Factorização de Funções Matriciais Racionais

Maria João Sena Morgado
Universidade do Algarve
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Área Departamental de Matemática

Outubro de 2007

t

j

m

Índice

1 Introdução **1**

2 Resultados clássicos **5**
2.1 Factorização de funções escalares 6
2.2 Factorização de funções matriciais 8
2.3 Factorização esquerda e factorização direita 9
2.4 Propriedades dos factores 11

3 Factorização de funções matriciais racionais em $\mathbb{T}$ **15**
3.1 Caso escalar 16
3.2 Caso matricial 18
3.3 Algoritmo para a factorização de funções matriciais racionais . 21
3.4 Factorização de funções matriciais racionais utilizando o "Mathematica". 24
3.4.1 Simbologia utilizada nos fluxogramas 26
3.5 Funcionamento do ficheiro "FactEsq". 27
3.6 Factorização de funções matriciais racionais com um algoritmo simplificado. 47
3.7 O ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" e seu funcionamento 49
3.8 Comparação entre os ficheiros "FactEsq" e "FactorizacaoEsqFinal". 60
3.9 Factorização de funções matriciais triangulares 2×2 70
3.10 O ficheiro "FactorizacaoDirFinal" e o seu funcionamento. . . . 74

4 Factorização de funções matriciais racionais relativas a outras circunferências e rectas **77**
4.1 Factorização de funções matriciais racionais com relação a outras circunferências 78
4.2 Factorização de funções matriciais racionais na recta real . . . 81
4.3 O ficheiro "FactorizarMatizesRacionais" 84

5 Factorização de funções matriciais racionais por realização 95
5.1 Preliminares sobre matrizes lineares 96
5.2 Realização de uma função matricial racional 97
5.3 Factorização canónica de funções matriciais racionais por realização 104

6 Anexos 121
6.1 Anexo 1 121
6.2 Anexo 2 125
6.3 Anexo 3 130
6.4 Anexo 4 134
6.5 Anexo 5 139
6.6 Anexo 6 144

Bibliografia 151

Capítulo 1

Introdução

O problema da factorização matricial surge naturalmente em diversas áreas da Matemática. Como é referido em [4], a factorização de funções matriciais desempenha um papel fundamental na resolução de equações integrais singulares, equações de Wiener-Hopf, na teoria dos operadores integrais singulares, em certas classes de operadores integrais, diferenciais e de Teoplitz. Mais recentemente, a factorização de funções matriciais tem sido utilizada na teoria de vectores holomórficos, na teoria de sistemas invariantes em tempo dinâmico e na teoria da difracção de ondas electromagnéticas e acústicas, entre outras. Além disso, é um facto bem conhecido que a factorização de funções matriciais está intimamente ligada à resolução de problemas de contorno de funções analíticas.

A teoria da factorização de matrizes tem as suas raízes no trabalho referido em [16]. Esse artigo contém uma demonstração completa da existência de factorização para funções matriciais que são analíticas num contorno. Plemelj também considerou o caso das funções que são contínuas à Hölder num contorno, mas a sua demonstração é só parcial tendo sido completada posteriormente em 1943 por N. I. Muskhelishvili e N. P. Vekua. (Veja [1])

Uma factorização da função matricial $\mathcal{G}(t) \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ relativa à circunferência unitária $\mathbb{T}$ é uma representação do tipo

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_+(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_-(t),\ t \in \mathbb{T} \tag{1.1}$$

onde os factores $\mathcal{G}_+(t)$ e $\mathcal{G}_-(t)$ são regulares e $\mathcal{G}_\pm^{\pm 1}(t)$ admitem prolongamentos analíticos no interior e exterior de $\mathbb{T}$, respectivamente, e o factor central $\Lambda(t)$ é uma função matricial diagonal da forma

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left(t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}\right)$$

e $\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., n$ tais que $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_n$ são chamados índices parciais da

factorização. É feita uma distinção entre factorização esquerda e factorização direita se trocarmos a posição dos factores $\mathcal{G}_+(t)$ e $\mathcal{G}_-(t)$.

Nos primeiros anos, a teoria desenvolveu-se essencialmente para funções de Hölder mas houve necessidade de modificar a noção de factorização, tendo Simonenko introduzido o conceito de factorização generalizada em $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Não existe um método geral que permita a obtenção da factorização de qualquer função matricial. Têm sido feitos progressos para algumas classes de funções matriciais sendo a classe mais estudada a das funções matriciais racionais. Em 1952 foi proposto por F. D. Gakhov um algoritmo de factorização para estas matrizes. Para as funções matriciais racionais regulares na circunferência unitária, o problema da factorização pode resumir-se ao problema da factorização de funções matriciais polinomiais. Um algoritmo iterativo para construção da factorização de uma função matricial racional factorizável é descrito, por exemplo, em [4], [9] ou [13].

Dado que até para funções matriciais racionais muito simples a obtenção da sua factorização é um processo moroso e que envolve muitos cálculos, o principal objectivo desta tese foi a construção de um programa informático que determinasse a factorização de uma função matricial da referida classe. Assim, na base do algoritmo descrito em [9], construiu-se um ficheiro na linguagem de programação do pacote informático "Mathematica" que solicita ao utilizador a introdução da função matricial a factorizar e tem como resposta os termos daquela decomposição multiplicativa. O programa informático construído é apresentado no capítulo 3 deste trabalho. Em anexo ao documento da tese é entregue um CD que contém todos os ficheiros informáticos elaborados no âmbito deste trabalho.

Mais recentemente (veja o capítulo 4 de [9]) foi proposto um método alternativo para a construção de uma factorização de uma função matricial racional o qual se baseia na utilização de fórmulas explícitas e difere substancialmente do processo de F. D. Gakhov por não ser iterativo. Este método assenta no pressuposto de que qualquer função matricial racional quadrada $n \times n$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}. \tag{1.2}$$

Esta representação é designada por uma realização e permite reduzir o problema da factorização de $\mathcal{F}(x)$ a um problema de Álgebra Linear envolvendo as quatro matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{I}$ representa a identidade de ordem n. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ são matrizes quadradas de ordem m e as matrizes $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são do tipo $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente. O estudo deste método é feito no capítulo 5.

A tese encontra-se estruturada da seguinte forma.

No capítulo 2 são estabelecidas as notações que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Está dividido em quatro secções. As duas primeiras apresentam a definição de factorização de uma função escalar e de uma função matricial bem como os resultados principais relacionados com aquelas definições. Nas seguintes secções é feita a distinção entre factorização esquerda e factorização direita e são enunciados os teoremas que estabelecem as relações entre estes dois tipos de factorização de uma função matricial. É, ainda, demonstrada a unicidade dos índices parcias.

No terceiro capítulo é feito o estudo da factorização das funções matriciais racionais. As duas primeiras secções descrevem um método para a obtenção de uma factorização para funções racionais nos casos escalar e matricial, respectivamente. Na secção 3.3 é proposto um algoritmo construído a partir processo descrito na secção 3.2. Em 3.4 é apresentado um ficheiro informático que permite obter os três termos da factorização de funções matriciais racionais e em 3.5 é explicado o funcionamento desse ficheiro com recurso a um conjunto de fluxogramas. Em seguida, é proposta uma simplificação do algoritmo utilizado e elaborado um novo ficheiro informático, na secção 3.6. A explicação do funcionamento deste ficheiro é feita em 3.7. Na secção seguinte são comparados os dois ficheiros informáticos salientando-se as vantagens da simplificação proposta. A secção 3.9 é dedicada ao estudo das funções matriciais triangulares de ordem 2×2 contínuas à Hölder cujos elementos diagonais são funções regulares. O interesse deste estudo prende-se com o facto de ser possível reduzir o problema da factorização daquelas funções matriciais à factorização de uma função matricial racional já estudado nas secções anteriores. A última secção apresenta um ficheiro informático que permite obter factorizações direitas de funções matriciais racionais.

Refira-se que na construção de todos os ficheiros informáticos apresentados neste trabalho foi de grande importância a consulta dos livros [3] e [19].

O capítulo 4 contém dois exemplos de factorizações de funções matriciais racionais. O primeiro exemplo descreve uma factorização relativa a circunferências diferentes da unitária e o segundo diz respeito a uma factorização relativa à recta real. A partir dos ficheiros informáticos construídos para a determinação de uma factorização de uma função matricial racional relativamente à circunferência unitária $\mathbb{T}$, foi elaborado um ficheiro informático que permite obter uma factorização relativa a uma circunferência $|t - z_0| = r$, $t \in \mathbb{C}$ onde o complexo z_0 representa o centro da circunferência e o real r o seu raio. Isto foi conseguido procedendo a uma simples mudança de variável que transforma a circunferência $\mathbb{T}$, noutra circunferência.

Foi também construído um ficheiro informático para a determinação de

uma factorização de uma função matricial racional relativamente à recta real.

Na secção 4.3 é apresentado um ficheiro informático que resulta da junção de todos os programas que foram construídos no âmbito da tese. Este novo programa é interactivo pois utiliza caixas de diálogo para conduzir o utilizador na sua aplicação. Começa por solicitar a introdução da matriz que se pretende factorizar e depois permite optar entre uma factorização esquerda ou uma factorização direita. Em seguida o utilizador pode escolher se a factorização deverá ser relativa à circunferência unitária, a outra circunferência ou à recta real.

Como já foi refeido, o capítulo 5 dedica-se ao estudo da factorização de funções matriciais racionais por realização. A par do estudo teórico, é apresentado um exemplo simples de uma função matricial racional decomposta por realização e, em seguida, procede-se à sua factorização.

Para compreensão do método exposto no capítulo 5 foi necessário estudar alguns tópicos de Álgebra Linear, Análise Complexa e Teoria de Operadores. Deste modo precisei de consultar os livros [12], [14] e [18].

O sexto capítulo é constituído pelos anexos. Nele são apresentados os seis ficheiros informáticos que são referidos no texto da tese e que podem ser encontrados no CD que a acompanha.

Para estruturação e organização deste trabalho consultei os documentos provisórios para a obtenção dos grau de Mestre e Doutor em Matemática, respectivamente, referidos em [1], [7] e [17].

Capítulo 2

Resultados clássicos

O primeiro capítulo deste trabalho é dedicado à apresentação dos resultados clássicos da **Teoria da Factorização de Funções Matriciais** relativamente à circunferência unitária $\mathbb{T}$**.**

Note-se que de modo geral, as definições estabelecidas para a circunferênia unitária $\mathbb{T}$, podem ser generalizadas para qualquer curva Γ, fechada e limitada no plano complexo $\mathbb{C}$. Neste trabalho, será dada especial atenção à factorização de funções matriciais racionais relativas à circunferência unitária $\mathbb{T}$, porém, no capítulo 4 serão propostas algumas generalizações considerando outras circunferências, com diferentes centros e raios. Será, ainda, feita uma abordagem à factorização em relação à recta real.

Neste capítulo são introduzidas algumas notações e questões de linguagem que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho.

A primeira secção é dedicada à noção de factorização de uma função escalar e, posteriormente, chegaremos à definição de factorização de uma função matricial, na secção seguinte, sendo estudadas as principais propriedades da factorização e abordadas as condições para a sua existência.

Em seguida, na secção 2.3, introduziremos a diferença entre as factorizações esquerda e direita, apresentando dois teoremas que estabelecem as relação entre elas.

Na secção 2.4 serão discutidas algumas propriedades dos termos da factorização sendo dado particular ênfase à unicidade dos índices parciais.

Os resultados enunciados neste capítulo fazem parte dos livros [4], [6], [9], [11] e [13].

2.1 Factorização de funções escalares

Como é usual, consideraremos neste trabalho que $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ representa a círcunferência unitária, a qual divide o plano complexo em duas partes, $\mathbb{T}_{\pm}$: o interior e o exterior da circunferência $\mathbb{T}$, respectivamente. O primeiro conjunto referido é limitado e será definido por $\mathbb{T}_{+} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. A região ilimitada do plano complexo será definida por $\mathbb{T}_{-} = \{t \in \mathbb{C} : |t| > 1\}$.

$C(\mathbb{T})$ designa o conjunto das funções contínuas na circunferência unitária $\mathbb{T}$. Por $C_{\pm}(\mathbb{T})$ entenderemos os subconjuntos de $C(\mathbb{T})$ das funções contínuas que admitem prolongamentos analíticos em $\mathbb{T} \cup \mathbb{T}_{\pm}$, respectivamente. Como se sabe (veja [8]), o conjunto $C(\mathbb{T})$ munido das operações algébricas usuais e da norma

$$\|a\|_{\infty} = \max_{t \in \mathbb{T}} |a(t)|,$$

torna-se uma álgebra de Banach de funções contínuas em $\mathbb{T}$.

Tendo em conta estas notações, estamos em condições para estabelecer a definição de factorização de uma função escalar.

Definição 1 *Seja $a(t) \in C(\mathbb{T})$ e $a(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Diz-se que a admite factorização em $C(\mathbb{T})$ se puder ser escrita como um produto de três factores*

$$a(t) = a_{+}(t)\, t^{\kappa} a_{-}(t),\ t \in \mathbb{T} \tag{2.1}$$

onde

$$a_{\pm}(t) \in C_{\pm}(\mathbb{T}),$$
$$\kappa = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$$

e

$$a_{\pm}(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{T}_{\pm}.$$

$\operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ *designa o índice da função a, isto é, o número de vezes que a curva definida pela imagem da função a contorna a origem tendo em conta o sentido positivo.*

Como se sabe, se a função a admite um prolongamento contínuo em $\mathbb{T}_{+}$ e é analítica em $\mathbb{T}_{+}$ com excepção para um número finito de polos, então, temos

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t) = n_{+} - p_{+} = n_{-} - p_{-},$$

onde $n_{\pm}$ representa o número de zeros no interior (e, respectivamente, exterior) de $\mathbb{T}$ e $p_{\pm}$ representa o número de polos no interior (e, respectivamente, exterior) de $\mathbb{T}$. No cálculo de $n_{\pm}$ e $p_{\pm}$ é necessário ter em conta a sua multiplicidade.

Note-se que no caso $\kappa = 0$ temos

$$a(t) = a_{+}(t)\, a_{-}(t)$$

e esta decomposição é chamada factorização canónica.

Como se sabe, (veja, por exemplo, [11]) nem todas as funções contínuas são factorizáveis de acordo com a definição 1.

De seguida, consideraremos as funções contínuas à Hölder que formam uma álgebra de funções contínuas.

A definição de condição de Hölder, no ponto t, com expoente μ é enunciada a seguir.

Definição 2 *Seja $a(t)$ uma função complexa definida em $\mathbb{T}$ e $\mu \in (0,1)$. A função $a(t)$ é contínua à Hölder no ponto $t \in \mathbb{T}$ com expoente μ se*

$$\exists_{A \in \mathbb{R}^+} : |a(t_1) - a(t)| \leq A\,|t_1 - t|^{\mu}\,, \qquad \forall_{t_1, t \in \mathbb{T} \ e \ \mu \in (0,1)}. \tag{2.2}$$

Definição 3 *Se a função $a\,(t)$ satisfaz a condição de Hölder em todos os pontos de $\mathbb{T}$, com expoente μ e com a mesma constante A, diz-se que $a\,(t)$ é contínua à Hölder com expoente μ em $\mathbb{T}$.*

Definição 4 *A álgebra de funções contínuas à Hölder, $H^{\mu}(\mathbb{T})$ com $\mu \in (0,1)$, representa a álgebra das funções contínuas que satisfazem a condição de Hölder com expoente $\mu \in (0,1)$ na circunferência unitária $\mathbb{T}$. A norma associada a esta álgebra é:*

$$\|a\|_{H^{\mu}(\mathbb{T})} = \|a\|_{\infty} + \sup_{\substack{t_1, t \in \mathbb{T} \\ t_1 \neq t}} \frac{|a(t_1) - a(t)|}{|t_1 - t|^{\mu}} \tag{2.3}$$

As funções $a \in H^{\mu}(\mathbb{T})$ que satisfazem a condição de Hölder são sempre funções contínuas e, portanto, $H^{\mu}(\mathbb{T})$ é um subconjunto de $C(\mathbb{T})$. Dizemos que é um subconjunto e não uma subálgebra porque a estes conjuntos estão associadas diferentes normas.

$R\,(\mathbb{T})$ que representa o conjunto das funções racionais sem polos na circunferência unitária. $R_{\pm}\,(\mathbb{T})$ são os subconjuntos de $R\,(\mathbb{T})$ que admitem prolongamentos analíticos respectivamente ao interior e exterior de $\mathbb{T}$.

É claro que $H^{\mu}(\mathbb{T})$ contém $R\,(\mathbb{T})$ e goza da propriedade da invertibilidade em $C\,(\mathbb{T})$, isto é, toda a função contínua de $H^{\mu}(\mathbb{T})$, não nula em $\mathbb{T}$, admite inversa também contínua em $H^{\mu}(\mathbb{T})$. A existência de uma factorização para as funções que são elementos de $H^{\mu}(\mathbb{T})$ é garantida pelo teorema seguinte cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [2].

Teorema 1 *Toda a função $a \in H^{\mu}(\mathbb{T})$, $\mu \in (0,1)$, regular em $\mathbb{T}$, admite a factorização (2.1), isto é,*

$$a\,(t) = a_{+}\,(t)\,t^{\kappa} a_{-}\,(t)$$

com os factores $a_{\pm}\,(t) \in H^{\mu}_{\pm}\,(\mathbb{T})$, $\kappa = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a\,(t)$ e $a_{\pm}\,(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}_{\pm}$.

2.2 Factorização de funções matriciais

Nesta secção será introduzido o conceito de factorização matricial o que constitui uma generalização da noção de factorização no caso escalar. Vamos agora considerar o conjunto $C^{n\times n}(\mathbb{T})$ das matrizes quadradas de dimensão n cujas entradas são funções pertencentes a $C(\mathbb{T})$.

Definição 5 *Seja $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial regular em $\mathbb{T}$. Uma factorização (esquerda) de $\mathcal{G}$ relativa à circunferência unitária $\mathbb{T}$ é uma representação do tipo*

$$\mathcal{G}(t)=\mathcal{G}_+(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_-(t),\ t\in\mathbb{T} \tag{2.4}$$

onde

$$\mathcal{G}_+^{\pm 1}(t) \in C_+^{n\times n}(\mathbb{T}), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{G}_-^{\pm 1}(t) \in C_-^{n\times n}(\mathbb{T}), \tag{2.6}$$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\kappa_1},...,t^{\kappa_n}\right] \tag{2.7}$$

e $\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,...,n$ tais que $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_n$. Os mesmos estão determinados de modo único pela função matricial $\mathcal{G}$ (veja teorema 6).

Definição 6 *Na factorização (2.4) de $\mathcal{G} \in C^{n\times n}$, os inteiros κ_i do factor (2.7) são designados por índices da factorização da função matricial $\mathcal{G}$ ou índices parciais de $\mathcal{G}$.*

Definição 7 *A soma dos índices parciais de $\mathcal{G}$*

$$\kappa = \operatorname*{ind}_{\mathbb{T}} \mathcal{G}(t) = \kappa_1 + ... + \kappa_n \tag{2.8}$$

será definida como o índice total de $\mathcal{G}$.

Proposição 1 *Se $\mathcal{G}$ admite uma factorização em $C^{n\times n}(\mathbb{T})$, então,*

$$\operatorname*{ind}_{\mathbb{T}} \mathcal{G}(t) = \operatorname*{ind}_{\mathbb{T}} \det \mathcal{G}(t).$$

No caso escalar da factorização existe apenas um índice parcial e, consequentemente, é coincidente com o índice total.

Definição 8 *Se $\mathcal{G}$ admite uma factorização em $C(\mathbb{T})$ e os índices parciais são todos nulos*

$$\kappa_1 = ... = \kappa_n = 0,$$

diz-se que a factorização de $\mathcal{G}$ é canónica. Neste caso o factor central é a matriz identidade de ordem n.

Importa referir aqui que as funções matriciais racionais, regulares em $\mathbb{T}$, admitem sempre a factorização (2.4). Esta classe de funções matriciais será estudada em pormenor no capítulo 3, com a apresentação de um algoritmo que permite encontrar uma factorização explícita para qualquer função matricial racional.

Por $[H^{\mu}(\mathbb{T})]^{n\times n}$ será denotada a álgebra das funções matriciais cujas entradas satisfazem a condição (2.2).

Tendo isto em conta é válido o seguinte teorema que constitui uma generalização do teorema 1 ao caso matricial.

Teorema 2 *Seja $\mathcal{G} \in [H^{\mu}(\mathbb{T})]^{n\times n}$ uma função matricial contínua à Hölder tal que $\det \mathcal{G}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$. Então, é sempre possível obter a factorização*

$$\mathcal{G}(t)=\mathcal{G}_{+}(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_{-}(t)$$

onde

$$\mathcal{G}_{+}^{\pm 1} \in [H_{+}^{\mu}(\mathbb{T})]^{n\times n}$$

$$\mathcal{G}_{-}^{\pm 1} \in [H_{-}^{\mu}(\mathbb{T})]^{n\times n}.$$

2.3 Factorização esquerda e factorização direita

A factorização (2.4) é usualmente referida como factorização esquerda da função matricial $\mathcal{G}$. Além deste conceito é ainda possível considerar a noção de factorização direita que a seguir se define:

Definição 9 *Seja $\mathcal{G} \in C^{n\times n}$ uma função matricial regular em $\mathbb{T}$. Uma factorização direita de $\mathcal{G}$ relativa à curva $\mathbb{T}$ é uma representação do tipo*

$$\mathcal{G}(t)= \mathcal{F}_{-}(t)\Lambda(t)\mathcal{F}_{+}(t),\ t \in \mathbb{T} \tag{2.9}$$

onde

$$\mathcal{F}_{+}^{\pm 1}(t) \in C_{+}^{n\times n}(\mathbb{T}), \tag{2.10}$$

$$\mathcal{F}_{-}^{\pm 1}(t) \in C_{-}^{n\times n}(\mathbb{T}), \tag{2.11}$$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\mu_1}, ..., t^{\mu_n}\right] \tag{2.12}$$

e $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., n$ tais que $\mu_1 \geq ... \geq \mu_n$.

Se estivermos a considerar ambas as factorizações, esquerda e direita, é necessário distinguir entre os índices parciais esquerdos e direitos, respectivamente. De um modo geral, os índices parciais esquerdos e direitos não coincidem, como se pode ver no exemplo seguinte, apresentado em [13].

Exemplo 1 *Seja* $\mathcal{G}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. *Então,*

$$\mathcal{G}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

e

$$\mathcal{G}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

são, respectivamente, factorizações esquerda e direita de $\mathcal{G}$. *Aqui, os índices parciais esquerdos indicados em (2.13) (*$\kappa_1 = 1$ *e* $\kappa_2 = -1$*) não coincidem com os índices parciais direitos indicados em (2.14) (*$\mu_1 = \mu_2 = 0$*).*

Considerando os índices parciais esquedos da factorização (2.4) e os índices parciais direitos da factorização (2.9) é fácil verificar, seguindo as ideias da proposição 1, que as somas $\kappa_1 + ... + \kappa_n$ e $\mu_1 + ... + \mu_n$ são ambas iguais ao índice total da matriz de funções $\mathcal{G}$. Então, sempre que existem ambas as factorizações (2.4) e (2.9) para uma função matricial $\mathcal{G}$ em $C(\mathbb{T})$, os índices parciais esquerdos e direitos cumprem a condição:

$$\kappa_1 + ... + \kappa_n = \mu_1 + ... + \mu_n = \operatorname*{ind}_{\mathbb{T}} \mathcal{G}(t) \tag{2.15}$$

Recentemente, em [5], foi provado que a relação (2.15) é, de facto, a única existente entre os conjuntos de índices parciais esquerdos e direitos. No referido trabalho podemos encontrar o seguinte teorema:

Teorema 3 *Sejam* $\kappa = \{\kappa_1, ..., \kappa_n\}$ *e* $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ *dois quaisquer conjuntos formados por n números inteiros que satisfazem a condição (2.15). Então existe um função matricial racional,* $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$*, para a qual* κ *e* μ *são, respectivamente, os conjuntos de índices parciais esquerdos e direitos.*

De seguida, serão enunciados dois teoremas que estabelecem algumas relações existentes entre as factorizações esquerda e direita.

Teorema 4 *A factorização esquerda de uma função matricial* $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$*, é equivalente à factorização direita da matriz transposta de* $\mathcal{G}$. *E, de modo análogo, a factorização direita de uma função matricial* $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ *é equivalente à factorização esquerda da matriz transposta de* $\mathcal{G}$.

Demonstração: Consideremos uma função matricial $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$. Se $\mathcal{G}$ se pode escrever como em (2.4), então, transpondo ambas as partes da igualdade obteremos

$$\mathcal{G}^T(t) = \mathcal{G}_-^T(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_+^T(t).$$

De modo análogo, temos

$$\mathcal{G}^T(t) = \mathcal{G}_+^T(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_-^T(t).$$

Evidentemente $\mathcal{G}_\pm^T \in C_\pm(\mathbb{T})$ se e só se $\mathcal{G}_\pm \in C_\pm(\mathbb{T})$. ■

Teorema 5 *A factorização esquerda de uma função matricial $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$, é equivalente à factorização direita da matriz inversa de $\mathcal{G}$. E, de modo análogo, a factorização direita de uma função matricial $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$, é equivalente à factorização esquerda da matriz inversa de $\mathcal{G}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial que admite a factorização (2.4). Se invertermos ambos os membros da igualdade temos a seguinte representação:

$$\mathcal{G}^{-1}(t) = \mathcal{G}_-^{-1}(t)\Lambda^{-1}(t)\mathcal{G}_+^{-1}(t).$$

É claro que também é válida a igualdade:

$$\mathcal{G}^{-1}(t) = \mathcal{G}_+^{-1}(t)\Lambda^{-1}(t)\mathcal{G}_-^{-1}(t)$$

no caso de $\mathcal{G}$ admitir uma factorização direita. Obviamente, $\mathcal{G}_\pm^{-1} \in C_\pm(\mathbb{T})$ se e só se $\mathcal{G}_\pm \in C_\pm(\mathbb{T})$. ■

Os resultados anteriores mostram que a partir da factorização direita de uma função matricial $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ é possível obter uma factorização esquerda de $\mathcal{G}^{-1}$ e vice-versa.

Refira-se que no caso escalar ($n = 1$), para uma função $a \in C(\mathbb{T})$, a única diferença existente entre factorização esquerda e factorização direita diz respeito à ordem de apresentação dos factores (propriedade comutativa).

2.4 Propriedades dos factores

O factor central Λ introduzido na definição 5 é diagonal e tem a forma mencionada em (2.7). Consideremos o seguinte teorema, referido em [4], que estabelece a sua unicidade e, portanto, a unicidade dos índices parciais.

Teorema 6 *Seja $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$, uma função matricial que admite duas factorizações $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_-^{(1)}(t)\Lambda(t)\,\mathcal{G}_+^{(1)}(t) = \mathcal{G}_-^{(2)}(t)\widetilde{\Lambda}(t)\,\mathcal{G}_+^{(2)}$, em relação à circunferência unitária $\mathbb{T}$, onde Λ e $\widetilde{\Lambda}$ são funções matriciais diagonais da forma (2.7). Então,*

$$\Lambda(t) = \widetilde{\Lambda}(t).$$

Demonstração: Consideremos duas matrizes diagonais Λ e $\widetilde{\Lambda}$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\kappa_1}, ..., t^{\kappa_n}\right]$$

e

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \operatorname{diag}\left[t^{\widetilde{\kappa}_1}, ..., t^{\widetilde{\kappa}_n}\right]$$

com as propriedades $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_n$ e $\widetilde{\kappa}_1 \geq ... \geq \widetilde{\kappa}_n$, respectivamente.

Partindo da igualdade entre as duas factorizações

$$\mathcal{G}_-^{(1)}(t)\Lambda(t)\,\mathcal{G}_+^{(1)}(t) = \mathcal{G}_-^{(2)}(t)\widetilde{\Lambda}(t)\,(t)\,\mathcal{G}_+^{(2)}(t)$$

e multiplicando ambos os membros da igualdade, à esquerda por $\left(\mathcal{G}_-^{(2)}\right)^{-1}$ e à direita por $\left(\mathcal{G}_+^{(1)}\right)^{-1}$ podemos escrever:

$$\mathcal{H}_-(t)\Lambda(t) = \widetilde{\Lambda}(t)\,\mathcal{H}_+(t) \tag{2.16}$$

onde

$$\mathcal{H}_-(t) = \left(\mathcal{G}_-^{(2)}(t)\right)^{-1}\mathcal{G}_-^{(1)}(t)$$

e

$$\mathcal{H}_+(t) = \mathcal{G}_+^{(2)}(t)\left(\mathcal{G}_+^{(1)}(t)\right)^{-1}.$$

Vamos assumir que para um determinado p $(1 \leq p \leq n)$ temos $\widetilde{\kappa}_p > \kappa_p$ (o caso $\kappa_p > \widetilde{\kappa}_p$ pode ser demonstrado de modo idêntico). Das relações

$$\begin{array}{rcl} \kappa_1 & \geq & \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_{p-1} \geq \kappa_p \geq \kappa_{p+1} \geq ... \geq \kappa_n \ \wedge \\ \widetilde{\kappa}_1 & \geq & \widetilde{\kappa}_2 \geq ... \geq \widetilde{\kappa}_{p-1} \geq \widetilde{\kappa}_p \geq \widetilde{\kappa}_{p+1} \geq ... \geq \widetilde{\kappa}_n \end{array}$$

obtemos

$$\widetilde{\kappa}_i - \kappa_j > 0, \;\; i = 1, 2, ..., p; \quad j = p, p+1, ..., n. \tag{2.17}$$

Da igualdade (2.16) vem que:

$$t^{\kappa_j}\mathcal{H}_{ij}^-(t) = \mathcal{H}_{ij}^+(t)\,t^{\widetilde{\kappa}_i},$$

onde $\mathcal{H}_{ij}^{\pm}$ são, respectivamente, as entradas de $\mathcal{H}_{\pm}$. É claro que

$$\mathcal{H}_{ij}^{-}(t) = \mathcal{H}_{ij}^{+}(t)\, t^{\widetilde{\kappa}_i - \kappa_j},$$

e, tendo em conta [6], da relação (2.17) podemos concluir que

$$\mathcal{H}_{ij}^{-}(t) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p; \quad j = p, p+1, ..., n.$$

A matriz $\mathcal{H}_{-}$ pode ser escrita por blocos da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_{-}(t) = \begin{pmatrix} & \overbrace{}^{p-1} & \overbrace{}^{n-p+1} \\ p\{ & * & 0 \\ n-p\{ & * & * \end{pmatrix}.$$

É claro que o envólucro convexo das últimas $n-p+1$ colunas de $\mathcal{H}_{-}$ tem quando muito dimensão $n-p$, ou seja, temos quando muito $n-p$ colunas linearmente independentes. O bloco formado pelas $p-1$ primeiras colunas tem quando muito $p-1$ colunas linearmente independentes. Logo, as colunas de $\mathcal{H}_{-}$ são linearmente dependentes. Isto implica que $\det \mathcal{H}_{-}(t) = 0$ o que contadriz a hipótese inicial. Portanto, $\widetilde{\kappa}_p = \kappa_p,\ p = 1, 2, ..., n$. A demonstração do teorema está assim completa. ■

Sob estas condições, o teorema seguinte descreve todas as factorizações que se podem obter para uma matriz de funções $\mathcal{G}$, a partir de uma factorização dada (veja [4]).

Teorema 7 *Seja $\mathcal{G} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial regular que admite duas factorizações esquerdas em $C(\mathbb{T})$, digamos*

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_{-}^{(1)}(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_{+}^{(1)}(t) = \mathcal{G}_{-}^{(2)}(t)\Lambda(t)\mathcal{G}_{+}^{(2)}(t) \tag{2.18}$$

então,

$$\mathcal{G}_{+}^{(2)}(t) = \mathcal{H}_{+}(t)\mathcal{G}_{+}^{(1)}(t) \ \text{ e } \ \mathcal{G}_{-}^{(2)}(t) = \mathcal{G}_{-}^{(1)}(t)\Lambda(t)\mathcal{H}_{+}^{-1}(t)\Lambda^{-1}(t) \tag{2.19}$$

onde $\mathcal{H}_{+} \in C^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial regular cujas entradas satisfazem as condições:

1. $\mathcal{H}_{i,j} = 0$ *se* $\kappa_j < \kappa_i$
2. $\mathcal{H}_{i,j}$ *é constante se* $\kappa_j = \kappa_i$
3. $\mathcal{H}_{i,j}$ *é polinomial de grau inferior ou igual* $\kappa_j - \kappa_i$ *se* $\kappa_j > \kappa_i$.

Além disso, se as entradas de $\mathcal{H}_{+}$ satisfazem as condições 1 a 3, todas as factorizações de $\mathcal{G}$ em $C(\mathbb{T})$ podem ser obtidas pelas fórmulas (2.19).

Demonstração: Suponhamos que a matriz $\mathcal{G}$ admite duas factorizações esquerdas. Partindo da igualdade entre as duas factorizações, tal como na demonstração do teorema anterior, temos:

$$\mathcal{H}_-(t)\Lambda(t) = \Lambda(t)\,\mathcal{H}_+(t) \tag{2.20}$$

onde,

$$\mathcal{H}_-(t) = \left(\mathcal{G}_-^{(2)}(t)\right)^{-1}\mathcal{G}_-^{(1)}(t)$$

e

$$\mathcal{H}_+(t) = \mathcal{G}_+^{(2)}(t)\left(\mathcal{G}_+^{(1)}(t)\right)^{-1}$$

A igualdade (2.20) implica

$$\mathcal{H}_{i,j}^+(t) = t^{\kappa_j-\kappa_i}\mathcal{H}_{i,j}^-(t).$$

Então, tendo em conta [6], as propriedades 1, 2 e 3 das entradas de $\mathcal{H}$ deduzem-se imediatamente. Consideremos a função matricial $\mathcal{H}_+$, gozando das três propriedades referidas, escrita por blocos

$$\mathcal{H}_+(t) = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & Q_m \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_+(t)$ é uma matriz triangular inferior por blocos, em que os blocos $Q_1, ..., Q_m$ são matrizes regulares constantes. Os blocos identificados por $*$ são matrizes polinomiais. Então, o determinante de $\mathcal{H}_+$ é o produto dos determinantes dos blocos da diagonal e é constante:

$$\det \mathcal{H}_+(t) = \det Q_1 ... \det Q_m.$$

A última afirmação do teorema é agora fácil de verificar e está completa a demonstração. ■

Refira-se ainda que no caso mais simples, onde os índices da factorização são coincidentes (em particular, para a factorização canónica), $\mathcal{H}$ é simplesmente uma matriz constante e invertível.

