durante a *1ª Fase* da experiência?

17– Quase todos os problemas foram resolvidos analiticamente na aula, qual a resolução preferida. PORQUÊ?

Confiança nas ferramentas…

– Têm confiança na resolução do computador? e em si próprio ?

– Quem é que efectivamente resolve? O aluno ou o computador?

– Durante a resolução de problemas com o computador, quem é que comanda? O computador ou o aluno que dá as instruções?

– Qual o tipo de resolução mais válida? Mais meritória? A analítica ou a computacional..?

– Qual a opinião sobre os colegas que resolveram os problemas da *Fase Final* pelo processo diferente do que vocês utilizaram?

– Supondo que são professores e dois dos vossos alunos resolvem o mesmo problema, com processos diferente, um analítico e outro com computador. Atribuíam a mesma nota às duas resolução?

– Como é encarada a ajuda do computador?

– Comparação de dois problemas e respectivas resoluções da *Fase Final,*

O *Canteiro* $\rightleftarrows$ *As Vasilhas*

+ *Fácil Sketchpad*	+ *fácil analiticamente*
+ *Difícil analiticamente*	+ *difícil Sketchpad*

– O facto do computador não ser obrigatório, como acontece com a calculadora, acham que tem influência na forma como os alunos encaram esta ferramenta (computador)?