



**UNIVERSIDADE DO ALGARVE**  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

**DINÂMICA DAS PARTÍCULAS**  
**E**  
**PROPAGAÇÃO DA LUZ**

(dissertação para a obtenção do grau de mestre em física)

**FRANCISCO MANUEL GUERREIRO**  
**ROMANA MARTINS**

FARO  
2003

3221 T.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN  
SERVICE LEISTUNGSGEBIET

18 02 04 53626

MAR\*Div

1

NOME: Francisco Manuel Guerreiro Romana Martins

DEPARTAMENTO: Física

ORIENTADOR: Professor Doutor Mircea Serban Rogalski

DATA: 28 de Agosto de 2003

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

Dinâmica das Partículas e Propagação da Luz

JÚRI:

Presidente: Professor Doutor Robertus Josephus Hendrikus Potting

Vogais: Professor Doutor Augusto José dos Santos Fitas

Professor Doutor Mircea Serban Rogalski

## RESUMO

A analogia matemática entre o *princípio da acção mínima* e o *princípio de Fermat*, fundamento da óptica geométrica, implica uma correspondência formal entre o tratamento das *trajectórias de partículas* e o respeitante à propagação dos *raios luminosos*.

No âmbito deste trabalho iremos procurar tornar evidente, através de exemplos práticos e de uma formulação matemática compreensível para alunos do ensino secundário ou de um primeiro ano universitário, a equivalência entre o formalismo clássico da dinâmica das partículas, nomeadamente colisão elástica e movimento através de uma região estreita de campo uniforme, e o formalismo da óptica geométrica, específico para fenómenos de reflexão e refacção da luz.

A apresentação terá a forma de uma monografia onde serão desenvolvidos os capítulos da mecânica e da óptica necessários à compreensão dos fenómenos em estudo, sendo os princípios teóricos expostos ilustrados, sempre que possível, por exemplos práticos que facilitem a sua compreensão.

Serão ainda apresentados dispositivos experimentais realizados para permitir, através da reflexão e refacção de esferas, simular o comportamento da luz nos referidos fenómenos.

### Palavras-chave:

Princípio da acção mínima; colisão elástica; reflexão; refacção; princípio de Fermat; raios luminosos.

# DYNAMICS OF PARTICLES AND PROPAGATION OF LIGHT RAYS

## ABSTRACT

The mathematical similarity between the mechanical *principle of least action* and Fermat's principle of *least time*, which is the basis of geometric optics, implies a formal correspondence between the treatment of the *trajectories of particles* and that concerning the propagation of *light rays*.

Throughout this work, practical examples and a mathematical formulation that is accessible to students of secondary grade or university course of introductory physics will be constantly used, to make evident the equivalence between the classic particle dynamics, namely the concepts of elastic collision and of the movement through a narrow region of uniform field of forces, and the formalism of geometric optics, for light reflection and refraction.

The work is presented as a monograph, including the necessary chapters on mechanics and optics, essential for the understanding of the studied issues, and the illustration of the theoretical concepts by practical examples that facilitate their understanding, whenever possible.

Experimental devices have been developed to allow simulation, in terms of reflection and refraction of spherical particles, of the behaviour of light in the aforementioned phenomena.

### Key-words:

Principle of least action; elastic collision; reflection; refraction; Fermat's principle; light rays.

## ÍNDICE

<i>Identificação</i>	ii
<i>Resumo</i>	iii
<i>Abstract</i>	iv
<i>Índice</i>	v
INTRODUÇÃO	1
FUNDAMENTAÇÃO	5
TRABALHOS SEMELHANTES	20
ANALOGIA ÓPTICA-MECÂNICA	23
MOMENTO LINEAR E COLISÕES	29
1.Momento linear de uma partícula e sua variação	30
2.Conservação do momento linear	35
3.Movimento do centro de massa	38
4.Colisões	40
4.1.Colisões elásticas	41
4.2.Colisões inelásticas	45
4.3.Colisões a duas dimensões	48
4.4."Reflexão" e "refracção" das partículas	52
ÓPTICA GEOMÉTRICA	58
Introdução	59
1.Propagação rectilínea da luz e princípio de Fermat	60
2.Reflexão da luz	61
2.1.Leis da reflexão	61
2.2.Imagem de um objecto em espelhos planos	62
2.3. Imagem de um objecto em espelhos esféricos	63

2.4.Equações dos espelhos	67
3.Refracção	70
3.1.Leis da refração	71
3.2.Reflexão total – Ângulo limite	73
3.3.Propagação através de uma lâmina de faces paralelas	76
3.4.Prismas	78
3.5.Lentes delgadas	83
3.6.Formação de imagens através das lentes	90
3.7.Equações das lentes	92
DISPOSITIVOS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS	97
CONCLUSÕES	117
BIBLIOGRAFIA	121
ANEXOS	
Anexo A – O Problema da Braquistocrónica	127

# INTRODUÇÃO

## Introdução

A analogia óptica-mecânica em que se baseia este trabalho é a expressão de uma relação profunda entre a trajectória de raios luminosos num material heterogéneo, caracterizado por um índice de refração variável no espaço, e a trajectória percorrida por uma partícula material num sistema conservativo.

Se um raio luminoso segue uma trajectória que é perpendicular às superfícies de igual tempo, obtidas segundo o princípio de Huygens, uma partícula move-se segundo uma trajectória que é perpendicular às superfícies de acção constante, tendo o princípio de menor tempo de Fermat a sua contrapartida mecânica no princípio da acção mínima.

Os princípios mínimos, em física, têm uma história longa e interessante. A busca desses princípios assenta na noção de que a natureza minimiza sempre certas quantidades, quando ocorre um processo físico.

O primeiro desses princípios mínimos foi formulado no campo da óptica. Hero de Alexandria, no século II A.C., descobriu que a lei que rege a reflexão da luz podia ser obtida assumindo que um raio de luz, deslocando-se de um ponto para outro através da reflexão num espelho plano, percorria sempre o caminho mais curto. Uma construção geométrica simples permite verificar que este princípio leva, de facto, à igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão, para um raio luminoso reflectido num espelho plano.

O princípio de Hero do “caminho mais curto” não permitia, contudo, obter uma lei correcta para a refração. Em 1657 Fermat reformulou o princípio, postulando que a luz se propaga sempre entre dois pontos, do mesmo meio ou de meios ópticos diferentes, segundo a trajectória para a qual é mínimo o tempo de propagação. O princípio de Fermat do “tempo mínimo” levou imediatamente não só à correcta lei da reflexão, como também à lei de Snell da refração.

## Introdução

Uma das primeiras aplicações de um princípio mínimo à mecânica decorreu da resolução do problema da braquistocrónica, colocado por Johann Bernoulli em 1696 (uma apresentação mais pormenorizada desse problema é apresentada no Anexo-A). A introdução do conceito de “acção” foi feita em 1747 por Maupertuis, através da sua afirmação de que o movimento dinâmico ocorria com um mínimo de acção. O seu conceito de “acção” era bastante vago e o seu **princípio da acção mínima** assentava, em certa medida, em bases teológicas (a acção é minimizada através da “vontade de Deus”)[14].

Só mais tarde foi apresentada uma fundamentação matemática sólida desse princípio, por Lagrange em 1760, tendo desenvolvimentos posteriores levado Sir William Rowan Hamilton, matemático e astrónomo escocês, a formular um princípio dinâmico no qual é possível basear não só toda a mecânica como grande parte da física clássica.

O princípio de Hamilton pode ser apresentado da seguinte forma:

*“A trajectória dinâmica real descrita pelo movimento de um sistema material entre os instantes  $t_1$  - em que ocupa uma posição  $A$  - e  $t_2$  - em que ocupa a posição  $B$  é aquela que minimiza o integral no tempo da diferença entre as energias cinética e potencial.”*

Se bem que menos geral que o Princípio de Hamilton, o princípio da acção mínima constitui uma forma útil de efectuar a transição entre a física clássica, a óptica e a mecânica quântica.

Além disso, este princípio é matematicamente análogo ao princípio de Fermat, fundamento da óptica geométrica, o que implica uma correspondência formal entre os problemas que tratam de *trajectórias de partículas* e os respeitantes à propagação dos *raios luminosos* [2], [21].

Sendo a óptica geométrica uma aproximação da óptica ondulatória, parece evidente que a mecânica clássica poderia ser igualmente uma aproximação de uma mecânica

## Introdução

mais geral, sendo esse um dos pontos de partida que conduziram ao desenvolvimento da mecânica ondulatória por De Broglie e Schrödinger [10], [13], [18], [32].

No âmbito deste trabalho iremos procurar, através de exemplos práticos e de uma formulação matemática compreensível para alunos do ensino secundário ou de um primeiro ano universitário, tornar evidente a equivalência entre o formalismo clássico da dinâmica das partículas, nomeadamente colisão elástica e movimento através de uma região estreita de campo uniforme, e o formalismo da óptica geométrica, na explicação de fenómenos de reflexão e refração da luz.

Os conteúdos serão apresentados sob a forma de um manual, onde serão desenvolvidos capítulos de mecânica e óptica considerados essenciais para a compreensão do que se pretende ilustrar, incluindo alguns exercícios resolvidos, como forma de exemplificar e aplicar as matérias expostas.

Serão ainda desenvolvidos dispositivos experimentais que permitam, através do movimento de esferas, simular o comportamento da luz nos referidos fenómenos.

# FUNDAMENTAÇÃO

## 1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DOS RAIOS

Consideremos um meio óptico não homogéneo em que, para simplificar, o índice de refração  $n$  varia apenas numa direcção. A variação contínua de  $n$  pode ser substituída por uma variação descontínua, correspondente a um meio estratificado (Figura I.a) em que  $n$  varia apenas de camada para camada: no limite em que a espessura das camadas tende para zero, reproduzimos a variação contínua.

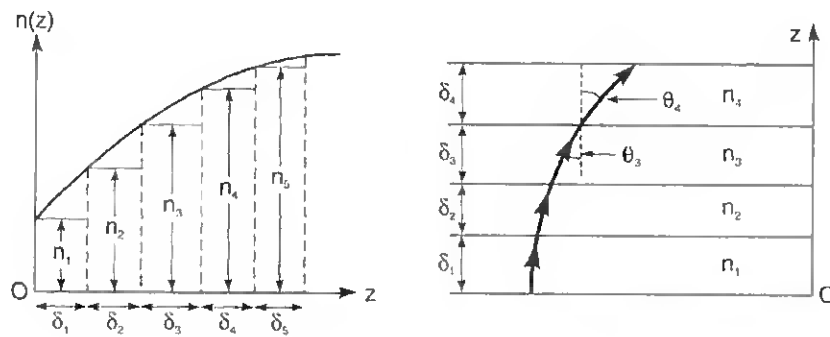


Figura I. Meio óptico não homogéneo

Aplicando a lei de Snell a cada interface (Figura I.b), temos

$$\dots = n_3 \text{sen} \theta_3 = n_2 \text{sen} \theta_2 = n_1 \text{sen} \theta_1$$

ou seja, o ângulo entre o raio e a direcção  $z$  vai variando e, no limite, podemos escrever

$$n \text{sen} \theta = \text{constante} \quad (\text{F.1})$$

o que corresponde a uma variação contínua de  $\theta$  com  $n$ : num meio não homogéneo os raios luminosos são curvos.

Consideremos uma superfície em que  $n$  é constante. O ângulo  $\theta$  é então o ângulo entre a direcção  $\vec{u}$  do raio ( $\vec{u} \equiv$  vector unitário da tangente ao raio) e a direcção de  $\vec{N}$ , vector unitário da normal à superfície  $n = \text{constante}$ .

## Fundamentação

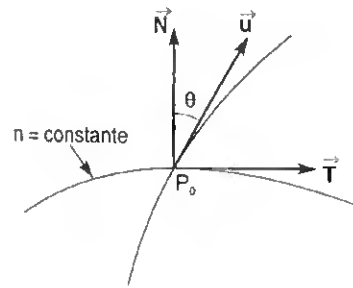


Figura II. Vectores unitários

Da Figura II retira-se

$$\text{sen}\theta = \vec{u} \cdot \vec{T}$$

onde  $\vec{T}$  é um vector unitário [no plano de incidência  $(\vec{N}, \vec{u})$ ] tangente à superfície  $n = \text{constante}$ . A generalização da equação (F.1) é então

$$\Delta(n\vec{u})\vec{T} = 0 \quad (\Delta = \text{variação ao longo do raio}) \quad (\text{F.2})$$

Na Figura III está representado um raio que se propaga num meio não homogêneo, descrevendo um arco de curva  $s$  a partir de uma dada origem

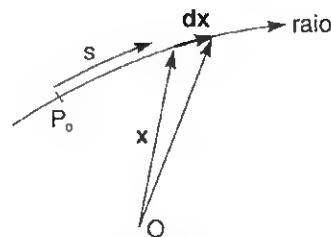


Figura III. Deslocamento infinitesimal ao longo de um raio

Sabemos que

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad (|d\vec{x}| = ds) \quad (\text{F.3})$$

Partindo da identidade

$$(n\vec{u})^2 = n^2 \quad (\text{F.4})$$

e diferenciando ambos os membros, obtemos

## Fundamentação

$$(n\bar{u}).d(n\bar{u}) = ndn$$

$$\bar{u}.d(n\bar{u}) = dn \quad (\text{F.5})$$

Se  $dn$  é a variação de  $n$  para um deslocamento  $d\bar{x}$  ao longo do raio temos, pela definição de gradiente

$$dn = \text{grad } n.d\bar{x} = \text{grad } n.\frac{d\bar{x}}{ds} ds = \bar{u}.\text{grad } nds$$

Substituindo na equação (A.5) vem

$$\bar{u}.\frac{d(n\bar{u})}{ds} = \bar{u}.\text{grad } n \quad (\text{F.6})$$

O vector  $\text{grad } n$  é perpendicular às superfícies  $n = \text{constante}$ , ou seja, é paralelo a  $\bar{N}$  (Figura II). O mesmo se pode afirmar para  $\frac{d}{ds}(n\bar{u})$  pois, pela equação (F.2),  $n\bar{u}$  só pode mudar ao longo de  $\bar{N}$  (não muda na direcção tangencial  $\bar{T}$ ). Logo, decompondo  $\bar{u}$  nas direcções  $\bar{N}$  e  $\bar{T}$ , vemos que a equação (F.6) equivale a

$$\frac{d}{ds}(n\bar{u}) = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\bar{x}}{ds}\right) = \text{grad } n \quad (\text{F.7})$$

que constitui a *equação diferencial dos raios* [3], [4], [16].

## 2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS TRAJECTÓRIAS

Consideremos agora uma partícula de massa  $m$  movendo-se num campo de forças conservativo onde a energia potencial é  $U(x)$ . Sendo  $\bar{p} = m\bar{v}$  o momento linear da partícula, pela conservação da energia temos

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E = \frac{1}{2}mv^2(x) + U(x) \quad (\text{F.8})$$

## Fundamentação

Temos então em cada ponto  $x$  um valor bem definido da magnitude  $p(x)$  do momento linear de uma partícula que passe por esse ponto:

$$p(x) = mv(x) = \sqrt{2m[E - U(x)]} \quad (\text{F.9})$$

Seja  $\vec{x} = \vec{x}(s)$  a equação paramétrica de uma trajectória, em função do arco de curva  $s$  ao longo dessa trajectória. Se  $s = s(t)$  é a lei horária do movimento ao longo da trajectória, temos então  $\frac{ds}{dt} = v$  e

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{x}}{ds} = v\vec{u} \quad (\text{F.10})$$

onde  $\vec{u}$ , vector unitário na direcção da velocidade, é tangente à trajectória.

Para determinar a trajectória, aplicamos a 2ª lei de Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\text{grad } U \quad (\text{F.11})$$

onde, usando a equação (A.10)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{p}}{ds} = mv \frac{d\vec{v}}{ds} = v \frac{d}{ds} \left( p \frac{d\vec{x}}{ds} \right) \quad (\text{F.12})$$

Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$\text{grad } p = \frac{dp}{dU} \text{grad } U = -\frac{1}{2} \sqrt{2m} [E - U(x)]^{-1/2} \text{grad } U = -\frac{m}{p} \text{grad } U \quad (\text{F.13})$$

$$-\text{grad } U = \frac{p}{m} \text{grad } p = v \text{grad } p \quad (\text{F.14})$$

Substituindo as equações (F.12) e (F.14) na equação (F.11), obtemos finalmente a equação diferencial das trajectórias:

$$\frac{d}{ds} \left( p \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \text{grad } p \quad (\text{F.15})$$

## Fundamentação

que tem exactamente a mesma forma que a equação diferencial dos raios na óptica geométrica, com  $n(x)$  substituído por  $p(x)$  [cf.(F.7)].

Logo, a trajectória clássica de uma partícula de energia  $E$  num campo de forças de energia potencial  $U(x)$  é idêntica à trajectória de um raio luminoso num meio não homogéneo, de acordo com as leis da óptica geométrica.

### 3. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS ONDAS

O conceito de onda está associado à propagação de uma perturbação, com velocidade constante e sem deformação, através de um meio. A onda transporta energia, sem deixar alguma deformação permanente no meio, que pode ser visto como sendo contínuo. No caso das pequenas perturbações, uma onda pode ser descrita em termos de espaço e de tempo por equações diferenciais lineares, cuja forma é independente da natureza das forças de interacção envolvidas.

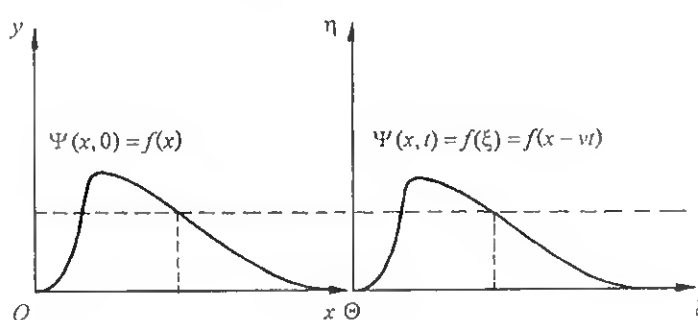


Figura IV. Perturbação arbitrária em dois instantes diferentes

Consideremos uma perturbação arbitrária  $\Psi$  que se propaga com velocidade  $v$  ao longo do eixo  $x$ , no referencial  $S$ , como se mostra na Figura IV. No seu próprio referencial  $\Sigma$ , cujas coordenadas cartesianas  $\Theta\xi\eta\zeta$  coincidam com as coordenadas do referencial  $S$ ,  $Oxyz$ , no instante  $t = 0$ , temos:

## Fundamentação

$$\xi = x - vt \quad (\text{F.16})$$

Porque a perturbação mantém a mesma posição e o mesmo perfil relativamente ao referencial  $\Sigma$ , a sua dependência de tempo  $t$  será expressa através da coordenada  $\xi$ , em termos de uma dada função:

$$\Psi(x, t) = f(\xi) = f(x - vt) \quad (\text{F.17})$$

onde  $f(\xi)$  define o perfil de onda. Para qualquer perfil  $f$ , a Eq.(F.17) dá:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0 \quad (\text{F.18})$$

o que descreve uma *onda progressiva* ao longo do eixo  $x$ . No caso duma velocidade  $v$  negativa, a onda propaga-se no sentido contrário, conforme a equação:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0 \quad (\text{F.19})$$

cuja solução é dada por uma função  $g$ , que não tem que ser relacionado com  $f$ :

$$\Psi(x, t) = g(x + vt) \quad (\text{F.20})$$

Aplicando o operador diferencial (F.19), a Eq.(F.18) torna-se:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x - vt) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x - vt) = 0$$

enquanto aplicando o operador (F.18), a Eq.(F.19) toma a forma:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) g(x + vt) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(x + vt) = 0$$

Segue-se que a equação:

## Fundamentação

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{F.21})$$

é satisfeita pela *sobreposição linear* de duas funções de onda (F.17) e (F.20), de perfil arbitrário e não relacionadas uma a outra. A equação (F.21) chama-se a *equação de ondas* unidimensional, que descreve a propagação das ondas, com velocidade  $v$ , em qualquer sentido do eixo  $x$ . Dado que a Eq.(F.21) é válida para funções  $\Psi$  de perfil arbitrário, segue-se que a propagação das ondas é independente da sua natureza, por exemplo mecânica ou electromagnética.

Dado que uma função de onda que se propaga ao longo do eixo  $x$  pode ser escrita na forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = f(x - vt) + g(x + vt) = f(\vec{r} \cdot \vec{e}_x - vt) + g(\vec{r} \cdot \vec{e}_x + vt) \quad (\text{F.22})$$

de modo que, considerando uma direcção arbitrária, definida por um vector unitário  $\vec{e}_n$ , obtemos a forma geral da função de onda:

$$\Psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \vec{e}_n - vt) + g(\vec{r} \cdot \vec{e}_n + vt) \quad (\text{F.23})$$

Como se mostra na Figura V, a função  $\Psi$  definida pela Eq.(F.23) mantém um valor constante em todos os pontos dum plano chamado *frente de onda* que se propaga segundo a direcção de  $\vec{e}_n$  com velocidade constante  $\pm v$ , de modo que descreve uma *onda plana*. A função  $f$  satisfaz a equação:

$$\left( \nabla + \vec{e}_n \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0 \quad (\text{F.24})$$

caso se propague no sentido positivo da direcção  $\vec{e}_n$ , enquanto, no sentido contrário, temos a equação para a função  $g$ :

## Fundamentação

$$\left( \nabla - \vec{e}_n \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) g = 0 \quad (\text{F.25})$$

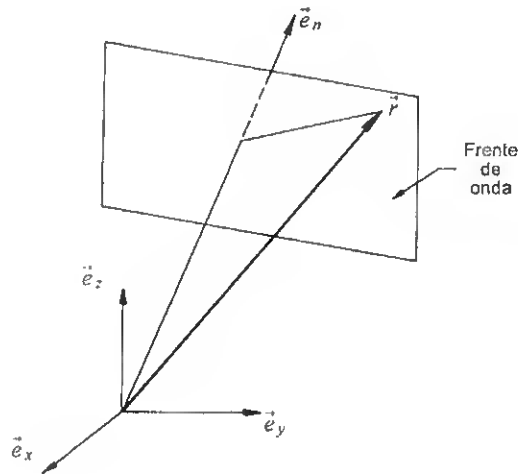


Figura V. Onda plana progressiva

Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned} \left( \nabla + \vec{e}_n \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \nabla - \vec{e}_n \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi &= \nabla^2 \Psi + \vec{e}_n \cdot \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Psi) - \frac{1}{v} \nabla \cdot \left( \vec{e}_n \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ &= \nabla^2 \Psi + \vec{e}_n \cdot \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Psi) - \vec{e}_n \cdot \frac{1}{v} \nabla \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \\ &= \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0 \end{aligned}$$

de modo que a equação de onda em três dimensões:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{F.26})$$

será satisfeita por todas as ondas planas que se propagam com a mesma velocidade  $v$  nos dois sentidos, ao longo da direcção arbitrária  $\vec{e}_n$ .

## Fundamentação

No caso particular dum perfil definido pela curva co-senos, obtemos da Eq.(F.23) as soluções chamadas *ondas harmónicas planas*:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cos\{k(\vec{r} \cdot \vec{e}_n \pm vt) + \varphi\} = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \varphi) \quad (\text{F.27})$$

assumindo que  $\alpha, \beta, \gamma$  representam os co-senos directores da direcção  $\vec{e}_n$ , de modo que:

$$\vec{e}_n = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (\text{F.28})$$

pelo que podemos definir o *vector de onda*  $\vec{k}$  ao longo da direcção de propagação na forma:

$$\vec{k} = k\vec{e}_n = k\alpha \vec{e}_x + k\beta \vec{e}_y + k\gamma \vec{e}_z = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \quad (\text{F.29})$$

Substituindo  $\omega = kv$ , a Eq.(F.28) torna-se:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (\text{F.30})$$

É prática comum representar uma onda harmónica plana (F.27) em termos duma função complexa:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)} \quad (\text{F.31})$$

o que implica sempre tomar em conta a parte real da função de onda e restringir as operações à adição, subtracção, multiplicação e divisão por um número real, bem como diferenciação e integração no espaço real.

