Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

A COMUNICAÇÃO ESCRITA NA AULA DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS

Maria Manuela Amorim Teixeira

Dissertação apresentada para obtenção do grau de

Mestre em Didática e Inovação no Ensino das Ciências

Área de Especialização de Matemática

Orientadora: Professora Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Faro

2011

Resumo

Este estudo visa conhecer a forma como os alunos comunicam matematicamente, por escrito, quando recorrem às tecnologias na aula de matemática. Em particular, procura conhecer o tipo de representações escritas que são utilizadas pelos alunos quando recorrem às tecnologias. Foram definidas três questões: i) Como é que as tecnologias influenciam e facilitam o desenvolvimento da comunicação escrita na aula de matemática? ii) De que forma os alunos utilizam as tecnologias ao serviço da comunicação matemática? e iii) Será uma das ferramentas tecnológicas, calculadora gráfica ou computador, mais potenciadora da comunicação escrita do que a outra?

O quadro teórico aborda dois temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: a comunicação matemática e a utilização das tecnologias em sala de aula.

A intervenção pedagógica desenvolve-se nas aulas de Matemática A de uma turma do 10.º ano. Foram propostas cinco tarefas e solicitado um relatório final ou uma composição. Na exploração de duas tarefas, os alunos recorreram à calculadora gráfica, em outras duas recorreram ao *software* matemático *Geogebra* e na última tarefa foi dada oportunidade aos alunos para escolherem entre a calculadora e/ou o computador.

Neste estudo adotei uma abordagem qualitativa e interpretativa, centrada na análise de dados recolhidos através de observação participante, um questionário aplicado a toda a turma, entrevistas a alguns alunos e documentos produzidos durante as várias sessões.

Os resultados mostram que todos os alunos envolvidos neste estudo privilegiam a representação gráfica como veículo de comunicação matemática. A abordagem gráfica das funções parece ajudar os alunos a compreender os problemas de modo mais claro. Os alunos recorrem às tecnologias para obterem uma primeira representação gráfica da função envolvida. As representações iniciais vão evoluindo, o que mostra uma evolução na comunicação dos raciocínios por parte dos alunos e na compreensão da situação apresentada bem como dos conceitos abrangidos pela tarefa.

Palavras-chave: Comunicação matemática; tecnologias; representações matemáticas; estudo de funções

Abstract

This study intends to know how students communicate mathematically, by writing, when they use technologies in mathematics classes. Particularly, it intends to know the type of written representations that students make use of when they work with technologies. Three research questions were formulated: i) How do technologies influence and facilitate the development of written communication in mathematics classes? ii) How do students use technologies for the purpose of mathematical communication? iii) Comparing the graphing calculator with the computer, is it possible to say if one of the tools tends to stimulate the written communication more than the other?

The theoretical framework that guided the overall development of the study involves two main issues: mathematical communication and the use of technologies in the mathematics classroom.

A teaching experiment was developed with a 10^{th} grade class of students taking the subject of Mathematics A. During the intervention five tasks were proposed and a either a final report or a written essay was requested. Students were asked to use the graphing calculator in two of the tasks and to use the *Geogebra* mathematical software in two other tasks; in the last task the students were given the opportunity to choose which technological tool they wanted to complete it: the graphing calculator, the Geogebra or both.

This study followed a qualitative and interpretative approach, by means of which I (the researcher) analysed the empirical data collected through participant observation, a questionnaire applied to all the students, interviews to some of the students and the documents produced throughout the several sessions.

The results show that all students involved in this study gave special attention to the graphical representation as a means of engaging in written mathematical communication. The graphical approach seems to have helped students in understanding the tasks in a clearer way. Students usually used technologies to obtain a first graphical representation of the function involved in the task. Students' initial representations have developed and evolved, revealing how their mathematical communication about their thinking on the given tasks and about the underpinning concepts was improving.

Key words: Mathematical communication, technologies, mathematical representations, study of functions.

Agradecimentos

À Professora Doutora Nélia Amado, minha orientadora, pelo apoio e incentivo dados.

À Professora Doutora Susana Carreira por estar sempre presente.

Ao professor e alunos participantes do estudo.

À minha família.

A todos quantos de alguma forma tornaram este trabalho possível.

Índice

Índice de quadros

Índice de figuras

Índice de fotografias

CAPÍTULO 1

Das motivações pessoais ao objetivo do estudo e às questões de investigação

Neste capítulo começo por apresentar as minhas motivações para a realização deste estudo, o problema e as questões que irão orientar a investigação. Apresento ainda a pertinência do estudo.

1.1. Motivações pessoais

O desejo de não parar, de querer fazer mais e melhor, levou-me desde 2002, data em que concluí a licenciatura em Ensino da Matemática, a continuar a procurar um enriquecimento da minha formação.

Com a perspetiva de não conseguir um lugar como professora de Matemática, decidi continuar a estudar, desta vez, a concluir a licenciatura em Informática de Gestão, visando a lecionação na área da Informática, área que também me agradou desde sempre. No entanto, nunca cheguei a lecionar disciplinas na área da Informática, uma vez que em 2006 consegui o tão desejado lugar no Quadro de Zona do Baixo Alentejo e Alentejo Litoral. Os conhecimentos que adquiri no domínio da Informática não foram desperdiçados, uma vez que foram sempre colocados ao serviço do ensino, em particular, do processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

Em 2008, mais uma vez, continuando o meu desejo e vontade de aprofundar os meus conhecimentos, optei por me inscrever no mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências (especialização de Matemática). Procurei com este novo desafio encontrar algumas respostas para os problemas e as dúvidas que nos assolam no dia-a-dia na sala de aula. Neste curso contactei com novas realidades e metodologias que me fizeram repensar a minha visão sobre a Matemática e o ensino/aprendizagem desta disciplina. Ao refletir sobre as minhas práticas fui ganhando consciência de aspetos que não valorizava devidamente. Um dos temas que foi despertando o meu interesse e o desejo de aprofundar foi o da comunicação matemática.

Uma dificuldade que encontro nos alunos é a de comunicar as suas ideias e raciocínios, tanto oralmente, como por escrito, pois esta capacidade exige a organização e clarificação do próprio pensamento (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Segundo Almiro (2008), este tema também não é fácil para os professores, o que naturalmente se reflete nos alunos. Este autor considera que uma das razões para esta dificuldade tem origem na formação inicial.

No entanto, a importância da comunicação matemática é cada vez maior. Assim, o desenvolvimento da capacidade de comunicar é apresentado como uma das finalidades para o ensino da Matemática no Ensino Secundário (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2001, p. 3). Em Portugal, desde a realização do Seminário de Vila Nova de Milfontes, em 1988, que se defende a necessidade de desenvolver esta capacidade. Em 2000, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* vêm fortalecer a importância da comunicação matemática em todos os níveis de ensino. Finalmente, em 2001, a comunicação matemática surge explicitamente nos Programas de Matemática para o Ensino Secundário e, em 2007, no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

Nos últimos anos, as provas de aferição do Ensino Básico, os exames finais de ciclo do Ensino Básico e os do Ensino Secundário apelam, cada vez mais, a questões que exigem a organização e clarificação do próprio pensamento.

1.2. O problema e as questões do estudo

Procurando desenvolver esta capacidade transversal nos alunos e beneficiando das potencialidades das tecnologias surge, como objeto deste estudo, a comunicação escrita na aula de matemática.

A opção pela comunicação escrita prende-se com o facto de esta tornar mais visível o pensamento do que a comunicação oral, exigindo maior reflexão (Almiro, 2008). O ato de escrever obriga a refletir e a clarificar pensamentos sobre as ideias desenvolvidas, exigindo uma maior precisão na expressão dos raciocínios (Almiro, 2008; Boavida et al., 2008). Também Sá e Zenhas (2004) defendem que escrever textos, com vocabulário matemático, ajuda a clarificar os conceitos estudados.

Assim, surge como questão principal deste estudo conhecer a forma como os alunos comunicam matematicamente por escrito, quando recorrem às tecnologias na aula de Matemática. Em particular, pretende-se conhecer o tipo de representações escritas que são utilizadas pelos alunos quando recorrem às tecnologias na aula de Matemática.

Para melhor orientar o desenvolvimento desta investigação, foram formuladas as seguintes questões:

1) Como é que as tecnologias influenciam e facilitam o desenvolvimento da comunicação escrita na aula de Matemática?
2) De que forma os alunos utilizam as tecnologias ao serviço da comunicação matemática?
3) Comparando a calculadora gráfica com o computador, será possível dizer se uma das duas ferramentas tende a ser mais potenciadora da comunicação escrita do que a outra?

1.3. A pertinência do estudo

Vivemos atualmente tempos de mudança rápida e acentuada. Estas mudanças afetam, por exemplo, a forma como trabalhamos e como tomamos conhecimento do que se passa à nossa volta. As tecnologias constituem hoje um potente motor de mudança nas nossas vidas. A Escola deve acompanhar este desafio, num momento em que se criaram condições para a utilização das tecnologias na sala de aula.

Em 24 de Novembro de 2005 foi aprovado, pelo Conselho de Ministros, um documento visando a aplicação duma estratégia de crescimento e competitividade baseada no conhecimento, na tecnologia e na inovação. O Plano Tecnológico visa modernizar Portugal e, em particular, instituições como a Escola.

O Governo aprovou, em Agosto de 2007, o Plano Tecnológico da Educação (PTE). Este plano pretende reforçar as infraestruturas tecnológicas das escolas, disponibilizar conteúdos e serviços em linha e reforçar as competências TIC de alunos, docentes e não docentes.

No sítio oficial do PTE podemos encontrar os objetivos a que este Plano se propõe:

Objetivos	Média UE15 (2006)	Portugal (2007)	Portugal (2010)
Ligação à Internet em banda larga de alta velocidade	6 Mbps	4 Mbps	≥ 48 Mbps
Número alunos por PC com ligação à Internet	8,3	12,8	2
Percentagem de docentes com certificação em TIC	25%	-	90%

Quadro 1 – Objetivos do Plano Tecnológico da Educação

Este Plano Tecnológico vem ao encontro de necessidades anteriormente identificadas pelos educadores matemáticos em Portugal no tocante à importância de reforçar o equipamento tecnológico nas Escolas. Por exemplo, no relatório *Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática,* publicado pela Associação de Professores de Matemática (APM), em 1998, pode ler-se algumas das recomendações sobre as condições de trabalho a alcançar:

> *As escolas devem ser equipadas com recursos diversificados para o ensino-aprendizagem da Matemática (…) os grupos de Matemática devem dispor de recursos tecnológicos específicos para a sua atividade, nomeadamente calculadoras e computadores.* (APM, 1998b, p. 68)

Presentemente, e em parte fruto do investimento previsto pelo Plano Tecnológico, muitas das situações identificadas no Relatório referido estão ultrapassadas em inúmeras escolas. Portanto, estão criadas neste momento condições para concretizar as recomendações curriculares atuais no domínio da integração das tecnologias na aula de Matemática no Ensino Secundário.

No Programa de Matemática do Ensino Secundário para a disciplina de Matemática A pode ler-se:

> *Não é possível atingir os objetivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).* (Silva et al., 2001, p. 15)

Estes autores apresentam algumas razões para a sua utilização:

- *facilita uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem*;
- *as calculadoras gráficas … meios incentivadores do espírito de pesquisa*;
- *a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática*;

- *o computador … permite atividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa.* (Silva et al., 2001, p. 16).

Uma das preocupações do Ministério da Educação ao apresentar a utilização da tecnologia como obrigatória é "…também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica" (Silva et al., 2001, p. 10).

Esta obrigatoriedade surgiu, segundo Amado (2007), em 1997 e levou a que a utilização da calculadora gráfica se tornasse também obrigatória nos exames nacionais de Matemática do 12.º ano, a partir do ano letivo de 1999/2000. Como afirma esta investigadora, "era inconcebível que uma ferramenta utilizada diariamente na sala de aula fosse interdita num exame de Matemática" (Amado, 2007, p. 80).

Quesada (1999) reconhece que o ensino da Matemática e até os conteúdos matemáticos têm sofrido modificações como consequência da presença das tecnologias. As alterações vão no sentido de favorecer a conceptualização e o estudo de aplicações realistas ao mundo que nos rodeia, ao mesmo tempo que áreas tais como análise de dados, combinatória e teoria de grafos ganham maior relevo em resposta à importância e variedade dos problemas que as calculadoras gráficas permitem resolver. Como consequência, os currículos sofreram alterações em vários países.

A alusão ao uso das tecnologias na aula de Matemática encontra-se em vários documentos de referência para o ensino. No Currículo Nacional do Ensino Básico pode ler-se:

> *Os alunos devem, frequentemente ter a oportunidade de utilizar recursos de natureza diversa: utilização das tecnologias na aprendizagem da Matemática….* (ME, 2001, p. 71)

De entre os seis princípios para a Matemática Escolar publicados pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), os quais "descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade" (NCTM, 2007, p. 11), salienta-se o Princípio da Tecnologia, segundo o qual:

A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. (NCTM, 2007, p. 11)

De acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico:

A aprendizagem da Matemática inclui sempre vários recursos. …. Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores …. (Ponte et al., 2007, p. 9).

Ponte (1988) defende ainda que:

(…) o conhecimento verdadeiramente importante não se apoia na memorização de grandes quantidades de dados, mas na capacidade de utilizar eficazmente informação. Por isso, o que é essencial é saber-se procurar e selecionar a informação de que se necessita. (p. 83)

Ainda para este autor, os alunos devem usar o computador como um "consultor" nas suas investigações. Também, segundo o NCTM (2007), as tecnologias permitem aos alunos analisar mais exemplos ou formas de representação de modo a formular e explorar conjeturas mais facilmente. Outra vantagem na utilização das tecnologias é defendida por Amado e Carreira (2008) que destacam o papel da visualização:

(…) que faz atenuar a necessidade de abstração e de idealização, tornando as ideias menos herméticas e mais percetíveis. (p. 287)

Não há dúvida de que as novas tecnologias estão presentes no dia-a-dia de qualquer cidadão e, em particular, no dos nossos alunos. É comum verificar-se que alguns estudantes estão mais à frente no domínio de técnicas e de competências informáticas que alguns dos seus professores. Será desejável que os professores utilizem a tecnologia ao serviço do ensino, tentando assim cativar os alunos com algo de que eles gostam. As tecnologias podem ser um bom aliado do professor pois podem, por si só, suscitar uma reação favorável nos alunos. No entanto, não se deve cair no erro de pensar que estas resolvem todos os problemas com que um professor se depara na sala de aula.

Muitas vezes os alunos têm receio de responder erradamente às perguntas do professor, especialmente quando não se sentem à vontade num determinado assunto. O computador pode ser um aliado nesta situação pois, como afirma Ponte (1988)

> *A relação entre o computador e o aluno é totalmente impessoal…um erro deixa de ser um motivo de grande embaraço que é preciso evitar a todo o custo e passa a ser algo que serve para aprender.* (p. 127)

Durante uma aula em que se usa tecnologia, enquanto os alunos trabalham, o professor tem oportunidade de os observar e concentrar-se nos seus raciocínios, podendo analisar os processos utilizados durante as suas investigações, bem como os resultados obtidos. A divulgação/comunicação dos dados é um momento muito importante no processo educativo pois "(…) dá unidade e consistência a toda a atividade" (Ponte, 1988, p. 99).

A relação entre a tecnologia e a comunicação é destacada nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, segundo os quais "a tecnologia é um bom apoio para a comunicação" (NCTM, 2007, p. 66). E acrescentam que "a comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática" (NCTM, 2007, p. 66) pois permite clarificar a compreensão matemática. A comunicação escrita, objeto deste estudo, "poderá ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento, uma vez que os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca de noções desenvolvidas na aula. Mais tarde, poderão considerar útil a consulta dos registos dos seus próprios pensamentos" (NCTM, 2007, p. 67).

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte et al., 2007) destaca as várias capacidades transversais ao ensino da Matemática a serem trabalhadas durante todo o Ensino Básico: a resolução de problemas; o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

> *A comunicação matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática a que este programa dá realce. A comunicação envolve as vertentes, oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática. O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma*

construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação oral tem lugar tanto em situações de discussão na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita. (Ponte et al., 2007, p. 8)

Do mesmo modo, o programa de Matemática em vigor no Ensino Secundário realça esta capacidade transversal:

A comunicação matemática (oral ou escrita) é um meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflitam na sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade de precisão na linguagem, conheçam conceitos e terminologia, aprendam a ser críticos (Silva et al., 2001, p. 11).

Por outro lado, destaque-se que a comunicação matemática aparece também, neste Programa, aliada ao uso da tecnologia:

Um estudante deverá registar por escrito, com os comentários julgados adequados, as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica, o computador ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática). (Silva et al., 2001, p.22)

Também no Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, se pode ler:

Nos diversos tipos de experiências vividas pelos alunos, devem ser considerados aspetos transversais da aprendizagem da matemática, nomeadamente: comunicação matemática… (ME, 2001, p. 70)

Para Ponte et al. (2007) a comunicação que ocorre na sala de aula de Matemática marca de forma decisiva a natureza do processo de ensino e de aprendizagem desta disciplina, permitindo a promoção de novas aprendizagens. Esta ideia parece ser partilhada por outros investigadores como Ana Boavida e Helena Martinho. A este propósito, Boavida afirma:

> *(…) as aprendizagens matemáticas dos alunos são função das características da comunicação e das interações em que participam no processo de aprendizagem.* (Boavida, 2005, p. 98)

E Martinho defende que:

> *(…) aprender a comunicar matematicamente bem como aprender Matemática comunicando são perspetivas que podem ser trabalhadas na sala de aula.* (Martinho, 2007, p. 35)

Em suma, tanto no plano curricular como na investigação em educação matemática, trabalhar em sala de aula a comunicação matemática aliada à utilização das tecnologias é um desafio pertinente e atual. Neste momento, é oportuno estudar qual o contributo que as ferramentas tecnológicas (computador e calculadora) podem dar ao desenvolvimento de uma capacidade transversal (comunicação matemática) ao currículo de matemática, sendo por isso útil estudar experiências concretas realizadas em sala de aula.

CAPÍTULO 2

Enquadramento teórico

Este capítulo encontra-se dividido em duas partes. Na primeira irei abordar a temática da comunicação matemática e na segunda a utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática.

2.1. A comunicação matemática

2.1.1. A comunicação matemática no ensino: breve retrospetiva

Desde sempre que o homem comunicou. A comunicação faz parte do dia-a-dia e as formas de comunicar são tão variadas que até em silêncio se comunica. Para Fiske (1999, referido por Menezes, 2004), a comunicação é reconhecidamente uma atividade humana, que não se consegue definir com clareza.

Não é meu objetivo fazer uma abordagem exaustiva deste complexo conceito. Procurarei apenas apresentar algumas definições propostas por diversos autores para definir o conceito de comunicação.

Segundo Watzlawick et al (1967, citado em Anastácio, 2006),

> *A comunicação é uma condição sine qua non da vida humana e da ordem social. Desde o início da sua existência, um ser humano está envolvido no complexo processo de aquisição das regras de comunicação, apenas com uma noção mínima daquilo em que consiste esse corpo de regras, esse calculus da comunicação humana* (p. 13).

Anastácio (2006), a partir de uma leitura de diversos autores, apresenta a seguinte definição para este conceito:

> *A comunicação humana é o processo no qual a intencionalidade é criada, dado que a natureza consequencial da comunicação é o lugar da ação, onde a consequencialidade se exprime por diversas conexões que emergem, para serem criticadas, mudadas e/ou abandonadas pelos indivíduos que ao comunicarem realizam as suas intenções* (p. 21).

Martinho (2007) define comunicação "como um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente" (p. 15).

No Dicionário da Língua Portuguesa da Porto Editora do ano de 2006, comunicação é entendida como:

> *Comunicação s.f. 1 acto ou efeito de comunicar; 2 troca de informação entre indivíduos através da fala, da escrita, de um código comum ou do próprio comportamento; 3 o facto de comunicar e de estabelecer uma relação com algo ou alguém; relação; correspondência; 4 o que se comunica; mensagem; informação; aviso; anúncio; 5 meio técnico usado para comunicar; transmissão; 6 capacidade de entendimento entre as pessoas através do diálogo; 7 passagem de um local a outro; acesso; via; órgãos de ~ social conjunto dos jornais, revistas e dos meios audiovisuais que têm como missão principal informar o público (Do lat. communicatione, «ação de participar»).*

A comunicação é, por outro lado, reconhecida como essencial na Educação Matemática.

> *A comunicação na sala de aula é, também, uma rede complexa de interações linguísticas e não linguísticas, e é vista por muitos como um campo muito rico para o estudo das relações sociais. A importância que tem sido reconhecida às interações na sala de aula está intimamente relacionada com a importância que tem sido dada à comunicação.* (Almiro, 1997, p. 10).

Para Sá e Zenhas, (2004, p. 6,7) "os alunos que leem, escrevem e falam sobre o que estudam são os que aprendem melhor." Esta capacidade tem vindo a assumir cada vez mais destaque nos programas de Matemática.

No entanto, a investigação sobre este tema é recente, tanto internacionalmente como em Portugal (Menezes, 2004; Nacarato & Lopes, 2009). Powell e Bairral (2006) afirmam que estudos sobre a linguagem, a escrita e interações de vários tipos têm sido objeto de investigação e reflexão há pelo menos duas décadas. Façamos então uma retrospetiva de vinte anos para analisar a importância dada a este tema.

Em Portugal, esta temática é abordada com alguma ênfase no Seminário de Milfontes, que teve lugar em 1988, e do qual foi publicado um documento intitulado *Renovação do Currículo de Matemática,* onde se concluía que:

> *O panorama atual do ensino da Matemática nas nossas escolas é marcado por um domínio quase absoluto dos objetivos cognitivos de níveis mais baixos (memorização de factos, algoritmos e técnicas de resolução de tipos pré-estabelecidos de exercícios)* (APM, 2009, p. 9).

O fundamental da aprendizagem da Matemática era "dominar" questões formais da linguagem e essencialmente técnicas destinadas a resolver exercícios-tipo, descontextualizados do mundo real. O ensino não estava "orientado para desenvolver e avaliar os processos e estratégias de raciocínio, nem as capacidades necessárias para enfrentar e resolver problemas novos, designadamente os hábitos de consultar, cooperar, comunicar, discutir, investigar ou produzir (APM, 2009, p. 9).

Os participantes neste seminário defendiam a necessidade de uma revolução na Matemática escolar, sendo "imperioso considerar como prioritários fatores que sempre foram negligenciados" (APM, 2009, p. 13).

As orientações metodológicas propunham, de entre outros aspetos, "estimular a comunicação oral e escrita, a discussão e reflexão, a troca e confronto de ideias, experiências e processos de trabalho" (APM, 2009, p. 24).

Concluíam então que a Matemática escolar renovada deveria contemplar a resolução de problemas, o desenvolvimento de modelos matemáticos, atividades de exploração, investigação ou descoberta, formulação de conjeturas, discussão e comunicação, argumentação e demonstração e construção de conceitos. Os investigadores presentes defendiam ainda que o computador e a calculadora deveriam ser utilizados como facilitadores da aprendizagem da Matemática.

Em 1991, o NCTM publica *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*, traduzido em 1994 pela APM, com o objetivo de fornecer orientações para o ensino da Matemática. Referindo vários estudos (Case & Bereit 1984; Cobb & Steffe, 1983; Davis, 1984; Hiebert, 1986; Lampert, 1986; Lesh & Landau, 1983; Schoenfeld, 1987) afirmam que a aprendizagem acontece quando os alunos apreendem ativamente nova informação e constroem os seus próprios significados. Os professores devem ser responsáveis por selecionar e elaborar atividades que "exigem dos alunos que raciocinem e comuniquem matematicamente" (NCTM, 1998, p. 26). Consideram que "o raciocínio matemático, a resolução de problemas, a comunicação e as conexões devem ser centrais no ensino da Matemática" (NCTM, 1998, p. 21). De entre as seis normas apresentadas para o ensino da Matemática, três delas dizem respeito ao discurso ali referido como "formas de representar, pensar, falar, concordar ou discordar…" (NCTM, 1998, p. 22).

Para aperfeiçoar o discurso, o professor deve encorajar a utilização de vários instrumentos tais como:

- *computadores, calculadoras e outras tecnologias;*
- *materiais concretos usados como modelos;*
- *figuras, diagramas, tabelas e gráficos;*
- *termos e símbolos inventados ou convencionados;*
- *metáforas, analogias ou histórias;*
- *hipóteses, explicações ou argumentos escritos;*
- *apresentações orais ou dramatizações* (NCTM, 1998, p. 55).

Escrever é uma componente importante do discurso pois os alunos aprendem a usar as "ferramentas do discurso matemático" (NCTM, 1998, p. 36).

Todas estas orientações vão ao encontro do preconizado no documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 2009).

Também publicado em 1991, em Portugal, o Currículo de Matemática do Ensino Básico refere a necessidade de adaptar esta disciplina a alunos heterogéneos e criar condições para a sua inserção num mundo em mudança. O ensino da Matemática passou a ter "uma dupla função: Desenvolvimento de capacidades e atitudes. Aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização" (ME, 1991, p. 171). As finalidades da Matemática, específicas e transversais, passaram a ser:

> *desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real, promover a estruturação do indivíduo no campo do pensamento (…), desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e criatividade, facultar processos de aprender a aprender e condições que despertem o gosto pela*

> *aprendizagem permanente, promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação* (ME, 1991, p. 175).

Os objetivos gerais são definidos em termos de valores/atitudes, capacidades/aptidões e conhecimentos, e esta foi a alteração essencial relativamente aos programas anteriores. Metodologicamente propõe-se que os conceitos sejam construídos a partir da experiência de cada aluno e de situações concretas e abordados sob pontos de vista diferentes, com progressivos níveis de rigor e formalização. A resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, a aquisição de conhecimentos e o papel da História da Matemática devem ser situações de aprendizagem constantes numa sala de aula de Matemática. Sugere-se a utilização de materiais do quotidiano, de desenho e medição, manipuláveis, escritos, calculadoras, meios audiovisuais e informáticos.

Conforme se pode constatar, há uma aproximação entre as propostas elaboradas em 1988 (APM, 2009) e o Currículo de Matemática de 1991 (ME, 1991).

Estavam criadas as condições para uma profunda alteração no ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, um processo de mudança está longe de se operar de imediato.

O relatório *Matemática 2001: Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem de Matemática*, publicado em 1998, apresenta uma panorâmica do ensino da Matemática a nível nacional como suporte para elaborar um conjunto de recomendações. Segundo os autores deste relatório, muitas coisas tinham mudado nos últimos doze anos, principalmente em termos de orientações curriculares, mas esta mudança não tinha sido acompanhada na formação de professores, nem na criação nas escolas das condições que os novos programas solicitavam.

Neste relatório é apresentada uma análise às conceções e perspetivas dos professores no que diz respeito às finalidades e objetivos dos programas, aos seus conteúdos e ao sistema de avaliação. Foquemo-nos nas finalidades e objetivos dos programas.

Foi pedido aos professores que hierarquizassem, de acordo com o grau de importância que lhe atribuíam, as finalidades para o ensino da Matemática em vigor nos programas. Estas eram as seguintes:

A – Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e de intervenção no real.
B – Promover a estruturação do indivíduo no campo do pensamento, desenvolvendo os conceitos de espaço, tempo e quantidade, ou estabelecendo relações lógicas, avaliando e hierarquizando.
C – Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e criatividade.
D – Facultar as capacidades de aprender a aprender e condições que despertem o gosto pela aprendizagem permanente.
E – Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (APM, 1998b, p. 22)

O programa do Ensino Secundário propõe três das finalidades do ensino básico (A, C e E) e acrescenta mais duas:

F – Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua um suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida ativa.
G – Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência. (p. 22)

Foi apresentado um quadro com a informação obtida, em que é mostrada a percentagem de professores que classificou a finalidade com um dos dois valores mais elevados.

Finalidades	2º ciclo (%)	3º ciclo (%)	Ens. sec. (%)
C (Raciocínio, res. problemas...)	76	78	78
A (Matemática e realidade)	53	46	71
F (Cultura científica, técnica...)	a)	a)	36
B (Estruturação do pensamento)	28	36	a)
D (Aprender a aprender)	27	24	a)
E (Autonomia, cooperação)	9	8	6
G (Atitude positiva face à ciência)	a)	a)	4

a) Esta finalidade não existe neste ciclo

Quadro 2 – Importância relativa das finalidades (APM, 1998b, p. 22)

Como se pode constatar, a finalidade C é a que aparece com maior importância para os professores. No entanto, o foco de interesse deste estudo aparece aqui associado a outras finalidades.

No que concerne aos objetivos gerais dos programas, os professores foram inquiridos de forma semelhante, de modo a pontuar cada objetivo de acordo com a sua importância. Apresenta-se, de seguida, um quadro onde figuram os objetivos em vigor, no Ensino Básico e Secundário.

2º e 3º ciclos	Ensino secundário
A - Desenv. a confiança em si próprio	A - Desenv. a confiança em si próprio
B - Desenvolver o raciocínio	B - Desenvolver o raciocínio e pensamento científico
C - Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo	C - Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo
D - Desenvolver a capacidade de comunicação	D - Desenvolver a capacidade de comunicar
E - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real	E - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real
F - Iniciar-se em processos e técnicas de tratamento de informação	F - Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades
G - Desenvolver o conhecimento do espaço	G - Ampliar os conhecimentos de Geometria no plano e no espaço
H - Desenvolver hábitos de trabalho e de persistência	H - Desenvolver hábitos de trabalho e de persistência
I - Desenvolver o conceito de função	I - Iniciar o estudo da Análise infinitesimal
J - Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação	J - Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação
K - Desenvolver a capacidade de resolução de problemas	M - Desenvolver o sentido da responsabilidade
L - Desenvolver a curiosidade e gosto de aprender	N - Conhecer aspectos da História da Matemática
—	O - Desenvolver interesses culturais

Quadro 3 – Objetivos no Ensino Básico e Secundário (APM, 1998b, p. 24)

As respostas dadas pelos professores constam dos quadros 4 e 5 onde se apresenta a percentagem de professores que o classifica com um dos dois valores mais elevados.

Objectivos gerais	2º ciclo (%)	3º ciclo (%)	Objectivos gerais
(Raciocínio) B	74	78	B (Raciocínio)
(Matemática e realidade) E	70	70	K (Resolução de problemas)
(Resolução de problemas) K	67	64	E (Matemática e realidade)
(Curiosid., gosto de aprender) L	57	60	L (Curios., gosto de aprender)
(Hábitos de trabalho ...) H	54	56	H (Hábitos de trabalho ...)
(Autoconfiança) A	52	54	C (Números, cálculo)
(Números, cálculo) C	51	48	A (Autoconfiança)
(Tolerância, cooperação) J	33	28	D (Comunicação)
(Comunicação) D	30	24	I (Conceito de função)
(Conhecimento do espaço) G	19	22	J (Tolerância, cooperação)
(Conceito de função) I	19	21	F (Tratamento de informação)
(Tratamento de informação) F	15	21	G (Conhecimento do espaço)

Quadro 4 – Importância relativa dos objetivos gerais dada por professores dos 2.º e 3.º ciclos (APM, 1998b, p. 25)

Finalidades	Ens. sec. (%)
B (Raciocínio)	80
E (Matemática e realidade)	72
H (Hábitos de trabalho ...)	68
A (Autoconfiança)	53
C (Números, cálculo)	53
G (Geometria)	49
M (Responsabilidade)	45
I (Análise infinitesimal)	42
D (Comunicação)	34
F (Estatística, Probabilidades)	34
J (Tolerância, cooperação)	29
N (Interesses culturais)	16
O (História da Matemática)	10

Quadro 5 – Importância relativa dos objetivos gerais dada por professores do ensino secundário (APM, 1998b, p. 26)

Pela observação das tabelas, verifica-se que o objetivo D – Desenvolver a capacidade de comunicação, obteve percentagens entre 28% e 34%, sendo um objetivo pouco valorizado.

As recomendações do *Matemática 2001* vão no sentido de clarificar as finalidades propostas no currículo, articulando-as com os objetivos gerais, “proporcionando maior integração dos diversos domínios (conhecimentos, capacidades e atitudes e valores) e maior ênfase nos objetivos dos domínios das atitudes e valores relacionados com a Matemática”. (APM, 1998b, p. 31).

Sendo assim, as recomendações do *Matemática 2001* voltavam a ter como referência "o conjunto de grandes orientações traçadas no documento 'Renovação do Currículo de Matemática'" (APM, 1998b, p. 5).

Em 2000, o NCTM lança *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, cuja tradução foi publicada em 2007 pela APM. Este documento propõe seis princípios para a matemática escolar: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia e dez normas: números e operações, álgebra, geometria, medida, análise de dados e probabilidades, resolução de problemas, raciocínio e demonstração, comunicação, conexões e representação.

Segundo as normas para a comunicação, os programas de ensino deveriam habilitar os alunos para:

- *organizar e consolidar o seu pensamento matemático através da comunicação;*
- *comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros;*
- *analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usado por outros;*
- *usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.* (NCTM, 2007, p. 66).

A comunicação é considerada "uma parte essencial da matemática e da educação matemática" (NCTM, 2007, p. 66) pois através desta "as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção" (p. 66). Quando os alunos falam, escrevem, lêem e ouvem beneficiam de duas formas: "comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 66). Especificamente sobre a comunicação escrita, esta "deverá ser encorajada" (NCTM, 2007, p. 68). Este tipo de comunicação pode ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento pois obriga-os a reflectir sobre o seu trabalho. Como em qualquer outro tipo de escrita, a sua prática orientada é importante, assim como são "os pormenores relativos à elaboração de argumentos matemáticos, incluindo a utilização e os significados particulares da linguagem matemática, as representações e as regras de justificação e de demonstração" (NCTM, 2007, p. 68).

Um ano após o lançamento de *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, em Portugal, é publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* onde são definidas dez competências gerais que o aluno deve ter desenvolvido à saída do Ensino Básico. Estas constituem um elemento de trabalho central no processo de desenvolvimento do Currículo e devem ser operacionalizadas transversal e especificamente. O seu desenvolvimento pressupõe que todas as áreas curriculares actuem em convergência. No que diz respeito ao ensino da Matemática, apontam-se como principais finalidades

> *Proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza e desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar.* (ME, 2001, p. 58).

Reforça-se esta ideia quando se afirma que:

> *A "predisposição" (para procurar regularidades ou para fazer e testar conjecturas), a "aptidão" (para comunicar ideias matemáticas ou para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas) ou a "tendência" (para procurar ver a estrutura abstracta subjacente a uma situação) são componentes nucleares de uma cultura matemática básica que todos devem desenvolver…* (ME, 2001, p. 58).

A Matemática é vista como uma disciplina que pode dar um forte contributo para o desenvolvimento das competências gerais pois constitui uma área de saber plena de potencialidades para a realização de projetos transdisciplinares e atividades interdisciplinares dos mais diversos tipos.

Também em 2001, é homologado o Programa de Matemática do Ensino Secundário, atualmente em vigor. Este está organizado por grandes temas onde devem ser trabalhadas competências fundamentais para a aprendizagem matemática e por temas transversais. São considerados temas transversais:

- Comunicação Matemática,
- Aplicações e Modelação Matemática;

- História da Matemática;
- Lógica e Raciocínio Matemático;
- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas;
- Tecnologia e Matemática.

São dadas indicações para que estes temas transversais sejam abordados à medida que forem sendo necessários e à medida que a compreensão sobre os assuntos vá aumentando, não devendo ser localizados temporalmente na leccionação nem num determinado ano de escolaridade.

Outra característica do Programa de Matemática do Ensino Secundário, apresentada como fundamental, é a subdivisão dos objetivos e competências gerais em valores/atitudes, capacidades/aptidões e conhecimentos. No que diz respeito à capacidade de comunicar, o Programa apresenta os aspetos que devem ser desenvolvidos:

- *Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico;*
- *Interpretar textos de Matemática;*
- *Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens;*
- *Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática;*
- *Usar a simbologia da Matemática;*
- *Apresentar os textos de forma clara e organizada.* (Silva et al, 2001, p. 5)

Ainda na apresentação do Programa, aquando das sugestões metodológicas gerais, reforça-se a ideia de que o professor, ao aplicá-lo, deve contemplar equilibradamente o desenvolvimento de atitudes, capacidades e a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização. Para tal destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão proporcionar o desenvolvimento do pensamento científico, conduzindo o aluno "a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (Silva et al, 2001, p. 10). Nas atividades deve ter-se em conta a correcção da comunicação oral e escrita dada a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem. O estudante deve ser capaz de verbalizar os seus raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve também conseguir argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da Matemática. Assim, deve ser incentivada com alguma regularidade a realização de trabalhos tais como composições matemáticas, relatórios, monografias e, na medida do possível, apresentados oralmente perante a turma e discutidos com os colegas e o professor. O trabalho de grupo e em pares é apontado como um factor favorável à comunicação matemática pois permite a partilha de métodos de resolução ou a justificação de raciocínios.

A comunicação matemática é considerada um tema transversal importante pois permite que:

> *Os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflictam na sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade de precisão na linguagem, conheçam conceitos e terminologia, aprendam a ser críticos* (Silva et al, 2001, p. 11).

Dada a importância dos temas transversais neste Programa é apresentado, na secção do desenvolvimento do programa, um ponto com as indicações metodológicas para cada um destes temas. Na comunicação matemática, estas indicações reforçam o descrito anteriormente recomendando a realização regular de composições matemáticas, a exposição de um tema preparado ou a resolução de um problema, assim como pequenos relatórios ou monografias. Indicam o trabalho em pares ou grupo como potenciador desta capacidade.

Constituindo um reajustamento ao programa anterior, é homologado em Dezembro de 2007, o Programa de Matemática do Ensino Básico. Como afirmam Canavarro, Tudella e Pires (2009), este programa é visto por muitos não apenas como um reajustamento do programa antigo, mas como um novo programa sendo muitas vezes adoptada a sigla NPMEB. Segundo estas autoras, tal é justificado pelos temas novos, pelo estatuto que confere às capacidades transversais e pelo apelo que faz à experiência matemática dos alunos.

Neste programa começa-se por apresentar as finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos. O ensino deve ser orientado pelas seguintes finalidades fundamentais:

a) *Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados*
b) *Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência* (Ponte et al, 2007, p. 3).

Estas finalidades são concretizadas através de nove objetivos, formulados em termos do que é esperado dos alunos:

1. *Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática.*
2. *Os alunos devem desenvolver uma compreensão da Matemática.*
3. *Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações.*
4. *Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático.*
5. *Os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos.*
6. *Os alunos devem ser capazes de resolver problemas.*
7. *Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas.*
8. *Os alunos devem ser capazes de fazer Matemática de modo autónomo.*
9. *Os alunos devem ser capazes de apreciar a Matemática.* (Ponte et al, 2007, p. 4-6)

Segue-se a apresentação dos Temas matemáticos e Capacidades transversais que são trabalhados nos três ciclos de escolaridade. Os temas matemáticos: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados, acompanham de perto a estrutura do Currículo Nacional. Dá-se destaque a três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática, sendo apresentadas num espaço próprio com a explicitação de objetivos gerais e específicos de aprendizagem relativos a cada uma dessas capacidades.

Metodologicamente, as orientações vão no sentido da diversidade de experiências matemáticas tais como a resolução de problemas, atividades de investigação, projetos, jogos e prática de exercícios prevendo momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas.

O desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e a promoção do raciocínio e da comunicação matemáticos, para além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar em aula. A diversidade de representações, a exploração de conexões, o uso de recursos, o cálculo mental e aspetos da História da Matemática e do papel da Matemática no mundo atual constituem também orientações metodológicas neste programa.

Apesar do destaque dado nos últimos anos, em Portugal e internacionalmente, à comunicação matemática, ainda há um longo caminho a percorrer dentro da sala de aula para que esta capacidade seja plenamente desenvolvida nos nossos alunos.

2.1.2. A comunicação escrita na Educação Matemática

Smole e Diniz (2001) consideram que "analisar o papel das representações pictóricas e da escrita como recursos de ensino permite vislumbrar uma nova dimensão para a prática escolar em sintonia com as pesquisas sobre a aquisição do conhecimento e da aprendizagem" (p. 15).

Powell e Bairral (2006) afirmam que "a utilização da escrita … deve ser vista como um processo que transforma continuamente a cognição e a aprendizagem de quem a produz" (p. 12). Acrescentam ainda que a linguagem escrita nas aulas de Matemática actua como mediadora, integrando as experiências individuais e colectivas na busca da construção e apropriação dos conceitos abstractos estudados.

