CATARINA FILIPA DA SILVA GUERREIRO

NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO COM BANDEIRAS DE PAÍSES NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO

2023

CATARINA FILIPA DA SILVA GUERREIRO

NÚMEROS RACIONAIS: UM ESTUDO COM BANDEIRAS DE PAÍSES NO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação de:

Doutor Fernando Miguel Granja Martins

UNIVERSIDADE DO ALGARVE

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO

2023

Números Racionais: um estudo com bandeiras de países no 2.º ciclo do ensino básico

Declaração de autoria do trabalho

Declaro ser a autora deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Agradecimentos

Agradeço a toda a minha família, principalmente aos meus pais e aos meus tios, por me terem apoiado nesta que foi uma fase tão importante da minha vida, que teve muitos percalços e onde existiu muitas vezes uma grande vontade de desistir, mas que graças a eles não passou de uma vontade.

Agradeço ao meu namorado e à família do meu namorado que tenho a sorte de poder dizer que também se tornou minha, por me ter ajudado sempre que eu precisava e por ter festejado comigo todas as minhas vitórias.

Agradeço a todos os meus amigos, especialmente à Ana Orelhas, à Ana Dias e ao Duarte Firme, por terem estado comigo nos bons e nos menos bons momentos da minha vida e por sempre me apoiarem.

Agradeço a todas as crianças e docentes que cruzaram o meu caminho durante a minha prática profissional porque sem elas nada disto teria sido possível. Todas elas me fizeram perceber que estava no caminho certo e que por muitas adversidades que existam devemos fazer tudo com paixão porque um dia iremos ser recompensados.

Agradeço a todos os meus colegas e professores que me apoiaram e estiveram presentes no decorrer desta etapa que foi tão importante.

Ao meu orientador, professor doutor Fernando Martins, por ter aceitado este desafio e por me ter ajudado ao longo de todas as etapas com muita boa disposição e paciência.

Agradeço especialmente à pessoa que tinha o sonho que eu acabasse a escola.

Resumo

Este relatório de Prática de Ensino Supervisionada do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico, da Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, aborda a temática dos números racionais, na forma de fração, e tem por objetivo desenvolver a compreensão do número racional em alunos do 2.º ciclo do ensino básico, através da execução de tarefas matemáticas, envolvendo bandeiras de diferentes países, tendo por questão de investigação: Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos, na realização de tarefas matemáticas sobre números racionais, envolvendo bandeiras de países?

As aulas decorreram no Agrupamento de Escolas Manuel Teixeira Gomes, em Portimão, numa turma do 5.º ano de escolaridade, com vinte alunos, organizados em cinco grupos, no ano letivo de 2022/23. As aulas, três tempos de cinquenta minutos, assumiram o modelo do ensino exploratório da matemática, com quatro fases, nomeadamente, apresentação, realização e discussão das tarefas e sistematização das aprendizagens matemáticas.

A investigação seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa, em que a recolha de dados emergiu da observação direta na sala de aula, tendo por suporte as produções escritas dos alunos e as gravações áudio, em cada um dos grupos, e a análise dos dados fundamentou-se na exposição das estratégias e dificuldades dos alunos na resolução das tarefas matemáticas.

Os dados revelam que os alunos apresentam aptidão na identificação da fração quando as bandeiras eram totalmente vermelhas, metade vermelhas, com duas faixas horizontais ou verticais ou triangulares, ou com três faixas retangulares, horizontais ou verticais, com uma ou duas vermelhas. Exteriorizaram maior dificuldade nas situações em que as regiões vermelhas eram descontínuas ou que, sendo contínuas, tinham proporções diferentes. As maiores complexidades reportam-se às situações em que parte da região colorida são triângulos ou outras formas não retangulares.

Palavras-chave: Números racionais, 2.º ciclo do ensino básico, frações, bandeiras.

Abstract

This report of Supervised Teaching Practice of the master’s degree in Teaching in the1st cycle of basic education and Mathematics and Natural Sciences in the 2nd cycle of basic education, of the School of Education and Communication of the University of Algarve, addresses the theme of the rational numbers, in fraction form, and aims to develop the understanding of the rational number in students of the 2nd cycle of basic education, through the execution of mathematical tasks, involving flags of different countries, having as a research question: Which strategies developed by students, in the realization of mathematical tasks about rational numbers, involving flags of different countries?

The classes took place in the School Grouping Manuel Teixeira Gomes, in Portimão, in a 5th grade class, with twenty students, organized into five groups, in the school year 2022/23. The lessons, three times of fifty minutes, assumed the model of exploratory teaching of mathematics, with four phases, namely, presentation, implementation and discussion of tasks and systematization of mathematical learning.

The research followed a qualitative and interpretative approach, in which data collection emerged from direct observation in the classroom, supported by the students' written productions and audio recordings in each group, and data analysis was based on the exposure of the students' strategies and difficulties in solving mathematical tasks.

The data reveal that the students show aptitude in identifying the fraction when the flags were totally red, half red, with two horizontal or vertical or triangular stripes, or with three rectangular stripes, horizontal or vertical, with one or two red. They expressed greater difficulty in situations in which the red regions were discontinuous or that, being continuous, had different proportions. The greatest complexities were related to situations in which part of the coloured region were triangles or other non-rectangular shapes.

Keywords: Rational numbers, 2nd cycle of basic education, fractions, flags.

Índice

Introdução

O presente estudo foi realizado no âmbito do mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e em Matemática e Ciências Naturais do 2.º ciclo do ensino básico, mais especificamente na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada. A aplicação, concretização e recolha de dados da investigação realizou-se numa turma de 5.º ano do 2.º ciclo do ensino básico, numa escola do Agrupamento de Escolas Manuel Teixeira Gomes, no concelho de Portimão, durante o ano letivo 2022/23.

A temática deste estudo está centrada nos números racionais, mais especificamente nas frações, visto que é um tema em que normalmente os alunos possuem alguma dificuldade de compreensão e aprendizagem. Como referem Monteiro e Pinto (2007),

> Uma mecanização desprovida de significado que em nada contribui para uma aprendizagem que possa ser mobilizada para resolver uma situação concreta, é uma das causas apontadas na literatura especializada para os maus resultados dos alunos na compreensão dos racionais (p. 17).

As investigações no campo da educação matemática sugerem fracos resultados dos alunos no trabalho com números racionais, nomeadamente em relação aos diferentes significados e às diferentes formas de os representar, podendo este facto estar relacionado com a metodologia de ensino (Lamon, 2007). O ensino dos números racionais decorre de um trabalho com frações, numerais decimais e percentagens, sendo que todas estas representações apresentam dificuldades aos alunos (Tian & Siegler, 2018).

O tema dos números racionais começa a ser introduzido a partir do 2.º ano de escolaridade, prolongando-se por todo o ensino básico, no entanto, desde essa altura que a maneira de o introduzir e de o desenvolver é baseada em procedimentos rotineiros, não despertando nos alunos o interesse suficiente para a sua compreensão, fundamental no estudo da matemática.

No desenvolvimento da aprendizagem dos números racionais, o professor deverá colocar mais ênfase na apreensão do conceito e menos nos procedimentos e algoritmos. O uso precoce de regras e algoritmos não permite uma flexibilidade de pensamento e reduz a atividade do aluno à execução de exercícios rotineiros, realizados sem compreensão ou atribuição de significado (Aksoy & Yazlik, 2017; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Neste sentido, pretende-se desenvolver um conjunto de tarefas matemáticas que promovam o conceito de fração, numa relação parte-todo, associado à representação de áreas de uma bandeira, inspirado em Graça e Guerreiro (2016), sistematizando o conhecimento dos alunos no reconhecimento do número fracionário, nas situações em que as representações geométricas das regiões coloridas das bandeiras surgem: (i) de modo contínuo com iguais proporções, (ii) de modo contínuo com distintas proporções, (iii) de modo descontínuo com iguais proporções, e (iv) de modo descontínuo com distintas proporções.

A escolha desta temática deve-se, não só ao facto de ser considerado um conteúdo de difícil aprendizagem, como também, ao facto de ser um tema que, no decorrer do mestrado, tem vindo a ser introduzido de uma maneira motivadora para a sua aprendizagem e ensino. Para além da curiosidade nos números racionais, sempre existiu o objetivo de desenvolver a investigação para a dissertação de mestrado na área da matemática, visto ser ainda considerada como a disciplina com mais insucesso escolar e aquela pela qual os alunos já vão com a ideia prévia de que é de difícil aprendizagem.

Os números racionais são uma extensão dos números inteiros, sendo que todo o inteiro é racional, mas assumem características distintas:

> Os números racionais englobam tanto os números inteiros como os números fracionários. O conjunto dos números racionais, que habitualmente se representa por Q, resulta da reunião do conjunto dos números inteiros (Z) com o conjunto dos números fracionários (F), simbolicamente: $Q = Z \cup F$ (Menezes, 2011, p. 5).

O conhecimento dos números racionais é assim construído a partir dos números inteiros, mas existe significativas diferenças entre estes dois conjuntos numéricos e entre as diferentes representações simbólicas dos números racionais, fração, numeral decimal e percentagem (Siegler et al., 2013; Graça et al., 2023). Neste caso, o estudo foca-se na representação simbólica de fração: “Uma fração é uma razão de números naturais. Estas razões podem ser encaradas de diferentes formas, consoante o que se pretende significar" (Sequeira et al., 2009, p. 70). As frações podem ser consideradas como (i) quociente, (ii) expressão de uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguais, (iii) meio de comparação de duas grandezas (Sequeira et al., 2009).

Este trabalho, para além desta introdução, está estruturado em três capítulos, umas considerações finais e as respetivas referências bibliográficas. O primeiro capítulo aborda a dimensão teórica deste estudo, realçando a problemática dos números racionais no ensino e na aprendizagem. O segundo capítulo apresenta a dimensão empírica do estudo, salientando a questão de pesquisa, a natureza do estudo, os participantes, os métodos de recolha e análise de dados e os procedimentos éticos. O terceiro capítulo descreve os resultados da investigação, salientando as estratégias dos alunos na resolução das tarefas matemáticas implementadas. Nas considerações finais, tenta-se responder à questão de investigação, dá-se conta das dificuldades sentidas neste processo e aponta-se caminhos para o futuro. A bibliografia referenciada remata este relatório de prática de ensino supervisionada.

Capítulo I – Enquadramento Teórico

Este capítulo apresenta o enquadramento teórico da investigação, nomeadamente, o enquadramento dos números racionais nas aprendizagens essenciais para o ensino básico e o conceito de fração nos números racionais.

Os números racionais nas aprendizagens essenciais de matemática

Os números racionais surgem nas aprendizagens essenciais de matemática (Ministério de Educação, 2021), do 1.º ciclo do ensino básico, através de diferentes representações dos números racionais não negativos, na forma de fração, de decimal e de percentagens. Estes números são introduzidos no 2.º ano de escolaridade, através do significado de fração e da relação entre frações.

No 2.º ano, no tópico de significado de fração, os alunos deverão:

- Reconhecer a fração como possibilidade de representar uma quantidade não inteira relativa a uma relação parte-todo, sendo o todo uma unidade contínua, e explicar o significado do numerador e do denominador, no contexto da resolução de problemas.

- Representar uma fração de diversas formas, transitando de forma fluente entre as diferentes representações.

No tópico da relação entre frações, os alunos deverão:

- Reconhecer frações que representam a metade e quartos da unidade, no contexto de problemas de partilha equitativa.

- Reconhecer que uma fração cujo numerador e denominador são iguais corresponde a uma unidade.

- Comparar e ordenar frações unitárias em contextos diversos e recorrendo a representações múltiplas.

No 3.º ano de escolaridade, as aprendizagens previstas neste âmbito são, no tópico de significado de fração:

- Reconhecer a fração como representação de uma relação parte-todo e de quociente, sendo o todo uma unidade discreta, e explicar o significado do numerador e do denominador em contexto da resolução de problemas. Representar uma fração de diversas formas, transitando de forma fluente entre as diferentes representações.

No tópico de relação entre frações,

- Comparar e ordenar frações com o mesmo denominador em contextos diversos, recorrendo a representações múltiplas.

- Reconhecer a equivalência entre diferentes frações que representem a metade, a quarta parte e a terça parte.

No final no 1.º ciclo, as aprendizagens no 4.º ano de escolaridade, deverão abranger os tópicos relação entre frações, significado decimal, relação entre decimais e relação entre representações.

4.º ano de escolaridade – Relações entre frações

- Comparar e ordenar frações com o mesmo numerador, em contextos diversos, recorrendo a representações múltiplas.