Capítulo 3

Factorização de funções matriciais racionais em $\mathbb{T}$

Este capítulo é dedicado ao estudo da classe de funções matriciais racionais que designaremos por $R^{n\times n}(\mathbb{T})$. Nas duas primeiras secções serão apresentados os algoritmos que permitem obter os vários termos da factorização de funções racionais relativamente à circunferência unitária $\mathbb{T}$ nos casos escalar e matricial, respectivamente. Este estudo pode ser encontrado, por exemplo, em [9].

Dado que o referido processo de factorização é iterativo e muito trabalhoso, até mesmo para exemplos simples e com poucas iterações, o principal objectivo deste trabalho foi a construção de um programa informático que permitisse obter a factorização de funções matriciais racionais evitando cálculos muito morosos.

O software escolhido para a elaboração do referido algoritmo foi o programa "**Mathematica".** Este, é uma ferramenta muito adequada para a realização de cálculos matemáticos avançados, permite trabalhar simultaneamente com expressões numéricas e expressões simbólicas e é bastante acessível para o utilizador.

Começou-se pela estruturação em passos do algoritmo para a factorização de funções matriciais racionais referido em [9], os quais foram depois convertidos para linguagem de programação, na secção 3.3.

Na secção 3.4 deste capítulo é mencionado um ficheiro informático que permite obter a factorização esquerda de funções matriciais racionais em relação à circunferência unitária $\mathbb{T}$ e a explicação do seu funcionamento é feita com recurso a um conjunto de fluxogramas (também designados por diagramas de fluxo) na secção 3.5. O conjunto de instruções que formam esse ficheiro é apresentado, em anexo, no capítulo 6, na secção 6.1.

Em seguida, é proposta uma simplificação do algoritmo já mencionado e

desta simplificação resultou um outro ficheiro informático que é referido neste capítulo, em 3.6 (a apresentação dos comandos informáticos que o constituem é feita na secção 6.2 do capítulo 6). Em 3.7 é explicado o funcionamento deste novo ficheiro. A comparação entre os dois programas é feita através de um exemplo que ilustra as vantagens daquela simplificação e é apresentada na secção 3.8.

A secção 3.9 apresenta o caso particular das funções matriciais triangulares 2×2 cujas entradas pertencem a $H^{\mu}(\mathbb{T})$ com elementos regulares na diagonal principal. A inclusão desta classe de funções neste capítulo justifica-se pelo facto da sua factorização poder reduzir-se ao problema da factorização de funções matriciais racionais que está a ser tratado.

Na última secção do capítulo é referido um ficheiro informático que permite obter a factorização direita de uma função matricial racional em relação a $\mathbb{T}$. Este ficheiro é apresentado no anexo 6.3 do capítulo 6.

Comecemos então pelo estudo teórico da factorização de funções racionais.

3.1 Caso escalar

Antes de analisarmos a factorização de funções matriciais racionais comecemos por considerar uma função racional escalar r. Vamos assumir que r não tem polos nem raízes na circunferência unitária. Representemos r como o quociente de duas funções polinomiais,

$$r = \frac{f}{g}.$$

É claro que tanto f como g não terão raízes em $\mathbb{T}$. Assim, podemos considerar as factorizações de f e de g separadamente. A factorização de r será obtida pela divisão, termo a termo, das factorizações de f e de g. Vamos, então ver como é possível obter a factorização de um polinómio f sem raízes em $\mathbb{T}$.

Proposição 2 *Se a_1, a_2, ..., a_m são as raízes de um polinómio f em $\mathbb{T}_+$, tendo em conta a sua multiplicidade, a factorização*

$$f(t) = f_+(t)\, t^{\kappa} f_-(t),\ t \in \mathbb{T} \tag{3.1}$$

pode ser obtida fazendo:

$$\kappa = m, \tag{3.2}$$

$$f_+(t) = \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{m} (t - a_j)} \tag{3.3}$$

$$f_{-}(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{a_j}{t}\right). \tag{3.4}$$

Demonstração: Para provar que a função polinomial f pode ser factorizada consideremos que a_1, a_2, ..., a_m são as suas raízes em $\mathbb{T}_+$. Sabemos que qualquer função polinomial pode ser escrita na forma

$$f(t) = (t - a_1)(t - a_2)...(t - a_m)\, p(t)$$

onde p é um factor de f cujas raízes pertencem a $\mathbb{T}_-$.

É claro que

$$\begin{aligned} f(t) &= (t - a_1)...(t - a_m)\, p(t) = \\ &= \frac{(t - a_1)...(t - a_m)\, p(t)}{(t - a_1)...(t - a_m)} t^m \frac{(t - a_1)...(t - a_m)}{t^m} = \\ &= \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{m}(t - a_j)} t^m \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{a_j}{t}\right) = \\ &= f_{+}(t)\, t^{\kappa} f_{-}(t) \end{aligned}$$

Isto garante a existência de factorização para uma função f polinomial. ■

A partir desta proposição é possível estabelecer a existência da factorização de uma função racional r.

Proposição 3 *Sejam a_1, a_2, ..., a_p as raízes do polinómio f em $\mathbb{T}_+$. Sejam b_1, b_2, ..., b_q as raízes do polinómio g em $\mathbb{T}_+$. A função racional $r = \frac{f}{g}$ admite uma factorização:*

$$r(t) = r_{+}(t)\, t^{\kappa} r_{-}(t), t \in \mathbb{T} \tag{3.5}$$

onde

$$\kappa = p - q \tag{3.6}$$

$$r_{+}(t) = \frac{f(t) \prod_{j=1}^{q}(t - b_j)}{g(t) \prod_{j=1}^{p}(t - a_j)} \tag{3.7}$$

$$r_{-}(t) = t^{q-p} \frac{\prod_{j=1}^{p}(t - a_j)}{\prod_{j=1}^{q}(t - b_j)}. \tag{3.8}$$

Demonstração: Pela proposição 2 garantimos a existência de factorização para uma função polinomial. Logo, sendo r o quociente entre duas funções polinomiais, podemos escrever

$$\begin{aligned}
r(t) &= \frac{f(t)}{g(t)} = \\
&= \frac{\frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)} t^p \prod_{j=1}^{p}\left(1-\frac{a_j}{t}\right)}{\frac{g(t)}{\prod_{j=1}^{q}(t-b_j)} t^q \prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{b_j}{t}\right)} = \\
&= \frac{f(t)\prod_{j=1}^{q}(t-b_j)}{g(t)\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)} t^{p-q} \frac{\frac{\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)}{t^p}}{\frac{\prod_{j=1}^{q}(t-b_j)}{t^q}} = \\
&= \frac{f(t)\prod_{j=1}^{q}(t-b_j)}{g(t)\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)} t^{p-q} t^{q-p} \frac{\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)}{\prod_{j=1}^{q}(t-b_j)} = \\
&= r_+(t)\, t^k r_-(t).
\end{aligned}$$

Está provada a existência de uma factorização para a função racional r. ■

3.2 Caso matricial

Consideremos agora uma função matricial racional $\mathcal{R} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$. Esta matriz pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{g}, \tag{3.9}$$

onde $\mathcal{F}$ é uma função matricial polinomial e g é uma função polinomial escalar.

De seguida será formulado o teorema que garante a existência da factorização de $\mathcal{R}$ com relação a $\mathbb{T}$. É necessário assinalar que a demonstração assenta no algoritmo referido em [9] (veja também [4] ou [13]) para a factorização de funções matriciais racionais.

Teorema 8 *Seja $\mathcal{R}$ uma função matricial racional. Então, $\mathcal{R}$ admite uma factorização com a forma (2.4)*

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_+(t)\,\Lambda(t)\,\mathcal{R}_-(t),\ t \in \mathbb{T}$$

relativamente à circunferência unitária $\mathbb{T}$*, onde* $\mathcal{R}_{\pm} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ *e* Λ *é uma função matricial diagonal da forma (2.7), se e só se todos os polos de* $\mathcal{R}$ *e zeros do* $\det \mathcal{R}$ *não pertencem a* $\mathbb{T}$*. Se esta condição for satisfeita, então os factores de qualquer uma das factorizações possíveis são também racionais.*

Demonstração: Para obter a factorização de $\mathcal{R}$ é suficiente factorizar $\mathcal{F}$ e g separadamente. Dado que g é polinomial sabemos pela proposição 2 que admite factorização. Portanto, a questão resume-se a um problema da factorização de uma função matricial polinomial cujo determinante não tem raízes em $\mathbb{T}$. É claro que agora já não são válidas as fórmulas (3.6), (3.7) e (3.8). Contudo, estas fómulas poderiam ser obtidas a partir de um processo iterativo de m passos que começaria com a representação inicial

$$f = f_+^{(m)} \Lambda^{(m)} f_-^{(m)}$$

com

$$f_+^{(m)} = f,$$
$$\Lambda^{(m)} = 1$$

e

$$f_-^{(m)} = 1.$$

Cada iteração do processo seria determinada pelas fórmulas

$$f_+^{(j-1)} = \frac{f_+^{(j)}}{(t - a_j)},$$

$$\Lambda^{(j-1)} = t\Lambda^{(j)}$$

e

$$f_-^{(j-1)} = \left(1 - \frac{a_j}{t}\right) f_-^{(j)}, \ \ (j = m, ..., 1).$$

Facilmente se verifica que, em cada iteração, as raízes pertencentes a $\mathbb{T}_+$ são eliminadas do factor f_+ e tansferidas, uma a uma, para o factor f_-.

Esta ideia pode ser aplicado ao caso matricial. Nomeadamente, consideremos a família de representações

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+^{(j)} \Lambda^{(j)} \mathcal{F}_-^{(j)}, \tag{3.10}$$

onde $\mathcal{F}_+^{(j)}$ é uma função matricial polinomial cujo determinante tem exactamente j raízes (tendo em conta a multiplicidade) em $\mathbb{T}_+$, o factor $\mathcal{F}_-^{(j)}$ é uma função matricial racional analítica e invertível em $\mathbb{T}_-$ e $\Lambda^{(j)}(t) = \text{diag}\left[t^{\kappa_1^{(j)}}, ..., t^{\kappa_n^{(j)}}\right]$ onde a sequência dos expoentes $\kappa_1^{(j)}, ..., \kappa_n^{(j)} \in \mathbb{Z}$ é decrescente.

Quando $j = 0$ isso significa que $\det \mathcal{F}$ não tem raízes em $\mathbb{T}_+$ e, portanto, $\mathcal{F}$ pode ser representada na forma (3.10) fazendo

$$\mathcal{F}_+^{(0)} = \mathcal{F}$$

e

$$\Lambda^{(0)} = \mathcal{F}_-^{(0)} = \mathcal{I}.$$

Para qualquer $j > 0$, temos que existem j raízes do $\det \mathcal{F}$ em $\mathbb{T}_+$ as quais vão ser eliminadas iterativamente de $\mathcal{F}_+$ passando para $\mathcal{F}_-$. Vamos escolher um ponto arbitrário $z_j \in \mathbb{T}_+$ tal que $\det \mathcal{F}^{(j)}(z_j) = 0$. Isto significa que as colunas da matriz $\mathcal{F}^{(j)}(z_j)$ são linearmente dependentes e, portanto, uma delas, por exemplo, a coluna k é uma combinação linear das colunas anteriores. Refira-se que pode acontecer que todos os elementos da primeira coluna de $\mathcal{F}^{(j)}(z_j)$ sejam nulos. Nesse caso, vamos considerar a primeira coluna como uma combinação linear das restantes e os coeficientes desta combinação são iguais a zero. Designando os coeficientes da combinação linear por $c_1, ..., c_{k-1}$ e vamos introduzir a função matricial triangular superior:

$$\mathcal{U}_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & c_{k-1} & & & \\ & & & z - z_j & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

a qual difere da matriz identidade apenas na coluna k (os espaços em branco correspondem a zeros nas entradas da matriz).

A inversa desta matriz será:

$$\mathcal{V}_j(z) = \mathcal{U}_j^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 z^{\kappa_k^{(j)} - \kappa_1^{(j)}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & c_{k-1} z^{\kappa_k^{(j)} - \kappa_{k-1}^{(j)}} & & & \\ & & & 1 - z_j/z & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Denotando as colunas de $\mathcal{F}_+^{(j)}$ por $f_1, ..., f_n$ verificamos que a coluna de ordem k de $\mathcal{F}_+^{(j)} \mathcal{U}_j^{-1}$ é $(z - z_j)^{-1} \left(f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i f_i \right)$. Dado que $f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i f_i$ é uma

função vectorial polinomial que se anula em z_j, $(z-z_j)^{-1}\left(r_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i r_i\right)$ continua a ser uma função vectorial polinomial. As outras colunas de $\mathcal{F}_+^{(j)}\mathcal{U}_j^{-1}$ coincidem com as respectivas colunas de $\mathcal{F}_+^{(j)}$ e são, portanto, polinomiais. Consequentemente, $\mathcal{F}_+^{(j)}\mathcal{U}_j^{-1}$ é uma função matricial polinomial. O índice do seu determinante é igual a $j-1$. Denotemos agora por $\kappa_1^{(j-1)}, ..., \kappa_n^{(j-1)}$ a reordenação por ordem decrescente da sequência

$$\kappa_1^{(j)}, ..., \kappa_{k-1}^{(j)}, \kappa_k^{(j)} + 1, \kappa_{k+1}^{(j)}, ..., \kappa_n^{(j)},$$

e por $\mathcal{T}_j$ a matriz de permutação que permite obter esta reordenação. Refira-se que $\mathcal{T}_j$ coincide com a identidade se a sequência já estiver ordenada por ordem decrescente. Caso isso não se verifique, $\mathcal{T}_j$ é obtida a partir da identidade por troca de colunas de modo a permitir aquela reordenação. Então,

$$\mathcal{U}_j \Lambda^{(j)} = \mathcal{T}_j \Lambda^{(j-1)} \mathcal{T}_j \mathcal{V}_j.$$

É claro que $\mathcal{V}_j$ é uma função matricial racional e todos os seus polos, bem como as raízes do seu determinante, pertencem a $\mathbb{T}_+$. Em cada iteração os factores $\mathcal{F}_+$ e $\mathcal{F}_-$ são determinados fazendo:

$$\mathcal{F}_+^{(j-1)} = \mathcal{F}_+^{(j)} \mathcal{U}_j^{-1} \mathcal{T}_j$$

e

$$\mathcal{F}_-^{(j-1)} = \mathcal{T}_j \mathcal{V}_j \mathcal{F}_-^{(j)}.$$

Partindo da representação inicial (3.10) podemos, através de um processo iterativo, fazer diminuir o valor de j em uma unidade por cada iteração. Após j iterações, este processo permite obter a representação (3.10) com $j = 0$. A representação assim construída é a factorização de $\mathcal{F}$. Note-se que cada termo em cada uma das representações da forma (3.10) é racional. Refira-se ainda que o produto $\mathcal{F}_+^{(j)} \Lambda^{(j)} \mathcal{F}_-^{(j)}$ em cada iteração corresponde à função matricial $\mathcal{F}$ mas só temos uma factorização de $\mathcal{F}$ quando $j = 0$.

Apartir da construção atrás referida e do teorema 7 (que permite obter outras factorizações quando uma delas é conhecida) conclui-se que cada factorização de uma função matricial racional é um produto de factores racionais. ■

3.3 Algoritmo para a factorização de funções matriciais racionais

As ideias da demonstação do teorema 8 permitem a construção de um algoritmo que será descrito em pormenor nesta secção. A partir deste algoritmo

foi construido o programa informático (ver secção 3.4) que permite obter a factorização (2.4) de funções matriciais racionais.

Como já foi referido o algoritmo é iterativo e os passos necessários são descritos a seguir.

Seja $\mathcal{A} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial regular, com entradas $a_{ij}(t)$, $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., n$. Refira-se ainda que $\det \mathcal{A}(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{A}$ não tem polos na circunferência unitária.

Passo 1:
Identificar n (ordem de $\mathcal{A}$)

Passo 2:
Determinar $\lambda_1^+, \lambda_2^+, ..., \lambda_r^+ \in \mathbb{T}_+$, os polos das entradas de $\mathcal{A}$.
Se $r = 0$, então, $f(t) = 1$
Caso contrário, $f(t) = \prod_{i=1}^{r} \left(t - \lambda_i^+\right)$.

Passo 3:
Definir os factores:

$$\mathcal{A}_+ = f(t) \cdot \mathcal{A}(t)$$
$$\Lambda = t^{-r} \cdot I_n$$
$$\mathcal{A}_- = \frac{t^r}{f(t)} \cdot I_n$$

Passo 4:
Determinar $\det \mathcal{A} = a$.

Passo 5:
Determinar $t_1, t_2, ..., t_p \in \mathbb{T}_+$, os zeros de $a(t)$.

Passo 6:
Determinar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q \in \mathbb{T}_+$, os polos de $a(t)$, isto é, os zeros de $\frac{1}{a(t)}$.

Passo 7:

Determinar $k = \underset{\mathbb{T}}{\text{ind}}\, a(t) = p - q$.

Passo 8:
Determinar $N = n \times r + k$.
(N é o número de iterações necessárias para obter a factorização de $\mathcal{A}$)

Passo 9:
Determinar $t_1, t_2, ..., t_N$, os zeros de $\det \mathcal{A}_+^{(N-i)}$, com $i = 0, 1, ..., N-1$.

Passo 10:
Construir um ciclo com N passos.

Passo 10.1:
Determinar $\mathcal{A}_+^{(N-i)}(t_i)$

Se a primeira coluna de $\mathcal{A}_+(t_i)$ só contém zeros, então, considerá-la como uma combinação linear das restantes colunas, sendo os coeficientes desta combinação iguais a zero;

Caso contrário, determinar a primeira coluna, por exemplo k, que pode ser escrita como combinação linear das colunas anteriores. Identificar os coeficientes da combinação linear por $c_1, ..., c_{k-1}$.

Passo 10.2:

Construir a matriz triangular superior $\mathcal{U}$, que difere da matriz identidade apenas na coluna k (os espaços em branco correspondem a zeros nas entradas da matriz)

$$\mathcal{U}^{(N-i)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & c_{k-1} & & & \\ & & & t - t_i & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 10.3:

Escrever os índices parciais a partir da matriz $\Lambda^{(N-i)}(t)$

$$\kappa_1^{(N-i)}, \kappa_2^{(N-i)}, ..., \kappa_n^{(N-i)}$$

Reescrever os índices parciais, fazendo

$$\kappa_1^{(N-i-1)}, ..., \kappa_k^{(N-i-1)} + 1, ..., \kappa_n^{(N-i-1)};$$

Passo 10.4:
Se $\kappa_1^{(N-i-1)} \geq \kappa_2^{(N-i-1)} \geq \kappa_k^{(N-i-1)} + 1 \geq ... \geq \kappa_n^{(N-i-1)}$, então, definir a matriz $\mathcal{T}^{(N-i)} = \mathcal{I}$;
Caso contrário, definir $\mathcal{T}^{(N-i)}$ de maneira que os índices parciais de

$$\widetilde{\Lambda}^{(N-i-1)} = \text{diag}\left(t^{\kappa_1^{(N-i-1)}}, ..., t^{\kappa_k^{(N-i-1)}}, ..., t^{\kappa_n^{(N-i-1)}}\right)$$

estejam ordenados por ordem decrescente.

Passo 10.5:
Calcular os factores:

- $\mathcal{A}_+^{(N-i-1)} = \mathcal{A}_+^{(N-i)} \left(\mathcal{U}^{(N-i)}\right)^{-1} \left(\mathcal{T}^{(N-i-1)}\right)^{-1}$,
- $\Lambda^{(N-i-1)} = \mathcal{T}^{(N-i-1)} \widetilde{\Lambda}^{(N-i-1)} \left(\mathcal{T}^{(N-i-1)}\right)^{-1}$
- $\mathcal{A}_-^{(N-i-1)} = \left(\Lambda^{(N-i-1)}\right)^{-1} \mathcal{T}^{(N-i-1)} \mathcal{U}^{(N-i)} \Lambda^{(N-i)} \mathcal{A}_-^{(N-i)}$

Se $N - i - 1 \neq 0$ voltar ao **Passo 10.1**;
Se $N - i - 1 = 0$ ir para **Passo 11.**

Passo 11:
Escrever $\mathcal{A}_+^{(0)}$, $\Lambda^{(0)}$ e $\mathcal{A}_-^{(0)}$.
Verificar que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_+^{(0)}(t) \Lambda^{(0)}(t) \mathcal{A}_-^{(0)}(t)$.

3.4 Factorização de funções matriciais racionais utilizando o "Mathematica".

O programa informático "Mathematica" utiliza uma linguagem de programação própria que embora seja bastante acessível para o utilizador não dispensa o esclarecimento de alguns aspectos. Por uma questão prática serão

consideradas funções matriciais racionais na incógnita x. O utilizador deverá abrir o ficheiro que foi designado por "FactEsq" para obter uma factorização esquerda da matriz. Em seguida, deverá introduzir a matriz que pretende factorizar. Esta matriz, bem como todos os comandos que já estão escritos no ficheiro, deverão ser seleccionados e pressionando simultaneamente as teclas "SHIFT" e "ENTER", obter-se-á a factorização pretendida.

Consideremos um exemplo no qual é apresentada uma função matricial cuja factorização foi obtida a partir do ficheiro designado por "FactEsq".

Exemplo 2 *Seja* $\mathcal{A} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ *a função matricial regular*

$$\mathcal{A}(x_) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & x & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz foi escrita no início do ficheiro "FactEsq". Depois de corrido o programa obtiveram-se os três termos de uma factorização esquerda de $\mathcal{A}$*.*

$\mathcal{A}_+$ =MatrixForm[Simplify[Factores[x][[1]]]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λ=MatrixForm[Factores[x][[2]]]

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_-$ =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]]

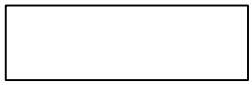
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As instruções de programação que se encontram no ficheiro "FactEsq" são apresentados em anexo no capítulo 6, na secção 6.1.

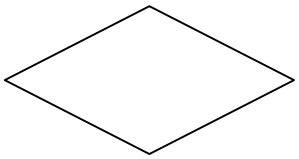
Para uma melhor compreensão dos procedimentos utilizados e da linguagem específica do programa "Mathematica", apresentaremos, de seguida, os diagramas de fluxo que explicam os principais blocos de instruções e comandos que constituem o corpo do programa. A simbologia utilizada nos fluxogramas é a usual mas para tornar mais simples a compreensão daqueles esquemas proceder-se-á, em primeiro lugar, a um esclarecimento sobre os critérios utilizados na construção de cada diagrama de fluxo.

3.4.1 Simbologia utilizada nos fluxogramas

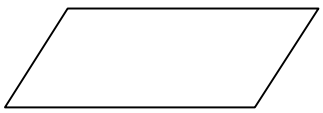
O rectângulo indica um processo, isto é, indica a criação de uma lista ou de uma função. Pode também ser utilizado para dar uma instrução simples ou prestar algum esclarecimento sobre o processo que vai ser aplicado.



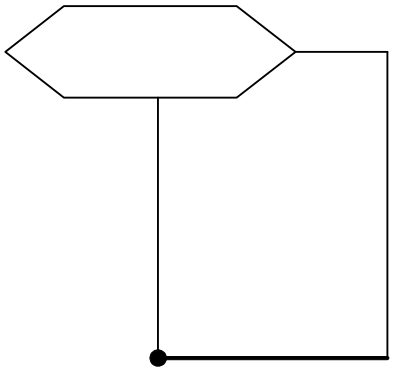
O losango corresponde a uma tomada de decisão. Normalmente é colocada uma questão cuja resposta pode ser afirmativa ou negativa, portanto, está associado ao "If". A uma resposta afirmativa corresponde o sinal + e as instruções a serem seguidas nesse caso são indicadas no lado esquerdo do esquema. Se a resposta for negativa, surge o sinal - e os procedimentos a adoptar são referidos no lado direito do fluxograma.



O paralelogramo representa uma entrada ou saída de dados, por isso, será utilizado no inicio do algoritmo quando se requer ao utilizador a introdução da matriz que vai ser factorizada. A sua utilização é, por exemplo, necessária quando se requer a indicação do raio e do centro, se a factorização pretendida for noutra circunferência que não a unitária.



O hexágono não regular é utilizado para o ciclo "For" e nele se indicarão os valores iniciais e finais entre os quais o i (que representa cada iteração) pode variar. Será seguido de um conjunto de instruções que serão repetidas durante o processo iterativo. A indicação que o ciclo terminou é feita por um ponto na extremidade da linha que acompanha o conjunto de instruções.



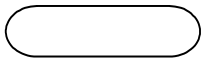
O símbolo indicado a seguir é utilizado para indicar uma mensagem de erro que surgirá sempre que a matriz introduzida não admitir factorização.

Para indicar que o fluxograma foi interrompido e continuará num outro esquema utiliza-se como conexão uma circunferência

ou uma oval

.

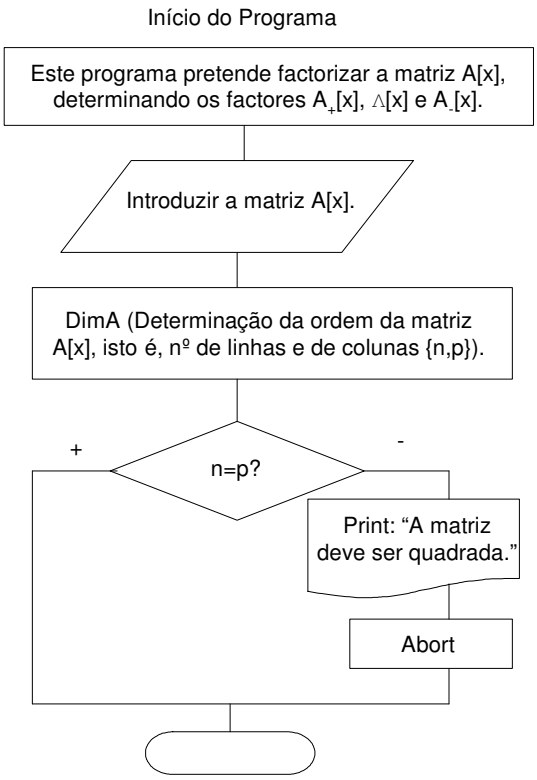
A indicação de que um bloco de instruções terminou é feita pela figura geométrica que a seguir se apresenta.



3.5 Funcionamento do ficheiro "FactEsq".

Como já foi referido anteriormente, o ficheiro que permite obter a factorização esquerda de uma matriz começa por receber essa matriz quadrada que será designada por $\mathcal{A}(x)$. Em seguida, é determinada a ordem da matriz. Se a

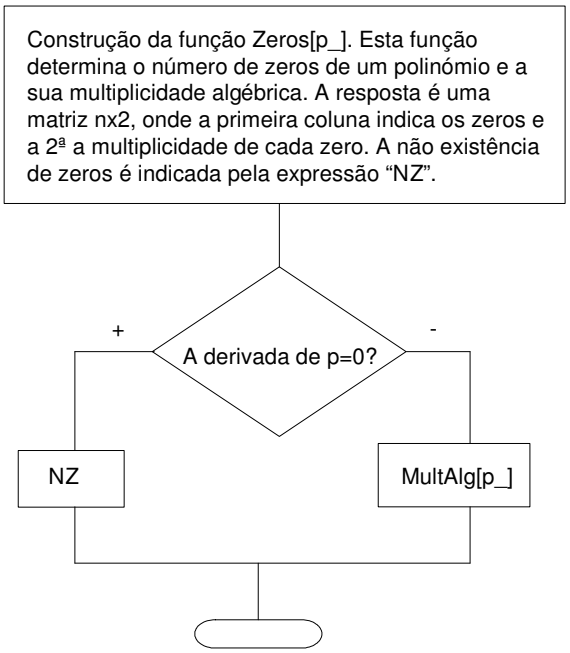
matriz não for quadrada é enviada uma mensagem de erro e o programa é interrompido. O fluxograma (3.13) ilustra esta primeira parte do programa.



(3.13)

O comando seguinte no ficheiro é uma função designada por MultAlg[p_]. Esta função não dá nenhuma resposta por si só mas apenas quando for aplicada a um polinómio $p(x)$. Essa resposta será uma matriz $2 \times n$ na qual os elementos da primeira coluna serão os zeros do polinómio e os elementos da segunda coluna são os valores da multiplicidade algébrica de cada um desses zeros. Esta função é utilizada na construção de uma outra, a função Zeros[p_]. Tornou-se necessário construir esta função porque é preciso salvaguardar o caso da não existência de zeros, o que será indicado pela expressão "NZ". Recorreu-se ao conceito de derivada de um polinómio pois sempre que esta é nula isso corresponde a um polinómio de grau zero o qual, obviamente, não tem zeros. Nesta fase a função Zeros[p_] não produz qualquer resposta porque ainda não está a ser aplicada. É uma ferramenta que será utilizada ao longo do programa em diversas situações. O fluxograma (3.14) esquematiza

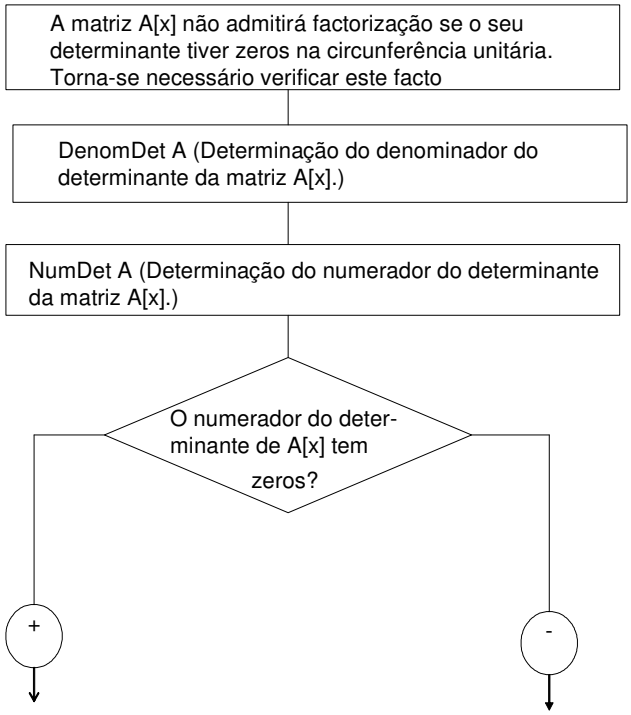
a construção da função Zeros[p_].



(3.14)

Em seguida, é calculado o determinante da matriz $\mathcal{A}$. Como se sabe a matriz não admitirá factorização se o seu determinante tiver zeros na circunferência unitária. Para verificar este facto proceder-se-á à determinação dos zeros do numerador e do demoninador do determinante da matriz $\mathcal{A}$

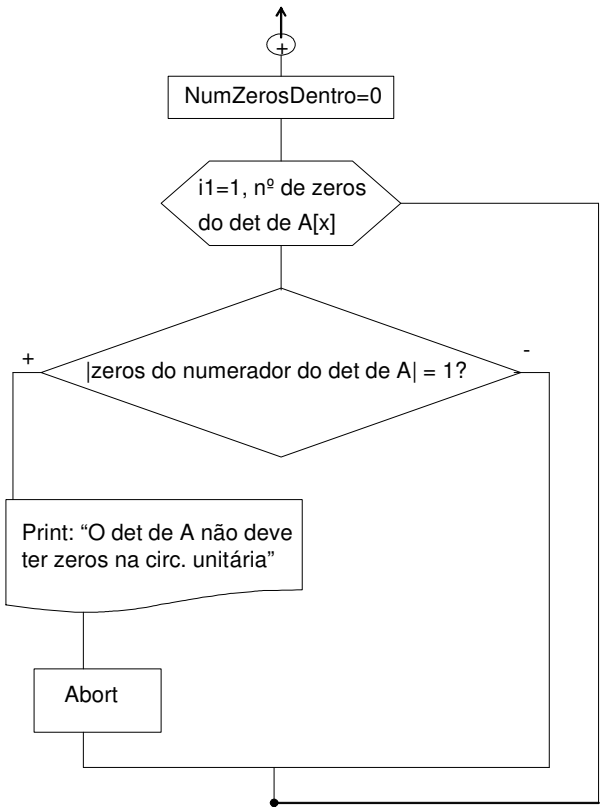
separadamente. Isto vem indicado no fluxograma (3.15).



(3.15)

Se o numerador do determinante de $\mathcal{A}$ admitir zeros é necessário verificar se esses zeros pertencem ou não à circunferência unitária, como se indica no fluxograma (3.16). Em caso afirmativo será enviada uma mensagem de erro

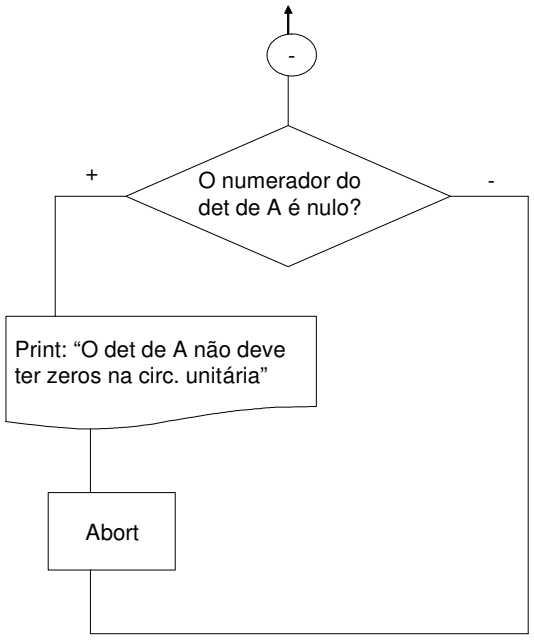
e o programa é interrompido.



