Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

O SENTIDO DAS OPERAÇÕES NOS ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

José Afonso dos Reis Martins

Dissertação apresentada para obtenção do grau de

Mestre em Didática e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Faro
2011

Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

O SENTIDO DAS OPERAÇÕES NOS ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

José Afonso dos Reis Martins

Dissertação apresentada para obtenção do grau de

Mestre em Didática e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Orientadoras:

Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

Faro

2011

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender de que forma os alunos, perante uma questão que se resolve pela aplicação de uma operação aritmética, escolhem essa operação. Tal propósito resultou das dificuldades que os alunos manifestam nas minhas aulas e que outros professores também detetam frequentemente. Por outro lado, o problema tem sido alvo de diversas investigações, sendo claro que não há ainda uma resposta satisfatória, o que confere pertinência ao presente estudo.

O quadro teórico centra-se na noção de sentido da operação, discutindo pormenorizadamente várias interpretações de uma mesma operação. Essas diversas interpretações têm implicações na forma como os alunos decidem que operação aplicar. Para orientar o desenvolvimento do estudo, formulei quatro questões de investigação:

1. É possível identificar situações em que os alunos apresentam mais ou menos dificuldade na identificação da operação a efetuar?
2. Quando os alunos não identificam a operação correta, que operação escolhem?
3. É possível encontrar justificação para as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação das operações?
4. As respostas às questões anteriores poderão dar-nos indicações para melhorar a aprendizagem dos alunos?

Foi construído um instrumento, composto por um conjunto de tarefas, com maior incidência nas operações multiplicativas e envolvendo números inteiros e decimais. A sua aplicação foi feita no ano letivo de 2009/2010 a três turmas do 5.º ano, três turmas do 6.º ano e três turmas do 7.º ano de escolaridade, em escolas do Algarve e da região de Lisboa, num total de 158 alunos.

De acordo com a natureza das questões de investigação, e considerando as várias opções metodológicas na investigação em Didática da Matemática, adotei uma metodologia mista, que se apresentou como a mais adequada.

Da análise dos dados sobressaíram diferenças entre as várias situações de utilização das operações. As operações aditivas revelaram-se de mais fácil interpretação do que as multiplicativas. Nestas últimas, a divisão (razão e comparação multiplicativa) e a multiplicação (produto cartesiano) foram as de mais difícil interpretação. Também nas situações que envolveram números decimais, os alunos apresentaram mais dificuldade do que nas correspondentes com números inteiros.

As características próprias de cada situação e as práticas letivas, que geralmente não tratam todas as situações da mesma forma, foram as principais justificações encontradas para as dificuldades dos alunos.

Palavras-chave: Operações aditivas; Operações multiplicativas; Sentido da operação; Escolha da operação; Dificuldades dos alunos; Metodologia mista.

Abstract

This study aims to understand how students, faced with a task that is solved by applying an arithmetic operation, choose this operation. This goal resulted from observing the difficulties that students demonstrate in my classes and that other teachers also often detect. On the other hand, while the problem has been the target of several studies, it is clear that there is still no satisfactory answer, which gives relevance to this research.

The theoretical framework focuses on the notion of operation sense, discussing in detail various interpretations of the same operation. These various interpretations have implications for how students decide which operation to apply. To guide the development of the study, I have formulated four research questions:

1. Is it possible to identify situations where students have either more or less difficulty in identifying the operation to be performed?

2. When students do not identify the correct operation, which operation do they choose?

3. Is it possible to find reasons for the difficulties presented by the students in the identification of operations?

4. Can the answers to the previous questions give indications on how to improve students learning?

I created an instrument consisting of a set of tasks, focusing mainly on multiplicative operations and involving whole numbers and decimals. It was applied in 2009/2010 to three classes of 5th Graders, three classes of 6th Graders and three classes of 7th Graders from middle-schools in the Algarve and in Lisbon, making a total of 158 students.

According to the nature of the research questions, and considering the various methodological choices available for research in the field of Didactics of Mathematics, I adopted a mixed methodology, which was seen as the most suitable.

Data analysis highlighted differences between the various scenarios of operations usage. Additive operations have proven to be more easily interpreted than multiplicative operations. In the latter, the division (rate and multiplicative comparison) and the multiplication (cartesian product) were more difficult to interpret. Furthermore students had more difficulty with situations involving decimal numbers, than with the corresponding situations in integers.

The characteristics of each situation, together with the teaching practices, which generally do not treat every situation in the same way were the main justifications found for students' difficulties.

Keywords: Additive operations; Multiplicative operations; Operation sense; Choice of operation; Difficulties of students; Mixed methodology.

Agradecimentos

Apesar de uma tese ser um trabalho individual, muitas pessoas direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, por vezes “apenas” com uma troca de impressões. Aqui incluo os meus colegas de curso e professores, os meus pais e muitos outros amigos.

Às Professoras orientadoras, Professora Doutora Susana Carreira e Professora Doutora Lurdes Serrazina, por sempre me irem indicando o caminho certo.

Aos meus colegas, Professores de Matemática, que permitiram a aplicação do instrumento de recolha de dados nas suas aulas: Ana Paula Mestre, Dora Nunes, Fernanda Entrudo, Filipa Lecoq, Henrique Pereira, Isabel Corvo, Nuno Amaral, Sandra Gomes e Teresa Sares.

E finalmente, um agradecimento muito especial aos 158 alunos que resolveram as tarefas que lhe foram propostas.

Obrigado a todos

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Gráficos

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1. Porquê estudar este assunto?

Na matemática escolar estudam-se diversos temas, todos eles de grande importância para a compreensão e aquisição do conhecimento matemático. Como professor que trabalha diariamente com alunos do segundo ciclo do ensino básico, deparo-me com dificuldades que os alunos apresentam, algumas delas repetidamente. É nas operações aritméticas que encontro uma das dificuldades que mais me tem preocupado ao longo do meu percurso profissional de professor de matemática.

Quando é apresentada aos alunos uma situação que se pode resolver usando uma operação, é habitual que estes apresentem dúvidas em saber qual deve ser usada. Também me preocupa a forma como, com alguma frequência, eles tentam ultrapassar este problema: à sorte! Expressões do tipo "é de mais", "é de menos", "é de vezes", são frequentes, à espera que o professor valide alguma delas. Nestes casos, verifica-se que não há uma verdadeira tentativa de interpretar a situação. Claro que isto não ocorre com todos os alunos; há aqueles que associam corretamente determinadas situações às operações aritméticas adequadas. Creio que esta dificuldade existe porque, entre outros aspetos, os alunos não sabem (ou têm dificuldades em saber) o que significa adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir. E isto parece-me preocupante, pois embora a matemática não se resuma às operações, elas têm um importante peso nesta disciplina. É preciso deixar claro que todavia quando estes alunos falham na escolha da operação necessária para resolver uma tarefa, até podem dominar os algoritmos que permitem encontrar o resultado das operações. Mas para que serve saber calcular o resultado da operação, se não se sabe qual a operação a realizar? De uma forma exagerada direi que não serve para nada. Claro que é uma resposta pesada, pois saber calcular também tem a sua importância, mas pretendo reforçar que se trata de uma dificuldade de grande relevância.

A minha experiência e a constatação de que outros professores também detetam essas dificuldades foram apenas o ponto de partida. A pesquisa teórica mostra que este problema é assinalado por vários autores e que há trabalhos de investigação publicados sobre a aprendizagem das operações. No entanto, não há ainda uma resposta satisfatória para minorar as dificuldades sentidas pelos alunos na hora de decidir qual a operação que resolve determinada situação. Assim, investigar este assunto torna-se pertinente e atual, pois consiste em procurar respostas para uma dificuldade real do dia-a-dia das aulas de matemática e também para uma questão em aberto na investigação.

Os estudos disponíveis sobre esta problemática dizem-nos que cada operação tem várias interpretações. Assim, cada uma delas pode ser dividida em vários casos: várias situações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão. Por vezes temos a mesma operação, até com os mesmos números, mas com interpretações diferentes, como nos dois exemplos seguintes:

1. *Em cada caixa há 5 livros. Quantos livros há em 4 caixas?*

2. *Numa festa há 5 rapazes e 4 raparigas que vão dançar. Quantos pares se podem formar?*

Nestes dois exemplos a multiplicação é interpretada de forma diferente: no primeiro caso tem o sentido aditivo, enquanto no segundo tem o sentido combinatório. Então o que significa, realmente, multiplicar? Além das duas interpretações exemplificadas, ainda temos muitas outras. E o mesmo se pode observar nas restantes operações.

Essas diversas interpretações têm implicações na forma como os alunos adquirem o sentido de cada operação, pois é necessário conhecer uma multiplicidade de significados, alguns dos quais pouco intuitivos.

Esta diversidade tem uma importância crucial na aprendizagem das operações e, consequentemente, na forma como os alunos decidem escolher qual a operação que resolve determinada situação. Aqui pode estar a explicação para algumas dificuldades dos alunos quando lidam com as operações.

Para compreender essas dificuldades e tentar encontrar formas de as ultrapassar seria interessante diagnosticá-las, criar propostas de trabalho que visassem lidar com este insucesso e aplicá-las em sala de aula para verificar a sua adequação. Mas constatei rapidamente que no tempo disponível para realizar uma tese, não seria possível fazer tudo. A construção de propostas de trabalho para alunos com o objetivo de melhorar a compreensão do sentido das operações, sem um verdadeiro diagnóstico da situação, também me parece pouco sensato. Neste sentido, o presente estudo tem como grande objetivo: identificar, caracterizar e compreender as dificuldades manifestadas por alunos do 5.º ao 7.º ano de escolaridade na escolha da operação aritmética adequada à resolução de questões tipificadas, com o propósito de obter indicações que permitam a melhoria das aprendizagens neste domínio da matemática escolar.

1.2. Questões de investigação

Face ao objetivo explicitado, proponho-me investigar a forma como se manifestam as dificuldades dos alunos, com base na definição de quatro questões de investigação, assim formuladas:

1. É possível identificar situações em que os alunos apresentam mais ou menos dificuldade na identificação da operação a efetuar?
2. Quando os alunos não identificam a operação correta, que operação escolhem?
3. É possível encontrar justificação para as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação das operações?
4. As respostas às questões anteriores poderão dar-nos indicações para melhorar a aprendizagem dos alunos?

Este trabalho está, então, orientado no sentido de responder às questões anteriores, visando compreender a forma como os alunos interpretam o sentido das diversas operações.

Tal como, atualmente, se dá bastante importância à construção do sentido do número por parte dos alunos, tanto no Programa de Matemática do Ensino Básico como na investigação em didática da matemática, considero que será igualmente importante dar uma significativa atenção ao sentido das operações e à forma como este vai sendo adquirido pelos alunos desde muito cedo.

CAPÍTULO 2

Fundamentação teórica

2.1. Considerações prévias

Na sequência do que foi exposto na introdução, o tema que vai ser objeto de estudo pode ser analisado de dois pontos de vista distintos:

i) Dada uma situação, que operação permite resolvê-la?

ii) Dada uma operação, por exemplo, 3×5, que situações levam a esta operação?

Este trabalho está centrado na natureza das operações e suas implicações na aprendizagem, pois penso ser este um dos aspetos que pode conter uma parte importante da explicação para as dificuldades apresentadas por grande número de alunos na seleção da operação adequada a determinada tarefa. No entanto, outros aspetos podem influenciar a escolha da operação por parte dos alunos. Por isso, embora de forma menos profunda, farei uma breve abordagem a outros pontos, tais como o sentido e a natureza do número e as práticas letivas na disciplina de matemática, no ensino básico.

Irei então analisar a natureza das primeiras quatro operações que são aprendidas no ensino básico (adição, subtração, multiplicação e divisão).

O que significa, realmente, adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir?

- A adição está ligada à ideia intuitiva de juntar.
- A subtração está associada à ideia de tirar.
- A multiplicação pode ser vista como sucessivas adições.
- À divisão associa-se a ideia de repartir (matematicamente também é vista como sucessivas subtrações).

2.2. A adição e a subtração

A adição é, naturalmente, a primeira operação a ser aprendida pelos alunos, pois ela quase se confunde com o ato de contar. Quando adicionamos, por exemplo, $5+4$, realmente estamos a contar o total. Assim, a adição é associada frequentemente à ideia de juntar duas quantidades. E, matematicamente, é assim. No entanto, ela não é utilizada apenas quando fisicamente se juntam duas quantidades. Para melhor clarificar esta ideia, vamos ver alguns exemplos de situações que levam à adição.

Exemplo 1

O João tinha 5 berlindes e ganhou 3. Quantos tem agora?

Neste caso juntam-se fisicamente duas quantidades. Esta situação corresponde à ideia natural que está associada à adição: juntar duas quantidades.

Exemplo 2

O João tem 5 berlindes verdes e 3 azuis. Quantos berlindes tem?

Neste caso pretende-se saber (calcular) o número total de berlindes. Matematicamente, juntamos duas quantidades, *mas fisicamente não há qualquer ação de juntar*. Embora isto pareça elementar para os adultos, cujo sentido da adição está adquirido, o mesmo não acontece com as crianças em fase de aprendizagem, pois a identificação da operação não é automática. Os alunos têm que pensar, e ao analisarem as situações verificam que estes dois primeiros exemplos, apesar de se resolverem com a mesma operação e com os mesmos números, são realmente diferentes. *E esta constatação aqui exemplificada é extremamente importante, pois em cada operação existem, como veremos, várias situações distintas. Assim, ao contrário do que se poderia supor numa análise superficial, os alunos não têm que aprender a identificar quatro situações, cada uma correspondente a uma operação, mas um número maior. E aqui pode estar grande parte da explicação para as dificuldades apresentadas*. Mas vejamos outro exemplo.

Exemplo 3

O João perdeu 5 berlindes e ficou com 3. Quantos tinha inicialmente?

Esta situação é também interessante comparada com as anteriores. Aqui volta a haver uma ação, mas em vez de se juntar, separa-se (ou retira-se) uma parte, o que pode levar a relacioná-la com a subtração. Mas, como nos casos anteriores, temos a mesma adição. Matematicamente continuamos a juntar duas quantidades, mas *fisicamente retira-se uma parte a uma quantidade*.

Na verdade, do ponto de vista matemático, adicionar corresponde sempre a juntar duas quantidades. Mas a adição não é utilizada apenas quando há uma união física de duas quantidades, o que pode ser uma dificuldade para os alunos na construção do sentido da operação.

Podemos agora ver situações semelhantes, mas de subtração.

<u>Exemplo 4</u>

O João tinha 5 berlindes e perdeu 3. Quantos tem agora?

Este é o exemplo típico que se associa à subtração: tem-se uma quantidade e retira-se uma parte. Podemos dizer que *fisicamente* ocorre uma subtração.

<u>Exemplo 5</u>

O João tem 5 berlindes. Três são grandes. Quantos são pequenos?

Aqui, embora seja necessário efetuar a mesma operação, e com as mesmas quantidades, não há fisicamente uma subtração, nem qualquer outra ação. Trata-se de utilizar a subtração para *comparar* duas quantidades.

<u>Exemplo 6</u>

O João ganhou 3 berlindes e ficou com 5. Quantos tinha?

Neste caso há uma ação física, mas de juntar duas quantidades, situação mais associada à adição; no entanto voltamos a ter a mesma subtração.

Estes exemplos introdutórios parecem-me esclarecedores quanto à ideia de que cada operação (neste caso a adição e a subtração) permite resolver situações de natureza diferente. Pode-se assim afirmar que há vários tipos de adições e subtrações. Como veremos posteriormente, o mesmo ocorre com a multiplicação e a divisão.

Vamos aprofundar um pouco mais este tema, ainda na adição e subtração. Na pesquisa bibliográfica efetuada, relativa às diferentes situações que podem surgir com as quatro operações, foi possível encontrar várias classificações, consoante os autores. Assim, para a adição e subtração, tomei como referência a classificação apresentada por Lieven Vershavel e Erik De Corte (1996), por considerar ser a mais completa. Segundo estes autores, as situações de adição e subtração dividem-se em três categorias: *mudança*, *combinação* e *comparação*. Karen Fuson (1992) divide ainda uma das situações, a mudança, em *mudança para mais* e *mudança para menos*, o que parece fazer bastante sentido, já que a primeira é normalmente associada à adição e a segunda à subtração, ainda que, como vimos anteriormente, isso nem sempre aconteça. Esta variável foi então considerada na classificação que apresentarei posteriormente.

Situações de mudança referem-se a casos dinâmicos ou ativos com uma alteração física na quantidade inicial. Existe uma quantidade inicial que é alterada, juntando-se outra quantidade (exemplos 1 e 6) ou retirando-se parte dela (exemplos 3 e 4). As situações de combinação, são estáticas existindo duas quantidades que se combinam sem qualquer alteração física (exemplo 2). A comparação é também uma situação estática que relaciona duas quantidades a fim de se encontrar a sua diferença (exemplo 5). Na combinação ou comparação podemos ter fisicamente duas quantidades separadas (exemplo 2) ou podemos combinar ou comparar uma quantidade com parte dela (exemplo 5). Numa análise mais detalhada, vamos encontrar, em cada caso, diversas situações que veremos a seguir, começando pela mudança.

Tendo em consideração os três casos, mudança, combinação e comparação, e as suas diversas variáveis, podemos encontrar catorze situações distintas de adição e subtração.

Vamos analisar essas variáveis em cada um dos três casos referidos. No final deste ponto (a adição e a subtração) serão apresentadas tabelas, exemplificando todos os casos.

Na mudança, podemos considerar dois aspetos importantes: o sentido da mudança e a quantidade desconhecida

$$\text{Mudança}\begin{cases}\text{Sentido}\begin{cases}\text{Para mais}\\ \text{Para menos}\end{cases}\\ \\ \text{Quantidade desconhecida}\begin{cases}\text{Inicial}\\ \text{Final}\\ \text{Que muda}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 1 - Esquema das situações aditivas de mudança

As situações mais intuitivas são as duas primeiras, isto é, uma adição com a mudança para mais e com a quantidade final desconhecida, e uma subtração com a mudança para menos, também com a quantidade final desconhecida. Supostamente, estas são as situações mais fáceis para os alunos, pois a adição está associada à ideia de juntar e, consequentemente, a um aumento, enquanto que a subtração está associada à ideia de tirar e, consequentemente, a uma diminuição.

No caso da *combinação* temos duas situações: dois conjuntos distintos, ou um conjunto e uma parte dele próprio. Reparemos que se trata de situações estáticas, tal como na comparação, que veremos a seguir. Dado não haver uma ação física como na mudança, supõe-se que os alunos têm mais dificuldade nestas situações.

$$\text{Combinação}\begin{cases}\text{Reunião} \rightarrow \text{Adição}\\ \text{Subconjunto} \rightarrow \text{Subtracção}\end{cases}$$

Figura 2 - Esquema das situações aditivas de combinação

Finalmente temos a *comparação*. Tem semelhanças e diferenças em relação às duas situações anteriormente referidas. Em relação à mudança, tem em comum poder considerar-se o sentido (para mais e para menos) e também a quantidade desconhecida (parte diferente, comparada ou de referência). No entanto, enquanto a mudança é uma situação dinâmica, esta é estática – e neste último caso temos uma semelhança com a combinação.

$$\text{Comparação}\begin{cases}\text{Sentido}\begin{cases}\text{Para mais}\\ \text{Para menos}\end{cases}\\ \\ \text{Quantidade desconhecida}\begin{cases}\text{Diferente}\\ \text{Comparada}\\ \text{De referência}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 3 - Esquema das situações aditivas de comparação

Numa análise mais profunda podemos ainda, em cada caso, encontrar outras variáveis. Não é o mesmo trabalhar com quantidades, digamos até à centena, ou de vários milhares. Também não é o mesmo trabalhar com berlindes (objetos concretos e quantidades discretas), ou medidas de comprimento, pesos, áreas, volumes (situações mais abstratas e quantidades contínuas). Por vezes, ouvimos frases do tipo; “eu não sei fazer contas com euros” (ou com quilómetros, por exemplo). Estas variáveis não foram consideradas neste trabalho, pois não foi possível estudar todos os aspetos, no entanto achei que deveriam ser referidas, pois não deve ficar a ideia de que a questão da identificação das operações por parte dos alunos se esgota na classificação das mesmas.

Nos exemplos anteriores foram apresentadas situações que apenas envolveram números inteiros. Mas há que dizer que os alunos participantes neste estudo (5.º, 6.º e 7.º anos de escolaridade) trabalham também com os números decimais e com frações. Como será justificado posteriormente, o estudo das operações com frações não foi incluído neste trabalho. Assim, foram estudadas apenas as operações com números inteiros e decimais. Numa sequência lógica de aprendizagem, os números inteiros surgem primeiro, seguidos dos restantes. A natureza dos números decimais e das frações não é a mesma que a dos inteiros, pelo que a sua introdução terá certamente consequências na aprendizagem. E como é que a natureza dos números influencia a interpretação das operações? Esse é um tema que será tratado adiante, mas para concluir este ponto relativo à adição e à subtração farei aqui uma pequena introdução à variável que se prende com a natureza do número.

O significado da adição e da subtração é o mesmo, quer estejamos a trabalhar com números inteiros ou decimais. Com a multiplicação e a divisão isso já não acontece, pois há interpretações dessas operações específicas para os números inteiros, para os números decimais e outras comuns a ambos os casos.

Dado que na adição e subtração, não há uma especificidade própria para o caso dos decimais, apresento a seguir, uma tabela que contém os exemplos anteriormente expostos, na qual se juntam situações com a mesma classificação mas com números decimais.

A seguir apresentam-se tabelas com o resumo das situações de adição e subtração, tanto com números inteiros, como com números decimais.

$$\text{Mudança}\begin{cases}\text{Sentido}\begin{cases}\text{Para mais}\\ \text{Para menos}\end{cases}\\ \\ \text{Quantidade desconhecida}\begin{cases}\text{Inicial}\\ \text{Final}\\ \text{Que muda}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 4 - Esquema das situações aditivas de mudança

	Sentido	Quantidade desconhecida	Exemplo	Operação
1 Inteiros	Para mais	Final	O João tinha 3 berlindes e recebeu 5. Quantos tem agora?	Adição
1 Decimais			Num recipiente estavam 3,5 litros de água e deitaram-se 2,5 litros. Que quantidade de água ficou no recipiente? O João tinha 3,50 euros e recebeu 2,50 euros. Com quanto dinheiro ficou?	
2 Inteiros	Para menos	Final	O João tinha 8 berlindes e perdeu 3. Quantos tem agora?	Subtração
2 Decimais			Num recipiente estavam 3,5 litros de água e gastaram-se 2,5 litros. Que quantidade de água ficou no recipiente? O João tinha 3,50 euros e gastou 2,50 euros. Com quanto dinheiro ficou?	
3 Inteiros	Para mais	Que muda	O João tem 3 berlindes mas precisa de 8. Quantos lhe faltam?	Subtração
3 Decimais			Temos 3,5 litros de água, mas precisamos de 6 litros. Que quantidade de água nos falta? O João tem 3,50 € e quer comprar um livro de 6 €. Quanto dinheiro lhe falta?	
4 Inteiros	Para menos	Que muda	O João tem 8 berlindes, mas só precisa de 5. Quantos lhe sobram?	Subtração
4 Decimais			Num recipiente estão 6 litros de água e é preciso utilizar 3,5 litros dessa água. Que quantidade sobra? O João tem 6 € e precisa de gastar 3,50 €. Quanto dinheiro lhe vai sobrar?	
5 Inteiros	Para mais	Inicial	O João tinha alguns berlindes e recebeu 3, tendo ficando com 8. Quantos tinha?	Subtração
5 Decimais			Num recipiente que tinha alguma água, deitaram-se 2,5 litros e ficou com 6 litros. Que quantidade de água havia no recipiente? O João recebeu 2,50 € e ficou com 6 €. Quanto dinheiro tinha?	
6 Inteiros	Para menos	Inicial	O João tinha alguns berlindes e perdeu 3, tendo ficado com 5. Quantos tinha inicialmente?	Adição
6 Decimais			De um recipiente tiraram-se 2,5 litros de água, tendo ficado com 3,5 litros. Que quantidade de água havia no recipiente? O João gastou 2,50 € e ficou com 3,50 €. Quanto dinheiro tinha?	

Tabela 1 - Situações aditivas de mudança

$$\text{Combinação}\begin{cases}\text{Reunião} \rightarrow \text{Adição}\\ \text{Subconjunto} \rightarrow \text{Subtracção}\end{cases}$$

Figura 5 - Esquema das situações aditivas de combinação

		Exemplo	**Operação**
7 Inteiros	Reunião	O João tem 5 berlindes e a Ana tem 3. Quantos berlindes têm os dois juntos?	Adição
7 Decimais		Num balde há 3,5 litros de água e noutro há 2,5 litros de água. Que quantidade de água há, no total, nos dois baldes? O João tem 3,50 € e a Ana tem 2,50 €. Quanto dinheiro têm, em conjunto, os dois?	
8 Inteiros	Subconjunto	A Maria tem 8 berlindes, verdes e azuis. Três berlindes são verdes. Quantos são azuis?	Subtração
8 Decimais		Em 2 baldes há um total de 6 litros de água. Num deles há 2,5 litros. Que quantidade há no outro? O João e a Ana têm, juntos, 6 €. O João tem 3,50 €. Quanto dinheiro tem a Ana?	

Tabela 2 - Situações aditivas de combinação

$$\text{Comparação}\begin{cases}\text{Sentido}\begin{cases}\text{Para mais}\\ \text{Para menos}\end{cases}\\ \\ \text{Quantidade desconhecida}\begin{cases}\text{Diferente}\\ \text{Comparada}\\ \text{De referência}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 6 - Esquema das situações aditivas de comparação

	Sentido	Quantidade desconhecida	Exemplo	Operação
9 Inteiros	Mais	Parte diferente	O João tem 8 berlindes e a Ana tem 5 berlindes. Quantos tem o João a mais do que a Ana?	Subtração
9 Decimais			Num balde verde há 3,5 litros de água e num balde azul há 2,5 litros. Que quantidade de água há a mais no balde verde do que no balde azul? (cores para distinguir os baldes) O João tem 3,50 € e a Ana tem 2,50 €. Quanto dinheiro tem o João a mais do que a Ana?	
10 Inteiros	Menos	Parte diferente	O João tem 8 berlindes e a Ana tem 5 berlindes. Quantos tem a Ana a menos que o João?	Subtração
10 Decimais			Num balde verde há 3,5 litros de água e num balde azul há 2,5 litros. Que quantidade de água há a menos no balde azul do que no balde verde? (cores para distinguir os baldes) O João tem 3,50 € e a Ana tem 2,50 €. Quanto dinheiro tem a Ana a menos do que o João?	
11 Inteiros	Mais	Parte comparada	O João tem 5 berlindes e a Ana tem mais 3 do que ele. Quantos berlindes tem a Ana?	Adição
11 Decimais			Num balde azul há 2,5 litros de água, e num balde verde há mais 1 litro do que no azul. Que quantidade de água há no balde verde? A Ana tem 2,50 € e o João tem mais 1 € do que a Ana. Quanto dinheiro tem o João?	
12 Inteiros	Menos	Parte comparada	O João tem 8 berlindes e a Ana tem menos 3 do que ele. Quantos berlindes tem a Ana?	Subtração
12 Decimais			Num balde verde há 3,5 litros de água e num balde azul há menos 1 litro do que no verde. Que quantidade de água há no balde verde? O João tem 3,50 € e a Ana tem menos 1 € do que o João. Quanto dinheiro tem a Ana?	
13 Inteiros	Mais	Parte de referência	João tem 8 berlindes, que são mais 3 do que tem a Ana. Quantos berlindes tem a Ana?	Subtração
13 Decimais			Num balde verde há 3,5 litros, que é mais 1 litro do que há num balde azul. Que quantidade de água há no balde azul? O João tem 3,50 € que é mais 1 € do que o dinheiro que tem a Ana. Quanto dinheiro tem a Ana?	
14 Inteiros	Menos	Parte de referência	O João tem 5 berlindes que são menos 3 do que tem a Ana. Quantos berlindes tem a Ana?	Adição
14 Decimais			Um balde verde tem 5 litros de água, que é mais 1 litro do que há num balde azul. Que quantidade de água há no balde azul? O João tem 5 €, que é mais 1 € do que o dinheiro que tem a Ana. Quanto dinheiro tem a Ana?	

Tabela 3 - Situações aditivas de comparação

A análise atenta dos exemplos mostra que a interpretação das situações é a mesma, quer se trabalhe com números inteiros, ou com decimais.

Embora tenham sido escolhidos a capacidade e o dinheiro, outras situações poderiam aparecer, cuja interpretação seria a mesma, como se exemplifica com as duas situações seguintes:

1. *Uma garrafa tem 0,5 litros de sumo e nela deitam-se 0,3 litros de sumo. Que quantidade de sumo fica na garrafa?*

2. *Um saco tem 0,5 kg de areia e deita-se nesse saco 0,3 kg de areia. Qual é o peso da areia que fica no saco?*

No caso das situações multiplicativas, como veremos a seguir, a interpretação da operação torna-se mais complexa, tal como a sua passagem para os decimais. Por este motivo, e também pelo facto das situações de multiplicação e divisão terem sido escolhidas preferencialmente para a construção de um instrumento de recolha de dados a aplicar a um conjunto de alunos (como se verá adiante), estas operações merecem um tratamento mais profundo do que as aditivas, o que será apresentado a seguir.

2.3. Os números decimais e as frações

Antes de entrarem nas operações com números decimais ou com frações, os alunos trabalham as operações com números inteiros, e essa experiência vai servir de referência à aprendizagem das operações com números decimais e com frações. Além da natureza das situações, também a natureza do número decimal ou fracionário, quando comparado com os inteiros, terá um peso importante na forma como o aluno decide qual a operação a realizar.

Quando entramos no mundo dos números decimais e frações, um aspeto importante tem a ver com a introdução de medições, e com a diferença entre contar e medir. A contagem tem uma natureza discreta e aplica-se a objetos concretos que podem ser visíveis e palpáveis. A medição tem uma natureza contínua e mais abstrata. Por exemplo, se tivermos cinco berlindes, temos cinco objetos distintos e não faz sentido falar em meios berlindes, pois à partida bocados de berlindes não são utilizáveis. Mas há objetos que se contam e se podem, em situações realistas, partir. Faz sentido, por exemplo, meia laranja, ou um quarto de pizza. São situações curiosas em que partes representam números não inteiros, mas são contáveis de forma discreta. Mas entremos nas medidas propriamente ditas, que têm uma natureza contínua. Se tivermos uma corda com cinco metros temos apenas *uma* corda; os metros não se veem como os berlindes, nem como as meias laranjas! *As unidades não são distinguíveis separadamente*. E apesar de ter exemplificado com um número inteiro de metros, vimos que a natureza desta medição é diferente. Ora, é essencialmente com comprimentos, áreas, volumes, ângulos, peso, tempo, dinheiro, temperatura … que mais naturalmente entramos nos números decimais e frações. Há aspetos interessantes, como por exemplo no dinheiro, em que as moedas de euros e cêntimos podem representar, respetivamente, unidades e centésimas, ou no caso em que temos quilos de algum produto em pacotes. De qualquer forma, na prática poucas vezes temos esse tipo de situação que ajuda a ver as respetivas unidades. Genericamente, enquanto na contagem temos objetos que se podem associar de forma visível a um número, na medição, essa associação, em muitos casos, torna-se mais abstrata. Este é um dos motivos porque parece ser mais fácil para os alunos determinarem o número de objetos dispostos de forma retangular do que o valor de uma área. Os objetos são visíveis ou fáceis de imaginar ou esquematizar, enquanto o mesmo não acontece com as unidades de comprimento ou de área. Uma coisa é entender que em 10 filas de 12 cadeiras há 120 cadeiras, outra coisa é entender que a área de um retângulo de lados 10 m e 12 m tem $120\,\mathrm{m}^2$ de área, ou melhor, concluir que naquele retângulo cabem 120 quadrados com 1 metro de lado, pois estes quadrados não se veem, ao contrário das cadeiras. Na verdade, embora contar e medir estejam naturalmente associados aos números inteiros e aos decimais/frações, respetivamente, podemos contar números decimais/frações e medir com números inteiros. A grande diferença está, na realidade, na possibilidade de termos objetos distinguíveis separadamente ou objetos que não se podem realmente distinguir. Esta diferença é, provavelmente, mais importante do que o facto de se tratar de um número inteiro ou decimal ou fração. Refletindo um pouco mais, há situações em que não temos objetos, como no caso do tempo ou temperatura, e aí a sua natureza será sempre contínua. Não é possível ver as horas ou os graus e a sua representação fiel é de natureza contínua.

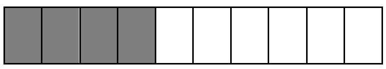
Avançamos agora para a natureza do número decimal ou fração.

Estes surgem porque os números inteiros não podem resolver todas as situações que se nos deparam, e temos necessidade dos números em forma decimal ou de fração. Se queremos dividir uma corda de 2 metros em 5 partes iguais, cada parte não corresponde a um número inteiro, daí a necessidade de escrevermos 0,4 ou $\frac{2}{5}$. Esta nova realidade é acompanhada por uma dificuldade acrescida. Além da introdução de um número de outra natureza, *é a multiplicidade de significados e de contextos em que ele pode aparecer* que cria nos alunos grande dificuldade. Vejamos alguns exemplos em que frequentemente aparecem as frações e os números decimais, e as suas respetivas interpretações.

<u>Exemplo 1</u> – <u>Parte da área de uma região (relação parte/todo)</u>

$\frac{2}{5}$ da barra estão pintados

0,4 da barra estão pintados



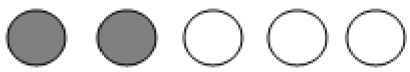
Esta figura também pode ser usada (embora ocorra com menos frequência) para interpretar a fração como comparação entre dois conjuntos, como aparece em exemplos seguintes. Assim, se questionarmos qual a fração que representa a parte escura, a resposta pode vir em função do total (relação parte/todo) ou da relação entre a parte escura e a parte clara. Vejamos então:

A parte escura representa $\frac{2}{5}$ do total e $\frac{2}{3}$ da parte clara.

Na segunda interpretação parte escura/parte clara não podemos usar números decimais, pois a fração obtida não corresponde a um número decimal.

<u>Exemplo 2</u> – <u>Comparação entre um conjunto e um seu subconjunto</u> com quantidades discretas.

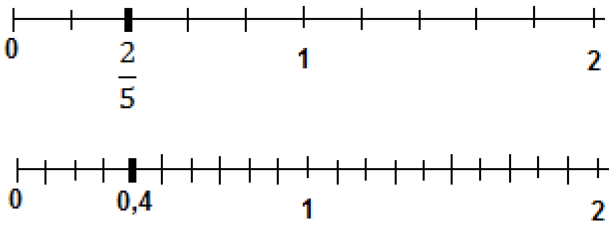
$\frac{2}{5}$ dos círculos estão pintados.



Este exemplo é habitualmente usado nas frações, mas em termos de números decimais também poderíamos afirmar que 0,4 dos círculos estão pintados. Seria mais visível se dividíssemos cada círculo em duas partes ou se tivéssemos pintado 4 de um conjunto de 10 círculos (para haver uma divisão em 10 partes iguais).

<u>Exemplo 3</u> – <u>O número correspondente a um ponto na reta</u>

$\frac{2}{5}$ como um ponto da reta



<u>Exemplo 4</u> – <u>Resultado de uma divisão</u>

Duas barras de chocolate foram repartidas igualmente por 5 pessoas.