Assumindo que a função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$  tem simetria esférica em torno da origem, por outras palavras assumindo que  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t)$ , e não depende de  $\theta$  e de  $\varphi$ , o operador de Laplace  $\nabla^2$  simplifica-se, de modo que a equação de onda (F.26) passa para:

## Fundamentação

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{F.32})$$

o que também pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Psi) \quad (\text{F.33})$$

Esta é uma equação diferencial para a função  $r\Psi(r, t)$  com a mesma forma que a equação de onda unidimensional (F.21) para  $\Psi(x, t)$ . Resulta que a solução pode ser escrita como:

$$r\Psi = f(r - vt) + g(r + vt)$$

onde  $f$  e  $g$  são, mais uma vez, funções arbitrárias. Então, a função de onda toma a forma:

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} f(r - vt) + \frac{1}{r} g(r + vt) \quad (\text{F.34})$$

que descreve as *ondas esféricas*, em propagação com velocidade constante  $v$ , cuja amplitude depende da distância para a fonte através do factor  $1/r$ . Assumindo para  $f$  a forma dada pela Eq.(F.27) obtemos a representação das ondas esféricas:

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \varphi) \quad (\text{F.35})$$

ou seja, a representação complexa:

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{F.36})$$

As ondas que se propagam em três dimensões podem mudar de direcção devido a mudança das propriedades do meio de propagação. Assumindo uma mudança contínua destas propriedades, a velocidade de onda torna-se uma função de posição  $v(\vec{r})$  bem

## Fundamentação

como o vector de onda  $k(\vec{r})$ , dado pela Eq.(F.30), de modo que podemos assumir para a equação (F.26) uma solução de forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{i\{k(\vec{r})x(\vec{r}) \pm \omega t\}} \quad (\text{F.37})$$

semelhante à solução (F.31). Convém definir as propriedades do meio em termos do seu índice de refração, dado por:

$$n(\vec{r}) = \frac{v_0}{v(\vec{r})} \quad (\text{F.38})$$

onde  $v_0$  é a velocidade da onda no vácuo. O número de onda correspondente  $k_0 = \omega / v_0$  é uma constante. Podemos reduzir o número de funções a determinar, definindo uma nova função:

$$k(\vec{r})x(\vec{r}) = k_0 n(\vec{r})x(\vec{r}) = k_0 S(\vec{r}) \quad (\text{F.39})$$

de modo que a solução (F.37) torna-se:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{i\{k_0 S(\vec{r}) \pm \omega t\}} \quad (\text{F.40})$$

A função  $S(\vec{r})$  tem dimensões de comprimento e a Eq.(F.39) mostra a sua semelhança com o percurso óptico definido na óptica geométrica. A esta função chama-se *eikonal* (imagem). O produto  $k_0 S(\vec{r})$  pode ser interpretado como a constante de fase local do movimento harmónico, numa dada posição  $\vec{r}$ , tal que a equação:

$$S(\vec{r}) = \text{const} \quad (\text{F.41})$$

define a superfície da frente de onda.  $A(\vec{r})$  é uma função que passa pelos pontos de amplitude máxima e varia de modo independente da frente de onda. Substituindo a solução (F.40) e separando as partes real e imaginária, a Eq.(F.26) pode ser escrita como:

## Fundamentação

$$\begin{aligned} \nabla^2 A + k_0^2 A \{r^2 - (\nabla S) \cdot (\nabla S)\} &= 0 \\ 2(\nabla A) \cdot (\nabla S) + A \nabla^2 S &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

Assumindo uma variação lenta da amplitude, a segunda derivada  $\nabla^2 A$  pode ser negligenciada, o que resulta na equação:

$$|\nabla S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (\text{F.43})$$

chamada a *equação do eikonal* [17]. Para um meio uniforme, onde  $n$  é uma constante, uma solução da Eq.(F.43) é a onda plana, que se propaga numa direcção arbitrária  $\vec{e}_n$ , definida pelos co-senos directores  $\alpha, \beta, \gamma$  dados pela Eq.(F.28):

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z) \quad \text{ou} \quad \nabla S = \text{grad} S = n\vec{e}_n \quad (\text{F.44})$$

Outra solução, com simetria esférica  $S(\vec{r}) = S(r)$ , obtém-se tendo em conta que:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 \frac{x^2}{r^2}$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Usando formas semelhantes para as outras derivadas, a Eq.(F.43) torna-se:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = n^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial S}{\partial r} = n \quad (\text{F.45})$$

cujas soluções são:

$$S = nr \quad \text{ou} \quad \nabla S = \text{grad} S = n\vec{e}_n \quad (\text{F.46})$$

Dado que a orientação do operador gradiente  $\nabla S$  é perpendicular à superfície  $S = \text{const}$ , a Eq.(F.43) pode ser escrita na forma:

## Fundamentação

$$\nabla S(\vec{r}) = n(\vec{r})\vec{u}(\vec{r}) \quad (\text{F.47})$$

onde a direcção do vector unitário  $\vec{u}$  é perpendicular à frente de onda. Então podemos construir curvas contínuas, chamadas *raios*, ao longo do gradiente da função  $S$ , que é paralelo à orientação local de  $\vec{u}$ . Para meios uniformes, descritos pelas Eqs.(F.44) e (F.46) nos casos particulares das ondas planas e esféricas, os raios são linhas rectas. Porque, em geral, o raio segue uma curva, convém deduzir uma equação que mostra o modo em que  $\vec{u}(\vec{r})$  muda ao longo da mesma. Assumindo um deslocamento  $d\vec{r}$ , de comprimento  $ds$  ao longo da curva, a mudança de qualquer função de posição  $F(\vec{r})$  pode ser escrita na forma:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \nabla F \cdot d\vec{r} = (\nabla F \cdot \vec{u}) ds \quad (\text{F.48})$$

onde  $d\vec{r} = \vec{u} ds$ , de modo que podemos definir a derivada direcional de  $F(\vec{r})$  ao longo da curva:

$$\frac{dF}{ds} = (\vec{u} \cdot \nabla) F$$

Esta função escalar pode ser vista como a componente da função vectorial  $F(\vec{r})$ , ou seja, há equações semelhantes para as outras componentes, de modo que:

$$\frac{d}{ds} F = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{F} \quad (\text{F.49})$$

Considerando que  $\vec{F} = n(\vec{r})\vec{u}(\vec{r})$ , e utilizando as Eqs.(F.49) e (F.47), podemos exprimir a taxa de variação desta função ao longo do raio, de que resulta:

$$\frac{d}{ds} (n\vec{u}) = \frac{d}{ds} (\nabla S) = (\vec{u} \cdot \nabla) (\nabla S) = \left( \frac{\nabla S}{n} \cdot \nabla \right) (\nabla S) \quad (\text{F.50})$$

## Fundamentação

$$= \frac{1}{2n} \nabla(\nabla S)^2 - \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n$$

A este resultado chama-se a *equação diferencial dos raios*, previamente referido como (F.7). Caso o raio seja descrito pela função  $\vec{x} = \vec{x}(s)$ , onde  $\vec{x}$  dá a direcção do raio e  $s$  representa a distância ao longo do mesmo a partir duma origem arbitrária, o vector unitário  $\vec{u}(\vec{x})$  será dado pela Eq.(F.3) e a equação do raio (F.50) torna-se idêntica à Eq.(F.7), nomeadamente:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \nabla n$$

A equação diferencial dos raios (F.7) representa então uma aproximação da equação de onda, apropriada para a descrição da propagação das ondas electromagnéticas em termos do conceito de raio de luz, utilizado na óptica geométrica [17], [27]. Numa forma semelhante foi deduzida a equação diferencial das trajectórias (F.15), que descreve o movimento das partículas. Nesta perspectiva, a analogia óptico-mecânica, em que se baseia o presente trabalho, pode ser relacionada com o comportamento ondulatório associado à propagação luz, conforme a teoria de Maxwell, como também ao movimento das partículas, conforme a mecânica ondulatória.

# TRABALHOS SEMELHANTES

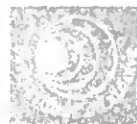
Formulados, no capítulo anterior, os fundamentos da analogia óptico-mecânica, foi feita uma pesquisa no sentido de ver em que medida esta já foi usada para fins didáticos.

Há vários artigos que apontam para aplicações da analogia óptico-mecânica em campos tão diversos que vão desde as regatas (para ganhar as corridas convém aos barcos seguir o percurso de menor tempo...) [37], até à teoria da relatividade geral [25], e [30] e, inclusive, astrofísica [38]. No entanto, especificamente, referências a um modelo didático que permita tornar evidente, através de uma realização experimental, a existência da referida analogia, só foi encontrada uma, nomeadamente o artigo *Bouncing Light Beams and the Hamiltonian Analogy* [26].

Nesse artigo os autores sugerem uma realização experimental que constitui uma introdução à analogia óptico-mecânica. Na experiência proposta um feixe de luz laser propaga-se através de um meio não-homogéneo, considerando os autores que a demonstração didáctica constitui um elemento chave na demonstração e subsequente utilização da analogia.

O dispositivo experimental utilizado é constituído por uma tina de plástico com as dimensões (2 cm (l) × 8 cm (a) × 20 cm (c)), cheia de água a cerca de 40 °C, no fundo da qual foram colocados três cubos de açúcar que se deixam dissolver sem agitação. À medida que o açúcar se difunde através da água é criado um gradiente de concentração, logo também um gradiente no índice de refração. Uma vez que a tina é estreita, pode considerar-se que esse gradiente é unicamente vertical.

A luz de um laser de argon de c.d.o. 514,5 nm, dirigida para a solução, é desviada para o fundo da tina onde é reflectida (ocorre uma reflexão interna total na interface plástico-ar, na superfície exterior da tina). Então o raio reflectido continua a curvar, de



## Trabalhos Semelhantes

acordo com a regra geral da óptica geométrica de que um raio curva na direcção da região de maior índice de refração, e volta a “ressaltar” no fundo do recipiente.

Uma outra montagem alternativa consiste numa tina de vidro de iguais dimensões com o fundo espelhado, na qual é vertida uma solução de açúcar, sobre a qual é colocada uma camada de água destilada a igual temperatura. Se se operar cuidadosamente no sentido de evitar movimentos de convecção e gradientes de temperatura, a mistura dos dois fluídos na tina será devida unicamente a processos de difusão.

Depois de caracterizar as propriedades ópticas do meio, os autores determinam a equação da trajectória do raio de luz utilizando unicamente a óptica geométrica, concluindo que a curva é uma catenária.

Em seguida é apresentada a analogia óptico-mecânica e, como exemplo, é caracterizado o campo de forças no qual partículas teriam a mesma trajectória que os raios de luz na experiência descrita.

Apesar de assentar também num modelo didáctico experimental que torne evidente a existência da analogia óptico-mecânica, o presente trabalho é diferente, não só nos artefactos experimentais propostos, mas também no nível de estudantes a que a apresentação se destina, diferença essa que não pode deixar de se reflectir na linguagem e no nível de desenvolvimento matemático utilizados.

# **ANALOGIA ÓPTICA-MECÂNICA**

## Analogia Óptica-Mecânica

Na sua propagação a luz obedece ao princípio do menor tempo para o percurso entre dois pontos (princípio de Fermat), nos termos do qual a lei de Snell da refração define a trajetória mais rápida para o percurso de  $P_1$  até  $P_2$  (Figura 1) através da superfície de separação de dois meios ópticos, onde as velocidades de propagação são  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente.

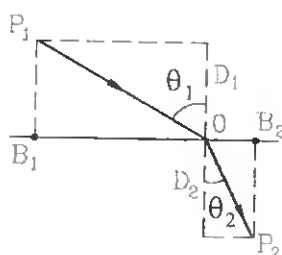


Figura 1. Refracção da luz

Se designarmos por  $x$  e  $x_0$  as coordenadas de posição, em relação ao ponto  $B_1$ , dos pontos  $O$  e  $B_2$ , o tempo necessário para o percurso de  $P_1$  a  $P_2$  pode ser expresso em termos da componente  $x$  da posição como:

$$t = \frac{P_1O}{v_1} + \frac{P_2O}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{D_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{D_2^2 + (x_0 - x)^2}$$

Fazendo  $\sqrt{D_1^2 + x^2} = l_1$ ,  $\sqrt{D_2^2 + (x_0 - x)^2} = l_2$  e considerando que  $\frac{1}{v} = \frac{n}{c}$ , teremos:

$$t = \frac{1}{c} (n_1 l_1 + n_2 l_2)$$

A condição para que o tempo seja mínimo exprime-se como:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{c} \frac{x}{l_1} - \frac{n_2}{c} \frac{x_0 - x}{l_2} = 0$$

ou

## Analogia Óptica-Mecânica

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} \quad (1)$$

Consideremos agora o movimento de uma partícula num certo campo plano, para o qual é válido o princípio da conservação da energia:

$$U + T = E \quad (2)$$

onde  $T$  é a energia cinética da partícula,  $U$  é a energia potencial e  $E$  a energia total (que permanece constante durante o movimento).

Sendo  $T = \frac{mv^2}{2}$ , o movimento pode ser descrito em termos do momento linear da partícula,  $p = \sqrt{2mT}$ . Daqui e da equação (2) resulta:

$$p = \sqrt{2m(E - U)}$$

Sabemos que as forças do campo se orientam segundo a normal às linhas equipotenciais e estão dirigidas no sentido dos potenciais decrescentes. Representemos então um sistema de linhas equipotenciais próximas umas das outras (Figura 2). Ao longo de cada uma destas linhas a velocidade  $v$  é constante, variando de forma contínua nas bandas entre duas linhas. Todavia, se fizermos a largura das bandas tender para zero podemos considerar que entre as linhas a velocidade permanece constante, variando bruscamente ao passar pela linha que separa duas bandas.

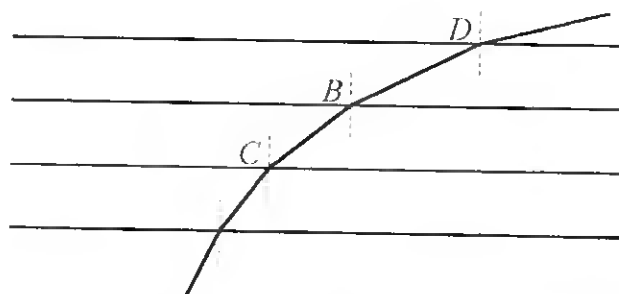


Figura 2. Movimento de uma partícula através de um campo plano

## Analogia Óptica-Mecânica

Quanto mais próximas forem as linhas de separação (quanto mais estreitas forem as bandas) e quanto menores forem os “saltos” na velocidade, tanto mais a distribuição descontínua de velocidades se aproxima da distribuição contínua descrita inicialmente, podendo esta última considerar-se como um limite das distribuições descontínuas quando a largura das bandas tende para zero.

Desta forma, em vez de forças contínuas podemos considerar impulsos instantâneos, perpendiculares às linhas equipotenciais, como causa para a mudança na velocidade. Dentro de cada banda infinitesimal a acção de forças está ausente e o movimento é rectilíneo, pelo que as trajectórias se podem representar por linhas quebradas cujos vértices se situam nas linhas equipotenciais (Figura 2).

Examinemos mais em pormenor o troço  $CBD$  dessa trajectória, conforme se representa na Figura 3.

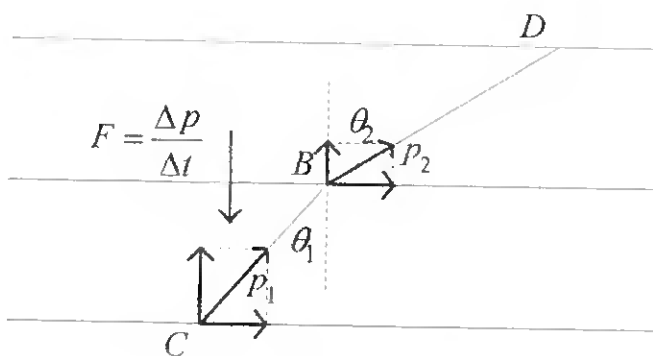


Figura 3. Refracção da partícula

No segmento  $CB$  o momento é  $p_1$  e no segmento  $BD$  é  $p_2$ . Se designarmos por  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos que os momentos  $p_1$  e  $p_2$  fazem com a normal à linha equipotencial no ponto  $B$ , as componentes tangentes dos momentos antes e depois da variação são, respectivamente,  $p_1 \sin \theta_1$  e  $p_2 \sin \theta_2$ . Uma vez que o impulso da força está dirigido

## Analogia Óptica-Mecânica

segundo a normal à linha equipotencial no ponto  $B$ , não existe modificação das componentes tangentes do momento, pelo que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} \quad (3)$$

Esta lei torna-se idêntica à lei de Snell da refração se substituirmos o índice de refração,  $n$ , pelo momento,  $p$ .

Se atendermos que, para a luz:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2}$$

e para a partícula:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1}$$

podemos constatar que as trajectórias da luz e da partícula são equivalentes, isto é, têm a mesma forma, se a uma aproximação do raio luminoso à normal à superfície de separação de dois meios ópticos, devido ao aumento da densidade óptica ( $n_2 > n_1$ ), corresponder uma diminuição da velocidade de propagação da luz ( $\frac{c}{n_2} < \frac{c}{n_1}$ ) e a uma aproximação da trajectória da partícula à normal à linha equipotencial, devido à diminuição da sua energia potencial, corresponder um aumento do seu momento:

$$p_2 = \sqrt{2m(E - U_2)} > \sqrt{2m(E - U_1)} = p_1$$

Tal como se considerou que a variação contínua do momento sofrida por uma partícula ao atravessar uma zona de campo uniforme se podia substituir por uma variação descontínua (com o intervalo entre as descontinuidades a tender para zero), em que  $p$  varia apenas na transição entre duas bandas delimitadas por uma linha equipotencial,

## Analogia Óptica-Mecânica

também num meio óptico não homogéneo podemos substituir a variação contínua de  $n$  por um meio estratificado, em que  $n$  varia apenas na transição de camada para camada: no limite em que a espessura das camadas tende para zero, reproduzimos a variação contínua.

Assim, se tivermos um meio óptico não homogéneo de índice de refração  $n(x)$ , no qual a propagação dos raios luminosos possa ser descrita como uma sucessão de refrações infinitesimais, as trajectórias dos raios luminosos têm a mesma forma que as trajectórias do movimento de uma partícula de energia  $E$  através de um campo de forças de energia potencial  $U(x)$ , correspondendo o momento  $p = mv$  ao índice de refração  $n$ , consistindo nisto a analogia entre a óptica e a mecânica, [12], que servirá de base para este trabalho.

# **MOMENTO LINEAR E COLISÕES**

- INTRODUÇÃO

Consideremos o que ocorre quando uma raquete de ténis impacta uma bola: a bola adquire uma velocidade inicial bastante elevada, podendo ultrapassar os  $100 \text{ km.h}^{-1}$ . Como a bola sofre uma enorme variação de velocidade num curto espaço de tempo, a força média exercida sobre ela durante o impacto é muito grande. De acordo com a terceira lei de Newton, a bola exerce na raquete uma força igual em módulo e direcção mas de sentido contrário, pelo que a raquete também vai experimentar uma aceleração. Contudo, como a sua massa é muito superior à da bola, a sua aceleração vai ser muito menor. Podemos constatar estes factos observando a batida na bola por parte de um jogador: a bola sai disparada, sendo a variação de velocidade da raquete devido ao impacto na bola praticamente imperceptível.

Um dos principais objectivos deste capítulo é fornecer as bases que possibilitem a análise e compreensão destes fenómenos. Num primeiro passo será introduzido o conceito de *momento linear*, pela sua utilidade na descrição de objectos em movimento e como forma alternativa e mais geral de aplicação das leis de Newton. Esse conceito levar-nos-á a uma lei de conservação, a lei da conservação do momento linear, especialmente útil no tratamento de situações que envolvam a colisão entre corpos [1], [5], [6], [11], [14], [15], [23].

## 1. MOMENTO LINEAR DE UMA PARTÍCULA E SUA VARIAÇÃO

Existem situações cuja análise não é simples utilizando unicamente as leis de Newton. Nesses casos, é de grande utilidade o conhecimento simultâneo de característi-

## Momento Linear e Colisões

cas do objecto e do seu movimento. O *momento linear*  $\vec{p}$  de uma partícula, grandeza que incorpora essa informação, pode ser definido como o produto da sua massa  $m$  pela sua velocidade  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (4)$$

O momento linear é uma grandeza vectorial já que resulta do produto de uma grandeza escalar, a massa, por uma vectorial, a velocidade. Como a massa é um escalar positivo, o momento linear terá sempre a direcção e sentido da velocidade. A sua unidade é  $\text{kg.m.s}^{-1}$ .

Assumindo que a massa da partícula permanece constante, é possível, através da segunda lei de Newton, relacionar o seu momento linear com a resultante das forças que sobre ela se exercem:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Assim, a equação da segunda lei de Newton pode ser escrita na forma mais geral

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5)$$

donde resulta a definição de força como a variação temporal do momento linear da partícula sobre a qual actua. Assumindo que a força se mantém constante durante um intervalo de tempo finito  $\Delta t$ , a equação (5) toma a forma:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

que se pode escrever como

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} \quad (6)$$

O produto  $\vec{F}\Delta t$  designa-se por *impulso* da força  $\vec{F}$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , pelo que podemos escrever

## Momento Linear e Colisões

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t \quad (7)$$

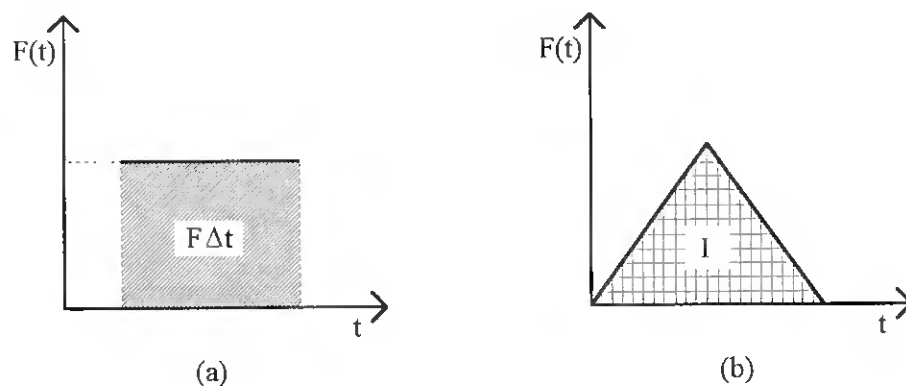
e enunciar a *lei de variação do momento linear* na forma:

*A variação do momento linear de uma partícula é igual ao impulso da força (ou resultante das forças) que sobre ela actua:*

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \quad (8)$$

De notar que o impulso *não é* uma propriedade da partícula, mas sim uma medida da modificação do seu momento linear, este sim propriedade da partícula, provocada pela acção de uma força.

Pode ocorrer que a variação do momento linear entre o estado inicial e final seja determinada por uma força variável no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Para resolver este problema podemos utilizar uma interpretação gráfica.



**Figura 4.** Cálculo do impulso de uma força constante (a) e de uma força variável (b)

Observando a Figura 4.(a) facilmente se verifica que a área a tracejado corresponde ao valor do impulso, obtido a partir da expressão (7). Se durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  a força não é constante, então essa expressão não é aplicável. Todavia, se soubermos

## Momento Linear e Colisões

como varia a força com o tempo, o cálculo da área delimitada no gráfico  $(F, t)$  da Figura 4.(b) permite-nos, por analogia, a determinação do valor do impulso.

Em variadas situações envolvendo forças variáveis é conveniente a utilização de uma *força média*.

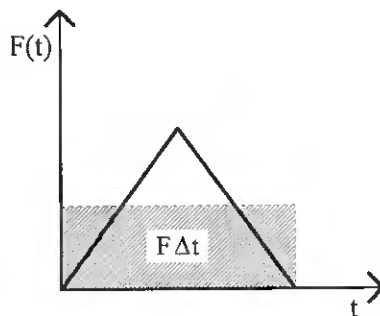


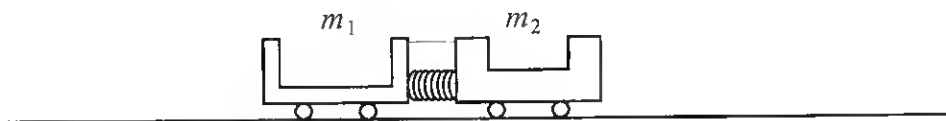
Figura 5. Impulso exercido pela força média no intervalo de tempo  $\Delta t$

A força média pode ser entendida como uma força constante que, se actuasse durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , transmitiria à partícula o mesmo impulso que a força variável, nesse intervalo de tempo.

———— // ————

**EX.M1.**

Dois carrinhos, de massas  $m_1$  e  $m_2 = 3m_1$  estão em contacto através de uma mola comprimida. Cortando o fio que os mantém unidos, os carrinhos deslocam-se em sentidos contrários sobre uma superfície horizontal, com o mesmo coeficiente de atrito  $\mu$ .



Determine a razão entre as distâncias que os carrinhos percorrem até pararem.

## Momento Linear e Colisões

**R:**

Os momentos iniciais dos carrinhos são simétricos, uma vez que cada um é devido ao impulso da respectiva força interna da mola que actua no seu sentido:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = 3$$

As forças de atrito são:

$$F_1 = \mu m_1 g \quad \text{e} \quad F_2 = \mu m_2 g$$

pelo que

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} = 3$$

De acordo com a lei da variação do momento linear:

$$F_1 t_1 = 0 - m_1 v_1 \quad \text{e} \quad F_2 t_2 = 0 - m_2 v_2$$

pelo que

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \frac{F_2}{F_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = 3$$

Tendo em atenção que num movimento que se processa com aceleração constante a velocidade média é dada por  $(v_f - v_i)/2$ , os espaços percorridos pelos corpos até pararem são:

$$s_1 = \frac{v_1}{2} t_1 \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{v_2}{2} t_2$$

pelo que a razão entre eles é

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2} = \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 = 9$$

————— // —————

## 2. CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Se analisarmos a Equação (5) podemos constatar que se a força, ou resultante das forças, que se exerce sobre a partícula for nula, então a derivada do momento linear em ordem ao tempo é nula, o que significa que o momento linear é constante. Podemos assim enunciar a *lei da conservação do momento linear*:

*O momento linear de uma partícula conserva-se se a resultante das forças que nela se exercem for nula* (partícula isolada).

Consideremos agora um sistema de duas partículas 1 e 2, interagindo uma com a outra mas estando isoladas do exterior. De acordo com a terceira lei de Newton, se uma exerce uma força sobre a outra, esta reage exercendo sobre a primeira uma força simétrica daquela que lhe foi exercida.

Suponhamos que num dado instante o momento linear da partícula 1 é  $\vec{p}_1$  e o da partícula 2 é  $\vec{p}_2$ . Designando por  $\vec{F}_{2,1}$  a força exercida sobre 1 pela partícula 2, por  $\vec{F}_{1,2}$  a força exercida em 2 pela partícula 1 e aplicando a segunda lei de Newton a cada partícula

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Se as forças  $\vec{F}_{2,1}$  e  $\vec{F}_{1,2}$  são simétricas, então a sua resultante é nula. Podemos escrever essa condição como  $\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{1,2} = \vec{0}$ , ou

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

## Momento Linear e Colisões

Sendo o momento linear do sistema a soma do momento linear das suas partículas, do facto de ser nula a sua derivada em ordem ao tempo podemos concluir que, nestas circunstâncias, o momento linear do sistema permanece constante:

$$\vec{p}_s = \sum_{\text{sistema}} \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$$

ou, de forma equivalente,

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} \quad (9)$$

onde  $\vec{p}_{1,i}$  e  $\vec{p}_{2,i}$  são os valores iniciais e  $\vec{p}_{1,f}$  e  $\vec{p}_{2,f}$  os valores finais do momento linear no intervalo de tempo  $dt$  durante o qual as partículas interactuam.

Se escrevermos na Equação (9) as grandezas vectoriais em função das suas componentes, verifica-se que o momento linear é independentemente conservado segundo as direcções  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{i,x} = \sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{f,x} \quad \sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{i,y} = \sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{f,y} \quad \sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{i,z} = \sum_{\text{sistema}} \vec{p}_{f,z}$$

Este resultado, que pode ser alargado para qualquer número de partículas, leva-nos a enunciar a *lei da conservação do momento linear de um sistema de partículas*:

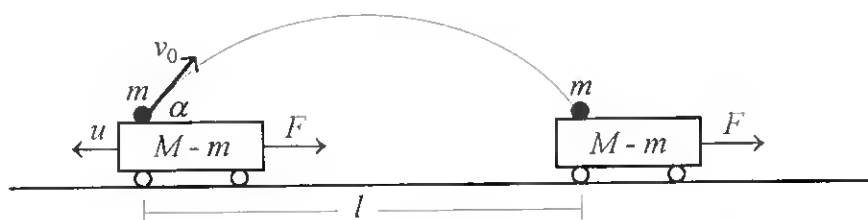
*Quando a resultante das forças exteriores que actuam num sistema é nula, (sistema isolado) o momento linear do sistema mantém-se constante.*

————— // —————

**EX.M2.**

Um projectil é lançado segundo um ângulo  $\alpha$ , a partir de uma carrinha que está em repouso. Sendo  $M$  a massa total do sistema (carrinha + projectil) e considerando desprezáveis todas as forças resistentes, determine a intensidade da força que se deverá aplicar à carrinha, no momento do lançamento, para que o projectil de massa  $m$  a atinja no mesmo ponto de onde foi lançado.