4.º ano de escolaridade – Significado decimal

- Reconhecer o numeral decimal como possibilidade de representar uma quantidade não inteira, e associar $\frac{1}{10}$=0,1, $\frac{1}{100}$=0,01 e $\frac{1}{1000}$=0,001 no contexto de situações reais.

4.º ano de escolaridade – Relações entre decimais

- Ler, representar, comparar e ordenar decimais, em contextos variados e resolver problemas associados.

4.º ano de escolaridade – Relações entre representações

- Usar de forma fluente diferentes representações simbólicas de valores de referência envolvendo decimais, nomeadamente 0,50, $\frac{1}{2}$ e 50%; 0,25, $\frac{1}{4}$ e 25%; 0,75, $\frac{3}{4}$ e 75%; 0,1, $\frac{1}{10}$ e 10%, 0,01, $\frac{1}{100}$ e 1%.

Em síntese, será expectável que os alunos conheçam as diferentes formas de representação dos números racionais, frações, decimais e percentagens, e que compreendam a relação entre elas. No âmbito do significado das frações, as mesmas surgem sobre a forma da relação parte-todo e de quociente.

Assim, no 1.º ciclo do ensino básico, as orientações curriculares apontam para a iniciação do estudo dos números racionais não negativos a partir da representação em fração (com significado parte-todo e quociente), seguindo-se a representação decimal e a introdução à notação de percentagem.

No 2.º ciclo do ensino básico, as quatro operações elementares são alargadas aos números racionais não negativos e é introduzida a potenciação, nos tópicos frações, decimais e percentagens no 5.º ano e frações no 6.º ano.

5.º ano de escolaridade – Frações equivalentes

- Reconhecer e determinar frações equivalentes através de uma relação multiplicativa.

5.º ano de escolaridade – Percentagens

- Relacionar percentagens com frações de denominador 100.

5.º ano de escolaridade – Comparação e ordenação

- Comparar e ordenar frações e representá-las na reta numérica, comparando criticamente diferentes estratégias de resolução realizadas por si e por outros.

- Comparar e ordenar decimais e representá-los na reta numérica, comparando criticamente diferentes estratégias da resolução realizadas por si e por outros.

- Estabelecer relações entre frações, decimais e percentagens, no contexto da resolução de problemas.

5.º ano de escolaridade – Valores aproximados

- Determinar o valor aproximado de um número, por defeito e por excesso, até às centésimas.
- Fazer arredondamentos no contexto da resolução de problemas, até às centésimas.

5.º ano de escolaridade – Adição e subtração de frações

- Adicionar e subtrair frações, em casos em que um denominador é múltiplo do outro.

5.º ano de escolaridade – Multiplicação entre naturais e frações

- Reconhecer a multiplicação de um número natural por uma fração como a adição sucessiva dessa fração.
- Multiplicar uma fração por um número natural, dando significado à fração como operador.
- Interpretar e modelar situações que possam ser traduzidas pela multiplicação de dois números, sendo um deles uma fração e o outro um natural, recorrendo criticamente a representações adequadas para explicar as suas ideias.

5.º ano de escolaridade – Multiplicação com decimais

- Realizar multiplicações envolvendo decimais e números naturais.
- Relacionar a multiplicação de um número natural por 0,1; 0,01 e 0,001 com a sua multiplicação por $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ respetivamente.
- Multiplicar decimais até às centésimas.
- Formular e testar conjeturas, identificando regularidades no número de casas decimais do produto de dois decimais.

5.º ano de escolaridade – Divisão com decimais

- Realizar divisões envolvendo decimais e números naturais.

- Relacionar a divisão de um número natural por 0,1; 0,01 e 0,001 com a sua multiplicação por 10, 100 e 1000 respetivamente.

- Dividir decimais até às centésimas recorrendo ao cálculo mental ou por aplicação conjunta do algoritmo de divisão de naturais e do conhecimento da multiplicação e divisão de um natural por um decimal da forma 0,1 ou 0,01 ou 0,001.

5.º ano de escolaridade – Cálculo mental

- Compreender e usar com fluência estratégias de cálculo mental (com apoio em registos intermédios) para a adição e subtração de frações, mobilizando as propriedades das operações, para produzir estimativas de cálculo ou valor exato de um cálculo.

- Desenvolver e usar estratégias de cálculo mental com decimais, tirando partido da regra da multiplicação e divisão por 10, 100, 1000 e 0,1; 0,01 e 0,001, das propriedades das operações e da relação entre a multiplicação e divisão, comunicando de forma fluente.

- Analisar, comparar e ajuizar a adequação das estratégias de cálculo mental realizadas por si e por outros, apresentando e explicando os seus raciocínios.

- Decidir da razoabilidade do resultado de uma operação obtida por qualquer um dos processos (algoritmo, cálculo mental, calculadora).

6.º ano de escolaridade – Frações irredutíveis

- Determinar a fração irredutível equivalente a uma fração dada.

6.º ano de escolaridade – Adição e subtração de frações

- Adicionar e subtrair frações, reduzindo ao mesmo denominador.

6.º ano de escolaridade – Multiplicação de frações

- Multiplicar frações e representar geometricamente o resultado em situações simples.

- Reconhecer que dois números são inversos um do outro, quando o seu produto é 1.

6.º ano de escolaridade – Divisão de frações

- Reconhecer a fração como representação de uma medida, tomando uma unidade contínua, e explicar o significado do numerador e do denominador.

- Dividir duas frações com recurso à multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor.

6.º ano de escolaridade – Potências do tipo $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

- Compreender e usar com fluência estratégias de cálculo mental (com apoio em registos intermédios) para a adição e subtração de frações, mobilizando as propriedades das operações, para produzir estimativas de cálculo ou valor exato de um cálculo.

- Interpretar e modelar situações envolvendo potências do tipo $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ e calcular o seu valor.

6.º ano de escolaridade – Expressões Numéricas

- Usar expressões numéricas para representar uma dada situação e vice-versa.

- Calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações e potências, reconhecendo a importância do uso dos parênteses e o significado da prioridade das operações.

- Mobilizar as propriedades das operações.

- Analisar, comparar e ajuizar da simplicidade e eficácia de estratégias realizadas por si e por outros, apresentando e explicando raciocínios.

6.º ano de escolaridade – Cálculo mental

- Adicionar frações, recorrendo ao uso das propriedades da adição de forma a agilizar o cálculo, apresentando e explicando raciocínios e representações.

- Multiplicar frações, tirando partido das propriedades da multiplicação de forma a agilizar o cálculo, apresentando e explicando raciocínios e representações.

Em síntese, no 2.º ciclo do ensino básico, as orientações curriculares apontam para o desenvolvimento do sentido do número com números racionais não negativos e a aprendizagem das operações com estes números. Neste ciclo de ensino ainda está previsto o cálculo mental, envolvendo números racionais não negativos, em estreita relação com as propriedades das operações.

No 3.º ciclo do ensino básico os conjuntos numéricos e as operações são ampliados para os números racionais, incluindo os racionais negativos.

O tema dos números racionais, incluindo os racionais negativos, envolvendo o seu significado, nas representações de fração, decimal e percentagem, e as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, é estruturante no conhecimento da matemática no ensino básico. O estudo do conjunto dos números racionais amplia o conhecimento dos alunos, através de um conjunto numérico com características distintas dos números naturais e inteiros.

Números racionais: o conceito de fração

> Como as frações equivalem a relações entre os inteiros, também se lhes chama números racionais, e existe uma quantidade infinita deles (Bellos, 2012, p. 140).

Os números racionais surgem no currículo do ensino básico como uma ampliação dos números inteiros, estudados desde o 1.º ciclo até ao 3.º ciclo do ensino básico. Contudo, existe uma significativa diferença entre estes dois conjuntos, na forma da representação e no seu significado. Os números racionais podem ser representados por fração, decimal e percentagem, notações em que existe equivalência, entre elas, sendo que, as frações são representadas por dizimas finitas (decimais) ou dizimas infinitas periódicas. As dizimas infinitas não periódicas são números irracionais.

Monteiro e Pinto (2007) referem que a multiplicidade de significados de uma fração pode trazer ambiguidades no seu ensino e na sua aprendizagem. Ao nível elementar, as frações podem assumir os seguintes significados: (i) a relação parte-todo de uma unidade contínua; (ii) a relação parte-todo de uma unidade discreta; (iii) o quociente entre dois números inteiros representado pela fração $\frac{a}{b}$; (iv) operador de partitivo multiplicativo; (v) a medida; e (vi) a razão entre duas partes de um mesmo todo. As autoras realçam os diferentes tipos de unidades: simples ou unidades compostas, discretas ou contínuas. Graça et al. (2021) acrescentam que: "no caso de grandezas contínuas, as partes deverão ser equivalentes em dimensão, enquanto nas grandezas discretas, deverão ter a mesma quantidade de itens" (p. 687).

Neste estudo, vamos restringir a investigação à relação parte-todo, numa figuração de regiões geométricas contínuas com partes contínuas e descontínuas. Nos números racionais, "a relação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, o símbolo $\frac{a}{b}$ refere-se a uma parte fracionada de uma só unidade" (Monteiro & Pinto, 2005, p. 91). A fração, neste caso, surge "da comparação entre a parte e o todo, considerado este a unidade. O denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes escolhidas" (Monteiro & Pinto, 2005, p. 91).

As autoras alertam que a fração como relação entre a parte e o todo, aparece em diferentes situações didáticas, dado que esta "relação da parte com o todo é uma relação inerente aos números fracionários e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didática, pois o "todo" traduz a unidade fracionada" (Monteiro & Pinto, 2005, p. 92).

Assim, o estudo deste conjunto de números desenvolve um novo conhecimento sobre a natureza das representações numéricas, nomeadamente, quando se pretende determinar partes de um valor inteiro por medição (Palhares et al., 2011). Neste contexto,

> qualquer número racional, inteiro ou não inteiro, é representável por uma fração em que o numerador D representa um número inteiro e o denominador d representa um número natural (inteiro não nulo, $d \neq 0$). Estes termos, denominador e numerador, significam respetivamente: o número de partes equivalentes em que

> a unidade está decomposta; o número de partes equivalentes à parte unitária do denominador que estão a ser consideradas (Veloso, 2017, p. 5).

No contexto da aprendizagem, um dos aspetos que é realçado para justificar o insucesso na abordagem dos números racionais, é o nível abstrato e mecanicista do ensino. Num estudo desenvolvido por Moss e Case (1999), referido por Monteiro e Pinto (2005), foram identificados quatro tipos de dificuldades dos estudantes na aprendizagem dos números racionais:

> 1) Ênfase na sintaxe em detrimento da semântica, isto é o tempo dedicado ao treino de procedimentos é muito maior do que aquele dedicado ao desenvolvimento dos conceitos; 2) O ensino não ancora nas tentativas informais da resolução de tarefas por parte das crianças; 3) Nas diferentes representações dos números racionais não existe uma ênfase na diferenciação entre os números inteiros e os números não inteiros; 4) Os programas tratam as notações dos números racionais como algo que pode ser dado por definição (Monteiro & Pinto, 2005, p. 90).

Num estudo comparativo entre os conhecimentos anteriores e posteriores a uma experiência de ensino, Graça et al. (2023) destaca que os alunos, inicialmente, demonstraram incompreensão sobre os números fracionários, no caso das grandezas discretas, e assumiram que estes números eram dois números inteiros independentes. No mesmo sentido, Siebert e Gaskin (2006) realçam que as crianças não concebem a relação entre o numerador e o denominador como um todo, mas como partes distintas, podendo incorrer no erro de considerar uma parte em três, mesmo que elas não sejam equivalentes.

Nesta ótica, é fundamental um progressivo trabalho com os alunos sobre os números racionais, através de variadas tarefas com distintas representações. Como referido por Ponte e Quaresma (2011), a diversificação das tarefas ajudou "os alunos a desenvolver novos conceitos e uma compreensão mais aprofundada das diferentes representações" (p. 79). Neste contexto,

> A compreensão e a capacidade de raciocínio dos alunos ir-se-ão desenvolvendo à medida que eles forem representando frações e decimais através de objetos e na reta numérica, e à medida que forem aprendendo a reproduzir representações equivalentes de frações e decimais (NCTM, 2007, p. 35).

