

SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA AVALIAÇÃO DA FIABILIDADE DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO



R.C. LARANJA
Assistente 2º triénio
EST - UAlg
Faro



J.M.C. ESTÊVÃO
Eq. Prof. Adjunto
EST - UAlg
Faro

SUMÁRIO

Neste trabalho apresenta-se uma metodologia para a avaliação da fiabilidade de estruturas de betão armado. A metodologia recorre a uma simulação numérica pelo método de Monte Carlo, com adopção de uma técnica de amostragem estratificada de redução de variância, vulgarmente designada por hipercubo latino, para a obtenção da probabilidade de não ser excedido o estado limite último em causa. Aplicou-se a metodologia a um caso prático.

1. INTRODUÇÃO

A análise da fiabilidade de estruturas pode ser realizada por diversos métodos, e visa a obtenção da probabilidade de não ser excedido um determinado estado limite. Os diversos métodos de análise são, usualmente, divididos em três grupos, consoante o tipo da formulação do problema que é adoptado [1,2,3]:

- Nível 1 - Semi-probabilístico. Neste nível de análise, verifica-se a fiabilidade desejada recorrendo a expressões determinísticas, vagamente relacionadas com uma probabilidade de não excedência. A variabilidade das acções e das características resistentes dos materiais é tida em conta através de valores nominais ou característicos associados a factores parciais de segurança. Neste nível de análise encontram-se as verificações de segurança das regulamentações nacionais e internacionais, nomeadamente o RSA [4];

- Nível 2 - Probabilístico aproximado. A análise da fiabilidade estrutural é realizada com base num índice de fiabilidade que corresponde ao limite da probabilidade de não ser excedido o estado limite em causa;
- Nível 3 - Probabilístico puro. Os métodos deste nível têm em conta a variabilidade de todas as variáveis envolvidas, em simultâneo, sendo a probabilidade de não ser excedido um estado limite, determinada analiticamente ou usando técnicas de simulação numérica.

Este trabalho visa ilustrar a utilização da simulação numérica na realização de análises de fiabilidade de nível 3 e comparar os resultados deste tipo de análise com os resultados obtidos por uma análise de nível 1, através de um exemplo.

2. ANÁLISE DA FIABILIDADE DE NÍVEL 3

2.1. Definição de fiabilidade

A fiabilidade de uma estrutura ($1-P_f$), em relação a um estado limite, pode ser definida como sendo a probabilidade de não ser excedido esse estado limite. A função que define esse estado limite é uma relação funcional dada por

$$R - S = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

em que R é a resistência da estrutura, S é a resposta da estrutura às acções e X_i ($i=1,2,\dots,n$) são n variáveis aleatórias que intervêm na definição do estado limite. A região em que se verifica a segurança do sistema, irá corresponder a $R - S > 0$. O estado limite será definido pela função limite $R - S = 0$, como se apresenta na figura 1 [1].

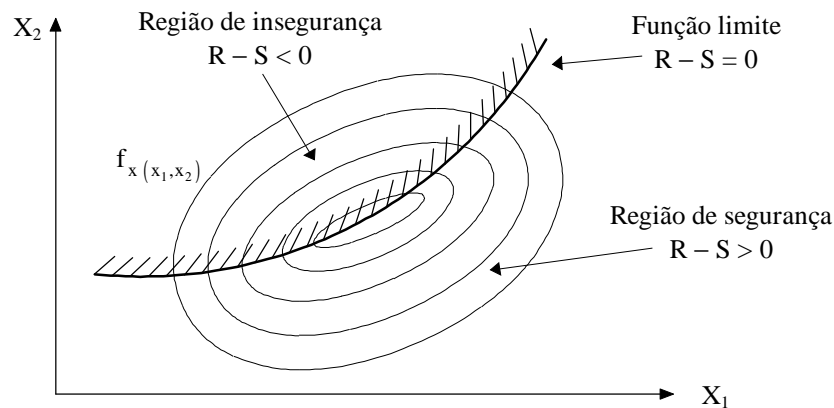


Figura 1: Representação da função limite.

