

Mestrado em Engenharia Civil

Mecânica Estrutural

Apontamentos Teóricos de Elementos Finitos

(actualizado em 2023)

Vítor Barreto

Nota:

Estes apontamentos têm a sua versão original em março de 1994 sob a designação de "Elementos Finitos". No decorrer dos anos foram sucessivamente actualizados em abril de 2001, março de 2002 outubro de 2005 e agora em setembro de 2023 acompanhando as transformações dos conteúdos das disciplinas no segundos ciclos de estudo, ou seja, no CESE, no 2º Ciclo Bieátipo, no Mestrado em parceria com a Universidade de Évora para a unidade curricular de ""Mecânica Computacional" e agora no Mestrado em Engenharia Civil em parceria com o Instituto Politécnico do Barreiro da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, para a unidade curricular de "Mecânica Estrutural"

A terminologia e simbologia usada em elementos finitos varia consoante o problema físico em estudo, e até difere na formação de engenheiros civis e engenheiros mecânicos, e de continente para continente, etc. É então um dos objectivos destes apontamentos adoptar uma só terminologia e simbologia para os diversos elementos finitos em estudo de modo a facilitar a aprendizagem do aluno que se inicia no estudo destas matérias. Os assuntos aqui abordados estão principalmente orientados para o estudo da mecânica dos sólidos.

Estes apontamentos dão continuidade às disciplinas de Análise de Estruturas do 1º ciclo de estudos

Os objectivos das alterações sucessivas foram o uso de linguagem mais clara, melhor abordagem das matérias, a inclusão de mais exemplos.

Vítor Barreto, Prof. Adjunto

Faro, 15-09-2023.

ALFABETO GREGO

Nome	minúscula	maiúscula	português
alfa	α	A	a
beta	β	B	b
gama	γ	Γ	g
delta	δ	Δ	d
épsilon	ε	E	e
zeta	ζ	Z	z
eta	η	H	e
teta	θ	Θ	t
iota	ι	I	i ou j
capa	κ	K	c
lambda	λ	Λ	l
miú	μ	M	m
niú	ν	N	n
csi	ξ	Ξ	x
ómicon	ο	O	o
pi	π	Π	p
ró	ρ	P	r
sigma	σ	Σ	s
tau	τ	T	t
iúpsilon	υ	Υ	y
fi	φ	Φ	ph
qui	χ	X	c ou qu
psi	ψ	Ψ	ps
ómega	ω	Ω	o

Bibliografia

- [1]-Cook, Robert D.; "Finite Element Modeling For Stress Analysis"; John Wiley & sons, Inc., 1995 (*)
- [2]-Chandrupatla, Tirupathi; Belegundu, Ashok; "Introduction to Finite Elements in Engineering", Prentice Hall, 1991.
- [3]-Reddy, J.N.; "An Introduction to the Finite Element Method", 2ª Edição, Mc Graw-Hill, 1993. (*)
- [4]-Lepi, Steven M.; "Practical Guide to Finite Elements - A Solid Mechanics Approach", Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [5]-Pires, E.B. e Parreira, Pedro; "Introdução ao Método dos Elementos Finitos", AEIST, 1987. (*)
- [6]-Soares, Carlos A. Mota; "Elementos Finitos em Mecânica de Sólidos", CEMUL, 1982.
- [7]- Pires, E.Borges; "Elementos Finitos I", Curso de Mestrado em Eng^a de Estruturas, IST, 1996
- [8]- Oliveira, Sérgio; Castro, A.Tavares; Gomes, J.Pereira; " Mecânica dos Materiais III"; ISEL, 1999/2000. (*)
- [9]-Mukhopadhyay, Madhujit; "Structures: Matrix and Finite Element"; A.A. Balkema Publishers, Brookfield, U.S.A., 1984.
- [10]-Zienkiewicz, O.C.; "El Método de los Elementos Finitos", Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1982 (Tradução por Eugénio Navarra de "The Finite Element Method"; McGraw-Hill Book Company) (*)
- [11]-Rockey, K.C.; Evans, H.R.; Griffiths, D.W.; "Introduction à la Méthode des Éléments Finis", Editions Eyrolles, 1979. (*)
- [12]-Tavares, A.Segadães; "Análise Matricial de Estruturas", Curso 129, LNEC, 1973.
- [13]-Reis A.; Appleton J.; "Apontamentos de Resistência de Materiais I e II", I.S.T., 1978.
- [14]-Timoshenko/Gere, "Mecânica dos Sólidos", Vol1, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983
- [15]-Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. "Theory of Plates and Shells", McGraw-hill Book Company, London, 1981.
- [16]-Lamas, A.R.G.- "Lajes-Análise Elástica e Análise Limite", CMEST, 1983.
- [17]-Appleton, J.A.S.; Almeida, J.C.F.; Câmara, J.M.N.; "Dimensionamento e Pormenorização de Estruturas de Betão Armado e Pré Esforçado", Curso patrocinado pela Ordem dos Engenheiros, 1984
- [18]- Pereira, Orlando; "Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade (Análise de Estruturas II)", DECivil, 2000. (*)

- [19]-Leitão, Vitor M.A.; Castro, Luís M.S.S.; Freitas, João A.Teixeira de; Pereira, Orlando J.B.A.; "Apontamentos Sobre Análise Elástica Linear de Lajes (Análise de Estruturas I)", AEIST, 1998.(*)
- [20]-Pereira, Orlando J.B.A.;"Introdução ao Método dos Elementos finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade", DECivil, 2000.
- [21]-Pintur, David A.;"Finite Element Beginnings", MathSoft, 1998.
- [22]- Piskounov,N.; "Cálculo Diferencial e Integral", volume II, Lopes da Silva Editora
- [23] - Martins, João A.C.; "Teoria Elástica Linear de Placas e Lajes", IST, 1995 (*)
- [24] - Rao, S.S.; "The Finite Element Method in Engineering", 2ª Edição, Pergamon Press, 1989.
- [25] - Barreto, Vítor; "Análise de Estruturas II- Apontamentos para as aulas teóricas", Reprografia da Associação de Estudantes da E.S.T. da U.Alg., Março 2001.
- [26] - Oñate, Eugénio; "Cálculo de estruturas por el método de elementos finitos"; XII Curso de Introducción, Structuralia, CIMNE, Octubre 2002.
- [27] - Portela,A.; Charafi, A.; "Finite Elemenets Uning Maple - A symbolic programming approach", Springer, 2002

(*) Livros com mais relevância relativamente ao conteúdo da disciplina.

Aplicações à Mecânica dos Sólidos

0.- Introdução[(vide: "Finite Elements Using Maple", A.Portela, A. Charafi)[27]]

A modelação matemática em mecânica dos sólidos usa a **Teoria de Elasticidade** como modelo de geração fundamental a qual é considerada matematicamente como modelo exacto. Baseado num modelo exacto e considerando hipóteses simplificativas obtém-se modelos assintóticos, ainda contínuos.

A Teoria de Elasticidade / Estruturas considera 3 classes de modelos:

(i) **Modelo Fundamental Contínuo tridimensional:**

- para simular o comportamento da estrutura em geral
- é o modelo exacto gerador de outros modelos contínuos

(ii) **Modelo Assimptótico Contínuo**

- para estruturas com geometria particular (linear, bidimensional)

(iii) **Modelo Discreto**

- obtido directamente dos modelos anteriores

Os modelos assintóticos referem-se a domínios estruturais com menores dimensões que o modelo exacto tridimensional.

Classes de modelos:

(i) **Modelo Tridimensional**

- é o modelo da Teoria de Elasticidade
- elementos estruturais com todas as dimensões de igual ordem de grandeza
- casos particulares: *Estado Plano de Tensão de Deformação, Modelos Axissimétricos*

(ii) **Modelo Bidimensional**

- é o modelo da Teoria de Cascas
- uma dimensão, espessura, muito menor que as outras duas
- casos particulares: *Teoria de Lajes, Estado Plano de Tensão*

(ii) **Modelo Unidimensional**

- é o modelo da Teoria das Barras
- duas dimensões muito menores que a terceira
- casos particulares: *Treliças, pórticos, grelhas.*

Todos os modelos consideram 3 grupos de equações:

- (i) **Equações Deformação-Deslocamento (Relações Cinemáticas)** - para definir a admissibilidade cinemática do campo elástico
- (ii) **Equações e Equilíbrio** - para definir a admissibilidade estática do campo elástico
- (iii) **Equações Tensão-Deformação (Relações Constitutivas)** - para definir o comportamento mecânico dos materiais

Teoria da Elasticidade

O objectivo da Teoria da Elasticidade é determinar o estado de tensão e de deformação de uma estrutura sob a acção de dada carga.

1.- Princípios Básicos da Teoria da Elasticidade [2,13]

1.1- Introdução. Vectores de Força e de Deslocamento.

Um corpo tridimensional ocupando o volume V e tendo como superfície S mostra-se na figura:

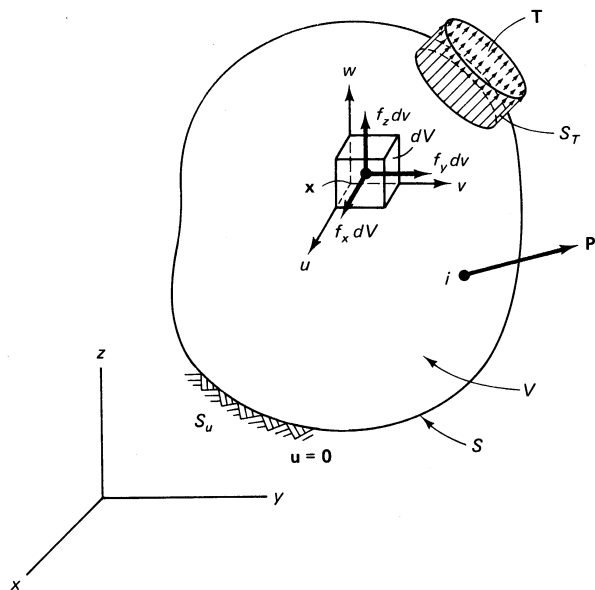


Figura 1.1 (forças de massa = $\{f\}$)

Os pontos do corpo são definidos pelas suas coordenadas x , y e z . A fronteira está cinematicamente restringida numa zona particular S_u onde os deslocamentos são especificados (em geral são nulos).

O corpo pode estar sujeito ao longo da sua fronteira ao seguinte tipo de forças:

- força superficial distribuída, $\{T\}$, também designada por força de tracção. Estas forças estão aplicadas numa zona da fronteira S_T (portanto, estaticamente determinada) e podem ser por exemplo a pressão hidrostática, forças de fricção, cargas distribuídas, etc. Têm três componentes:

$$\{T\} = \{T_x, T_y, T_z\}^T \quad (1.1)$$

- forças pontuais $\{P\}$, que se supõem aplicadas em zonas muito pequenas de dimensão finita e de componentes:

$$\{P\} = \{P_x, P_y, P_z\}^T \quad (1.2)$$

O corpo pode estar sujeito a outro tipo de forças distribuídas no seu volume e que são as forças massa $\{f\}$ (também representados por outros autores por $\{b\}$, (*body*)) cujas componentes são:

$$\{f\} = \{f_x, f_y, f_z\}^T \quad (1.3)$$

Sob estas forças o corpo deforma-se. Um ponto qualquer de coordenadas $\{x,y,z\}$ é obrigado a deslocar-se de acordo com o vector deslocamento $\{u\}$ de componentes :

$$\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T \quad (1.4)$$

1.2- O tensôr das Tensões

Qualquer vector tensão actuante num ponto P pode ser decomposto em três componentes mutuamente ortogonais como mostra a figura 1.2.(a). As suas componentes de tensão em cada faceta associada a um referencial original mostram-se na figura 1.2(b), as quais se podem projectar em direcções tensões normais e tangenciais a cada faceta de valores σ_{ij} . Como mostra a figura 1.2.c).

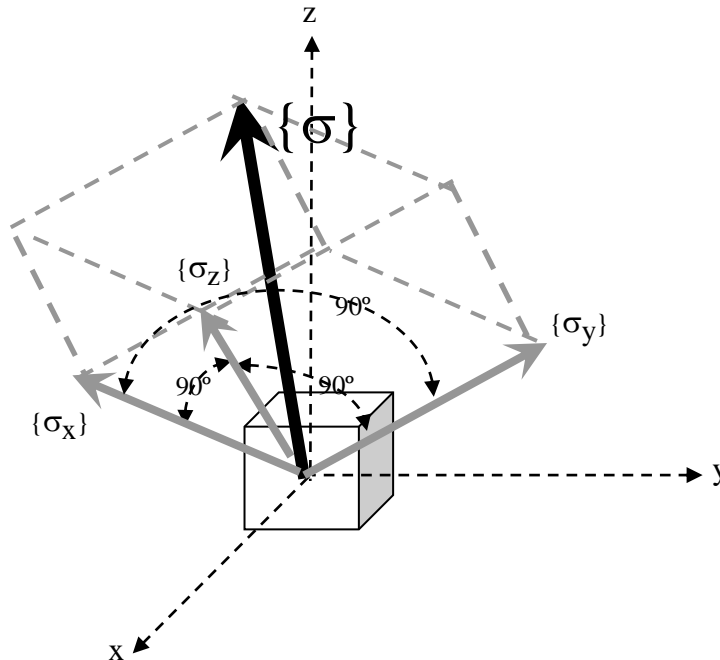


Figura 1.2 (a)

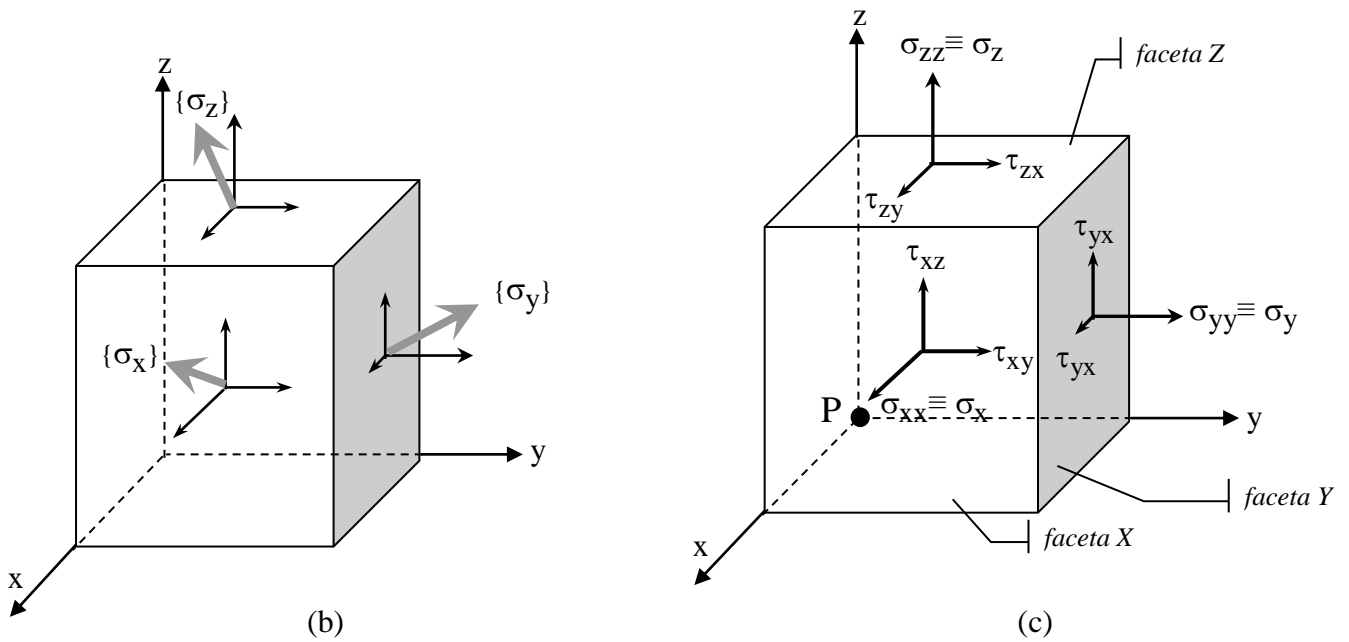


Figura 1.2

σ_{ij} : componente de tensão na faceta i e na direcção j .

$\{\sigma_i\}$: Vector tensão resultante na faceta i .

$$\begin{cases} \{\sigma_x\} = \sigma_{xx}\{e_x\} + \sigma_{xy}\{e_y\} + \sigma_{xz}\{e_z\} \\ \{\sigma_y\} = \sigma_{yx}\{e_x\} + \sigma_{yy}\{e_y\} + \sigma_{yz}\{e_z\} \\ \{\sigma_z\} = \sigma_{zx}\{e_x\} + \sigma_{zy}\{e_y\} + \sigma_{zz}\{e_z\} \end{cases} \quad (1.5)$$

(Notas:

- Na figura 1.2(a) os σ_{ij} são as componentes de tensão σ_{ij} , deveriam ser correctamente representadas por $\sigma_{ij}\cdot\{e_j\}$.

- $\{\sigma_x\}, \{\sigma_y\}, \{\sigma_z\}$ são mutuamente perpendiculares, embora possa não parecer (Figura 1.2.(b)).

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_x\} \\ \{\sigma_y\} \\ \{\sigma_z\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \{e_x\} \\ \{e_y\} \\ \{e_z\} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

chamando-se tensor das tensões à matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Considerando $x \equiv 1, y \equiv 2$ e $z \equiv 3$, o tensor pode escrever-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Os elementos do tensor das tensões representam as tensões normais e tangenciais às faces do elemento que estão direccionadas segundo o referencial cartesiano adoptado. Estas componentes estão em equilíbrio entre si sendo algumas independentes. Por outro lado este tensor é simétrico pelo que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Assim em vez de se representar o tensor na forma matricial, torna-se mais prático escrevê-lo na forma de um vector, cujos elementos são os coeficientes independentes do tensor:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (1.9 \text{ a),b))}$$

Concluindo podemos afirmar que o estado de tensão num ponto não é uma grandeza vectorial (como a força) e muito menos escalar (como a temperatura), mas sim uma grandeza tensorial, cuja descrição matemática é efectuada por intermédio de um tensor simétrico de 2ª ordem num espaço tridimensional (dois índices i e j que assumem valores x , y e z). Desta forma o estado de tensão num ponto pode ser representado por infinitas matrizes (3x3 simétricas) ou por vectores (6x1 como em (1.9)) cujos seis coeficientes independentes assumem valores que são função da orientação de três facetas mutuamente ortogonais que se escolham para representar os vectores de tensão de Cauchy e da orientação do sistema de eixos cartesianos de referência [8].

1.3 - Direcções principais do tensor das tensões

As direcções principais do tensor das tensões são as direcções segundo as quais o tensor é representado por uma matriz diagonal, sendo as tensões normais correspondentes, σ_I , σ_{II} e σ_{III} denominadas tensões principais. As faces orientadas segundo estas direcções não apresentam tensões tangenciais.

A determinação das tensões e direcções principais é um problema de valores e vectores próprios. Dado o tensor das tensões $[\sigma]$ e a matriz identidade $[I]$ o anulamento do determinante:

$$|[\sigma] - \lambda * [I]| = 0 \quad (1.10)$$

(conhecido como equação característica) conduz à determinação das três raízes λ , cujo significado são as **tensões principais** σ_I , σ_{II} e σ_{III} . Desenvolvendo a expressão anterior:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (1.10.a)$$

que pode ser escrita no seguinte formato:

$$\lambda^3 - I_1 * \lambda^2 + I_2 * \lambda - I_3 = 0 \quad (1.10.b)$$

cujos coeficientes (invariantes) são:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix}; I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (1.11,a),b),c))$$

e é um polinómio do 3º grau cujas raízes são: λ_1, λ_2 e λ_3 . Geralmente faz-se $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, e $\sigma_I = \lambda_1, \sigma_{II} = \lambda_2$ e $\sigma_{III} = \lambda_3$. Substituindo cada raiz no sistema (*dependente*):

$$[[\sigma] - \lambda * [I]] * \{X\} = 0 \quad (1.12)$$

obtemos os vectores solução $\{X\}_I, \{X\}_{II}$ e $\{X\}_{III}$, cujas componentes representam as **direcções principais de tensão** relativamente ao referencial original. Por exemplo, fazendo, $\lambda = \lambda_1$ e resolvendo (1.13) fica:

$$[[\sigma] - \lambda_1 * [I]] * \{X\} = 0 \text{ cuja solução será: } \{X\}_I = \begin{Bmatrix} X_{I,1} \\ X_{I,2} \\ X_{I,3} \end{Bmatrix}. \text{ Como o sistema é dependente há que}$$

arbitrar um valor prévio para uma das incógnitas, por exemplo $X_{I,1} = 1$.

1.4- Equações Deformação Deslocamento ou Relações Cinemáticas

Os deslocamentos $\{u\}$ num corpo relacionam-se com as deformações $\{\varepsilon\}$ através do operador diferencial $[L]$ (operador de compatibilidade (alguns autores designam-no por $[C]$)):

$$\{\varepsilon\} = [L] * \{u\} \quad (1.13)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(1.14), (1.15) e (1.17)

ou em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} * (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.18)$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (1.19)$$

com a notação: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$. (1.20) e (1.21)

Exemplo:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} * (u_{1,1} + u_{1,1}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} * (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Pretendem-se demonstrar as relações (1.18) e (1.19) recorrendo-se para isso à figura 1.5 relativa ao caso bidimensional. (Nota: Todas as derivadas são calculadas no ponto P)

A extensão linear segundo x_1 é:

$$\varepsilon_1 = \frac{AP' - AP}{AP}, \quad AP = dx_1, \quad AP' = \sqrt{(dx_1 + u_{1,1}dx_1)^2 + (u_{2,1}dx_1)^2}$$

Desenvolvendo em série AP' fica:

$$AP' = dx_1 \left\{ 1 + u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{1,1}^2 + \frac{1}{2} u_{2,1}^2 + \text{termos ordem superior} \right\}$$

Logo:

$$\varepsilon_1 = u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{1,1}^2 + \frac{1}{2} u_{2,1}^2 \quad (a)$$

Analogamente:

$$\varepsilon_2 = u_{2,2} + \frac{1}{2} u_{2,2}^2 + \frac{1}{2} u_{1,2}^2 \quad (b)$$

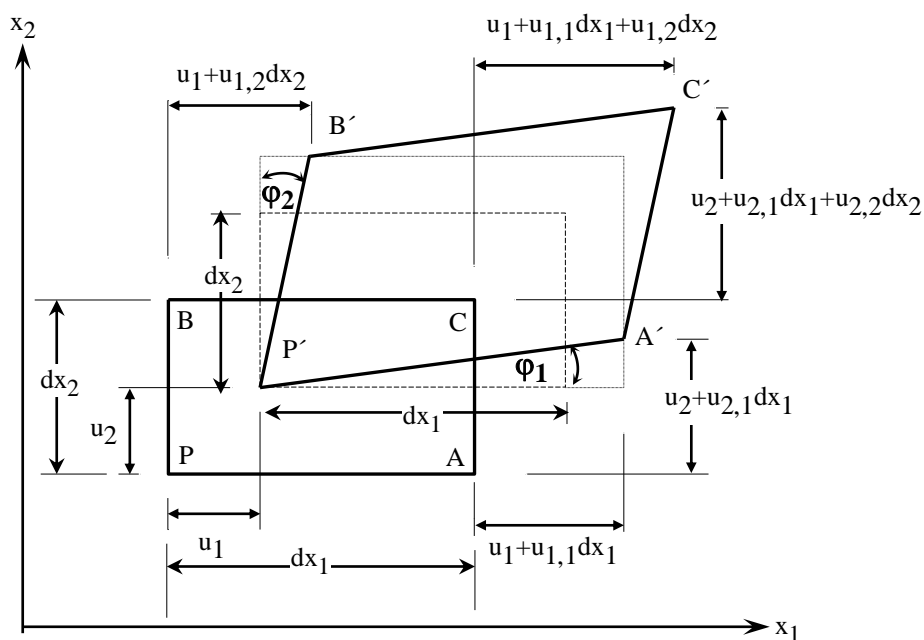


Figura 1.5 - Relações cinemáticas - caso bidimensional.

Relativamente à distorção temos:

$$\gamma_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (c)$$

em que:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{u_{2,1}dx_1}{dx_1 + u_{1,1}dx_1} = \frac{u_{2,1}}{1 + u_{1,1}} \quad (d), \quad \text{e analogamente} \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{u_{1,2}}{1 + u_{2,2}} \quad (e).$$

Na hipótese dos pequenos deslocamentos as derivadas $u_{1,1}$, $u_{2,2}$, $u_{2,1}$ e $u_{1,2}$ são quantidades muito pequenas face à unidade pelo que o seu quadrado nas expressões (a) e (b) se torna mais pequeno e por isso desprezável relativamente a $u_{1,1}$ e a $u_{2,2}$. Por outro lado, pelo facto de $u_{1,1}$ e $u_{2,2}$ serem quantidades muito pequenas face à unidade os denominadores das expressões (d) e (e) ficam praticamente unitários. Consegue-se desta forma linearizar [13] as Relações Deformações - Deslocamentos que se passam a definir como:

$$\varepsilon_1 = u_{1,1} \quad (f)$$

$$\varepsilon_2 = u_{2,2} \quad (g)$$

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} \quad (h)$$

demonstrando-se assim as relações (1.18) e (1.19) para o caso bidimensional. No caso tridimensional ter-se-ia ainda:

$$\varepsilon_3 = u_{3,3}, \quad \gamma_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}, \quad \gamma_{23} = u_{2,3} + u_{3,2}.$$

De (1.18) vem:

$$\varepsilon_{12} = 1/2 * (u_{1,2} + u_{2,1})$$

que comparado com (h) se deduz $2 * \varepsilon_{12} = \gamma_{12}$ demonstrando-se assim a expressão (1.19) para o caso bidimensional.

1.5- Equações Diferenciais de Equilíbrio

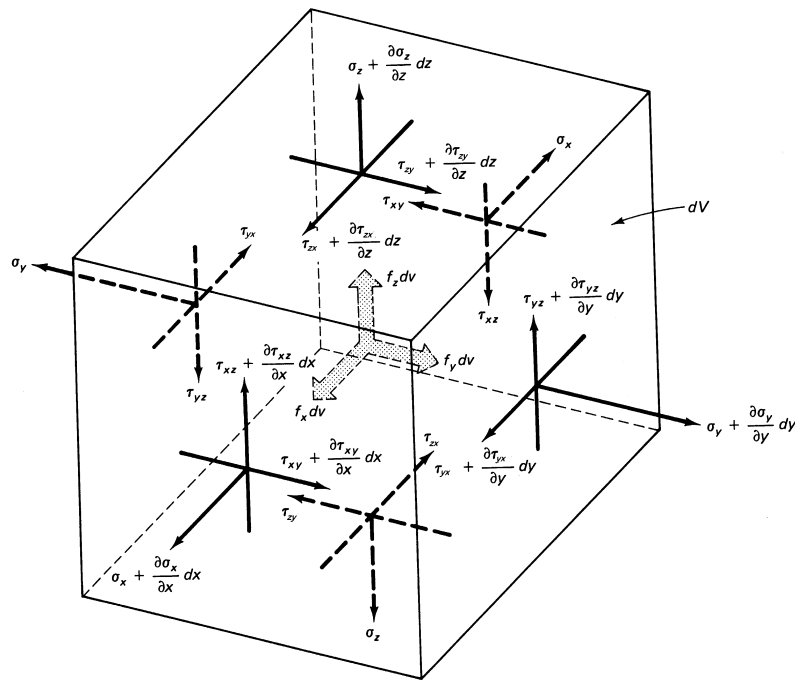


Figura 1.3 - Equilíbrio no interior do corpo ($f \equiv massa$)(adaptado de [2]).

Considere-se agora o equilíbrio num ponto interno de um corpo sujeito às de massa {b} e a um estado de tensões { σ }. O ponto é representado pelo elemento material de volume dV . O equilíbrio resulta da satisfação das seguintes equações da estática, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, e $\Sigma F_z = 0$, pelo que há que quantificar as resultantes ([tensão] X [área]) segundo cada direcção e igualar a zero. Por exemplo, fazendo o equilíbrio segundo x-x ter-se-á:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right) dydz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx}\right) dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx}\right) dx dz + f_x dV = 0 \tag{1.22}$$

\Rightarrow

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + f_x dx dy dz = 0 \tag{1.23}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \tag{1.24}$$

que é uma equação diferencial de equilíbrio na direcção x-x.

As equações diferenciais de equilíbrio no interior de um corpo são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Atendendo à simetria do tensor das tensões e adoptando a notação de Voigt (e $x=1$, $y=2$ e $z=3$), a igualdade anterior escreve-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_1 = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_2 = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_3 = 0 \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Sabendo que a derivada pode ser denotada por uma vírgula ",", cada parcela fica:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} = \sigma_{ji,i} \quad (1.27)$$

e atendendo a que na notação de Voigt dois índices iguais numa parcela significam um somatório de $i=1$ a $i=3$ nesse índice, podemos escrever (1.26) de uma forma mais compacta:

$$\sigma_{ji,i} + f_j = 0 \quad (1.28)$$

(Nota: Na representação de Voigt (ou indicial) Índices repetidos na mesma parcela representam o somatório dessa parcela em relação a esses índices).