De modo a favorecer a aprendizagem, os alunos deverão desenvolver uma compreensão das frações, como partes de uma unidade, explorando uma diversidade de modelos, como o modelo de área, na qual uma parte está sombreada, "os alunos podem ver como se relacionam as frações com a unidade, comparar frações fracionárias de um todo e descobrir frações equivalentes" (NCTM, 2007, p. 174). A representação geométrica constitui um importante recurso didático, sendo propósito deste estudo através da utilização de bandeiras de países, como estudo em Graça e Guerreiro (2016).

De acordo com Clarke et al. (2008), existem dez conselhos práticos para os professores para que as frações ganhem vida e façam sentido: (i) dar mais ênfase aos significados das frações do que aos procedimentos operatórios; (ii) desenvolver uma regra geral para explicar o significado de numerador e denominador de uma fração; (iii) sublinhar que as frações são números, utilizando amplamente retas numéricas na representação de frações e decimais; (iv) aproveitar desde cedo as oportunidades para abordar as frações impróprias e as equivalências; (v) providenciar uma variedade de modelos para a representação de frações; (vi) relacionar as frações com os valores de referência e incentivar a estimação; (vii) dar ênfase às frações como divisão; (viii) relacionar frações, decimais e percentagens, sempre que possível; (ix) aproveitar a oportunidade para entrevistar vários alunos, um a um, sobre os tipos de tarefas abordadas neste artigo [tarefas decorrentes das alíneas anteriores], para conhecer os seus pensamentos e as suas estratégias; (x) procurar exemplos e atividades que possam levar os alunos a refletir sobre frações em particular e sobre as ideias de números racionais em geral.

Deste modo, os autores salientam a importância do desenvolvimento do significado dos números racionais, na forma de fração, numeral, decimal e percentagem, e na representação destes na reta numérica, incluindo frações impróprias. Salientam ainda a importância das interações com os alunos, nomeadamente, para a compreensão das dificuldades destes no processo de aprendizagem. Os autores consideram ainda que estas recomendações são um importante contributo para o desenvolvimento profissional dos professores no que concerne ao ensino das frações.

Em síntese, as frações são uma das representações primordiais dos números racionais, apesar dos seus diferentes significados, e da diferença significativa com os números inteiros. Ao inverso dos números inteiros, caracterizados por uma única correspondência entre o símbolo e a grandeza no sistema de numeração decimal, os números racionais podem ser representados de diversas formas, percentagens, frações ou numerais decimais, podendo traduzir um mesmo número, uma mesma grandeza numérica. A diversidade de tarefas e de representações matemáticas deste conjunto de números é fundamental no trabalho a desenvolver com os alunos no contexto de sala de aula.

Capítulo II – Enquadramento Metodológico

Neste capítulo é apresentada a metodologia de investigação, nomeadamente, a natureza do design e questões de investigação, os participantes no estudo, a intervenção educativa, os instrumentos de recolha e análise de dados e os procedimentos éticos.

Natureza do Design e Questões de Investigação

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), atendendo à natureza dos dados e ao significado das ações, assumindo as cinco características definidoras da investigação qualitativa, segundo os autores: (i) o investigador é o instrumento principal e a fonte direta dos dados é o ambiente natural; (ii) é descritiva; (iii) a relevância do processo em relação ao produto; (iv) a análise dos dados de forma indutiva; (v) o valor da significação dos dados.

De acordo com Flick (2005), podem-se distinguir "questões de investigação orientadas para a descrição de estados e questões dirigidas à descrição de processos" (p. 51). Ainda, segundo o mesmo autor, a orientação para a descrição de estados decorre da descrição de como uma determinada situação aconteceu e como se mantém. No segundo caso, como é objetivo desta investigação, questões dirigidas à descrição, o "objetivo é descrever os desenvolvimentos ou mudanças de um dado fenómeno (causas, processos, consequências, estratégias)" (Flick, 2005, p. 51).

Neste sentido, a questão de investigação assume a descrição do envolvimento dos alunos nas tarefas propostas em sala de aula:

Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos, na realização de tarefas matemáticas sobre números racionais, envolvendo bandeiras de países?

Deste modo, a questão de investigação é "como uma porta aberta para o campo da pesquisa" (Flick, 2005, p. 51). Assim, a metodologia a utilizar pressupõe o envolvimento dos alunos e a realização de tarefas matemáticas em sala de aula.

Esta abordagem implica "uma intenção de interpretação explícita dos significados da ação dos actores sociais nos contextos específicos abrangidos pelo estudo" (Afonso, 2005, pp. 64-65). De acordo com o mesmo autor, esta "interpretação concretiza-se através de verbalizações descritivas e narrativas, articuladas numa lógica explicativa e argumentativa" (Afonso, 2005, p. 65). Deste modo, a presença do investigador no contexto, neste caso em sala de aula, constitui um elemento fundamental da observação participante, através de um processo de envolvimento crescente ou decrescente no local observado. Assim, o propósito é analisar os conhecimentos e as dificuldades reveladas pelos alunos na identificação do número racional, na forma de fração, com o significado parte-todo, em áreas distintas, com iguais e diferentes proporções e formas, em que o todo é uma forma geométrica retangular, como são as bandeiras dos países.

Participantes e Contexto Educativo

Esta investigação decorreu, no ano letivo 2022/23, no 2.º ciclo do ensino básico, numa turma do 5.º ano de escolaridade, do Agrupamento de Escolas Manuel Teixeira Gomes, no concelho de Portimão, com vinte alunos, doze do sexo masculino e oito do sexo feminino, com idades compreendidas entre os dez e onze anos.

A turma integra onze alunos com medidas adicionais de suporte à aprendizagem e à inclusão, abrangidos pelo Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho, sendo referenciados: cinco alunos com medidas universais: alíneas a) a diferenciação pedagógica, b) as acomodações curriculares e e) a intervenção com foco académico ou comportamental em pequenos grupos; cinco alunos com medidas universais e seletivas: universais, alíneas a) a diferenciação pedagógica; b) as acomodações curriculares e e) a intervenção com foco académico ou comportamental em pequenos grupos, e seletivas, alíneas b) as adaptações curriculares não significativas e e) o apoio tutorial; uma aluna com medidas universais, seletivas e adicionais: universais, alíneas a) a diferenciação pedagógica e b) as acomodações curriculares; seletivas, alíneas c) o apoio psicopedagógico e e) o apoio tutorial, e adicionais, alíneas b) as adaptações curriculares significativas e e) o desenvolvimento de competências de autonomia pessoal e social.

Na turma existiam sete alunos em que o português não é a sua língua materna, sendo que, cinco, destes alunos, tinham adaptações curriculares relativas à língua portuguesa. Contudo no que concerne à aula de matemática, estas diferenças culturais não apresentavam obstáculos na aprendizagem. O comportamento da turma era regular, sem casos significativos de conflitos no contexto de sala de aula. Em relação aos processos de aprendizagem, a turma era mediana e a avaliação diferenciada, em função das medidas universais, seletivas e adicionais, existindo um conjunto de alunos com aproveitamento muito satisfatório e também alguns alunos com aproveitamento reduzido.

O conceito de fração, nomeadamente de parte-todo, já fora anteriormente trabalhado no 1.º ciclo do ensino básico, com estes alunos, de acordo com as orientações curriculares da matemática. No contexto do 2.º ciclo, na aula anterior ao desenvolvimento desta investigação, a professora titular da turma apresentou um vídeo sobre os números racionais aos alunos, no final da aula, sem momentos de discussão.

Intervenção Educativa

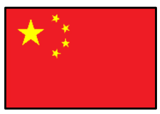
A tarefa matemática foi inspirada em bandeiras de países atendendo à sua forma usualmente retangular e às proporções existentes entre as áreas de diferentes cores (Graça & Guerreiro, 2016). Estas áreas são predominantemente retangulares ou triangulares, em iguais ou distintas proporções, com diferentes cores em regiões contínuas ou descontínuas, com insígnias que podem ser brasões, estrelas, luas, cruzes, etc. Existem bandeiras com formas circulares, como é o caso da bandeira do Japão, que não foram consideradas, neste estudo, dado que a razão entre a região circular e a bandeira não é um número racional.

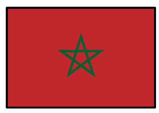
Para selecionar as bandeiras a integrar nas tarefas optou-se por considerar o vermelho como a cor da bandeira a estudar numa perspetiva da sua relação parte-todo com a bandeira na sua totalidade. Na escolha das bandeiras atendeu-se aos seguintes critérios: (i) região vermelha contínua, e (ii) região vermelha descontínua.

As bandeiras com região vermelha contínua subdividem-se em: (i) apenas de uma cor, (ii) de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em idênticas proporções, e (ii) de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em distintas proporções.

Na primeira categoria considerou-se as bandeiras vermelhas na sua totalidade, não considerando as insígnias:


Albânia


China


Marrocos

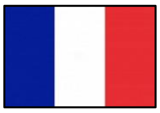

Tunísia


Turquia

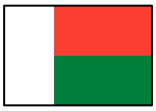
Na segunda categoria considerou-se as bandeiras de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em idênticas proporções.

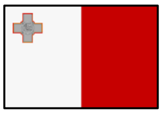

Alemanha


Azerbaijão


França


Itália


Madagáscar


Malta


Mónaco


Papua Nova Guiné

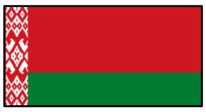

Polónia


República do Congo

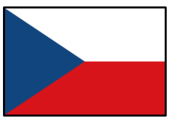

Rússia

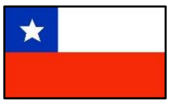
Na terceira categoria considerou-se as bandeiras de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em distintas proporções.


Bahrein


Bielorrússia


Camboja


Chéquia


Chile


Colômbia


Costa Rica


Eritreia


Portugal


Qatar


Samoa


Sheychelles


Timor-Leste

As bandeiras com região vermelha descontínua subdividem-se em: (i) de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em idênticas proporções, e (ii) de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em distintas proporções.

Na primeira categoria considerou-se as bandeiras de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em idênticas proporções.


Áustria


Mongólia

Na segunda categoria considerou-se as bandeiras de cores distintas, com faixas horizontais, verticais, oblíquas ou triangulares em distintas proporções.


Antígua e Barbuda


Espanha


Letónia


Líbano


Omã


Tailândia

Após a seleção de bandeiras de diferentes países abrangendo as categorias anteriormente mencionadas, elaborou-se uma tarefa matemática envolvendo as diferentes bandeiras, tendo por base as seguintes questões: (i) Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{2}$ da bandeira? (ii) Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{3}$ da bandeira? (iii) Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{2}{3}$ da bandeira? (iv) Quais os países em que o vermelho representa a unidade? (v) Encontra a fração correspondente à cor vermelha na bandeira (Apêndice 1).

A intervenção educativa foi planificada para três tempos de cinquenta minutos cada, sendo que os primeiros dois tempos decorrem em aulas consecutivas e o último tempo, no dia seguinte, numa aula isolada. As aulas tiveram por princípio as quatro fases do ensino exploratório da matemática: (i) apresentação da tarefa, (ii) realização da tarefa, (iii) discussão da tarefa, e (iv) sistematização das aprendizagens matemáticas (Guerreiro et al., 2015, p. 287).

Para estes autores, na primeira fase da aula, "o professor apresenta aos alunos a tarefa, explicando o que espera deles" (Guerreiro et al., 2015, p. 288). Na segunda fase, "os alunos *atacam* a tarefa, habitualmente em pequenos grupos, tendo oportunidade de trocar entendimentos, comunicando as suas ideias e processos de resolução" (Guerreiro et al., 2015, p. 288). Na terceira fase, "o professor organiza as apresentações do trabalho matemático realizado pelos grupos para serem comunicadas e discutidas em grande grupo" (Guerreiro et al., 2015, p. 288). Na quarta e última fase, "o professor assume mais o discurso, procurando institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos e procedimentos matemáticos, suscitados pela exploração da tarefa, sobretudo durante a discussão coletiva do trabalho dos alunos, e estabelecer conexões com aprendizagens anteriores" (Guerreiro et al., 2015, p. 288). A propósito deste modelo de ensino, Ponte e Quaresma (2011), referem que a "introdução das tarefas com alguma discussão, trabalho em pares e discussões coletivas com síntese final" (p. 77) é apropriada às características dos alunos e à promoção da aprendizagem.