(3.16)

Se o numerador do determinante de $\mathcal{A}$ não admitir zeros é necessário verificar se é ou não nulo, tal como ilustra o fluxograma (3.17). No caso de

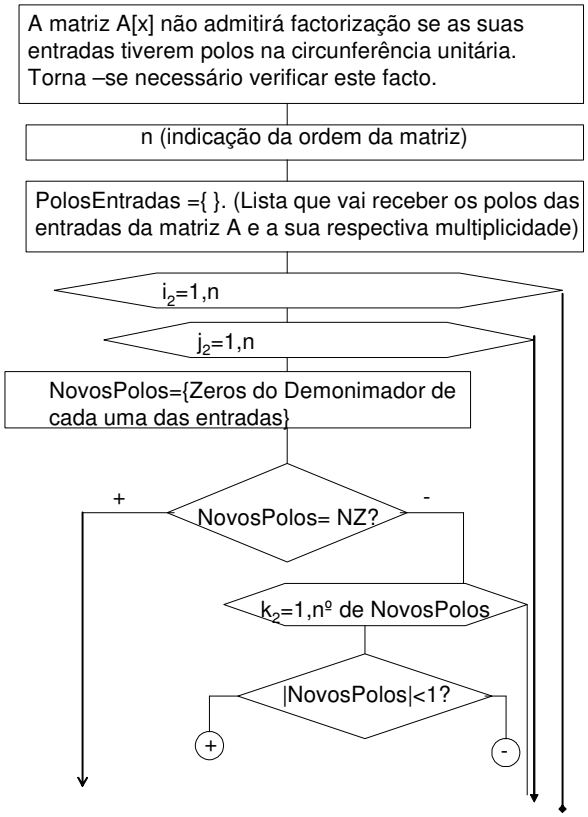
ser nulo é novamente enviada uma mensagem de erro.



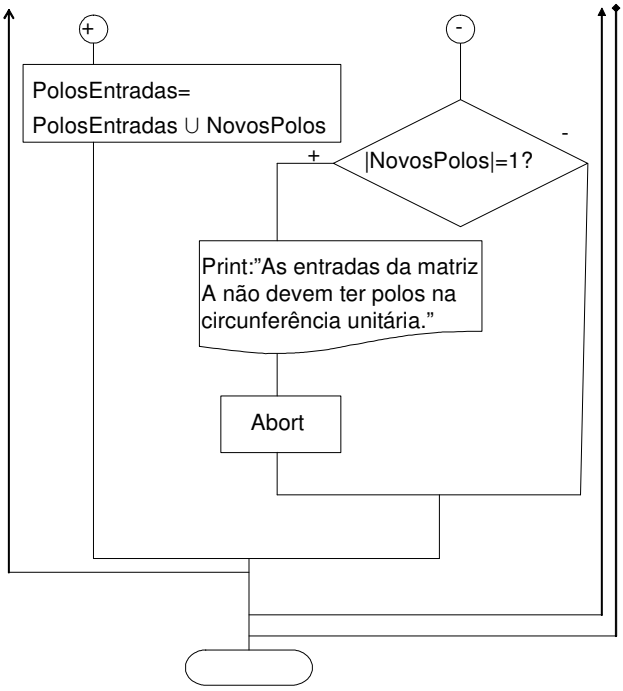
(3.17)

É necessário criar uma lista contendo os polos das entradas da matriz (e a sua respectiva multiplicidade) que pertencem ao interior da circunferência unitária. Utilizando a função Zeros[p_] determinar-se-ão todos os zeros dos demoninadores de todas as entradas da matriz. Verificar-se-á se pertencem ou não ao interior da circunferência unitária recorrendo ao conceito de valor absoluto de um número. Se o módulo de cada polo for inferior a 1, então o polo é acrescentado à lista. Se o módudo do polo for igual a 1, é enviada uma mensagem de erro. Os polos que não pertençam à circunferência unitária, nem ao seu interior, serão deprezados. Os fluxogramas (3.18) e

(3.19), ilustram os procedimentos referidos.



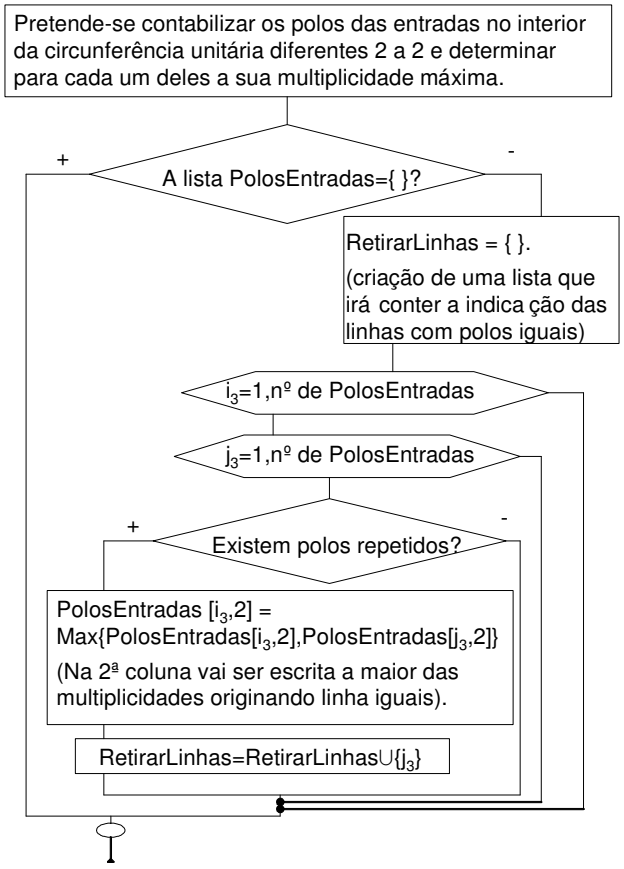
(3.18)



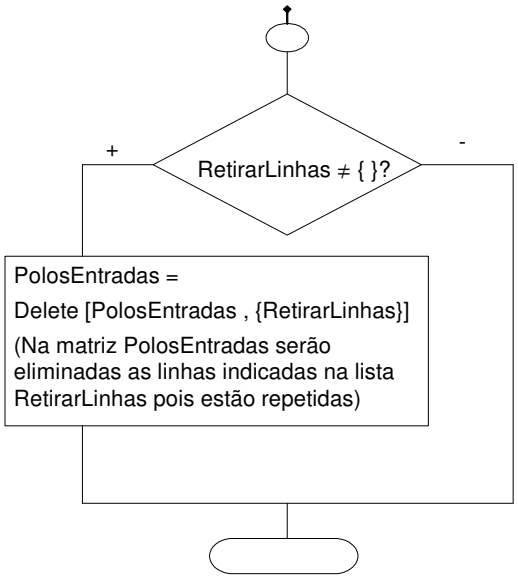
(3.19)

A lista de polos anteriormente criada pode conter polos iguais dos quais apenas interessa considerar os de maior multiplicidade algébrica. Serão comparados todos os polos e se existirem polos iguais serão comparadas as suas multiplicidades. Na linha em que existir o menor valor da multiplicidade, para polos iguais, será substituido esse valor pela multiplicidade máxima. Isto fará com que surjam linhas iguais. Proceder-se-á, então, a uma comparação entre as linhas e as repetidas serão eliminadas. Os diagramas (3.20) e (3.21) mostram como foi contruída a lista dos polos das entradas da matriz não repetidos (e sua multiplicidade máxima) pertencentes ao interior da

circunferencia unitária e que foi designada por PolosEntradas.



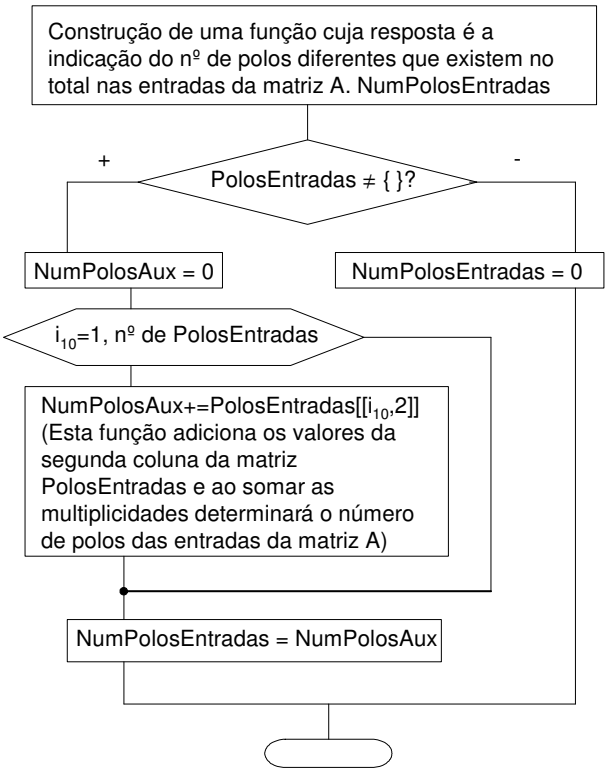
(3.20)



(3.21)

Em seguida, é necessário contabilizar o número de polos diferentes pertencentes à lista anterior. Isto consegue-se adicionando os valores das multiplicidades que são os elementes da segunda coluna daquela lista. A função que permite obter este valor foi designada por NumPolosEntradas e a explicação

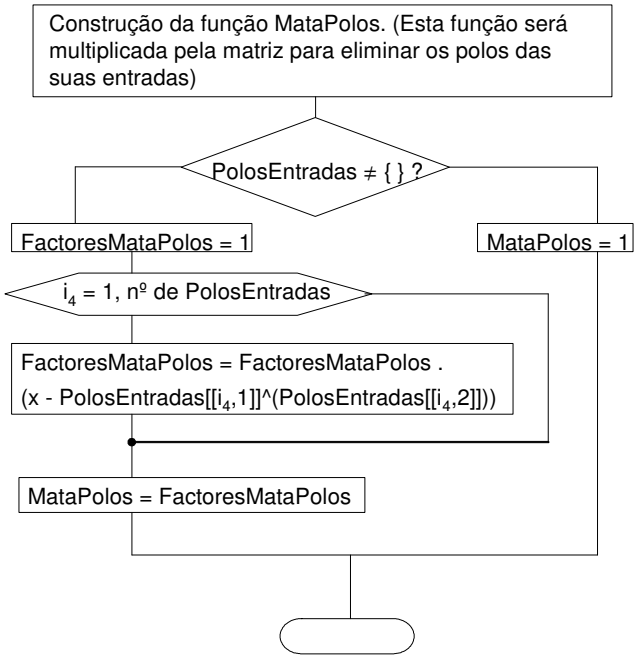
da sua construção encontra-se no diagrama de fluxo (3.22).



(3.22)

Seguidamente, passar-se-á à construção da função MataPolos[x_]. O objectivo é formar uma função polinomial, de menor grau possível, que multiplicada pela matriz $\mathcal{A}$, dê origem a uma nova matriz cujas entradas não têm polos pertencentes ao interior da circunfência unitária. Veja-se o fluxograma (3.23). Refira-se ainda que se a lista PolosEntradas for vazia a função

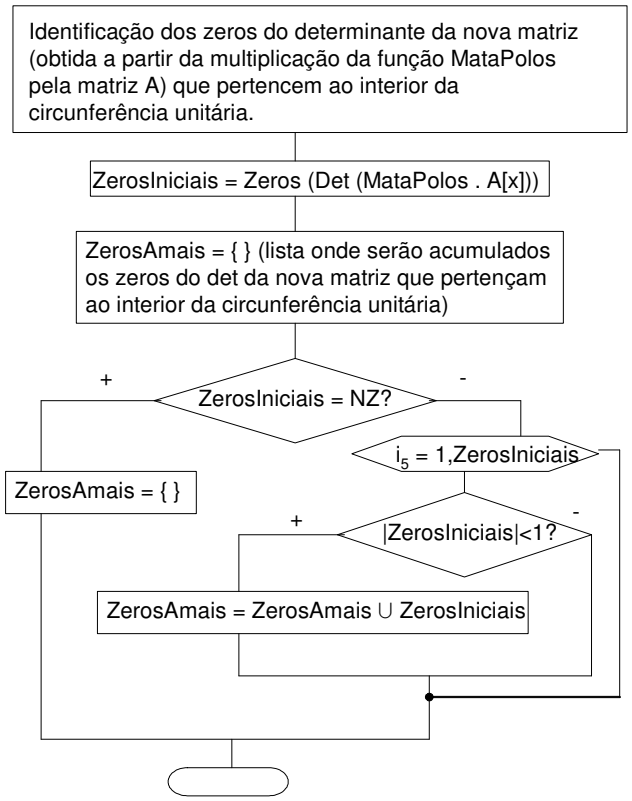
MataPolos toma o valor 1. A nova matriz é, portanto, igual à matriz $\mathcal{A}$.



(3.23)

Considerando a nova matriz, será criada uma lista contendo os zeros do seu determinante que pertençam ao interior da circunferência unitária. Esta lista foi denominada ZerosAMais e a sua formação é explicada no fluxograma

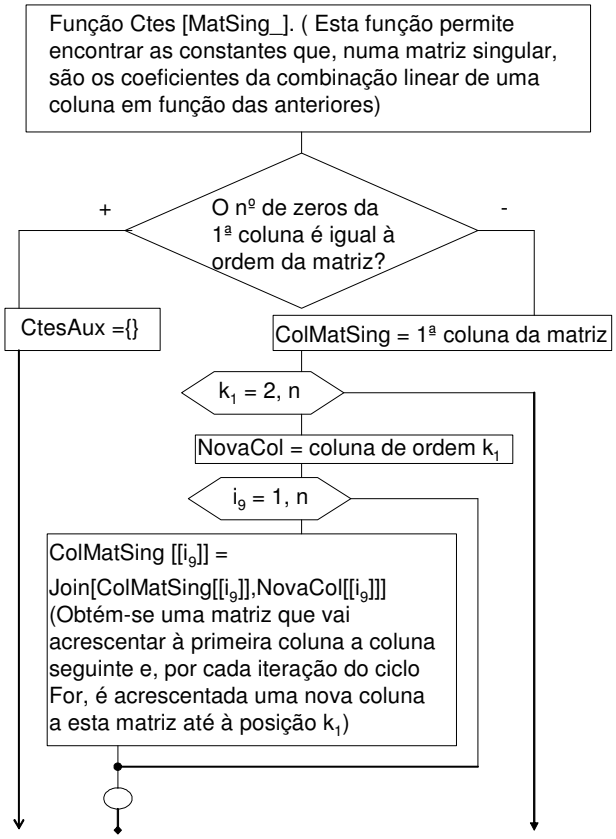
(3.24).



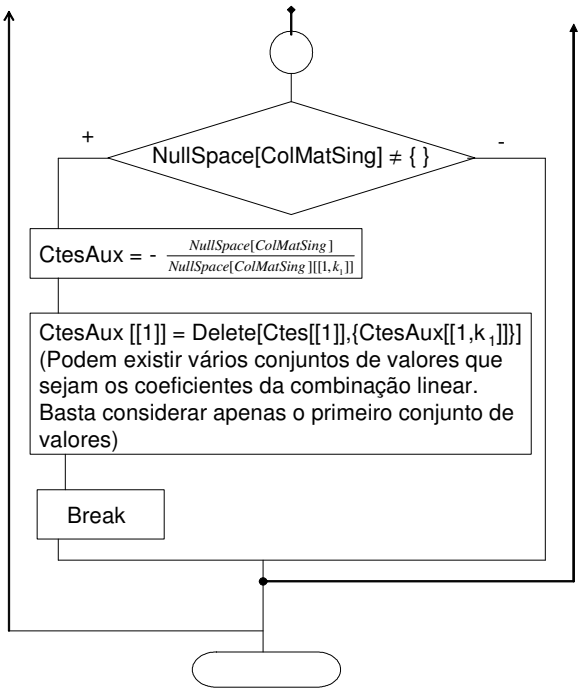
(3.24)

Os fluxogramas (3.25) e (3.26) indicam a criação da função Ctes [MatSing_]. Esta função recebe uma matriz singular e tem como resposta os coeficientes de uma combinação linear de uma dada coluna em função das anteriores. Começa-se por verificar se a primeira linha é formada apenas por zeros. Se for este o caso considera-se o conjunto daqueles coeficientes vazio. No caso contrário, iniciar-se-á um ciclo "For" que vai originar uma matriz composta pela primeira coluna da nossa matriz e, por cada iteração, é acrescentada uma nova coluna. Com o comando NullSpace, obtemos uma lista com os coeficientes que permitem escrever uma coluna como combinação linear das colunas anteriores (este comando permite escrever o núcleo de um determinado subespaço gerado por um conjunto de vectores). Assim que isto for possível o ciclo "For" é interrompido. A função Ctes[MatSing_] não tem

qualquer resposta nesta fase pois não está ainda a ser aplicada.



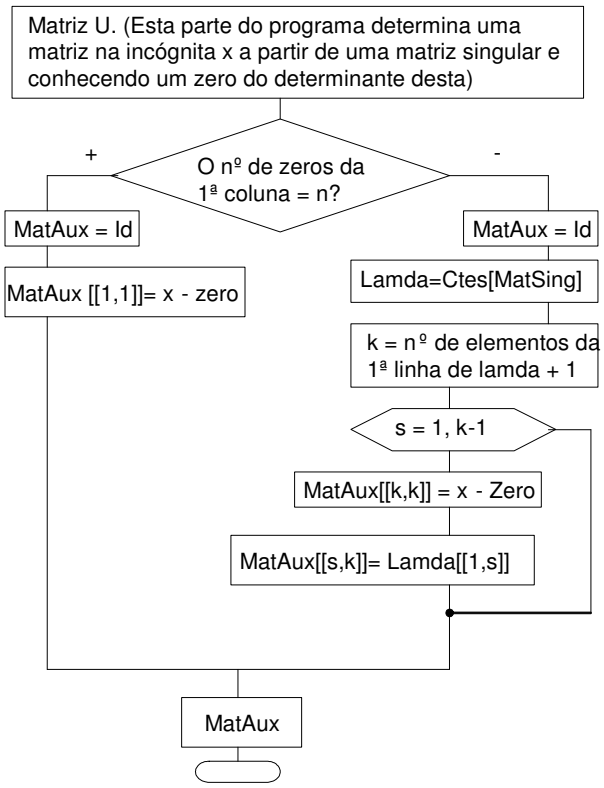
(3.25)



(3.26)

No fluxograma (3.27) está explicada a construção da matriz triangular superior $\mathcal{U}$. A função MatU recebe uma matriz singular constante e, conhecendo um zero do seu determinante, determina uma matriz na incógnita x. Esta difere da matriz identidade apenas numa dada coluna. Se a primeira linha for formada apenas por zeros então, na posição correspondente à primeira linha e à primeira coluna teremos o valor $x-zero$. No caso contrário, a coluna que vai diferir da matriz identidade é a correspondente à primeira coluna que for possível escrever como combinação linear das colunas anteriores. Essa coluna terá como elemento da diagonal principal o termo $x - zero$. Os elementos dessa coluna anteriores a este termo são os coeficientes determinados

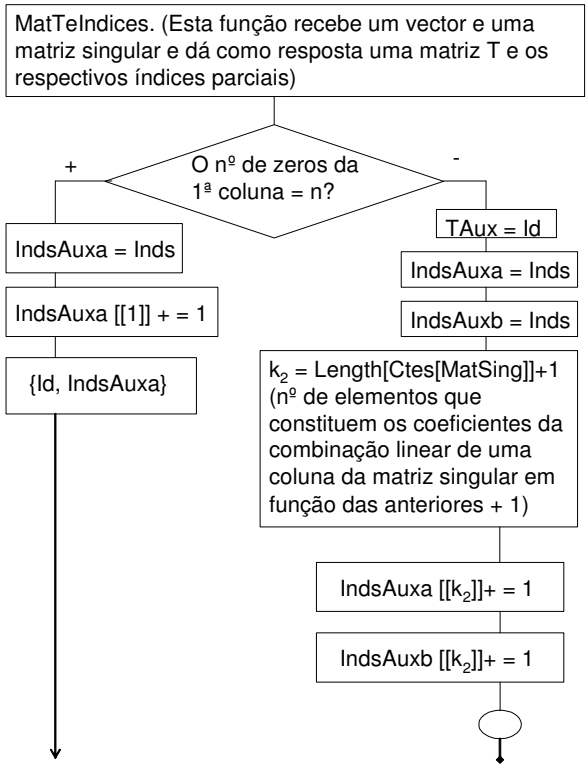
pela função Ctes[MatSing_].



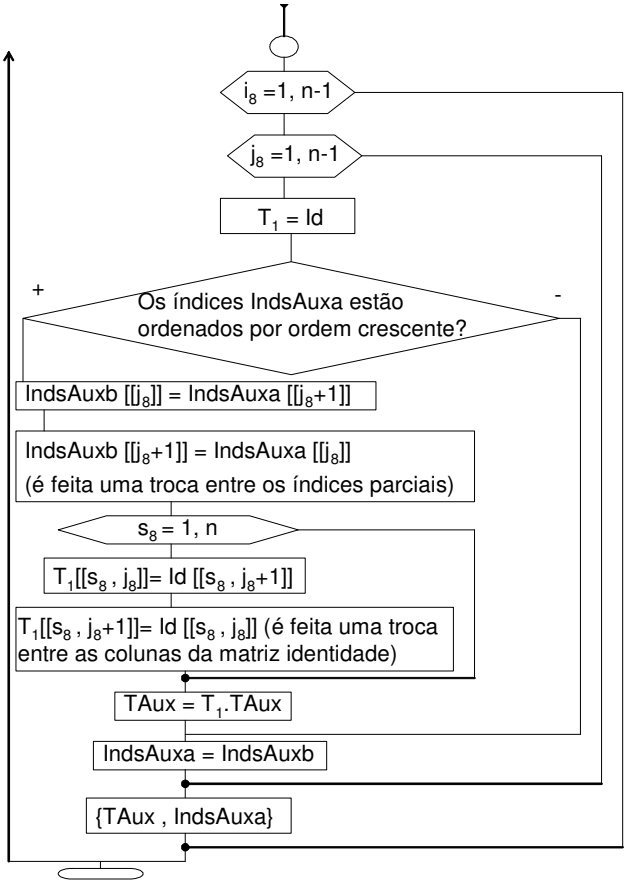
(3.27)

Os fluxogramas (3.28) e (3.29) apresentam a construção da matriz $\mathcal{T}$ e a indicação dos índices parciais através da função MatTeIndices. Começa-se por verificar se a primeira coluna de uma matriz singular é formada apenas por zeros. Neste caso adiciona-se uma unidade ao primeiro valor do vector que contém os índices parciais e a matriz $\mathcal{T}$ coincide com a matriz identidade. No caso contrário, determina-se a ordem da primeira coluna que se pode escrever como uma combinação linear das colunas anteriores para identificar o índice parcial que vai ser adicionado em uma unidade. Consideram-se dois vectores iguais cujos elementos são os índices parciais designados por IndsAuxa e IndsAuxb. Adiciona-se uma unidade ao indice identificado em ambos os vectores. Em seguida comparam-se os elementos do vector IndsAuxa para verificar se estão ordenados por ordem crescente. Se estiverem escritos por ordem decrescente a matriz $\mathcal{T}$ coincide com a matriz identidade e os indices parciais são os indicados no vector IndsAuxa. Pelo contrário, se não estiverem por ordem decrescente torna-se necessário ordená-los desta for-

ma. É feita uma troca entre os elementos dos vectores IndsAuxa e IndsAuxb de modo a ordenar os índices parciais por ordem não crescente. Aplica-se o mesmo processo fazendo trocas entre as colunas da matriz identidade do modo a obter a matriz $\mathcal{T}$ (serão efectuadas as mesma trocas de colunas que foram necessárias para ordenar os índices parciais).



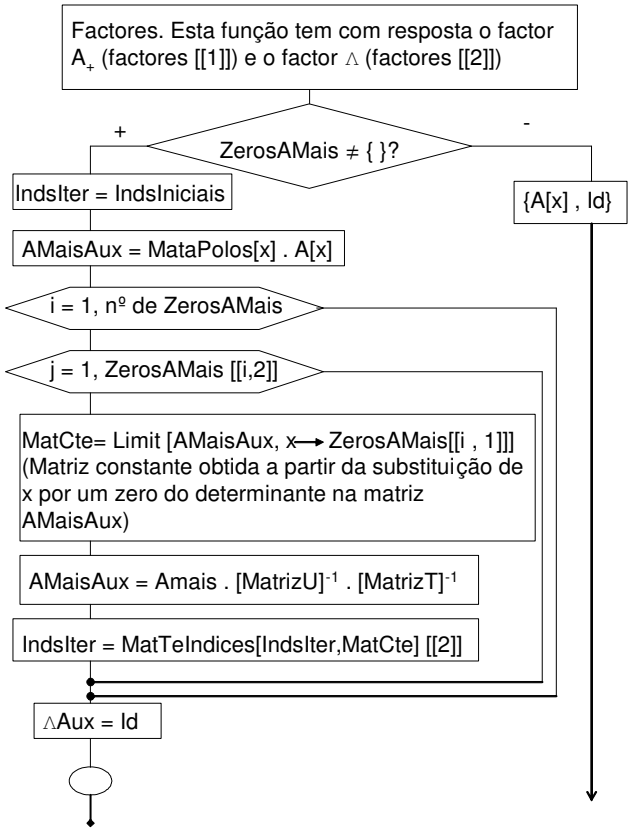
(3.28)



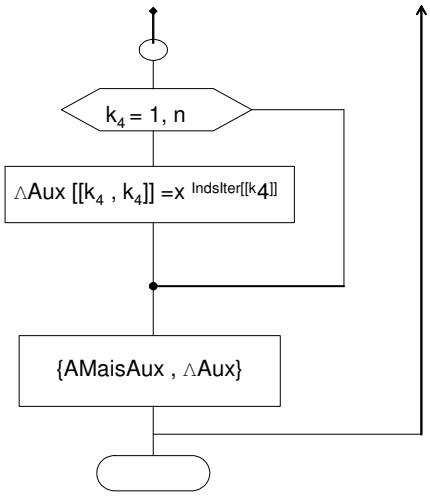
(3.29)

Em seguida, no ficheiro "FactEsq", são determinados os índices parciais iniciais com os quais começará o processo iterativo da factorização. Depois surge a função Factores[x_], a qual tem como resposta os factores $\mathcal{A}_+$ e Λ,da factorização esquerda pretendida. A construção daquela função é explicada com os diagramas de fluxos (3.30) e (3.31). Começa-se por verificar a existência de zeros do determinante da matriz $\mathcal{A}$ pertencentes ao interior da circunferência unitária. Se não existirem então $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}$ e $\Lambda = Id$. Se o conjunto dos zeros do determinante pertencentes ao interior da circunferência unitária não for vazio, definem-se os índices intermédios que inicialmente coincidirão com os índices parciais iniciais. Considera-se a matriz AMaisAux resultante do produto da função MataPolos pela matriz $\mathcal{A}$. Dá-se então início ao processo iterativo, utilizando um ciclo "For", que terá tantas iterações quantos forem os elementos do conjunto de zeros do determinante já referido. Em cada iteração é calculada uma matriz singular constante, designada por MatCte, que resulta da substituição do valor da incógnita x por um dos zeros do determinante. Em cada uma das iterações é calculada uma matriz

AMaisAux e os índices parciais intermédios. Na última das iterações surge matriz $\mathcal{A}_+$ e os índices parciais da factorização que se pretende obter. Com estes últimos procede-se à construção da matriz Λ.



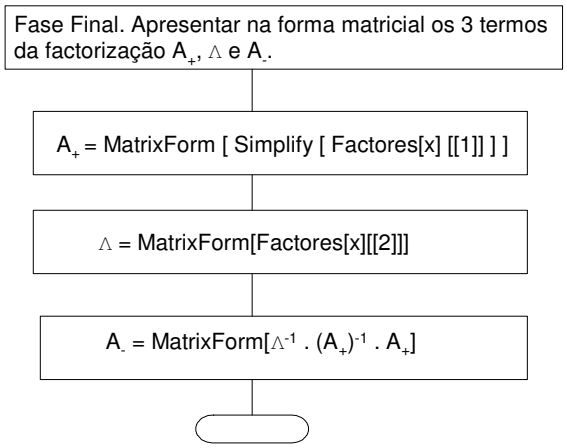
(3.30)



(3.31)

O ficheiro "FactEsq" termina com a apresentação, na forma matricial, dos três termos que constituem a factorização de uma matriz de funções racional,

tal como vem referido no diagrama de fluxo (3.32).



(3.32)

Refira-se que em cada iteração não se calcula o factor $\mathcal{A}_-$ pois não é necessário para efectuar as iterações seguintes. Aquele factor apenas é determinado na última iteração, às custas $\mathcal{A}_+$ e de Λ.

3.6 Factorização de funções matriciais racionais com um algoritmo simplificado.

O algoritmo descrito na secção 3.3 é um processo muito moroso. Como já foi referido o algoritmo é iterativo e o número de iterações depende essencialmente da ordem da matriz, do número de polos das suas entradas pertencentes ao interior da circunferência unitária e do índice do determinante da matriz. Dado que não é possível alterar a ordem da matriz, surgiu a ideia de tentar reduzir o número de iterações por manipulação do número

de polos da suas entradas. Assim, se antes de se iniciar o processo de factorização se procedesse a uma eliminação dos polos das entradas da matriz pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$ torna-se evidente que o número de iterações seria consideravelmente reduzido. Com base nesta linha de raciocínio o algoritmo da factorização foi alterado na sua fase inicial e essa alteração consiste na eliminação dos polos das entradas da matriz (pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$) por coluna. Vamos construir, para cada coluna da matriz, uma função polinomial que ao ser multiplicada por essa coluna elimina os seus polos. Obtém-se uma nova matriz cujas entradas já não têm polos no interior de $\mathbb{T}$. Aplicar-se-á a esta o algoritmo já apresentado o qual será mais simples pelo facto de já não ser preciso eliminar os polos das entradas e porque, consequentemente, o número de iterações diminuiu. Em seguida, é apresentado este novo algoritmo.

Seja $\mathcal{A} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ uma função matricial regular arbitrária, com componentes $a_{ij}(t)$, $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., n$. Refira-se ainda que $\det \mathcal{A}(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{A}$ não tem polos na circunferência unitária.

Passo 1:

Determinar n (ordem de $\mathcal{A}$)

Passo 2:

Determinar n conjuntos $\lambda_{1j}^{+}, \lambda_{2j}^{+}, ..., \lambda_{rj}^{+} \in \mathbb{T}_{+}$, os polos de $a_{ij}(t)$, com $j = 1, ..., n$.

Passo 3:

Construir $m_j(t)$, $j = 1, ..., n$ funções polinomiais para eliminar os polos das n colunas da matriz $\mathcal{A}$.

Se $r_j = 0$, então, $m_j(t) = 1$

Caso contrário, $m_j(t) = \prod_{q=1}^{r_j} \left(t - \lambda_q^{+}\right)$.

Passo 4:

Definir S_j como o grau da função polinomial $m_j(t)$.

As constantes $-S_j$ coincidem com os índices parciais iniciais mas é necessário assinalar que os mesmos podem estar desordenados.

Passo 5:

Se $-S_1 \geq -S_2 \geq ... \geq -S_n$, então, definir a matriz $\mathcal{T} = \mathcal{I}$;

Caso contrário, definir $\mathcal{T}$ fazendo trocas de colunas na matriz identidade de maneira que as entradas da diagonal principal da matriz diagonal

$$\Lambda aux = \mathcal{T}\ \mathrm{diag}\left(t^{-S_1}, ..., t^{-S_n}\right)\mathcal{T}^{-1} \tag{3.33}$$

estejam ordenadas por ordem decrescente.

Passo 6:
Definir os factores:

$$\mathcal{A}aux_{+} = \mathcal{A}\,\mathrm{diag}\left(m_1\left(t\right),...,m_n\left(t\right)\right)\mathcal{T}^{-1} \tag{3.34}$$

$$\mathcal{A}aux_{-} = \mathcal{T}\,\mathrm{diag}\left(\frac{t^{S_1}}{m_1},...,\frac{t^{S_n}}{m_n}\right) \tag{3.35}$$

e Λaux como em (3.33).

Passo 7:
Aplicar o algoritmo referido na secção 3.3 a partir do **Passo 4**.

É claro que a matriz designada por $\mathcal{A}$ no algoritmo da secção 3.3 deverá ser subtituída por $\mathcal{A}aux_{+}$.

Refira-se ainda que no passo 8, quando é determinado o número de iterações necessárias, o valor r será sempre igual a zero pois as entradas da matriz $\mathcal{A}aux_{+}$ que aqui estamos a considerar não têm polos em $\mathbb{T}_{+}$.

3.7 O ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" e seu funcionamento

Em alternativa ao ficheiro "FactEsq" foi construído um outro programa para obter a factorização de funções matriciais racionais, também utilizando o "Mathematica". Este novo ficheiro foi designado por "FactorizacaoEsqFinal" e a sua construção tem por base o algoritmo descrito na secção anterior.

Vamos de seguida apresentar um exemplo de uma função matricial racional cuja factorização é obtida a partir do ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" e proceder à explicação do seu funcionamento recorrendo a um conjunto de fluxogramas de modo a tornar mais claros os procedimentos nele indicados. Mais adiante proceder-se-á a uma comparação entre os ficheiros "FactEsq" e "FactorizacaoEsqFinal", sublinhando desde já a vantagem deste último particularmente em matrizes de maior dimensão.

Refira-se, ainda, que o modo do utilizador trabalhar com o ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" é idêntico ao descrito para o ficheiro "FactEsq". Ou seja, o utilizador deverá introduzir a matriz que pretende factorizar. Em seguida, deverá seleccionar esta matriz e todos os comandos que estão no ficheiro. Depois deverá pressionar simultaneamente as teclas "SHIFT" e "ENTER" obtendo, assim, a factorização pretendida.