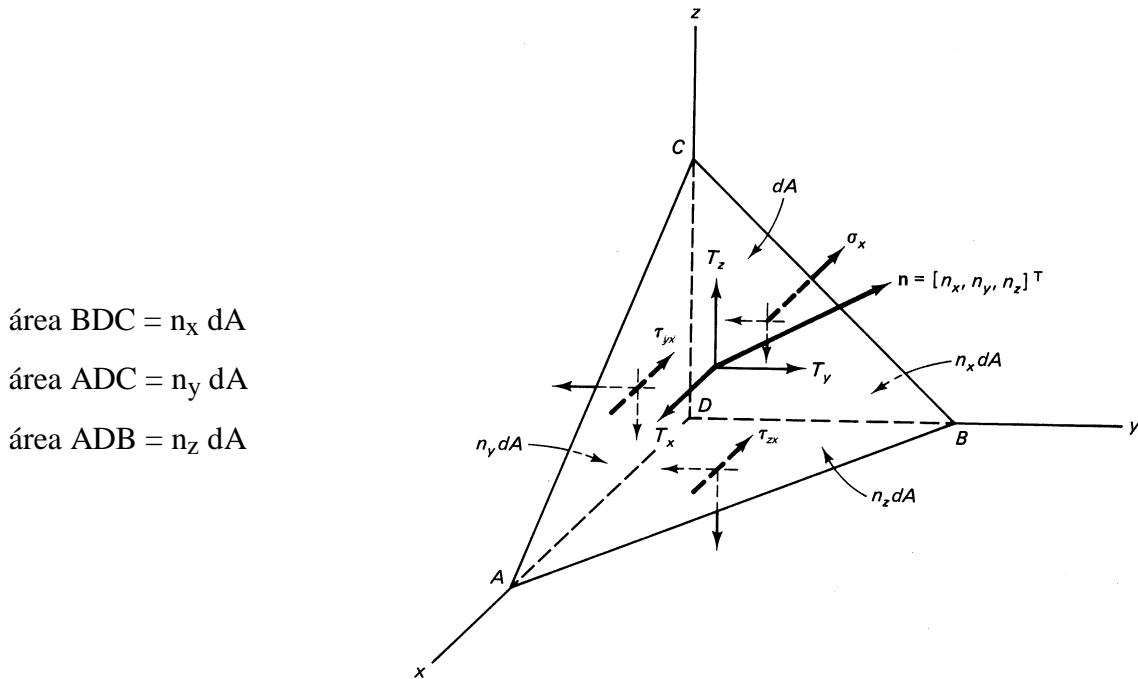
Considerando o operador de compatibilidade podemos escrever:

$$[L]^T \{\sigma\} + \{f\} = \{0\} \quad (1.29)$$

1.6- Condições de Equilíbrio na Fronteira

As condições de fronteira podem ser de dois tipos: cinemáticas e estáticas. As primeiras correspondem à restrição de deslocamentos num subdomínio da fronteira, como por exemplo fazendo $\{u\}=\{0\}$ em S_u (ou S_1), ou à imposição de deslocamentos, $\{u\}=\{a\}$ (por exemplo, assentamentos de apoio, neste caso de valor "a"). As condições de fronteira estáticas correspondem à definição das acções em subdomínios da fronteira. São exemplos a aplicação de cargas pontuais $\{P\}$ ou distribuídas $\{T\}$ em zonas restritas S_T (ou S_2).

Pretende-se agora verificar o equilíbrio de um ponto localizado na fronteira do corpo. Imagina-se que o ponto é um cubo de pequenas dimensões "cortado" por um plano inclinado, a superfície exterior, resultando um tetraedro como se mostra na figura 1.4.



área BDC = $n_x dA$
 área ADC = $n_y dA$
 área ADB = $n_z dA$

Figura 1.4 - Equilíbrio na fronteira

A normal unitária $\{n\}$ ao plano tem como componentes os cossenos directores em relação ao referencial adoptado,

$$\begin{aligned} \{n\} &= \{n_x, n_y, n_z\}, \\ |\{n\}| &= 1. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Realizando o equilíbrio segundo x-x, vem:

$$\sigma_x n_x dA + \tau_{yx} n_y dA + \tau_{zx} n_z dA = T_x dA \tag{1.31}$$

Para as restantes direcções obter-se-ão expressões semelhantes. O equilíbrio na fronteira S_T é dado pelas seguintes equações de equilíbrio na fronteira :

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z \end{cases} \tag{1.32}$$

Atendendo à simetria do tensor das tensões:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \tag{1.33}$$

ou ainda de uma forma mais compacta na forma indicial, fica:

$$T_j = \sigma_{ji} n_i \tag{1.34}$$

Definindo [n] como a matriz de componentes da normal unitária direccionada para o exterior da superfície, ou seja:

$$[n] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

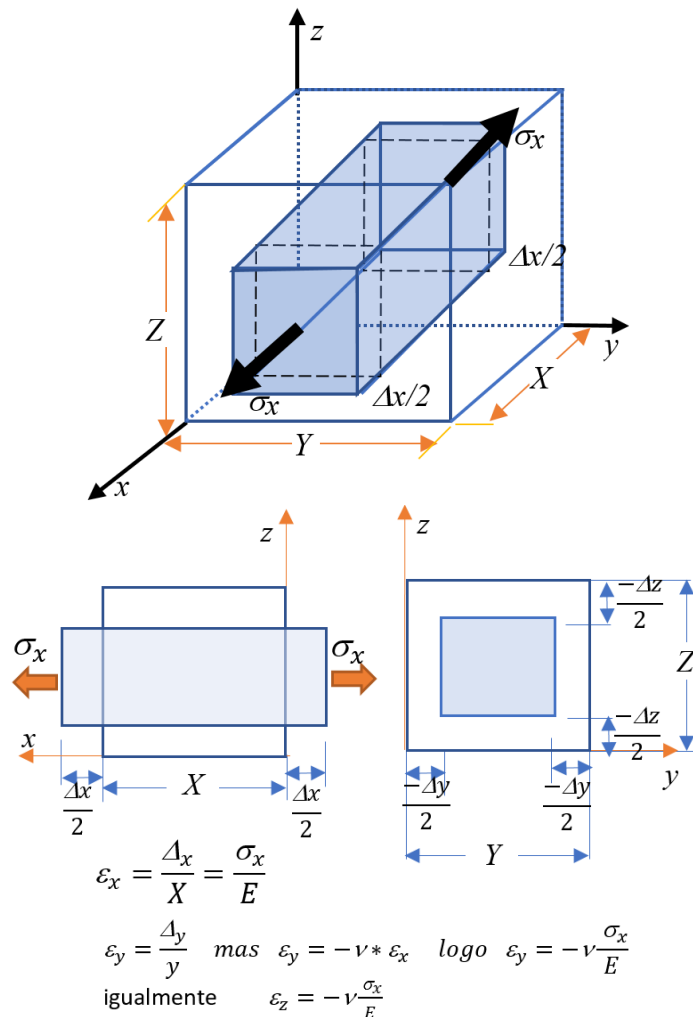
também se pode escrever:

$$\{T\} = [n] * \{\sigma\} \tag{1.36}$$

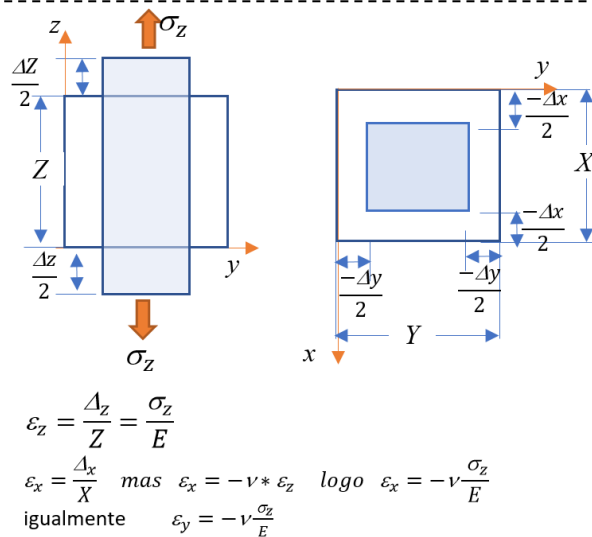
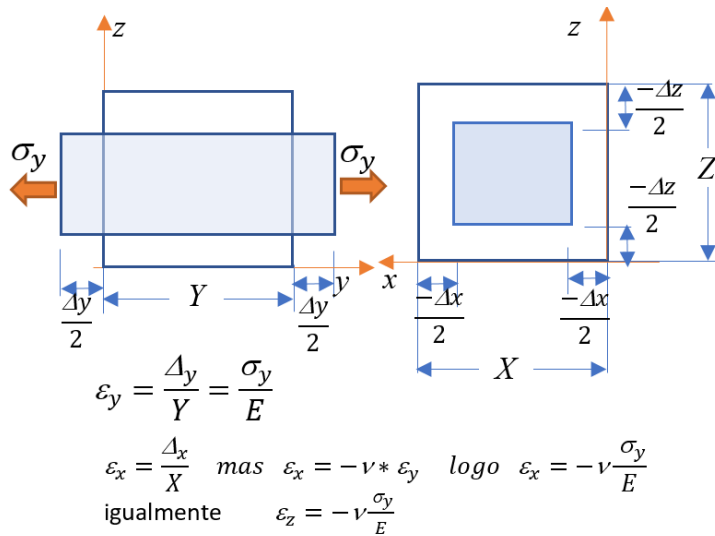
com {σ} definido por (1.9 b)).

1.7- Equações Tensão - Deformação ou Relações Constitutivas

Para materiais isotrópicos com comportamento elástico linear as relações aplicando uma tensão σ_x as deformações são as representadas na figura seguinte.



Repetindo o processo para σ_y e depois para σ_z :



obtemos as relações ϵ - σ denominadas por relações constitutivas, são dadas pela lei de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad , & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad , & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad , & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{1.37 a) a f)}$$

sendo ν o coeficiente de Poisson, E , o módulo de elasticidade linear e G o módulo de elasticidade transversal (ou de distorção). As grandezas E , G e ν são interdependentes.

$$G = \frac{E}{2*(1+\nu)} \quad (1.38)$$

Somando as três primeiras relações obtém-se a seguinte propriedade:

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{(1-2*\nu)}{E} * (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1.39)$$

As relações constitutivas podem escrever-se matricialmente:

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [S] * \{\sigma\}} \quad (1.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & & \\ & & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

Resolvendo o sistema em ordem às tensões obtemos a relação inversa:

$$\boxed{\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}} \quad (1.42)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)*(1-2*\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

1.7.1- Casos Particulares1º) Uma Dimensão :

Para o estado unidimensional a relação constitutiva entre as tensões e deformações que é a conhecida Lei de Hooke :

$$\sigma = E * \varepsilon. \quad (1.44)$$

2º) Duas Dimensões:

2.1.a) Estado Plano de Tensão

2.1.b) Estado Plano de Deformação

2.1.a) - Estado Plano de Tensão

As componentes de tensão normais ao plano são nulas, ou seja, relativamente ao plano X-Y, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$ e $\tau_{yz} = 0$. (Exemplos: Paredes carregadas no seu plano, almas de perfis I, etc.)

$$\{\varepsilon\} = [S] * \{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.45)$$

Resolvendo em ordem a $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.46)$$

2.1.b)- Estado Plano de Deformação

Relativamente ao plano X-Y este estado caracteriza-se por ter nulas as seguintes componentes e deformação: $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ e $\gamma_{yz} = 0$. (Exemplos: secção transversal de uma barragem longa, tubos cilíndricos sujeitos a pressões internas). As relações tensão deformação são as seguintes:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

Invertendo a relação:

$$\{\varepsilon\} = [S] * \{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.48)$$

1.8- Efeitos da Temperatura

Para um corpo não restringido cinematicamente, isto é, para um corpo isostático um aumento de temperatura provoca um aumento de deformação $\{\varepsilon_0\}$ sem introdução de esforços:

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (1.49)$$

Havendo restrições cinemáticas, após um aumento de temperatura as tensões serão dadas por:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}\}. \quad (1.50)$$

No estado plano de tensão e estado plano de deformação temos respectivamente:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon_0\} = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.51, 1.52)$$

1.9- Condições de Fronteira

As equações deformação-deslocamento $\{\varepsilon\} = [L] * \{u\}$, de equilíbrio no interior do corpo $[L]^T \{\sigma\} + \{f\} = \{0\}$, de equilíbrio na fronteira do corpo $\{T\} = [n] * \{\sigma\}$, e as relações tensão-deformação $\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$ definem um sistema com 18 equações diferenciais, com 15 incógnitas, das quais 3 são componentes de deslocamentos, 6 componentes de tensão e 6 componentes de deformação.

O sistema tem mais 3 equações que incógnitas e por isso pode ter infinita ou nenhuma solução (embora seja mais provável este último caso). Para obviar este problema há que impor condições de fronteira cinemáticas (ou essenciais) ou estáticas (ou *naturais*) (ex.: reacções, outras forças).

1.10- Campos Elásticos [27]

Campo de admissibilidade cinemática:

- um campo elástico é cinematicamente admissível ou compatível se satisfaz a relação $\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$ no domínio D e as condições de fronteira $u = u^*$ em S1.
- para um campo de deslocamentos há um único campo de deformações que satisfaz as relações cinemáticas, porque o sistema é totalmente determinado com 6 equações e seis incógnitas:

Campo de admissibilidade estática

- um campo é estaticamente admissível ou equilibrado se satisfaz as relações $[L]^T\{\sigma\}+\{f\}=\{0\}$ no domínio D e as condições de fronteira $T = T^*$ em S2.
- para um dado sistema de forças externas há um número infinito de campos de tensões que satisfazem as relações estáticas porque o sistema é indeterminado com 3 equações e 6 incógnitas.

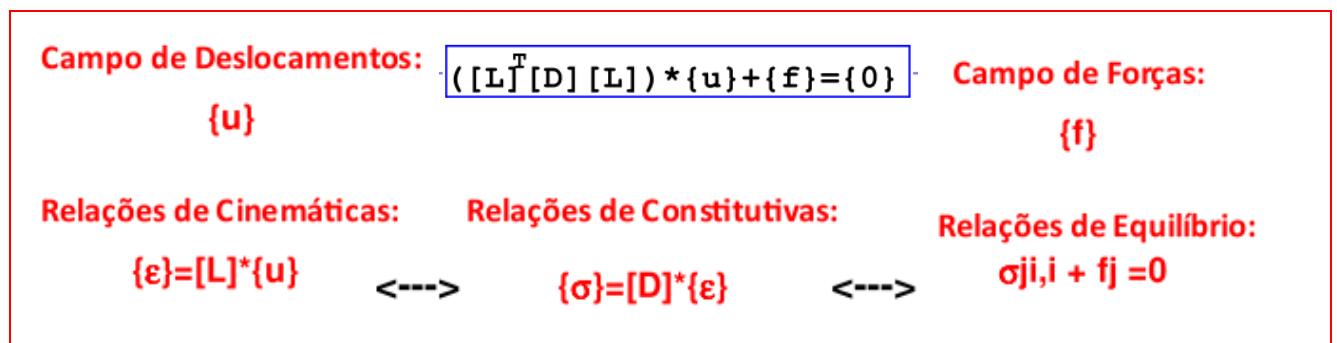
Campo exacto

- um campo elástico é exacto se for simultaneamente cinematicamente e estaticamente admissível.

Problema Fundamental de Equilíbrio:

"O problema fundamental de equilíbrio em Teoria de Elasticidade consiste em calcular os campos internos de deslocamentos, de deformações e de tensões em todos os pontos do domínio, conhecidas as forças de massa, as forças aplicadas e as condições de fronteira. Estes campos deverão verificar as relações de compatibilidade, de equilíbrio e constitutivas"

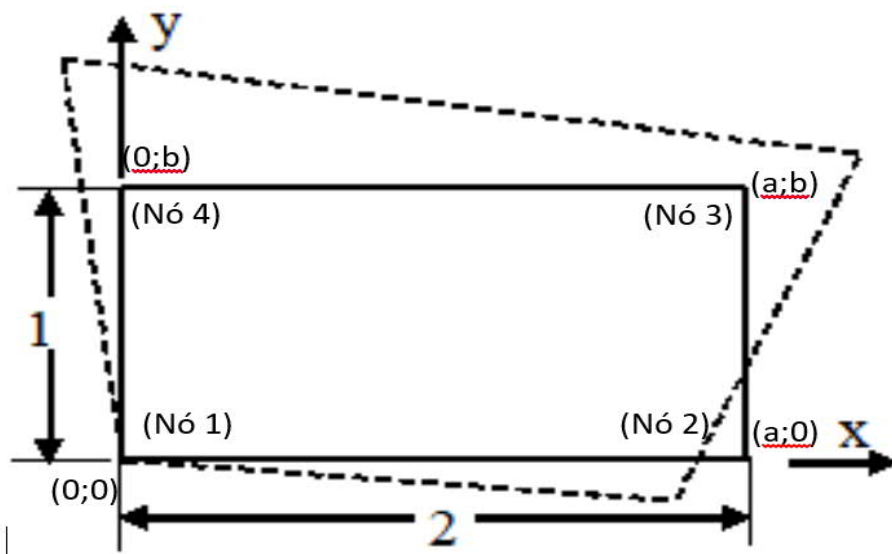
("Introdução ao Método dos Elementos Finitos", AEIST, Prof. Pedro Parreira)



(a partir de um campo de deslocamentos conhecido)

Num elemento laminar no estado plano de tensão o campo de deslocamentos nodais são u_i e v_i .
 Adoptam-se as funções de interpolação $N_i(x,y)$.
 O elemento tem lado x , $a=2$ m e lado y , $b=1$ m, $t=0.001$.

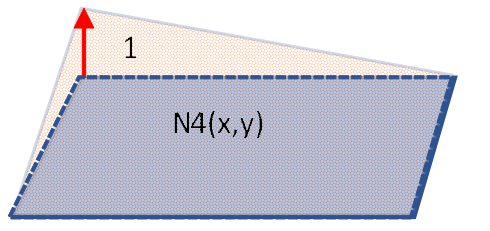
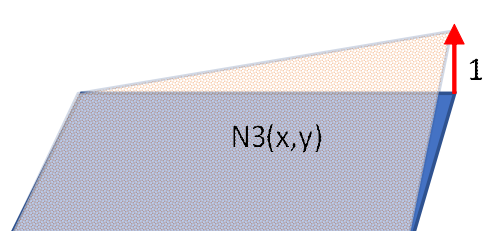
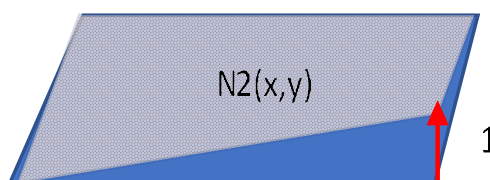
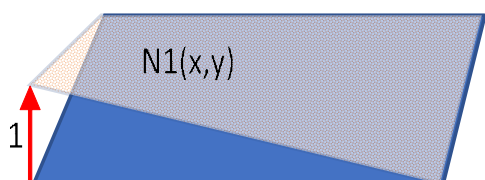
$a := 2$
 $b := 1$
 $E := 210 \cdot 10^6$
 $\nu := 0.3$



$N(x,y)$ matriz de funções de forma, usadas para aproximar o campo de deslocamentos, neste exemplo.

$$N(x,y) = [N_1(x,y) ; N_2(x,y) ; N_3(x,y) ; N_4(x,y)]$$

$$N(x,y) = \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) ; \left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) ; \left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{y}{b}\right) ; \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{y}{b}\right) \right]$$



1- Sabendo que os deslocamentos nodais os indicados a seguir apresente o campo de deslocamentos ($u(x,y)$; $v(x,y)$) no interior do elemento:

$u_1 := 0$ $u_2 := -3 \cdot 10^{-3}$ $u_3 := 3 \cdot 10^{-3}$ $u_4 := -2 \cdot 10^{-3}$
 $v_1 := 0$ $v_2 := -2 \cdot 10^{-3}$ $v_3 := 2 \cdot 10^{-3}$ $v_4 := 5 \cdot 10^{-3}$

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) \cdot u_i$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x,y) \cdot v_i$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \cdot 10^{-3} \\ 3 \cdot 10^{-3} \\ -2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot 10^{-3} \\ 2 \cdot 10^{-3} \\ 5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot u_i$$

$$u(x, y) := \frac{-3}{2000} \cdot x + \frac{1}{250} \cdot x \cdot y - \frac{1}{500} \cdot y$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot v_i$$

$$v(x, y) := \frac{-1}{1000} \cdot x - \frac{1}{2000} \cdot x \cdot y + \frac{1}{200} \cdot y$$

2- Determine o campo de deformações:

RELAÇÕES CINEMÁTICAS

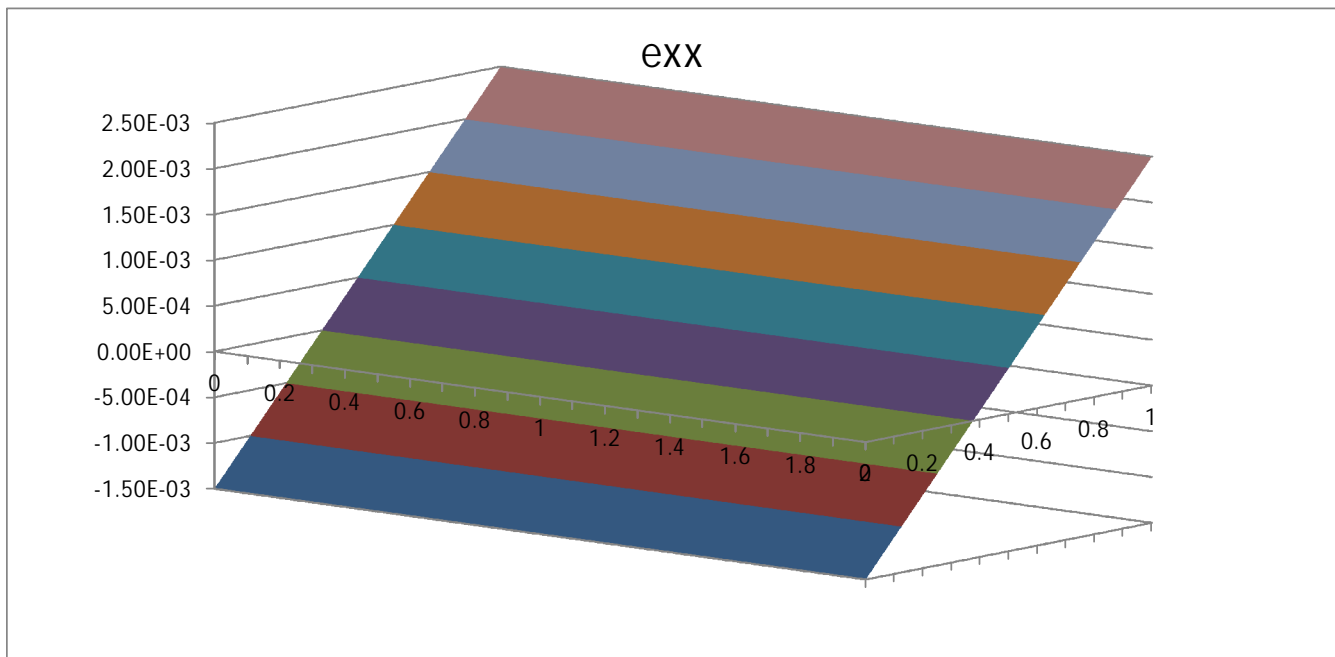
$$\{\varepsilon\} = [L] \cdot \{u\}$$

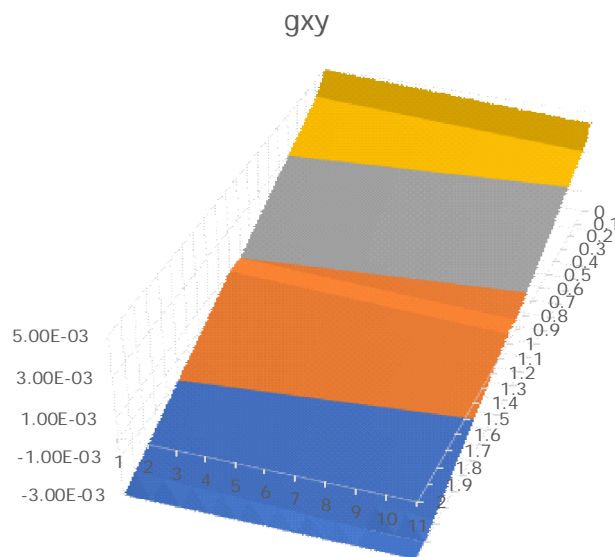
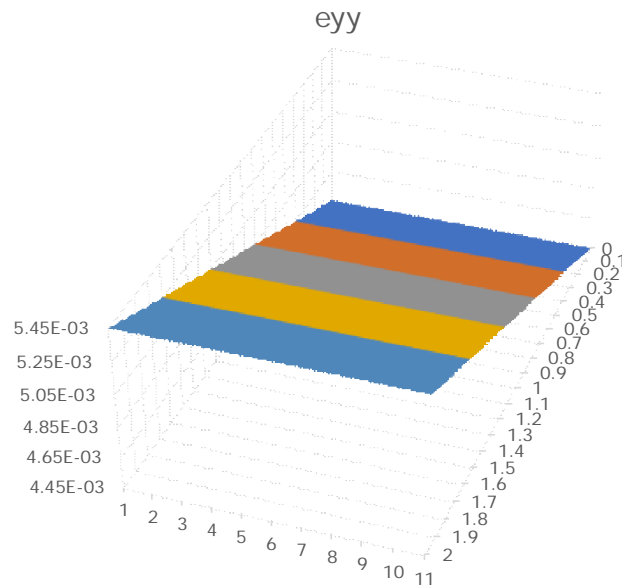
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \left(\frac{-3}{2000} \cdot x + \frac{1}{250} \cdot x \cdot y - \frac{1}{500} \cdot y \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{-1}{1000} \cdot x - \frac{1}{2000} \cdot x \cdot y + \frac{1}{200} \cdot y \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{-1}{1000} \cdot x - \frac{1}{2000} \cdot x \cdot y + \frac{1}{200} \cdot y \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{-3}{2000} \cdot x + \frac{1}{250} \cdot x \cdot y - \frac{1}{500} \cdot y \right) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x(x, y) := \frac{-3}{2000} + \frac{1}{250} \cdot y$$

$$\varepsilon_y(x, y) := \frac{-1}{2000} \cdot x + \frac{1}{200}$$

$$\gamma_{xy}(x, y) := \frac{-3}{1000} - \frac{1}{2000} \cdot y + \frac{1}{250} \cdot x$$





3- Calcule o campo de tensões:

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

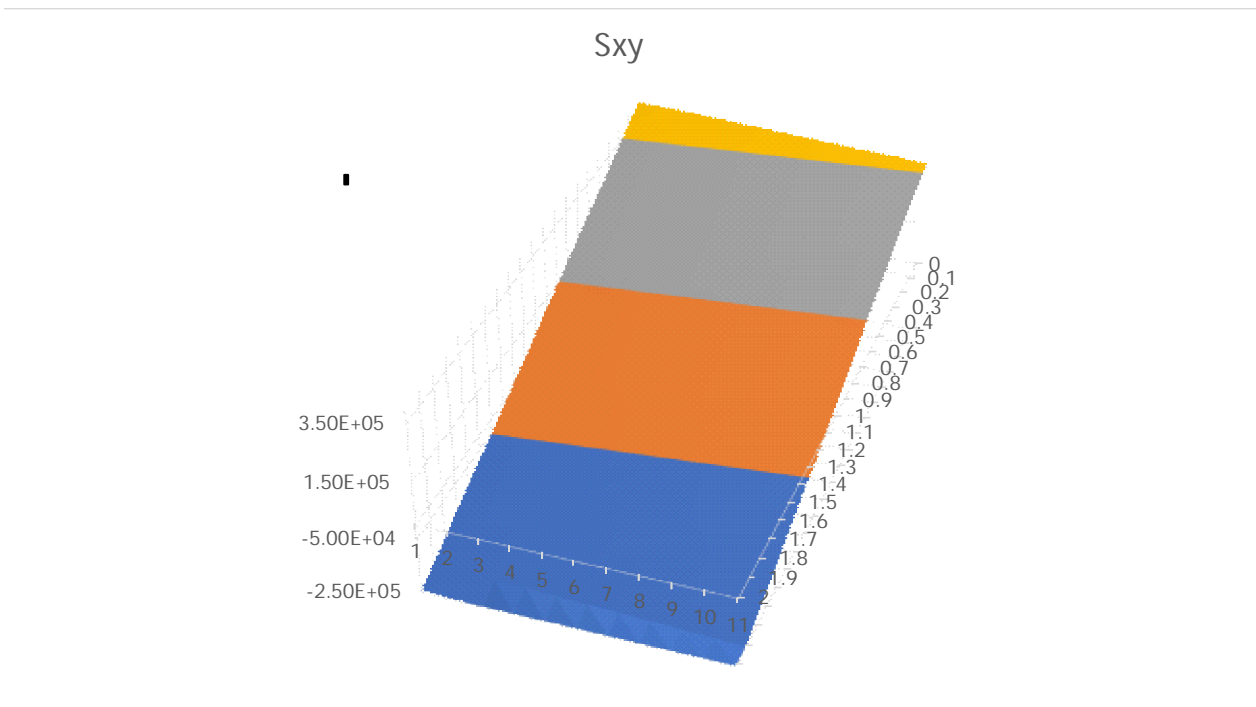
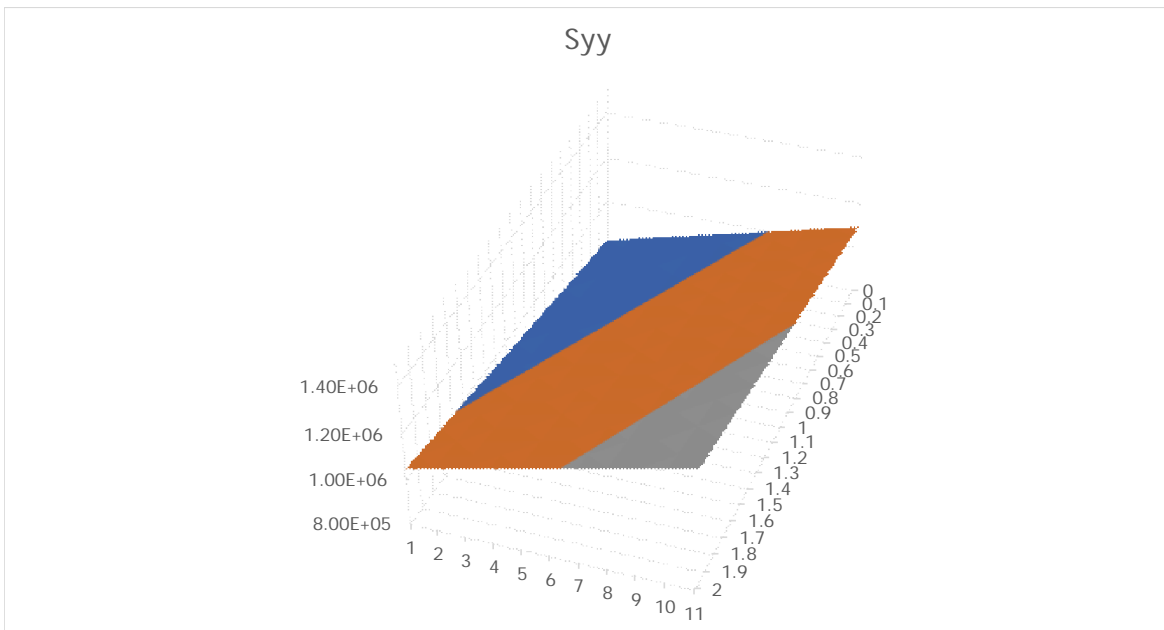
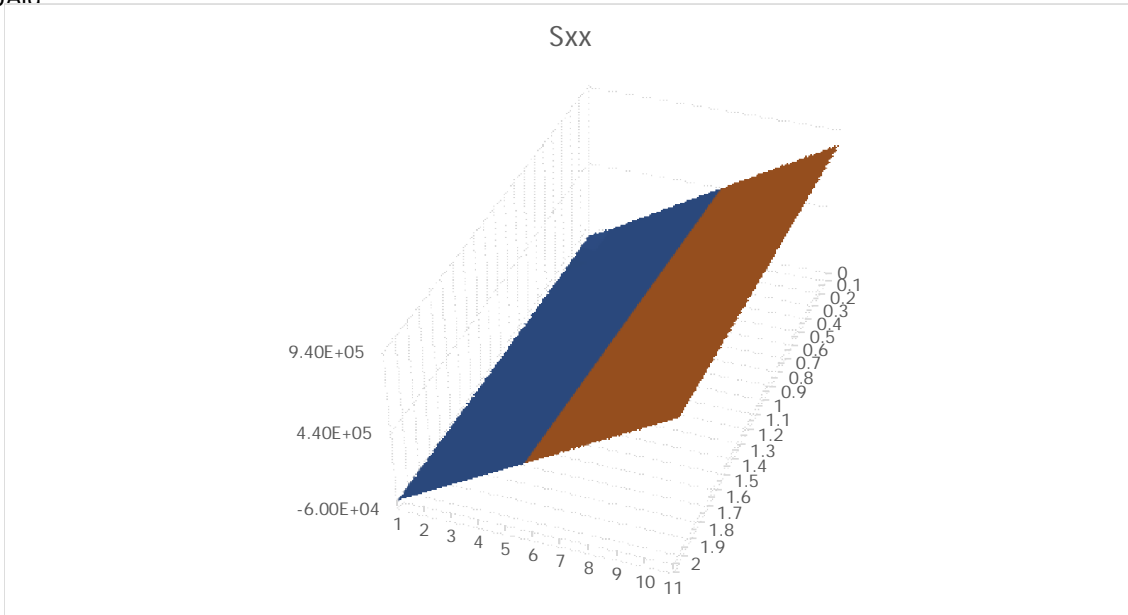
$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2.308 \cdot 10^8 & 6.923 \cdot 10^7 & 0 \\ 6.923 \cdot 10^7 & 2.308 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.077 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(x, y) := -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x$$

$$\sigma_{yy}(x, y) := 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x$$

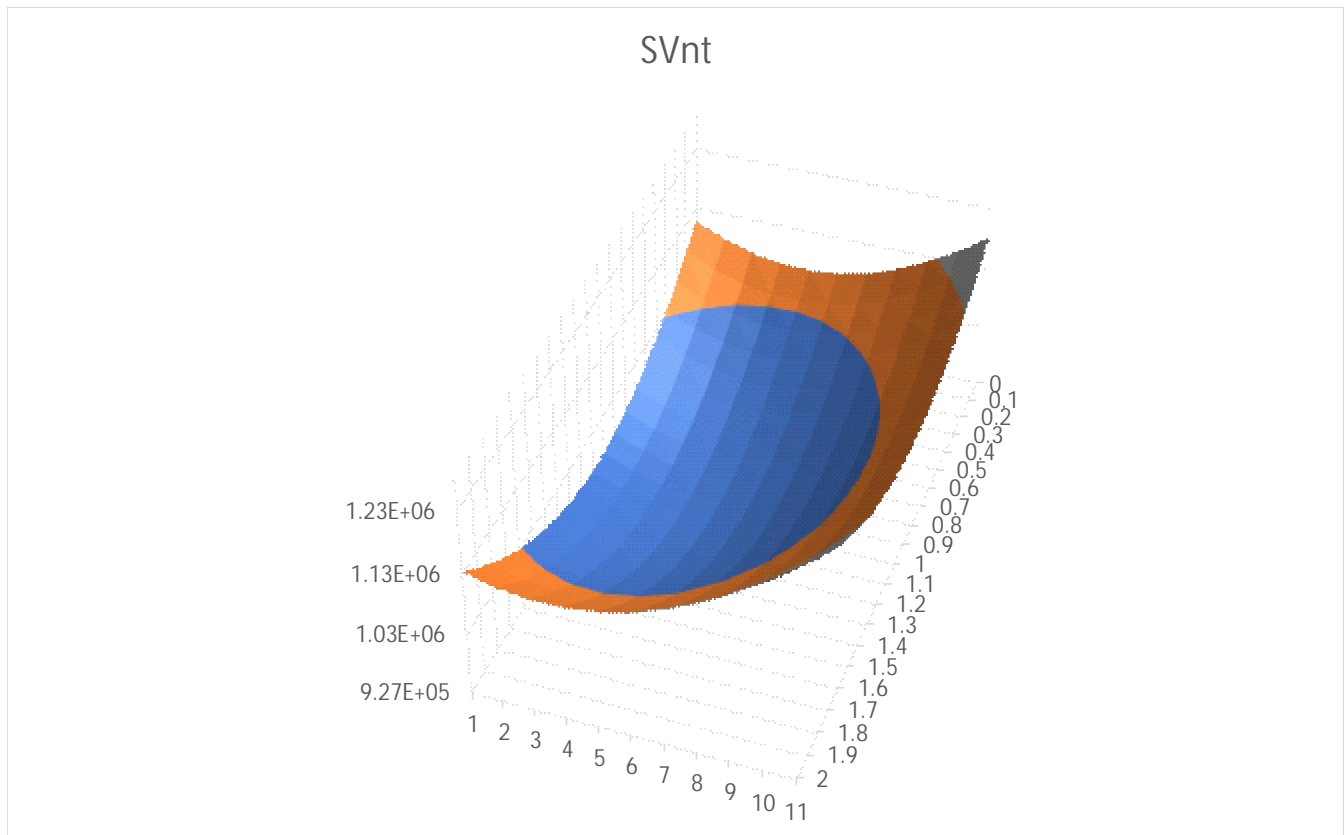
$$\sigma_{xy}(x, y) := -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix}$$



NOTA. Tensão de Von Mises (Tensão de Comparação, de referência etc.) usado no REAE, Eurocódigo 3, etc..
(Critério da energia distorcional máxima)

$$\sigma_{Vnt}(x, y) := \sqrt{\sigma_{xx}(x, y)^2 + \sigma_{yy}(x, y)^2 - \sigma_{xx}(x, y) \cdot \sigma_{yy}(x, y) + 3 \cdot \sigma_{xy}(x, y)^2}$$



$$1 \text{ kN/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ kgf/cm}^2$$

4 - Calcule as forças de massa :

RELAÇÕES de EQUILÍBRIO no interior do corpo
 $\sigma_{ji,i} + f_j = 0$

$$\frac{d}{dx} \sigma_{xx}(x, y) + \frac{d}{dy} \sigma_{xy}(x, y) + f_x = 0$$

$$\frac{d}{dx} \sigma_{xy}(x, y) + \frac{d}{dy} \sigma_{yy}(x, y) + f_y = 0$$

$$\frac{d}{dx} (-50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x) + \frac{d}{dy} (-242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x) + f_x(x, y) = 0$$

Logo: $f_x(x, y) := 75000$

$$\frac{d}{dx} (-242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x) + \frac{d}{dy} (1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x) + f_y(x, y) = 0$$

$f_y(x, y) := -600000$

Obtiveram-se forças de massa constantes no domínio porque as funções tensão são lineares.

RELAÇÕES de EQUILÍBRIO na fronteira do corpo

$$\{T\} = [n] \cdot \{\sigma\} \quad \Leftrightarrow \quad T_j = \sigma_{ji} \cdot n_i$$

$$\{T\} = [n] \cdot \{\sigma\} \quad \text{em que :}$$

5.1 - LADO $x=2$ $y=\text{qualquer}$

$$[n] \Leftrightarrow [L]^T \quad \text{ou seja,} \quad n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

para este lado vem: $n_x = 1$ $n_y = 0 \Rightarrow$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) := \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix} \quad T(2, 0) = \begin{bmatrix} -69280 \\ 403850 \end{bmatrix} \quad T(2, 1) = \begin{bmatrix} 853920 \\ 363465 \end{bmatrix}$$

5.2 - LADO $x=\text{qualquer}$ $y=1$

para este lado vem: $n_x = 0$ $n_y = 1 \Rightarrow$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) := \begin{bmatrix} -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \end{bmatrix} \quad T(0, 1) = \begin{bmatrix} -282695 \\ 1327075 \end{bmatrix} \quad T(2, 1) = \begin{bmatrix} 363465 \\ 1096275 \end{bmatrix}$$

5.3 - LADO $x=0$ $y=\text{qualquer}$

para este lado vem: $n_x = -1$ $n_y = 0 \Rightarrow$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 - 923200 \cdot y + 34615 \cdot x \\ 242310 + 40385 \cdot y - 323080 \cdot x \end{bmatrix}$$

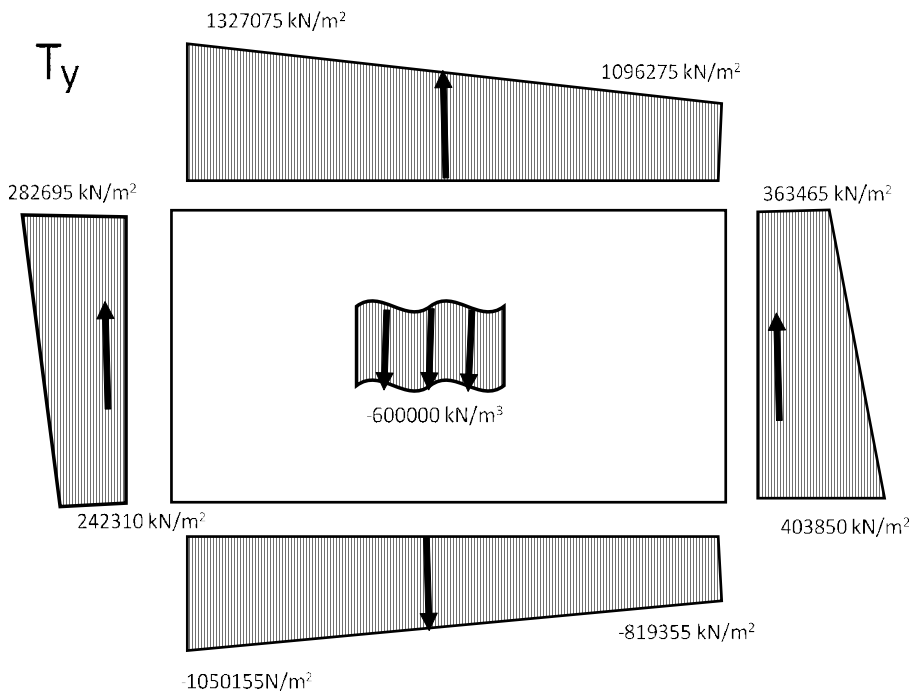
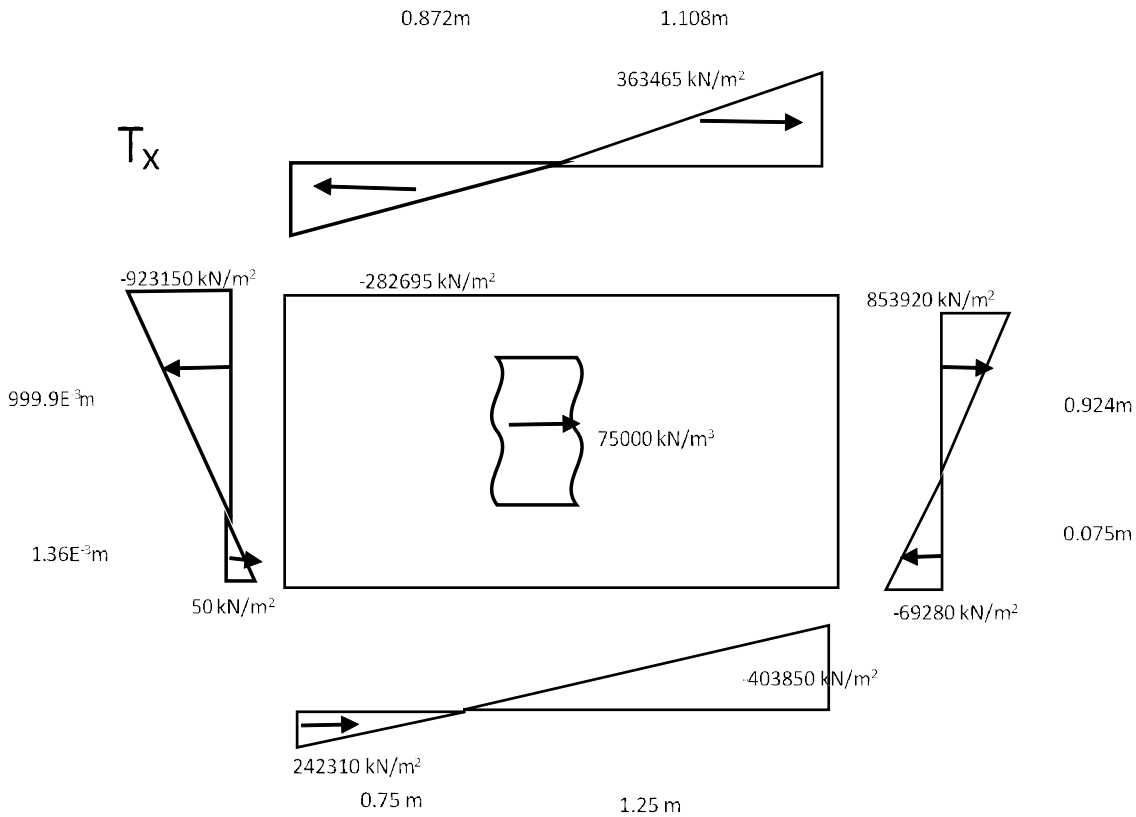
$$T(x, y) := \begin{bmatrix} 50 - 923200 \cdot y + 34615 \cdot x \\ 242310 + 40385 \cdot y - 323080 \cdot x \end{bmatrix} \quad T(0, 0) = \begin{bmatrix} 50 \\ 242310 \end{bmatrix} \quad T(0, 1) = \begin{bmatrix} -923150 \\ 282695 \end{bmatrix}$$

para este lado vem: $n_x = 0 \quad n_y = -1 \implies$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 + 923200 \cdot y - 34615 \cdot x \\ 1050155 + 276920 \cdot y - 115400 \cdot x \\ -242310 - 40385 \cdot y + 323080 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 242310 + 40385 \cdot y - 323080 \cdot x \\ -1050155 - 276920 \cdot y + 115400 \cdot x \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) := \begin{bmatrix} 242310 + 40385 \cdot y - 323080 \cdot x \\ -1050155 - 276920 \cdot y + 115400 \cdot x \end{bmatrix} \quad T(0, 0) = \begin{bmatrix} 242310 \\ -1050155 \end{bmatrix} \quad T(2, 0) = \begin{bmatrix} -403850 \\ -819355 \end{bmatrix}$$



RH = Somatório das áreas de tensão horizontais x espessura + força de massa x volume = -5.89 <> 0 kN

RV = Somatório das áreas de tensão vertical x espessura + força de massa x volume = 0.1 <> 0 kN

Logo, o campo de forças está equilibrado

Comentários:

Campo de Deslocamentos:

$$\{u\}$$

Campo de Forças:

$$\{f\}$$

Relações de Cinemáticas:

$$\{\varepsilon\} = [L] * \{u\}$$



Relações de Constitutivas:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$$



Relações de Equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i} + f_j &= 0 \\ T_j &= \sigma_{ji} * n_i \end{aligned}$$

Notas Importantes:

1) O problema aqui desenvolvido pressupôs *a priori* conhecidos os deslocamentos nodais, do qual se obteve o campo de deformações (compatível) - É assim "cinematicamente admissível" porque cumpre as relações cinemáticas no seu domínio e nas condições de apoio (os deslocamentos nodais são conhecidos *a priori*).

2) Para cumprir as relações de equilíbrio no interior do corpo, isto é, $\sigma_{j,i} + f_j = 0$, foram determinados os valores f_x e f_y (que deixaram de ser uma das incógnitas do problema!). Nestas igualdades estão implícitas as relações constitutivas,

$\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$. A partir das tensões no interior do corpo cumpriu-se o equilíbrio na fronteira fazendo,

$$T_j = \sigma_{ji} * n_i.$$

O campo de tensões é "estaticamente equilibrado/admissível" porque cumpre o equilíbrio no interior e na fronteira do corpo.

3) Como o campo elástico é "cinematicamente admissível" e "estaticamente equilibrado" é "exacto".

4) Para aferir o erro no equilíbrio determinaram-se as resultantes horizontal (RH) e vertical (RV) que deveriam ser teoricamente nulas. Ocorre um pequeno erro porque o desenvolvimento de todo o problema se baseou em funções de "aproximações" de deslocamento ($u(x,y)$ e $v(x,y)$) que naturalmente não são as exactas (... o próprio nome indica que são "funções de aproximação" ... de deslocamentos.

5.1) Na generalidade dos problemas de mecânica dos sólidos o problema é inverso daquele que aqui foi desenvolvido. Isto é. Conhecem-se as forças (de massa, superfície, pontuais) mas pretende-se saber o campo de deslocamentos.

5.2) Para este fim cumprem-se naturalmente as relações de equilíbrio, constitutivas e cinemáticas. Como o problema é indeterminado é necessário impor condições de fronteira cinemáticas e estas serão ao no mínimo três, as necessárias para que o corpo não tenha movimentos de corpo rígido.

5.3) As incógnitas do problema (incógnitas primárias) serão os deslocamentos nodais ($u_1, a, u_4, e, v_1, a, v_4$) que não foram restringidos. Os valores numéricos obtidos serão também aproximados, porque o problema está "construído" em funções de aproximação de deslocamentos aproximadas.

5.4) O campo de deslocamentos (no interior do corpo) é determinado como sendo uma combinação linear das funções de aproximação sendo os coeficientes de ponderação os deslocamentos nodais.

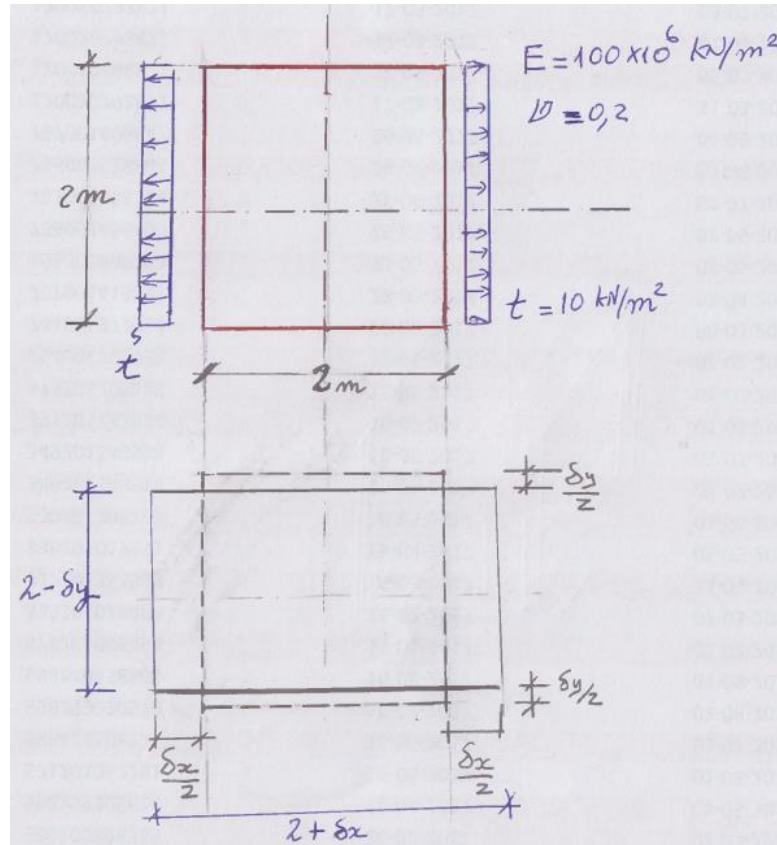
5.5) Determina-se o campo e deformações (incógnita secundária), que como é uma derivada do de deslocamentos têm menos precisão que este.

6) No decurso do problema determinam-se as tensões de Von Mises. Estas tem natureza de tensão normal, e são tensões resultantes absolutas num ponto, não dependendo por isso da direcção (ou orientação num determinado referencial cartesiano). Podem por isso mesmo ser comparadas directamente com tensões normais resistentes dos materiais obtidos em ensaios de tracção, como acontece para os aços, permitindo a verificação de segurança ao fenómeno de cedência do material (ou plastificação).

Análise de Placas

Não é em geral possível obter a solução exacta para uma determinada placa. A obtenção de soluções apenas compatíveis ou apenas equilibradas é, muitas vezes, o único recurso. O método dos elementos finitos permite encontrar aproximações tão boas quanto se deseje para estes elementos.

Há contudo, casos em que soluções exactas existem e é um desses casos que vai ser examinado de seguida.



Resolução:

$$\sigma_{xx}(x=+1, y) = 10 \text{ kNm} / 0.001 \text{ m} = 10000 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{a1})$$

$$\sigma_{xx}(x=-1, y) = +10 \text{ kNm} / 0.001 \text{ m} = +10000 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{a2})$$

$$\text{qualquer que seja } (x,y) \quad \sigma_{yy}(x,y) = 0 \quad \sigma_{xy}(x,y) = 0 \quad (\text{b})$$

$$\epsilon_x(x,y) = \sigma_{xx} / E = 10^{-4}$$

$$\epsilon_y(x,y) = -\nu * \epsilon_x = -0.2 * 10^{-4} = -2 * 10^{-5}$$

$$\text{mas se } \epsilon_x(x,y) = \frac{\partial u_x(x,y)}{\partial x} \Rightarrow u_x(x,y) = \int \epsilon_x(x,y) dx = \epsilon_x(x,y) * x + C_1 = 10^{-4} * x + C_1$$

$$\text{impondo a condição de fronteira: } u_x(x=0, y=0) = 0 \Rightarrow C_1=0, \text{ logo, } u_x(x,y) = 10^{-4} * x$$

$$\text{igualmente também se obtém: } \epsilon_y(x,y) = \frac{\partial u_y(x,y)}{\partial y} \Rightarrow u_y(x,y) = \int \epsilon_y(x,y) dy = \epsilon_y(x,y) * y + C_2 = -2 * 10^{-5} * y + C_2$$

$$\text{impondo a condição de fronteira: } u_y(y=0) = 0 \Rightarrow C_2=0, \text{ logo, } u_y(x,y) = -2 * 10^{-5} * y$$

Resumindo, os campos de deslocamentos são:

$$u_x(x, y) = 10^{-4} * x \quad \text{ou simplificando a escrita, } u_x = 10^{-4} * x$$

$$u_y(x, y) = -2x10^{-5}y \quad \text{ou simplificando a escrita } u_y = -2*10^{-5} * y$$

Resumindo os campos de deformações são:

$$\epsilon_x(x, y) = 10^{-4} \text{ ou simplificando a escrita, } \epsilon_x = 10^{-4}$$

$$\epsilon_y(x, y) = -2*10^{-5} \text{ ou simplificando a escrita } \epsilon_y = -2*10^{-5}$$

● Confirme se a solução é exacta

⇒ Verificar as relações de Compatibilidade deformação-deslocamento:

a) o **interior** do corpo (domínio), ou seja $\{\epsilon\}=[L]\{u\}$

$$\epsilon_x(x, y) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} = 10^{-4}$$

$$\epsilon_y(x, y) = \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} = -2*10^{-5}$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} = 0$$

b) na **fronteira** (no ponto de apoio que é no centro da placa!) -já o foram quando determinaram os coeficientes C1 e C2.

$$u_x(0,0)=0$$

$$u_y(0,0)=0$$

Conclusão: verificam-se as relações de compatibilidade.

⇒ Verificar as relações de Equilíbrio:

a) verificar no interior do corpo : $\sigma_{ji,i} + f_j = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(x, y)}{\partial y} + f_x(x, y) = 0 & (d) \\ \frac{\partial \sigma_{yx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y)}{\partial y} + f_y(x, y) = 0 & (e) \end{cases}$$

que requer o cálculo prévio de $\{\sigma\}=[D]*\{\epsilon\} \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}(x, y) \\ \epsilon_{yy}(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = 104167778 \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 10^{-4} \\ -2 * 10^{-5} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

Note que $f_x = f_y = 0$, porque nada é dito no enunciado quanto à existência de forças de massa. Assim colocando (f) nas expressões (d) e (e) verifica-se ser verdade, logo, existe equilíbrio interno.

b) verificar na fronteira $T_j = \sigma_{ji} * n_i$, ou seja:

$$T_x(x, y) = \begin{cases} \sigma_{xx}(x, y) * n_x + \sigma_{xy}(x, y) * n_y & (g) \\ \sigma_{yx}(x, y) * n_x + \sigma_{yy}(x, y) * n_y & (h) \end{cases}$$

- aqui será necessário verificar o equilíbrio nas faces superior, inferior, direita e esquerda.

- Exemplificamos para a face direita (Faceta +X). Nessa face o vector direccional é:

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

-substituindo em (g) e (h) os valores de (i) e ainda os de (a), (b) e (c) obtemos:

$$T_x(x, y) = 10000 * 1 + 0 * 0 = 10000 \quad \text{kN/m}^2$$

$$T_y(x, y) = 0 * 1 + 0 * 0 = 0$$

que são de facto as forças aplicadas na superfície direita. Logo existe equilíbrio estático na mesma. Deverá fazer o mesmo para as restantes e verificará que existe equilíbrio total.

Como as relações de compatibilidade e de equilíbrio no interior e na fronteira são satisfeitas a solução é **exacta**.

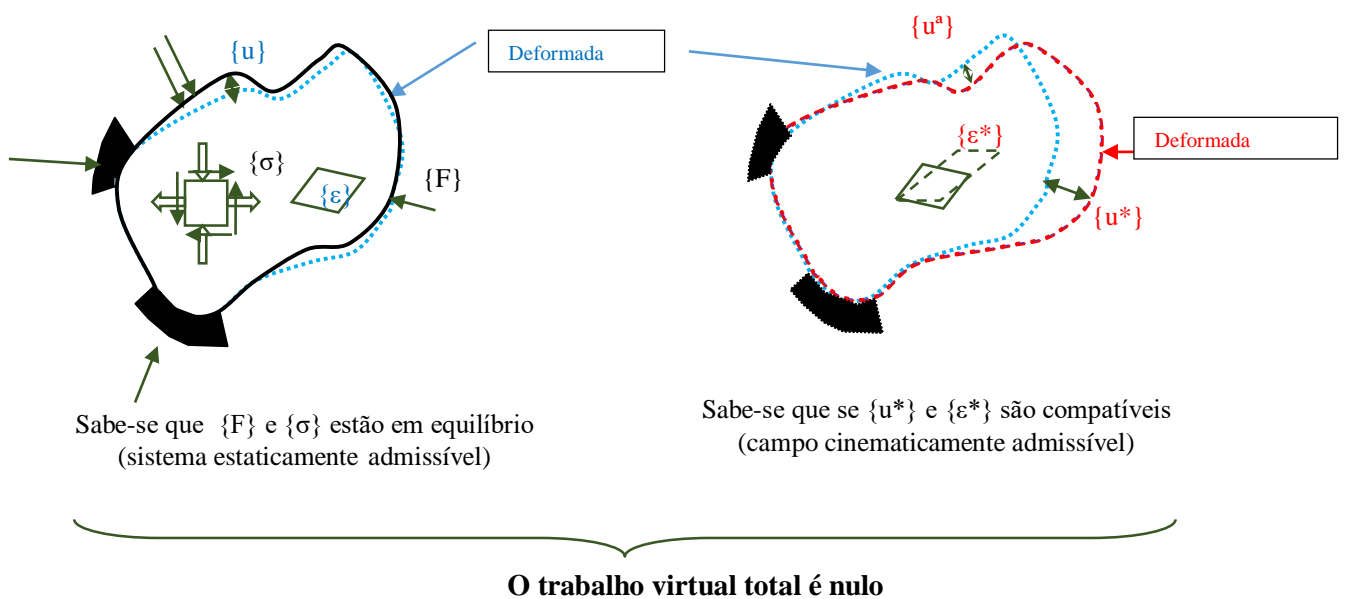
Fim.