Tomando esta estrutura de aula, como princípio, os alunos foram organizados em quatro grupos de quatro alunos e num grupo de três alunos (a aluna com medidas adicionais trabalhou com apoio da professora de educação especial), tendo-lhes sido proposto as questões anteriormente referidas a partir de um conjunto de bandeiras, diferentes para cada grupo. Cada uma das questões foi assumida como tarefa matemática, seguindo a estrutura referida do ensino exploratório: (i) apresentação da tarefa com a respetiva questão, (ii) realização da tarefa pelos alunos em torno do conjunto de bandeiras fornecido, (iii) apresentação das bandeiras em resposta à questão e discussão das diferentes soluções, (iv) sistematização das aprendizagens, através da implementação de um questionário com apoio na aplicação *Plickers*.

Na primeira aula de dois tempos de cinquenta minutos cada, as tarefas matemáticas resultaram das questões de (i) a (iv), tendo sido fornecidas um conjunto de bandeiras a cada grupo. Ao grupo A foram fornecidas as bandeiras dos países Alemanha, Antígua e Barbuda, Áustria, Chile, Madagáscar e Marrocos. Ao grupo B foram fornecidas as bandeiras dos países Albânia, Bielorrússia, Costa Rica, Eritreia, Polónia e Rússia. Ao grupo C foram fornecidas as bandeiras dos países Azerbaijão, Camboja, Mongólia, Papua Nova Guiné, Seychelles e Turquia. Ao grupo D foram fornecidas as bandeiras dos países Bahrein, China, Espanha, França, Malta e República do Congo. Ao grupo E foram fornecidas as bandeiras dos países Itália, Líbano, Mónaco, Qatar, Tailândia e Tunísia.

Na segunda aula, de um tempo de cinquenta minutos, a tarefa matemática decorreu da questão (v), Encontra a fração correspondente à cor vermelha na bandeira, sendo que cada grupo tinha uma bandeira especifica. Ao grupo A foi atribuída a bandeira da Letónia, ao grupo B foi atribuída a bandeira da Chéquia, ao grupo C foi atribuída a bandeira de Timor-Leste, ao grupo D foi atribuída a bandeira de Omã e ao grupo E foi atribuída a bandeira de Portugal.

Para a aluna com medidas adicionais foram desenvolvidas quatro tarefas, com o apoio da professora de ensino especial, respeitantes a bandeiras. A primeira tarefa questionava: O vermelho na bandeira de Portugal será mais ou menos de metade? A segunda tarefa apresentava as bandeiras da França, de Malta e de Marrocos e solicitava: Em qual das bandeiras destes países o vermelho é metade? Rodeia a resposta correta. A terceira tarefa apresentava um retângulo e desafiava a aluna a pintar uma bandeira em que o vermelho fosse metade. A quarta e última tarefa era similar à anterior, solicitando uma bandeira em que o vermelho não fosse metade da sua superfície (Apêndice 2).

Ainda na segunda aula, após a conclusão das tarefas com as bandeiras em papel, os alunos foram questionados com dez perguntas, através da aplicação *Plickers*, utilizando parte das bandeiras já referidas e ainda as bandeiras da Colômbia e Samoa. As questões repetiam as frações já utilizadas nas tarefas anteriores e outras como $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ (Apêndice 3).

Instrumentos de Recolha e Análise de Dados

Para a recolha e análise de dados recorreu-se a uma observação participante, à gravação áudio das aulas e à recolha das produções dos alunos. Em cada um dos grupos, foi colocado um gravador, de modo a ser possível registar as interações entre os alunos, durante a realização das tarefas matemáticas. Do mesmo modo, foram recolhidas as produções dos alunos de cada um dos grupos, bem como os resultados registados na plataforma *Plickers* sobre o desempenho destes no questionário avaliativo em sala de aula. Os áudios das aulas, de cada um dos grupos, foram analisados e transcritos os episódios relevantes para a identificação das estratégias dos alunos na resolução e discussão das tarefas matemáticas, que incorporam este trabalho, tendo em conta os aspetos relacionados com o conhecimento matemático revelado pelos alunos.

Ética do Estudo

Na realização deste estudo foi tido em conta os princípios éticos de responsabilidade social, nomeadamente na garantia da concordância e anonimato dos intervenientes. Para tal, garantiu-se o consentimento informado, entendido por "a ideia de que o sujeito eventual deve ter bastante informação – sobre o que lhe será pedido e para que fins esta informação será usada – para lhe avaliar as consequências" (Crête, 2003, p. 243). Deste modo, foi solicitado à professora cooperante e aos encarregados de educação dos alunos, a autorização para a realização deste estudo, integrado na prática de ensino supervisionada, e a recolha de dados áudio das duas aulas em que decorreu a investigação. Para garantir o anonimato dos participantes, a turma, em concreto, não será referida e aos alunos foi atribuído um nome fictício, todos os nomes com características portuguesas, apesar da multiculturalidade desta turma do 5.º ano de escolaridade.

Capítulo III – Análise e Discussão dos Resultados

Este capítulo apresenta os resultados dos alunos, tendo por organização as tarefas desenvolvidas em sala de aula e a natureza das questões. Esta análise inclui também alguma reflexão sobre os dados relativos às características do vermelho nas bandeiras.

O vermelho representa $\frac{1}{2}$ da bandeira

Em relação à questão: Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{2}$ da bandeira? Os grupos tinham um conjunto de seis bandeiras para optar, sendo que, em duas delas o vermelho preenchia metade da sua superfície.

Grupo A. O grupo A optou pela bandeira do Chile e posteriormente adicionou a bandeira de Antígua e Barbuda, justificando que "Escolhemos essa(s) bandeira(s) porque o vermelho está em $\frac{1}{2}$ da(s) bandeira(s)" [grupo A, produções dos alunos].

Neste grupo, antes da distribuição das bandeiras, os alunos atribuíram à bandeira portuguesa (erradamente) a mesma proporção às duas cores, vermelho e verde:

Emanuel: – Portugal!

Matilde: – É metade vermelho e metade verde.

Após a entrega das bandeiras, os alunos identificaram que a bandeira do Chile cumpria as proporções entre o vermelho e as restantes cores, apesar de manifestarem alguma indecisão na opção por uma bandeira com três cores.

Emanuel: – Já não é meio! O meio tem de ter duas partes [cores] iguais!

Gabriela: – Vai ser essa! Não tem nenhuma outra.

Na apresentação do trabalho relativo à primeira questão, o grupo:

Gabriela: – Eu escolhi essa bandeira porque o vermelho está em metade da figura.

Nesta primeira fase, os alunos só identificaram a bandeira cujo vermelho era uma região contínua.

Grupo B. O grupo B identificou a bandeira da Polónia, colando-a refletida horizontalmente (como se tratasse da bandeira da Indonésia), com o vermelho em cima, justificando que "Porque a bandeira está dividida em duas partes (na metade)" [grupo B, produções dos alunos].

A inversão da bandeira resultou da discussão entre os alunos sobre se se trataria da bandeira da Polónia ou da Indonésia:

Bruno: – Polónia ou Indonésia?

Patrícia: – Não, é Polónia.

Bruno: – Não, é Indonésia!

Neste grupo, foi discutido a diferença entre dividido em duas cores ou dividido em duas cores com iguais proporções.

Bruno: – A bandeira está dividida em duas cores.

(…)

Eduardo: – Metade é vermelho e metade é branco.

(…)

Bruno: – Está dividida em duas partes.

Eduardo: – Acho que era bom falar que está dividido em duas partes iguais.

Neste grupo também foi abordado a ideia da bandeira de Portugal, mas desta vez realçando a diferença entre as superfícies coloridas.

Júlio: – Portugal não ia dar.

Bruno: – Não, dava. Era só tirar o símbolo de Portugal e depois dava. (…) Ai, não, não dava. Verde é menor, tem menos.

Neste grupo, os alunos identificaram apenas a bandeira cujo vermelho era uma região contínua.

Grupo C. O grupo C identificou as bandeiras de Camboja e de Papua Nova Guiné, justificando que, para a bandeira do Camboja, o vermelho é compensado pela junção das duas faixas azuis, "Porque se juntarmos os azuis fica do mesmo tamanho que o vermelho, logo é a metade" [grupo C, produções dos alunos].

Os alunos começaram por rejeitar as bandeiras que, na sua perspetiva, não tinham a metade em vermelho, como foi o caso da bandeira da Turquia:

Gonçalo: – A da Turquia não é. (…) Acho que não é porque é toda vermelha.

Em relação à bandeira do Camboja, os alunos reconheceram que a junção das duas partes azuis correspondia à parte vermelha.

Gonçalo: – Acho que já sei! Porque se tirarmos esta parte e colocarmos aqui…

Rita: – Pois se juntarmos estes dois azuis fica do mesmo tamanho.

Esta forma de análise foi reafirmada aquando da apresentação ao grupo turma:

Leonor: – Porque nas duas está metade da figura [Camboja e Papua Nova Guiné] e se juntarmos os dois azuis fica do mesmo tamanho que o vermelho.

Este grupo identificou uma bandeira dividida em duas cores por uma das suas diagonais e reconheceu que a junção de duas listras horizontais era equivalente à parte central da bandeira.

Grupo D. O grupo D identificou a bandeira de Malta e posteriormente a de Espanha, justificando que "A Malta tem $\frac{1}{2}$ da bandeira de vermelho" [grupo D, produções dos alunos]. Após a discussão em grupo turma, por associação com o apresentado pelo grupo C, em relação à bandeira de Camboja, este grupo acrescentou nesta categoria a bandeira da Espanha escrevendo: “E a Espanha pois se juntarmos uma parte da Espanha com outra fica $\frac{1}{2}$ de vermelho” [grupo D, produções dos alunos].

Estes alunos iniciaram a seleção excluindo as bandeiras que não eram metade:

Santiago (observando as bandeiras): – Isto não é metade, isto não é metade, …

Uma das bandeiras em que esta questão foi mais relevante foi a de Bahrein, que os alunos identificaram como sendo a bandeira do Qatar:

Professora (referindo-se à bandeira de Malta): – Só há essa bandeira?

Alunos: – Sim.

Professora: – De certeza?

Vitória: – Não, a do Qatar [Bandeira de Bahrein].

Santiago: – Isto é metade? Não, isto é $\frac{1}{4}$ (referindo-se à parte branca).

O grupo reconheceu metade apenas na bandeira de Malta, na discussão em grupo e na apresentação ao grupo turma:

David: – Então a bandeira que representa $\frac{1}{2}$ é Malta.

(…)

Santiago: – Nós escolhemos a Malta porque a Malta tem metade da bandeira de vermelho.

Inicialmente, o aluno Santiago, referindo-se à bandeira de Espanha propõe a junção das duas partes vermelhas, não sendo esta estratégia seguida pelo grupo:

Santiago: – Isto considera-se metade, porque se juntares este …

Posteriormente, aquando da apresentação do grupo anterior, o aluno começou por considerar que a estratégia apresentada pelos colegas estava errada, para, em seguida, sugerir a mesma estratégia a aplicar à bandeira de Espanha:

Santiago: – Está errado. Está errado. (…) Ah, mas a gente também podia fazer isso com a Espanha.

Professora (referindo-se à atividade do grupo C): – Toda a gente concorda com as escolhas deles?

(…)

Santiago: – Professora, mas eu também ia fazer isso, mas não sabia que valia.

Este grupo identificou apenas a bandeira em que o vermelho era uma superfície contínua e após a validação de outras estratégias, reconheceram a situação em que o vermelho é apresentado em duas regiões descontínuas.

Grupo E. O grupo E identificou as bandeiras do Mónaco e do Líbano, justificando que "Nós escolhemos estas bandeiras porque metade da bandeira é vermelho e a outra metade é branca" [grupo E, produções dos alunos].

Os alunos deste grupo começaram por negociar o significado de $\frac{1}{2}$:

Maria: – Eu não estou a perceber o que é para fazer.

Ivo: – Então é, quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{2}$.

Afonso: – Sabes o que é que é $\frac{1}{2}$?

Maria: – Sei.

Afonso: – É metade.

Os alunos começaram igualmente por excluir as bandeiras que não tinham a metade em vermelho:

Ivo: – Esta é metade?

Afonso: – Não.

Ivo: – E esta é?

Afonso: – Esta é.

Ivo: – Esta não é. Esta daqui não é.

Os alunos excluíram a bandeira da Itália, referindo que o vermelho era $\frac{1}{3}$:

Afonso: – A da Itália?

Ivo: – Tem três, é $\frac{1}{3}$.

Estes alunos utilizaram a estratégia de medida para calcular a razão entre a parte vermelha e a bandeira, no seu todo:

Ivo: – Eu só vou ver quanto é para ver se é igual.

Maria: – Mas é a mesma coisa.

Afonso: – Não é, não.