Smole e Diniz (2001) apresentam duas características que distinguem a escrita das demais formas de comunicação. A primeira é que "a escrita auxilia o resgate da memória, uma vez que muitas discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registo em forma de texto” (p. 23) A segunda é “a possibilidade da comunicação à distância no espaço e no tempo e, assim, de troca de informações e descobertas com pessoas que, muitas vezes, nem conhecemos” (p. 23). A possibilidade de consulta, em qualquer momento, dos registos dos pensamentos dos alunos é apontada, por vários autores, como uma mais-valia da comunicação escrita (NCTM, 2007; Pimm, 1987; Powell & Bairral, 2006; Sá & Zenhas, 2004)

Várias vantagens têm sido apontadas a este tipo de comunicação. Masingila e Wisniowska (1996, referidos por Almiro, 2008) consideram que a escrita ajuda os alunos a tornar o seu conhecimento mais explícito, permitindo-lhes um segundo olhar e a reflexão sobre o que escreveram, ajudando-os a consolidar a sua compreensão sobre a Matemática. Para Pimm (1987) a escrita torna mais visível o pensamento pois exige uma maior precisão na expressão das ideias. Smole e Diniz (2001) observaram que escrever ajuda os alunos no sentido de encorajar a reflexão, clarificar ideias e é um catalisador para as discussões em grupo.

No entanto, também são apontadas desvantagens/problemas à comunicação escrita. Pimm (1987) considera que este tipo de comunicação tende a ser mais impessoal, sendo difícil para o seu autor negociar os seus significados ou reter o seu controlo sobre eles, não havendo possibilidade na maioria das vezes para clarificar ou fazer adaptações do que foi escrito. Para Sá e Zenhas (2004) a utilização da escrita, na aula de Matemática, causa angústia a professores e a alunos. Sendo a escrita uma prática ainda pouco usual na aula de Matemática, os professores sentem insegurança ao analisar os trabalhos escritos e na forma de os avaliarem. Para os alunos, as atividades de escrita exigem uma maior autonomia e hábitos de reflexão, sendo obrigados a fazer um esforço maior de clarificação de ideias. Neste sentido, Almiro (2008) menciona vários autores (Pimm, 1987; Pinto & Santos, 2006; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003; Sá & Zenhas, 2004; Schoen et al., 1996) que afirmam que a escrita não é muito usual na aula de Matemática, apresentando os alunos alguma resistência às primeiras atividades de escrita propostas. Segundo este autor, os alunos, estando habituados a escrever respostas sintéticas ou apresentando os cálculos usados para obtê-las, não vêem a escrita como Matemática. Para Smole e Diniz (2001), o acto de escrever não possui a mesma rapidez e maleabilidade da oralidade, pois quando se escreve não é possível ir para tantos lados como quando se fala, a ordem da escrita determina a coerência e a lógica do texto e a correcção não é imediata.

A dificuldade dos alunos na escrita é identificada no recente relatório *Testes Intermédios 2010.* Na disciplina de Matemática, os piores desempenhos verificaram-se, entre outros, em itens que "exigiam comunicação escrita de conceitos ou de raciocínios" (Ferreira, Castanheira, Pereira & Lourenço, 2010, p. 13). Mas esta dificuldade não é exclusiva na disciplina de Matemática. De um modo geral, os alunos revelam "mais dificuldades nos itens de construção, que resultam das limitações observadas no domínio da escrita … é comum a constatação de dificuldades recorrentes na resposta a itens que mobilizam a construção de textos explicativos, quando estamos em presença da descrição dos raciocínios desenvolvidos e da explicitação das estratégias de resolução adoptadas" (Ferreira et al, 2010, p. 41). Este relatório recomenda que a tarefa de escrita seja alvo de atenção por parte dos professores, alunos e famílias.

Powell e Bairral (2006), investigando a escrita como suporte da aprendizagem, distinguem duas abordagens sobre os objetivos e modos de implementação da escrita no ensino: produto e processo-produto. Na primeira, "a escrita é usada como um recurso para declarar conhecimento" (p. 51) onde os educandos são envolvidos em atividades escritas incidentes mais na Matemática. Na segunda, a escrita "é considerada um meio de conhecimento" (p. 51) onde as atividades escritas propostas incidem mais nos próprios alunos. O tipo de escrita esperado em cada uma destas abordagens é diferente. Assim, numa abordagem produto espera-se que os aprendizes usem uma escrita transacional. Este tipo de escrita "usa uma linguagem que faz cumprir recomendações que informam as pessoas, … que aconselha, persuade ou instrui essas mesmas pessoas. É usada sempre que uma referência exacta e específica ao que se sabe sobre a realidade é necessária" (p. 51). Neste tipo de abordagem as atividades escritas são usadas sobretudo para avaliação e diagnóstico. Tal leva a que se peça aos aprendizes que registem todos os passos de procedimentos matemáticos.

Numa abordagem processo-produto a escrita usada é do tipo expressivo-transacional. A escrita expressiva "é como pensar alto no papel. Tem a função de revelar o falante, verbalizando a sua consciência submete-se ao fluir livre de ideias e sentimentos" (p. 51,52). Quando usada com característica transacional, inclui crítica e revisão. Assim, a reflexão e a reflexão crítica são os focos pedagógicos numa abordagem processo-produto. Através de uma escrita exploratória e especulativa, os aprendizes procuram exteriorizar conteúdos das suas mentes, sendo estas produções usadas como meio de aprendizagem matemática e de conhecimento da pessoa que escreve e não para medir a quantidade de informação adquirida.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita pode então surgir de um contexto reflexivo de carácter mais livre e expressivo e o conhecimento matemático deve ser inserido num contexto de produção que envolva reflexão crítica e inclua processos colaborativos de diferentes dimensões e de tomada de consciência sobre as experiências individuais ou colectivas. A figura seguinte ilustra esta perspectiva.

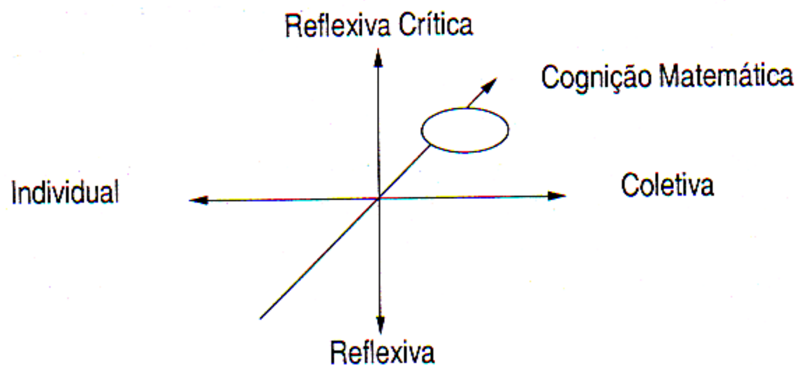


Figura 1 – Desenvolvimento da cognição matemática mediante a escrita (Powell & Bairral, 2006, p. 53)

Tarefas matemáticas

Para potenciar a aprendizagem da Matemática através da escrita, ou outro meio de comunicação, são apontados factores como a natureza das tarefas utilizadas (APM, 1998b; APM, 2009; ME, 2001; NCTM, 1998; NCTM, 2007; Ponte, 2005; Powell & Bairral, 2006; Silva et al, 2001; Smole & Diniz, 2001) e a reflexão sobre as mesmas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003; Ponte, 2005; Powell & Bairral, 2006; Segurado, 2002).

Conforme referido aquando do percurso da comunicação matemática, muitos documentos de referência para o ensino da Matemática fazem alusão à natureza/diversidade das tarefas. Por exemplo, em 1988, no Seminário de Milfontes (APM, 2009) concluía-se que a matemática escolar deveria contemplar a resolução de problemas, o desenvolvimento de modelos matemáticos, atividades de exploração, investigação ou descoberta. No Programa de Matemática do Ensino Secundário atualmente em vigor (Silva et al, 2001) destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão proporcionar o desenvolvimento do pensamento científico, conduzindo o aluno “a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação” (p. 10). No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al, 2007), nas orientações metodológicas, pode ler-se “…o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização” (p. 8).

Ponte (2005) distingue os diferentes tipos de tarefas em termos do seu grau de desafio e de estrutura ou da sua duração e contexto.

O grau de desafio está relacionado “… com a percepção da dificuldade de uma questão …varia entre os pólos de desafio reduzido e elevado.” (p. 17). Quanto ao grau de estrutura, “varia entre os pólos aberto e fechado. Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas.” (p. 17). Os tipos de tarefas são situados no cruzamento destas duas dimensões, conforme se pode observar na figura 2. Este autor alerta para o facto de, entre as tarefas de exploração e os exercícios, nem sempre ser nítida a linha de demarcação devendo-se tal facto aos conhecimentos prévios dos alunos.

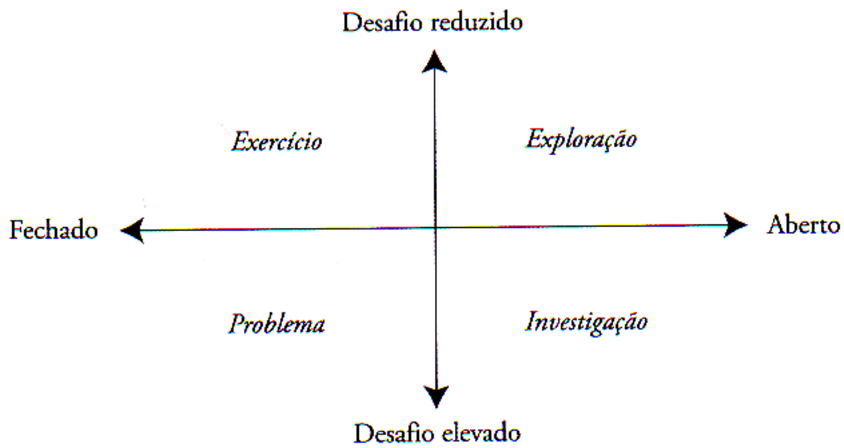


Figura 2 – Diferentes tipos de tarefas, consoante o seu grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 17)

No que concerne à distinção das tarefas quanto à sua duração e contexto, relativamente à primeira dimensão esta pode ser curta ou longa, havendo tarefas que se inserem numa situação intermédia (Figura 3). As tarefas de longa duração podem permitir aprendizagens mais profundas, mas também podem levar os alunos a dispersarem-se ou a abandonar a tarefa. Quanto ao contexto, os pólos são as tarefas ligadas à realidade e as tarefas puramente matemáticas. Pode ainda haver um contexto intermédio, chamado semi-realidade, onde se inserem alguns problemas e exercícios. Uma vez que exercícios, problemas e investigações podem surgir em qualquer um destes contextos, a figura 4 apenas apresenta os possíveis contextos.

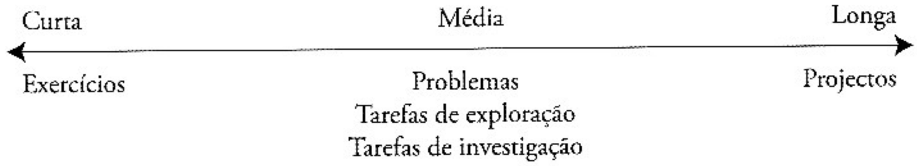


Figura 3 – Diferentes tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p. 19)

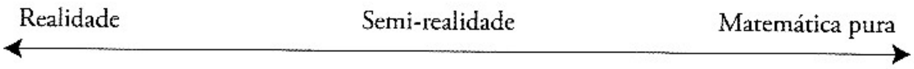


Figura 4 – Diferentes tipos de tarefas, quanto ao contexto (Ponte, 2005, p. 20)

Conforme se pode ler na Brochura de *Didáctica da Matemática* (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997, p. 112), “produções escritas, mais ou menos extensas, realizadas pelos alunos a respeito de problemas, atividades de investigação ou projetos em que trabalharam, podem constituir um factor de aprendizagem…”. Para estes autores, as produções escritas têm um grande potencial formativo contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e reflexão dos alunos, de capacidades como a resolução de problemas, raciocínio e comunicação e atitudes e valores como o gosto pela pesquisa, persistência e responsabilidade.

Para Kilpatrick (1992, referido por Ponte et al, 1997, p. 112) elaborar uma composição é

> *…escrever um texto coerente sobre a resolução de um problema, de um modo que seja compreensível para um leitor (o professor, os colegas ou mesmo outras pessoas).*

Para este autor, quando um aluno escreve uma composição:

> *…precisa de planear de que maneira o argumento deverá ser organizado, aquilo que o leitor precisa de saber e como é que as ideias se relacionam* (p. 113).

Nunes (2004) define os relatórios como "…produções escritas pelos alunos, onde estes descrevem, argumentam e criticam a exploração de uma dada tarefa ou situação de investigação" (p. 24,25). Os alunos podem referir não só as conclusões tiradas, mas também os processos usados para chegar a essas conclusões.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) consideram os registos escritos fundamentais em trabalhos de investigação. Uma das razões apontadas prende-se com o facto da escrita dos resultados permitir ao professor aceder, em qualquer altura, ao trabalho desenvolvido pelos alunos e assim analisar o seu desempenho e planificar as aulas seguintes. Por outro lado, é trabalhada de forma espontânea e genuína a capacidade dos alunos comunicarem matematicamente pois trata-se dos seus próprios pensamentos. A acrescer a estes motivos, apontam o facto de a escrita dos resultados ajudar os alunos a clarificarem as suas ideias, explicitar as suas conjecturas e favorecer o estabelecimento de consensos quanto às suas realizações.

Escrever sobre Matemática é importante pois, tal como afirma Kilpatrick (1992, referido por Ponte et al, 1997) o esforço exigido aos alunos quando produzem composições ou relatórios pode promover uma reflexão mais profunda do que a necessária quando se apresenta apenas a resposta, eventualmente acompanhada de uma justificação breve e imediata do raciocínio seguido. No entanto, o processo de aprendizagem da escrita matemática, tal como qualquer outro tipo de escrita, implica uma prática orientada (NCTM, 2007). Nunes (2004) considera importante que o aluno tenha de apresentar raciocínios sobre a tarefa explorada e que se habitue à ideia de que a versão escrita final nem sempre fica concluída numa primeira tentativa pois colocar ideias por escrito de forma clara e articulada é um processo que se vai aperfeiçoando com a prática.

Assim, os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma atividade prática assumem um papel fundamental (Ponte, 2005). Este autor afirma mesmo que "não é tanto a partir das atividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas atividades práticas" (Ponte, 2005, p. 23).

Na Brochura de *Didáctica da Matemática* (Ponte et al, 1997) recomendam ao professor que acompanhe e oriente, desde o início, o trabalho desenvolvido pelos alunos fazendo sugestões e críticas durante o processo e até mesmo eventuais reformulações do produto final.

De acordo com o NCTM (1998), os alunos devem ir recebendo feedback em diferentes tipos de tarefas que incidam sobre importantes conteúdos matemáticos. Para Bangert-Drowns, Kulick e Morgan (1991, referidos por Dias & Santos, 2010) o feedback parece ser mais proveitoso quando dado a tarefas de natureza mais aberta em oposição a tarefas mais direccionadas e estruturadas.

Dias (2008) e Semana (2008) debruçaram-se sobre o feedback proporcionado às produções escritas. Segundo a primeira investigadora, o feedback que os professores dão às produções dos alunos é importante pois permite-lhes autocorrigir os seus erros, melhorando as aprendizagens e ao professor conhecer melhor as dificuldades dos alunos, adequando as suas práticas. O feedback dado pelo professor às primeiras versões dos seus trabalhos é essencial, mas existe feedback que não implica um aperfeiçoamento de produções futuras por parte dos alunos, nem uma melhora de práticas por parte do professor. Exemplo desta situação é o caso do professor classificar um trabalho, assinalar respostas/aspetos certos ou errados e entregar ao aluno sem lhe dar a possibilidade de reanalisar as suas respostas e corrigir os erros ou não utilizar a informação recolhida para reorientar a sua estratégia de ensino. Dias (2008) aponta como aspetos importantes de um feedback gerador de melhorias a regularidade com que o professor o fornece, em tempo útil, aos seus alunos, devendo este incidir no desenvolvimento do processo e em aspetos específicos da tarefa. As orientações devem ser claras incentivando a reanálise das respostas dadas e reconhecendo o que já está bem feito. Na sua investigação, Dias conclui que as tarefas mais fechadas são mais fáceis de comentar mas o feedback, apesar de contribuir para algumas melhorias, não gera uma evolução significativa na qualidade das aprendizagens. As tarefas mais abertas são mais difíceis de comentar dando origem a comentários mais longos e com indicação de várias ações que os alunos devem realizar, o que se pode revelar desadequado às necessidades dos alunos. No entanto, a prática continuada de tarefas deste tipo em conjunto com o feedback fornecido, contribuiu determinadamente para a melhoria da qualidade das aprendizagens em produções futuras semelhantes. Para esta investigadora, os tipos de tarefas que permitem uma melhor regulação das aprendizagens, apesar de serem mais difíceis de comentar, são a resolução de problemas e os relatórios pois é o aluno que mostra ao professor o que sabe fazer e como faz.

Semana (2008) no seu estudo sobre o papel do relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens, procurou compreender o contributo do fornecimento de feedback oral e escrito nesta regulação. Para esta investigadora, o feedback oral como complemento do escrito traz uma melhoria na qualidade do relatório, comparativamente ao apresentado na primeira fase. Essa eficácia está relacionada com o facto de o feedback oral acontecer a par das experiências de aprendizagem, possibilitando uma regulação interactiva e, por isso, poder ser dirigido a cada caso e desenvolvido até ao nível necessário. O feedback escrito permite aos alunos regularem a sua atividade, procurando dar respostas às questões levantadas e às solicitações feitas, sendo notório o seu contributo na melhoria das conclusões dos relatórios. Também Semana considera que nem todo o feedback se revela eficaz. No seu estudo, os alunos identificam o feedback apresentado na forma interrogativa e incluindo pistas como o mais claro e pertinente para o trabalho na segunda fase.

Representações na Matemática Escolar

A comunicação apoia-se no uso de linguagem oral e escrita e esta remete para o uso de várias representações, essenciais na matemática escolar. A questão principal deste estudo é conhecer a forma como os alunos comunicam matematicamente por escrito, quando recorrem às tecnologias na aula de matemática e, em particular, conhecer o tipo de representações escritas que é utilizado.

Pode ler-se no Programa de Matemática do Ensino Básico que "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (Ponte et al, 2007, p. 9). Segundo os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*

> *As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e*

conhecimentos matemáticos, para si mesmo e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. Novas formas de representação, associadas às tecnologias, vieram criar uma necessidade ainda maior de enfatizar a representação, no ensino" (NCTM, 2007, p. 75).

Conforme as normas para a Representação, os programas devem habilitar todos os alunos para:

- *criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;*
- *selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;*
- *usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos* (NCTM, 2007, p. 75).

Face ao importante papel desempenhado pelas representações na comunicação, debrucemo-nos sobre o seu significado e a sua importância na aprendizagem da Matemática. Comecemos por apresentar a definição de representação segundo alguns autores. Davis (1982, citado por Domingos, 1994) define representação como "uma combinação de algo escrito num papel, algo que existe na forma de objeto físico e um arranjo da ideia cuidadosamente construído na nossa mente" (p. 14). Janvier (1983) defende que uma representação pode ser considerada como a combinação de três componentes: símbolos (escritos), objetos reais e imagens mentais. Preston e Gardner (2003) definem as representações como ferramentas vitais para registar, analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, problemas e ideias. Para Coulombe e Berenson (2001, citados por Preston & Gardner, 2003), as representações podem ser pensadas como a linguagem da matemática. Goldin (2008) define representação como "uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, substituir alguma coisa" (p. 178). Segundo Tripathi (2008), uma representação matemática é uma construção mental ou física que descreve aspetos da estrutura inerente de um conceito e as interligações entre o conceito e outras ideias. Uma representação pode ser vista como uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outros. E ainda, segundo o NCTM (2007), o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado, ou seja, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma.

Analisando estas definições constatamos que as representações correspondem tanto a processos observados externamente, como a processos que acontecem internamente na mente. Diversos autores distinguem representações externas de internas. Goldin (2008) considera que "as representações externas atuam como estímulos nos sentidos e incluem mapas, tabelas, gráficos, modelos, gráficos em computador e sistemas de símbolos formais. … As representações internas têm a ver com as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade." (p. 178).

A importância das representações na aprendizagem da Matemática é indiscutível. Coulombe e Berenson (2001, referidos por Preston & Gardner, 2003) afirmam mesmo que as representações são ferramentas vitais para registar, analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, problemas e ideias. Zazkis e Liljedahl (2004) consideram que as representações, como ferramentas da comunicação, têm um duplo papel: auxiliam na comunicação de ideias e ajudam na comunicação entre indivíduos. Boavida et al (2008) veem a compreensão das representações aliada à capacidade de representar ideias como ferramentas fundamentais para pensar matematicamente. Para Friedlander e Tabach (2001, referidos por Preston & Gardner, 2003) as representações são importantes na medida em que são veículos para a aprendizagem e comunicação; suportam a aprendizagem de diferentes maneiras e aparecem em diferentes formas, permitindo que os estudantes usem combinações de representações para obter mais informação do que seria possível com uma única representação.

A investigação desenvolvida sobre a forma como os alunos representam as suas ideias levou a que se procurasse categorizar as diferentes representações. Verificam-se algumas diferenças nesta categorização, mas todos os autores sublinham a importância da utilização de várias representações do mesmo objeto. Apresenta-se, de seguida, a classificação segundo alguns investigadores.

Preston e Gardner (2003) apresentam um quadro, adaptado de Friedlander e Tabach (2001) com as diferentes representações, a sua utilidade, vantagens e desvantagens.

Representação	Utilidade	Vantagens	Desvantagens
Verbal	Apresentação do problema, comunicação com os outros enquanto se resolve o problema e relato dos resultados finais.	Usa a linguagem natural dos estudantes ajudando-os, muitas vezes, a relacionar um problema com o mundo real.	A linguagem natural pode ser ambígua, particularmente quando comparada com a linguagem precisa da matemática.
Pictórica	Recolha de informações do problema, modelação do problema.	Ajuda os alunos a "ver" a situação matemática, sendo uma aproximação confortável para estudantes medianos.	Por vezes os alunos fazem suposições dos seus desenhos que vão além do problema. As capacidades de desenho de alguns alunos são limitadas.
Numérica/ Tabelar	Usada inicialmente na compreensão de um problema; permite encontrar exemplos concretos que se encaixam no contexto; conjeturas e verificação frequentemente organizadas em forma tabelar.	Ferramenta natural para os estudantes, com base na sua experiência; pode servir como uma ferramenta eficaz para a ponte entre gráficos e equações.	A falta de generalidade pode impedir o progresso; o uso de apenas certos números pode ofuscar situações chave.
Gráfica	Mostra crescimentos, decrescimentos, máximos, mínimos, intersecções. Particularmente útil para comunicar resultados.	Demonstra claramente tendências; é intuitiva para a maioria dos alunos.	A escala e a precisão são aspetos que levam muitas vezes a gráficos enganosos.
Algébrica	Quando os alunos começam a sentir-se confiantes para generalizar; uma minoria de estudantes recorre naturalmente a esta representação.	Fornece uma forma concisa e geral de uma situação; pode ser facilmente manipulada para fornecer resultados; útil para justificações.	Pode não ter significado para alguns estudantes; é difícil para a maioria dos estudantes numa fase inicial.

Quadro 6 – Utilidade, vantagens e desvantagens das representações (adaptado de Preston & Gardner, 2003)

Para estes autores, cada representação tem o seu próprio lugar no processo de raciocínio do aluno que subjaz à sua escolha da estratégia de resolução e à escolha da ferramenta de comunicação. É importante que os professores apresentem aos alunos várias representações para que estes tenham escolha quando resolvem ou comunicam.

Clement (2004), tendo como referência Lesh, Post e Behr, agrupa as representações em cinco tipos: situações relevantes, imagens, manipuláveis, a linguagem oral e símbolos escritos, fazendo uma descrição detalhada de cada uma delas.

Para esta investigadora, a compreensão das ligações entre as representações é útil para que as respostas dos alunos às tarefas façam sentido. A figura 5 apresenta, segundo Clement, os tipos de representações e a importância da conexão entre elas. Aumentando o número de conexões, entre as diferentes representações, que os alunos podem usar para lidar com conceitos matemáticos pode levar a um aumento do número de alunos que apresentam boas experiências com a Matemática e aumentar a sua compreensão da Matemática.

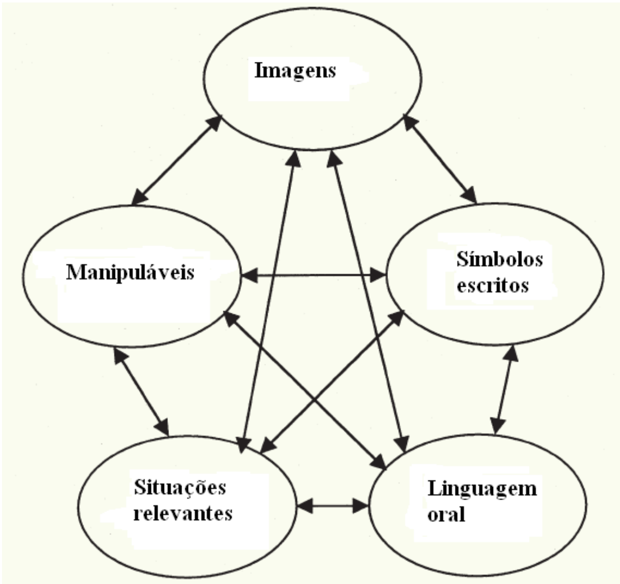


Figura 5 – As cinco representações e as suas conexões (Clement, 2004, p. 100)

Tripathi (2008) apresenta uma classificação semelhante a Clement (2004), pois também esta investigadora se apoia nas ideias de Lesh, Post e Behr, usando no entanto uma terminologia diferente da de Clement. Para esta investigadora, as representações matemáticas podem ser classificadas em "concretas (manipuláveis), linguagem, simbolismo (notação), semiconcretas (pictóricas) e contextuais (situações da vida real)" (Tripathi, 2008, p. 439). Esta autora acrescenta que desde que esta classificação foi proposta expandiu-se grandemente o repertório de representações acessíveis aos alunos em parte devido às tecnologias tais como calculadoras gráficas e *software* matemático. Assim, considera mais apropriado reclassificar as representações semiconcretas ou pictóricas como representações visuais. Estas representações incluiriam "diagramas ou tabelas, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento e "word pictures" (a descrição em palavras do que estamos a tentar fazer) " (Tripathi, 2008, p. 440). Para esta autora, as formas visuais de representação talvez sejam as mais investigadas, de entre as diferentes representações, nos últimos anos. Tal pode dever-se ao facto de serem mais facilmente disponíveis, mas também porque os investigadores descobriram que elas desempenham um papel importante na capacidade de resolver problemas. As representações visuais, segundo Tripathi (2008), funcionam como uma ponte entre objetos concretos que os alunos podem usar para modelar conceitos numa fase inicial de compreensão de um conceito e as formas simbólicas ou verbais que podem utilizar mais tarde para se referir a esse mesmo conceito.

A importância da visualização é partilhada por Scheuermann e Garderen (2008). Estas autoras debruçaram-se sobre o uso de representações gráficas onde incluem diagramas, tabelas, esquemas ou gráficos. Estas representações podem ser categorizadas em principalmente pictóricas ou principalmente esquemáticas. Uma representação pictórica "retrata imagens de objetos e/ou de pessoas para ilustrar os elementos chave do problema. Contrariamente, uma representação esquemática vai além disto para retratar as relações espaciais entre os elementos do problema, demonstrando como elas são indissociáveis" (Scheuermann & Garderen, 2008, p. 472). Relembrando o provérbio "Uma imagem vale mais do que mil palavras" estas investigadoras consideram que uma imagem pode conter uma riqueza de informação sobre o que um aluno compreende e consegue fazer em Matemática. Para elas, um dos grandes requisitos em Matemática é que os alunos desenvolvam "fluência representacional" (Scheuermann & Garderen, 2008, p. 471), ou seja, que conheçam representações e as consigam usar devidamente na resolução de problemas. Os professores devem analisar cuidadosamente as representações dos alunos para que os possam ajudar a obter esta "fluência representacional". Neste sentido, as autoras desenvolveram um modelo, ilustrado na figura 6, para analisar as representações dos alunos quando resolvem problemas.

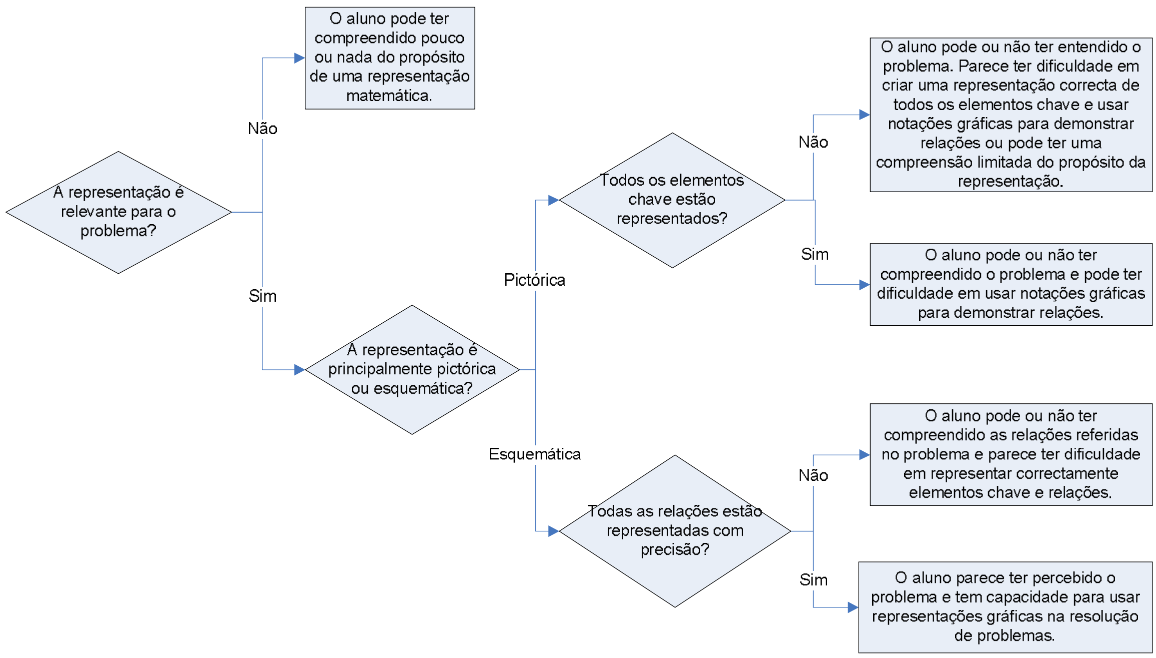


Figura 6 – Modelo de análise das representações na resolução de problemas (Scheuermann & Garderen, 2008, p. 473)

Representações e funções

O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática. No entanto, estudos têm revelado que a noção de função é um conceito difícil de entender e difícil de ensinar (Carlson & Oehrtman, 2005; Llinares, 2000; Sajka, 2003). Uma das razões apontadas para as dificuldades envolvidas no ensino e aprendizagem da noção de função é a existência de várias formas de representar uma função (algébrica ou simbólica, numérica ou tabular, gráfica) e a dificuldade em estabelecer ligações entre as diversas representações (Gagatsis & Elia, 2005).

Alguns investigadores defendem que a visualização estimula e reforça a compreensão dos conceitos matemáticos, em particular no estudo das funções, devendo ser reconhecida como uma componente importante do pensamento matemático (Arcavi, 2003; Eisenberg & Dreyfus, 1994; Stylianou & Silver, 2004; Zimmermann, 1991). Eisenberg e Dreyfus (1994) acreditam que o sentido de função pode ser desenvolvido com a visualização do gráfico de uma função, assim como com a visualização de transformações nesse gráfico. Vários investigadores defendem a necessidade de visualização na resolução de problemas que envolvem compreensão de funções.

Eisenberg e Dreyfus (1994) referem que o estudo dos gráficos das funções racionais é um momento propício para levar os alunos a pensar visualmente tal como se pretende atualmente no Ensino Secundário em Portugal. Como tal, pode dizer-se que a aprendizagem de funções é influenciada pela diversidade de representações relacionadas com este conceito (Monoyiou & Gagatsis, 2009).

A importância das representações no domínio das funções está bem patente em vários documentos curriculares de Matemática. No *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, a competência matemática a desenvolver no domínio da Álgebra e das Funções inclui

> *a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos* (ME, 2001, p. 66).

No Programa de Matemática do Ensino Secundário "a abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico " (Silva et al, 2001, p. 2).

Esta alusão está igualmente presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al, 2007) quando apela ao recurso "…às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações" (p. 56).

Os alunos terão uma compreensão mais profunda das funções se dominarem as diferentes representações e compreenderem a equivalência subjacente (Dyke, 2002). Nem sempre esta equivalência é perceptível para os estudantes. Quando duas coisas parecem diferentes, a tendência natural é vê-las como não relacionadas. Assim, como afirma Dyke (2002), é imperativo explorar a equivalência em todas as direcções tais como as indicadas na figura seguinte.

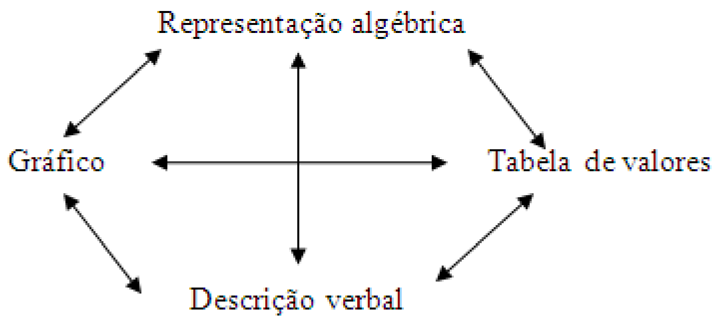


Figura 7 – Equivalência entre as diferentes representações (Dyke, 2002, p. viii)

Segundo este autor, no ensino tradicional, algumas destas direções têm sido mais enfatizadas do que outras: a transição da descrição verbal para representação algébrica, a transição da representação algébrica para tabela de valores e a transição da tabela para gráfico, são as mais frequentes no ensino. É por isso necessário trabalhar modelos que utilizem, simultaneamente, a descrição verbal, o gráfico, a tabela e a equação de modo a ajudar os alunos a ver as diferentes representações do mesmo conceito. Este investigador considera que pensar sobre o gráfico e explorar em profundidade a relação entre o gráfico e a descrição verbal é um bom passo intermédio a dar antes de tentar a tarefa mais abstrata de trabalhar com a representação algébrica. Defende ainda que introduzir funções através do seu gráfico, passar para tabelas e depois para as equações apresenta muitas vantagens. Iniciar pelo estudo dos gráficos ajuda os alunos a pensar mais abstratamente e permite ao professor introduzir conceitos algébricos sem o peso da notação algébrica. No entanto, apesar da utilização bastante generalizada da calculadora gráfica os alunos ainda tendem a confiar nas representações algébricas e mostram alguma relutância em utilizar um gráfico quando têm oportunidade de escolha (Dyke, 2002). Esta ideia é corroborada pela investigação de Monoyiou e Gagatsis (2009) que vêem esta preferência como o resultado da ênfase curricular sobre as representações algébricas e a sua manipulação.

Para Domingos (1994), apesar do conceito de função parecer ser uma entidade única e bem definida, este deve ser interpretado através das suas várias representações pois facilitam uma compreensão mais forte e completa. Para este investigador as representações mais importantes, no ensino das funções, são a gráfica, a tabular e a algébrica. Segundo este autor os alunos revelam, em geral, alguma falta de experiência na utilização das diversas representações e acabam por utilizar apenas uma delas. Os processos de aprendizagem que abarcam as relações entre as representações e a sua abstração podem englobar, desde o uso de uma simples representação, passando pelo recurso a mais do que uma representação em simultâneo, a ligações entre representações paralelas e, por fim, à integração das representações e ligações flexíveis entre elas, como referem Eisenberg & Dreyfus (1994). Esta conceção da aprendizagem das múltiplas representações permite uma maior abstração dos conceitos.

Ao combinar as diferentes representações, os alunos não ficam limitados aos pontos fortes e fracos de uma representação específica (Friedlander & Tabach, 2001 referidos por Guerreiro, 2009; Monoyiou & Gagatsis, 2009). Monoyiou e Gagatsis

(2009) referem diversas investigações (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Greeno & Hall, 1997; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993) que mostram que os alunos têm dificuldade em lidar com as diferentes representações de uma função. Estas dificuldades prendem-se com aspetos relacionados com o manuseamento deficiente das representações ou com a falta de coordenação entre as mesmas, não conseguindo pensar numa função de uma forma global.

Para que estas dificuldades possam ser superadas, Friedlander e Tabach (2001, referidos por Guerreiro, 2009) consideram importante a natureza das tarefas propostas aos alunos. Assim sugerem que estas apresentem as seguintes características: "(i) as situações problemáticas devem ser apresentadas através de diferentes representações, para que encorajem a flexibilidade na escolha da representação e para que legitimem o seu uso; (ii) devem ser colocadas questões de natureza investigativa, para que os alunos se familiarizem com a representação inicial, estabeleçam relações entre representações e escolham aquela que os conduzirá à solução; e (iii) as questões de natureza reflexiva são igualmente importantes, pois ajudam os alunos a distanciarem-se do trabalho efectuado e a avaliarem as escolhas efetuadas." (Guerreiro, 2009, p. 21,22).

O papel da visualização

"A visualização tem sido reconhecida como uma componente fundamental do raciocínio, da resolução de problemas e até mesmo da demonstração" (Arcavi, 2003, p. 235).

Cunningham e Zimmermann (1991) consideram a visualização matemática como a capacidade dos alunos de desenhar um diagrama apropriado (mentalmente, com papel e lápis ou com base no computador), para representar um conceito matemático ou problema e usá-lo para alcançar compreensão.

O raciocínio visual parece ter um papel importante na Matemática em geral, e particularmente nas funções, sendo mesmo aceite como prova, fundamentos visuais (Domingos, 1994). Ajose (1999), comentando um artigo escrito por Arcavi 1998, refere três funções que a visualização pode ter na aprendizagem: 1) ilustra resultados que são sobretudo simbólicos; 2) contribui para a resolução de conflitos entre as soluções simbólicas e as ideias intuitivas; e 3) desencadeia o recurso a conceitos básicos, facilmente manuseáveis a nível simbólico. Arcavi (2003) considera que a visualização não exclui a verbalização ou a linguagem algébrica, mas complementa-as.

A visualização também é importante, segundo Tripathi (2008), na medida em que os alunos, progredindo de níveis concretos para níveis mais abstratos do pensamento, devem ser iniciados em formas visuais de representar ideias matemáticas e ter a noção de que uma representação pictórica pode representar objetos e relações entre os objetos. Esta ideia está patente no Programa de Matemática do Ensino Básico quando é recomendado que, antes das representações simbólicas, se deve usar as representações icónicas e à medida que o trabalho avança se faça sentir aos alunos a necessidade de uma linguagem partilhada, com a introdução das várias representações matemáticas convencionais.

Hitt, Martín e Morasse (2009) consideram que o processo de visualização é importante não só na produção de representações, mas também para validar ou rejeitar representações que sejam propostas pelos estudantes. Para estes autores é importante analisar a forma como os alunos manipulam as várias representações do mesmo conceito.

Cunningham (1991) apresenta como vantagens da visualização no ensino a promoção da intuição e compreensão e permite uma ampla cobertura de conteúdos.

Monk (2003, referido por Guerreiro, 2009) destaca o papel da visualização associado aos gráficos. Para este investigador, é a visualização que torna os gráficos instrumentos poderosos no que diz respeito à atribuição de significado. Simultaneamente, a visualização é causa de dificuldades, pois os alunos tendem a cingir-se à informação visual dada pelo gráfico, mais intuitiva, esquecendo a informação quantitativa. A forma como os alunos "vêem" um gráfico é, na sua perspetiva, influenciada pelo conjunto de conhecimentos e experiências que têm no momento em que o observam.