A probabilidade (P_f) de ser excedido o estado limite, é obtida por resolução do integral da função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias, em que

$$P_f = \iint \dots \int f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

2.2. Resistência

A definição de modelos probabilísticos para cálculo da resistência de estruturas de betão armado deve considerar as variabilidades das propriedades mecânicas dos materiais, das dimensões dos elementos estruturais, da área e localização das armaduras e, em análises mais complexas, dos parâmetros relativos à durabilidade e efeitos diferidos nos materiais.

No que diz respeito às propriedades mecânicas dos materiais, o betão é mais difícil de caracterizar, por apresentar maior dispersão de valores. Em relação à resistência à compressão, a dispersão dos resultados deve-se a um conjunto de factores tais como a variação dos materiais constituintes, sobretudo o cimento e os inertes, a relação água-cimento, o processo de fabrico e transporte, o controlo de qualidade, a cura, entre outros.

Outra dificuldade na caracterização na resistência à compressão do betão é o facto desta apresentar valores diferentes nos ensaios convencionais (resistência convencional), daqueles que se observam nas estruturas reais, nas condições de serviço (resistência efectiva).

A variabilidade da resistência convencional depende directamente do controlo de qualidade que é realizado durante a betonagem e colocação em obra. Existem numerosos estudos que caracterizam esta variabilidade. Apresentam-se na tabela seguinte, como exemplo, os resultados de um desses estudos [5].

Tabela 1 - Variabilidade da resistência convencional do betão (qualidade média e alta).

f_{ck} (MPa) especificado	Desvio Padrão (MPa)	Coefficiente de variação (%)
25	2.6 - 3.5	9 - 11
30	4.1	11
35	3.0 - 3.9	7 - 11
40	3.3 - 4.2	6 - 7

Alguns autores sugerem ainda relações entre os valores da resistência efectiva e convencional entre 0.95 para betões com $f_{ck}=20$ MPa a 0.85 para $f_{ck}=50$ MPa.

Em relação ao tipo de distribuição, a maioria dos autores sugere a lei normal como aquela que melhor representa a resistência do betão à compressão, sendo no entanto, no caso dos betões pobres, a distribuição lognormal mais adequada.

Também para a variabilidade do comportamento mecânico das armaduras a maioria dos autores e normas regulamentares sugerem a distribuição normal como a mais adequada. Estudos recentes [6], integrando amostras recolhidas em vários países europeus, incluindo Portugal, conduziram a coeficientes de variação relativamente baixos, entre 4.7% e 5.2%.

2.3. Acções

A caracterização da variabilidade das acções que afectam uma estrutura é, em geral, complexa, e em três vertentes distintas: no valor da sua intensidade e na sua distribuição no tempo e no espaço. Nos modelos probabilísticos que as definem é, assim, necessário adoptar hipóteses simplificativas que abranjam as vertentes referidas.

Em relação às acções permanentes, e, nomeadamente, ao peso próprio dos elementos estruturais, quando se procede a análises de nível 3, é usual que a sua variabilidade seja expressa em função de dois parâmetros: a variabilidade da geometria dos elementos estruturais e do peso volúmico do betão. Para outros tipos de cargas permanentes (revestimentos, paredes divisórias, força do pré-esforço, por exemplo), é possível definir modelos probabilísticos a partir de resultados obtidos em campanhas experimentais. Para este tipo de acções, e dadas as pequenas variabilidades que, em geral, apresentam, é normalmente adoptado como valor médio o valor característico definido regulamentarmente, e pequenos coeficientes de variação. Para a força do pré-esforço, por exemplo, o CEB [7] sugere coeficientes de variação entre 3% a 8%, para idades iniciais, e 6% a 12%, após as perdas.