## Momento Linear e Colisões

**R:**

Devido à conservação do momento linear do sistema segundo a direcção horizontal, a carrinha recua com uma velocidade de módulo  $u$ :

$$0 = mv_0 \cos \alpha - (M - m)u \Rightarrow u = \frac{mv_0 \cos \alpha}{M - m}$$

O alcance do projectil é

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

que, depois de um intervalo de tempo  $t = 2v_0 \sin \alpha / g$ , tem de ser igual ao deslocamento efectuado pela carrinha, animada de aceleração constante  $a$  e velocidade inicial  $-u$ :

$$l = -u \cdot 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{1}{2} a \left( 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2$$

o que dá:

$$a = \frac{g}{\sin \alpha} \left( \frac{u}{v_0} + \cos \alpha \right) = \frac{M}{M - m} g \cot \alpha$$

A força a ser aplicada terá então o valor:

$$F = (M - m)a \Rightarrow F = Mg \cot \alpha$$

———— // ————

### 3. MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

Pela observação do movimento, quer de corpos quer de sistemas discretos de partículas, verificou-se a existência de um ponto gozando de propriedades especiais, que se designa por *centro de massa*, (CM).

A posição do centro de massa é dada pela média ponderada das coordenadas das partículas do sistema ou do corpo, sendo factor de ponderação a massa individual de cada partícula:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad (10)$$

onde  $M$ , massa total do sistema ou do corpo, é dada pela expressão  $\sum_{i=1}^n m_i$ .

A partir da Equação (10) é fácil deduzir algumas das propriedades deste ponto importante. Escrevendo essa equação na forma  $M\vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i$  e derivando em ordem ao tempo:

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Leftrightarrow M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i \quad (11)$$

Verifica-se, assim, que **o momento linear do sistema**, dado pela soma do momento linear de todas as suas partículas, **é igual ao momento linear do centro de massa**, considerando este como uma partícula com massa igual à do sistema.

Derivando em ordem ao tempo a relação  $\vec{p}_S = M\vec{v}_{CM}$ , vem

$$\frac{d\vec{p}_S}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

## Momento Linear e Colisões

A derivada em ordem ao tempo do momento linear do sistema representa, de acordo com a lei fundamental de Newton, a resultante das forças (exteriores e interiores) que actuam no sistema. Destas, as forças interiores têm resultante nula, pelo que podemos escrever:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}} \quad (12)$$

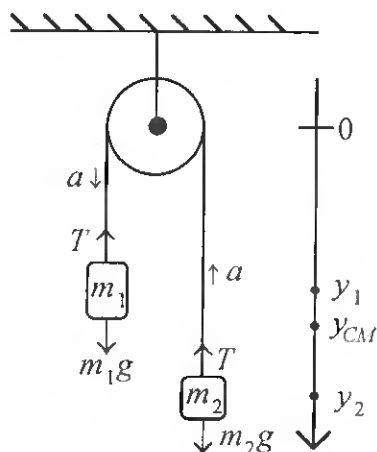
Esta expressão traduz a lei fundamental de Newton aplicada aos sistemas de partículas. Podemos agora enunciar a mais importante propriedade do centro de massa, conhecida muitas vezes como *lei do movimento do centro de massa*:

*O centro de massa de um sistema tem o movimento que teria uma partícula com a massa total do sistema e onde estivessem aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema, sendo independente da natureza das forças internas.*

————— // —————

**EX.M3.**

Consideremos um sistema de duas massas  $m_1$  e  $m_2 < m_1$ , suspensas nas extremidades de uma corda inextensível que passa pela gola de uma roldana fixa de massa desprezável, que pode girar sem atrito.



Determine a aceleração do centro de massa do sistema.

## Momento Linear e Colisões

**R:**

Aplicando a 2ª lei de Newton a cada uma das massas temos:

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

pelo que:

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

A posição do centro de massa ao longo do eixo vertical,  $y_{CM}$ , é dada por:

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{d^2 y_{CM}}{dt^2} = \frac{m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}}{m_1 + m_2}$$

ou seja:

$$a_{CM} = \frac{m_1 a + m_2 (-a)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} a$$

o que dá:

$$a_{CM} = g \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

————— // —————

## 4. COLISÕES

A colisão ou choque é um processo de interação entre duas partículas que se aproximam e que, por isso, geram forças impulsivas uma na outra, que decorre num intervalo de tempo muito pequeno em relação ao tempo total de observação e que não envolve necessariamente o contacto entre elas. A nível macroscópico na maioria dos

## Momento Linear e Colisões

casos ocorre contacto, não ocorrendo geralmente ao nível microscópico ou das partículas elementares.



**Figura 6.** Colisão entre a) dois objectos; b) duas partículas carregadas

Quer ocorra ou não contacto, podemos sempre distinguir o “antes” e o “depois” de uma colisão se atendermos a que o início da interacção é o instante  $t_i$  em que se inicia a alteração do momento linear das partículas e que o final da interacção é o instante  $t_f$  em que os momentos lineares das partículas passam a ser constantes (as partículas voltam a ser livres).

#### 4.1. COLISÕES ELÁSTICAS

Consideremos um sistema de duas partículas de massas constantes  $m_1$  e  $m_2$ . Como já foi referido anteriormente, se a resultante das forças exteriores for nula, ou se estas forem desprezáveis em relação às forças geradas durante a colisão, há conservação do momento linear do sistema, isto é:

$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f} \quad (13)$$

Todavia, a energia cinética do sistema pode ou não permanecer constante, dependendo do tipo de colisão.

## Momento Linear e Colisões

Uma colisão diz-se *elástica* se a *energia cinética do sistema é a mesma antes e depois da colisão*, nomeadamente:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2 \quad (14)$$

Consideremos agora que essas duas partículas se movem segundo a mesma direção (colisão unidimensional), conforme se representa na figura 7.

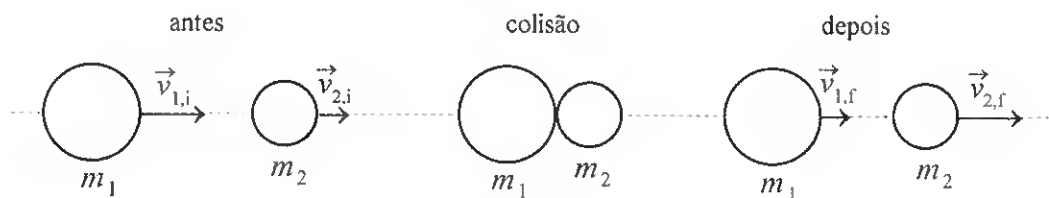


Figura 7. Colisão elástica unidimensional

Nessas circunstâncias, podemos escrever a equação da conservação do momento linear em termos escalares, convencionando sinais diferentes para o valor da velocidade de acordo com o sentido do movimento. Conjuntamente com a equação da conservação da energia cinética, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$m_1v_{1,i} + m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f} \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,f}^2$$

Isolando os termos referentes à mesma partícula e simplificando:

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2(v_{2,f} - v_{2,i})$$

$$m_1(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2) = m_2(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2)$$

Desdobrando a diferença de quadrados, obtemos:

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f}) = m_2(v_{2,f} - v_{2,i})$$

$$m_1(v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) = m_2(v_{2,f} - v_{2,i})(v_{2,f} + v_{2,i})$$

Dividindo ordenadamente a segunda pela primeira, vem:

## Momento Linear e Colisões

$$\begin{aligned}v_{1,i} + v_{1,f} &= v_{2,i} + v_{2,f} \\v_{1,i} - v_{2,i} &= v_{2,f} - v_{1,f}\end{aligned}\quad (16)$$

Esta equação, em combinação com a Equação (15), permite determinar as velocidades finais, sabendo as massas e as velocidades iniciais.

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1,i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2,i}\quad (17)$$

$$v_{2,f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2,i} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1,i}\quad (18)$$

A partir da Equação (17), no caso em que a partícula 2 está inicialmente em repouso, é interessante considerar vários limites:

- No caso em que a massa da partícula em movimento é muito maior do que a da partícula em repouso,

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow m_1 - m_2 \approx m_1 + m_2 \approx m_1 \Rightarrow v_{1,f} \approx v_{1,i}$$

a energia cinética da partícula 1 mantém-se.

- No caso em que as massas das duas partículas são iguais,

$$m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow v_{1,f} = 0$$

a energia cinética da partícula 1 é toda transferida para a partícula 2.

- No caso em que a colisão se dá com uma partícula de massa muito maior (por exemplo, uma parede),

$$m_1 \ll m_2 \Rightarrow v_{1,f} = -v_{1,i}$$

a energia cinética da partícula 1 mantém-se, mas esta volta para trás.

## Momento Linear e Colisões

Se atendermos ao significado físico dos dois membros da Equação (16), verifica-se que correspondem às velocidades relativas dos dois corpos, antes e depois da colisão, que podemos designar como *velocidade de aproximação*,

$$v_{ap} = v_{1,i} - v_{2,i}$$

e *velocidade de afastamento*,

$$v_{af} = v_{2,f} - v_{1,f}$$

Desta forma, a leitura da Equação (16) mostra-nos que:

*na colisão elástica, a velocidade de aproximação no instante inicial é igual à velocidade de afastamento no instante final.*

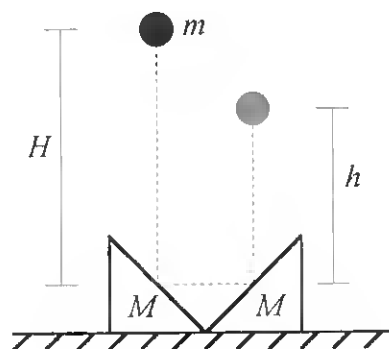
———— // ————

**EX.M4.**

Dois prismas de  $45^\circ$  e massa  $M$  encontram-se em repouso, assentes num plano horizontal sobre o qual se podem mover sem atrito.

Uma bola de massa  $m$ , em queda livre a partir de uma altura  $H$ , efectua colisões elásticas com os dois prismas e volta a subir verticalmente.

Determine a altura máxima  $h$  alcançada pela bola.



**R:**

Pela conservação da energia sabemos que a velocidade  $v_0$  com que a bola atinge o primeiro prisma se relaciona com a altura de onde foi largada através da expressão  $v_0^2 = 2gH$ . Nas condições referidas o sistema (bola + prismas) é isolado segundo a di-

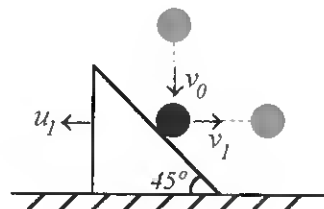
## Momento Linear e Colisões

recção horizontal, pelo que há conservação do momento linear segundo essa direcção.

Como a colisão é elástica, temos:

$$0 = mv_1 - Mu_1$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu_1^2}{2}$$



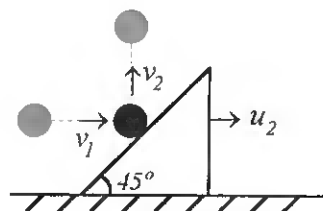
Eliminando  $u_1$  entre as duas equações, obtemos:

$$v_1^2 = v_0^2 \frac{M}{M+m}$$

Para a segunda colisão elástica temos, da mesma maneira:

$$mv_1 = Mu_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}$$



o que dá, eliminando  $u_2$ :

$$v_2^2 = v_1^2 \left(1 - \frac{m}{M}\right) = v_0^2 \frac{M-m}{M+m}$$

A altura máxima alcançada ( $v_2^2 = 2gh$ ) implica que:

$$h = H \frac{M-m}{M+m}$$

————— // —————

## 4.2. COLISÕES INELÁSTICAS

Uma *colisão inelástica* é aquela em que *não se conserva a energia cinética do sistema*, continuando, porém, a haver conservação do momento linear se o sistema estiver

## Momento Linear e Colisões

isolado. Nestas colisões a energia cinética não se conserva porque é convertida, por exemplo, em energia térmica e/ou em energia potencial elástica de deformação.

Por isso, a velocidade com que os corpos se afastam depois da colisão é sempre menor do que a velocidade com que se aproximam antes da colisão.

Pode ocorrer que, depois da colisão, os corpos sigam juntos. Neste caso a colisão diz-se *perfeitamente inelástica*, correspondendo à máxima variação de energia cinética.

Como a velocidade final dos dois corpos é idêntica, a Equação (15) pode escrever-se na forma:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f$$

pelo que:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

As colisões elásticas e perfeitamente inelásticas constituem casos extremos, correspondendo a maior parte das colisões a situações intermédias.

Seja qual for o caso, chama-se *coeficiente de restituição* em colisões unidimensionais ao quociente

$$e = \frac{v_{af}}{v_{ap}} \quad (19)$$

Para as colisões elásticas, temos:

$$v_{ap} = v_{af} \Rightarrow e = 1$$

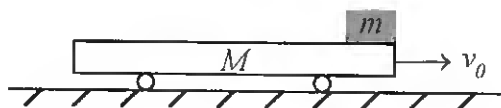
Para as colisões perfeitamente inelásticas, temos:

$$v_{af} = 0 \Rightarrow e = \frac{0}{v_{ap}} = 0$$

———— // ————

**EX.M5.**

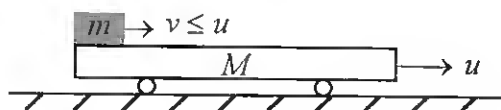
Um corpo de massa  $m$  é colocado na extremidade de uma plataforma de massa  $M$  e comprimento  $l$ , que se pode deslocar sem atrito sobre um plano horizontal.



Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o corpo e a plataforma, determine qual o valor da velocidade mínima  $v_0$  que tem de ser imprimida à plataforma, para que o corpo de massa  $m$  caia na outra extremidade [22].

**R:**

Na configuração final, onde a plataforma tem uma velocidade  $u$ , o corpo tem de possuir uma velocidade  $v \leq u$ .



Nessas condições

$$Mv_0 = Mu + mv \leq (M + m)u$$

pelo que a velocidade final da plataforma terá de obedecer à condição:

$$u \geq \frac{M}{M + m}v_0$$

A variação da energia cinética, devido ao trabalho de forças interiores (atrito) é:

## Momento Linear e Colisões

$$\Delta E = \frac{(M+m)u^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu mgl$$

Isto implica que:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + \mu mgl \geq \frac{M+m}{2} \frac{M^2v_0^2}{(M+m)^2} + \mu mgl$$

pelo que

$$v_0 \geq \sqrt{2\mu gl \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

————— // —————

## 4.3. COLISÕES A DUAS DIMENSÕES

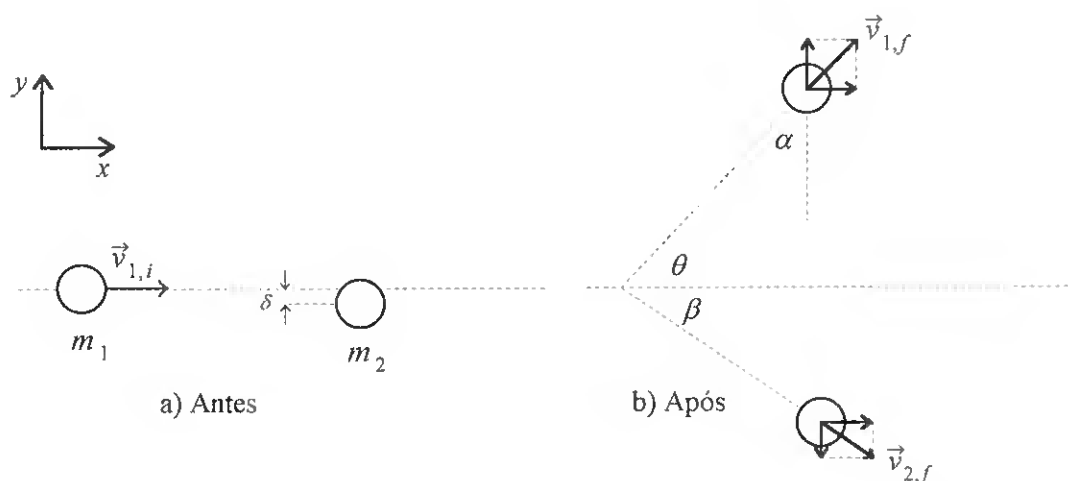
Como já foi anteriormente referido, o momento linear de um sistema de duas partículas conserva-se se o sistema estiver isolado. Se os corpos se moverem sobre um plano, isso implica que o momento linear em cada uma das direcções  $x$  e  $y$  seja constante. A Equação (13), que traduz a conservação do momento linear do sistema, pode agora ser decomposta em duas equações, por forma a traduzir a conservação do momento linear segundo cada uma das direcções  $x$  e  $y$ :

$$m_1v_{1x,i} + m_2v_{2x,i} = m_1v_{1x,f} + m_2v_{2x,f}$$

$$m_1v_{1y,i} + m_2v_{2y,i} = m_1v_{1y,f} + m_2v_{2y,f}$$

Consideremos agora uma colisão entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  que se podem movimentar sobre um plano, estando a partícula 2 inicialmente em repouso, conforme se representa na figura 8.

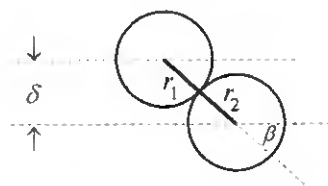
## Momento Linear e Colisões



**Figura 8.** Colisão oblíqua entre duas partículas

A distância  $\delta$  entre a direcção inicial do movimento da partícula 1 e uma linha paralela a ela que passa pelo centro da partícula alvo designa-se por *parâmetro da colisão*. Esta distância pode ser definida em termos dos raios  $r_1$  e  $r_2$  das duas bolas e do ângulo de desvio da partícula 2 por:

$$(r_1 + r_2) \sin \beta = \delta$$



Observamos assim que o parâmetro da colisão nos indica até que ponto uma colisão entre duas partículas se afasta da frontalidade já que, se  $\delta = 0$ , a colisão é unidimensional.

Depois da colisão, a partícula 1 move-se segundo uma direcção que faz um ângulo  $\theta$  e a partícula 2 segundo uma direcção que faz um ângulo  $\beta$  com o eixo dos  $xx$ .

Aplicando a lei da conservação do momento linear, decomposta segundo os dois eixos considerados, obtemos:

## Momento Linear e Colisões

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} \cos \theta + m_2 v_{2,f} \cos \beta \quad (20)$$

$$0 = m_1 v_{1,f} \sin \theta - m_2 v_{2,f} \sin \beta \quad (21)$$

Dispomos assim de duas equações independentes, o que nos permite resolver qualquer problema desde que, das sete variáveis em jogo, só duas, no máximo, sejam incógnitas.

Vejam agora qual a relação entre os ângulos  $\theta$  e  $\beta$  se ocorrer uma colisão elástica não frontal entre duas partículas de igual massa. Nessas circunstâncias, para lá das Equações (20) e (21), é ainda aplicável a Equação (14), que traduz a conservação da energia cinética. Se tivermos em conta que  $m_1$  e  $m_2$  são iguais e que a partícula 2 está inicialmente em repouso, essas equações podem ser escritas como:

$$v_{1,i} = v_{1,f} \cos \theta + v_{2,f} \cos \beta \quad (22)$$

$$0 = v_{1,f} \sin \theta - v_{2,f} \sin \beta \quad (23)$$

$$v_{1,i}^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2 \quad (24)$$

Atendendo a que, genericamente,  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ , a Equação (24) pode escrever-se como

$$v_{1,i}^2 = (v_{1,f} \cos \theta)^2 + (v_{1,f} \sin \theta)^2 + (v_{2,f} \cos \beta)^2 + (v_{2,f} \sin \beta)^2 \quad (25)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros das Equações (22) e (23), substituindo em (25) e simplificando, vem:

$$\begin{aligned} v_{1,f} \cos \theta \times v_{2,f} \cos \beta &= v_{1,f} \sin \theta \times v_{2,f} \sin \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\cos \beta} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Se  $\tan \beta = \tan \alpha$ , então  $\beta = \alpha$ . Mas se  $\theta + \alpha = 90^\circ$ , então  $\theta + \beta = 90^\circ$ .

## Momento Linear e Colisões

Este resultado mostra que, sempre que dois corpos de igual massa efectuem uma colisão elástica não frontal e um deles se encontra inicialmente em repouso, as direcções que seguem depois da colisão fazem entre si um ângulo de  $90^\circ$ .

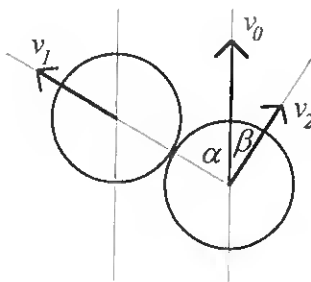
———— // ————

**EX.M6.**

Numa mesa de bilhar encontram-se  $N$  bolas idênticas. Pretende-se que uma delas pare no ponto de onde foi lançada, depois de efectuar varias colisões elásticas com as outras bolas. Determine  $N$ , número mínimo de bolas idênticas, para que o problema seja possível.

**R:**

Sabe-se que depois de uma colisão elástica, bolas idênticas separam-se segundo duas direcções perpendiculares, no caso de uma delas se encontrar inicialmente em repouso.



Então, a bola lançada com velocidade  $v_0$  vê a sua trajectória desviada de um ângulo  $\beta < \frac{\pi}{2}$ , onde  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  e  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

O percurso da bola tem de ser um polígono, sendo o número de colisões dado por:

$$n \geq \frac{2\pi}{\pi/2}$$

pelo que o número mínimo de colisões será  $n = 4$ .

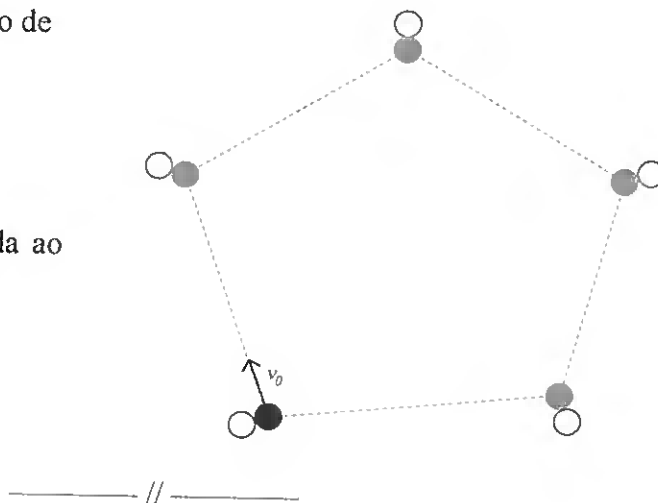
## Momento Linear e Colisões

A bola só pode parar no ponto de lançamento se encontrar aí mais uma bola e colidir com ela.

Isso dá um número mínimo de bolas

$$N = 4 + 1 + 1 = 6$$

numa configuração representada ao lado:



## 4.4. “REFLEXÃO” E “REFRACÇÃO” DAS PARTÍCULAS

Consideremos um choque não frontal, sem atrito, com uma parede (Figura 9).

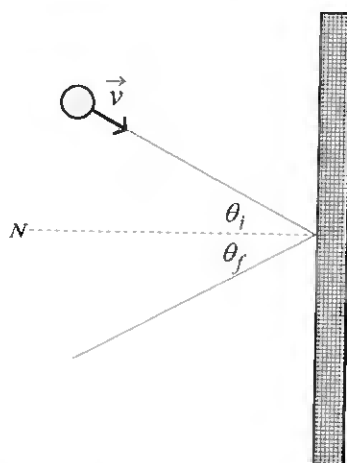


Figura 9. Colisão não frontal com uma parede.

Se decomposermos o movimento da partícula segundo duas direções, uma tangente à parede e outra normal à parede, temos que, no que respeita à componente tangencial nada se passa (não há choque, nenhuma força actua), pelo que:

## Momento Linear e Colisões

$$v_{T,f} = v_{T,i}$$

No que respeita à componente normal, caímos no caso do choque frontal já anteriormente referido

$$v_{N,f} = -v_{N,i}$$

Como  $\operatorname{tg} \theta_i = \frac{v_{T,i}}{v_{N,i}} = -\frac{v_{T,f}}{v_{N,f}} = -\operatorname{tg} \theta_f$ , daqui resulta ser o ângulo que a velocidade da

partícula faz com a normal antes da colisão,  $\theta_i$ , igual ao ângulo feito com a normal pela velocidade da partícula depois da colisão,  $\theta_f$ . Este resultado revela que uma partícula, que efectua uma colisão elástica sem atrito com uma superfície plana, se comporta de forma análoga a um raio luminoso quando este incide sobre um espelho plano.

Para a “refracção” das partículas, [36], vamos considerar que estas vão atravessar uma zona estreita de campo, onde são actuadas por uma força perpendicular às linhas equipotenciais (Figura 10).