Exemplo 3 *Seja* $\mathcal{A} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ *a função matricial regular*

$$\mathcal{A}(x_) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} & 0 \\ \frac{x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^3} & \frac{1}{(x-3)^2} & 1+4x \end{pmatrix}.$$

Recorrendo ao ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" determinamos os três termos de uma factorização esquerda. São eles:

$\mathcal{A}_+$ =MatrixForm[Simplify[Factores[x][[1]]]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}+x \\ 4 & \frac{7(6+5x)}{36(-3+x)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

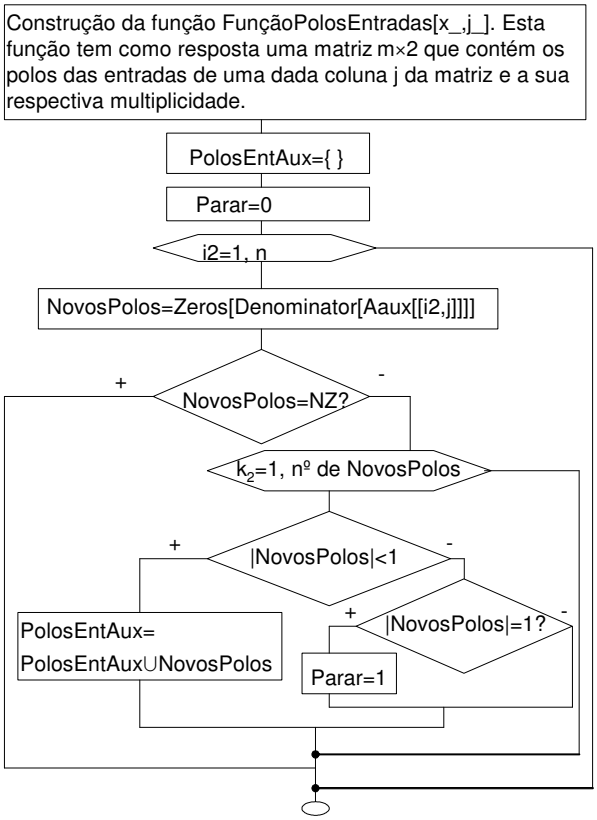
Λ=MatrixForm[Factores[x][[2]]]

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

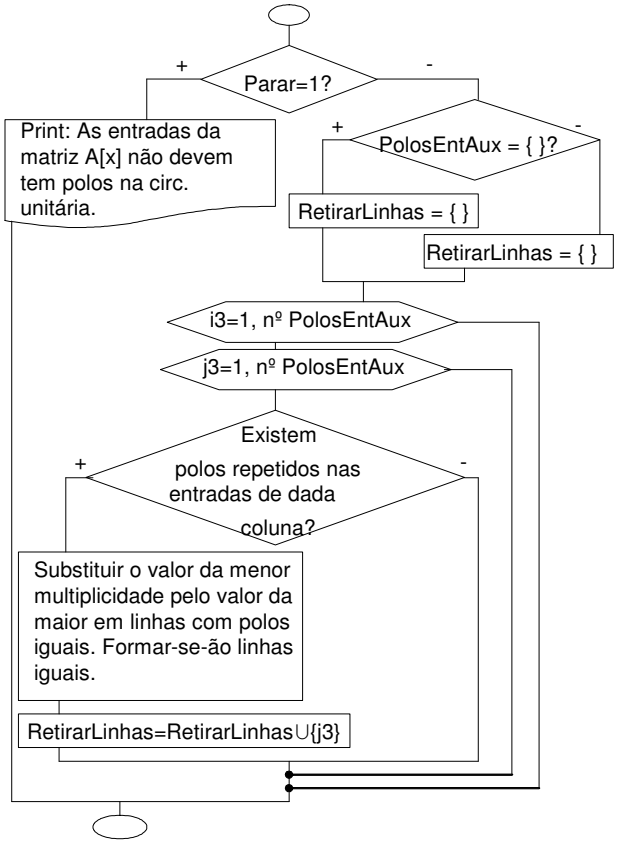
$\mathcal{A}_-$ =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]]

$$\begin{pmatrix} \frac{27}{4(-1+3x)^3} & \frac{1}{36x(1+2x)^2} & 1+\frac{1}{4x} \\ 0 & \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2} & 0 \\ \frac{x}{-\frac{1}{2}+x} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

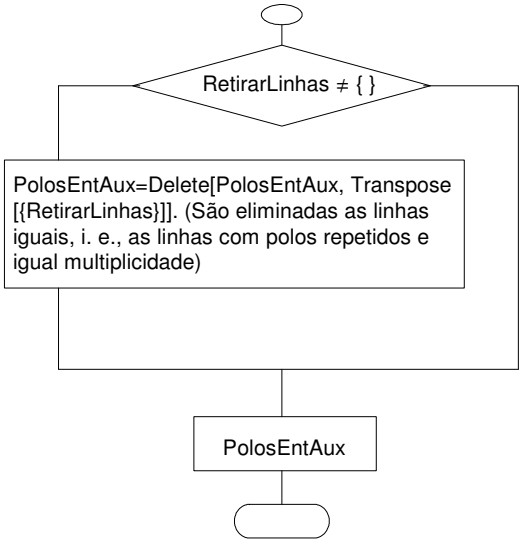
Comparando os anexos 6.1 e 6.2 onde são apresentados os ficheiros "FactEsq" e "FactorizacaoEsqFinal", pode verificar-se que as primeiras partes de ambos os ficheiros são idênticas. Assim, os fluxogramas (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) permitem compreender o funcionamento inicial de ambos os ficheiros. A grande diferença surge com a construção da lista FunçãoPolosEntradas[x_,j_] no ficheiro "FactorizacaoEsqFinal". Esta função tem como resposta uma matriz $m \times 2$ que contém os polos de uma coluna j de $\mathcal{A}$, pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$, na sua primeira coluna e as respectivas multiplicidades algébricas na segunda coluna. O número m de linhas corresponde ao número de polos diferentes que existem nessa coluna. Note-se que para cada valor de j na FunçãoPolosEntradas[x_,j_] obteremos diferentes matrizes. A construção destas j matrizes é descrita nos diagramas de fluxo (3.36), (3.37) e (3.38).


Construção da função FunçãoPolosEntradas[x_,j_]. Esta função tem como resposta uma matriz m×2 que contém os polos das entradas de uma dada coluna j da matriz e a sua respectiva multiplicidade.
PolosEntAux={ }
Parar=0
i2=1, n
NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]]
+
-
NovosPolos=NZ?
k2=1, nº de NovosPolos
+
-
|NovosPolos|<1
+
-
|NovosPolos|=1?
PolosEntAux=
PolosEntAuxUNovosPolos
Parar=1

(3.36)


Parar=1?
+
-
Print: As entradas da matriz A[x] não devem tem polos na circ. unitária.
PolosEntAux = { }?
+
-
RetirarLinhas = { }
RetirarLinhas = { }
i3=1, nº PolosEntAux
j3=1, nº PolosEntAux
Existem polos repetidos nas entradas de dada coluna?
+
-
Substituir o valor da menor multiplicidade pelo valor da maior em linhas com polos iguais. Formar-se-ão linhas iguais.
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3}

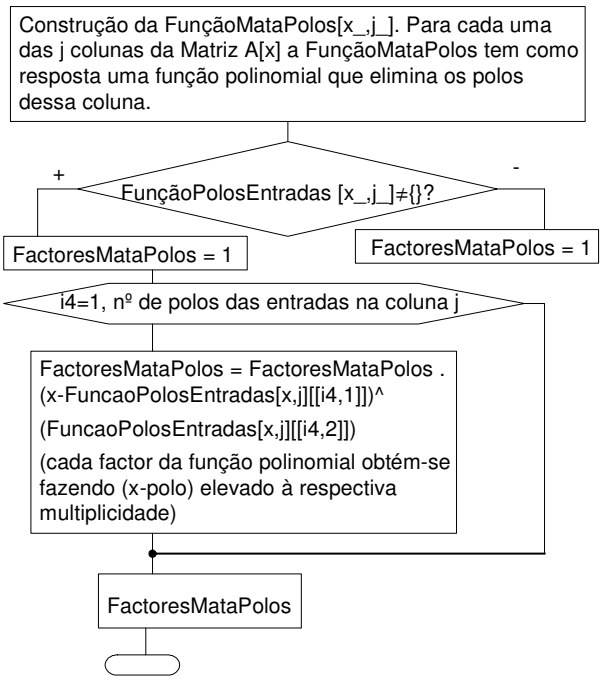
(3.37)



(3.38)

Em seguida, passamos à construção da FunçãoMataPolos[x_,j_] que embora siga a linha de raciocínio utilizada para a função MataPolos[x_] do ficheiro "FactEsq", aqui , ao invés de eliminar os polos (pertencentes ao interior da circunferência unitária) de todas as entradas da matriz, apenas eliminará esses polos para uma dada coluna j. É, portanto, uma função polinomial que assume diferente aspecto para cada uma das colunas da matriz $\mathcal{A}$. O fluxograma (3.39) permite uma melhor compreensão dos procedimentos

adoptados.



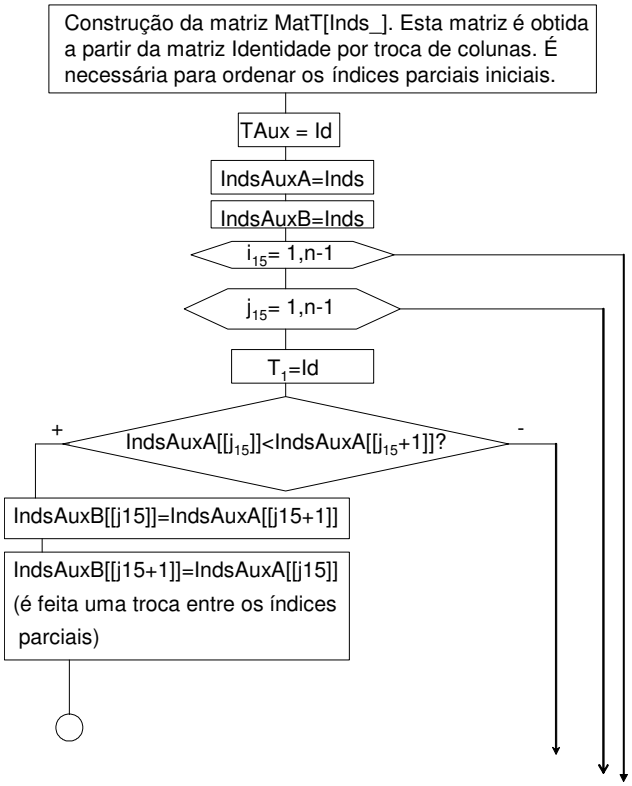
(3.39)

As n funções polinomiais obtidas a partir da FunçãoMataPolos[x_,j_] têm cada uma o seu grau que será designado por S_i, com $i = 1, ..., n$. Formando um vector do tipo

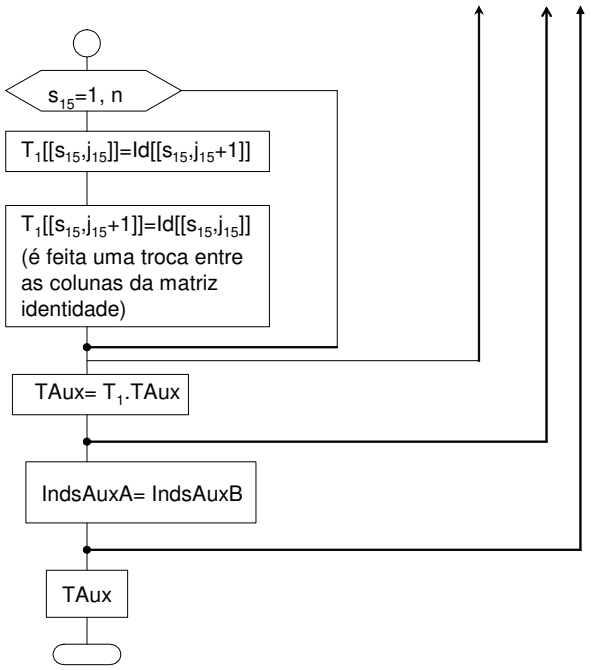
$$\left[\begin{array}{cccc} -S_1 & -S_2 & ... & -S_n \end{array} \right]$$

obtemos uma lista com os índices parciais iniciais necessários para desencadear o processo iterativo da factorização. Note-se que estes podem não estar ordenados por ordem decrescente. Assim, impõe-se a construção de uma matriz obtida a partir da identidade $\mathcal{I}$ por troca de colunas e esta permitirá a ordenação dos índices parciais. Vamos designá-la por MatT[Inds_] e os fluxogramas (3.40) e (3.41) apresentados a seguir explicam a sua con-

strução.


Construção da matriz MatT[Inds_]. Esta matriz é obtida a partir da matriz Identidade por troca de colunas. É necessária para ordenar os índices parciais iniciais.
TAux = Id
IndsAuxA=Inds
IndsAuxB=Inds
i15= 1,n-1
j15= 1,n-1
T1=Id
+
IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]]?
-
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]]
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]]
(é feita uma troca entre os índices parciais)

(3.40)



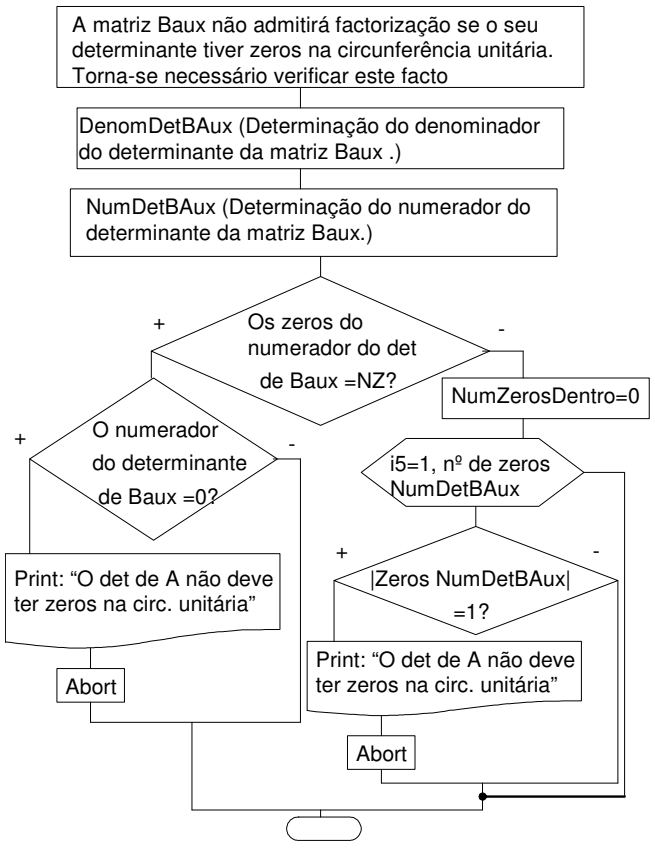
(3.41)

Em seguida, cada coluna da matriz inicial é multiplicada pela respectiva função polinomial que eliminará os seus polos. Surge uma nova matriz já sem polos (pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$) nas suas entradas, a qual é definida por MatrixBAux[x_].

Estamos agora em condições para definir os factores iniciais (3.34), (3.33) e (3.35) da factorização. Refira-se que este último factor não será utilizado pelo algoritmo que estamos a aplicar.

Após a determinação de (3.34) e de (3.33), seguir-se-á a aplicação do processo de factorização utilizado pelo ficheiro "FactEsq". No entanto, como a matriz (3.34) não tem nas suas entradas polos pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$, podemos simplificar algumas das instruções daquele ficheiro. Antes, porém, é necessário verificar se esta nova matriz admite factorização, estudando a existêcia de zeros para o seu determinante na circunferência unitária $\mathbb{T}$. Os diagramas de fluxo (3.15), (3.16) e (3.17) apresentados na explicação do funcionamento do ficheiro "FactEsq" têm agora que ser adaptados para a matriz (3.34) embora a linha de raciocínio seja muito semelhante. Vejamos

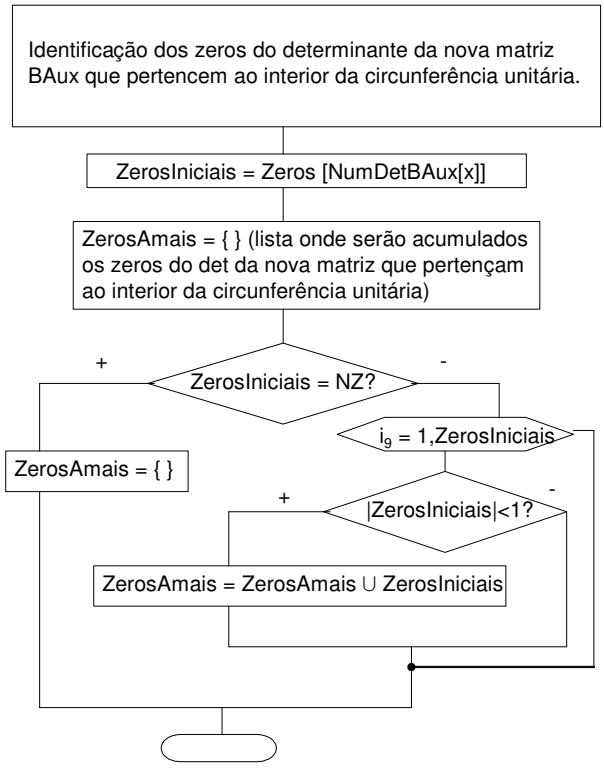
essas alterações indicadas no fluxograma (3.42).



(3.42)

O ficheiro que estamos a apresentar segue com a determinação dos zeros iniciais do determinante da matriz (3.34). Dessa lista de zeros interessa seleccionar os que pertencem ao inteior de $\mathbb{T}$. A forma de obter esta lista é

explicitada no fluxograma (3.43) indicado a seguir.



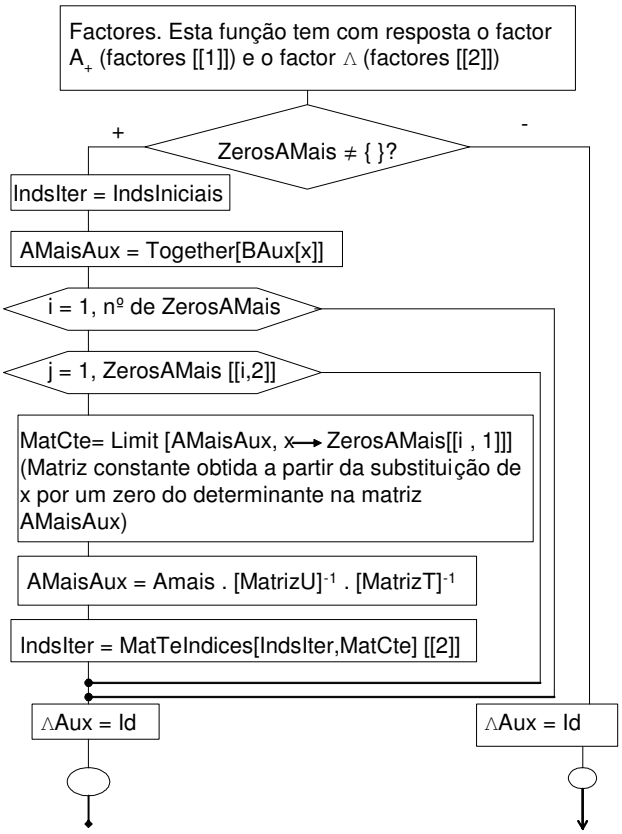
(3.43)

O passo que se segue é, tal como no ficheiro "FactEsq", a determinação das funções Ctes[MatSing_], MatU[x_,MatSing_,Zero_] e MatTeIndices [Inds_,MatSing_]. A explicação da sua construção e da sua aplicação já foi referida anteriormente em (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29), pelo que se dispençam quaisquer outros esclarecimentos.

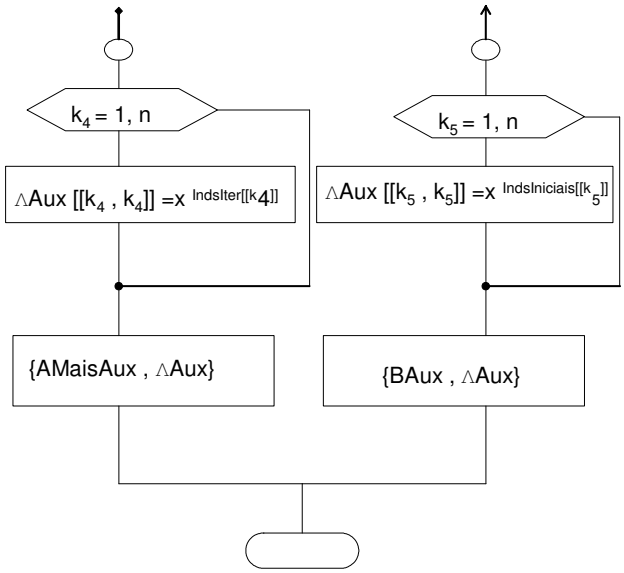
Em seguida, é construída uma lista IndsIniciais que contém os índices parciais iniciais já ordenados de modo decrescente.

Estamos finalmente em condições para dar início ao processo iterativo da factorização, o que é feito através da função Factores[x_]. Esta, é quase idêntica em ambos os ficheiros, no entanto, é necessário proceder a uma pequena alteração na parte final da função a qual é explicada nos fluxogramas (3.44) e (3.45) que se apresentam a seguir (comparem-se com os fluxogramas

(3.30) e (3.31)).


Factores. Esta função tem com resposta o factor
A+ (factores [[1]]) e o factor ∧ (factores [[2]])
+
ZerosAMais ≠ { }?
-
IndsIter = IndsIniciais
AMaisAux = Together[BAux[x]]
i = 1, nº de ZerosAMais
j = 1, ZerosAMais [[i,2]]
MatCte= Limit [AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i , 1]]]
(Matriz constante obtida a partir da substituição de
x por um zero do determinante na matriz
AMaisAux)
AMaisAux = Amais . [MatrizU]-1 . [MatrizT]-1
IndsIter = MatTeIndices[IndsIter,MatCte] [[2]]
∧Aux = Id
∧Aux = Id

(3.44)



(3.45)

Note-se que a alteração feita se prende com o facto do determinante da nova matriz BAux admitir ou não zeros pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$. Se não existirem estes zeros a matriz BAux é já o primeiro termo da factorização e falta apenas verificar se o factor central tem os índices parciais ordenados.

A fase final é a apresentação dos três termos $\mathcal{A}_{+}(x)$, $\Lambda(x)$ e $\mathcal{A}_{-}(x)$ da factorização pretendida.

3.8 Comparação entre os ficheiros "FactEsq" e "FactorizacaoEsqFinal".

Observando atentamente os dois algoritmos apresentados podemos verificar que a grande vantagem do segundo se prende com a redução do número de iterações que são necessárias efectuar para obter a factorização de uma matriz de funções racional $\mathcal{A}(x)$. É claro que quando se factoriza uma matriz

informaticamente recorrendo aos ficheiros construídos neste trabalho o resultado obtém-se bastante rapidamente em ambos os casos. No entanto, para matrizes de maior dimensão e com elevado número de polos pertencentes ao interior de $\mathbb{T}$ nas suas entradas, verifica-se que o ficheiro "FactEsq" demora mais alguns segundos a correr do que o ficheiro "FactorizacaoEsqFinal". Este ganho em termos de tempo permite concluir que existe vantagem nas simplificações propostas pelo segundo algoritmo e consequentemente na aplicação deste último ficheiro.

Para que se possa compreender melhor a vantagem que os segundos poupados informaticamente representam em tempo real quando factorizamos manualmente uma matriz, penso ser pertinente apresentar um exemplo onde uma mesma matriz seja factorizada recorrendo aos dois processos estudados. Estas factorizações são apresentadas no exemplo seguinte onde se torna evidente os cálculos que são "poupados" na aplicação do algoritmo simplificado.

Exemplo 4 *Consideremos a matriz* $\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & x & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vamos aplicar em primeiro lugar o algoritmo apresentado na secção (3.3) seguindo os passos aí mencionados.

Passo 1:

$n = 3$

Passo 2:

$x = 0$ é o único polo das entradas de $\mathcal{A}(x)$ pertencente a $\mathbb{T}_+$, logo, $r = 1$.

Então, $f(x) = x$

Passo 3:

$$\mathcal{A}_+(x) = f(x) \cdot \mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 0 & x^2 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(x) = x^{-1} \cdot \mathcal{I}_3 = \operatorname{diag}\left(x^{-1}, x^{-1}, x^{-1}\right)$$

$$\mathcal{A}_-(x) = \frac{x^r}{f(x)} \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_3$$

Passo 4:

$\det \mathcal{A}(x) = x$

Passo 5:

O $\det \mathcal{A}(x)$ tem um único zero: $x = 0$.

Passo 6:

O $\det \mathcal{A}(x)$ não tem polos.

Passo 7:
$k = \underset{\mathbb{T}}{\text{ind}}\, x = 1$
Passo 8:
$N = n \times r + k = 4$
(o processo de factorização terá 4 iterações)
Passo 9:
$\det \mathcal{A}_+^{(4)}(x) = x^4$
O $\det \mathcal{A}_+^{(4)}$ tem um único zero de multiplicidade 4: $x = 0$.
Passo 10:
Construir um ciclo com 4 iterações, repetindo para cada uma delas os passos de 10.1 a 10.5.
Primeira iteração:
Passo 10.1:
$\mathcal{A}_+^{(4)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$C_1 = \alpha_1 C_2$ com $\alpha_1 = 0$
Passo 10.2:

$$\mathcal{U}^{(4)} = \text{diag}\,(x, 1, 1)$$

Passo 10.3:

$$\kappa_1^{(4)} = -1, \kappa_2^{(4)} = -1, \kappa_3^{(4)} = -1$$
$$\kappa_1^{(3)} = -1 + 1 = 0, \kappa_2^{(3)} = -1, \kappa_3^{(3)} = -1$$

Passo 10.4:
Como $\kappa_1^{(3)} \geq \kappa_2^{(3)} \geq \kappa_3^{(3)}$, então, a matriz $\mathcal{T}^{(3)} = \mathcal{I}$;
Passo 10.5:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+^{(3)} &= \mathcal{A}_+^{(4)} \left(\mathcal{U}^{(4)}\right)^{-1} \left(\mathcal{T}^{(3)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 0 & x^2 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \text{diag}\left(x^{-1}, 1, 1\right) \mathcal{I}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x^2 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(3)} &= \mathcal{T}^{(3)} \widetilde{\Lambda}^{(3)} \left(\mathcal{T}^{(3)}\right)^{-1} = \\ &= \mathcal{I}_3 \,\text{diag}\left(1, x^{-1}, x^{-1}\right) \mathcal{I}_3 = \\ &= \text{diag}\left(1, x^{-1}, x^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{-}^{(3)} &= \left(\Lambda^{(3)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(3)}\mathcal{U}^{(4)}\Lambda^{(4)}\mathcal{A}_{-}^{(4)} = \\ &= \left(\operatorname{diag}\left(1,x^{-1},x^{-1}\right)\right)^{-1}\mathcal{I}_3\operatorname{diag}\left(x,1,1\right)\operatorname{diag}\left(x^{-1},x^{-1},x^{-1}\right)\mathcal{I}_3 \\ &= \mathcal{I}_3\end{aligned}$$

Segunda iteração:
Passo 10.1:

$$\mathcal{A}_{+}^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_2 = \alpha_1 C_1$ com $\alpha_1 = 0$.
Passo 10.2:

$$\mathcal{U}^{(3)} = \operatorname{diag}\left(1,x,1\right)$$

Passo 10.3:

$$\kappa_1^{(3)} = 0, \kappa_2^{(3)} = -1, \kappa_3^{(3)} = -1$$
$$\kappa_1^{(2)} = 0, \kappa_2^{(2)} = -1+1 = 0, \kappa_3^{(2)} = -1$$

Passo 10.4:
Como $\kappa_1^{(2)} \geq \kappa_2^{(2)} \geq \kappa_3^{(2)}$, então, a matriz $\mathcal{T}^{(2)} = \mathcal{I}$;
Passo 10.5:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{+}^{(2)} &= \mathcal{A}_{+}^{(3)}\left(\mathcal{U}^{(3)}\right)^{-1}\left(\mathcal{T}^{(2)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x^2 & x^2-x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\operatorname{diag}\left(1,x^{-1},1\right)\mathcal{I}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x^2 & x^2-x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{(2)} &= \mathcal{T}^{(2)}\widetilde{\Lambda}^{(2)}\left(\mathcal{T}^{(2)}\right)^{-1} = \\ &= \mathcal{I}_3\operatorname{diag}\left(1,1,x^{-1}\right)\mathcal{I}_3 = \\ &= \operatorname{diag}\left(1,1,x^{-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{-}^{(2)} &= \left(\Lambda^{(2)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(2)}\mathcal{U}^{(3)}\Lambda^{(3)}\mathcal{A}_{-}^{(3)} = \\ &= \left(\operatorname{diag}\left(1,1,x^{-1}\right)\right)^{-1}\mathcal{I}_3\operatorname{diag}\left(1,x,1\right)\operatorname{diag}\left(1,x^{-1},x^{-1}\right)\mathcal{I}_3 \\ &= \mathcal{I}_3\end{aligned}$$

Terceira iteração:

Passo 10.1:

$$\mathcal{A}_+^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_2 = \alpha_1 C_1$ com $\alpha_1 = 1$.

Passo 10.2:

$$\mathcal{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 10.3:

$$\kappa_1^{(2)} = 0, \kappa_2^{(2)} = 0, \kappa_3^{(2)} = -1$$

$$\kappa_1^{(1)} = 0, \kappa_2^{(1)} = 0 + 1 = 1, \kappa_3^{(1)} = -1$$

Passo 10.4:

Como $\kappa_1^{(1)} \geq \kappa_2^{(1)} \geq \kappa_3^{(1)}$ é uma condição falsa temos que proceder a uma troca entre as duas primeiras colunas na matriz identidade. Então,

$$\mathcal{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 10.5:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+^{(1)} &= \mathcal{A}_+^{(2)} \left(\mathcal{U}^{(2)}\right)^{-1} \left(\mathcal{T}^{(1)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x^{-1} & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \mathcal{T}^{(1)} \widetilde{\Lambda}^{(1)} \left(\mathcal{T}^{(1)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}\left(1, x, x^{-1}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{diag}\left(x, 1, x^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{-}^{(1)} &= \left(\Lambda^{(1)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(1)}\mathcal{U}^{(2)}\Lambda^{(2)}\mathcal{A}_{-}^{(2)} = \\
&= \left(\mathrm{diag}\left(x^{-1},1,x\right)\right)^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&x&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mathrm{diag}\left(1,1,x^{-1}\right)\mathcal{I}_3 \\
&= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quarta iteração:

Passo 10.1:

$\mathcal{A}_{+}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$C_3 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ com $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$.

Passo 10.2:

$$\mathcal{U}^{(1)} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&x\end{pmatrix}$$

Passo 10.3:

$$\kappa_1^{(1)} = 1, \kappa_2^{(1)} = 0, \kappa_3^{(1)} = -1$$
$$\kappa_1^{(0)} = 1, \kappa_2^{(0)} = 0, \kappa_3^{(0)} = -1 + 1 = 0$$

Passo 10.4:

Como $\kappa_1^{(0)} \geq \kappa_2^{(0)} \geq \kappa_3^{(0)}$ então, a matriz $\mathcal{T}^{(0)} = \mathcal{I}$

Passo 10.5:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{+}^{(0)} &= \mathcal{A}_{+}^{(1)}\left(\mathcal{U}^{(1)}\right)^{-1}\left(\mathcal{T}^{(0)}\right)^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&x^2-x\\0&0&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-x^{-1}\\0&0&x^{-1}\end{pmatrix}\mathcal{I}_3 = \\
&= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&x-1\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{(0)} &= \mathcal{T}^{(0)}\widetilde{\Lambda}^{(0)}\left(\mathcal{T}^{(0)}\right)^{-1} = \\
&= \mathcal{I}_3\,\mathrm{diag}\,(x,1,1)\,\mathcal{I}_3 = \\
&= \mathrm{diag}\,(x,1,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{-}^{(0)} &= \left(\Lambda^{(0)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(0)}\mathcal{U}^{(1)}\Lambda^{(1)}\mathcal{A}_{-}^{(1)} = \\
&= \operatorname{diag}\left(x^{-1},1,1\right)\mathcal{I}_3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&x\end{pmatrix}\operatorname{diag}\left(x,1,x^{-1}\right)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&x^{-1}\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Passo 11:
Apresentar os termos da factorização:

$$\mathcal{A}_{+}^{(0)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&x-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{(0)} = \operatorname{diag}\left(x,1,1\right)$$

$$\mathcal{A}_{-}^{(0)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&x^{-1}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Considerando ainda a mesma matriz $\mathcal{A}$ vamos proceder à sua factorização utilizando o algoritmo descrito na secção 3.6.

Passo 1:
$n = 3$

Passo 2:
A primeira coluna não tem polos pertencentes a $\mathbb{T}_+$.
A segunda coluna não tem polos pertencentes a $\mathbb{T}_+$.
A terceira coluna tem um polo pertencente a $\mathbb{T}_+$. $(x = 0)$

Passo 3:

$$m_1(x) = 1$$

$$m_2(x) = 1$$

$$m_3(x) = x$$

Passo 4:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$s_3 = 1$$

Passo 5:
Como $-s_1 \leq -s_2 \leq -s_3$, então, $\mathcal{T} = \mathcal{I}$
Passo 6:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}aux_+ &= \mathcal{A}(x)\,\mathrm{diag}\left(m_1(x), m_2(x), m_3(x)\right)\mathcal{T}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & x & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}\left(1,1,x\right)\mathcal{I}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x^2-x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda aux &= \mathcal{T}\begin{pmatrix} x^{-S_1} & 0 & 0 \\ 0 & x^{-S_2} & 0 \\ 0 & 0 & x^{-S_3} \end{pmatrix}\mathcal{T}^{-1} = \\ &= \mathrm{diag}\left(1,1,x^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}aux_- = \mathcal{T}\begin{pmatrix} \frac{x^{S_1}}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^{S_2}}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^{S_3}}{m_3} \end{pmatrix} = \mathcal{I}_3$$

Passo 7:
$\det \mathcal{A}aux\,(x) = x^2$
Passo 8:
O $\det \mathcal{A}aux$ tem um zero com multiplicidade 2: $x = 0$.
Passo 9:
O $\det \mathcal{A}aux$ não tem polos.
Passo 10:
$k = \underset{\mathbb{T}}{\mathrm{ind}}\, x^2 = 2$
Passo 11:
$n = 3$
Passo 12:

$N = n \times r + k = 2$

Passo 13:

$\det \mathcal{A}aux_+(x) = x^2$

O $\det \mathcal{A}aux_+$ tem um zero com multiplicidade 2: $x = 0$.

Passo 14:

Construir um ciclo com 2 iterações, repetindo para cada uma delas os passos de 14.1 a 14.5.