Ivo: – 0 centímetros, 6,5 nesta [referindo-se à largura da bandeira do Mónaco], então vai 3,25 [largura da parte vermelha].

Afonso: – Está no 3. Está na metade.

Ainda durante o trabalho autónomo, este grupo, descobriu a estratégia de juntar as duas regiões descontínuas do vermelho, na bandeira do Líbano, e comparar com a região branca, utilizando igualmente a medição:

Afonso: – Mas é aí também é $\frac{1}{2}$. Se nós juntarmos o vermelho fica… Se juntarmos o vermelho com vermelho e o branco fica $\frac{1}{2}$. (…). Professora vale juntar vermelho com vermelho?

Professora: – Claro.

Ivo e Maria: – Então, vês!

(…)

Ivo: – O vermelho tem quantos centímetros? (…) dois e aqui também.

Maria: – Então dá para juntar.

Afonso: – Essa árvore desaparece e fica meio.

Na apresentação à turma, os alunos reafirmaram que:

Afonso: – Juntamos os dois vermelhos e ficou $\frac{1}{2}$.

O grupo foi capaz de identificar a metade em regiões contínuas e descontínuas, e utilizaram para validação das suas conjeturas a medição da largura das bandeiras.

Grupo Turma. Após a apresentação de todas as atividades, na primeira aula, retomamos a análise das bandeiras não utilizadas. Neste âmbito, a bandeira de Antígua e Barbuda foi discutida em grande grupo, tendo originado a três soluções distintas, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

No caso de $\frac{2}{3}$, os alunos assumiam que a bandeira tinha três partes em que duas delas eram vermelhas, sem atender à área de cada uma das partes. Um caso de $\frac{2}{4}$ (com justificação incorreta) foi apresentada por um aluno fazendo associação entre as quatro cores da bandeira e a existência de duas áreas distintas de vermelho. As estratégias corretas de identificação de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ foram apresentadas pelos alunos com a divisão da bandeira na vertical em duas metades:

> Ivo: – Acho que fica $\frac{1}{2}$, porque se juntarmos esta parte com esta vai ficar metade da figura.
>
> (…)
>
> Vitória: – Ao Ivo deu $\frac{1}{2}$, porque ele juntava as duas partes que era igual à outra, mas também poderia ser $\frac{2}{4}$, mas $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$.

Aquando da utilização da aplicação *Plickers*, no final da segunda aula, os alunos identificaram corretamente que o vermelho (região contínua) na bandeira da Polónia era $\frac{1}{2}$ (15 respostas corretas em 17), mas só 4 alunos em 17 identificaram que metade da bandeira de Antígua e Barbuda (região descontínua) era vermelha. Tal como na discussão anterior, a propósito desta bandeira, 8 alunos optaram (erradamente) por $\frac{2}{3}$ (três partes e duas vermelhas) e 4 alunos por $\frac{1}{4}$ (quatro cores).

Em síntese, os alunos não apresentaram dificuldades na identificação de bandeiras com metade vermelha, em região da bandeira contínua, quer horizontal, vertical ou triangular, mas denotaram especial dificuldade nas situações de regiões descontínuas, em que a metade vermelha resultava da recomposição das diferentes partes da bandeira do país.

O vermelho representa $\frac{1}{3}$ da bandeira

Em relação à questão: Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{3}$ da bandeira? Os grupos tinham, no conjunto das bandeiras para optar, duas em que o vermelho preenchia $\frac{1}{3}$ da sua superfície.

Grupo A. O grupo A optou pelas bandeiras de Madagáscar e da Alemanha, justificando que "Escolhemos estas bandeiras porque está representado por $\frac{1}{3}$ " [grupo A, produções dos alunos].

Os alunos começaram por definir o conceito de $\frac{1}{3}$ e, posteriormente, associaram às bandeiras com três cores e três regiões:

Emanuel: – Aqui é dois de três, não, é um de três.

(…)

Emanuel: – Estás a ver esta bandeira? Uma, duas, três.

O grupo foi capaz de identificar a terça parte em regiões contínuas, num bandeira com três faixas horizontais e numa outra com duas faixas horizontais e um vertical, com as mesmas dimensões.

Grupo B. O grupo B optou pelas bandeiras da Rússia e da Costa Rica, justificando que "Porque as bandeiras estão divididas em três partes iguais" [grupo B, produções dos alunos].

Este grupo antecipou a atividade referente à tarefa dois, adivinhando que o propósito era encontrar as bandeiras em que o vermelho fosse representado por $\frac{1}{3}$:

Aluno: – É com as mesmas [bandeiras]?

Professora: – É com as mesmas bandeiras.

Bruno: – Rússia pode ser, pode ser Rússia. Se for $\frac{1}{3}$ vai dar.

Após o contacto com a segunda questão, os alunos identificaram duas bandeiras:

Bruno: – Será que dá Costa Rica? Vê lá! (…) Costa Rica é esta aqui. (…) Se juntarmos, o vermelho vai estar menos ou mais?

Júlio: – Igual.

(…)

Bruno: – Se juntarmos as cores vão dar, por isso, Costa Rica e Rússia.

(…)

Patrícia: – Esta aqui tem três partes? [Referindo-se à bandeira da Costa Rica]

Bruno: – Sim, se juntarmos o branco …

Patrícia: – Ah, sim! Se juntarmos o branco e juntarmos o azul, dá.

No contexto da apresentação, ao grupo turma, estes alunos clarificaram as ideias discutidas em grupo:

Eduardo: – Nós escolhemos essas bandeiras porque as bandeiras estão divididas em três partes iguais e aqui [Bandeira da Costa Rica] para ficar com três partes iguais, a gente juntou o azul com o azul e o branco com o branco.

O grupo foi capaz de identificar a terça parte em regiões contínuas e descontínuas. De salientar que, após a turma ter utilizado a estratégia de composição de diferentes faixas, os alunos deste grupo utilizaram a referida estratégia para identificar $\frac{1}{3}$ na bandeira da Costa Rica.

Grupo C. O grupo C identificou a bandeira de Azerbaijão, sem justificação escrita. Os alunos começaram igualmente por antecipar as possíveis frações, sugerindo a possibilidade de $\frac{1}{3}$ e de $\frac{1}{4}$:

Gonçalo: – Deve ser $\frac{1}{3}$.

(…)

Gonçalo: – A próxima deve ser $\frac{1}{4}$, se houver.

Após observarem as bandeiras, o aluno, acrescenta:

Gonçalo: – Se for $\frac{1}{4}$, nós não temos nenhuma.

A opção pela bandeira do Azerbaijão decorreu da existência de três listras iguais, de cores distintas:

Gonçalo: – $\frac{1}{3}$ da bandeira está pintado de vermelho, outro de …

Leonor: – Azul.

Gonçalo: – Outra de…

Leonor: – Verde.

Os alunos tentaram encontrar outras bandeiras com $\frac{1}{3}$ de vermelho, analisando para tal a bandeira da Mongólia, chegando à conclusão de que esta não cumpria o solicitado:

Gonçalo: – Não, mas isso é $\frac{1}{3}$.

Leonor: – Não, é $\frac{1}{2}$, é metade.

Gonçalo: – Eu acho que não é porque tem duas cores iguais [duas faixas de vermelho].

Este grupo não identificou a bandeira de Seychelles, mas fez apreciação perante outras bandeiras, identificando que não correspondiam ao solicitado. No caso da bandeira de Seychelles, apesar de se tratar de uma região contínua, a sua forma, em quadrilátero não trapézio, dificultou a apreensão da relação entre as cores, sendo as quatro restantes cores triângulos.

Grupo D. O grupo D identificou a bandeira da França e, posteriormente, associaram a esta categoria a da República do Congo, justificando que "É a França pois a parte vermelha ocupa $\frac{1}{3}$ da bandeira" [grupo D, produções dos alunos].

Estes alunos começaram por clarificar o conceito de $\frac{1}{3}$:

Santiago: – É $\frac{1}{3}$. O que é que é $\frac{1}{3}$?

Vitória: – $\frac{1}{3}$ é que tem de estar dividido em três partes.

Os alunos também analisaram a bandeira da República do Congo, num diálogo com a professora:

Vitória: – Esta não ocupa a mesma parte que esta.

Santiago: – Ocupa.

Vitória: – Professora Catarina, isto não significa $\frac{1}{3}$, porque isto…

Santiago: – Não, é igual.

Professora: – Podem usar a régua, para ver, podem usar as maneiras todas. (…) Que figura geométrica é esta?

Vitória: – Um triângulo.

Professora: –E esta?

Vitória: – Um triângulo.

Professora: – E esta aqui?

Vitória: – Um retângulo [verdadeiramente um paralelogramo]. Pois não é a mesma parte, por isso é que não …

Professora: – Mas, podem medir.

A aluna Vitória tentou medir a bandeira, mas foi desincentivada pelo aluno Santiago:

Santiago: – Estás a medir para quê? Nem sabes o que estás a fazer.

Este grupo identificou apenas a bandeira tricolor por existência de três faixas idênticas com três cores distintas, e não identificaram uma outra bandeira com três cores, mas com formas distintas.

Grupo E. O grupo E identificou as bandeiras de Itália e da Tailândia, justificando que “Nós escolhemos estas bandeiras por um terço das bandeiras é vermelho” [grupo E, produções dos alunos].

Os alunos compreenderam que, na bandeira da Tailândia, a junção das faixas brancas e vermelhas justificavam as proporções de $\frac{1}{3}$ em cada cor:

Professora: – Como é que vocês viram que isto aqui era $\frac{1}{3}$ [referindo ao vermelho da bandeira da Tailândia].

Ivo: – Podemos juntar.

Afonso: – Porque o vermelho mais o vermelho e o branco mais o branco dá $\frac{1}{3}$.

O grupo foi igualmente, nesta situação, capaz de identificar a terça parte em regiões contínuas e descontínuas.

Grupo Turma. Ainda, depois da apresentação das atividades, na primeira aula, retomamos igualmente a análise da bandeira da República do Congo. Os alunos começaram por falar em $\frac{1}{3}$ dado que a bandeira tem três cores, sendo uma delas vermelha, sem compreenderem que cada uma das cores tinha igual área. Após a divisão da bandeira em três colunas e duas linhas, e cada um destes quadrados divididos em triângulos na oblíqua, obtendo, doze triângulos iguais, os alunos com o apoio das professoras, chegaram à identificação que cada área podia ser representada por $\frac{4}{12}$ e que, por sua vez, cada área colorida era $\frac{1}{3}$ da bandeira.

Na segunda aula, através da utilização da aplicação *Plickers*, os alunos identificaram corretamente $\frac{1}{3}$ de vermelho (em regiões descontínua) na bandeira da Costa Rica (14 respostas corretas em 17), bem como na bandeira da Alemanha (11 respostas corretas em 17 alunos). Neste caso, em que se solicitava a indicação de um país em que o vermelho fosse $\frac{1}{3}$,4 alunos optaram por Espanha, provavelmente pela existência de três faixas horizontais na bandeira. Tendo em discussão a bandeira da República do Congo, apenas 7 alunos (em 17) referiram $\frac{1}{3}$, denotando grande dificuldade na análise desta bandeira, dado que as hipóteses incorretas foram obtiveram valores significativos, 4 alunos disseram $\frac{2}{3}$, 3 alunos disseram $\frac{1}{2}$, e 3 alunos disseram $\frac{1}{4}$. Ainda no caso da bandeira de Seychelles (com $\frac{1}{3}$ de vermelho), a grande maioria dos alunos (11 em 17) propôs $\frac{3}{4}$, hipoteticamente pela diversidade de cores da bandeira.

Em síntese, os alunos não apresentaram dificuldades na identificação de bandeiras com a terça parte vermelha, em região da bandeira contínua com faixas retangulares horizontais ou verticais, mas denotaram especial dificuldade nas situações de formas distintas, mesmo em regiões contínuas, em que a terça parte vermelha apresentava uma superfície não retangular.

O vermelho representa $\frac{2}{3}$ da bandeira

Em relação à questão: Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{2}{3}$ da bandeira? Os grupos tinham o conjunto das bandeiras para optar, sendo que, em uma delas o vermelho preenchia $\frac{2}{3}$ da sua superfície.

Grupo A. O grupo A optou pela bandeira da Áustria, justificando que "Escolhemos essa bandeira porque representa $\frac{2}{3}$" [grupo A, produções dos alunos].

Na discussão em grupo turma, os alunos apresentaram a sua justificação para a opção pela bandeira da Áustria:

Gabriela: – Escolhemos essa bandeira porque tem duas partes vermelhas, então representa dois, e três cores [partes], então é dois terços.