Cada uma fica com $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate

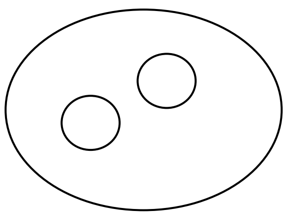
Cada uma fica com 0,4 de uma barra de chocolate

<u>Exemplo 5</u> – <u>Comparação entre dois conjuntos</u>

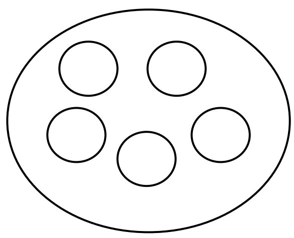
No conjunto A, há $\frac{2}{5}$ das bolas que há no conjunto B.

No conjunto A há 0,4 das bolas que há no conjunto B

Conjunto A



Conjunto B



Note-se que há uma diferença entre este caso e os exemplos 1 e 2, nos quais há uma comparação entre um conjunto e um seu subconjunto, enquanto aqui a comparação é feita entre dois conjuntos.

Exemplo 6 – Comparação entre duas grandezas

A barra da esquerda tem $\frac{2}{5}$ do comprimento da barra da direita.

A barra da esquerda tem 0,4 do comprimento da barra da direita.

Note-se que não é o mesmo comparar quantidades discretas (exemplo 5) ou contínuas (exemplo 6)

2 cm 5 cm

Parece que compreender ou interpretar o que significa adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir, deve ser precedido da compreensão do significado do número, pois poderá ser mais complexo multiplicar, por exemplo, dois números que não sabemos exatamente o que significam. Claro que multiplicar no sentido de aplicar o algoritmo é possível, mas entender o significado da operação é muito mais do que encontrar o resultado.

Os exemplos anteriores não pretendem ser uma lista exaustiva de todos os casos possíveis, mas sim exemplificar frequentes interpretações dos números decimais e das frações, pondo assim em evidência que esta diversidade constitui uma dificuldade para os alunos.

Uma primeira introdução à adição e à subtração envolvendo números decimais já foi feita no ponto anterior. Vamos avançar um pouco mais. Supondo que as situações envolvendo números decimais são precedidas daquelas que envolvem números inteiros, como se fará essa passagem?

Indo de encontro ao ponto principal do trabalho, terá o mesmo significado adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir com números inteiros e com números decimais?

Poderá haver um paralelismo entre números inteiros e números decimais para o sentido de adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir?

Na verdade, queremos saber se os alunos que, supostamente, têm adquirido o sentido das operações com números inteiros, poderão utilizar esse conhecimento para, dada uma situação envolvendo números decimais, decidir corretamente qual é a operação que a resolve.

A resposta às perguntas anteriores, como veremos a seguir, não é única. Vamos encontrar situações que têm a mesma interpretação com os números inteiros e decimais, e outras que se aplicam só a um caso ou a outro.

Na adição e subtração, como já foi referido, parece haver um paralelismo entre as operações com números inteiros e com números decimais. A ideia de juntar ou separar quantidades, respetivamente associada a adicionar e subtrair, pode entender-se de forma semelhante nos números inteiros e decimais, como atrás foi ilustrado. Nas operações aditivas os números são vistos essencialmente como representando uma quantidade. Outras interpretações, como as anteriormente referidas (por exemplo, relação parte/todo) aparecem nas operações multiplicativas. Nestas, a passagem dos números inteiros para os decimais implica, em termos cognitivos, um salto maior que no caso das aditivas, daí o facto de surgirem, naturalmente, mais dificuldades na identificação das operações multiplicativas.

Vamos então entrar na multiplicação e divisão, distinguindo entre as operações com números inteiros e decimais.

2.4. A multiplicação e a divisão de números inteiros

Tal como vimos anteriormente, a multiplicação está associada a uma adição sucessiva de parcelas iguais, enquanto a divisão à ideia de repartir/dividir ou, matematicamente, a uma subtração sucessiva. Vamos analisar mais atentamente estas operações, como nos casos anteriores da adição e subtração.

À semelhança do que ocorreu nas operações aditivas, também as situações multiplicativas podem ser classificadas, o que farei a seguir. Neste caso usarei como referência a classificação apresentada por Brian Greer (1992), que considerei mais adequada, embora use também contribuições de outras classificações: (Carvalho e Gonçalves, 2003; Dickson, Brown e Gibson, 1990; Fuson, 1992; Verschaffel e De Corte, 1996).

Exemplo 1

O Rui tem 3 carteiras com 5 cromos cada. Quantos cromos tem?

Esta é a situação mais comum de multiplicação e a primeira com que, habitualmente, os alunos contactam com a operação. Temos vários grupos de objetos com o mesmo número, e queremos saber o total. Este é talvez o sentido que mais frequentemente se dá à multiplicação: uma adição sucessiva de parcelas iguais. Neste exemplo 1 temos três conjuntos (cada carteira) de cinco cromos, ou seja, $5+5+5=5\times3$ e não cinco grupos de três cromos, por isso não escrevi $3+3+3+3+3=3\times5$. Sabemos que o resultado é igual, mas aqui não estamos a analisar a operação do ponto de vista do cálculo, mas sim do seu significado, ou pelas situações que são por ela modeladas. E na sua interpretação, os dois fatores envolvidos não têm o mesmo papel. O número 5, que se repete, é a quantidade de cromos em cada carteira ou *número de elementos do conjunto* – designa-se por *multiplicando*, e tem uma função passiva na multiplicação. O número 3 representa o *número de conjuntos* (carteiras de cromos). Esse número é o *multiplicador* e tem uma função ativa (Caraça, 1989).

Quando esta diferença entre os fatores existe, dizemos que se trata duma situação psicologicamente assimétrica (Verschaffel, De Corte, 1996; Greer, 1992). Esta assimetria joga um papel importante na sua inversa, a divisão. Vejamos para isso os dois seguintes exemplos de divisão.

Exemplo 2

O Rui comprou 3 carteiras de cromos (todas com o mesmo número de cromos).
Contou 15 cromos. Quantos cromos tem cada carteira?

Exemplo 3

O Rui comprou várias carteiras de 5 cromos cada. Contou 15 cromos.
Quantas carteiras comprou?

No exemplo 2, o valor desconhecido é o multiplicando do exemplo 1 (número de elementos de cada conjunto). Esta situação designa-se *divisão como partilha*.

No exemplo 3, o valor desconhecido é o multiplicador do exemplo 1 (número de conjuntos). Esta situação designa-se *divisão como medida*.

Habitualmente, numa divisão usam-se os termos multiplicando e multiplicador em relação à multiplicação inversa, pois rigorosamente, na divisão designa-se quociente.

Os três exemplos anteriores são as situações de multiplicação e de divisão designadas *grupos equivalentes*. A multiplicação é vista como uma adição sucessiva de parcelas iguais e a divisão como partilha e como medida.

Exemplo 4

O chão de uma sala retangular está coberta por mosaicos quadrados. Estão 12 no lado maior e 8 no lado menor. Quantos mosaicos cobrem o chão da sala?

Esta situação é semelhante à anterior, pois podemos considerá-la também uma adição sucessiva, mas com a particularidade de os objetos se encontrarem dispostos de forma retangular e ser essa disposição que forma os grupos, o que não acontece no exemplo 1. Podemos pensar em 12 filas de 8 mosaicos ou 8 filas de 12 mosaicos. Nestas situações não há distinção entre multiplicador e multiplicando, e são por isso consideradas psicologicamente comutativas.

Os *grupos equivalentes* e o *modelo retangular* são os casos em que a multiplicação apresenta o seu significado mais intuitivo. Por vezes, este último caso também é designado por *modelo de área* (Greer, 1992) ou *disposição retangular* (Carvalho e Gonçalves, 2003). Uma importante aplicação desta situação é o cálculo da área do retângulo.

Exemplo 5

O chão de uma sala retangular está coberta por 96 mosaicos quadrados. No lado maior podemos contar 12. Quantos podemos contar no lado menor?

Aqui temos a divisão no modelo retangular. O raciocínio é indiferente se for dado o número de mosaicos de um lado ou do outro. A sua inversa, a multiplicação como modelo retangular, é uma situação psicologicamente simétrica, não se distinguindo o multiplicador do multiplicando. Portanto, neste caso, não se considera a divisão nem por medida nem por partilha.

Vamos agora avançar para exemplos de multiplicação e divisão menos intuitivos.

Exemplo 6

O prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura, e o prédio onde mora a Sandra é três vezes mais alto. Qual é a altura do prédio onde mora a Sandra?

Nesta situação de multiplicação temos uma comparação. Note-se que na adição e subtração também encontramos comparações. Nesses casos são *comparações aditivas* e neste caso é *comparação multiplicativa*. Esta situação é por isso designada *comparação multiplicativa*.

Embora seja fácil de distinguir, para quem domina o sentido das operações, nem sempre é claro para quem está a aprender, visto não haver fisicamente uma adição sucessiva de parcelas iguais. Vejamos como este exemplo se poderia transformar numa comparação aditiva:

O prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura, e o prédio onde mora a Sandra é três metros mais alto. Qual é a altura do prédio onde mora a Sandra?

A comparação multiplicativa também se verifica na divisão, na qual não há uma repartição física de alguma coisa em partes iguais, como se pode observar nos exemplos seguintes de *divisões com comparação multiplicativa*.

Reparemos que no exemplo 6 se deve escrever $12+12+12=12\times3$. O fator que faz sentido repetir é o 12 e não o 3. Por isso estamos em presença de uma situação psicologicamente não comutativa, onde podemos distinguir o multiplicando (12) do multiplicador (3). Isto implicará também, na inversa, uma divisão como partilha e uma como medida, como a seguir se exemplifica.

Exemplo 7

O prédio onde mora a Sandra tem 36 metros de altura, e o prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura. Quantas vezes é o prédio da Sandra mais alto que o prédio do Luís?

Esta é uma divisão como medida (comparação multiplicativa).

Exemplo 8

O prédio onde mora a Sandra tem 36 metros de altura. Ele é três vezes mais alto que o prédio onde mora o Luís. Qual é a altura do prédio a Luís?

Esta é uma divisão como partilha (comparação multiplicativa).

Estas situações implicam um raciocínio multiplicativo, que é posterior, em termos de percurso de aprendizagem, ao raciocínio aditivo. Também, a presença da palavra "vezes", habitualmente associada à multiplicação poderá induzir os alunos a multiplicar. Uma subtração aparece, com alguma frequência na resolução destes casos com alunos que ainda só conseguem aplicar um raciocínio aditivo. Outra possível justificação para a dificuldade encontrada pelos alunos nesta situação é o facto de não haver (no caso da multiplicação) um ato real de juntar sucessivamente quantidades, nem (no caso da divisão) uma situação de repartição, ideias muito associadas à multiplicação e divisão, respetivamente.

Passemos agora para outra situação.

Exemplo 9

Num baile estão 3 rapazes e 4 raparigas. Quantos pares diferentes se podem formar?

Pelo princípio fundamental da contagem, cada rapaz (de 3) pode dançar com 4 raparigas. Este exercício é também uma situação de multiplicação, denominada *produto cartesiano*. Podem formar-se $3 \times 4 = 12$ pares diferentes ou $4 \times 3 = 12$. É indiferente, em termos de raciocino escrever (ou melhor, pensar) de uma forma ou de outra. Temos uma situação psicologicamente comutativa.

Esta situação é, provavelmente, das menos trabalhadas nas aulas de matemática, e aquela em que mais dificilmente se espera que os alunos apliquem diretamente uma multiplicação. Normalmente, este tipo de situações é resolvido usando um esquema.

Exemplo 10

Num baile podem formar-se 12 pares diferentes.

Como os rapazes são 4, quantas são as raparigas?

Como podemos ver, o produto cartesiano ocorre também na divisão e, tal como na multiplicação, parece não ser prática habitual nas aulas de matemática.

Nesta situação, em termos de raciocínio, é indiferente termos dado o valor dos quatro rapazes e pedir as raparigas ou ter dado o número de três raparigas e pedido o número de rapazes.

Vamos agora para outra situação: a razão

Exemplo 11

A Helena anda 6 km numa hora. A esse ritmo, quantos quilómetros percorre em 3 horas?

Nesta situação de multiplicação temos duas variáveis relacionadas: distância e tempo; $6 \text{ km} \rightarrow 1 \text{ hora}$. Supondo que a velocidade de progressão se mantém, como é referido no enunciado, então a um determinado número de quilómetros corresponde um tempo para percorrê-los, e o inverso também acontece. Ou seja, para uma determinado tempo, corresponde uma distância percorrida.

Assim, a solução seria dada pela multiplicação $6km \times 3(horas) = 18km$

Esta é a situação de multiplicação denominada *razão*. Dado que faz sentido escrever $6 \times 3 = 6(km/h) + 6(km/h) + 6(km/h)$ e não $3+3+3+3+3+3$, esta é uma situação em que podemos distinguir o multiplicador (3) do multiplicando (6), donde resultarão, pela inversa, duas divisões.

Exemplo 12

A Helena anda 6 km por hora. Quantas horas demora a fazer 18 km?

Esta é a situação de divisão como medida (razão).

Exemplo 13

Em 3 horas a Helena anda 18 km. Quantos quilómetros anda por hora?

Esta é a situação de divisão como partilha (razão).

Quero também referir que esta situação, a razão, é interpretada de forma diferente por diversos autores. Para Vershavel e De Corte (1996), não é considerada, sendo vista como um caso particular de grupos equivalentes. No entanto, Carvalho e Gonçalves (2003) apresentam este caso separado dos grupos equivalentes.

Se voltarmos ao exemplo 1, com um pouco mais de atenção, poderemos compreender melhor o porquê destas duas opções diferentes de classificação.

O Rui tem 3 carteiras com 4 cromos cada. Quantos cromos tem?

Suponhamos que o enunciado estava escrito assim;

O Rui tem 3 carteiras de cromos. Em cada carteira há 4 cromos.

Quantos cromos há nas 3 carteiras?

Nesta segunda formulação o aluno pode ser levado a associar: 1 carteira $\rightarrow$ 4 cromos, de onde resulta 3 carteiras $\rightarrow$ x cromos, aplicando, formalmente ou não, a regra de três simples.

Na verdade, a primeira versão parece-me mais natural, no entanto, a mesma realidade pode ser formulada de diferentes maneiras, contribuindo também para a forma diferenciada como se pode classificar cada caso.

Vamos clarificar um pouco mais com o seguinte exemplo:

Versão 1

Um pintor criou uma cor misturando vermelho com amarelo, tendo colocado 3 vezes mais vermelho do que amarelo. Que quantidade de tinta vermelha precisa colocar se usou 5 litros de tinta amarela?

Como se classificaria esta situação? Seria uma comparação multiplicativa.

Versão 2

Um pintor colocou uma mistura de vermelho com amarelo, tendo colocado 3 litros de vermelho por cada litro de amarelo. Que quantidade de tinta vermelha precisa colocar se usou 5 litros de tinta amarela?

Como se classificaria esta situação? Seria uma razão.

Mas na verdade temos exatamente a mesma realidade, só que formulada de maneiras diferentes. Podemos afirmar que a classificação de cada caso não se deve apenas à situação em si, mas também à forma como é apresentada, ou ainda, à forma como se pensa sobre ela.

Não se está aqui a afirmar que as situações são apenas relativas e eventualmente não existem cambiantes, mas antes que a sua classificação pode ser analisada de vários pontos de vista: a situação em si, a forma como é apresentada e a forma como o aluno pensa. Esta será uma visão mais ampla da classificação das operações.

Assim, em resumo, na classificação das situações de multiplicação e divisão de números inteiros considerei as seguintes cinco situações.

- *Grupos equivalentes*
- *Modelo retangular*
- *Razão*
- *Comparação multiplicativa*
- *Produto Cartesiano*

A seguir, apresento o resumo dessas situações.

GRUPOS EQUIVALENTES	
Exemplos	Operação
O Rui tem 3 carteiras com 5 cromos cada. Quantos cromos tem?	Multiplicação
O Rui comprou 3 carteiras de cromos (todas com o mesmo número de cromos). Contou 15 cromos. Quantos cromos tem cada carteira?	Divisão como partilha
O Rui comprou várias carteiras de 5 cromos cada. Contou 15 cromos. Quantas carteiras comprou?	Divisão como medida

Tabela 4 - Resumo das situações de grupos equivalentes

MODELO RECTANGULAR	
Exemplos	Operação
O chão de uma sala retangular está coberta por mosaicos. Estão 12 no lado maior e 8 no lado menor. Quantos mosaicos cobrem o chão da sala?	Multiplicação
O chão de uma sala retangular está coberta por 96 mosaicos quadrados. No lado maior podemos contar 12. Quantos podemos contar no lado menor?	Divisão

Tabela 5 - Resumo das situações do modelo retangular

COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA	
Exemplos	Operação
O prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura e o prédio onde mora a Sandra é três vezes mais alto. Qual é a altura do prédio onde mora a Sandra?	Multiplicação
O prédio onde mora a Sandra tem 36 metros de altura. Ele é três vezes mais alto que o prédio onde mora o Luís. Qual é a altura do prédio do Luís?	Divisão como partilha
O prédio onde mora a Sandra tem 36 metros de altura e o prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura. Quantas vezes é o prédio da Sandra mais alto que o prédio do Luís?	Divisão como medida

Tabela 6 - Resumo das situações de comparação multiplicativa

PRODUTO CARTESIANO	
Exemplos	Operação
Num baile estão 3 rapazes e 4 raparigas. Quantos pares diferentes se podem formar?	Multiplicação
Num baile formam-se 12 pares diferentes. Como os rapazes eram 4, quantas eram as raparigas?	Divisão

Tabela 7- Resumo das situações de produto cartesiano

RAZÃO	
Exemplos	Operação
A Helena anda 6 km numa hora. A esse ritmo, quantos quilómetros percorre em 5 horas?	Multiplicação
Em 2 horas a Helena anda 12 km. Quantos quilómetros anda por hora?	Divisão como partilha
A Helena anda 6 km por hora. Quantas horas demora a fazer 18 km?	Divisão como medida

Tabela 8 - Resumo das situações de razão

2.5. A multiplicação e a divisão de números decimais

Como vimos anteriormente, a classificação das situações que levam à adição e à subtração são as mesmas, quer estejamos a trabalhar com números inteiros ou decimais.

Com a multiplicação e divisão encontramos algo diferente. Estas operações com números decimais implicam um salto maior em termos psicológicos do que no caso da adição e subtração. É mais fácil criar um paralelismo nas situações aditivas do que nas situações multiplicativas. A multiplicação e a divisão de inteiros levam também os alunos a criar algumas ideias sobre o que acontece quando se multiplicam ou dividem números inteiros e que não se verificam quando passamos aos decimais, como por exemplo: quando se multiplica, o produto é maior do que os fatores, quando se divide, o quociente é menor que o dividendo ou o dividendo é sempre maior do que o divisor.

Estes aspetos, embora não diretamente relacionados com o sentido da operação, influenciam a sua decisão, pois se um aluno pensa que o dividendo tem que ser maior que o divisor, terá tendência a não efetuar uma divisão se isso não se verificar. Na tabela 9 temos, na coluna da esquerda, as situações de multiplicação e divisão com inteiros, e na coluna da direita, as situações com números decimais. Como podemos observar, algumas situações podem surgir tanto com números inteiros como com números decimais (embora possa haver diferenças, apesar de ser igual a forma como se interpreta) e outras parecem ser específicas apenas dos números inteiros, ou dos números decimais. Vou analisar, então, cada uma das situações.

Números inteiros	**Números decimais**
Grupos equivalentes	Medidas equivalentes
	Relação parte/todo
Modelo retangular	Modelo retangular
Razão	Razão
	Conversão de medidas
Comparação multiplicativa	Comparação multiplicativa Mudança multiplicativa
Produto cartesiano	

Tabela 9 - Situações multiplicativas.
Comparação de situações com inteiros e com decimais

- <u>Grupos equivalentes – Medidas equivalentes (inteiros e decimais)</u>

Na situação de grupos equivalentes, encontramos para os decimais o caso que é denominado de *medidas equivalentes*. Dado que o produto de dois inteiros é um inteiro, os decimais surgem quando pelo menos um dos fatores é decimal (embora neste caso também possamos ter um inteiro como produto). Na divisão, além das situações em que o dividendo, o divisor, ou ambos, são decimais, também dois inteiros podem originar um decimal, quando o dividendo não é múltiplo do divisor.

Exemplo 1

Quatro garrafas têm, cada uma, 1,8 litros de sumo. Que quantidade de sumo há nas 4 garrafas?

É uma situação semelhante à apresentada com os números inteiros, mas envolvendo um número inteiro e um decimal: $1{,}8+1{,}8+1{,}8+1{,}8=4\times 1{,}8$. Quando o multiplicando é inteiro, como neste exemplo, a multiplicação pode ser vista como uma adição de parcelas iguais. É uma interpretação semelhante àquela que podemos encontrar no caso correspondente com números inteiros.

Exemplo 2

Há 7,2 litros de sumo repartido igualmente por 4 garrafas.

Que quantidade de sumo há em cada garrafa?

Esta situação é a divisão como partilha, tal como nos números inteiros.

Exemplo 3

Há 7,2 litros de sumo em várias garrafas que contém 1,8 litros cada.

Quantas são as garrafas?

Aqui temos a divisão como medida, tal como nos números inteiros.

São estas as três situações de multiplicação e divisão denominadas medidas equivalentes; apresentam as interpretações mais comuns de multiplicação (adição sucessiva) e divisão (medida e partilha).

- Relação parte/todo (números decimais)

Entramos agora num caso específico de multiplicação e divisão com decimais.

Exemplo 4

Num tanque estavam 50 litros de água, mas foram utilizados 0,6 dessa água.

Quantos litros foram utilizados?

Esta situação de multiplicação é denominada relação parte/todo. Pretende-se encontrar uma parte de uma quantidade inicial.

Temos que determinar seis décimas de 50, ou seja, $0{,}6\times 50$. Não faz sentido, como no caso anterior, interpretá-la como uma adição de parcelas iguais, $0{,}6+0{,}6+$

$\cdots + 0{,}6$ cinquenta vezes. O 0,6 funciona como operador. Podemos interpretá-la da seguinte maneira: divide-se 50 em 10 partes iguais, obtendo dessa divisão o valor de uma décima dos 50 litros, e consideram-se 6 décimas, isto é, $50 \div 10 = 5,\ 5 \times 6 = 30$. Matematicamente, a partir das expressões anteriores, podemos chegar com facilidade à multiplicação:

$$5 \times 6 = 30 \Leftrightarrow \frac{50}{10} \times 6 = 30 \Leftrightarrow 50 \times \frac{6}{10} = 30 \Leftrightarrow 50 \times 0{,}6 = 30$$

Mas a questão pedagógica, que agora nos interessa, é outra. Esta conclusão parece demasiado formal para os alunos. Como poderão eles interpretar esta situação como multiplicação?

A seguinte analogia com os números inteiros, para interpretar esta situação como multiplicação, pode ser a seguinte: o dobro de 50 é 2×50, o triplo de 50 é $3 \times 50 \ldots$, então $0{,}6$ de 50 são $0{,}6 \times 50$. Nenhuma destas interpretações me parece tão clara como nos inteiros – daí a dificuldade acrescida da interpretação da multiplicação com os números decimais. Além disso, no caso dos inteiros, o produto será maior que o segundo fator, o que aqui não acontece. Identificar que a parte decimal de um conjunto se obtém por multiplicação não é intuitiva, ao contrário do que acontece com o dobro, o triplo, … especialmente quando a multiplicação é vista como uma adição sucessiva. Na verdade, parece que, depois de muitos exemplos, nós interiorizamos que a multiplicação resolve esta situação. Como o 0,6 é visto como operador, então este será o multiplicador e o 50 o multiplicando.

Nota: neste exemplo, seria mais realista usar $\frac{3}{5}$ ou 60% mas a interpretação é semelhante. A opção de usar um número decimal prende-se com o facto de ser essa a situação estudada neste trabalho, como está justificado no capítulo da Metodologia.

<u>Exemplo 5</u>

Num tanque havia 50 litros de água e utilizaram-se 30.

Que parte/fração/percentagem da água foi utilizada?

Neste exemplo, pretende-se determinar a parte de uma quantidade, na verdade uma parte do ponto de vista relativo e não uma quantidade absoluta. Podemos pensar que se utilizaram 30 litros de 50; $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$; 0,6 ou 60%. A interpretação desta situação é a noção de fração como relação parte/todo – como vimos anteriormente há outras interpretações para as frações. Esta situação não tem paralelismo com os inteiros, já que obtemos um número menor que a unidade, portanto, não inteiro.

Dado que o número desconhecido é o multiplicador então a divisão pode ser vista como medida.

Exemplo 6

De um tanque com água, gastaram-se 30 litros, que correspondem a 0,6 da água que havia no tanque. Que quantidade de água havia no tanque?

Esta é uma situação de divisão, na qual não existe nada para repartir, portanto diferente da interpretação mais comum de divisão, o que implica uma dificuldade na identificação da operação. O facto de um número corresponder a uma quantidade absoluta e outro a uma relativa implica também que esse conceito já esteja adquirido. Não é tão evidente que esta situação se resolva pela divisão, como em outros casos associados à ideia de repartir. Por vezes, chega-se à divisão usando uma regra de três simples. Este exemplo também pode ser visto como o inverso do exemplo 4, levando assim à interpretação de divisão como inversa da multiplicação. Este exemplo corresponde ainda à "construção da unidade", uma situação menos comum nas aulas de matemática do que determinar a parte de uma quantidade considerada a unidade. Outro exemplo da mesma situação (construção da unidade) pode ser:

O Paulo gastou 8 € em 0,75 kg de fruta. Quanto custa 1 kg de fruta?

Na classificação que apresento, as divisões dos exemplos 5 e 6, são vistas como medida e como partilha, respetivamente. Isto deve-se ao facto de se distinguir, na multiplicação inversa, o multiplicando do multiplicador.

- Modelo retangular (inteiros e decimais)

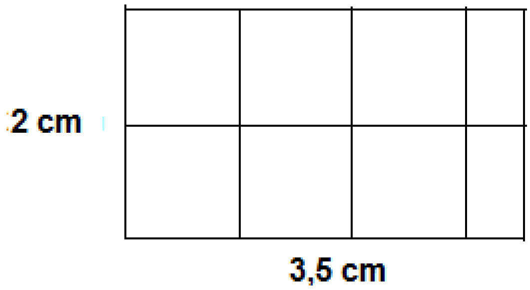
O modelo retangular, no caso dos inteiros, surge quando temos um conjunto de objetos dispostos de forma retangular. Uma importante aplicação desta situação é o cálculo da área do retângulo.

Quando pretendemos calcular a área de um retângulo em que os comprimentos dos lados não são números inteiros, então temos o modelo retangular aplicado ao caso dos números decimais.

Exemplo 7

Qual é a área de um retângulo de lados $3{,}5\ cm$ *e* $2\ cm$*?*

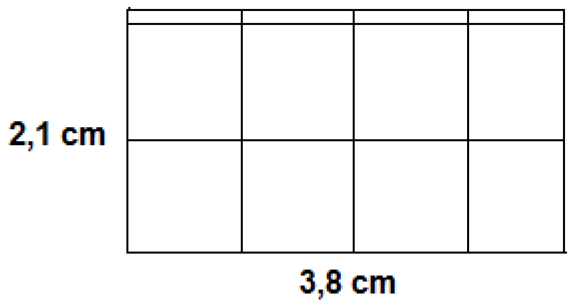
Esta é uma situação de multiplicação em que um dos fatores (mas podem ser os dois) é um número decimal. A interpretação é a mesma que ocorre com os números inteiros. Na realidade queremos contar o número de quadrados com 1 cm de lado. Nesta situação, nem todos os quadrados são inteiros, como se pode observar na figura seguinte, no entanto a multiplicação é aplicada no mesmo sentido.



$2\times 3+2\times 0{,}5=2\times(3+0{,}5)=2\times 3{,}5$ (omitindo as unidades)

Se os comprimentos dos dois lados são representados por números decimais, então temos retângulos (dos quais queremos saber a área) em que nenhum dos lados corresponde a um número inteiro.

Por exemplo, se os lados tiverem respetivamente 2,1 e 3,8 cm, além do que foi anteriormente exposto ainda temos um retângulo em que os lados medem, 0,1 cm e 0,8 cm. Como calcular a sua área? 0,1 cm = 1 mm e 0,8 cm = 8 mm. Então temos um retângulo de $1\times 8=8\,\text{mm}^2$, que corresponde a $0{,}08\ \text{cm}^2$. E como $0{,}1\times 0{,}8=0{,}08$, então a área pode calcular-se $0{,}1\times 0{,}8=0{,}08\ \text{cm}^2$



Agora poderíamos escrever

$$2\times 3+2\times 0{,}8+3\times 0{,}1+0{,}8\times 0{,}1=2\times(3+0{,}8)+(3+0{,}8)\times 0{,}1=$$
$$=2\times 3{,}8+0{,}1\times 3{,}8=(2+0{,}1)\times 3{,}8=2{,}1\times 3{,}8$$

Pedagogicamente será este o caminho para passar do cálculo da área do retângulo em que os lados passam de inteiros a decimais?

Na verdade parece-me que não, que se trata duma situação demasiado formal e que é mais sensato, neste caso, estender a interpretação dos inteiros, isto é, a área é obtida, multiplicando os comprimentos de dois lados consecutivos. Claro que a noção de área não deve ser esquecida em favor (apenas) do algoritmo do cálculo da área.

Apesar das diferenças apontadas devemos considerar que o modelo retangular se aplica tanto aos números inteiros como aos números decimais.

Exemplo 8

A área de um retângulo é $8{,}4\ \mathrm{cm}^2$ *e um dos lados mede* $3{,}5\ \mathrm{cm}$. *Qual é o comprimento dos outros lados?*

Esta é a situação de divisão do modelo retangular. É uma situação simétrica, pois é indiferente qual o valor do lado que é dado, pelo que não se considera a divisão como medida ou como partilha; tal como no exemplo 7, não se distingue o multiplicador do multiplicando. Aqui a divisão é vista como a inversa da multiplicação.

- Razão (inteiros e decimais)

A razão é uma situação que tem uma interpretação semelhante nos números inteiros e nos números decimais, e envolve uma grande variedade de situações como, por exemplo, velocidade, preços ou misturas.

Exemplo 9

Um ciclista desloca-se à velocidade constante de 6,5 m/seg.

A esse ritmo, quantos metros percorre em 10 segundos?

Aqui temos uma situação de multiplicação como razão que tem uma interpretação semelhante aos inteiros. Podemos interpretá-la como adição sucessiva, que será $6{,}5+6{,}5+\cdots+6{,}5=10(metros)\times 6{,}5(metros\ por\ segundo)=65(metros)$ – repetindo 6,5 dez vezes.

Se em vez de 10 segundos tivéssemos, por exemplo, 3,2 segundos, a interpretação, com algumas diferenças, podia fazer-se de forma semelhante, tal como no caso do modelo retangular. Seria então $3{,}2\times 6{,}5(metros)=20{,}8(metros)$

Exemplo 10

Um ciclista desloca-se à velocidade constante de 6,5 m/seg.

Quanto tempo demora a percorrer 65 metros?

Esta é uma situação de divisão como razão que pode ser vista como inversa da multiplicação. Também, apesar de não haver um ato de dividir, podemos pensar em 65 metros divididos em partes iguais de 6,5 m, para assim vermos quantos segundos demora. É a divisão como medida.

Exemplo 11

Em 10 segundos um ciclista percorre, a uma velocidade constante, 65 metros.

Quantos metros percorre por segundo?

Aqui temos a outra divisão como razão, que podemos ver como inversa da multiplicação, ou então dividimos os 65 metros em 10 partes (segundos) para ver quantos metros percorre por segundo. É a divisão como partilha.

- Conversão de Medidas (decimais)

Um caso particular de razão é a conversão de medidas.

Exemplo 12

Um euro vale 1,3 dólares. Quantos dólares valem 5 euros?

Esta é a situação de multiplicação. Podemos interpretá-la como 1,3 dólares por cada euro, isto é, $1{,}3+1{,}3+1{,}3+1{,}3+1{,}3=5\times1{,}3$ Assim, 5 será o multiplicador e 1,3 será o multiplicando.

Exemplo 13

Um euro vale 1,3 dólares. Quantos euros valem 6,5 dólares?

É uma divisão como medida, pois o valor desconhecido é o multiplicador.

Exemplo 14

Cinco euros correspondem a 6,5 dólares. A quantos dólares corresponde 1 euro?

É uma divisão como partilha, pois o valor desconhecido é o multiplicando.

- Comparação Multiplicativa (números inteiros e decimais)

Exemplo 15

O Luís comprou um disco e um livro. O preço do livro foi 1,5 vezes o preço do disco. O disco custou 7 €. Quanto custou o livro?

Este é o caso de multiplicação de comparação multiplicativa com números decimais. É uma situação semelhante à que ocorre com números inteiros, e seguindo a mesma interpretação, podemos considerar que o 7 é o multiplicando e 1,5 o multiplicador.

Exemplo 16

O Luís comprou um disco e um livro. O preço do livro foi 1,5 vezes o preço do disco. O livro custou 10,50 €. Quanto custou o disco?

Trata-se de uma divisão como partilha, pois procuramos o multiplicando.

Exemplo 17

O Luís comprou um disco por 7 € e um livro por 10,50 €. Quantas vezes o livro é mais caro do que o disco?

Temos uma divisão como medida, pois procuramos o multiplicador.

- Mudança Multiplicativa (inteiros e decimais)

Exemplo 18

Um animal, durante o seu primeiro ano de vida, aumentou 3,5 vezes o seu peso. Quando nasceu pesava 1,2 kg. Quanto pesava o animal com 1 ano de vida?

Esta situação é semelhante à apresentada anteriormente, e pode ser considerada um caso particular de comparação multiplicativa, na qual, em vez de se compararem quantidades relativas a, por exemplo, objetos diferentes, há uma comparação entre algo que foi alterado. Embora esta situação também possa surgir com números inteiros, é mais realista e frequente com números decimais, se pensarmos onde pode ocorrer: crescimento de seres vivos, aumento de preços, dilatação de um corpo, etc. Por isso, não foi referida nos números inteiros. Podemos também aqui considerar 1,2 como multiplicando e 3,5 como multiplicador, o que leva a duas divisões, como se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 19

Um animal, durante o seu primeiro ano de vida, aumentou 3,5 vezes o seu peso. Ao fim desse primeiro ano de vida pesava 4,2 kg. Quanto pesava quando nasceu?

Esta é uma divisão como partilha, pois procuramos o multiplicando.

Exemplo 20

Um animal nasceu com 1,2 kg, e com 1 ano de vida pesava 4,2 kg. Quantas vezes está mais pesado ao fim de 1 ano de vida?

Aqui está uma divisão como medida, pois procuramos o multiplicador.

A seguir, apresento o resumo das situações. Faço notar que nas tabelas relativas à multiplicação são repetidos os exemplos apresentados anteriormente com os números inteiros para se tornar mais fácil a comparação entre os dois casos.

