Representação proporcional - um problema de otimização inteira

Susana Fernandes
Universidade do Algarve FCT DM
Campus de Gambelas
8005-139 Faro, Portugal
e-mail: sfer@ualg.pt

Resumo: O atual programa de MACS inclui nos seus conteúdos programáticos métodos de representação proporcional. No entanto, a maioria dos professores de matemática não teve qualquer formação nesta área. Neste documento evidencia-se que os métodos dos divisores resolvem problemas de otimização inteira e sugere-se que estes sejam introduzidos nos cursos de (ensino em) matemática, em disciplinas da área da investigação operacional.

Abstract: The apportionment problem is currently taught in portuguese high schools, included in the syllabus of MACS. Most teachers of mathematics, however, have no training in this area. The methods of divisors solve integer programming problems, so we encourage the inclusion of these methods in the syllabus of operations research subjects.

palavras-chave: MACS; Representação Proporcional; Otimização Inteira.

keywords: MACS; Apportionment; Integer Programming.

1 Introdução

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui a representação proporcional. Neste âmbito são abordados em MACS alguns métodos de origem norte-americana e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente. Todos os métodos abordados (exceto o de Hamilton) são métodos de divisores modificados e os dois métodos europeus (D'Hondt e Sainte-Laguë) são de fato equivalentes a dois dos métodos americanos (Jefferson e Webster).

A maioria dos professores de matemática não teve no entanto qualquer formação nesta área e os materiais de apoio existentes são escassos e não sem algumas lacunas. Encontramos na literatura inúmeros trabalhos sobre a formação de professores que evidenciam a necessidade da existência de programas de educação em matemática que apoiem conexões entre os conteúdos dos cursos de nível universitário e os conteúdos do ensino secundário (ver por exemplo [4] e os trabalhos que o referenciam).

Neste documento apresentamos os métodos de divisores abordados em MACS, expondo como as soluções dadas por estes métodos correspondem à otimização de uma função objectivo diferente, consequência de conceções distintas de traduzir matematicamente o que é mais justo. Assim sendo, sugerimos que se apresentem alguns destes métodos nas disciplinas da área da investigação operacional em cursos de (ensino em) matemática.

2 O problema da representação proporcional

Nos Estados Unidos da América (EUA) cada estado recebe um número de lugares na câmara de representantes proporcional à sua população. Em inúmeros países da Europa cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

Seja V o número total de votos válidos de uma eleição, que se distribuem por N listas eleitorais, sendo v_i o número de votos na lista eleitoral i. Seja M o número total de mandatos (a distribuir pelas listas eleitorais de acordo com a sua proporção de votos v_i/V). Seja $D = V/M$ o divisor que indica o número de eleitores representados por cada mandato no parlamento. A quota de mandatos da lista eleitoral i será $q_i = M \times v_i/V$ (ou $q_i = v_i/D$), que em geral não é um número inteiro. Encontramos uma solução para o problema ao determinar o número de mandatos m_i a atribuir a cada lista i, sendo os m_i inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$, como indica a formulação da Figura 1.

objectivo distribuir os m_i de acordo com as $q_i = M \times v_i/V$

s. a.: $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$m_i \in Z_0^+, \forall i \in \{1,\ldots,N\}$

Figura 1: Formulação do problema da representação proporcional

No início do funcionamento na câmara de representantes dos EUA, o número de lugares não era fixo, fixando-se sim o rácio do número de cidadãos por lugar na câmara de representantes - o divisor D. Definido D, determina-se a quota de cada estado de acordo com a sua população $q_i = v_i/D$, restando o problema de definir o número inteiro de lugares correspondente a cada quota (m_i). O número de mandatos a atribuir a cada estado é encontrado arredondando as quotas segundo algum critério (os vários métodos diferem apenas no critério de arredondamento). A partir do momento em que se fixa o número de lugares na câmara de representantes M, o número de cidadãos representado por cada mandato passa a depender do total da população V, sendo o divisor definido de acordo com estes valores $D = V/M$. Se o total de lugares distribuídos por arredondamento das quotas não é igual a M, o divisor é modificado $D \to D'$ e recalculam-se as quotas $q_i' = v_i/D'$. O processo poderá necessitar de várias iterações até encontrar uma solução.

