Análise Matemática II

Bioquímica/Química/Biotecnologia

Ana Conceição

2011/2012

aconcei@ualg.pt

Programa:

1. Cálculo Integral

   Integral impróprio de 1ª espécie

   Integral impróprio de 2ª espécie

   Integral impróprio misto

2. Séries

   2.1. Séries numéricas

   2.2. Séries de funções

Bibliografia:

1. Cálculo Diferencial e Integral, Vols I e II - N. Piskounov - Lopes da Silva, 1978

2. Fichas de exercícios da UC - Ana Conceição (2011/2012)

3. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B Demidóvich - Mir, 1977

4. Slides das aulas teóricas - Ana Conceição (2011/2012)

1. Cálculo Integral

★ *Integral impróprio de 1ª espécie*

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, +\infty[$.
A função

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)\, dx, \quad t \geq a$$

é uma função contínua.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\exists \lim_{t \to +\infty} \Phi(t)?$$

Definição: Quando

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t)$$

existe e é finito, chama-se integral impróprio de 1ª espécie, ou com limites infinitos, e denota-se por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

— — — — — — —

Exemplos: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

Por definição,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

se o limite existe e é finito. Diz-se que o integral impróprio converge.

— — — — — — —

Se $\displaystyle\int_a^t f(x)\ \ dx$ não tem limite finito quando $t \to +\infty$, diz-se que o "integral impróprio" diverge.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $\,]-\infty, b]$.
A função

$$\Phi(t) = \int_t^b f(x)\, dx, \quad t \leq b$$

é uma função contínua.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\exists \lim_{t \to -\infty} \Phi(t)?$$

Definição: Quando

$$\lim_{t \to -\infty} \Phi(t)$$

existe e é finito, chama-se integral impróprio de 1ª espécie, ou com limites infinitos, e denota-se por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx.$$

— — — — — — —

Exemplos: $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\, dx$

Por definição,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\, dx,$$

se o limite existe e é finito. Diz-se que o integral impróprio converge.

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

Se $\displaystyle\int_{t}^{b} f(x)\ \ dx$ não tem limite finito quando $t \longrightarrow -\infty$, diz-se que o "integral impróprio" diverge.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \underbrace{=}_{?} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,\ \forall c \in \mathbb{R}$$

Esta última igualdade significa que se cada um dos integrais à direita converge, então o integral à esquerda converge.

Basta que um dos integrais à direita da igualdade não seja convergente para que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ seja divergente.

◇ Sentido geométrico do integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \quad f(x) \geq 0,$$

quando converge:

▷ Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ representa a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo OX e as retas $x = a$ e $x = b$, é natural definir $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ como a área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$, a reta $x = a$ e o eixo OX.

Integral de Dirichlet de 1ª espécie

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha \leq 1}$ diverge

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha > 1}$ converge $\left(= \dfrac{1}{\alpha - 1}\right)$

— — — — — — —

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, a > 0} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, b < 0} \quad \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$$

Teorema de comparação (1ª espécie)

Sejam f e g funções integráveis em $[a, x]$, tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall\, x \geq a$.

i) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$.

ii) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge.

— — — — — — —

Teoremas análogos para $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} h(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx$.

Critério de comparação (1ª espécie)

Sejam f e g funções positivas e integráveis em $[a, x]$, $\forall\, x \geq a$. Seja

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$i)$ Se $k \neq 0, \infty$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

têm a mesma natureza.

$ii)$ Se $\quad k = 0 \quad$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$iii)$ Se $\quad k = +\infty \quad$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

— — — — — — —

Critérios análogos para $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} h(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$.

Teorema (1ª espécie): Se o integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, então converge o integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

— — — — — — —

Diz-se que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é **absolutamente convergente**.

Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge condicionalmente.

— — — — — — —

Teoremas e conceitos análogos para $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} h(x)dx$ e para $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$.

★ *Integral impróprio de 2ª espécie*

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b[$, tendo uma descontinuidade no ponto $x = b$, $b > a$.

A função

$$\Phi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx, \quad 0 < \varepsilon < b - a$$

é uma função contínua.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Phi(\varepsilon)?$$

Definição: Quando

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Phi(\varepsilon)$$

existe e é finito, chama-se **integral impróprio de 2ª espécie**, ou integral de uma função descontínua, e denota-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

— — — — — — —

Exemplos: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\, dx$

Por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

se o limite existe e é finito. Diz-se que o integral impróprio converge.

— — — — — — —

Se $\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx$ não tem limite finito quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, diz-se que o "integral impróprio" diverge.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $]a, b]$, tendo uma descontinuidade no ponto $x = a$, $a < b$.

A função

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx, \quad 0 < \varepsilon < b - a$$

é uma função contínua.

— — — — — — —

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Phi(\varepsilon)?$$

Definição: Quando

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Phi(\varepsilon)$$

existe e é finito, chama-se integral impróprio de 2ª espécie, ou integral de uma função descontínua, e denota-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

— — — — — — —

Exemplos: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

Por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

se o limite existe e é finito. Diz-se que o integral impróprio converge.