<table>
<tr><th colspan="2">GRUPOS EQUIVALENTES/MEDIDAS EQUIVALENTES</th></tr>
<tr><th>Exemplos</th><th>Operação</th></tr>
<tr><td>O Rui tem 4 carteiras com 6 cromos cada.
Quantos cromos tem?</td><td rowspan="2">Multiplicação</td></tr>
<tr><td>Quatro garrafas têm, cada uma, 1,8 litros de sumo. Que quantidade de sumo há nas 4 garrafas?</td></tr>
<tr><td>O Rui comprou várias carteiras de 6 cromos cada. Contou 24 cromos. Quantas carteiras comprou?</td><td rowspan="2">Divisão como medida</td></tr>
<tr><td>Há 7,2 litros de sumo em várias garrafas que contém 1,8 litros cada. Quantas são as garrafas?</td></tr>
<tr><td>O Rui comprou 4 carteiras de cromos (todas com o mesmo números). Contou 24 cromos.
Quantos cromos tem cada carteira?</td><td rowspan="2">Divisão como partilha</td></tr>
<tr><td>Há 7,2 litros de sumo repartido igualmente por 4 garrafas. Que quantidade de sumo há em cada garrafa?</td></tr>
</table>

Tabela 10 – Resumo das situações de Grupos equivalentes/Medidas equivalentes

RELAÇÃO PARTE/TODO	
Exemplos	Operação
Num tanque estavam 50 litros de água, mas foram utilizados 0,6 dessa água. Quantos litros foram utilizados?	Multiplicação
Num tanque havia 50 litros de água e utilizaram-se 30. Que parte/fração/percentagem da água foi utilizada?	Divisão como medida
De um tanque com água, gastaram-se 30 litros, que correspondem a 0,6 da água que havia no tanque. Que quantidade de água havia no tanque?	Divisão como partilha

Tabela 11 – Resumo das situações de Relação parte-todo

MODELO RECTANGULAR	
Exemplos	Operação
O chão de uma sala retangular está coberta por mosaicos. Estão 12 no lado maior e 8 no lado menor. Quantos mosaicos cobrem o chão da sala?	Multiplicação
Qual é a área de um retângulo de lados $3{,}5\ cm$ *e* $2\ cm$ *?*	
O chão de uma sala retangular está coberta por 96 mosaicos quadrados. No lado maior podemos contar 12. Quantos podemos contar no lado menor?	Divisão
A área de um retângulo é $7{,}6\ \mathrm{cm}^2$ *e um dos lados mede* $3{,}5\ \mathrm{cm}$. *Qual é o comprimento dos outros lados?*	

Tabela 12- Resumo das situações de Modelo retangular

RAZÃO	
Exemplos	**Operação**
A Helena anda 6 km numa hora. A esse ritmo, quantos quilómetros percorre em 5 horas?	Multiplicação
Um ciclista desloca-se à velocidade constante de 6,5 m/seg. A esse ritmo, quantos metros percorre em 10 segundos?	
A Helena anda 6 km por hora. Quantas horas demora a fazer 18 km?	Divisão como medida
Um ciclista desloca-se à velocidade constante de 6,5 m/seg. Quanto tempo demora a percorrer 65 metros?	
Em 2 horas a Helena anda 12 km. Quantos quilómetros anda por hora?	Divisão como partilha
Em 10 segundos um ciclista percorre, a uma velocidade constante, 65 metros. *Quantos metros percorre por segundo?*	

Tabela 13 – Resumo das situações de Razão

CONVERSÃO DE MEDIDAS	
Um euro vale 1,3 dólares. *Quantos dólares valem 5 euros?*	Multiplicação
Um euro vale 1,3 dólares. *Quantos euros valem 6,5 dólares?*	Divisão como medida
Cinco euros correspondem a 6,5 dólares. *A quantos dólares corresponde 1 euro?*	Divisão como partilha

Tabela 14 – Resumo das situações de Conversão de Medidas

COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA	
Exemplos	Operação
O prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura, e o prédio onde mora a Sandra é três vezes mais alto. Qual é a altura do prédio onde mora a Sandra?	Multiplicação
O Luís comprou um disco e um livro. O preço do livro foi 1,5 vezes o preço do disco. O disco custou 7 €. Quanto custou o livro?	
O prédio onde mora a Sandra tem 36 metro de altura, e o prédio onde mora o Luís tem 12 metros de altura. Quantas vezes é o prédio da Sandra mais alto que o prédio do Luís?	Divisão como medida
O Luís comprou um disco por 7 € e um livro por 10,50 €. Quantas vezes o livro é mais caro do que o disco?	
O prédio onde mora a Sandra tem 36 metros de altura. Ele é três vezes mais alto que o prédio onde mora a Luísa. Qual é a altura do prédio a Luísa?	Divisão como partilha
O Luís comprou um disco e um livro. O preço do livro foi 1,5 vezes o preço do disco. Quanto custou o disco?	

Tabela 15 – Resumo das situações de Comparação Multiplicativa

MUDANÇA MULTIPLICATIVA	
Exemplos	Operação
Um animal, durante o seu primeiro ano de vida, aumentou 3,5 vezes o seu peso. Quando nasceu pesava 1,2 kg. Quanto pesava o animal com 1 ano de vida?	Multiplicação
Um animal nasceu com 1,2 kg, e com 1 ano de vida pesava 4,2 kg. Quantas vezes está mais pesado ao fim de 1 ano de vida?	Divisão como medida
Um animal, durante o seu primeiro ano de vida, aumentou 3,5 vezes o seu peso. Ao fim desse primeiro ano de vida pesava 4,2 kg. Quanto pesava quando nasceu?	Divisão como partilha

Tabela 16 – Resumo das situações de Mudança Multiplicativa

Terminada a classificação das situações que podemos encontrar em cada operação, vou referir algumas consequências que advirão na aprendizagem dos alunos. É preciso lembrar que a classificação das situações que apresentei não é única, pois diversos autores apresentam classificações diferentes, embora haja bastantes semelhanças entre elas. As situações referidas neste trabalho não esgotam todas as possibilidades, nem foi essa a intenção, mas sim mostrar de forma clara que cada operação pode resolver, ou modelar, diversas situações que são realmente diferentes. Pretendo também salientar a ideia de que decidir qual a operação que permite responder a determinada questão é um assunto mais complexo do que se poderia supor numa análise superficial. A sua importância é crucial no processo de aprendizagem das operações por parte dos alunos.

2.6. Consequências da natureza das operações na aprendizagem

As quatro operações analisadas estão, de forma geral, associadas apenas a parte do seu significado, como foi anteriormente referido e que recordamos: a adição à ideia de juntar, a subtração à de tirar, a multiplicação à de adição sucessiva e a divisão à de repartir. Mas, como vimos, essa é uma visão das operações que podemos considerar limitada, pois elas podem modelar muitas outras situações que não correspondem às interpretações mais comuns. Na prática letiva verifica-se que nem todas as situações são tratadas nas aulas da mesma forma ou com a mesma ênfase (Verschaffel, De Corte, 1996).

Assim, é de supor que se os alunos não tiverem contacto (ou se esse contacto for reduzido) com algumas das situações, estes poderão ter dificuldades na identificação da operação, quando confrontados com essas situações, *mesmo que outras situações associadas à mesma operação tenham sido bastante trabalhadas*. Podemos então considerar que para levar os alunos a adquirir de forma desejável o sentido das operações, de modo a aplicá-las de forma eficiente, deverão explorar uma variedade de situações tão rica quanto possível.

Outro aspeto importante que resulta do conhecimento da natureza das operações é que as diversas situações têm níveis de dificuldade diferentes. Vejamos alguns exemplos: supõe-se que os alunos começam por aprender melhor situações que envolvem ação do que aquelas que são estáticas; nas situações aditivas, as de mudança serão mais fáceis em contraste com a combinação e comparação; as operações multiplicativas também serão aprendidas depois das aditivas, e nelas, a comparação multiplicativa, parece ser mais difícil do que os grupos equivalentes.

Assim, levanta-se a possibilidade de a aprendizagem do sentido das operações pressupor uma sequência, tal como acontece noutras áreas, como, por exemplo, os níveis de Van Hiele na geometria. Na prática, como os alunos apresentam mais dificuldades em determinadas situações do que noutras, essa sequência acaba, de certa forma, por existir de forma implícita.

No entanto, fica a dúvida se essa sequência é natural ou se é provocada pelas práticas letivas, isto é: as situações em que os alunos apresentam mais dificuldades são realmente mais complexas, ou essas dificuldades devem-se ao facto de serem menos trabalhadas nas aulas? Esta dúvida é levantada por Dickson, Brown e Gibson (1990), em *Children Learning Mathematics. A Teacher's Guide to Recent Research*.

Em resumo pode considerar-se que:

- A aprendizagem do sentido das operações é um percurso complexo e longo. Brian Greer (1992) afirma que esse percurso vai, pelo menos, até aos 18 anos.
- Existe, para cada operação, uma grande variedade de situações que por ela são modeladas.
- Para que os alunos possam adquirir o sentido das operações precisam de ser confrontados com a maior variedade possível de situações.

A seguir vão ser referidos alguns aspetos que, embora não tenham sido objeto de estudo neste trabalho, podem também ter influência na escolha das operações por parte dos alunos, e às quais achei que deveria fazer referência. Não quero deixar a ideia de que as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação das operações se devem apenas à sua natureza, mas antes fazer notar que isso é fruto de um conjunto integrado de fatores.

2.7. O sentido e a natureza dos números

Quando se efetuam operações, usam-se números, por isso, conhecer a sua natureza é de extrema importância para podermos operar com eles. Para reforçar esta ideia, basta pensar que uma pessoa que não conhece os números, não pode efetuar operações com eles. Mas esta afirmação, embora seja demasiado evidente, não é tão simples como à partida se possa pensar. O que significa conhecer os números?

Nos últimos anos, os investigadores em didática da matemática têm vindo a abordar um conceito denominado *sentido do número*, e para o qual parece não haver uma definição inequívoca. Trata-se de um conceito que se refere a um conhecimento amplo sobre os números e as operações, a um conjunto de competências que vão para além do domínio do cálculo e, em especial dos algoritmos, muito valorizados numa aprendizagem mais tradicional. Embora não haja uma definição para o *sentido do número*, há alguns aspetos que podem ser observados nos alunos e que nos levam a pensar que estes estão a adquirir o sentido do número. Têm sido apontados três aspetos fundamentais na aquisição do sentido do número: conhecimento e destreza com os números, conhecimento e destreza com as operações e aplicação dos conhecimentos e destreza com os números e operações em situações de cálculo.

De uma forma mais específica, podemos resumir na tabela 17 os aspetos fundamentais sobre o sentido do número, à luz do que é proposto por McIntosh et al. (1992), referidos por Brocardo, Mendes e Delgado (s/d).

SENTIDO DO NÚMERO

Conhecimento e destreza com os números	- Sentido da regularidade dos números - Múltiplas representações dos números - *Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números* - Uso de sistemas de referência que permitem avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar o cálculo
Conhecimento e destreza com as operações	- *Compreensão do efeito das operações* - Compreensão das propriedades das operações - *Conhecimento das relações entre as operações*
Aplicação dos conhecimentos e destreza com os números e operações em situações de cálculo	- *Compreensão para relacionar o contexto e os cálculos* - Consciencialização da existência de múltiplas estratégias - Apetência para usar representações eficazes - Sensibilidade para rever os dados e o resultado

Tabela 17 - O sentido do número

Em itálico, na tabela, encontram-se os aspetos que considerei mais relevantes para a escolha das operações, que a seguir especifico.

- Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números

Este aspeto pode relacionar-se diretamente com a multiplicação e divisão na relação parte-todo. Quando precisamos determinar metade, três décimos, etc. de uma quantidade, esses números têm uma grandeza relativa, metade de *outra* quantidade, três décimos de *outra* quantidade. É diferente termos 0,3 metros de fio ou 0,3 de 5 metros. Em cada caso 0,3 representa comprimentos diferentes. A flexibilidade para a compreensão desta multiplicidade de significados joga um papel importante na aquisição do sentido do número e das operações.

- *Compreensão do efeito das operações*

As operações "transformam" os números noutros. O que acontece a um número se lhe adicionarmos outro? Se lhe subtrairmos…? Se o multiplicamos por…? Se o dividirmos por …? Este aspeto torna-se particularmente relevante quando os alunos deixam o domínio dos números inteiros e entram no mundo dos decimais, e mais tarde, dos negativos. Algumas ideias válidas para o conjunto dos números inteiros positivos deixam de se aplicar quando entramos nos racionais, como já foi referido e que relembro. Por exemplo, multiplicar torna sempre maior, dividir torna sempre menor, divide-se sempre o maior pelo menor, são ideias vindas dos inteiros que deixam de ser válidas quando trabalhamos com os decimais. Um aluno decide corretamente multiplicar, mas o facto de o produto ficar menor, pode levá-lo a questionar se optou corretamente pela operação, pois não esperava aquele resultado. Será que é mesmo uma multiplicação? É melhor tentar outra para ver se o resultado é mais plausível.

- *Conhecimento das relações entre as operações*

Este parece-me um aspeto bastante importante. As operações multiplicativas podem ser, em certas situações, interpretadas em função das aditivas. No caso dos grupos equivalentes, diz-se que a multiplicação tem uma interpretação aditiva, por ser uma adição sucessiva. A ideia de repartir, na divisão, pode também ser vista como uma subtração sucessiva; vão-se tirando sucessivas vezes o mesmo valor para ver quantas vezes se retira. Outra relação fundamental entre as duas operações aditivas e as duas operações multiplicativas, é o facto de serem inversas uma da outra, o que também é uma interpretação importante de algumas situações.

- *Compreensão para relacionar o contexto e os cálculos*

As operações são uma forma de modelar situações reais. O sentido das operações (ponto central deste trabalho) tem uma importância fundamental quando relacionamos as operações com situações reais. Podemos também estudá-las de um ponto de vista teórico e descontextualizado, mas não é o caso neste estudo, pelo que se reveste da maior importância a relação entre as operações e o mundo real.

Os aspetos referidos mostram-nos que existe uma relação forte, em alguns aspetos, entre o sentido do número e o sentido das operações. Desta forma, a aquisição do sentido do número é um percurso que apresenta algum paralelismo com a aquisição do sentido das operações.

2.8. Outros aspetos que podem influenciar a escolha das operações

As situações que foram analisadas em relação à classificação das operações são apresentadas em tarefas denominadas "problemas de palavras". Podemos analisar com mais detalhe a sua natureza. Embora não haja uma definição final deste tipo de tarefas, Verschavel, Greer e De Corte (2000) apresentam uma definição sugerida por Semandeni (1995). "Problemas de palavras" podem ser definidos como situações problemáticas nas quais uma ou mais questões são colocadas e as respostas podem ser obtidas pela aplicação de uma operação matemática envolvendo os dados disponíveis.

Para se compreender melhor a ideia, vejamos duas situações, exemplificando, no primeiro caso o que deve ser considerado e no segundo o que não deve ser considerado um "problema de palavras".

Caso 1 – O Pedro tinha 5 berlindes e ganhou 3. Com quantos ficou?

Caso 2 – Quanto obténs se adicionares 3 a 5?

No caso 1, temos então uma situação contextualizada em que não é indicada qual a operação a efetuar, tendo esta que ser identificada. Já no caso 2, a operação (adição) está explicitamente indicada.

Para complementar a definição, devem ser levadas em consideração as notas seguintes:

- Apesar do uso da palavra problema, a situação não tem que constituir obrigatoriamente um problema.

- Não há referência ao nível de dificuldade, podendo este ser variável.

- Pode ser uma tarefa de álgebra, geometria, lógica, etc. e não apenas aritmética.

- O enunciado pode incluir mais do que texto, como esquemas ou gráficos, por exemplo.

Este tipo de atividade sempre existiu nos currículos escolares, inclusivamente aparecem nos papiros egípcios com cerca de 4000 anos.

A prática de interpretação de situações reais e consequente aplicação na resolução de tarefas e a motivação pela utilidade da matemática, entre outros, são motivos a favor da inclusão deste tipo de tarefas nos currículos. No entanto, em termos práticos, a sua aplicação merece críticas de alguns investigadores. Verschavel, Greer e De Corte (2000) citam um conjunto de autores – Cooper (1994), Davis (1989), De Corte e Verchaffel (1985), Freudenthal (1991), Greer (1993), Kilpatrick (1987), Nesher (1980), Nunes, Schliemann e Carraher (1993), Reusser (1988), Säljö (1991), Shoenfeld (1991), Silver, Shapiro e Deutsch (1993), Treffers (1987), Verschaffel e De Corte (1997a) – para resumir o seguinte: "Mais do que situações realistas que levem os alunos a usar o senso comum e a sua experiência do mundo real nas diferentes etapas do seu desenvolvimento, os problemas de palavras são apresentados de forma artificial como puzzles fora do mundo real" (p. xv).

Esta pode ser uma ajuda para compreender um fenómeno preocupante neste tipo de situações, designado por "suspensão do sentido real". Consiste no facto dos alunos responderem a determinadas questões sem qualquer sentido. Dado que é referido essencialmente em exemplos de questões semelhantes às que são estudadas nesta tese, este ponto de vista, apesar de não ser o foco central do trabalho, merece também algumas considerações.

Exemplos típicos de "suspensão do sentido real" são conhecidos e podemos examinar alguns exemplos: *Num rebanho há 125 ovelhas e 5 cães. Qual é a idade do pastor?* Num estudo realizado pelo Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Grenoble, em 1980, com este exemplo, apenas 12% dos alunos de 7 a 9 anos e 62% de alunos dos 9 aos 11 anos afirmaram não ser possível responder. Um aluno efetuou a resolução seguinte:

125+5=130, Não pode ser, é muito velho

125-5=120, Também é muito velho

125:5=25, Pode ser, esta é a idade do pastor.

Vejamos agora mais um exemplo. *"A Cátia convidou 8 amigos para o seu aniversário que decorrerá daqui a 4 dias. Que idade faz a Cátia?"*

A percentagem de alunos que tentou resolver a questão, considerando-a resolúvel foi:

1.º ano – 10%

2.º ano – 30%

3.º ano – 60%

4.º ano – 60%

5.º ano – 45%

Esta constatação é preocupante, pois sugere que a matemática aprendida na escola pode influenciar de forma negativa o desempenho dos alunos nestas situações. Enquanto os alunos mais novos, com menos conhecimentos, tentam pensar no assunto e encontrar uma estratégia de resolução, os mais velhos, aplicam simplesmente um procedimento de rotina sem darem qualquer significado à situação.

Assim, parece que na escola os alunos não adquirem realmente os conhecimentos matemáticos desejados. Habituam-se a repetir um padrão que consiste em efetuar uma operação e obter um resultado numérico, sem interpretarem realmente a situação.

Na verdade, os alunos aprendem o que podemos chamar "as regras do jogo". Entre outros aspetos, eles assumem que:

- os "problemas" fazem sentido, são resolúveis e não se questionam;
- têm uma só resposta, que é um número que se obtém através duma operação;
- os dados do problema são todos utilizáveis, não há em excesso nem em falta;
- os objetos, pessoas, lugares,… dos problemas escolares são diferentes dos reais.

Mas também há algumas críticas aos estudos que chegaram às conclusões apresentadas. Será lógico apresentar a um aluno uma situação sem sentido? Será que ele não percebeu mesmo o que é dito, quando tenta resolver? Vejamos o seguinte exemplo:

Professor – Tens 10 lápis azuis no teu bolso direito e 10 lápis vermelhos no teu bolso esquerdo. Que idade tens?

Aluno – 20 anos.

Professor – Mas tu sabes que não tens 20 anos.

Aluno – Claro que sei, mas a culpa é sua, professor, que me deu os números errados![1]

Uma forma de tentar clarificar os resultados destas experiências é introduzir uma questão final que peça aos alunos a sua opinião sobre a questão que lhe foi colocada.

[1] Estes exemplos foram retirados de: Verschaffel, L., Greer, B. e De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse. Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Este fenómeno, a *suspensão do sentido real*, pode também ter um peso considerável nas dificuldades que os alunos apresentam para escolher a operação que resolve cada situação e é mais uma variável, além da natureza da situação em si. São apontadas causas para esta suspensão, com especial incidência numa educação matemática tradicional, que enfatizava o ensino da aritmética, baseando-se no cálculo e, especialmente, nos algoritmos. Assim, não está presente a preocupação de desenvolver nos alunos a compreensão e o sentido das operações (e também do número). "Saber matemática significava, essencialmente, saber a tabuada e saber fazer contas" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, citados por Carvalho e Gonçalves, 2003). Uma importante mudança na visão da matemática que hoje se verifica é que ela deixou de ser encarada como uma coleção de conhecimentos para ser vista como natural no conhecimento humano, com sentido, e como uma forma ativa de resolver situações reais. Claro que o cálculo e os algoritmos continuam a ter um papel importante na educação matemática, não podemos é resumi-la apenas a esta faceta.

A prática dos exercícios, problemas e outras tarefas deve continuar, mas com significado para os alunos. É fundamental que estes possam pensar em cada situação, que usem verdadeiramente o seu raciocínio e não as "regras do jogo" anteriormente indicadas. Para isso, é desejável que as tarefas propostas sejam realistas e possam refletir situações do mundo real que os alunos conheçam, podendo assim, de facto, aplicar a sua experiência do dia-a-dia na resolução das tarefas escolares. Afinal a matemática serve para resolver questões reais.

Outro aspeto a considerar tem a ver com a rotina das tarefas na aula de matemática. Embora a prática seja necessária, ela não pode ser de tal forma que os alunos deixem de pensar, e que cada vez que surge uma situação diferente, estes façam a sua resolução como se do mesmo tipo de tarefa se tratasse. Mas para que os alunos adquiram essa capacidade é necessário que em cada tema que se estuda se possam introduzir tarefas diferentes. Quando se estuda uma operação (talvez fosse melhor estudar algumas em simultâneo), os alunos devem ser confrontados com situações que se resolvam com outra operação, e também sem qualquer operação. Esta questão não é específica do sentido das operações, mas transversal a outros temas matemáticos. Por exemplo, quando se estuda a proporcionalidade direta, os alunos devem ser confrontados com situações em que não ocorra a proporcionalidade direta, pois além dos cálculos, é fundamental, numa situação real, identificar quando se está ou não em presença de grandezas diretamente proporcionais.

No caso específico das operações, a seguinte afirmação parece-me bastante elucidativa: "os problemas deveriam ser tão variados que os estudantes não pudessem assumir que, se há dois números num problema, a resposta seria encontrada adicionando, subtraindo, multiplicando ou dividindo os números" (Greer, 1992, p. 292).

Na aprendizagem das operações, como já foi referido, temos a vertente do cálculo e da sua compreensão, entre outros aspetos que podem ser estudados, como as relações entre as operações ou as suas propriedades, por exemplo. Estes dois pontos, cálculo e compreensão, levam-me a mais uma reflexão sobre a aprendizagem das operações. Para se saber efetuar o algoritmo de uma operação é necessário conhecer-se as regras e praticar. Para se compreender o sentido das operações, a situação é bem diferente; em vez da aplicação de uma regra, os alunos devem adquirir o conceito e essa aquisição faz-se ao longo do tempo, de anos, de forma progressiva e sem a aprendizagem de uma regra. O aluno deverá experimentar uma grande variedade de tarefas, sequencialmente selecionadas de modo a ir construindo os conceitos. Como se vê são formas diferentes de aprender, porque o que se aprende também é diferente. A antiga insistência e a visão da matemática centrada nas regras, que ainda não desapareceu totalmente das nossas aulas, dificultam a aquisição de conceitos, como a aprendizagem da compreensão das operações. Além de alguma dificuldade na mudança, penso que um dos motivos que leva os professores, por vezes, a manter essa tradição, é que os resultados da aprendizagem das regras, dos algoritmos, podem ver-se rapidamente, enquanto os conceitos demoram tempo a ser adquiridos e essa espera deixa os professores "nervosos".

CAPÍTULO 3

Metodologia

Neste capítulo, irei descrever os procedimentos seguidos neste estudo, começando por abordar as metodologias de investigação em didática para, a partir daí, justificar a escolha da metodologia usada nesta investigação.

Para recolher a informação necessária que constituiu a componente empírica deste estudo, foi elaborado um instrumento formado por um conjunto de questões que se resolvem (exceto uma) pela aplicação de uma das quatro operações aritméticas.

Farei a descrição da forma como foram elaboradas as questões a colocar aos alunos envolvidos e como foi feita a sua aplicação.

3.1. Metodologias de investigação em didática

Nas investigações em didática aplicam-se habitualmente metodologias quantitativas, qualitativas ou mistas. Apresento em seguida algumas características dessas metodologias para justificar a opção pela metodologia escolhida para este trabalho.

Nem todos os autores apresentam as mesmas perspetivas das diferentes metodologias, o que leva a considerar que estas contêm alguma subjetividade. Em termos históricos, podemos dizer que o debate entre as metodologias qualitativa e quantitativa vem do conceito de verdade dos filósofos da Grécia antiga. Era o debate entre saber se havia apenas uma verdade, que era independente do observador, ou se esta dependia da interpretação que se fazia daquilo que se observasse.

O paradigma da metodologia quantitativa apoia-se no pressuposto de que a realidade é só uma, independente do observador, e consequentemente, a sua interpretação de determinado fenómeno é única. O paradigma da metodologia qualitativa admite que a realidade pode ser interpretada de diversas formas, que dependem do observador.

Em termos práticos, estas ideias não são suficientemente informativas para definir os contornos dos diferentes tipos de metodologias, pelo que importa avançar para outros aspetos, que me parecem mais significativos. A metodologia quantitativa tem um carácter mais descritivo, enquanto a metodologia qualitativa tem um carácter mais interpretativo, isto é, a primeira poderá dizer-nos o que acontece, e a segunda explicar-nos porque acontece. A primeira aplica-se geralmente a uma maior quantidade de informação, que poderá ser uma amostra da população, sobre a qual pode fazer-se um tratamento estatístico dos dados, de forma a extrair eventuais inferências para a população. A segunda baseia-se numa menor quantidade de informação, não havendo preocupação com a representatividade da informação obtida relativamente à população. No entanto, tal informação será analisada mais pormenorizadamente, tentando-se interpretar de forma profunda, o que nos leva também ao encontro de resultados importantes.

Poderemos combinar os dois métodos numa investigação? Existem, de facto, estudos que combinam os dois métodos. Esta situação denomina-se, habitualmente, metodologia mista. A sua natureza não é consensual. Johnnson, Onwuegbuzie e Turner, (2007) apresentam dezanove definições de metodologia mista, de acordo com opiniões de diversos investigadores. Os motivos que levam à opção pela metodologia mista são também variados, e por vezes, até contraditórios. Denzin (1978, citado por Johnnson, Onwuegbuzie e Turner, 2007) defende a metodologia mista como uma forma de triangulação. Para este autor, a triangulação é definida como "uma combinação de metodologias para estudar o mesmo fenómeno" (Denzin, 1978, p 114). Podemos combinar dados, investigadores, teorias e, neste caso, metodologias. Esta combinação pretende tornar mais fiáveis os resultados de uma investigação, pois eles surgirão de diversas fontes.

No entanto outros autores apresentam um ponto de vista completamente diferente: "… porque os dois paradigmas não estudam o mesmo fenómeno, os métodos quantitativos e qualitativos não podem ser combinados para validação cruzada ou triangulação. No entanto, eles podem ser combinados com a finalidade de se complementarem" (Sale, Lohefeld e Brazi, 2002, p. 43). Na verdade, nem sempre está claro que temos uma metodologia mista: "Saber quanto temos ou não temos um exemplo de combinação de investigação quantitativa e qualitativa é, por vezes, problemático" (Bryman, 2006, p 100). Em alguns estudos de metodologia mista pode haver um maior peso da parte quantitativa, da parte qualitativa, ou um equilíbrio. Assim, Johnnson, Onwuegbuzie e Turner (2007) propõem a seguinte classificação para metodologias de investigação.

- ✓ Qualitativo (puro) – apenas qualitativo
- ✓ Misto qualitativo – qualitativo dominante

- ✓ Misto (puro) – quantitativo e qualitativo com igual peso
- ✓ Misto quantitativo – quantitativo dominante
- ✓ Quantitativo puro – apenas quantitativo

Por vezes também aparecem referências a estes métodos do tipo “QUANT-qual”. Isto representaria um método misto de domínio quantitativo; a metodologia dominante aparece em letras maiúsculas.

Das diversas definições de vários autores citados por Johnnson, Onwuegbuzie e Turner (2007), destaco alguns pontos sobre o que se considera ser um estudo de metodologia mista (p. 119):

“Metodologia mista envolve um uso simultâneo ou sequencial de dados qualitativos ou quantitativos …”

“Metodologia mista é um termo usualmente usado para designar a combinação de investigações quantitativas e qualitativas no mesmo projeto de investigação…”.

3.2. Metodologia usada nesta investigação

O tipo de metodologia que é escolhido para cada investigação deverá ser o mais adequado a esse estudo particular. Para justificar a escolha que efetuei, vou recordar as questões de investigação:

1. É possível identificar situações em que os alunos apresentam mais ou menos dificuldade na identificação da operação a efetuar?
2. Quando os alunos não identificam a operação correta, que operação escolhem?
3. É possível encontrar justificação para as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação das operações?
4. As respostas às questões anteriores poderão dar-nos indicações para melhorar a aprendizagem dos alunos?

Para responder à primeira questão, determinarei, a partir das resoluções dos alunos, a quantidade de sujeitos que consegue identificar a operação em cada situação. É uma leitura descritiva da situação, que representa carácter *quantitativo*. No entanto, pelo facto das respostas serem abertas, estas terão que ser tipificadas, o que tem um carácter *qualitativo* e claramente *interpretativo.*

Em relação à segunda questão, indicar qual a operação escolhida, os dados produzidos têm igualmente um carácter *quantitativo*.

A terceira questão procura uma explicação para um determinado comportamento (as dificuldades dos alunos), logo tem um carácter *interpretativo*, ou seja, requer um tratamento *qualitativo* dos dados.

A quarta questão é a procura de uma indicação para ajudar a superar as dificuldades encontradas em função da forma como se manifestam e de eventuais explicações para a sua existência.

Desta forma, este estudo reúne características da metodologia mista, que a seguir indico:

- São usadas metodologias quantitativas e qualitativas no mesmo projeto de investigação (Johnnson, Onwuegbuzie e Turner, 2007);

- A metodologia quantitativa é utilizada em algumas questões (questões 1 e 2) e a qualitativa noutras (questões 3 e 4);

- As duas metodologias complementam-se – cada uma procura um tipo de respostas diferentes;

- Uma metodologia explica os resultados obtidos na outra – na questão 3 a metodologia qualitativa tenta explicar as respostas às questões 1 e 2 extraídas por via da metodologia quantitativa (Bryman, 2006).

E finalmente, quanto se usa na mesma investigação metodologia qualitativa e quantitativa, podemos considerar estar em presença de um estudo misto. As duas metodologias podem incidir sobre o mesmo aspeto da investigação (por exemplo, para responder à mesma questão) ou para se complementar.

Posso então afirmar que esta investigação adota uma metodologia mista.

3.3. A construção do instrumento a aplicar aos alunos

As quatro operações podem aplicar-se à resolução de um elevado número de situações distintas, como já foi visto anteriormente. Um aspeto muito importante deste estudo foi a seleção das situações a estudar. Várias questões se colocaram, que tinham a ver com duas vertentes: as situações das operações propriamente ditas, por exemplo, comparação, grupos equivalentes, divisão por medida, etc. e a natureza dos números: inteiros, decimais ou frações. A escolha tornou-se bastante difícil, pois todos os casos apresentam interesse para serem estudados.

Uma ideia inicial foi comparar as quatro operações, estudando-as em paralelo. Mas a partir de certo ponto ficou claro que isso seria muito difícil de concretizar no tempo disponível para a realização do trabalho, devido à elevada variedade e complexidade de situações que se podem encontrar em cada uma das operações. Foi considerada a possibilidade de estudar uma só operação. Embora esta opção tivesse a vantagem de aprofundar mais a operação aritmética escolhida, eliminava uma visão mais global do assunto e também não era compatível com o que tinha motivado o estudo. Assim optou-se por uma solução que pareceu ser equilibrada e permitir um compromisso entre o desejável e o realizável na prática. A multiplicação e a divisão foram as operações escolhidas para serem estudadas em maior profundidade, com mais ênfase na divisão. No entanto, a adição e a subtração encontrar-se-ão também presentes para não perder completamente uma visão global das quatro operações e das dificuldades que envolvem. Reconheço que esta decisão é discutível, pois há tendência, em determinados estudos, de fazer uma pesquisa exaustiva conseguindo-se resultados mais profundos do ponto de vista académico. Mas na realidade, com os nossos alunos, não trabalhamos por compartimentos, mas sim duma forma global, e eu tenho esperança de que este estudo possa ajudar-me no meu trabalho de professor, e também no de outros professores. Assim, esta opção é a que vai mais ao encontro da intenção de procurar algumas pistas para responder a dificuldades reais do dia-a-dia do professor.

A primeira versão que construí tinha vinte e quatro tarefas, tornando-se um trabalho demasiado longo e repetitivo para os alunos. A possibilidade de se dividir em duas partes e aplicar em aulas diferentes foi abandonada por dificuldades de tempo. Assim, a lista foi sendo diminuída, até ficar com treze tarefas. Mas esta diminuição tinha a desvantagem de retirar casos considerados importantes para o trabalho. Surgiu então a ideia de fazer três versões diferentes. Assim, foram selecionadas oito situações consideradas as mais importantes para atender às questões de investigação (situações de multiplicação e divisão) e mais doze questões distribuídas em grupos de quatro. Assim, foram construídas 3 *versões* com 8 *tarefas comuns* e com 4 *tarefas variáveis*, uma para cada um dos terços dos alunos. Nestas três versões estão sempre contempladas as oitos tarefas consideradas “principais” por incidirem na multiplicação e na divisão (5 de divisão e 3 de multiplicação).

Em relação às tarefas selecionadas, a tabela seguinte apresenta os tipos de situações em cada versão. A ordem das tarefas não é aleatória. Foram colocadas de modo a haver alguma variedade, sem que a mesma operação se repetisse em tarefas seguidas (apesar dos alunos poderem resolvê-las pela ordem que entenderem).

<table>
<tr><th>8 Tarefas Fixas
(todos os alunos)</th><th colspan="2">4 Tarefas variáveis
(um bloco para cada terço dos alunos)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. Multiplicação – disposição retangular
2. Divisão como partilha – medidas equivalentes
4. Multiplicação – medidas equivalentes
5. Divisão como medida – medidas equivalentes
7. Multiplicação – grupos equivalentes
8. Divisão – comparação multiplicativa
10. Divisão como partilha – grupos equivalentes
12. Divisão como medida – grupos equivalentes</td><td>Bloco 1</td><td>3. Adição – Mudança para menos
6. Adição – Mudança para mais
9. Multiplicação – Produto cartesiano
11. Subtração – Mudança para menos</td></tr>
<tr><td>Bloco 2</td><td>3. Sem operações
6. Subtração – Mudança para mais
9. Multiplicação – Razão
11. Adição – Combinação</td></tr>
<tr><td>Bloco 3</td><td>3. Subtração – Comparação (a mais)
6. Subtração – Comparação (a menos)
9. Divisão – Razão
11. Adição – Comparação (a menos)</td></tr>
<tr><td>5 Divisões
Divisão como partilha (grupos equivalentes)
Divisão como medida (grupos equivalentes)
Divisão como partilha (medidas equivalentes)
Divisão como medida (medidas equivalentes)
Comparação multiplicativa
3 Multiplicações (em 5)
Disposição retangular
Grupos equivalentes
Medidas equivalentes</td><td colspan="2">4 Adições
Mudança para mais e para menos (dinâmicas)
Combinação e comparação (estáticas)
4 Subtrações
Mudança para mais e para menos (dinâmicas)
Combinação e comparação (estáticas)
2 Multiplicações (em 5)
Razão
Produto Cartesiano
1 Divisão (em 6)
Razão
1 tarefa sem aplicação de operações</td></tr>
</table>

Tabela 18 – Situações selecionadas para aplicar aos alunos

As tarefas fixas ou comuns às 3 versões foram escolhidas, tendo em consideração que estas situações são as que ocorrem mais, tanto nas aulas como, eventualmente, no dia-a-dia. Greer (1992) indica as principais situações de multiplicação e divisão: grupos equivalentes, comparação multiplicativa, produto cartesiano e modelo retangular. Na impossibilidade de colocar todas as situações incidiu-se nos grupos equivalentes (e medidas equivalentes, nos decimais) e uma tarefa de modelo retangular. Verschaffel e De Corte (1996) indicam as mesmas situações como as mais estudadas na multiplicação e divisão.