Arcavi (2003) também considera que o professor pode encontrar dificuldades na utilização de representações visuais. Assim classificou estas dificuldades em "cultural, cognitiva e sociológica" (p. 235). As dificuldades culturais referem-se às crenças e valores sobre o que é Matemática, o que é aceitável ou não, onde se discute o estatuto da prova visual. As dificuldades cognitivas incluem a discussão "é o visual mais fácil ou mais difícil?" (p. 235) e também a tradução entre as múltiplas representações. Como dificuldades sociológicas são apontadas questões do ensino. A transformação que o conhecimento sofre para ser adaptado ao ensino é vista como um processo que compartimenta, lineariza e possivelmente também algoritmiza o conhecimento, retirando-lhe muitas das suas ricas interligações. Assim, muitos professores podem considerar as representações analíticas mais adequadas e eficientes. Outra dificuldade sociológica prende-se com a variada proveniência cultural dos alunos. Alguns alunos podem vir de culturas visualmente ricas e, para eles, a visualização pode compensar possíveis deficiências.

É neste contexto que as tecnologias educativas surgem com enorme contributo na abordagem visual de vários conceitos matemáticos (Amado, 2007; Domingos, 1994; Dyke, 2002; NCTM, 2007; Rocha, Segurado e Capela, 2010).

2.2. As tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática

2.2.1. A tecnologia no currículo de Matemática do Ensino Básico e Secundário

Desde há várias décadas que a utilização das tecnologias é recomendada no ensino/aprendizagem da Matemática. Em Portugal, já na década de quarenta do século XX, Bento de Jesus Caraça apelou à utilização da calculadora no ensino da Matemática. Desde essa data que as referências e recomendações para a utilização das tecnologias na aula de Matemática no nosso país são uma constante.

Em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) encontramos um princípio dedicado à tecnologia, onde se defende que a tecnologia melhora a aprendizagem da Matemática, apoia um ensino eficaz e influencia a Matemática que é ensinada. As tecnologias

> *…constituem ferramentas essenciais para o ensino, a aprendizagem e o fazer matemática. Proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e exata* (NCTM, 2007, p. 26).

O NCTM (2007) destaca o potencial gráfico e de cálculo, que permite que os alunos realizem explorações e conjeturas de um modo mais rápido e eficiente beneficiando também do feedback imediato e constante que a tecnologia pode proporcionar.

Este documento refere a importância da tecnologia no estudo da Álgebra, na medida em que permite que os alunos trabalhem em níveis mais elevados de generalização e abstração, bem como raciocinem sobre temas mais abrangentes, como é o caso da mudança de parâmetros, ou resolvam problemas complexos, como os de modelação. No entanto, neste princípio há um alerta ao professor. Este deve ter cuidado na criação ou seleção das tarefas matemáticas para que estas permitam tirar os benefícios que as tecnologias possibilitam de forma correta e eficiente.

Uma vez que o ensino e aprendizagem das funções devem englobar as diferentes representações, a utilização de instrumentos tecnológicos pode ser um grande apoio a este processo (Domingos, 1994; Ramos & Raposo, 2008).

Este aspeto é também referido no Programa de Matemática do Ensino Secundário onde se destaca a importância das atividades a selecionar para que o aluno seja o agente da sua própria aprendizagem propondo como metodologia para tal, entre outras, o uso da tecnologia. Pode ler-se:

> *A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de atividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica* (Silva et al, 2001, p. 10).

O uso da tecnologia é também considerado importante neste Programa devido à vertente gráfica que permite trabalhar, ao auxílio que pode prestar aos alunos na compreensão de conceitos matemáticos e no uso da Matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Esta utilização não deve ser uma simples substituição de raciocínios básicos, mas deve enriquecer a aprendizagem tornando-a mais eficiente. Particularmente, no que concerne ao estudo das funções, o uso da calculadora gráfica ou do computador é referido na análise gráfica onde os estudantes devem observar diferentes representações gráficas de uma mesma situação, devem traçar um número considerável de funções escolhendo o melhor retângulo de visualização devendo ser incentivados a elaborar conjeturas e analisar criticamente as suas conclusões.

O Currículo Nacional do Ensino Básico também considera que se deve recorrer à tecnologia gráfica para trabalhar com os vários tipos de representação, no domínio do tema Álgebra e Funções. A utilização das tecnologias é um recurso, apresentado por este documento, que todos os alunos devem aprender a usar em contextos diversos como a resolução de problemas, atividades de investigação e projetos.

Calculadora Gráfica e Computador

A investigação sobre a utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, inicialmente preocupada em discutir se esta deveria ou não ser utilizada, evoluiu para o estudo das potencialidades que a tecnologia oferece a este processo (Canavarro & Rocha, 2008, Cardoso, 1995, Rocha, 2002, entre outros). Não pretendendo fazer uma abordagem exaustiva desta investigação, deixo aqui o contributo de alguns investigadores.

Ponte (1995) considera que as novas tecnologias trazem para o ensino/aprendizagem da Matemática:

1. uma relativização da utilidade das competências de cálculo e da manipulação simbólica simples;

2. um fortalecimento de novas formas de representação e do papel da linguagem gráfica;

3. uma maior importância às capacidades intelectuais de ordem mais elevada;

4. a possibilidade de os alunos se envolverem em atividades significativas, desenvolvendo atitudes positivas face à Matemática e

5. um aumento de interesse pela realização de atividades de modelação, exploração e investigação e projetos.

Desde meados do século XX, com Bento de Jesus Caraça, Sebastião e Silva entre outros, começam a surgir as primeiras referências à importância da utilização das tecnologias na aula de Matemática.

No final da década de noventa, o *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998b), mostra que os recursos tecnológicos não são utilizados, pelos professores, com a frequência desejada na aula de Matemática, em particular, o computador. E deixa a recomendação para o uso de materiais manipuláveis, calculadoras e computadores pois proporcionam um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem.

O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática com alunos do 11.º ano foi estudado por Cardoso (1995) que refere a importância da utilização da calculadora gráfica na sala de aula, na promoção de um ambiente de trabalho mais dinâmico e motivador. Esta autora destaca ainda a alteração do papel dos alunos ao longo da experiência com a calculadora, mais activos e investigativos, mais dispostos a aprender matemática e, nalguns casos, mais cooperantes com os colegas. No entanto, afirma que um dos seus alunos não revelou qualquer interesse pelo trabalho pela calculadora. Cardoso (1995) destaca ainda o contributo dado pela calculadora gráfica na diversidade de representações de uma função e na maior interligação entre as várias representações. Relativamente à preferência dos seus alunos pelas representações, gráfica ou analítica, Cardoso (1995) refere que os alunos com maior facilidade no trabalho com papel e lápis preferem as representações analíticas, porque lhes parecem mais seguras. Também no estudo realizado por Ferreira (2007) alguns alunos mostraram maior preferência em trabalhar com as representações analíticas do que com as gráficas. Contudo, reconheceram a importância do trabalho com o computador.

No artigo *A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática,* Rocha (2002) destaca a importância da calculadora gráfica, fazendo notar que:

> *Com algumas características semelhantes às do computador e sem alguns dos inconvenientes que pareciam obstar à divulgação destes, as calculadoras gráficas surgiram então como uma nova esperança. Contudo, ninguém acredita que a calculadora tenha efeitos mágicos sobre os alunos, ou seja, não é razoável esperar que os alunos usem e compreendam os gráficos instintivamente, apenas porque dispõem duma calculadora gráfica. Torna-se assim fundamental dar atenção, entre outros aspetos, à forma como esta é utilizada.* (Rocha, 2002, p.3)

Numa comunicação apresentada em 2002, Balsa e Silva analisaram o papel da calculadora gráfica nos exames nacionais e concluem que os alunos revelam fraco desempenho quando têm de recorrer a esta ferramenta. Apontam a fraca importância atribuída à calculadora na sala de aula pelos professores como principal razão para este desempenho dos alunos.

Esta preocupação com a importância que é atribuída à calculadora na sala de aula parece não ser de hoje, pelo contrário, é um problema que se mantém presente na sala de aula, como refere Michele Artigue (2010). Esta investigadora refere o facto da palavra integração poder ser enganadora, já que pode sugerir ser simplesmente uma questão de inserir a tecnologia dentro da aula de Matemática.

Peressini e Knuth (2005), através da sua investigação, consideram que a tecnologia é usada, nas aulas de Matemática, de cinco formas diferentes: 1) como ferramenta de gestão pois é um auxílio para professores e alunos trabalharem mais eficientemente; 2) como ferramenta de comunicação, uma vez que permite a conexão entre professores para que estes possam discutir e partilhar as suas experiências; 3) como ferramenta de avaliação dado que permite ao professor refletir sobre o seu ensino e dá feedback à aprendizagem do aluno; 4) como ferramenta motivacional, encorajando a participação dos alunos no processo de aprendizagem e 5) como ferramenta cognitiva ajudando os alunos a entender melhor algoritmos, procedimentos, conceitos e a resolver problemas.

Ruthven, Deaney e Hennessy (2009) também apresentam os contributos dos recursos digitais para o ensino da Matemática: 1) realizam processos de trabalho e melhoram a produção, nomeadamente através do aumento da velocidade e eficiência de tais processos, melhorando a precisão e a apresentação dos resultados, contribuindo assim para o ritmo e a produtividade das aulas; 2) apoiam processos de verificação, experimentação e aperfeiçoamento, nomeadamente no que diz respeito à verificação e correção de elementos de trabalho e testam e melhoram as estratégias de resolução de problemas e das soluções; 3) superam as dificuldades dos alunos, nomeadamente, contornando os problemas vividos pelos alunos quando escrevem e desenham à mão, e facilitam a correção de erros, fortalecendo assim o sentido dos alunos da capacidade de seu trabalho; 4) centram-se em questões globais e acentuam características importantes, nomeadamente realizando tarefas secundárias para focar a atenção para as questões principais, e facilitar a organização e apresentação de material; 5) melhoram a variedade e o apelo à atividade da sala de aula, nomeadamente através da variação no formato das aulas e alteram o seu ambiente introduzindo elementos de diversão, jogo e emoção e reduzindo a penosidade das tarefas; e 6) promovem a independência dos alunos e a troca entre pares, nomeadamente fornecendo oportunidades aos alunos para exercer maior autonomia e responsabilidade, e para partilhar conhecimentos e oferecer apoio mútuo.

Person (2009), resumindo as ideias principais de várias investigações de Reznichenko, afirma que a tecnologia é um potenciador que coloca os estudantes num papel ativo e os professores num papel de facilitador. Os alunos percebem a resolução de problemas de forma diferente quando estão livres de cálculos numéricos e algébricos e se concentram no problema e na análise de soluções.

No entanto, também dificuldades têm sido apontadas ao uso das tecnologias. Para que uma ferramenta tecnológica se possa tornar num instrumento útil para a aprendizagem é necessário tempo e esforço para o utilizador (Person, 2009).

Canavarro (1994) considera que, por vezes, não é fácil para os professores a preparação de tarefas, a condução da aula, o acompanhamento dos alunos e a gestão do tempo. Para esta autora, saber lidar com descobertas não previstas dos alunos, conjugar o trabalho destes com a tecnologia e sem ela são constrangimentos sentidos pelos professores.

Para que o uso de tecnologia, em sala de aula, seja bem sucedido, Ruthven et al (2009) recomendam aos professores que apresentem tarefas devidamente pré-estruturadas conduzindo a uma utilização estratégica da tecnologia e apoiando a interpretação matemática dos resultados. Quando o uso de tecnologia envolve alterações do ambiente de trabalho ou mudança de rotinas, tais como mudança de sala ou organização da turma, tal também pode inibir o fluir harmonioso da aula.

A verdade é que as tecnologias vieram para ficar. A partir do 10.º ano, a calculadora faz parte do material necessário para a aula de Matemática. Amado (2007) considera que a calculadora gráfica ganhou um lugar de destaque entre as tecnologias utilizadas na sala de aula, pelo seu fácil acesso, pela obrigatoriedade de utilização, no Secundário, e pelo seu carácter indispensável no exame nacional de 12º ano. Contudo, a sua utilização, segundo um estudo recente do GAVE (Ferreira et al, 2010), parece ainda estar longe do que é desejável.

Quesada (1999) defende que o ensino da Matemática pode beneficiar do uso das calculadoras que, em poucos anos, evoluíram de tal forma que atualmente dispõem de programas completos de lógica simbólica e de geometria dinâmica. Na perspetiva deste autor, a ênfase do ensino da Matemática parece estar a alterar-se em favor da conceptualização e do estudo de aplicações reais, estando os currículos de diferentes países a dar mais atenção a novas áreas do saber.

Amado (2007), mostrando alterações na abordagem do currículo do 12.º ano, apresenta questões colocadas em exames nacionais que seriam difíceis, senão impossíveis de resolver, sem o recurso à calculadora gráfica. Na sua opinião, deixou de ser necessário pensar questões cujos cálculos fossem possíveis com papel e lápis e envolvendo técnicas que os alunos dominassem e passou a ser possível criar situações mais genuínas exigindo novas e variadas formas de pensar.

Considerando que com o uso da calculadora os alunos perdem capacidades de cálculo, Silva (1989) observa que estes ganham por outro lado uma maior compreensão da realidade dos números e das operações envolvidas e espírito crítico. Na sua perspetiva, a rapidez e a facilidade de realização dos cálculos permitem uma diversificação de estratégias de resolução incentivando a exploração, a elaboração de conjeturas, verificações, momentos de comunicação e discussão de estratégias e métodos utilizados. Estas características de trabalho adequam-se a questões abertas que se podem tornar mais relevantes quando se consegue tirar partido das características das calculadoras (Ramos & Raposo, 2008).

Também Reys (1989) refere a rapidez da calculadora em gerar muitos exemplos como facilitador do desenvolvimento da compreensão conceptual das ideias matemáticas.

Em particular, no estudo da Álgebra, a calculadora gráfica pode apoiar os alunos a resolver, graficamente, problemas com funções baseados em contextos reais, uma vez que possibilita facilmente a tradução entre diferentes representações de funções e a mudança da janela de visualização da representação gráfica de uma função (Azevedo, 2009). Esta investigadora, referindo Kissane 2001, destaca ainda como contribuição deste recurso tecnológico para o estudo das funções, a possibilidade dos alunos visualizarem os efeitos de vários parâmetros no gráfico de uma função, testarem conjeturas, modelarem situações reais e moverem-se facilmente entre as diversas representações, desenvolvendo desta forma uma compreensão mais significativa da Álgebra.

Para Ponte (1992) a calculadora gráfica e o computador podem desempenhar um papel relevante no estudo das funções onde é necessário trabalhar as três formas de representação mais importantes, nomeadamente a forma numérica, gráfica e algébrica.

Também em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) se faz referência à mais-valia do uso de calculadoras e computadores na análise de mais exemplos ou formas de representação que possibilitam a formulação e a exploração de conjecturas mais facilmente. Estas ferramentas ampliam o conjunto de representações com as quais os alunos podem trabalhar quando, por exemplo, estes rodam, esticam ou ampliam gráficos. Os alunos, com o recurso às tecnologias, conseguem utilizar em problemas representações e métodos que até recentemente não eram explorados de forma significativa no Ensino Secundário.

Novas representações, recursos e novas formas de apoio ao ensino e aprendizagem são também referidos por Morgan, Mariotti & Maffei (2009) como potencial dos ambientes computacionais. Características como: programação através da notação simbólica e, eventualmente, matemática; manipulação dinâmica; disponibilidade de múltiplas representações; controlo de objetos computacionais potencia estas novas abordagens.

Domingos (1994) afirma que o uso da tecnologia gráfica é a forma mais habitual de fazer a ligação entre as diferentes representações de uma função. As razões para o aparecimento de *software* que associa as várias representações são, segundo Goldenberg (1988, referido por Domingos, 1994): 1) a tecnologia presta-se melhor para esta aplicação; 2) a necessidade do currículo dar realce aos gráficos e 3) a possibilidade das representações visuais promoverem a aprendizagem do sistema simbólico necessário na Álgebra.

Person (2009) também aponta a calculadora como facilitadora no tratamento e conversão de representações. Além desta vertente, salienta a possibilidade de exploração de um mesmo conceito nas suas várias perspetivas. Apresenta o exemplo da expressão x^2+2x-3 que pode ser vista tanto como um cálculo de valores, como uma representação gráfica de uma função ou como uma manifestação quadrática com determinadas propriedades. A flexibilização para alternar entre as diversas perspetivas é, na sua opinião, difícil e demorado para os alunos, mas essencial para o pensamento matemático avançado.

Muitas das potencialidades das calculadoras são comuns às dos computadores. No entanto, a utilização destes em sala de aula não é tão usual. Para tal facto contribuem razões de ordem económica, facilidade de transporte para a sala de aula, disponibilidade deste recurso nas escolas, alterações no ambiente da aula (Amado, 2007; Ruthven et al., 2009).

Para Smith (2002) não há grande evidência de que uma tecnologia seja melhor do que outra. O importante é a forma como a ferramenta é usada ao serviço do ensino/ aprendizagem.

Atualmente existe um grande leque de programas direcionados para o ensino da Matemática. Estando uns mais vocacionados para um tema específico do que outros, tal como, por exemplo o *Geometer's Sketchpad* para o estudo da geometria dinâmica ou o *Derive* para o estudo das funções, e havendo programas que permitem trabalhar mais do que um tema, como por exemplo o *Geogebra*, o importante é selecionar e utilizar estes *softwares* tirando o máximo partido das suas potencialidades.

O *Geogebra* é um *software* que tem ganho particular destaque recentemente no ensino da Matemática. Nos últimos tempos têm-se multiplicado as referências à sua utilização em diversos documentos do Ministério da Educação, tais como o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) ou nas Brochuras *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009a) e *Sequências e Funções* (Ponte, Matos & Branco, 2009b). Os manuais escolares apresentam atualmente sugestões de atividades com recurso a este *software*. Um dos fatores mais importantes para este destaque é, na minha opinião, ser um *software* livre e, por isso, de fácil acesso para professores e alunos. Segundo informação disponível no sítio oficial, o *Geogebra* "é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação". O facto de cada *software* ter a sua sintaxe e regras de processamento próprias causa entraves à sua utilização, tendo o professor que se assegurar que os alunos conhecem o funcionamento do instrumento que têm à sua disposição. O *Geogebra* apresenta esta grande vantagem de poder ser rentabilizado no estudo de diversos temas matemáticos. Este *software* faculta imagens visuais das ideias matemáticas, permitindo operar diretamente sobre os objetos matemáticos e observar, de imediato, as mudanças originadas. Considerando um recurso de valor no estudo das funções, utilizei o *Geogebra* nesta investigação.

Para quem desvaloriza a utilização do computador, por considerar que não é uma ferramenta permitida nos testes e exames, Amado (2007) apresenta questões surgidas em exames de Matemática de 12.º ano onde se percebe a importância de uma experiência prévia do aluno com, por exemplo, ambientes de geometria dinâmica. Um estudo de Ferreira (2007) mostra que os alunos são capazes de transferir conhecimentos adquiridos com o recurso a *softwares* didáticos para outras situações em que o computador não está presente. Neste estudo, os alunos consideram que o *software* usado os ajudou a ver um problema com mais facilidade e mesmo a resolvê-lo analiticamente.

Por tudo o que foi dito, a calculadora gráfica e o computador são essenciais para uma melhor aprendizagem da Matemática.

CAPÍTULO 3

Metodologia

Neste capítulo são apresentadas as opções metodológicas do estudo, as características do meio e dos participantes envolvidos, assim como as formas de recolha e análise dos dados.

3.1. Justificação da metodologia

Segundo Quivy e Campenhoudt (2003), a metodologia pode ser definida pelo conjunto dos procedimentos e instruções de trabalho, desde os procedimentos teóricos à implementação dos diagnósticos técnicos, de modo a conhecer e dar a conhecer a realidade.

Tendo como referência o problema de investigação e os objetivos deste estudo, optei por uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa.

Uma abordagem qualitativa é "… uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das perceções pessoais" (Bodgan & Biklen, 1994, p. 11). Estes autores salientam a dupla dimensão desta abordagem: por um lado "os dados recolhidos são (…) qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos" (p. 16) e, por outro lado, "privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação" (p. 16).

Segundo Erickson (1986, citado por Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994) uma investigação interpretativa tem um interesse fulcral pelo significado atribuído às ações. Este autor identifica três principais campos de interesse de uma investigação interpretativa, na área da educação:

> *1. a natureza da sala de aula como um meio social e culturalmente organizado para a aprendizagem;*
> *2. a natureza do ensino como um, mas somente um, aspeto do meio da aprendizagem;*
> *3. a natureza (e o conteúdo) das «perspetivas-significados» do docente e do discente como componentes intrínsecos do processo educativo."* (Erickson, 1986, como citado em Lessard-Hébert et al, 1994, p. 42)

Bodgan e Biklen (1994) apresentam como principais características da abordagem qualitativa e interpretativa:

a) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o principal instrumento de recolha de dados;

b) os dados recolhidos são na sua essência descritivos;

c) o investigador interessa-se mais pelos processos do que pelos produtos;

d) os dados são analisados de forma indutiva;

e) o ponto de vista dos participantes é muito importante.

O presente estudo, ao debruçar-se sobre a forma como os alunos comunicam por escrito quando recorrem às tecnologias na aula de matemática, apresenta as características referidas pelos autores.

Os dados foram recolhidos, pela investigadora, na sala de aula. Estes foram analisados, sendo a sua interpretação o instrumento chave de análise. A apresentação dos resultados é ilustrada com citações fornecidas pelos dados.

3.2. A intervenção pedagógica

Esta intervenção pedagógica decorreu numa turma do 10.º ano de uma escola básica e secundária na região norte de Portugal, sede de um agrupamento, durante o ano letivo de 2009/2010. A escola tem cerca de 370 alunos (90 do 2.º Ciclo, 140 do 3.º Ciclo e 140 do Secundário). O agrupamento tem uma grande área de influência o que faz com que uma grande percentagem de alunos seja transportada pela rede de transportes escolares. Como consequência, saem de casa muito cedo e regressam muito tarde, o que condiciona, por exemplo, a consolidação de conhecimentos em casa e a convivência familiar. Além disto, verifica-se a existência de algumas assimetrias em termos económicos e de oportunidade de acesso à cultura, aos meios de comunicação e novas tecnologias entre a população urbana e a rural. Como consequência existem naturalmente algumas dificuldades a nível do desenvolvimento do processo de ensino/ aprendizagem.

As aulas decorreram num dos quatro blocos que constituem a escola. Em todas as salas de aula existe um computador fixo, um projetor e um quadro interativo. A escola está dotada de uma rede Internet sem fios que possibilita o acesso à internet em qualquer ponto do recinto escolar, o que facilita o acesso a partir de qualquer equipamento. No bloco de aulas existe um Laboratório de Informática que dispõe de vinte e oito computadores fixos e existe ainda outra sala equipada com doze computadores fixos. De referir que estas salas têm ocupação permanente com as turmas do curso profissional de Informática de Gestão ou com a disciplina de Tecnologias da Informação e Comunicação. Existem também oito computadores portáteis para uso dos alunos e sete computadores portáteis para uso dos professores. Entre os materiais disponibilizados pela escola, para uso dos alunos, contam-se vinte calculadoras gráficas Texas TI-83 *Plus* e três calculadoras gráficas Texas TI-*Nspire*.

As aulas desta intervenção pedagógica decorreram em duas salas de aula distintas. Quando apenas era utilizada a calculadora gráfica as aulas decorreram na sala onde a turma tinha habitualmente aulas. Nesta sala os alunos estavam sentados em mesas individuais e duplas, todas elas orientadas para o quadro e para a secretária do professor, como se pode ver na fotografia 1. A sala está equipada com um quadro interativo, para além do quadro normal e permite a utilização do *software* da calculadora gráfica para que todos os alunos possam acompanhar o decorrer das atividades letivas.

Fotografia 1. Sala de aula onde decorreram as atividades com calculadora gráfica

Sempre que era necessário utilizar o computador na aula de Matemática foi necessário mudar para a sala de computadores. Esta sala apresenta uma disposição diferente da anterior, as mesas com computadores estão dispostas em forma de "L" encostadas a duas paredes. Atendendo ao número de alunos bastante superior ao de computadores foi necessário partilhar cada computador por dois alunos.

Fotografia 2. Sala de aula onde decorreram as atividades com computador

As tarefas, que se encontram em anexo (Anexo 1, 2, 3, 4 e 5), foram planeadas em estreita colaboração com o professor da turma. Foram consultadas publicações do Ministério da Educação, manuais escolares e sítios na Internet com recursos para a disciplina de Matemática de forma a poder elaborar as cinco atividades de natureza exploratória/ investigativa, inseridas na unidade *Funções e Gráficos, Funções Polinomiais, Função Módulo*, e na subunidade *Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos.*

A opção por este tema prende-se com a importância do conceito de função na Matemática e nas suas aplicações. Por outro lado, este tema parece não ser de fácil compreensão pelos alunos o que torna mais desejável uma diversidade de estratégias e o recurso às tecnologias como elementos que promovam a sua compreensão. Monoyiou e Gagatsis (2009) referem que os alunos do Ensino Secundário mostram algumas dificuldades na conceptualização do conceito de função. Este autores afirmam que:

> *A compreensão do conceito de função tem vindo a assumir-se como uma preocupação central para os educadores matemáticos e um foco de atenção para a comunidade dos investigadores em educação matemática* (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992, citados por Monoyiou & Gagatsis, 2009, s/p).

Em relação ao tipo de tarefas propostas, foram tidas em atenção as recomendações do Programa de Matemática (Silva et al, 2001) que defendem o envolvimento dos alunos em atividades de natureza investigativa genérica como estratégia para o desenvolvimento de competências nos vários temas estudados.

No 10.º ano, no tema de Análise pretende-se que os alunos sejam capazes de interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica. Tomando como referência o referido programa, optou-se por uma metodologia em que os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas. Deste modo, a elaboração das tarefas teve como pressupostos incentivar os alunos a:

(i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
(ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
(iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos;
(iv) organizar e consolidar o seu pensamento matemático através da comunicação;
(v) comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas e professor; e
(vi) usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

Sendo o objeto primordial desta investigação analisar a comunicação matemática escrita produzida pelos alunos, em cada tarefa foi pedida uma composição matemática ou um relatório. Atendendo ao facto dos alunos possuírem uma experiência reduzida neste domínio, aquando da primeira tarefa em que foi solicitada uma composição, o professor da turma deu uma breve explicação oral e apresentou os critérios de classificação da mesma (Anexo 6). Aquando da primeira tarefa em que foi solicitado um relatório escrito, foi-lhes fornecido um guião de elaboração do relatório e a definição dos critérios de avaliação, através de uma tabela de descritores (Anexo 7).

Na primeira aula em que foi solicitado um relatório os alunos revelaram mais dificuldades do que aquelas que foram imaginadas por mim e pelo professor da turma. Depois desta aula, reuni com o professor para tentarmos encontrar um modo de aliviar esta dificuldade. Assim ficou decidido apresentar um "relatório modelo" (Semana, 2008) (Anexo 8).

No quadro seguinte, apresento de forma sucinta os conteúdos visados em cada uma das tarefas, a tecnologia utilizada e o trabalho apresentado no final de cada tarefa.

Tarefa	Conteúdos	Tecnologia utilizada/ Trabalho final apresentado
Laboratório	• Definição de uma função quadrática; • Propriedades da função quadrática; • Inequações do 2.° grau.	Calculadora gráfica/ Composição matemática
À procura do vértice de uma função quadrática	• Definição de função quadrática; • Propriedades da função quadrática.	Calculadora gráfica/ Relatório
Aeromodelismo	• Definição de uma função cúbica; • Propriedades da função cúbica; • Inequações do 3.° grau.	Computador/ Composição matemática
Pontos notáveis das funções polinomiais	• Definição de função real de variável real; • Propriedades das funções reais de variável real	Computador/ Relatório
Praga de escaravelhos	• Definição de uma função cúbica; • Propriedades da função cúbica.	A escolher pelo aluno/ Composição matemática

Quadro 7 - Conteúdos, tecnologia utilizada e produto final analisado de cada tarefa

Todas as tarefas foram realizadas na aula de Matemática, tal como as várias composições matemáticas. O trabalho realizado foi feito em pares ou grupos mas as composições foram individuais. No que concerne aos relatórios, por questão de tempo, foram iniciados na sala de aula, mas terminados fora da aula. Foi-lhes dado um prazo de uma semana para os terminarem e entregarem ao professor. A introdução e o desenvolvimento do relatório foram elaborados em grupo e a conclusão individualmente. Em todos os trabalhos produzidos pelos alunos foi dado, por mim, feedback oral ou escrito, no sentido de estes terem a noção das suas limitações e melhorarem as suas produções futuras.

O professor assegurou o funcionamento das aulas com base em estratégias que privilegiavam a participação ativa dos alunos na realização das tarefas propostas. Na aula em que foi implementada a primeira tarefa assumi uma postura mais de observadora, sentando-me numa mesa vaga, no fundo da sala, e fui registando alguns aspetos mais relevantes. Os alunos foram solicitando a ajuda do professor, sempre que surgia alguma dificuldade. A partir da segunda aula os alunos já se mostraram mais descontraídos tendo solicitado o meu apoio e o do professor indiscriminadamente. Era notória a proximidade dos alunos comigo, decorrente da minha presença nas aulas e na escola como professora, solicitavam o meu auxílio para esclarecer dúvidas surgidas com o recurso tecnológico utilizado e/ou com o desenvolvimento da tarefa. Esta situação alterou o meu papel inicial de observadora passiva na medida em que passei a ter uma participação ativa na aula ao lado do professor da turma no apoio aos alunos. Deste modo, a minha atenção foi sendo mais centrada em determinados alunos em alguns momentos. Procurei, no final de cada sessão, promover uma troca de impressões com o professor da turma com vista a esclarecer algumas dúvidas e registar esta partilha assim como os episódios mais significativos da aula.

3.3. Os participantes

O meu interesse foi o de investigar o fenómeno da comunicação matemática escrita com alunos do Ensino Secundário no trabalho com as tecnologias, concretamente o recurso à calculadora gráfica e ao computador. O facto de estar a lecionar, no ano letivo em que decorreu o estudo, turmas do Ensino Básico levou-me a decidir por realizar a recolha de dados na turma de um outro colega da escola que lecionava turmas de 10.º ano.

Como participantes na investigação foram escolhidos um professor e uma das suas turmas de 10.º ano. Esta escolha foi um pouco morosa pois, estando a lecionar pela primeira vez nesta escola, foi necessário algum tempo de adaptação, conhecer o funcionamento e algumas características da mesma, pois cada escola é uma realidade diferente que importa conhecer.

O professor é Licenciado em Matemática (ensino de) e tem uma experiência de onze anos de ensino, contudo tal como eu encontra-se a lecionar este ano letivo pela primeira vez nesta escola. É um participante habitual de encontros relacionados com a educação matemática, nomeadamente *ProfMats*, e também formador acreditado pelo Conselho Científico -Pedagógico da Formação Contínua de Professores. Até à data foi formador de várias ações no âmbito da utilização das tecnologias educativas em contexto de sala de aula. É um professor que investe bastante no seu desenvolvimento profissional, envolvendo-se sempre em projetos nas escolas onde lecciona. Já desempenhou o cargo de coordenador do Plano da Matemática e no ano letivo em que decorreu a recolha de dados para esta investigação, esteve ligado ao Plano Tecnológico da Educação, tendo ministrado formação nesta área a professores de diferentes áreas e ciclos de ensino.

O seu grande interesse está na utilização das tecnologias em sala de aula. Recorre frequentemente a diversos *softwares* educativos, a *applets* e aprecia particularmente jogos educativos. Preocupa-se também em levar os alunos a justificar e argumentar os raciocínios. Estas características, associadas à sua disponibilidade em colaborar neste estudo levaram-me a solicitar a sua participação neste estudo.

Foi escolhida uma turma de 10.º ano lecionada por este professor. A turma é constituída por vinte e quatro alunos, catorze rapazes e dez raparigas, a média de idades ronda os 15 anos. Apenas um aluno está a frequentar o 10.º ano pela segunda vez. A maioria dos alunos revela interesse pela disciplina de Matemática, no entanto o rendimento escolar destes estudantes é bastante heterogéneo; as classificações obtidas, na disciplina de Matemática, oscilam entre oito e dezoito valores. O empenho e interesse dos alunos pela Matemática são bastante diversos, havendo alunos que procuram atividades em diversos manuais e sítios na Internet para complementar o trabalho do professor na aula e outros que nem as tarefas propostas pelo docente tentam realizar.

As razões que me levaram à escolha desta turma ficaram a dever-se aos seguintes pressupostos:

(i) Recetividade dos alunos a novos tipos de tarefas;

(ii) Hábitos de trabalho de pares e de grupo;

(iii) Inexistência de casos problemáticos graves de indisciplina.

Por questões de ética, e respeitando o princípio básico de qualquer investigação, os propósitos e os objetivos de investigação foram dados a conhecer a todos os participantes.

Após tomadas as decisões anteriormente referidas, foi solicitada autorização ao Diretor da Escola para o desenvolvimento da investigação (Anexo 9). Logo que obtive o seu consentimento, até porque o tempo urgia, através do Diretor de Turma, dei a conhecer aos Encarregados de Educação, de uma forma abreviada, o trabalho que pretendia desenvolver e o seu âmbito, disponibilizando-me para esclarecer qualquer dúvida surgida (Anexo 10).

Foram dadas garantias, tanto quanto possível, de proteção de eventuais riscos decorrentes do seu envolvimento na investigação, nomeadamente quanto à garantia do anonimato dos vários participantes assim como não será identificada a escola. Serão omitidos os nomes de todos os alunos e do professor e quaisquer outros dados que possam permitir a identificação dos participantes.

3.4. Recolha e análise dos dados

3.4.1. Os instrumentos de recolha de dados

Neste trabalho recorreu-se a diferentes formas de recolha de dados tal como é recomendado na investigação qualitativa. A recolha de dados decorreu no ambiente natural da sala de aula, onde a observação das aulas assumiu a principal fonte, em simultâneo, com a recolha documental de relatórios, composições e trabalhos elaborados pelos alunos. Foi ainda realizado um questionário a todos os alunos da turma e uma entrevista a alguns alunos selecionados.

Observação

A observação, conforme afirmam Pardal e Correia (1995) é uma das mais antigas técnicas de recolha de dados. Esta tem ocupado um lugar privilegiado como método essencial na área da educação (Almiro, 1997; Cohen & Manion 1994, citado por Dias, 2008).

A observação “capta os comportamentos no momento em que eles se produzem e em si mesmo, sem a mediação de um documento ou de um testemunho” (Quivy & Campenhoudt, 2003, p. 196).

Para Ludke e André (1986, citados por Almiro, 1997, p. 97) “a observação possibilita um contacto pessoal e direto entre o investigador e o fenómeno estudado”. Ainda segundo estes autores, o observador pode recorrer aos seus conhecimentos e experiências anteriores para compreender e interpretar o fenómeno em estudo. Apesar de este método de recolha de dados apresentar algumas limitações, nomeadamente pela possibilidade de provocar alterações no comportamento das pessoas observadas e de o investigador poder distorcer o fenómeno observado, estas podem ser minimizadas através de uma ação prolongada do observador em campo e do confronto das expectativas do investigador com o que está a ser observado.

Matos e Carreira (1994) destacam a importância do observador em detetar factos ou situações que poderão passar despercebidas aos participantes, por serem demasiado rotineiras, mas que podem ser importantes para o estudo.

A aplicação das tarefas que constituem esta intervenção durou cinco sessões de noventa minutos cada, onde assumi o papel de observadora participante. Nas primeiras aulas em que estive presente adotei o papel de espectadora, sentando-me no fundo na sala tentando não interferir no decorrer da aula e ao mesmo tempo habituar os alunos à minha presença o que veio a revelar-se uma estratégia eficaz. Os alunos rapidamente começaram a solicitar o meu apoio para o esclarecimento de dúvidas tanto no que se refere aos recursos tecnológicos em uso como em relação à tarefa proposta. Devido ao papel que assumi na sala de aula, de colaboração sistemática com o professor da turma, os alunos acabaram por me encarar também como mais uma professora da turma, ou seja, como professora deles.

Esta situação serviu para criar entre mim, investigadora, e os alunos uma relação de confiança e proximidade. Tal facto permitiu-me compreender melhor os processos e raciocínios desenvolvidos pelos alunos. Para Merriam (1988), a observação participante maximiza as vantagens do investigador como instrumento permitindo-lhe compreender a complexidade que reside na interação entre os sujeitos, registada na mais pequena observação.

No entanto, esta situação influenciou o meu papel como observadora, restringindo a possibilidade de ter uma visão global da sala de aula, mas permitindo um olhar mais localizado em certos alunos, principalmente nas sessões em que o recurso tecnológico usado foi o computador. Nestas aulas foi frequente a solicitação de ajuda, tendo os alunos recorrido ao professor ou a mim de forma natural. Matos e Carreira (1994) afirmam que não é fácil lidar com o duplo papel de observador e de participante pois é necessário conciliar a observação e a participação de tal modo que seja possível interpretar a situação como alguém que faz parte dela e de a descrever como alguém que está de fora.

Após cada sessão foram sempre registadas notas de campo de modo a que alguns episódios mais relevantes não ficassem registados apenas na memória, podendo-se perder com o passar do tempo. Destas notas escritas destacam-se os episódios mais significativos, as dificuldades sentidas no decorrer da implementação das tarefas, ideias trocadas entre professor e alunos da turma e algumas questões que os alunos me colocavam.

Questionário

O questionário é um instrumento de recolha de informação, preenchido pelo informante, que permite colocar uma série de perguntas relativas a qualquer ponto de interesse do investigador (Quivy & Campenhoudt, 2003). É uma fonte de informação acerca de aspetos não diretamente observáveis. É particularmente adequado quando se pretende inquirir um conjunto numeroso de pessoas (Varandas, 2000).

As questões que compõem um questionário podem ser fechadas, abertas ou preformadas (Lessard-Hébert et al, 1994). As questões fechadas limitam o informante à opção por uma de entre as respostas apresentadas (Pardal & Correia, 1995). Por outro lado, este tipo de questões permite uma fácil análise das respostas dadas (Varandas, 2000). As questões abertas permitem liberdade de resposta ao inquirido, permitindo estudar um assunto com mais profundidade. No entanto, o seu tratamento é mais complexo, quer pela variedade de informação que pode surgir, quer pelo tempo que ocupa o seu tratamento (Pardal & Correia, 1995). Nas questões preformadas existe um compromisso entre questões fechadas/ abertas (Lessard-Hébert et al, 1994).

O questionário usado nesta investigação (Anexo 11), e aplicado a todos os alunos da turma, foi composto por questões fechadas e abertas. As questões fechadas, com opção entre uma resposta afirmativa ou negativa, foram sempre complementadas com uma questão aberta. Pretendia-se, mais do que saber se a resposta à questão era afirmativa ou negativa, averiguar a razão de tal resposta.

Com a aplicação deste questionário, procurei obter junto dos alunos informação relacionada com o uso das tecnologias na sala de aula e com a comunicação matemática escrita. Questões como a importância atribuída pelos alunos à utilização da tecnologia e de como sentiam que esta os ajudava na realização das tarefas propostas ou a importância e as dificuldades em comunicar, por escrito, foram alguns temas abordados no questionário.

Depois de recolhidas todas as tarefas, a totalidade dos alunos respondeu ao inquérito, durante os trinta minutos finais de uma aula.

Entrevista

A entrevista tem, para Pardal e Correia (1995), algumas vantagens, mas também algumas limitações em relação ao questionário. Como vantagens, os autores apresentam a possibilidade de obter informação mais rica e não exige um informante alfabetizado. Quivy e Campenhoudt (2003) também corroboram esta afirmação quando afirmam que a entrevista permite ao investigador retirar "informações e elementos de reflexão muito ricos e matizados" (p. 192). Segundo Lessard-Hébert et al (1994), a entrevista pode ajudar a contrariar alguns enviesamentos próprios da observação participante permitindo ao observador "confrontar a sua perceção do «significado» atribuído pelos sujeitos aos acontecimentos com aquela que os próprios sujeitos exprimem" (p. 160).

Entre as desvantagens, Pardal e Correia (1995) destacam a limitação de recolha de informação sobre assuntos delicados e a fraca possibilidade de aplicação a grandes universos. Quivy e Campenhoudt (2003) apontam "o facto de a flexibilidade do método poder levar a acreditar numa completa espontaneidade do entrevistado e numa total neutralidade do investigador" (p. 194). O investigador, ao interpretar a informação, deve ter em consideração a relação específica que o liga ao entrevistado.