Os métodos de divisores desenvolvidos na Europa vão atribuindo um mandato de cada vez até completar todo o parlamento, verificando a cada passo a que lista eleitoral será atribuído o mandato em consideração. Cada um destes métodos considera uma sequência de divisores $d(m_i),\ m_i = 0, ..., M-1,\ i = 1, ..., N$. O método começa por atribuir 0 mandatos a todas as listas eleitorais e seleciona a cada iteração o maior rácio $v_i/d(m_i)$, atribuindo por cada rácio selecionado um mandato à lista eleitoral correspondente, como indica o algoritmo da Figura 2. Este corresponde à forma recursiva dos métodos norte-americanos [2], onde os divisores $d(m_i)$ não são mais que os pontos de arredondamento das quotas, conforme a tabela. Note-se que os métodos em que o primeiro divisor é zero atribuem na primeira iteração um mandato a todos os concorrentes, o que, sendo um requisito nas eleições da câmara de representantes dos EUA (todos os estados têm de estar representados), não é viável para a maioria das eleições parlamentares.

Algoritmo

(i) $m_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N$

(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

Seja k tal que $\dfrac{v_k}{d(m_k)} = \max \dfrac{v_i}{d(m_i)}$

Fazer $m_k = m_k + 1$ e $m_i = m_i \quad \forall i \neq k$

Métodos de divisores modificados	Divisores $d(m_i)$ $m_i=0,\ldots,M-1$	Sequência Divisores
Adams	m_i	$0, 1, 2, 3, \ldots$
Dean	$\dfrac{2m_i(m_i+1)}{m_i+(m_i+1)}$	$0, \frac{4}{3}, \frac{12}{5}, \frac{24}{7}, \ldots$
Huntington-Hill	$\sqrt{m_i(m_i+1)}$	$0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \ldots$
Webster≈Sainte-Laguë	$m_i + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$
Jefferson ≈ D'Hondt	$m_i + 1$	$1, 2, 3, 4, \ldots$

Figura 2: Forma recursiva dos métodos dos divisores

Métodos diferentes determinam, em geral, soluções diferentes para uma mesma instância do problema. Qual será a forma mais justa de distribuir os M mandatos pelas N listas eleitorais, de acordo com a correspondente proporção de votos? Poderemos pensar que o número de eleitores que cada mandato representa deveria ser igual para todas as listas, e igual à representatividade de cada mandato pensada na definição da dimensão do parlamento. Esta ideia pode ser traduzida por $Min \sum_{i=1}^{N} m_i(v_i/m_i - V/M)^2$. Ou, analogamente poderemos pensar na desejável igualdade da proporção de mandatos por cada eleitor, que pode ser representada por $Min \sum_{i=1}^{N} v_i(m_i/v_i - M/V)^2$. Uma vez que o número de mandatos atribuídos a cada lista eleitoral não será exatamente igual à sua quota, existirão, neste sentido, listas favorecidas e listas desfavorecidas. Poderemos pensar em minimizar o número de votos por mandato da lista mais desfavorecida, traduzido por $MinMax\ v_i/m_i$. Ou minimizar a representação per-capita da lista mais favorecida, traduzido por $MinMax\ m_i/v_i$.

Na verdade, cada um dos métodos dos divisores determina a solução óptima para um destes objectivos ([2], [3], [1]), como mostra a Figura 3.

Método	objectivo
Adams	$\min \max \frac{v_i}{m_i}$
Huntington-Hill	$\min \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{V}{M}\right)^2 \Leftrightarrow \min \frac{v_i^2}{m_i}$
Webster≈Sainte-Laguë	$\min \sum_{i=1}^{N} v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V}\right)^2 \Leftrightarrow \min \frac{m_i^2}{v_i}$
Jefferson ≈ D´Hondt	$\min \max \frac{m_i}{v_i} \Leftrightarrow \min y \quad s.a.: \frac{m_i}{v_i} \leq y, i = 1,\ldots,N \wedge y \in IR^+$

Figura 3: Objectivos otimizados pelos métodos dos divisores

Note-se que o método de Webster resolve um problema de programação quadrática inteira e o de Jefferson um problema de programação linear mista, estando estes tipos de problemas incluídos nos conteúdos programáticos habituais de disciplinas da área da investigação operacional. Os métodos de Adams e Huntington-Hill resolvem problemas de programação não linear inteira, menos usuais nos programas de licenciatura.

Referências

[1] M. Balinsky e H. Young, *Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Bookings Institution Press 2001. (1^a edição 1982)

[2] E. Huntington, "The apportionment of representatives in congress", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30 (1928), pp. 85-110.

[3] W. Lucas, "The apportionment problem", in *Modules in Applied Mathematics: Political and related models*, Vol. 2, Springer, 1978, Eds. S. Brams, W. Lucas, Jr. Straffín, pp. 358-396.

[4] L. Shulman, "Those who understand: Knowledge growth in teaching", *Educational Researcher*, Vol. 15, No. 2 (1986), pp. 4-14.