Em relação às tarefas variáveis para cada um dos terços dos alunos, na versão 1, pretende-se comparar duas situações de adições – uma mudança para mais e uma mudança para menos. O produto cartesiano é considerado uma situação de multiplicação habitualmente pouco trabalhada, mas foi incluída, pois será interessante saber se os alunos aplicarão diretamente a operação ou utilizarão preferencialmente estratégias próprias, tendo em consideração o facto de se pensar ser esta uma situação pouco trabalhada. A tarefa 11 foi a última a ser incluída: envolve uma subtração por não haver nenhuma outra com esta operação e por pretender-se ter todas as operações em todas as versões. O mesmo aconteceu com as tarefas 11 das outras versões, mas para o caso da adição. Além disso, nestes dois últimos casos, colocou-se uma adição sem ter especial preocupação na situação escolhida, pois pretendia-se, de facto, uma adição. Na versão 1, colocou-se mudança para menos (subtração) por haver uma mudança para mais (subtração) na versão 2. Inicialmente estas duas tarefas estavam juntas, mas isso implicava não haver nenhuma subtração na versão 1. Assim, foi feita a alteração referida, considerando-se ser uma perda menor, e tendo em conta que não se consegue fazer tudo o que se pretende num instrumento deste género.

Na versão 2, temos a tarefa 3 sem operações, pois há tendência dos alunos aplicarem operações mesmo quando não é esse o caso e esta situação é também importante observar. Foi colocada uma situação de multiplicação, a razão, que não foi possível incluir em todas as versões.

Na versão 3, pretende-se comparar duas subtrações com comparações (a mais e a menos) e inclui-se um caso de divisão como razão, tal como acontece na versão 2 para a multiplicação.

A lista de questões é, finalmente, a seguinte:

VERSÃO 1

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila.
Quantos lugares tem o parque?

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais.
Com que comprimento ficou cada parte?

3. De uma caixa com lápis, que se encontrava numa loja, venderam-se 15 e sobraram 10. Quantos lápis havia, inicialmente, na caixa?

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

6. O João foi jogar ao berlinde. Tinha 18 berlindes e ganhou 8.
Com quantos ficou?

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

9. Uma equipa de futebol vai escolher as cores do seu equipamento novo.
Tem duas cores para os calções, e três cores para as camisolas.
Quantos equipamentos diferentes é possível escolher?

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas.
Quantos CD há em cada caixa?

11. A Carla tinha uma coleção de 20 CD de música, e deu 8 ao seu primo.
Com quantos CD ficou a Carla?

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada.
Quantas equipas participam na competição?

VERSÃO 2

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila.
Quantos lugares tem o parque?

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais.
Com que comprimento ficou cada parte?

3. O Luís está doente e tem que tomar dois medicamentos diferentes: comprimidos, de 6 em 6 horas, e cápsulas de 4 em 4 horas.
Às 11h da manhã tomou os dois medicamentos.
A que horas, nesse mesmo dia, voltou a tomar os dois medicamentos juntos?

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

6. O Luís comprou 5 livros de uma coleção de 12.

Quantos lhe faltam para ter a coleção completa?

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

9. Uma fotocopiadora faz 25 cópias por minuto.
A esse ritmo, quantas cópias faz em 5 minutos?

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas. Quantos CD há em cada caixa?

11. Num jogo, a Ana e o José formam uma equipa.
A Ana já conseguiu 18 pontos e o José 15 pontos.
Quantos pontos conseguiram, em conjunto, a Ana e o José?

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada.
Quantas equipas participam na competição?

VERSÃO 3

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila.
Quantos lugares tem o parque?

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais.
Com que comprimento ficou cada parte?

3. Num jogo de basquetebol o João conseguiu marcar 8 pontos, e o Luís marcou 20 pontos. Quantos pontos marcou o Luís a mais do que o João?

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

6. O João e a Ana estão a ler o mesmo livro. O João já leu 25 páginas, enquanto a Joana leu 40. Quantas páginas leu João a menos do que a Ana?

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.
A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas. Quantos CD há em cada caixa?

11. Num jogo, a Ana e o José formam uma equipa.
O José já conseguiu 15 pontos, menos 5 do que a Ana.
Quantos pontos conseguiu a Ana?

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada.
Quantas equipas participam na competição?

Apesar das várias leituras e revisões efetuadas, a questão 6 da versão 3 apresenta um erro no enunciado que não foi possível detetar antes da aplicação aos alunos. A versão correta seria:

6. O João e a Ana estão a ler o mesmo livro. O João já leu 25 páginas, enquanto a *Ana* leu 40. Quantas páginas leu João a menos do que a Ana?

Apenas um aluno do 7.º ano descobriu esse erro, que na altura foi corrigido pela professora que aplicou as tarefas aos alunos.

Esta situação mostrou-se relativamente fácil de identificar como subtração pelos alunos, tendo a maioria apresentado respostas do tipo: "O João leu menos 15 páginas", ou "O João leu menos 15 páginas do que a Joana", ou "O João leu menos 15 páginas do que a Ana". Alguns alunos não referiram o nome da Ana ou da Joana, enquanto outros referiram um dos nomes. Apesar de lamentar este erro, creio que não terá influenciado de forma significativa as resoluções dos alunos.

Como se pode observar pelas tarefas propostas, não estão incluídas situações que envolvam frações. Apresentarei agora o motivo de tal ausência, que se deve essencialmente a três fatores.

Em primeiro lugar, a motivação que levou à realização deste trabalho, como já foi indicado oportunamente, deveu-se ao facto de, na minha prática como professor de matemática, ter-me confrontado frequentemente com a dificuldade dos alunos em determinarem *qual a operação a efetuar* em cada caso. Estas situações ocorreram frequentemente com números inteiros e, eventualmente, decimais, daí o estudo incidir essencialmente sobre as operações com números inteiros.

Em segundo lugar, apesar do inegável interesse em estudar o sentido das operações envolvendo frações, a sua inclusão iria alargar bastante o tema, o que se poderia tornar pouco realista para a exequibilidade do estudo. E trocar os inteiros pelos decimais iria contra a primeira finalidade da investigação.

Em terceiro lugar, e sem dúvida o aspeto que mais pesou, considerei o facto dos alunos do 5.º ano de escolaridade, não terem, na prática, estudado com profundidade suficiente as frações para responder às questões que lhe seriam colocadas. Assim, deixaria de ser viável efetuar o trabalho neste nível, no qual tenho frequentemente observado as dificuldades que foram a primeira motivação para a realização do trabalho. Também para os alunos do 6.º ano, apesar de já conhecerem as frações, é de notar que o seu sentido está a ser adquirido nesta fase. Assim, poderia ser difícil distinguir se as dificuldades apresentadas resultariam do sentido da operação ou do sentido do próprio número, ou mesmo da dificuldade na realização do cálculo, o que poderia dificultar a opção do aluno por uma operação. Claro que isto também pode ocorrer com os números inteiros e decimais, mas penso ser realista considerar que no segundo ciclo do ensino básico o sentido do número inteiro e também decimal está mais desenvolvido que o sentido da fração.

3.4. Desenvolvimento do trabalho de campo

Inicialmente estava previsto aplicar as tarefas selecionadas apenas a alunos do segundo ciclo do ensino básico. Mas o interesse mostrado por uma professora do terceiro ciclo em aplicá-las aos seus alunos, (durante um seminário de apresentação deste trabalho) levou à inclusão de alunos do 7.º ano de escolaridade neste estudo.

Devido ao tempo disponível para a realização da presente tese tornou-se impraticável efetuar uma amostra probabilística da população escolar, que seria adequada para responder às duas primeiras questões de investigação. Assim, as nove turmas foram escolhidas por proposta feita aos seus professores em função das relações profissionais e pessoais do investigador com esses professores, e também por propostas feitas por professores que mostraram interesse em participar neste estudo. Não sendo esta uma amostra probabilística, não garante a representatividade da população, mas permite um estudo dos alunos envolvidos que poderá dar indicações válidas, dada a sua dimensão que é expressiva e o facto de se tomarem as turmas envolvidas como "normais", isto é, desprovidas de características excecionais.

Desta forma, as fichas (3 versões do questionário) foram aplicadas a três turmas do 5.º ano de escolaridade de três escolas do Algarve, a três turmas do 6.º ano de três escolas do Algarve, a uma turma do 7.º ano do Algarve e a duas turmas do 7.º ano de uma escola da região de Lisboa, todas no terceiro período do ano letivo 2009/2010. O número de alunos que respondeu foi de 158, distribuídos da forma seguinte: 55 no 5.º ano, 53 no 6.º ano e 50 no 7.º ano.

As tarefas foram propostas aos alunos em quatro páginas de tamanho A4 (numa folha A3 em formato de livro) com espaço para a resolução, e foram dadas oralmente as seguintes instruções:

- Devem ler atentamente as questões antes de responder;
- Na resolução podem ser apresentados cálculos, esquemas ou palavras;
- Devem resolver da maneira que for mais adequada, mas não apresentem apenas a resposta sem qualquer resolução;
- Se usarem a calculadora, apresentem a indicação da operação e o resultado;
- Se quiserem usar uma folha de rascunho, devem entregá-la também;
- Se faltar espaço, podem usar outra folha e entregá-la;

O investigador esteve presente em quatro turmas, duas do 5.º ano e duas do 6.º ano. Nas outras, por incompatibilidade de horários, foram os professores das turmas que fizeram a aplicação das tarefas. Foi discutido com esses professores o objetivo do trabalho e as condições da sua aplicação.

De forma geral, não foram dadas quaisquer outras instruções aos alunos. Eventuais esclarecimentos tiveram em consideração que nunca se poderia dar qualquer pista sobre a operação a efetuar.

Os alunos tiveram uma aula de noventa minutos para resolver as questões, que se revelou suficiente. Apenas alguns alunos do 5.º ano utilizaram a totalidade do tempo.

CAPÍTULO 4

Análise de dados

Irei aqui descrever como foi elaborada a análise dos dados, começando por explicar a categorização das respostas a fim estabelecer em que casos um aluno identifica ou não corretamente uma operação. Seguidamente, explicarei como foram analisadas as resoluções dos alunos de modo a responder às questões de investigação.

4.1. Categorização das respostas

Na análise das resoluções dos alunos, foram consideradas as dez situações seguintes de respostas:

1. O aluno indica a operação correta.

2. O aluno indica a operação correta, mas também um esquema ou explicação.

3. O aluno apresenta um esquema ou explicação e resolve corretamente a tarefa, mas não apresenta de forma explícita a indicação da operação.

4. O aluno apresenta a operação inversa para confirmar o resultado.

5. O aluno apresenta uma adição sucessiva que permite resolver corretamente a tarefa.

6. O aluno utiliza outra operação (que não é a correta) para resolver a tarefa ou a operação correta mas com outros valores – aqui é considerada qual a operação usada (esta situação está dividida em quatro casos: adição, subtração, multiplicação e divisão).

7. O aluno apresenta um esquema ou explicação que não permite resolver a tarefa.

8. O aluno apresenta a resposta correta sem apresentar a resolução.

9. O aluno apresenta uma resposta errada sem apresentar a resolução.

10. O aluno não resolve ou não responde (ou qualquer outro caso).

Importa agora decidir em qual ou quais das situações anteriores se considera que o aluno identifica corretamente a operação.

No **caso 1** é claro que isso se verifica.

No **caso 2** o aluno também identifica a operação. O facto de ser apresentado um esquema, este pode ser feito porque o aluno precisa efetivamente dele para perceber de que operação se trata, ou porque quer/precisa de confirmar, ou ainda para completar a sua resolução, tornando-a mais clara para o professor, pois os alunos são frequentemente incentivados a apresentarem as suas resoluções. No entanto, o aluno associa corretamente a situação à operação.

No **caso 3** considerei que se o aluno conseguiu resolver corretamente a tarefa é porque também interiorizou o sentido da operação, mas talvez não a tenha adquirido formalmente. O aluno criou uma estratégia própria para resolver a tarefa.

Assim, na análise quantitativa das resoluções dos alunos, para responder à primeira questão de investigação, *considerei que os alunos identificam corretamente a operação quando ocorre o caso 1 ou 2*. Esta classificação terá sempre alguma subjetividade, no entanto, é fundamental decidir em que situações se considera que o aluno identificou corretamente a operação a realizar.

4.2. Análise das resoluções dos alunos

Na construção do instrumento de recolha de dados não foram incluídas todas as situações possíveis que podem ser resolvidas por aplicação das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Selecionei um conjunto de situações, como anteriormente foi descrito. Em consequência desse facto, as respostas às questões de investigação são, evidentemente, apenas referentes ao conjunto de situações selecionado, e não à globalidade de todas as situações possíveis.

1.ª Questão

É possível identificar situações em que os alunos apresentam mais ou menos dificuldade na identificação da operação a efetuar?

Para responder a esta questão, vou começar por analisar as situações multiplicativas. No gráfico 1 estão as percentagens de identificação correta para essas situações, ordenadas de forma decrescente. A razão e o produto cartesiano foram aplicadas a um terço dos alunos, enquanto as restantes foram aplicadas a todos.

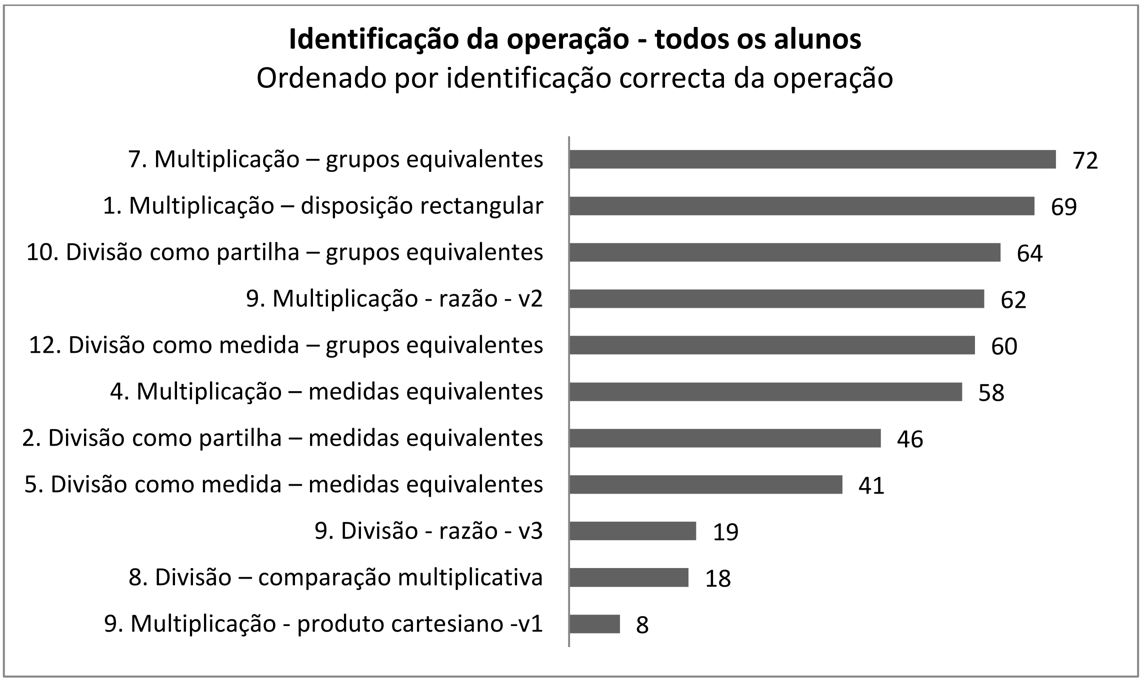


Gráfico 1 - Identificação correta das operações multiplicativas

Além da ordem apresentada no gráfico 1, é importante também ter em atenção os valores das percentagens. De facto, imaginemos por hipótese, duas situações: as percentagens de identificação correta todas acima de 80% e as percentagens de identificação correta todas abaixo de 20%. A ordem poderia ser a mesma nos dois casos mas certamente a leitura desses resultados seria muito diferente.

Então, parece interessante fazer uma divisão dos dados em intervalos de amplitude 20, como está apresentado na tabela 19. Continuo a colocar as percentagens para facilitar a leitura, pois por vezes, apenas uma unidade de diferença pode implicar a colocação em intervalos diferentes.

A tabela 19 mostra-nos que nenhuma das situações multiplicativas apresentou baixa dificuldade de identificação, tendo o melhor valor sido 72%. A maior parte das situações está no intervalo dos 41% aos 72%. Depois surgem três situações que se destacam por terem apresentado elevada dificuldade de identificação: divisão (razão e comparação multiplicativa) e multiplicação (produto cartesiano).

Percentagem de identificação correta	**Dificuldade na identificação**	**Situações**
81 a 100%	Baixa	
61 a 80%	Média baixa	Multiplicação (grupos equivalentes) – 72 % Multiplicação (disposição retangular) – 69% Divisão como partilha (grupos equivalentes) – 64% *Multiplicação (razão) – v2 – 62%*
41 a 60%	Média	Divisão como medida (grupos equivalentes) – 60% Multiplicação (medidas equivalentes) – 58% Divisão como partilha (medidas equivalentes) – 46% Divisão como medida (medidas equivalentes) – 41%
21 a 40%	Média alta	
0 a 20%	Elevada	*Divisão (razão) – v3 – 19%* Divisão (comparação multiplicativa) – 18% *Multiplicação (produto cartesiano) – v1 – 8%*

Tabela n.º 19 - Identificação correta das operações multiplicativas por intervalos (em itálico situações aplicadas a um terço dos alunos)

Para comparar a multiplicação com a divisão, devemos considerar as mesmas situações nas duas operações, ou seja, os grupos equivalentes nos números inteiros e medidas equivalentes nos números decimais. Nos números inteiros, a situação de multiplicação foi mais facilmente identificada do que as duas de divisão. O mesmo se verifica com os números decimais. A razão foi também aplicada nas duas operações, mas a um terço dos alunos, e a dois conjuntos diferentes de alunos. Também aqui a multiplicação foi identificada mais facilmente. A tabela 20 resume estas conclusões, indicando a percentagem de identificação correta das situações.

Situação	Multiplicação	Divisão	
		Partilha	Medida
Grupos equivalentes	72%	64%	60%
Medidas equivalentes	58%	46%	41%
Razão	62%		19%

Tabela 20 - comparação entre a multiplicação e a divisão

Assim, pode-se afirmar que a multiplicação apresenta uma maior facilidade de identificação do que a divisão.

Da tabela 20, podemos retirar mais duas informações importantes.

As situações com números inteiros são identificadas com mais facilidade do que aquelas que envolvem números decimais. Isto pode comparar-se nas situações que foram aplicadas com números inteiros e com números decimais, ou seja, grupos equivalentes e medidas equivalentes, tanto na multiplicação como na divisão. Note-se que há outras situações com números inteiros que apresentaram mais dificuldades do que as medidas equivalentes, mas essas situações só foram estudadas com números inteiros, pelo que a comparação com os decimais não é possível.

A outra informação a retirar da tabela é que a divisão como partilha foi identificada mais facilmente do que a divisão como medida, tanto com números inteiros, como com números decimais, embora a diferença não seja muito significativa.

Analisando as operações em separado temos, na multiplicação, por ordem de decrescente de dificuldade: *grupos equivalentes, disposição retangular, razão, medidas equivalentes* e *produto cartesiano*. Note-se que as medidas equivalentes são a única situação com números decimais e que a razão e o produto cartesiano foram aplicadas a um terço dos alunos. Deve referir-se que o produto cartesiano foi a situação que apresentou a dificuldade mais elevada, tendo sido interpretada como multiplicação por 8% dos alunos.

Na divisão temos, também por ordem decrescente de dificuldade: *grupos equivalentes (partilha e medida*, por esta ordem), *medidas equivalentes (partilha e medida*, por esta ordem), *razão* e *comparação multiplicativa*. Como no caso da multiplicação, as medidas equivalentes são as únicas situações com números decimais. A razão e a comparação multiplicativa, aplicadas a um terço dos alunos, apresentaram grande dificuldade de interpretação: 19% e 18%, respetivamente.

Vou agora fazer uma análise semelhante, mas tendo em consideração os resultados de cada ano de escolaridade, e salientando as diferenças entre eles.

Por observação do gráfico 2, podemos verificar, de forma geral, uma evolução positiva na identificação das operações à medida que se avança do 5.º para o 7.º ano: oito em onze situações, embora em três dessas oito haja mais dificuldade no 6.º ano do que no 5.º ano, mas com diferenças muito pequenas. Também na tabela 21 essa evolução é visível, com o 7.º ano a ter um preenchimento maior na zona correspondente à dificuldade mais baixa. Esta evolução não é igual em todas as situações, sendo mais evidente na divisão, especialmente na divisão como partilha, e no 7.º ano. Na divisão como medida (medidas equivalentes) nota-se uma evolução mais acentuada no 6.º ano. Na razão e na comparação multiplicativa há também uma evolução ao longo dos três anos, mas estas situações apresentam, em geral, grande dificuldade de identificação

Mesmo no 7.º ano de escolaridade, apenas 25% dos alunos conseguem identificar corretamente esta divisão (razão) e apenas 30% a comparação multiplicativa.

Na multiplicação, em geral, não se nota uma evolução ao longo dos três anos como na divisão. Esta é pequena na disposição retangular e nas medidas equivalentes. Nos grupos equivalentes, os melhores resultados encontram-se no 6.º ano, embora com pouca diferença entre os três anos. Na razão e no produto cartesiano é no 5.º ano que os alunos melhor identificam estas situações.

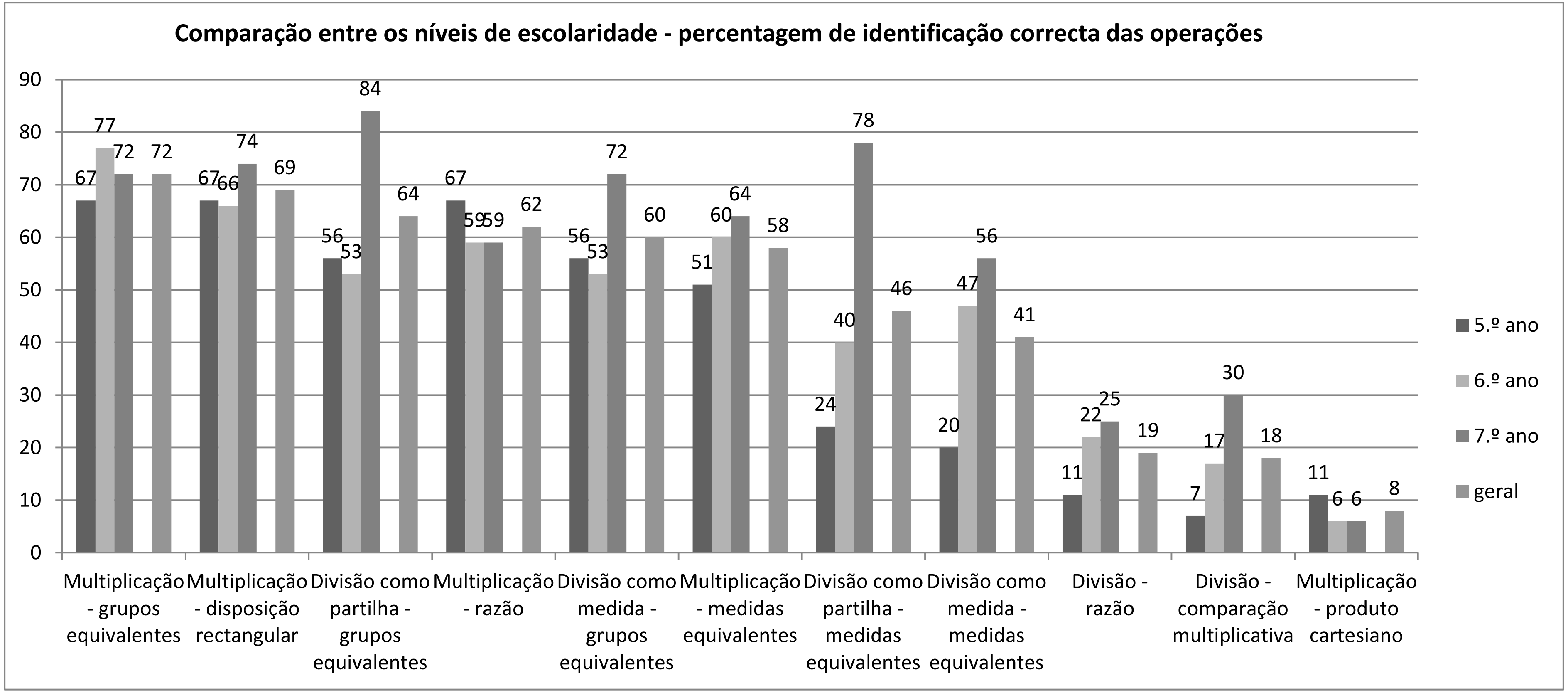


Gráfico 2 – Comparação entre os anos de escolaridade nas operações multiplicativas

Percentagem identificação correta	**Dificuldade na identificação**	**Situações (5.º ano)**	**Situações (6.º ano)**	**Situações (7.º ano)**
81 a 100%	Baixa			Divisão como partilha (grupos equivalentes) – 84%
61 a 80%	Média baixa	Multiplicação (grupos equivalentes) – 67 % Multiplicação (disposição retangular) – 67% *Multiplicação - (razão) – v2 – 67%*	Multiplicação (grupos equivalentes) – 77% Multiplicação (disposição retangular) – 66%	Divisão como partilha (medidas equivalentes) – 78% Multiplicação (disposição retangular) – 74% Multiplicação (grupos equivalentes) – 72% Divisão como medida (grupos equivalentes) – 72% Multiplicação (medidas equivalentes) – 64%
41 a 60%	Média	Divisão como partilha (grupos equivalentes) – 56 % Divisão como medida (grupos equivalentes) – 56% Multiplicação (medidas equivalentes) – 51%	Multiplicação (medidas equivalentes) – 60% *Multiplicação (razão) – v2 – 59%* Divisão como partilha (grupos equivalentes) – 53% Divisão como medida (grupos equivalentes) – 53% Divisão como medida (medidas equivalentes) – 47%	*Multiplicação (razão) – v2 – 59%* Divisão como medida (medidas equivalentes) – 56%
21 a 40%	Média alta	Divisão como partilha (medidas equivalentes) – 24%	Divisão como partilha (medidas equivalentes) – 40 % *Divisão (razão) – v3 – 22%*	Divisão (comparação multiplicativa) – 30% *Divisão (razão) – v3 – 25%*
0 a 20%	Elevada	Divisão como medida (medidas equivalentes) – 20% *Multiplicação (produto cartesiano) – v1 – 11%* *Divisão (razão) – v1- 11%* Divisão (comparação multiplicativa) – 7%	Divisão (comparação multiplicativa) – 17% *Multiplicação* *(produto cartesiano) – v1 – 6%*	*Multiplicação* *(produto cartesiano) – v1 – 6%*

Tabela 21 - Comparação entre os níveis de escolaridade da identificação correta das operações multiplicativas por intervalos/níveis de dificuldade (em itálico situações aplicadas a um terço dos alunos).

Mas enquanto a razão (multiplicação) foi identificada com alguma facilidade e sem diferenças significativas entre os anos de escolaridade: 67% no 5.º ano, 59% no 6.º ano e também no 7.º ano, o produto cartesiano, como já foi referido, (multiplicação) revelou-se uma situação de elevada dificuldade, mais acentuada no 6.º e no 7.º ano do que no 5.º ano. As percentagens de identificação correta foram de 11% no 5.º ano e de 6% tanto no 6.º como no 7.º ano.

É de referir ainda o facto das divisões como partilha (grupos equivalentes e medidas equivalentes) serem as duas situações mais facilmente identificadas no 7.º ano, com 84% e 78%, respetivamente.

Vou a seguir apresentar a análise relativa à adição e à subtração, operações que tiveram menor peso neste estudo. Ao contrário do que aconteceu com as oito situações de multiplicação e divisão que foram aplicadas a todos os alunos, as situações de adição e subtração foram aplicadas apenas a um terço dos alunos. Além disso, algumas situações aplicaram-se a grupos de alunos diferentes, pelo que estes resultados e a comparação entre essas situações, embora com significado, deverão ser vistos com alguma reserva, relativamente aos das operações multiplicativas. O gráfico 3 mostra a percentagem de identificação correta nas situações de adição e subtração.

No gráfico 3 estão indicadas as versões em que cada situação foi aplicada. Assim, dado qualquer subconjunto dessas oito situações, podemos saber se foram ou não aplicadas aos mesmos alunos. Esta indicação encontra-se também nos outros gráficos e tabelas referentes às operações aditivas.

Na generalidade, as situações estudadas apresentaram baixa dificuldade na sua identificação, pois três quartos tiveram mais de 70% de identificação correta, e o outro quarto ficou situado entre os 58% e os 60 %. A mudança para mais (subtração) e a comparação (adição) foram as situações identificadas com menos facilidade mas, mesmo assim, mais de metade dos alunos fizeram corretamente a sua interpretação.

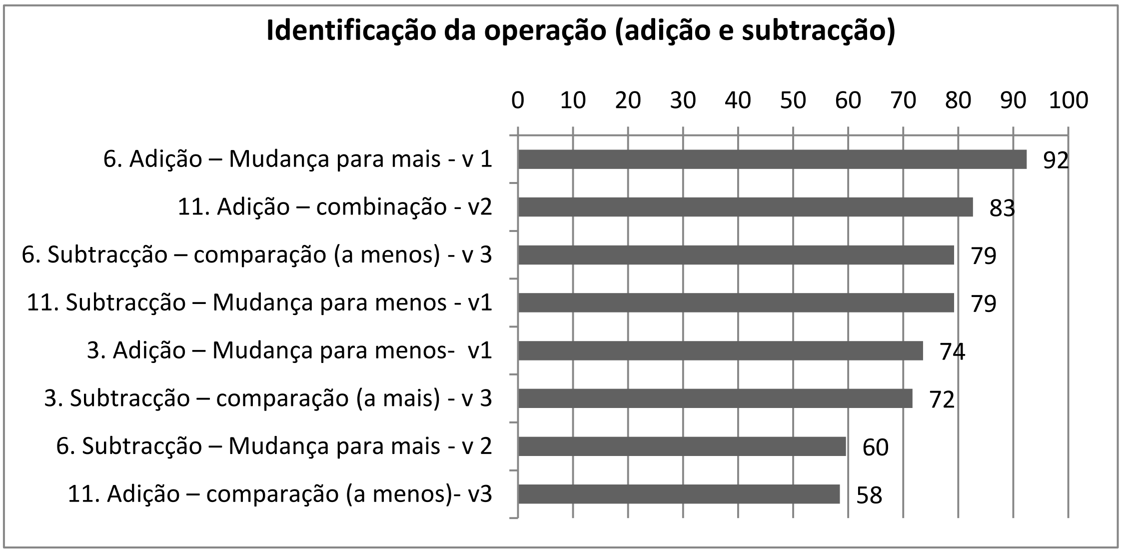


Gráfico 3 – Identificação correta nas operações aditivas (em percentagem)

Percentagem identificação correta	**Dificuldade na identificação**	**Situações**
81 a 100%	Baixa	Adição -mudança para mais – v1 - 92% Adição – combinação – v2 – 83%
61 a 80%	Média baixa	Subtração – comparação (a menos) – v3 – 79% Subtração – mudança para menos – v1 – 79% Adição – mudança para menos – v1 – 74% Subtração – comparação (a mais) – v3 – 72%
41 a 60%	Média	Subtração – mudança para mais – v2 – 60% Adição – comparação – v3 – 58%
21 a 40%	Média alta	
0 a 20%	Elevada	

Tabela 22 – Identificação correta das operações aditivas por intervalos/níveis de dificuldade

A tabela 22 apresenta vazias as linha de maior dificuldade o que mostra a pouca dificuldade observada nestas situações.

Podemos ainda constatar mais alguns resultados, fazendo comparações:

A adição foi identificada com mais facilidade do que a subtração, embora a diferença não tenha sido expressiva.

As situações de mudança (dinâmicas) apresentam mais facilidade do que as estáticas, mas com pouca diferença.

Nas situações de mudança, aquelas em que o sentido é identificado com a interpretação mais comum das operações foram mais facilmente identificadas do que aquelas que o sentido é contrário, isto é, a mudança para mais foi mais facilmente identificada do que a mudança para menos na adição, enquanto na subtração os alunos identificaram com mais facilidade a mudança para menos do que a mudança para mais.

A comparação entre os diversos níveis de escolaridade – gráfico 4 e tabela 23 – não mostra uma evolução semelhante em todos os casos, embora ela ocorra na generalidade. Na mudança para mais (adição), os três anos apresentam quase o mesmo nível, com elevada facilidade. Em metade das situações é o 6.º ano que apresenta maior dificuldade de identificação da operação: são elas a comparação (a menos) na subtração, a mudança (para menos) na adição, a comparação (a mais) na subtração e a comparação (a menos) na adição, embora nesta última situação os resultados sejam muito próximos nos três anos. É de salientar ainda a mudança para mais (subtração) que no 5.º ano apresentou a maior dificuldade, sendo a única abaixo dos 50%, tendo sido identificada corretamente por 39% dos alunos. Mas no 6.º e 7.º anos esta situação mostra uma evolução com significado.