Relativamente às acções variáveis, para além das acções sísmicas, as sobrecargas de utilização assumem grande importância no conjunto das variáveis intervenientes na verificação da segurança das estruturas, nomeadamente em edifícios. Para este tipo de estruturas, a modelação das sobrecargas tem em conta as seguintes hipóteses de base [8]:

- a variabilidade das sobrecargas no tempo e no espaço são independentes,
- as sobrecargas discretas são definidas por uma sobrecarga equivalente uniformemente distribuída. Desta forma, define-se o efeito da sobrecarga no pavimento e não o seu valor nominal,
- a variabilidade temporal é feita através da consideração de duas componentes; a componente quase permanente que representa o valor médio da flutuação da sobrecarga entre as mudanças de utilização e considera os equipamentos pesados, mobiliário e o peso das pessoas que frequentemente se encontram presentes; e a componente intermitente que representa as sobrecargas especiais, que actuam pontualmente.

Em cada instante, o valor total da sobrecarga será a soma das duas componentes como se ilustra na figura 2 (adaptada de [9]).

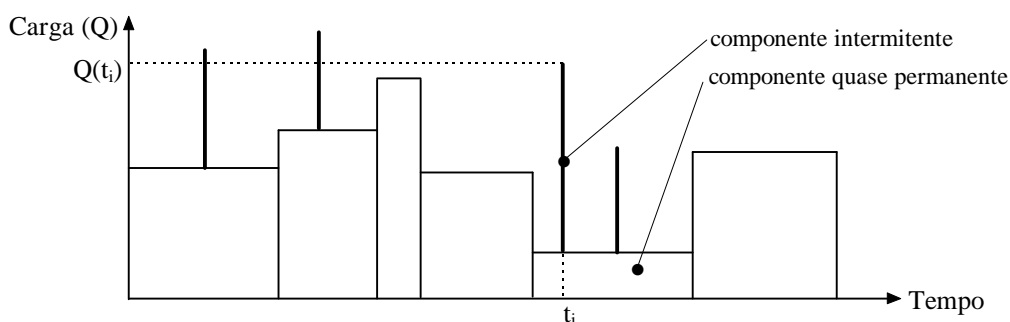


Figura 2: Modelação das sobrecargas; componentes quase permanente e intermitente.

O valor relativo de cada componente varia em função da utilização dada ao edifício (habitação, escritórios, hospitais, escolas, entre outros). Para edifícios de escritórios, por exemplo, cujos compartimentos tenham áreas médias de cerca de 20 m², Chalk e Corotis [9] sugerem que a componente quase permanente seja considerada com um valor médio de 0.52 kN/m² e um desvio padrão de 0.28 kN/m², ao passo que para escolas os valores a considerar devem ser 0.57 kN/m² e 0.13 kN/m², respectivamente.

2.4. Simulação numérica

A resolução da expressão (2), para problemas correntes, torna-se muito complicada, quer por via analítica, quer recorrendo a técnicas de integração numérica. A simulação numérica pelo método de Monte Carlo é uma forma alternativa de resolver o problema, tornando-se, progressivamente, possível de aplicar a complexos sistemas estruturais, com elevado número de variáveis aleatórias, em virtude do desenvolvimento das tecnologias informáticas.

O método de Monte Carlo é a técnica de simulação numérica mais utilizada em problemas envolvendo a análise da fiabilidade estrutural [10]. O método consiste na geração aleatória de valores das variáveis aleatórias, consistente com as respectivas funções de densidade de probabilidade, obtendo-se, em seguida, os resultados estatísticos da resistência e resposta da estrutura às acções. Na sua formulação mais simples (simulação directa), a probabilidade P_f é obtida por contagem do número de vezes que o estado limite é excedido (N_f), de entre os N ciclos de simulação.

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (3)$$

Este tipo de simulação obriga a um número muito elevado de ciclos de simulação, quando o sistema estrutural apresenta baixas probabilidades de excedência, exigindo um grande esforço computacional, muitas vezes impraticável em sistemas estruturais correntes.