Primeira iteração:

Passo 14.1:

$$\mathcal{A}_+^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_2 = \alpha_1 C_1$ com $\alpha_1 = 1$

Passo 14.2:

$$\mathcal{U}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 14.3:

$$\kappa_1^{(2)} = 0, \kappa_2^{(2)} = 0, \kappa_3^{(2)} = -1$$

$$\kappa_1^{(1)} = 0, \kappa_2^{(1)} = 0 + 1 = 1, \kappa_3^{(1)} = -1$$

Passo 14.4:

Como $\kappa_1^{(1)} \geq \kappa_2^{(1)} \geq \kappa_3^{(1)}$ é uma condição falsa temos que proceder a uma troca entre as duas primeiras colunas na matriz identidade. Então,

$$\mathcal{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 14.5:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+^{(1)} &= \mathcal{A}_+^{(2)} \left(\mathcal{U}^{(2)}\right)^{-1} \left(\mathcal{T}^{(1)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x^{-1} & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)} &= \mathcal{T}^{(1)}\widetilde{\Lambda}^{(1)}\left(\mathcal{T}^{(1)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}\left(1, x, x^{-1}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{diag}\left(x, 1, x^{-1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{-}^{(1)} &= \left(\Lambda^{(1)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(1)}\mathcal{U}^{(2)}\Lambda^{(2)}\mathcal{A}_{-}^{(2)} = \\ &= \mathrm{diag}\left(x^{-1}, 1, x\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}\left(1, 1, x^{-1}\right)\mathcal{I}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Segunda iteração:
Passo 14.1:
$\mathcal{A}_{+}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$C_3 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ com $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
Passo 14.2:

$$\mathcal{U}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Passo 14.3:

$$\kappa_1^{(1)} = 1, \kappa_2^{(1)} = 0, \kappa_3^{(1)} = -1$$
$$\kappa_1^{(0)} = 1, \kappa_2^{(0)} = 0, \kappa_3^{(0)} = -1 + 1 = 0$$

Passo 14.4:
Como $\kappa_1^{(0)} \geq \kappa_2^{(0)} \geq \kappa_3^{(0)}$, então, a matriz $\mathcal{T}^{(0)} = \mathcal{I}$;
Passo 14.5:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{+}^{(0)} &= \mathcal{A}_{+}^{(1)}\left(\mathcal{U}^{(1)}\right)^{-1}\left(\mathcal{T}^{(0)}\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 - x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x^{-1} \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{I}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{(0)} &= \mathcal{T}^{(0)}\widetilde{\Lambda}^{(0)}\left(\mathcal{T}^{(0)}\right)^{-1} = \\ &= \mathcal{I}_3\,\mathrm{diag}\,(x,1,1)\,\mathcal{I}_3 = \\ &= \mathrm{diag}\,(x,1,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_-^{(0)} &= \left(\Lambda^{(0)}\right)^{-1}\mathcal{T}^{(0)}\mathcal{U}^{(1)}\Lambda^{(1)}\mathcal{A}_-^{(1)} = \\ &= \mathrm{diag}\left(x^{-1},1,1\right)\mathcal{I}_3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&x\end{pmatrix}\mathrm{diag}\left(x,1,x^{-1}\right)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&x^{-1}\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Passo 15:
Apresentar os termos da factorização:

$$\mathcal{A}_+^{(0)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&x-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{(0)} = \mathrm{diag}\,(x,1,1)$$

$$\mathcal{A}_-^{(0)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&x^{-1}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Como se pode verificar, pela análise do exemplo apresentado, no primeiro caso é necessário proceder a um processo iterativo com quatro passos enquanto que no segundo algoritmo, depois de se proceder às simplificações iniciais, consegue-se com apenas duas iterações obter a factorização pretendida. Dado que cada iteração acarreta consigo bastantes cálculos mais ou menos trabalhosos, consoante a complexidadeda matriz considerada, é claro que a redução do número de iterações simplifica bastante o processo da factorização.

3.9 Factorização de funções matriciais triangulares 2×2

Esta secção é dedicada ao estudo da factorização das funções matriciais triangulares de ordem 2×2 cujas entradas pertencem a $H^{\mu}(\mathbb{T})$ e os elementos da

diagonal principal são regulares. Nestas condições, pretende-se demonstrar que a factorização destas funções matriciais pode ser reduzida ao problema da factorização de funções matriciais racionais.

Seja $\mathcal{A} \in C^{2\times 2}(\mathbb{T})$ uma função matricial triangular regular da forma

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T} \text{ e } a, b, c \in H^{\mu}(\mathbb{T})$$

onde a e c são funções factorizáveis e não necessariamente racionais. Refira-se que estamos a considerar uma matriz triangular inferior mas a demosntração seria idêntica para uma matriz triangular superior.

Pretende-se mostrar que $\mathcal{A}$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \mathcal{R} \mathcal{A}_- \tag{3.46}$$

onde $\mathcal{A}_{\pm} \in C^{2\times 2}_{\pm}(\mathbb{T})$ e $\mathcal{R} \in R^{2\times 2}(\mathbb{T})$.

Com a representação de $\mathcal{A}$ na forma (3.46) basta factorizar $\mathcal{R}$ para obtermos uma factorização de $\mathcal{A}$.

Dado que a e c pertencem a $H^{\mu}(\mathbb{T})$ e são regulares pelo teorema 1 são factorizáveis, logo, podemos escrever estas funções na forma:

$$a = a_+ t^{k_a} a_-, \quad t \in \mathbb{T}$$

$$c = c_+ t^{k_c} c_-, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} a_+ t^{k_a} a_- & 0 \\ b & c_+ t^{k_c} c_- \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & c_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ c_-^{-1} b a_+^{-1} & t^{k_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & c_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-k_a} c_+^{-1} b a_-^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ 0 & t^{k_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vamos considerar $f = t^{-k_a} c_+^{-1} b a_-^{-1}$. É claro que f pode ser escrita na forma

$$f = f_+ + f_- \tag{3.47}$$

onde $f_{\pm}$ admitem um prolongamento analítico no interior e exterior de $\mathbb{T}$, respectivamente.

Tendo em conta que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-k_a} c_+^{-1} b a_-^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$$

e a identidade (3.47) podemos escrever

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_+ + f_- & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_- & 1 \end{pmatrix}.$$

Daqui concluimos que $\mathcal{A}$ pode ter a seguinte representação

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & c_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ 0 & t^{k_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix}.$$

Considerando $\mathcal{M}_+ = \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & c_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_+ & 1 \end{pmatrix} \in C_+^{2\times 2}(\mathbb{T})$ vamos simplificar o factor que está no centro e obtemos

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+ \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ 0 & t^{k_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_- t^{k_a - k_c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix}.$$

Se $k_a \leq k_c$ já temos a factorização de $\mathcal{A}$.
Vamos considerar agora o caso $k_a > k_c$.
Seja

$$g = f_- t^{k_a - k_c}. \tag{3.48}$$

Podemos escrever g na forma

$$g = g_+ + g_- \tag{3.49}$$

e, portanto, temos a seguinte representação para $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+ \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ 0 & t^{k_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{M}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ 0 & c_- \end{pmatrix} \in C_-^{2\times 2}(\mathbb{T})$.
Por simplificação dos factores centrais temos

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+ \begin{pmatrix} t^{k_a} & 0 \\ t^{k_c} g_+ & t^{k_c} \end{pmatrix} \mathcal{M}_-. \tag{3.50}$$

Considerando as identidades (3.48) e (3.49) temos

$$f_- t^{k_a - k_c} = g_+ + g_-.$$

Desenvolvendo a função f_- em série temos

$$f_- = \frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t^2} + ... + \frac{\alpha_k}{t^k} + ...$$

e, portanto,

$$f_- t^{k_a-k_c} = \underbrace{\alpha_1 t^{k_a-k_c-1} + \alpha_2 t^{k_a-k_c-2} + ... + \alpha_{k_a-k_c}}_{g_+} + \underbrace{...}_{g_-}$$

É claro que g_+ é um polinómio de grau inferior a $k_a - k_c$. Isto prova que o factor central em (3.50) é racional e, portanto, a factorização de $\mathcal{A}$ pode ser obtida aplicando o algoritmo estudado para as funções matriciais racionais.

Consideremos agora um exemplo no qual é apresentada uma função matricial triangular em que uma das duas entradas não é racional. Para aquela função matricial iremos determinar a sua factorização pelo algoritmo referido na secção 3.3 depois de a escrevermos na forma (3.46).

Exemplo 5 *Seja $\mathcal{B} \in C^{2\times 2}(\mathbb{T})$ a seguinte função matricial triangular:*

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ te^t + te^{\frac{1}{t}} & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Os elementos da diagonal principal são obviamente factorizáveis. É claro que $\mathcal{B}$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ t\left(e^t + e^{\frac{1}{t}}\right) & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ f(t) & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t, 1) \end{aligned}$$

onde $f(t) = e^t + e^{\frac{1}{t}}$. Esta função é da forma (3.47) com

$$f_+(t) = e^t$$

e

$$f_-(t) = e^{\frac{1}{t}}.$$

Daqui temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{\frac{1}{t}} & 0 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t, 1) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te^{\frac{1}{t}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Procedendo ao desenvolvimento em série de potências das funções

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + ...$$

e

$$e^{\frac{1}{t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^k k!} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3} + ...$$

temos

$$te^{\frac{1}{t}} = t + 1 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{6t^2} + ...$$

Podemos então, escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te^{\frac{1}{t}} - t - 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te^{\frac{1}{t}} - t - 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} \in C_+^{2\times 2}(\mathbb{T}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te^{\frac{1}{t}} - t - 1 & 1 \end{pmatrix} \in C_-^{2\times 2}(\mathbb{T})$$

e

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}(\mathbb{T}). \tag{3.51}$$

Para obter a factorização de $\mathcal{B}$ é agora apenas necessário factorizar (3.51). Como esta função é racional podemos utilizar o programa informático referido na secção 3.7. A factorização obtida é

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & t \\ -1 & t+1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, a factorização de $\mathcal{B}$ será

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} -1 & t \\ -(e^t+1) & te^t + t + 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(t,1) \begin{pmatrix} te^{\frac{1}{t}} - t - 1 & 1 \\ t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

3.10 O ficheiro "FactorizacaoDirFinal" e o seu funcionamento.

A fase seguinte deste trabalho consistiu na aplicação dos programas construídos à definição de factorização direita de uma função matricial racional. Recordando a secção 2.3 do capítulo 2 veja-se a definição 9. Tendo em conta

o teorema 4 que estabelece uma relação entre as factorizações esquerda e direita de uma função matricial $\mathcal{G} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$, e que afirma a equivalência entre a factorização esquerda de $\mathcal{G}$ e a factorização direita da matriz transposta de $\mathcal{G}$, foi construído o ficheiro "FactorizacaoDirFinal". Este ficheiro pressupõe a introdução, pelo utilizador, da função matricial para a qual se pretende obter a factorização direita. Em seguinda, é determinada a matriz transposta e é lhe aplicado o algoritmo utilizado no ficheiro "FactorizacaoEsqFinal". São encontrados os termos da factorização esquerda, os quais depois de transpostos, são os termos da factorização direita pretendida.

O exemplo que se segue ilustra a factorização direita de uma função matricial racional obtida pela utilização do ficheiro "FactorizacaoDirFinal".

Exemplo 6 *Seja $\mathcal{M} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ a função matricial racional regular*

$$\mathcal{M}(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} & \frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} & 0 \\ \frac{x}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^3} & \frac{1}{(x-3)^2} & 1+4x \end{pmatrix}.$$

Uma factorização direita desta função matricial obtida pela aplicação do ficheiro "FactorizacaoDirFinal", é:

$\mathcal{M}_+$ =MatrixForm[Transpose[$\mathcal{A}_+$]]

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(x-3)^2} & 1+4x \\ 0 & \frac{8123+343x}{343(x-3)^2} & \frac{169}{343}(-25+243x) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λ=MatrixForm[Λ1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_-$ =MatrixForm[Transpose[$\mathcal{A}_-$]]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{6x^2}{1-5x+6x^2} \\ -\frac{169x(-25+243x)}{343(1+2x)^2} & \frac{x(1+4x)}{(1+2x)^2} & \frac{x^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \\ 1 & 0 & \frac{x^3}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^3} \end{pmatrix}.$$

m

Capítulo 4

Factorização de funções matriciais racionais relativas a outras circunferências e rectas

Dando continuidade ao trabalho apresentado no capítulo anterior e com o objectivo de aprofundar o estudo da factorização de funções matriciais racionais, pretendeu-se aplicar os programas informáticos já construídos na obtenção dos termos de uma factorização relativamente a curvas fechadas e limitadas no plano complexo. Normalmente, muitos autores referem a possibilidade de obter outras factorizações procedendo simplemente a uma mudança de variável mas poucos de dedicam a aprofundar este estudo. Penso que a existência de um progama informático que em poucos segundos permite a obtenção dos índices parciais e termos da factorização é, sem dúvida, uma mais valia naquele estudo.

Nas duas primeiras secções deste capítulo, serão apresentados dois ficheiros informáticos designados por "FactorizacaoEsqCurv" e "FactorizacaoEsqRectaReal". O primeiro determina os termos da factorização de uma função matricial racional relativamente a uma circunferência conhecidos os seus centro e raio. O segundo determina a factorização em relação à recta real.

Na secção 4.3 é apresentado um ficheiro informático designado por "FactorizarMatrizesRacionais" que junta todos os programas até aqui referidos e, através da utilização de caixas de diálogo, vai conduzindo o utilizador na sua aplicação.

4.1 Factorização de funções matriciais racionais com relação a outras circunferências

Nesta secção será apresentado, através de um exemplo, o ficheiro "FactorizacaoEsqCurv" que foi construído no programa "Mathematica". O seu funcionamento é semelhante ao dos ficheiros já estudados, porém, é necessário que o utilizador comece por indicar o centro e o raio da circunferência relativamente à qual se pretende construir a factorização. Em seguida, deverá introduzir a matriz e fazer correr o ficheiro do modo habitual.

Depois da apresentação do exemplo proceder-se-á a uma breve explicação das alterações feitas no ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" e que possibilitaram a construção do novo ficheiro agora apresentado. Para tal utilizar-se-ão fluxogramas com informações relativas ao início e ao final do ficheiro, onde é realizada uma mudança de variável.

Refira-se ainda que, por questões de ordem prática, optei por escrever a matriz que vai ser factorizada na incógnita t. Em seguida, é feita uma mudança para a variável x, aplicando-se a seguinte substituição:

$$t = rx + z_0.$$

A matriz que se obtém é submetida ao algoritmo usual e, no final, os termos da factorização aparecem escritos em função de x. Assim, é necessário voltar à incógnita t e para isso procede-se à substituição inversa:

$$x = \frac{t - z_0}{r}.$$

A opção de escrever a matriz inicial em função de t prendeu-se com o facto de todo o programa já estar escrito em função de x. Como é necessário proceder a uma mudança de variável isso implicaria reescrever todo o programa considerando outra variável que não o x.

Exemplo 7 *Neste exemplo pretende-se obter a factorização da matriz regular* $\mathcal{A} \in R^{n\times n}(\mathbb{T})$ *em relação à circunferência* $|z+1| = 2$.

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1+t & t & 0 \\ t-1 & 1 & 1+4t \end{pmatrix}$$

Logo, o centro desta circunferência é

$$z_0 = -1$$

e o seu raio

$$r = 2.$$

Então, $t = r \times x + z_0$ *e a factorização de* $\mathcal{A}(t)$ *obtida pela aplicação do ficheiro "FactorizacaoEsqCurv" é:*

$\mathcal{A}_+ = (\text{MatrixForm}[\text{A}_+])/.x \to ((t - z_0)/r)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{1+t} \\ 0 & \frac{4}{1+t} & \frac{4}{1+t} \\ \frac{16}{1+t} & 0 & \frac{4}{1+t} \end{pmatrix}$$

$\Lambda = (\text{MatrixForm}[\Lambda Aux])/.x \to (t - z_0)$

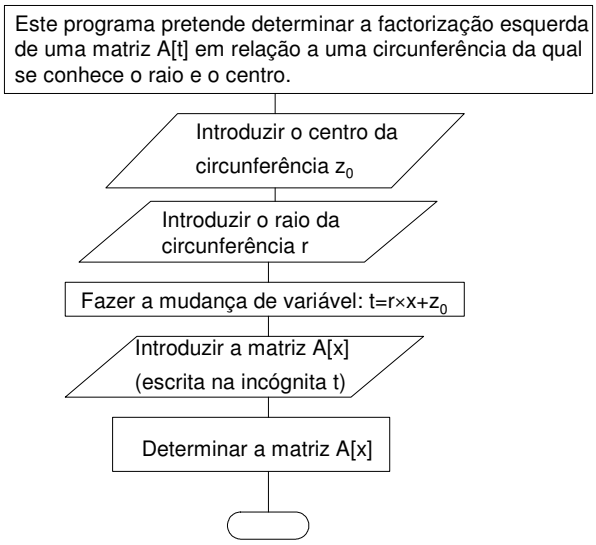
$$\begin{pmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_- = (\text{MatrixForm}[\text{A}_-])/.x \to ((t - z_0)/r)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4(1+t)} & \frac{1}{4(1+t)} & 1 - \frac{3}{4(1+t)} \\ \frac{1}{1+t} & 1 - \frac{1}{1+t} & 0 \\ 1 - \frac{1}{1+t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se pode verificar (veja anexo 6.4) o início deste ficheiro é ligeiramente diferente pois requer, da parte do utilizador, a indicação dos centro e raio da circunferência relativamente à qual se pretende determinar a factorização esquerda. Só em seguida se deverá proceder à indicação da matriz $\mathcal{A}$. Note-se que é considerada uma matriz $\mathcal{A}[x]$ para a definição da função matricial mas esta deve ser escrita na incógnita t. É depois o próprio ficheiro que procederá à mudança de variável fazendo a substituição de t por x. Para uma melhor compreensão destes procedimentos veja-se o diagrama de fluxo

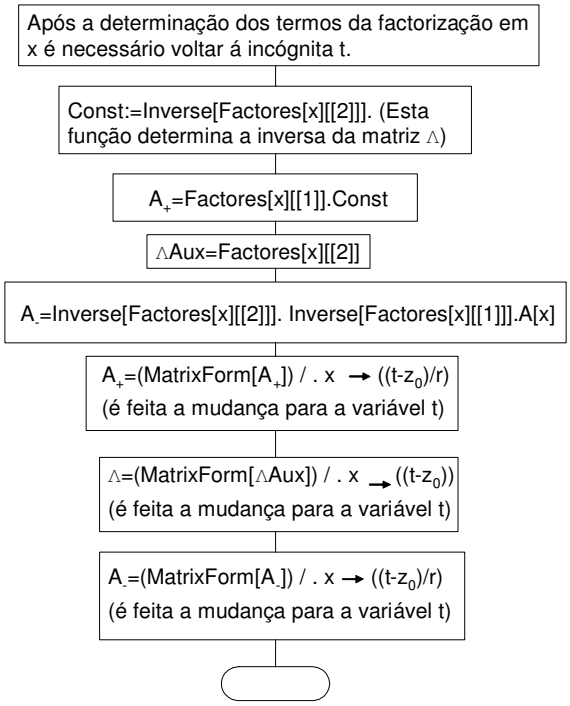
(4.1).



(4.1)

Em seguida, é aplicado o algoritmo usual e que já foi estudo no ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" . No final do ficheiro que estamos a analisar será necessário voltar à incógnita t para se obter os termos da factorização da

matriz inicial. Veja-se o fluxograma (4.2).



(4.2)

4.2 Factorização de funções matriciais racionais na recta real

No primeiro capítulo deste trabalho é apresentada a definição 5 de factorização de uma função matricial em relação à circunferência unitária. Nesse mesmo capítulo é referido que podemos definir a factorização de uma matriz factorizável em relação a qualquer curva Γ fechada e limitada. Admitamos que a recta real divide o plano complexo em dois domínios, um interior (limitado) identificado por D_+ e outro exterior (ilimitado) o qual unido com o ponto infinitamente afastado é desigando por D_-. Isto permite considerar a recta $\overline{\mathbb{R}}$ como uma curva fechada e limitada e, portanto, recorrendo a uma mudança de variável, transformamos a circunferência unitária $\mathbb{T}$ na recta real

$\bar{\mathbb{R}}$. Procedendo à mudança de variável:

$$t = \frac{1+x}{1-x} i \tag{4.3}$$

e considerando a recta real como uma curva fechada e limitada vamos definir a factorização de uma função matricial racional relativamente a essa "curva".

Definição 10 *Seja* $\mathcal{R} \in C^{n\times n}\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$. *Uma factorização (esquerda) de* $\mathcal{R}$ *relativa à recta real* $\bar{\mathbb{R}}$ *é uma representação do tipo*

$$\mathcal{R}(t)=\mathcal{R}_+(\theta)\Lambda(\theta)\mathcal{R}_-(\theta),\ \theta \in \bar{\mathbb{R}}$$

onde

$$\mathcal{R}_+^{\pm 1}(\theta) \in C_+^{n\times n}(\bar{\mathbb{R}}),$$

isto é, $\mathcal{R}_+^{\pm 1}$ *são funções analíticas no semiplano superior,*

$$\mathcal{R}_-^{\pm 1}(\theta) \in C_-^{n\times n}(\bar{\mathbb{R}}),$$

isto é, $\mathcal{R}_-^{\pm 1}$ *são funções analíticas no semiplano inferior,*

$$\Lambda(\theta) = \operatorname{diag}\left[\theta^{\kappa_1}, ..., \theta^{\kappa_n}\right],$$

$$\theta = \frac{t-i}{t+i}$$

e $\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., n$ *tais que* $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_n$.

Com base nesta generalização e recorrendo à substituição mencionada em (4.3) foi construído o ficheiro "FactorizacaoEsqRectaReal".

Através do seguinte exemplo vamos mostrar uma factorização da função matricial $\mathcal{M}$ com

Exemplo 8 *Pretende-se obter a factorização da matriz* $\mathcal{M}$ *em relação à recta real* $\bar{\mathbb{R}}$.

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{t^2+1} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição (4.3) podemos transferir este problema de factorização para a circunferência unitária. A factorização de $\mathcal{M}$ *obtida a partir do ficheiro "FactorizacaoEsqRectaReal" é:*

$\mathcal{A}_+ = (\text{MatrixForm}[\mathcal{A}_+]\ )/.\text{x}\rightarrow ((t-i)/(t+i))$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\frac{(t-i)^2}{(t+i)^2}-\frac{6(t-i)}{t+i}}{12-8\sqrt{2}-\frac{4(t+i)}{t+i}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λ=(MatrixForm[ΛAux])/.x$\rightarrow ((t-i)/(t+i))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_- = (\text{MatrixForm}[\mathcal{A}_-])\ /.\text{x}\rightarrow ((t-i)/(t+i))$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(t+i)\left(-3+2\sqrt{2}+\frac{t-i}{t+i}\right)}{t-i} & 0 \end{pmatrix}.$$

O ficheiro "FactorizacaoEsqRectaReal" começa por definir a substituição que transforma a circunferência unitária $\mathbb{T}$ na recta real $\bar{\mathbb{R}}$, escrevendo a incógnita t em função de x. Em seguinda, o utilizador deverá introduzir uma matriz $\mathcal{M}$. O ficheiro irá proceder à substituição referida escrevendo uma matriz $\mathcal{A}$. É importante mencionar que aquando da substituição é necessário fazer a simplificação das expressões que constituem os elementos das entradas da matriz $\mathcal{A}$. Só depois se dará início à aplicação do algoritmo usual da factorização.

No final, os termos obtidos estão expressos em função de x e torna-se necessário proceder à mudança de variável

$$x = \frac{t-i}{t+i}.$$

Assim, são determinados os termos da factorização relativa à recta real para funções matriciais racional regulares escritas na incógnita t.

4.3 O ficheiro "FactorizarMatizesRacionais"

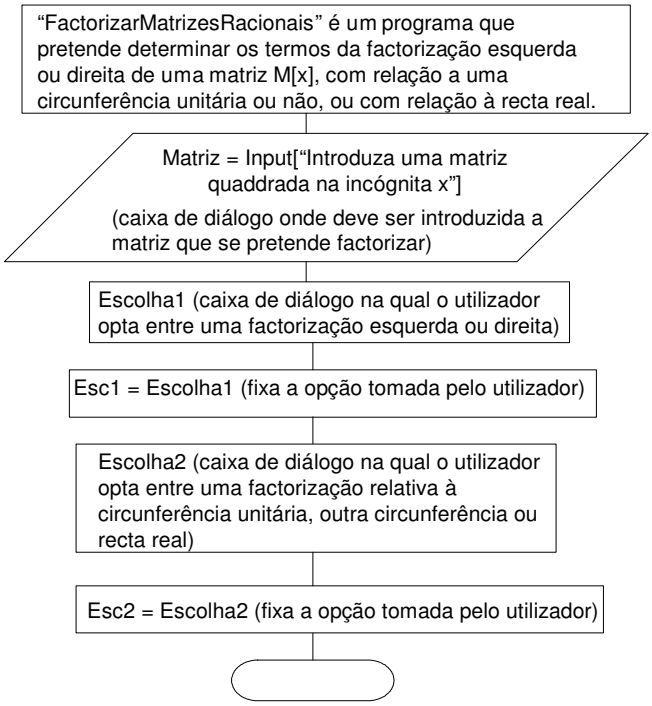
Com o objectivo de facilitar a utilização dos programas informáticos construídos no âmbito deste trabalho, procedeu-se à criação de um único ficheiro que permite aceder directamente a qualquer uma das diferentes factorizações que estamos a considerar.

Este novo ficheiro é interactivo por utiliza caixas de diálogo para conduzir o utilizador na sua aplicação. Foi necessário utilizar a versão 6.0 do pacote informático "Mathematica" pois apenas esta versão ou superiores permitem a utilização de caixas de diálogo.

O modo de activar o ficheiro é semelhante ao processo que temos vindo a utilizar. Assim, deverá o utilizador seleccionar todos comandos que aparecem quando abrimos o ficheiro "FactorizarMatrizesRacionais" e pressionar simultameamente as teclas "SHIFT" e "ENTER". Vai aparecer no écran uma janela que solicita ao utilzador a introdução de uma matriz quadrada na incógnita x. Depois de escrever a matriz que se pretende factorizar, o utilizador deverá pressionar o botão "OK" que aparece na referida janela. Em seguida, surgirá uma nova janela, na qual se permite ao utilizador que opte entre uma factorização direita ou esquerda, pressionando o respectivo botão. Na fase que se segue, aparece uma janela onde o utilizador deve optar entre o tipo de factorização que pretende. Poderá escolher uma factorização relativa à circunferência unitária, relativa a outra circunferência ou com relação à recta real. Se o utilizador escolheu o botão correspondente a "outracircunferência", vão surgir ainda mais duas caixas de diálogo que solicitam, respectivamente, a indicação do centro e do raio dessa circunferência. Na fase final, aparece no écran um botão com a indicação "Apresentar os termos da factorização". Ao pressionar este botão surgem as expressões "$\mathcal{M}_+$", "Λ" e "$\mathcal{M}_-$" que correspondem aos três termos da factorização pretendida. O utilizador deverá pressionar em cada um deles para obter o respectivo termo.

Vamos agora apresentar alguns diagramas de fluxo para uma melhor com-

preensão do funcionamento do ficheiro "FactorizarMatrizesRacionais".



(4.4)

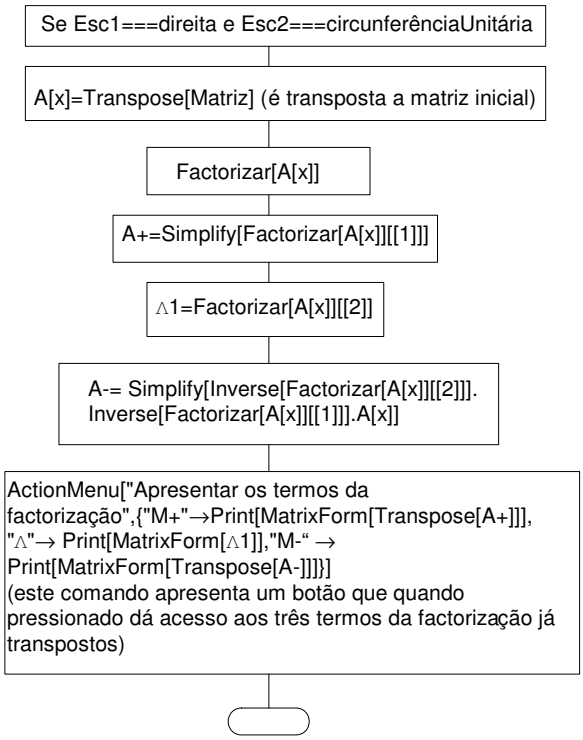
Na primeira fase do programa é necerssário introduzir a matriz quadrada para a qual se pretende obter a factorização. Depois poderá o utilizador escolher o tipo de factorização que pretende. Dado que os comando "Escolha1" e "Escolha2" são caixas de diálogo é necessário fixar as respostas dadas pelo utilizador e para isso recorreu-se aos comandos "Esc1" e "Esc2", respectivamente (veja-se (4.4)).

Em seguida, construiu-se uma função designada por "Factorizar" a qual recebe uma matriz quadrada e determina o termo positivo e o termo central da factorização esquerda dessa matriz em relação à circunferência unitária. A construção desta função foi conseguida seguindo os passos utilizados no ficheiro "FactorizacaoEsqFinal" e com recurso ao comando "Module" que permite tratar a matriz inicial como uma variável local. Assim, limitámo-nos a agrupar as instruções, que eram utilizadas separadamente no referido ficheiro, dentro do mesmo comando. Refira-se que nesta fase a função "Factorizar" não produz qualquer resposta, pois ainda não está a ser aplicada.

Na fase seguinte do programa é utilizado o comando "Which". Este

permite considerar os diversos casos que resultam das opções tomadas pelo utilizador quanto ao tipo de factorização pretendida. Temos, então, seis situações distintas.

Se o utilizador optou por uma factorização direita com relação à circunferência unitária é necessário transpor a matriz inicial e aplicar-lhe a função "Factorizar". Daqui iremos obter o termo $\mathcal{A}_+$ e o factor central Λ. A partir destes é construído o factor $\mathcal{A}_-$. Para determinar os termos da factorização que se pretendia falta apenas transpor os factores auxiliares $\mathcal{A}_+$, Λ e $\mathcal{A}_-$. Veja-se o diagrama de fluxo (4.5).



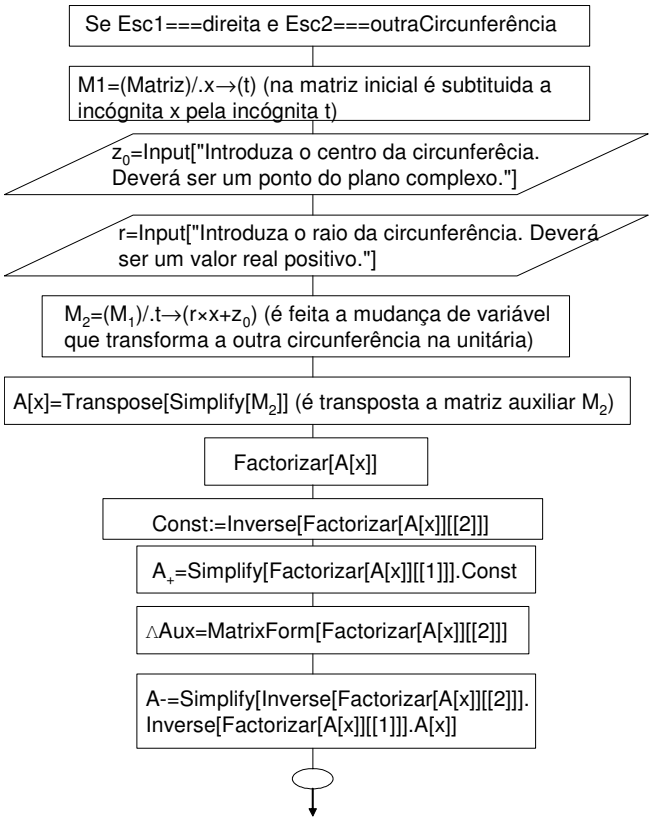
(4.5)

Para a determinação de uma factorização direita com relação a uma circunferência diferente da unitária é necessário considerar uma matriz auxiliar $\mathcal{M}_1$ na qual a variável x será substituida pela letra t. No écran aparece uma caixa de diálogo que solicita ao utilizador a indicação do centro da circunferência relativamente à qual se pretende obter a factorização. Surge, em seguida, uma nova janela que vai receber a indicação do raio da referida circunferência. Agora define-se uma outra matriz auxiliar $\mathcal{M}_2$ que se obtém

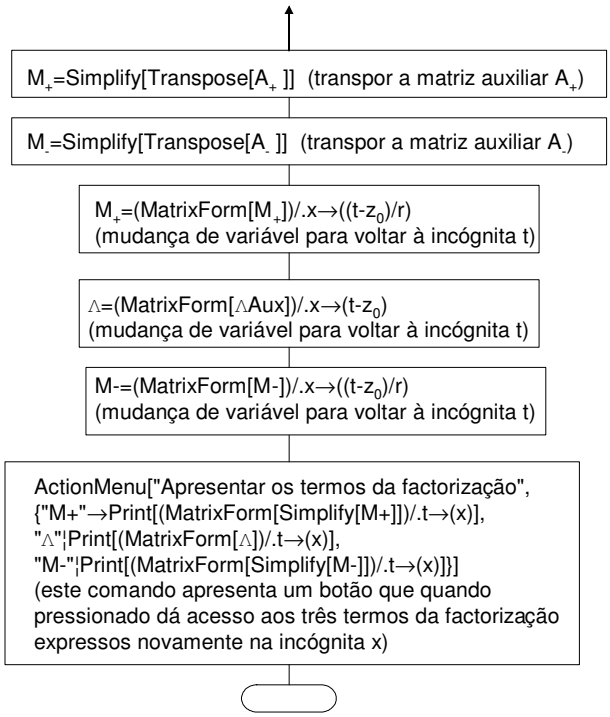
pela mudança da variável

$$t = rx + z_0$$

a qual transforma a circunferência que estamos a considerar na circunferência unitária. Dado que se pretende uma factorização direita é necessário transpor a matriz $\mathcal{M}_2$ e, em seguida, aplica-se-lhe a função "Factorizar". Depois de obtidos os termos auxiliares da factorização é necessário proceder à transposição dos mesmos e à mudança de variável que permite voltar à circunferência inicial. Vejamos os fluxogramas (4.6) e (4.7).