2.1 - Teorema do Trabalho [27]

O trabalho total anula-se para qualquer campo elástico estaticamente admissível (equilibrado) u , ε , σ , ao associar-se a qualquer campo elástico cinematicamente admissível u^* , ε^* , σ^* , ambos definidos no domínio D e na fronteira S .

$$\int_D \{f\}^T \{u^*\} dD + \int_S \{T\}^T \{u^*\} dS = \int_D \{\sigma\}^T \{\varepsilon^*\} dD \quad (2.1)$$

(Nota: por simplicidade o integral na fronteira S engloba todas as forças de superfície distribuídas T e pontuais P)

2.2- Teorema dos Deslocamentos Virtuais. Revisão.[2, 9, 14]

O Teorema dos Deslocamentos Virtuais (também designado por Princípio dos Trabalhos Virtuais) é uma particularização do Teorema do Trabalho.

Deslocamento virtual é qualquer deslocamento compatível com as restrições (apoios) da estrutura garante continuidade material no interior do corpo (ou seja não abrem fissuras) por isso se diz cinematicamente admissível.

O Teorema dos Deslocamentos Virtuais enuncia-se da seguinte forma:

"Uma estrutura está em equilíbrio com um sistema de forças exteriores, se ao se impuser deslocamentos virtuais arbitrários (δu), mas compatíveis com as condições de apoio, o trabalho realizado pelas forças exteriores sobre os deslocamentos virtuais (trabalho virtual externo), for igual ao trabalho realizado pelas tensões internas sobre as deformações virtuais ($\delta \varepsilon$) produzidas pelos deslocamentos virtuais (trabalho virtual interno)".

Aplicar-se então este princípio a um corpo deformável. Seja um corpo num estado de tensões $\{\sigma\}$ em equilíbrio com as acções presentes na nesse corpo, isto é, com os campos de forças de massa $\{f\}$, de tracção $\{t\}$ e pontuais $\{P\}$ (representadas por $\{T\}$). O corpo apresentará deformações reais.

Imponha-se ao corpo um *incremento de deslocamentos virtuais* $\{\delta u\}$ e que geram deformações $\{\delta \varepsilon\}$ *virtuais*, os quais têm que ser cinematicamente admissíveis e compatíveis com as condições de fronteira (ver figura da página anterior).

Durante o deslocamento virtual o campo de forças realizará um incremento de trabalho externo W_{ext} definido pelo produto do campo das forças pelo dos deslocamentos virtuais:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_D \{\delta u\}^T \{f\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{T\} dS \quad (2.1)$$

O incremento de deslocamentos virtuais gera incrementos de deformações virtuais que multiplicados pelo estado de tensão resulta em trabalho virtual interno de deformação, δW_{int} , que é igual à energia virtual de deformação interna acumulada na estrutura:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_D \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dD = \int_D \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dD \quad (2.2)$$

(o produto interno é comutativo $\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$).

Atendendo Teorema dos Deslocamentos Virtuais a estrutura está em equilíbrio, e por isso:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (2.3)$$

ou seja:

$$\int_D \{f\}^T \{\delta u\} dD + \int_S \{t\}^T \{\delta u\} dS = \int_D \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dD \quad (2.4)$$

$$\{\delta \varepsilon\}^T = \left\{ \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{xz} \quad \delta \gamma_{yz} \right\}$$

sendo:

$$\{\sigma\}^T = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \right\} \quad (2.5 \text{ a } 2.9)$$

$$\{\delta u\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta u_x(x, y, z) \\ \delta u_y(x, y, z) \\ \delta u_z(x, y, z) \end{array} \right\}; \{f\} = \left\{ \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ f_z \end{array} \right\}; \{t\} = \left\{ \begin{array}{l} t_x \\ t_y \\ t_z \end{array} \right\}$$

$$\{\delta u\}_i = \left\{ \begin{array}{l} \delta u_x(x_i, y_i, z_i) \\ \delta u_y(x_i, y_i, z_i) \\ \delta u_z(x_i, y_i, z_i) \end{array} \right\} \text{ associado a } \{P\}_i = \left\{ \begin{array}{l} P_x \\ P_y \\ P_z \end{array} \right\}, \text{ ou,} \quad (2.10 \text{ e } 2.11)$$

$$\{u\}_i = \{\theta\}_i = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x(x_i, y_i, z_i) \\ \theta_y(x_i, y_i, z_i) \\ \theta_z(x_i, y_i, z_i) \end{array} \right\} \text{ associado a } \{M\}_i = \left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_z \end{array} \right\}. \quad (2.12 \text{ e } 2.13)$$

sendo i um ponto genérico do corpo de coordenadas (x_i, y_i, z_i) . Como se constata desta representação simbólica, $\{\delta u\}_i$ são deslocamentos generalizados virtuais do ponto i (ou nó i), e representa deslocamentos de translação ou "deslocamentos" de rotação, consoante P_i seja uma força concentrada propriamente dita ou um momento concentrado. A expressão (2.4) é uma equação de equilíbrio entre tensões internas no corpo e acções aplicadas no seu interior (forças de massa $\{f\}$) ou na fronteira (forças de superfície $\{t\}$, $\{P\}$ e $\{M\}$).

=====
 Vamos desenvolver a igualdade anterior: (2.4)

sendo: $\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix}$ forças de massa $[N/m^3]$ no domínio (ou volume) D , $\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}$ forças de superfície distribuídas $[Nm^{-2}]$ ou concentradas $[N]$ na superfície S_T do corpo

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_x(x, y, z) \\ \delta u_y(x, y, z) \\ \delta u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} \text{ deslocamentos virtuais [m]}$$

Como $\{\varepsilon\} = [L]*\{u\}$ também $\{\delta\varepsilon\} = [L]*\{\delta u\}$, isto é:

$$\text{Deformações virtuais, isto é } \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{Bmatrix} \quad \text{(\u00C9 Relações Cinemáticas)}$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}\} \quad \text{vector das tensões (reais).} \quad (c)$$

MAS a Relação Constitutiva, $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ desenvolvida dá:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \Rightarrow \{\sigma\}^T = ([D]\{\varepsilon\})^T = \{\varepsilon\}^T [D]^T \quad (d)$$

$$\text{Mas } \{\varepsilon\} = [L]*\{u\} \quad (e)$$

$$\text{e conseq\u00FCentemente } \{\varepsilon\}^T = ([L]*\{u\})^T = \{u\}^T [L]^T \quad (f)$$

$$\text{que substituído em (d) fica: } \{\sigma\}^T = ([D]\{\varepsilon\})^T = \{u\}^T [L]^T [D]^T \quad (g)$$

$$\text{mas [D é simétrico e por isso: } [D]^T = [D] \quad (h)$$

Como já vimos $\{\varepsilon\} = [\mathbf{L}]^* \{\mathbf{u}\}$ e por isso $\{\delta\varepsilon\} = [\mathbf{L}]^* \{\delta\mathbf{u}\}$ (i)

Colocando (g) e (i) e em 2.4, e atendendo a (h), a expressão 2.4 fica com o seguinte aspecto, ou seja o Teorema de Deslocamentos Virtuais:

$$\int_{\mathbf{D}} \{\mathbf{f}\}^T \{\delta\mathbf{u}\} d\mathbf{D} + \int_{\mathbf{S}} \{\mathbf{t}\}^T \{\delta\mathbf{u}\} d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{D}} \{\mathbf{u}\}^T \left([\mathbf{L}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{L}] \right) \{\delta\mathbf{u}\} d\mathbf{D}$$

(j)

representa agora o equilíbrio global de "modelos" contínuos, escrita em termos das forças de massa $\{\mathbf{f}\}$, de superfície (distribuídas ou pontuais) $\{\mathbf{t}\}$, das relações constitutivas do material $[\mathbf{D}]$ e em função do campo de deslocamentos real $\{\mathbf{u}\}$, parecida à equação de Navier.

3- Primeiro Teorema de Castigliano

Caso seja conveniente discretizar o problema deveremos ter em conta o Primeiro Teorema de Castigliano.

Imagine-se uma estrutura sujeita a n cargas P_1, P_2, \dots, P_n , que foram aplicadas gradualmente desde zero até ao seu valor final. Estas acções produzem os deslocamentos d_1, d_2, \dots, d_n na direcção e sentido da linha de acção de cada força. Neste processo de carregamento a energia de deformação interna, U , é igual ao trabalho das cargas durante a sua aplicação. Considerando estas hipóteses pode-se enunciar o primeiro teorema de Castigliano.

Primeiro Teorema de Castigliano: A derivada da energia de deformação U em relação a qualquer deslocamento d_i é igual à força correspondente P_i , desde que se expresse a energia de deformação em termos dos deslocamentos d_i , $U = U(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

$$\boxed{P_i = \frac{\partial U}{\partial d_i}} \quad (2.14)$$

Mais genericamente podemos imaginar a estrutura constituída por n pontos, os *nós* da estrutura, sendo d_i os deslocamentos (generalizados) desses nós (graus de liberdade do nó), e P_i como sendo as forças nodais (generalizadas) que representam (i) forças ou momentos directamente aplicadas ao nó, ou (ii) forças nodais generalizadas equivalentes às forças de massa, distribuídas ou concentradas.

Como exemplo, e recorrendo aos conhecimentos de Resistência de Materiais, a energia de deformação interna de uma mola, de uma barra pouco esbelta em tracção/compressão ou de uma viga (considerando apenas a parcela de deformação por flexão -despreza-se a de corte) com comportamento elástico linear são respectivamente:

$$\text{- mola: } U = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad e$$

$$\text{- barra pouco esbelta em tracção/compressão : } U = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx \quad e$$

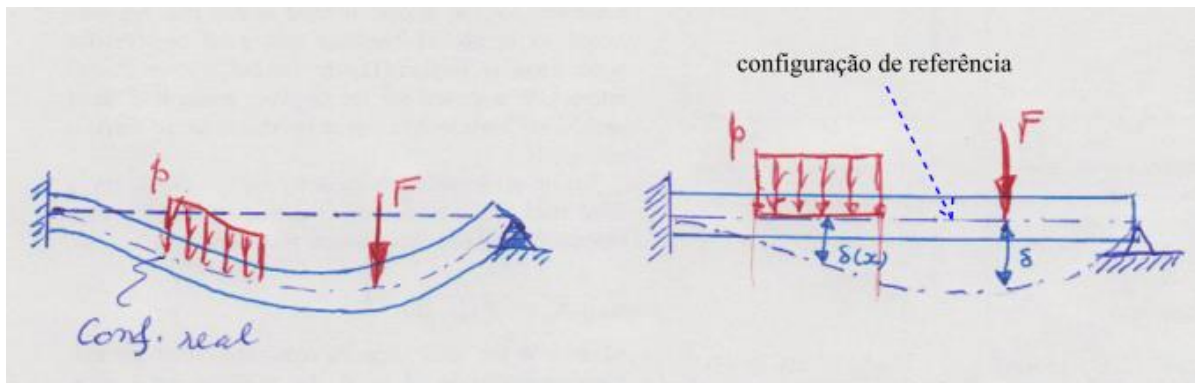
$$\text{- viga em flexão elástica: } U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx .$$

Para aplicar o Teorema de Castigliano teríamos que escrever $\delta(d_i)$ ou $M(d_i)$, sendo d_i deslocamentos de pontos (nós) a escolher com certo critério.

2.4- Método da Energia Potencial

Dada uma estrutura define-se como configuração real e de referência aquelas associadas respectivamente à configuração da estrutura com e sem carregamento.

A energia potencial total, V , de um sistema mecânico ou estrutural com *configuração real* (deformada) é o trabalho realizado por todas as forças internas e externas quando o sistema é (re)movido da sua *configuração real* para a sua *configuração de referência* [14].



Durante o movimento implícito nesta definição, o trabalho realizado pelas forças internas é igual à energia de deformação elástica, que na estrutura com configuração real está presente no seu interior como energia potencial. Assim, a **energia potencial interna** (ou energia de deformação ou energia potencial elástica) é a energia de deformação elástica, U , acumulada na estrutura durante o processo de carregamento até à configuração real. Durante este processo as tensões variam gradualmente desde zero até ao seu valor final, e por isso a energia interna acumulada é dada por:

$$U = \int_V \int_0^{\epsilon_{0ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \quad (2.15)$$

sendo ϵ_{0ij} o estado de deformação no final.

Num corpo com comportamento elástico linear a energia potencial interna é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V W dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.16)$$

sendo V o volume do corpo (ou domínio D) e W a densidade de energia de deformação ($W = U / \text{Volume}$).

Ao se remover a estrutura da sua forma real para a de referência a quantidade de trabalho recuperado será igual à energia de deformação.

A **energia potencial externa** (ou energia potencial das forças externas), V_e , é o trabalho realizado por estas forças durante o processo de retorno da estrutura da posição real à posição de referência. Esta energia é igual a um trabalho (W) negativo, porque cada carga (massas e forças de superfície) têm um movimento contrário à sua direcção de actuação durante este movimento,

$$V_e = -W \quad (2.17)$$

ou, em sentido lato:

$$V_e = -\int_D \{f\}^T \{u\} dD - \int_S \{T\}^T \{u\} dS \quad (2.18)$$

Em termos discretos o seu valor é simbolicamente escrito por $V_e = -\sum F_i D_i$, sendo " F_i " o campo de forças aplicadas generalizadas, e " D_i " o campo de deslocamentos generalizados.

Como se sabe todas as massas estão sujeitas à acção da gravidade, e por isso cada corpo contém em si uma energia potencial de gravidade ($W_g = m \cdot g \cdot h$). Fisicamente (isto é, de modo menos abstracto) podemos dizer que a energia potencial das forças externas é a variação da energia potencial das cargas quando se deslocam da configuração real da estrutura para a de referência.

(Deve-se salientar que a energia potencial de uma força F_i não é igual ao trabalho efectuado por ela durante o processo de carregamento, pois neste último caso a força varia gradualmente de zero até ao seu valor final, enquanto no primeiro caso a força se mantém constante. O trabalho durante o processo de carregamento é igual à energia de deformação interna acumulada na estrutura).

A **energia potencial total**, V , do sistema é:

$$V = U + V_e \quad (2.19)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \left[\int_V \{f\}^T \{u\} dV + \int_S \{T\}^T \{u\} dS \right] \quad (2.20)$$

Considerando o teorema do trabalho verificamos que:

$$V_e = -\int_D \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dD = -2U \quad (2.21)$$

e consequentemente

$$V = -U. \quad (2.22)$$

2.4.1- Teorema da Mínima Energia Potencial Total (em estruturas contínuas)

O campo elástico que equilibra estruturas ou sistemas contínuos é o campo estaticamente admissível que minimiza a energia potencial total para todos os campos cinematicamente admissíveis:

$$\delta V = \delta U + \delta V_e = \int_D \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dD - \int_D \{f\}^T \{\delta u\} dD - \int_S \{T\}^T \{\delta u\} dS = 0 \quad (2.23)$$

(1ª variação da energia potencial total = 0)

e

$$\delta^2 V = \int_D \{\delta \sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dD > 0. \quad (2.24)$$

(2ª variação da energia potencial total > 0)

Para corpos com comportamento elástico linear a energia potencial total do sistema é expandida como:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \left[\int_V \{f\}^T \{u\} dV + \int_S \{T\}^T \{u\} dS \right] \quad (2.25)$$

Pretende-se agora "discretizar" o problema, ou seja, substituir a estrutura contínua por uma malha de pontos (ou nós) e depois explicitar a energia potencial total em termos dos deslocamentos generalizados d_i lidos nesses pontos. Esses deslocamentos generalizados também se podem designar por graus de liberdade do sistema. Obtém-se, para um sistema discreto de pontos:

$$V = U + V_e = U - W = U - \sum F_i D_i \quad (2.26)$$

Para o desenvolvimento desta igualdade há que:

(i)- escrever o campo de deformações $\{\varepsilon\}$, e o campo de deslocamentos $\{u\}$ e $\{u\}_i$ em termos dos deslocamentos generalizados d_i ;

(ii)- substituir o campo de forças "Fi" (isto é, o conjunto de forças aplicadas de massa, distribuídas e concentradas) por forças nodais a elas equivalentes, P_i ;

(iii)- substituir o campo de deslocamentos "Di" contínuo (isto é, a função $u=u(x,y,z)$ ou a função $\theta=\theta(x,y,z)$) por valores discretos de deslocamentos generalizados d_i .

$$\begin{aligned} V = U + V_e &\Rightarrow V(d_i) = U(d_i) + V_e(d_i) \Rightarrow \\ V(d_i) &= U(d_i) - \sum F_i D_i \Rightarrow V(d_i) = U(d_i) - \sum P_i^* d_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

Derivando a energia total em ordem a cada um dos deslocamentos d_i resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial d_i} = \frac{\partial U}{\partial d_i} - \sum_i \frac{\partial (P_i \cdot d_i)}{\partial d_i} = \frac{\partial U}{\partial d_i} - P_i \quad (2.28)$$

Atendendo ao Primeiro Teorema de Castigliano Generalizando, $\frac{\partial U}{\partial d_i} = P_i$, logo,

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial d_i} = 0} \quad (2.29)$$

ou seja: $\frac{\partial V}{\partial d_1} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial d_2} = 0$; ... $\frac{\partial V}{\partial d_n} = 0$.

Chegámos novamente ao **Teorema da Energia Potencial Total** que pode ser definido por dois princípios:

(i)

Princípio Estacionário da Energia Potencial (PEEP) (Princípio de Kirchhoff)

As condições de equilíbrio de uma estrutura são satisfeitas quando a energia potencial total tem valor estacionário, $\frac{\partial V}{\partial d_i} = 0$.

Este ponto de equilíbrio da estrutura corresponde a um ponto de derivada nula da função "energia potencial total do sistema" em relação a todos os graus de liberdade da estrutura. Este ponto singular pode corresponder a um valor mínimo, neutro ou máximo daquela função, o qual está associado respectivamente ao equilíbrio estável, indiferente e instável da estrutura. O tipo de equilíbrio é determinado a partir da segunda derivada consoante esta seja positiva, nula ou negativa.

(ii)

Princípio da Mínima Energia Potencial (PMEP)

- A estrutura é estável se o valor da energia potencial total for estacionária e mínima, isto é, se

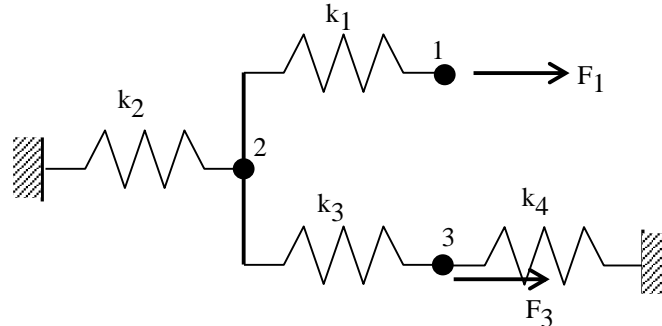
$$\frac{\partial V}{\partial d_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial d_i^2} > 0 \quad (2.30 \text{ e } 2.31)$$

para todo o d_i . (para estruturas com graus de liberdade unidireccionais e unirotacionais):

Para se aplicar este método é, como vimos, necessário explicitar a energia em termos de deslocamentos, d_i .

2.5.1- EXEMPLO 1

É dado o seguinte sistema de molas de rigidez $K_1=4000$ kN/m, $K_2=8000$ kN/m, $K_3=3000$ kN/m e $K_4=5000$ kN/m sobre o qual actuam as forças $F_1=25$ kN e $F_3=40$ kN. Determine os deslocamentos finais e as forças internas em cada mola.



Resolução:

O sistema estrutural tem 3 graus de liberdade, os deslocamentos dos nós 1, 2 e 3, designados respectivamente d_1, d_2 e d_3 . Arbitre-se como positivo o sentido da esquerda para a direita.

A energia potencial interna do sistema, U , corresponde ao somatório das energias de deformação das molas. A energia de deformação de uma mola com comportamento elástico linear é:

$$U_m = 1/2 * k_m * (\delta_m)^2$$

sendo δ_m a deformação da mola (campo de deformações), isto é, o deslocamento relativo das extremidades da mola.

No caso presente o campo de deformações pode-se escrever em função do campo de deslocamentos como:

$$\delta_1 = d_1 - d_2 ; \delta_2 = d_2 ; \delta_3 = d_3 - d_2 ; \delta_4 = -d_3$$

Logo a energia potencial das forças internas é:

$$U = \frac{1}{2} k_1 * (d_1 - d_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 * (d_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 * (d_3 - d_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 * (-d_3)^2$$

A energia potencial das forças externas é:

$$V_e = -(F_1 * d_1 + F_3 * d_3)$$

A energia potencial do sistema é:

$$V = U + V_e = \frac{1}{2} k_1 * (d_1 - d_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 * (d_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 * (d_3 - d_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 * (-d_3)^2 - F_1 d_1 - F_3 d_3$$

Para haver equilíbrio temos que minimizar a energia potencial, ou seja, $\frac{\partial V}{\partial d_i} = 0$, de onde se

obtem:

$$\frac{\partial V}{\partial d_1} = k_1(d_1 - d_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_2} = -k_1(d_1 - d_2) + k_2 d_2 - k_3(d_3 - d_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_3} = k_3(d_3 - d_2) + k_4 d_3 - F_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4000 & -4000 & 0 \\ -4000 & 15000 & -3000 \\ 0 & -3000 & 8000 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0103 \\ 0.0041 \\ 0.0065 \end{Bmatrix} \text{ m.}$$

As forças em cada uma das molas são dadas por $F_m = k_m * \delta_m$

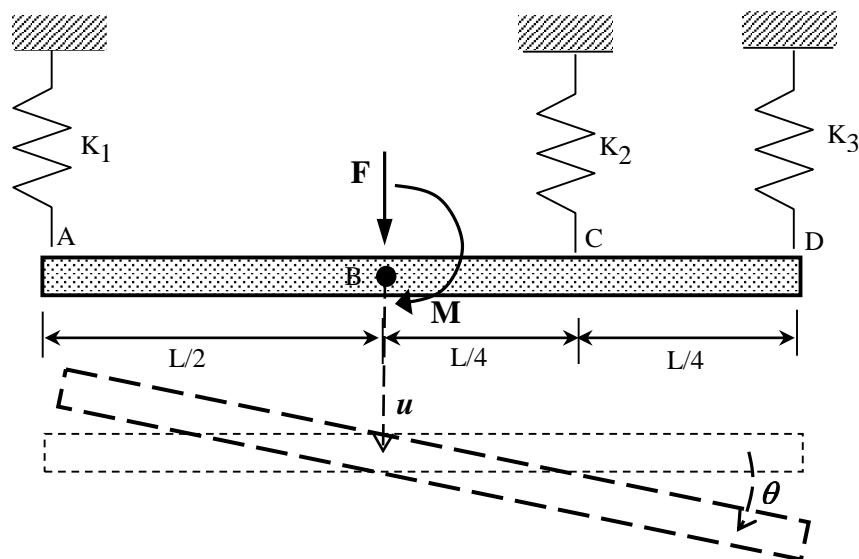
$$F_1 = k_1 * (d_1 - d_2) = 24.8 \text{ kN (tracção)}$$

$$F_2 = k_2 * d_2 = 32.8 \text{ kN (tracção)}$$

$$F_3 = k_3 * (d_3 - d_2) = 7.2 \text{ kN (tracção)}$$

$$F_4 = k_4 * (-d_3) = -32.5 \text{ kN (compressão)}$$

2.5.2 - EXEMPLO 2:



A barra rígida só pode ter deslocamentos de translação verticais e rotações. Determine o valor das forças finais instaladas em cada mola quando actuam no ponto B as forças F e M .

Resolução:

A barra tem dois graus de liberdade, um de translação e outro de rotação. Associam-se estes graus de liberdade, por exemplo ao movimento que o ponto B pode apresentar, o deslocamento u e a rotação θ .

As deformações δ_i das molas podem escrever-se em função daqueles deslocamentos (u e θ):

$$\delta_A = u - \frac{L}{2}\theta, \quad \delta_C = u + \frac{L}{4}\theta, \quad \delta_D = u + \frac{L}{2}\theta$$

A energia potencial das forças interiores é a energia de deformação das molas:

$$U = \sum_i \frac{1}{2} k_i \delta_i^2 = \frac{1}{2} k_A \left(u - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_C \left(u + \frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_A \left(u + \frac{L}{2}\theta\right)^2$$

A energia potencial das forças exteriores é o trabalho efectuado por F e M :

$$V_e = -(F * u + M * \theta)$$

A energia potencial do sistema pode-se escrever como:

$$V = \frac{1}{2} k_A \left(u - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_C \left(u + \frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_A \left(u + \frac{L}{2}\theta\right)^2 - Fu - M\theta$$

Atendendo à condição de estacionaridade da energia potencial para que haja equilíbrio:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (2k_A + 2k_B + 2k_C)u + \frac{1}{2} \left(-k_A L + k_B \frac{L}{2} + k_3 L\right) \theta = F$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(-k_A L + k_B \frac{L}{2} + k_3 L\right) u + \frac{1}{2} \left(k_A \frac{L^2}{2} + k_B \frac{L^2}{8} + k_C \frac{L^2}{2}\right) \theta = M$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}, \text{ Resolvendo o sistema obtemos os valores de } u \text{ e } \theta, \text{ e a partir destes as}$$

deformações $\delta_A, \delta_C, \delta_D$ nas molas.

As Forças internas nas molas podem ser determinadas directamente por $F_m = K_m * \delta_m$.

2.6- Método de Rayleigh-Ritz

Quando se usa o método da energia potencial é necessário expressar a energia potencial V em função de certos deslocamentos nodais (os graus de liberdade eleitos na estrutura). Quando a estrutura é simples (portanto, com poucos de graus de liberdade) e o carregamento é simples, é possível deduzir a expressão da energia de deformação em termos de tais deslocamentos.

Em estruturas complexas tal não é possível ou é muito trabalhoso. Nestes casos procura-se definir os deslocamentos ao longo da estrutura (ou das barras) por funções aproximadas do "campo" real de deslocamentos, as funções de deslocamento. Estas configurações aproximadas do campo de deslocamentos, e presumidas *a priori*, contêm um ou mais parâmetros de deslocamento indeterminados, que "funcionam" como se fossem os graus de liberdade da estrutura.

As funções de deslocamento podem ser geradas como uma combinação linear de certas funções matemáticas bem conhecidas, as funções de forma. Ocorrem dois casos distintos:

(i) quando as funções de deslocamento englobam toda a estrutura, os coeficiente de combinação entre as referidas funções de forma são valores que fisicamente não têm significado e/ou representam os deslocamentos nodais da estrutura;

(ii) quando as funções de deslocamento se referem apenas a partes da estrutura, os elementos finitos, os coeficientes de combinação entre as referidas funções de forma são valores que representam os deslocamentos nodais da estrutura. Por isso, o fraccionamento da estrutura em elementos finitos tem maior vantagem.

A energia de deformação ao ser agora expressa em como combinação linear de funções de forma, em que os factores de combinação são os coeficientes de combinação leva a que estes, que são um número finito, sejam as incógnitas do problema matemático a resolver. Passa-se assim de um problema contínuo para um problema discreto, o que se designa por discretização.

No sentido de satisfazer a condição de estacionaridade, basta agora derivar a energia de deformação, em ordem aos coeficientes de combinação ou deslocamentos nodais, deslocamento e igualar a zero, obtendo-se um sistema de equações. Determinando o valor das suas incógnitas ficamos a conhecer a deformada da estrutura, ou melhor, um valor aproximado desta. Entretanto, como as reacções, esforços e tensões podem ser expressos em das derivadas (a ordem das derivadas depende do tipo de problema físico) função dos deslocamentos, estas entidades podem agora ser facilmente calculadas. Como se referiu o "campo" de deslocamentos obtido é aproximado. Os "campos" de esforços, reacções, será menos aproximado porque resulta da derivada(s) do primeiro, o "campo" de deslocamentos (por exemplo, as tensões axiais numa barra de tracção são a 1ª derivada da função deslocamento axial, os momentos flectores numa viga são a segunda derivada

da função deslocamento). Por isso, neste método, as reacções, esforços e tensões poderão não ficar em equilíbrio com as cargas aplicadas.