A melhoria da eficiência das simulações numéricas, pelo método de Monte Carlo, é feita à base da redução da variância dos resultados das simulações, o que tem como consequência a diminuição do número de ciclos necessário.

Uma das técnicas de redução de variância mais simples de implementar, e com elevada eficácia, é a técnica de amostragem estratificada denominada por hipercubo latino [11]. Esta técnica garante que as amostras utilizadas na simulação cobrem todo o domínio do problema, através da divisão das funções de densidade de probabilidade, de cada variável aleatória, em intervalos de igual probabilidade, como se ilustra na figura 3.

Em sistemas estruturais complexos, cuja análise exige elevado esforço computacional, o número de amostras pode ser reduzido, com igual precisão de resultados, recorrendo a uma técnica de redução da correlação estatística entre as colunas das tabelas de simulação, geradas pseudo-aleatoriamente [12].

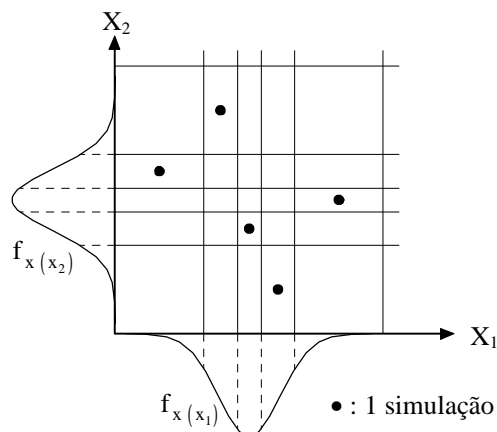


Figura 3: Amostragem de acordo com o método do hipercubo latino

3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A metodologia apresentada, foi aplicada, a título de exemplo, na verificação da segurança de uma laje de betão armado (C20/25 e A400), em consola, com 15 cm de espessura e 2 m de comprimento, valores possíveis em estruturas de edifícios.

3.1. Dimensionamento da consola (análise de nível 1)

Para efeito de dimensionamento foram considerados os valores regulamentares do RSA, assumindo-se, por simplicidade, que as acções permanentes se resumiam ao peso próprio da estrutura $g = 3.75 \text{ kN/m}^2$, e as acções variáveis a uma carga $q = 2 \text{ kN/m}^2$ ($\gamma_g = \gamma_q = 1.5$).

O momento de cálculo é igual a $M_{sd} = 17.25 \text{ kNm/m}$, pelo que a armadura necessária será igual a $4.22 \text{ cm}^2/\text{m}$, com uma altura útil de 12.5 cm.

3.2. Análise da fiabilidade estrutural

Na quantificação da fiabilidade estrutural da estrutura dimensionada no ponto anterior, recorreu-se a uma simulação numérica pelo método de Monte Carlo, usando a técnica de redução de variância designada por hipercubo latino, actualizada com a técnica de redução da correlação estatística entre as colunas, na primeira tabela de simulação.

Do ponto de vista computacional, a divisão das distribuições de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias em intervalos muito pequenos torna-se problemática, dada a elevada dimensão das tabelas de amostragem necessárias à simulação. Para minimizar este problema, implementou-se uma forma híbrida do hipercubo latino, em que são escolhidos N valores de cada um dos N_T intervalos definidos.

3.2.1. Variáveis aleatórias

Foram consideradas oito variáveis aleatórias, com vista à análise da fiabilidade estrutural: distância ao centro de gravidade das armaduras “a”, espessura da laje “h”, comprimento da consola “L”, tensão de rotura do betão “f_c”, tensão de cedência das armaduras “f_s”, módulo de elasticidade do aço “E_s”, ações variáveis “q” e peso específico do betão “γ_c”. Assumiu-se o valor da armadura como sendo determinístico, igual a 4.22 cm²/m.

Os valores dos desvios padrão das variáveis “a” e “h”, foram obtidos na referência [13] (em relação à variável “a”, obteve-se pelo método de Monte Carlo, com base nas distribuições de “h” e da altura útil). Em relação às variáveis “L”, “E_s”, “f_s” e “γ_c”, esses valores foram obtidos na referência [14].