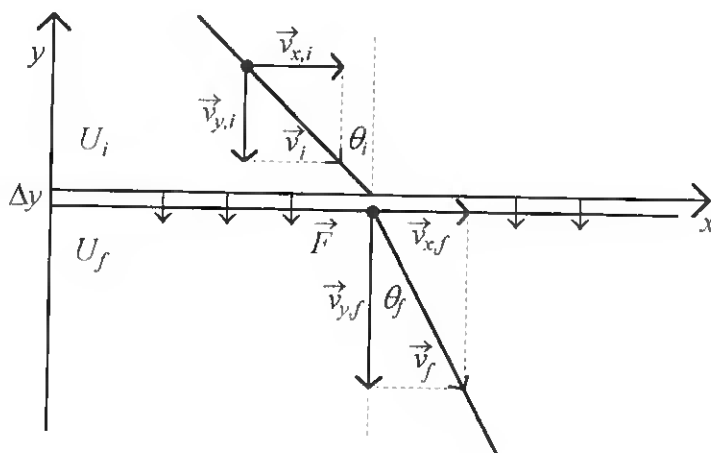


Figura 10. Refracção das partículas

Daí se retira que:

$$\operatorname{sen} \theta_i = \frac{v_{x,i}}{v_i} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta_f = \frac{v_{x,f}}{v_f}$$

## Momento Linear e Colisões

Como a força que se exerce sobre a partícula só tem componente segundo a direcção  $y$ , então  $v_{x,i} = v_{x,f}$ , pelo que das relações anteriores se obtém uma expressão formalmente idêntica à lei de Snell da refacção:

$$v_i \sin \theta_i = v_f \sin \theta_f$$

O desvio na trajectória da partícula é acompanhado de um aumento da sua velocidade, ao transitar para uma zona de menor energia potencial que a inicial. Esse aumento ocorre unicamente na componente segundo  $y$ , devido à acção de uma força segundo essa direcção, pelo que:

$$v_{y,f} = v_{y,i} + \frac{F}{m}t$$

Para relacionar o desvio sofrido com a variação de energia potencial podemos atender a que:

$$\cot \theta_f = \frac{v_{y,f}}{v_{x,f}} = \frac{v_{y,i} + \frac{F}{m}t}{v_{x,i}} = \frac{v_{y,i}}{v_{x,i}} + \frac{Ft}{mv_{x,i}} = \cot \theta_i + \frac{Ft}{mv_{x,i}}$$

Como  $F = -\frac{\Delta U}{\Delta y}$ , substituindo temos:

$$\cot \theta_f = \cot \theta_i - \frac{\Delta U}{\Delta y} \frac{t}{mv_{x,i}}$$

————— // —————

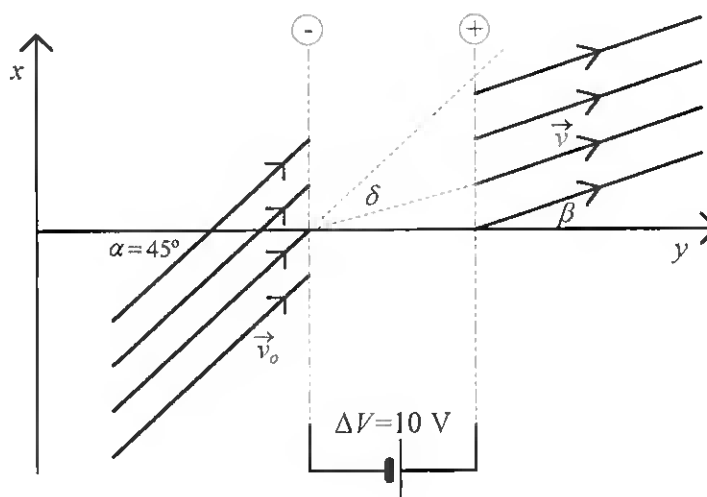
**EX.M7.**

Consideremos duas redes paralelas, submetidas a uma diferença de potencial  $\Delta V = 10 \text{ V}$ . Um feixe de electrões, de energia cinética  $T_0 = 10 \text{ eV}$ , incide na rede ligada

## Momento Linear e Colisões

ao polo negativo do gerador, segundo um ângulo  $\alpha = 45^\circ$ . Determine o desvio,  $\delta$ , sofrido pelo feixe de electrões.

**R:**



Pela analogia com a lei de Snell da refração, sabemos que:

$$v = v_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Pela lei do trabalho – energia cinética, temos:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e\Delta V \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - 1 \right) = e\Delta V$$

Como  $T_0 = \frac{mv_0^2}{2} = 10 \text{ eV}$  e  $e\Delta V = 10 \text{ eV}$ , então:

$$T_0 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - 1 \right) = e\Delta V = T_0 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - 1 = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

Sendo  $\alpha = 45^\circ$ , virá:

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

Daí resulta:

$$\delta = \alpha - \beta = 15^\circ$$

———— // ————

## Momento Linear e Colisões

Tal como a luz, que em certas circunstâncias não pode atravessar a superfície de separação de dois meios ópticos perfeitamente transparentes, sofrendo reflexão total, também podemos conceber uma situação em que uma partícula penetre numa zona de campo uniforme e seja devolvida, com igual energia cinética, conforme se representa na Figura 6.

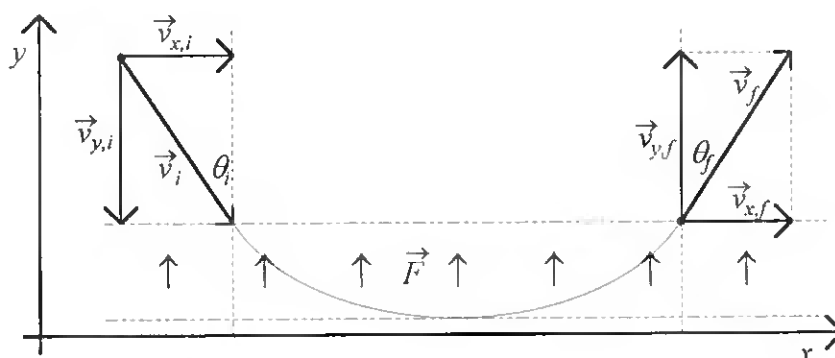


Figura 6. Reflexão total das partículas

Se a força do campo, que se exerce unicamente segundo a direcção do eixo  $y$ , actuar durante tempo suficiente para que a componente da velocidade segundo essa direcção se anule, a partícula será devolvida à região de onde proveio. Nessas condições teremos  $\vec{v}_{x,f} = \vec{v}_{x,i}$  e  $\vec{v}_{y,f} = -\vec{v}_{y,i}$ , pelo que  $\theta_f = \theta_i$ .

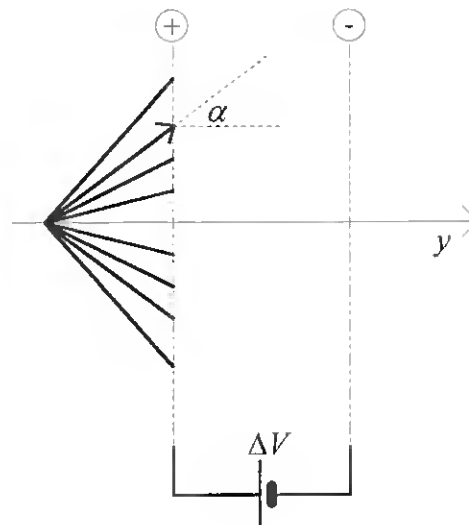
———— // ————

### EX.M8.

Consideremos duas redes paralelas, entre as quais se estabeleceu uma diferença de potencial  $\Delta V$ . Um feixe de electrões, de energia cinética  $\frac{4}{3}e\Delta V$ , incide na rede segundo vários ângulos.

Determine o valor mínimo do ângulo  $\alpha$  (ângulo limite), para que os electrões sejam reflectidos pela rede.

## Momento Linear e Colisões



**R:**

Para que os electrões possam ser reflectidos pela rede, a “componente” da energia cinética segundo a direcção  $y$  terá de ser anulada pelo trabalho da força eléctrica, que se lhe opõe. Por isso, serão reflectidos pela rede os electrões cuja componente da velocidade segundo  $y$  seja tal que:

$$\frac{m(v \cos \alpha)^2}{2} \leq e\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} \cos^2 \alpha \leq e\Delta V$$

onde  $\frac{mv^2}{2} = \frac{4}{3}e\Delta V$ . Substituindo, temos:

$$\frac{4}{3}e\Delta V \cos^2 \alpha \leq e\Delta V \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \alpha \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 30^\circ$$

———— // ————

# ÓPTICA GEOMÉTRICA

- INTRODUÇÃO

A luz é o principal meio através do qual recebemos informação dos objectos que nos rodeiam. A sua natureza e propriedades constituíram, desde a antiguidade, motivo de interesse e especulação.

Para os Gregos a luz era constituída por pequenos corpúsculos, emitidos pelas fontes luminosas, que produziã a sensação da visão após recepção nos olhos do observador. Na segunda metade do século XVII, Newton utilizou essa concepção corpuscular para explicar os fenómenos da reflexão e refacção. Contemporaneamente, Huygens propôs para a luz uma natureza ondulatória, explicando a partir dessa natureza não só os fenómenos da reflexão e refacção mas também outros fenómenos, nomeadamente a difracção, descoberta por Grimaldi por volta de 1660. Todavia, a oposição de Newton a essa teoria e o seu enorme peso no meio científico de então, levaram a que só no século XIX, com os trabalhos de Young e de Maxwell, ela fosse aceite como explicação para a natureza da luz.

No início do século XX assistiu-se a um regresso à concepção corpuscular através das teorias de Max Planck para a radiação emitida por objectos aquecidos e, posteriormente, pela explicação de Einstein do efeito fotoeléctrico.

Hoje os cientistas vêm a luz como possuindo um carácter dual, isto é, apresentando características ondulatórias numas situações e características corpusculares noutras.

O comprimento de onda da luz visível é da ordem dos  $10^{-7}$  m. Se considerarmos objectos e aberturas maiores do que  $10^{-5}$  m os fenómenos de difracção são desprezáveis, podendo ocorrer à luz unicamente reflexão e refacção. Estes fenómenos “macroscópicos” podem ser analisados independentemente do conhecimento das teorias sobre a na-

tureza da luz, aplicando no seu estudo a noção de raio luminoso e alguns princípios de geometria, razão pela qual constituem a óptica geométrica [7], [24], [34], [44].

## 1. PROPAGAÇÃO RECTILÍNEA DA LUZ E PRINCÍPIO DE FERMAT

Se interpusermos entre uma fonte luminosa e um observador três cartões opacos nos quais se fez um pequeno orifício, a luz só atingirá o observador se a fonte luminosa, os três orifícios e o olho do observador se encontrarem situados segundo uma linha recta.

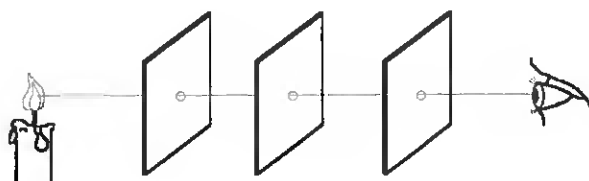


Figura 11. Propagação rectilínea da luz

Uma vez que, nas condições anteriormente descritas, o ar é um meio homogéneo, podemos afirmar que *num meio homogéneo a luz propaga-se em linha recta*. A direcção rectilínea ao longo da qual se propaga a luz num meio homogéneo designa-se de *raio luminoso*. A um conjunto de raios luminosos, próximos uns dos outros e propagando-se no mesmo sentido, chama-se *feixe luminoso*. É de notar que esses raios luminosos não são uma realidade física (não podem ser isolados), mas fornecem um processo cómodo de resolver facilmente numerosas questões de óptica.

## Óptica Geométrica

Em 1650 Pierre Fermat descobriu um notável princípio que podemos enunciar da seguinte forma: *Um raio luminoso vai de um ponto a outro seguindo a trajectória que requer menor tempo a ser percorrida* [43].

Num meio homogéneo como é o ar, o percurso de menor tempo corresponde ao caminho mais curto, a linha recta. Como veremos posteriormente, já assim não ocorre quando a luz muda de meio óptico durante o seu percurso.

## 2. REFLEXÃO DA LUZ

A reflexão consiste na mudança de direcção de um feixe de raios luminosos quando incide numa superfície polida, (ou mudança de sentido sem mudança de direcção, se a incidência for perpendicular à superfície), continuando a propagar-se no mesmo meio.

### 2.1. LEIS DA REFLEXÃO

Através de experiências muito simples pode-se constatar que a reflexão obedece a duas leis:

Primeira lei: *O raio incidente, a normal à superfície no ponto de incidência e o raio reflectido situam-se no mesmo plano.*

Segunda lei: *O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.*

As leis da reflexão da luz estão em conformidade com o princípio de Fermat.

## Óptica Geométrica

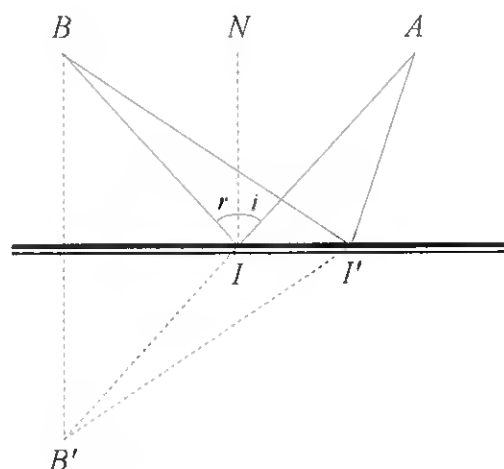


Figura 12. Reflexão e princípio de Fermat

Admitamos ser  $AIB$  o percurso óptico seguido pelo raio luminoso e consideremos um outro trajecto arbitrário  $AI'B$ . O tempo gasto em cada um dos percursos será  $AIB'/c$  no primeiro caso e  $AI'B'/c$  no segundo. Sendo  $AIB' < AI'B'$  torna-se claro que a trajectória que requer menos tempo a ser percorrida é aquela a que corresponde um ângulo de reflexão,  $r$ , igual ao ângulo de incidência,  $i$ .

## 2.2. IMAGEM DE UM OBJECTO EM ESPELHOS PLANOS

Um objecto  $AB$  pode ser considerado como um conjunto de pontos. Para obter a sua imagem basta considerar os pontos das suas extremidades e dois raios luminosos com origem em cada um desses pontos, conforme se representa na Figura 13.

## Óptica Geométrica

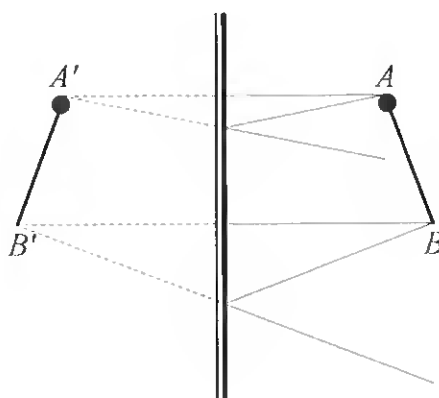


Figura 13. Imagem de um objecto num espelho plano

Pela observação da Figura 3 podemos retirar as características de uma imagem dada por um espelho plano:

- Virtual, uma vez que os pontos imagem se formam no prolongamento dos raios reflectidos pelo espelho;
- Direita;
- Simétrica em relação ao espelho;
- Com a mesma dimensão do objecto.

### 2.3. IMAGEM DE UM OBJECTO EM ESPELHOS ESFÉRICOS

Designamos por espelho esférico uma superfície reflectora cuja forma é uma calote esférica. Pode ser côncavo ou convexo, dependendo da superfície reflectora ser a face interior ou exterior da calote.

A caracterização de um espelho esférico faz-se com base nos seguintes parâmetros:

- **Centro de curvatura**, o centro  $C$  da esfera a que pertence a calote;
- **Raio de curvatura**, o raio  $R$  dessa esfera;

## Óptica Geométrica

- **Eixo principal**, a recta que une  $C$  com o ponto médio do espelho,  $O$ ;
- **Foco do espelho**, ponto  $F$ , situado a uma distância  $f$  do espelho que é metade do raio de curvatura (distância focal,  $f = R/2$ );
- **Secção principal**, todo o plano que passa pelo eixo principal;
- **Base do espelho**, o círculo de diâmetro  $AA'$  que limita o espelho;
- **Ângulo de abertura**, o ângulo  $ACA'$  formado pelos raios que unem o centro de curvatura às extremidades de um diâmetro da base do espelho.

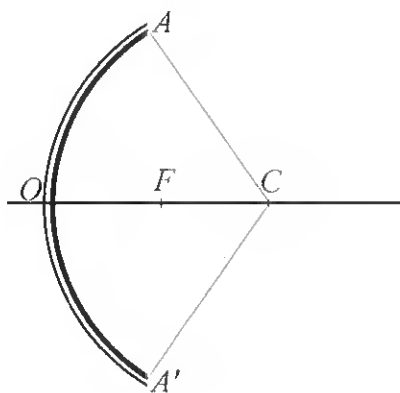


Figura 14. Definições num espelho esférico

A reflexão de um raio luminoso num espelho esférico segue as leis da reflexão, sendo a normal ao espelho no ponto de incidência o raio da esfera que passa por esse ponto. Daí resulta que um raio luminoso que se propaga numa secção principal do espelho continua, após reflexão, nessa mesma secção principal, bastando determinar o que ocorre numa secção principal do espelho para conhecer o que ocorre em todas as outras.

É de notar que as propriedades que em seguida serão descritas só se aplicam a espelhos esféricos de pequena abertura ( $10^\circ$  a  $15^\circ$ ) e a raios luminosos de pequena inclinação em relação ao eixo principal do espelho (raios paraxiais), condições que considera-

## Óptica Geométrica

mos verificarem-se sempre. Por uma questão de clareza dos diagramas, a escala vertical e os ângulos encontram-se fortemente exagerados.

Para a construção geométrica das imagens vamos utilizar três situações particulares, decorrentes das propriedades do centro de curvatura e do foco.

1 — Um raio luminoso que passe real ou virtualmente pelo centro de curvatura reflecte-se segundo a mesma linha, invertendo o sentido.

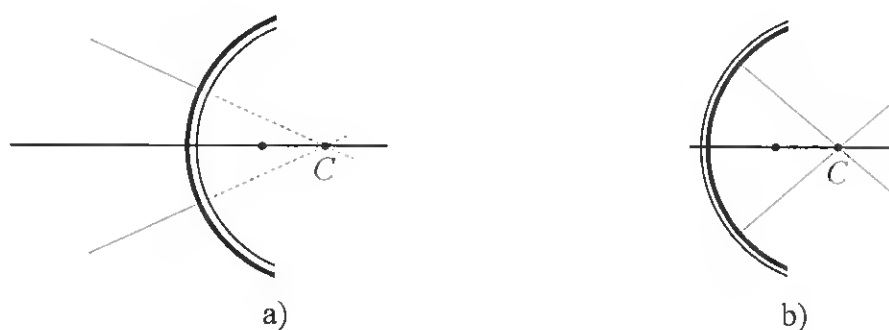


Figura 15. Propriedades do centro de curvatura em a) espelhos convexos; b) espelhos côncavos

2 — Um raio luminoso paralelo ao eixo principal reflecte-se passando real ou virtualmente pelo foco.

3 — Um raio luminoso que passe real ou virtualmente pelo foco reflecte-se paralelamente ao eixo principal.

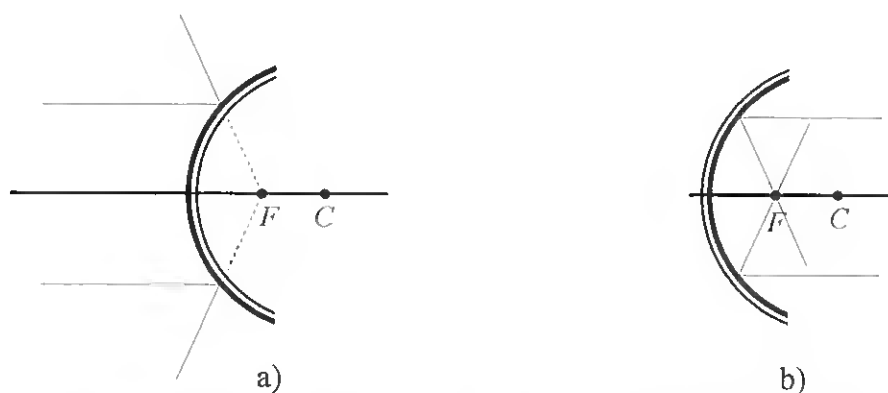
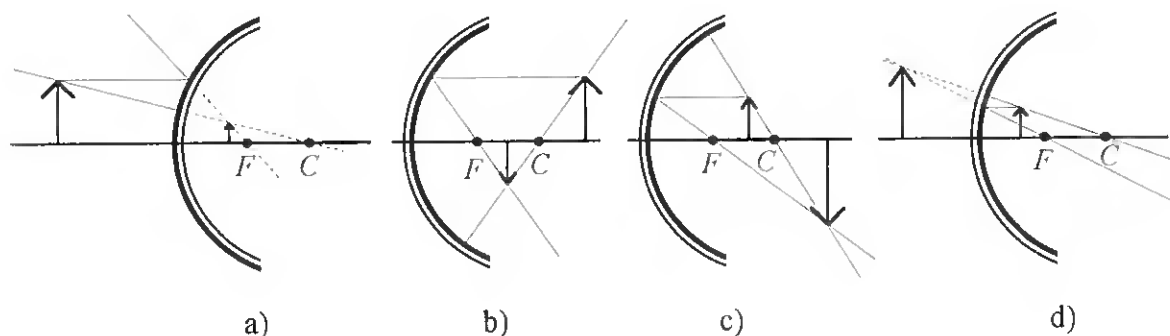


Figura 16. Propriedades do foco em a) espelhos convexos; b) espelhos côncavos

## Óptica Geométrica

Podemos agora estudar, através da construção geométrica, as variações de posição e tamanho das imagens dadas pelos espelhos esféricos de um objecto, em função da sua distância aos espelhos.



**Figura 17.** Variação da posição do objecto e da imagem em espelhos esféricos

As imagens dadas pelos espelhos convexos, Figura 17.a), são sempre **virtuais, direitas e menores que o objecto**, qualquer que seja a posição do objecto em relação ao espelho.

Nos espelhos côncavos, se o objecto estiver situado para lá da dupla distância focal, Figura 17.b), a imagem estará situada entre o foco e o centro de curvatura e é **real, invertida e menor que o objecto**. Se o objecto estiver situado entre o centro de curvatura e o foco, Figura 17.c), a imagem situar-se-á para lá do centro de curvatura e é **real, invertida e maior que o objecto**. De objectos situados entre o foco e o espelho, Figura 17.d), teremos uma imagem **virtual, direita e maior que o objecto**.

## 2.4. EQUAÇÕES DOS ESPELHOS

A determinação das características de uma imagem através de uma construção geométrica é um processo demorado e delicado. Podem, contudo, obter-se essas características analiticamente a partir das equações dos espelhos. Estas equações podem deduzir-se facilmente através de relações elementares de triângulos semelhantes.

Consideremos, para esse efeito, a imagem  $A'B'$  de um objecto  $AB$  formada por um espelho esférico (Figura 18).

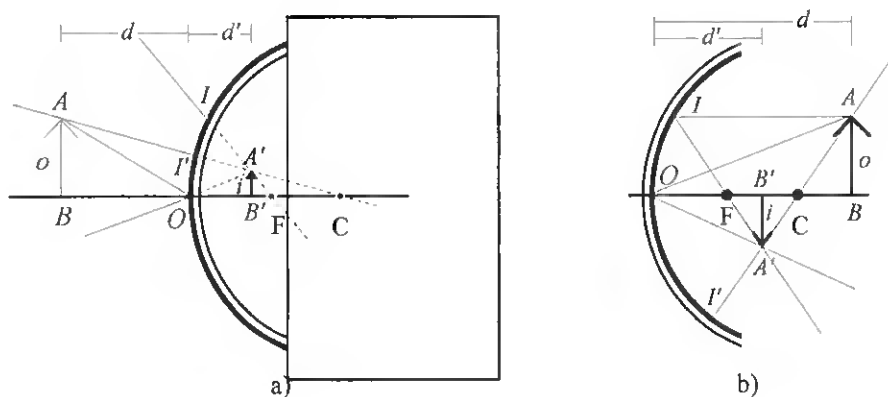


Figura 18. Estudo analítico das características das imagens em

a) espelhos convexos; b) espelhos côncavos

Para simplificar as notações, designemos por  $o$  o tamanho do objecto  $AB$  e por  $i$  o tamanho da imagem  $A'B'$ , por  $d$  a distância  $OB$  do objecto ao espelho, por  $d'$  a distância  $OB'$  da imagem ao espelho e por  $f$  a distância focal  $OF$ .

Consideremos o raio incidente  $AO$  passando pelo ponto médio do espelho e o raio reflectido  $AO'$ . Os triângulos semelhantes  $A'OB'$  e  $AOB$  permitem escrever que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{o} = \frac{d'}{d} \quad (26)$$

## Óptica Geométrica

Os triângulos semelhantes  $A'FB'$  e  $I'FO$  dão-nos, admitindo, ao ter em conta que a abertura do espelho é pequena, que  $IO$  é igual a  $AB$ :

para espelhos côncavos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'F}{OF}$$

ou

$$\frac{i}{o} = \frac{d'-f}{f} \quad (27.a)$$

para espelhos convexos

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'F}{OF'}$$

ou

$$\frac{i}{o} = \frac{f-d'}{f} \quad (27.b)$$

Igualando as relações (26) e (27) obtemos, sucessivamente:

para espelhos côncavos

$$\frac{d'}{d} = \frac{d'-f}{f}$$

$$d'f = dd' - df$$

$$d'f + df = dd'$$

para espelhos convexos

$$\frac{d'}{d} = \frac{f-d'}{f}$$

$$d'f = df - dd'$$

$$d'f - df = -dd'$$

Dividindo pelo produto  $dd'$ , obtemos:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad (28.a)$$

Dividindo pelo produto  $dd'$ , obtemos:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d'} = -\frac{1}{f} \quad (28.b)$$

As relações (28) permitem calcular a posição da imagem em função da posição do objecto. Podemos utilizar unicamente a equação (28.a) para qualquer tipo de espelho esférico se, por convenção, considerarmos que as grandezas  $d$ ,  $d'$  e  $f$  são positivas quando dizem respeito a objectos, imagens e focos reais e negativas quando correspondem a objectos, imagens e focos virtuais.

A relação (26) permite calcular o tamanho da imagem em relação ao tamanho do objecto, sendo por isso também designada como equação da ampliação:

## Óptica Geométrica

$$m = \frac{i}{o} = \frac{d'}{d}$$

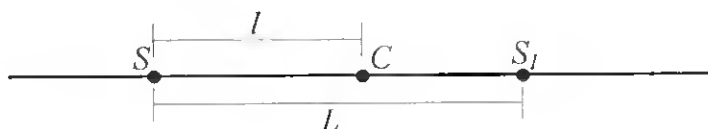
Utilizando as convenções de sinais anteriormente referidas, se a ampliação  $m$  for positiva a imagem é direita, se for negativa, a imagem é invertida.

Por fim, é de destacar que estas fórmulas gerais dos espelhos esféricos também se aplicam aos espelhos planos, bastando para isso que se considere um espelho plano como sendo um espelho esférico de raio infinito.

————— // —————

**EX.O1.**

Conhecemos a posição  $S_1$  da imagem de uma fonte pontual  $S$ , relativamente a  $C$ , centro de curvatura de um espelho côncavo.