A precisão do método de Raleigh-Ritz depende da escolha da função de deslocamento (ou combinação das funções de forma). Esta, quanto mais próxima estiver da deformação real mais precisão dará aos resultados finais. De um modo geral, quanto maior o número de parâmetros de deslocamento existir, mais exacta será a solução.

A condição mínima que tem que ser respeitada para aplicação do Método de Rayleigh-Ritz é que as funções de forma têm que satisfazer as condições de fronteira cinemáticas do problema.

O Método de Rayleigh-Ritz é um método de energia potencial aplicado a estruturas onde é difícil encontrar uma solução exacta, é extremamente poderoso sendo usado na Análise Estrutural, Análise de Dinâmica, Análise de Estabilidade de Estruturas, placas, etc., e serve de base ao Método dos Elementos Finitos. Pelo facto de se basear na energia potencial estacionária este método é aplicável a estruturas com comportamento não linear.

2.6.1- EXEMPLO

Viga simplesmente apoiada com comprimento L e carga pontual P a meio vão. Determine a flecha a meio vão assim como os momentos a meio e a um quarto vão [14].

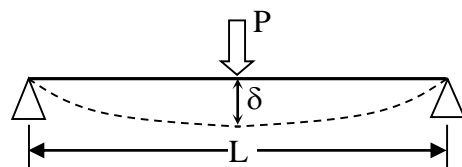
2.6.1.1- 1º Caso

Vamos aproximar a deformada da estrutura a uma função sinusoidal onde o parâmetro de deslocamento é a amplitude δ a meio vão.

a) Escolha da função deslocamento (forma)

$$v(x) = \delta \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

Se $x=L/2$ vem $v(L/2)=\delta$, que é a flecha a meio vão.



b) Verificação das condições de fronteira cinemáticas

$$b)1) v(x = 0) = \delta \sin\left(\frac{\pi}{L} * 0\right) = 0$$

$$b)2) v(x = L) = \delta \sin\left(\frac{\pi}{L} L\right) = 0 \quad \therefore \text{satisfaz.}$$

c) Cálculo da energia potencial do sistema, V .

c)1) Energia potencial de forças internas (energia de deformação interna)

- a energia de deformação resulta essencialmente da deformação por flexão da viga, e por isso:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx.$$

Temos que definir U em termos de $v(x)$.

$$\text{Como sabemos } \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow M(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

$$\text{Ora } \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -\delta \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \text{ logo } U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^4} \delta^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx.$$

$$\text{Mas } \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}, \quad \text{Logo } U = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \delta^2.$$

c)2) Energia potencial das forças exteriores (simétrico do trabalho das forças exteriores)

$$V_e = -W = -P\delta$$

c)3) Energia Potencial do Sistema

$$V = U + V_e = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \delta^2 - P\delta$$

d) Imposição da condição de estacionaridade

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\pi^4 EI}{4L^3} \delta^2 - P\delta \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \delta - P = 0$$

Em geral temos um sistema de equações, mas como só há um parâmetro de deslocamento só temos uma equação.

$$\text{Solução: } \delta = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI}$$

e) Cálculo da flecha a meio vão

$$v(x) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \Rightarrow v\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0.02053 * \frac{PL^3}{EI}$$

(valor exacto: $v\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0.02083 * \frac{PL^3}{EI}$, erro de 2%.)

f) Cálculo de esforços

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{2PL}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$M(x=L/4)=0.143 PL \quad , \text{ valor exacto: } M(L/4)=0.125PL \quad (\text{Erro } +14\%)$$

$$M(x=L/2)=0.203 PL \quad , \text{ valor exacto: } M(L/2)=0.250PL \quad (\text{Erro } -18\%)$$

Conclusão:

O erro de 2% nos deslocamentos é desprezável. Contudo nos esforços os erros de 14% e -18% representam resultados grosseiros. Como se pode observar os momentos são proporcionais à segunda derivada do campo de deslocamentos, que como é de esperar degradam o valor da "exactidão" do campo de deslocamentos. Neste caso o erro pode ser reduzido adoptando-se mais funções de forma. Por outro lado, neste método não se sabe se os resultados estão acima ou abaixo da solução exacta.

2.7.1.2- 2º Caso

Vamos aproximar a deformada da estrutura a uma função sinusoidal com duas parcelas, ou seja, vamos sobrepor duas funções de forma, $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

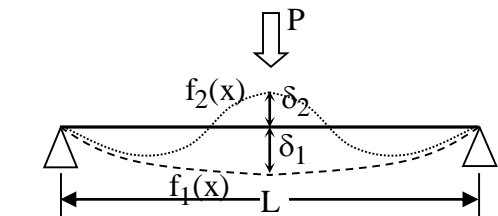
a) Escolha da função deslocamento (forma)

$$v(x) = \delta_1 f_1(x) + \delta_2 f_2(x) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \delta_2 \sin\left(3\frac{\pi}{L} x\right)$$

b) Verificação das condições de fronteira cinemáticas

$$b)1) \quad v(x=0) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} * 0\right) + \delta_2 \sin\left(3\frac{\pi}{L} * 0\right) = 0$$

$$b)2) \quad v(x=L) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} * L\right) + \delta_2 \sin\left(3\frac{\pi}{L} * L\right) = 0$$



∴ satisfaz.

c) Cálculo da energia potencial do sistema, V.

c)1) Energia potencial das forças interiores

- a energia de deformação resulta essencialmente da deformação por flexão da viga, e por isso:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx.$$

Temos que definir U em termos de $v(x)$.

$$\text{Como sabemos } \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow M(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$$

$$\text{Ora } \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -\delta_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \delta_2 \left(3\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(3\frac{\pi}{L} x\right),$$

logo

$$U = \frac{EI L}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \delta_1 \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) + \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 \delta_2 \sin \left(3 \frac{\pi}{L} x \right) \right]^2 dx =$$

$$U = \frac{\pi^4 EI}{2L^4} \left[\delta_1^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} x \right) dx + 18 \delta_1 \delta_2 \int_0^L \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \sin \left(3 \frac{\pi}{L} x \right) dx + 81 \delta_2^2 \int_0^L \sin^2 \left(3 \frac{\pi}{L} x \right) dx \right]$$

sabendo que:

$$\int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} x \right) dx = \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^L \sin \left(\frac{\pi}{L} x \right) \sin \left(3 \frac{\pi}{L} x \right) dx = 0$$

Vem

$$U = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (\delta_1^2 + 81 \delta_2^2).$$

c)2) Energia potencial das forças exteriores

$$V_e = -P \cdot v(L/2) \text{ sendo, } v\left(\frac{L}{2}\right) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi L}{2L}\right) + \delta_2 \sin\left(3 \frac{\pi L}{2L}\right) = \delta_1 - \delta_2$$

c)3) Energia Potencial do Sistema

$$V = U + V_e = \frac{\pi^4 EI}{4L^3} (\delta_1^2 + 81 \delta_2^2) - P(\delta_1 - \delta_2)$$

d) Imposição da condição de estacionaridade

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_1} = 0 \Rightarrow \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \delta_1 - P = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 81 \cdot \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \delta_2 + P = 0$$

Da resolução deste sistema de equações obtemos os parâmetros de deslocamento δ_1 e δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{-PL^3}{81\pi^4 EI}$$

A função deslocamento pode então escrever-se:

$$v(x) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \frac{2PL^3}{81\pi^4 EI} \sin\left(3 \frac{\pi}{L} x\right)$$

e) Cálculo da flecha a meio vão

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0.02078 \cdot \frac{PL^3}{EI}, \text{ valor quase exacto, erro } 0.2\%.$$

f) Cálculo de esforços

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{2PL}{9\pi^2} \left(9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \sin\left(3 \frac{\pi}{L} x\right) \right)$$

$$M(x=L/4)=0.127 PL \quad , \text{ valor exacto: } M(L/4)=0.125PL \quad (\text{Erro } +1.6\%)$$

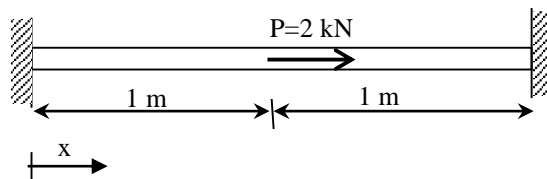
$$M(x=L/2)=0.225 PL \quad , \text{ valor exacto: } M(L/2)=0.250PL \quad (\text{Erro } -11\%)$$

Conclusão:

Os erros diminuíram em relação ao 1º Caso. Para maior precisão deveríamos colocar mais parcelas na função deslocamento. Esta deve ter uma forma simétrica porque o carregamento também o é.

2.6 2.- EXEMPLO

Determine e desenhe o campo de tensões ao longo da barra biencastada sujeita a uma carga pontual aplicada a meio vão e segundo o seu eixo de valor $P=2 \text{ kN}$.



Resolução:

a) Adopção de uma função deslocamento

Os pontos da barra só terão deslocamentos segundo x , e as suas fibras só apresentarão deformações de encurtamento ou alongamento segundo x .

Vamos aproximar o campo de deslocamentos a um polinómio de grau 2. A função deslocamento é: $u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$. A função deslocamento real (que obviamente não conhecemos) é assim aproximada por um polinómio cujos parâmetros a_i são os parâmetros de deslocamento.

b) Satisfação das condições de fronteira cinemáticas.

$$u(0)=0 \Rightarrow a_1 = 0, \quad u(L)=u(2)=0 \Rightarrow a_2 = -2 * a_3$$

$$\text{logo } u(x) = -2a_3 * x + a_3 * x^2$$

c) Energia potencial do sistema, $V=U+W$

c)1) Energia potencial de deformação interna

Numa barra solicitada axialmente (estado uniaxial de tensão) a energia de deformação interna da barra com comportamento elástico linear é:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EA} \left(\frac{EA\delta}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA (\varepsilon(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx$$

$$\text{logo: } U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(-2a_3 + a_3x^2 \right)^2 dx = \frac{4}{3} EA a_3^2$$

c)2) Energia de potencial das forças exteriores

$$V_e = -P * u(x=1) = -P * -a_3$$

c)3) A energia potencial total do sistema é:

$$V = U + V_e = \frac{4}{3}EAa_3^2 - P * (-a_3)$$

d) Condição de estacionaridade da energia potencial.

$$\frac{\partial V}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}EAa_3 + P = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-3P}{8EA}$$

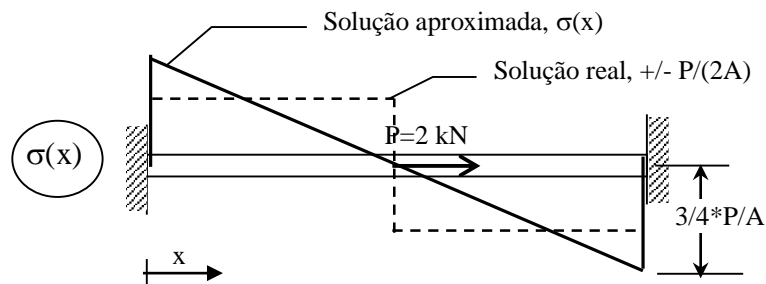
e) Função deslocamento

$$u(x) = -2a_3 * x + a_3 * x^2 = \frac{3P}{8EA} (2x - x^2)$$

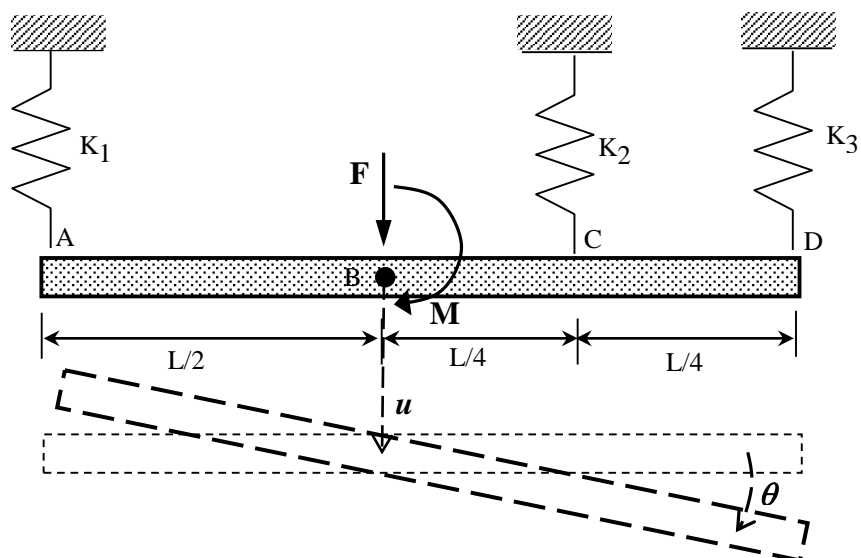
f) Tensão na barra

$$\text{Campo de deformações: } \varepsilon(x) = \frac{\partial}{\partial x}(u(x)) = \frac{3P}{8EA} (2 - 2x)$$

$$\text{Campo de tensões: } \sigma(x) = E\varepsilon(x) = \frac{3P}{4A} (1 - x) = \frac{3}{2A} (1 - x)$$



2.4.3- EXERCÍCIO



A barra rígida só pode ter deslocamentos de translação verticais e rotações. Determine o valor das forças finais instaladas em cada mola quando actuam no ponto B as forças F e M .

Resolução:

A barra tem dois graus de liberdade, um de translação e outro de rotação. Associam-se estes graus de liberdade, por exemplo ao movimento que o ponto B pode apresentar, o deslocamento u e a rotação θ .

As deformações δ_i das molas podem escrever-se em função daqueles deslocamentos (u e θ):

$$\delta_A = u - \frac{L}{2}\theta, \quad \delta_C = u + \frac{L}{4}\theta, \quad \delta_D = u + \frac{L}{2}\theta$$

A energia potencial das forças interiores é a energia de deformação das molas:

$$U = \sum_i \frac{1}{2} k_i \delta_i^2 = \frac{1}{2} k_A \left(u - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_C \left(u + \frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_A \left(u + \frac{L}{2}\theta\right)^2$$

A energia potencial das forças exteriores é o trabalho efectuado por F e M :

$$V_e = -(F * u + M * \theta)$$

A energia potencial do sistema pode-se escrever como:

$$V = \frac{1}{2} k_A \left(u - \frac{L}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_C \left(u + \frac{L}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_A \left(u + \frac{L}{2}\theta\right)^2 - Fu - M\theta$$

Atendendo à condição de estacionaridade da energia potencial para que haja equilíbrio:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (2k_A + 2k_B + 2k_C)u + \frac{1}{2} \left(-k_A L + k_B \frac{L}{2} + k_3 L\right) \theta = F$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(-k_A L + k_B \frac{L}{2} + k_3 L\right) u + \frac{1}{2} \left(k_A \frac{L^2}{2} + k_B \frac{L^2}{8} + k_C \frac{L^2}{2}\right) \theta = M$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}, \text{ Resolvendo o sistema obtemos os valores de } u \text{ e } \theta, \text{ e a partir destes as}$$

deformações $\delta_A, \delta_C, \delta_D$ nas molas.

As Forças internas nas molas podem ser determinadas directamente por $F_m = K_m * \delta_m$.

2.7 - Método dos Elementos Finitos [27]

Formulação do Método dos Elementos Finitos através do método dos resíduos ponderados.

Seja um campo estaticamente admissível:

$$[L]^T \{\sigma_0\} + \{f\} = \{0\} \text{ no domínio } D, \quad (2.32)$$

com as condições de fronteira estáticas

$$\{t\} = [n]\{\sigma_0\} \text{ em } S_2 \text{ (onde há cargas externas aplicadas)}. \quad (2.33)$$

Adoptando a função de aproximação $\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + \text{Erro}$ resultam os seguintes resíduos:

$$R_D = [L]^T \{\sigma\} + \{f\} \neq \{0\} \quad (D \text{ é o domínio}) \quad (2.34)$$

$$R_{S_2} = \{t\} - \{\bar{t}\} \neq \{0\} \quad (S_2 \text{ é a "fronteira" ou zona onde as cargas são localizadas}) \quad (2.35)$$

A formulação forte da equação geral dos resíduos pesados (EGRP) fica:

$$\int_D ([L]^T \{\sigma\} + \{f\})^T * \{W_D\} dD + \int_{S_2} (\{t\} - \{\bar{t}\})^T * \{W_{S_2}\} dS = 0 \quad (2.36)$$

ou seja,

$$\int_D ([L]^T \{\sigma\})^T * \{W_D\} dD + \int_D \{f\}^T * \{W_D\} dD + \int_{S_2} (\{t\} - \{\bar{t}\})^T * \{W_{S_2}\} dS = 0 \quad (a)$$

ou ainda,

$$\int_D \{\sigma\}^T [L] * \{W_D\} dD + \int_D \{f\}^T * \{W_D\} dD + \int_{S_2} (\{t\} - \{\bar{t}\})^T * \{W_{S_2}\} dS = 0 \quad (b)$$

Integrando por partes, duas vezes, a primeira parcela, obtemos depois de simplificar:

$$- \int_D \{\sigma\}^T ([L]\{W_D\}) dD + \int_S [n]\{\sigma\}^T * \{W_D\} dS + \int_D \{f\}^T * \{W_D\} dD + \int_{S_2} (\{t\} - \{\bar{t}\})^T * \{W_{S_2}\} dS = 0 \quad (d)$$

Vamos aplicar o Teorema dos Deslocamentos Virtuais. O campo elástico supõe-se estaticamente admissível (equilibrado) e cinematicamente admissível (compatível). Assume-se a de Galerkin a qual adopta para as funções de aproximações de deslocamentos (δu) as mesmas funções para a dos resíduos de ponderação $\{W_D\} = \{\delta u\}$ e $\{W_{S_2}\} = -\{\delta u\}$.

(2.37, 2.38)

A escolha destas funções de ponderação exige que se cumpra $\{\delta u\} = \{0\}$ em S_1 . ("fronteira" onde os deslocamentos são nulos ou conhecidos) por outro lado:

$$\{\delta \varepsilon\} = \delta([L]\{u\}) = [L]\{\delta u\} \quad (2.39)$$

A EQRP fica:

$$-\int_D \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dD + \int_{S_2} [n] \{\sigma\}^T * \{\delta u\} dS + \int_D \{f\}^T * \{\delta u\} dD - \int_{S_2} (\{t\} - \{\bar{t}\})^T * \{\delta u\} dS = 0 \quad (2.40)$$

que simplificando dá a equação do **Teorema dos Deslocamentos Virtuais**.

$$\boxed{\int_D \{f\}^T \{\delta u\} dD + \int_{S_2} \{\bar{t}\}^T \{\delta u\} dS = \int_D \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dD} \quad (2.41)$$

A formulação a partir do método dos resíduos ponderados aplica-se em geral à *equação diferencial* que equilibra o problema físico em causa, um troço de viga em equilíbrio, um troço de material em no estado estacionário de transmissão de calor, etc. É uma formulação complexa mas poderosa. O que se demonstra **neste** parágrafo, é que para *o caso de equilíbrio de sólidos a abordagem pelo método dos resíduos ponderados conduz à equação do Teorema dos deslocamentos Virtuais*, mais comumente mais "amigável" e conhecida pelos engenheiros civis.

2.7.1 - Modelo Discreto

Etapas / Passos gerais para implementação do método dos elementos finitos:

Passo 1: Análise do problema e Definição da Malha. Identificação do tipo e número de graus de liberdade elementares e globais e avaliação da dimensão do problema . Identificação da variável de campo (ou variável primária). Sistemas de coordenadas globais, locais e naturais. O domínio e a fronteira são discretizados em partes mais pequenas, elementos finitos:

$$D = \sum_e D^e \quad S = \sum_e S^e \quad (2.42 \text{ e } 2.43)$$

Passo 2: Geração do Elemento Finito

Passo 2.1: Funções de aproximação. Em cada elemento finito (EF) recorre-se a uma *aproximação directa local* da variável de campo (deslocamentos no caso de mecânica de sólidos):

$$\{u\} = [N] \{u^e\} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{u\} = \sum_i (N_i * u_i)} \quad (2.44)$$

(valor da variável de campo no interior do EF em função dos seus valores nodais)

com: $\{u^e\}$: graus de liberdade elementares (isto é, do EF),

$[N] = [N_1 ; N_2 ; \dots]$: matriz de funções de forma

$\{u\}$: valor da variável de campo no interior do EF

Passo 2.2: Relações Cinemáticas. As relações entre deformações e deslocamentos, e posteriormente, entre deformações no interior do corpo e deslocamentos nodais são tratadas neste passo.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\} \quad (2.45)$$

$$\Rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}]\{\mathbf{u}^e\} \quad (2.46)$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^e\}} \quad (2.47)$$

(deformações em função dos deslocamentos nodais $\{\mathbf{u}^e\}$)

$$\text{com: } \boxed{[\mathbf{B}] = [\mathbf{L}][\mathbf{N}]} \quad (2.48)$$

(matriz cinemática)

Passo 2.3: Relações Constitutivas. Relacionam-se as tensões com as deformações. A seguir as tensões no interior do corpo com os deslocamentos nodais.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (2.49)$$

$$\boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^e\}} \quad (2.50)$$

(tensões em função dos deslocamentos nodais $\{\mathbf{u}^e\}$)

Os deslocamentos e deformações virtuais são definidos pelas mesmas relações (2.44) e (2.47)

$$\{\delta\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{u}^e\} \quad \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\delta\mathbf{u}^e\} \quad (2.51 \text{ e } 2.52)$$

Passo 2.4: Relações de Equilíbrio. Através de métodos de energia ou da resolução da equação diferencial que representam o equilíbrio do corpo determina-se a matriz de rigidez e vectores equivalentes a acções.

Substituindo em (2.41) vem:

$$\int_D \{\mathbf{f}\}^T [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{u}^e\} dD + \int_{S_2} \{\bar{\mathbf{t}}\}^T [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{u}^e\} dS = \int_D \left([\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^e\} \right)^T [\mathbf{B}]\{\delta\mathbf{u}^e\} dD \quad (a)$$

$$\{\delta\mathbf{u}^e\} \left(\int_D [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}\} dD + \int_{S_2} [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{t}}\} dS \right) = \{\delta\mathbf{u}^e\} \left(\int_D [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dD * \{\mathbf{u}^e\} \right) \quad (b)$$

$$\left(\int_D [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dD \right) \{\mathbf{u}^e\} = \int_D [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}\} dD + \int_{S_2} [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{t}}\} dS \quad (2.53)$$

$$[\mathbf{K}^e] * \{\mathbf{u}^e\} = \{\mathbf{p}^e\} \quad (2.54)$$

com:

- matriz de coeficientes (rigidez) elementar:

$$\boxed{[k^e] = \int_D [B]^T [D] [B] dD} \quad (2.55)$$

- vector de forças nodais equivalentes às forças de massa:

$$\boxed{\{F_m^e\} = \int_D [N]^T \{f\} dD} \quad (2.56)$$

- vector de forças nodais equivalentes às forças de superfície:

$$\boxed{\{F_S^e\} = \int_{S_2} [N]^T \{\bar{t}\} dS} \quad (2.57)$$

- vector de forças nodais:

$$\{P^e\} = \{F_m^e\} + \{F_S^e\} \quad (2.58)$$

Alternativamente o vector de forças nodais $\{P^e\}$ equivalente a forças de massa e de superfície pode ser determinado como um conjunto de forças nodais estaticamente equivalente à distribuição das acções, ficando nesse caso inconsistente com esta aproximação de deslocamentos. Para funções de aproximação lineares os resultados são iguais mas diferem com funções de aproximação de ordem superior.

Passo 3: Equação de equilíbrio global. Composição da matriz de rigidez global e vector de forças global por um processo de espalhamento e sobreposição (montagem).

$$[K] = \sum_e [k^e] = \sum_e [Bool^e]^T * [k^e] * [Bool^e] \quad (2.59)$$

$$[P] = \sum_e [P^e] = \sum_e [Bool^e]^T * [P^e] \quad (2.60)$$

Passo 4: Imposição das condições de fronteira ao sistema de equações

Passo 5: Resolução do sistema de equações, ou seja, determinação do valor da variável de campo (variável primária). Exemplo: Deslocamentos, rotações,

$$[K] * \{u\} = \{P\} \quad \Rightarrow \quad \{u\} = [K]^{-1} * \{P\} \quad (2.61)$$

Passo 6: Por derivação determinam-se as variáveis secundárias, elemento a elemento. (Exemplo: tensões, esforços,)

$$\{u^e\} = [Bool^e] * \{u\} \quad (\text{re-alocação}) \quad (2.62)$$

$$\frac{du}{dx} = \sum_i \frac{dN_i}{dx} u_i^e \quad (\text{variável secundária, } \mathbf{u}_i^e \text{ é já conhecido}) \quad (2.63)$$

2.7.2. - Condições de Admissibilidade:

- se a matriz constitutiva [D] só contiver constantes elásticas e se a matriz de deformação [B]=[L][N] contiver apenas de derivadas de 1ª ordem no operador [L], é exigido que as funções de forma sejam polinómios completos de Classe C^0 , isto é, existe continuidade do campo de deslocamentos no interior do elemento e ao longo da fronteira partilhada com outro elemento.

Completitude de 1ª grau implica o uso de polinómios completos do 1º grau na função de aproximação de deslocamentos {u}. Os termos constante e linear devem ser incluídos para permitir simular deslocamentos de corpo rígido e estados de deformação constante.

Estas condições de admissibilidade permitem usar elementos com interpolação linear, conhecidos como elementos de deformação constante.

2.7.3.- Topologia da Malha

- dois modelos (malhas) de EF de uma mesma estrutura podem ser comparados usando a respectiva energia de deformação total.
- a energia potencial total da solução aproximada, V^* , é superior à exacta V , ($V < V^*$) enquanto a energia de deformação interna aproximada U^* , é menor que a exacta U , ($U > U^*$).
- uma boa malha deve ter uma boa distribuição da energia de deformação.
- os nós devem figurar sobre isolinhas de energia de deformação
- o gradiente da energia de deformação é perpendicular às isolinhas de energia de deformação.

3 - ELEMENTO FINITO BARRA

Pretende-se ilustrar de uma forma simples a aplicação do Método dos Elementos Finitos na determinação de deslocamentos, deformações, esforços e ou tensões de estruturas carregadas estaticamente. Assim recorre-se a um problema unidimensional, o de uma barra sujeita à tracção com comportamento elástico linear. Embora o caso que se apresenta seja unidimensional as etapas de cálculo necessárias para a resolução do problema são as mesmas que nos casos de problemas multidimensionais.

3.1- Etapas e Fases de Cálculo

O método dos Elementos Finitos requer que uma estrutura contínua seja subdividida em elementos discretos, os elementos finitos, ligados entre si pelos seus nós de fronteira. O procedimento típico para problemas de Mecânica dos Sólidos é constituído pelas seguintes Etapas:

Etapa 1: Escolher o sistema de coordenadas conveniente, numerar os nós e elementos, definir os graus de liberdade globais e elementares, definir o vector de deslocamentos elementar, $\{u^e\}$, e global, $\{u\}$, e vector de forças elementar e global respectivamente $\{F\}^e$ e $\{F\}$;

Etapa 2: Definir o campo de deslocamentos no interior do elemento finito, escolhendo a função de deslocamento, $u(x)$;

Etapa 3: Explicitar o campo de deslocamentos $u(x)$ no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais elementares, u_1^e ;

Etapa 4: Estabelecer as Relações de Cinemáticas entre Deslocamentos-Deformações. Consiste em explicitar o campo de deformações $\varepsilon(x)$ no interior do elemento em função do campo de deslocamentos $u(x)$ e posteriormente em função dos deslocamentos nodais, u_1^e ;

Etapa 5: Estabelecer as Relações Constitutivas entre Tensões e Deformações. Consiste em explicitar o campo de tensões $\sigma(x)$ no interior do elemento em função do campo de deformações $\varepsilon(x)$ no interior do elemento e posteriormente em função dos deslocamentos nodais, u_1^e ;

Etapa 6: Estabelecer as Relações de Equilíbrio entre as Tensões Internas e Forças Externas, num elemento finito. Esta relação é efectuada à custa da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (deslocamentos virtuais) impondo-se um deslocamento virtual à estrutura e igualando o trabalho interno ao externo.

Etapa 7: Operações sobre a malha estrutural:

(i) constituição da matriz de rigidez global e vector de forças global pelo espalhamento e assemblagem das matrizes de rigidez elementares e vectores de forças nodais elementares;

(ii) Estabelecer as Relações de Compatibilidade entre elementos da estrutura e entre esta e a fronteira;

(iii) resolução do sistema de equações determinando-se a solução sob a forma de deslocamentos nodais;

Etapa 8: Cálculo de Esforços e ou Tensões Finais de cada elemento. Recuperação dos deslocamentos nodais elementares e determinação do campo de deformações, tensões e esforços ao nível do elemento.

Estas etapas estão inseridas em três fases importantes:

- **Fase 1:** Etapa 1 a Etapa 6 : Discretização da estrutura e construção da matriz de rigidez do elemento finito (matriz de rigidez elementar, $[k]^e$), e construção do vector de forças nodais equivalentes a forças de massa, de superfície ou pontuais (vector de forças nodais elementares, $\{F\}^e$).

- **Fase 2:** Etapa 7: Montagem da matriz de rigidez global e vector de forças nodais global, e resolução da indeterminação cinemática global da estrutura.

- **Fase 3:** Etapa 8: Determinação de esforços e ou tensões ao nível de cada elemento.