A entrevista permite recolher informação acerca de aspetos não observáveis permitindo assim um conhecimento mais profundo de uma dada situação (Varandas, 2000). Segundo Almiro (1997) observar um comportamento pode não ser suficiente, sendo também importante saber o seu significado para o sujeito, o que só se poderá saber se lhe for pedido para aclarar.

Foi nesta perspetiva que, quase no término da intervenção pedagógica, foram realizadas as entrevistas. Após a observação das aulas e após uma primeira análise dos questionários, surgiram aspetos ou situações que exigiram o seu esclarecimento junto dos participantes. Neste sentido, efetuei entrevistas semiestruturadas a quatro alunos, individualmente. Este tipo de entrevistas pressupõe o recurso a um guião orientador, previamente construído, onde são especificadas as questões a colocar.

O principal objetivo das entrevistas realizadas neste estudo foi esclarecer algumas dúvidas que surgiram ao analisar os questionários ou durante as aulas, razão pela qual as quatro entrevistas assumiram pequenas diferenças entre cada um dos alunos. Foi usado um guião para cada um deles (Anexos 12, 13, 14 e 15) uma vez que muitos dos aspetos a esclarecer diziam respeito àquele aluno em particular, mas houve também questões comuns aos quatro alunos, como, por exemplo, quais as representações mais facilitadoras na comunicação escrita ou qual a importância da comunicação escrita.

Durante a realização das entrevistas procurei garantir a existência de um ambiente descontraído de modo a que os alunos se sentissem à vontade na exposição das suas opiniões e pensamentos.

Estas foram gravadas em áudio e, posteriormente, integralmente transcritas.

Recolha documental

A análise documental recai sobre documentos relativos a um local ou uma situação, correspondendo a uma observação de artefactos escritos que não são da autoria do investigador. É uma técnica que tem uma função de complementaridade na investigação qualitativa sendo utilizada para triangular os dados obtidos através de outras técnicas (Lessard-Hébert et al, 1994).

Nesta investigação, os dados recolhidos através da observação e das entrevistas, foram complementados com documentos escritos particularmente produzidos pelos alunos, como por exemplo:

i) composições matemáticas;
ii) relatórios escritos;
iii) questionário.

Conforme apresentado no quadro 7, os alunos realizaram cinco tarefas. Cada uma delas teve a sua conclusão com a apresentação de uma composição ou de um relatório. O objetivo era analisar relatórios e composições produzidos pelos alunos onde o recurso à calculadora gráfica ou ao computador foi central. Assim, os alunos produziram três composições matemáticas e dois relatórios. Na última tarefa proposta, foi dada oportunidade aos alunos de escolherem a ferramenta tecnológica para elaborarem uma composição sobre a referida tarefa.

Conjugação dos diversos instrumentos

O quadro 8 apresenta, de uma forma sistemática, a contribuição dos vários dados recolhidos nas respostas às questões em estudo:

1) Como é que as tecnologias influenciam e facilitam o desenvolvimento da comunicação escrita na aula de matemática?
2) De que forma os alunos utilizam as tecnologias ao serviço da comunicação matemática?
3) Comparando a calculadora gráfica com o computador, será possível dizer se uma das duas ferramentas tende a ser mais potenciadora da comunicação escrita do que a outra?

Questões	Investigadora	Alunos		
	Observação	Questionário	Entrevista	Documentos Produzidos
(i)	×	×	×	×
(ii)	×	×	×	×
(iii)	×			×

Quadro 8 – Contributo dos instrumentos de recolha de dados nas respostas às questões

3.4.2. Análise de dados

Para Erickson (1986, referido por Lessard-Hébert *et al*, 1994), só se pode falar em dados da investigação a partir do momento em que o espírito analisa o material recolhido. Todo este material, tal como transcrições de entrevistas, notas de trabalho e documentos respeitantes ao estudo só irão construir os dados graças aos meios formais que a análise proporciona.

A análise dos dados permite, ao investigador, uma melhor compreensão do material recolhido e também uma forma de o organizar de modo a responder às questões propostas (Varandas, 2000).

Segundo Bodgan e Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhes permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve num primeiro momento o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, procura de padrões, regularidades relevantes, descoberta dos aspetos importantes. Numa segunda fase, reavaliam-se estes padrões e regularidades, buscando relações e inferências num nível de abstração mais elevado.

Seguindo estas indicações, a análise dos dados foi feita em duas fases. Na primeira, procedi à transcrição integral das gravações das entrevistas e analisei as notas de campo, procurando uma categorização que me permitisse responder às questões do estudo. Após a intervenção pedagógica decorreu a segunda fase de análise, mais profunda e definitiva, com o objetivo de responder ao problema inicial e às questões em estudo. Tendo em conta a revisão da literatura e os objetivos do estudo, para a definição das categorias tive em atenção os três grandes domínios presentes neste estudo:

(i) as representações produzidas pelos alunos (gráfica, pictórica ou algébrica);

ii) a tecnologia utilizada pelo aluno, calculadora gráfica ou computador; e

(iii) a comunicação escrita apresentada pelo aluno através do relatório ou composição.

No que se refere às *representações* produzidas pelos alunos foi dada particular atenção ao tipo de representação escolhida pelo aluno para representar os dados apresentados na tarefa e o contributo desta representação na resolução da tarefa e na construção dos vários conceitos envolvidos no estudo das funções. O recurso à *tecnologia,* calculadora ou computador era indispensável neste estudo. Procurei conhecer a forma como os alunos recorriam a cada uma das ferramentas e se existia alguma preferência. Por fim, a *comunicação escrita* foi analisada e tentei compreender o contributo do uso da ferramenta tecnológica na resolução das tarefas.

Com base nestas categorias e após uma análise cuidada de todas as informações recolhidas procuro apresentar os dados de forma clara aos leitores.

Capítulo 4

Apresentação e análise dos dados

Neste capítulo descrevo e analiso a intervenção pedagógica desenvolvida. Apresento as várias tarefas implementadas em sala de aula, assim como a atividade desenvolvida pelos alunos. Termino com a opinião dos alunos acerca do trabalho desenvolvido.

4.1. Laboratório

4.1.1. Apresentação e implementação da tarefa

As aulas de Matemática desta turma são sempre no último bloco do dia, das 15h55 às 17h25. Deste modo os alunos revelam um grande desgaste, pelo que se torna ainda mais importante apresentar tarefas interessantes e estimulantes.

Com a primeira tarefa (Anexo 1) pretendia-se que os alunos analisassem uma situação modelada por uma função quadrática e respondessem a três questões envolvendo propriedades da mesma função. Na terceira questão os alunos deveriam investigar a situação descrita e elaborar uma composição onde explicassem as suas conclusões. Para a sua exploração, os alunos deveriam recorrer à calculadora gráfica. De referir que nesta turma existe uma grande diversidade de modelos de calculadoras gráficas (Texas TI-83, Texas TI-84 *Plus*, Texas TI-*Nspire*, Casio CFX-9850GC *Plus* e Casio FX-9860G SD), mas tal situação não causou qualquer constrangimento.

O professor começou por fazer uma breve introdução à tarefa, explicando aos alunos que "para além de outras coisas, com esta tarefa visa-se trabalhar uma das capacidades transversais, a comunicação matemática, usando a calculadora" [Notas de campo]. Alertou também os alunos para que incluíssem nas suas respostas e na sua composição toda a informação relevante.

Dado que a experiência dos alunos na elaboração de composições não é muita, o professor apresentou os critérios de classificação da mesma (Anexo 6), onde se avalia simultaneamente as competências específicas da disciplina e as competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

Após estes esclarecimentos foi distribuída a tarefa a todos os alunos. Dado que estes dispensaram a leitura do enunciado, por parte do professor, começaram a sua exploração trabalhando em pares.

4.1.2. A atividade dos alunos

Os alunos revelaram alguma dificuldade em iniciar a tarefa. Em vez de ler o enunciado, começaram a colocar questões tais como, se deviam utilizar a calculadora ou resolver analiticamente ou se a tarefa "contava para nota" [Notas de campo]. Dado que quase todos os grupos estavam com alguma dúvida e estava a gerar-se alguma perturbação da aula, o professor decidiu fazer a leitura do enunciado e, em cada uma das questões, dar uma breve explicação do que era pretendido. Mais uma vez alertou os alunos para traduzirem, no papel, "todos os passos dados na resolução da questão" [Notas de campo]. Uma aluna perguntou se era melhor "colocar uma tabela ou o gráfico" [Notas de campo] ao que o professor respondeu "cada aluno deve fazer da forma que considerar melhor" [Notas de campo]. Após estes esclarecimentos, o professor deu tempo para fazerem a interpretação e exploração da tarefa.

Enquanto os alunos trabalhavam, o professor circulou pela sala dialogando com os alunos, sempre que estes solicitavam algum esclarecimento ou colocando alguma questão aos alunos que os ajudasse a avançar. Esses momentos visaram estimular a reflexão e incentivar a apresentação de argumentos justificativos das suas opções.

O primeiro obstáculo, comum a muitos alunos, foi encontrar uma janela de visualização na calculadora que melhor se ajustasse à situação. Alguns alunos encontraram com facilidade uma janela de visualização ajustada aos dados, e a partir desse momento, a informação foi passando entre os alunos da turma que rapidamente encontraram uma janela adequada. A maioria dos alunos optou pela janela de visualização que apresento na figura seguinte e que foi apresentada pelo aluno 1.

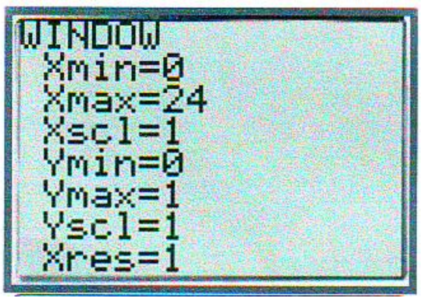


Figura 8 – Janela de visualização do aluno 1

Apenas o aluno 19 utilizou uma janela de visualização diferente dos colegas, obtida automaticamente pela calculadora gráfica (Figura 9).

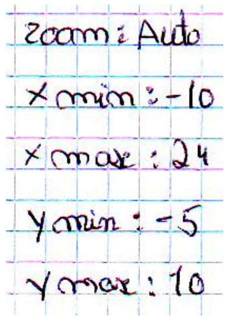


Figura 9 – Janela de visualização do aluno 19

Ultrapassada esta dificuldade inicial, os vários grupos prosseguiram o seu trabalho solicitando frequentemente a ajuda do professor, principalmente na terceira questão, o que não é surpreendente. As duas primeiras questões exigem uma resposta após um cálculo ou através da calculadora.

As principais dúvidas eram referentes à interpretação do enunciado e na forma como poderiam interpretar os dados recorrendo à calculadora. O professor procurou sempre não dar respostas concretas, mas sim incentivar a reflexão colocando questões do tipo:

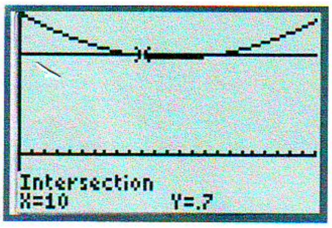
O que te leva a pensar isso?
Será que esse dado tem influência na questão? ou
Como explicam isso? [Notas de campo].

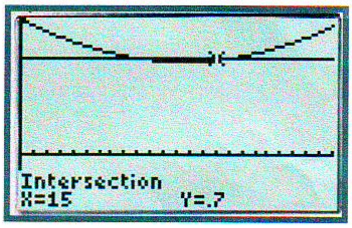
Os alunos muitas vezes, após alguma reflexão, conseguiram chegar ao pretendido, mas logo que surgia outra dúvida os alunos questionavam o professor:

Ó Stor, como é que explicamos isto? [Notas de campo].

Ao fim de cerca de cinquenta minutos houve um espaço de debate onde os alunos apresentaram os seus resultados, explicando as suas estratégias de resolução. Quase todos apresentaram a mesma estratégia para a resolução da terceira questão. Introduziram, na calculadora, a função que traduzia o nível de poluição do ar no laboratório e a reta horizontal definida pela expressão y = 0,7 que representava o nível de poluição do ar abaixo do qual se poderiam realizar as experiências. Calcularam o ponto de intersecção do gráfico das duas funções e concluíram que apenas era possível realizar uma das experiências, como se pode ver na figura seguinte:

3 – O que é pretendido na questão é determinar o intervalo de tempo que decorre, quando o nível de poluição é 0.7 mg/l, fazendo posteriormente a comparação com os valores necessários para a realização das experiências, sabendo assim se é possível efectuá – las. **Para tal, é necessário determinar a intersecção do gráfico da função com a recta 0.7.**





A recta intersecta o gráfico da função em dois objectos distintos 10 e 15.

De 10 a 15, é o tempo que decorre quando o nível de poluição é 0.7. Ou seja, o intervalo de tempo é de 5horas, (15-10). Comparando os resultados verificamos que:

- ✓ Para a realização da experiência A é necessária uma duração de 6 horas, logo não é possível realizar a experiência, pois 6horas é maior que 5horas.
- ✓ Para a realização da experiência B é necessária uma duração de 4h30min, logo é possível realizar a experiência, uma vez que 4h30min é menor que 5horas.

Resposta: Só é possível realizar a experiência B.

Figura 10 – Composição do aluno 1

O aluno 4 apresentou uma estratégia de resolução diferente. Igualou a expressão que traduzia o nível de poluição do ar no laboratório a 0,7 e determinou os zeros da expressão obtida, obtendo a mesma conclusão dos restantes colegas. No entanto, após análise da sua composição, constatei que apresentou a mesma estratégia dos restantes colegas.

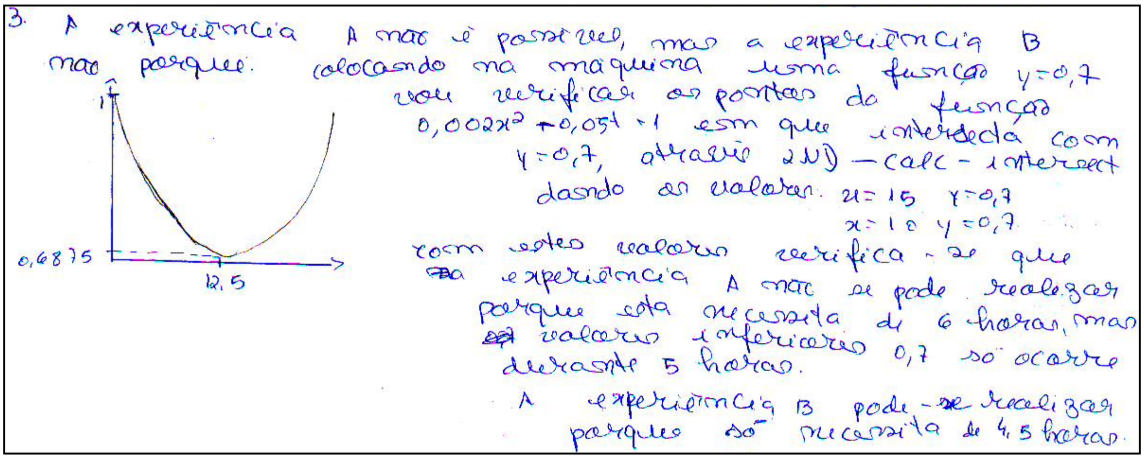


Figura 11 – Composição do aluno 4

Após analisarem as duas resoluções apresentadas, o professor perguntou se alguém tinha outra proposta de resolução. Mas não obteve resposta, assim lembrou aos alunos que há diferentes formas de resolver uma mesma situação. E acrescentou:

> *O importante é explicar o porquê dos vossos procedimentos, da vossa estratégia de resolução* [Notas de campo].

Após este pequeno debate, o professor deu mais algum tempo para os alunos finalizarem o seu trabalho. Estes, mais uma vez, se debateram com a dificuldade de escrever os seus raciocínios. A maior dificuldade dos alunos era mesmo escrever. Após todos os alunos terminarem a sua composição, o professor prosseguiu a aula com o esclarecimento de dúvidas da aula anterior. Alguns alunos pediram para entregar a sua composição na aula seguinte pois gostariam de "passar a computador" [Notas de campo] em casa, pelo que o professor autorizou este pedido dizendo-lhes que "poderiam imprimir o seu trabalho ou colocar na página *Moodle* da disciplina" [Notas de campo] onde foi criado um ponto específico para estas atividades (Figura 12).

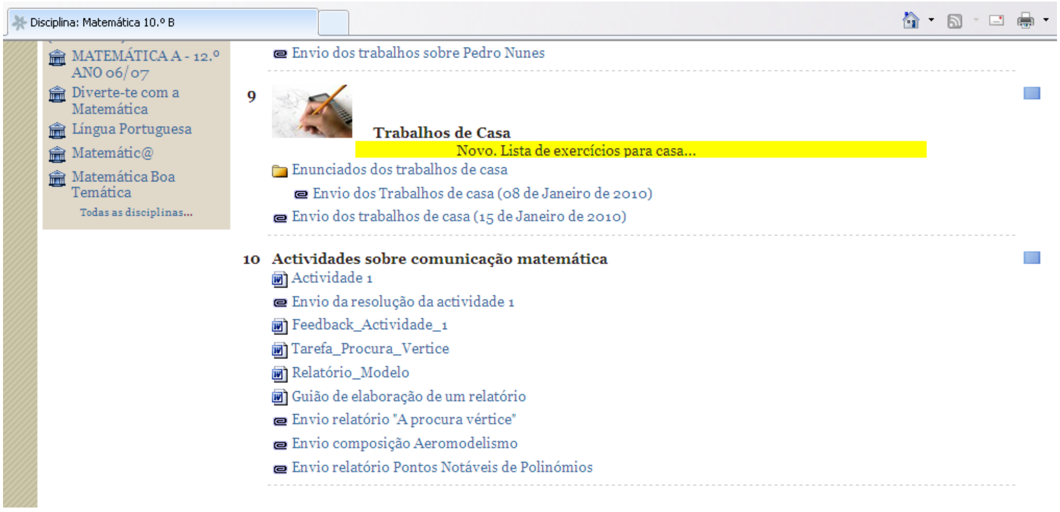
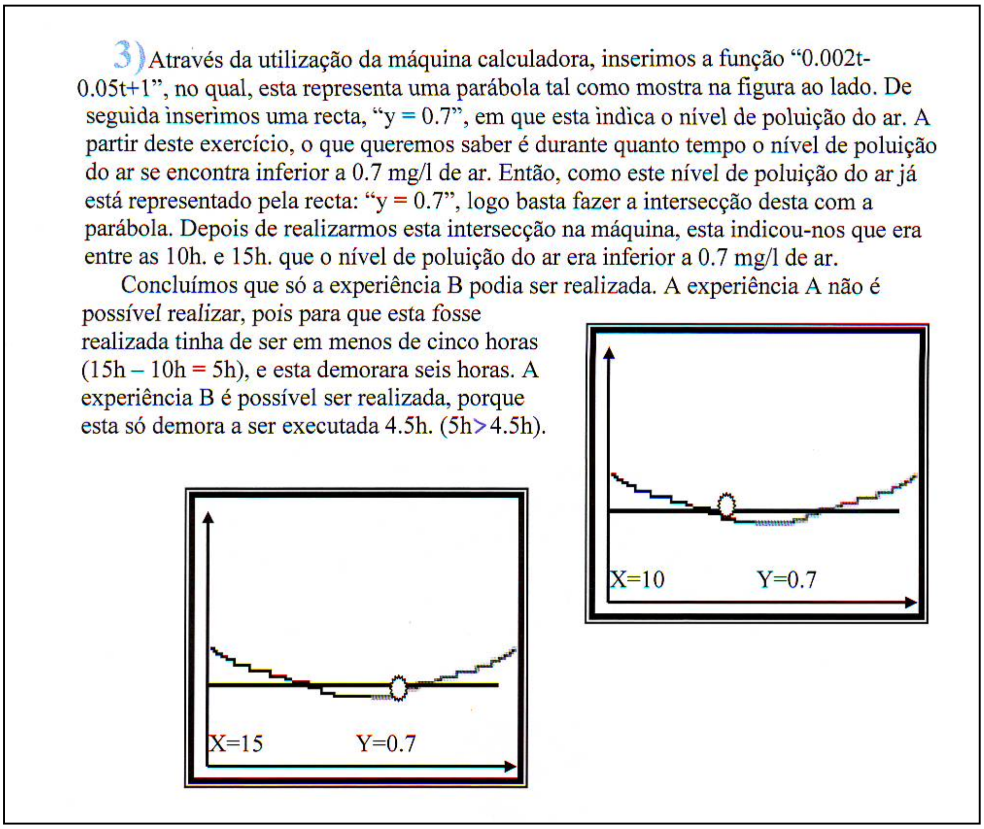


Figura 12 – Página *Moodle* da disciplina de Matemática da turma participante

Após análise das composições, constata-se que quase todos os alunos complementaram o seu registo escrito com uma representação gráfica da situação (Figuras 10, 11 e 13). De notar que o aluno 11, não conseguindo colocar no seu documento as imagens obtidas na calculadora, recorreu ao programa *Paint* para reproduzir a sua representação gráfica (Figura 13).



3) Através da utilização da máquina calculadora, inserimos a função "0.002t-0.05t+1", no qual, esta representa uma parábola tal como mostra na figura ao lado. De seguida inserimos uma recta, "y = 0.7", em que esta indica o nível de poluição do ar. A partir deste exercício, o que queremos saber é durante quanto tempo o nível de poluição do ar se encontra inferior a 0.7 mg/l de ar. Então, como este nível de poluição do ar já está representado pela recta: "y = 0.7", logo basta fazer a intersecção desta com a parábola. Depois de realizarmos esta intersecção na máquina, esta indicou-nos que era entre as 10h. e 15h. que o nível de poluição do ar era inferior a 0.7 mg/l de ar.

Concluímos que só a experiência B podia ser realizada. A experiência A não é possível realizar, pois para que esta fosse realizada tinha de ser em menos de cinco horas (15h – 10h = 5h), e esta demorara seis horas. A experiência B é possível ser realizada, porque esta só demora a ser executada 4.5h. (5h>4.5h).

Figura 13 – Composição do aluno 11

Há da parte da maioria dos alunos necessidade de apresentar a representação gráfica possibilitada pela calculadora. Estas várias representações externas parecem indispensáveis para os alunos mostrarem o seu raciocínio, mas também os ajuda a compreender de forma mais consistente o próprio raciocínio e a elaborar a composição.

Através da análise dos inquéritos, constata-se que a quase totalidade dos alunos considera que uma composição deve ter gráficos ou tabelas ou expressões algébricas pois estes são um auxílio na explicação do seu raciocínio.

Uma composição deve ter gráficos e/ ou tabelas e/ ou expressões algébricas e/ou linguagem escrita? Sim X Não ___
Porquê?
Para justificar os nossos pontos de vista, e ajudar na explicação.

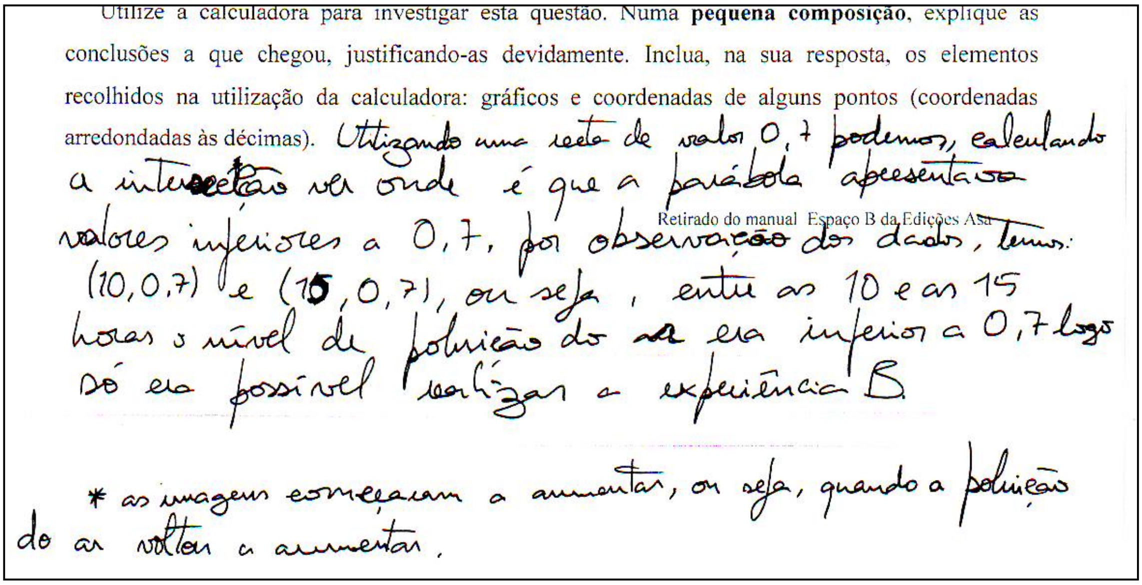
Figura 14 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Esta ideia está relacionada com a ideia habitual entre os alunos da necessidade de apresentar sempre linguagem simbólica numa resolução matemática. Apenas dois alunos apresentaram a sua composição sem recorrer a uma representação gráfica (Figuras 15 e 16).

Resposta: É possível realizar a experiência B, mas a experiência A não.
Resolução: A função utilizada nas alíneas anteriores irá continuar a ser utilizada em conjunto com a função 0,7 (recta) para sabermos onde é que o nível de poluição é inferior a este valor para sabermos se são possíveis realizar as duas experiências A e B descritas no enunciado. Depois de se ter introduzido esta nova função clicamos na tecla "2nd" e depois na tecla "Calc" e carregamos na tecla número 5 (intersect), damos um valor à primeira curva outro à segunda confirmamos a operação e obtemos o número 10, daqui temos a primeira intersecção, para concluirmos temos de saber a outra intersecção e refazemos o processo feito anteriormente do qual resulta o número 15. Resumindo, a poluição do ar foi inferior a 0,7mg/l durante 5 horas, porque 15-10 = 5, por isso podemos realizar a experiência B (quatro horas e trinta minutos), porque 5> 4,5 e não podemos realizar a experiência A (seis horas), porque 5 <6, logo não é possível realizar a experiência A porque para ser realizável eram necessárias seis horas e a poluição do ar só esteve inferior a 0,7mg/l durante cinco horas, seria necessário mais uma hora para ser possível realizar a experiência A.

Figura 15 – Composição do aluno 8

Esta situação pode estar relacionada com uma dificuldade na transição da linguagem natural para outro tipo de linguagem (Goldin, 2008). Goldin refere a este propósito que existem vários níveis no sistema de representações, sendo a escrita um deles.


Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa **pequena composição**, explique as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas). Utilizando uma recta de valor 0,7 podemos, calculando a intersecção ver onde é que a parábola apresentava valores inferiores a 0,7, por observação dos dados, temos: (10,0.7) e (15,0,7), ou seja, entre as 10 e as 15 horas o nível de poluição do ar era inferior a 0,7 logo só era possível realizar a experiência B.

Retirado do manual Espaço B da Edições Asa

* as imagens começaram a aumentar, ou seja, quando a poluição do ar voltou a aumentar.

Figura 16 – Composição do aluno 17

A ideia pré-concebida de que qualquer produção deve ter uma resposta verificou-se em muitas composições (Figuras 10 e 15).

Os alunos, apesar de terem dificuldade em colocar no papel os seus pensamentos, acabaram por fazer uma interpretação correta da situação e conseguiram exprimi-los.

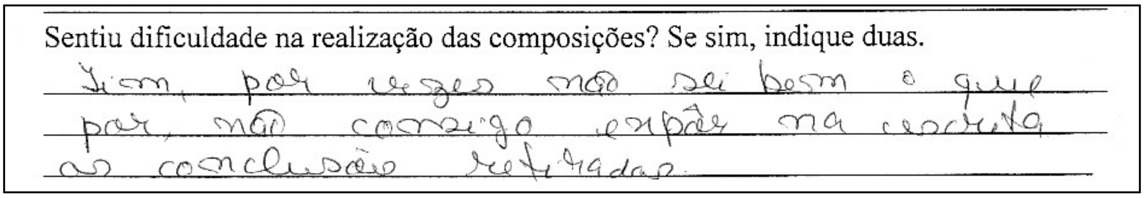
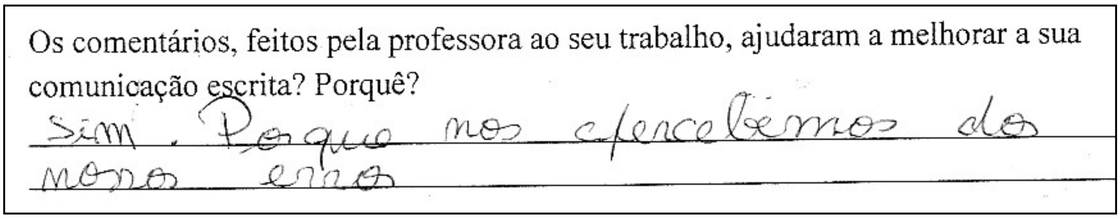

Sentiu dificuldade na realização das composições? Se sim, indique duas.
Sim, por vezes não sei bem o que por, não consigo expôr na escrita as conclusões retiradas.

Figura 17 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Alguns alunos consideram que descrever o seu procedimento é ilustrar todos os passos da calculadora como se vê nas figuras 13 e 15.

Foi dado feedback escrito (Anexo 16), na sessão seguinte, contemplando os pontos que deveriam ser focados na composição, assim como a cotação atribuída à mesma. Ainda neste documento, foi feita uma compilação dos trabalhos dos alunos no sentido de lhes dar bons exemplos para cada um dos pontos que deveriam ter sido evidenciados na composição. Optei por este tipo de feedback pois, segundo Dias (2008), um feedback centrado mais no aluno do que na tarefa pode ter efeitos negativos, na medida em que pode afetar a sua autoestima. Não foi facultada a classificação das tarefas pois esta pode desmotivar os alunos, havendo um desinvestimento no aperfeiçoamento das tarefas (Semana, 2008). Foi ainda feito um pequeno comentário individual a cada uma das composições. Recolhida a opinião dos alunos, através da aplicação do questionário, sobre estes comentários, apenas dois discentes consideraram que os comentários feitos aos seus trabalhos não tinham ajudado a melhorar a sua comunicação escrita, não explicando a razão para tal. Para os outros alunos os comentários ajudaram essencialmente a corrigir erros ou a superar dificuldades, como se constata nas respostas abaixo.


Os comentários, feitos pela professora ao seu trabalho, ajudaram a melhorar a sua comunicação escrita? Porquê?

Sim. Porque nos apercebemos dos nossos erros

Figura 18 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

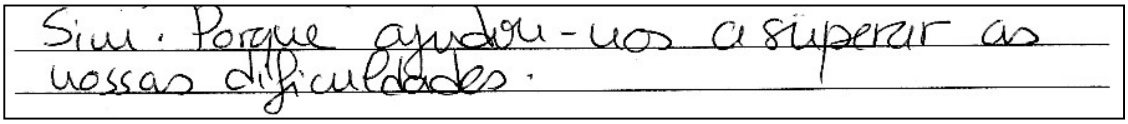

Sim. Porque ajudou-nos a superar as nossas dificuldades.

Figura 19 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

4.2. À procura do vértice de uma função quadrática

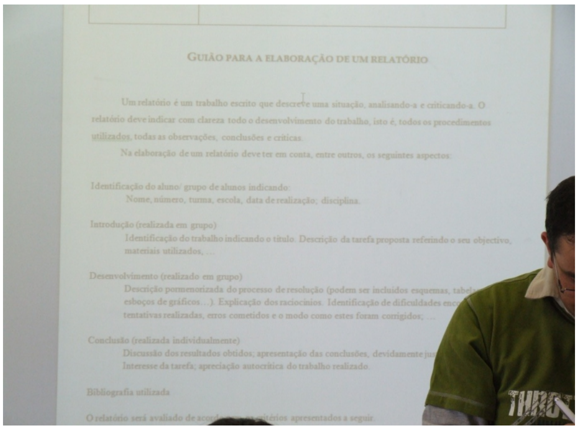
4.2.1. Apresentação e implementação da tarefa

Com a segunda tarefa (Anexo 2) pretendia-se que os alunos percebessem que há vários métodos de encontrar o vértice de uma função quadrática: tabela de valores, gráfico e usando as ferramentas máximo/mínimo da calculadora gráfica, método algébrico na forma estandardizada e na forma do vértice.

Esta tarefa foi adaptada de uma aula apresentada no site http://www.math.uakron.edu/amc/Algebra2.htm, onde estão disponíveis vários recursos para a aula de Matemática, sendo este projeto dirigido por António Quesada, da Universidade de Akron (Ohio).

Deveria ser utilizada a calculadora gráfica para explorar a tarefa e, no final, os alunos deveriam elaborar um relatório da atividade desenvolvida.

O professor apresentou a tarefa dizendo aos alunos que a mesma "tem como objetivo encontrar o vértice da função quadrática usando diferentes formas. No final do vosso trabalho terão de elaborar um relatório" [Notas de campo]. Gerou-se um pouco de confusão pois os alunos nunca tinham elaborado um relatório nesta disciplina. O professor focou assim a sua intervenção na elaboração do mesmo. Foi projetado o guião de elaboração de um relatório (Anexo 7) para que todos pudessem acompanhar a explicação (Fotografia 3). Não foram colocadas dúvidas acerca do guião. Após este esclarecimento foi distribuída a tarefa a todos os alunos e, uma vez que a tarefa era extensa, não foi lido o enunciado da mesma. Deu-se assim início à exploração da tarefa, trabalhando em grupos de dois ou três alunos.



Fotografia 3. Projeção do guião para a elaboração de um relatório

4.2.2. A atividade dos alunos

Ao contrário do verificado na primeira sessão, os alunos começaram de imediato a ler o enunciado da tarefa, sem fazer perguntas. Rapidamente pegaram nas calculadoras gráficas e responderam à primeira questão. No entanto, a segunda questão levantou dúvidas em todos os grupos. Todos eles solicitaram a minha ajuda ou a do professor da turma. A pergunta mais recorrente foi “O que é uma conjectura?” [Notas de campo]. Após lhes explicarmos o que era pretendido, outra pergunta surgia quase de imediato “Como vamos escrever isto?” [Notas de campo]. Os alunos revelavam ter percebido a ideia, mas mostravam dificuldades em colocar no papel o seu raciocínio. Verificou-se não ter havido grandes dificuldades em realizar a tarefa pois esta estava bastante guiada. Mais uma vez, o uso da calculadora gráfica não suscitou dúvidas. No entanto, quase todas as questões que solicitavam aos alunos que descrevessem o que observavam, que conjeturassem sobre algo ou que escrevessem um método, passo a passo, para encontrar o vértice de uma função quadrática se revelaram um obstáculo para todos os grupos. Muitas vezes, os vários grupos eram capazes de explicar oralmente os seus raciocínios, mas pediam ajuda para saber se estavam a pensar corretamente e como poderiam colocar no papel o que nos estavam a dizer. Procurámos estimular a reflexão em grupo sem lhes dar respostas concretas.

Grande parte dos grupos demorou quase noventa minutos a realizar a tarefa, pelo que não houve tempo para uma discussão conjunta. Apenas dois deles terminaram a tarefa e começaram a elaborar o relatório. No final da aula o professor da turma informou-os de que teriam uma semana para terminarem os relatórios e lhos entregarem. Dado que a aula de Matemática é a última do dia, os alunos não apresentaram nenhuma dúvida apenas mostrando interesse em sair. Na aula seguinte, na qual eu não estava presente, os alunos disseram ao professor não saber como fazer o relatório. Apesar de terem o guião, não sabiam como elaborar o relatório. Procurei então, com o professor, encontrar uma forma de auxiliar os alunos nesta dificuldade. Assim, decidimos apresentar um “relatório modelo” apresentado por Semana (2008) (Anexo 8).

Dos vinte e quatro alunos que constituem a turma, apenas dez entregaram o seu relatório. Apesar da insistência do professor para a sua entrega, verificou-se por parte dos alunos que não entregaram um desinteresse devido ao esforço que teriam de fazer por ser algo novo e pelo facto de esta produção não ter consequência direta na classificação da disciplina.

Após análise dos relatórios, constata-se que, à exceção de um aluno, todos os outros obedeceram à estrutura definida no guião, apresentando uma introdução, um desenvolvimento e uma conclusão. Ao contrário do solicitado, alguns alunos não elaboraram a conclusão individualmente. Através da análise do questionário, a quase totalidade dos alunos considerou que o “relatório modelo” e o guião os tinha ajudado na elaboração dos relatórios pois tinham servido como orientação, como forma de saber o que colocar neles.

O relatório modelo e o guião de elaboração de um relatório ajudaram na elaboração dos relatórios? De que forma?

Sim, porque nos deu ideia do que devia de colocar no relatório

Figura 20 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Os poucos alunos que não consideraram estes instrumentos úteis apresentaram como justificação o facto de não terem feito os relatórios.

O relatório modelo e o guião de elaboração de um relatório ajudaram na elaboração dos relatórios? De que forma?

Não, pois não o realizei

Figura 21 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Grande parte dos alunos utilizou apenas uma página A4 para elaborar o seu relatório (Figuras 22, 23 e 24).

Relatório

Introdução:

Com esta actividade, o objectivo é aprender algumas características e propriedades importantes da função quadrática. Pretendem-se criar gráficos através de várias maneiras e métodos. A função quadrática segue-se pela fórmula: $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$. Através disso conseguem-se descobrir muitas propriedades da função quadrática.

Desenvolvimento:

Durante a resolução da actividade fomos percebendo que os temas da função quadrática aplicados eram a concavidade, o sentido, os zeros, o vértice, o domínio, o contradomínio e simetrias de vários pontos.

Fomos alcançando os nossos objectivos, através de várias formas, como por exemplo: tabelas, gráficos, e máquina calculadora gráfica. Os exercícios serviram para aplicarmos os nossos conhecimentos sobre a função quadrática, sem necessariamente recorrermos à calculadora, ou fazermos tudo analiticamente.

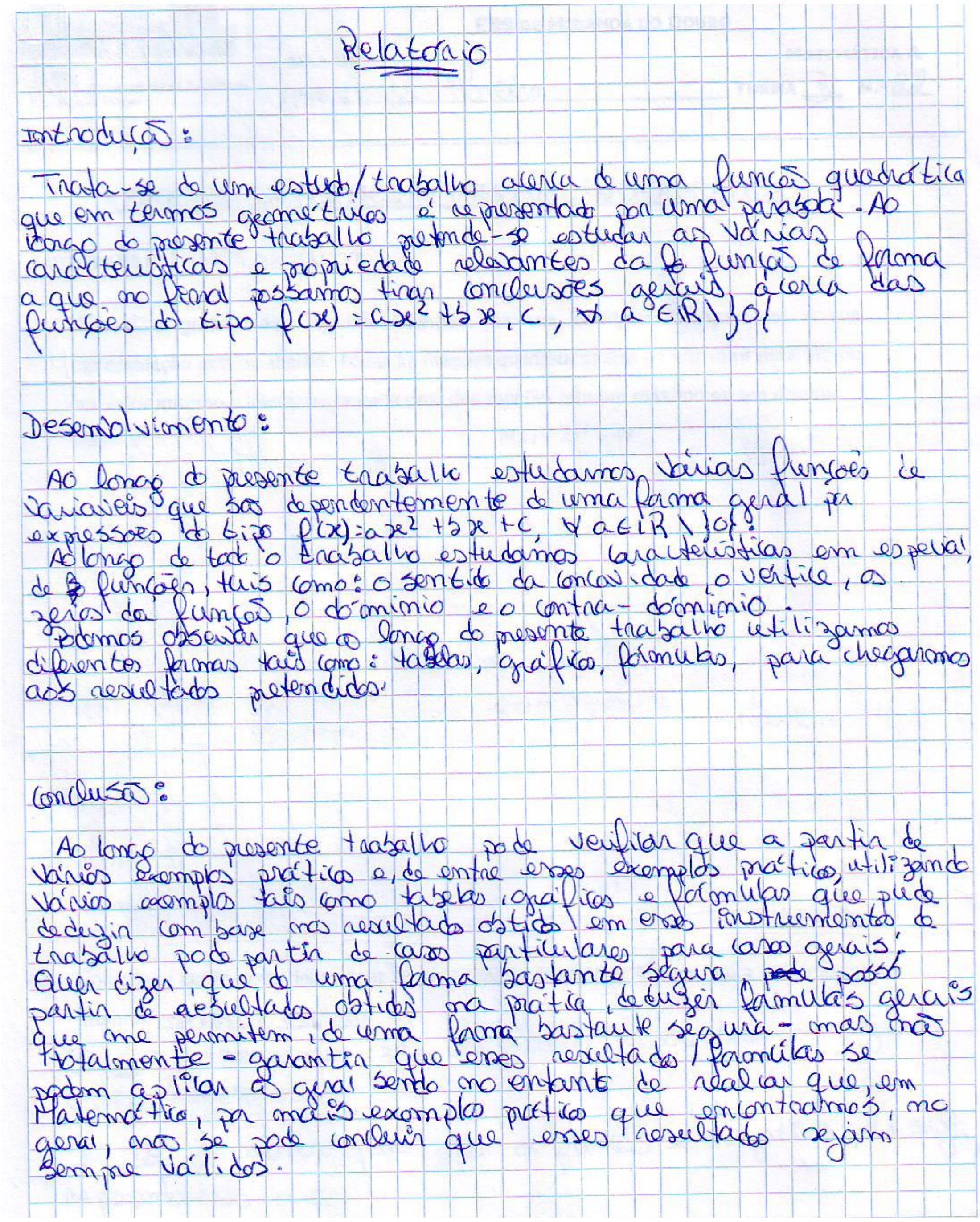
Conclusão:

Com este trabalho conclui-se que se pode encontrar o vértice (máximo ou mínimo) de uma função através de vários métodos, ou seja, através do gráfico da função na calculadora através do Max/min, através da tabela de valores e através do método algébrico.