O valor médio f_{cm}, e respectivo desvio padrão, da variável “f_c”, foram definidos de modo a que f_{cm}= f_{ck}+8 e f_{ck}= 20 MPa. Considerou-se o valor médio da variável “q” igual ao valor quase permanente da sobrecarga (ψ₂=0.2), e um desvio padrão de modo a que o valor característico fosse igual a 2 kN/m².

Tabela 2 - Caracterização das variáveis aleatórias usadas na simulação.

Variável aleatória	Valor médio	Desvio padrão	Tipo de distribuição
a	2.5 cm	0.980 cm	logonormal
h	15 cm	0.872 cm	normal
L	2 m	0.0172 m	normal
f _c	28 MPa	4.857 MPa	normal
f _s	436 MPa	21.86 MPa	normal
E _s	200 GPa	4.8 GPa	normal
q	0.4 kN/m ²	0.4 kN/m ²	logonormal
γ _c	25 kN/m ³	2 kN/m ³	normal

Os valores das variáveis aleatórias, em cada amostra da simulação, foram obtidas pelo método designado por aceitação-rejeição, como é proposto em [11].

3.2.2. Verificação da segurança em relação ao estado limite último

Admitiu-se que a segurança em relação ao estado limite último era verificada quando $M_S \leq M_R$, sendo

$$M_S = 0.5 \cdot (\gamma_c \cdot h + q) \cdot L^2 \quad (4)$$

$$M_R = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot \sigma_c(y) dy + y_s \cdot \sigma_s \cdot A_s \quad (5)$$

A quantificação do valor de M_R foi feita com base nas relações constitutivas propostas pelo EC2 [15], para as análises não lineares (diagrama parabólico para o betão e diagrama bilinear para o aço), com o valores das variáveis aleatórias obtidos em cada ciclo de simulação.

3.2.3. Resultados da simulação numérica

Na simulação realizada, as distribuições de densidade de probabilidade foram divididas em 20000 conjuntos de igual probabilidade, tendo sido geradas $10 \times 20000 = 200000$ amostras. Os resultados da simulação estão apresentados nas figuras seguintes.

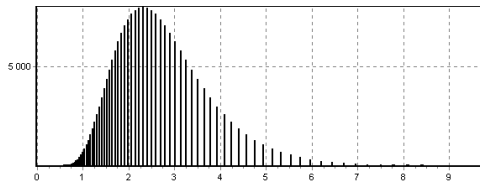


Figura 4: Variável aleatória "a"

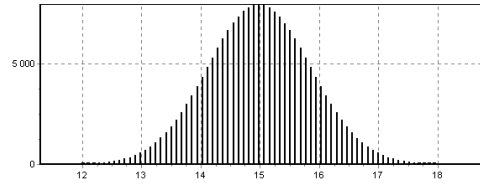


Figura 5: Variável aleatória "h"

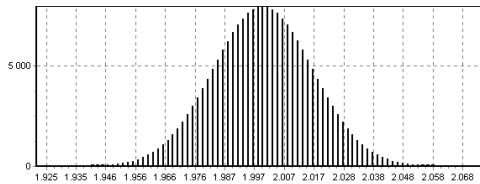


Figura 6: Variável aleatória "L"

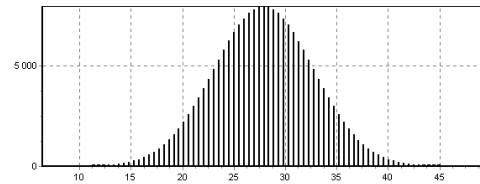


Figura 7: Variável aleatória "fc"

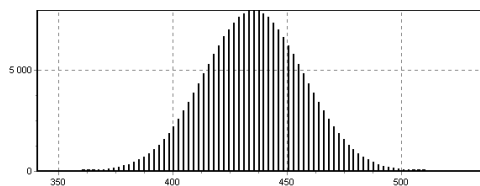


Figura 8: Variável aleatória "fs"