3.2- Aplicação do M.E.F. a uma Estrutura com Elementos de Barra

Vamos aplicar o procedimento anteriormente descrito à estrutura da figura 3.1. A estrutura tem comportamento elástico linear, está sujeita a forças de massa, de superfície e pontuais. A estrutura está discretizada como um conjunto de três elementos barra de secção constante. As forças induzem um estado uniaxial de tensão em cada elemento.

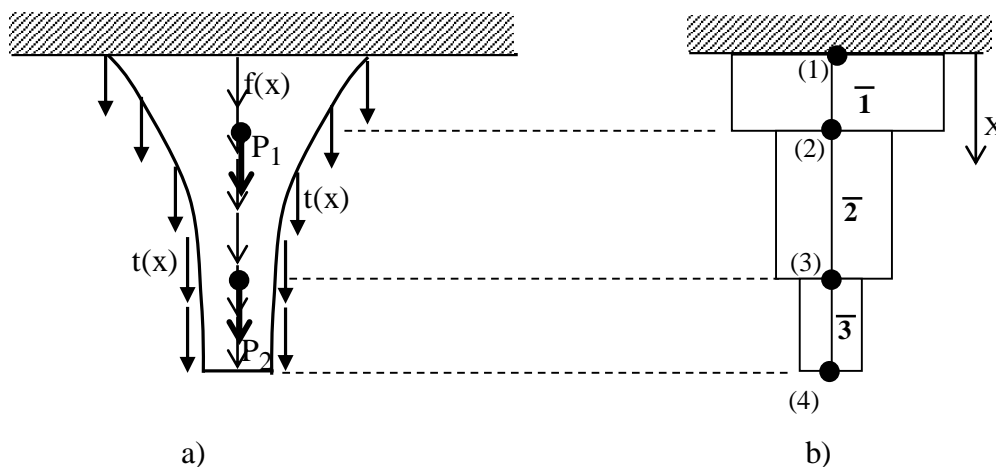


Figura 3.1- a) Barra real; b) Modelo da barra discretizado (não foram colocadas as cargas)

Percebido que está o fenómeno físico em jogo (problema de estado uniaxial de tensão) definem-se as seguintes grandezas:

- campo de deslocamentos, $u(x)$ dos pontos do corpo na direcção $x-x$.
- campo de deformações, $\varepsilon(x)$, alongamentos ou encurtamentos das fibras segundo $x-x$.
- campo de tensões, $\sigma(x)$, na direcção $x-x$.
- forças de tracção, $t(x)$, aplicadas na superfície do corpo e na direcção $x-x$.
- forças de massa, $f(x)$, segundo a direcção $x-x$.
- forças pontuais, P_i , na direcção $x-x$.

A Relação Constitutiva - Tensão-deformação é dada pela lei de Hooke, porque a peça está sujeita a um estado uniaxial de tensões:

$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x)$$

A Relação Cinemática (ou de compatibilidade) Deslocamento-Deformação é definida no estado uniaxial de tensões por:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \quad \text{ou, mais sinteticamente} \quad \varepsilon(x) = u(x)_{,x}$$

Sendo o corpo tridimensional, as grandezas do campo geométrico tridimensional são transformadas em grandezas do campo geométrico unidimensional pela relação:

$dV = A(x) dx$ sendo $A(x)$ a área da secção transversal da barra. Supõe-se que todas as grandezas em jogo são constantes na mesma secção transversal de área $A(x)$.

As acções presentes são:

- forças de massa, $f(x)$, por exemplo o peso próprio, definido como força por unidade de volume mas depois reduzida unidimensionalmente a força por unidade de comprimento, de valor $A(x)*f(x)$ sendo $A(x)$ área da secção transversal;
- forças de tracção, $t(x)$, (ou superficial) definida como força por unidade de superfície, mas posteriormente reduzida unidimensionalmente a força por unidade de comprimento, de valor $b*t(x)$ sendo b a superfície onde actua a carga;
- força de pontual, P_i , definida unidimensionalmente como força na direcção $x-x$.

Vamos implementar o procedimento de cálculo do método.

ETAPA 1:

A estrutura foi discretizada em três barras, e quatro nós. Cada nó tem 1 grau de liberdade, a sua translação segundo $x-x$, e por isso a estrutura apresenta quatro graus de liberdade. Cada elemento como é constituído por dois nós tem dois graus de liberdade. Escolhem-se os deslocamentos como incógnitas do problema (variável primária [3] ou de campo [6]).

Vector de deslocamentos nodais globais $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$ e elementares $\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$, e, respectivos

vectores de forças nodais globais $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$ e elementares $\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}$.

Por facilidade coloca-se a barra na horizontal.

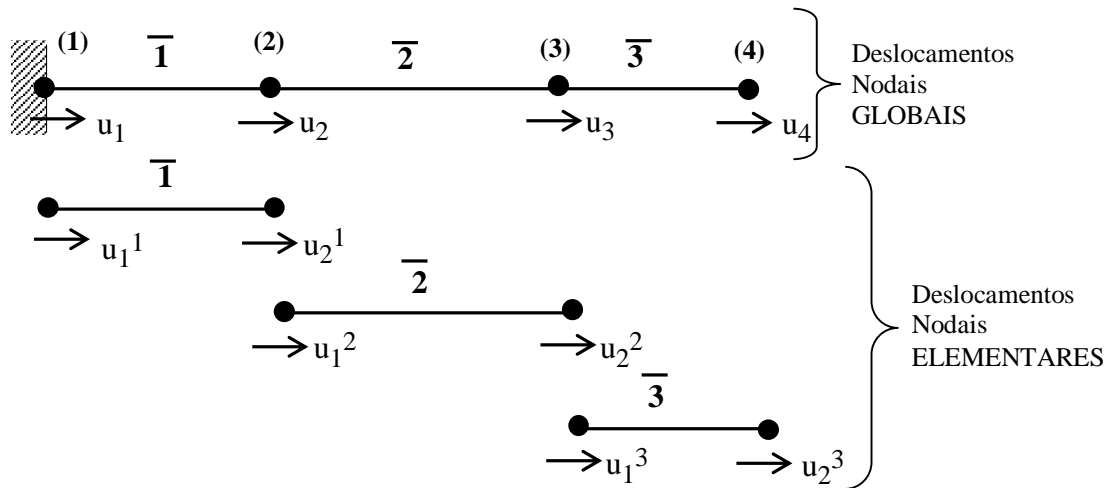


Figura 3.2- Discretização da Estrutura.

Tabela de Incidências : Relaciona os deslocamentos globais com os locais, ou melhor, os graus de liberdade globais com os graus de liberdade locais.

	Desloc. Elementares	$u^{(e)}_1$	$u^{(e)}_2$
GL Global no EL. 1	Desl.Global	u_1	u_2
	GL Global	1	2
GL Global no EL. 2	Desl.Global	u_2	u_3
	GL Global	2	3
GL Global no EL. 3	Desl.Global	u_3	u_4
	GL Global	3	4

Sistemas de Coordenadas

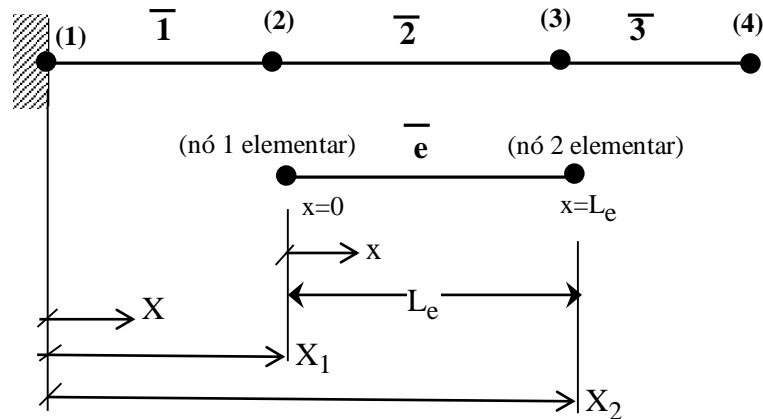


Figura 3.3- Sistemas de coordenadas global e local.

Definem-se dois sistemas de coordenadas, um **global** de coordenadas X cujo referencial tem origem num ponto qualquer do plano (que neste caso é o nó (1) da estrutura), e um referencial **local** de coordenadas x cujo referencial tem origem no nó (1) de cada elemento. As coordenadas x estão no intervalo $0 \leq x \leq L_e$ sendo L_e o comprimento do elemento finito.

ETAPA 2: Definição do campo de deslocamentos

Escolha da função deslocamento. Expressar o campo de deslocamentos no interior do corpo. Aproximamos o campo de deslocamento a um polinómio completo com um número de termos igual ao número de graus de liberdade do elemento, ou seja,

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \quad x]^* \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = [L]^* [\alpha] \quad (3.1)$$

sendo α_1 e α_2 os parâmetros de deslocamento (por enquanto desconhecidos).

ETAPA 3: Definição do campo de deslocamentos em função dos deslocamentos nodais elementares

Relacionar os deslocamentos no interior do elemento $u(x)$ com os deslocamentos nodais elementares, u_1^e e u_2^e , o que corresponde em transformar a função de deslocamento numa função de interpolação.

$$\text{Para: } x=0 \Rightarrow u(0) = \alpha_1 + \alpha_2 * 0 = u_1^e$$

$$x=L_e \Rightarrow u(L_e) = \alpha_1 + \alpha_2 * L_e = u_2^e \quad , \text{ou seja,} \quad (3.2)$$

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_e \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{u^e\} = [A]^* \{\alpha\} \quad (3.3)$$

$$\text{Invertendo } [A] \text{ vem: } [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L_e & 1/L_e \end{bmatrix} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} * \{u^e\} \quad (3.4)$$

$$\text{Logo: } \boxed{u(x) = [L] * [A]^{-1} * \{u^e\} = [\psi(x)] * \{u^e\}} \quad (3.5)$$

$$\text{com: } [\psi(x)] = [L] * [A]^{-1} \quad (3.6)$$

Desenvolvendo (3.5) tem-se:

$$u(x) = [L] * [A]^{-1} * \{u^e\} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1/L_e & 1/L_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{L_e} x); (\frac{1}{L_e} x) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[\psi(x)] = [\psi_1(x); \psi_2(x)] = \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{L_e} x); (\frac{1}{L_e} x) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

As funções $[\psi(x)] = [L] * [A]^{-1} = [\psi_1(x); \psi_2(x)]$ designam-se por **funções de forma** e permitem exprimir o campo de deslocamentos como combinação linear destas funções cujos coeficientes multiplicativos são os deslocamentos nodais elementares $\{u^e\}$. A expressão (3.8) pode representar-se por:

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 \psi_i(x) * u_i^e \quad (3.9)$$

a qual é uma aproximação do campo de deslocamentos no interior do elemento e que se ilustra na figura 3.4.

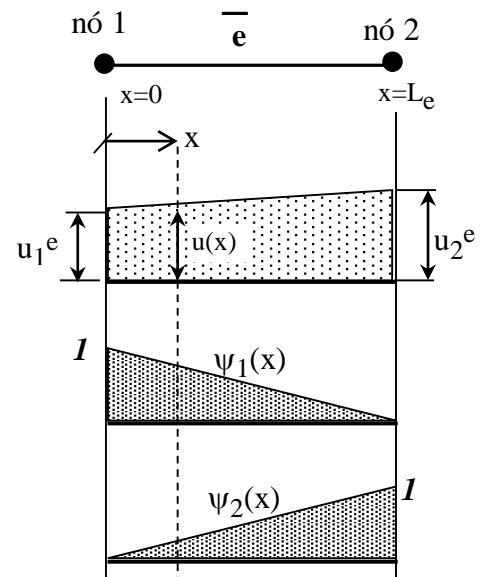


Figura 3.4-
Funções de forma lineares

ETAPA 4: Estabelecer as Relações de Cinemáticas entre os deslocamentos e deformações.

Para o estado uniaxial de tensão as deformações, $\varepsilon(x)$, (extensões de alongamento ou encurtamento das fibras) são a primeira derivada do campo de deslocamentos.

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d[\psi(x)]}{dx} * \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = [B] * \{u^e\}} \quad (3.11)$$

$$\text{com: } [B] = \frac{d[\psi(x)]}{dx} \quad (3.12)$$

Desenvolvendo (3.10) temos:

$$\varepsilon(x) = \left[-\frac{1}{L_e}; \frac{1}{L_e} \right] * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}, \text{ ou seja, } \varepsilon(x) = \left(-\frac{1}{L_e} \right) * u_1^e + \left(\frac{1}{L_e} \right) * u_2^e. \quad (3.13)$$

De (3.13) verifica-se que a aproximação do campo de deformações obtido é constante no elemento.

ETAPA 5: Estabelecer as Relações Constitutivas.

Relaciona-se o campo de tensões internas, $\sigma(x)$ com o campo de deformações, $\varepsilon(x)$:

$$\sigma(x) = [D] * \varepsilon(x). \quad (3.14)$$

Como $\varepsilon(x) = [B] * \{u^e\}$ vem:

$$\sigma(x) = [D] * [B] * \{u^e\} \quad (3.15)$$

matriz de elasticidade

que representa o campo de tensões em função dos deslocamentos nodais elementares.

$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x) \Rightarrow \sigma(x) = E * [B] * \{u^e\} \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$\sigma(x) = E * \left[-\frac{1}{L_e}; \frac{1}{L_e} \right] * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = E \left(\frac{u_2^e - u_1^e}{L_e} \right) \quad (3.17)$$

Como se observa o campo de tensões é constante ao longo do elemento (não depende da coordenada local x).

ETAPA 6: Estabelecer as Relações de Equilíbrio

O campo interno de tensões no elemento está em equilíbrio com as forças de massa, $f(x)$, forças de tracção, $t(x)$, e forças pontuais aplicadas P_i (F_i e F_i^e). Por conveniência de exposição é vantajoso distinguir as forças pontuais P_i . Uma são aplicadas num ponto i algures no seio do elemento, as forças P_i , e as outras são aplicadas nos nós extremos i , F_i^e . Estas últimas representam afinal as forças de interacção entre elementos adjacentes, ou entre o elemento e o exterior. De um modo geral, as forças pontuais no seio de um elemento (P_i) devem ser evitadas porque provocam grandes discontinuidades no campo de deslocamentos, deformações e tensões, conduzindo a maiores erros na solução final. Nestes casos é preferível ao discretizar a estrutura colocar um nó no ponto de aplicação daquela força.

A barra da figura 3.5 está em equilíbrio. Impõem-se deslocamentos virtuais $u(x)^*$ e deformações virtuais $\varepsilon(x)^*$ à barra os quais podem em geral ser agrupados respectivamente nos vectores $\{u^*\} = \{u(x)^*\}$ e $\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon(x)^*\}$.

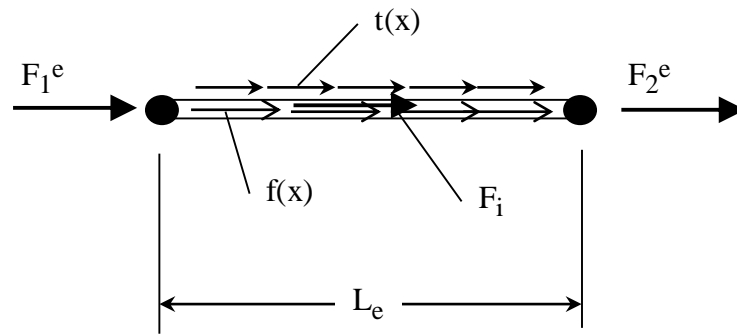


Figura 3.5

Atendendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para Deslocamentos Virtuais, o trabalho virtual interno das tensões interiores iguala o trabalho virtual externo das forças exteriores:

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$$

$$\int_V \{\varepsilon(x)^*\}^T * \{\sigma\} dV = \int_V \{\mathbf{u}(x)^*\}^T * \{f\} dV + \int_S \{\mathbf{u}(x)^*\}^T * \{t\} dS + \sum_i \{\mathbf{u}_i(x_i)^*\}^T \{F_i\} + \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * \{\mathbf{F}^e\} \quad (3.18)$$

sendo $\{\mathbf{u}^{e*}\}$ os deslocamentos virtuais dos nós e $\{\mathbf{F}^e\}$ as forças nodais elementares.

Ora como $\{\varepsilon(x)\} = [\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^e\}$ então as deformações virtuais também se relacionam com os deslocamentos virtuais da mesma maneira, ou seja, $\{\varepsilon(x)^*\} = [\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^{e*}\}$. Por outro lado:

$$\{\varepsilon(x)^*\}^T = ([\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^{e*}\})^T = \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\mathbf{B}]^T \quad (3.19)$$

De (3.5) vem:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}(x)\} &= [\boldsymbol{\psi}] * \{\mathbf{u}^e\} \Rightarrow \\ \{\mathbf{u}(x)^*\}^T &= ([\boldsymbol{\psi}] * \{\mathbf{u}^{e*}\})^T = \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\boldsymbol{\psi}]^T \end{aligned} \quad (3.20)$$

Finalmente substituindo (3.15), (3.19) e (3.20) em (3.18) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\mathbf{B}]^T * [\mathbf{D}] * [\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^e\} dV = \dots \\ \dots = \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T [\boldsymbol{\psi}]^T * \{f\} dV + \int_S \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\boldsymbol{\psi}]^T * \{t\} dS + \sum_i \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\boldsymbol{\psi}]^T * \{F_i\} + \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * \{\mathbf{F}^e\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como $\{\mathbf{u}^{e*}\}$ são deslocamentos virtuais nodais, podem ter um valor arbitrado qualquer. Por conveniência digamos que são unitários. Por outro lado os deslocamentos nodais $\{\mathbf{u}^e\}$ são constantes, não interferindo no primeiro integral. A expressão (3.21) simplifica-se ficando:

$$\int_V [\mathbf{B}]^T * [\mathbf{D}] * [\mathbf{B}] dV * \{u^e\} = \int_V [\boldsymbol{\psi}]^T * \{f\} dV + \int_S [\boldsymbol{\psi}]^T * \{t\} dS + \sum_i [\boldsymbol{\psi}]^T * \{F_i\} + \{F^e\} \quad (3.22)$$

ou:

$$[\mathbf{k}^e] * \{u^e\} = \{F_m^e\} + \{F_S^e\} + \{F_F^e\} + \{F^e\}. \quad (3.23)$$

sendo:

(i)- Matriz de Rigidez Elementar, $[\mathbf{k}^e]$

$$[\mathbf{k}^e] = \int_V [\mathbf{B}]^T * [\mathbf{D}] * [\mathbf{B}] dV \quad (3.24)$$

(ii)- Vector de Forças Nodais Equivalentes às Cargas de Vão

- vector de forças nodais equivalente às forças de massa:

$$\{F_m^e\} = \int_V [\boldsymbol{\psi}]^T * \{f\} dV \quad (3.25)$$

- vector de forças nodais equivalente às forças de superfície:

$$\{F_S^e\} = \int_S [\boldsymbol{\psi}]^T * \{t\} dS \quad (3.26)$$

- vector de forças nodais equivalente às forças pontuais:

$$\{F_F^e\} = \sum_i [\boldsymbol{\psi}]^T * \{F_i\} \quad (3.27)$$

(iii) - Vector de Forças Nodais Elementares, $\{F^e\}$

Representa as forças de interacção entre elementos.

NOTA :

1) A partir da expressão (3.23) facilmente se obtém a força de interacção do exterior sobre a barra fazendo:

$$\{F^e\} = [\mathbf{k}^e] * \{u^e\} - [\{F_m^e\} + \{F_S^e\} + \{F_F^e\}].$$

desde que os deslocamentos nodais elementares $\{u^e\}$ sejam conhecidos.

2) As forças equivalentes a cargas de vão no método dos elementos finitos

$(\{F_m^e\} + \{F_S^e\} + \{F_F^e\})$ têm sinal oposto às forças de fixação do método dos deslocamentos e por isso as tabelas deste método também servem para o MEF desde que as barras tenham secção constante.

(iv)- Vector de deslocamentos nodais elementares, $\{u^e\}$

Este vector representa a incógnita do problema. Irá haver uma correspondência entre os deslocamentos nodais elementares $\{u^e\}$ e nodais globais $\{u\}$, estabelecida pela tabela de incidências. Após a resolução do sistema de equações global, obtemos a solução $\{u\}$, e, por um processo retro-equivalências obtemos o valor de $\{u^e\}$.

Voltemos ao problema exemplo para definir algumas das grandezas acabadas de definir.

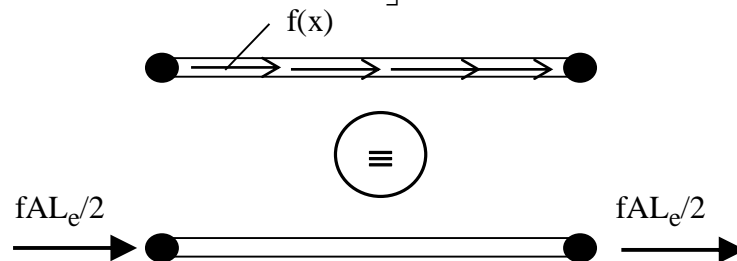
- Matriz de Rigidez Elementar:

Atendendo à expressão (3.25) temos:

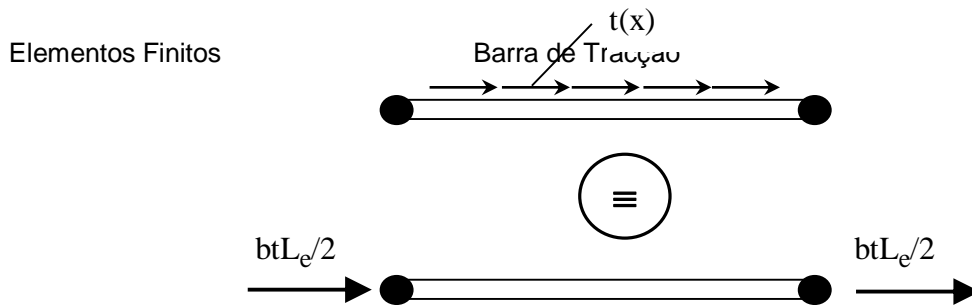
$$\begin{aligned} [k^e] &= \int_V [B]^T * [D] * [B] dV = \int_0^{L_e} [B]^T * [D] * [B] A dx = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} -1/L_e \\ 1/L_e \end{bmatrix}^T * E * \begin{bmatrix} -1/L_e & 1/L_e \end{bmatrix} A dx \\ [k^e] &= \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e^2} & -\frac{1}{L_e^2} \\ -\frac{1}{L_e^2} & \frac{1}{L_e^2} \end{bmatrix} * E A dx = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

- Vector de Forças (nodais equivalente às forças) de Massa:

$$\{F_m^e\} = \int_V [\psi]^T * \{f\} dV = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} x \end{bmatrix} * \{f\} * A dx = \begin{Bmatrix} \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} \end{Bmatrix} * f * A \quad (3.31)$$

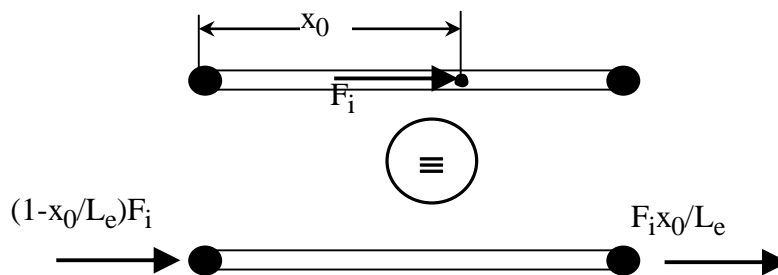
- Vector de Forças (nodais equivalente às forças) de Superfície (ou de Tracção):

$$\{F_S^e\} = \int_S [\psi]^T * \{t\} dS = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} x \end{bmatrix} * \{t\} * b dx = \begin{Bmatrix} \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} \end{Bmatrix} * t * b \quad (3.32)$$



- Vector de Forças (nodais equivalente às forças) Pontuais:

$$\{F_F^e\} = \sum_i [\psi]^T * \{F_i\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} x \end{bmatrix} * F_i = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x_0}{L_e} F_i \\ \frac{1}{L_e} x_0 F_i \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$



Até ao fim desta etapa estabeleceu-se o equilíbrio de um elemento finito isolado. Na sequência desse cálculo definiram-se a matriz de rigidez elementar, $[k^e]$ e os vectores de força elementar, $\{F_0^e\}$ e $\{F^e\}$.

ETAPA 7:

Estabelece-se o equilíbrio global da estrutura e determinam-se os deslocamentos nodais globais, $\{u\}$.

Os passos a efectuar, mas que não são para já explicados em pormenor, são os seguintes:

- construir a matriz de rigidez global $[K]$, a partir do espalhamento e assemblagem das matrizes de rigidez elementares;
- construir o vector de forças nodais $\{F\}$, a partir do espalhamento e assemblagem dos vectores de força nodais elementares e vectores de força elementares equivalentes às cargas de vão;
- imposição das condições de fronteira;
- resolução do sistema de equações $[K]*\{u\}=\{F\}$, e determinação dos deslocamentos finais $\{u\}$;
- para cada elemento e , fazer a realocação dos deslocamentos nodais elementares $\{u^e\}$ a partir do vector de deslocamentos finais $\{u\}$.

ETAPA 8:

A partir da expressão (3.15) determinar as tensões internas no elemento e :

$$\sigma(x) = [D] * [B] * \{u^e\} \quad (3.15)\text{-rep.}$$

No exemplo tipo tem-se:

$$\sigma(x) = E * \left[-\frac{1}{L_e}; \frac{1}{L_e} \right] * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = E \left(\frac{u_2^e - u_1^e}{L_e} \right) \quad (3.17)\text{-rep.}$$

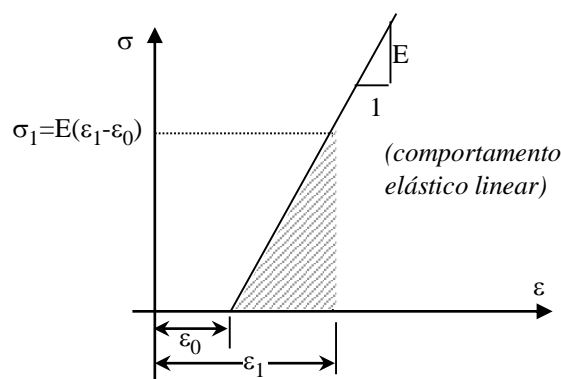
que é uma expressão já deduzida na Etapa 5, mas só agora são conhecidos os valores dos deslocamentos nodais u_1^e e u_2^e .