A família de equações quadráticas a que esta pertence é a do tipo, onde Y é a variável dependente; **a** é a concavidade da função; **x** é a variável independente; **h** e **k** são pontos do vértice da função; **h** é a abcissa do vértice; **k** é a ordenada do vértice. Portanto todas as funções deste tipo são parábolas.

Figura 22 – Relatório dos alunos 8 e 10

Verifica-se também, em geral, uma escassez na escrita e na utilização de diferentes representações, apesar de na tarefa terem sido trabalhadas várias representações. Tal facto pode decorrer de os alunos se terem baseado muito no “relatório modelo” que apresentava essencialmente texto, remetendo para anexo representações pictóricas e algébricas.



Relatório

Introdução:

Trata-se de um estudo/trabalho acerca de uma função quadrática que em termos geométricos é representado por uma parábola. Ao longo do presente trabalho pretende-se estudar as várias características e propriedade relevantes da ~~f~~ função de forma a que no final possamos tirar conclusões gerais acerca das funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx, c$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Desenvolvimento:

Ao longo do presente trabalho estudamos várias funções de variáveis que são dependentemente de uma forma geral por expressões do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ao longo de todo o trabalho estudamos características em especial, de ~~f~~ funções, tais como: o sentido da concavidade, o vértice, os zeros da função, o domínio e o contra-domínio.
Podemos observar que ao longo do presente trabalho utilizamos diferentes formas tais como: tabelas, gráficos, fórmulas, para chegarmos aos resultados pretendidos.

Conclusão:

Ao longo do presente trabalho pode verificar que a partir de vários exemplos práticos e, de entre esses exemplos práticos, utilizando vários exemplos tais como tabelas, gráficos e fórmulas que pude deduzir com base nos resultados obtidos em esses instrumentos de trabalho pode partir de casos particulares para casos gerais; Quer dizer, que de uma forma bastante segura, ~~pode~~ posso partir de resultados obtidos na prática, deduzir fórmulas gerais que me permitem, de uma forma bastante segura - mas não totalmente - garantir que esses resultados/fórmulas se podem aplicar ao geral sendo no entanto de realçar que, em Matemática, por mais exemplos práticos que encontramos, no geral, não se pode concluir que esses resultados sejam sempre válidos.

Figura 23 – Relatório do aluno 22

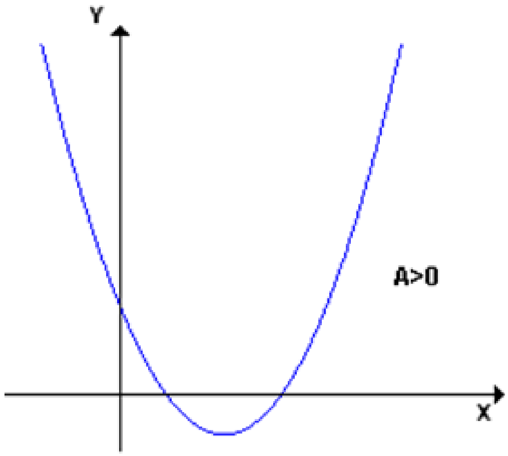
Apenas um aluno inseriu no seu relatório representações gráficas (Figura 24), mas como se pode verificar este não espelha minimamente a atividade desenvolvida.

Relatório - À procura do vértice de uma função quadrática

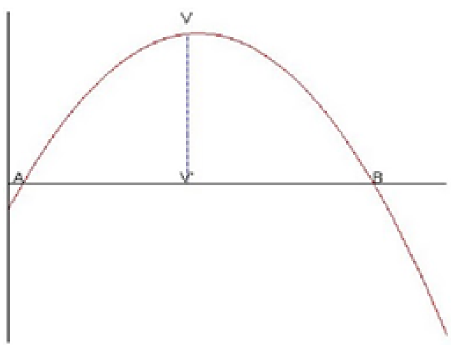
- O vértice de uma função quadrática pode ser definido de várias formas. Neste momento, considere-se o vértice como o ponto máximo ou mínimo do gráfico de uma função quadrática.

- Numa função do género ax^2+bx+c, o valor de a é o que nos vai indicar se a função quadrática tem um valor máximo se a<0 e tem um valor mínimo se a>0.

a>0



a<0



Nome: X

Nº26

10ºX

Figura 24 – Relatório do aluno 26

No que diz respeito à introdução, os alunos procuram explicar qual o objetivo da tarefa realizada.

Introdução: À procura do vertice duma parábola. O objectivo desta actividade, foi a descoberta do vértice de determinadas funções quadráticas, cujos gráficos são parábolas. Para complemento foi utilizada a calculadora gráfica.

Figura 25 – Introdução do aluno 12

Reconhece-se, nas várias introduções, alguma dificuldade em compreender o objetivo da tarefa. Todos eles referem o estudo de funções quadráticas, mas poucos foram os alunos que identificaram o vértice de uma função quadrática como o elemento chave da tarefa.

Introdução:

A actividade foi proposta na aula de matemática onde abordava o tema funções, que apresenta uma inerente relação entre o meio analítico e gráfico. Para uma melhor compreensão e realização das tarefas, a actividade encontrava - se dividida em 3 partes: método gráfico, método algébrico – forma estandardizada e método algébrico – forma do vértice. Em cada um delas, eram abordados diferentes tipos de exercícios, com diferentes processos, métodos de resolução (analítico e gráfico) e raciocínios distintos. Posteriormente, eram pedidas conclusões e observações. Assim, a actividade tinha como objectivo desenvolver o raciocínio matemático e a respectiva comunicação na aplicação analítica e gráfica da procura do vértice de uma função quadrática, realizando diferentes processos de resolução permitindo várias conclusões e análises. Para tal, foram utilizados materiais como: papel, lápis, borracha e calculadora gráfica, folha de exercícios.

Figura 26 – Introdução do aluno 1

Relativamente ao desenvolvimento, é escrito pouco do processo de resolução. Apenas o aluno 1 (Figura 27) apresenta uma descrição mais detalhada do seu processo.

Desenvolvimento:

Na primeira parte da actividade, a procura do vértice decorreu através do método gráfico. Inicialmente, determinamos o máximo e o mínimo, através das funções da máquina gráfica, tendo depois feito a posterior representação gráfica na folha. Contudo, podemos encontrar o vértice através do valor de *a*, determinando assim a concavidade do gráfico, concluindo se esta apresenta máximo ou mínimo, (conclusão feita na questão 2). Tal conjectura estava correcta após a realização do exercício 3. No exercício 6, foi possível determinar o vértice através da tabela de valores, tendo sido nesta parte do trabalho, onde recaíram algumas dificuldades na maneira de transmitir o raciocínio. A tabela já apresentada na folha, incluía uma coluna onde deveria ser colocado o vértice, seguidamente questionavam - nos em relação ao que podíamos observar nas tabelas. Nesta questão recaíram algumas dúvidas, tendo para isso recorrido ao auxílio do professor, tendo siso dadas algumas indicações de como obter a resposta. Foi então possível de verificar que abcissas cuja distância ao eixo de simetria é igual, têm a mesma ordenada. Na questão 8, foi outra das questões na qual recaiu algumas dificuldades. Após a discussão de ideias com o colega de grupo chegamos a uma conclusão, observamos a partir de que ponto o valor das ordenadas se repetia no sentido ascendente e descendente da tabela. O ponto a partir do qual se observa essa repetição é o vértice. Ainda na mesma actividade foram pedidas tabelas e a relação de *a* com o vértice, tendo sido concluída a mesma observação feita anteriormente na questão 2. Assim, a partir do método gráfico é possível determinar o vértice através de tabelas, usando as conclusões anteriormente retiradas, mas também da função calc (máximo/mínimo). Na segunda actividade, o método utilizado era o método algébrico, ou seja, a forma estandardizada. Inicialmente foi pedido para colocar na respectiva forma e seguidamente dividir −b/2a, tendo concluído que estes valores da questão 13 eram iguais ao valor de x da questão5, ou seja, eram iguais á abcissa do vértice anteriormente encontrado na questão 5. No exercício seguinte, a variável x foi substituída pelos valores de −b/2a, tendo concluído que correspondiam ás ordenadas encontradas no exercício 5. Nas questões 17 e 18, foi determinado um método algébrico a partir da forma estandardizada, que nos permite calcular o vértice de uma função quadrática $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right)$ Esse algoritmo estava correcto depois dos cálculos efectuados na questão 19, depois da verificação da resposta usando um dos métodos da actividade 1. A última actividade permitia determinar a forma do vértice, onde inicialmente já nos era fornecida a fórmula do vértice, também anteriormente ensinada. Na questão 21, estavam escritas quatro funções, onde era pedido para determinar os valores de *a*, *h* e *k*. Tendo concluído que estes valores, eram iguais aos valores de x e y, encontrados na questão 5. A conjectura feita, permitiu observar que *a*, correspondia á concavidade da função, *h*, correspondia á abcissa do vértice e *k*, correspondia á ordenada do vértice. Depois de determinado o método algébrico que permite encontrar o vértice de uma função quadrática, escrita na forma do vértice, concluímos que a conjectura estava correcta, depois da resposta ter sido verificada usando um doa métodos da actividade 1.

Figura 27 – Desenvolvimento do aluno 1

Em alguns relatórios são apresentadas as formas de determinar o vértice do gráfico de uma função quadrática: através da determinação de um máximo/mínimo, ou através da determinação de $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ quando a função quadrática está escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ou ainda através da determinação de (h, k) quando está escrita na forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

Aquando da realização da tarefa, todos os alunos consideraram uma novidade a determinação do vértice através de uma tabela, tendo muitos ficado surpreendidos por nunca terem pensado em tal situação. No entanto esta constatação apenas aparece no desenvolvimento dos alunos 1 (Figura 27), 7 e 20 (Figura 28) e da conclusão do aluno 4 (Figura 32).

Desenvolvimento:
Na actividade adquirimos algumas maneiras de conseguir as coordenadas do vértice da parábola através de processos gráficos, usando as potencialidades da máquina gráfica para máximos e mínimos analíticos, segundo a concavidade da função, usando máximos quando a>0 e usando mínimos quando a<0.
Obtivemos as coordenadas do vértice, por processos analíticos:
Na forma de a(x-h)^2+k, em que "h" é a abcissa do vértice, "k" a ordenada e "a" a concavidade da função.
Na forma $h = \frac{-b}{2a}$; $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Usamos estas fórmulas, fazendo uma analogia com a equação de 2º grau aquando da sua resolução, com "a", "b" e "c", tendo como fim, a determinação as coordenadas do vértice da parábola.
Para o mesmo fim ainda usamos outro método, relacionando o eixo de simetria da função, onde através da tabela do gráfico, obtido na máquina podíamos verificar uma simetria a partir do vértice da parábola, podendo assim encontrá-lo, não precisando de efectuar cálculos.
As coordenadas foram obtidas sem problemas, uma vez que este conteúdo já tinha sido dado, facilitando os resultados.

Figura 28 – Desenvolvimento dos alunos 7 e 20

No desenvolvimento dos alunos 8 e 10 (Figura 22) e 22 (Figura 23) verifica-se que estes não foram capazes de compreender a atividade desenvolvida. Apesar de, em grupo, terem respondido corretamente às questões colocadas, os seus relatórios não traduzem o trabalho realizado.

De acordo com o guião, alguns alunos concluem o desenvolvimento referindo as dificuldades encontradas e os erros cometidos, embora nem sempre de uma forma clara.

> Nas questões 17,18, 24 e 25 tive dúvidas e pedi ajuda ao professor.

Figura 29 – Excerto do desenvolvimento do aluno 4

Os alunos não esclarecem de que forma conseguiram superar as dificuldades ou de que forma os erros afetaram a atividade.

> A maior parte dos erros cometidos, ocorre ao introduzir mal os dados na maquina calculadora, ou mesmo erros associados à má janela de visualização.

Figura 30 – Excerto do desenvolvimento do aluno 12

A dificuldade em escrever é também apontada por alguns alunos.

> Tivemos dificuldade em ver qual era o máximo ou o mínimo (vertice) comparando os valores da tabela
> No final pensamos que chegamos à conclusão pretendida, porém passar para o papel "escrever" foi mais complicado.

Figura 31 – Excerto do desenvolvimento do aluno 13

Na conclusão, alguns alunos voltam a apresentar as formas de determinar o vértice de uma função quadrática (Figura 32).

Conclusão

Esta actividade permitiu-nos fazer um estudo mais profundo da função quadrática.

Uma conclusão nova que tirámos foi na questão 6, ao nível das tabelas, pois chegámos à conclusão que tendo o vértice da parábola, as ordenadas das abcissas superiores e anteriores da abcissa do vértice da parábola são iguais. É uma conclusão nova para nós. Concluímos também que tendo o vértice da parábola e as ordenadas das abcissas de vértices seguintes forem maiores que a ordenada do vértice da parábola, o vértice é mínimo; se as ordenadas das abcissas de vértices seguintes forem menores que a ordenada do vértice da parábola, o vértice é máximo.

Concluímos que existem várias formas de calcular o vértice:

- Utilizando a máquina calculadora gráfica;
- Utilizando a expressão $-b/2a$; $-\Delta/4^{a}$, se a função estiver na forma estandardizada ou (h, k), se a função estiver na forma de vértice;
- Utilizando a expressão $-b/2a$ e depois substituir esse valor na expressão da função, obtendo assim a ordenada.

Acho que todo o grupo se esforçou nas tarefas realizadas em conjunto. O que acho que foi mal feito foi a divisão de tarefas, pois demorámos muito tempo a resolver as questões.

Talvez devíamo-nos ter esforçado mais nas dificuldades e não logo pedir ajuda ao professor. Esta actividade permitiu-nos uma maior familiaridade com a função quadrática.

Figura 32 – Conclusão do aluno 4

Em geral, as conclusões apresentadas são pouco específicas, referindo que há várias formas de determinar o vértice de uma função quadrática sem grande aprofundamento, como se constata no relatório dos alunos 8 e 10 (Figura 22). Mais uma vez se verifica, através das suas conclusões (Figura 23), que o aluno 22 não compreendeu a tarefa.

Alguns alunos fazem também uma apreciação autocrítica do trabalho realizado (Figuras 32 e 33).

várias observações chegar a interessantes conclusões. A dificuldade implementada era acessível, tendo para isso participado de uma forma activa na resolução dos exercícios. A máquina gráfica é um precioso instrumento na resolução deste tipo de exercícios, onde aliada ao método algébrico permite definir o tema funções como uma unidade versátil. Contudo, por vezes, aquilo em que senti mais dificuldade foi transmitir para a folha o meu raciocínio, ou seja, a comunicação matemática, por isso penso que actividades como estas são um objecto estimulante no desenvolvimento desta capacidade.

Figura 33 – Excerto da conclusão do aluno 1

Mais uma vez se salienta o facto de os alunos não terem recorrido a diferentes representações no seu relatório, apesar de, à exceção de um aluno, considerarem que um relatório deve ter gráficos ou tabelas ou expressões algébricas pois tal ajuda na explicação.

Um relatório deve ter gráficos e/ ou tabelas e/ ou expressões algébricas e/ou linguagem escrita? Sim X Não ___

Porquê?

Para provar o que fizemos se não conseguirmos explicar a nível escrito.

Figura 34 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Vários foram os alunos que afirmaram, no questionário, não terem gostado de realizar esta tarefa por considerarem as perguntas muito semelhantes.

De entre as várias tarefas propostas na aula de matemática, qual a que menos gostou de realizar? Explique porquê?

O vertice da parábola, pois deu bastante trabalho a preencher a folha, pois as perguntas eram bastantes iguais, nalguns casos.

Figura 35 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Na sessão seguinte foi entregue a cada um dos alunos um pequeno comentário individual ao seu relatório.

4.3. Aeromodelismo

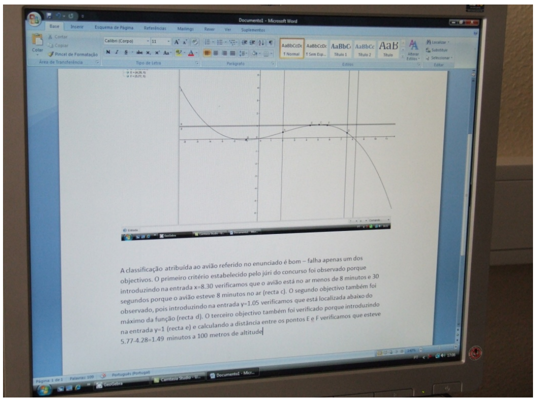
4.3.1. Apresentação e implementação da tarefa

A terceira tarefa (Anexo 3) consistia na análise de uma situação real modelada por uma função de terceiro grau.

Na questão que foi alvo de análise nesta investigação, pretendia-se que os alunos investigassem a situação descrita e elaborassem uma composição matemática. Na resolução da tarefa, deveriam recorrer a um *software* de geometria dinâmica – *Geogebra*. De salientar que os alunos já tinham tido contacto com este *software*, mas apenas como espectadores. Usualmente, o professor da turma utiliza este *software* para apresentar alguns conteúdos matemáticos. No entanto, os alunos nunca tinham tido oportunidade de realizar tarefas recorrendo a este *software*.

A tarefa foi entregue aos alunos, sem grandes esclarecimentos, uma vez que estes já estavam familiarizados com este tipo de atividade. O professor apenas alertou, mais uma vez, para a importância da composição incluir toda a informação pertinente. Os alunos questionaram o docente sobre a inclusão dos gráficos na composição, perguntando se poderiam incluir o gráfico obtido no computador ou se teriam de fazer um esboço do mesmo. Dado que o professor deixou à escolha dos alunos a forma de apresentação da composição, quase todos os alunos optaram por inserir uma imagem do gráfico obtido como forma de justificar das suas conclusões, como se pode verificar na Fotografia 4.

Os alunos trabalharam em grupos de dois ou três, dado que a sala não dispunha de computadores para todos. Apesar de ter sido solicitada uma composição individual, em alguns grupos, os seus elementos apresentaram a mesma feita pelo grupo.



Fotografia 4 – Elaboração de uma composição, de um grupo de trabalho.

4.3.2. A atividade dos alunos

Após terem lido o enunciado da tarefa, os alunos rapidamente procuraram introduzir no *Geogebra* os dados da situação em estudo. Várias foram as dúvidas que surgiram, relacionadas com o manuseamento do *software*. A minha ajuda e a do professor da turma foram frequentemente solicitadas. Foi necessário explicar, por exemplo, como introduzir a equação que modelava a situação, como determinar a intersecção entre dois objetos ou como determinar os extremos de uma função. Superadas as dificuldades relativas ao *software*, os alunos mostraram ter compreendido os dados e construíram um gráfico com todas as condições apresentadas, começando a partir daí a tirar as suas conclusões. No final da aula todos os alunos deixaram no computador uma pasta contendo o ficheiro do *Geogebra* com o gráfico elaborado e a composição, elaborada em Word. O aluno 1 foi uma exceção pois entregou a sua composição em papel.

Após análise das composições verifica-se que a maioria se inicia com a indicação da classificação obtida pelo avião em questão. Tal pode levar a pensar-se que apesar de, aquando da primeira composição, ter alertado para o facto de uma composição não ser uma resposta, mas sim um texto explicativo de uma determinada situação, os alunos continuam a ver a escrita matemática como uma resposta concisa a uma determinada questão. Dado que o enunciado da tarefa solicitava a explicitação de cada um dos objetivos que o avião deveria cumprir, após a indicação da classificação obtida por este, os alunos passaram à justificação desta classificação apresentando as suas conclusões para cada objetivo. Acrescentaram à sua produção uma imagem do gráfico obtido como forma de justificar as suas afirmações. As figuras 36 e 37 são exemplos ilustrativos da maioria das composições elaboradas pelos alunos.

O avião foi classificado como Bom porque, dos quatro objectivos estabelecidos pelo júri, só um deles não conseguiu atingir
Que foi:
- antes meio minuto de aterrar, estar a uma altitude superior a metade da altitude máxima atingida.
Como podemos observar no gráfico ele só conseguiu atingir 36 metros, logo, se a altitude máxima foi de 105 metros então a metade da altitude maxima será de 52.5.
Concluimos que não conseguir atingir o 4º objectivo dado pelo júri.
Dos restantes objectivos que ele conseguiu atingir, no 1º objectivo, podemos concluir que esteve no ar 8 minutos; no 2º objectivo através no máximo concluimos que atingiu 105 metros de altitude; no 3º objectivo concluimos que esteve no ar 1.49 minutos, a uma altitude superior a 100 metros.

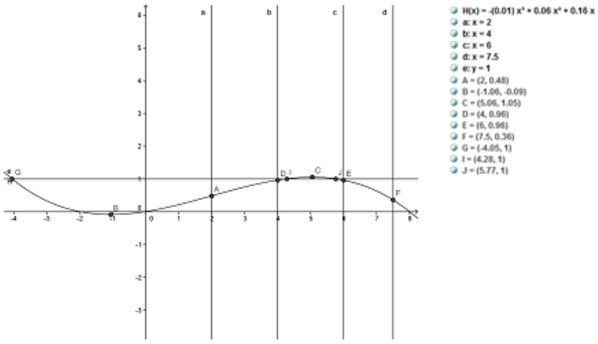


Figura 36 – Composição dos alunos 10 e 25

Verifica-se em todas as produções uma correta interpretação da situação e uma breve explicitação dos raciocínios/ conclusões, suportada na apresentação do gráfico obtido no *Geogebra*.

Aeromodelismo

A classificação atribuída ao avião referido no enunciado e de Bom pois apenas falhou num dos objectivos que foi no ultimo parâmetro, que consista em meio minuto antes de aterrar, estar a uma altitude superior a metade da altitude da máxima atingida. A altitude máxima atingida foi de 105 metros, logo metade dessa altitude era de 52,5 metros. Meio minuto antes de aterrar, ou seja aos 7,5 minutos o avião referido no enunciado estava a uma altura de 36 metros. Logo 36 metro é inferior a 52,5 metros. Como um dos critérios era estar a uma altura superior aos 52,5 metros, o avião supre referido falhou nesse objectivo.

No primeiro parâmetro foi concretizado, pois o avião esteve no ar apenas 8 minutos, e como o primeiro objectivo era estar menos de 8 minutos e 30 segundos no ar o avião sem cima referido cumpriu o objectivo.

O segundo parâmetro foi atingido pois consistia em que o avião atingisse pelo menos 105 metros, e a altura atingida pelo avião foi de 105 metros no minuto 5,06.

O terceiro parâmetro consistia em estar pelo menos durante um minuto consecutivo a pelo menos 100 metros de altitude o que aconteceu no minuto 4,28 ao minuto 5,77.

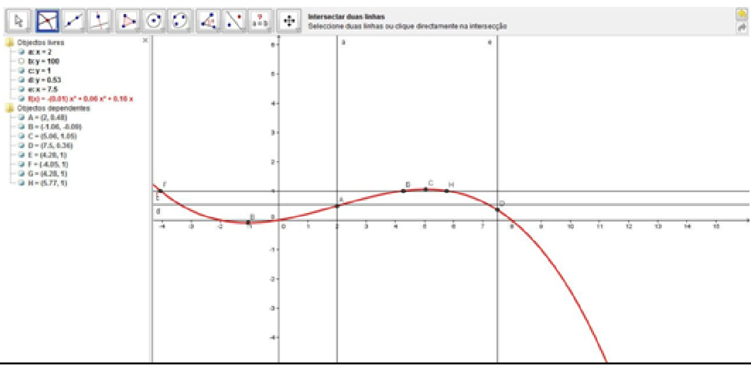


Figura 37 – Composição dos alunos 5, 14 e 23

Apenas o aluno 1 (Figura 38) construiu a sua própria representação gráfica, uma vez que fez a composição em papel. Este aluno, assim como os alunos 8 e 15 (Figura 39), apresentaram uma representação gráfica para justificar cada um dos objetivos a cumprir pelo avião.

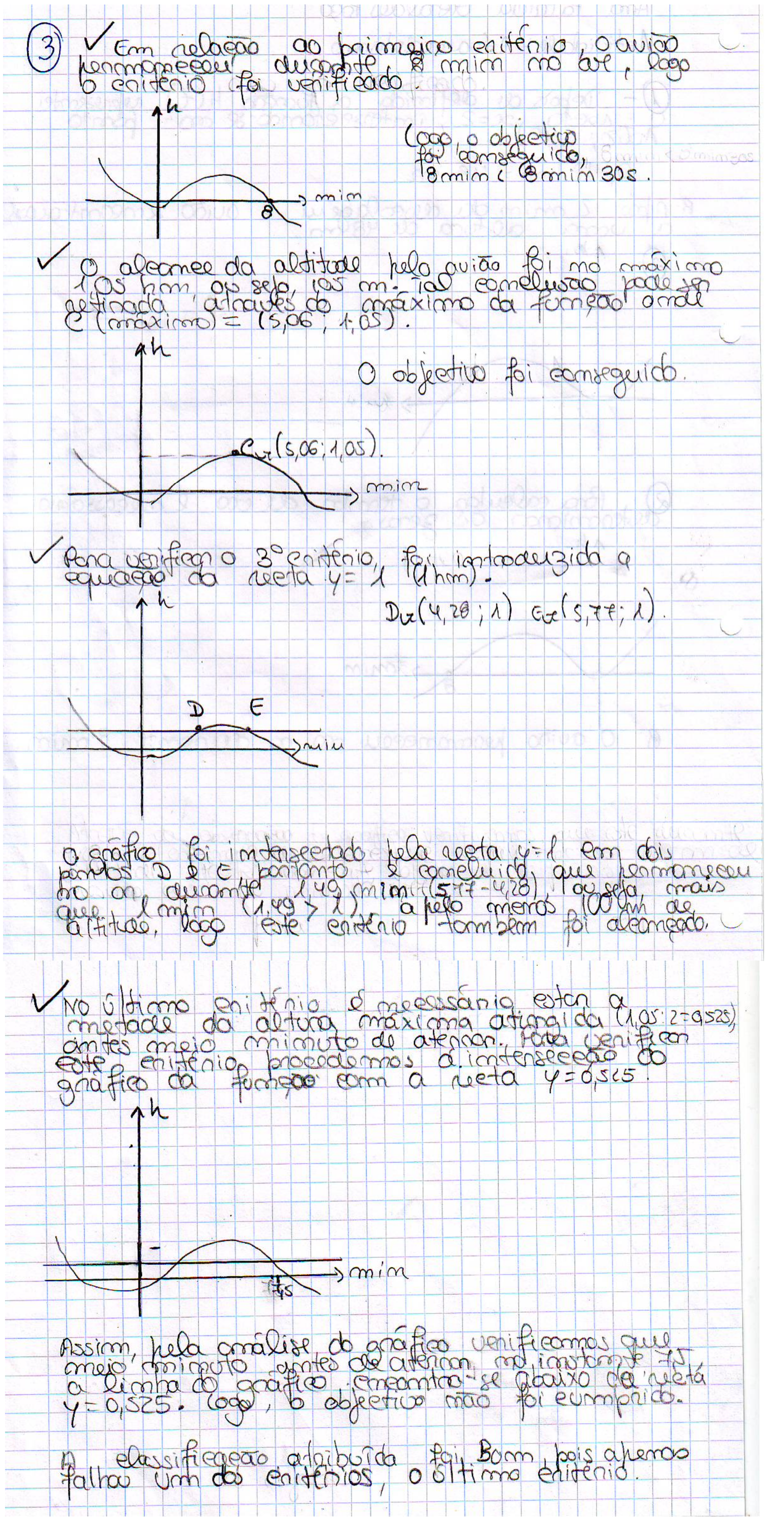
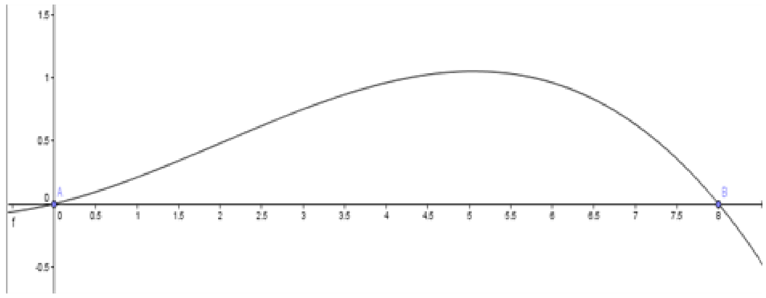


Figura 38 – Composição do aluno 1

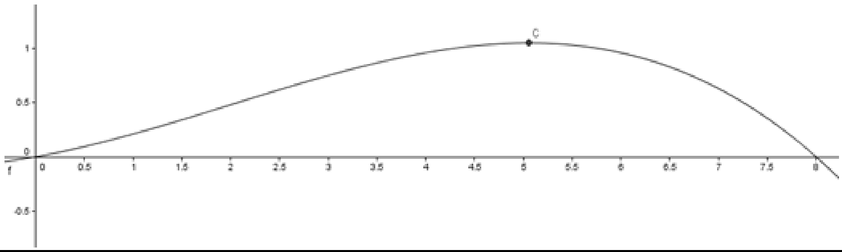
Constata-se, mais uma vez, a ideia expressa nos questionários de que as representações gráficas ajudam a explicar o que não conseguem escrever.

Segundo os critérios de avaliação, daria a este concorrente um Bom, pois este só foi penalizado num dos critérios.

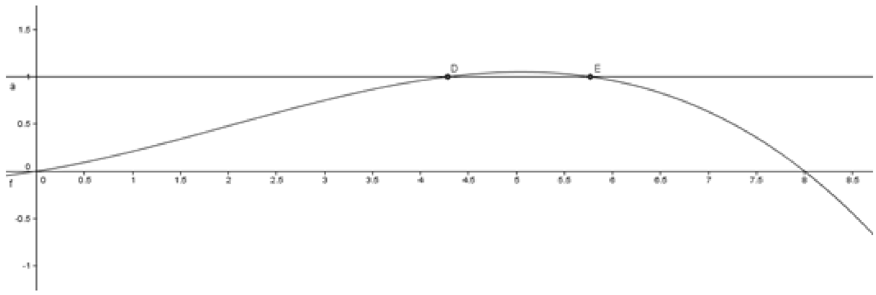
- No 1º objectivo, ao calcular os zeros (Pontos A e B) podemos chegar à conclusão que o avião esteve no ar durante 8 minutos, logo este objectivo foi aprovado.



- No 2º objectivo, ao calcular o máximo da função f (Ponto C), podemos chegar à conclusão que o avião atingiu a altura mínima exigida, logo este objectivo foi aprovado.



-No 3º objectivo, ao representar uma recta y=1 no gráfico, e calcular a intersecção da recta na parábola (Pontos D e E) podemos concluir que o intervalo de tempo em que este esteve no ar a uma altura de pelo menos a 100 metros foi de 1,49 minutos.



-No 4º objectivo, ao representar a intersecção de uma recta x=7,5 com a parábola, podemos concluir que a altura (Ponto F) correspondente não é metade da altura máxima atingida.

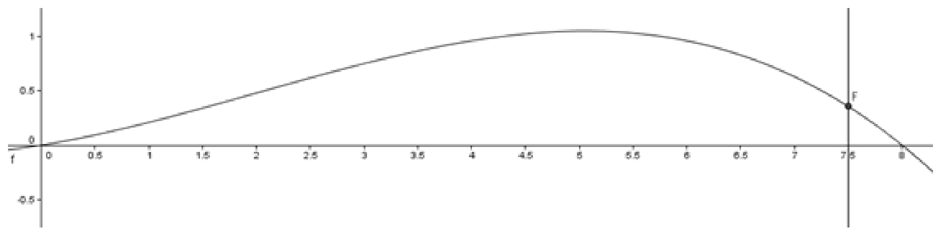
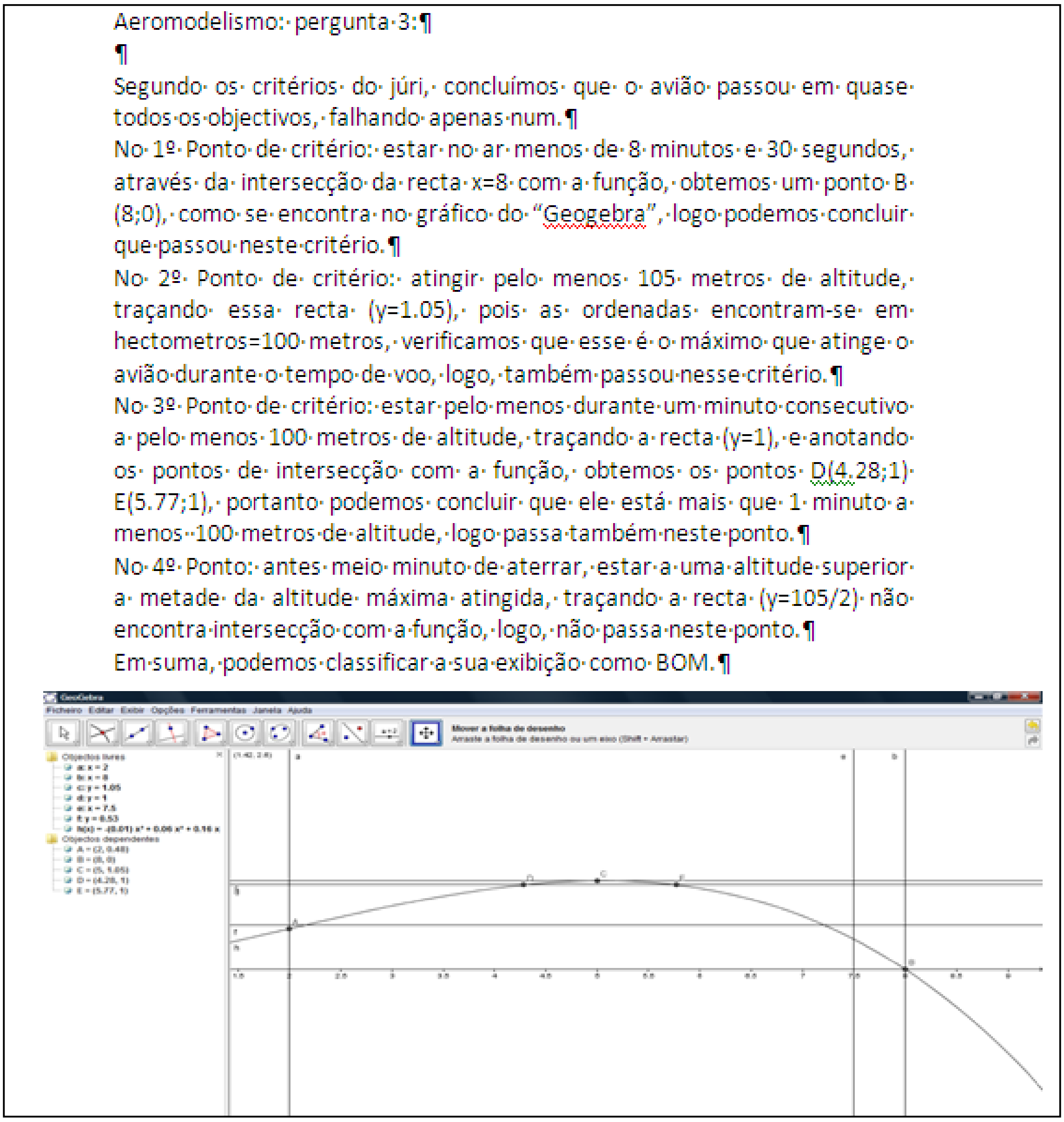


Figura 39 – Composição dos alunos 8 e 15

Grande parte das produções escritas limita-se a comunicar se cada um dos objetivos foi ou não alcançado pelo avião e, consequentemente, qual a classificação atribuída. Apenas alguns alunos procuraram escrever mais detalhadamente como chegaram às suas conclusões (Figura 40).



Aeromodelismo: pergunta 3:

Segundo os critérios do júri, concluímos que o avião passou em quase todos os objectivos, falhando apenas num.

No 1º Ponto de critério: estar no ar menos de 8 minutos e 30 segundos, através da intersecção da recta x=8 com a função, obtemos um ponto B (8;0), como se encontra no gráfico do "Geogebra", logo podemos concluir que passou neste critério.

No 2º Ponto de critério: atingir pelo menos 105 metros de altitude, traçando essa recta (y=1.05), pois as ordenadas encontram-se em hectometros=100 metros, verificamos que esse é o máximo que atinge o avião durante o tempo de voo, logo, também passou nesse critério.

No 3º Ponto de critério: estar pelo menos durante um minuto consecutivo a pelo menos 100 metros de altitude, traçando a recta (y=1), e anotando os pontos de intersecção com a função, obtemos os pontos D(4.28;1) E(5.77;1), portanto podemos concluir que ele está mais que 1 minuto a menos 100 metros de altitude, logo passa também neste ponto.

No 4º Ponto: antes meio minuto de aterrar, estar a uma altitude superior a metade da altitude máxima atingida, traçando a recta (y=105/2) não encontra intersecção com a função, logo, não passa neste ponto.

Em suma, podemos classificar a sua exibição como BOM.

Figura 40 – Composição do aluno 20

Apenas os alunos 4, 9, 11 e 17 não incluíram na sua composição uma representação gráfica. Estes consideraram não ser necessário tais representações pois entregaram, tal como referido anteriormente, numa pasta o ficheiro produzido no *Geogebra*. Destes alunos, somente o aluno 17 não incluiu representações gráficas também na primeira composição.

O facto de os alunos serem sucintos nas suas produções também se deve à ideia unânime, expressa nos questionários, de que em Matemática se deve escrever pouco. Segundo eles, o importante nesta disciplina é colocar os cálculos e as conclusões, assim como gráficos ou tabelas que expliquem os raciocínios.

A Matemática é uma disciplina onde se deve escrever muito ou pouco? Porquê?

Pouco, pois deve-se apenas colocar os calculos e as conclusões.

Figura 41 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Para sete alunos, esta tarefa foi a que mais gostaram de realizar pois usaram pela primeira vez o *Geogebra*.

Na ótica dos alunos participantes neste estudo, este *software* é semelhante a uma calculadora gráfica.

Considera importante o recurso ao computador na aprendizagem da matemática? Em que situações concretas a sua utilização o ajudou na realização das tarefas "Aeromodelismo" e "Pontos notáveis das funções polinomiais"?

Em vez da utilização da máquina utiliza-mos o computador, não houve ~~mod~~ diferença alguma

Figura 42 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Tal perspetiva resulta de considerarem como potencialidades deste programa a visualização de gráficos e pontos ou analisar o comportamento de funções.

Considera importante o recurso ao computador na aprendizagem da matemática? Em que situações concretas a sua utilização o ajudou na realização das tarefas "Aeromodelismo" e "Pontos notáveis das funções polinomiais"?

Sim. Na visualização de gráficos e na determinação dos pontos dos zeros.

Figura 43 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

No entanto, conforme se poderá verificar mais à frente, os alunos encararam o *Geogebra* como uma mais-valia na exploração da tarefa *Um estudo sobre pontos notáveis das funções polinomiais.*

4.4. Um estudo sobre pontos notáveis das funções polinomiais

4.4.1. Apresentação e implementação da tarefa

Na quarta tarefa (Anexo 4) os alunos deveriam investigar a existência de zeros e extremos relativos de uma família de funções polinomiais. O *software Geogebra* seria o recurso que estes deveriam utilizar no seu estudo.