Este grupo não apresentou dificuldades na identificação da única bandeira cujo vermelho podia ser representado por $\frac{2}{3}$.

Grupo B. O grupo B começou por discutir que o solicitado era dois em três, mas não identificou a bandeira existente com esta relação. No caso, assumiram (erradamente) que a bandeira da Costa Rica, tinha $\frac{2}{3}$ de vermelho.

Aquando da apresentação em grupo turma, e perante a validação pela turma da solução Costa Rica, os alunos, após algum questionamento por parte da professora, invalidaram a Costa Rica e validaram a Bielorrússia:

Júlio: – Escolhemos Costa Rica porque se juntarmos este com este (referente ao branco), e este com este (referente ao vermelho), dá $\frac{2}{3}$.

Professora: – Concordam?

Alunos: – Sim. Não.

Professora: – Concordam porquê?

Aluno: – Está errado.

Santiago: – Se juntarmos o vermelho com o vermelho e o branco com o branco, vai dar…

Alunos: – É $\frac{1}{3}$!

Professora: – Quanto é que representa o vermelho naquela bandeira?

Alunos: – É $\frac{1}{3}$!

Professora: – Então e a pergunta é o quê?

Alunos: – É $\frac{2}{3}$.

Perante a identificação do erro na escolha da bandeira, os alunos do grupo reconheceram que a Bielorrússia cumpria a relação de $\frac{2}{3}$ no vermelho:

Bruno: – Se não for esta é a Bielorrússia.

(…)

Vitória (do grupo D): – Podemos dividir a parte vermelha em duas.

Santiago (do grupo D): – Fica duas tiras de vermelho e uma de verde.

O grupo não identificou a bandeira em que o vermelho representava $\frac{2}{3}$, assumindo que uma bandeira com três cores seria a solução, independentemente das áreas das respetivas cores. O grupo turma definiu como estratégia dividir na horizontal a bandeira da Bielorrússia em três faixas, denotando que duas são vermelhas.

Grupo C. O grupo C identificou a bandeira da Mongólia, sem justificação escrita. Os alunos retomaram a discussão anterior a propósito desta bandeira, identificando logo a relação de $\frac{2}{3}$ entre o vermelho e a bandeira:

Gonçalo: – Agora temos aquela!

(…)

Gonçalo: – Temos essa e mais nenhuma.

Os alunos concluíram que escolheram a bandeira da Mongólia por o vermelho representar $\frac{2}{3}$, sem qualquer dificuldade.

Grupo D. O grupo D identificou a bandeira de Bahrein justificando que "Nós escolhemos esta bandeira porque se dividirmos a parte vermelha em dois podemos obter $\frac{2}{3}$ ocupados pelo vermelho" [grupo D, produções dos alunos].

Os alunos durante o trabalho autónomo definiram a estratégia de divisão da faixa vermelha em duas partes:

Vitória: – Se dividirmos assim em dois, pode ser $\frac{2}{3}$.

Os alunos, na apresentação em grupo turma, reproduziram o que tinham escrito na folha da tarefa sem acrescentar qualquer outra justificação.

Grupo E. O grupo E identificou a bandeira do Qatar, justificando que "Nós escolhemos esta bandeira porque se nós dividirmos a bandeira em três partes fica $\frac{2}{3}$ ocupado pelo vermelho" [grupo E, produções dos alunos].

A cada grupo foi fornecido duas bandeiras iguais de cada país, para eventuais enganos. Assim, os alunos dispunham também de um exemplar das bandeiras já anteriormente utilizadas. Neste contexto, os alunos deste grupo concluíram que era incongruente utilizar a mesma bandeira para representar duas frações distintas:

Afonso: – Oh professora Catarina, nós podemos utilizar as mesmas?

Professora: – Podem usar as que vocês quiserem.

Ivo: – Mas como é que um vai ser $\frac{1}{3}$e $\frac{2}{3}$?

Este grupo adotou a estratégia de medir as bandeiras para calcular a razão do vermelho na bandeira:

Ivo: –Se nós medirmos até aqui (comprimento da bandeira), é dez e meio.

Para a identificação da bandeira, os alunos, definiram uma estratégia de divisão da mesma em três partes:

Ivo: – Esta bandeira está dividida em duas cores, mas o vermelho está mais do que o branco. Se nós dividirmos o vermelho em duas partes, dá $\frac{2}{3}$.

Os alunos explicaram colaborativamente, entre si, a estratégia utilizada na divisão da bandeira:

Afonso: – Imagina, branco é um, e aqui divides ao meio, imagina, fica $\frac{2}{3}$. Se nós dividirmos a bandeira em três partes, fica $\frac{2}{3}$.

(…)

Afonso: – Está dividido ao meio, tens um, dois e três, $\frac{2}{3}$.

Os alunos conseguiram compreender que a bandeira tinha duas cores, mas que a parte vermelha representava $\frac{2}{3}$ da bandeira.

Grupo Turma. Na utilização da aplicação *Plickers*, 8 alunos (em 17 alunos) identificaram corretamente $\frac{2}{3}$ de vermelho (em regiões descontínuas) na bandeira da Mongólia, contudo 6 alunos disseram $\frac{1}{3}$ (provavelmente pensando em três faixas) e 3 alunos disseram $\frac{1}{2}$ (duas cores).

Em síntese, os alunos não apresentaram dificuldades na identificação de bandeiras com três faixas retangulares horizontais ou verticais, em que duas delas, mesmo descontínuas, eram vermelhas, mas denotaram alguma dificuldade quando tiveram de reconhecer que a região vermelha, contínua, correspondiam a duas vezes a restante bandeira.

O vermelho representa a unidade

Em relação à questão: Quais os países em que o vermelho representa a unidade? Os grupos tinham o conjunto das bandeiras para optar, sendo que, em uma delas o vermelho preenchia a totalidade.

Grupo A. O grupo A optou pela bandeira de Marrocos, justificando que "Escolhemos essa bandeira porque representa a unidade" [grupo A, produções dos alunos]. Os alunos justificaram que a bandeira represente a unidade sem a estrela verde.

Grupo B. O grupo B optou pela bandeira da Albânia, justificando que "Porque se tirarmos o brasão da bandeira fica totalmente vermelha e assim vai ficar uma unidade" [grupo B, produções dos alunos].

Grupo C. O grupo C optou pela bandeira da Turquia, justificando que "Nós escolhemos esta bandeira porque o vermelho representa uma unidade" [grupo C, produções dos alunos].

Grupo D. O grupo D optou pela bandeira da China, justificando que "Como os brasões não contam o vermelho ocupa toda a unidade" [grupo D, produções dos alunos].

Grupo E. O grupo E optou pela bandeira da Tunísia, justificando que "Nós escolhemos esta bandeira porque o vermelho ocupa a bandeira toda" [grupo E, produções dos alunos].

Os alunos, no contexto de trabalho autónomo, clarificaram o conceito de unidade ou de todo:

Ivo: – O vermelho tem de ser toda.

Maria: –Eu não percebi isso muito bem.

Ivo: – É uma bandeira que ocupa todo o espaço de vermelho.

Os alunos, na oralidade, completaram o escrito com a inferência de que "Sendo assim, representa uma unidade", para justificar a ligação entre a totalidade de vermelho e o conceito de unidade.

Grupo Turma. Na utilização da aplicação *Plickers*, 16 alunos (em 17 alunos) identificaram corretamente que a bandeira da Tunísia era totalmente vermelha, não considerando o respetivo círculo central associado ao brasão de armas.

Em síntese, os alunos não apresentaram dificuldades na identificação de bandeiras integralmente vermelhas sem atender às insígnias existentes nas bandeiras.

Fração correspondente à cor vermelha

Em relação à solicitação: Encontra a fração correspondente à cor vermelha na bandeira, cada grupo tinha uma bandeira para analisar a relação do vermelho com a totalidade da mesma.

Grupo A. Ao grupo A foi fornecida a bandeira da Letónia.

Bandeira da Letónia

O grupo apresentou a fração de $\frac{4}{5}$, justificando que "A fração correspondente à cor vermelha é $\frac{4}{5}$, porque se dividirmos as duas partes vermelhas fica 5 partes iguais e fica 4 partes vermelhas" [grupo A, produções dos alunos].

Os alunos, no trabalho autónomo, começaram por identificar logo que a bandeira podia ser dividida em 5 partes iguais e que, nessas partes, quatro eram vermelhas. Na discussão surgiu a quantidade $\frac{5}{3}$, sem repararem que o valor sendo superior à unidade nunca poderia representar a parte-todo de uma bandeira. O grupo dividiu a bandeira em cinco faixas horizontais, numerando-as de um a cinco. Para além deste aspeto, uma das alunas do grupo reparou que $\frac{8}{10}$ era também uma possível solução:

Gabriela: – E pode ser $\frac{10}{8}$, não oito sobre dez.

Esta confusão entre $\frac{10}{8}$ e $\frac{8}{10}$ parece sublinhar a anterior questão dos $\frac{5}{3}$, revelando que os alunos não possuem totalmente o sentido do número racional.

Grupo B. Ao grupo B foi fornecida a bandeira de Omã.

Bandeira de Omã

O grupo apresentou a fração de $\frac{5}{9}$, justificando que "$\frac{5}{9}$ porque dividimos em 18 quadrados e a parte vermelha deu 10 e depois em fração deu $\frac{10}{18}$ e essa fração dividimos por dois que deu $\frac{5}{9}$" [grupo B, produções dos alunos].

Os alunos, no trabalho autónomo, começaram por retirar a faixa vertical e, nesse caso, o vermelho seria $\frac{1}{3}$. Perante a clarificação de que essa estratégia seria incorreta, os alunos perceberam que a bandeira tinha 4 partes, sendo que não eram iguais. Neste contexto, os alunos compreenderam que teriam de ter as diferentes áreas, divididas em partes iguais. Com a ajuda das professoras, os alunos dividiram a bandeira em quadrados de cerca de dois centímetros de lado, em seis colunas e três linhas.

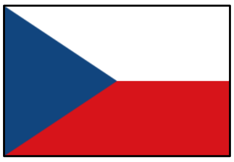
Grupo C. Ao grupo C foi fornecida a bandeira de Timor-Leste.


Bandeira de Timor-Leste

O grupo apresentou a fração $\frac{3}{4}$, justificando que "É $\frac{3}{4}$ porque tem três partes pintadas de vermelho" [grupo C, produções dos alunos].

Os alunos começaram por sugerir $\frac{1}{3}$em função da existência de três cores e, após a ajuda da professora, acabaram por dividir a bandeiras pelas diagonais, concluindo que a parte vermelha representava $\frac{3}{4}$.

Grupo D. Ao grupo D foi fornecida a bandeira da Chéquia.


Bandeira da Chéquia

O grupo apresentou a fração $\frac{3}{8}$, justificando que "$\frac{3}{8}$ porque se dividirmos a bandeira em 8 partes, o vermelho ocupa 3 partes" [grupo D, produções dos alunos]. Os alunos começaram por indicar $\frac{1}{3}$ em resultado da existência de três partes e, só com o apoio da professora, é que equacionaram outra forma de análise da bandeira, em virtude da indicação de que as partes coloridas não eram equivalentes.

Grupo E. Ao grupo E foi fornecida a bandeira de Portugal.

Bandeira de Portugal

O grupo apresentou a fração $\frac{3}{5}$, justificando que "É $\frac{3}{5}$ porque se nós dividirmos em 5 partes iguais vai dar $\frac{3}{5}$" [grupo E, produções dos alunos]. Estes alunos utilizaram, nesta tarefa, regularmente, a medida linear de comprimento da bandeira, concluindo que a parte verde tinha 4,5 centímetros e que a parte vermelha tinha 6,5 centímetros, no total de 11 centímetros. Também calcularam a área da bandeira, sendo que, a altura era 7 centímetros. Perante a dificuldade da divisão de 11 em partes iguais, dado o número ser primo (reconhecido pelos alunos), os alunos acabaram por conseguir chegar à relação $\frac{3}{5}$, incentivados pelas professoras, simplificando as medidas de 4 cm na parte verde e 6 cm na parte vermelha.