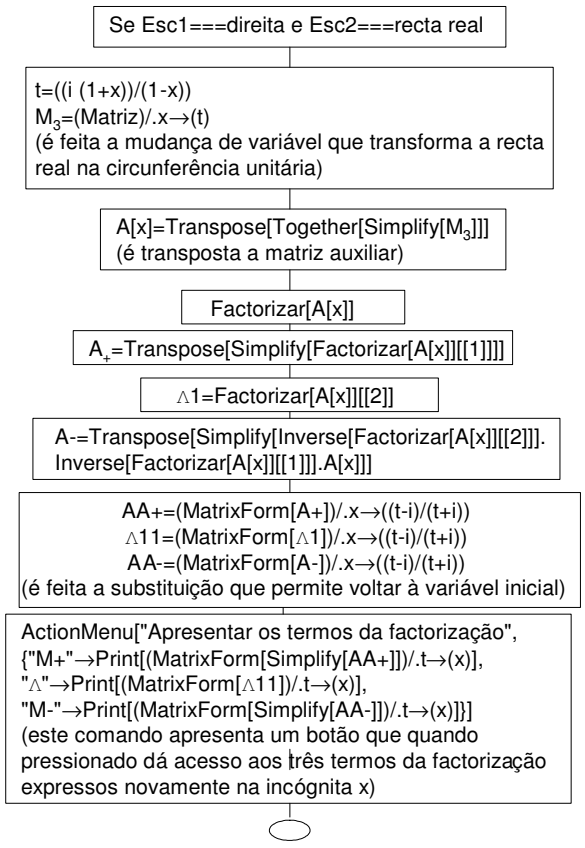
(4.6)



(4.7)

Se o utilizador pretende obter uma factorização direita relativamente à recta real é necessário proceder à mudança de variável (4.3) e considerar, portanto, a matriz auxiliar $\mathcal{M}_3$. Esta matriz será transposta e aplicar-se-lhe-á a função "Factorizar". Depois de obtidos os termos auxiliares da factorização é necessário proceder à transposição dos mesmos e à mudança de variável que

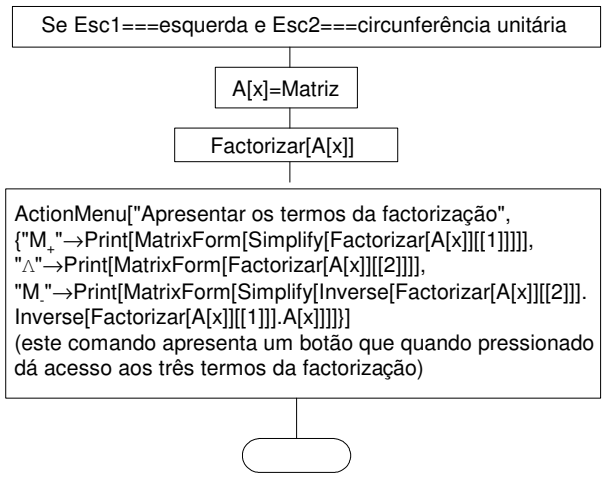
permite voltar à recta real. Veja-se o diagrama de fluxo (4.8).



(4.8)

Quando o utilizador pretende obter uma factorização esquerda em relação circunferência unitária basta considerar a matriz inicial e aplicar-lhe a função "Factorizar". Depois aparece o botão que permite aceder aos três termos da

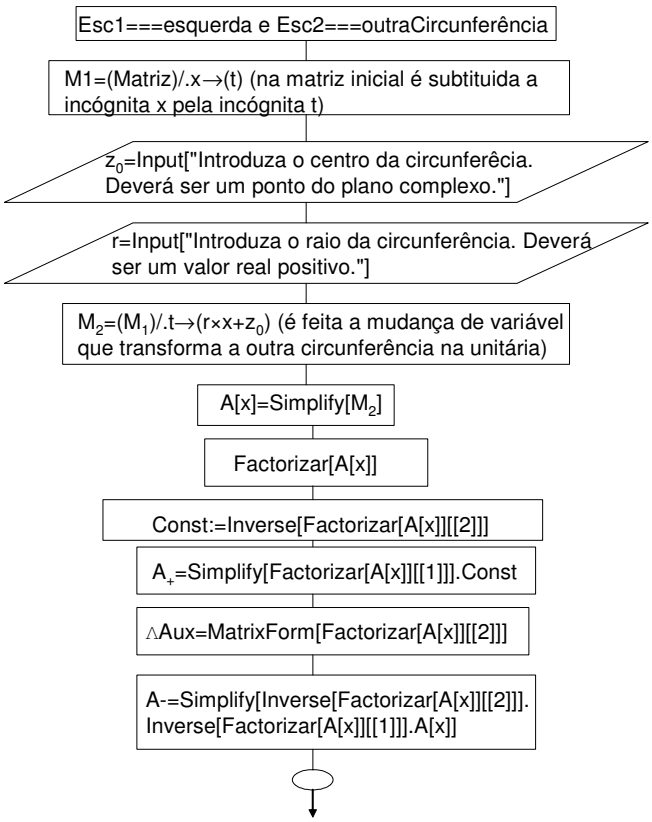
factorização pretendida, como se pode ver no fluxograma (4.9).



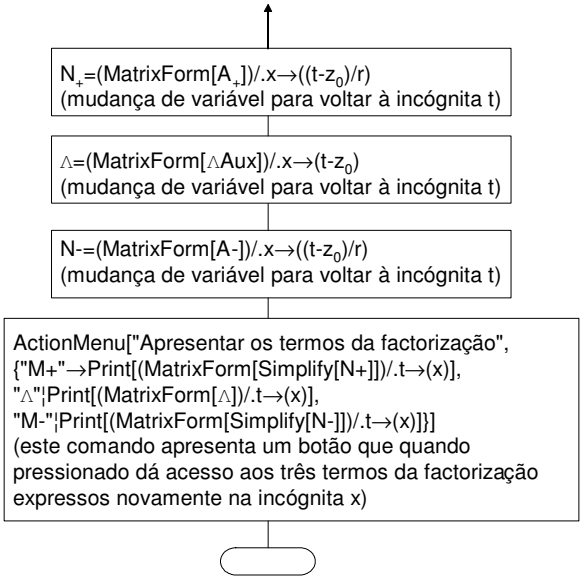
(4.9)

Para determinar uma factorização esquerda com relação a uma circunferência diferente da unitária segue-se um processo semelhante ao que já foi descrito para factorizações direitas sem, no entanto, ser necessário proceder à transposição da matriz inicial. Os diagramas (4.10) e (4.11) que se seguem

explicam os procedimentos adoptados.



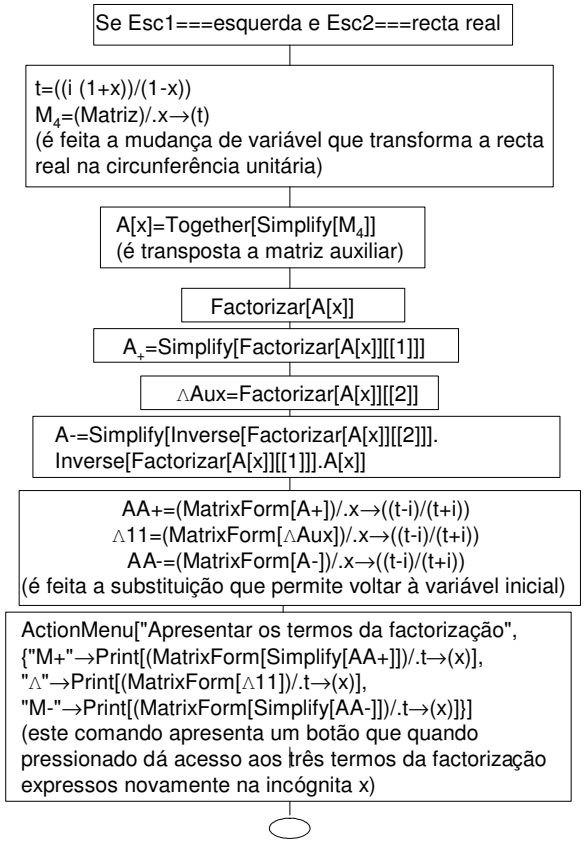
(4.10)



(4.11)

Finalmente, para se obter uma factorização esquerda relativa à recta real também se seguirá o processo considerado para a factorização direita mas sem se efectuar a transposição da matriz inicial. A consulta do fluxograma (4.12) permite compreender o funcionamento da parte final do programa

"FactorizarMatrizesRacionais".



(4.12)

´

Capítulo 5

Factorização de funções matriciais racionais por realização

Neste capítulo continuaremos a estudar a factorização de funções matriciais racionais em relação a uma curva Γ, de Jordan fechada e limitada no plano complexo $\mathbb{C}$, apresentando um método substancialmente diferente do algoritmo apresentado na secção 3.3. Saliente-se que a grande diferença reside no facto deste processo não ser iterativo.

Este método baseia-se no pressuposto de que qualquer função matricial racional quadrada pode ser escrita na forma

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}. \tag{5.1}$$

Esta representação é designada por uma realização e permite reduzir o problema da factorização de $\mathcal{F}$ a um problema de Álgebra Linear envolvendo as quatro matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ mencionadas na definição 5.1 e cuja caracterização será feita mais adiante.

O resultado principal deste capítulo é enunciado no teorema 10 que descreve o processo que permite obter uma factorização canónica direita de uma função matricial racional e estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência da referida factorização. Será apresentado um exemplo onde este método é utilizado na obtenção de uma factorização canónica direita em relação a $\mathbb{T}$.

É importante mencionar que o processo de factorização aqui descrito faz parte dos resultados apresentados na secção 4 de [9] e em [10].

Antes de apresentar o referido processo é necessário estabelecer algumas definições, o que será feito nas secções 5.1 e 5.2.

5.1 Preliminares sobre matrizes lineares

Nesta secção vamos considerar $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$, duas funções matriciais quadradas de ordem m cujas entradas são funções complexas. Vamos ainda estabelecer que a incógnita x representa uma variável complexa. Nestas condições temos as seguintes definições:

Definição 11 *Designamos por Matriz Linear uma função matricial da forma*

$$x\mathcal{G} - \mathcal{A}, \tag{5.2}$$

onde $\mathcal{G}$ e $\mathcal{A}$ são matrizes complexas de ordem $m \times m$ e $x \in \Gamma$.

Definição 12 *Uma matriz linear da forma (5.2) diz-se $\Gamma-$regular se $x\mathcal{G}-\mathcal{A}$ é regular para todo o $x \in \Gamma$.*

Por uma questão de simplificação de linguagem, sempre que for conveniente iremos identificar uma matriz $p \times q$ com o operador linear que actua de C^q em C^p e que é definido pela acção canónica da matriz sobre as bases de C^q e C^p.

Estamos agora em condições de estabelecer a seguinte proposição que será de grande utilidade mais adiante:

Proposição 4 *Seja $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ uma matriz linear $\Gamma - regular$, e sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ duas matrizes definidas por:*

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{G} \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1} dx, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1} \mathcal{G} dx. \tag{5.4}$$

Então, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são projecções de tal modo que:

(i) $\mathcal{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{Q}$;

(ii) $\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1} \mathcal{P} = \mathcal{Q} \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1}$ na curva Γ e esta função admite um prolongamento analítico no exterior de Γ (D_-) e anula-se no ponto infinitamente afastado;

(iii) $\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1} \left(\mathcal{I} - \mathcal{P}\right) = \left(\mathcal{I} - \mathcal{Q}\right) \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1}$ na curva Γ e esta função admite um prolongamento analítico no interior de Γ (D_+).

As propriedades (i), (ii) e (iii) definidas na proposição anterior determinam as matrizes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de forma única, isto é, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são projecções que cumprem as condições (i), (ii) e (iii), então $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são definidas pelas fórmulas integrais mencionadas em (5.3) e (5.4).

Para melhor compreensão desta proposição, consideremos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ como duas matrizes por blocos relativamente à decomposição de C^m induzida pelas projecções $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. A condição (i) implica que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ têm uma representação diagonal por blocos do tipo:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} : \operatorname{Im}\mathcal{Q} \oplus \ker\mathcal{Q} \to \operatorname{Im}\mathcal{P} \oplus \ker\mathcal{P}$$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_2 \end{pmatrix} : \operatorname{Im}\mathcal{Q} \oplus \ker\mathcal{Q} \to \operatorname{Im}\mathcal{P} \oplus \ker\mathcal{P}.$$

A propriedade (ii) equivale a dizer que a matriz linear $x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_1$ é regular em D_- e $\mathcal{G}_1$ é invertível.

A propriedade (iii) equivale a dizer que a matriz linear $x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_2$ é regular em D_+ e $\mathcal{G}_2$ é invertível.

A demonstração da proposição 4 pode ser encontrada na secção (VI.1) de [10].

5.2 Realização de uma função matricial racional

Nesta secção será descrito o processo que permite obter a realização de uma matriz racional, isto é, a sua representação na forma (5.1). Para uma melhor compreensão desta definição será apresentado um exemplo de uma matriz racional decomposta por realização. Serão ainda referidas algumas propriedades das matrizes lineares $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$.

Começemos por constatar que qualquer função matricial racional $\mathcal{F}$ admite uma decomposição do tipo

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{K}(x) + \mathcal{L}(x), \tag{5.5}$$

onde $\mathcal{K}$ é uma função matricial racional cujas entradas são fracções próprias e $\mathcal{L}$ é uma matriz cujas entradas são funções polinomiais.

Dado que as entradas de $\mathcal{K}$ são fracções próprias isso significa são analíticas no infinito.

A decomposição (5.5) não é única. De facto, podemos adicionar uma matriz constante a $\mathcal{K}$ e subtraí-la a $\mathcal{L}$, o que nos permitiria obter variadas decomposições para $\mathcal{F}$.

Analisando em primeiro lugar a matriz $\mathcal{K}$, vamos aplicar-lhe a proposição que a seguir se enuncia e demonstra.

Proposição 5 *Uma função matricial racional $\mathcal{F}$ cujas entradas são fracções próprias pode ser escrita na forma*

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(x\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \tag{5.6}$$

onde $\mathcal{D} = \mathcal{F}(\infty)$ e $\mathcal{A}$ é uma matriz quadrada cujos valores próprios coincidem com os polos das entradas de $\mathcal{F}$.

Demonstração: Consideremos $\mathcal{D} = \mathcal{F}(\infty)$, isto é, a matriz cujas entradas são as imagens de $\mathcal{F}$ no infinito. $\mathcal{F}$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{D} + \frac{1}{p(x)}\mathcal{Q}(x), \tag{5.7}$$

onde o polinómio $p(x) = p_0 + xp_1 + ... + x^{r-1}p_{r-1} + x^r$ é o mínimo múltiplo comum dos denominadores das entradas de $\mathcal{F}$ e a matriz $\mathcal{Q}$ é polinomial. É claro que os zeros de $p(x)$ coincidem com os polos de $\mathcal{F}(x)$ e $p^{-1}\mathcal{Q}$ é analítica no infinito, onde toma o valor zero. É, ainda, evidente que a matriz $\mathcal{Q}$ é polinomial e o grau das suas entradas é inferior ao grau de $p(x)$ em, pelo menos, uma unidade. Vamos agora definir três matrizes por blocos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{I} \\ -p_0\mathcal{I} & -p_1\mathcal{I} & ... & -p_{r-1}\mathcal{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_0 & \mathcal{Q}_1 & ... & \mathcal{Q}_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Nestas matrizes $\mathcal{I}$ representa a identidade de ordem n, sendo n é o número de colunas de $\mathcal{F}$. Note-se que $\mathcal{A}$ é uma matriz quadrada de ordem rn. Vamos ainda considerar a matriz $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ como sendo a identidade com a mesma ordem de $\mathcal{A}$ e escrevemos a matriz $x\mathcal{I}_\mathcal{F} - \mathcal{A}$. Pelo facto de $\mathcal{A}$ ser uma matriz por blocos, verifica-se que os seus valores próprios vão coincidir com os zeros de $p(x)$. Temos ainda que

$$(x\mathcal{I}_\mathcal{F} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = \frac{1}{p(x)}\begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ x\mathcal{I} \\ \vdots \\ x^r\mathcal{I} \end{pmatrix}.$$

Desta iguadade concluimos que é possível escrever $\mathcal{F}(x) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(x\mathcal{I}_{\mathcal{F}} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ e os valores próprios de $\mathcal{A}$ coincidem com os polos das entradas de $\mathcal{F}$. ■

Aplicando este resultado à matriz $\mathcal{K}$ podemos escrevê-la na forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}} + \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(x\mathcal{I}_{\mathcal{K}} - \mathcal{A}_{\mathcal{K}})^{-1}\mathcal{B}_{\mathcal{K}} \tag{5.8}$$

onde

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}} = \mathcal{F}(\infty)$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{I} \\ -p_0\mathcal{I} & -p_1\mathcal{I} & \dots & -p_{r-1}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{I} \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_0 & \mathcal{Q}_1 & \dots & \mathcal{Q}_{r-1} \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Refira-se que $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ corresponde à matriz identidade com a mesma ordem de $\mathcal{A}$.

Tomamos agora o segundo termo da decomposição referida em (5.5), a matriz polinomial $\mathcal{L}$. Esta matriz é da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + x\mathcal{L}_1 + \dots + x^q\mathcal{L}_q.$$

Vamos definir três matrizes por blocos $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}' & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathcal{I}' \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_q \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -\mathcal{I}' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Nestas matrizes $\mathcal{I}'$ representa a matriz identidade de ordem l, sendo l o número de linhas de $\mathcal{L}$.

$\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ é uma matriz quadrada de ordem $(q+1)\,l$, onde q é o maior grau dos polinómios que constituem as entradas de $\mathcal{L}$.

Vamos ainda considerar a matriz $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ como sendo a identidade com a mesma ordem de $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Pela forma como está definida, é fácil verificar que $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ é nilpotente e, como consequência, a matriz $\mathcal{I}_{\mathcal{L}} - x\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ é invertível $\forall\ x \in C$.

Assim, considerando a matriz $(\mathcal{I}_{\mathcal{L}} - x\mathcal{G}_{\mathcal{L}})^{-1}$ é simples verificar que a primeira linha da sua representação por blocos é igual a

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathcal{I} & x\mathcal{I} & \ldots & x^q\mathcal{I} \end{array} \right). \tag{5.15}$$

Devido à forma como $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ está definida, o seu produto por $(x\mathcal{G}_{\mathcal{L}} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}})^{-1}$ origina uma matriz por blocos que coincide precisamente com (5.15). Esta, multiplicada por $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$, é a própria matriz $\mathcal{L}(x)$.

Torna-se evidente que é sempre possível escrever uma matriz polinomial na forma

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}\,(x\mathcal{G}_{\mathcal{L}} - \mathcal{I}_{\mathcal{L}})^{-1}\,\mathcal{B}_{\mathcal{L}}, \quad \forall x \in C. \tag{5.16}$$

Combinado as representações estabelecidas para $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ em (5.8) e (5.16), respectivamente, verificamos que $\mathcal{F}$ referida em (5.5) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{F} = \mathcal{D} + \mathcal{C}\,(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\,\mathcal{B}$$

onde

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}_{\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\mathcal{L}} \end{array} \right), \tag{5.17}$$

$$\mathcal{G} = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{I}_{\mathcal{K}} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{\mathcal{L}} \end{array} \right), \tag{5.18}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{B}_{\mathcal{K}} \\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}} \end{array} \right), \tag{5.19}$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{C}_{\mathcal{K}} & \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \end{array} \right), \tag{5.20}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}}. \tag{5.21}$$

Pela forma como está definida, é fácil verificar que $\mathcal{G}$ é nilpotente e isto implica que $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ é regular se e só se x é valor próprio de $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$. O que só acontece se x for um polo de $\mathcal{K}$. Dado que $\mathcal{L}$ é polinomial, podemos concluir que $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ é regular se e só se x é polo de $\mathcal{F}$.

Note-se que a escolha de $\mathcal{D}_{\mathcal{K}} = \mathcal{F}(\infty)$ em (5.8) é livre. Então, podemos fazer $\mathcal{D}_{\mathcal{K}} = \mathcal{I}$, a matriz identidade $n \times n$. E, neste caso, é válido o seguinte teorema cuja demonstração fica estabelecida pela construção atrás realizada.

Teorema 9 *Seja $\mathcal{F}$ uma função matricial racional $n \times n$ sem polos na curva Γ. Então, $\mathcal{F}$ admite a seguinte representação*

$$\mathcal{F} = \mathcal{I} + \mathcal{C}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{B},\ x \in \Gamma,$$

onde $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ é uma matriz linear $m \times m$, $\Gamma - regular$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são matrizes de dimensão $m \times n$ e $n \times m$, respectivamente.

Definição 13 *A realização (5.1) de uma matriz $\mathcal{F}$ diz-se $\Gamma - regular$ se a matriz linear $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ é $\Gamma - regular$. Neste caso, $\mathcal{F}$ não admite polos na curva Γ.*

O teorema 9 mostra que qualquer função matricial racional quadrada sem polos na curva Γ admite uma realização $\Gamma - regular$.

Em seguida, apresentaremos um exemplo de uma função matricial racional e será descrito o processo que permite obter a decomposição dessa matriz por realização.

Exemplo 9 *Seja $\mathcal{F}$ a matriz racional*

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x+3} \\ -\frac{1}{x} & \frac{2x^2+6x+1}{x^2+3x} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ pode facilmente ser escrita na forma (5.5), sendo

$$\mathcal{K}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x+3} \\ -\frac{1}{x} & 1 + \frac{1}{x(x+3)} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note-se que esta decomposição não é unica mas a sua escolha foi intencional pois pretende-se que $\mathcal{K}(\infty) = \mathcal{I}$. Agora vamos escrever $\mathcal{K}$ na forma (5.7)

$$\mathcal{K}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{x(x+3)} \begin{pmatrix} 0 & x \\ -(x+3) & 1 \end{pmatrix}.$$

De seguida, serão construídas as matrizes $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ tendo em conta as igualdades (5.9), (5.10) e (5.11), respectivamente.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pela proposição 5 sabemos que $\mathcal{K}$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}} + \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \left(x\mathcal{I}_{\mathcal{K}} - \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \right)^{-1} \mathcal{B}_{\mathcal{K}},$$

logo temos

$$\mathcal{K}(x) = \mathcal{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando agora $\mathcal{L}$, vamos construir as matrizes $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ como é indicado em (5.12), (5.13) e (5.14), respectivamente.

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estamos em condições para escrever $\mathcal{L}$ na forma referida em (5.16)

$$\mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A fase seguinte consiste na construção das matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ de acordo com o estabelecido em (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) e (5.21)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{I}_2.$$

A realização da matriz $\mathcal{F}$, ou seja, a sua escrita na forma (5.1), é

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{I}_2 + \mathcal{C} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{B}.$$

A proposição que se segue descreve algumas operações elementares para funções matriciais racionais escritas por realização.

Proposição 6 *Seja $\mathcal{F} = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ uma realização $\Gamma - regular$. Seja $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{C}$. Então,* $\det \mathcal{F}(x) \neq 0$, $\forall x \in \Gamma$ *se e só se a matriz linear $x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}$ for $\Gamma - regular$, e nesse caso são válidas as seguintes identidades:*

$$\mathcal{F}(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{C}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)\mathcal{B},\ x \in \Gamma, \tag{5.22}$$

$$\mathcal{F}(x)^{-1}\mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{C}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1},\ x \in \Gamma, \tag{5.23}$$

$$(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{F}(x)^{-1} = \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{B},\ x \in \Gamma, \tag{5.24}$$

$$(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1} - \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1} = (x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{F}(x)^{-1}\mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1},\ x \in \Gamma. \tag{5.25}$$

Demonstração: Consideremos um determinado x fixo. Dado que $\det(\mathcal{I}-\mathcal{T}\mathcal{S}) = \det(\mathcal{I}-\mathcal{S}\mathcal{T})$, temos que

$$\begin{aligned}\det\mathcal{F}(x) &= \det\left[\mathcal{I}+\mathcal{C}(x\mathcal{G}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\right] = \det\left[\mathcal{I}+(x\mathcal{G}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{C}\right] = \\ &= \det\left[(x\mathcal{G}-\mathcal{A})^{-1}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)\right] = \frac{\det(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times})}{\det(x\mathcal{G}-\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

Temos, então, que $\det\mathcal{F}(x) \neq 0$ se e só se $(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times})$ é regular. Em seguida, vamos considerar que $\det(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}) \neq 0$. Para inverter $\mathcal{F}$ vamos resolver a equação $\mathcal{F}(x)\,u = y$. Vamos introduzir uma nova variável $w = (x\mathcal{G}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}u$. Podemos agora escrever

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{G}w = \mathcal{A}w+\mathcal{B}u \\ y = \mathcal{C}w+u \end{array}\right. . \tag{5.26}$$

Aplicando $\mathcal{B}$ à segunda equação em (5.26) e subtraindo o resultado à primeira equação em (5.26), isto dá origem ao sistema

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{G}w = \mathcal{A}^{\times}w+\mathcal{B}y \\ u = -\mathcal{C}w+y \end{array}\right. .$$

Temos, então, $w = (x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times})^{-1}\mathcal{B}y$ e $\mathcal{F}(x)^{-1}y = u = y-\mathcal{C}(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times})^{-1}\mathcal{B}y$, o que prova a igualdade (5.22). As identidades (5.23), (5.24) e (5.25) são demostradas por operações directas a partir de (5.22) e pelo facto de

$$\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{A}-\mathcal{A}^{\times} = \left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)-(x\mathcal{G}-\mathcal{A}).$$

■

5.3 Factorização canónica de funções matriciais racionais por realização

Nesta secção iremos mostrar como se pode obter uma factorização canónica para uma função matricial racional recorrendo à realização dessa matriz. Será enunciado e demonstrado o teorema que estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência dessa factorização e que apresenta as fórmulas que permitem obter os termos da referida factorização com recurso à realização dessa matriz. Em seguida, é apresentado um exemplo de uma matriz factorizada por este processo. Utilizar-se-á a matriz considerada no exemplo 9 visto que já foi determinada a sua decomposição por realização.

Teorema 10 *Seja $\mathcal{F}$ uma função matricial racional quadrada de ordem n sem polos na curva Γ e seja a sua realização $\Gamma - regular$ dada por*

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \;\; x \in \Gamma.$$

Seja $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{BC}$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma factorização canónica direita em $C(\Gamma)$ se e só se as duas condições seguintes são satisfeitas:

$$(i) \;\; \textit{a matriz linear } x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times} \textit{ é } \Gamma - regular;$$

$$(ii) \;\; C^m = \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker\mathcal{Q}^{\times} \textit{ e } \mathcal{C}^m = \operatorname{im}\mathcal{P} \oplus \ker\mathcal{P}^{\times}.$$

Aqui m é a ordem das matrizes $\mathcal{G}$ e $\mathcal{A}$, e

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{G}dx,$$

$$\mathcal{Q}^{\times} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{G}dx,$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\mathcal{G}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}dx,$$

$$\mathcal{P}^{\times} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\mathcal{G}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}dx.$$

Neste caso, uma factorização canónica direita de $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_{-}(x)\mathcal{F}_{+}(x)$ em $C(\Gamma)$ pode ser obtida a partir das fórmulas

$$\mathcal{F}_{-}(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I} - \rho)\mathcal{B}, \;\; x \in \Gamma \tag{5.27}$$

$$\mathcal{F}_{+}(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}\tau(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \;\; x \in \Gamma \tag{5.28}$$

e as suas inversas são dadas por

$$\mathcal{F}_{-}(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{C}(\mathcal{I} - \tau)\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{B}, \;\; x \in \Gamma \tag{5.29}$$

$$\mathcal{F}_{+}(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{C}\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\rho\mathcal{B}, \;\; x \in \Gamma. \tag{5.30}$$

Aqui τ é a projecção de C^m que é função de $\operatorname{im}\mathcal{Q}$ em $\ker\mathcal{Q}^{\times}$ e ρ é a projecção que é função de $\operatorname{im}\mathcal{P}$ em $\ker\mathcal{P}^{\times}$. E, além disto, temos que a primeira igualdade em (ii) implica a segunda e vice-versa.

Demonstração: A demonstração do teorema será feita em quatro partes. A primeira parte diz respeito à condição (i). Na segunda parte provamos que a primeira igualdade em (ii) implica a segunda e vice-versa. Na terceira parte utilizamos (i) e (ii) para derivar a factorização canónica e as fórmulas que permitem obter os termos da factorização. A quarta parte está relacionada com a necessidade da condição (ii).

1^a Parte. Da definição de factorização canónica direita é claro que $\det \mathcal{F}(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{T}$ é uma condição necessária para que $\mathcal{F}$ admita esta factorização. Pela proposição 6 esta condição necessária é satisfeita se e só se (i) for verdadeira. Assim, vamos assumir que a condição (i) é satisfeita.

2^a Parte. Nesta parte vamos provar a última afirmação do teorema. Consideremos os operadores

$$\begin{array}{l} \mathcal{Q}^{\times} \left| \operatorname{im} \mathcal{Q} : \operatorname{im} \mathcal{Q} \rightarrow \operatorname{im} \mathcal{Q}^{\times} \right. , \\ \mathcal{P}^{\times} \left| \operatorname{im} \mathcal{P} : \operatorname{im} \mathcal{P} \rightarrow \operatorname{im} \mathcal{P}^{\times} \right. . \end{array} \tag{5.31}$$

É imediato que a primeira igualdade em (ii) é equivalente à invertibilidade do operador $\mathcal{Q}^{\times} |\operatorname{im} \mathcal{Q}$. O mesmo se pode dizer em relação à segunda igualdade relativamente ao operador $\mathcal{P}^{\times} |\operatorname{im} \mathcal{P}$. Note-se que as seguintes igualdades são válidas

$$\mathcal{G}\mathcal{Q} = \mathcal{P}\mathcal{G}, \quad \mathcal{G}\mathcal{Q}^{\times} = \mathcal{P}^{\times}\mathcal{G}, \tag{5.32}$$

o que é claro a partir das definições das projecções $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}^{\times}$ e $\mathcal{P}^{\times}$. Além disso, se aplicarmos a proposição 4 a $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ bem como a $x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}$, temos que $\mathcal{G}$ é função de $\operatorname{im} \mathcal{Q}$ (respectivamente $\operatorname{im} \mathcal{Q}^{\times}$) definida de modo único em relação a $\operatorname{im} \mathcal{P}$ (respectivamente $\operatorname{im} \mathcal{P}^{\times}$). Então, os operadores

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \mathcal{G} |\operatorname{im} \mathcal{Q} : \operatorname{im} \mathcal{Q} \rightarrow \operatorname{im} \mathcal{P}, \\ \mathcal{E}^{\times} & = & \mathcal{G} \left| \operatorname{im} \mathcal{Q}^{\times} : \operatorname{im} \mathcal{Q}^{\times} \rightarrow \operatorname{im} \mathcal{P}^{\times} \right. \end{array}$$

são invertíveis e $\mathcal{E}^{\times} (\mathcal{Q}^{\times} |\operatorname{im} \mathcal{Q}) = (\mathcal{P}^{\times} |\operatorname{im} \mathcal{P}) \mathcal{E}$. Logo, os operadores em (5.31) são equivalentes e consequentemente o primeiro operador em (5.31) é invertível se e só se isso também acontecer com o segundo operador em (5.31). Isto prova que a primeira igualdade em (ii) implica a segunda e a recíproca também é verdadeira.

3^a Parte. Em seguida, vamos assumir que (i) e as decomposições em soma directa em (ii) são verdadeiras. O nosso objectivo é obter uma factorização canónica de $\mathcal{F}(x)$. Vamos escrever $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{C}$ como matrizes por blocos relativas às seguintes decomposições:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} : \operatorname{im} \mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times} \rightarrow \operatorname{im} \mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}^{\times},$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G} &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{22} \end{pmatrix} : \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times} \to \operatorname{im}\mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}^{\times}, \\
\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix} : \mathcal{C}^m \to \operatorname{im}\mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}^{\times}, \\
\mathcal{C} &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} : \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times} \to \mathcal{C}^m, \\
\mathcal{A}^{\times} &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\times}_{11} & 0 \\ \mathcal{A}^{\times}_{21} & \mathcal{A}^{\times}_{22} \end{pmatrix} : \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times} \to \operatorname{im}\mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}^{\times}.
\end{aligned}
$$

Da proposição 4, aplicada a $x\mathcal{G} - \mathcal{A}$ bem como a $x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}$, temos que

$$\mathcal{A}\mathcal{Q} = \mathcal{P}\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{\times}\mathcal{Q}^{\times} = \mathcal{P}^{\times}\mathcal{A}^{\times}. \tag{5.33}$$

A primeira igualdade em (5.33) implica que $\mathcal{A}$ é função de $\operatorname{im}\mathcal{Q}$ em $\operatorname{im}\mathcal{P}$. Isto explica o facto da entrada do canto inferior esquerdo na matriz por blocos $\mathcal{A}$ ser igual a zero. De (5.32) podemos concluir que $\mathcal{G}$ tem a forma de matriz diagonal por blocos, tal como se pretendia. Da segunda igualdade em (5.33) temos que $\mathcal{A}^{\times}$ é função de $\ker \mathcal{Q}^{\times}$ em $\ker \mathcal{P}^{\times}$, o que justifica o facto da entrada no canto superior direito da matriz por blocos $\mathcal{A}^{\times}$ ser igual a zero. O facto de $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{C}$ implica

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{B}_1\mathcal{C}_2, \quad \mathcal{A}^{\times}_{21} = -\mathcal{B}_2\mathcal{C}_1, \tag{5.34}$$

$$\mathcal{A}^{\times}_{11} = \mathcal{A}_{11} - \mathcal{B}_1\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{A}^{\times}_{22} = \mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_2\mathcal{C}_2. \tag{5.35}$$

Sejam as funções matriciais $\mathcal{F}_-$ e $\mathcal{F}_+$ definidas em (5.27) e (5.28), respectivamente. Utilizando a representação por blocos das matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ podemos reescrever os termos $\mathcal{F}_-$ e $\mathcal{F}_+$ na forma seguinte:

$$\mathcal{F}_-(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}_1 (x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11})^{-1} \mathcal{B}_1, \quad x \in \Gamma, \tag{5.36a}$$

$$\mathcal{F}_+(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}_2 (x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22})^{-1} \mathcal{B}_2, \quad x \in \Gamma. \tag{5.37}$$

A partir da representação por blocos da matriz $\mathcal{A}$ e da primeira igualdade em (5.34) temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_-(x)\,\mathcal{F}_+(x) &= \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11} & -\mathcal{B}_1\mathcal{C}_2 \\ 0 & x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix} = \\
&= \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{F}(x), \quad x \in \Gamma
\end{aligned}
$$

o que nos dá a factorização $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_-(x)\,\mathcal{F}_+(x)$.