3.3- Variação de temperatura e tensões iniciais

Pretende-se estudar uma barra sujeita a variações de temperatura ΔT . Quando uma barra isostática é sujeita a uma variação de temperatura, que se supõe positiva e uniforme ao longo da barra e das secções, não se instalam tensões nas suas secções, mas as fibras aumentarão de comprimento. Assim o campo de tensões σ mantém-se nulo mas o de deformações ε_0 não, e define-se como $\varepsilon_0 = \alpha \Delta T$. Estas extensões podem considerar-se deformações iniciais (ver figura 3.6)

Ao aplicarmos as restantes cargas (forças de massa, de superfície, etc) estas serão equilibradas pelo campo de tensões interno o qual dependerá apenas das extensões associadas às mesmas cargas e que são $(\varepsilon - \varepsilon_0)$, sendo ε as extensões totais, como se ilustra na figura 3.6. Atendendo às relações constitutivas numa barra sujeita a um estado uniaxial de tensão com comportamento elástico linear podemos escrever:

$$\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (3.34)$$



Acresce salientar que a energia de deformação interna, U , armazenada na barra durante a aplicação das cargas, que actuaram lentamente e gradualmente crescentes, é igual à zona sombreada da figura e valendo:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T * \mathbf{E} * (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV \quad (\text{B35})$$

A existência de variação de temperatura pode ser entendida em sentido lato como a presença de um tado de deformação inicial $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$. Havendo tensões iniciais $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$, por exemplo um pré-esforço, o campo de tensões total é dado por:

$$\boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}} \quad (3.36)$$

Retomemos agora a Etapa 6 na qual se recorre ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para estabelecer o equilíbrio da barra, sujeita quer à variação de temperatura ΔT como às restantes acções. Da igualdade dos trabalhos virtuais interno e externo podemos ainda escrever:

$$\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T * \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int_V \{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}^T * \{\mathbf{f}\} dV + \int_S \{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}^T * \{\mathbf{t}\} dS + \sum_i \{\mathbf{u}_i(x_i)\}^T \{\mathbf{F}_i\} + \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * \{\mathbf{F}^e\} \quad (3.22\text{-rep})$$

cujas grandezas já são conhecidas, nomeadamente $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}$, $\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}$ e $\{\mathbf{u}^{e*}\}$ que são respectivamente os campos de deformações virtuais, o campo de deslocamentos virtuais e os de os deslocamentos virtuais dos nós. No desenvolvimento desta expressão é necessário ter em conta a nova definição (3.36). A alteração que agora surge interfere apenas no 1º termo da expressão anterior. Substituindo então (3.36) no primeiro termo de (3.22) obtemos:

$$\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T * \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T * [\mathbf{D}] * \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV - \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T * [\mathbf{D}] * \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV + \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T * \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV \quad (3.37)$$

Substituindo $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^e\}$ e $\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\}^T = \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\mathbf{B}]^T$ no 2º termo de (3.37), e colocando (3.37) em (3.22) fica:

$$\begin{aligned} & \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\mathbf{B}]^T * [\mathbf{D}] * [\mathbf{B}] * \{\mathbf{u}^e\} dV - \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] * \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV + \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T [\mathbf{B}]^T * \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV + \dots \\ & \dots = \int_V \{\mathbf{u}^{e*}\}^T [\boldsymbol{\psi}]^T * \{\mathbf{f}\} dV + \int_S \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\boldsymbol{\psi}]^T * \{\mathbf{t}\} dS + \sum_i \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * [\boldsymbol{\psi}]^T * \{\mathbf{F}_i\} + \{\mathbf{u}^{e*}\}^T * \{\mathbf{F}^e\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Admitindo que os deslocamentos nodais virtuais $\{\mathbf{u}^{e*}\}$ são unitários e passando a 2ª parcela do primeiro termo para o segundo fica:

$$\int_V [\mathbf{B}]^T * [\mathbf{D}] * [\mathbf{B}] dV * \{u^e\} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] * \{\varepsilon_0\} dV + \int_V -[\mathbf{B}]^T * \{\sigma_0\} dV + \int_V [\boldsymbol{\psi}]^T * \{f\} dV + \dots$$

$$\dots + \int_S [\boldsymbol{\psi}]^T * \{t\} dS + \sum_i [\boldsymbol{\psi}]^T * \{F_i\} + \{F^e\}$$

(3.39)

que é uma expressão semelhante à (3.22), na qual figura a parcela relativa às forças nodais equivalentes à variação de temperatura. Esta expressão pode apresentar-se de forma mais compacta:

$$[\mathbf{k}^e] * \{u^e\} = \{F_{\Delta T}^e\} + \{F_{\sigma_0}^e\} + \{F_m^e\} + \{F_S^e\} + \{F_F^e\} + \{F^e\}.$$

(3.40)

O vector de forças nodais equivalente à variação de temperatura (ou deformações iniciais) é:

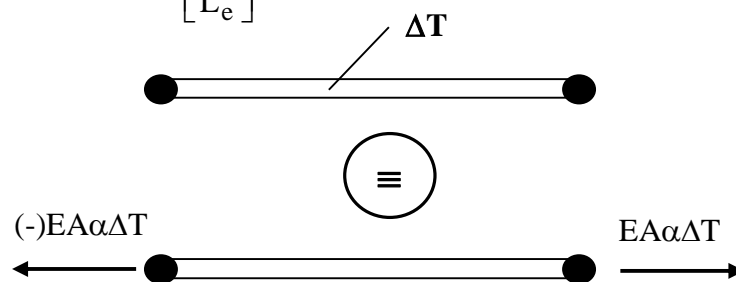
$$\{F_{\Delta T}^e\} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] * \{\varepsilon_0\} dV$$

(3.41)

Podemos desenvolver esta expressão para o elemento de barra em estudo e para variação uniforme de temperatura ao longo da barra:

$$\{F_{\Delta T}^e\} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] * \{\varepsilon_0\} dV = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} -1 \\ L_e \\ 1 \\ L_e \end{bmatrix} * E * \alpha * \Delta T * A dx = E * A * \alpha * \Delta T * \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

(3.42)



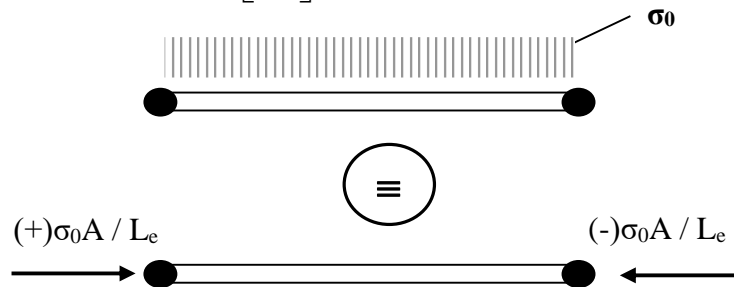
O vector de forças nodais equivalente Tensões Iniciais é:

$$\{F_{\sigma_0}^e\} = \int_V -[\mathbf{B}]^T * \{\sigma_0\} dV$$

(3.43)

Para σ_0 constante ao longo da barra:

$$\{F_{\sigma_0}^e\} = \int_V -[B]^T * \{\sigma_0\} dV = \int_0^{L_e} - \begin{bmatrix} -1 \\ L_e \\ 1 \\ L_e \end{bmatrix} * \sigma_0 A dx = \sigma_0 * \frac{A}{L_e} * \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$



Finalmente há que referir que as tensões finais no elemento são determinadas de acordo com a expressão (3.36), de que se deduz:

$$\{\sigma\} = [D] * ([B]\{u^e\} - \epsilon_0) + \{\sigma_0\} \quad (3.45.a)$$

$$\{\sigma\} = \underbrace{[D] * [B]}_{[H]} \{u^e\} - [D] * (\alpha * \Delta T) + \{\sigma_0\} \quad (3.45.b)$$

4- Particularidades em Elementos Unidimensionais

4.1 – Transformação de Coordenadas (Parametrização)

Ao processo que consiste em substituir o elemento real por um elemento mestre designa-se por **parametrização** o que obriga a uma transformação de coordenadas. Estuda-se para já a transformação linear de coordenadas.

Um dado elemento finito numa malha pode ser estudado com base (i) nas coordenadas globais (X) com origem por exemplo no ponto inicial da estrutura, (ii) nas coordenadas locais (x) com origem no nó esquerdo do EF ou (iii) em coordenadas naturais com origem no centro do elemento supondo que este tem comprimento igual a 2. Este elemento designa-se por mestre, padrão, etc.

4.2.2 - Transformação linear de coordenadas $X \leftrightarrow \xi$

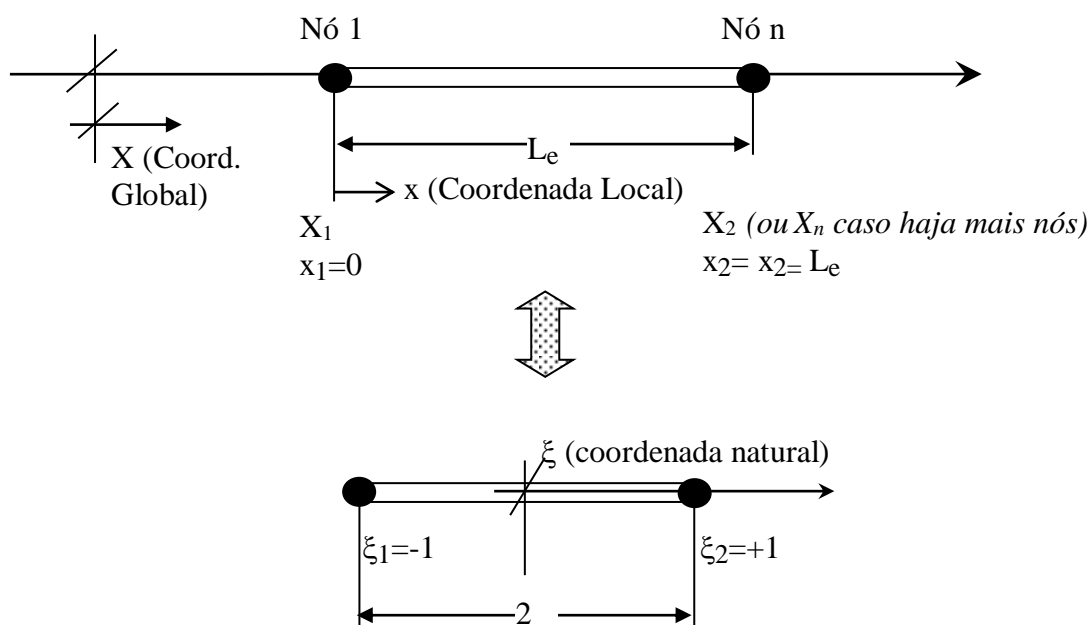


Figura 4.3- Coordenadas Globas (X) ou Locais (x) e coordenadas naturais (ξ).

A transformação linear de coordenadas Naturais para globais é definida por :

$$X = a + b \xi \tag{a}$$

Comparando as figuras podemos desenvolver:

$$\text{Assim para : } \begin{cases} \text{- o nó 1 } X_1 \leftrightarrow \xi = -1 \\ \text{- o nó } X_n \leftrightarrow \xi = +1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a + b(-1) \\ X_n = a + b(+1) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \\ \dots \dots \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{X_1 + X_n}{2} \\ b = \frac{X_n - X_1}{2} \end{array} \right. \tag{b}$$

$$\tag{c}$$

substituindo (b) e (c) em (a) obtemos a transformação linear directa de $\xi \rightarrow X$ é:

$$X = \frac{X_n - X_1}{2} + \frac{X_n - X_1}{2} * \xi \quad (d)$$

A transformação linear inversa $X \rightarrow \xi$, é: $\xi = \frac{2 * X}{X_n - X_1} - \frac{X_n + X_1}{X_n - X_1}$ (e)

sendo X_i as coordenadas dos nós no sistema global de coordenadas.

Se pretendermos uma transformação linear de coordenadas Naturais em Locais basta reparar que: $X_1 = x_1$, $X_n = x_2$ e que $L_e = X_n - X_1 = x_2 - x_1$.

Fazendo estas alterações nas igualdades anteriores obtemos as *transformações directas e inversas de coordenadas* $x \leftrightarrow \xi$ **mais usadas** de coordenadas naturais para locais e vice-versa:

(i) a transformação directa $\xi \rightarrow x$: $x = \frac{L_e}{2} (1 + \xi)$ (4.a)

(ii) a transformação inversa $x \rightarrow \xi$: $\xi = \frac{2}{L_e} x - 1$ (4.b)

1

4.2- Funções de aproximação. A natureza de Interpolação de Deslocamentos.

Nas etapas 2 e 3 aproximámos o campo de deslocamentos a um polinómio completo do 1º grau. Como o campo de deformações é a derivada do de deslocamentos, resulta ser constante em todo o elemento. Por outro lado como as tensões são proporcionais às deformações resulta um campo de tensões também constante ao longo do elemento. Ter um campo de tensões constante ao longo do elemento é a máxima precisão que conseguimos obter para aquele elemento finito, cuja precisão foi condicionada pela escolha do polinómio de interpolação do campo de deslocamentos (foi do 1º grau).

- Como aumentar a precisão da análise ?
- O que acontecerá quando se adopta uma função de aproximação de deslocamentos cuja ordem é superior à ordem da função solução exacta ? Por exemplo, para uma solução exacta $u(x) = 5 * x + 1.5$ (caso de um elemento finito de barra com secção transversal constante) o que acontece se adoptarmos como função de aproximação o polinómio:

$$\tilde{u}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

O processo de análise de elementos finitos forçará a que resulte: $a_1 = 1.5$, $a_2 = 5$ e $a_3 = 0$.

⇒ Em conclusão se a solução exacta for um subpolinómio da função de aproximação, as soluções reais e de elementos finitos serão iguais. (repare que $a_3=0$ anulando a eficácia da parcela quadrática $a_3 x^2$).

Um procedimento comum na análise de problemas de elementos finitos para aumentar a precisão da análise, é:

(i) aumentar o número de elementos da mesma natureza já existentes (lineares, quadráticos, cúbicos), (*aproximação do tipo h*)

(ii) aumentar a ordem do elemento finito existente (passar de linear a quadrático) mas manter o mesmo número de elementos (*aproximação do tipo p*)

- Se neste problema se optasse por aproximar o campo de deslocamentos pelo polinómio

$$\tilde{u}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \tag{4.1}$$

deveremos deduzir as funções de aproximação correspondentes. O elemento unidimensional teria de possuir três graus de liberdade (u_1, u_2 e u_3), sendo assim necessário acrescentar mais um nó ao elemento finito barra, como se mostra:

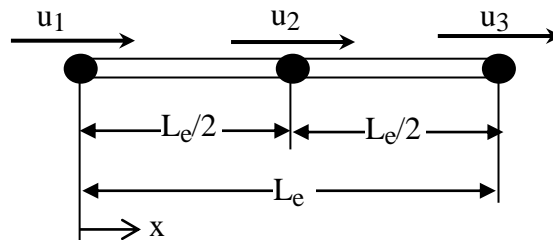


Figura 4.1-Elemento barra de três nós

Para o novo elemento de três nós, cujo campo de deslocamentos é aproximado por (4.1) temos:

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = [L] * \{\alpha\} \tag{4.2}$$

Fazendo:

$$x=0 \rightarrow u(x=0) = u_1^e = 1$$

$$x=L_e/2 \rightarrow u(x=L_e/2) = u_2^e = 1 + L_e/2 + (L_e/2)^2$$

$$x=L_e \rightarrow u(x=L_e) = u_3^e = 1 + L_e + L_e^2$$

vem :

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e/2 & L_e^2/4 \\ 1 & L_e & L_e^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\mathbf{u}^e\} = [A] * \{\alpha\} \tag{4.3}$$

Invertendo [A]:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/L_e & 4/L_e & -1/L_e \\ -2/L_e^2 & -4/L_e^2 & 2/L_e^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

podemos descrever:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{u^e\} \Rightarrow \quad (4.5)$$

$$u(x) = [L] * \{\alpha\} = [L] * [A]^{-1} * \{u^e\} \quad (4.6.a)$$

$$u(x) = [\Psi] * \{u^e\} \quad (4.6.b)$$

$$u(x) = \sum_i \psi_i(x) * u_i^e \quad (4.6.c)$$

Mas:

$$[\Psi] = [L] * [A]^{-1} \quad (4.7.a)$$

$$[\Psi] = [\psi_1(x) \quad \psi_2(x) \quad \psi_3(x)] = \left[1 - \frac{3x}{L_e} + \frac{2x^2}{L_e^2} ; \frac{4x}{L_e} - \frac{4x^2}{L_e^2} ; -\frac{x}{L_e} + \frac{2x^2}{L_e^2} \right] \quad (4.7.b)$$

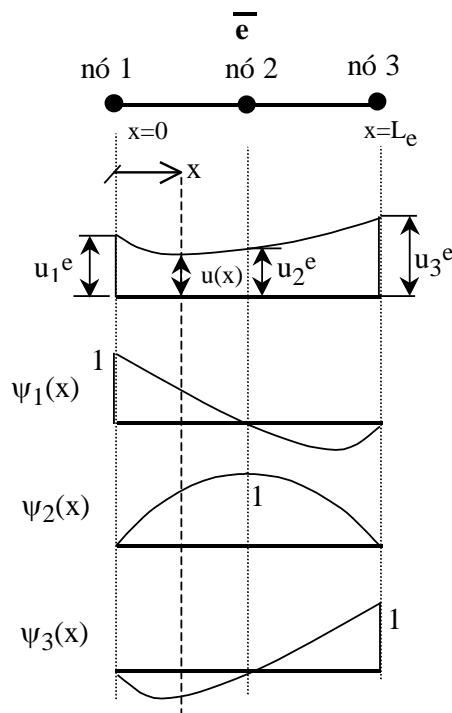


Figura 4.2 - Funções de forma quadráticas em coordenadas locais

Como se acaba de ver, o campo de deslocamentos pode ser aproximado pela combinação linear (4.6.c) sendo $\psi_i(x)$ (4.7.b)) as funções de forma (ou de interpolação) quadráticas u_i^e o deslocamento do nó i .

Como regra podemos afirmar que **se adoptarmos como funções de aproximação polinómios, este deve ser completo e o seu número de parcelas igual ao número de graus de liberdade do elemento finito.**

Pode ainda acrescentar-se que a função de aproximação dos deslocamentos não contém, infinitos graus e liberdade, ou seja, não contém todos os infinitos termos necessários que permitam à estrutura deformar-se exactamente como a estrutura real. Consequentemente pode-se afirmar que **a malha de elementos finitos é tipicamente mais rígida que a estrutura real** [4].

4.3- Família de Funções de Interpolação de Lagrange

As funções de forma $[\psi(x)]$ resultantes das aproximações polinomiais das variáveis dependentes $u(x)$ podem ser obtidas sem necessidade de inverter a matriz [A], o que é muito vantajoso na medida em que nem sempre é fácil efectuar essa inversão. Quando se pretende representar o campo de deslocamentos usam-se os polinómios de Lagrange. Se pretendermos também representar quer o campo de deslocamentos como o campo das derivadas dos deslocamentos (inclinações ou rotações dos pontos) recorreremos aos polinómios de Hermite (Hermitianos, H^1), como por exemplo nos elementos finitos de viga (barras sujeitas à flexão simples).

Nota: Há autores que representam as funções de forma por $[\psi]$ e outros por $[N]$.

A função de interpolação de Lagrange $\psi_i(\xi)$ associada ao nó i , de um polinómio com n parcelas,

é dada por:

$$\psi_i(\xi) = \prod_{j=1; j \neq i}^n \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (4.10a)$$

ou,

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (4.10b)$$

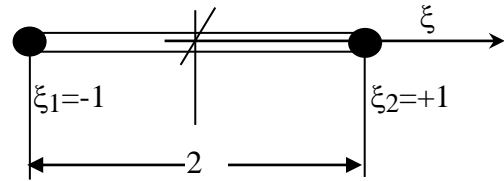
Estas funções satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \psi_i(\xi_j) = 1 & \text{se } i = j & ; & \psi_i(\xi_j) = 0 & \text{se } i \neq j \\ \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi) = 1 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^n \frac{d\psi_i(\xi)}{d\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Sendo n o número de graus de liberdade do elemento as funções de interpolação lineares, quadráticas e cúbicas de Lagrange, resultantes do desenvolvimento de (4.10a ou 4.10b) são respectivamente:

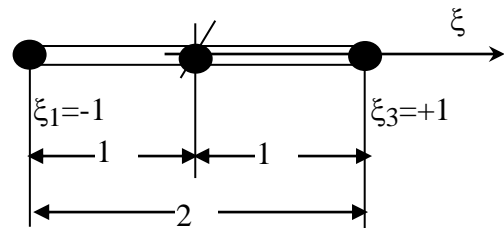
Linear

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.9)\text{-rep.}$$



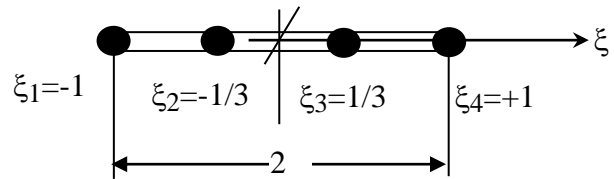
Quadrática

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ \psi_2 &= (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.12)$$



Cúbico

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{9}{16}(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} + \xi\right)\left(\frac{1}{3} - \xi\right) \\ \psi_2 &= \frac{27}{16}(1 + \xi)(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} - \xi\right) \\ \psi_3 &= \frac{27}{16}(1 + \xi)(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} + \xi\right) \\ \psi_4 &= -\frac{9}{16}\left(\frac{1}{3} + \xi\right)\left(\frac{1}{3} - \xi\right)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.13)$$



Todas as grandezas definidas no elemento real, como o campo de deslocamentos e a geometria do elemento (como sejam as coordenadas dos seus nós), podem através da transformação de coordenadas ser definidas num outro elemento, um elemento "ideal", designado por elemento *mestre* [3] (ou elemento *parental* [4]).

As características e vantagens do elemento mestre são:

- tem coordenadas especiais que permitem que as funções de forma sejam facilmente desenvolvidas;
- mantêm as relações de compatibilidade entre elementos com forma e orientação arbitrária;
- representam um elemento não distorcido;
- permitem a derivação das funções de forma;
- facilitam a integração numérica.

Ao processo que consiste em substituir o elemento real por um elemento mestre designa-se por **parametrização**. Contudo, o elemento linear (aqui em discussão) é tão simples que a sua parametrização não conduz a qualquer vantagem, pois só se complica o procedimento de cálculo. No entanto vai-se ilustrar a sua aplicação na secção seguinte, porque o procedimento de cálculo é semelhante para elementos mais complexos (bidimensionais e tridimensionais) onde de facto há grandes vantagens na sua aplicação.

4.3- Definição da Geometria

Em elementos de geometria mais irregular, as suas coordenadas podem também ser aproximada por um elemento regular, o elemento mestre por:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^m \hat{\psi}_i(\xi) * x_i^e \quad (4.15)$$

sendo x_i^e as coordenadas dos nós do elemento real. A aproximação pode ser efectuada com um grau aproximação qualquer, não necessariamente igual ao da aproximação do campo de deslocamentos, ou seja, com $m \neq n$, e $\psi_j(\xi) \neq \hat{\psi}_i(\xi)$.

exemplo, ver figura 4.4a):

$$x(\xi) = \hat{\psi}_1(\xi) * x_1^e + \hat{\psi}_2(\xi) * x_2^e + \hat{\psi}_3(\xi) * x_3^e = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) * x_1^e + (1+\xi)(1-\xi) * x_2^e + \frac{1}{2}(1+\xi) * x_3^e$$

4.4 - Formulação Isoparamétrica. [3, 4, 5]

Vimos que o campo de deslocamentos pode ser aproximado no elemento mestre por funções de aproximação $\psi_j(\xi)$, como na expressão seguinte:

$$u(\xi) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\xi) * u_j^e \quad (4.14)$$

sendo u_j^e os deslocamentos nodais no elemento real.

$$(\text{exemplo: } u(\xi) = \psi_1(\xi) * u_1^e + \psi_2(\xi) * u_2^e = \frac{1}{2}(1-\xi) * u_1^e + \frac{1}{2}(1+\xi) * u_2^e)$$

Da secção de texto anterior vimos que podemos interpolar a geometria, de forma independente da interpolação do campo de deslocamentos.

Dependendo da relação entre os graus de aproximação usados a formulação dos elementos finitos é classificada em três categorias:

- 1) Formulação Subparamétrica : $m < n$ - geometria tem menos GL que os deslocamentos
- 2) Formulação Isoparamétrica : $m = n$ - geometria e deslocamentos com os mesmos GL
- 3) Formulação Superparamétrica : $m > n$ - geometria tem mais GL que os deslocamentos

Nas formulações subparamétricas a geometria é representada por uma ordem menor que a aproximação das variáveis dependentes. Um exemplo é a viga de Euler Bernoulli onde os elementos cúbicos de Hermite são usados para aproximar a deformação transversal, enquanto a geometria é aproximada linearmente, no caso de vigas rectas de secção constante.

A **formulação isoparamétrica** é a mais usada e superparamétrica raramente usada.

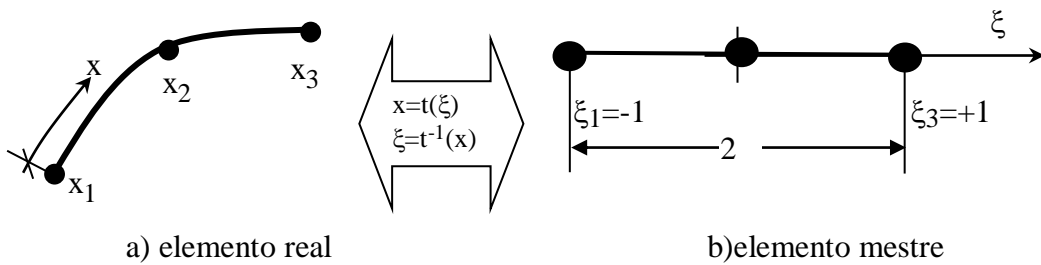


Figura 4.4- Aproximação da geometria de um elemento unidimensional [4]

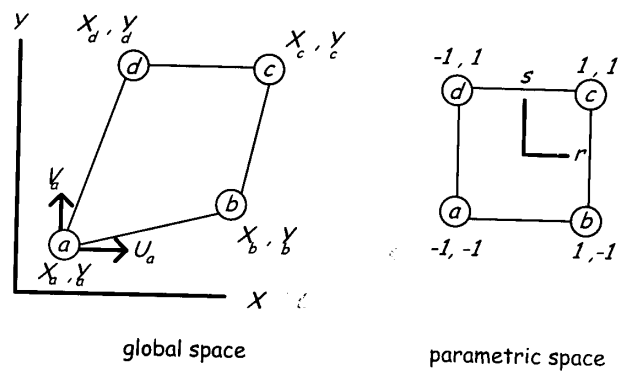


Figura 4.5- Elemento de superfície isoparamétrico de 4 nós

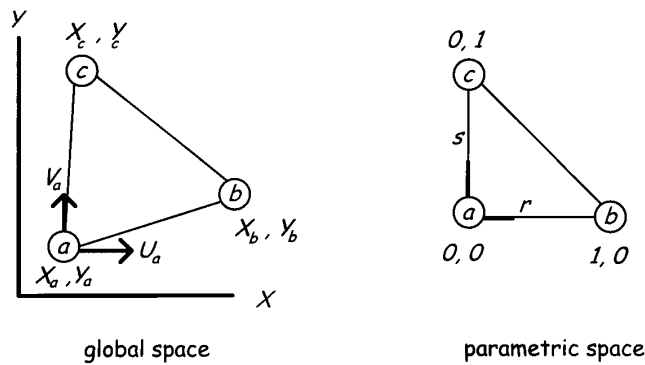


Figura 4.6- Elemento de superfície isoparamétrico de 3 nós[4]

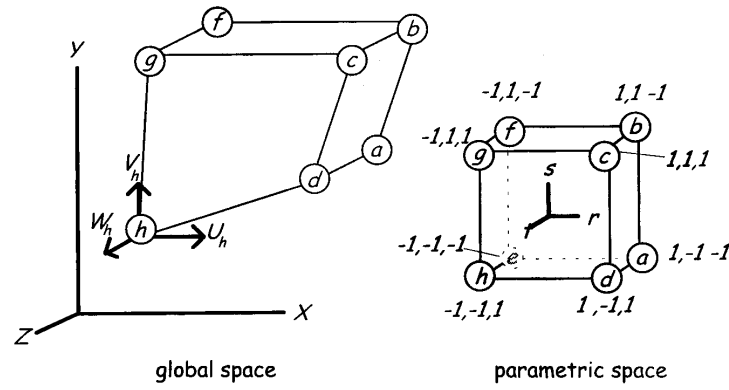


Figura 4.7- Elemento de volume isoparamétrico de 8 nós[4]

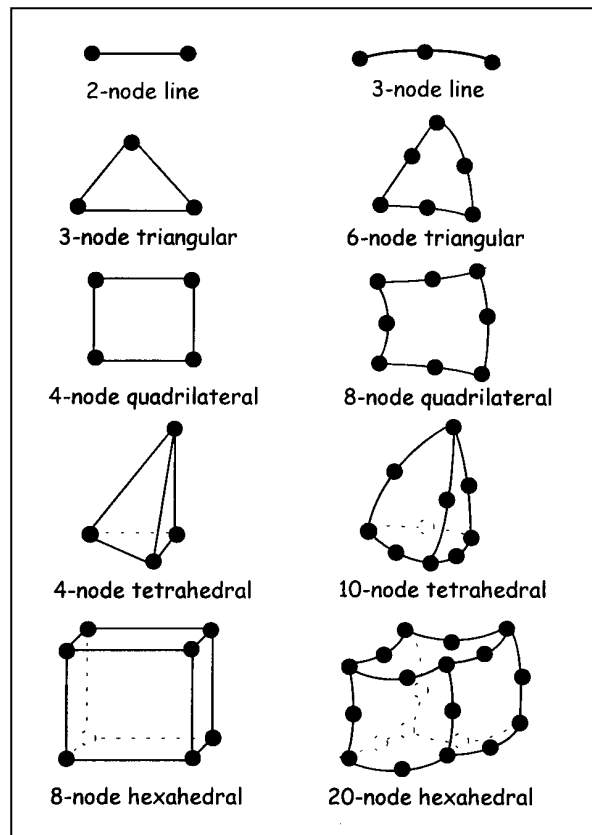


Figura 4.8 - Elementos isoparamétricos mais comuns[4]

4.5 - Jacobiano de Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas de um elemento mestre para um elemento real requer uma função do tipo :

$$x = t(\xi) \quad (4.16)$$

Se $t(\xi)$ for linear (exemplo: equação (4.8)) uma recta é transformada numa recta, e se não for linear o segmento de recta é equivalente por transformação a uma curva com o mesmo grau que a função de transformação.

Dada uma transformação de coordenadas $x = t(\xi)$ é necessário determinar o modo como se relacionam os incrementos de cada uma das coordenadas no elemento real e no elemento mestre. Se a coordenada $x \in [a, b]$ do elemento real é a transformada da variável $\xi \in [c, d]$ do elemento mestre, pela transformação anterior, ao incremento dx corresponderá um incremento $d\xi$ relacionados entre si por:

$$dx = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial t(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (4.17)$$

Chama-se Jacobiano da transformação de coordenadas, $J(\xi)$, à derivada da função de transformação $x=t(\xi)$ em relação à variável paramétrica ξ :

$$J(\xi) = \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial t(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.18)$$

A expressão (4.17) pode então escrever-se:

$$dx = J(\xi) d\xi \quad (4.19.a)$$

que se verifica ser idêntico a:

$$dx = \det[J(\xi)] d\xi. \quad (4.19.b)$$

O Jacobiano "escala" um incremento no elemento mestre para outro incremento no espaço real, dada pelo produto $d\xi * \det[J(\xi)]$. Esta relação pode no caso mais geral nem ser linear.