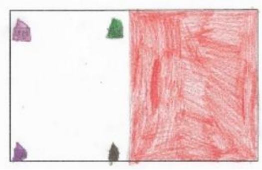
Grupo Turma. Na utilização da aplicação *Plickers*, 7 alunos (em 17) identificaram corretamente que a bandeira de Samoa tinha $\frac{3}{4}$ de vermelho. Contudo outros 7 alunos apostaram em $\frac{1}{2}$, em virtude da existência de duas cores. Do mesmo modo, 5 alunos (em 17) referiram que o vermelho representado na bandeira da Colômbia pode ser traduzido por $\frac{1}{4}$. Todavia, 6 alunos optaram por $\frac{1}{3}$, provavelmente em função das três cores existentes na bandeira, e outros 5 alunos optaram por $\frac{1}{2}$, sem justificação aparente.

Em síntese, os alunos apesar de apresentarem manifestas dificuldades, dividiram as áreas das bandeiras na busca de um denominador comum que facilitasse a identificação da relação parte-todo do vermelho na bandeira. Em geral, os alunos não definiram autonomamente estratégias para decompor as bandeiras de modo a identificar a fração da cor vermelha.

Inclusão de todos nas tarefas de bandeiras

A aluna com medidas adicionais participou na primeira aula, com apoio da professor de educação especial, e desenvolveu um conjunto de atividades relacionadas igualmente com a temática das razões do vermelho na bandeira.

A primeira tarefa questionava: O vermelho na bandeira de Portugal será mais ou menos de metade? A aluna respondeu que: Tem mais vermelho que verde. A segunda tarefa apresentava as bandeiras da França, de Malta e de Marrocos e solicitava: Em qual das bandeiras destes países o vermelho é metade? Rodeia a resposta correta. A aluna rodeou a bandeira de Malta. A terceira tarefa apresentava um retângulo e desafiava a aluna a pintar uma bandeira em que o vermelho fosse metade. A aluna apresentou a seguinte bandeira:



Bandeira pintada pela aluna com metade de vermelho

A quarta e última tarefa era similar à anterior, solicitando uma bandeira em que o vermelho não fosse metade da sua superfície. A aluna apresentou a seguinte bandeira, com as cores azul, vermelho, verde e laranja:

Bandeira pintada pela aluna em que o vermelho não é metade

Assim sendo, a aluna com medidas adicionais apresentou, através de bandeiras, o conceito de metade, pela afirmativa (tarefas 2 e 3) e pela negativa (tarefas 1 e 4).

Frações nas bandeiras de países

Os alunos manifestaram facilidade na identificação da fração quando as bandeiras eram totalmente vermelhas, metade vermelhas com duas faixas horizontais ou verticais ou a terça parte vermelha em três faixas retangulares, horizontais ou verticais, reproduzindo as situações mais elementares existentes nos exercícios típicos dos manuais de matemática. As situações em que a bandeira apresentava três faixas, duas delas vermelhas, os alunos também mostraram alguma facilidade em associar o vermelho a dois terços.

Já manifestaram maior dificuldade nas situações em que as regiões vermelhas eram descontínuas e que, por composição, formavam metade da bandeira, ou, em que sendo contínuas, tinham proporções diferentes, mesmo em formatos retangulares, como no caso da parte vermelha representar o dobro da restante ou a de Portugal, numa relação de três quintos. Esta diferença entre considerar um número de partes indistintas, ao invés do número de partes equivalentes, suporta as dificuldades apontadas por Siebert e Gaskin (2006).

Estes dados reforçam as evidências apontadas por Graça e Guerreiro (2016), nomeadamente quando referem que os alunos revelam dificuldades "na identificação da fração de uma dada região quando as diferentes regiões não apresentavam as mesmas dimensões e quando existiam (…) em regiões não contínuas" (p. 139). De notar que este estudo, realizado por estes autores, decorreu no 1.º ciclo do ensino básico, o que podemos inferir que o conhecimento revelado no presente estudo, com alunos do 2.º ciclo do ensino básico, não difere substancialmente dos dados relativos aos alunos do nível educativo anterior.

As maiores dificuldades, manifestadas pelos alunos, reportam-se às situações em que parte da região colorida são triângulos ou outras formas não retangulares. Essa situação revela pouca estratégia e poucos conhecimentos relativos à composição e decomposição de figuras geométricas. Alguns alunos recorreram a métodos de medida, linear ou não, das bandeiras, mas não conseguiram relacionar a medição com o cálculo da proporção, por divisão da parte pelo todo, atendendo só aos múltiplos dos valores envolvidos.

Considerações Finais

Nestas considerações finais, será abordada a questão de investigação, salientando os dados relativos ao desempenho dos alunos, as limitações apontadas neste estudo e perspetivas de investigações futuras no campo educativo.

Para esta investigação, partiu-se da tarefa matemática descrita em Graça e Guerreiro (2016), em que os alunos do 1.º ciclo foram confrontados com bandeiras de países da união europeia, para estudar os números racionais, na forma de fração, numa relação parte-todo, através da determinação da área do vermelho em relação à totalidade da bandeira.

Optou-se por desenvolver este tipo de tarefa matemática no 2.º ciclo do ensino básico, numa turma do 5.º ano de escolaridade, com bandeiras de diversos países do mundo, do mesmo modo, no contexto do ensino e da aprendizagem dos números racionais. Para o desenvolvimento deste estudo partiu-se da seguinte questão investigativa:

Quais as estratégias desenvolvidas pelos alunos, na realização de tarefas matemáticas sobre números racionais, envolvendo bandeiras de países?

Os alunos manifestaram, no decorrer das tarefas, facilidade por reconhecimento visual das regiões de cada uma das bandeiras, nas situações em que as bandeiras apresentam as seguintes características: (i) integralmente vermelhas, associando-as à unidade; (ii) metade vermelhas, numa região contínua, com duas cores, em faixas retangulares e triangulares, associando à fração $\frac{1}{2}$; (iii) com três regiões contínuas, de igual dimensão, retangulares, sendo uma delas vermelha associando-a a $\frac{1}{3}$; (iv) com três regiões contínuas, de igual dimensão, retangulares, sendo duas delas vermelhas, associando-as a $\frac{2}{3}$.

Nas situações em que as regiões vermelhas eram descontínuas, como por exemplo na bandeira de Espanha, os alunos definiram como estratégia, associar as duas faixas vermelhas (ou em outros casos, de distintas cores) para numa recomposição da bandeira identificarem a respetiva fração do vermelho, através da associação das cores em regiões idênticas e contínuas.

Nas situações em que a bandeira era composta por duas ou mais cores com proporções diferentes, como por exemplo na bandeira de Portugal, os alunos mostraram dificuldade, contudo em alguns casos dividiram as distintas regiões em partes iguais e determinaram a respetiva fração, como no caso das bandeiras apresentadas na tarefa (v).

As maiores dificuldades dos alunos, reportaram-se às situações em que as regiões da bandeira não eram retangulares, nomeadamente não identificando a forma de paralelogramo, nem efetuando decomposições das regiões com alguma estratégia geométrica de divisão das formas. Alguns alunos utilizaram os processos de medida, com régua, para auxiliar a estratégia da divisão da bandeira em partes iguais.

Estes dados revelam pouco trabalho com suporte visual em relação ao conceito de fração. Neste sentido, algumas estratégias a desenvolver passarão pelo trabalho de composição e decomposição de figuras geométricas, neste caso das bandeiras, de modo a criar nos alunos uma maior agilidade na abordagem das imagens e na sua reconstrução através do refazer de novas composições com denominadores comuns.

Em relação ao desempenho da professora/investigadora, é de salientar que, durante as aulas onde foram realizadas estas tarefas matemáticas, para a concretização da investigação, a professora tentou ao máximo com que os alunos tivessem um trabalho autónomo, de maneira que não comprometesse os resultados do estudo.

Em acordo com a metodologia de observação participante, optou-se por uma postura mais observadora, influenciado o mínimo o desempenho dos alunos, sem esquecer que se tratando de um processo educativo, o professor é sempre o orientador dos alunos, ajudando-os no seu processo de aprendizagem.

Salienta-se que este estudo se restringiu apenas num dos significados das frações, concretamente na relação parte-todo, sem atender às outras situações como quociente, razão, medida e operador. Neste sentido, considera-se uma limitação do trabalho, o foco na relação parte-todo. Contudo, a circunstância de se usar as bandeiras como unidade, portanto como o todo, a abordagem dificilmente não se restringiria ao significado anteriormente referido.

Uma possível extensão deste estudo poderia incluir outras bandeiras, como por exemplo a bandeira do Japão, para os alunos concluírem que o vermelho, sendo circular, não é representável por um número racional, bem como situações em que as formas das regiões das bandeiras sejam mais complexas ou em que o vermelho seja representado por frações com um maior nível de complexidade.

Referências Bibliográficas

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação. Um guia prático e crítico.* Edições Asa.

Aksoy, N., & Yazlik, D. (2017). Student errors in fractions and possible causes of these errors. *Journal of Educations and Training Studies,* 5(11), 219-233. https://doi.org/10.11114/jets.v5i11.2679.

Bellos, A. (2012). *Alex no país dos números. Viagem pelo maravilhoso mundo da matemática.* Planeta.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students'understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64(3), 293-316.

Clarke, D.M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008) 10 Pratical Tips for Making Fractions Come Alive and Make Sense. *Mathematics teaching in the middle school*, 13(7), 373-379.

Crête, J. (2003). A ética em investigação social. In B. Gauthier (dir.), *Investigação Social. Da problemática à colheita dos dados* (pp. 233-254). Lusociência.

Flick, U. (2005). *Métodos Qualitativos na Investigação Científica*. Monitor.

Graça, S., & Guerreiro, A. (2016). Bandeiras de países: recursos para o ensino dos racionais. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Ed.). *Livro de atas do EIEM 2016. Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 129-141). SPIEM.

Graça, S., Ponte, J. P., & Guerreiro, A. (2021). Quando as Frações não São Apenas Partes de um Todo…! *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1) 683-712. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p683-712.

Graça, S., Ponte, J. P., & Guerreiro, A. (2023). A aprendizagem dos números racionais através de uma abordagem integrada das suas diferentes representações. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 32(1) 6-25. https://doi.org/10.48489/quadrante.27802

Guerreiro, A., Ferreira, R. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké,* 23(44), 279-295.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Greenwhich, CT: Information Age.

Menezes, L. (2011). Números racionais. In P. Palhares, A. Gomes & E. Amaral (coord.) *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 3-16). Lidel.

Ministério da Educação (2021). A*prendizagens Essenciais da Matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção Geral da Educação.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-107.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática. National Council of Teachers of Mathematics.

Palhares, P., Gomes, A., & Amaral, E. (2011). *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lidel.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, XX (1), 55-81.

Sequeira, L., Freitas, P. J., & Nápoles, S. (2009). *Números e Operações. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. ME – DGIDC.

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions. *Teaching children mathematics*, 12(8), 394-400.

Siegler, R. S., Fazio, L., Bailey, D., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review, 30*(2), 351–372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3.

Veloso, G. (2017). O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração. *Educação e Matemática*, 143, 5-9.

Índice de Apêndices

Apêndice 1

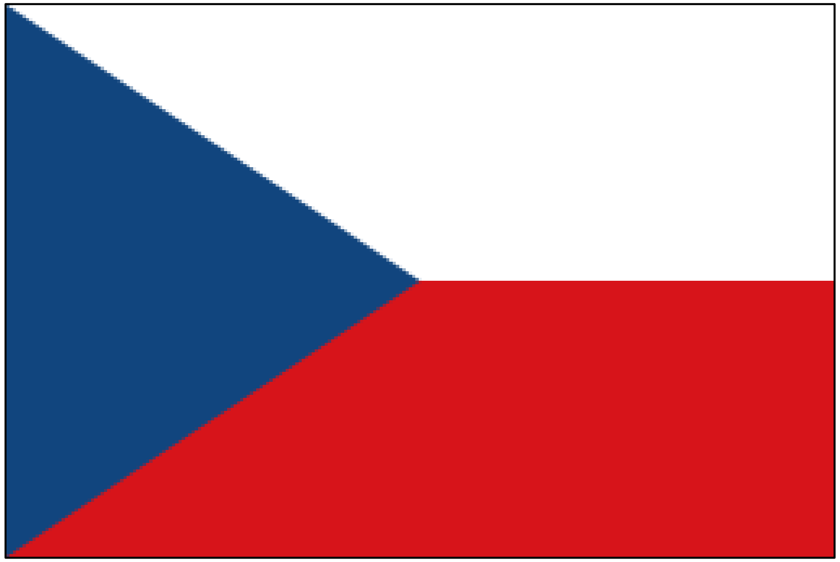
Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{2}$ da bandeira?

Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{1}{3}$ da bandeira?