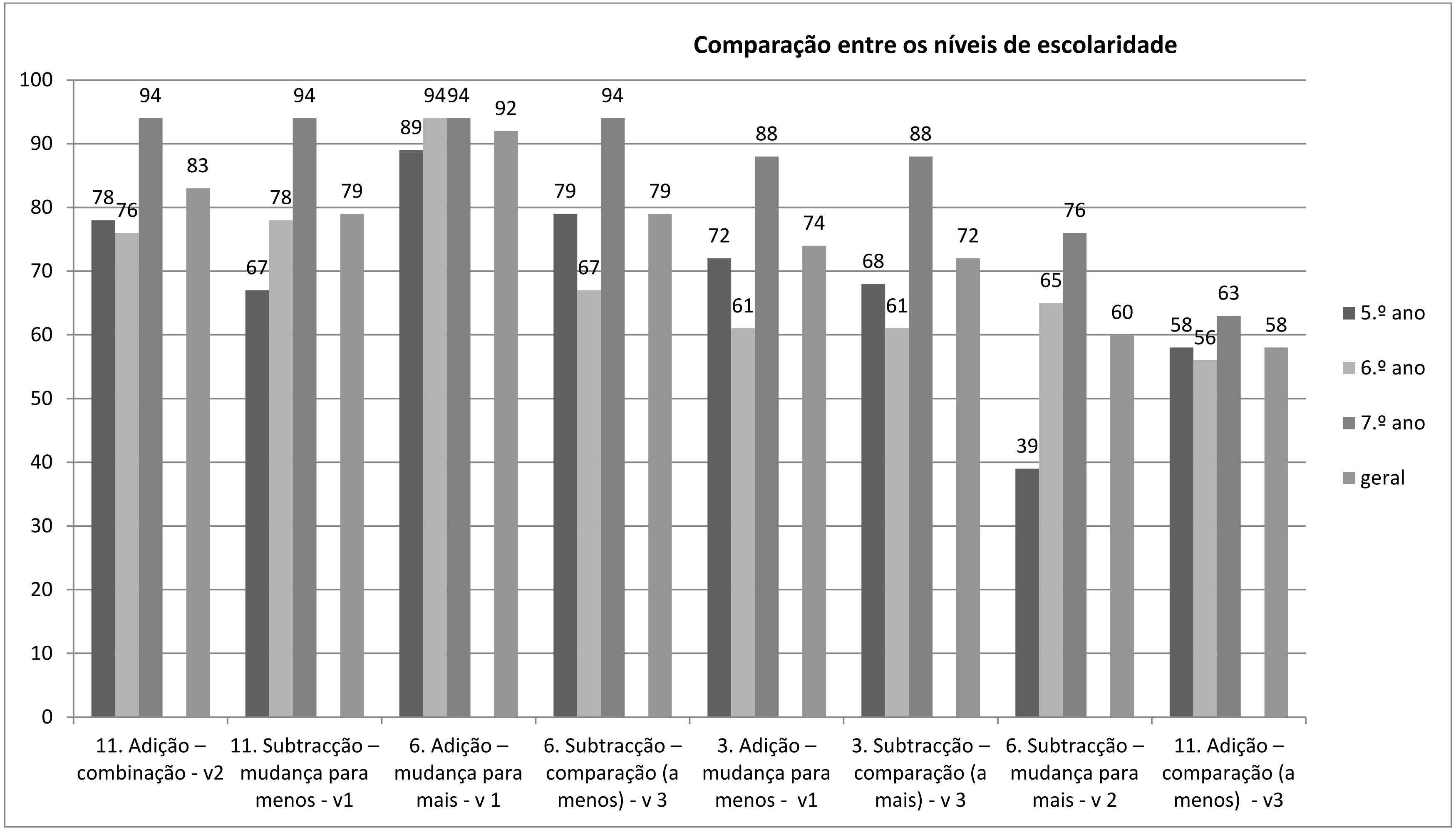


Gráfico 4 - Comparação entre os anos de escolaridade nas operações aditivas

Percentagem identificação correta	Dificuldade na identificação	Situações (5.º ano)	Situações (6.º ano)	Situações (7.º ano)
81 a 100%	Baixa	Adição – Mudança para mais – v1 – 89%	Adição – Mudança para mais – v1 – 94%	Adição – Mudança para mais – v1 – 94% Subtração – Mudança para menos – v1 – 94% Adição – combinação – v2 – 94% Subtração – comparação (a menos) – v3 – 94% Adição – Mudança para menos – v1 – 88% Subtração – comparação (a mais) – 88%
61 a 80%	Média baixa	Subtração – comparação (a menos) – v3 – 79% Adição – combinação – v2 – 78% Adição – Mudança para menos – v1 – 72% Subtração – Mudança para menos – v1 – 67% Subtração – comparação (a mais) – v3 – 68%	Subtração – Mudança para menos – v1 – 78% Adição – combinação – v2 – 76% Adição – Mudança para menos – v1 – 61% Subtração – comparação (a menos) – v3 – 67% Subtração – Mudança para mais – v2 – 65% Subtração – comparação (a mais) – v3 – 61% Adição – comparação – v3 – 56%	Subtração – Mudança para mais – v2 – 76% Adição – comparação – v3 – 63%
41 a 60%	Média	Adição – comparação – v3 – 58% Subtração – Mudança para mais – v2 – 39%		
21 a 40%	Média alta			
0 a 20%	Elevada			

Tabela 23 – Comparação entre os níveis de escolaridade da identificação correta das operações aditivas por intervalos/níveis de dificuldade

Depois de analisar separadamente as operações multiplicativas e as aditivas, vou agora fazer uma descrição mais global, envolvendo todas as situações estudadas, relembrando que nem todas foram aplicadas a todos os alunos. O gráfico seguinte apresenta todas as situações estudadas. Os espaços em branco dividem as operações em intervalos por nível de dificuldade, da forma já anteriormente explicada.

Gráfico 5 – Identificação correta da operação (todas as situações)

No primeiro nível (81 a 100%) temos duas adições: mudança para mais e combinação.

No segundo nível (61 a 80%) é onde encontramos o maior número de situações, sendo as três primeiras operações aditivas. Nas multiplicativas, há uma predominância da multiplicação (três situações) sobre a divisão (uma situação)

No terceiro nível (41 a 60%) temos as duas situações aditivas que apresentaram mais dificuldade e também as primeiras situações com números decimais: multiplicação e divisão como partilha (medidas equivalentes).

No quarto nível (21 a 40%), já com uma dificuldade significativa, temos apenas uma situação: a divisão como medida (medidas equivalentes)

No quinto nível (0 a 20%), com elevada dificuldade de interpretação, temos duas divisões (razão e comparação multiplicativa) e a multiplicação (produto cartesiano).

Se compararmos as situações aditivas com as multiplicativas, podemos observar que, em geral, há mais facilidade por parte dos alunos em interpretar as situações aditivas.

Vou resumir, assim, em alguns pontos, as conclusões do anteriormente exposto

Operações multiplicativas

- A multiplicação apresenta uma maior facilidade de identificação do que a divisão.
- As situações com números inteiros são identificadas com mais facilidade do que aquelas que envolvem números decimais.
- A divisão como partilha foi identificada mais facilmente do que a divisão como medida.
- Na multiplicação, as situações ficaram assim ordenadas, por ordem decrescente de dificuldade: *grupos equivalentes, disposição retangular, razão, medidas equivalentes* e *produto cartesiano*.
- Na divisão, as situações ficaram assim ordenadas, por ordem decrescente de dificuldade, *grupos equivalentes (partilha e medida,* por esta ordem), *medidas equivalentes (partilha e medida,* por esta ordem), *razão* e *comparação multiplicativa*.
- A razão e a comparação multiplicativa, aplicadas a um terço dos alunos, apresentaram grande dificuldade de interpretação: 19% e 18%, respetivamente.
- O produto cartesiano foi a situação que apresentou a dificuldade mais elevada, tendo sido interpretada como multiplicação por 8% dos alunos.

- Podemos verificar, de forma geral, uma evolução positiva na identificação das operações à medida que se avança do 5.º para o 7.º ano, mas que apresenta diferenças entre as várias situações.
- A evolução do 5.º ano para o 7.º ano é mais evidente na divisão como partilha, especialmente no 7.º ano.
- Na divisão como medida (medidas equivalentes) nota-se uma evolução mais acentuada no 6.º ano.
- Na razão e na comparação multiplicativa há também uma evolução ao longo dos três anos, mas estas situações apresentam, em geral, grande dificuldade de identificação
- Mesmo no 7.º ano de escolaridade, apenas 25% dos alunos conseguem identificar corretamente esta divisão (razão) e 30% a comparação multiplicativa.
- Na multiplicação, em geral, não se nota uma evolução ao longo dos três anos como na divisão.
- Na razão (multiplicação) e no produto cartesiano, foi no 5.º ano que os alunos melhor identificaram estas situações.
- Na divisão, (medidas equivalentes) as dificuldades manifestaram-se especialmente no 5.º ano – tanto na medida como na partilha.
- As divisões como partilha (grupos equivalentes e medidas equivalentes) foram as duas situações mais facilmente identificadas no 7.º ano, com 84% e 78%, respetivamente.

Operações Aditivas

- A mudança para mais (subtração) e a comparação (adição) foram as situações identificadas com menos facilidade.
- A adição foi identificada com mais facilidade do que a subtração, embora a diferença não tenha sido apreciável.
- As situações de mudança (dinâmicas) apresentam mais facilidade do que as estáticas.

- Nas situações de mudança, aquelas em que o sentido é associado à interpretação mais comum das operações foram mais facilmente identificadas do que aquelas que o sentido é contrário, isto é, a mudança para mais na adição, e a mudança para menos na subtração.
- Na adição, as situações ficaram assim ordenadas, por ordem decrescente de dificuldade: *mudança para mais, combinação, mudança para menos e comparação (a menos).*
- Na subtração, as situações ficaram assim ordenadas, por ordem decrescente de dificuldade: *comparação (a menos), mudança para menos, comparação (a mais), mudança para mais.*

<u>Comparação entre as situações aditivas e multiplicativas</u>

- As situações das operações aditivas apresentaram baixa dificuldade na sua identificação em relação às multiplicativas.

1.ª Questão de investigação (conclusão)

Para responder à 1.ª questão vou definir um valor de identificação a partir do qual considero que os alunos apresentam dificuldade ou facilidade em interpretar (formalmente) a operação. Os valores que considero contêm naturalmente alguma subjetividade e outro investigador poderia considerá-los de maneira diferente. No entanto é preciso tomar uma decisão. Assim a lista de situações consideradas difíceis, e que a seguir indico, são aquelas em que menos de 50% dos alunos conseguiram identificar corretamente a operação. Tomando como referência as tabelas que apresentam o desempenho dos alunos em cinco níveis, esta percentagem inclui os dois níveis mais baixos definidos como dificuldade elevada e média alta e a metade inferior do nível seguinte. A inclusão de mais esta metade de um nível tem a ver naturalmente com o valor de 50%. Considero que não estamos perante um desempenho desejável quando menos de metade dos alunos (abaixo de 50%) não atingem determinado objetivo, neste caso identificar uma operação. De acordo com este critério, a lista ordenada do grau de dificuldade é a seguinte:

Situações em que os alunos apresentam mais dificuldade

Medidas equivalentes (divisão como partilha) – 5.º e 6.º ano.

Medidas equivalentes (divisão como medida) – 5.º e 6.º ano.

Razão (divisão) – 5.º, 6.º e 7.º ano.

Comparação multiplicativa (divisão) – 5.º, 6.º e 7.º ano

Produto cartesiano (multiplicação) – 5.º, 6.º e 7.º ano

Mudança para mais (subtração) – 5.º ano

A lista de situações onde os alunos apresentaram menos dificuldades, são aquelas em que pelo menos 70% dos alunos conseguiram identificar corretamente a operação. Neste caso incluo, de acordo com as tabelas que apresentam os níveis de dificuldade, o nível de mais baixa dificuldade e a metade superior do nível seguinte:

Situações em que os alunos apresentaram menos dificuldade

Disposição retangular (multiplicação) – 7.º ano

Grupos equivalentes (multiplicação) – 6.º e 7.º anos

Grupos equivalentes (divisão como partilha) – 7.º ano

Grupos equivalentes (divisão como medida) – 7.º ano

Medidas equivalentes (divisão como partilha) – 7.º ano

Combinação (adição) - 5.º, 6.º e 7.º ano

Mudança para menos (subtração) – 6.º e 7.º anos

Mudança para menos (adição) – 5.º e 7.º anos

Mudança para mais (adição) - 5.º, 6.º e 7.º ano

Mudança para mais (subtração) – 7.º ano

Comparação – a menos (subtração) – 6º e 7.º ano

Comparação – a mais (subtração) – 7.º ano

2.ª Questão

Quando os alunos não identificam a operação correta, que operação escolhem?

Na tabela 24 está o número de alunos que escolheram de forma incorreta uma operação. São consideradas também as situações em que os alunos escolheram a operação correta, mas de forma errada, como por exemplo, utilizando os valores de forma incorreta. Neste caso decidi colocar os valores absolutos e não percentagens, pois em algumas situações o número de alunos é muito reduzido, podendo assim ler-se uma informação mais completa.

Verifica-se que nem em todas as situações podemos indicar que a escolha incidiu sobre alguma operação em particular.

Indico a seguir as situações em que os alunos tendencialmente escolheram uma ou mais operações.

- Divisão como partilha – medidas equivalentes. Os alunos escolheram preferencialmente as operações multiplicativas em igual quantidade: doze multiplicações e doze divisões em vinte e cinco. O outro aluno escolheu a adição.

- Multiplicação – medidas equivalentes. Os alunos escolheram tendencialmente a divisão; dezassete em trinta e dois. Sete alunos escolheram a adição e outros sete a multiplicação.

- Divisão como medida – medidas equivalentes. Os alunos escolheram preferencialmente a multiplicação; vinte e um em trinta e dois, e a seguir a adição: oito alunos.

- Divisão – comparação multiplicativa. Os alunos escolheram preferencialmente as operações aditivas, com maior incidência na subtração: quarenta e três em sessenta e um; escolheram a adição catorze alunos. Quatro alunos ainda escolheram a multiplicação.

- Divisão como partilha – grupos equivalentes. Os alunos escolheram a multiplicação: catorze em dezassete. Dois escolheram adição e o outro a divisão.

- Adição – comparação. Os alunos escolheram a subtração: Dez em onze. O outro aluno escolheu a multiplicação.

- Divisão como medida – grupos equivalentes. Os alunos escolheram a multiplicação: quinze em dezassete. Os outros alunos escolheram a adição.

Identificação errada da operação	Adi	Sub	Mult	Div
1. Multiplicação – Disposição retangular	4	0	1	2
2. Divisão como partilha – medidas equivalentes	1	0	12	12
3. Adição – mudança para menos - v1	0	3	6	0
3. Sem operações - v 2	13	0	3	0
3. Subtração – comparação (a mais) - v 3	1	0	2	0
4. Multiplicação – medidas equivalentes	7	1	7	17
5. Divisão como medida – medidas equivalentes	8	1	21	2
6. Adição – mudança para mais - v 1	0	0	2	1
6. Subtração – mudança para mais - v 2	1	0	2	1
6. Subtração – comparação (a menos) - v 3	0	0	1	0
7. Multiplicação – grupos equivalentes	4	0	0	2
8. Divisão – comparação multiplicativa	14	43	4	0
9. Multiplicação - produto cartesiano -v1	4	0	3	0
9. Multiplicação - razão - v2	2	0	0	0
9. Divisão - razão - v3	2	1	3	0
10. Divisão como partilha – grupos equivalentes	2	0	14	1
11. Subtração – com diminuição - v1	1	1	2	3
11. Adição – combinação - v2	0	0	0	0
11. Adição – comparação (a menos) - v3	0	10	1	0
12. Divisão como medida – grupos equivalentes	2	0	15	0

Tabela 24 – Escolha errada da operação

Pode verificar-se que é essencialmente na divisão onde se encontra uma tendência de escolher especificamente outra operação.

Nos grupos equivalentes e medidas equivalentes há tendência para escolher a multiplicação. Na divisão – comparação multiplicativa – os alunos preferencialmente escolhem operações aditivas, com maior incidência na subtração.

Comparando os três níveis, podemos observar algumas diferenças entre eles, como se pode ver na tabela 26. Nas situações em que se notam essas diferenças, há, na maioria delas, uma melhoria, isto é, menos escolhas erradas, à medida que se avança do 5.º para o 7.º ano. Isso ocorre nas seguintes situações: divisão como partilha (medidas equivalentes), multiplicação (medidas equivalentes), divisão como medida (medidas equivalentes), onde a escolha de operações erradas tem grande incidência no 5.º ano, e divisão como partilha (grupos equivalentes), que revela uma melhoria acentuada no 7.º ano.

Na divisão (comparação multiplicativa) verifica-se que foi no 7.º ano que um maior número de alunos escolheu a subtração.

Refiro ainda a tarefa que não se resolvia com uma operação, na qual os alunos que mais operações escolheram foram os do 5.º ano, número que foi diminuído para o 6.º e o 7.º ano.

A seguir a tabela comparativa dos três anos de escolaridade.

		Todos os alunos				5.º ano				6.º ano				7.º ano			
	Identificação errada da operação	Adi	Sub	Mult	Div	Adi	Sub	Mult	Div	Adi	Sub	Mult	Div	Adi	Sub	Mult	Div
1	**1. Multiplicação – Disposição retangular**	4	0	1	2	1	0	1	1	2	0	0	0	1	0	0	1
2	**2. Divisão como partilha – medidas equivalentes**	1	0	12	12	1	0	7	7	0	0	5	2	0	0	0	3
3	3. Adição – mudança para menos - v1	0	3	6	0	0	1	3	0	0	1	2	0	0	1	1	0
4	3. Sem operações - v 2	13	0	3	0	9	0	1	0	2	0	2	0	2	0	0	0
5	3. Subtração – comparação (a mais) - v 3	1	0	2	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	**4. Multiplicação – medidas equivalentes**	7	1	7	17	4	1	3	6	1	0	3	7	2	0	1	4
7	**5. Divisão como medida – medidas equivalentes**	8	1	21	2	6	0	12	2	0	1	5	0	2	0	4	0
8	6. Adição – mudança para mais - v 1	0	0	2	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	6. Subtração – mudança para mais - v 2	1	0	2	1	0	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0
10	6. Subtração – comparação (a menos) - v 3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	**7. Multiplicação – grupos equivalentes**	4	0	0	2	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	2
12	**8. Divisão – comparação multiplicativa**	14	43	4	0	8	13	2	0	4	13	0	0	2	17	2	0
13	9. Multiplicação - produto cartesiano -v1	4	0	3	0	3	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
14	9. Multiplicação - razão - v2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
15	9. Divisão - razão - v3	2	1	3	0	2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
16	**10. Divisão como partilha – grupos equivalentes**	2	0	14	1	1	0	5	0	0	0	8	1	1	0	1	0
17	11. Subtração – mudança para menos - v1	1	1	2	3	1	0	2	1	0	1	0	1	0	0	0	1
18	11. Adição – combinação - v2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	11. Adição – comparação (a menos) - v3	0	10	1	0	0	5	1	0	0	2	0	0	0	3	0	0
20	**12. Divisão como medida – grupos equivalentes**	2	0	15	0	1	0	5	0	0	0	7	0	1	0	3	0

Tabela 25 - Escolha errada da operação – comparação entre os anos de escolaridade

2.ª Questão (conclusão)

As situações em que houve tendência para indicar alguma operação em particular foram as que se resumem seguidamente (Nota: As percentagens são relativas ao número de alunos que escolheram erradamente uma operação).

SITUAÇÃO	OPERAÇÃO ESCOLHIDA
Medidas equivalentes (divisão como partilha)	Multiplicação (48%) e divisão (48%)
Medidas equivalentes (multiplicação)	Divisão (53%)
Medidas equivalentes (divisão como medida)	Multiplicação (66%)
Comparação multiplicativa (divisão)	Subtração (70%)
Grupos equivalentes (divisão como partilha)	Multiplicação (82%)
Comparação (adição)	Subtração (91%)
Grupos equivalentes (divisão como medida)	Multiplicação (88%)
Situação sem operações	Adição (81%)

Tabela 26 – Escolha errada das operações

3.ª Questão

É possível encontrar justificação para as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação das operações?

A fundamentação teórica do presente estudo dá-nos algumas pistas para responder a esta questão, pois grande parte dos resultados apresentados estão de acordo com a teoria sobre este assunto. Na classificação das tarefas que são resolvidas por operações, estas não se encontram simplesmente divididas em adição, subtração, multiplicação e divisão. Em cada uma das operações são apresentadas diversas situações de natureza distinta que se resolvem com a mesma operação. Essas situações representam diversas formas de interpretar a mesma operação, com consequentes diferenças no nível de dificuldade dessa interpretação, o que pode explicar, de forma genérica, as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Antes de passar a aspetos mais específicos, há dois que parecem ter um peso importante nas dificuldades apresentadas pelos alunos:

1. *O nível de dificuldade de cada situação*. Embora não se conhecendo uma hierarquia clara dessas situações, é evidente que o nível de dificuldade não é igual.

2. *A seleção das situações na prática letiva*. Fuson (1992), Verschaffel (1996), De Corte (1996) e Downton (2009) são exemplos de autores que afirmam que as situações não são todas tratadas com o mesmo peso nas práticas letivas, pelo que a experiência dos alunos em várias delas é limitada. Naturalmente deverão obter melhores resultados nas situações mais trabalhadas. Estes autores não se referem a estudos em Portugal, mas é possível que no nosso país essa situação também ocorra.

Vou passar à análise das situações em que os alunos apresentaram mais dificuldades, de acordo com as respostas dadas às duas primeiras questões de investigação. Para tal vou basear-me em dois pontos: a fundamentação teórica e a análise interpretativa das resoluções dos alunos. Algumas resoluções dos alunos são incluídas como figuras, nas quais se encontra indicado na legenda o ano de escolaridade do aluno.

Começarei por retomar a ordenação hierárquica das situações de dificuldade de identificação correta da operação e da sua substituição por outra operação incorreta.

<u>Situações de dificuldade encontradas na primeira questão</u>
(*dificuldade na identificação da operação*)
Medidas equivalentes (divisão como partilha) no 5.º e 6.º anos.
Medidas equivalentes (divisão como medida) no 5.º e 6.º anos.
Razão (divisão) - 5.º, 6.º e 7.º ano.
Comparação multiplicativa (divisão) - 5.º, 6.º e 7.º ano
Produto cartesiano (multiplicação) - 5.º, 6.º e 7.º ano
Mudança para mais (subtração) – 5.º ano

<u>Situações de dificuldade encontradas na segunda questão</u>
(*tendência para escolher outra operação*)
Medidas equivalentes (divisão como partilha)
Medidas equivalentes (multiplicação)
Medidas equivalentes (divisão como medida)
Comparação multiplicativa (divisão)
Grupos equivalentes (divisão como partilha)

Comparação (adição)

Grupos equivalentes (divisão como medida)

Situação sem operações

1. Medidas equivalentes (divisão como partilha)

Questão colocada aos alunos:

Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais. Com que comprimento ficou cada parte?

Medidas equivalentes (divisão como partilha)	Identificou a divisão	Resolveu por estratégias próprias	Resolveu erradamente ou não resolveu
5.º ano	29 %	35 %	36 %
6.º ano	43 %	23 %	34 %
7.º ano	80 %	8 %	12 %

Tabela 27 – Medidas equivalentes – divisão como partilha

Nesta situação, a identificação revelou-se difícil para os alunos do 2.º ciclo, em especial do 5.º ano. Mas observa-se uma evolução notável até ao 7.º ano (gráfico 2, pág. 79). Apesar da dificuldade na formalização da operação, um número significativo de alunos conseguiu, por outras estratégias, resolver a tarefa corretamente. Essas resoluções diminuem à medida que se avança do 5.º para o 7.º ano e aumenta o uso direto da operação, o que sugere uma evolução para a formalização da operação (Tabela 27).

Os aspetos seguintes podem dar-nos algumas pistas.

- As dificuldades em lidar com números decimais, pois houve alunos que fizeram esquemas representativos da divisão, mas não conseguiram escrever corretamente os números (figura 7).

- O facto de o dividendo ser maior que o divisor, que surge nos decimais. Ao trabalharem com os inteiros, os alunos ficam com ideia que o dividendo deve ser maior que o divisor, por isso alguns alunos efetuaram a divisão 6:3. Esta divisão e a multiplicação surgiram com frequência nas respostas (figura 9). A explicação para alguns alunos terem efetuado a multiplicação não está clara, mas talvez se deva ao facto de não interpretarem como divisão e escolherem a multiplicação pensando que haveria seis partes de três metros cada.

Não há uma repartição de objetos concretos (discretos) mas um único objeto é partido em várias partes. Temos aqui uma medição (de natureza contínua) e não uma contagem (de natureza discreta).

Note-se também que o enunciado não sugere de forma explícita uma divisão/repartição, palavras muito associadas à divisão.

Vou apresentar exemplos de resoluções dos alunos que apoiam algumas das explicações apresentadas.

Na figura 7, o aluno divide em 6 partes iguais, mas não apresenta números, o que sugere a compreensão do sentido da operação mas, provavelmente, uma dificuldade em trabalhar com números decimais.

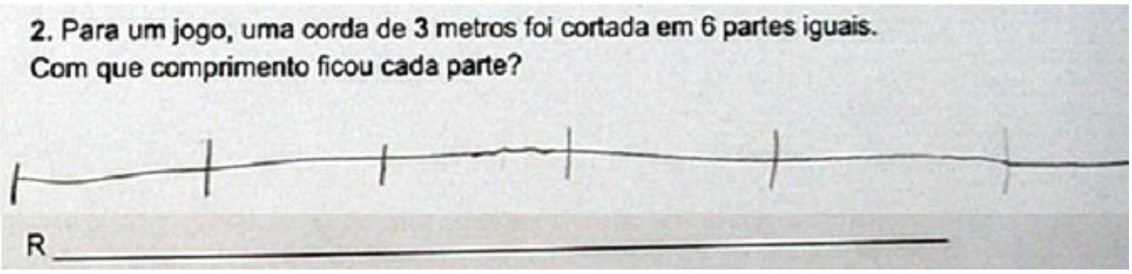


Figura 7 – Medidas equivalentes – divisão como partilha (5.º ano)

A figura 8, tal como a figura 7, sugere a compreensão do sentido da operação, mas também do número (decimal). Estas duas resoluções apoiam a importância da aquisição do sentido do número nas operações.

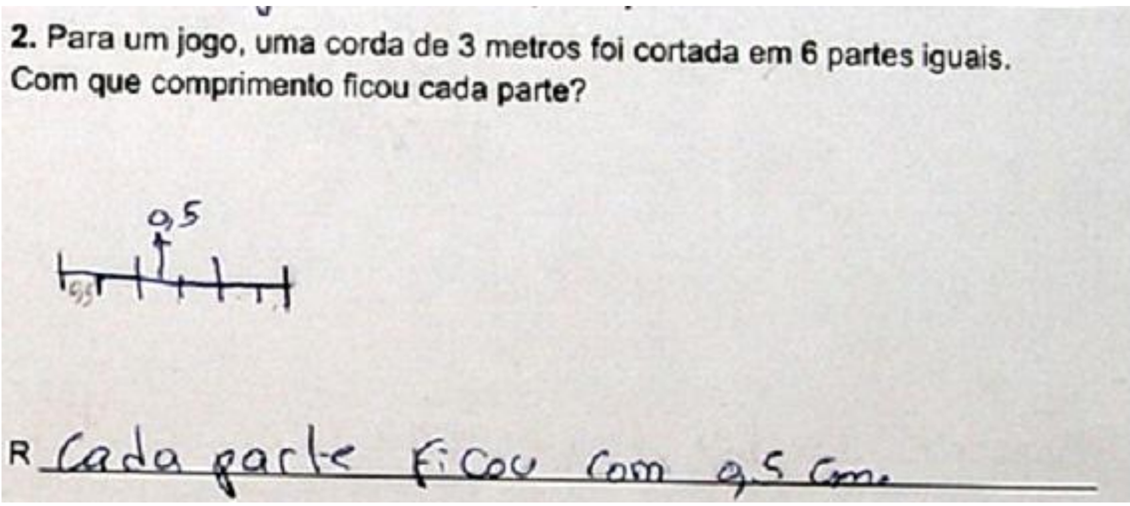


Figura 8 – Medidas equivalentes – divisão como partilha (6.º ano)

Na figura 9, temos um exemplo de um aluno que dividiu o número maior pelo menor.

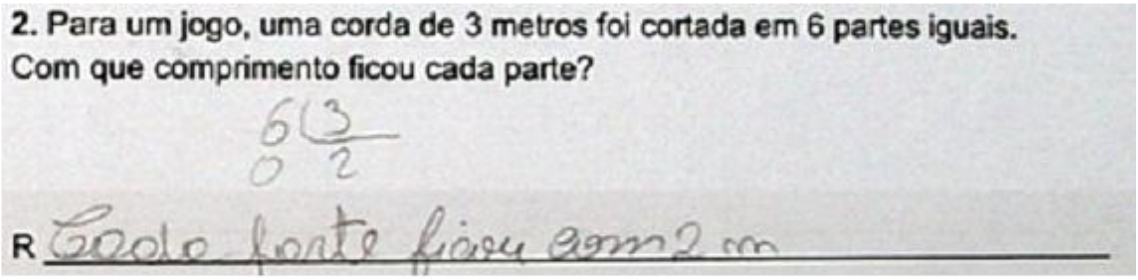


Figura 9 – Medidas equivalentes – divisão como partilha (6.º ano)

Na figura 10, o aluno dividiu o número maior pelo menor. Ele considerou 6 partes, cada uma dividida em 2. O divisor não aparece no esquema! O facto do mesmo aluno ter efetuado um esquema e uma divisão correta na correspondente situação com números inteiros, que se encontra na figura 11 sugere que esta dificuldade pode estar relacionada com o sentido do número.

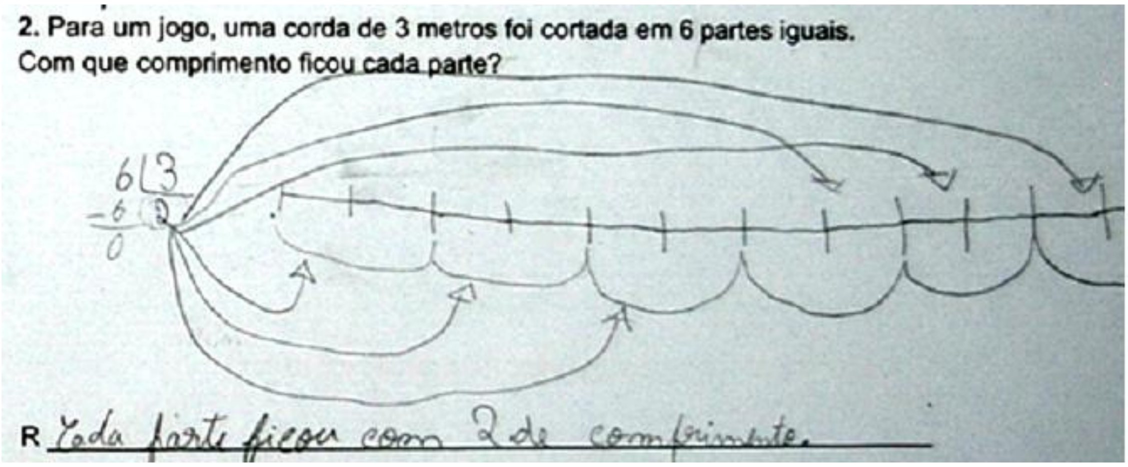


Figura 10 – Medidas equivalentes – divisão como partilha (5.º ano)

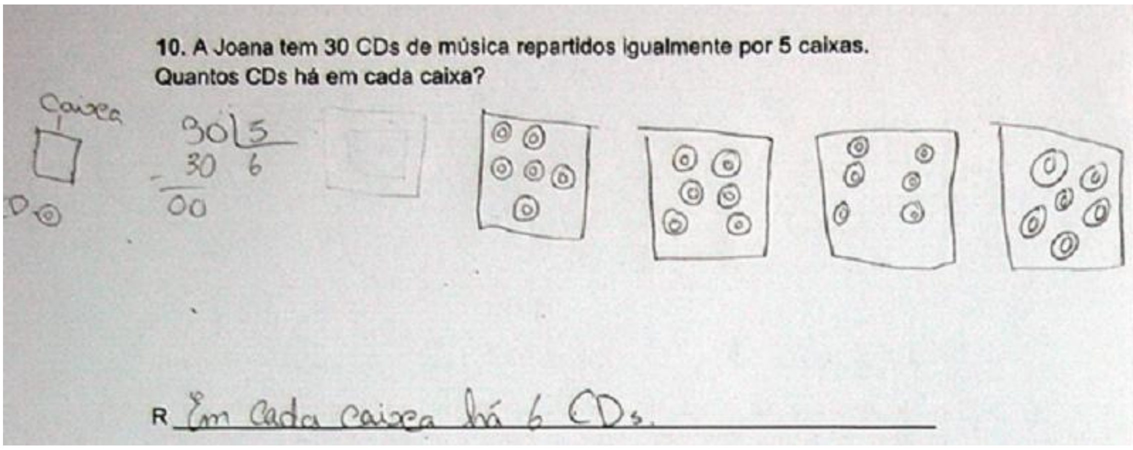


Figura 11 – Medidas equivalentes – divisão como partilha (5.º ano)

2. Medidas equivalentes (divisão como medida)

Questão colocada aos alunos:

Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.

Quantas garrafas se encheram?

As dificuldades para identificar esta situação podem relacionar-se com as características da divisão como medida e também pela natureza dos números (decimais). A multiplicação é a operação que aparece (erradamente) com mais frequência. O facto de se irem enchendo (sucessivamente) garrafas sugere uma adição sucessiva, conceito associado à multiplicação, sendo possivelmente esta a justificação para a escolha da multiplicação. Ao efetuar a multiplicação encontramos um número decimal: $3 \times 0{,}5 = 1{,}5$. Alguns alunos que efetuaram esta multiplicação deram como resposta "1,5 garrafas". Não há meias garrafas, mas há garrafas meias, pelo que não se pode considerar uma resposta sem sentido. Um aluno do 7.º ano respondeu "Encheram-se 1 garrafa e meia" o que sugere a compreensão do resultado (apesar da resolução incorreta).

Mas a multiplicação também é usada corretamente para resolver esta situação. Os alunos fazem $6 \times 0{,}5 = 3$ e respondem "6 garrafas": Aqui usam a operação inversa para confirmar o resultado. Esta é uma estratégia frequentemente usada, não só nesta questão mas também noutras. Outra forma interessante de usar a inversa é uma adição sucessiva: $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 3$. A resposta é o número de vezes que se repete $0{,}5$ que corresponde à quantidade em cada garrafa e consequentemente o número de garrafas. Aqui os alunos veem a divisão como uma subtração sucessiva e confirmam essa subtração com a sua inversa: a adição. Aqui levanto a possibilidade de as várias resoluções possam corresponder a diversas etapas da aquisição da noção de divisão como medida. Casos semelhantes podem observar-se noutras situações. Por exemplo, na disposição retangular, observam-se estas três resoluções: esquema, esquema e contagem, esquema que leva à operação. Para verificar a importância da natureza do número nesta situação, ao analisar as respostas, fui também dando atenção à divisão como medida nos grupos equivalentes, isto é, com números inteiros. Verifiquei que, em geral, quando os alunos não têm o mesmo desempenho nas duas situações, há uma tendência para que as dificuldades surjam mais com os números decimais, embora haja casos (pouco frequentes) de melhor desempenho com os números decimais.

Apresento agora algumas resoluções dos alunos para apoiar o anteriormente exposto.

Na figura 12, um aluno do 6.º efetua uma multiplicação. Esta é a operação que surge mais vezes (erradamente) nesta situação.

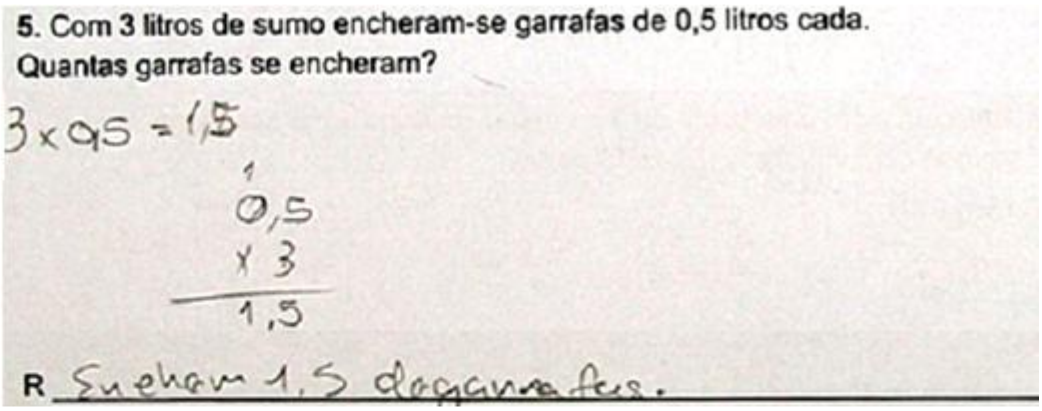
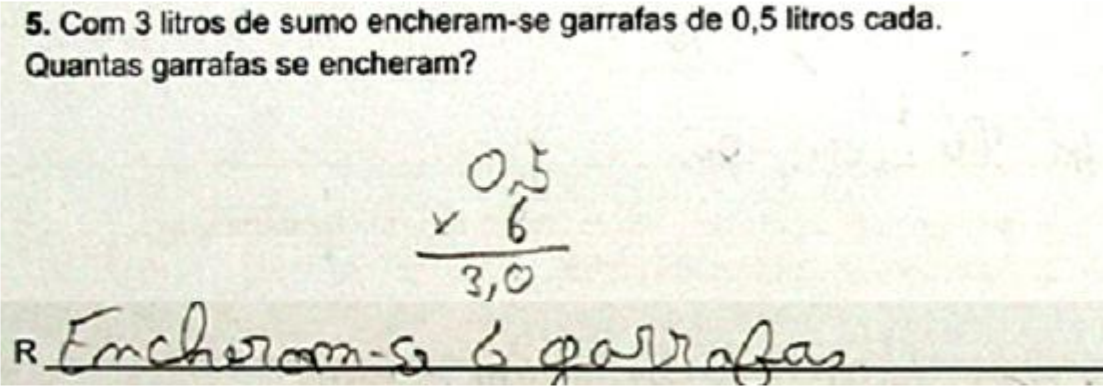


Figura 12 – Medidas equivalentes – divisão como medida (6.º ano)

Na figura 13, um aluno utiliza a multiplicação de forma correta como operação inversa para confirmar o resultado.