Dada a natureza da tarefa, o produto final solicitado foi um relatório. Tal como requerido aquando da elaboração do primeiro relatório, a introdução e o desenvolvimento poderiam ser feitos em grupo, mas a conclusão deveria ser individual. Apesar de grande parte dos alunos não ter elaborado o primeiro relatório, não foram colocadas questões sobre a realização deste.

Os alunos dispuseram-se na sala de aula da mesma forma da tarefa anterior. Pretenderam manter os mesmos grupos de trabalho.

Após distribuição da tarefa, a primeira reação dos alunos foi de desorientação, sem saber muito bem por onde começar. Segundo eles "não havia indicações do que era para fazer" [Notas de campo].

Fotografia 5 – Sala de aula onde decorreu a investigação.

4.4.2. A atividade dos alunos

Após ter sido dado algum tempo para os grupos discutirem entre si a estratégia de trabalho, e visto que nenhum grupo estava a conseguir iniciar a sua atividade, foi proporcionada uma ajuda geral. Uma vez que deveriam investigar a existência de zeros e extremos relativos da família de funções polinomiais apresentada e como o grau das funções polinomiais variava entre um e quatro foi-lhes sugerido que começassem por analisar o caso mais simples, ou seja, a função de grau um.

Com esta sugestão os alunos foram capazes de iniciar o seu trabalho e começar a tirar algumas conclusões. Mas mais uma vez os vários grupos se depararam com problemas quando analisavam os vários casos das funções de grau três e quatro. A nossa sugestão foi no sentido de sistematizarem os diversos casos possíveis. Assim, aconselhamo-los a introduzirem no *Geogebra* uma expressão geral de uma função polinomial e através da construção de seletores analisarem os diversos casos. Com mais este conselho os alunos conseguiram prosseguir o seu trabalho. No entanto, no decorrer da exploração várias foram as dúvidas surgidas quanto à análise de todas as situações possíveis. Tanto eu como o professor da turma procurámos estimular a reflexão, não dando respostas concretas. Por vezes, para evitar a desmotivação face às dificuldades, foi necessário avançar com pistas mais diretas para prosseguirem a investigação.

A exploração da tarefa demorou os noventa minutos, sendo poucos os grupos que iniciaram o seu relatório durante a aula. Tal como aquando do primeiro relatório, foi dada uma semana para terminar a elaboração dos mesmos.

Apenas oito alunos entregaram o seu relatório, todos eles tinham realizado o primeiro relatório.

Após análise das produções escritas, verifica-se em geral uma maior preocupação em descrever a atividade realizada, complementada com representações gráficas. Apenas um relatório não contém este tipo de representações.

Na introdução dos vários relatórios é explicado qual o objetivo da tarefa em questão, assim como o material utilizado. Como o guião de elaboração de um relatório (Anexo 7) não sugeria explicitamente mais informação, os alunos não foram além destes dados (Figuras 44 e 45).

Introdução: Com esta actividade pretendemos fazer uma conjectura sobre o grau da função, o estudo de zeros e o número de extremos relativos.
Com a ajuda do programa Geogebra, irei tentar mostrar essas conjecturas com um conjunto de aplicações do programa.
Nesta actividade usei o computador.

Figura 44 – Introdução do aluno 20

Não parece ter havido dúvidas quanto ao objetivo, uma vez que estava explícito no enunciado.

Introdução

O objectivo da actividade "Um estudo os pontos notáveis das funções polinomiais" era aumentar os nossos conhecimentos há cerca das funções polinomiais, nomeadamente em relação aos zeros e extremos e também verificar como nós trabalhávamos com o software matemático "Geogebra". Durante a actividade utilizamos o protocolo, borracha, lápis e o "Geogebra". Esta foi facilitada devido ao software pois é uma forma muito rápida de tirar conclusões e as nossas dúvidas, porque o assunto desta actividade já era nosso conhecido e também porque só tínhamos de estudar 4 tipos de funções polinomiais, pois o *n* variava entre 1 e 4, com *n* a pertencer ao conjunto dos números naturais.

Figura 45 – Introdução do aluno 4

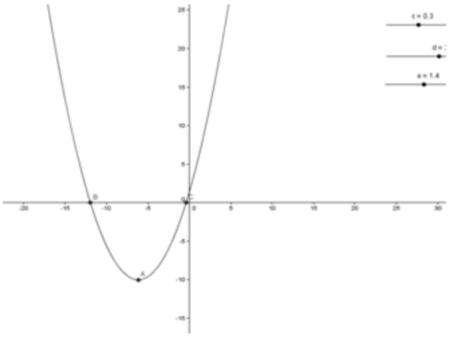
No que concerne ao desenvolvimento, em geral os alunos procuraram mostrar o trabalho desenvolvido. Houve uma preocupação em apresentar os exemplos analisados através das respetivas representações gráficas (Figuras 46, 47, 48 e 49).

Função quadrática:

À medida que aumentamos o valor do termo independente, a função "sobe" na mesma proporção no eixo do y.

Se o termo de 2ºgrau tiver valor positivo, a função tem um mínimo absoluto, também relativo; pode ter 1 zero se "e" = 0 e "d" = 0, e 2 zeros se d ≠ 0 e "e" = 0, e Vice-Versa.

Se o termo de 2ºgrau tiver valor negativo, a função tem um máximo absoluto.



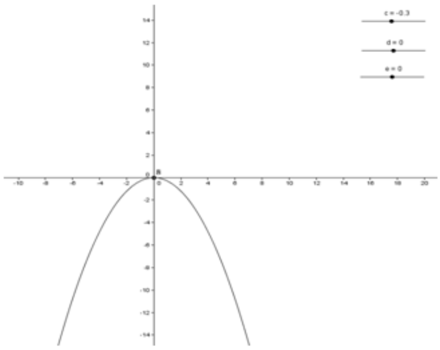
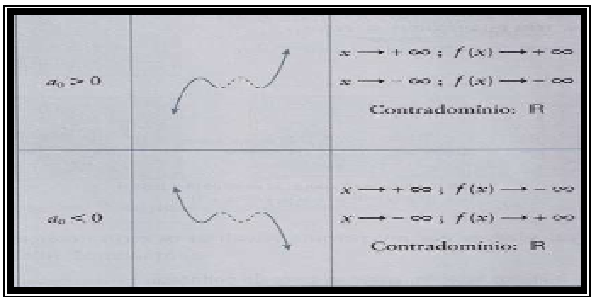


Figura 46 – Excerto do desenvolvimento do aluno 12

Os alunos 1 e 13 complementaram o seu desenvolvimento com informação obtida num manual escolar.

Enquanto era efectuada a representação gráfica da função polinomial de grau 3, percebemos que apresentava um grau mais elevado de complexidade em relação às funções anteriormente estudadas, sobretudo pela forma que o gráfico apresentava. Feita a análise, foi possível verificar que uma função polinomial de grau 3 pode no máximo ter três zeros. Contudo, pela variação dos valores verificamos sempre, que estas têm pelo menos um zero, tomando valores que vão de -∞ a + ∞. Os gráficos de funções cúbicas não têm nenhum eixo de simetria, fazendo variações nos gráficos tal observação foi sempre constante. Pode ou não apresentar extremos relativos, tal facto depende do coeficiente de x.

Assim:



$a_0 > 0$		$x \longrightarrow +\infty$; $f(x) \longrightarrow +\infty$ $x \longrightarrow -\infty$; $f(x) \longrightarrow -\infty$ Contradomínio: $\mathbb{R}$
$a_0 < 0$		$x \longrightarrow +\infty$; $f(x) \longrightarrow -\infty$ $x \longrightarrow -\infty$; $f(x) \longrightarrow +\infty$ Contradomínio: $\mathbb{R}$

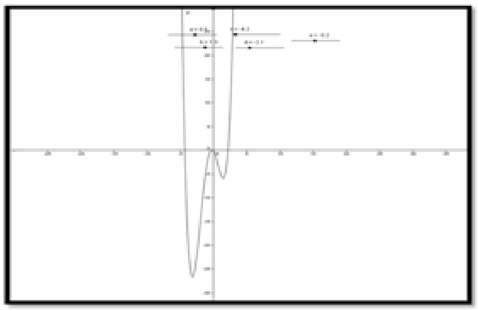
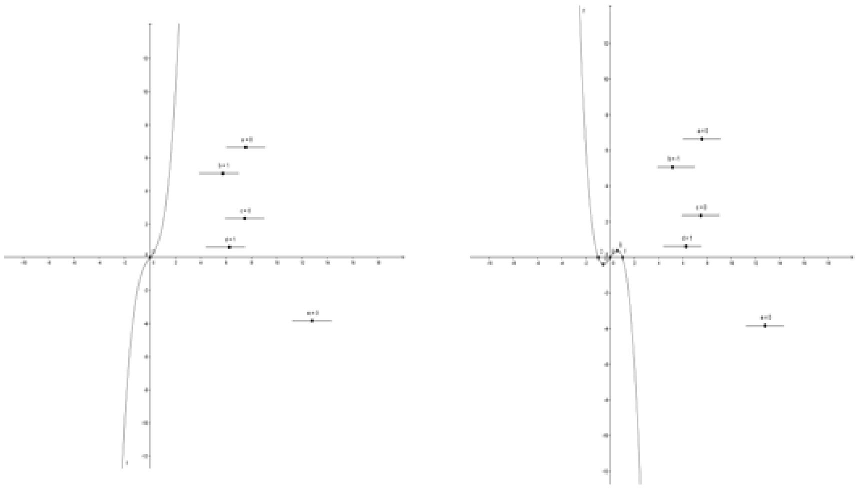


Fig.4 – Representação gráfica de uma função polinomial de grau 3.

Figura 47 – Excerto do desenvolvimento dos alunos 1 e 13

Apenas o aluno 22 apresenta os exemplos analisados recorrendo a representações algébricas e gráficas, conforme se verifica na figura seguinte.

Função 3ºgrau



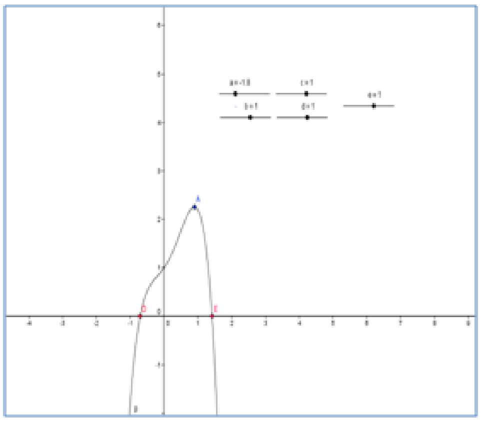
Considerando a função y = x^3 + x (terceiro gráfico) verifiquei que tem apenas um zero no ponto de coordenadas (0,0) e não tem máximos nem mínimos.

Considerando a função y = -x^3 + x (quarto gráfico) verifiquei que tem 3 zeros nos pontos de coordenadas (-1;0), (0;0) e (1;0) e tem um máximo relativo no ponto de coordenadas (0.58; 0.38) e um mínimo relativo no ponto (-0.58; -0.38).

Figura 48 – Excerto do desenvolvimento do aluno 22

A exploração da tarefa esteve longe de ser exaustiva. Constata-se que, nas funções de grau três e quatro, os alunos tiveram muitas dificuldades em analisar todos os casos possíveis e em retirar as devidas conclusões. Devido a tal facto, algumas delas são até mesmo erradas (Figura 49).

O aluno 12 apenas apresenta o estudo das funções de grau um e dois.



Função de Grau 4:
Quando a variável "a" é inferior a zero, obtemos uma função com apenas 1 extremo relativo e dois zeros.

Figura 49 – Excerto do desenvolvimento do aluno 20

Contrariamente ao que tinham feito no primeiro relatório, os alunos não referiram, no desenvolvimento, dificuldades encontradas nem erros eventualmente cometidos. Apenas os alunos 4 e 7 referiram ter recorrido à ajuda dos professores, mas não foram explícitos quanto às suas dúvidas.

Passando a mexer também nos valores de b, obtivemos a função cúbica. Uma função um pouco mais complexa, por isso tivemos muita ajuda dos professores. Verificámos que essa função tem, no máximo, 2 extremos e 3 zeros. Pensando nós que essa função não podia ter 2 zeros, mas existe pelo menos um caso que pode e foi o professor que nos ajudou nesse aspecto.

Figura 50 – Excerto do desenvolvimento dos alunos 4 e 7

O aluno 4, na sua conclusão (Figura 55), volta a reforçar a ideia de que sem a ajuda dos professores não teria conseguido chegar às conclusões corretamente. Também o aluno 1 apresenta na sua conclusão a sua maior dificuldade, o uso do *software*, mas esta acabou igualmente por ser a razão pela qual o aluno considerou a atividade interessante.

mais interessantes e diversificadas. As principais dúvidas recaíram na forma de manuseamento do software, nomeadamente na descoberta das suas opções e representações gráficas, sendo esta uma das razões porque considero esta actividade interessante, pois desenvolve para além do raciocínio matemático, o ponto de vista tecnológico. Assim, as nossas conclusões e

Figura 51 – Excerto da conclusão do aluno 1

Analisando as conclusões, verifica-se que estas são muito vagas, sem referir o que é realmente importante nesta tarefa (Figuras 52 e 53). O relatório do aluno 12 nem sequer apresenta conclusões.

Conclusão

Com esta actividade realizada pude concluir que o grau da função vai influenciar o número de zeros, pois o número do grau vai corresponder ao máximo número de zeros, também influenciando os extremos.

Figura 52 – Conclusão do aluno 22

Durante a exploração da tarefa perceberam que vários fatores influenciam o número de zeros ou extremos, mas não foram capazes de sistematizar as observações efetuadas.

Conclusão:

Após a análise dos gráficos no Geogebra, tendo em conta todas as variáveis introduzidas, chegamos á conclusão que numa função há muito parâmetros a analisar, pois uma pequena alteração de variáveis altera a composição da função, tanto a nível de zeros como de extremos relativos. Esta actividade foi realizada como foi dito na introdução, com a ajuda do programa Geogebra e do Paint no tratamento das imagens dos gráficos, fazendo uso do "Selector", que mantinha uma variação de [-5;5], ou seja que os resultados discutidos, foram apenas tidos em conta neste intervalo, pois se alargássemos o intervalo, certamente iríamos ter mais mudanças na composição da função.

Figura 53 – Conclusão do aluno 20

As conclusões dos alunos 1 (Figura 54) e 4 (Figura 55) já contêm mais informação pertinente, sem no entanto abrangerem todas as constatações apresentadas no desenvolvimento.

Conclusão:

Concluo desta actividade, que o grau de uma função polinomial é determinante para os diferentes aspectos a ter em consideração na análise deste tipo de funções. O *n* indica o número máximo de zeros que uma função polinomial pode ter. Contudo, não quer dizer necessariamente que apresenta tantos zeros como o grau que apresenta. Ocorre apenas a excepção na função polinomial de grau 1, que sendo n=1, apresenta apenas um zero. Assim:

- ✓ Funções de grau 2, podem ter um zero, nenhum, ou dois zeros.
- ✓ Funções de grau 3, tem sempre um zero, podendo obter no máximo 3 zeros.
- ✓ Funções de grau 4, podem não ter zeros apresentando no máximo 4 zeros.

Nem todas as funções apresentam extremos relativos, como é o caso da função polinomial de grau 1, pois é estritamente crescente no seu domínio. Contudo funções polinomiais de grau 2, 3 e 4, apresentam extremos relativos, funções de grau 2, porque têm sempre um mínimo ou um máximo, e também de grau 3 e 4 devido ao seu comportamento em relação á paridade. Contudo, as funções de grau 3 e grau 4 apresentam um maior grau de complexidade em relação a este parâmetro, pois apresentam diferentes tendências em relação á paridade de n (apresentadas nos quadros anteriores). Também outros pontos notáveis como o domínio, contradomínio, a forma, entre outras, são distintas, o que nos permite retirar conclusões ainda mais interessantes e diversificadas. As principais dúvidas recaíram na forma de manuseamento

Figura 54 – Excerto da conclusão do aluno 1

Na conclusão do aluno 4 há mesmo um erro numa das constatações.

Conclusão (individual)

Com a utilização do software "Geogebra", as conclusões foram retiradas de uma forma rápida e fácil.
Até à função quadrática, as conclusões retiradas foram deduzidas até antes da verificação com o software, pois estamos muito familiarizados com esse tipo de funções. A partir da função polinomial de grau 3 e 4, sendo funções mais complexas, a tarefa complicou-se, por isso os professores ajudaram-nos bastante na retirada dessas mesmas conclusões.
As conclusões mais relevantes tiradas foram: em relação à função cúbica, eu pensava que tinha no máximo 3 zeros e que passava de 3 para 1, mas o professor mostro-nos que havia pelo menos uma que tem 2 zeros; em relação à função polinomial de grau 4 verifiquei, também com a ajuda do professor, que tem no máximo 3 extremos, mas nunca tem dois, passa de 3 para 1, e em relação aos zeros, tem no máximo 4, mas nunca tem 3, passa de 4 para 2, 1 ou 0.

Figura 55 – Excerto da conclusão do aluno 4

Apenas o aluno 4 inclui na sua conclusão uma apreciação autocrítica do trabalho realizado.

Se não fosse a ajuda dos professores acho que não tínhamos conseguido tirado as conclusões correctamente, pois eles deram-nos a forma fácil de as tirar. Talvez se nos tivéssemos esforçado mais não precisaríamos de ter chamado tantas vezes os professores e talvez conseguíssemos chegar às conclusões sozinhos, mas isso não aconteceu.
Acho que o objectivo da actividade concretizou-se, pois conseguimos tirar todas as conclusões pretendidas.

Figura 56 – Excerto da conclusão do aluno 4

Esta tarefa foi apontada, por vários alunos, como sendo a de que menos gostaram de realizar por a considerarem difícil. Um aluno apontou também a dificuldade em manipular o *Geogebra*. Apenas um aluno afirmou que esta foi a sua tarefa preferida (Figura 57).

De entre as várias tarefas propostas na aula de matemática, qual a que mais gostou de realizar? Explique porquê?
A função polinomial, pois deu para verificar a alternância de zeros e extremos relativos, quando se mudam as variáveis, podendo realizar assim um estudo, mais ou menos rigoroso, das funções.

Figura 57 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Alguns alunos referem no seu relatório que o *Geogebra* foi um recurso muito útil na exploração desta atividade (Figuras 58 e 59).

Com a utilização do software "Geogebra", as conclusões foram retiradas de uma forma rápida e fácil.

Figura 58 – Excerto da conclusão do aluno 4

O facto de conseguirem facilmente, através de seletores, alterar os vários parâmetros da função polinomial e visualizarem as alterações provocadas foi considerada uma mais-valia deste *software*.

> do raciocínio matemático, o ponto de vista tecnológico. Assim, as nossas conclusões e observações podem ser conseguidas mais facilmente através da ajuda do software Geogebra, que permite uma percepção mais nítida do comportamento das funções polinomiais. Considero, que esta junção entre a matemática e a parte tecnológica seja útil para retirar estas conclusões, conseguidas nesta actividade sobre o estudo de pontos notáveis das funções polinomiais. É assim, estimulante esta actividade, que nos permite conhecer um lado mais abrangente da tecnologia associada á matemática.

Figura 59 – Excerto da conclusão do aluno 1

4.5. Praga de escaravelhos

4.5.1. Apresentação e implementação da tarefa

Na última tarefa (Anexo 5) era pedido aos alunos que, numa composição, descrevessem a evolução de uma praga de insetos, modelada por uma função polinomial de terceiro grau.

Nesta tarefa não foi indicado aos alunos qual o recurso tecnológico que deveriam utilizar. Pretendi que fossem eles a decidir se iriam usar a calculadora gráfica ou o *Geogebra* para a sua exploração. Para que tivessem ao seu dispor todos os recursos, esta aula decorreu na sala de computadores.

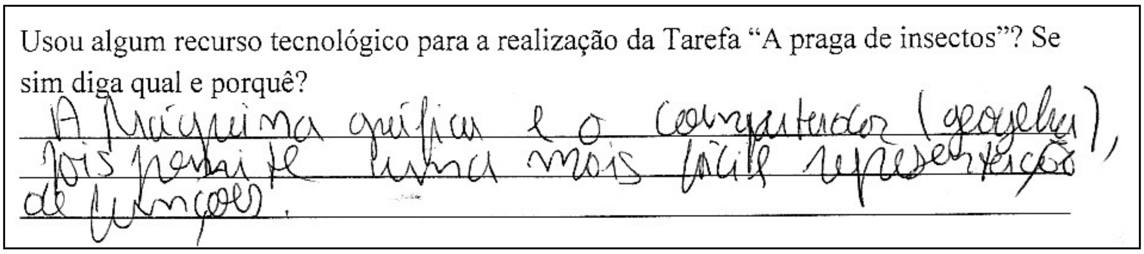
Como produto final, optei por uma composição dado que grande parte da turma não entregou os relatórios anteriores.

Os alunos quando entraram na sala dirigiram-se aos lugares que tinham ocupado nas aulas anteriores. Consideraram que iriam usar o computador e pretenderam trabalhar com os mesmos colegas. Quando a tarefa foi entregue aos alunos, após lerem o seu enunciado, questionaram-nos logo se "era para usar o computador" [Notas de campo]. Dissemos-lhes que ficava ao critério deles decidir qual o recurso a utilizar.

Alguns alunos decidiram levantar-se e ocupar mesas que não possuíam computadores.

4.5.2. A atividade dos alunos

O início da atividade deu-se sem grandes dificuldades. Os alunos não pareceram ter dúvidas quanto ao recurso que iriam utilizar. A maioria optou por usar a calculadora gráfica. Apenas seis alunos trabalharam com o *Geogebra*, tendo um deles afirmado, no inquérito, que usou também a calculadora.

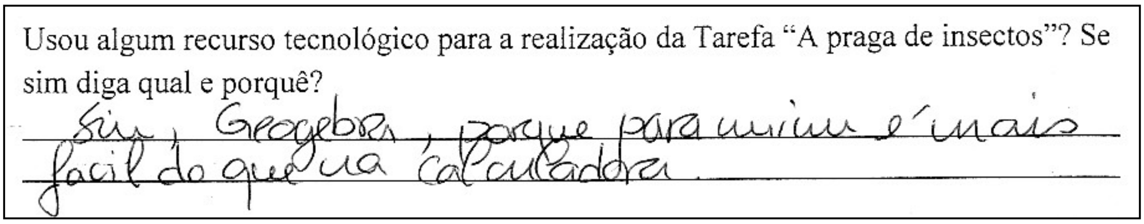


Usou algum recurso tecnológico para a realização da Tarefa "A praga de insectos"? Se sim diga qual e porquê?

A Máquina gráfica e o computador (geogebra), pois permite uma mais fácil representação de funções.

Figura 60 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

Quando questionados quanto à razão da escolha do recurso, não parece haver grandes diferenças entre os dois grupos uma vez que quase todos apontaram como motivos a facilidade de visualização de gráficos ou determinação de pontos específicos. Apenas um aluno afirmou ter mais facilidade em trabalhar com o *Geogebra*.



Usou algum recurso tecnológico para a realização da Tarefa "A praga de insectos"? Se sim diga qual e porquê?

Sim, Geogebra, porque para mim é mais fácil do que a calculadora.

Figura 61 – Excerto de uma resposta de um aluno ao inquérito

No decorrer da aula apercebi-me que um aluno iniciou a sua atividade usando o *software* matemático, mas a meio da atividade trocou-o pela calculadora gráfica. Tive oportunidade de o questionar quanto a esta situação, aquando da entrevista. A explicação foi a seguinte:

> *O problema é que comecei a usar o meu portátil, mas depois fiquei sem bateria por isso tive de me agarrar à máquina. Se pensarmos bem a máquina ajuda melhor a compreender estas situações porque o trabalho que vamos desenvolvendo ao longo do ano com a máquina melhora*

também o desenvolvimento do nosso trabalho na máquina. Nós sabemos mexer melhor na máquina em termos matemáticos, a ver os máximos, os mínimos, as intersecções que podemos obter e no computador não é tanto assim.

Os alunos não colocaram muitas questões. No final da aula todos entregaram a sua composição, tendo a maioria feito na própria folha que continha o enunciado.

Após análise das mesmas verifiquei, mais uma vez, que além da escrita existe, pelo menos, uma representação gráfica como suporte da composição.

Uma vez que no enunciado pedia para descrever a evolução da praga, sem mais indicações, vários foram os alunos que o fizeram em apenas uma frase (Figura 62).

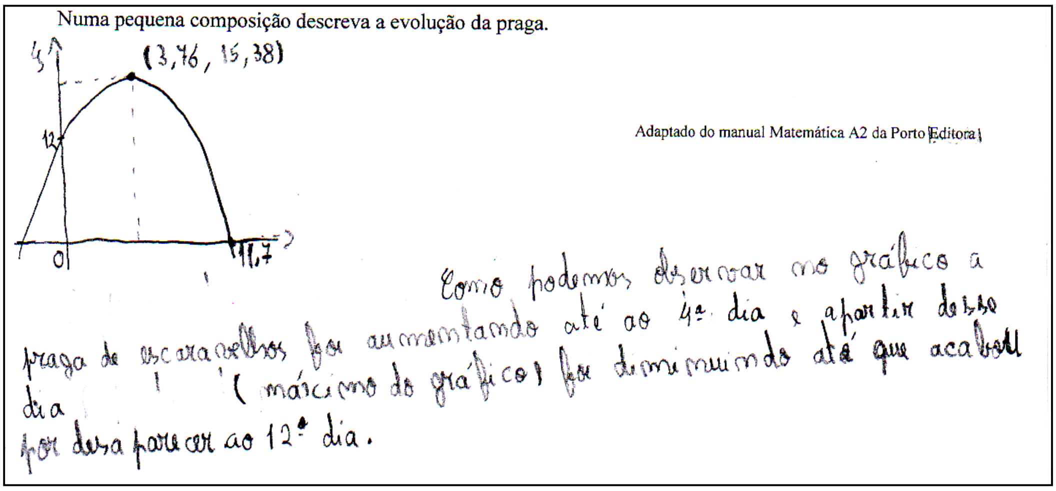


Figura 62 – Composição do aluno 6

Em algumas produções existe informação relativa ao recurso tecnológico utilizado.

O aluno 20 complementa o seu texto com uma representação gráfica onde identifica os pontos significativos para a situação e apresenta a janela de visualização utilizada para obter a representação gráfica.

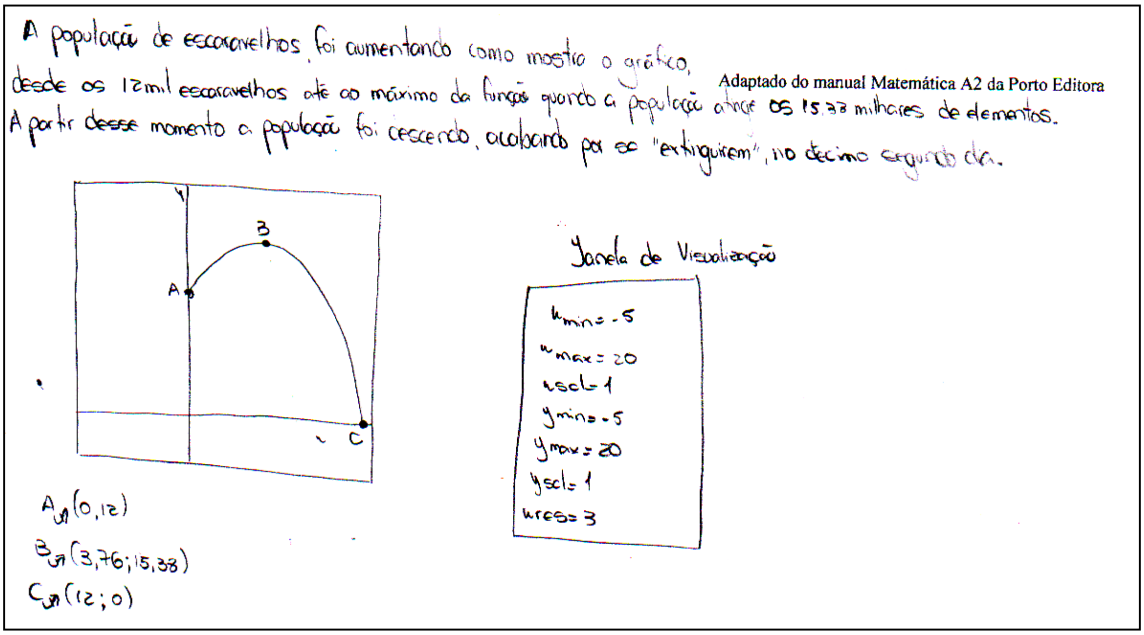


Figura 64 – Composição do aluno 20

O aluno 4 explica, na sua composição, como obteve os pontos assinalados na sua representação gráfica, utilizando a calculadora. Após esta explicação, e com base na visualização da representação gráfica, descreve a evolução da praga.

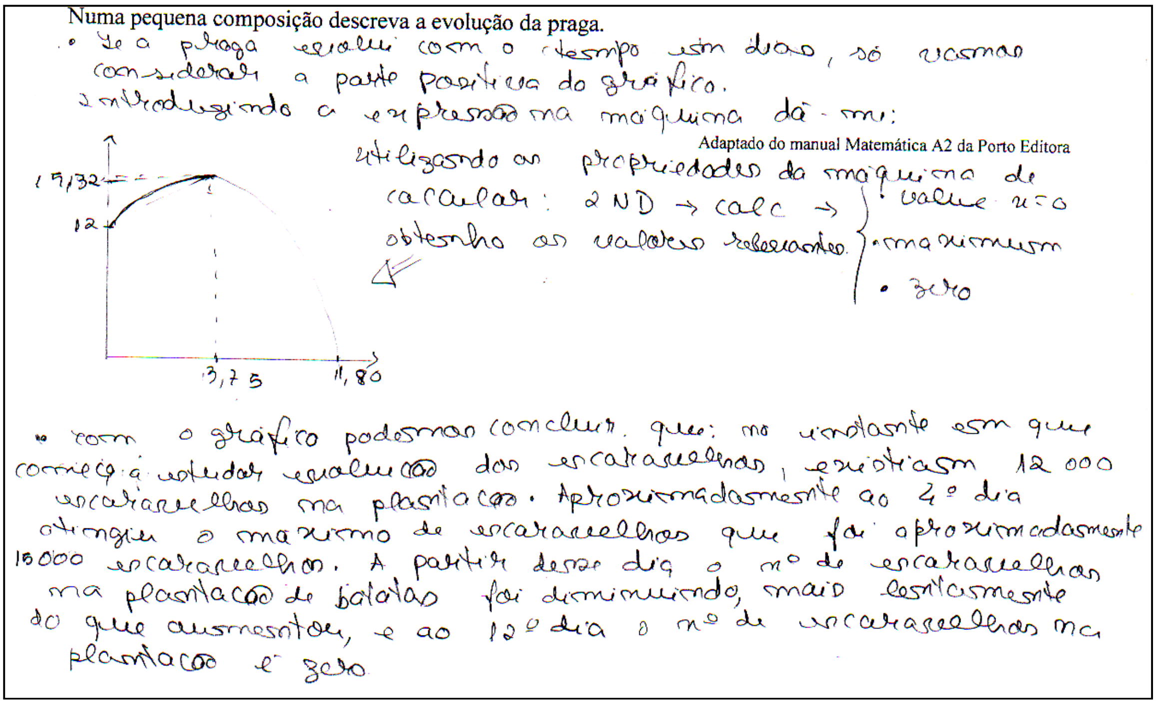
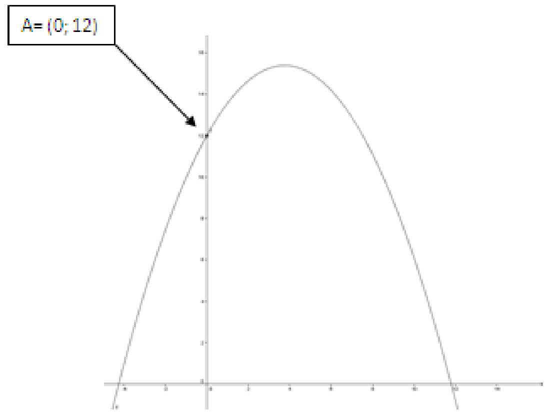


Figura 65 – Composição do aluno 4

Algumas das composições em suporte digital apresentam mais do que uma representação gráfica. Os alunos utilizam-nas como suporte das várias afirmações (Figuras 66 e 67).

A praga de escaravelhos no dia em que invadiu a plantação de batata era de 12 mil escaravelhos.



A partir daí começou a aumentar até aproximadamente ao 4 dia em que atingiu o seu máximo de aproximadamente 15 mil escaravelhos.

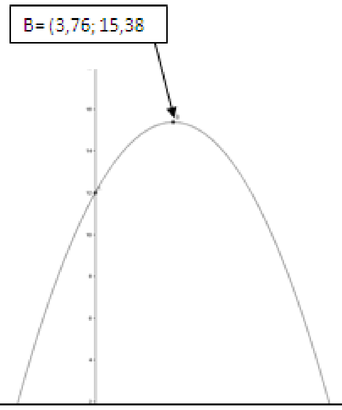


Figura 66 – Excerto da composição do aluno 8

Enquanto o aluno 8 apresenta cada afirmação seguida de uma representação gráfica ilustrativa da mesma, o aluno 15 legendou as várias representações para poder, ao longo do texto, fazer referência às mesmas.

Ao introduzirmos a função do tipo $N(t) = 0.0001\ t^3 + 0.24\ t^2 + 1.8\ t + 12$, vamos obter um gráfico igual ao da imagem 1. Para o estudarmos a função temos que procurar certos pontos fundamentais como calcular o máximo da função N(t) com a intenção de saber qual foi o número máximo de escaravelhos antes de serem eliminados que corresponde a 15 380 escaravelhos (imagem 2). A seguir através da intersecção de y=0 com a função mostra-nos que inicialmente o número de escaravelhos é de 12 000 (imagem 3). Finalmente procedesse ao calculo dos zeros com o objectivo de saber quando é que a praga começou (ou seja, à 4,25 dias atrás) e quando acabou (passados 11,8 dias) (imagem 4).

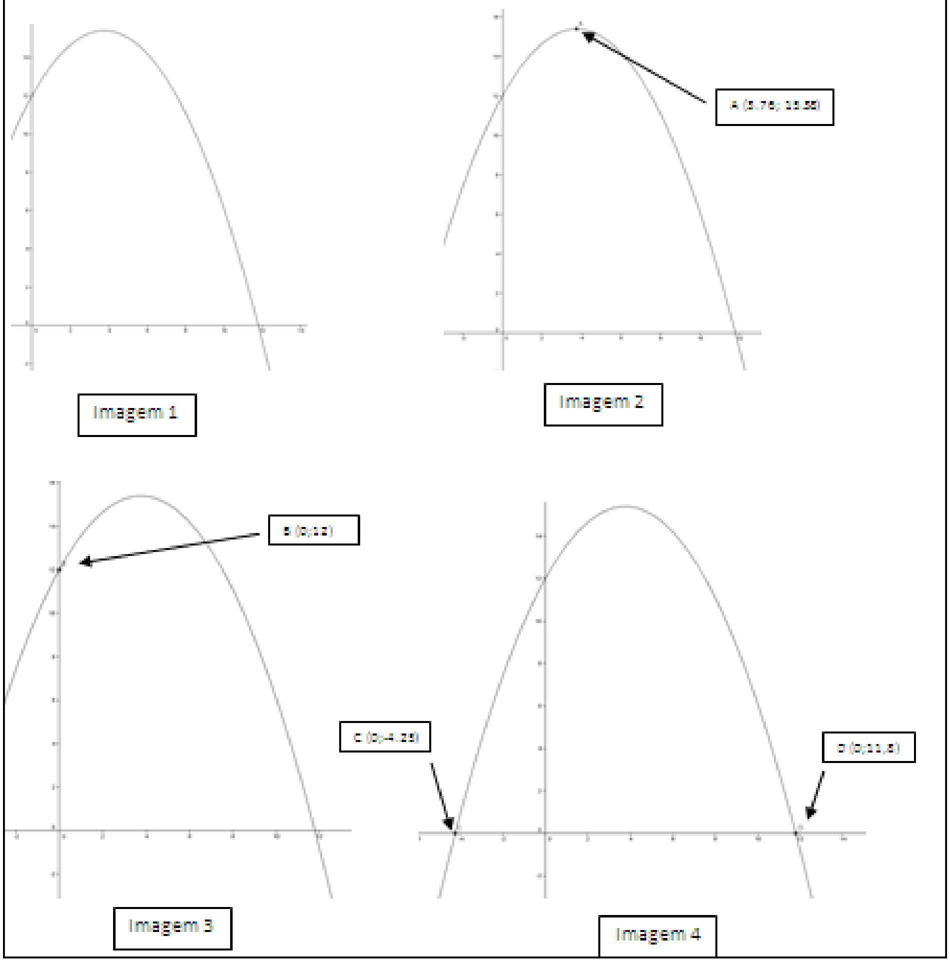
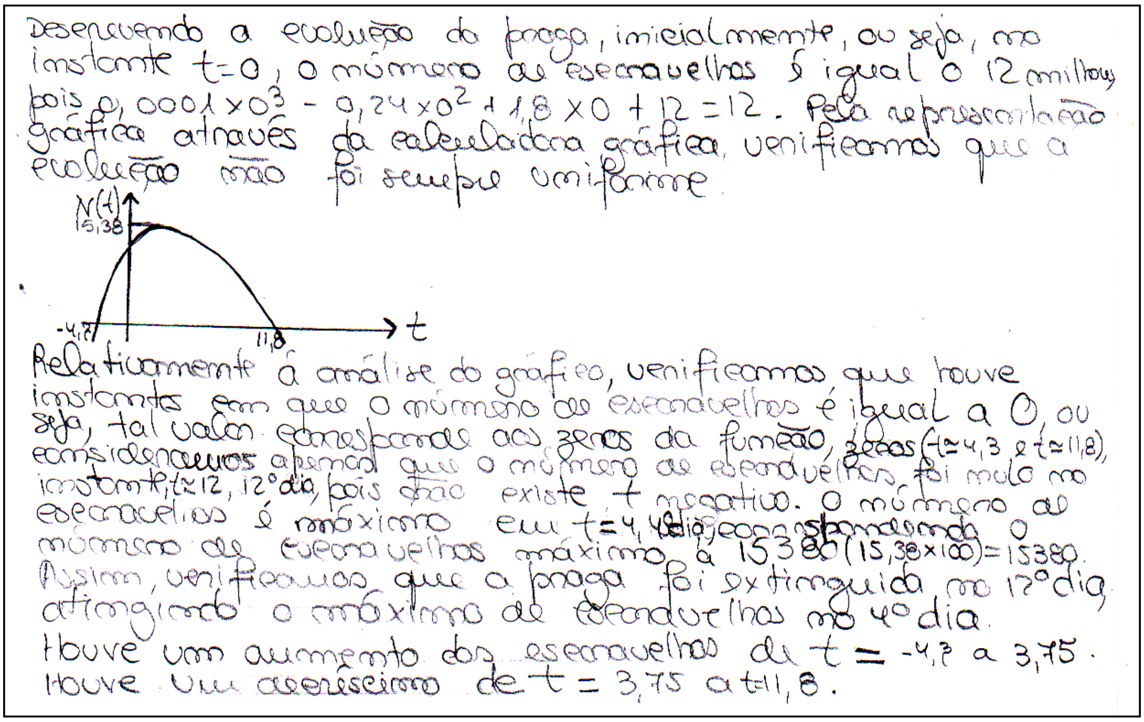


Figura 67 – Composição do aluno 15

Dois alunos, para além de apresentarem representações gráficas como suporte das suas composições, vão mais longe, apresentando também a resolução algébrica, como se pode ver nas figuras seguintes.