Quais os países em que o vermelho é representado por $\frac{2}{3}$ da bandeira?

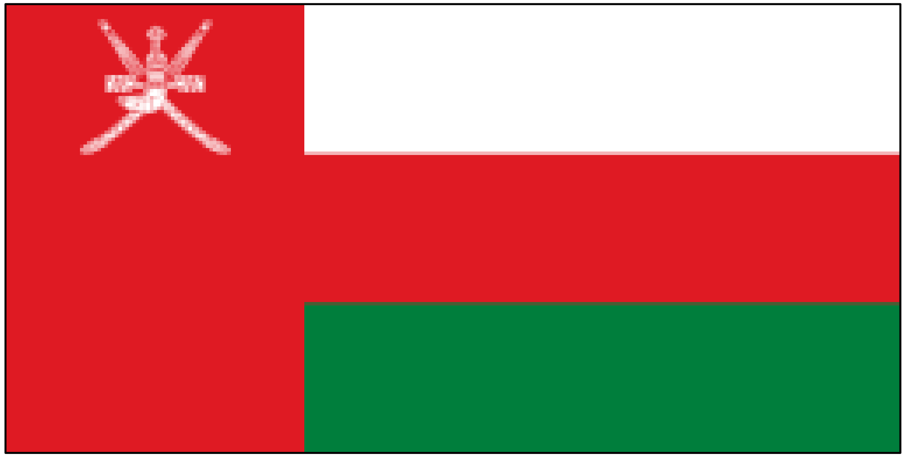
Quais os países em que o vermelho representa a unidade?

Encontra a fraçao correspondente à cor vermelha na bandeira

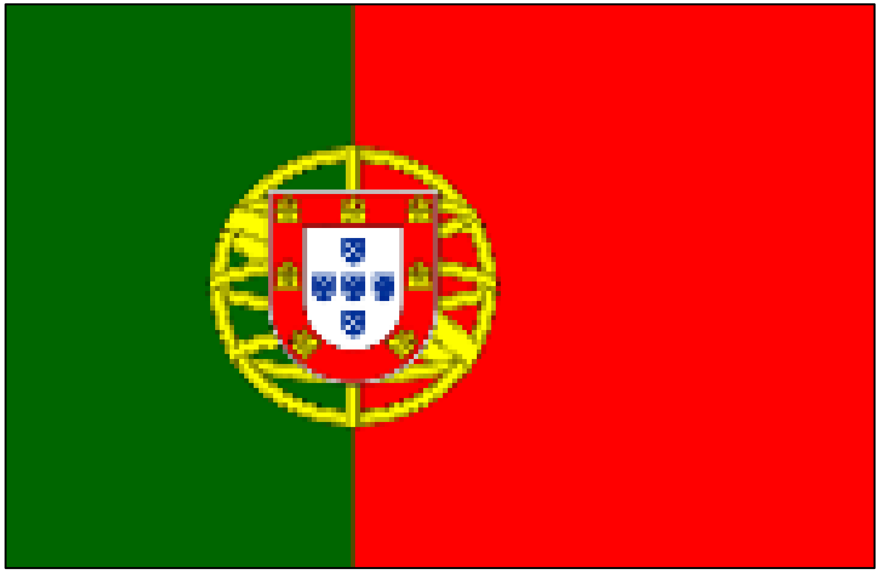


Encontra a fraçao correspondente à cor vermelha na bandeira

Encontra a fraçao correspondente à cor vermelha na bandeira



Encontra a fraçao correspondente à cor vermelha na bandeira

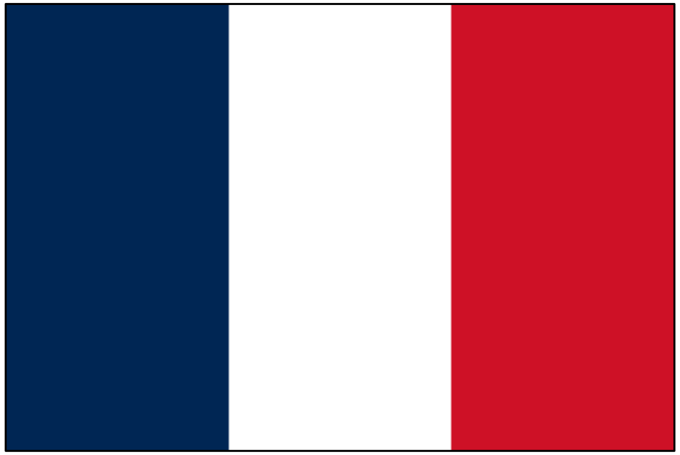


Encontra a fraçao correspondente à cor vermelha na bandeira

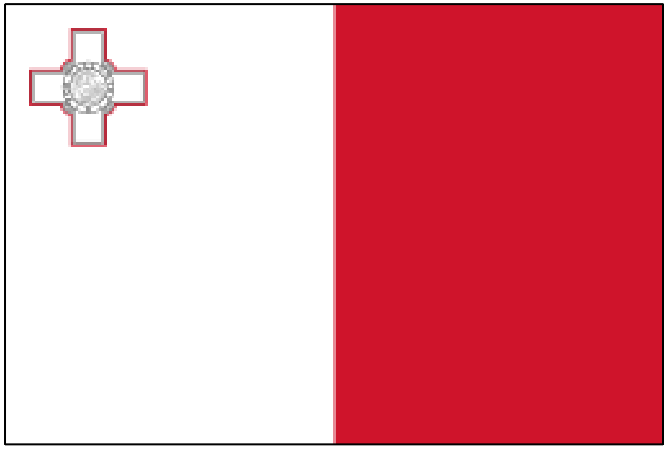
Apêndice 2

Em qual das bandeiras destes países o vermelho é metade?

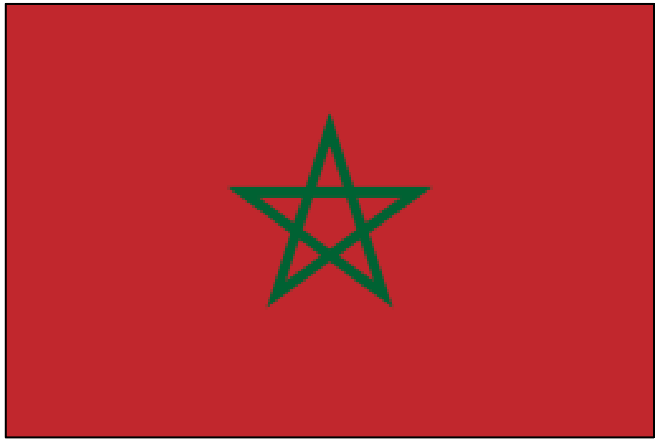
Rodeia a resposta correta



França

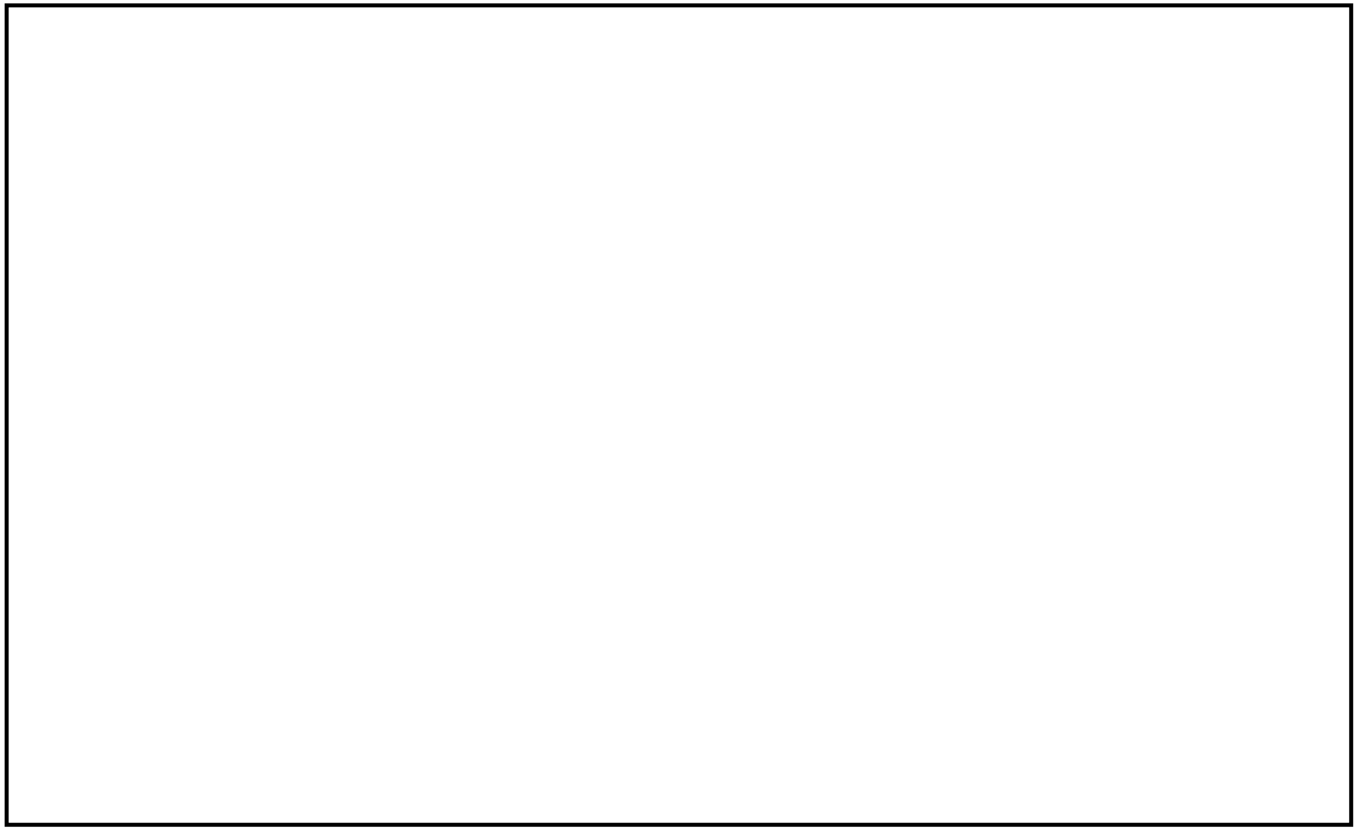


Malta



Marrocos

Pinta uma bandeira em que o vermelho é metade



Pinta uma bandeira em que o vermelho nao é metade

O vermelho na bandeira de Portugal sera mais ou menos de metade?

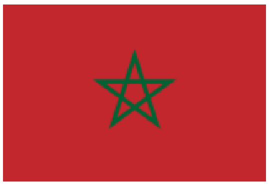
Apêndice 3

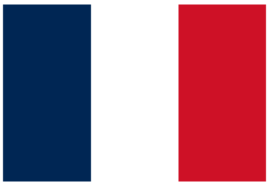
Parte 1 - Frações

1 Em qual das bandeiras seguintes, o vermelho ocupa $\frac{1}{2}$?

A 

☑ 

C 

D 

2 Qual a fração ocupada pela parte vermelha na bandeira representada na imagem?

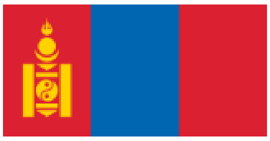
A $\frac{1}{2}$

☑ $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{2}{3}$

3 Qual a fração ocupada pela parte vermelha na bandeira representada na imagem?



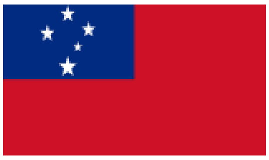
A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

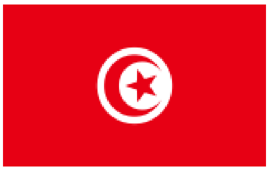
C $\frac{1}{4}$

☑ $\frac{2}{3}$

4 Qual das seguintes bandeiras representa a unidade?

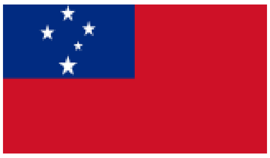
A


B

D


5 Qual a fração ocupada pela parte vermelha na bandeira representada na imagem?



A $\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$

C $\frac{1}{3}$

D $\frac{2}{3}$

Parte 2 - Frações

1 Qual a fração ocupada pela parte vermelha na bandeira representada na imagem?

- [x] $\frac{1}{2}$
- B $\frac{1}{3}$
- C $\frac{1}{4}$
- D $\frac{2}{3}$

2 Em qual das seguintes bandeiras, o vermelho ocupa $\frac{1}{3}$ da bandeira?

A

B

- [x]

D