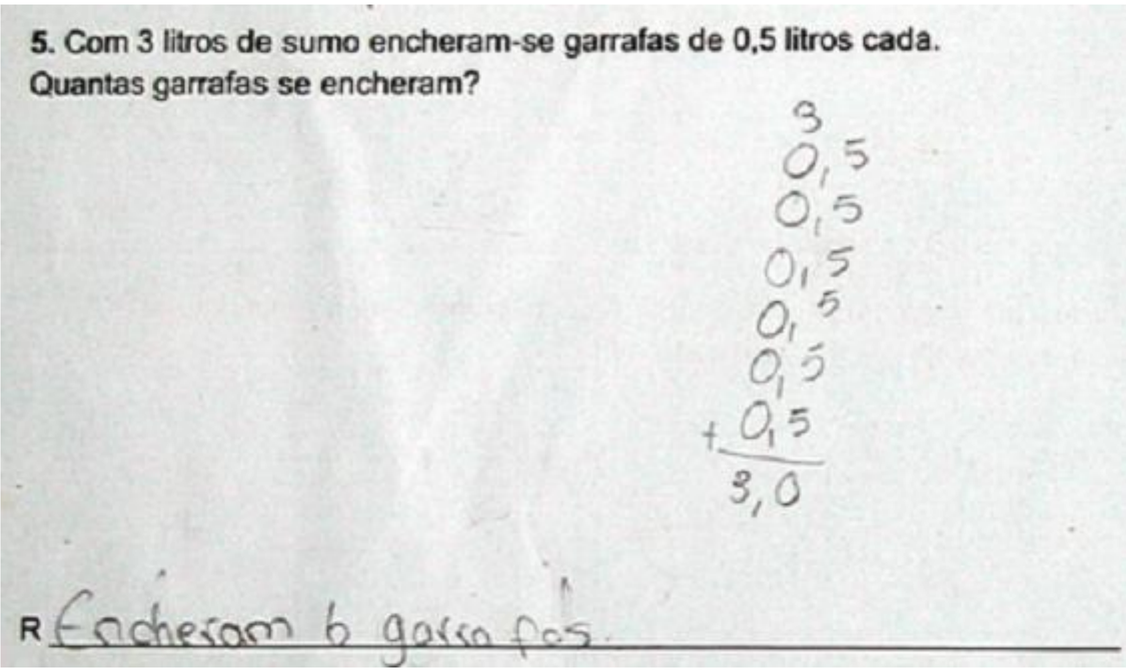
5. **Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada. Quantas garrafas se encheram?**

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ \times\ 6 \\ \hline 3,0 \end{array}$$

R Encheram-se 6 garrafas

Figura 13 – Medidas equivalentes – divisão como medida (6.º ano)

Na figura 14, um aluno considera (corretamente) que deve ir juntando meios litros (por cada garrafa) até ter os 3 litros, e verifica que precisa de 6 vezes 0,5 litros, isto é, de 6 garrafas. Aqui a divisão pode ser vista como uma subtração sucessiva, mas para descobrir quantas vezes ocorre confirma com a inversa, a adição.



5. **Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada. Quantas garrafas se encheram?**

$$\begin{array}{r} 3 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ +\ 0,5 \\ \hline 3,0 \end{array}$$

R Encheram 6 garrafas

Figura 14 – Medidas equivalentes – divisão como medida (5.º ano)

As figuras 15 e 16 mostram duas resoluções do mesmo aluno. Podemos observar a diferença entre dois esquemas da divisão como medida, para os números decimais e números inteiros. Reparemos que no caso dos inteiros em cada conjunto os elementos podem ser representados individualmente, o que não é possível nesta situação com decimais, em que é preciso colocar o valor. Nos inteiros podem ver-se os elementos, mas não nos decimais, que precisa de uma maior abstração, tornando a situação mais difícil devido, não à natureza da operação, mas sim do número.

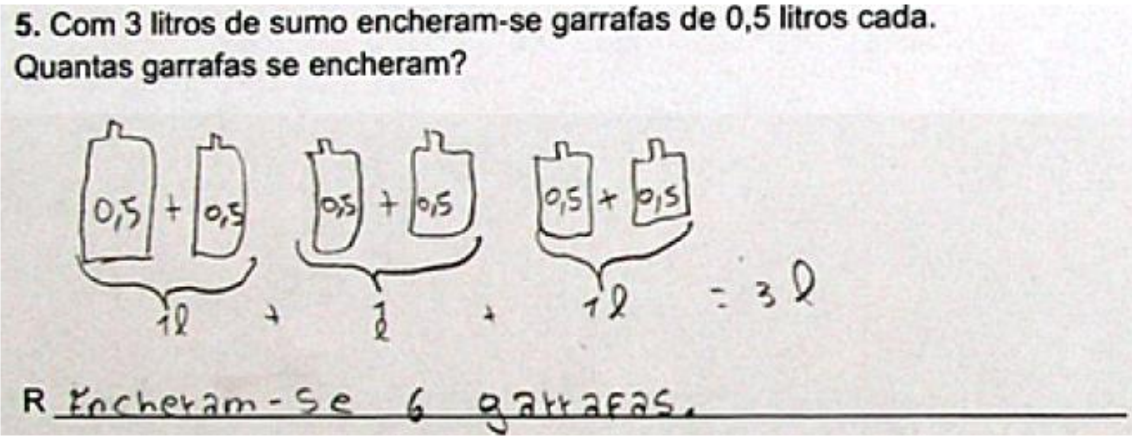


Figura 15 – Medidas equivalentes – divisão como medida (6.º ano)

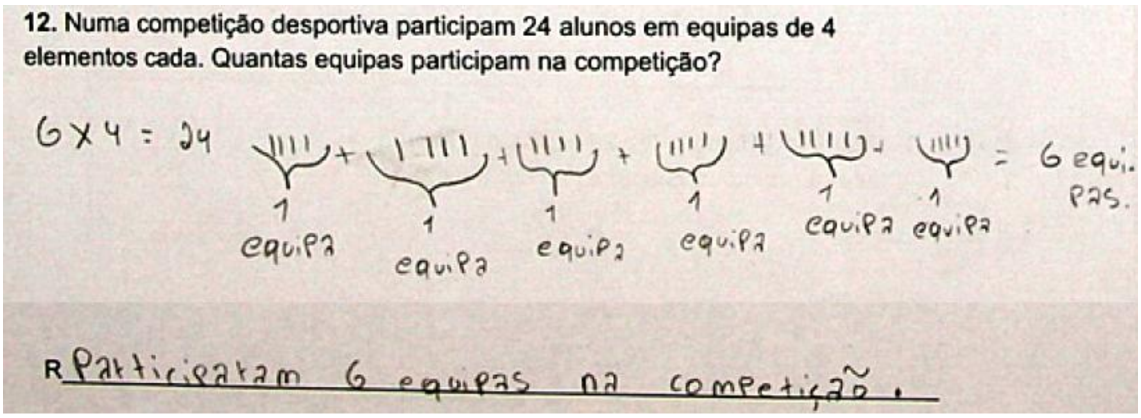


Figura 16 – Medidas equivalentes – divisão como medida (6.º ano)

3. Razão (divisão)

Questão colocada aos alunos:

Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.

A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

Nesta situação, apesar dos alunos terem apresentado dificuldades na identificação da operação, houve um número significativo que resolveu corretamente sem indicar formalmente a divisão. Esse número foi, em todos os anos, superior ao dos alunos que aplicaram a divisão. Os valores, em percentagem, encontram-se na tabela 28. Isto sugere que os alunos compreendem a natureza da situação, mas que a sua formalização vai-se adquirindo progressivamente. Ao contrário do que ocorre com as medidas equivalentes em que a melhoria significativa dá-se do 6.º para o 7.º ano, aqui a melhoria mais significativa dá-se do 5.º para o 6.º ano, mas em termos absolutos as dificuldades mantêm-se durante estes três anos de escolaridade.

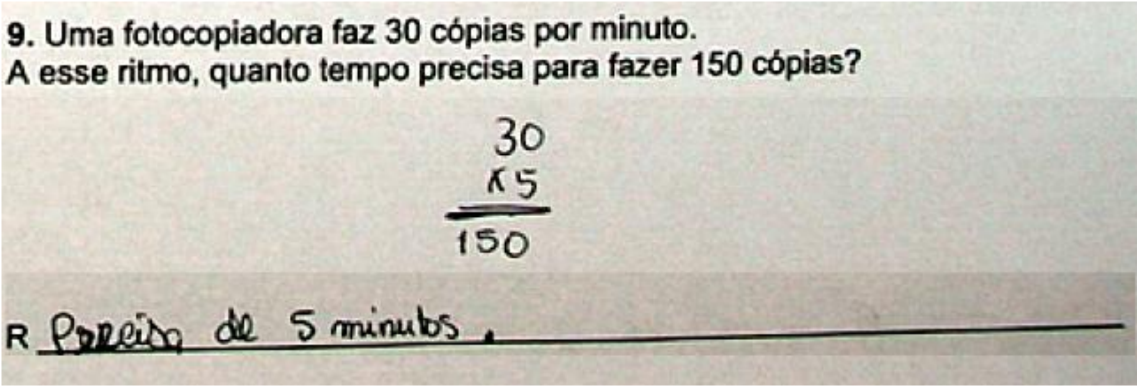
Divisão - razão - v3	Identificou a divisão	Resolveu por estratégias próprias	Resolveu erradamente ou não resolveu
5.º ano	11	58	32
6.º ano	22	44	33
7.º ano	25	56	19

Tabela 28 – Divisão – razão

Como já foi referido, a divisão está associada ao ato de repartir, o que não ocorre neste caso. Este poderá ser o principal motivo para que os alunos não identifiquem formalmente esta situação como divisão. Eles usaram estratégias diversas para resolverem a tarefa que lhes foi colocada, tal como noutras divisões. A multiplicação como inversa foi uma forma de resolução. No entanto a adição sucessiva, foi uma estratégia muito usada nos três anos de escolaridade. Os alunos foram juntando as fotocópias de 30 em 30 até conseguirem as 150. Assim encontraram cinco conjuntos de 30 fotocópias, correspondentes aos 5 minutos. Reparemos que isto é uma adição sucessiva, situação associada mais à multiplicação, mas foram poucos os alunos que (erradamente) multiplicaram.

Vou então apresentar algumas resoluções de alunos para exemplificar o anteriormente exposto.

Na figura 17, um aluno utilizou a multiplicação como inversa para confirmar o resultado.

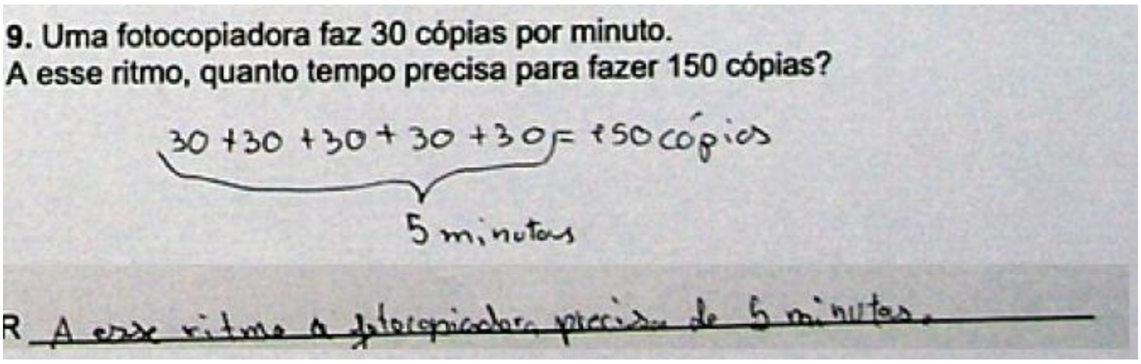

9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.
A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 5 \\ \hline 150 \end{array}$$

R Precisa de 5 minutos.

Figura 17 – Razão – divisão (5.º ano)

Na figura 18, um aluno adiciona sucessivamente 30 cópias (por minuto) para chegar às 150 cópias correspondentes a 5 minutos.


9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.
A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

$\underbrace{30 + 30 + 30 + 30 + 30}_{\text{5 minutos}} = 150$ cópias

R A esse ritmo a fotocopiadora precisa de 5 minutos.

Figura 18 – Razão – divisão (7.º ano)

A resolução da figura 19 é bastante interessante. O aluno vai juntando de 30 em 30 até chegar aos 150, encontrando assim 5 grupos de 30 cópias, que correspondem aos 5 minutos.

A adição sucessiva, apresentada de várias formas, foi uma estratégia muito usada que nos mostra como uma quantidade significativa de alunos interpreta esta situação.

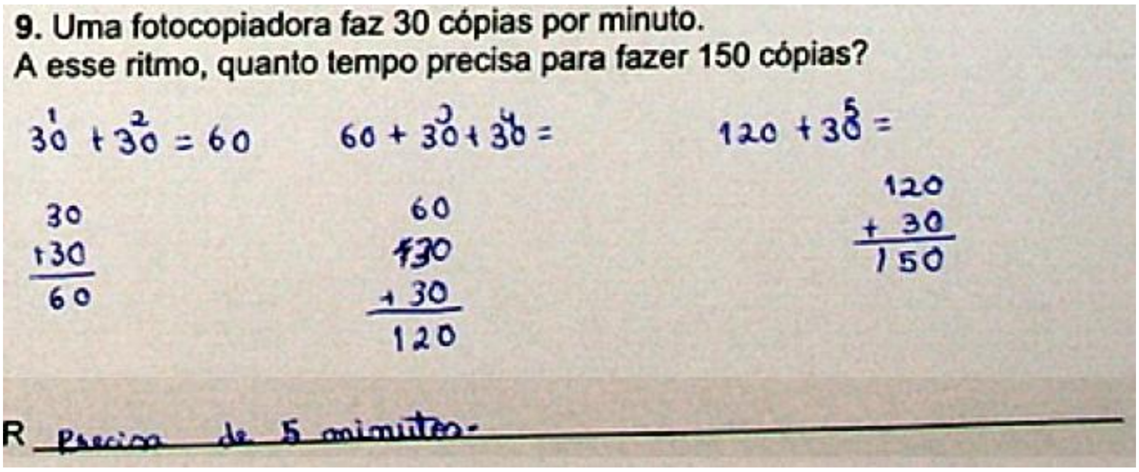


Figura 19 - Razão – divisão (5.º ano)

Nas figuras 20 e 21 podemos observar mais dois exemplos da adição sucessiva.

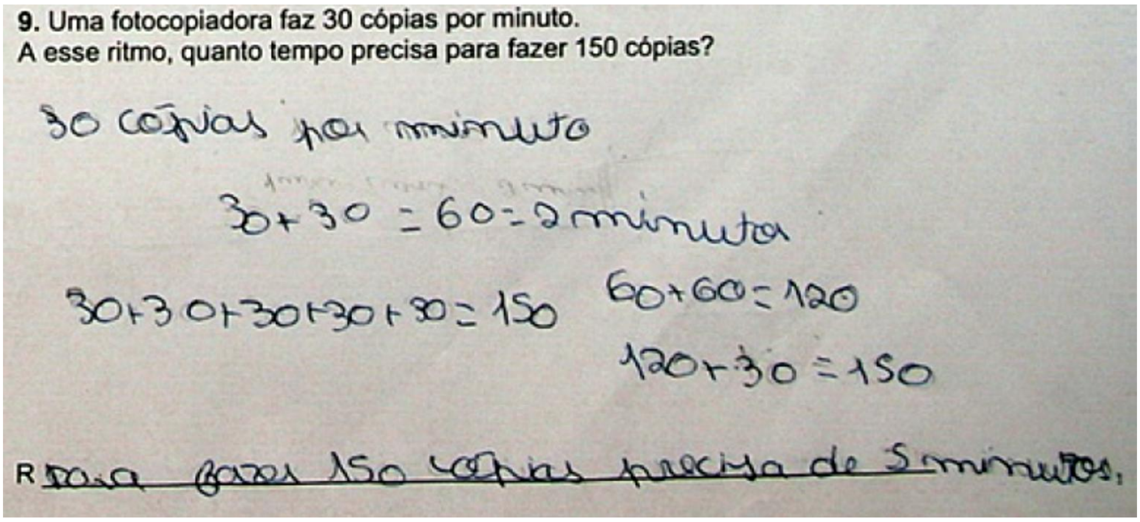
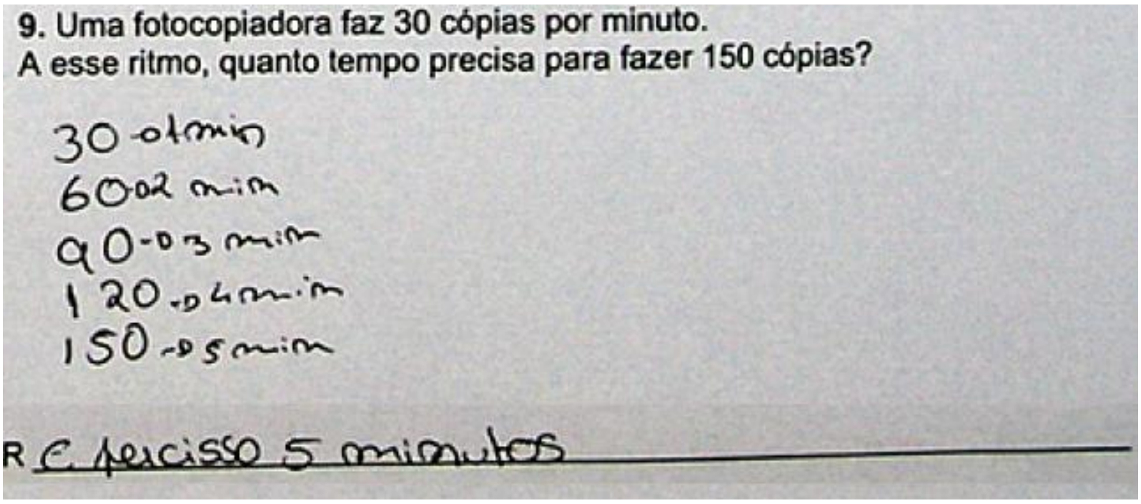


Figura 20 - Razão – divisão (6.º ano)

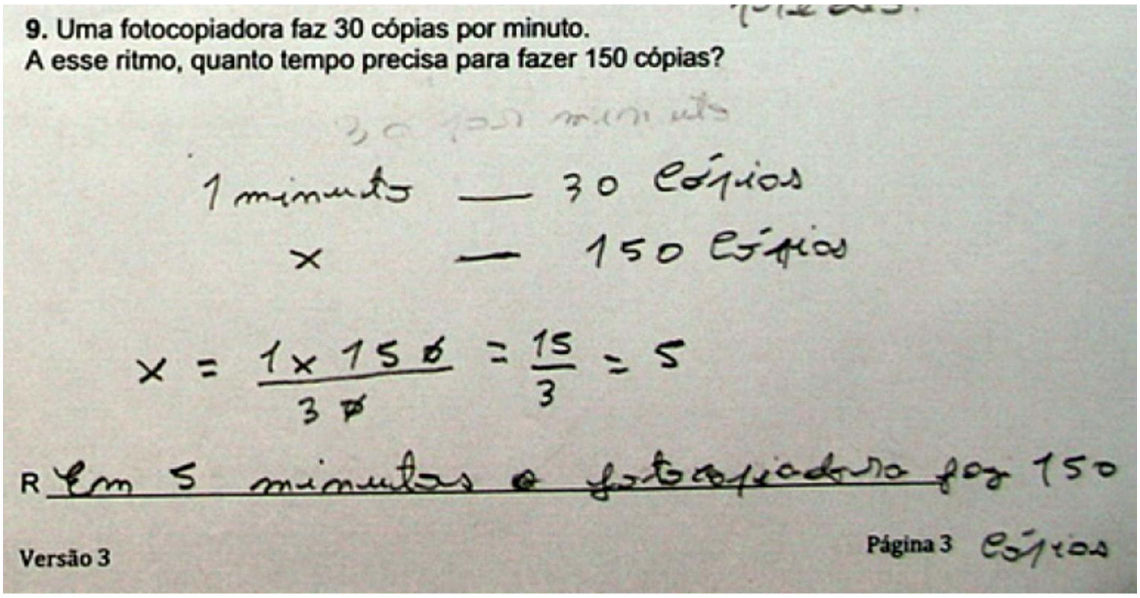

9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.
A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

30 → 01 min
60 → 02 min
90 → 03 min
120 → 04 min
150 → 05 min

R: E precisso 5 minutos

Figura 21 - Razão – divisão (7.º ano)

Houve também alunos (embora poucos) que utilizaram a regra de três simples (figura 22).


9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.
A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

1 minuto — 30 cópias
x — 150 cópias

$x = \frac{1 \times 15\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{15}{3} = 5$

R: Em 5 minutos a fotocopiadora faz 150 cópias

Versão 3 Página 3

Figura 22- Razão – divisão (6.º ano)

4. Comparação multiplicativa (divisão)

Questão colocada aos alunos:

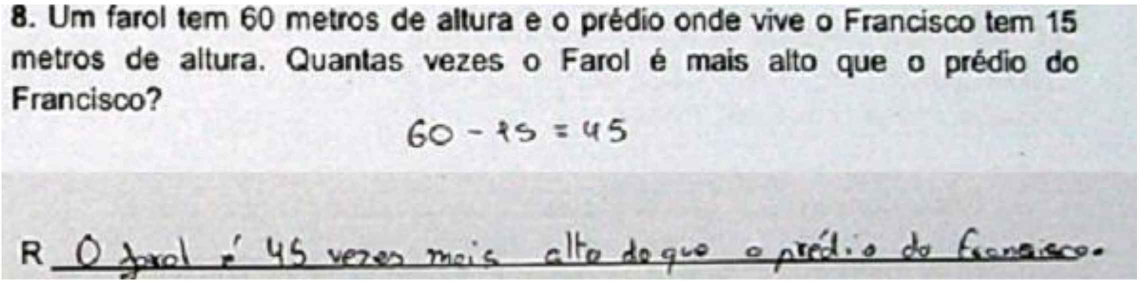
Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

A identificação da operação para esta situação revelou-se bastante difícil e, dos alunos que não a resolveram corretamente, houve uma tendência em escolherem a subtração, respondendo que o farol era 45 vezes mais alto.

Podemos comparar dois valores do ponto de vista aditivo ou multiplicativo. A comparação multiplicativa é mais complexa do que a aditiva, pois não basta ver qual é a diferença, mas quantas vezes uma quantidade cabe noutra, e também a aquisição do seu raciocínio é posterior ao aditivo. As situações de comparação, embora possam estar associadas a qualquer operação, são melhor identificadas pelos alunos na subtração (gráfico 5, pág. 86) daí também o facto de um número significativo de alunos efetuarem uma subtração nesta situação.

Vejamos exemplos de resoluções dos alunos.

Na resolução da figura 23, o aluno interpreta esta situação como comparação aditiva.



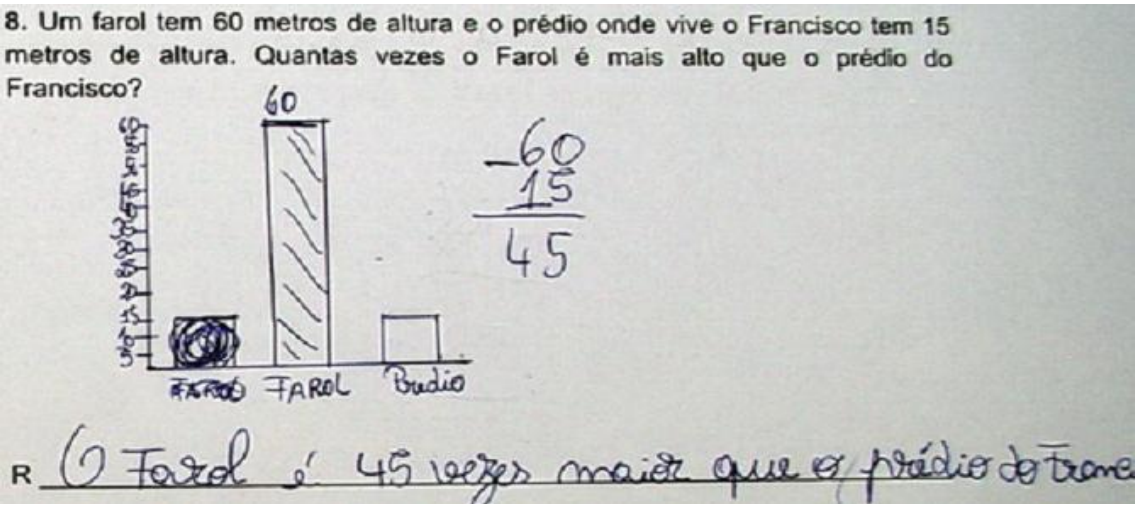
8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

60 - 15 = 45

R O farol é 45 vezes mais alto do que o prédio do Francisco.

Figura 23 – Comparação multiplicativa – divisão (7.º ano)

Na resolução da figura 24 o aluno faz um esquema em que as figuras estão representadas numa proporção realista, mas subtrai e conclui que o farol é 45 vezes mais alto, não vendo que não cabem 45 prédios na altura do farol, interpretando também como uma comparação aditiva


8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

60

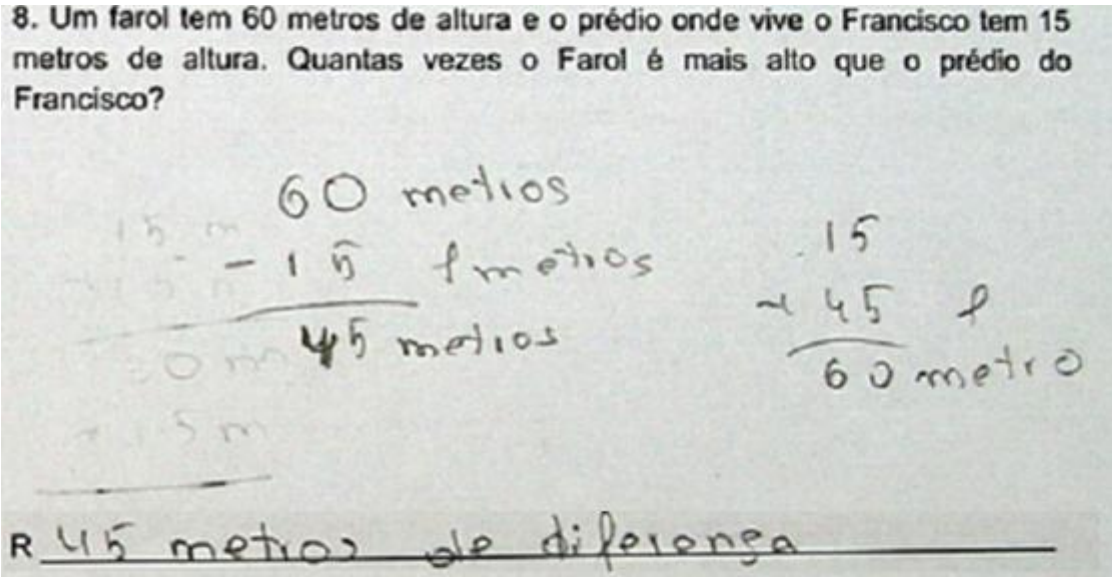
FAROL Predio

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 15 \\ \hline 45 \end{array}$$

R O Farol é 45 vezes maior que o prédio do Franc

Figura 24 – Comparação multiplicativa – divisão (5.º ano)

Na figura 25 o aluno interpretou como comparação aditiva. O aluno não diz que o farol é 45 vezes maior, mas que 45 metros é a *diferença*, o que é verdade, embora não responda à questão que foi colocada


8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

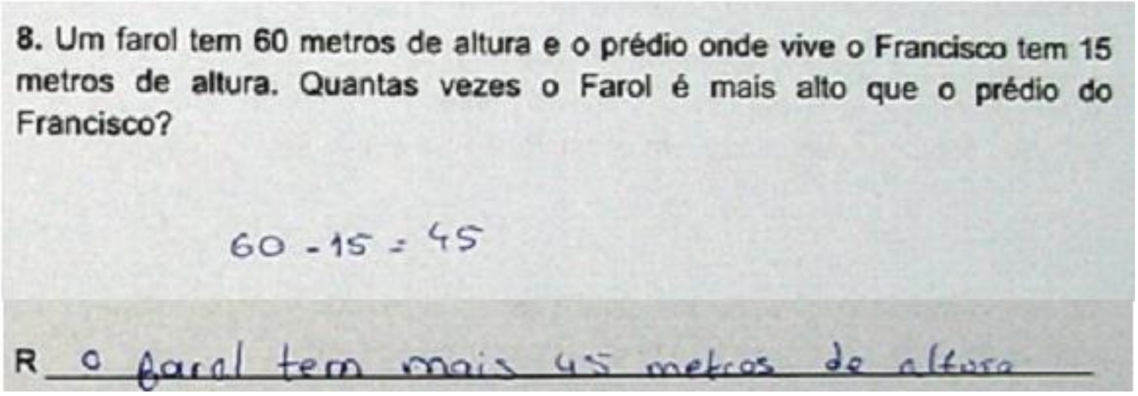
60 metros
− 15 f metros
45 metros

15
+ 45 f
60 metro

R 45 metros de diferença

Figura 25 – Comparação multiplicativa – divisão (6.º ano)

Na resolução da figura 26, temos uma situação semelhante à da figura 19: o aluno não responde à pergunta, mas o que afirma está correto.


8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

60 - 15 = 45

R o farol tem mais 45 metros de altura

Figura 26 – Comparação multiplicativa – divisão (7.º ano)

Apesar desta situação se ter mostrado difícil quanto à aplicação de uma divisão, houve uma quantidade significativa de alunos que resolveram corretamente a tarefa sem apresentar uma divisão (tabela 29).

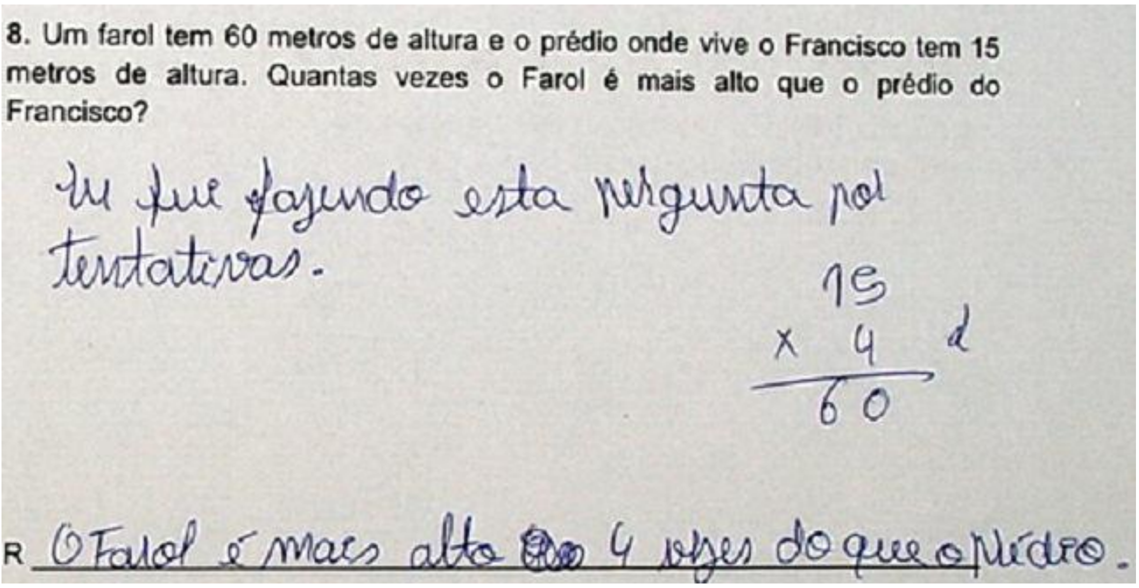
	Alunos que aplicaram a divisão	Alunos que não aplicaram a divisão mas resolveram corretamente a tarefa	Alunos que não resolveram corretamente a tarefa
5.º ano	7 %	31 %	62 %
6.º ano	17 %	34 %	49 %
7.º ano	30 %	24 %	46 %

Tabela 29 -Comparação multiplicativa (divisão)

Na tabela 29 podemos verificar que quanto mais baixo é o nível de escolaridade, mais necessidade os alunos têm de recorrer às suas resoluções próprias e à medida que se avança, adquire-se uma interpretação mais formal da operação.

É também interessante ver quais são as estratégias usadas pelos alunos para compreendermos como eles interpretam esta situação, das quais destaco as seguintes: *multiplicação como inversa* da divisão (confirma o resultado), *adição sucessiva* e *esquemas*.

A figura 27 mostra uma resolução em que o aluno usa a operação inversa para confirmar o resultado e diz que fez por tentativas, que realmente é o que usamos nesta situação, isto é, se temos de calcular mentalmente, por exemplo, $48:8$, vem-nos à memória que $6 \times 8 = 48$, então o quociente procurado é 6. Mas se for um caso mais trabalhoso poderemos ter que experimentar até encontrar esse produto, para daí saber qual é o quociente.


8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

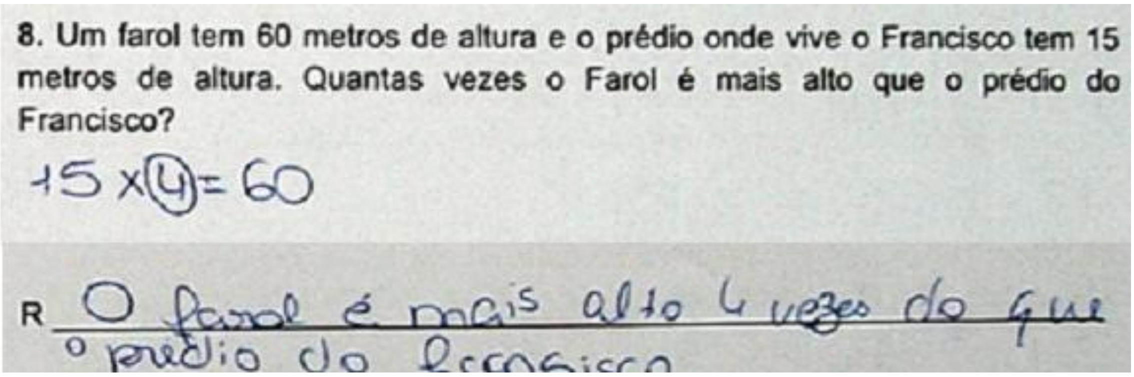
Eu fue fazendo esta pergunta pol tentativas.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 4 \\ \hline 60 \end{array}$$

R O Farol é mais alto 4 vezes do que o prédio.

Figura 27 – Comparação multiplicativa – divisão (5.º ano)

Na figura 28 temos uma resolução em que é também utilizada a multiplicação como inversa para confirmar e o aluno assinala o número (que é o valor desconhecido) como sendo o que se multiplica por 15 para obter 60.