Em seguida, vamos verificar que os termos da factorização são analíticos. Obviamente, $\mathcal{F}_-(x)$ e $\mathcal{F}_+(x)$ não têm polos em Γ. Note-se que

$$x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11} = (x\mathcal{G} - \mathcal{A})\,|\operatorname{im}\mathcal{Q} : \operatorname{im}\mathcal{Q} \to \operatorname{im}\mathcal{P}\,.$$

Assim, sabemos pela proposição 4 (ii) que $(x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11})(x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11})(x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11})^{-1}$ admite um prolongamento analítico em D_- e anula-se no infinito. Logo, $\mathcal{F}_-$ é contínua em $D_- \cup \Gamma$ e analítica em D_- (incluindo o infinito). Para verificarmos que a mesma afirmação é verdadeira para $\mathcal{F}_+$ em D_+, temos que ter presente a invertibilidade dos operadores lineares

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= (\mathcal{I} - \mathcal{Q}) \left| \ker \mathcal{Q}^{\times} : \ker \mathcal{Q}^{\times} \to \ker \mathcal{Q} \right., \\ \mathcal{H} &= (\mathcal{I} - \mathcal{P}) \left| \ker \mathcal{P}^{\times} : \ker \mathcal{P}^{\times} \to \ker \mathcal{P} \right.. \end{aligned}$$

De facto,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1} &= \tau \left| \ker \mathcal{Q} \right., \\ \mathcal{H}^{-1} &= \rho \left| \ker \mathcal{P} \right., \end{aligned}$$

onde τ é a projecção que é função de $\operatorname{im} \mathcal{Q}$ para $\ker \mathcal{Q}^{\times}$ e ρ é a projecção que é função de $\operatorname{im} \mathcal{P}$ para $\ker \mathcal{P}^{\times}$. Em seguida, tomemos $w \in \ker \mathcal{Q}^{\times}$. Então,

$$(x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22})\, w = \rho\,(x\mathcal{G} - \mathcal{A})\, w = \rho\,(x\mathcal{G} - \mathcal{A})\,(\mathcal{I} - \mathcal{Q})\, w = \rho\,(x\mathcal{G} - \mathcal{A})\, \mathcal{J} w,$$

o que mostra que

$$\mathcal{H}\,(x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22}) = [(x\mathcal{G} - \mathcal{A}) \left| \ker \mathcal{Q} \right.]\, \mathcal{J}.$$

Mas, então, podemos utilizar a proposição 4 (iii) e a invertibilidade dos operadores $\mathcal{H}$ e $\mathcal{J}$ para mostrar que $(x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22})^{-1}$ admite um prolongamento analítico em D_+. Daqui temos que $\mathcal{F}_+$ é contínua em $D_+ \cup \Gamma$ e analítica em D_+.

Da factorização $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_-(x)\,\mathcal{F}_+(x)\,,\ x \in \Gamma$ temos que $\det \mathcal{F}_-(x)$ e $\det \mathcal{F}_+(x)$ são ambos diferentes de zero $\forall x \in \Gamma$. Então, podemos aplicar a proposição 6 para provar que

$$\mathcal{F}_-(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{C}_1 \left(x\mathcal{G}_1 - \mathcal{A}_{11}^{\times}\right)^{-1} \mathcal{B}_1, \quad x \in \Gamma, \tag{5.38}$$

$$\mathcal{F}_+(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{C}_2 \left(x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22}^{\times}\right)^{-1} \mathcal{B}_2, \quad x \in \Gamma. \tag{5.39}$$

Aqui vamos utilizar as duas identidades referidas em (5.35). Usando as representações por blocos das matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ torna-se claro que (5.38) e (5.39) dão origem às fórmulas (5.29) e (5.30), respectivamente. Vamos agora continuar com a verificação das propriedades analíticas dos factores ${\mathcal{F}_-}^{-1}$ e ${\mathcal{F}_+}^{-1}$. Começemos por verificar que

$$x\mathcal{G}_2 - \mathcal{A}_{22}^{\times} = \left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^{\times}\right) \left| \ker \mathcal{Q}^{\times} : \ker \mathcal{Q}^{\times} \to \ker \mathcal{P}^{\times} \right..$$

Assim, aplicando (iii) da proposição 4 com $x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}$ no lugar de $x\mathcal{G}-\mathcal{A}$, verificamos que $\left(x\mathcal{G}_2-\mathcal{A}_{22}^{\times}\right)^{-1}$ admite um prolongamento analítico em D_+. Donde se deduz que ${\mathcal{F}_+}^{-1}$ é contínua em $D_+\cup\Gamma$ e analítica em D_+. Para provar a afirmação análoga relativa a ${\mathcal{F}_-}^{-1}$ em D_- utilizamos

$$\mathcal{H}^{\times}\left(x\mathcal{G}_1-\mathcal{A}_{11}^{\times}\right)=\left[\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)\left|\operatorname{im}\mathcal{Q}^{\times}\right.\right]\mathcal{J}^{\times},$$

onde

$$\mathcal{J}^{\times}=\mathcal{Q}^{\times}\left|\operatorname{im}\mathcal{Q}:\operatorname{im}\mathcal{Q}\rightarrow\operatorname{im}\mathcal{Q}^{\times}\right.,$$
$$\mathcal{H}^{\times}=\mathcal{P}^{\times}\left|\operatorname{im}\mathcal{P}:\operatorname{im}\mathcal{P}\rightarrow\operatorname{im}\mathcal{P}^{\times}\right.$$

são operadores lineares invertíveis e os seus operadores inversos são dados por

$$\left(\mathcal{J}^{\times}\right)^{-1}=\left(\mathcal{I}-\tau\right)\left|\operatorname{im}\mathcal{Q}^{\times}\right.,$$
$$\left(\mathcal{H}^{\times}\right)^{-1}=\left(\mathcal{I}-\rho\right)\left|\operatorname{im}\mathcal{P}^{\times}\right..$$

Dado que $\left[\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)\left|\operatorname{im}\mathcal{Q}^{\times}\right.\right]^{-1}$ é analítico em D_- por (ii) da proposição 4 aplicada a $x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}$, podemos concluir que o mesmo também é válido para $\left(x\mathcal{G}_1-\mathcal{A}_{11}^{\times}\right)^{-1}$. Consequentemente, $\mathcal{F}_-^{-1}$ é contínua em $D_-\cup\Gamma$ e analítica em D_-. Assim, provámos que $\mathcal{F}\left(x\right)=\mathcal{F}_-\left(x\right)\mathcal{F}_+\left(x\right)$ é uma factorização canónica.

4^a Parte. Nesta parte provamos a necessidade das igualdades referidas em (ii). Assim, no que se segue vamos assumir que $\mathcal{F}\left(x\right)=\mathcal{F}_-\left(x\right)\mathcal{F}_+\left(x\right)$ é uma factorização canónica de $\mathcal{F}$ relativamente á recta real. Tomemos $w\in\operatorname{im}\mathcal{P}\cap\ker\mathcal{P}^{\times}$ e façamos

$$\varphi_-\left(x\right)=\mathcal{C}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}w$$
$$\varphi_+\left(x\right)=\mathcal{C}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}w,\quad x\in\Gamma.$$

Dado que $w\in\operatorname{im}\mathcal{P}$, a primeira igualdade em (5.33) permite-nos reescrever φ_- como um prolongamento analítico em D_- que se anula no infinito. De modo similar, dado que

$$\varphi_+\left(x\right)=\left(\mathcal{C}\left|\ker\mathcal{Q}^{\times}\right.\right)\left[\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\left|\ker\mathcal{Q}^{\times}\right.\right]^{-1}w,\quad x\in\Gamma,$$

podemos concluir a partir de (iii) da proposição 4 aplicada a $x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}$ que φ_+ admite uma extenção analítica em D_+. Note-se que $\mathcal{F}_-^{-1}\varphi_-\left(x\right)=\varphi_+\left(x\right)$ para cada $x\in\Gamma$, como consequência da fórmula (5.23) na proposição 6. Temos, então, que

$$\mathcal{F}_-\left(x\right)^{-1}\varphi_-\left(x\right)=\mathcal{F}_+\left(x\right)\varphi_+\left(x\right),\quad x\in\Gamma.$$

Agora vamos utilizar as propriedades analíticas dos factores $\mathcal{F}_-$ e $\mathcal{F}_+$. Podemos concluir que $\mathcal{F}_-^{-1}\varphi_-$ tem uma extenção analítica em D_- que se anula no infinito e $\mathcal{F}_+\varphi_+$ tem uma extenção analítica em D_+. O teorema de Liouvlle implica que ambas as funções são identicamente nulas. Temos então que $\varphi_-(x) = 0$ para cada $x \in \Gamma$. Mas então podemos aplicar a fórmula (5.25) para provar que

$$\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times\right)^{-1} w = (x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1} w, \quad x \in \Gamma.$$

Agora, repetimos parte da argumentação utilizada anteriormente. Note-se que $(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1} w$ admite um prolongamento analítico em D_- que se anula no infinito e $(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times)^{-1} w$ admite uma extenção analítica em D_+. Novamente aplicando o teorema de Liouville, podemos concluir que ambas as funções matriciais $(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1} w$ e $(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times)^{-1} w$ são identicamente nulas em Γ. Isto tem como consequência que $w = 0$. Então provámos que $\operatorname{im}\mathcal{P} \cap \ker\mathcal{P}^\times = \{0\}$. Recordemos que $\mathcal{G}$ opera de $\operatorname{im}\mathcal{Q}$ para $\operatorname{im}\mathcal{P}$ de modo único. Assim, (5.32) mostra que $\mathcal{G}$ opera de $\operatorname{im}\mathcal{Q} \cap \ker\mathcal{Q}^\times$ para $\operatorname{im}\mathcal{P} \cap \ker\mathcal{P}^\times$ de modo único. Daqui, temos que $\operatorname{im}\mathcal{Q} \cap \ker\mathcal{Q}^\times = \{0\}$ também.

Em seguida, vamos provar que $\operatorname{im}\mathcal{Q} + \ker\mathcal{Q}^\times = C^m$. Tomemos $y \in C^m$ de tal forma que y seja ortogonal a $\operatorname{im}\mathcal{Q} + \ker\mathcal{Q}^\times$. Seja y^* um vector linha cuja entrada j seja igual ao conjugado da entrada j de y $(j = 1, ..., m)$. Façamos

$$\mathbf{\Psi}_-(x) = y^*\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times\right)^{-1}\mathcal{B},$$

$$\mathbf{\Psi}_+(x) = y^*(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \quad x \in \Gamma.$$

Dado que $y^*(\mathcal{I} - \mathcal{Q})^\times = 0$, a proposição 4 mostra que

$$\mathbf{\Psi}_-(x) = y^*\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times\right)^{-1}\mathcal{P}^\times\mathcal{B}, \quad x \in \Gamma,$$

e, assim, $\mathbf{\Psi}_-$ tem uma extenção analítica em D_- que se anula no infinito. Análogamente, $y^*\mathcal{Q} = 0$ implica que $\mathbf{\Psi}_+$ admite uma extenção analítica em D_+. Agora utilizamos a factorização canónica $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_-(x)\mathcal{F}_+(x)$ e (5.24) para provar que

$$\mathbf{\Psi}_+(x)\mathcal{F}_+(x)^{-1} = \mathbf{\Psi}_-(x)\mathcal{F}_-(x), \quad x \in \Gamma.$$

Mas então, tal como no parágrafo anterior, podemos aplicar o teorema de Liouville para provar que ambos os lados da identidade são iguais a zero. Segue-se que $\mathbf{\Psi}_+(x) = 0$ para cada $x \in \Gamma$ e podemos aplicar a fórmula (5.25) para mostrar que

$$y^*\left(x\mathcal{G} - \mathcal{A}^\times\right)^{-1} = y^*(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}, \quad x \in \Gamma.$$

Recordemos que $y^*\mathcal{Q}$ e $y^*\left(\mathcal{I}-\mathcal{Q}^\times\right)$ são ambos iguais a zero. Assim, a proposição 4 implica que $y^*\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^\times\right)^{-1}$ tem uma extenção analítica em D_- que se anula no infinito e a função $y^*\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}$ admite uma extenção analítica em D_+. Logo, pelo teorema de Liouville $y^*\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}=0$ em Γ e, assim, $y=0$. Isto prova que $\operatorname{im}\mathcal{Q}+\ker\mathcal{Q}^\times=C^m$. Combinando isto com o resultado do parágrafo anterior, temos que $\operatorname{im}\mathcal{Q}\oplus\ker\mathcal{Q}^\times=C^m$. Mas então podemos utilizar o resultado do segundo parágrafo para concluir que $\operatorname{im}\mathcal{P}+\ker\mathcal{P}^\times=C^m$, e temos (ii) demonstrado. ■

Vamos agora apresentar um exemplo da aplicação do teorema anterior na obtenção da factorização canónica direita de uma função matricial racional.

Exemplo 10 *Seja $\mathcal{F}$ a função matricial racional*

$$\mathcal{F}\left(x\right)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{x+3}\\ -\frac{1}{x} & \frac{2x^2+6x+1}{x^2+3x}\end{pmatrix}.$$

Sabemos pelo exemplo 9. que a realização da matriz $\mathcal{F}$, ou seja, a sua representação na forma (5.1), é

$$\mathcal{F}\left(x\right)=\mathcal{I}_2+\begin{pmatrix}0&0&0&1&-1&0\\-3&1&-1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}&0&\frac{1}{x^2+3x}&0&0&0\\0&\frac{1}{x}&0&\frac{1}{x^2+3x}&0&0\\0&0&\frac{1}{x+3}&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{x+3}&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\\-2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Seja $\mathcal{A}^\times=\mathcal{A}-\mathcal{B}\mathcal{C}$

$$\mathcal{A}^\times=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&-3&-1&1&0\\3&-1&1&-3&0&1\\0&0&0&2&-1&0\\3&-1&1&0&0&2\end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ admite factorização canónica direita se e só se cumpre as condições (i) e (ii) estabelecidas no teorema 9. Começemos por verificar o cumprimento da condição (i). Para isso é necessário escrever a matriz linear $x\mathcal{G}-\mathcal{A}^\times$

$$x\mathcal{G}-\mathcal{A}^\times=\begin{pmatrix}x&0&-1&0&0&0\\0&x&0&-1&0&0\\0&0&x+3&1&-1&0\\-3&1&-1&x+3&0&-1\\0&0&0&-2&1&0\\-3&1&-1&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Dado que $\det|x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}|=-2x\left(x+3\right)^{2}\neq 0$, *para cada* $x\in\mathbb{T}$, *está provado* (i). *Para verificar a veracidade da condição* (ii) *é necessário determinar*

$$\mathcal{Q}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{G}dx,$$

$$\mathcal{Q}^{\times}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{G}dx,$$

$$\mathcal{P}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}dx,$$

$$\mathcal{P}^{\times}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}dx.$$

Assim, vamos calcular primeiro $\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{G}$, $\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{G}$, $\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}$ *e* $\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}$. *Depois, por aplicação do teorema dos resíduos, obteremos* $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^{\times}$, $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{P}^{\times}$.

$$\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{G}=\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^{2}+3x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^{2}+3x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{G}=\begin{pmatrix}\frac{2x^{3}+12x^{2}+18x+3}{2x^{2}(x+3)^{2}} & -\frac{1}{2x^{2}(x+3)^{2}} & \frac{2x^{2}+6x+1}{2x^{2}(x+3)^{2}} & \frac{1}{x(x+3)^{2}} & 0 & 0\\ \frac{3}{2x^{2}(x+3)} & \frac{2x^{2}+6x-1}{2x^{2}(x+3)} & \frac{1}{2x^{2}(x+3)} & \frac{1}{x(x+3)} & 0 & 0\\ \frac{3}{2x(x+3)^{2}} & -\frac{1}{2x(x+3)^{2}} & \frac{2x^{2}+6x+1}{2x(x+3)^{2}} & \frac{1}{(x+3)^{2}} & 0 & 0\\ \frac{3}{2x(x+3)} & -\frac{1}{2x(x+3)} & \frac{1}{2x(x+3)} & \frac{1}{x+3} & 0 & 0\\ \frac{3}{x(x+3)} & -\frac{1}{x(x+3)} & \frac{1}{x(x+3)} & \frac{2}{x+3} & 0 & 0\\ -\frac{3}{2x} & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^{2}+3x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^{2}+3x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}\right)^{-1}\mathcal{G},$$

$$\mathcal{G}\left(x\mathcal{G}-\mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2x^3+12x^2+18x+3}{2x^2(x+3)^2} & -\frac{1}{2x^2(x+3)^2} & \frac{2x^2+6x+1}{2x^2(x+3)^2} & \frac{1}{x(x+3)^2} & \frac{2x^2+6x+1}{2x^2(x+3)^2} & -\frac{1}{2x(x+3)^2} \\ \frac{3}{2x^2(x+3)} & \frac{2x^2+6x-1}{2x^2(x+3)} & \frac{1}{2x^2(x+3)} & \frac{1}{x(x+3)} & \frac{1}{2x^2(x+3)} & -\frac{1}{2x(x+3)} \\ \frac{3}{2x(x+3)^2} & -\frac{1}{2x(x+3)^2} & \frac{2x^2+6x+1}{2x(x+3)^2} & \frac{1}{(x+3)^2} & \frac{2x^2+6x+1}{2x(x+3)^2} & -\frac{1}{2(x+3)^2} \\ \frac{3}{2x(x+3)} & -\frac{1}{2x(x+3)} & \frac{1}{2x(x+3)} & \frac{1}{x+3} & \frac{1}{2x(x+3)} & -\frac{1}{2(x+3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para podermos aplicar o teorema dos resíduos temos que recordar a fórmula

$$\int_{\Gamma} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{res}\, f(z)$$

onde

$$\underset{z=z_j}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z),$$

z é a variável complexa e z_j é ponto singular de $f(z)$. No caso particular em que z_j é um polo de ordem n da função $f(z)$, o resíduo nesse ponto pode ser calculado segundo a fórmula

$$\underset{z=z_j}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_j} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z)(z-z_j)^n\right].$$

Assim, aplicando esta fórmula a cada uma das entradas das matrizes atrás determinadas vamos obter $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^{\times}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^{\times}$. A título de exemplo vamos apenas apresentar o cálculo de uma dessas entradas.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{x^2+3x}dx &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1/3}{x}+\frac{-1/3}{x+3}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1/3}{x}\right)dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{-1/3}{x+3}\right)dx = \\ &= \underset{x=0}{res}\left(\frac{1/3}{x}\right) = \frac{1}{0!}\lim_{x\to 0}\frac{d^0}{dx^0}\left[\frac{1/3}{x}\times x\right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Refira-se que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{-1/3}{x+3}\right)dx = 0$ porque não tem pontos singulares no interior de $\mathbb{T}$. Por aplicação da mesma fórmula serão obtidas todas as outras

entradas. Podemos agora escrever

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}^{\times} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{19}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}^{\times} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & \frac{1}{9} & \frac{8}{27} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{19}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por observação de $\mathcal{Q}$ *e* $\mathcal{P}$ *é fácil verificar que* $\operatorname{im}\mathcal{Q} = \operatorname{im}\mathcal{P}$*. Assim, os vectores*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.40}$$

formam uma base para os subespaços $\operatorname{im}\mathcal{Q}$ *e* $\operatorname{im}\mathcal{P}$*, com* $\{u_1, u_2\} \in \operatorname{im}\mathcal{Q}$ *e* $\{v_1, v_2\} \in \operatorname{im}\mathcal{P}$*. Em seguida, vamos determinar uma base para* $\ker\mathcal{Q}^{\times}$*, sendo*

os vectores que a constituem

$$
\begin{aligned}
u_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
u_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
u_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
u_6 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

Uma base para $\ker \mathcal{P}^{\times}$ *será constituída pelos vectores*

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
v_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

É agora fácil verificar que a condição (ii) é válida e isto garante-nos a existência dos termos da factorização direita canónica de $\mathcal{F}$. Antes de aplicarmos as fórmulas (5.27) e (5.28) temos que estudar as projecções τ e ρ. τ é uma projecção em $C^m = \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times}$. Como sabemos qualquer vector de C^m pode ser escrito como uma combinação linear a partir de uma base deste subespaço. No nosso exemplo, dado que $C^6 = \operatorname{im}\mathcal{Q} \oplus \ker \mathcal{Q}^{\times}$, a base que vamos considerar é formada pela junção dos vectores $\{u_1, ..., u_6\}$ referidos em (5.40) e (5.41). A aplicação τ está definida por

$$\tau\left(u + u^{\times}\right) = u^{\times}, \quad u \in \operatorname{im}\mathcal{Q}\, e\, u^{\times} \in \ker \mathcal{Q}^{\times}$$

e

$$(\mathcal{I} - \tau)\left(u + u^{\times}\right) = u, \quad u \in \operatorname{im}\mathcal{Q}\, e\, u^{\times} \in \ker \mathcal{Q}^{\times}.$$

Por outro lado, $C^6 = \operatorname{im}\mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}^{\times}$ e uma base para C^6 pode ser formada pela junção dos vectores $\{v_1, ..., v_6\}$ mencionados em (5.40) e (5.42). A aplicação ρ está definida por

$$\rho\left(v + v^{\times}\right) = v^{\times}, \quad v \in \operatorname{im}\mathcal{P}\ e \quad v^{\times} \in \ker \mathcal{P}^{\times}$$

e

$$(\mathcal{I} - \rho)\left(v + v^{\times}\right) = v, \quad v \in \operatorname{im}\mathcal{P}\ e \quad v^{\times} \in \ker \mathcal{P}^{\times}.$$

Para podermos aplicar a fórmula (5.27) temos que determinar $(\mathcal{I} - \rho)(\mathcal{B})$. Dado que

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos

$$\mathcal{B}_1 = -\frac{1}{3}u_1 - 2u_4 + u_6$$

e

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{18}u_1 + \frac{1}{6}u_2 + u_3 + u_5.$$

Aplicando $(\mathcal{I} - \rho)$ *a cada um dos vectores obtemos*

$$(\mathcal{I} - \rho)(\mathcal{B}_1) = -\frac{1}{3}u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(\mathcal{I} - \rho)(\mathcal{B}_2) = \frac{1}{18}u_1 + \frac{1}{6}u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(\mathcal{I} - \rho)(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar o factor (5.28) necessitamos de calcular $\tau\left[(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\right]$. *Por um processo análogo escrevemos cada vector coluna da matriz* $(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}$ *às custas da base formada pelos vectores* $\{u_1, ..., u_6\}$ *e aplicando* τ *a cada um deles obteremos*

$$\tau\left[(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3(x+3)} & -\frac{1}{9(x+3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(x+3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estamos, finalmente, em condições de determinar os termos $\mathcal{F}_-$ e $\mathcal{F}_+$. Assim,

$$\mathcal{F}_-(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I} - \rho)\mathcal{B} =$$

$$= \mathcal{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x^2+3x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{F}_+(x) = \mathcal{I} + \mathcal{C}\tau(x\mathcal{G} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} =$$

$$= \mathcal{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3(x+3)} & -\frac{1}{9(x+3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(x+3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x+3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O facto de no teorema 10 estarmos a considerar uma curva limitada não é essencial pois apenas se utilizam os factos de Γ ser uma curva fechada na esfera de Riemann e de $\mathcal{F}$ não admitir polos em Γ. Assim, Γ pode passar pelo infinito. Por exemplo, poderíamos substituir Γ pela recta real $\bar{\mathbb{R}}$ (que consideramos passando no infinito). Pela proposição 5, a condição de que a função matricial racional de ordem n não tem polos em $\bar{\mathbb{R}}$ implica que $\mathcal{F}$ pode ser representada na forma

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(x\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.43}$$

onde $\mathcal{A}$ é uma matriz quadrada sem valores próprios reais. A condição $\det \mathcal{F}(x) \neq 0$ para cada $x \in \bar{\mathbb{R}}$ (incluindo $x = \infty$) é agora equivalente ao requisito de que $\mathcal{D}$ seja regular e a matriz $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ não admita valores próprios reais e, nesse caso,

$$\mathcal{F}(x)^{-1} = \mathcal{D}^{-1} - \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}\left(x\mathcal{I} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$. Com estas pequenas alterações a demonstração do teorema 10 também é válida para realizações da forma (5.43) e dá origem ao seguinte teorema.

Teorema 11 *Seja $\mathcal{F}$ uma matriz quadrada sem polos na recta real e no infinito e seja uma realização de $\mathcal{F}$ dada por*

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(x\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $\mathcal{A}$ é uma matriz quadrada sem valores próprios reais. Então, $\mathcal{F}$ admite uma factorização canónica direita em $C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$ se e só se as seguintes condições são satisfeitas

(i) *$\mathcal{D}$ é regular e $\mathcal{A}^{\times} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}$ não admite valores próprios reais,*

$$(ii)\ C^m = M \oplus M^{\times}.$$

Daqui, temos que m é a ordem da matriz $\mathcal{A}$, o espaço M é o subespaço espectral de $\mathcal{A}$ correspondendo aos valores próprios no semi-plano superior e $M^{\times}$ é o subespaço espectral de $\mathcal{A}^{\times}$ correspondendo aos valores próprios no semi-plano inferior. Além disso, se as condições (i) e (ii) são cumpridas, então, uma factorização canónica direita $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_-(x)\mathcal{F}_+(x)$ em $C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$ é obtida fazendo

$$\mathcal{F}_-(x) = \mathcal{D} + \mathcal{C}(x\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I} - \Pi)\mathcal{B},$$

$$\mathcal{F}_+(x) = \mathcal{I} + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}\Pi(x\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B},$$

e com as inversas dadas por

$$\mathcal{F}_-(x)^{-1} = \mathcal{D}^{-1} - \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{I} - \Pi)\left(x\mathcal{I} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1},$$

$$\mathcal{F}_+(x)^{-1} = \mathcal{I} - \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}\left(x\mathcal{I} - \mathcal{A}^{\times}\right)^{-1}\Pi\mathcal{B}.$$

Aqui, Π é a projecção de C^m que é função de M em $M^{\times}$.

´

Capítulo 6

Anexos

Este capítulo está dividido em seis secções, as quais apresentam cada um dos seis ficheiros informáticos que foram construídos na linguagem de programação do pacote informático "Mathematica", no âmbito do trabalho desenvolvido nesta tese. Como já foi mencionado, os ficheiros informáticos aqui apresentados podem ser encontrados no CD que acompanha este documento.

6.1 Anexo 1

Ficheiro **"FactEsq"**.

```
A[x_]:=
DimA:=Dimensions[A[x]]
If[DimA[[1]]==DimA[[2]],„Print["Erro: A matriz A[x] deve ser quadrada-
da!"];
Abort[]]
MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k,1],
Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k],x_]},
{k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k_]}]
Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]]
DenomDetA:=Denominator[Together[Det[A[x]]]]
NumDetA:=Numerator[Together[Det[A[x]]]]
If[Zeros[NumDetA]===NZ,
If[NumDetA===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
```

```
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i1++]]
Clear[i1]
n:=DimA[[1]]
PolosEntradas={}
For[i2=1,i2≤n,
For[j2=1,j2≤n,
NovosPolos=Zeros[Denominator[Together[A[x][[i2,j2]]]]];
If[NovosPolos===NZ, ,
For[k2=1,k2≤Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntradas=PolosEntradas∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,
Print["Erro:
As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na circunferência unitária!"],]];
k2++]
];
j2++];
i2++]
Clear[i2,j2,k2]
If[PolosEntradas==={}„
RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntradas],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntradas],
If[PolosEntradas[[i3,1]]===PolosEntradas[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntradas[[i3,2]]=Max[{PolosEntradas[[i3,2]],PolosEntradas[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]
]
Clear[i3,j3]
If[RetirarLinhas≠{},
PolosEntradas=Delete[PolosEntradas,Transpose[{RetirarLinhas}]],]
NumPolosEntradas:=If[PolosEntradas≠{},
NumPolosAux=0;
For[i10=1,i10≤Length[PolosEntradas],
NumPolosAux+=PolosEntradas[[i10,2]];
i10++];
NumPolosAux,
```

```
0]
MataPolos[x_]:=If[PolosEntradas≠{},
FactoresMataPolos=1;
For[i4=1,i4≤Length[PolosEntradas],
FactoresMataPolos=
FactoresMataPolos (x-PolosEntradas[[i4,1]])^(PolosEntradas[[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,
1]
Clear[i4]
Id:=IdentityMatrix[n]
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[MataPolos[x] A[x]]]]]
ZerosAMais={}
If[ZerosIniciais===NZ„
For[i5=1,i5≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i5,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i5]]},];
i5++]]
Clear[i5]
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0}===n,{},
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k1=2, k1≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k1]]}];
For[i9=1, i9≤n,
ColMatSing[[i9]]=Join[ColMatSing[[i9]],NovaCol[[i9]]];
i9++];
If[NullSpace[ColMatSing≠{},
CtesAux=-NullSpace[ColMatSing]/NullSpace[ColMatSing][[1,k1]];
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k1]]}];
Break[],];
k1++];
CtesAux]
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
```

```
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux]
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;
{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k2=Length[Ctes[MatSing][[1]]+1;
IndsAuxa[[k2]]+=1;
IndsAuxb[[k2]]+=1;
For[i8=1, i8≤n-1,
For[j8=1, j8≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j8]]<IndsAuxa[[j8+1]],
IndsAuxb[[j8]]=IndsAuxa[[j8+1]];
IndsAuxb[[j8+1]]=IndsAuxa[[j8]];
For[s8=1, s8≤n,
T1[[s8,j8]]=Id[[s8,j8+1]];
T1[[s8,j8+1]]=Id[[s8,j8]];
s8++],];
TAux=T1.TAux;
j8++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i8++];
{TAux, IndsAuxa}]
IndsIniciais={}
For[i11=1,i11≤n,
IndsIniciais=Join[IndsIniciais,{-NumPolosEntradas}];i11++]
Factores[x_]:= If[ZerosAMais≠ {},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[MataPolos[x]A[x]];
For[i=1, i≤Length[ZerosAMais],
For[j=1, j≤ZerosAMais[[i,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i,1]];
AMaisAux= Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x, MatCte, ZerosAMais[[i,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
```

j++];
i++];
ΛAux=Id;
For[k4=1, k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=x^IndsIter[[k4]];k4++];
{AMaisAux, ΛAux},
{A[x], Id}
$\mathcal{A}_+$ =MatrixForm[Simplify[Factores[x][[1]]]
Λ=MatrixForm[Factores[x][[2]]]
$\mathcal{A}_-$ =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]]

6.2 Anexo 2

Ficheiro **"FactorizacaoEsqFinal"**

A[x_]:=
DimA:=Dimensions[A[x]]
If[DimA[[1]]==DimA[[2]]„
Print["Erro: A matriz A[x] deve ser quadradada!"];
Abort[]]
MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k,1],
Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k],x_]},
{k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p==0,x]]],k_]}]
Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]]
DenomDetA:=Denominator[Together[Det[A[x]]]]
NumDetA:=Numerator[Together[Det[A[x]]]]
If[Zeros[NumDetA]===NZ,
If[NumDetA===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],
NumZerosDentro=0;
For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i1++]]
Clear[i1]
n:=DimA[[1]]
Id:=IdentityMatrix[n]

```
Aaux=A[x]
FuncaoPolosEntradas[x_,j_]:=Module[{PolosEntAux,Parar},
PolosEntAux={};
Parar=0;
For[i2=1,i2≤n,
NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]];
If[NovosPolos===NZ„
For[k2=1,k2≤Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntAux=PolosEntAux∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,
Parar=1,]];
k2++]
];i2++];
If[Parar===1,
Print["Erro:
As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na circunferência unitária!"],
If[PolosEntAux==={},RetirarLinhas={},RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntAux],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntAux],
If[PolosEntAux[[i3,1]]===PolosEntAux[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntAux[[i3,2]]=Max[{PolosEntAux[[i3,2]],PolosEntAux[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]]];
If[RetirarLinhas≠{},
PolosEntAux=
Delete[PolosEntAux,Transpose[{RetirarLinhas}]],];
PolosEntAux]
FuncaoMataPolos[x_,j_]:=If[FuncaoPolosEntradas[x,j]≠{},
FactoresMataPolos=1;
For[i4=1,i4≤Length[FuncaoPolosEntradas[x,j]],
FactoresMataPolos=
FactoresMataPolos (x-FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,1]])^(FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,
1]
IndPacInic:=Table[-Exponent[FuncaoMataPolos[x,j],x],{j,1,n}]
MatT[Inds_]:=Module[{TAux,IndsAuxA,IndsAuxB},TAux=Id;
IndsAuxA=Inds;
IndsAuxB=Inds;
```

```
For[i15=1,i15≤n-1,
For[j15=1,j15≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]],
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]];
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]];
For[s15=1,s15≤n,
T1[[s15,j15]]=Id[[s15,j15+1]];
T1[[s15,j15+1]]=Id[[s15,j15]];
s15++],];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux]
B[x_,j_]: = Transpose [Aaux] [[j]] × FunçãoMataPolos[x,j]
MatrixBAux[x_]:=Transpose[Table[B[x,j],{j,1,n}]]
BAux[x_]:=MatrixBAux[x].Inverse[MatT[IndPacInic]]
ΛInicial:=MatT[IndPacInic].FactorCentral.Inverse[MatT[IndPacInic]]
DenomDetBAux:=Denominator[Together[Det[BAux[x]]]]
NumDetBAux:=Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]
If[Zeros[NumDetBAux]===NZ,
If[NumDetBAux===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],
NumZerosDentro=0;
For[i5=1,i5≤Length[Zeros[NumDetBAux]],
If[Abs[Zeros[NumDetBAux][[i5,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i5++]]
Clear[i5]
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]]
ZerosAMais={}
If[ZerosIniciais===NZ„
```

```
For[i9=1,i9≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i9,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i9]]},];
i9++]]
Clear[i9]
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,{},
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k7=2,k7≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k7]]}];
For[i11=1,i11≤n,
ColMatSing[[i11]]=Join[ColMatSing[[i11]],NovaCol[[i11]]];
i11++];
If[Nullspace[ColMatSing≠{},
CtesAux=-NullSpace[ColMatSing]/NullSpace[ColMatSing][[1,k7]];
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k7]]}];
Break[],];
k7++];
CtesAux]
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux]
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;
{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k8=Length[Ctes[MatSing][[1]]]+1;
IndsAuxa[[k8]]+=1;
IndsAuxb[[k8]]+=1;
```

```
For[i12=1,i12≤n-1,
For[j12=1,j12≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j12]]<IndsAuxa[[j12+1]],
IndsAuxb[[j12]]=IndsAuxa[[j12+1]];
IndsAuxb[[j12+1]]=IndsAuxa[[j12]];
For[s12=1,s12≤n,
T1[[s12,j12]]=Id[[s12,j12+1]];
T1[[s12,j12+1]]=Id[[s12,j12]];
s12++],];
TAux=T1.TAux;
j12++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i12++];
{TAux,IndsAuxa}]
IndsIniciais=Sort[IndPacInic,Greater]
Factores[x_]:= If[ZerosAMais≠ {},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[BAux[x]];
For[i14=1, i14≤Length[ZerosAMais],
For[j14=1, j14≤ZerosAMais[[i14,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i14,1]];
AMaisAux= Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x, MatCte, ZerosAMais[[i14,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
j14++];
i14++];
ΛAux=Id;
For[k4=1, k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=x^IndsIter[[k4]];k4++];
{AMaisAux, ΛAux},
ΛAux=Id;
For[k5=1, k5≤n,
ΛAux[[k5,k5]]=x^IndsIniciais[[k5]];k5++];
{BAux[x], ΛAux}]
A+ =MatrixForm[Simplify[Factores[x][[1]]]
Λ=MatrixForm[Factores[x][[2]]]
A− =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]
```