— — — — — — —

Se $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\ dx$ não tem limite finito quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, diz-se que o "integral impróprio" diverge.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, exceto num ponto $c \in]a, b[$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \underbrace{=}_{?} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ \forall c \in]a, b[$$

Esta última igualdade significa que se cada um dos integrais à direita converge, então o integral à esquerda converge.

Basta que um dos integrais à direita da igualdade não seja convergente para que $\int_a^b f(x)\,dx$ seja divergente.

◇ Sentido geométrico do integral impróprio de 2ª espécie

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad f(x) \geq 0,$$

quando converge:

▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo OX.

Integral de Dirichlet de 2ª espécie

$$\boxed{\int_c^b \frac{dx}{(x-c)^\alpha}, \qquad \alpha > 0}$$

$$\boxed{\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha}, \qquad \alpha > 0}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha \geq 1}$ diverge

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha < 1}$ converge

$$\left(= \frac{(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad\qquad = \frac{(c-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

Teorema de comparação (2ª espécie)

Sejam f e g funções descontínuas em $x = c$ e contínuas em $[a, c[$, tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, c[$.

i) Se $\int_a^c g(x)\ dx$ converge, então $\int_a^c f(x)\ dx$ converge e $\int_a^c f(x)\, dx \leq \int_a^c g(x)\, dx$.

ii) Se $\int_a^c f(x)\ dx$ diverge, então $\int_a^c g(x)\ dx$ diverge.

— — — — — — —

Teoremas análogos para $\int_c^b h(x)\, dx$ e $\int_a^b h(x)\, dx$.

Critério de comparação (2ª espécie)

Sejam f e g funções positivas, contínuas em $[a, c[$ e descontínuas em $x = c$. Seja

$$k = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$i)$ Se $k \neq 0, \infty$, então

$$\int_a^c f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^c g(x)\, dx$$

têm a mesma natureza.

$ii)$ Se $k = 0$ e $\displaystyle\int_a^c g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ converge.

$iii)$ Se $k = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^c g(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ diverge.

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

Critérios análogos para $\displaystyle\int_c^b h(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx$.

Teorema (2ª espécie): Se o integral $\int_a^c |f(x)|\,dx$ converge, então converge o integral $\int_a^c f(x)\,dx$.

— — — — — — —

Diz-se que $\int_a^c f(x)\;dx$ é absolutamente convergente.

Se $\displaystyle\int_a^c f(x)\ \ dx$ converge e $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\ \ dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^c f(x)\, dx$ converge condicionalmente.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Teoremas e conceitos análogos para $\displaystyle\int_c^b h(x)dx$ e para $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$.

★ *Integral impróprio misto*

Seja $f(x)$ uma função contínua em $]a, +\infty[$, tendo uma descontinuidade no ponto $x = a,\ a \in \mathbb{R}$.

O integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, de 1ª e de 2ª espécie, denomina-se integral impróprio misto.

Neste caso o integral é interpretado (caso seja convergente) como

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{a+\varepsilon}^{t} f(x)\,dx.$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \underbrace{=}_{?} \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^{+\infty} f(x)\,dx,\ \forall d > a$$

Esta última igualdade significa que se cada um dos integrais à direita converge, então o integral à esquerda converge.

Basta que um dos integrais à direita da igualdade não seja convergente para que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ seja divergente.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $]-\infty,\ b[$, tendo uma descontinuidade no ponto $x=b,\ b\in\mathbb{R}$.

O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, de 1ª e de 2ª espécie, denomina-se integral impróprio misto.

Neste caso o integral é interpretado (caso seja convergente) como

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{t}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \underbrace{=}_{?} \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{b} f(x)\,dx,\ \forall d < b$$

Esta última igualdade significa que se cada um dos integrais à direita converge, então o integral à esquerda converge.

Basta que um dos integrais à direita da igualdade não seja convergente para que $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ seja divergente.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, tendo uma descontinuidade no ponto $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, de 1ª e de 2ª espécie, denomina-se integral impróprio misto.

Neste caso o integral é interpretado (caso seja convergente) como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

★ *Integrais Eulerianos*

◇ `Função gama`

Lema: O integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,dt$$

converge para qualquer $a > 0$.

— — — — — — —

Nota:

$$\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,dt \overbrace{=}^{?} \int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,dt$$

Seja

$$\boxed{\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt, \quad a > 0.}$$

Definição: A função $\Gamma(a)$, de variável a, chama-se **função gama**.

– – – – – – –

Nota:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \cdots = 1.$$

Teorema:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)} \quad \hookrightarrow \quad \text{fórmula de recorrência}$$

— — — — — — —

Corolário:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}$$

Fórmula de Euler

$$\boxed{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\,\pi)},\ 0<\alpha<1} \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

— — — — — — —

$$\boxed{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}}$$

◇ **Função beta**

Lema: O integral impróprio

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

converge para quaisquer $x > 0$ e $y > 0$.