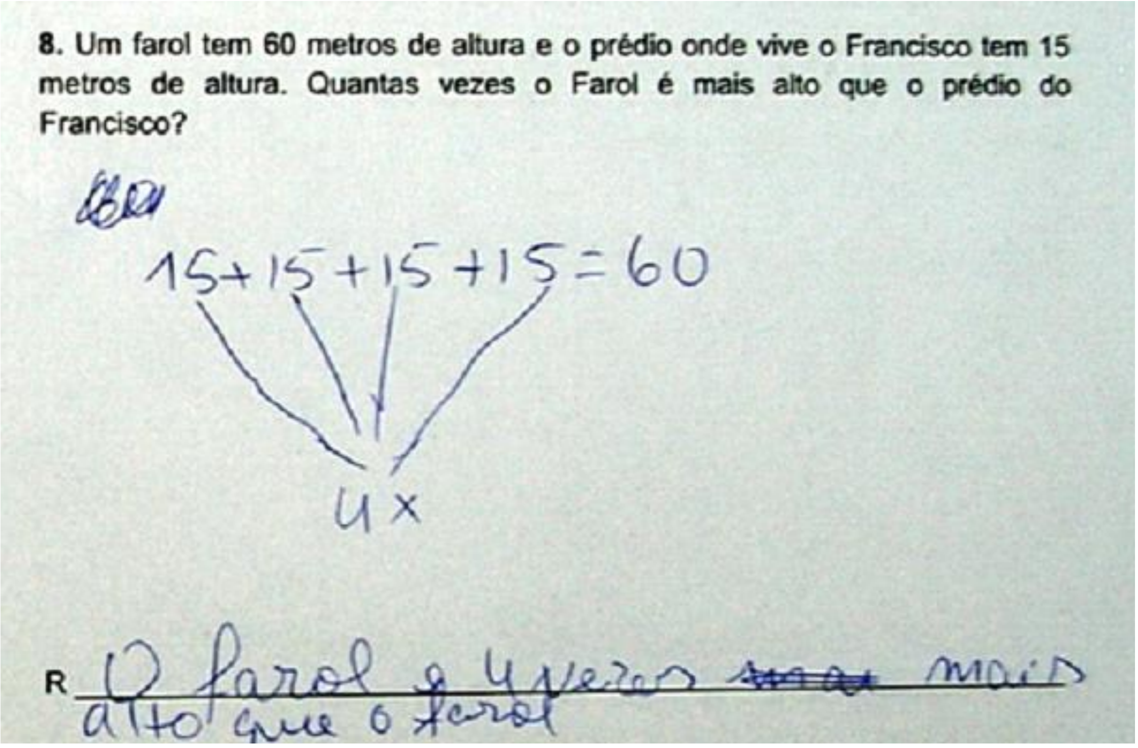

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

$15 \times 4 = 60$

R O farol é mais alto 4 vezes do que o prédio do Francisco

Figura 28 – Comparação multiplicativa – divisão (7.º ano)

As figuras 29 e 30 mostram exemplos de resoluções em que os alunos usam a adição sucessiva. No fundo é uma multiplicação (inversa da divisão) apresentada como uma adição sucessiva. Na resolução da figura 30 o aluno troca o nome Francisco por João.

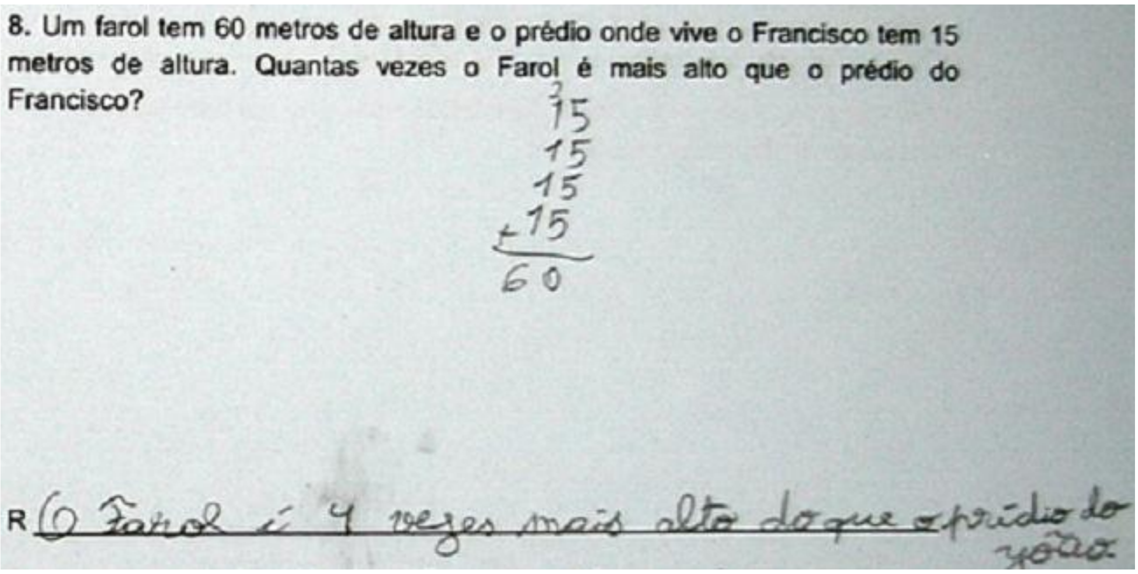

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

15+15+15+15=60

4x

R O farol é 4 vezes mais alto que o farol

Figura 29 – Comparação multiplicativa – divisão (7.º ano)

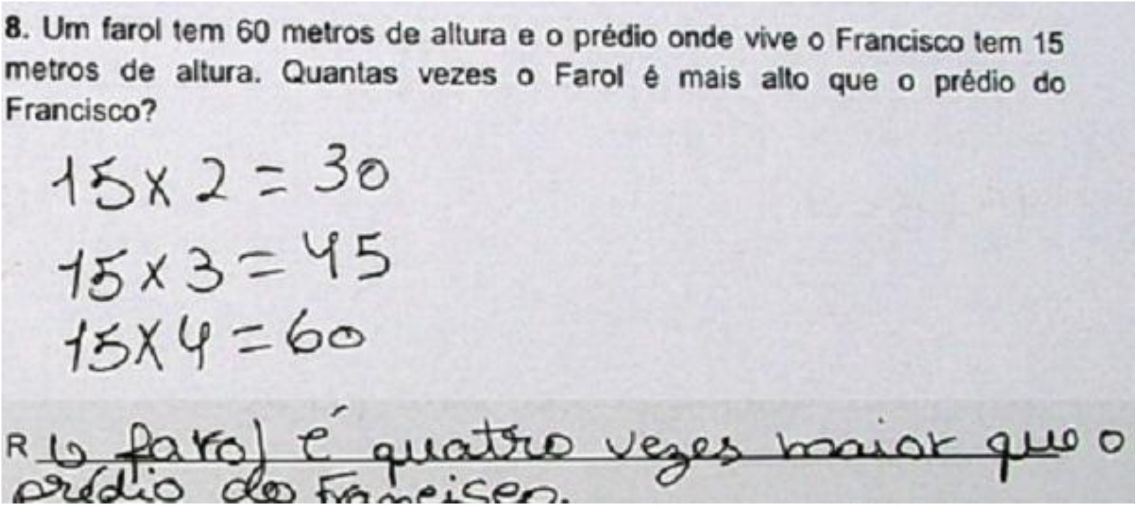

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

15
15
15
+15
60

R O Farol é 4 vezes mais alto do que o prédio do João

Figura 30 – Comparação multiplicativa – divisão (5.º ano)

Na figura 31 temos a resolução de um aluno do 5.º ano, que apresenta uma adição sucessiva, mas diferente das anteriores.


8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

$15 \times 2 = 30$

$15 \times 3 = 45$

$15 \times 4 = 60$

R O farol é quatro vezes maior que o prédio do Francisco.

Figura 31 – Comparação multiplicativa – divisão (5.º ano)

Além das características desta situação, já referidas, podem-se apontar ainda outros motivos para a sua dificuldade. É uma situação estática, não havendo uma repartição real (associada frequentemente à divisão). Provavelmente também não é tão trabalhada nas aulas de matemática como as duas situações mais frequentes: a divisão como partilha e como medida.

5. <u>Produto Cartesiano (multiplicação)</u>

Questão colocada aos alunos

Uma equipa de futebol vai escolher as cores do seu equipamento novo.

Tem duas cores para os calções, e três cores para as camisolas.

Quantos equipamentos diferentes é possível escolher?

O produto cartesiano foi a situação mais difícil de identificar de todas as que foram aplicadas aos alunos. O sentido combinatório da multiplicação praticamente não é trabalhado nas aulas de matemática. Dá-se mais ênfase ao sentido aditivo e alguma ao sentido comparativo. Uma exploração deste sentido combinatório é proposta por Loureiro (1997) como forma de enriquecer a aprendizagem do sentido desta operação.

Esta situação foi aplicada a um terço dos alunos e identificada por 11%, 6% e 6% respetivamente no 5.º, 6.º e 7.º anos. Estes resultados sugerem que os alunos do 5.º ano reconheceram melhor a situação como multiplicação, mas uma análise mais profunda indica-nos que pode não ser essa a realidade. Estas percentagens referem-se a 2, 1 e 1 alunos, respetivamente. Verifiquei também que um destes alunos do 5.º ano aplicou multiplicações em todas as situações, pelo que é de pensar que não terá verdadeiramente identificado a situação como multiplicação. Podemos concluir que a grande maioria dos alunos deste estudo realmente não reconhecem esta situação como multiplicação. O reduzido ênfase que lhe é dado na prática letiva poderá explicar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

No entanto, há que referir que esta situação foi corretamente resolvida por alunos que utilizaram estratégias próprias, entre as quais podemos encontrar diversos esquemas, como exemplifico a seguir.

Na figura 32 temos uma resolução em que o aluno apresentou todos os casos possíveis.

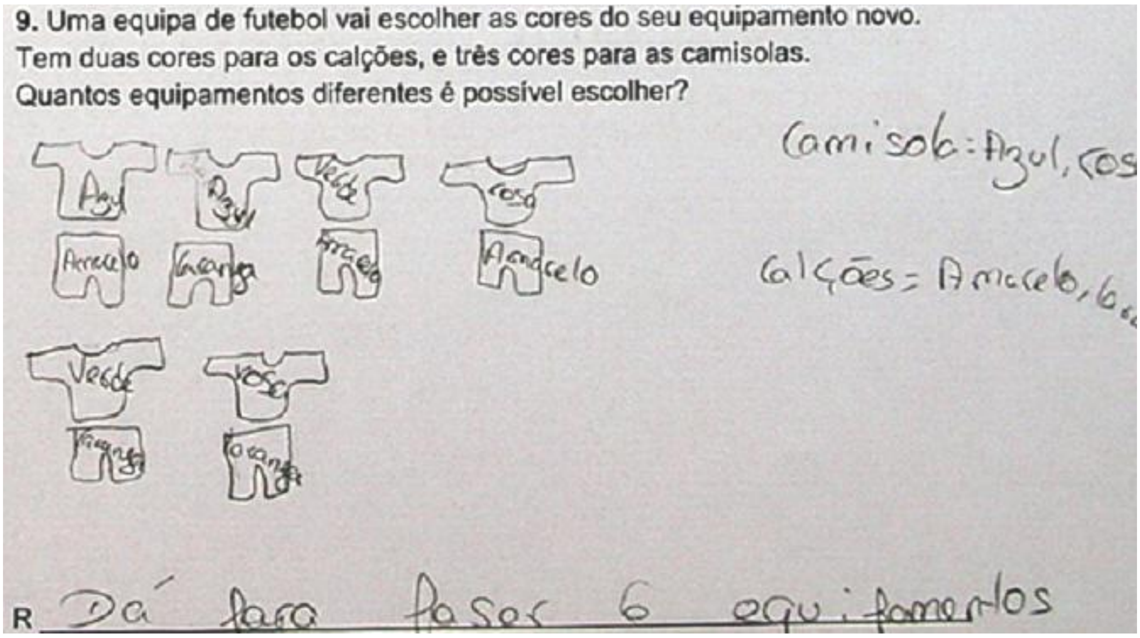
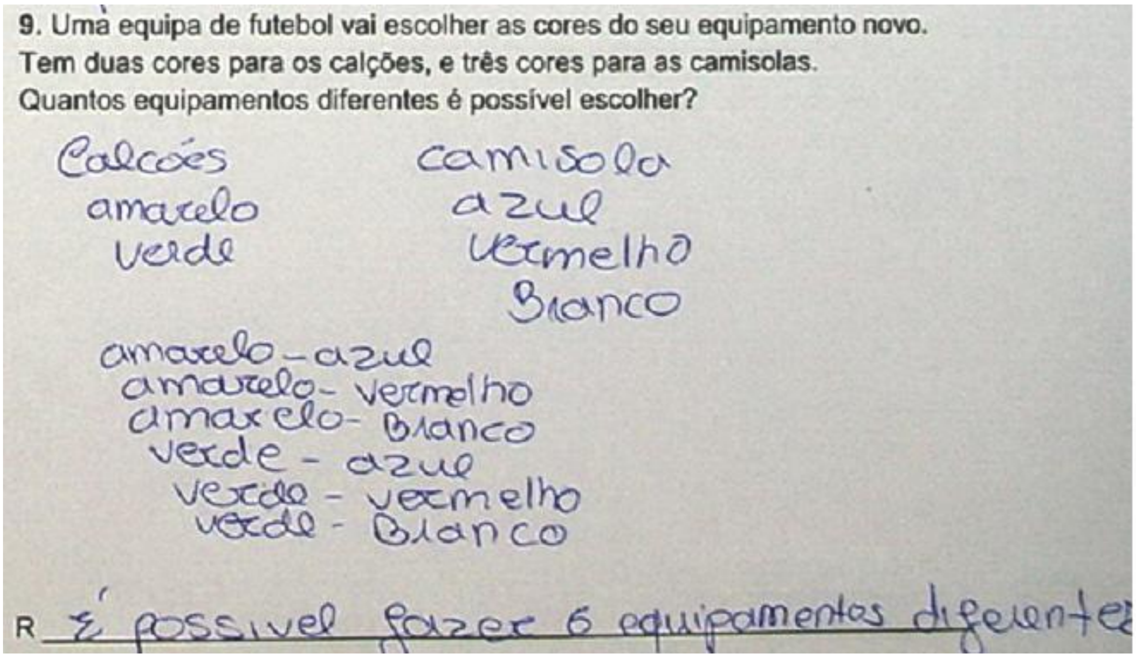


Figura 32 – Produto cartesiano – multiplicação (6.º ano)

Na figura 33 temos a resolução de um aluno que representou, por palavras, todos os casos.



9. Uma equipa de futebol vai escolher as cores do seu equipamento novo.
Tem duas cores para os calções, e três cores para as camisolas.
Quantos equipamentos diferentes é possível escolher?

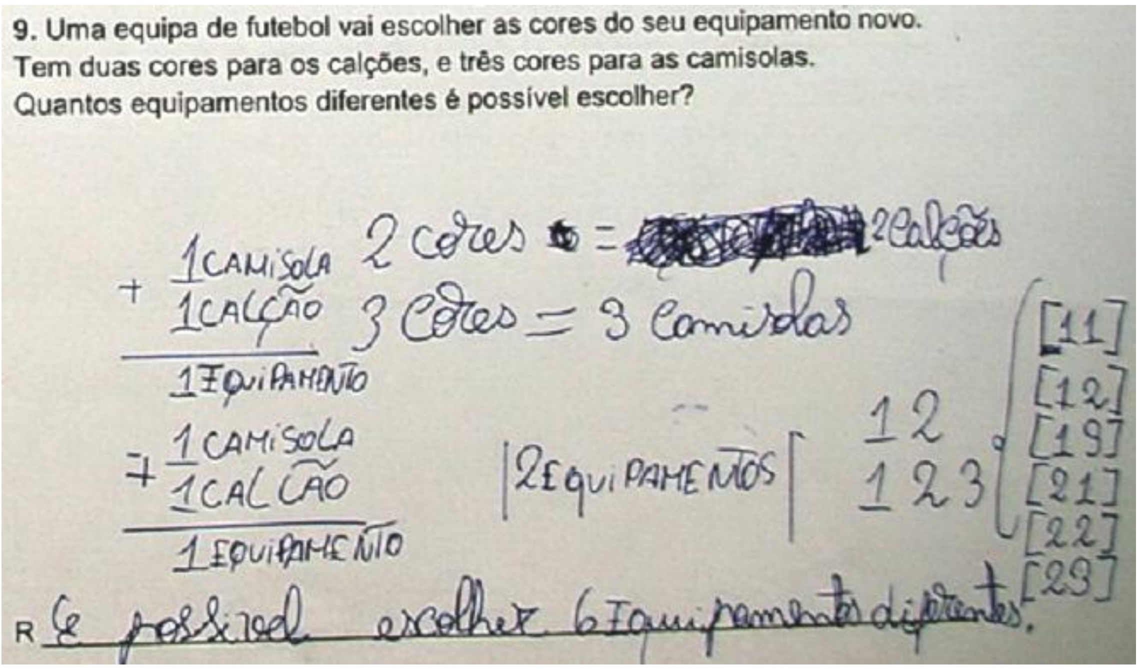
Calcões camisola
amarelo azul
verde vermelho
Branco

amarelo - azul
amarelo - vermelho
amarelo - Branco
verde - azul
verde - vermelho
verde - Branco

R É possivel fazer 6 equipamentos diferentes

Figura 33 – Produto cartesiano – multiplicação (7.º ano)

Na resolução da figura 34 o aluno representou (não formalmente) pares ordenados.



9. Uma equipa de futebol vai escolher as cores do seu equipamento novo.
Tem duas cores para os calções, e três cores para as camisolas.
Quantos equipamentos diferentes é possível escolher?

2 cores = 2 Calções
3 Cores = 3 Camisolas

1 CAMISOLA
+ 1 CALÇÃO
1 EQUIPAMENTO

1 CAMISOLA
+ 1 CALÇÃO
1 EQUIPAMENTO

2 EQUIPAMENTOS

1 2
1 2 3

[11]
[12]
[13]
[21]
[22]
[23]

R É possivel escolher 6 Equipamentos diferentes.

Figura 34 – Produto cartesiano – multiplicação (5.º ano)

Na figura 35 temos a interpretação combinatória da multiplicação, mas o aluno não reconhece formalmente a operação e conta as setas.

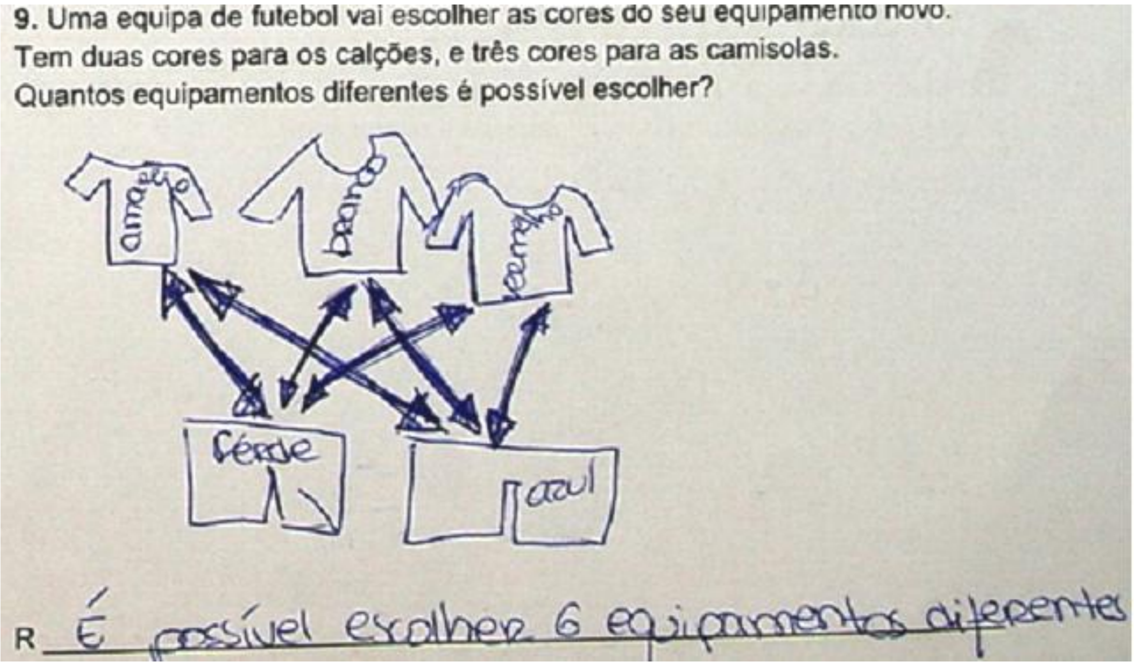


Figura 35 – Produto cartesiano – multiplicação (6.º ano)

Na resolução da figura 36, o aluno apresenta um esquema que leva a uma adição sucessiva, que se pode transformar em multiplicação.

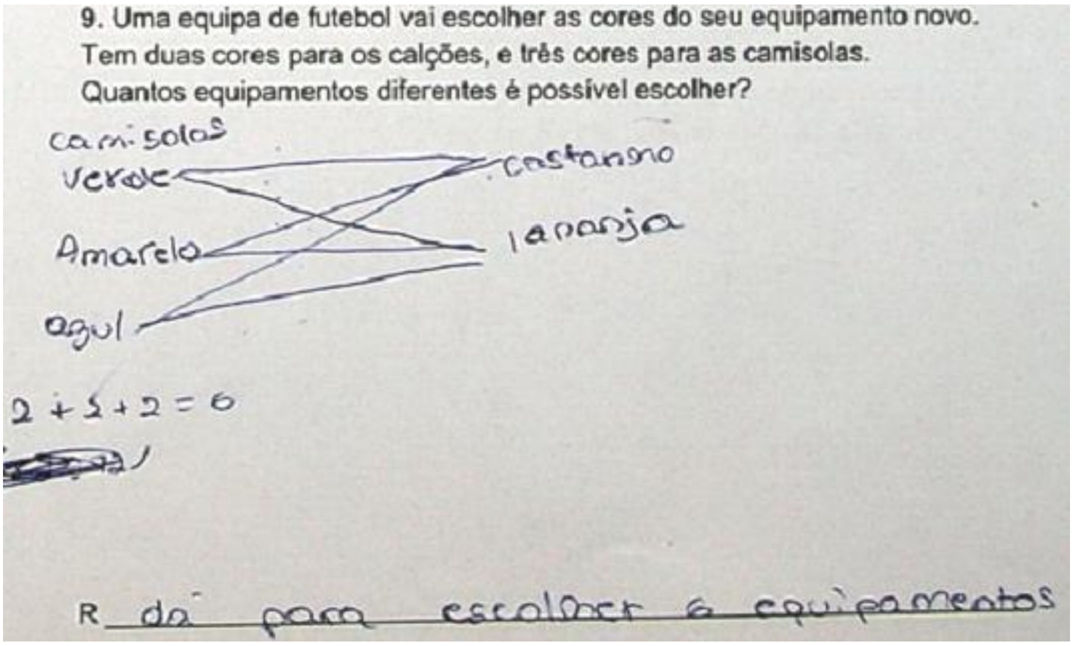


Figura 36 – Produto cartesiano – multiplicação (6.º ano)

A maioria dos alunos decidiu atribuir cores à roupa, que não é indicado no enunciado, e que parece ser uma necessidade de tornar a situação mais concreta.

Na figura 37 temos a resolução de um aluno, que ao contrário da maioria, não atribuiu cores ao equipamento.

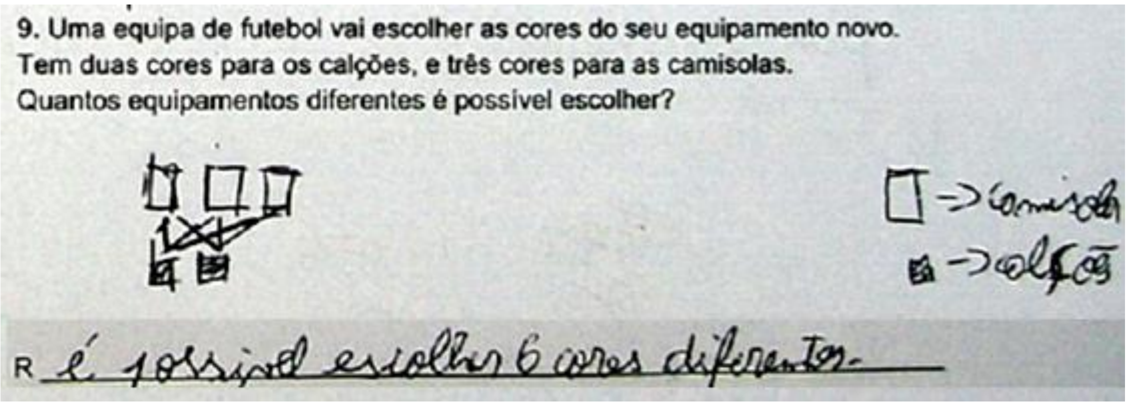


Figura 37 – Produto cartesiano – multiplicação (7.º ano)

Como se pode observar nas resoluções dos alunos, a multiplicação (não formal) surge em alguns casos.

A análise das resoluções corretas sem a aplicação formal da operação mostrou que os alunos do 5.º ano tiveram melhor desempenho, com as seguintes percentagens de resoluções corretas: 5.º ano - 44%; 6.º ano – 33% e 7.º ano – 29%. Noutros estudos citados por Verschaffel, Greer, e De Corte (2000) também há casos em que alunos mais novos obtêm melhores resultados. Uma possível explicação que estes autores propõem é que os alunos mais novos, com menos experiência, tentam analisar mais profundamente a situação, enquanto os mais velhos aplicam uma estratégia mais rotineira sem a analisar realmente. A verdadeira dificuldade desta situação não está clara. Como seria se ela fosse trabalhada nas aulas de matemática tal como acontece mais geralmente com outras situações multiplicativas? Continuariam os alunos com dificuldade em identificá-la?

6. <u>Mudança para mais (subtração)</u>

Questão colocada aos alunos

O Luís comprou 5 livros de uma coleção de 12.

Quantos lhe faltam para ter a coleção completa?

Esta foi a única situação aditiva que apresentou uma percentagem de identificação abaixo dos 50% e apenas no 5.º ano. Foram 39% dos alunos os que conseguiram identificar a subtração. Outros 39% resolveram corretamente a tarefa mas não apresentaram formalmente a subtração. Fizeram esquemas, ou usaram a adição (como inversa para confirmar). O facto de haver uma *mudança para mais,* (o Luís recebeu 5 livros) que é frequentemente associada à adição pode ser a explicação para alguns alunos não associarem esta situação à subtração. Mas na verdade também não houve uma associação à adição; os alunos usaram estratégias próprias, como exemplifico a seguir.

Na figura 38, o aluno apresenta um esquema que lhe permite contar os que faltam.

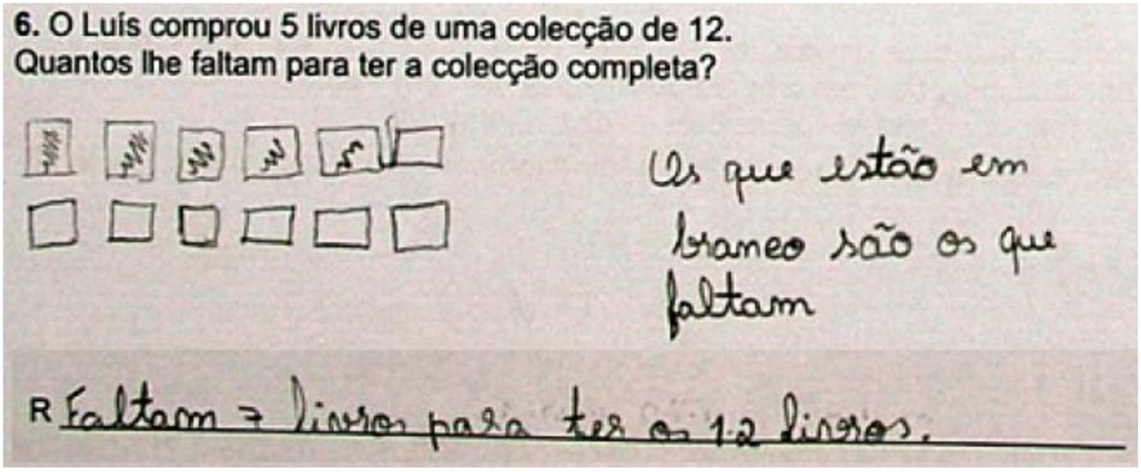


Figura 38 – Mudança para mais – subtração (5.º ano)

Na figura 39, o aluno interpreta corretamente a situação, mas não formaliza a subtração, que é vista no sentido de completar – uma das suas interpretações.

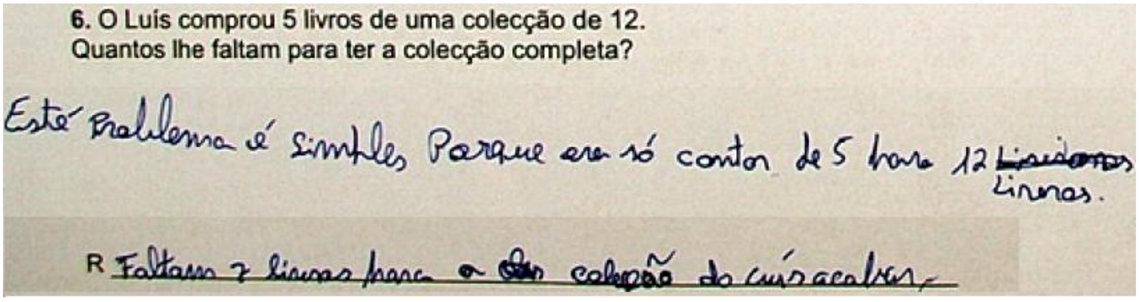


Figura 39 – Mudança para mais – subtração (5.º ano)

Na resolução da figura 40, um aluno do 5.º ano confirmou o resultado com uma adição, aqui como operação inversa.

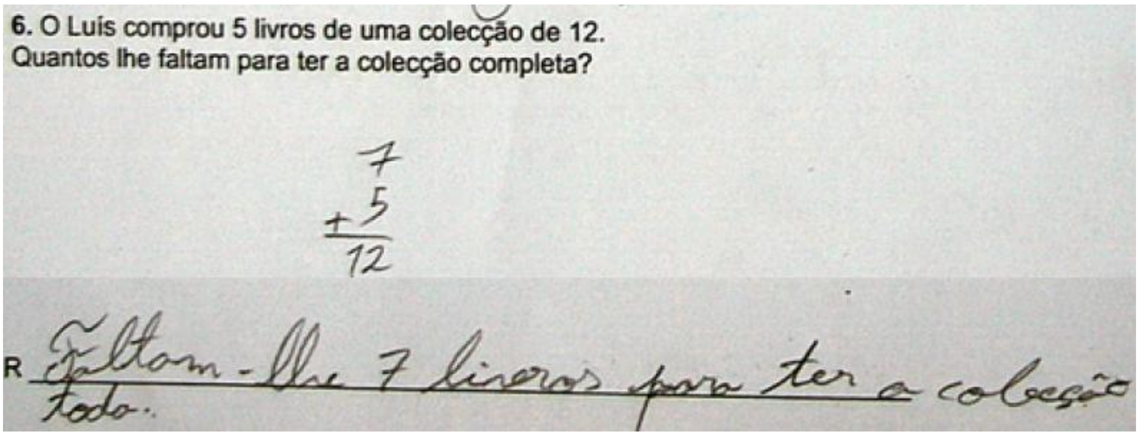


Figura 40 – Mudança para mais – subtração (5.º ano)

Vou seguidamente analisar as situações em que os alunos tendencialmente escolheram erradamente uma operação e que não foram referidas anteriormente.

<u>Multiplicação (medidas equivalentes)</u>

Questão colocada aos alunos:

Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.

Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

Nesta situação, os alunos que não escolheram corretamente a multiplicação, optaram preferencialmente pela divisão. Ao analisar as resoluções dos alunos, todos os que realizaram uma divisão, apresentaram apenas o algoritmo. Porque terão efetuado essa opção? Temos uma situação de “repartir” algo por várias pessoas, que está associada à divisão. A diferença é que, neste caso, não queremos saber com que quantidade ficou cada aluno, mas a quantidade total. Esta semelhança com a uma situação de divisão poderá ser a explicação para esta escolha incorreta por parte de alguns alunos.

Grupos equivalentes (divisão como partilha)

Questão colocada aos alunos:

A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas.

Quantos CD há em cada caixa?

Nesta situação, os alunos que escolheram uma operação errada optaram preferencialmente pela multiplicação.

Neste caso o enunciado sugere uma repartição, ideia associada à divisão. Aparentemente não há nada que sugira uma multiplicação, a não ser uma interpretação incorreta. É possível que os alunos tenham pensado que havia 30 CD em cada caixa, e não no total. A figura 41 sugere esta interpretação.

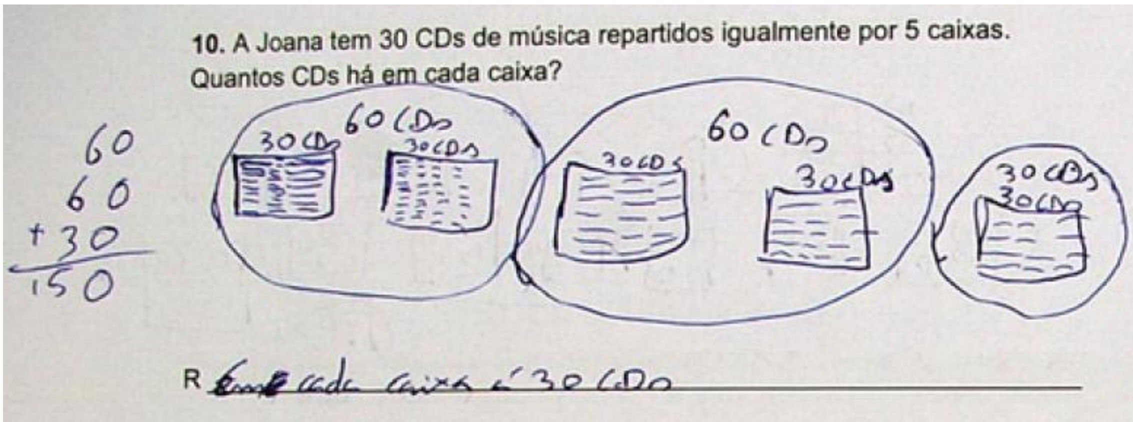


Figura 41 – Grupos equivalentes – divisão como partilha - (5.º ano)

Esta explicação é também apoiada pelo facto dos alunos que multiplicaram terem aceitado o resultado de 150 CD (figura 42), pois se eles tivessem interpretado que no total havia 30 CD, não fazia sentido a resposta de 150 CD. Mas também é verdade que os alunos, por vezes, não fazem uma interpretação realista das situações nem da grandeza dos números, pelo que a explicação para a aceitação da resposta 150 CD pode não ser linear.

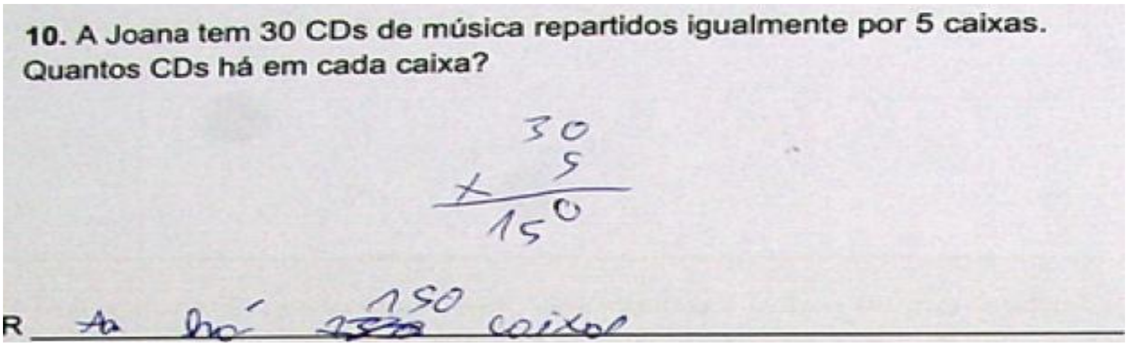


Figura 42 – Grupos equivalentes – divisão como partilha - (5.º ano)

Comparação (a menos) – adição

Questão colocada aos alunos

Num jogo, a Ana e o José formam uma equipa.

O José já conseguiu 15 pontos, menos 5 do que a Ana.

Quantos pontos conseguiu a Ana?