6.3 Anexo 3

Ficheiro **"FactorizacaoDirFinal"**

```
M[x_]:=
A[x_]:=Transpose[M[x]]
DimA:=Dimensions[A[x]]
If[DimA[[1]]==DimA[[2]],,
Print["Erro: A matriz A[x] deve ser quadradada!"];
Abort[]]
MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k,1],
Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k],x_]},
{k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k_]}]
Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]]
DenomDetA:=Denominator[Together[Det[A[x]]]]
NumDetA:=Numerator[Together[Det[A[x]]]]
If[Zeros[NumDetA]===NZ,
If[NumDetA===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i1++]]
Clear[i1]
n:=DimA[[1]]
Id:=IdentityMatrix[n]
Aaux=A[x]
FuncaoPolosEntradas[x_,j_]:=Module[{PolosEntAux,Parar},
PolosEntAux={};
Parar=0;
For[i2=1,i2≤n, NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]];
If[NovosPolos===NZ,,
For[k2=1,k2≤Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntAux=PolosEntAux∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,Parar=1,]];k2++]
];i2++];
If[Parar===1,
```

```
Print["Erro:
As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na circunferência unitária!"],
If[PolosEntAux===={},RetirarLinhas={},RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntAux],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntAux],
If[PolosEntAux[[i3,1]]===PolosEntAux[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntAux[[i3,2]]=Max[{PolosEntAux[[i3,2]],PolosEntAux[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]]];
If[RetirarLinhas≠{},PolosEntAux=Delete[PolosEntAux,Transpose[{RetirarLinhas}]],];
PolosEntAux]
FuncaoMataPolos[x_,j_]:=If[FuncaoPolosEntradas[x,j]≠{},
FactoresMataPolos=1;
For[i4=1,i4≤Length[FuncaoPolosEntradas[x,j]],
FactoresMataPolos=
FactoresMataPolos (x-FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,1]])^(FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,
1]
IndPacInic:=Table[-Exponent[FuncaoMataPolos[x,j],x],{j,1,n}]
MatT[Inds_]:=Module[{TAux,IndsAuxA,IndsAuxB},TAux=Id;
IndsAuxA=Inds;
IndsAuxB=Inds;
For[i15=1,i15≤n-1,
For[j15=1,j15≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]],
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]];
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]];
For[s15=1,s15≤n,
T1[[s15,j15]]=Id[[s15,j15+1]];
T1[[s15,j15+1]]=Id[[s15,j15]];
s15++],];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux]
B[x_,j_]:=Transpose[Aaux][[j]]×FuncaoMataPolos[x,j]
MatrixBAux[x_]:=Transpose[Table[B[x,j],{j,1,n}]]
```

BAux[x_]:=MatrixBAux[x].Inverse[MatT[IndPacInic]]
FactorCentral:=Module[{Id},Id=IdentityMatrix[n];
For[k5=1,k5≤n, Id[[k5,k5]]=$x^{\text{IndParInic[[k5]]}}$;k5++];Id]
ΛInicial:=MatT[IndPacInic].FactorCentral.Inverse[MatT[IndPacInic]]
DenomDetBAux:=Denominator[Together[Det[BAux[x]]]]
NumDetBAux:=Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]
If[Zeros[NumDetBAux]===NZ,
If[NumDetBAux===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i5=1,i5≤Length[Zeros[NumDetBAux]],
If[Abs[Zeros[NumDetBAux][[i5,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i5++]]
Clear[i5]
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]]
ZerosAMais={}
If[ZerosIniciais===NZ,„
For[i9=1,i9≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i9,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i9]]},];
i9++]]
Clear[i9]
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,{},
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k7=2,k7≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k7]]}];
For[i11=1,i11≤n,
ColMatSing[[i11]]=Join[ColMatSing[[i11]],NovaCol[[i11]]];
i11++];
If[Nullspace[ColMatSing≠{},
CtesAux=-$\frac{\text{NullSpace[ColMatSing]}}{\text{NullSpace[ColMatSing][[1,k7]]}}$;
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k7]]}];
Break[],];
k7++];
CtesAux]
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,

```
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux]
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;
{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k8=Length[Ctes[MatSing][[1]]]+1;
IndsAuxa[[k8]]+=1;
IndsAuxb[[k8]]+=1;
For[i12=1,i12≤n-1,
For[j12=1,j12≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j12]]<IndsAuxa[[j12+1]],
IndsAuxb[[j12]]=IndsAuxa[[j12+1]];
IndsAuxb[[j12+1]]=IndsAuxa[[j12]];
For[s12=1,s12£n,
T1[[s12,j12]]=Id[[s12,j12+1]];
T1[[s12,j12+1]]=Id[[s12,j12]];
s12++],];
TAux=T1.TAux;
j12++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i12++];
{TAux,IndsAuxa}]
IndsIniciais=Sort[IndPacInic,Greater]
Factores[x_]:= If[ZerosAMais≠ {},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[BAux[x]];
For[i14=1, i14≤Length[ZerosAMais],
```

For[j14=1, j14≤ZerosAMais[[i14,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i14,1]];
AMaisAux= Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x, MatCte, ZerosAMais[[i14,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
j14++];
i14++];
ΛAux=Id;
For[k4=1, k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=$x^{\text{IndsIter[[k4]]}}$;k4++];
{AMaisAux, ΛAux},
ΛAux=Id;
For[k5=1, k5≤n,
ΛAux[[k5,k5]]=$x^{\text{IndsIniciais[[k5]]}}$;k5++];
{BAux[x], ΛAux}]
Factores[x]
$\mathcal{A}_+$ =Simplify[Factores[x][[1]]
Λ1=Factores[x][[2]]
$\mathcal{A}_-$ =Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]
$\mathcal{M}_+$ =MatrixForm[Transpose[$\mathcal{A}_+$]]
Λ=MatrixForm[Λ1]
$\mathcal{M}_-$ =MatrixForm[Transpose[$\mathcal{A}_-$]]

6.4 Anexo 4

Ficheiro **"FactorizacaoEsqCurv"**

z_0 =
r =
t = r×x +z_0
A[x_] :=
A[x]
DimA:=Dimensions[A[x]]
If[DimA[[1]]==DimA[[2]],,Print["Erro:
A matriz A[x] deve ser quadradada!"];
Abort[]] MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k,1],
Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k],x_]},
{k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k_]}]
Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]]
DenomDetA:=Denominator[Together[Det[A[x]]]]
NumDetA:=Numerator[Together[Det[A[x]]]]

```
If[Zeros[NumDetA]===NZ,
If[NumDetA===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i1++]]
Clear[i1]
n:=DimA[[1]]
Id:=IdentityMatrix[n]
Aaux=A[x]
FuncaoPolosEntradas[x_,j_]:=Module[{PolosEntAux,Parar},
PolosEntAux={};
Parar=0;
For[i2=1,i2≤n, NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]];
If[NovosPolos===NZ„
For[k2=1,k2≤Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntAux=PolosEntAux∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,Parar=1,]];k2++]
];i2++];
If[Parar===1,
Print["Erro:
As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na circunferência unitária!"],
If[PolosEntAux==={},RetirarLinhas={},RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntAux],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntAux],
If[PolosEntAux[[i3,1]]===PolosEntAux[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntAux[[i3,2]]=Max[{PolosEntAux[[i3,2]],PolosEntAux[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]]];
If[RetirarLinhas≠{},
PolosEntAux=Delete[PolosEntAux,Transpose[{RetirarLinhas}]],];
PolosEntAux]
FuncaoMataPolos[x_,j_]:=If[FuncaoPolosEntradas[x,j]≠{},
FactoresMataPolos=1;
```

```
For[i4=1,i4≤Length[FuncaoPolosEntradas[x,j]],
FactoresMataPolos=FactoresMataPolos
(x-FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,1]])^(FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,
1]
IndPacInic:=Table[-Exponent[FuncaoMataPolos[x,j],x],{j,1,n}]
MatT[Inds_]:=Module[{TAux,IndsAuxA,IndsAuxB},TAux=Id;
IndsAuxA=Inds;
IndsAuxB=Inds;
For[i15=1,i15≤n-1,
For[j15=1,j15≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]],
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]];
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]];
For[s15=1,s15≤n,
T1[[s15,j15]]=Id[[s15,j15+1]];
T1[[s15,j15+1]]=Id[[s15,j15]];
s15++],];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux]
B[x_,j_]:=Transpose[Aaux][[j]]×FuncaoMataPolos[x,j]
MatrixBAux[x_]:=Transpose[Table[B[x,j],{j,1,n}]]
BAux[x_]:=MatrixBAux[x].Inverse[MatT[IndPacInic]]
FactorCentral:=Module[{Id},Id=IdentityMatrix[n];
For[k5=1,k5≤n, Id[[k5,k5]]=x^IndParInic[[k5]];k5++];Id]
ΛInicial:=MatT[IndPacInic].FactorCentral.Inverse[MatT[IndPacInic]]
DenomDetBAux:=Denominator[Together[Det[BAux[x]]]]
NumDetBAux:=Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]
If[Zeros[NumDetBAux]===NZ,
If[NumDetBAux===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i5=1,i5≤Length[Zeros[NumDetBAux]],
If[Abs[Zeros[NumDetBAux][[i5,1]]]===1,
Print["Erro:
```

O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i5++]]
Clear[i5]
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]]
ZerosAMais={}
If[ZerosIniciais===NZ„
For[i9=1,i9≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i9,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i9]]},];
i9++]]
Clear[i9]
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,{},
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k7=2,k7≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k7]]}];
For[i11=1,i11≤n,
ColMatSing[[i11]]=Join[ColMatSing[[i11]],NovaCol[[i11]]];
i11++];
If[Nullspace[ColMatSing≠{},
CtesAux=-$\frac{\text{NullSpace[ColMatSing]}}{\text{NullSpace[ColMatSing][[1,k7]]}}$;
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k7]]}];
Break[],];
k7++];
CtesAux]
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux]
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;

{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k8=Length[Ctes[MatSing][[1]]]+1;
IndsAuxa[[k8]]+=1;
IndsAuxb[[k8]]+=1;
For[i12=1,i12≤n-1,
For[j12=1,j12≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j12]]<IndsAuxa[[j12+1]],
IndsAuxb[[j12]]=IndsAuxa[[j12+1]];
IndsAuxb[[j12+1]]=IndsAuxa[[j12]];
For[s12=1,s12£n,
T1[[s12,j12]]=Id[[s12,j12+1]];
T1[[s12,j12+1]]=Id[[s12,j12]];
s12++],];
TAux=T1.TAux;
j12++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i12++];
{TAux,IndsAuxa}]
IndsIniciais=Sort[IndPacInic,Greater]
Factores[x_]:= If[ZerosAMais≠ {},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[BAux[x]];
For[i14=1, i14≤Length[ZerosAMais],
For[j14=1, j14≤ZerosAMais[[i14,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i14,1]];
AMaisAux= Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x, MatCte, ZerosAMais[[i14,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
j14++];
i14++];
ΛAux=Id;
For[k4=1, k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=$x^{\text{IndsIter[[k4]]}}$;k4++];
{AMaisAux, ΛAux},
ΛAux=Id;
For[k5=1, k5≤n,
ΛAux[[k5,k5]]=$x^{\text{IndsIniciais[[k5]]}}$;k5++];

{BAux[x], ΛAux}]
Const:=Inverse[Factores[x][[2]]]
$\mathcal{A}_+$ =Simplify[Factores[x][[1]]].Const
ΛAux=MatrixForm[Factores[x][[2]]]
$\mathcal{A}_-$ =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]]
Clear[t]
$\mathcal{A}_+ = (\text{MatrixForm}[A_+])/.x \to ((t - z_0)/r)$
$\Lambda = (\text{MatrixForm}[\Lambda Aux])/.x \to (t - z_0)$
$\mathcal{A}_- = (\text{MatrixForm}[A_-])/.x \to ((t - z_0)/r)$

6.5 Anexo 5

Ficheiro **"FactorizacaoEsqRectaReal"**

$t = (i(1 + x))/(1 - x)$
$\mathcal{M}$[x_] :=
A[x_] := Together[Simplify[M[x]]]
A[x]
DimA:=Dimensions[A[x]]
If[DimA[[1]]==DimA[[2]],,
Print["Erro: A matriz A[x] deve ser quadradada!"];
Abort[]] MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k,1],
Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k],x_]},
{k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k_]}]
Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]]
DenomDetA:=Denominator[Together[Det[A[x]]]]
NumDetA:=Numerator[Together[Det[A[x]]]]
If[Zeros[NumDetA]===NZ,
If[NumDetA===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],
NumZerosDentro=0;
For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i1++]]
Clear[i1]
n:=DimA[[1]]

```
Id:=IdentityMatrix[n]
Aaux=A[x]
FuncaoPolosEntradas[x_,j_]:=Module[{PolosEntAux,Parar},
PolosEntAux={};
Parar=0;
For[i2=1,i2≤n, NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]];
If[NovosPolos===NZ„
For[k2=1,k2£Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntAux=PolosEntAux∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,Parar=1,]];k2++]
];i2++];
If[Parar===1,
Print["Erro:
As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na circunferência unitária!"],
If[PolosEntAux==={},RetirarLinhas={},RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntAux],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntAux],
If[PolosEntAux[[i3,1]]===PolosEntAux[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntAux[[i3,2]]=Max[{PolosEntAux[[i3,2]],PolosEntAux[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]]];
If[RetirarLinhas≠{},
PolosEntAux=Delete[PolosEntAux,Transpose[{RetirarLinhas}]],];
PolosEntAux]
FuncaoMataPolos[x_,j_]:=If[FuncaoPolosEntradas[x,j]≠{},
FactoresMataPolos=1;
For[i4=1,i4≤Length[FuncaoPolosEntradas[x,j]],
FactoresMataPolos=FactoresMataPolos
(x-FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,1]])^(FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,
1]
IndPacInic:=Table[-Exponent[FuncaoMataPolos[x,j],x],{j,1,n}]
MatT[Inds_]:=Module[{TAux,IndsAuxA,IndsAuxB},TAux=Id;
IndsAuxA=Inds;
IndsAuxB=Inds;
For[i15=1,i15≤n-1,
For[j15=1,j15≤n-1,
T1=Id;
```

```
If[IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]],
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]];
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]];
For[s15=1,s15≤n,
T1[[s15,j15]]=Id[[s15,j15+1]];
T1[[s15,j15+1]]=Id[[s15,j15]];
s15++],];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux]
B[x_,j_]:=Transpose[Aaux][[j]]×FuncaoMataPolos[x,j]
MatrixBAux[x_]:=Transpose[Table[B[x,j],{j,1,n}]]
BAux[x_]:=MatrixBAux[x].Inverse[MatT[IndPacInic]]
FactorCentral:=Module[{Id},Id=IdentityMatrix[n];
For[k5=1,k5≤n, Id[[k5,k5]]=x^IndParInic[[k5]];k5++];Id]
ΛInicial:=MatT[IndPacInic].FactorCentral.Inverse[MatT[IndPacInic]]
DenomDetBAux:=Denominator[Together[Det[BAux[x]]]]
NumDetBAux:=Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]
If[Zeros[NumDetBAux]===NZ,
If[NumDetBAux===0,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],],NumZerosDentro=0;
For[i5=1,i5≤Length[Zeros[NumDetBAux]],
If[Abs[Zeros[NumDetBAux][[i5,1]]]===1,
Print["Erro:
O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na circunferência unitária!"];
Abort[],];
i5++]]
Clear[i5]
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]]
ZerosAMais={}
If[ZerosIniciais===NZ,,
For[i9=1,i9≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i9,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i9]]},];
i9++]]
Clear[i9]
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,{},
```

```
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k7=2,k7≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k7]]}];
For[i11=1,i11≤n,
ColMatSing[[i11]]=Join[ColMatSing[[i11]],NovaCol[[i11]]];
i11++];
If[Nullspace[ColMatSing≠{},
CtesAux=-NullSpace[ColMatSing]/NullSpace[ColMatSing][[1,k7]];
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k7]]}];
Break[],];
k7++];
CtesAux]
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux]
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;
{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k8=Length[Ctes[MatSing][[1]]]+1;
IndsAuxa[[k8]]+=1;
IndsAuxb[[k8]]+=1;
For[i12=1,i12≤n-1,
For[j12=1,j12≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j12]]<IndsAuxa[[j12+1]],
IndsAuxb[[j12]]=IndsAuxa[[j12+1]];
IndsAuxb[[j12+1]]=IndsAuxa[[j12]];
```

For[s12=1,s12£n,
T1[[s12,j12]]=Id[[s12,j12+1]];
T1[[s12,j12+1]]=Id[[s12,j12]];
s12++],];
TAux=T1.TAux;
j12++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i12++];
{TAux,IndsAuxa}]
IndsIniciais=Sort[IndPacInic,Greater]
Factores[x_]:= If[ZerosAMais≠ {},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[BAux[x]];
For[i14=1, i14≤Length[ZerosAMais],
For[j14=1, j14≤ZerosAMais[[i14,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux, x→ ZerosAMais[[i14,1]];
AMaisAux= Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x, MatCte, ZerosAMais[[i14,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
j14++];
i14++];
ΛAux=Id;
For[k4=1, k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=x^IndsIter[[k4]];k4++];
{AMaisAux, ΛAux},
ΛAux=Id;
For[k5=1, k5≤n,
ΛAux[[k5,k5]]=x^IndsIniciais[[k5]];k5++];
{BAux[x], ΛAux}]
Factores[x]
$\mathcal{A}_+$ =Simplify[Factores[x][[1]]]
Λ*Aux*=MatrixForm[Factores[x][[2]]]
$\mathcal{A}_-$ =MatrixForm[Simplify[Inverse[Factores[x][[2]]].Inverse[Factores[x][[1]]].A[x]]]
Clear[t]
$\mathcal{A}_+ = (\text{MatrixForm}[\mathcal{A}_+]\ )/.x\rightarrow ((t-i)/(t+i))$
Λ=(MatrixForm[ΛAux])/.x→ $((t-i)/(t+i))$
$\mathcal{A}_- = (\text{MatrixForm}[\mathcal{A}_-])\ /.x\rightarrow ((t-i)/(t+i))$

6.6 Anexo 6

```
Matriz=Input["Introduza uma matriz quadrada na incógnita x"]
    Escolha1:=ChoiceDialog["Pretende obter uma factorização:",
    {direita→direita,esquerda→esquerda}]
    Esc1=Escolha1
    Escolha2:=ChoiceDialog["Pretende obter uma factorização na:",
    {circunferênciaUnitária→circunferênciaUnitária,
    outraCircunferência→outraCircunferência ,rectaReal→rectaReal}]
    Esc2=Escolha2
    Factorizar[MatrizA_]:=Module[{MatrizInicial},
    MatrizInicial=MatrizA;
    DimA:=Dimensions[MatrizInicial];
    If[DimA[[1]]==DimA[[2]],,
    Print["Erro: A matriz A[x] deve ser quadradada!"];
    Abort[]];
    MultAlg[p_]:=Table[{Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k,1],
    Count[Part[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k],x_]},
    {k,1,Count[Split[Replace[x,Solve[p0,x]]],k_]}];
    Zeros[p_]:=If[D[p,x]===0,NZ,MultAlg[p]];
    DenomDetA:=Denominator[Together[Det[MatrizInicial]]];
    NumDetA:=Numerator[Together[Det[MatrizInicial]]];
    If[Zeros[NumDetA]===NZ,
    If[NumDetA===0,
    Print["Erro: O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na
    circunferência unitária!"];
    Abort[],],
    NumZerosDentro=0;
    For[i1=1,i1≤Length[Zeros[NumDetA]],
    If[Abs[Zeros[NumDetA][[i1,1]]]===1,
    Print["Erro: O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na
    circunferência unitária!"];
    Abort[],];
    i1++]];Clear[i1];
    n:=DimA[[1]];Id:=IdentityMatrix[n];
    Aaux=MatrizInicial;
    FuncaoPolosEntradas[x_,j_]:=Module[{PolosEntAux,Parar},
    PolosEntAux={};
    Parar=0;
    For[i2=1,i2≤n,
    NovosPolos=Zeros[Denominator[Aaux[[i2,j]]]];
```

```
If[NovosPolos===NZ„
For[k2=1,k2≤Length[NovosPolos],
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]<1,
PolosEntAux=PolosEntAux∪{NovosPolos[[k2]]},
If[Abs[NovosPolos[[k2,1]]]===1,Parar=1,]];k2++]
];i2++];
If[Parar===1,
Print["Erro: As entradas da matriz A[x] não devem ter polos na
circunferência unitária!"],
If[PolosEntAux==={},RetirarLinhas={},RetirarLinhas={};
For[i3=1,i3≤Length[PolosEntAux],
For[j3=i3,j3≤Length[PolosEntAux],
If[PolosEntAux[[i3,1]]===PolosEntAux[[j3,1]]&&i3≠j3,
PolosEntAux[[i3,2]]=Max[{PolosEntAux[[i3,2]],PolosEntAux[[j3,2]]}];
RetirarLinhas=RetirarLinhas∪{j3},];
j3++];
i3++]]];
If[RetirarLinhas≠{},
PolosEntAux=Delete[PolosEntAux,Transpose[{RetirarLinhas}]],];
PolosEntAux];
FuncaoMataPolos[x_,j_]:=If[FuncaoPolosEntradas[x,j]≠{},
FactoresMataPolos=1;
For[i4=1,i4≤Length[FuncaoPolosEntradas[x,j]],
FactoresMataPolos=FactoresMataPolos (x-FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,1]])^
(FuncaoPolosEntradas[x,j][[i4,2]]);
i4++];
FactoresMataPolos,1];
IndPacInic:=Table[-Exponent[FuncaoMataPolos[x,j],x],{j,1,n}];
MatT[Inds_]:=
Module[{TAux,IndsAuxA,IndsAuxB},
TAux=Id;
IndsAuxA=Inds;
IndsAuxB=Inds;
For[i15=1,i15≤n-1,
For[j15=1,j15≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxA[[j15]]<IndsAuxA[[j15+1]],
IndsAuxB[[j15]]=IndsAuxA[[j15+1]];
IndsAuxB[[j15+1]]=IndsAuxA[[j15]];
For[s15=1,s15≤n,
T1[[s15,j15]]=Id[[s15,j15+1]];
```

```
T1[[s15,j15+1]]=Id[[s15,j15]];
s15++],];
TAux=T1.TAux;
j15++];
IndsAuxA=IndsAuxB;
i15++];
TAux];B[x_,j_]:=Transpose[Aaux][[j]]×FuncaoMataPolos[x,j];
MatrixBAux[x_]:=Transpose[Table[B[x,j],{j,1,n}]];
BAux[x_]:=MatrixBAux[x].Inverse[MatT[IndPacInic]];
FactorCentral:=Module[{Id},Id=IdentityMatrix[n];
For[k5=1,k5≤n,Id[[k5,k5]]=xIndPacInic[[k5]];
k5++];Id];
ΛInicial:=MatT[IndPacInic].FactorCentral.Inverse[MatT[IndPacInic]];
DenomDetBAux:=Denominator[Together[Det[BAux[x]]]];
NumDetBAux:=Numerator[Together[Det[BAux[x]]]];
If[Zeros[NumDetBAux]===NZ,
If[NumDetBAux===0,
Print["Erro: O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na
circunferência unitária!"];
Abort[],],
NumZerosDentro=0;
For[i5=1,i5≤Length[Zeros[NumDetBAux]],
If[Abs[Zeros[NumDetBAux][[i5,1]]]===1,
Print["Erro: O determinante da matriz A[x] não deve ter zeros na
circunferência unitária!"];
Abort[],];
i5++]];
Clear[i5];
ZerosIniciais=Zeros[Numerator[Together[Det[BAux[x]]]]];
ZerosAMais={};
If[ZerosIniciais===NZ„
For[i9=1,i9≤Length[ZerosIniciais],
If[Abs[ZerosIniciais[[i9,1]]]<1,
ZerosAMais=ZerosAMais∪{ZerosIniciais[[i9]]},];
i9++]];
Clear[i9];
Ctes[MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,{},
ColMatSing=Transpose[{Transpose[MatSing][[1]]}];
For[k7=2,k7≤n,
NovaCol=Transpose[{Transpose[MatSing][[k7]]}];
For[i11=1,i11≤n,
```

```
ColMatSing[[i11]]=Join[ColMatSing[[i11]],NovaCol[[i11]]];
i11++];
If[NullSpace[ColMatSing]≠{},
CtesAux=-NullSpace[ColMatSing]/NullSpace[ColMatSing][[1,k7]];
CtesAux[[1]]=Delete[CtesAux[[1]],{CtesAux[[1,k7]]}];
Break[],];
k7++];
CtesAux];
MatU[x_,MatSing_,Zero_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
MatAux=Id;
MatAux[[1,1]]=x-Zero;
MatAux,
MatAux=Id;
Lamda=Ctes[MatSing];
k=Length[Lamda[[1]]]+1;
For[s=1,s≤k-1,
MatAux[[k,k]]=x-Zero;
MatAux[[s,k]]=Lamda[[1,s]];
s++];
MatAux];
MatTeIndices[Inds_,MatSing_]:=If[Count[Transpose[MatSing][[1]],0]===n,
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxa[[1]]+=1;
{Id,IndsAuxa},
TAux=Id;
IndsAuxa=Inds;
IndsAuxb=Inds;
k8=Length[Ctes[MatSing][[1]]]+1;
IndsAuxa[[k8]]+=1;
IndsAuxb[[k8]]+=1;
For[i12=1,i12≤n-1,
For[j12=1,j12≤n-1,
T1=Id;
If[IndsAuxa[[j12]]<IndsAuxa[[j12+1]],
IndsAuxb[[j12]]=IndsAuxa[[j12+1]];
IndsAuxb[[j12+1]]=IndsAuxa[[j12]];
For[s12=1,s12≤n,
T1[[s12,j12]]=Id[[s12,j12+1]];
T1[[s12,j12+1]]=Id[[s12,j12]];
s12++],];
TAux=T1.TAux;
```

```
j12++];
IndsAuxa=IndsAuxb;
i12++];
{TAux,IndsAuxa}];
IndsIniciais=Sort[IndPacInic,Greater];
Factores[x_]:=If[ZerosAMais≠{},
IndsIter=IndsIniciais;
AMaisAux=Together[ BAux[x]];
For[i14=1,i14≤Length[ZerosAMais],
For[j14=1,j14≤ZerosAMais[[i14,2]],
MatCte=Limit[AMaisAux,x→ZerosAMais[[i14,1]]];
AMaisAux=Together[AMaisAux.Inverse[MatU[x,MatCte,ZerosAMais[[i14,1]]]].
Inverse[MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[1]]]];
IndsIter=MatTeIndices[IndsIter,MatCte][[2]];
j14++];
i14++];
ΛAux=Id;
For[k4=1,k4≤n,
ΛAux[[k4,k4]]=xIndsIter[[k4]];k4++];
{AMaisAux,LAux},
ΛAux=Id;
For[k5=1,k5≤n,
ΛAux[[k5,k5]]=xIndsIniciais[[k5]];k5++];
{BAux[x],LAux}];
Factores[x]]
Which[Esc1===direita &&Esc2===circunferênciaUnitária,
A[x]=Transpose[Matriz];
Factorizar[A[x]];
A+=Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]];
Λ1=Factorizar[A[x]][[2]];
A-=Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]];
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"→Print[MatrixForm[Transpose[A+]]],
"Λ"→Print[MatrixForm[Λ1]],
"M-"→Print[MatrixForm[Transpose[A-]]]}],
Esc1===direita &&Esc2===outraCircunferência,
M1=(Matriz)/.x→(t);
z0=Input["Introduza o centro da circunferêcia.
Deverá ser um ponto do plano complexo."];
r=Input["Introduza o raio da circunferência.
Deverá ser um valor real positivo."];
```

```
M2=(M1)/.t→(r×x+z0);
A[x]=Transpose[Simplify[M2]];
Factorizar[A[x]];
Const:=Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]];
A+=Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]].Const;
ΛAux=MatrixForm[Factorizar[A[x]][[2]]];
A-=Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].
Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]];
M+=Simplify[Transpose[A+]];
M-=Simplify[Transpose[A-]];
Clear[t];
M+=(MatrixForm[M+])/.x→((t-z0)/r);
Λ=(MatrixForm[ΛAux])/.x→(t-z0);
M-=(MatrixForm[M-])/.x→((t-z0)/r);
Clear[x];
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"→Print[(MatrixForm[Simplify[M+]])/.t→(x)],
"Λ"|Print[(MatrixForm[L])/.t→(x)],
"M-"|Print[(MatrixForm[Simplify[M-]])/.t→(x)]}],
Esc1===direita &&Esc2===rectaReal,
t=((i(1+x))/(1-x));
M3=(Matriz)/.x→(t);
A[x]=Transpose[Together[Simplify[M3]]];
Factorizar[A[x]];
A+=Transpose[Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]]];
Λ1=Factorizar[A[x]][[2]];
A-=Transpose[Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].
Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]]];
Clear [t];
AA+=(MatrixForm[A+])/.x→((t-i)/(t+i));
Λ11=(MatrixForm[Λ1])/.x→((t-i)/(t+i));
AA-=(MatrixForm[A-])/.x→((t-i)/(t+i));
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"→Print[(MatrixForm[Simplify[AA+]])/.t→(x)],
"Λ"|Print[(MatrixForm[Λ11])/.t→(x)],
"M-"|Print[(MatrixForm[Simplify[AA-]])/.t→(x)]}],
Esc1===esquerda&&Esc2===circunferênciaUnitária,
A[x]=Matriz;
Factorizar[A[x]];
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"|Print[MatrixForm[Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]]]],
```

```
"Λ"|Print[MatrixForm[Factorizar[A[x]][[2]]]],
"M-"|Print[MatrixForm[Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].
Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]]]}],
Esc1===esquerda&&Esc2===outraCircunferência,
M1=(Matriz)/.x→(t);
z0=Input["Introduza o centro da circunferêcia.
Deverá ser um ponto do plano complexo."];
r=Input["Introduza o raio da circunferência.
Deverá ser um valor real positivo."];
M2=(M1)/.t→(r×x+z0);
A[x]=Simplify[M2];
Factorizar[A[x]];
Const:=Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]];
A+=Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]].Const;
ΛAux=MatrixForm[Factorizar[A[x]][[2]]];
A-=Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].
Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]];
Clear[t];
N+=(MatrixForm[A+])/.x→((t-z0)/r);
Λ=(MatrixForm[LAux])/.x→(t-z0);
N-=(MatrixForm[A-])/.x→((t-z0)/r);
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"→Print[(MatrixForm[Simplify[N+]])/.t→(x)],
"Λ"|Print[(MatrixForm[Λ])/.t→(x)],
"M-"|Print[(MatrixForm[Simplify[N-]])/.t→(x)]}],
Esc1===esquerda&&Esc2===rectaReal,t=(i (1+x))/(1-x);
M4=(Matriz)/.x→(t);
A[x]=Together[Simplify[M4]];
Factorizar[A[x]];
A+=Simplify[Factorizar[A[x]][[1]]];
ΛAux=Factorizar[A[x]][[2]];
A-=Simplify[Inverse[Factorizar[A[x]][[2]]].
Inverse[Factorizar[A[x]][[1]]].A[x]];
Clear [t];
AA+=(MatrixForm[A+])/.x→((t-i)/(t+i));
Λ11=(MatrixForm[LAux])/.x→((t-i)/(t+i));
AA-=(MatrixForm[A-])/.x→((t-i)/(t+i));
ActionMenu["Apresentar os termos da factorização",
{"M+"→Print[(MatrixForm[Simplify[AA+]])/.t→(x)],
"Λ"|Print[(MatrixForm[Λ11])/.t→(x)],
"M-"→Print[(MatrixForm[Simplify[AA-]])/.t→(x)]}]]
```

Bibliografia

[1] **Conceição** A., Factorização de algumas Classes de Funções Matriciais e suas Aplicações (Tese provisória para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, especialidade de Análise Matemática,), Universidade do Algarve. 2007.

[2] **Lebre** A., **Bastos** A., Algebras de Operadores Integrais Singulares. AEIST, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.

[3] **Carmo** J., **Sernadas** A., **Sernadas** C., **Dionísio** F. M., **Caleiro** C. Introdução à programação em Mathematica, IST Press,1999.

[4] **Clancey** K. and **Gohberg** I. C. Factorization of Matrix Functions and Singular integral Operators, volume 3 of Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, 1981.

[5] **Feldman** I. and **Markus** A. On some Properties of Factorization Indices. Integral Equations and Operator Theory, 30:326-337, Birkhäuser Verlang, Basel, 1998.

[6] **Gakhov** F.D. Problemas de Contorno. Mir. Moscú 1980.

[7] **Gavinhos** C. M. Q. V. Factorização Meromorfa e Generalizada para Álgebras de Funções Matriciais 2×2 (Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática), Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico. 2002.

[8] **Gelfand** I., **Raikov** D., **Shilov** G. Commutative Normed Rings. Chelsea Publishing Company, 1964.

[9] **Gohberg** I. **C., Kaashoek** M. A. and **Spitkovskii** I. M., An overview of matrix factorization theory and operator applications. Summer school in Faro, 2000.

[10] **Gohberg** I. **C., Goldberg** S. and **Kaashoek** M. A. Classes of Linear Operators, I. OT49. Birkhäuser Verlang, 1990.

[11] **Gohberg** I. C. and **Krupnik** N. One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, vol. 1, OT 53. Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, 1992.

[12] **Karapetiants** N., **Samko** S. Equations with Involutive Operators. Birkhäuser. Boston. 2001.

[13] **Litvinchuk** G. S. and **Spitkovskii** I. M. Factorization of Measurable Matrix Functions, volume 25 of Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, 1987.

[14] **Monteiro** A. J. N. Álgebra Linear e Geometria Analítica. Edição da Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa. Lisboa. 1989.

[15] **Muskhelishvili** N. I. Singular Integral Equations. Dover Publications. New York, 1991.

[16] **Plemelj** J.Riemannsche Funktionenscharen unit gegebener Monodromiegruppe. Monat. Math. Phys., 19, 211-245, 1908.

[17] **Rodríguez** J. C. S. Operadores Integrais Singulares com deslocamento linear fraccionário de Carleman e conjugação (Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, na especialidade de Análise Matemática). Universidade do Algarve. 2002

[18] **Smirnov** G. Análise Complexa e Aplicações. Escolar Editora. 2003.

[19] **Wolfram** Stephen, The Mathematica Book, Third Edition. Wolfram Media/Cambridge, UniversityPress, 1996.