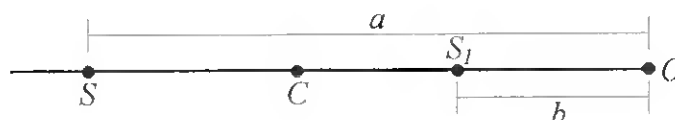
Se fizermos  $l = \overline{SC}$  e  $L = \overline{SS_1}$ , determine qual a distância focal do espelho e a relação entre  $l$  e  $L$ , de modo a que o problema seja possível.

**R:**

Se designarmos por  $a$  e  $b$  as distâncias dos pontos  $S$  e  $S_1$  ao ponto médio do espelho, tendo em atenção que  $\overline{CO} = 2f$ , então:

$$a = 2f + l$$

$$b = 2f + l - L$$



pelo que podemos usar a equação:

$$\frac{1}{2f+l} + \frac{1}{2f+l-L} = \frac{1}{f}$$

Isto dá:

$$f = \frac{l(L-l)}{2l-L}$$

Dado o tipo de espelho, a solução tem de ser positiva,  $f > 0$ , o que implica

$$l < L < 2l$$

———— // —————

### 3. REFRAÇÃO

Quando a luz, propagando-se num meio 1, incide obliquamente na superfície  $S$  que o separa de um meio 2, sofre simultaneamente reflexão, difusão, absorção e refração (Figura 19).

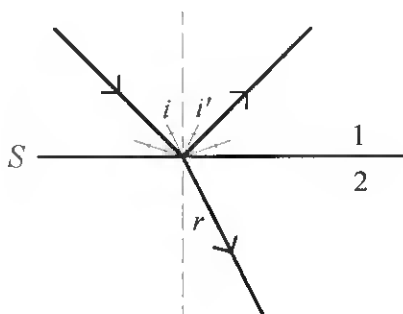


Figura 19. Reflexão, refração e difusão numa superfície plana

Para que o fenómeno predominante seja a refração, o meio 2 deve ser transparente. Podemos então definir refração da luz como um fenómeno associado à transição da luz entre dois meios ópticos transparentes, a que corresponde uma mudança na direcção

de propagação de um feixe luminoso, se a incidência na superfície de separação dos meios não for perpendicular.

### 3.1. LEIS DA REFRACÇÃO

São duas as leis que regem este fenómeno:

Primeira lei: *O raio incidente, a normal à superfície no ponto de incidência e o raio refractado situam-se no mesmo plano.*

Segunda lei: *A razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante e igual ao índice de refração do segundo meio em relação ao primeiro.* (Esta lei é também conhecida como lei de Snell – Descartes).

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$$

O significado físico do índice de refração pode ser-nos dado pelo princípio do menor tempo para o percurso da luz entre dois pontos (princípio de Fermat).

Consideremos um feixe de raios paralelos, saído de uma fonte monocromática, que passa de um meio 1 para um meio 2, conforme se representa na Figura 20.



## Óptica Geométrica

A refração da luz é, assim, provocada pela transição entre meios onde é diferente a sua velocidade de propagação, constituindo o índice de refração  $n$  a razão entre essas velocidades de propagação

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n ; \quad n = \frac{c_1}{c_2}$$

Uma vez que intervêm diferentes velocidades, o caminho mais curto  $SR$ , a tracejado na Figura 10, não é o trajecto de menor duração, correspondendo esse ao percurso  $SIR$ .

### 3.2. REFLEXÃO TOTAL – ÂNGULO LIMITE

Como já foi referido, quando a luz incide na superfície de separação de dois meios ópticos, uma parte reflecte-se e outra atravessa a superfície sofrendo refração. No entanto, em certas condições, ainda que os dois meios sejam perfeitamente transparentes, a luz não pode atravessar a superfície e reflecte-se totalmente.

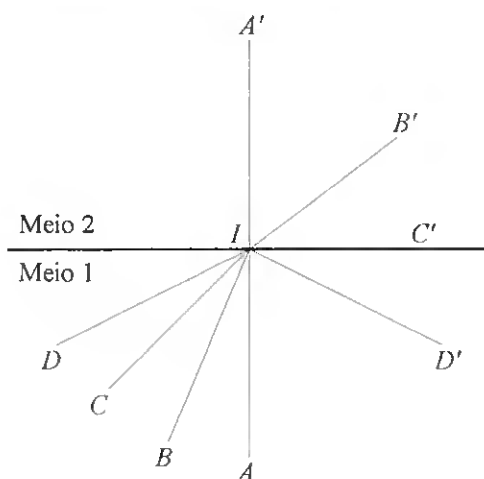


Figura 21. Ângulo limite e reflexão total

Consideremos dois meios ópticos, sendo o meio 1 mais refrangente que o meio 2, e a expressão da lei de Snell na forma

## Óptica Geométrica

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n}$$

Quando a luz se propaga do meio 1 para o meio 2, o índice  $n$  é menor que a unidade. O raio  $AIA'$ , de incidência normal, não sofre desvio já que se  $i = 0^\circ$ , então  $r = 0^\circ$ . O raio  $BIB'$  sofre desvio, afastando-se da normal, já que se  $\text{sen } r > \text{sen } i$ , então  $r > i$ .

O raio incidente  $CI$  faz com a normal um ângulo tal que o raio  $IC'$ , ao afastar-se da normal, emerge tangente à superfície de separação dos dois meios. O ângulo de incidência a que corresponde um ângulo de refração de  $90^\circ$  designa-se de *ângulo limite*,  $L$ .

$$i = L ; r = 90^\circ ; \text{sen } r = 1 ; \text{sen } L = n$$

Todos os raios que tenham um ângulo de incidência maior que o ângulo limite não se podem refractar, sofrendo *reflexão total*. Assim, para que um raio luminoso sofra reflexão total na superfície de separação de dois meios ópticos, é indispensável que se verifiquem duas condições:

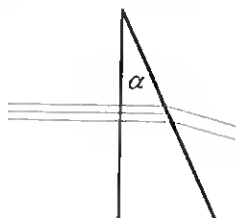
1ª - O raio luminoso deve propagar-se no sentido do meio mais refrangente para o meio menos refrangente;

2ª - O raio luminoso deve ter um ângulo de incidência superior ao ângulo limite.

———— // ————

**EX.02.**

No espectro do laser de árgon as duas linhas de maior intensidade correspondem aos comprimentos de onda  $\lambda_1 = 488 \text{ nm}$  e  $\lambda_2 = 515 \text{ nm}$ .



## Óptica Geométrica

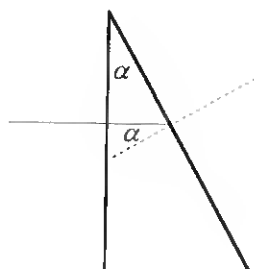
Faz-se incidir o feixe laser perpendicularmente à face de um prisma de pequeno ângulo  $\alpha$ , cujo índice de refração é dado por:

$$n = 1 + \frac{a}{\lambda^2}, \text{ onde } a = 2,38 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$$

Determine entre que valores deve estar compreendido  $\alpha$  para que o feixe emergente do prisma contenha unicamente a componente  $\lambda_2$ .

**R:**

A componente  $\lambda_1$  sofre reflexão total na segunda face, enquanto a componente  $\lambda_2$  se refracta, de modo que, sendo  $i = \alpha$ , temos



$$\frac{1}{n_1} < \text{sen} \alpha < \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda_1^2}} < \text{sen} \alpha < \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda_2^2}}$$

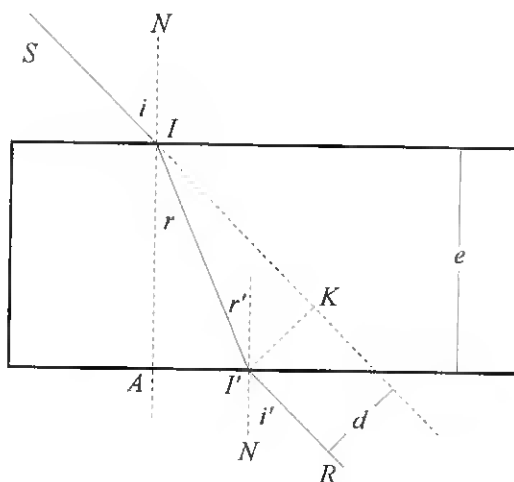
o que dá:

$$0,5 < \text{sen} \alpha < 0,526 \Rightarrow 30^\circ < \alpha < 31^\circ 45'$$

———— // ————

## 3.3. PROPAGAÇÃO ATRAVÉS DE UMA LÂMINA DE FACES PERALELAS

Lâmina de faces paralelas é um meio transparente limitado por duas superfícies planas e paralelas.



**Figura 22.** Percurso de um raio luminoso através de uma lâmina de faces paralelas

Se os meios externos forem idênticos, um raio que incida sobre uma das faces da lâmina, de espessura  $e$ , atravessa-a após duas refrações e emerge na segunda face, seguindo uma direção paralela ao raio incidente (Figura 22). O desvio lateral  $d$ , igual a  $I'K$ , pode ser calculado a partir dos triângulos rectângulos  $IAI'$  e  $IKI'$ , que nos dão:

$$\cos r = \frac{e}{II'} \quad \text{e} \quad \text{sen}(i - r) = \frac{d}{II'}$$

Combinando estas duas relações, obtemos:

$$d = \frac{e \cdot \text{sen}(i - r)}{\cos r}$$

Podemos assim observar que o desvio lateral cresce com o aumento da espessura da lâmina, com o ângulo de incidência do raio luminoso e com o índice de refração da substância de que a lâmina é constituída.

———— // ————

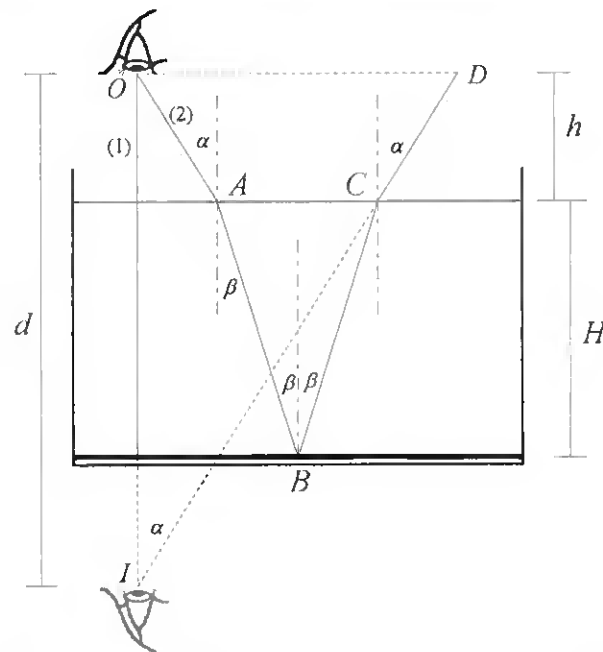
## Óptica Geométrica

## EX.03.

No fundo de um recipiente cheio de água coloca-se um espelho plano. Uma pessoa que olha no fundo do recipiente vê a imagem do seu olho, de uma forma mais nítida ( $d = 25 \text{ cm}$ ), quando a distância entre os olhos e a água é  $h = 5 \text{ cm}$ . Sabendo que o índice de refração da água é  $n = \frac{4}{3}$ , determine a altura  $H$  da água no recipiente.

R:

A imagem forma-se no cruzamento do prolongamento de dois raios (1) e (2).



Considerando os ângulos pequenos, [40], (exagerados no desenho para facilitar a compreensão), são válidas as aproximações:

$$\text{sen } \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha \quad \text{e} \quad \text{sen } \beta \approx \text{tg } \beta \approx \beta$$

Tendo em conta que  $\text{sen } \alpha / \text{sen } \beta \approx \alpha / \beta = n$  temos então:

$$d \text{tg } \alpha \approx d \alpha = \overline{OD} = 2h\beta + 2H\beta = 2\alpha \left( h + \frac{H}{n} \right)$$

Daí resulta:

## Óptica Geométrica

$$d = 2\left(h + \frac{H}{n}\right) \Rightarrow H = \frac{n}{2}(d - 2h)$$

Substituindo pelos valores, obtemos:

$$H = 10 \text{ cm}$$

———— // ————

## 3.4. PRISMAS

Designa-se por prisma um meio óptico limitado por duas faces planas não paralelas, cuja intersecção constitui a *aresta do prisma*. O ângulo formado por essas duas faces constitui o *ângulo do prisma* e a face oposta ao ângulo denomina-se *base do prisma*. Todos os fenómenos ópticos serão analisados representando apenas a sua *secção principal*, definida por um plano perpendicular à aresta.

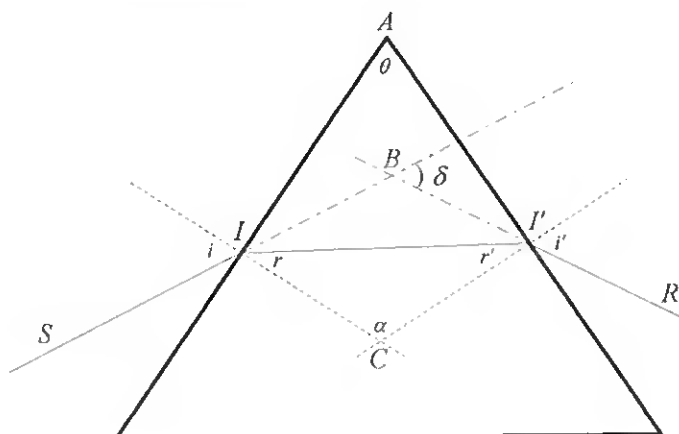


Figura 23. Percurso de um raio luminoso através de um prisma

As leis da refração explicam o desvio que o prisma provoca na luz. Consideremos, para esse efeito, uma secção principal de um prisma (Figura 23). Um raio monocromático  $SI$  ao penetrar no prisma é refractado, aproximando-se da normal. À saída do prisma é novamente refractado, desta vez afastando-se da normal segundo a direcção

## Óptica Geométrica

$I'R$ . As duas refrações sofridas pelo raio luminoso têm como efeito o seu desvio na direcção da base do prisma. Se  $n$  representar o índice de refração do prisma temos:

$$\text{à entrada do prisma,} \quad \text{sen } i = n \text{ sen } r; \quad (29)$$

$$\text{à saída do prisma,} \quad \text{sen } i' = n \text{ sen } r'. \quad (30)$$

Se considerarmos o quadrilátero  $AICI'$ , como os ângulos em  $I$  e  $I'$  são rectos, então:

$$\theta + \alpha = 180^\circ.$$

Do triângulo  $ICI'$  tiramos que

$$\alpha + r + r' = 180^\circ.$$

Então,

$$r + r' = \theta \quad (31)$$

O ângulo  $\delta$ , formado entre a direcção de incidência  $SI$  e o raio emergente  $I'R$  e que se designa por *ângulo de desvio*, é igual à soma dos desvios à entrada em  $I$ ,  $(i - r)$ , e à saída em  $I'$ ,  $(i' - r')$ , pelo que:

$$\delta = i - r + i' - r'; \quad \delta = i + i' - r + r';$$

$$\delta = i + i' - \theta \quad (32)$$

Em prismas de ângulo pequeno ( $\theta < 0,1$  rad), se a incidência do raio luminoso for quase normal à superfície ( $i$  pequeno), os ângulos  $r$ ,  $r'$  e  $i'$  terão também valores pequenos, pelo que as equações (29) e (30) se podem escrever como  $i = nr$  e  $i' = nr'$ . Substituindo na equação (32) temos

$$\delta = nr + nr' - \theta; \quad \delta = n\theta - \theta;$$

$$\delta = (n - 1)\theta \quad (33)$$

## Óptica Geométrica

Podemos assim constatar que o desvio sofrido por um raio monocromático quando atravessa um prisma de ângulo pequeno, com uma incidência quase normal, é independente do ângulo de incidência.

Experimentalmente comprova-se que o desvio da luz ao atravessar um prisma tem um valor mínimo,  $\delta_m$ , quando o ângulo de incidência,  $i$ , é igual ao ângulo de emergência,  $i'$ .

Nestas condições:

$$\delta_m = 2i - \theta, \text{ pelo que } i = \frac{\delta_m + \theta}{2}.$$

Neste caso também  $r = r'$  e, portanto,  $\theta = 2r$ . Tendo em conta que

$$n = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\text{sen } i'}{\text{sen } r'}$$

então,

$$n = \frac{\text{sen } \frac{\theta + \delta_m}{2}}{\text{sen } \frac{\theta}{2}} \quad (34)$$

Esta expressão é de grande importância, permitindo determinar o índice de refração de uma substância. Para isso, basta construir com ela um prisma e medir os ângulos  $\theta$  e  $\delta_m$ .

Outra importante utilização dos prismas envolve o fenómeno da reflexão total. Consideremos um prisma de vidro cuja secção principal constitui um triângulo rectângulo isósceles (Figura 24).

## Óptica Geométrica

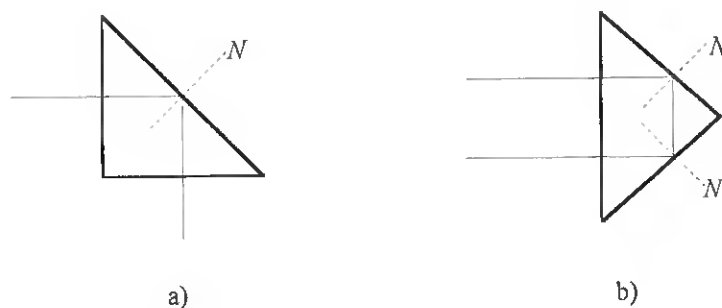


Figura 24. Reflexão total com mudança de direção de a)  $90^\circ$ ; b)  $180^\circ$

Os raios luminosos que penetram no prisma perpendicularmente à face de entrada apresentam-se na face hipotenusa (Figura 24. a) ou nas faces catetos (Figura 24. b) segundo um ângulo de  $45^\circ$ , superior ao ângulo limite que é de  $42^\circ$  neste material. A luz não pode, por isso, sair por essa face, sofrendo reflexão total. Os prismas de reflexão total são usados, em vez de espelhos planos, em numerosos instrumentos de óptica, tais como telescópios, periscópios e binoculares.

———— // ————

#### EX.O4.

Mostre que o desvio da luz ao atravessar um prisma tem um valor mínimo,  $\delta_m$ , quando o ângulo de incidência,  $i$ , é igual ao ângulo de emergência,  $i'$ .

**R:**

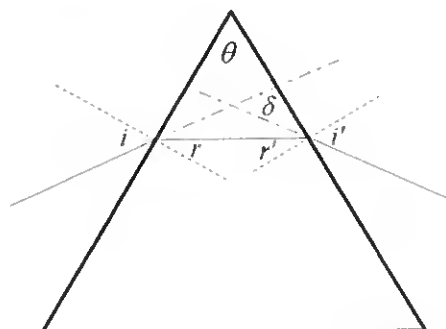
Para a resolução serão usadas as seguintes relações:

$$\delta = i + i' - \theta$$

$$r + r' = \theta$$

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r$$

$$\text{sen } i' = n \text{ sen } r'$$



## Óptica Geométrica

É condição de mínimo que:

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0$$

Da derivação das equações que traduzem a lei da refração, resulta:

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$$

o que implica que:

$$\frac{di'}{di} = \frac{\cos i \cos r' \, dr'}{\cos i' \cos r \, dr} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

uma vez que  $dr + dr' = 0$ . Substituindo na condição de mínimo, obtemos:

$$1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} = 0 \Rightarrow \cos i \cos r' = \cos i' \cos r$$

Dividindo as equações da lei da refração, temos:

$$\sin i \sin r' = \sin i' \sin r$$

A soma entre as duas últimas equações dá:

$$\cos(i - r') = \cos(i' - r) \quad (\text{a})$$

e a diferença dá:

$$\cos(i + r') = \cos(i' + r) \quad (\text{b})$$

Substituindo  $r'$  por  $\theta - r$ , obtemos, respectivamente:

$$(\text{a}) \quad i + r - \theta = \pm(i' - r)$$

$$(\text{b}) \quad i + \theta - r = \pm(i' + r)$$

O sinal  $(-)$  não tem significado físico, uma vez que implica  $i + i' = \theta$  e  $i + i' = -\theta$ , respectivamente. Se considerarmos unicamente o sinal  $(+)$ , ficamos com:

$$(\text{a}) \quad i - i' = \theta - 2r = r' - r$$

$$(\text{b}) \quad i - i' = 2r - \theta = r - r'$$

## Óptica Geométrica

As duas condições só podem ser simultaneamente satisfeitas se  $i - i' = 0$ , o que implica  $r = r'$ .

Para o caso em que  $i = i'$  e  $r = r'$ , a segunda derivada do desvio fica:

$$\frac{d^2 \delta}{di^2} = \frac{2(n^2 - 1) \sin r}{n \cos i \cos^2 r}$$

e é positiva para  $n > 1$ , o que implica que se  $i = i'$  e  $r = r'$ , então o desvio  $\delta$  é mínimo.

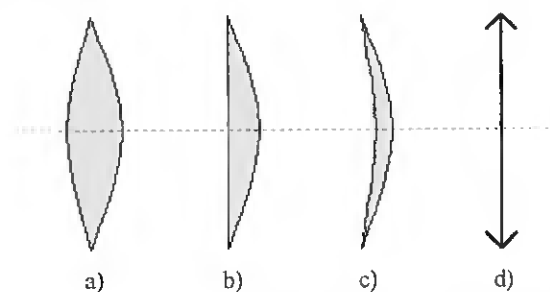
————— // —————

## 3.5. LENTES DELGADAS

Uma lente óptica é um meio transparente limitado por duas superfícies, uma curva (em geral esférica) e a outra podendo ser plana ou esférica. O nosso estudo incidirá unicamente sobre as lentes delgadas, isto é, aquelas cuja espessura é pequena quando comparada com a curvatura das superfícies.

Podemos distinguir dois tipos de lentes: as convergentes e as divergentes.

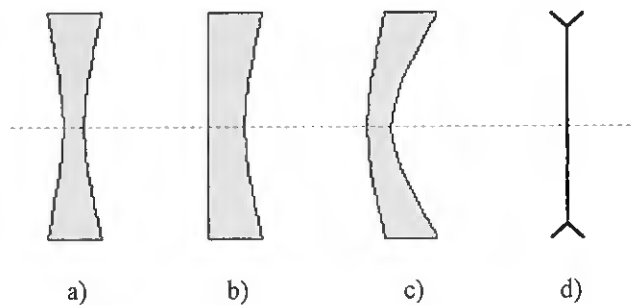
As lentes convergentes, ou de bordos delgados (mais espessas no centro que na periferia), transformam um feixe de raios paralelos num feixe de raios convergentes. Podem apresentar-se na forma de lentes biconvexas, plano-convexas e meniscos convexos, conforme se representa na figura 25.



**Figura 25.** Lentes convergentes **a)** Biconvexa; **b)** Plano-convexa; **c)** Menisco convexo; **d)** Símbolo de lente delgada convergente

## Óptica Geométrica

As lentes divergentes, ou de bordos espessos (mais finas no centro que na periferia), transformam um feixe de raios paralelos num feixe divergente. Podem ser bicôncavas, plano-côncavas e meniscos côncavos (Figura 26).



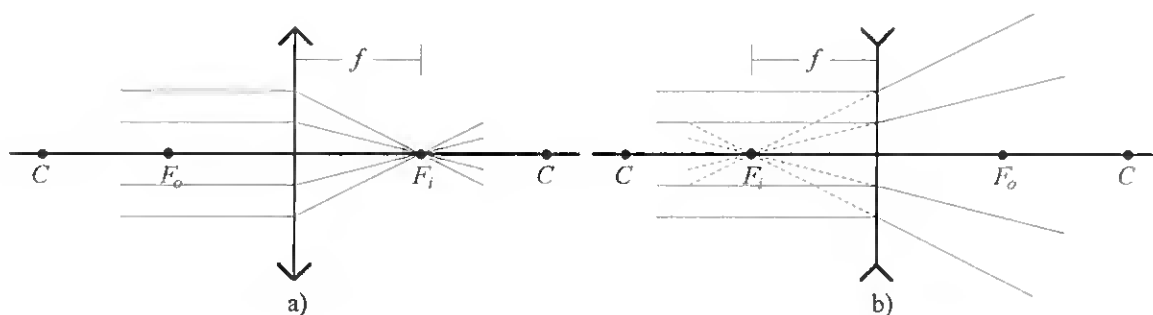
**Figura 26.** Lentes divergentes **a)** Bicôncava; **b)** Plano-côncava;  
**c)** Menisco côncavo; **d)** Símbolo de lente delgada divergente

Na construção geométrica das imagens dadas pelas lentes delgadas iremos utilizar, para facilitar a compreensão do desenho, unicamente a sua representação simbólica.

Os parâmetros mais importantes para a caracterização de uma lente são:

- **Eixo óptico**, ou eixo principal, a recta que passa pelos centros de curvatura de ambas as faces;
- **Foco imagem**,  $F_i$ , ponto imagem, sobre o eixo óptico, de um ponto objecto situado no infinito;
- **Foco objecto**,  $F_o$ , ponto objecto, situado no eixo principal, cuja imagem se situa no infinito;
- **Distância focal**,  $f$ , distância do foco ao centro óptico;
- **Centro de curvatura**,  $C$ , ponto situado sobre o eixo óptico a uma distância dupla da distância focal.

## Óptica Geométrica



**Figura 27.** Propriedades do foco em a) lentes convergentes; b) lentes divergentes

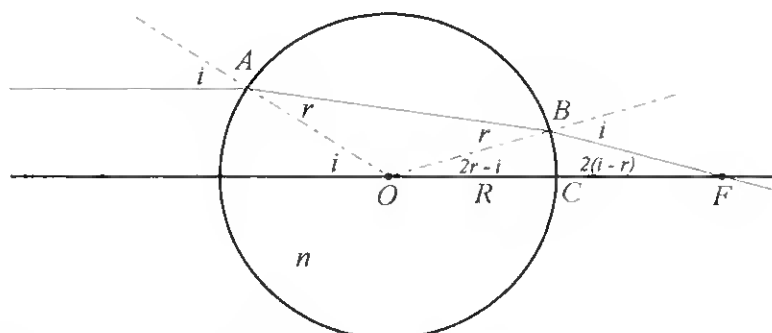
Pode-se demonstrar que numa lente delgada os focos se situam, dum e doutro lado, a igual distância da lente.