Nesta situação, quando os alunos escolheram incorretamente uma operação, optaram preferencialmente pela subtração. A explicação para este facto parece estar na interpretação, pois os alunos consideraram que o José tem mais pontos que a Ana. É possível que tenham comparado 15 com 5. O José tem 15 que é mais do que 5. A figura 43 sugere esta interpretação. Então tira-se 5 para saber quantos tem a Ana. A palavra *menos* está também associada à subtração, daí esta opção por parte de alguns alunos.

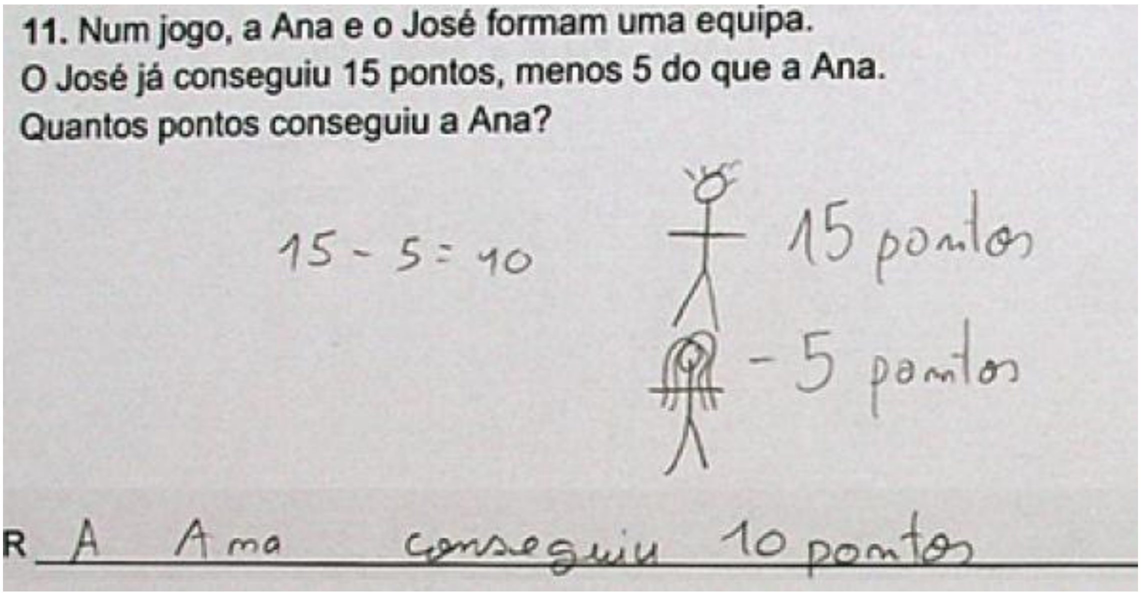


Figura 43 – Comparação (a menos) adição – (5.º ano)

Grupos equivalentes (divisão como medida)

Questão colocada aos alunos:

Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada.

Quantas equipas participam na competição?

Nesta situação, os alunos que escolheram uma operação errada optaram preferencialmente pela multiplicação. Neste caso, o total de equipas seria superior ao número de alunos, o que não faz sentido. Esta resposta pode resultar da falta de espírito crítico para analisar um resultado. Mas também pode ter havido interpretações diferentes, como o 24 ser o número dos elementos duma equipa. De qualquer forma, não encontro uma explicação como nos outros casos, pelo que esta situação fica, de certa forma, em aberto.

Situação sem operações

Questão colocada aos alunos:

O Luís está doente e tem que tomar dois medicamentos diferentes: comprimidos, de 6 em 6 horas, e cápsulas de 4 em 4 horas.

Às 11h da manhã tomou os dois medicamentos.

A que horas, nesse mesmo dia, voltou a tomar os dois medicamentos juntos?

Nesta tarefa, os alunos que aplicaram uma operação, escolheram preferencialmente a adição, com uma minoria a escolher a multiplicação. Nenhuma outra operação foi escolhida.

Ao contrário do que observei nas resoluções de outras tarefas, em que alguns tipos de resoluções se repetiam, neste caso não há um padrão de resolução quando foi aplicada alguma operação. Há duas resoluções que aparecem duas vezes: $11+6=17$ e $11+6+4=21$. Todas as outras são únicas. Alguns alunos parecem fazer várias operações aleatoriamente de modo a usar os números do enunciado. (figura 44). Creio que nesta tarefa os alunos que optaram por efetuar uma ou mais operações não analisaram realmente a situação e aplicaram uma operação porque a maioria das situações que se lhe deparam assim se resolvem. A tendência para a adição deve-se provavelmente ao facto desta ser a operação (ou o algoritmo) que (provavelmente) melhor dominam.

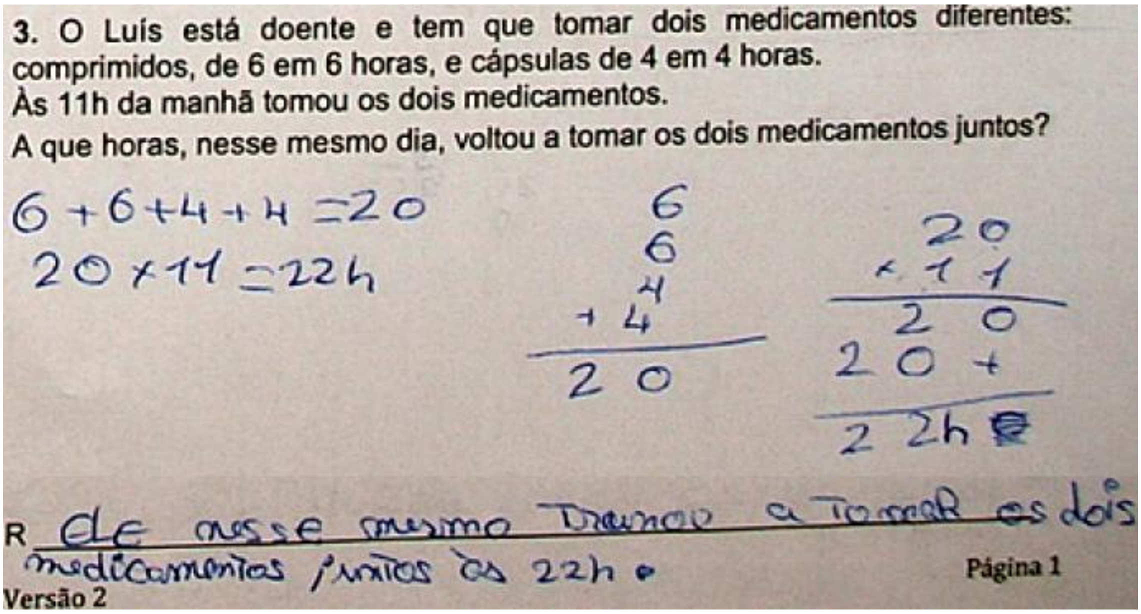


Figura 44 – Situação sem operações - (5.º ano)

3.ª Questão (conclusão)

Passo a resumir substancialmente o que já foi referido anteriormente em relação aos motivos que justificam as dificuldades apresentadas pelos alunos.

A cada operação corresponde um conjunto de situações de natureza distinta e consequente nível de dificuldade. Assim, algumas situações necessitam de um raciocínio mais exigente e naturalmente são adquiridas mais tarde do que aquelas que se podem interpretar mais facilmente. É um percurso que leva anos. Dado que as atividades nas aulas de matemática não exploram da mesma forma todas as situações, os alunos naturalmente apresentam dificuldades nas situações menos trabalhadas. A cada operação estão também associadas algumas ideias que podemos considerar, por vezes, incompletas, e que limitam o desenvolvimento integral do sentido da operação.

Concretizando o que acabei de expor, pode-se afirmar que a adição está associada a uma mudança para mais, ao contrário da subtração, associada a uma mudança para menos, tornando estes casos de mais fácil identificação do que quando as mudanças ocorrem em sentido contrário (nas respetivas operações).

A multiplicação está muito associada à ideia de adição sucessiva, mas quando isso não ocorre, os alunos têm mais dificuldade em identificá-la, como por exemplo na comparação multiplicativa e no produto cartesiano. Nesta última situação temos também supostamente uma menor exploração nas aulas de matemática.

A divisão, por sua vez, está associada ao ato de repartir, e quando isso não ocorre, surgem dificuldades. A comparação multiplicativa é um exemplo.

Como o raciocínio multiplicativo é posterior ao aditivo, os alunos têm, em geral mais dificuldades nas operações multiplicativas do que nas aditivas.

4.ª Questão

As respostas às questões anteriores poderão dar-nos indicações para melhorar a aprendizagem dos alunos?

O presente trabalho, apoiado numa consulta bibliográfica, tão extensa quanto foi possível, sugere (pois a amostra não é probabilística) que os alunos do segundo ciclo do ensino básico e do 7.º ano de escolaridade apresentam dificuldades na escolha das operações aritméticas, quando confrontados com tarefas que se resolvem aplicando alguma dessas operações. Creio que muitos professores (no qual eu estava incluído antes de realizar este trabalho) esperam que os alunos (quase) sempre escolham corretamente as operações. A questão que eu agora coloco é: Será que devemos mesmo esperar que os alunos sejam capazes de escolher a operação adequada? Estou quase tentado a dizer que não, mas vou deixar a questão em aberto. Este é um dos vários temas dos curricula escolares que os professores de matemática sabem (por experiência) que os alunos apresentam dificuldades. Há outros: as potências que são transformadas em multiplicações, o desenvolvimento dos casos notáveis da multiplicação, etc.

Quando estas dificuldades surgem repetidamente, além de outras possíveis explicações que certamente existirão, creio que duas questões se devem colocar:

1. Os temas tratados são adequados para os alunos daquele nível?
2. Será que as práticas letivas são as adequadas para a aprendizagem deste tema?

Gostava de chamar à atenção que não coloco estas duas questões como uma possível crítica negativa aos autores dos programas nem ao trabalho dos professores, mas sim numa perspetiva de que, apesar de fazermos o melhor que sabemos, o conhecimento em didática, como em outras áreas, está em constante evolução. Assim é normal que o que fazemos hoje possa ser alterado amanhã, como consequência na natural evolução do conhecimento.

Vou então discutir estas questões, agora especificamente no tema deste trabalho. Dickson, Brown e Gibson (1990) discutem as implicações para a aprendizagem dos alunos da natureza das operações, salientando, entre outros, os aspetos que vou indicar. A compreensão do sentido das operações desenvolve-se ao longo de vários anos, desde as situações mais concretas, até às mais abstratas. Este desenvolvimento é progressivo, sendo ao longo do tempo que se vai adquirindo o sentido das operações. As primeiras situações a serem aprendidas são as mais concretas, aquelas que envolvem ação, ou dinâmicas, como *juntar*, *tirar* ou *repartir*. Só depois surgem as situações mais abstratas como a *comparação* ou o fator *multiplicativo.* O que me parece significativo, segundo estes autores, é que a aprendizagem se poderá fazer sequencialmente, não apenas por operações, mas por situações (correspondentes a várias operações). Reparemos que nos três exemplos dinâmicos temos a adição, a subtração e a divisão, sendo esta última habitualmente considerada a “mais difícil”. Mas, mais difícil, será uma operação, ou algumas situações incluídas nas operações? Possivelmente estas duas perspetivas podem verificar-se. Embora, na generalidade, as operações se possam comparar em termos de dificuldade, nas situações (que surgem nas várias operações) isso também se verifica. A sequência apresentada no gráfico 5 da página 86 apoia esta ideia.

Perante a abordagem seguida neste estudo, e em consequência da análise dos dados, resultam algumas propostas para as práticas letivas nas aulas de matemática, que passo a sugerir.

Deve proporcionar-se aos alunos uma variedade de situações tão diversificada quanto possível dentro de cada operação, pois nem todas são tratadas da mesma forma. Por exemplo, "os dois maiores tipos de problemas de divisão encontrados na maioria dos manuais escolares são a partilha e a medida" (Dickson, Brown e Gibson, 1990, p 236). No caso da multiplicação, o sentido mais comum é o aditivo. "A multiplicação é assim entendida como uma adição repetida" (Loureiro, 1997, p. 15). "O sentido aditivo não esgota todo o significado da multiplicação. Aliás, dá-nos uma visão limitada da multiplicação" (Loureiro, 1997, p. 15). No artigo de onde estas citações foram retiradas, Cristina Loureiro discute o sentido combinatório da multiplicação, que corresponde ao produto cartesiano na classificação utilizada na presente tese, e defende a exploração desta interpretação, de forma a tornar mais rico o estudo da multiplicação. Assim, além do sentido mais comum de cada operação, torna-se necessário que as suas diversas interpretações sejam trabalhadas. Penso que esta sugestão é a mais realista e exequível para melhorar a aprendizagem dos alunos no sentido das operações.

Deve dar-se realce à compreensão do sentido da operação. Durante muito tempo a aprendizagem da matemática esteve associada à aprendizagem das operações, mas do ponto de vista do cálculo, com especial ênfase dada à tabuada e aos algoritmos. Como já sabemos, estes aspetos são apenas uma parte das operações. Mas esta tradição ainda não desapareceu totalmente. Trabalhar o sentido da operação antes do algoritmo pode ser uma possibilidade interessante. Os alunos deveriam ser confrontados com um número significativo de experiências antes da aprendizagem formal das operações (Carvalho e Gonçalves, 2003).

O sentido das operações poderia ser tratado por situações e não, obrigatoriamente, por operações. Esta opção poderia levar os alunos a uma aprendizagem progressiva pelo nível de dificuldade das situações e não especificamente por operações. Embora esta sugestão me pareça adequada ela poderia implicar eventuais alterações ao atual programa de matemática do ensino básico, e dado que foi recentemente ajustado, não me parece realista apelar a novas alterações.

As operações poderão ser estudadas em simultâneo. Quando as operações são estudadas isoladamente, durante essas atividades, os alunos já sabem de que operação se trata: é a que estão a estudar! É desejável desenvolver atividades que envolvam mais do que uma operação, de modo a que os alunos sejam obrigados a pensar e decidir qual é a operação que resolve cada situação. Não deixa de ser interessante que esta recomendação se encontra já no antigo programa de matemática do segundo ciclo (de 1991), no volume II, p.18.

Fuson (1992) discute evidências de que os alunos do Japão e de Taiwan têm melhor desempenho em matemática do que os alunos dos Estados Unidos. Essas diferenças parecem ser devidas às diferentes práticas nas aulas de matemática, pois enquanto nos Estados Unidos há uma tendência para uma repetição rotineira e limitada das situações colocadas aos alunos, no Japão e em Taiwan há uma verdadeira extensão das tarefas escolares ao mundo real, práticas mais diversificadas, grande ênfase às discussões e profunda análise das situações.

Em relação às recomendações anteriores, e supondo que são válidas, reconheço que a sua passagem à prática não é simples, as mudanças são quase sempre difíceis e sujeitas a resistência. Mas pouco a pouco e com realismo, temos que ir mudando para melhor. Isso parece-me indiscutível.

CAPÍTULO 5

Conclusão

5.1. O sentido da operação – desempenho e dificuldades dos alunos

Este estudo tem na sua génese uma inquietação que assalta muitos professores de matemática e que a investigação tem igualmente assinalado como uma questão complexa: de que modo os alunos optam pela realização de determinada operação, perante uma situação problemática de carácter numérico? É bem conhecida a tradicional pergunta: É de mais? É de menos? É de vezes? ... Estamos, portanto, a falar da importância de dar sentido à realização de determinada operação, isto é, do ato de compreender em que consiste usar uma operação, tanto do ponto de vista da sua estrutura como do ponto de vista da sua adequação à resolução de questões concretas.

Uma das minhas intenções foi a de ilustrar e tornar tão clara quanto possível a diversidade de sentidos que a mesma operação aritmética pode assumir em situações, à primeira vista semelhantes, mas que afinal são bem distintas quando se considera o raciocínio que as põe em ação. Assim, foram identificadas, para este trabalho, 14 possibilidades distintas para as situações aditivas (adição e subtração) e 20 possibilidades distintas para as situações multiplicativas (multiplicação e divisão). Importava-me saber qual era a resposta dos alunos face a esta variedade de situações e, além disso, perceber se era visível uma tendência para maiores dificuldades em determinados casos do que noutros. De certa maneira, tentei verificar se há adições… e adições, se há subtrações… e subtrações, em que casos os alunos "tropeçam" e o que acontece quando isso ocorre. Considerei útil detetar as dificuldades mais marcantes mas quis igualmente compreender o que sucede quando um aluno não escolhe a operação correta ou o que faz se opta por não usar explicitamente uma operação. Procurei obter uma perspetiva global sobre o sentido atribuído às operações por uma amostra de alunos de dimensão moderada, que me levasse a uma perceção satisfatória das dificuldades de compreensão das operações. Uma análise mais fina dos dados, a partir de respostas específicas, verificou-se ser muito importante para encontrar pistas acerca de possíveis focos de dificuldades. Um desses focos foi aliás antecipado, uma vez que quis ter em conta a natureza do número envolvido nas operações, ao incluir no instrumento que utilizei os números inteiros e os números decimais.

Na sequência da análise dos dados recolhidos, este trabalho permitiu-me obter algum conhecimento sobre a aprendizagem do sentido das operações, do qual irei salientar alguns pontos fundamentais.

Ficou claro que o desempenho dos alunos nas diversas situações estudadas foi variável, pois algumas apresentaram mais dificuldade (ou facilidade) do que outras. As operações aditivas são mais fáceis de interpretar do que as multiplicativas. Nas multiplicativas, três situações destacaram-se pela sua elevada dificuldade: i) a razão e ii) a comparação multiplicativa (na divisão) e iii) o produto cartesiano (na multiplicação). Em geral, mas não da mesma forma em todas as situações, há uma evolução positiva do 5.º ano para o 7.º ano de escolaridade na escolha correta da operação. Cada operação mostra ter associada a si uma interpretação comum: a adição a juntar, a subtração a retirar, a multiplicação a adicionar sucessivamente e a divisão a repartir. É, em geral, nestas situações que os alunos interpretam melhor cada situação. Por exemplo, a adição com mudança para mais, foi a que se revelou de mais fácil interpretação, enquanto que na subtração foi a mudança para menos e a comparação (a menos). As multiplicações mais fáceis de interpretar foram aquelas que correspondem a adições sucessivas mais evidentes: grupos equivalentes e disposição retangular, enquanto que na divisão foi na partilha e na medida que a identificação foi mais fácil. As situações cujas interpretações se afastam das mais comuns mostraram-se, em geral, mais difíceis de interpretar. As dificuldades apresentadas pelos alunos podem dever-se à natureza da própria situação, – pois nem todas exigem o mesmo tipo de raciocínio; o multiplicativo é mais complexo que o aditivo – mas também às práticas letivas a que os alunos são expostos. Embora as práticas de ensino não tivessem sido estudadas neste trabalho, Fuson (1992), Verschaffel (1996), De Corte (1996) e Downton (2009) defendem que algumas situações são mais trabalhadas do que outras nas aulas, o que implicará uma aprendizagem diferente pelos alunos. A natureza do número, em si, também se mostrou uma variável importante, pois ao comparar as mesmas situações com números inteiros e decimais, verifiquei que os alunos tendem a apresentar mais dificuldades com os números decimais, cuja natureza envolve mais abstração, isto é, o seu significado afasta-se mais de concretizações materiais.

Este trabalho permitiu-me explorar uma dificuldade que vinha enfrentando ao longo dos anos, como professor de matemática, e deu-me importantes pistas para compreendê-la.

O aprofundamento dos conhecimentos em didática da matemática foi evidente durante a realização desta investigação, tanto pela bibliografia consultada como pela visão um pouco diferente que passei a ter nas minhas aulas.

Uma melhor compreensão das dificuldades dos alunos e uma interpretação mais atenta e cuidada das suas respostas foi também um passo importante. Habitualmente, nós justificamos as dificuldades de aprendizagem dos alunos, atribuindo-as ao pouco trabalho e interesse destes, à indisciplina, à irresponsabilidade, etc. Esta visão tem, no caso de alguns alunos, muito de verdade; não vale a pena esconder a realidade e fazer de conta que não é assim. Mas também é verdade que há outros motivos ligados à natureza da matemática que podem explicar essas dificuldades. Simplesmente, por vezes não nos apercebemos das dificuldades, pois para nós elas não existem e nem sempre é fácil olhar para a matemática com os conhecimentos dos alunos.

Mas, como me parece normal, além da aprendizagem que me proporcionou, esta investigação levantou-me mais questões. E talvez a maior dúvida com que fiquei, no âmbito deste trabalho, seja: O que devemos esperar dos alunos? Nós, os professores, achamos que os alunos devem identificar sempre (ou quase sempre) a operação que resolve determinada questão, e ficamos surpreendidos quando isso não acontece. Provavelmente porque a maioria de nós talvez não reconheça as diferenças de natureza e, portanto, de dificuldade, das variadas situações. *Quando é que devemos esperar que um aluno adquira, por exemplo, o sentido da divisão por partilha? E por medida?* A verdade é que as dificuldades existem, como ficou evidente nos dados analisados. Será que podemos trabalhar nas aulas de matemática de uma forma mais eficiente para que essas dificuldades desapareçam? Ou será que existe realmente uma sequência ontogénica de aprendizagem que tem de ser respeitada? Em relação à primeira pergunta, creio que podemos melhorar muito. Mas até onde? Em princípio, até onde a resposta à segunda questão permitir.

5.2. Implicações para o ensino

Quero ainda discutir um aspeto que não tinha em mente na altura em que comecei a trabalhar nesta tese, mas que surgiu ao longo da sua elaboração e que me parece merecer uma reflexão: *a implicação da aprendizagem do sentido das operações em vários temas curriculares*.

Tendo em conta a literatura específica que foi revista, sempre que este tema é tratado, são apenas referidos exemplos genéricos, isto é, desligados de temas concretos dos curricula escolares. Apenas em relação ao cálculo da área do retângulo, há algumas referências ao modelo retangular. Todos os exemplos apresentados são sempre os chamados problemas de palavras. Nunca vi abordados, por exemplo, o cálculo de um perímetro, da soma de dois ângulos ou de duas áreas, temas específicos dos curricula escolares. E nunca me lembrei disso enquanto li a bibliografia que consultei. Mas lembrei-me várias vezes enquanto lecionava e via as dificuldades dos meus alunos em perceber, por exemplo, porque é que para calcular o perímetro do círculo, se tem que multiplicar o diâmetro por π. Creio que há, pelo menos, duas formas de os alunos lidarem com o perímetro de um círculo. A primeira consiste simplesmente em memorizar a forma de o calcular, o que não me parece desejável. A segunda, a pretendida, consiste em entender a relação entre o perímetro e o diâmetro do círculo e depois aplicar a multiplicação. *Qual é a situação de multiplicação neste caso?* Ou de divisão, se quisermos calcular o diâmetro a partir do perímetro? É uma comparação multiplicativa. E qual é o nível de dificuldade de identificação desta situação? Neste trabalho, recorde-se, os alunos que conseguiram identificar esta situação foram 7%, 17% e 30%, respetivamente no 5.º, 6.º e 7.º ano. É de esperar que os alunos tenham bons resultados neste tema, tendo em consideração que ele é lecionado no segundo ciclo e que, nos percursos de aprendizagem, esteja proposto no 5.º ano de escolaridade? É uma reflexão que deixo em aberto. Além disso, e ainda a propósito deste tópico em concreto, quando se introduz o perímetro do círculo, é uma estratégia habitual sugerir a medição de diâmetros e perímetros em vários círculos, de modo a que os alunos verifiquem que o perímetro é um pouco mais do que o triplo do diâmetro. Pode fazer-se a orientação desta tarefa com questões do tipo: quantas vezes o perímetro é maior que o diâmetro? E depois de encontrado esse número: se tivermos o valor do diâmetro poderemos encontrar o valor do perímetro? Ao fazer esta discussão, este ano, nas minhas aulas, verifiquei que poucos alunos conseguiram aplicar a divisão para responder à primeira questão – três ou quatro em cada turma. Porquê? Penso que a resposta pode estar no facto de se tratar de uma comparação multiplicativa, situação que se revela de elevada dificuldade de identificação. O que poderemos fazer? Ou trabalhamos no sentido dos alunos no quinto ano não apresentarem esta dificuldade, ou deveríamos adiar este tema para mais tarde. O que deixo aqui é apenas uma reflexão, evidentemente com as suas limitações, mas creio que esta é uma questão que merece ser discutida.

Escolhi este caso para exemplificar a implicação do sentido das operações em diversos temas, porque me pareceu relevante, pois incide sobre uma situação que se revela ser de elevada dificuldade, no entanto, há mais temas com necessidade da aplicação de operações. Sem ter feito uma pesquisa exaustiva, pois considero que sai do âmbito deste trabalho, apresento mais algumas situações.

- Adição e subtração de ângulos (combinação – adição e subtração). Aqui, além do sentido da operação, será também importante o sentido da medida de amplitude de um ângulo.

- Escalas (comparação multiplicativa – multiplicação e divisão).

- Perímetro de um polígono (combinação – adição e subtração).

- Área do retângulo (disposição retangular – multiplicação e divisão). Aqui, os alunos deverão também ter adquirido a noção de área (não apenas saber calculá-la), da mesma forma que noutras situações é preciso ter adquirido o sentido do número,

- Áreas por decomposição (combinação – adição e subtração).

Em cada um destes temas podem encontrar-se diversas tarefas que ampliam as situações indicadas. Quando refiro, por exemplo, "área do retângulo" não pretendo restringir as possibilidades de trabalho ao cálculo direto da área, mas também a outras tarefas envolvendo áreas como, por exemplo, determinar o lado de um retângulo usando o valor da área, daí o facto de ter indicado "multiplicação e divisão". E há obviamente mais situações que não apresento por não terem sido estudadas neste trabalho, como as operações com frações ou com potências, entre outras.

5.2. Recomendações para novos estudos

Termino com algumas considerações que apontam possibilidades de ampliar e continuar a investigação neste domínio.

Uma tese realiza-se, naturalmente, num tempo limitado. Eu fiquei com a ideia clara de que a partir dos dados que recolhi poderia, se o tempo tivesse permitido, fazer uma análise mais profunda e, possivelmente, descobrir mais informação interessante para explorar e interpretar. Também teria sido possível ir noutras direções à procura de clarificação das respostas às questões de investigação, como a seguir indico:

- Centrei o meu trabalho em três níveis diferentes de escolaridade. Mas também será interessante seguir a evolução de um grupo de alunos ao longo de vários anos.

- Estudar as práticas letivas. A observação de aulas de um conjunto de professores em temas bem identificados e em vários níveis de escolaridade será uma possibilidade a encarar, numa investigação de maior fôlego. A recolha documental será igualmente de considerar, por exemplo, consultando cadernos diários de alunos para detetar quais as situações que são mais ou menos trabalhadas. Embora não incidisse diretamente nas práticas letivas, a análise de manuais escolares também poderia ser uma via interessante.

- Estudar não apenas as situações com vários alunos, mas as várias situações com o mesmo aluno, procurando um eventual nível por aluno. O conhecimento do desempenho de um aluno, numa situação, poderá dar-nos pistas para outras situações?

- Como é que os alunos interpretam cada situação? Analisando as resoluções corretas, elaboradas com estratégias que os próprios alunos criam, talvez possamos perceber melhor como os alunos interpretam cada situação. Se estivesse agora a iniciar este estudo, creio que colocaria essa questão.

Referências

Baroody, A. J., Lai, M-L., Li, X. e Baroody, A. E. (2007). Preschoolers Understanding of the Adition-Subtraction Inverse Principle. *Mathematical Thinking and Learning*. Vol 9 (2), pp. 131-171.

Brocardo, J., Mendes, F. e Delgado, C. (s/d), *Investigando o desenvolvimento do sentido do número*. (Acedido em http://arquivo.ese.ips.pt/ese/projectos/sentidonumero/CIBEM_Comunica.pdf), Novembro de 2010).

Bryant, P. e Nunes, T. (2009). Multiplicative Reasoning and Mathematics Achievement. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol.2, pp. 217-224). Thessaloniki, Greece: PME.

Bryman, A. (2006), *Integrating quantitative and qualitative research: how is it done?* Londres: SAGE Publications.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*, Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Carvalho, A. e Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e Divisão: conceitos em construção. *Educação e Matemática*, n.º 75, p. 23. Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

Costa, C. (s/d). *Números Decimais – Problemas de multiplicação e divisão.* Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo do Ensino Básico. (Documento não publicado. Escola Superior de Educação e Comunicação de Faro).

Costa, C. (s/d). *Números Decimais.* Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo do Ensino Básico. (Documento não publicado. Escola Superior de Educação e Comunicação de Faro).

Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1990) *Children Learning Mathematics. A Teacher's Guide to Recent Research*. London: Rinehart and Winston Lda.

Downton, A. (2009). A study of comparative performance on partitive and quotitive division in solving word problems. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol.2, pp. 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Fuson, K. C. (1992) Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 243-275). New York: MacMillan Publishing.

Graeber, A. e Tirosh, D. (1990). Insights fourth and fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics*, **21**, pp. 565-588.

Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 276-295). New York: MacMillan Publishing.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J. e Turner, L. A. (2007). Toward a Definition of Mixed Methods. *Journal of Mixed Methods Research*, **1**(2), pp. 112-133.

Loureiro, C. (1997). Matemática, combinatória e desafios. *Educação e Matemática*, n.º 44, p.14. Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

Mendes, F. e Delgado, C. (2006). Sentido do número: um estudo no 1.º ciclo do ensino básico. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Eds). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (p. 147-156). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática*. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Volume II. Ensino Básico. 2.º Ciclo. Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2006). O sentido do número: o caso dos decimais e das frações. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Eds). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (p. 177-191). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Neves, J. L. (1996). Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. *Cadernos de Pesquisas em Administração*, Vol.1, N.º 3 (2.º Sem./1996), pp. 1-5.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico,* Lisboa-Porto: Lidel, Edições Técnicas Lda.

Sale, J., Lohefeld, L. e Brazil, K. (2002). Revisiting the Quantitative-Qualitative Debate: Implications for Mixed-Methods Research. *Quality and Quantity*, **36**, pp. 43-53, Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gavemeijer, K., Van Herpen, E. e Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense Publishers.

Verschaffel, L. e De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In A. J. Bishop et al (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B. e De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse, Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

ANEXOS

Anexo 1

Pedido de autorização ao Diretor da Escola

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento

José Afonso dos Reis Martins, PQND do grupo 230, no Agrupamento Vertical de Escolas D. José I de Vila Real de Santo António vem solicitar autorização para realizar recolha de dados para uma investigação nesta escola.

Encontro-me a frequentar o curso de Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências – especialidade de Matemática, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. Neste âmbito, estou a realizar investigação no tema "O sentido das Operações nos Alunos do Ensino Básico". A concretização do estudo em causa implica a recolha de dados com alunos.

Pretendo aplicar uma ficha de exercícios de matemática na turma ___ dessa escola.

Mais informo que contactei o professor da turma, e que este se mostrou disponível para a aplicação da referida ficha de exercícios.

Comprometo-me também a não divulgar a identidade dos alunos participantes garantindo a sua confidencialidade, e a utilizar a informação recolhida exclusivamente para o estudo em questão.

Local e data

Pede deferimento

____

(José Afonso dos Reis Martins)

Anexo 2

Tarefas aplicadas aos alunos – três versões

Ano ____ Idade ____

Lê com muita atenção as questões antes de responderes.
Para resolver os exercícios podes apresentar cálculos, esquemas ou explicar por palavras.
Faz como achares mais adequado, mas não apresentes apenas a resposta sem resolução.
Se usares calculadora, indica a operação que realizaste e o resultado.

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila.
Quantos lugares tem o parque?

R ____

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais.
Com que comprimento ficou cada parte?

R ____

3. De uma caixa com lápis, que se encontrava numa loja, venderam-se 15 e sobraram 10. Quantos lápis havia, inicialmente, na caixa?

R ____

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

R ____

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

R ____

6. O João foi jogar ao berlinde. Tinha 18 berlindes e ganhou 8.
Com quantos ficou?

R____

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

R ____

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

R ____

9. Uma equipa de futebol vai escolher as cores do seu equipamento novo.
Tem duas cores para os calções, e três cores para as camisolas.
Quantos equipamentos diferentes é possível escolher?

R ____

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas. Quantos CD há em cada caixa?

R ____

11. A Carla tinha uma coleção de 20 CD de música, e deu 8 ao seu primo. Com quantos CD ficou a Carla?

R ____

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada. Quantas equipas participam na competição?

R ____

Ano ____ Idade ____

Lê com muita atenção as questões antes de responderes.
Para resolver os exercícios podes apresentar cálculos, esquemas ou explicar por palavras.
Faz como achares mais adequado, mas não apresentes apenas a resposta sem resolução.
Se usares calculadora, indica a operação que realizaste e o resultado.

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila.
Quantos lugares tem o parque?

R ____

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais.
Com que comprimento ficou cada parte?

R ____

3. O Luís está doente e tem que tomar dois medicamentos diferentes: comprimidos, de 6 em 6 horas, e cápsulas de 4 em 4 horas.

Às 11h da manhã tomou os dois medicamentos.
A que horas, nesse mesmo dia, voltou a tomar os dois medicamentos juntos?

R ____

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

R ____

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

R ____

6. O Luís comprou 5 livros de uma coleção de 12.

Quantos lhe faltam para ter a coleção completa?

R ____

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

R ____

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

R ____

9. Uma fotocopiadora faz 25 cópias por minuto.
A esse ritmo, quantas cópias faz em 5 minutos?

R ____

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas. Quantos CD há em cada caixa?

R ____

11. Num jogo, a Ana e o José formam uma equipa.
A Ana já conseguiu 18 pontos e o José 15 pontos.
Quantos pontos conseguiram, em conjunto, a Ana e o José?

R ____

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada. Quantas equipas participam na competição?

R____

Ano ____ Idade ____

Lê com muita atenção as questões antes de responderes.
Para resolver os exercícios podes apresentar cálculos, esquemas ou explicar por palavras.
Faz como achares mais adequado, mas não apresentes apenas a resposta sem resolução.
Se usares calculadora, indica a operação que realizaste e o resultado.

1. Num parque de estacionamento há 12 filas com 8 lugares em cada fila. Quantos lugares tem o parque?

R ____

2. Para um jogo, uma corda de 3 metros foi cortada em 6 partes iguais. Com que comprimento ficou cada parte?

R ____

3. Num jogo de basquetebol o João conseguiu marcar 8 pontos, e o Luís marcou 20 pontos. Quantos pontos marcou o Luís a mais do que o João?

R ____

4. Numa visita de estudo foram distribuídos pelos 20 alunos de uma turma pacotes de sumo, cada um com 0,2 litros de sumo.
Quantos litros de sumo havia nos 20 pacotes?

R ____

5. Com 3 litros de sumo encheram-se garrafas de 0,5 litros cada.
Quantas garrafas se encheram?

R ____

6. O João e a Ana estão a ler o mesmo livro. O João já leu 25 páginas, enquanto a Joana leu 40. Quantas páginas leu João a menos do que a Ana?

R ____

7. O Nuno tem 12 carteiras de 4 cromos cada. Quantos cromos tem o Nuno?

R ____

8. Um farol tem 60 metros de altura e o prédio onde vive o Francisco tem 15 metros de altura. Quantas vezes o Farol é mais alto que o prédio do Francisco?

R ____

9. Uma fotocopiadora faz 30 cópias por minuto.

A esse ritmo, quanto tempo precisa para fazer 150 cópias?

R ____

10. A Joana tem 30 CD de música repartidos igualmente por 5 caixas. Quantos CD há em cada caixa?

R ____

11. Num jogo, a Ana e o José formam uma equipa.
O José já conseguiu 15 pontos, menos 5 do que a Ana.
Quantos pontos conseguiu a Ana?

R ____

12. Numa competição desportiva participam 24 alunos em equipas de 4 elementos cada. Quantas equipas participam na competição?

R____