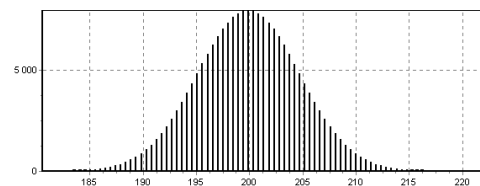


Figura 9: Variável aleatória "Es"

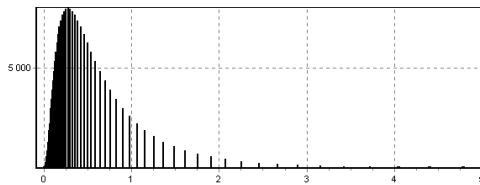


Figura 10: Variável aleatória "q"

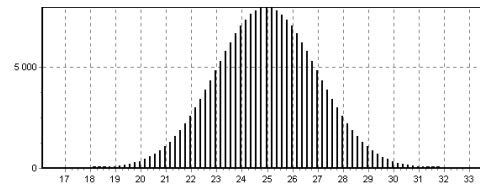


Figura 11: Variável aleatória " γ_c "

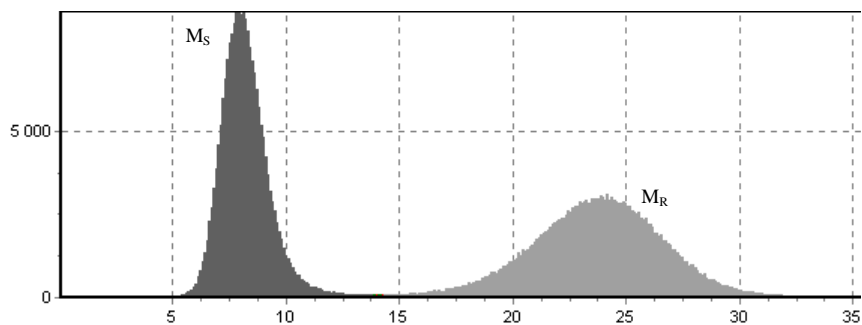


Figura 12: Resultados das variáveis aleatórias " M_S " e " M_R "

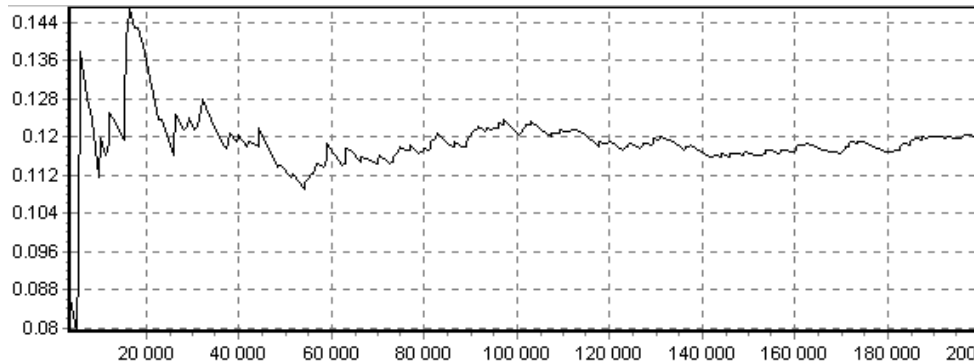


Figura 13: Evolução dos resultados da simulação

A probabilidade de excedência do estado limite último, resultante da simulação numérica, foi $P_f = 0.12 \%$, o que corresponde a uma fiabilidade de 99.88% .

Realizou-se uma análise à sensibilidade dos resultados, admitindo que não existiam incertezas para o valor de uma das variáveis, considerando o seu valor médio na análise. Os resultados dessa análise encontram-se discriminados na tabela seguinte.

Tabela 3 - Resultados das análises de fiabilidade, admitindo uma das variáveis como sendo determinística.