———— // ————

**EX.05.**

Determine a distância focal de uma pequena esfera de vidro de raio  $R$  e índice de refração  $n$ .

**R:**



Da refração em  $A$ , considerando ângulos pequenos, temos:

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \Rightarrow i \approx nr$$

A distância focal,  $f$ , é:

$$f = \overline{OF} = R + \overline{CF}$$

No triângulo  $OBC$  temos:

## Óptica Geométrica

$$\frac{\text{sen } 2(i-r)}{R} = \frac{\text{sen } (\pi-i)}{R+CF} = \frac{\text{sen } i}{R+CF} \Rightarrow \frac{2(i-r)}{R} \approx \frac{i}{R+CF}$$

ou seja:

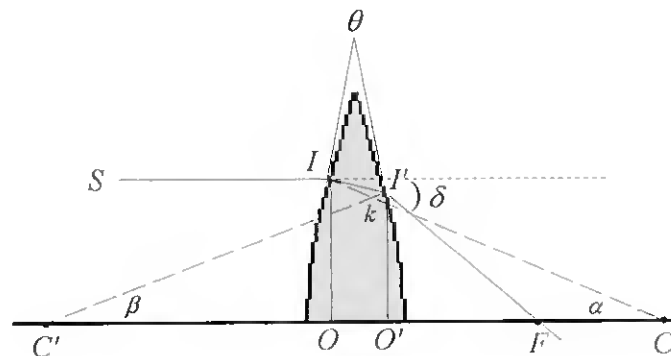
$$\overline{CF} \approx R \frac{2r-i}{2(i-r)} = R \frac{2r-nr}{2(nr-r)} = R \frac{2n}{2(n-1)}$$

Daqui resulta que:

$$f = R + R \frac{2-n}{2(n-1)} \Rightarrow f = \frac{n}{2(n-1)} R$$

————— // —————

Consideremos uma lente de espessura reduzida (Figura 28).



**Figura 28.** Demonstração da distância focal das lentes

O raio luminoso  $SI$ , paralelo ao eixo óptico, intersecta, depois de sofrer refração à entrada e à saída da lente, esse eixo no ponto  $F$ . Consideremos ainda os raios de curvatura  $IC$  e  $I'C'$  e dois planos tangentes à lente nos pontos  $I$  e  $I'$ , formando entre si o ângulo  $\theta$ . Nestas circunstâncias podemos considerar o raio luminoso como estando a atravessar um prisma de ângulo  $\theta$ , pelo que, por semelhança com a construção geométrica da Figura 23, temos:

$$\theta = \alpha + \beta \quad (35)$$

## Óptica Geométrica

Como os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são pequenos, podemos considerar  $\alpha \approx \text{sen } \alpha$  e  $\beta \approx \text{sen } \beta$ .

Designando por  $R$  e  $R'$  os raios de curvatura da lente:

$$\alpha = \frac{IO}{IC} = \frac{IO}{R} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{I'O'}{I'C'} = \frac{I'O'}{R'}$$

Substituindo na relação (10)  $\alpha$  e  $\beta$  pelos respectivos valores, obtemos:

$$\theta = \frac{IO}{R} + \frac{I'O'}{R'}$$

Por outro lado, o ângulo  $\theta$  do prisma a que se pode assemelhar a lente é pequeno, uma vez que a lente é de pequena espessura. Nestas condições, o desvio  $\delta$  sofrido pelo raio luminoso é dado pela equação (33):

$$\delta = (n-1)\theta ; \quad \delta = (n-1)\left(\frac{IO}{R} + \frac{I'O'}{R'}\right) \quad (36)$$

Sendo o ângulo  $\delta$  igualmente pequeno, o triângulo  $FO'I'$  permite escrever uma outra expressão para esse desvio:

$$\delta = \frac{I'O'}{O'F} ; \quad \delta = \frac{I'O'}{f} \quad (37)$$

Igualando as relações (36) e (37) e considerando que, devido à pequena espessura da lente,  $IO$  é sensivelmente igual a  $I'O'$ , obtemos:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{f} \quad (38)$$

Esta expressão geral, também conhecida como *fórmula do fabricante de lentes*, mostra que a distância focal de uma lente só depende do seu índice de refração e dos raios de curvatura das suas faces. Como o valor de  $f$  é independente do ponto de incidência e da face de entrada, os focos encontram-se situados a igual distância, de um lado e outro do centro óptico.

————— // —————

## Óptica Geométrica

**EX.O6.**

Considere uma lente circular biconvexa de raio  $h$ , constituída por duas calotes esféricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ , muito maiores que  $h$ .

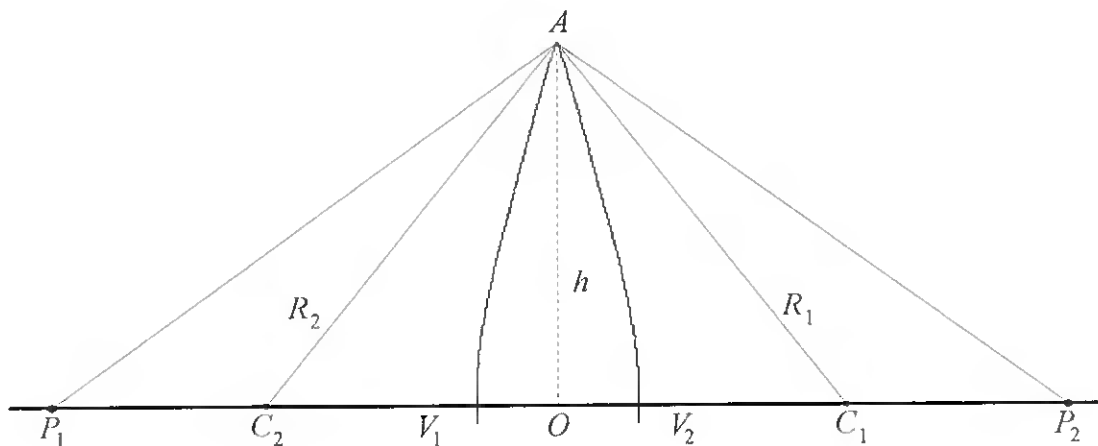
Determine a equação da lente a partir do princípio de Fermat, isto é, admitindo que todos os raios que passam pela lente se propagam no mesmo intervalo de tempo do objecto à sua imagem.

**R:**

Comparemos os raios  $P_1AP_2$  e  $P_1OP_2$ . Os tempos de propagação respectivos serão:

$$t_A = \frac{P_1A}{c} + \frac{P_2A}{c}$$

$$t_O = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{c} + \frac{V_1V_2}{c/n}$$



*Nota: Na figura a escala vertical está muito exagerada, para melhor compreensão do diagrama.*

Se todos os raios emanados de  $P_1$  são focalizados em  $P_2$ , que constitui a imagem perfeita de  $P_1$ , então o princípio de Fermat impõe que todos os caminhos ópticos sejam percorridos no mesmo tempo, pelo que  $t_A = t_O$ . Então:

## Óptica Geométrica

$$P_1 A + P_2 A = P_1 V_1 + V_2 P_2 + n(V_1 V_2) = P_1 P_2 + (n-1)V_1 V_2 \quad (\text{a})$$

Atendendo à aproximação de lente delgada e ao facto de que  $r \ll R_1, R_2$ , temos:

$$P_1 A = \sqrt{P_1 O^2 + h^2} \approx P_1 O \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{P_1 O^2} \right)$$

$$P_2 A = \sqrt{P_2 O^2 + h^2} \approx P_2 O \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{P_2 O^2} \right)$$

$$C_2 O = \sqrt{R_2^2 - h^2} \approx R_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R_2^2} \right)$$

$$C_1 O = \sqrt{R_1^2 - h^2} \approx R_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R_1^2} \right)$$

Substituindo em (a):

$$\frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{P_1 O} + \frac{1}{P_2 O} \right) = (n-1)V_1 V_2 \quad (\text{b})$$

onde:

$$V_1 V_2 = V_1 O + O V_2 = (R_1 - O C_1) + (R_2 - O C_2) = R_1 + R_2 - (O C_1 + O C_2)$$

ou seja:

$$V_1 V_2 = \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Por fim, substituindo em (b), obtemos:

$$\frac{1}{P_1 O} + \frac{1}{P_2 O} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

————— // —————

## 3.6. FORMAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DAS LENTES

Para a construção geométrica das imagens vamos utilizar situações particulares, resultantes das propriedades do centro óptico e dos focos.

1 — **Todo o raio luminoso que passa pelo centro óptico de uma lente delgada refracta-se sem desvio;**

2 — **Todo o raio luminoso paralelo ao eixo óptico refracta-se passando real ou virtualmente pelo foco;**

3 — **Todo o raio luminoso que passe real ou virtualmente pelo foco emerge, após refração, paralelo ao eixo principal.**

Podemos agora estudar, através da construção geométrica, as variações das características das imagens dadas pelas lentes delgadas de um objecto, em função da sua distância às lentes.

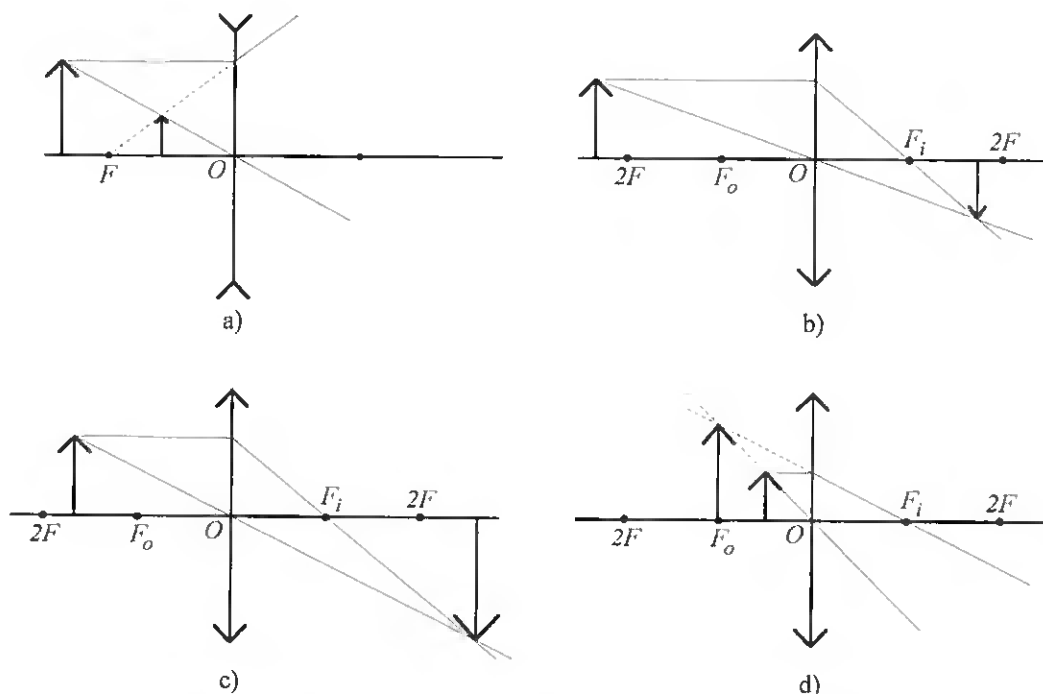


Figura 29. Construção geométrica de imagens formadas por lentes delgadas

## Óptica Geométrica

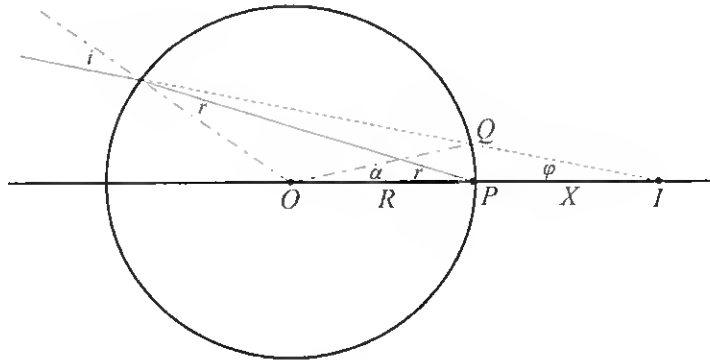
As imagens dadas pelas lentes divergentes, Figura 29.a), são sempre **virtuais, direitas e menores que o objecto**, qualquer que seja a posição do objecto em relação à lente.

Nas lentes convergentes, se o objecto estiver situado para lá da dupla distância focal, Figura 29.b), a imagem estará situada entre o foco e a dupla distância focal e é **real, invertida e menor que o objecto**. Se o objecto estiver situado entre a dupla distância focal e o foco, Figura 29.c), a imagem situar-se-á para lá da dupla distância focal e é **real, invertida e maior que o objecto**. Para objectos situados entre o foco e a lente, Figura 29.d), teremos uma imagem **virtual, direita e maior que o objecto**.

————— // —————

**EX.O7.**

Um gato olha para um peixe, que se encontra na extremidade diametralmente oposta de um aquário esférico de raio  $R$ .



Sabendo que o índice de refração é  $n = \frac{4}{3}$ , determina a distância,  $X$ , entre o peixe e a sua imagem.

**R:**

Podemos assumir que o peixe,  $P$ , representa uma fonte de luz pontual (reflectida), de modo que o gato localiza a sua imagem,  $I$ , a uma distância  $X = \overline{PI}$ .

## Óptica Geométrica

Assumindo pequenos ângulos,  $i \approx nr$ , pelo que:

$$h = \overline{PQ} \approx X\varphi = X(2r - i)$$

$$h = R\alpha \approx 2R(i - r)$$

o que dá:

$$X = 2R \frac{i - r}{2r - i} = 2R \frac{n - 1}{2 - n}$$

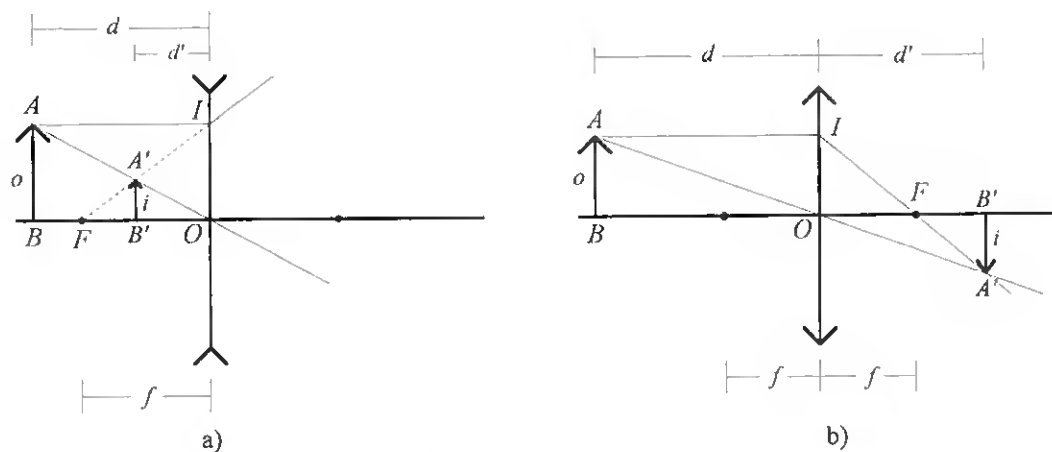
Para  $n = \frac{4}{3}$ , resulta  $X = R$ .

———— // ————

## 3.7. EQUAÇÕES DAS LENTES

À semelhança do que se fez para os espelhos, também as características das imagens dadas pelas lentes delgadas se podem obter a partir de equações simples.

Para obter essas equações, consideremos a imagem  $A'B'$  de um objecto  $AB$  formada por uma lente (Figura 30).



**Figura 30.** Estudo analítico das características das imagens em

**a)** lentes divergentes; **b)** lentes convergentes

## Óptica Geométrica

Na notação utilizada, designamos por  $o$  o tamanho do objecto  $AB$ , por  $i$  o tamanho da imagem  $A'B'$ , por  $d$  a distância  $OB$  do objecto à lente, por  $d'$  a distância  $OB'$  da imagem à lente e por  $f$  a distância focal.

Da semelhança dos triângulos  $A'OB'$  e  $AOB$  podemos tirar que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{o} = \frac{d'}{d} \quad (39)$$

Por seu lado, os triângulos semelhantes  $A'FB'$  e  $IFO$  dão-nos:

para lentes divergentes

$$\frac{A'B'}{IO} = \frac{FB'}{FO}$$

ou

$$\frac{i}{o} = \frac{f-d'}{f} \quad (40.a)$$

para lentes convergentes

$$\frac{A'B'}{IO} = \frac{FB'}{FO}$$

ou

$$\frac{i}{o} = \frac{d'-f}{f} \quad (40.b)$$

Igualando as relações (39) e (40) obtemos, sucessivamente:

para lentes divergentes

$$\frac{d'}{d} = \frac{f-d'}{f}$$

$$d'f = df - dd'$$

$$d'f - df = -dd'$$

para lentes convergentes

$$\frac{d'}{d} = \frac{d'-f}{f}$$

$$d'f = dd' - df$$

$$d'f + df = dd'$$

Dividindo pelo produto  $dd'$ , obtemos:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d'} = -\frac{1}{f} \quad (41.a)$$

Dividindo pelo produto  $dd'$ , obtemos:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad (41.b)$$

A relação (39) permite calcular a altura da imagem em função da altura do objecto, sendo por isso também designada como equação da ampliação lateral ou transversal:

$$M_T = \frac{i}{o} = \frac{d'}{d}$$

## Óptica Geométrica

As relações (41) permitem calcular a posição da imagem em função da posição do objecto. Podemos utilizar unicamente a equação (41.b) para qualquer tipo de lente delgada se, por convenção, considerarmos que as grandezas  $d$ ,  $d'$  e  $f$  são positivas quando dizem respeito a objectos, imagens e focos reais e negativas quando correspondem a objectos, imagens e focos virtuais.

Temos assim que  $d$ ,  $d'$  e  $f$  terão o mesmo sinal ou sinais contrários consoante essas grandezas se situem de um e outro lado ou do mesmo lado de uma lente.

De acordo com esta convenção:

$f > 0$  lente convergente

$f < 0$  lente divergente

$d > 0$  objecto real

$d < 0$  objecto virtual

$d' > 0$  imagem real

$d' < 0$  imagem virtual

$M_T > 0$  imagem invertida

$M_T < 0$  imagem direita

Define-se **potência focal** ( $P$ ) ou **vergência** de uma lente como o inverso da distância focal:

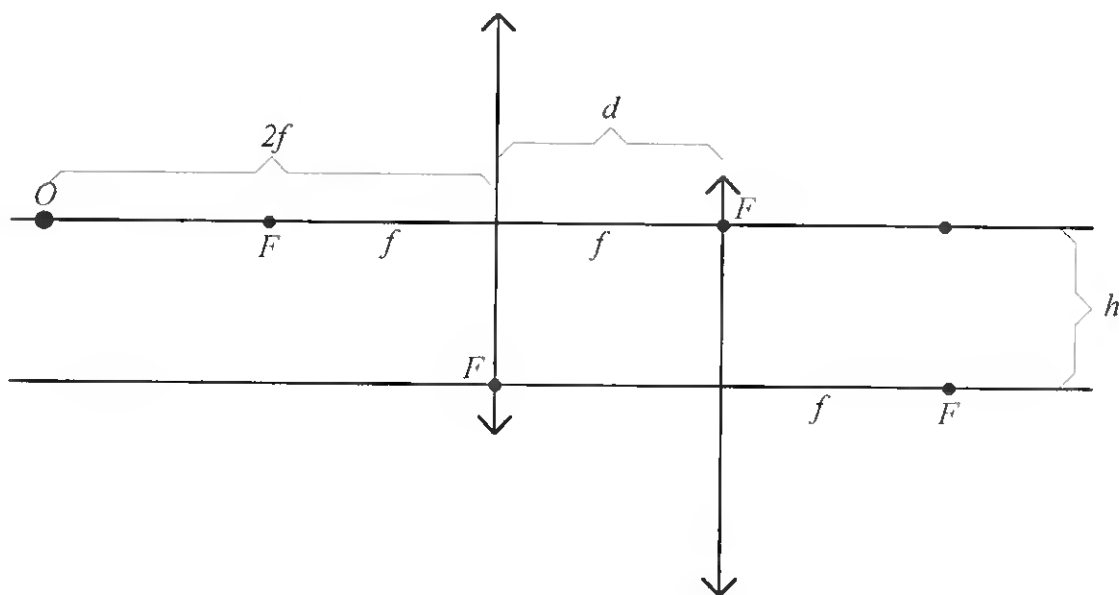
$$P = \frac{1}{f} \quad (\text{m}^{-1} \text{ ou D})$$

A unidade SI de potência focal é o  $\text{m}^{-1}$ , denominada dioptria (D), correspondendo à potência de uma lente que, colocada no vazio, tem a distância focal de 1m.

———— // ————

**EX.08.**

Consideremos duas lentes idênticas, de distância focal  $f$ , colocadas a uma distância relativa  $d = f$ , de modo que os dois eixos ópticos são paralelos e estão separados de uma distância  $h$ .



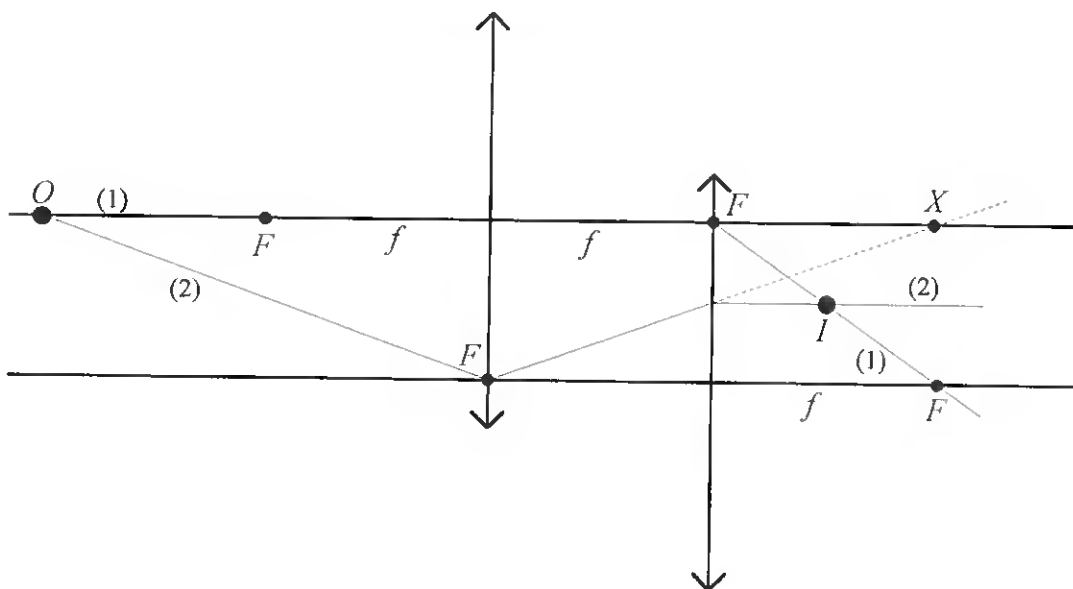
Uma fonte de luz é colocada a uma distância  $2f$  da primeira lente. Determine a distância entre a fonte e a sua imagem, obtida pelas duas lentes.

**R:**

Consideremos dois raios (1) e (2), com origem na fonte luminosa.

O raio (1) passa pelo centro da primeira lente e, como é paralelo ao eixo principal da segunda, é desviado passando pelo seu foco,  $F$ .

## Óptica Geométrica



O raio (2) vai emergir da primeira lente em direcção a um ponto,  $X$ , situado desta a igual distância que o objecto:

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{X} = \frac{1}{f} \Rightarrow X = 2f$$

Quando o raio (2) atinge a segunda lente, porque é proveniente do seu foco, vai emergir desta paralelo ao eixo principal, pelo que intersecta o raio (1) no ponto  $I$ .

Num referencial com origem no ponto  $O$ , a imagem  $I$  tem coordenadas

$\left(\frac{7}{2}f; -\frac{h}{2}\right)$ , pelo que a distância entre o objecto e a imagem será:

$$\overline{OI} = \frac{1}{2}\sqrt{49f^2 + h^2}$$

**DISPOSITIVOS**  
**E**  
**RESULTADOS**  
**EXPERIMENTAIS**

## 1. DISPOSITIVOS EXPERIMENTAIS

Se a Física descreve o mundo que nos rodeia e pretende descobrir as relações entre os diferentes aspectos do comportamento observável da Natureza, o laboratório assume-se como uma fonte primária de conhecimento. Verdadeiramente, as ideias, os conceitos e as definições só alcançam o seu sentido real quando se relacionam com a experiência.

Todavia, a simples observação dos factos não nos dá conhecimento. Ele resulta da interpretação abstracta que fazemos do que foi observado.

Nesse sentido, foram construídos dois dispositivos experimentais e concebidas actividades que possibilitem não só a recolha de dados observacionais, como também facilitem a correcta interpretação do que foi observado.

A luz reflecte-se quando incide sobre uma superfície. Comportar-se-ão pequenas esferas do mesmo modo? Para responder a esta questão podemos lançar essas esferas sobre diversas superfícies, utilizando o dispositivo conforme referido em [39] e que a seguir se descreve.

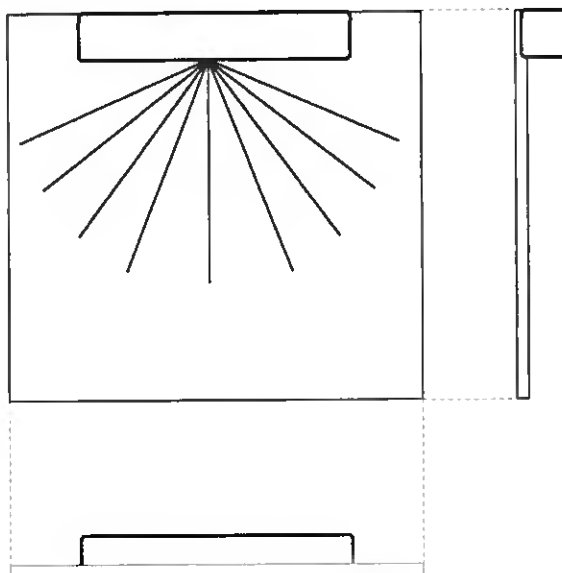
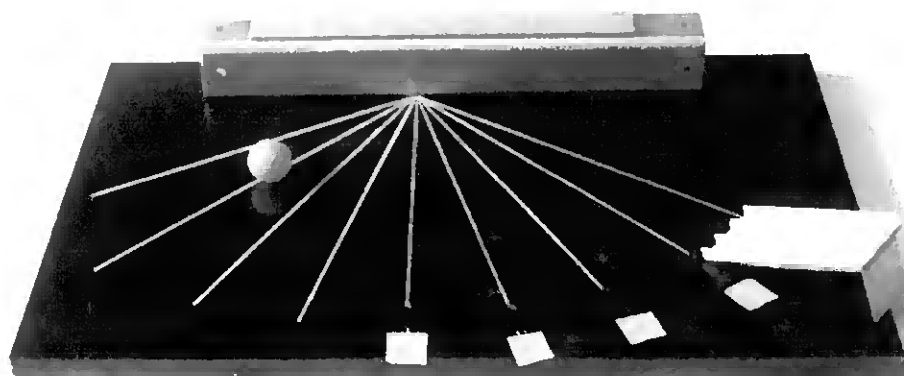


Figura 31. Esquema do dispositivo para o estudo da “reflexão” das partículas

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Este dispositivo é constituído por uma base em madeira, sobre a qual é possível lançar contra um alvo pequenas esferas a partir de posições pré determinadas, recorrendo a rampas ou a um disparador. Sobre essa base encontram-se desenhadas linhas que possibilitam, por simples observação, verificar a relação entre os ângulos das trajetórias das partículas antes e depois da colisão com o alvo.