— — — — — — —

Nota: Se $x \geq 1$ e $y \geq 1$, a função

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

é contínua em $[0, 1]$ e, portanto, o integral é definido.

Seja

$$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad x,\, y > 0.}$$

Definição: A função $B(x,y)$, de variáveis x e y, chama-se função beta.

— — — — — — —

$\boxed{B(x,y) = B(y,x)}$ $\hookrightarrow$ propriedade de simetria

Relação da função beta com a função gama

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}} \hookrightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

— — — — — — —

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\,\pi)}, \;\; 0 < \alpha < 1}$$

2. Séries

2.1. Séries numéricas

Seja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sucessão numérica.

Definição: A expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

chama-se série numérica, sendo a_n o seu termo geral e $a_0, \ a_1, \ a_2, \ \cdots$ os termos da série.

— — — — — — —

$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \hookrightarrow$ *sucessão das somas parciais*

Por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

se o limite existe e é finito. Diz-se que a série numérica converge, sendo

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

a soma da série.

— — — — — — —

Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não é finito, diz-se que a série numérica diverge.

Proposição: Acrescentar, ou retirar, um nº finito de termos a uma série numérica não altera a natureza da mesma.

— — — — — — —

Teorema: Se $S^A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $S^B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e c é uma constante arbitrária, então

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c\, S^A$$

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = S^A + S^B$$

Série geométrica

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n} \qquad c,\ q \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$

— — — — — — —

$\hookrightarrow$ $\boxed{|q| < 1}$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n$ converge e $\boxed{S = \dfrac{c}{1-q}}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{|q| \geq 1}$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n$ diverge

Série de Mengoli

Definição: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chama-se **série de Mengoli** se

$$\boxed{a_n = b_n - b_{n+k},}\ , \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{k \in \mathbb{N}.}$$

— — — — — — —

Teorema: A série de Mengoli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** e a sua soma é $\underbrace{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}_{k \text{ termos}}$.

Condição necessária de convergência de uma série

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

— — — — — — —

Critério integral de convergência de uma série

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0,$ com $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ decrescente e $f(x)$ uma função contínua em $[1, +\infty[$ tal que $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \cdots,\ f(n) = a_n,\ \cdots.$ Então, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergem ou divergem simultaneamente.

Série de Dirichlet

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha > 1}$ converge

$\hookrightarrow$ $\boxed{\alpha \leq 1}$ diverge

— — — — — — —

Nota: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ série harmónica

Teorema de comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Critério de comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não negativos.

Seja

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

i) Se $k \neq 0, \infty$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

têm a mesma natureza.

$ii)$ Se $k = 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$iii)$ Se $k = \infty$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Critério de D'Alembert

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n \geq 0$, e

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

i) Se $k < 1$, a série converge.

ii) Se $k \geq 1^+$, série diverge.

— — — — — — —

Nota: $k = 1^+$ quando $k = 1$ e a partir de certa ordem se tem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Critério de Cauchy

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0$, e

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

$i)$ Se $k < 1$, a série converge.

$ii)$ Se $k \geq 1^+$, série diverge.

— — — — — — —

Nota: $k = 1^+$ quando $k = 1$ e a partir de certa ordem se tem $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

Definição: A série do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0,$$

chama-se **série alternada**.

— — — — — — —

Teorema de Leibniz: Uma série alternada com $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ estritamente decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, converge.

Definição: A série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente diz-se absolutamente convergente.

— — — — — — —

Definição: Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se condicionalmente convergente.

— — — — — — —

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2.2. Séries de funções

Definição: Chama-se série de funções à série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots ,$$

onde $f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots$ são funções de x.

– – – – – – –

Definição: Chama-se domínio de convergência de uma série de funções ao conjunto dos valores de x para os quais a série converge.

Definição: Chama-se série de potências à série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots ,$$

onde $a_0, \ a_1, \ \cdots , \ a_n, \ \cdots$ são os coeficientes da série.

$- \ - \ - \ - \ - \ - \ -$

Nota: Para $\boxed{x = x_0}$ a série de potências é sempre convergente.

Seja $R \geq 0$ tal que

$\diamond$ para x : $|x - x_0| < R$ a série de potências converge absolutamente

$\diamond$ para x : $|x - x_0| > R$ a série de potências diverge.

Definição: R chama-se raio de convergência da série de potências e $I =]x_0 - R,\ x_0 + R[$ chama-se intervalo de convergência da série.

— — — — — — —

Nota: A convergência da série nos pontos $x_0 - R$ e $x_0 + R$ deve ser objeto de um estudo especial.

Nota: Existem séries de potências com $R = 0$ e séries de potências com $R = \infty$.

— — — — — — —

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Série de Taylor (MacLaurin para $x_0 = 0$)

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}}$$

— — — — — — —

Nota: Cada série de potências é uma série de Taylor para a sua soma (no seu intervalo de convergência):

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}}$$