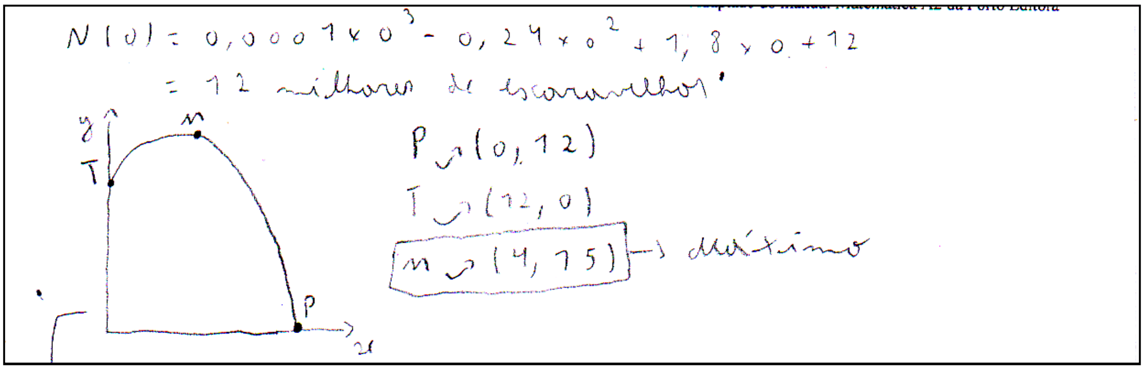


Desenvolvendo a evolução da praga, inicialmente, ou seja, no instante t=0, o número de escaravelhos é igual a 12 milhões pois 0,0001×0³ − 0,24×0² + 1,8×0 + 12 = 12. Pela representação gráfica através da calculadora gráfica, verificamos que a evolução não foi sempre uniforme.

Relativamente à análise do gráfico, verificamos que houve instantes em que o número de escaravelhos é igual a 0, ou seja, tal valor corresponde aos zeros da função, zeros (t≃4,3 e t≃11,8), consideramos apenas que o número de escaravelhos foi nulo no instante, t≃12, 12º dia, pois não existe t negativo. O número de escaravelhos é máximo em t=4, 4ºdia, correspondendo o número de escaravelhos máximo a 15380 (15,38×100)=15380. Assim, verificamos que a praga foi extinguida no 12º dia atingindo o máximo de escaravelhos no 4º dia.
Houve um aumento dos escaravelhos de t = -4,7 a 3,75.
Houve um decréscimo de t = 3,75 a t=11,8.

Figura 68 – Composição do aluno 1

Ambos comprovam algebricamente o número inicial de escaravelhos. Todas as outras informações são suportadas na representação gráfica obtida através da calculadora.



N(0) = 0,0001×0³ − 0,24×0² + 1,8×0 + 12
= 12 milhões de escaravelhos

P → (0, 12)
T → (12, 0)
M → (4, 15) → máximo

Figura 69 – Excerto da composição do aluno 21

Para seis alunos, esta tarefa foi a que mais gostaram de realizar por ser uma situação real e por considerarem-na acessível.

4.6. Opinião dos alunos acerca do trabalho desenvolvido

Apresento em seguida algumas das declarações dos alunos entrevistados acerca do trabalho desenvolvido durante esta intervenção. Nomeadamente, procuro conhecer como é que estes alunos encaram a escrita em Matemática e quais os benefícios que encontram no uso da calculadora gráfica e do software matemático *Geogebra*.

No que concerne à escrita, para o aluno 1,

> *Sem dúvida, a parte verbal é uma espécie de auxílio, mas a Matemática também tem uma dessas vertentes, eu disse isso no relatório, que é ser uma espécie de substituição do método escrito e sobretudo gosto de aliar a parte verbal à parte gráfica e acho que é uma grande vertente da Matemática é isso, aliar a parte escrita de linguagem aos gráficos e sem dúvida que gosto sobretudo de usar gráficos, facilitam muito a leitura.*

O aluno 4 também destaca as representações gráficas como um poderoso auxílio na escrita:

> *Ajuda muito mais um gráfico. Nas funções, um gráfico permite, por exemplo, nas pragas permitiu-nos ver a evolução, enquanto numa tabela acho que não tínhamos tanto essa perceção. Acho que é mais o gráfico e por exemplo, na questão analítica não sabemos como evoluiu nem… nem nada disso. Enquanto, se virmos o gráfico as conclusões mais óbvias aparecem-nos logo.*

O aluno 20, mesmo gostando de escrever, revela que tal constitui uma dificuldade na disciplina de Matemática.

> *Eu, pessoalmente, sou mais um rapaz de línguas, eu desenvolvo mais texto com a parte verbal, mas em termos matemáticos a coisa complica, muda um bocadinho. As expressões algébricas, mesmo um gráfico, mesmo uma tabela dá mais para podermos analisar a situação e fazer um estudo melhor sobre a situação, não é, através de um gráfico conseguimos descrever a linha do*

gráfico e saber o que poderá acontecer em certos pontos, agora em termos verbais, não temos aquela perceção tão objetiva da situação.

Quando questionados sobre se em Matemática se deve escrever muito ou pouco, afirmam depender da situação, mas em geral se deve escrever pouco.

Para o aluno 1,

Depende das situações. A Matemática é uma forma mais prática de resumir a linguagem verbal, nós num gráfico podemos dizer aquilo que dizemos em muitas palavras, não é, e depende das situações. É óbvio que, por exemplo, se nos pedirem para estudar o comportamento de uma função, um gráfico já dá uma grande perspetiva, a visualização daquilo que é o objetivo, mas sobretudo… depende das situações mas a Matemática é sobretudo uma parte mais prática em que não se deve escrever muito. É muito importante sobretudo em situações de exame. Eu pelo menos falo por mim, pelo que eu vi dos meus colegas têm uma grande dificuldade em explicar o raciocínio, porque é que pensam assim. E acho que é muito importante a comunicação escrita neste sentido. É sobretudo depois das conclusões retiradas explicar porque é que eles pensaram assim. E acho que a comunicação matemática escrita, nesse sentido, é muito importante.

O aluno 15 afirma:

Eu sempre gostei da Matemática pela parte de escrever pouco (riso). Só cálculos, mas acho que também é importante escrever porque permite-nos verificar se tiramos boas conclusões ou não, permite-nos pensar um bocadinho mais nisso, mas não sei explicar bem, mas acho que sim, que escrever também é importante.

Os alunos têm consciência que, apesar das dificuldades, a prática os ajuda. Segundo o aluno 15,

Inicialmente, não sabíamos bem o que os professores pretendiam nem tínhamos feito nada do género e por isso houve aquela dificuldade, mas *depois a partir de um certo momento foi fácil. Depois de fazermos uma foi mais fácil.*

O aluno 20 corrobora esta opinião:

Eu no início do ano não estava habituado a escrever composições matemáticas. O Stor insistiu um bocadinho nisso porque nós não estávamos assim muito habituados. E depois ao longo dos conteúdos que fomos desenvolvendo ao longo dos períodos a nossa escrita matemática foi evoluindo porque também foi aumentando os parâmetros de correção e fez com que nós fossemos escrever mais, incluir mais variáveis.

Relativamente ao uso de ferramentas tecnológicas, os alunos parecem concordar que estas lhes facilitam o trabalho. Para o aluno 1,

Facilita sobretudo nos gráficos, em termos do comportamento das funções, por exemplo, verificar certos aspetos característicos. Por exemplo, se é crescente, se é decrescente, o seu domínio, contradomínio, como é que varia em função dos valores que nós temos. E nas tabelas foi sobretudo naquela composição da procura do vértice, quando foi para procurar o vértice víamos qual era o valor repetido antes e depois. Embora também seja possível manualmente, é mais fácil com a calculadora.

Segundo o aluno 15,

É preferível realizar graficamente do que analiticamente, porque analiticamente dá muito trabalho (riso).

Apesar de considerar que as tecnologias são um bom auxílio escolar, o aluno 1 entregou alguns dos seus trabalhos feitos à mão. Quando questionado sobre esta situação respondeu

Não sei, é daquelas partes…, não sei, com receio de perder o trabalho, gosto de fazer as coisas mais à mão como uma forma de segurança. É só *isso. Mas é claro que o Geogebra facilita imenso, por exemplo. A parte tecnológica facilita imenso, mas gosto de fazer à mão porque é uma segurança e também se podem perder determinados hábitos que são essenciais, não é, e assim é uma maneira de estar tudo assegurado.*

Quando lhes é permitido optar por uma das ferramentas, os alunos preferem utilizar a calculadora gráfica pois estão mais familiarizados com a mesma. O aluno 1 corrobora esta ideia:

Porque nunca tinha trabalhado com o Geogebra, só trabalhei mesmo este ano. O Geogebra foi mais importante na tarefa "Pontos notáveis" e aqui não achei que fosse essencial trabalhar com o Geogebra quando podia fazer uma representação na máquina. Para aprofundar ainda mais a aprendizagem com a máquina. Na outra era necessário variar muitos valores, tinha maior poder de visualização. Aí foi mais importante o Geogebra, sem dúvida.

O aluno 15 foi o único que afirmou ter mais facilidade em trabalhar melhor com o *Geogebra*. Quando questionado sobre tal afirmou:

A programação é algo mais rápido, a gente encontra mais facilmente primeiro no computador do que talvez no… e mesmo a própria visualização para mim é mais fácil no computador pois é mais fácil ver a imagem mais perto e mais longe enquanto na calculadora é preciso andar a mudar o zoom, a janela de visualização.

Em suma, das palavras dos alunos, pode dizer-se que entendem a Matemática como uma disciplina onde não se deve escrever muito. A apresentação de representações gráficas supre a necessidade de verbalizar os raciocínios tornando-se assim uma forma de superar a dificuldade em escrever.

Neste sentido, as ferramentas tais como a calculadora gráfica ou o *software* matemático *Geogebra* são um poderoso auxílio na obtenção das referidas representações. Os alunos utilizam-nas como aliados na exploração das tarefas, obtendo mais fácil e rapidamente uma visão global da situação a explorar.

CAPÍTULO 5

Considerações finais

No presente capítulo apresento uma breve síntese do estudo, seguida das conclusões a que este conduziu, em resposta às questões inicialmente formuladas. Indico ainda algumas limitações que acompanharam o estudo e sugiro algumas recomendações para os professores de Matemática e para a investigação no domínio da educação matemática.

5.1. Síntese do estudo

Os atuais documentos curriculares recomendam que se trabalhem várias capacidades fundamentais para a aprendizagem da Matemática, entre as quais, a comunicação matemática. Num ensino onde se pretende que os alunos sejam construtores ativos do seu próprio conhecimento, parecem ser fundamentais as atividades a propor e a metodologia de trabalho adotada, onde se inclui o uso das tecnologias (Boavida et al., 2008; ME, 1991; ME, 2001; NCTM, 1994; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007; Silva et al., 2001).

Nesta perspetiva, este estudo teve como objetivo conhecer a forma como os alunos comunicam matematicamente por escrito, quando recorrem às tecnologias na aula de Matemática. Em particular, pretendeu-se conhecer o tipo de representações escritas que são utilizadas pelos alunos quando recorrem às tecnologias na aula de Matemática.

Para contribuir para o esclarecimento desta problemática, enunciei as seguintes questões:

1) Como é que as tecnologias influenciam e facilitam o desenvolvimento da comunicação escrita na aula de Matemática?
2) De que forma os alunos utilizam as tecnologias ao serviço da comunicação matemática?
3) Comparando a calculadora gráfica com o computador, será possível dizer se uma das duas ferramentas tende a ser mais potenciadora da comunicação escrita do que a outra?

O quadro teórico desta investigação abordou dois temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: a comunicação matemática e a utilização das tecnologias em sala de aula. Dentro da comunicação matemática, foi feita uma breve retrospetiva da importância dada a este tema no ensino e foi analisada a comunicação escrita, discutindo-se as tarefas matemáticas que a potenciam, as representações que lhe servem de suporte e, em particular, as que sustentam a aprendizagem das funções. Quanto às tecnologias, é dada uma panorâmica deste tema nos currículos de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário e são apresentadas as perspetivas de alguns investigadores sobre as potencialidades/dificuldades do uso da calculadora gráfica e do computador no ensino da Matemática.

Neste estudo optei por uma abordagem qualitativa e interpretativa, uma vez que os dados foram recolhidos em situação de sala de aula, dando origem a uma forte componente descritiva do estudo. Pretendi com esta investigação analisar o processo de comunicação matemática escrita, mais do que verificar resultados esperados (Bodgan & Biklen, 1994).

Como participantes foram escolhidos os alunos de uma turma de 10.º ano e o respetivo professor. Para a escolha desta turma tive em conta fatores como a recetividade dos alunos a novos tipos de tarefas, hábitos de trabalho em pares e em grupo e a inexistência de casos problemáticos graves de indisciplina.

Na recolha de dados foram utilizadas várias fontes tais como a observação participante, um questionário aplicado a toda a turma, entrevistas a determinados alunos e documentos produzidos durante as várias sessões. A análise dos dados foi feita em duas fases. A primeira fase, no decorrer do estudo, teve por objetivo organizar e interpretar os elementos à medida que iam sendo recolhidos e a segunda fase, no final do estudo e mais profunda, teve como intuito responder ao problema inicial e às questões em estudo.

5.2. Conclusões do estudo

A influência das tecnologias no desenvolvimento da comunicação escrita na aula de Matemática

As tecnologias, tais como a calculadora gráfica e o computador, permitem explorar múltiplas representações de um mesmo conceito matemático, no estudo das funções. Tal facto possibilita uma compreensão matemática mais profunda do que seria possível com uma única representação (Clement, 2004; Dyke, 2002; ME, 2001; Monoyiou & Gagatsis, 2009; Preston & Gardner, 2003; Scheuermann & Garderen, 2008; Silva et al., 2001; Tripathi, 2008). Os dados obtidos mostram que todos os alunos envolvidos neste estudo privilegiam a representação gráfica como veículo de comunicação, contrariamente ao verificado, por exemplo, nos estudos de Cardoso (1995) e Ferreira (2007). Nestes dois estudos, vários alunos mostraram preferência pelas representações analíticas por lhes parecerem mais seguras e academicamente mais valorizadas. Os participantes nesta investigação não recorreram muito à utilização de linguagem escrita uma vez que consideraram que a informação pertinente está contida na representação gráfica apresentada em resposta às questões propostas. Este tipo de representação é utilizado como principal modo de apresentação da informação na resolução das tarefas propostas. Estes alunos parecem concordar com o provérbio “Uma imagem vale mais do que mil palavras”. Scheuermann e Garderen (2008) alertam os professores para analisarem cuidadosamente as representações gráficas uma vez que uma imagem pode conter uma riqueza de informação sobre o que um aluno compreende e consegue fazer em Matemática.

A visualização é apontada por estes alunos como um fator muito importante na compreensão da tarefa. Têm consciência de que algebricamente conseguiriam obter a mesma informação disponibilizada graficamente, mas afirmam que essa forma “é mais trabalhosa”. Nas diversas tarefas os alunos mostram ser capazes de interpretar símbolos algébricos e de os compreender. Recorrem às representações algébricas essencialmente para obterem, através da ferramenta tecnológica usada, representações gráficas que modelem a situação descrita e a partir delas conseguem responder à tarefa proposta. Torna-se evidente a necessidade que têm em recorrer a representações como forma de modelar e/ou clarificar a tarefa apresentada e o seu próprio pensamento.

Com o recurso às tecnologias, as formas visuais de representação estão facilmente disponíveis. As representações visuais parecem funcionar, tal como refere Tripathi (2008), como uma ponte entre objetos concretos que os alunos podem usar para modelar conceitos numa fase inicial de compreensão e as formas simbólicas ou verbais que podem utilizar mais tarde para se referir a esses mesmos conceitos.

A verbalização de conceitos e raciocínios é uma grande dificuldade para estes alunos tal como se verificou em vários outros estudos (Almiro, 2008; Almiro, 2010; Bandarra, 2006; Carvalho & Silvestre, 2010; Nunes, 2004; Semana, 2008). Esta dificuldade emerge nas produções escritas, isto é, apresentam registos que apenas tentam responder às questões sem revelar a atividade matemática subjacente. A maioria dos alunos revela dificuldade em explicar e justificar os processos matemáticos seguidos, usando uma linguagem apropriada. As representações gráficas parecem ser usadas para colmatar estas dificuldades, uma vez que os alunos suportam a sua comunicação escrita essencialmente neste tipo de representação.

Apesar de, quando questionados, os alunos considerarem que uma composição/ relatório deve explicitar o raciocínio desenvolvido e as conclusões obtidas e que para tal devem incluir gráficos, tabelas ou expressões algébricas, constata-se que recorrem quase exclusivamente a representações gráficas e acrescentam pouca linguagem escrita. Talvez esta situação resulte da forma como é abordado o estudo das funções. A transição entre representações não parece ser trabalhada adequadamente no estudo das funções, tal como constatou Guerreiro (2009) na sua investigação. As potencialidades das tecnologias neste trabalho com diferentes representações matemáticas não têm sido aproveitadas quer pelos professores, quer pelos alunos.

A elaboração de relatórios, pela sua estrutura própria, obriga à utilização de mais linguagem escrita. Tal facto apresentou, para estes alunos, dificuldades acrescidas. Além de não terem experiência anterior na produção de relatórios na disciplina de Matemática, consideram ser muito complicado expressar o seu raciocínio. Mesmo tendo sido pensada uma forma de os tornar mais confiantes na elaboração dos relatórios, ao propor-se que a elaboração da introdução e do desenvolvimento do relatório fosse feita em grupo, dos vinte e quatro alunos participantes, apenas dez entregaram o primeiro relatório e oito entregaram o segundo. Os primeiros relatórios produzidos, aquando da realização da tarefa *À procura do vértice de uma função quadrática*, não ilustram a riqueza da atividade desenvolvida na aula em termos da multiplicidade de representações de um mesmo conceito. Por exemplo, durante a exploração da mesma tarefa, os alunos mostraram-se surpreendidos por verificarem ser possível identificar o vértice de uma função quadrática através da análise da respetiva tabela de valores, mas nenhum relatório apresentou representações tabelares. Os alunos usam quase exclusivamente a linguagem verbal para traduzir por escrito o conteúdo do seu trabalho. No segundo relatório, contudo, há uma maior preocupação dos alunos em explicar os seus raciocínios e apresentam várias representações gráficas para realçar todo o processo realizado e as suas conclusões. Os símbolos algébricos são interpretados e usados como forma de obter a descrição das diversas situações analisadas.

Embora ainda longe do desejável, denota-se uma melhoria nas produções escritas. Verifica-se uma preocupação dos alunos em explicar o procedimento matemático subjacente à atividade realizada, apesar das grandes dificuldades em fazer tal. Os próprios alunos têm consciência desta evolução, apesar de lenta, como se constata nestas "… *a nossa escrita matemática foi evoluindo porque também foi aumentando os parâmetros de correção e fez com que nós fossemos escrever mais, incluir mais variáveis".*

Forma como os alunos utilizam as tecnologias ao serviço da comunicação matemática

Este estudo mostra que os alunos se familiarizam facilmente com a utilização das tecnologias na aula de Matemática, como é o caso da calculadora gráfica. A utilização desta ferramenta é obrigatória a partir no 10.º ano, mas durante o ensino básico, estes alunos pouco contato tiveram com a calculadora, razão pela qual foi necessário um período de adaptação de modo a que se tornassem mais hábeis no seu manuseamento mais acessível, esta fase durou pouco mais de um período letivo.

No ensino secundário o recurso à calculadora é particularmente importante no estudo das funções (Silva et al, 2001). O NCTM (2007) destaca o seu potencial gráfico e de cálculo, permitindo que os alunos realizem explorações e conjeturas de um modo mais rápido e eficiente, beneficiando também do feedback imediato e constante que a tecnologia pode proporcionar.

Tal como constatou Guerreiro (2009), o uso desta ferramenta potenciou a compreensão da razoabilidade da expressão algébrica, ao permitir a rápida alternância entre esta representação e a gráfica. Os alunos recorrem à análise gráfica global, utilizando a informação do contexto, não revelando dificuldades na utilização desta estratégia. Estes lidam com confiança com a informação gráfica, comparando a informação do contexto com as características gráficas que se destacam na análise das funções.

A abordagem gráfica das funções parece ajudar os alunos a ver os problemas de modo mais claro. Os alunos recorrem às tecnologias para obterem uma primeira representação gráfica da função. Esta representação inicial vai permitir uma evolução na compreensão da situação apresentada. A manipulação da representação externa parece funcionar, tal como afirma Goldin (2008), como um estímulo dos sentidos, ou seja, vai contribuir para uma representação interna mais rica que se reflete no raciocínio do aluno. Pode assim dizer-se que existe uma interação continuada entre a representação externa e interna que contribui para uma construção dos conceitos abordados mais consistente.

Quando não é especificada a ferramenta tecnológica a ser usada na exploração de uma tarefa, a quase totalidade de alunos não opta pelo recurso ao computador. Segundo eles, isto acontece por estarem mais familiarizados com a calculadora gráfica. Conforme já foi referido, os alunos já tinham tido contacto com o *Geogebra*, mas enquanto espectadores, isto é, observando a utilização feita pelo professor como meio de demonstração de determinadas noções para toda a turma. No entanto, reconhecem que a utilização do computador foi uma mais-valia na exploração da tarefa *Um estudo sobre pontos notáveis das funções polinomiais,* uma vez que permitiu analisar mais casos de forma mais rápida, recorrendo a seletores, e facilitou uma maior organização gráfica e consequentemente uma sistematização de ideias. O NCTM (2007) refere também a importância da tecnologia no estudo de temas mais abrangentes, como é o caso da mudança de parâmetros, permitindo aos alunos trabalharem em níveis mais elevados de generalização e abstração. A organização gráfica permitida pelo *Geogebra* traduziu-se nos relatórios dos alunos. As dificuldades em verbalizar os seus pensamentos são superadas com a apresentação de representações gráficas que sistematizam o trabalho desenvolvido e as conclusões obtidas.

Independentemente da ferramenta utilizada, todos os alunos parecem concordar com a importância das tecnologias na aprendizagem da Matemática. Este resultado parece estar de acordo com os de outros estudos, nomeadamente de Ferreira (2007) onde os alunos reconheceram a importância da utilização do computador ou da calculadora, até mesmo aqueles que a autora designou por *analíticos convictos*.

Ferramentas tecnológicas potenciadoras da comunicação escrita

A capacidade de visualização possibilitada pelas tecnologias usadas nesta investigação promoveu a comunicação dos alunos entre si e entre os alunos e o professor. O trabalho em grupo mostrou-se vantajoso na medida em que permitiu aos alunos partilhar e organizar ideias, debater e refletir sobre o que visualizavam. O diálogo entre alunos parece facilitar o posterior registo escrito, conforme se pôde constatar em outros estudos (Bandarra, 2006; Menino, 2004; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003; Semana, 2008). A utilização das composições e relatórios permitiu-me percecionar melhor o trabalho desenvolvido e efetuar sugestões ou correções. Os comentários e o feedback proporcionado pareceram surtir algumas melhorias nas produções escritas tal como verificaram Dias (2008) e Semana (2008), mas ainda há um longo caminho a percorrer, principalmente no caso dos relatórios. Os alunos estão habituados a escrever respostas sintéticas em Matemática e, quando muito, a apresentar os cálculos justificativos das mesmas. Como tal, a escrita e a justificação escrita é também para os alunos uma aprendizagem, assim como descrever os processos e as estratégias usadas, as conjeturas apresentadas, testadas e rejeitadas.

Os alunos participantes deste estudo não dispensam o uso das tecnologias. O uso das ferramentas tecnológicas parece ser imprescindível na procura de respostas ou como meio de verificação de resultados. Quando foi deixada ao seu critério a utilização da tecnologia, todos os alunos optaram por uma das ferramentas tecnológicas para explorar a tarefa. Estas ferramentas permitiram aos alunos gastar menos tempo com o cálculo numérico, proporcionando a agilidade da visualização gráfica e a aquisição de uma compreensão global do significado da tarefa.

Constatou-se que quase todos os alunos escolheram a calculadora gráfica, quando puderam optar entre as duas possibilidades, por considerarem ser mais fácil o seu uso, uma vez que rapidamente se familiarizaram com esta ferramenta, não apresentando qualquer dificuldade na sua utilização. O trabalho realizado com este recurso propiciou uma destreza progressiva e bastante rápida dos alunos no seu manejo. Em relação à utilização do computador, foi visível que encontraram no uso do *Geogebra* vantagens em relação às potencialidades gráficas da calculadora, sobretudo em situações específicas, mas como conseguem fazer quase tudo com ambas as ferramentas, preferem a calculadora gráfica apesar das diferenças significativas entre os ecrãs de cada uma destas duas ferramentas e de inicialmente se depararem com dificuldades em encontrar a janela adequada na calculadora gráfica.

Quanto à comunicação escrita proporcionada por estes dois recursos, não parece haver diferenças evidentes. Verifica-se, nas várias produções realizadas, que os alunos recorrem às representações gráficas obtidas através da ferramenta tecnológica e colocam-nas nos seus registos escritos pois como afirmou um aluno “nós num gráfico podemos dizer aquilo que dizemos em muitas palavras”.

A utilização de recursos tecnológicos parece relevante para caracterizar o modo positivo como decorreram as aulas. Não há dúvida de que os alunos de hoje valorizam o trabalho com as tecnologias em detrimento do trabalho exclusivo com papel e lápis. O uso da calculadora gráfica e do programa *Geogebra*, que foi novidade para os alunos, mereceu o agrado dos alunos tendo-os motivado para o trabalho desenvolvido e apoiado na realização das tarefas, libertando-os de procedimentos morosos e pouco interessantes. No processo de exploração, os registos dos alunos revestem-se de uma importância fundamental. Ao registarem as suas observações e conclusões, os alunos refletem sobre o que estão a visualizar, pois a mera manipulação dos objetos no ecrã pode conduzir a uma aprendizagem pouco efetiva.

Os resultados apresentados vão no sentido de evidenciar que esta experiência permitiu desenvolver a capacidade de comunicação escrita, embora se deva reconhecer que ainda há um longo percurso a percorrer. Esta capacidade exige um grande esforço e trabalho continuado pelo que é necessário proporcionar mais experiências aos alunos para desenvolver esta competência.

Deste estudo ressalta igualmente a importância que os alunos atribuem à classificação de todos os trabalhos que realizam. O fato de termos atribuído apenas um caracter formativo a estes relatórios, frisando a sua importância na aprendizagem destes tópicos não foi suficiente, conforme se verificou. Alguns alunos revelaram desinteresse pelas atividades considerando que não têm consequência direta na classificação final na disciplina. Outro aspeto que merece referência neste trabalho é a quase inexistência de tarefas que apelem à elaboração de relatórios nos manuais.

Para terminar, considero que este tipo de propostas enriquece largamente a aprendizagem da matemática mas é ainda necessário travar uma grande batalha na sala de aula com os alunos para que compreendam estes benefícios. Acredito que o trabalho que se está a desenvolver atualmente com os alunos do ensino básico, com o programa de matemática aprovado em 2007, virá trazer consequências muito positivas no ensino secundário, nomeadamente, numa atitude diferente face à comunicação matemática.

5.3. Limitações do estudo

O facto de me encontrar a lecionar pela primeira vez na escola onde se desenrolou este estudo constituiu um constrangimento. A entrada numa nova escola e a consequente necessidade de conhecimento e de adaptação às suas regras condicionou esta intervenção pedagógica, nomeadamente no que se refere à recolha de dados, que se iniciou apenas no decorrer do segundo período.

Um outro constrangimento com que me confrontei foi o fato de este ser um trabalho académico, com uma data limite de finalização, o que condicionou a intervenção. Não foi fácil, em tempo útil, analisar e dar feedback aos alunos sobre a evolução das suas aprendizagens; comentar o trabalho dos alunos; operacionalizar e gerir o volume de informação resultante das produções dos alunos, refletir e escrever sobre a intervenção a decorrer.

A escolha e preparação das tarefas que se constituíram como ponto de partida para a elaboração das composições foram outro tipo de limitação, uma vez que estas foram apresentadas usando sempre representações algébricas e não outros tipos de representações.

Relacionado com as tarefas, está o tempo disponibilizado para a sua resolução e respetiva discussão, assim como para a elaboração dos relatórios. Os alunos manifestaram inicialmente bastante dificuldade em elaborar relatórios apesar de ter havido da minha parte e do professor o cuidado de lhes proporcionar um guião e um relatório elaborado por outros alunos para lhes servir de orientação inicial. Também o tempo dedicado à discussão oral e à reflexão conjunta após a exploração das tarefas não foi o desejado. Estes momentos, já referidos como importantes na consolidação de ideias e consequentemente importantes nos registos escritos, deveriam ter sido mais prolongados. A elaboração dos relatórios foi iniciada na aula, mas foi necessário pedir aos alunos para os terminarem em casa. Esta decisão teve algumas consequências, nomeadamente fez com que muitos alunos não os terminassem e, como tal, não puderam ser alvo de análise. Sendo a comunicação matemática uma capacidade que necessita de tempo e trabalho para ser consolidada, a limitação de tempo é um grande obstáculo para analisar a sua evolução. Deste modo, considero que a comunicação matemática é uma capacidade que deve ser trabalhada de forma consistente e persistente ao longo de todo um ciclo de ensino. Resta-me a esperança de que os alunos que atualmente estão a frequentar o ensino básico com a aplicação do NPMEB entrem no ensino secundário com competências mais elevadas de comunicação e que isso tenha como consequência uma melhoria considerável na produção de relatórios e de composições nos futuros alunos do ensino secundário.

Outra limitação deste estudo prende-se com o meu posicionamento durante a recolha de dados na sala de aula. Foi impossível assumir apenas o papel de investigadora na medida em que os alunos acabaram por me ver como outra professora de Matemática na sala de aula e solicitavam a minha presença e ajuda sempre que surgia alguma dificuldade e o professor da turma estava ocupado com outros alunos. Esta situação foi muito boa por um lado, pois permitiu estar mais perto dos alunos enquanto resolviam as suas tarefas, não me permitiu efetuar registos no momento em que as situações aconteciam mas acabaram por ser feitos no final da aula.

5.4. Recomendações

Embora os seus resultados não sejam generalizáveis, esta investigação contribui para o aumento do conhecimento sobre a comunicação escrita com recurso a ferramentas tecnológicas sendo, por isso, relevante para os professores de Matemática. O estudo constata a dificuldade dos alunos em comunicarem por escrito, sendo este um processo de aprendizagem lento que terá frutos se trabalhado permanentemente e desde os primeiros anos de escolaridade. As diferentes representações devem ser trabalhadas, sobretudo enfatizando as relações entre elas e, neste campo, as tecnologias poderão ser um poderoso recurso. A tendência em utilizar em exclusivo representações algébricas ou gráficas deve ser combatida. É também importante que existam, nas aulas, momentos de discussão e reflexão e de escrita dos processos de resolução desenvolvidos. Enquanto professores, temos um desafio exigente e difícil para resolver: encontrar situações que levem os alunos a justificar os seus passos e operações na resolução de uma tarefa e que estas justificações progressivamente se transformem em cadeias argumentativas cada vez mais complexas. Esta é uma aprendizagem que também nós temos de fazer, conjuntamente com os alunos.

Apesar do destaque dado nos últimos anos, a nível nacional e internacional, à comunicação matemática, ainda há um longo caminho a percorrer dentro da sala de aula para que esta capacidade seja plenamente desenvolvida nos nossos alunos. Particularmente, a comunicação escrita tem merecido reduzido destaque por parte dos investigadores portugueses. Sendo, como já dito, difícil para alunos e professores o desenvolvimento desta capacidade, urge investigar formas de facilitar este processo.

Referências bibliográficas

Ajose, S. (1999). *Discussant's Comments: on the role of visual representations in the learning of mathematics.* (ED 466383)

Almiro, J. (1997). *O discurso na aula de Matemática e o desenvolvimento profissional do professor.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Almiro, J. (2008). A comunicação escrita na matemática do ensino secundário: Um projeto de um grupo de professores. *O professor de Matemática e os projetos de Escola*, (pp. 257-289). Lisboa: APM.

Almiro, J. (2010). Os quadriláteros no Programa de Matemática do Ensino Básico: uma reflexão sobre a prática. *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, (pp. 175-208). Lisboa: APM

Amado, N. (2007). *O professor estagiário de Matemática e a integração das tecnologias na sala de aula.* Tese de Doutoramento. Faro.

Amado, N. & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática - diferenças na prática na sala de aula. *Tecnologias e Educação Matemática*, (pp. 286-299). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Anastácio, R. (2006). *Criatividade e comunicação da ciência. Estratégias criativas para comunicar noções básicas de hereditariedade do programa de ciências naturais do 9º ano do 3º ciclo do ensino básico.* Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro.

APM (1998a). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula – Propostas de trabalho.* Lisboa: APM

APM (1998b). *Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Milfontes – 1988* (Edição comemorativa). Lisboa: APM

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 52: 215- 241.

Artigue, M. (2010). The future of teaching and learning mathematics with digital technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrande (Eds). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain.* The 17 th ICMI Study, p. 463-173. Springer. Dordrecht.

Azevedo, A. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções: uma experiência com alunos do ensino secundário.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Balsa, J. e Silva, J. (2002). Uma análise do papel da calculadora gráfica nos exames nacionais. In L. Menezes, H. Cunha e F. Tavares (Orgs.), *Actas do XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp.237-242. Lisboa: APM.

Bandarra, L. (2006). *Tarefas de investigação, novas tecnologias e conexões e a aprendizagem de conteúdos algébricos no 8º ano.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática* - *Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.

Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora. (Obra original publicada em 1982)

Canavarro. A. (1994). Computador na Educação Matemática: Instrumento para entusiasmar, para facilitar ou para possibilitar? *Actas ProfMat* (pp. 73-81). Lisboa: APM

Canavarro, A. & Rocha, M. (2008). Introdução. *Tecnologias e Educação Matemática*, (pp. 9,10) . Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Canavarro, A., Tudella, C. & Pires, M. (2009). Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 1

Cardoso, M. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function. In A. Selden, & J. Selden (Eds.), *Research sampler* Disponível em http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html, acedido em 15 de Janeiro de 2011

Carvalho, R. & Silvestre, A. (2010). Desenvolver a comunicação matemática na sala de aula. *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, (pp. 147-174). Lisboa: APM

Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, (pp. 97-102)

Costa, B. & Rodrigues, E. (2004). *Espaço B*. Porto: Edições Asa.

Costa, J. & Melo, A. (2006). *Dicionário da língua portuguesa*. Porto: Porto Editora.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Cunningham, S. & Zimmermann (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Dias, S. (2008). *O papel da escrita avaliativa na avaliação reguladora do ensino e das aprendizagens de alunos do 8º ano na disciplina de Matemática*. Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Dias, S. & Santos, L. (2010). O feedback e os diferentes tipos de tarefas matemáticas. *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 126-136). Lisboa: APM

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* Tese de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa.

Dyke, F. (2002). *A Visual Approach to Functions*. Emeryville: Key Curriculum Press

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 1, pp. 45-68). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ferreira, P. (2007). *A opção dos alunos pelas tecnologias: um olhar sobre a utilização do Sketchpad na resolução de problemas.* (Tese de Mestrado não publicada). Universidade do Algarve.

Ferreira, M; Castanheira, M; Pereira, S. & Lourenço, V. (2010). *Projeto Testes Intermédios: Relatório 2010*. Lisboa: Ministério da Educação – GAVE.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005). A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece. In M. Bosh (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, Sant Feliu de Guixols, Spain, 102-111.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Guerreiro, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Hitt, F.; Martín, A. & Morasse, C. (2009). *Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude to the concept of function.* Comunicação apresentada no ICME 11, Monterrey, México. Disponível em http://tsg.icme11.org/tsg/show/21, acedido em 20 de Março de 2011

Janvier, C. (1983). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 266-270). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Lessard-Hébert, M.; Goyette, G. & Boutin, G. (1994). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget. (Obra original publicada em 1990)

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching, 6*(1), 41-62.

Martinho, M. (2007). *A comunicação na sala de aula de Matemática: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico.* Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.

Matos, J. & Carreia, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante*, *3*(1), 19-53

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar matemática: contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa.

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (1991). *Organização Curricular e Programas* (3.º ciclo do ensino básico). Lisboa: ME-DGEBS

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

Monoyiou, A. & Gagatsis, A. (2009). *A coordination of different representations in function problem solving*. Comunicação apresentada no ICME 11, Monterrey, México. Disponível em http://tsg.icme11.org/tsg/show/21, acedido em 20 de Março de 2011

Morgan, C.; Mariotti, M. & Maffei, L. (2009). Representation in Computational Environments: Epistemological and Social Distance. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(3), 241–263

Nacarato, A. & Lopes, C. (2009). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (2ªed.). Lisboa: APM e IIE (Obra original publicada em 1991).

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Obra original publicada em 2000).

Neves, M.; Pereira, A.; Leite, A.; Guerreiro, L.; Silva, M. (2007). *Matemática A2 – Funções polinomiais*. Porto: Porto Editora.

Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática: um estudo com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Pardal, L. & Correia, E. (1995). *Métodos e Técnicas de Investigação Social*. Porto: Areal Editores.

Peressini, D. & Knuth, E. (2005). The role of Technology in Representing Mathematical Problem Situations and Concepts. *Technology-supported: Mathematics Learning Environments* (pp. 277-290). NCTM.

Person, P. (2009). *Handheld calculators as tools for Algebra learning – A literature review*. Comunicação apresentada no ICME 11, Monterrey, México. Disponível em http://tsg.icme11.org/tsg/show/21, acedido em 20 de Março de 2011

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge.

Ponte, J. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3, 1-16.

Ponte, J. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.

Ponte, J. (1988). *O Computador – Um instrumento da Educação.* Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J.; Boavida, A.; Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. (2005). Gestão Curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC

Ponte, J.; Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. ME, DGIDC.

Ponte, J.; Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. ME, DGIDC.

Powell, A. & Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Campinas, SP: Papirus

Preston, R. & Gardner, A. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9 (1), 38-43

Quesada, A. (1999). El uso de calculadoras en la enseñanza de las matemáticas: nuevos enfoques y nuevos resultados. *Actas do ProfMat 99* (pp. 83 – 90). Lisboa: APM

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (3ª ed.). Lisboa: Gradiva. (Obra original publicada em 1995)

Ramos, C. & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: uma experiência. *Tecnologias e Educação Matemática*, (pp. 196-209). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Reys, B. (1989). A calculadora como uma ferramenta para o ensino e aprendizagem. *Educação e Matemática*, 11, 19-22.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante, 11*(2), 3-27.

Rocha, G.; Segurado, I. & Capela, M. (2010). O perímetro com recurso ao Geogebra. *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, pp. 121-145. Lisboa: APM

Ruthven, K.; Deaney, R. & Hennessy, S. (2009). Using graphing software to teach about algebraic forms: a study of technology-supported practice in secondary-school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 71: 279-297

Sá, A. & Zenhas, M. (2004). *Como abordar… A comunicação escrita na aula de Matemática*. Porto: Areal Editores.

Sajka, M. (2003). A secondary school students' understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229-254.

Scheuermann, A. & Garderen, D. (2008). Analysing students´ use of graphic representations: determining misconceptions and error patterns for instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 471–477

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*, (pp. 57-73). Lisboa: APM

Semana, S. (2008). *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8º ano de escolaridade em Matemática*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Silva, A. (1989). Calculadoras na educação matemática: Contributos para uma reflexão. *Educação e Matemática*, 11, 3-6.

Silva, J.; Fonseca, M.; Martins, A.; Fonseca, C. & Lopes, I. (2001). *Matemática A – Programa 10º Ano.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Smith, D. (2002). How People Learn…Mathematics. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate level)*. University of Crete.

Smole, K. & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed

Stylianou, D., & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(4), 353-387.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de Investigações Matemáticas: Uma Experiência.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM

Varandas, J. (2003). Avaliação de atividades investigativas: Uso de uma tabela de descritores. *Revista da Educação* 73, 74-78.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164–186.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sites Consultados

http://www.geogebra.org acedido em 15/09/2010

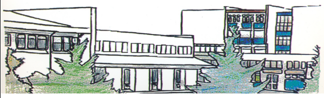
http://www.planotecnologico.pt/InnerPage.aspx?idCat=31&idMasterCat=30&idLang=1&site=planotecnologico acedido em 12/01/2010

http://www.pte.gov.pt/pte/PT/OPTE/Miss%C3%A3oeObjetivos/index.htm acedido em 12/01/2010

http://www.math.uakron.edu/amc/Algebra2.htm acedido em 12/12/2009

ANEXOS

Anexo 1 – Tarefa *Laboratório*



EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ________________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

TAREFA - LABORATÓRIO

Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.

Admite-se que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por:

$P(t) = 0{,}002t^2 - 0{,}05t + 1$, $t \in [0, 24]$.

Utilize a calculadora para responder às questões que se seguem.

1. Qual é o nível de poluição às duas horas e trinta minutos **da tarde**?

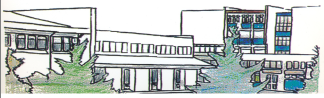
2. Quanto tempo esteve o purificador ligado? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

3. Para a realização de duas experiências A e B é exigido que o nível de poluição do ar seja inferior a 0,7 mg/l de ar. O tempo necessário à realização das experiências A e B é, respectivamente, seis horas e quatro horas e trinta minutos. É possível realizar estas experiências?

   Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa **pequena composição**, explique as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Retirado do manual Espaço B da Edições Asa

Anexo 2 – Tarefa *À procura do vértice de uma função quadrática*



EBS DE XXX

10.º ANO — MATEMÁTICA A

NOME ______________________________ TURMA ___ N.º ___

<u>À PROCURA DO VÉRTICE DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA</u>

ATIVIDADE Nº 1 – MÉTODO GRÁFICO

1. Efectue o gráfico das seguintes funções na sua calculadora. Apresente a sua representação gráfica abaixo. Todas as funções quadráticas têm ou um valor máximo ou um valor mínimo. Determine se cada uma das funções tem um máximo ou um mínimo.

   $a(x) = x^2 – 3$ $b(x) = 2x^2 – 4x$

   $c(x) = -3x^2 – 12x + 1$ $d(x) = -x^2 + 8x – 16$

2. Conjecture como pode determinar se uma função quadrática tem um valor máximo ou mínimo, **<u>sem efectuar o gráfico</u>**.

3. Determine se as seguintes funções têm um valor máximo ou mínimo. Depois verifique a sua resposta efectuando o gráfico. Inclua uma representação gráfica. (Não necessita encontrar o valor máximo/ mínimo)

$e(x) = -2x^2 – 3x – 2$ $f(x) = 5x^2 – 4x – 9$

$g(x) = -x^2 + 2x + 1$ $h(x) = x^2 + 8x – 10$

4. A sua conjectura estava correcta? Se não, qual seria uma melhor conjectura?

Definição de vértice: O vértice de uma função quadrática pode ser definido de várias formas. Neste momento, considere-se o vértice como o ponto máximo ou mínimo do gráfico de uma função quadrática.

5. Encontre o vértice de cada uma das seguintes funções quadráticas efectuando o respectivo gráfico na calculadora. Inclua uma representação gráfica.

$i(x) = -2x^2 – 4x – 2$ $j(x) = 4x^2 + 8x – 6$

$k(x) = x^2 – 10x + 22$ $l(x) = -3x^2 – 12x – 7$

6. Para cada uma das funções da questão 5, complete as tabelas abaixo. Inclua a abcissa do vértice (no rectângulo com a letra V) e três abcissas inferiores e superiores à abcissa do vértice.

$i(x) = -2x^2 – 4x – 2$

x	y
V	

$j(x) = 4x^2 + 8x – 6$

x	y
V	

$k(x) = x^2 – 10x + 22$

x	y
V	

$l(x) = -3x^2 – 12x – 7$

x	y
V	

7. O que pode observar nas tabelas? (Pista: simetria)

8. Conjecture como poderia determinar o vértice de uma função quadrática com base numa tabela de valores.

9. Nas tabelas de valores abaixo, determine o vértice de cada função quadrática. Decida se este é um máximo ou um mínimo. Relacione isso com a sua conjectura da questão 4 e determine o sinal do coeficiente do termo em x^2.

x	y
-2	8
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

x	y
-2	27
-1	12
0	3
1	0
2	3
3	12

x	y
1	-4
2	1
3	4
4	5
5	4
6	1

x	y
-11	-14
-10	-9
-9	-6
-8	-5
-7	-6
-6	-9

10. A sua conjectura estava correcta? Se não, qual seria uma melhor conjectura?

11. Reveja e compare: para cada função abaixo encontre o vértice usando os dois métodos usados até agora:

    A. Faça o gráfico e use a função max/min da sua calculadora. Faça a representação gráfica.

    B. Examine a tabela de valores. Apresente pelo menos cinco valores da tabela.

$m(x) = x^2 – 6x + 4$

$n(x) = -2x^2 – 8x – 6$

$o(x) = -x^2 + 10x – 15$

$p(x) = 3x^2 – 12x + 3$

A **forma estandardizada** de uma função quadrática é quando está escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

12. Coloque cada uma das seguintes funções na sua forma estandardizada e identifique os valores de a, b e c. (São as mesmas funções da questão 5, da Atividade 1, numa forma diferente)

$i(x) = -2 - 2x^2 - 4x$ $j(x) = 4x^2 + 6x - 6 + 2x$

$k(x) = x^2 + 22 - 10x$ $l(x) = -2x^2 - 22x - 7 - x^2 + 10x$

13. Encontre o valor de (-b/2a) para cada uma das funções da questão 12.

i(x) =

j(x) =

k(x) =

l(x) =

14. O que observa sobre os valores de x que encontrou nos vértices das funções da questão 5 e os valores de -b/2a na questão 13?

15. Substitua os valores de -b/2a, que encontrou na questão 13, na variável x nas funções originais.

i(x) =

j(x) =

$k(x) =$

$l(x) =$

16. O que observa sobre os valores de y que encontrou nos vértices das funções da questão 5 e os valores de que encontrou na questão 15?

17. Faça uma conjectura sobre a relação entre o vértice de uma função quadrática e os valores de a, b e c da forma estandardizada de uma função quadrática.

18. Escreva um método algébrico (algoritmo) passo a passo que qualquer pessoa possa utilizar para encontrar o vértice de uma função quadrática, escrita na forma estandardizada.

19. Use o algoritmo que criou na questão anterior para encontrar o vértice de cada uma das seguintes funções quadráticas. Verifique a sua resposta usando um dos métodos gráficos usados na Atividade 1. Mostre o seu trabalho abaixo.

$q(x) = 4x^2 + 8x - 3$ $\qquad$ $r(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 25$

$s(x) = -4x^2 + 24x - 31$ $t(x) = -x^2 - 5$

20. O seu algoritmo estava correcto? Se não, qual seria um algoritmo mais correcto?

ATIVIDADE Nº 3 – MÉTODO ALGÉBRICO – FORMA DO VÉRTICE

A forma do vértice de uma função quadrática é quando está escrita na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

21. Cada uma das seguintes funções está escrita na forma do vértice. Identifique os valores de a, h e k. (São as mesmas funções da questão 5, da Atividade 1, numa forma diferente).

$i(x) = -2(x + 1)^2$

$j(x) = 4(x + 1)^2 - 10$

$k(x) = (x - 5)^2 - 3$

$l(x) = -3(x + 2)^2 + 5$

22. O que observa sobre os valores de x que encontrou nos vértices das funções da questão 5 e os valores de h na questão 21?

23. O que observa sobre os valores de y que encontrou nos vértices das funções da questão 5 e os valores de k na questão 21?

24. Faça uma conjectura sobre a relação entre o vértice de uma função quadrática e os valores de a, h e k da forma do vértice.

25. Escreva um método algébrico, passo a passo, que qualquer pessoa possa utilizar para encontrar o vértice de uma função quadrática, escrita na forma do vértice.

26. Use o algoritmo que criou na questão anterior para encontrar o vértice de cada uma das seguintes funções quadráticas. Verifique a sua resposta usando um dos métodos gráficos usados na Atividade 1.

$u(x) = -2(x - 6)^2 + 8$ $v(x) = (x + 2)^2 - 3$

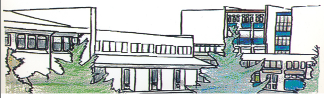
$w(x) = 2(x - 3)^2$ $z(x) = -3(x + 5)^2 - 1$

27. A sua conjectura estava correcta? Se não, qual seria uma conjectura mais apropriada?

No final da atividade deverá elaborar um relatório escrito onde sejam apresentadas todas as observações e conclusões tiradas durante a investigação.

Adaptado de Antonio Quesada, projeto AMP

Anexo 3 – Tarefa *Aeromodelismo*



EBS DE XXX

10.º ANO MATEMÁTICA A

NOME ______________________________ TURMA ___ N.º ___

AEROMODELISMO

Num concurso de aeromodelismo participaram vários aviões, sendo um deles observado desde o instante em que levantou voo até ao momento de aterragem.

A altura H ao solo desse avião, t minutos após a descolagem, é dada em função do tempo t pela expressão $H(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}06t^2 + 0{,}16t$, sendo H(t) expresso em hectómetros e t em minutos.

1. Após 2 minutos da descolagem, a que altura se encontrava o avião?
   Apresente a resposta em metros.

2. Qual o tempo de voo deste avião?

3. Segundo os critérios estabelecidos pelo júri do concurso, são observados os seguintes objetivos:
   - estar no ar menos de 8 minutos e 30 segundos;
   - atingir a altitude de pelo menos 105 metros;
   - estar pelo menos durante um minuto consecutivo a pelo menos 100 metros de altitude;
   - antes meio minuto de aterrar, estar a uma altitude superior a metade da altitude máxima atingida.

   Classificação:

   Muito Bom – cumprimento de todos os objetivos;

   Bom – falha apenas um dos objetivos;

   Suficiente – falha dois objetivos;

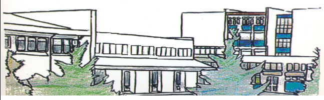
   Não classificado – falha mais de dois objetivos.

Numa **composição** matemática, indique a classificação atribuída ao avião referido no enunciado.

Utilize o software Geogebra para investigar esta questão, explicitando as conclusões a que chegou para cada um dos objetivos a cumprir pelo avião. Inclua, na composição, gráfico, ou gráficos, assim como coordenadas de pontos (arredondadas às décimas) de interesse para as conclusões.

Retirado do manual Espaço B da Edições Asa

Anexo 4 – Tarefa *Um estudo sobre pontos notáveis das funções polinomiais*



EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ______________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

UM ESTUDO SOBRE PONTOS NOTÁVEIS DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS

Seja **p** a família de funções reais de variável real definidas pela expressão

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, em que $a_0, a_1, \ldots, a_n \in$ IR, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $a_n \neq 0$.

Estude esta família de funções quanto à existência de zeros e ao número de extremos relativos.

Utilize o software Geogebra para fazer o seu estudo.

No final da atividade deverá elaborar um relatório escrito onde sejam apresentadas todas as observações e conclusões tiradas durante a investigação.

Adaptado de *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*

Anexo 5 – Tarefa *Praga de escaravelhos*

EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ______________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

PRAGA DE ESCARAVELHOS

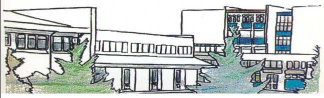
Num certo dia uma plantação de batata foi invadida por uma praga de escaravelhos. O número, N(t), **em milhares** de escaravelhos, evoluiu com o tempo, t, **em dias**, até serem eliminados de acordo com o seguinte modelo matemático:

$$N(t) = 0{,}0001t^3 – 0{,}24t^2 + 1{,}8t + 12.$$

Numa pequena composição descreva a evolução da praga.

Adaptado do manual Matemática A2 da Porto Editora

Anexo 6 – Critérios de classificação da composição da tarefa *Laboratório*



EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ________________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

- De que modo evolui o nível de poluição:
  - Uso correcto da calculadora;
  - Construção do gráfico;
  - Descrição fundamentada do observado;
- Tempo em que o nível de poluição do ar é inferior a 0,7 mg/l:
  - Identificar os momentos em que o nível de poluição do ar é 0,7 mg/l;
  - Identificar o intervalo de tempo em que o nível de poluição do ar é inferior a 0,7 mg/l;
- Interpretação dos dados obtidos:
  - Verificar que não é possível realizar a experiência A;
  - Verificar que é possível realizar a experiência B.

Na tabela seguinte indica-se como esta questão é cotada:

Forma / **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os três pontos	100	90	80
A composição contempla os dois pontos	70	60	50
A composição contempla um ponto	30	20	10

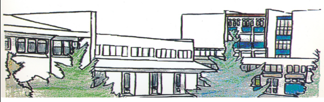
(*) Nível 1 – Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de sentido.

(**) Nível 2 – Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de sentido.

(***) Nível 3 – Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Anexo 7 – Guião para a elaboração de um relatório



EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ______________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

GUIÃO PARA A ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO

Um relatório é um trabalho escrito que descreve uma situação, analisando-a e criticando-a. O relatório deve indicar com clareza todo o desenvolvimento do trabalho, isto é, todos os procedimentos utilizados, todas as observações, conclusões e críticas.

Na elaboração de um relatório deve ter em conta, entre outros, os seguintes aspetos:

Identificação do aluno/ grupo de alunos indicando:

Nome, número, turma, escola, data de realização; disciplina.

Introdução (realizada em grupo)

Identificação do trabalho indicando o título. Descrição da tarefa proposta referindo o seu objetivo, materiais utilizados, …

Desenvolvimento (realizado em grupo)

Descrição pormenorizada do processo de resolução (podem ser incluídos esquemas, tabelas, esboços de gráficos…). Explicação dos raciocínios.
Identificação de dificuldades encontradas, tentativas realizadas, erros cometidos e o modo como estes foram corrigidos; …

Conclusão (realizada individualmente)

Discussão dos resultados obtidos; apresentação das conclusões, devidamente justificadas.
Interesse da tarefa; apreciação autocrítica do trabalho realizado.

Bibliografia utilizada

O relatório será avaliado de acordo com os critérios apresentados a seguir.

Em grupo

Apresentação do relatório	0 Não respeita a estrutura proposta. Apresenta o relatório muito rasurado e sujo.	1 Não respeita grande parte da estrutura proposta. Apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	2 Respeita em grande parte a estrutura proposta. Apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	3 Respeita completamente a estrutura proposta. Apresenta o relatório limpo e sem rasuras.
Recurso a estratégias e Processo de exploração	0 Não apresenta estratégias apropriadas. Não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.	1 Apresenta estratégias apropriadas. Apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	2 Apresenta estratégias apropriadas. Apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.	3 Apresenta estratégias apropriadas. Apresenta um processo de exploração organizado e completo.
Mobilização de informação/ conhecimentos	0 Não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.	1 Reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mas não os aplica adequadamente.	2 Reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os adequadamente.	3 Reconhece e aplica informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mostrando compreensão de relação entre eles.
Comunicação da atividade desenvolvida	0 Comete muitos erros ortográficos e/ ou apresenta uma construção frásica muito deficiente, dificultando a compreensão do que está escrito. Não utiliza linguagem matemática. Não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram. Não descreve nem explica as conclusões obtidas.	1 Comete erros ortográficos e, por vezes, apresenta uma construção frásica incorrecta, mas a compreensão do que está escrito não é dificultada. Utiliza linguagem matemática com imprecisões. Descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram. Descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	2 Utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. Utiliza linguagem matemática com pequenas imprecisões. Descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. Descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	3 Utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. Utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados. Descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. Descreve as conclusões obtidas, e explica-as na totalidade.

Individualmente

	0	1	2	3
Reflexão crítica sobre a atividade	Não salienta as ideias centrais da atividade e/ ou refere ideias não relacionadas com a atividade. Não dá uma opinião sobre a atividade desenvolvida. Não avalia o seu trabalho.	Apresenta ideias relacionadas com a atividade, mas não destaca as essenciais. Dá uma opinião sobre a atividade desenvolvida, mas não a justifica. Não avalia o seu trabalho.	Apresenta as ideias centrais da atividade. Comenta a atividade desenvolvida. Avalia o seu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o seu desempenho no grupo e explicando as principais dificuldades sentidas.	Apresenta as ideias centrais da atividade, de forma clara. Comenta a atividade desenvolvida. Avalia o seu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o seu desempenho no grupo, explicando as principais dificuldades sentidas e identificando aspetos a melhorar.

Anexo 8 – “Relatório modelo”

Relatório

Partindo do Teorema de Pitágoras

Identificação elementos do grupo

Nomes, números e turma

Introdução (realizada em grupo)

Neste relatório vamos falar sobre o trabalho desenvolvido em torno da tarefa Partindo do Teorema de Pitágoras.

Esta tarefa pedia-nos para investigar possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras. Para isso tínhamos que conhecer o Teorema de Pitágoras e saber que ele diz que num triângulo rectângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Depois queríamos saber se esta relação entre as áreas se mantinha para outras figuras geométricas construídas sobre os lados de um triângulo rectângulo.

Para a realização da actividade usamos: régua; transferidor; calculadora; compasso; lápis; borracha; canetas; papel.

Desenvolvimento (realizado em grupo)

Começamos por ler o que nos era pedido na tarefa e responder à alínea a. Para isso desenhámos um triângulo rectângulo e construímos triângulos equiláteros sobre os seus lados (como se pode ver na folha em anexo). Na construção dos triângulos equiláteros usámos o compasso para os lados de cada triângulo ficarem todos com o mesmo comprimento. Para confirmar que tínhamos construído bem os triângulos equiláteros, medimos com o transferidor a amplitude dos seus ângulos internos e vimos que todos mediam 60º ($\frac{180º}{3} = 60º$).

Como não sabíamos muito bem o que era para fazer a seguir, chamámos o professor para nos ajudar. Ele disse para lermos novamente o enunciado. Depois de uma nova leitura, percebemos que tínhamos que calcular as áreas dos triângulos equiláteros. Medimos com a régua a base e a altura de cada triângulo equilátero, calculámos as áreas na calculadora e obtivemos os valores que estão na folha em anexo. Adicionámos as áreas dos triângulos construídos sobre os catetos e vimos que o valor obtido é igual ao da área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa. Os valores não deram bem iguais, há uma diferença de milímetros quadrados, mas existem sempre falhas no desenho. O desenho não é totalmente rigoroso, como acontecia se fosse feito no computador.

Depois desenhámos outro triângulo rectângulo e construímos rectângulos sobre os seus lados, como se pode ver na folha em anexo. Fizemos as medições necessárias, calculámos a área de cada rectângulo e obtivemos os valores que estão na folha em anexo. Adicionámos as áreas dos rectângulos construídos sobre os catetos e vimos que o valor obtido é diferente do valor da área do rectângulo construído sobre a hipotenusa.

Ficámos preocupados porque achávamos que tínhamos feito tudo bem e a relação entre as áreas não acontecia para estes rectângulos. Por isso, pedimos ajuda ao professor. Com a sua ajuda vimos que para a relação entre as áreas se manter para os rectângulos, os lados desses rectângulos tinham que ser proporcionais. Para construirmos os rectângulos de lados proporcionais tivemos que fazer algumas contas para saber quais deviam ser os comprimentos dos seus lados, como está na folha em anexo.

Depois calculámos as áreas dos três rectângulos e vimos que a área do rectângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos rectângulos construídos sobre os catetos.

Como já não tínhamos muito tempo, passámos à alínea c), construímos um triângulo rectângulo, descobrimos o ponto médio dos seus lados e com o compasso construímos semi-circunferências sobre esses lados. Calculámos a área das circunferências e dividimos os valores obtidos por dois para termos as áreas das semi-circunferências. Como se pode ver pelos cálculos a área da semi-circunferência construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das semi-circunferências construídas sobre os catetos.

Depois procurámos responder à alínea d e encontrar uma conjectura sobre as áreas de figuras construídas sobre os lados de um triângulo rectângulo. Nas experiências que fizemos vimos que em alguns casos a área da figura construída sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Isto funciona para alguns polígonos (como os quadrados, os triângulos equiláteros e os rectângulos de lados proporcionais) e para as semi-circunferências. Para algumas figuras não funciona como é o caso dos rectângulos que não têm os lados proporcionais. Concluímos que o Teorema de Pitágoras pode ser generalizado, a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo também acontece para outras figuras, mas não todas.

Conclusão (realizada individualmente)

A actividade correu bem, apesar de no meu grupo termos tido algumas dificuldades e nem sempre estarmos de acordo. Todos nos esforçámos por responder ao que era pedido e participámos no trabalho. Quando tínhamos dúvidas às vezes falávamos entre nós ou pedíamos ajuda ao professor. Mas sei que devíamos discutir mais o nosso trabalho antes de falarmos com o professor.

Eu procurei participar no trabalho, dar as minhas opiniões e ouvir os outros. Tive algumas dificuldades em perceber o que era pedido no início, mas depois de ler o enunciado com atenção e de falar com os meus colegas e professor percebi o que tinha que fazer. Também me lembrei como se calcula a área das circunferências e o que significa o Teorema de Pitágoras, que já me tinha esquecido. Das próximas vezes vou tentar ler com atenção o enunciado antes de começar a tarefa e vou falar mais com os meus colegas de grupo para tirar as minhas dúvidas e também os ajudar.

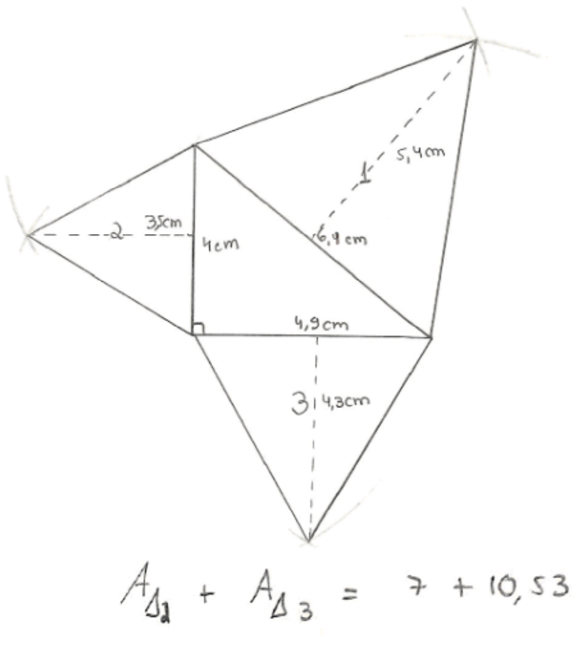
Com a actividade realizada aprendi que o Teorema de Pitágoras pode estender-se a outras figuras, mas não a todas. Se construirmos um triângulo rectângulo e construirmos sobre os seus lados figuras geométricas, em alguns casos a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.

Eu penso que a tarefa foi interessante pois permitiu-nos relembrar o Teorema de Pitágoras para o sabermos usar. A tarefa também foi boa para trabalhar em grupo, questionarmo-nos uns aos outros e podermos organizar e apresentar as nossas ideias, pensamentos e respostas.

Construções e Cálculos

Folha em Anexo ao Relatório

a)



$$A_{\Delta} = \frac{b \times a}{2}$$

$$A_{\Delta_1} = \frac{6,4 \times 5,4}{2} = 17,28\ cm^2$$

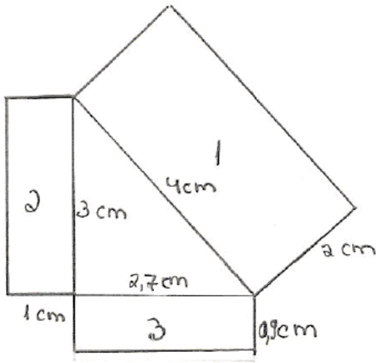
$$A_{\Delta_2} = \frac{4 \times 3,5}{2} = 7\ cm^2$$

$$A_{\Delta_3} = \frac{4,9 \times 4,3}{2} = 10,535\ cm^2$$

$$A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3} = 7 + 10,535 = 17,535\ cm^2$$

$$A_{\Delta_2} + A_{\Delta_3} \simeq A_{\Delta_1}$$

b)



$$A_{\square} = c \times l$$

$$A_{\square 1} = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$$

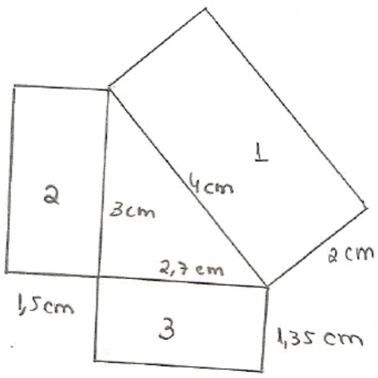
$$A_{\square 2} = 3 \times 1 = 3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 3} = 2,7 \times 0,9 = 2,43 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 2} + A_{\square 3} = 3 + 2,43 = 5,43 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 2} + A_{\square 3} \neq A_{\square 1}$$

c)



$$A_{\square} = c \times l$$

$$A_{\square 1} = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 2} = 3 \times 1,5 = 4,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 3} = 2,7 \times 1,35 = 3,645 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square 2} + A_{\square 3} = 4,5 + 3,645 =$$
$$= 8,145 \text{ cm}^2$$

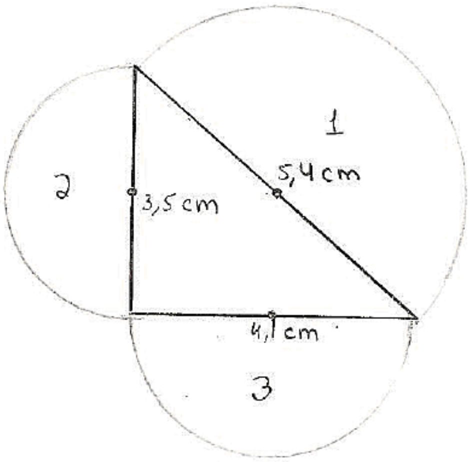
Proporções:

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{x}$$
$$4x = 6$$
$$x = \frac{6}{4}$$
$$x = 1,5 \text{ cm}$$

$$\frac{4}{2,7} = \frac{2}{y}$$
$$4y = 5,4$$
$$y = \frac{5,4}{4}$$
$$y = 1,35 \text{ cm}$$

$$A_{\square 2} + A_{\square 3} \simeq A_{\square 1}$$

d)



$\frac{5,4}{2} = 2,7 = r_1$

$\frac{3,5}{2} = 1,75 = r_2$

$\frac{4,1}{2} = 2,05 = r_3$

$A_{\odot} = \pi \times r^2$

$A_{\odot 1} \simeq 3,14 \times 2,7^2 = 22,8906 \text{ cm}^2$

$A_{\odot 2} \simeq 3,14 \times 1,75^2 = 9,61625 \text{ cm}^2$

$A_{\odot 3} \simeq 3,14 \times 2,05^2 = 13,19585 \text{ cm}^2$

$A_{\odot 2} + A_{\odot 3} =$

$= 9,61625 + 13,19585 =$

$= 22,8121 \text{ cm}^2$

$A_{\odot 2} + A_{\odot 3} \simeq A_{\odot 1}$

Anexo 9 – Autorização solicitada ao Director da Escola

Exmo. Sr. Director da
Escola Secundária de XXX

Assunto: Pedido de autorização para o desenvolvimento do projeto de investigação com a turma B do 10º ano.

Eu, Maria Manuela Amorim Teixeira, docente da disciplina de Matemática na Escola Secundária de XXX, solicito a V. Exa. a autorização para desenvolver com a turma B do 10º ano um projeto de investigação, no âmbito da Dissertação de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências (Especialização Matemática).

Pretendo com este projeto investigar que tipo de comunicação matemática é desenvolvido pelos alunos no trabalho com tecnologias na aula de matemática. A comunicação matemática é uma capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática que ganha destaque no Novo Programa de Matemática para o ensino básico, que será generalizado em 2010/11 a todas as escolas do país. No ensino secundário, esta capacidade é já avaliada nos exames nacionais.

Para este efeito necessito observar e recolher dados (registos escritos, áudio ou vídeo) durante a realização das atividades. Poderei ainda entrevistar alguns alunos, em horário extracurricular, para compreender os seus sentimentos face às tarefas propostas e para clarificar um ou outro aspeto menos explícito.

Comprometo-me para que todos os dados recolhidos sejam totalmente confidenciais e somente utilizados por mim como objetos deste estudo.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

XXX, 27 de Novembro de 2009

____

Maria Manuela Amorim Teixeira

Anexo 10 – Informação aos Encarregados de Educação dos alunos participantes

Exmo(a). Sr. (a) Encarregado(a) de Educação

<u>Assunto</u>: Desenvolvimento de um projeto de investigação na aula de Matemática

No âmbito da Dissertação de Mestrado em Didáctica e Inovação no Ensino das Ciências (Especialização Matemática), irei implementar, a partir do segundo período, um leque de tarefas que visam investigar a comunicação escrita desenvolvida pelos alunos, no trabalho com tecnologias, na aula de matemática. A comunicação matemática é uma capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática que ganha destaque no Novo Programa de Matemática para o ensino básico, que será generalizado em 2010/11 a todas as escolas do país. No ensino secundário, esta capacidade é, desde há alguns anos, avaliada nos exames nacionais.

Este projeto será desenvolvido nas aulas de Matemática, em colaboração com o professor da disciplina, Dr. Paulo Gonçalves.

Para este efeito, irei observar e recolher dados durante a realização das atividades. Poderei ainda entrevistar alguns alunos, em horário extracurricular, para compreender os seus sentimentos face às tarefas propostas e para clarificar um ou outro aspeto menos explícito.

Comprometo-me a assegurar a confidencialidade de todos os dados recolhidos que serão utilizados exclusivamente no estudo em desenvolvimento.

Informo também que todo este processo foi planificado de acordo com as orientações do programa de Matemática para o 10º ano e que obteve aprovação do Conselho Pedagógico.

Estarei à sua disposição para esclarecer qualquer dúvida que queira ver elucidada.

Sinceros agradecimentos.

XXX, 21 de Dezembro de 2009

A docente de Matemática

____

…………………………………………………………………………………………………..

Tomei conhecimento da situação acima descrita.

O(A) Encarregado(a) de Educação do aluno ____________________nº___do 10º B.

Assinatura:

____

Anexo 11 – Questionário aplicado aos alunos participantes

A informação recolhida será exclusivamente utilizada na minha dissertação de mestrado.

Tem calculadora gráfica? Sim ___ Não ___
Em caso afirmativo, diga qual o modelo e em que situações a costuma utilizar.

Qual é a importância da calculadora gráfica na aprendizagem da matemática e em que aspetos o seu uso ajudou na realização das tarefas “Laboratório” e “À procura do vértice de uma função quadrática?

Tem computador? Sim ___ Não ___
Em caso afirmativo, diga para que o utiliza.

Conhece programas de computador (software matemático) específicos para a disciplina de matemática? Se sim, indique-os. Em que situações os utilizou? Para quê?

Considera importante o recurso ao computador na aprendizagem da matemática? Em que situações concretas a sua utilização o ajudou na realização das tarefas “Aeromodelismo” e “Pontos notáveis das funções polinomiais”?

Usou algum recurso tecnológico para a realização da Tarefa "A praga de insectos"? Se sim diga qual e porquê?

De entre as várias tarefas propostas na aula de matemática, qual a que mais gostou de realizar? Explique porquê?

De entre as várias tarefas propostas na aula de matemática, qual a que menos gostou de realizar? Explique porquê?

O facto de usar tecnologias motivou-o para a realização das tarefas?
Sim ___ Não ___ Porquê?

Já tinha elaborado alguma composição escrita em Matemática? Sim ___ Não ___
Em que situação?

Qual a sua opinião quanto à realização de composições em Matemática?

O que é importante que esteja numa composição?

Sentiu dificuldade na realização das composições? Se sim, indique duas.

Uma composição deve ter gráficos e/ ou tabelas e/ ou expressões algébricas e/ou linguagem escrita? Sim ___ Não ___
Porquê?

Já tinha elaborado algum relatório na disciplina de Matemática? Sim ___ Não ___
Em que situação?

Qual a sua opinião acerca dos relatórios escritos em matemática?

O que é importante que apareça num relatório em matemática?

Sentiu dificuldade na realização dos relatórios? Se sim, diga quais.

Um relatório deve ter gráficos e/ ou tabelas e/ ou expressões algébricas e/ou linguagem escrita? Sim ___ Não ___
Porquê?

Na sua opinião, qual é a diferença ou diferenças entre uma composição e um relatório?

Os comentários, feitos pela professora ao seu trabalho, ajudaram a melhorar a sua comunicação escrita? Porquê?

____
____
____
____

O relatório modelo e o guião de elaboração de um relatório ajudaram na elaboração dos relatórios? De que forma?

____
____
____
____

A Matemática é uma disciplina onde se deve escrever muito ou pouco? Porquê?

____
____
____
____

As tarefas realizadas ajudaram a melhorar a sua capacidade de elaborar composições ou relatórios? Sim ___ Não ___
Porquê?

____
____
____
____

A comunicação escrita é importante para a disciplina de Matemática? Sim ___ Não ___
Porquê?

____
____
____
____

Gostou de realizar as tarefas propostas? Sim ___ Não ___
Porquê?

____
____
____
____

O trabalho em pares ajudou-o na realização das tarefas? Sim ___ Não ___
De que forma?

____
____
____
____

Obrigada pela sua colaboração.

Anexo 12 – Guião da entrevista ao aluno 1

P – Numa das respostas ao questionário afirmaste “A máquina auxiliou-me na visualização de gráficos e tabelas, facilitando as conclusões”. Em que sentido?

P – Quando introduzimos uma função na calculadora, utilizamos quase sempre a expressão algébrica. Achas que a expressão algébrica não é tão importante?

P- Quais as representações que mais ajudam a colocar por escrito o teu pensamento? A expressão algébrica, verbal, tabelas, gráficos, pictóricas. Porquê?

P – Na segunda tarefa, “Aeromodelismo”, fizeste a composição ”à mão”, apesar de o teu colega insistir para utilizares o computador. Porquê?

P - A tarefa que mais gostaste de realizar foi “À procura do vértice de uma função quadrática” pois “permitiu retirar conclusões mais interessantes”. O que é que achaste mais interessante?

P – No teu questionário respondeste a uma das questões “o uso das tecnologias facilita certas atividades e a organização de ideias”. Queres explicar-me melhor?

P – Também disseste que o Geogebra te auxiliou sobretudo na tarefa “Pontos notáveis das funções polinomiais”. Apesar de termos realizado duas tarefas com o Geogebra porque é que te ajudou mais nesta?

P – Quando no questionário perguntava se em Matemática se devia escrever muito ou pouco, respondeste “Depende das situações”. Queres explicar melhor?

P – Por que utilizaste a calculadora gráfica e não o Geogebra na última tarefa “Praga de insectos”?

P – Consideras importante desenvolver a comunicação escrita?

Muito obrigada pela tua colaboração.

Anexo 13 – Guião da entrevista ao aluno 4

P – No questionário, uma das tuas primeiras afirmações foi "a calculadora permite tirar conclusões mais facilmente". Porquê? E o Geogebra?

P – Na tarefa "Praga de insectos" usaste a calculadora pois, como afirmaste, "permitiu verificar como evoluiu a praga". Porque é que não usaste o Geogebra, apesar deste permitir fazer o mesmo?

P- Também afirmaste que os relatórios escritos "permitem ter um conhecimento mais profundo sobre o assunto em estudo". Como?

P- Quais as representações que mais ajudam a colocar por escrito o teu pensamento? A expressão algébrica, verbal, tabelas, gráficos, pictóricas. Porquê?

P – No questionário, à pergunta "a Matemática é uma disciplina onde se deve escrever muito ou pouco" respondeste "deve-se escrever pouco pois deve-se colocar apenas os cálculos e as conclusões". Não consideras importante explicar o raciocínio, o desenvolvimento da tarefa?

P – Consideras importante desenvolver a comunicação escrita?

Muito obrigada pela tua colaboração.

Anexo 14 – Guião da entrevista ao aluno 15

P – No questionário afirmaste, sobre realização da tarefa "Praga de Insectos", que utilizaste o Geogebra em vez da calculadora pois "Geogebra é mais fácil do que na calculadora". Porque consideras mais fácil?

P – Também afirmaste no teu questionário que "é preferível realizar graficamente do que analiticamente". Porquê?

P- Quais as representações que mais ajudam a colocar por escrito o teu pensamento? A expressão algébrica, verbal, tabelas, gráficos, pictóricas. Porquê?

P – Não respondeste à questão "Sentiu dificuldade na realização das composições?". Não sentiste dificuldades?

P – No questionário, à pergunta "a Matemática é uma disciplina onde se deve escrever muito ou pouco" respondeste "depende da situação, ou seja, da matéria que se está a dar". Queres explicar melhor?

P – Consideras importante desenvolver a comunicação escrita?

Muito obrigada pela colaboração.

Anexo 15 – Guião da entrevista ao aluno 20

P – Na última aula, em que foi realizada a tarefa "Praga de insectos" e em que tinham de optar pelo uso da calculadora ou do computador, optaste pela calculadora pois, como afirmaste no questionário, "facilita o estudo da situação". Mas inicialmente começaste por usar o Geogebra. Porque não continuaste?

P – Afirmaste no teu questionário que a tarefa que menos gostaste de fazer foi "À procura do vértice de uma função quadrática" pois "deu trabalho a preencher a folha pois as perguntas eram bastante iguais". Queres explicar melhor?

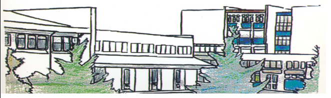
P- Quais as representações que mais ajudam a colocar por escrito o teu pensamento? A expressão algébrica, verbal, tabelas, gráficos, pictóricas. Porquê?

P – No questionário, à pergunta "a Matemática é uma disciplina onde se deve escrever muito ou pouco" respondeste "depende dos conteúdos". Queres explicar melhor?

P – Consideras importante desenvolver a comunicação escrita?

Muito obrigada pela tua colaboração.

Anexo 16 – Feedback fornecido à composição da tarefa *Laboratório*



EBS DE XXX

10.º ANO **MATEMÁTICA A**

NOME ________________________________ **TURMA** ___ **N.º** ___

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

- De que modo evolui o nível de poluição:
    - Uso correcto da calculadora;
    - Construção do gráfico;
    - Descrição fundamentada do observado;
- Tempo em que o nível de poluição do ar é inferior a 0,7 mg/l:
    - Identificar os momentos em que o nível de poluição do ar é 0,7 mg/l;
    - Identificar o intervalo de tempo em que o nível de poluição do ar é inferior a 0,7 mg/l;
- Interpretação dos dados obtidos:
    - Verificar que não é possível realizar a experiência A;
    - Verificar que é possível realizar a experiência B.

Na tabela seguinte indica-se como esta questão é cotada:

Forma **Conteúdo**	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os três pontos	100	90	80
A composição contempla os dois pontos	70	60	50
A composição contempla um ponto	30	20	10

(*) Nível 1 – Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de sentido.

(**) Nível 2 – Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ ou de sentido.

(***) Nível 3 – Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ ou de sentido.

<u>De que modo evolui o nível de poluição:</u>

Quando o purificador está ligado, as imagens da função P(t), vão diminuindo, até atingir um mínimo, pois o purificador diminui os níveis de poluição do ar.

. com a observação do gráfico e com as informação do enunciado, se o purificador estiver ligado algum certo periodo de tempo, e quando está ligado o nível de poluição diminui, o purificador estiver ligado até ao momento em que. a poluição aumentou.

<u>Tempo em que o nível de poluição do ar é inferior a 0,7 mg/l:</u>

seguida inserimos uma recta, "y = 0.7", em que esta indica o nível de poluição do ar. A partir deste exercício, o que queremos saber é durante quanto tempo o nível de poluição do ar se encontra inferior a 0.7 mg/l de ar. Então, como este nível de poluição do ar já está representado pela recta: "y = 0.7", logo basta fazer a intersecção desta com a parábola. Depois de realizarmos esta intersecção na máquina, esta indicou-nos que era entre as 10h. e 15h. que o nível de poluição do ar era inferior a 0.7 mg/l de ar.

determinar o intervalo de tempo que decorre, quando o nível de poluição é 0.7 mg/l, fazendo posteriormente a comparação com os valores necessários para a realização das experiências, sabendo assim se é possível efectuá – las. **Para tal, é necessário determinar a intersecção do gráfico da função com a recta 0.7.**

De 10 a 15, é o tempo que decorre quando o nível de poluição é 0.7. Ou seja, o intervalo de tempo é de 5horas, (15-10).

pelo gráfico podemos ver que com nível inferior a 0,7 mg/l de poluição só é possível estar 5 horas(para y<0,7 vem 10<x<15).

<u>Interpretação dos dados obtidos:</u>

Verifico que só durante 5 horas é que os níveis de poluição do ar se encontram abaixo de 0,7. Segundo o enunciado a experiência A necessita de 6 horas para se realizar, logo não se realiza(maior que 5), mas a experiência B necessita de 4h30min. =4,5horas logo realiza-se (

Para a realização da experiência A é necessária uma duração de 6 horas, logo não é possível realizar a experiência, pois 6horas é maior que 5horas.

Para a realização da experiência B é necessária uma duração de 4h30min, logo é possível realizar a experiência, uma vez que 4h30min é menor que 5horas.

Se a experiência só pode ser realizada quando o nível de poluição $\leq 0,7$ e o tempo que permite essa experiência é de 5 horas. $5h < 6h$. Logo a experiência A não é possível de realizar

Se a experiência só pode ser realizada quando o nível de poluição seja $\leq 0,7$ mg/l e o tempo que permite com estas condições a realização da experiência é 5h. $5h > 4h$ e 30m. Logo a experiência B é possível de realizar