Variável determinística	nº de amostras	P_f (%)	Fiabilidade (%)
a	100×20000	0.0035	99.9965
h	10×20000	0.10	99.90
L, f_c , f_s , E_s , γ_c	10×20000	≈ 0.12	≈ 99.88
q	10×20000	0.11	99.89

4. CONCLUSÕES

Em primeiro lugar, há que salientar a elevada versatilidade das simulações numéricas, no âmbito da fiabilidade estrutural. Estas metodologias de análise (de nível 3) permitem a aferição dos regulamentos, podendo ser adaptadas na determinação dos coeficientes parciais de segurança, utilizados nas correntes análises de nível 1. O progresso dos sistemas informáticos irá permitir o recurso a estas metodologias de análise, nos estudos de complexos sistemas estruturais, apresentando comportamentos física e geometricamente não lineares.

O exemplo utilizado na ilustração do método de análise, leva-nos a concluir que as incertezas associadas ao posicionamento das armaduras, em obra, regem o nível de fiabilidade deste tipo de estruturas. O elevado desvio padrão da variável “a”, conduz a probabilidades P_f muito superiores às desejáveis para uma estrutura corrente de betão armado (na ordem dos 0.01%).

Face aos resultados obtidos, será desejável a determinação dos parâmetros estatísticos das variações dimensionais que ocorrem em obra, e ao posicionamento das armaduras, nas construções que se realizam em Portugal.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Borges, J. F.; Castanheta, M. - *Structural Safety*. Curso 101. LNEC, 1985, 327 p.
- [2] Nowak, A.S.; Lind, N.C. - "Probability-based Design Codes" em *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*. Ed. por C. Sundarajan, Chapman & Hall, 1995, p. 331-428.
- [3] Henriques, A.A.R - *Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento do Betão Estrutural*. Dissertação para Doutoramento. FEUP, 1998, 502 p.
- [4] Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes. Decreto-lei nº235/83, de 31 de Maio. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1983.
- [5] Almunia, J.A.S. - *Evaluación del comportamiento funcional y de la seguridad estructural de puentes existentes de hormigón armado y pretensado*. Tesis Doctoral. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals I Ponts, Universitat Politècnica de Catalunya, 1993.
- [6] Pipa, M.J.A.L. - *Ductilidade de elementos de betão armado sujeitos a acções cíclicas. Influência das características mecânicas das armaduras*. Dissertação para Doutoramento. Instituto Superior Técnico, 1995.
- [7] CEB, Comité Euro-International du Béton - *Manuel de Sécurité*. Bulletin d'Information nº 128, 1980.
- [8] Peir, J.; Cornell, C.A. - "Spatial and Temporal Variability of Live Loads". *Journal of the Structural Division*, ASCE, 1973, Vol. 99, No. ST5, p. 903-922.
- [9] Chalk, P.L.; Corotis, R.B. - "Probability Model for Design Live Loads". *Journal of the Structural Division*, ASCE, 1980, Vol. 106, No. ST10, p.2017-2030.
- [10] Ayyub, B.M. ; McCuen, R.H. - "Simulation-based Reliability Methods" em *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*. Ed. por C.Sundarajan, Chapman & Hall, 1995, p.53-69
- [11] Cruse, T.A. - *Reliability-based Mechanical Design*. Marcel Dekker, Inc., 1997, 341 p.
- [12] Florian, Alès - "An Efficient Sampling Scheme: Updated Latin Hypercube Sampling". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1992, Vol. 7, p. 123-130.
- [13] Udoeyo, F.F. ; Ugbem, P.I. - "Dimensional Variations in Reinforced-Concrete Members". *Journal of Structural Engineering*, 1995, Vol. 121, nº 12, p. 1865-1867.
- [14] Scanlon, A. - "Applications in Concrete Structures" em *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*. Ed. por C. Sundarajan, Chapman & Hall, 1995, p. 663-683.
- [15] Eurocode 2 - Design of concrete structures. CEN, European Prestandard ENV 1992-1-2.