O alvo contra o qual as esferas são lançadas é constituído por um tubo em aço de secção quadrada, possuindo uma face polida, outra irregular e uma terceira revestida por um material pouco elástico (corticite), conforme se pode observar na fotografia da Figura 32. Para as diferentes experiências dispõe-se ainda de esferas de diferentes materiais (aço, madeira, plástico e borracha).



**Figura 32.** Dispositivo para o estudo da reflexão das partículas

Se forem lançadas esferas de madeira ou plástico contra a superfície de aço, limpa e polida, ressaltarão com um ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência, com as trajetórias de incidência e reflexão num plano perpendicular à superfície e com uma celeridade depois da colisão aproximadamente igual à original. Isto resulta da colisão entre as esferas e o alvo ser bastante elástica e de ser diminuto o atrito entre os materiais

## Dispositivos e Resultados Experimentais

de que são constituídos. Estas são as condições em que ocorre analogia entre as trajectórias das partículas e dos raios luminosos, em fenómenos de reflexão.

Todavia, ao invés do que acontece com a luz, são possíveis outros comportamentos para as partículas. Iremos individualizar dois: a colisão inelástica sem atrito e a colisão elástica com atrito, [8], [28], [29], [35].

No primeiro caso, e tomando o plano do alvo como referência, a componente tangente da velocidade das partículas permanece constante, enquanto a componente perpendicular diminui em módulo, pelo que se irá observar que a trajectória depois da colisão faz um ângulo com a normal maior que o ângulo antes da colisão.

No segundo caso a componente normal da velocidade é constante em módulo, diminuindo na colisão a componente tangencial da velocidade, por acção de uma força de atrito entre a partícula e o alvo. Nestas circunstâncias, ir-se-á observar uma aproximação à normal da trajectória da partícula, após a colisão.

Naturalmente não é possível obter, na prática, os fenómenos anteriormente descritos de uma forma individualizada. Todavia, a escolha dos materiais a utilizar em cada uma das simulações será feita no sentido de maximizar o efeito que se pretende realçar.

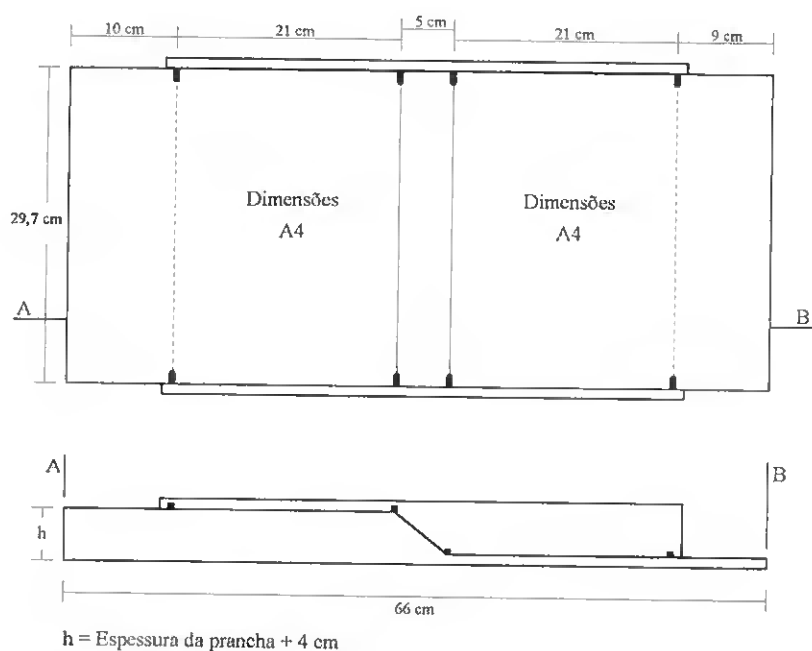
Também a reflexão difusa pode ser simulada neste dispositivo; fazendo incidir as pequenas esferas sobre uma superfície irregular poderemos observar que elas se refletem numa grande variedade de direcções. Se observarmos em detalhe uma superfície onde as pequenas esferas sofrem reflexão especular (por exemplo, utilizando lupas ou fotografias de observações ao microscópio de superfícies semelhantes) podemos constatar que aquilo que nos parece macroscopicamente uniforme apresenta na realidade pequenas irregularidades. Se essas irregularidades não afectam a reflexão das esferas que nelas colidem, podem levar à difusão das partículas de luz que sobre elas incidam. A

## Dispositivos e Resultados Experimentais

partir daí poderemos chegar às condições que deve reunir uma superfície lisa para que apresente reflexão especular: as reentrâncias e saliências dessa superfície devem ser muito pequenas comparadas com o tamanho das partículas que nela incidem. Assim se compreende que os metais devam ser escrupulosamente polidos para se comportarem, perante a luz, como superfícies especulares.

Na refração a luz muda de direcção quando ocorre mudança de meio óptico. Para atingir o objectivo a que nos propomos é necessário idealizar uma experiência com partículas materiais, tais como pequenas esferas de aço, que mudem de direcção de forma idêntica à luz.

Suponhamos que uma esfera rola sobre uma superfície plana, da qual passa a outra situada num nível inferior através de uma pequena rampa de forte inclinação. Na Figura 33 representa-se um esquema do dispositivo já referido em [39].



**Figura 33.** Esquema do dispositivo para o estudo da “refracção” das partículas

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Enquanto se move sobre a superfície superior, desloca-se com velocidade constante. Podemos supor que essa superfície superior corresponde ao ar, através do qual as partículas luminosas se movem em linha recta com velocidade constante. Se a esfera atingir a rampa segundo uma direcção oblíqua a esta, a velocidade que ganha ao deslizar-se sobre ela fará mudar a direcção do seu movimento. Na Figura 34 é apresentada uma fotografia, tirada em pose, que ilustra esse comportamento.

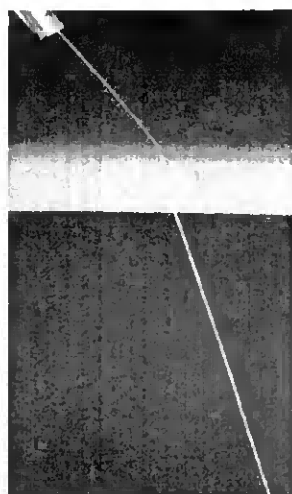


Figura 34. Trajectória seguida pela esfera

Examinemos mais em pormenor o que ocorre quando a esfera se move sobre a rampa.

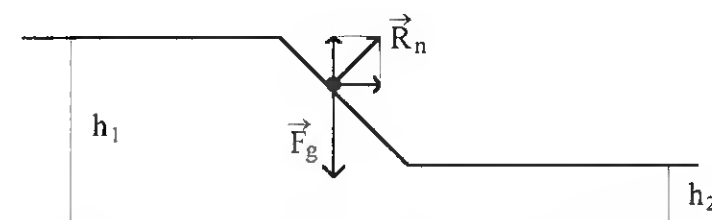


Figura 35. Esquema de forças que se exercem sobre a esfera durante a descida da rampa

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Durante a descida a esfera é actuada pela força gravítica,  $\vec{F}_g$ , e pela reacção normal,  $\vec{R}_n$ . Podemos decompor esta última força segundo as direcções vertical e horizontal, conforme se ilustra na Figura 35. Dessa forma podemos considerar que a esfera sofre dois impulsos, segundo essas duas direcções. Ao atingir a base do plano inferior a esfera sofre outro impulso vertical, dirigido para cima, que anula o momento linear segundo essa direcção. Podemos assim considerar que a alteração na trajectória da esfera se ficou unicamente a dever à acção de uma força horizontal, perpendicular às linhas que marcam o início e o fim da rampa. Portanto, a componente do momento linear segundo a perpendicular a essas linhas sofre um incremento, traduzido num aumento da componente da velocidade segundo essa direcção (Figura 36) e, como tal, numa aproximação da trajectória da esfera à normal.



**Figura 36.** Fotografia com luz estroboscópica do movimento da esfera no dispositivo

O desnível entre os dois planos horizontais permite, de facto, simular a existência de uma zona estreita de campo uniforme, na qual a partícula está sujeita a um impulso perpendicular às linhas equipotenciais (Figura 37).

## Dispositivos e Resultados Experimentais

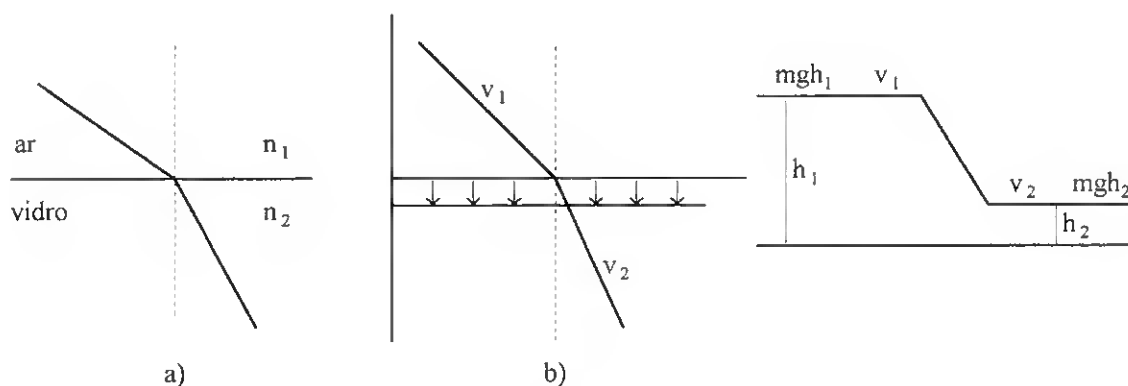


Figura 37. Refracção da luz (a) e das partículas (b)

A rampa pode, por isso, comparar-se à superfície de separação de dois meios refringentes, correspondendo o nível superior ao ar e o nível inferior, por exemplo, ao vidro.

Se, através de uma pequena rampa de lançamento, fizermos incidir uma esfera obliquamente sobre a rampa (Figura 38), sempre a partir do mesmo local mas segundo ângulos diferentes, obteremos diferentes desvios.

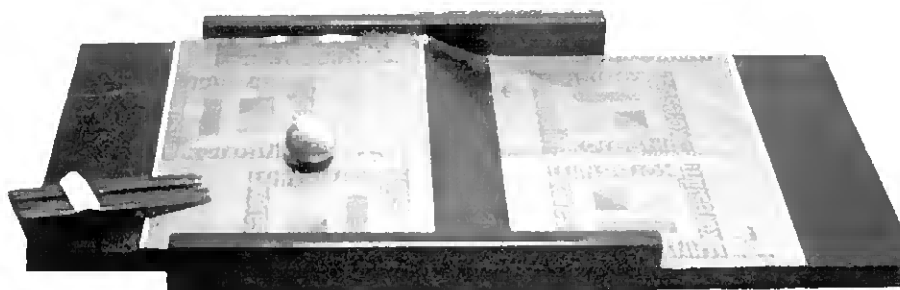


Figura 38. Dispositivo para o estudo da refração das partículas

Para que possamos ficar com um registo das trajetórias a esfera irá mover-se sobre papel químico, deixando-as impressas sobre duas folhas brancas colocadas por baixo e rigorosamente alinhadas com o início e o fim da rampa, conforme se pode apreciar na Figura 38 e no esquema da Figura 33.

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Medidos e registados os ângulos de incidência e “refracção” em relação à normal aos bordos da rampa, podemos verificar que a mudança de direcção do movimento da esfera pode ser descrita pela lei de Snell.

Além disso, podemos ainda verificar que a constante da lei de Snell depende da diferença de altura entre os dois planos e da velocidade com que se deslocam as esferas. Quanto maior a diferença de altura, maior o índice de refração; quanto maior a velocidade original, menor o índice. Trabalhando sempre com a mesma velocidade inicial, podem-se simular materiais de diferentes índices de refração utilizando diferentes desníveis entre os planos.

As actividades experimentais anteriormente referidas e que ilustram a analogia óptico-mecânica, estão longe de esgotar as potencialidades demonstrativas dos dispositivos construídos. Apesar da sua simplicidade é ainda possível, utilizando-os na forma apresentada ou com as necessárias alterações, demonstrar a existência da referida analogia através de experiências que simulem a reflexão em espelhos esféricos (primeiro dispositivo), a reflexão interna total ou a refração por uma superfície esférica (segundo dispositivo).

## 2. PROTOCOLOS EXPERIMENTAIS

### “REFLEXÃO” DAS PARTÍCULAS

#### 2.1. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

2.1.1. Alinhe a rampa de lançamento com a linha dos  $35^\circ$ .

2.1.2. Utilize como alvo a parte metálica lisa.

2.1.3. Coloque a esfera de madeira sobre a rampa e solte-a. Repita o processo várias vezes, tendo o cuidado de ajustar a posição da rampa de forma a que o percurso da esfera antes de colidir com o alvo se faça sobre a linha branca e o ponto de colisão seja o ponto de intersecção das linhas.

2.1.4. Observe a relação entre os ângulos das trajectórias com a normal, antes e depois da colisão, e registe as suas observações.

2.1.5. Repita os pontos 2.1.3. e 2.1.4. utilizando esferas de aço e de borracha.

2.1.6. Rode o alvo de forma a que as colisões se efectuem agora com a superfície branca.

2.1.7. Repita todos os procedimentos anteriormente descritos, utilizando as mesmas esferas.

#### 2. 2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresente uma explicação para os diferentes comportamentos observados, tendo em atenção a elasticidade das colisões e o facto do atrito entre as esferas e o alvo ser ou não negligenciável.

## Dispositivos e Resultados Experimentais

## “REFRACÇÃO” DAS PARTÍCULAS

## 2.3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

2.3.1. Coloque uma folha branca e sobre ela uma folha de papel químico, nos locais do dispositivo a isso destinados.

2.3.2. Posicione a rampa de lançamento no plano superior e encoste a esfera ao limitador.

2.3.3. Solte a esfera e assinale com a mesma marca as trajectórias nos planos superior e inferior correspondentes ao mesmo lançamento.

2.3.4. Repita por mais 5 vezes os pontos 2.3.2. e 2.3.3., fazendo variar os ângulos das trajectórias em relação à rampa situada entre os planos superior e inferior.

2.3.5. Retire as folhas brancas e meça os ângulos das trajectórias em relação à normal à margem das folhas, registando os valores na tabela I.

TABELA I

Lançamento	$\theta_i$ (Plano superior)	$\theta_r$ (Plano inferior)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

## Dispositivos e Resultados Experimentais

**2.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

2.4.1. A partir dos resultados obtidos, calcule os senos dos ângulos e a razão,  $n$ , entre os valores correspondentes às trajetórias nos planos superior e inferior, para cada lançamento.

2.4.2. Registe na tabela II os resultados obtidos. Calcule a média dos valores de  $n$  e anote-o.

2.4.3. A partir dos valores obtidos anteriormente, calcule o erro absoluto e o erro relativo associados ao valor de  $n$  determinado.

**TABELA II**

Lançamento	$\text{sen } \theta_i$	$\text{sen } \theta_r$	$n = \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r}$	$\bar{n}$	$\delta n_{abs}$	$\delta n_{rel}$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

### 3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Executado o trabalho prático referente à refração das partículas, de acordo com o protocolo anteriormente apresentado, obtiveram-se os resultados que constam das tabelas:

**TABELA I**

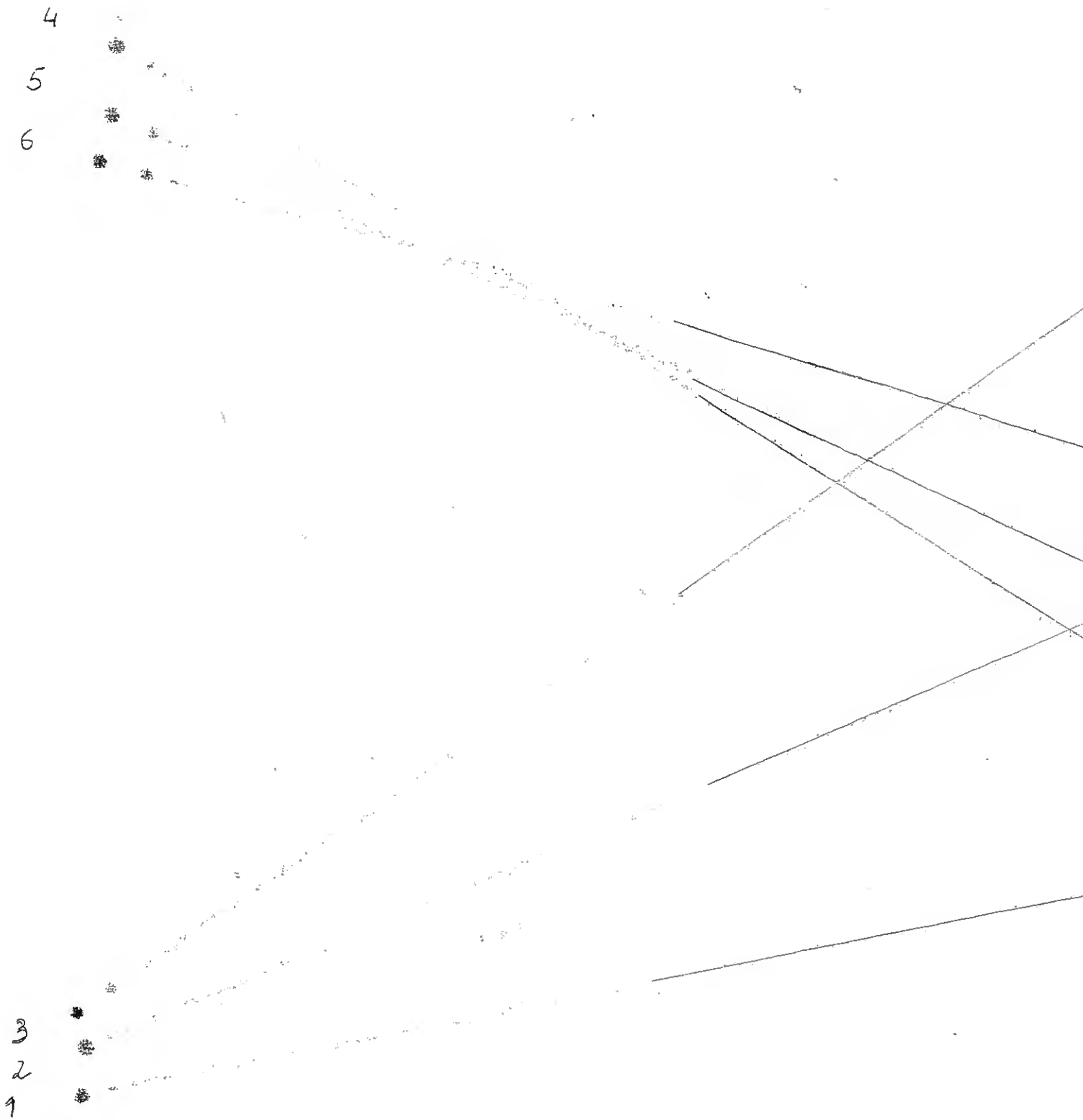
Lançamento	$\theta_i$ (Plano superior)	$\theta_r$ (Plano inferior)
1	10°	6°
2	23°	14°
3	35°	21°
4	32,5°	20°
5	25°	16°
6	17,5°	11°

**TABELA II**

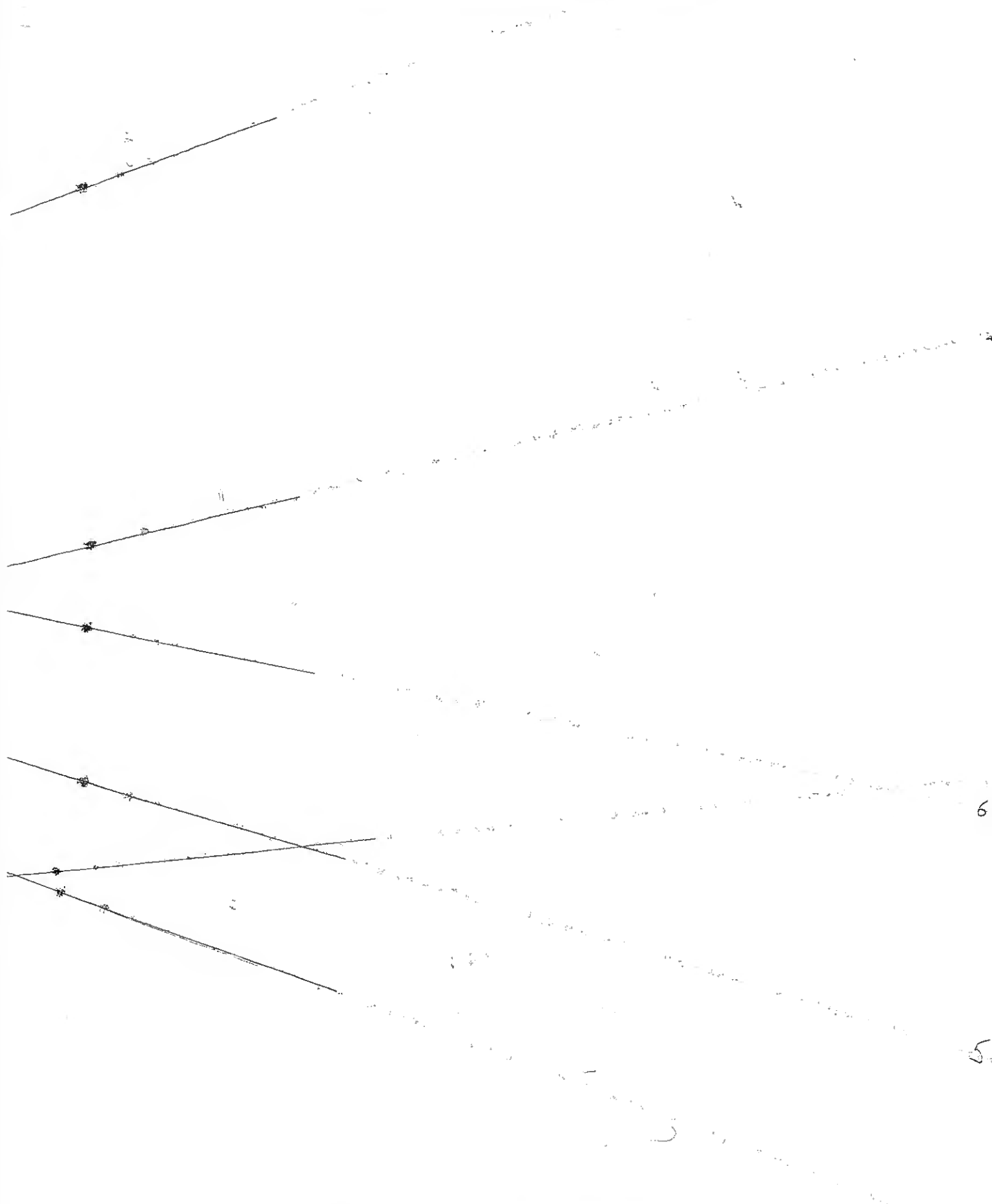
Lançamento	$\text{sen } \theta_i$	$\text{sen } \theta_r$	$n = \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r}$	$\bar{n}$	$\delta n_{abs}$	$\delta n_{rel}$
1	0,1736	0,1045	1,6613	1,5929	0,0684	4,3%
2	0,3907	0,2419	1,6151			
3	0,5736	0,3584	1,6005			
4	0,5373	0,3420	1,5710			
5	0,4226	0,2756	1,5332			
6	0,3007	0,1908	1,5760			

Nota: As trajectórias da esfera nos dois planos, que se apresentam nas páginas seguintes, foram realçadas a lápis junto à extremidade da folha para facilitar a leitura do ângulo feito com a normal.

Dispositivos e Resultados Experimentais



### Dispositivos e Resultados Experimentais



#### 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na utilização destes dispositivos, com o objectivo de tornar evidente a semelhança entre as trajectórias seguidas por pequenas esferas em movimento e a trajectória de raios luminosos envolvidos em fenómenos de reflexão e refacção, poderá resultar a ideia de um modelo corpuscular para a luz. Na verdade isso foi proposto por Isaac Newton que, para explicar as leis da refacção, admitiu que à superfície de cada material refrangente a luz recebe um impulso.

Se estudarmos muitas trajectórias que incidam sobre a rampa segundo ângulos diferentes, poderemos constatar que, para a mesma velocidade no plano superior, as esferas se deslocam sempre com a mesma velocidade no plano inferior. Além disso, tal como na reflexão especular elástica das esferas, a componente da velocidade segundo a direcção definida pelo limite de separação não muda na refacção, só muda a componente normal da velocidade, que aumenta ao passar para o nível inferior, que faz as vezes de meio mais refrangente no nosso modelo.

Está o modelo corpuscular newtoniano, neste aspecto, de acordo com a natureza? Para o comprovar é necessário medir a velocidade da luz, o que nos tempos de Newton não era possível\*.

Conhecidas as velocidades da luz em diferentes meios, a teoria corpuscular resulta surpreendente: comparando as razões entre as velocidades da luz em diferentes meios e as razões entre as velocidades das esferas obtidas com o dispositivo para o estudo da “refacção” das partículas, verifica-se que essas relações estão invertidas.

---

\* A primeira medição credível da velocidade da luz foi efectuada por Fizeau em 1849 [19].

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Uma tal inconsistência está longe de ser trivial. Na realidade, foram considerações como esta que levaram ao abandono da teoria newtoniana sobre a natureza corpuscular da luz, a favor da teoria ondulatória.

Todavia, isto não impede a validade da analogia óptico-mecânica. De facto, a analogia não assume para a luz uma natureza corpuscular, apenas indica que, identificando o índice de refração com o momento linear de uma partícula, um problema de óptica pode ser resolvido como se fosse de mecânica e *vice versa*.

Como tal, a analogia pode ser entendida como uma “receita” formal para converter soluções obtidas num domínio em soluções pertencentes ao outro domínio.

De um ponto de vista mais formal, como podemos explicar a inversão nas relações entre as velocidades da luz e das partículas?

Isto decorre da aplicação das equações diferenciais dos raios (F.7) e das trajectórias (F.15), respectivamente. Assumindo, na Equação (F.7), que o índice de refração depende apenas de uma coordenada, por exemplo  $y$ , isto é  $n = \frac{v_0}{v(y)} = \frac{c}{v(y)}$ , conforme a Equação (F.38), então (F.7) reduz-se a:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad n \frac{dx}{ds} = \text{const}$$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{dn}{dy}$$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad n \frac{dz}{ds} = \text{const}$$

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Segue-se que o raio pertence a um plano perpendicular ao plano  $xz$ , que podemos escolher como sendo o plano  $xy$ . Assumindo a orientação do raio neste plano definida pelo ângulo  $\theta$  indicado na Figura 39, temos  $\frac{dx}{ds} = \text{sen } \theta$ , o que representa a lei de Snell:

$$n(y)\text{sen } \theta = \text{const} \quad \text{ou} \quad n(y)\text{sen } \theta = n(0)\text{sen } \theta_0$$

A curvatura  $\frac{d\theta}{ds}$  do raio pode ser obtida substituindo  $\frac{dy}{ds} = \text{cos } \theta$  na componente

$y$  da equação do raio, que se torna:

$$\frac{dn}{dy} = \frac{d}{ds}(n \text{cos } \theta) = -n \text{sen } \theta \frac{d\theta}{ds} + \text{cos } \theta \frac{dn}{dy} \frac{dy}{ds} = -n \text{sen } \theta \frac{d\theta}{ds} + \text{cos}^2 \theta \frac{dn}{dy}$$

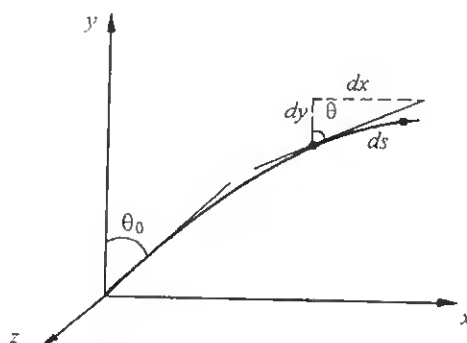


Figura 39. Raio (trajetória) num meio não-homogêneo

Assim obtemos:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\text{sen } \theta}{n} \frac{dn}{dy} = \frac{\text{sen } \theta}{v} \frac{dv}{dy} = \frac{n \text{sen } \theta}{c} \frac{dv}{dy} = \frac{\text{const}}{c} \frac{dv}{dy}$$

onde  $\frac{dn}{n} = -\frac{dv}{v}$  porque  $nv = c$  e  $n \text{sen } \theta$  é uma constante, conforme a lei de Snell. Isto

mostra que a curvatura do raio é dada pelo gradiente da velocidade da luz.

Refazendo os mesmos cálculos a partir da Equação (F.15), onde o índice de refração  $n$  é substituído pelo momento  $p(y) = mv(y)$  da partícula, obtemos:

## Dispositivos e Resultados Experimentais

$$\frac{d}{ds} \left( p \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad p \frac{dx}{ds} = \text{const}$$

$$\frac{d}{ds} \left( p \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d}{ds} \left( p \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad p \frac{dz}{ds} = \text{const}$$

o que, primeiro, significa que a componente do momento paralela ao plano de separação se conserva, devido a ausência de interacção tangencial:

$$p(y) \text{sen} \theta = \text{const} \quad \text{ou} \quad p(y) \text{sen} \theta = p(0) \text{sen} \theta_0$$

enquanto o gradiente do momento através do mesmo plano pode ser escrito na forma:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{ds} (p \cos \theta) = -p \text{sen} \theta \frac{d\theta}{ds} + \cos \theta \frac{dp}{dy} \frac{dy}{ds} = -p \text{sen} \theta \frac{d\theta}{ds} + \cos^2 \theta \frac{dp}{dy}$$

Daqui obtemos a curvatura da trajectória da partícula:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\text{sen} \theta}{p} \frac{dp}{dy} = -\frac{\text{sen} \theta}{v} \frac{dv}{dy} = -\frac{p \text{sen} \theta}{mv^2} \frac{dv}{dy} = p \text{sen} \theta \frac{d(1/v)}{dy} = \text{const} \frac{d(1/v)}{dy}$$

ou seja, a curvatura da trajectória é dada pelo gradiente do inverso da velocidade da partícula.

Por isso, não se pretende com as actividades a realizar atribuir à luz uma natureza corpuscular, nem interpretar os fenómenos da reflexão e refacção de uma forma “mecanicista”, mas tão só tornar evidente a existência de uma analogia entre a trajectória, segundo a óptica geométrica, de um raio luminoso num meio não homogéneo e a trajectória de uma partícula num campo de forças conservativas, de acordo com as leis da mecânica clássica.

Não haverá, contudo, algo mais nesta analogia? Afinal, as identidades formais acabam por revelar, mais cedo ou mais tarde, um significado mais profundo.

## Dispositivos e Resultados Experimentais

Trata-se, nomeadamente, da dualidade onda-partícula, evidenciada por experiências como o efeito fotoelétrico, que implica o carácter corpuscular da luz, ou a difracção dos electrões, associada ao carácter ondulatório das partículas a escala microscópica. A hipótese de Louis de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

que assume uma relação, através da constante de Planck, entre o comprimento de onda associada a uma partícula,  $\lambda$ , e o seu momento linear,  $p$ , é suficiente para reconciliar as expressões

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2} \text{ (luz)} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}\theta_1}{p_2} = \frac{\text{sen}\theta_2}{p_1} \text{ (partículas)}$$

Se nesta última substituirmos  $p$  por  $h/\lambda$ , obtemos:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\lambda_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\lambda_2}$$

que é igual à equação obtida para a luz, se recordarmos que  $v = \lambda\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência da radiação.

Realçamos que a hipótese de Luís de Broglie é válida no âmbito da mecânica quântica, que contempla processos discretos de troca de energia a escala microscópica. Segundo o princípio de correspondência de Niels Bohr, a mecânica quântica reduz-se à mecânica clássica, onde a energia se distribui continuamente a escala macroscópica, no limite matemático em que  $h \rightarrow 0$ . É óbvio que, neste limite, tendem para zero quer o comprimento da onda associada a uma partícula,  $\lambda = h/p \rightarrow 0$ , quer o momento linear de um fóton de luz,  $p = h/\lambda \rightarrow 0$ . Por outras palavras, as implicações mais profundas da analogia óptico-mecânica podem ser discutidas apenas em termos da mecânica quântica.

# CONCLUSÕES

## Conclusões

Os pontos que considero mais relevantes destacar, contendo vários elementos de originalidade, surgidos durante o desenvolvimento teórico, teórico-prático e laboratorial do presente trabalho, são os seguintes:

1. Era objectivo de partida deste trabalho a elaboração de um modelo de ensino-aprendizagem para o estudo da analogia existente entre a dinâmica das partículas e a óptica geométrica, adaptado à capacidade de formulação de pensamento abstracto de alunos do final do ensino secundário ou de um primeiro ano universitário.

Para a concretização desse objectivo foi necessário adaptar a analogia a um nível elementar, com a consequente adaptação do formalismo matemático, conforme se apresenta no capítulo “Analogia Óptico-Mecânica”. Um formalismo mais rigoroso é apresentado na fundamentação.

2. Durante o desenvolvimento dos capítulos da mecânica e da óptica, necessários para a compreensão dos fenómenos em estudo, foram os principais tópicos teóricos ilustrados através de situações-problema, exemplificadoras da aplicabilidade dos conceitos teóricos expostos.

Quer o tratamento teórico, quer os problemas escolhidos, tiveram como preocupação de fundo a apresentação dos conceitos de uma forma complementar da que se encontra na maioria da literatura, sendo relativamente original a apresentação do tópico “Reflexão e Refracção das Partículas”, bem como a demonstração da fórmula das lentes com base no princípio de Fermat.

A equivalência entre o formalismo da óptica geométrica e o formalismo clássico da dinâmica das partículas, nomeadamente o movimento através de uma região estreita de campo uniforme, é feita recorrendo a exemplos quer de campo gravitacional, quer de campo eléctrico, realçando-se, assim, a analogia formal entre esses dois campos.

## Conclusões

3. Considerando que as ideias, os conceitos e as definições só alcançam o seu sentido real quando se relacionam com a experiência, foram concebidos e construídos dois dispositivos experimentais originais e idealizadas algumas actividades, no sentido de proporcionar um significado mais profundo ao texto onde os princípios teóricos são expostos.

Esses dispositivos estão construídos com materiais comuns de fácil obtenção, tornando prática a sua duplicação. Para além disso, a simplicidade com que os princípios teóricos são aí exemplificados permite que se explorem com grande facilidade as variáveis físicas envolvidas.

Nesse sentido, utilizando o dispositivo para o estudo da reflexão das partículas, é possível observar que esferas diferentes que embatem num obstáculo polido, podem ter uma trajectória de afastamento que faz com a normal ângulos maiores, aproximadamente iguais ou menores que os feitos pela trajectória de aproximação. Analisando a natureza do material de que são feitas as esferas, é possível relacionar os resultados atrás referidos com a maior ou menor elasticidade da colisão, ou com o maior ou menor atrito entre as superfícies das esferas e a superfície com que colidem.

Quanto ao estudo da refacção das partículas, a análise das condições físicas em que o movimento se processa possibilita, a alunos com os conhecimentos básicos de mecânica adquiridos no ensino secundário, a compreensão de como o movimento através de uma rampa entre dois planos horizontais é análogo ao atravessamento de uma região estreita de campo uniforme.

Além disso, para lá da observação qualitativa da semelhança entre o movimento da esfera e a trajectória de um raio luminoso quando muda de meio óptico, é possível obter dados quantitativos, que se apresentam em anexo, que comprovam que os ângulos com a normal das trajectórias da esfera nos dois planos se relacionam pela lei de Snell.

## Conclusões

Apesar dos processos quase artesanais utilizados, os valores obtidos (apresentados no Anexo C) são bastante razoáveis, possibilitando a obtenção dos resultados pretendidos dentro de limites de erro aceitáveis.

4.O estudo qualitativo e quantitativo desta analogia pode ainda ser feito com recurso à fotografia. Fotos tiradas em pose, utilizando uma esfera brilhante que se movimenta em fundo preto, permitem visualizar o desvio na trajectória semelhante ao sofrido por um raio luminoso, quando atravessa a superfície de separação de dois meios ópticos.

Utilizando luz estroboscópica é possível determinar a velocidade da esfera nos dois planos e, assim, estabelecer uma relação entre essas velocidades e os ângulos das trajectórias com a normal.

5.Parte do presente trabalho foi objecto de uma comunicação no 12º Encontro Ibérico Para o Ensino da Física [39].

# **BIBLIOGRAFIA**

## LIVROS

- [1] Arya, A. – INTRODUCTION TO CLASSICAL MECHANICS, Allyn and Bacon, 1990
- [2] Battaglia, F. – NOTES IN CLASSICAL AND QUANTUM MECHANICS, Blackwell Scientific, 1990
- [3] Born, M. e Wolf, E. – PRINCIPLES OF OPTICS, Pergamon Press, 1987
- [4] Butkov, E. – FÍSICA MATEMÁTICA, Guanabara Koogan, 1988
- [5] Chorlton, F. – TEXTBOOK ON DYNAMICS, Ellis Horwood Ltd., 1983
- [6] Collinson, C. – INTRODUCTORY MECHANICS, Edward Arnold Ltd., 1980
- [7] Dessart, A.; Jodogne, J.-C. et Jodogne, J. – OPTIQUE GÉOMETRIQUE, Editions A. de Boeck, 1975
- [8] Deus, J. Dias et al. – INTRODUÇÃO À FÍSICA, McGraw-Hill, 1992
- [9] Einstein, A. e Infeld, L. – A EVOLUÇÃO DA FÍSICA, Edição Livros do Brasil
- [10] Eisberg, R. e Lerner, L. – FÍSICA: Fundamentos e Aplicações, VOL. IV, McGraw-Hill, 1983
- [11] Goldstein, H. – CLASSICAL MECHANICS, Addison-Wesley Publishing Company, 1980
- [12] Liustérnik, L. – LÍNEAS MÁS CORTAS - PROBLEMAS DE VARIACIONES, Editorial Mir, 1979
- [13] Longais, M. – THEORETICAL CONCEPTS IN PHYSICS, Cambridge University Press, 1994
- [14] Marion, J. and Thornton, S. – CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS, Saunders College Publishing, 1995
- [15] Marsden, J. – LECTURES ON MECHANICS, Cambridge University Press, 1992

## Bibliografia

- [16] Nussenzveig, H. – CURSO DE FÍSICA BÁSICA, 4, Ótica, Relatividade, Física Quântica, Edgar Blücher, 1998
- [17] Palmer, S. B. e Rogalski, M. S. – ADVANCED UNIVERSITY PHYSICS, Gordon and Breach Science Publishers, 1996
- [18] Park, D. – CLASSICAL DYNAMICS AND ITS QUANTUM ANALOGUE, Springer-Verlag, 1990
- [19] Physical Science Study Committee – FÍSICA, Editorial Reverté, 1966
- [20] Resnick, R. e Halliday, D. – FÍSICA, Compañía Editorial Continental S. A., 1974
- [21] Rogalski, M. S. e S. Palmer, S. B. – QUANTUM PHYSICS, Gordon and Breach Science Publishers, 1999
- [22] Rogalski, M. S. – APONTAMENTOS DE FÍSICA GERAL I, Fac. de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, 2001
- [23] Serway, R. and Beichner, R. – PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGENIERS – WITH MODERN PHYSICS, Saunders College Publishing, 2000
- [24] Whelan, P. M. and Hodgson, M. J. – ESSENTIAL PRINCIPLES OF PHYSICS, John Murray, 1978

## ARTIGOS E COMUNICAÇÕES

- [25] Alsing, P. – THE OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY FOR STATIONARY METRICS IN GENERAL RELATIVITY, *American Journal of Physics*, **66**, 779-790, 1998
- [26] Ambrosini, D., Ponticiello, A., Spagnolo, G., Borghi, R. e Gori, F. – BOUNCING LIGHT BEAMS AND THE AMILTONIAN ANALOGY, *European Journal of Physics*, **18**, 284-289, 1997
- [27] Bauman, R. – WAVE PROPAGATION, *The Physics Teacher*, **39**, 545-551, 2001
- [28] Bridges, R. – THE SPIN OF A BOUNCING “SUPERBALL”, *Physics Education*, **26**, 351-354, 1991
- [29] Cross, R. – MEASUREMENTS OF THE HORIZONTAL COEFFICIENT OF RESTITUTION FOR A SUPERBALL AND A TENNIS BALL, *American Journal of Physics*, **70**, 482-489, 2002
- [30] Evans, J., Nandi, K. e Islam, A. – THE OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY IN GENERAL RELATIVITY: NEW METHODS FOR THE PATHS OF LIGHT AND OF THE PLANETS, *American Journal of Physics*, **64**, 1404-1414, 1996
- [31] Erlichson, H. – JOHANN BERNOULLI’S BRACHISTOCCHRONE SOLUTION USING FERMAT’S PRINCIPLE OF LEAST TIME, *European Journal of Physics*, **20**, 299-304, 1999
- [32] Flores, I. – EL TORTUOSO NACIMIENTO DE UNA TEORÍA FÍSICA, <http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/conciencia/ciencia/schrodinger/htm/2tortuoso.htm>
- [33] Ganem, J. – A BEHAVIORAL DEMONSTRATION OF FERMAT’S PRINCIPLE, *The Physics Teacher*, **36**, 76-78, 1998

## Bibliografia

- [34] Grayson, D. – MANY RAYS ARE BETTER THEN TWO, *The Physics Teacher*, **33**, 42-44, 1995
- [35] Hierrezuelo, J., Carnero, C. – SLIDING AND ROLLING: THE PHYSICS OF A ROLLING BALL, *Physics Education*, **30**, 177-181, 1995
- [36] Khan, S. – ANALOGIES BETWEEN LIGHT OPTICS AND CHARGED PARTICLE OPTICS, *ICFA Beam Dynamics Newsletter*, **27**, 42-48, 2002
- [37] Kimball, J., Story, H. – FERMAT'S PRINCIPLE, HUYGENS' PRINCIPLE, HAMILTON'S OPTICS AND SAILING STRATEGY, *European Journal of Physics*, **19**, 15-24, 1998
- [38] Markland, M., Anderson, D., Cattani, F., Lisak, M. e Lundgren, L. – FERMAT'S PRINCIPLE AND THE VARIATIONAL ANALYSIS OF AN OPTICAL MODEL FOR LIGHT PROPAGATION EXHIBITING A CRITICAL RADIUS, *American Journal of Physics*, **70**, 680-683, 2002
- [39] Martins, F. R. e Rogalski, M. S. – DINÂMICA DAS PARTÍCULAS E PROPAGAÇÃO DA LUZ, 12º Encontro Ibérico Para o Ensino da Física, 140-142, 2002
- [40] Newburg, R., Rueckner, W., Peidle, J. e Goodle, D. – USING THE SMALL-ANGLE APPROXIMATION TO MESURE THE INDEX OF REFRACTION OF WATER, *The Physics TEACHER*, **38**, 478-479, 2000
- [41] O'Connor, J. e Robertson, E. – THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Brachistochrone.html>, 2002
- [42] Phelps III, F., Phelps IV, F, Zorn, B. e Gormley, J. – AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE BRACHISTOCHRONE, *European Journal of Physics*, **3**, 1-4, 1982

## Bibliografia

- [43] Raymond, D. – FERMAT'S PRINCIPLE,  
<http://www.physics.nmt.edu/~raymond/classes/ph13xbook/node36.html>
- [44] Salinas, J. e Sandoval, J. – GEOMETRICAL OPTICS AND VISUAL PERCEPTION, *The Physics Teacher*, **39**, 420-423, 2001
- [45] Taylor, E. – INTRODUCING NEWTONIAN MECHANICS WITH THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, <http://cosmo.fis.fc.ul.pt/~Fisica2002/TaylorEvora.pdf>

**ANEXO – A**

**O PROBLEMA DA**

**BRAQUISTOCRÓNICA**

## O Problema da Braquistocrónica

Em Junho de 1696 Johann Bernoulli publicou na *Acta Eruditorum* um desafio aos físicos e matemáticos da Europa:

“Qual a forma da curva, estabelecida entre dois quaisquer pontos de um plano vertical, que uma partícula deve seguir para, por acção da gravidade e sem atrito, levar o menor tempo entre os pontos mais alto e mais baixo.”

Vários autores referem que esse problema já tinha sido discutido por Galileo cerca de 60 anos antes, concluindo contudo que este tinha chegado a uma resposta errada, ao considerar ser a solução um arco de circunferência.

Neste ponto é importante distinguir entre os problemas de Galileo e de Bernoulli. Na questão colocada por Galileo na obra “Duas Novas Ciências” (Scholium à proposição 36 do Terceiro Dia) estamos limitados a um plano no qual os pontos extremos se encontram num arco de circunferência não maior que um quadrante.

É então procurada qual a sequência de planos que permitirá à partícula deslizar sem atrito no mínimo tempo desde o ponto superior até ao inferior, admitindo que a transição entre eles ocorre suavemente e sem perdas de tempo. A resposta à questão é a sequência infinita de planos estendendo-se do ponto superior ao inferior, i.e., o próprio arco de circunferência.

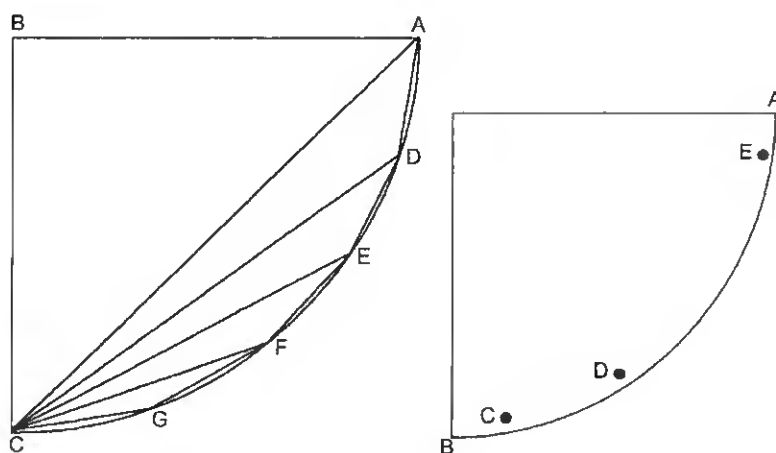


Figura A.1. Diagramas de Galileo

## O Problema da Braquistocrónica

A questão volta a ser mencionada no “Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo” onde, citado por Erlichson [31] Galileo diz:

“O movimento dos corpos em queda ao longo dos arcos do quadrante AB é feito em menor tempo que o realizado ao longo das cordas dos mesmos arcos, pelo que o mais rápido movimento, feito no menor tempo por um móvel indo do ponto A ao ponto B, será percorrendo a circunferência ADB e não a linha recta AB, apesar dessa ser a mais curta das linhas que se podem desenhar entre A e B.”

O problema colocado por Bernoulli é diferente, já que nele não existe qualquer restrição ao tipo de curva.

Na altura em que este foi colocado, já Newton tinha publicado a solução para um problema desse tipo, ao determinar qual a forma da superfície de revolução que se podia mover através de um fluido com menor resistência.

Todavia, podemos considerar 29 de Janeiro de 1697 como o dia do nascimento oficial do cálculo das variações. Uma versão do ocorrido é relatada por Eric Bell no livro “Man of Mathematics”, citado por Phelps et al. [42].

“Depois do problema (da braquistocrónica) ter desconcertado os matemáticos da Europa por seis meses, foi novamente proposto e Newton soube dele pela primeira vez no dia 29 de Janeiro de 1697, quando um amigo lho relatou... Depois do almoço ele tinha o problema resolvido e, no dia seguinte, comunicou a solução à Royal Society, sob anonimato. Mas, apesar de todas as suas precauções, não conseguiu esconder a sua identidade... Ao ver a sua solução Bernoulli exclamou: “Ah! I recognise the lion by his paw (...reconheço o leão pela sua pata).”



## O Problema da Braquistocrónica

de onde resulta  $\text{sen } r = kv$ , isto é, o seno do ângulo de refacção é directamente proporcional à velocidade da luz no meio. Em relação ao triângulo infinitesimal  $Mmn$  no diagrama de Bernoulli, temos que:

$$nm = dx \quad Mn = dy \quad Mm = dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Substituindo na equação resultante da lei da reflexão, virá:

$$\text{sen } r = kv \Leftrightarrow \frac{dx}{dz} = kv$$

$$dx = kv dz = kv \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Se substituirmos a constante  $k$  pela constante de Bernoulli  $1/a$  e colocarmos  $dx$  em evidência, obtemos:

$$dx = \frac{v dy}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

que constitui a equação diferencial para a curva  $ABM$  de menor tempo.

Já Galileo tinha determinado que o quadrado da velocidade de um ponto material em queda é directamente proporcional à altura da mesma:

$$v^2 = \text{constante} \times y$$

onde  $v$  é a velocidade e  $y$  altura de queda. Se designarmos por  $y = AC$  a altura de queda e por  $x = CM$  a distancia horizontal percorrida, então  $x$  e  $y$  são as coordenadas rectangulares da partícula no ponto  $M$  em relação à origem  $A$ .

Bernoulli designou a constante por  $a$  e substituiu  $v^2 = ay$  na sua equação diferencial “óptica”. Daí resulta:

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{a-y}}$$

Depois, expandiu a raiz quadrada da seguinte forma:

## O Problema da Braquistocrónica

$$\sqrt{\frac{y}{a-y}} = \frac{1}{2} \frac{a dy}{\sqrt{ay-y^2}} - \frac{1}{2} \frac{a dy - 2y dy}{\sqrt{ay-y^2}}$$

Integrando, obtemos:

$$x = a \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{ay-y^2}$$

Para demonstrar que esta equação corresponde a uma cicloide, pode-se utilizar a substituição trigonométrica

$$y = \frac{1}{2} a (1 - \cos \theta)$$

Isto leva a:

$$x = a \operatorname{sen}^{-1} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta \right) - a \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos \theta)}$$

$$x = \frac{1}{2} a \theta - \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \theta$$

Se fizermos

$$\frac{1}{2} a = r$$

obtemos:

$$x = r \theta - r \operatorname{sen} \theta$$

Este resultado, conjugado com

$$y = r (1 - \cos \theta)$$

permite-nos reconhecer a braquistocrónica de Bernoulli como uma cicloide gerada por uma roda de raio  $r$  (ou diâmetro GK) que rola para a direita, sem escorregar, ao longo da linha FAG do diagrama da Figura A.2.

Bernoulli ficou impressionado com o facto da solução para o seu problema ser a mesma que a cicloide de Huygens. Este estava interessado em construir um relógio per-

## O Problema da Braquistocrónica

feito, todavia era do seu conhecimento que o tempo que um pêndulo leva a atingir a posição mais baixa da sua trajectória, descrevendo um arco de circunferência, é função do comprimento desse arco. Só no limite da aproximação para pequenos ângulos um pêndulo pode ser considerado isócrono. Huygens determinou que a curva ao longo da qual um pêndulo teria de descer para ser rigorosamente isócrono era uma cicloide.

A identidade entre a tautocrónica de Huygens e a sua braquistocrónica foi encarada por Bernoulli como um exemplo da simplicidade da natureza, tendo terminado a sua solução para o problema da braquistocrónica com as seguintes palavras [41]:

“...A natureza tende sempre a actuar da forma mais simples, pelo que aqui temos uma curva a servir duas funções diferentes enquanto que, normalmente, deveríamos necessitar de duas curvas...”