Por outro lado a inversa do Jacobiano serve para transformar as incrementos de coordenadas do elemento real em incrementos de coordenadas do espaço mestre.

$$[J(\xi)]^{-1} = \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = \frac{\partial t(x)^{-1}}{\partial x} \quad (4.20)$$

Nos espaços bidimensionais e tridimensionais a relação (4.19.a)) é escrita em termos do determinante do Jacobiano de transformação desses espaços. Assim, para o espaço bidimensional a relação entre o espaço real (x,y) e espaço paramétrico (ξ,η) (do elemento mestre bidimensional) é dada por:

$$dx dy = \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (4.21)$$

sendo :

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Para o espaço tridimensional aquela relação é dada por:

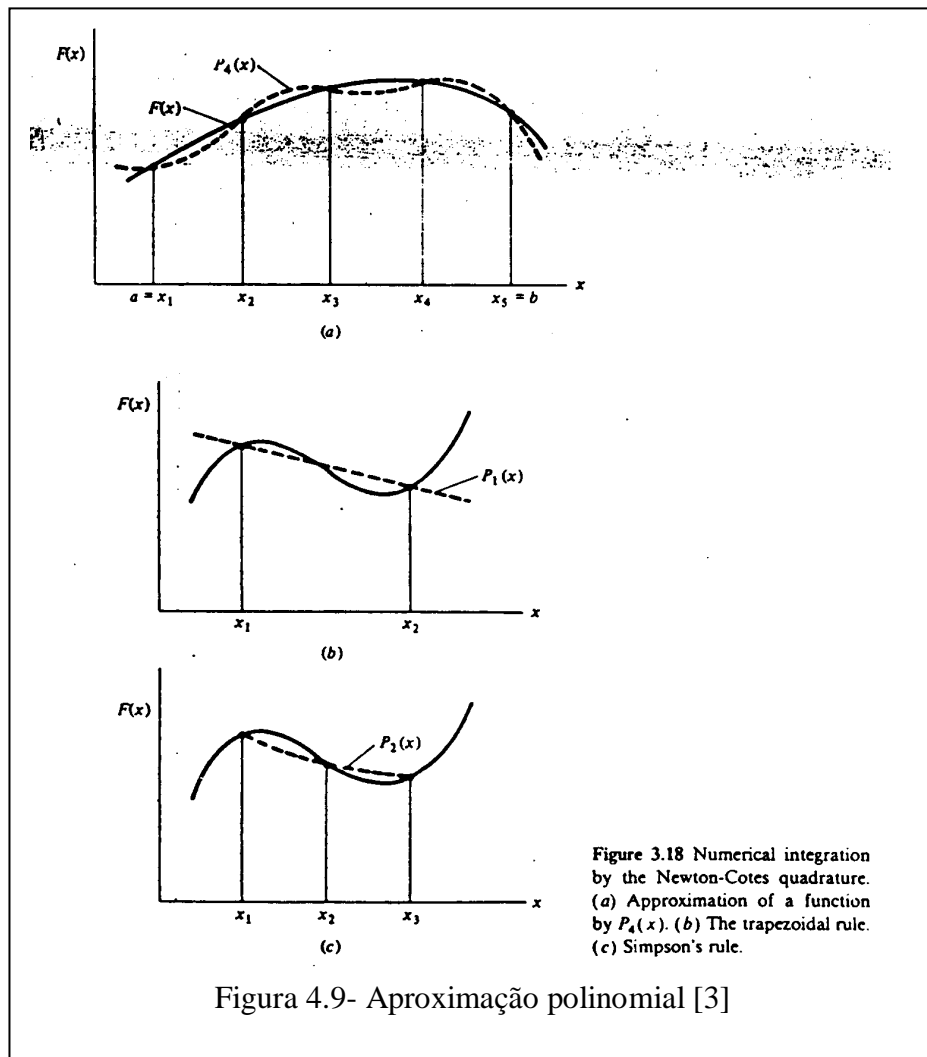
$$dx dy dz = \det[J(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta \tag{4.23}$$

sendo :

$$[J(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

As expressões (4.21) e (4.23) são deduzidas em [22].

4.6 - Integração Numérica.



O cálculo directo dos integrais das parcelas da equação de equilíbrio (matriz de rigidez, vetores equivalentes a forças) podem por vezes ser difíceis, devido à complexidade da função a integrar. No caso de elementos isoparamétricos a presença do Jacobiano torna essa tarefa ainda mais difícil. Em ambos os casos recorre-se à integração numérica ou quadratura, para resolução desses integrais. Embora já tratado em disciplinas de cálculo numérico vamos para já relembrar a integração numérica unidimensional.

Pretende-se resolver um integral na forma $\int_a^b F(x)dx$. A integração numérica pretende encontrar uma função polinomial $P(x)$, simples de integrar e cujo resultado seja semelhante ao integral da função real (ver figura 4.9).

4.6.1- Integração de Newton Cotes

Neste método os n intervalos entre pontos de integração são iguais entre si, definindo-se $n+1$ pontos de integração.

$$\int_a^b F(x)dx = (b - a) * \sum_{i=1}^n w_i * F(x_i) \tag{4.25}$$

w_i - pesos de integração (ver figura 4.10)

x_i - abcissa do ponto de base i

$F(x_i)$ - valor da função $F(x)$ em x_i

Para o caso particular de $F(x)$ ser um polinómio, a expressão acima (4.25) é exacta se:

- n é par e se $F(x)$ é um polinómio de grau $(n+1)$ ou menor;
- n é ímpar e se $F(x)$ é um polinómio de grau n ou menor.

Consequentemente um polinómio de grau n é integrado exactamente se forem escolhidos $n+1$ pontos de base.

n	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	18/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

Figura 4.10-Pesos de integração de Newton-Cotes [3]

4.6.2- Integração de Gauss Legendre

Os pontos de integração não estão igualmente espaçados. Há necessidade de fazer uma redução de coordenadas.

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^{+1} F(\xi)J(\xi)d\xi = \int_{-1}^{+1} G(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^n G(\xi_{Gi}) * W_{Gi} \tag{4.26}$$

ξ_i - abcissas nos pontos de Gauss (ver figura 4.11),

w_i - pesos dos pontos de Gauss,

$J(\xi)$ - Jacobiano de transformação de coordenadas,

- A expressão acima (4.26) calcula exactamente o integral se $G(x)$ for um polinómio de grau $2n_G-1$ sendo n_G o número de pontos de Gauss;
- Inversamente um polinómio $G(x)$ de grau n é integrado exactamente com $n_G=(n+1)/2$ pontos de Gauss (se $n+1$ for impar passa-se para o inteiro maior mais perto).
- Se a derivada de ordem $(2n_G+2)^a$ de $G(x)$ for nula o erro de integração é nulo.

Este tipo de integração tem vantagens face à integração de Newton Cotes, pois obtemos igual precisão com menos pontos de base, o que reduz o tempo de cálculo.

(Os pontos de base ξ_i são raízes do polinómio de Legendre, $P_{(n+1)}(\xi)$).

FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS 157

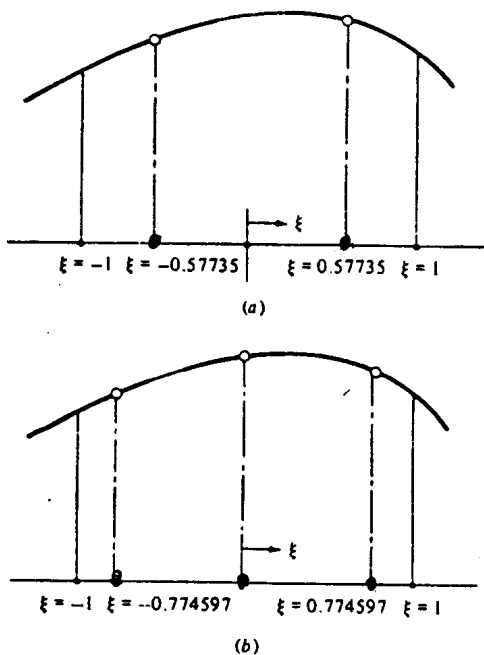


Figure 3.19 Gauss-Legendre quadrature. (a) The two-point Gauss-Legendre quadrature. (b) The three-point Gauss-Legendre quadrature.

Figura 4.11.a)-Pesos de integração de Gauss Legendre [3].

$\pm x_i$	w_i	$\pm x_i$	w_i
$n = 2$		$n = 8$	
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
		0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
$n = 3$		0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889	0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556	$n = 9$	
$n = 4$		0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546	0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454	0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
$n = 5$		0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889	0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366	$n = 10$	
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189	0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753
$n = 6$		0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691	0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139	0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170	0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
$n = 7$		$n = 12$	
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469	0.12523 34085 11469	0.24914 70458 13403
0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119	0.36783 14989 98180	0.23349 25365 38355
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277	0.58731 79542 86617	0.20316 74267 23066
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870	0.76990 26741 94305	0.16007 83285 43346
		0.90411 72563 70475	0.10693 93259 95318
		0.98156 06342 46719	0.04717 53363 86512

Tabela 6.1: Ordenadas e pesos dos Pontos de Gauss. Caso unidimensional.

Figura 4.11.b)-Pesos de integração de Gauss Legendre [3].

4.6.3- Integração de Lobatto

A quadratura de Lobatto é semelhante à de Gauss residindo a diferença no facto de os pontos extremos de integração coincidirem com os extremos do intervalo. A quadratura de Lobatto integra exactamente polinómios de ordem igual ou inferior a $2n-3$ sendo n o número de pontos de integração. Apresenta-se na figura 4.12 os pesos e abcissas dos pontos de integração.

n	ξ_i	P_i
2	± 1.0000000000	1
3	± 1.0000000000	1/3
	0.0000000000	4/3
4	± 1.0000000000	1/6
	± 0.4472135955	5/6
5	± 1.0000000000	1/10
	± 0.6546536707	49/90
	0.0000000000	32/45

Figura 4.12 - Pesos de integração de Lobatto.

4.6- EXEMPLOS

4.6.1- EXEMPLO E.1: Determine o campo de deslocamentos e de tensões da seguinte barra.

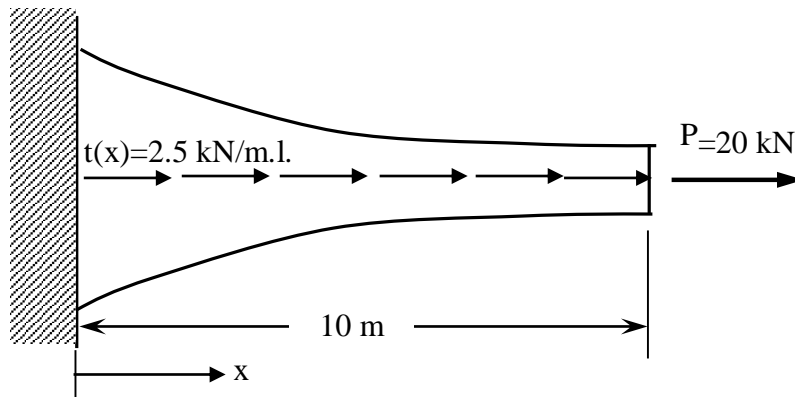


Figura E.1

$$E = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Área da secção transversal: } A(x) = \pi/(1+x) \text{ (m}^2\text{)}.$$

Exemplo E.1.A) - Solução Exacta:

Como a estrutura é isostática facilmente se determinam os esforços e deslocamentos exactos.

$$\text{Esforço axial: } N(x) = 20 + 2.5 \cdot (10 - x)$$

$$\text{Tensão normal: } \sigma(x) = N(x) / A(x)$$

$$\text{Deformação: } \varepsilon(x) = \sigma(x) / E$$

Deslocamentos

$$\delta(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{N \cdot N_u}{EA} dx = \int_0^{x_0} \frac{20 + 2.5 \cdot (10 - x)}{E \cdot \pi / (1 + x)} \cdot 1 dx = \frac{1}{E\pi} (45x_0 + 21.25x_0^2 - 2.5/3 \cdot x_0^3)$$

Exemplo E.1.B) - Resolução recorrendo a um só elemento finito de barra com secção de área constante

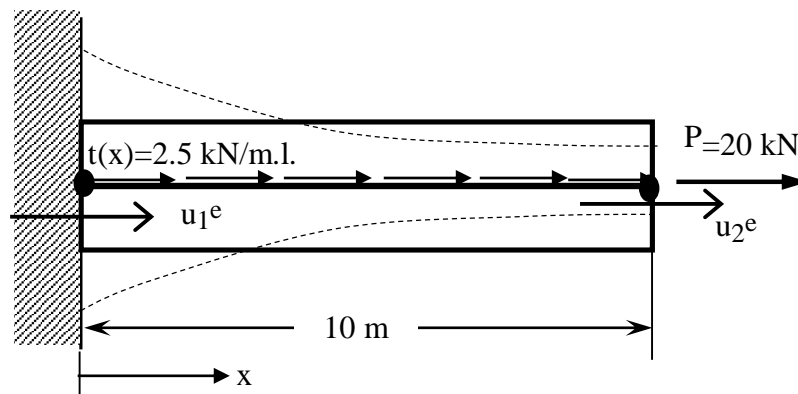


Figura E.2

$$\text{Área média} = \frac{\int_0^{10} \frac{\pi}{1+x} dx}{10} = \frac{\pi}{10} [\ln(1+x)]_0^{10} = 0.7533 \text{ m}^2$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$[k^e] = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} \\ -\frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}; \{F_S^e\} = \int_S [\psi]^T * \{t\} dS = \begin{Bmatrix} \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} \end{Bmatrix} * (t * b) = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} * 2.5$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^{e=1} \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$EA \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} * 2.5 + \begin{Bmatrix} F_1^{e=1} \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Repare que $u_1^e = 0$. Da segunda equação obtem-se : $u_2^e = 14.38 \times 10^{-6} \text{ m}$

O campo de deslocamentos é:

$$u(x) = \psi_1(x) * u_1^e + \psi_2(x) * u_2^e = \left(1 - \frac{x}{L}\right) * 0 + \frac{x}{L} * 14.38 \times 10^{-6} = 1.438 \times 10^{-6} * x$$

Campo de deformações:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = 1.438 \times 10^{-6}$$

Campo de tensões:

$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x) = 43.14 \text{ kN/m}^2$$

Forças Nodais:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K^e] * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32.5 \\ 32.5 \end{Bmatrix}$$

Exemplo E.1.C) - Resolução recorrendo a três elementos finitos de barra com secção de área constante

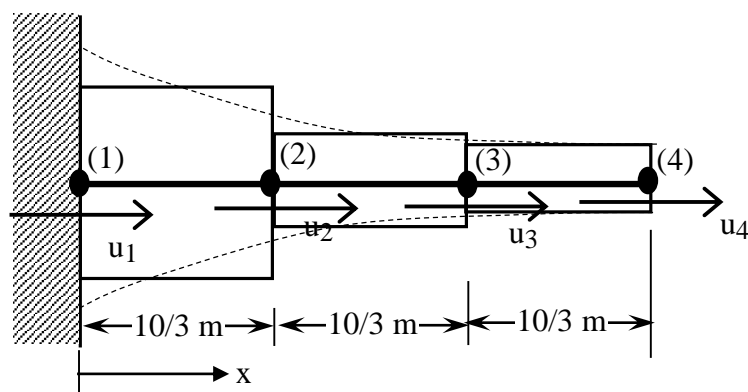


Figura E.3

$$A_{m1} = \frac{\int_0^{10/3} \frac{\pi}{1+x} dx}{10/3} = 1.382 \text{ m}^2; A_{m2} = \frac{\int_{10/3}^{20/3} \frac{\pi}{1+x} dx}{10/3} = 0.538 \text{ m}^2; A_{m3} = \frac{\int_{20/3}^{30} \frac{\pi}{1+x} dx}{10/3} = .340 \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = 10/3 \text{ m}$$

Tabela de incidências:

GL Elementar =>	(1)	(2)
GLG no Elem 1 =>	1	2
GLG no Elem 2 =>	2	3
GLG no Elem 3 =>	3	4

$$[k^1] = 12.439 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * 10^6; \quad [k^2] = 4.839 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * 10^6; \quad [k^3] = 3.060 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * 10^6$$

$$k_{11} = k_{11}^{(1)} = 12.439 \times 10^6$$

$$k_{12} = k_{12}^{(1)} = -12.439 \times 10^6$$

$$k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = 17.278 \times 10^6$$

$$k_{23} = k_{12}^{(2)} = -4.839 \times 10^6$$

$$k_{33} = k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(3)} = 7.899 \times 10^6$$

$$k_{34} = k_{12}^{(3)} = -3.060 \times 10^6$$

$$k_{33} = k_{22}^{(3)} = 3.060 \times 10^6$$

$$\{F_S^1\} = \{F_S^2\} = \{F_S^3\} = \begin{Bmatrix} L_e \\ 2 \\ L_e \\ 2 \end{Bmatrix} * (t * b) = \begin{Bmatrix} 4.167 \\ 4.167 \end{Bmatrix}; \quad \{F^3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12.439 & -12.439 & 0 & 0 \\ -12.439 & 17.278 & -4.839 & 0 \\ 0 & -4.839 & 7.899 & -3.060 \\ 0 & 0 & -3.060 & 3.060 \end{bmatrix} * 10^6 * \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.167 \\ 8.332 \\ 8.332 \\ 24.167 \end{Bmatrix}$$

Repare que $u_1=0$. Resolve-se o subsistema inferior direito, que envolve as variáveis u_2, u_3 e u_4 .

O vector de deslocamentos nodais finais é:

$$\{u\}^T = \{0; 3.282 * 10^{-6}; 9.998 * 10^{-6}; 17.896 * 10^{-6}\}$$

Logo os deslocamentos nodais elementares são:

$$\{u^1\} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.282 \end{Bmatrix} * 10^{-6}; \quad \{u^2\} = \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.282 \\ 9.998 \end{Bmatrix} * 10^{-6}; \quad \{u^3\} = \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.998 \\ 17.896 \end{Bmatrix} * 10^{-6}$$

• Elemento 1:

- O campo de deslocamentos é:

$$u(x) = \psi_1(x) * u_1^1 + \psi_2(x) * u_2^1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) * 0 + \frac{x}{L} * 3.282 * 10^{-6} = (0.985 * x) * 10^{-6}, [0 \leq x \leq 10/3]$$

- Campo de deformações:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = 0.985 * 10^{-6}$$

- Campo de tensões:

$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x) = 29.55 \text{ kN/m}^2$$

- Forças Nodais:

$$\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix} = [K^1] * \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40.8 \\ 40.8 \end{Bmatrix}$$

• Elemento 2:

- O campo de deslocamentos é:

$$u(x) = \psi_1(x) * u_1^2 + \psi_2(x) * u_2^2 = (3.283 + 2.015 * x) * 10^{-6}, [0 \leq x \leq 10/3]$$

- Campo de deformações:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2.015 * 10^{-6}$$

- Campo de tensões:

$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x) = 60.45 \text{ kN/m}^2$$

- Forças Nodais:

$$\begin{Bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{Bmatrix} = [K^2] * \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24.17 \\ 24.17 \end{Bmatrix}$$

• Elemento 3:

- O campo de deslocamentos é:

$$u(x) = \psi_1(x) * u_1^3 + \psi_2(x) * u_2^3 = (9.998 + 2.370 * x) * 10^{-6}, [0 \leq x \leq 10/3]$$

- Campo de deformações:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = 2.370 * 10^{-6}$$

- Campo de tensões:

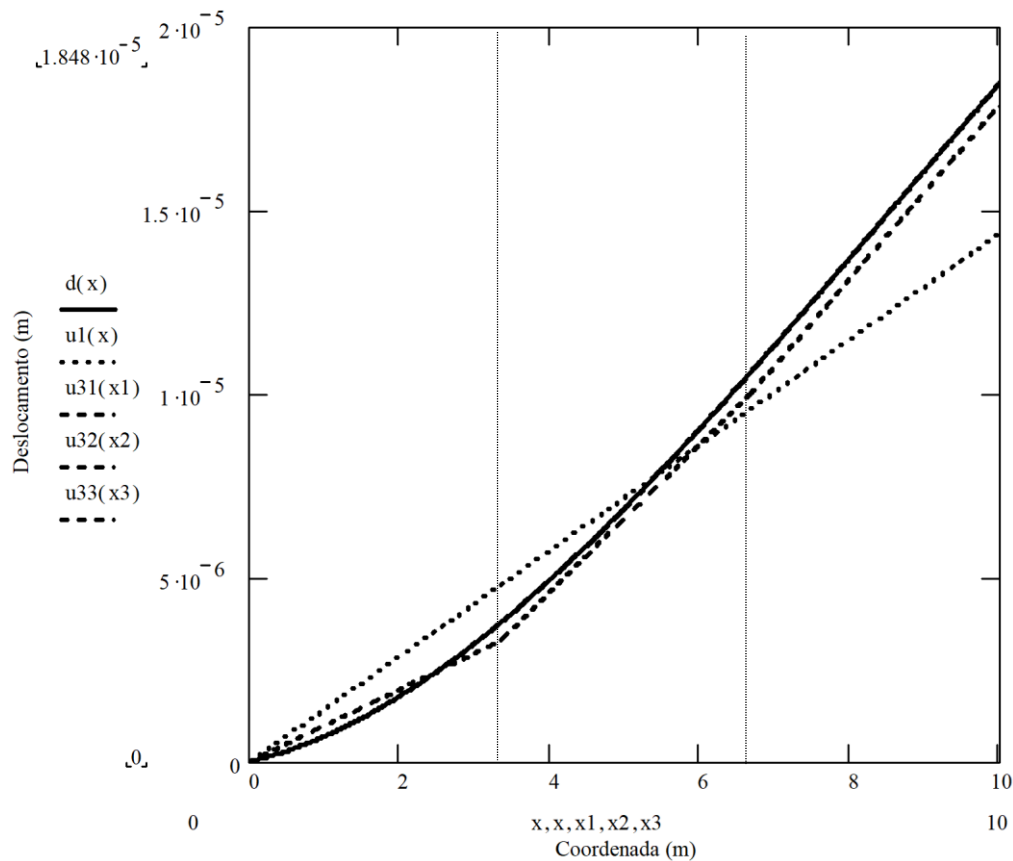
$$\sigma(x) = E * \varepsilon(x) = 71.09 \text{ kN/m}^2$$

- Forças Nodais:

$$\begin{Bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix} = [K^3] * \begin{Bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32.50 \\ 32.50 \end{Bmatrix}$$

Comentários:

Figura E.4 - Deslocamento vs. distância



Os deslocamentos obtidos por soluções exacta, aproximada com um elemento finito e aproximada com três elementos finitos, são representadas respectivamente pelo traço cheio, traço ponteadado, e traço interrompido na figura E.4. Tecem-se alguns comentários:

a) Os deslocamentos ao longo de cada barra nos modelos aproximados por elementos finitos ora são superiores ora inferiores aos deslocamentos reais, consoante a coordenada do ponto.

b) Na aproximação com três elementos e a partir do segundo elemento, os deslocamentos são sempre inferiores aos reais. O mesmo acontece com a aproximação com um elemento a partir sensivelmente a meio desse elemento.

c) Verifica-se que os deslocamentos nodais extremos das soluções aproximadas são sempre inferiores aos reais, ou seja, o modelo com elementos finitos é mais rígido que a estrutura real. Deve-se ao facto da função de aproximação dos deslocamentos não conter todos os termos necessários que permitam ao modelo de elementos finitos se deformar exactamente da mesma forma que a estrutura real. Pode ser afirmado que a idealização por elementos finitos é em geral mais rígida que a estrutura real [4].

d) O erro entre a solução aproximada e a real resulta do facto do campo de deslocamentos ser aproximado por um polinómio do primeiro grau e a secção dos elementos finitos ser constante, enquanto na realidade, a função deslocamento é um polinómio do terceiro grau sendo a secção real variável.

e) Como é de esperar, a solução aproximada com mais elementos corresponde a uma *malha* mais refinada e por isso acompanha melhor a solução da estrutura real.

Avaliamos agora a distribuição de tensões ao longo da estrutura, que se mostra na figura E.5.

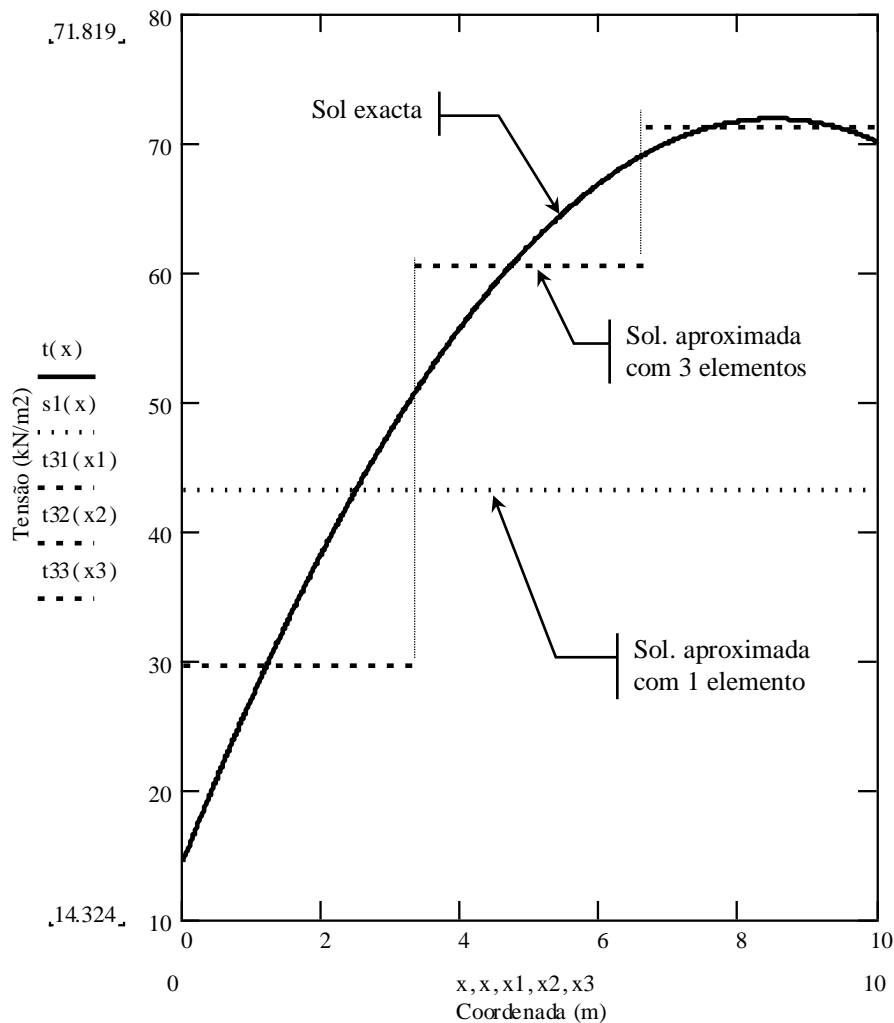


Figura E.5 - Tensões vs. distância

f) As tensões reais têm um máximo à cota 8.5 m devido (i) à carga de superfície actuante que faz variar o esforço axial ao longo da barra e (ii) ao facto da peça ter secção variável.

g) Os valores de pico de tensões reais ao longo da estrutura são subestimados pela soluções dadas pelo método dos elementos finitos, como pode ser observado no elemento 3, o que é, aliás, típico.

h) Em cada elemento as tensões ora sobrestimam ora subestimam as tensões reais.

i) As tensões são constantes ao longo de cada elemento porque são proporcionais às deformações. Estas também são, por outro lado, constantes porque resultam da derivação do campo de deslocamentos (o qual fora aproximado por um polinómio do primeiro grau). Concluindo, as tensões aproximadas são representadas no gráfico por patamares.

- j) Os erros entre as soluções aproximadas e reais de tensões são bastante superiores aos erros dos casos de deslocamentos, pelas razões apontadas na alínea i).
- k) À esquerda e direita de cada nó comum a dois elementos, as tensões são diferentes.

5 - ELEMENTO FINITO VIGA

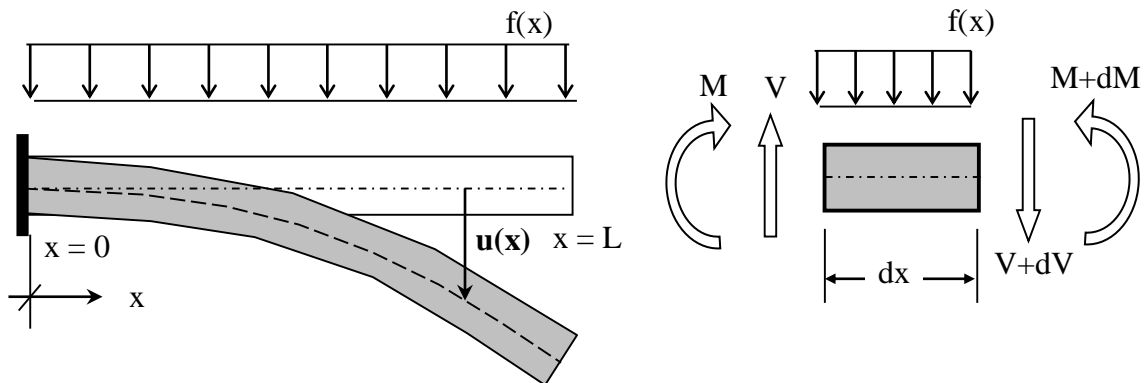
5.1- Dedução da Matriz de Rigidez e Vectors de Força com base na EGRP

Figura 5.1 a),b)

Nesta formulação considera-se que o deslocamento transversal à viga é representado por $u(x)$.

As definições $f(x) = \frac{-dV}{dx}$, $V = \frac{dM}{dx}$, já são conhecidas da Resistência de Materiais incluindo

a equação diferencial: $M = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$ que agora é escrita em termos da carga aplicada $f(x)$:

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right)$$

Assim o resíduo no domínio (numa porção da barra) é: $R_{\Delta} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) - f(x)$
e a equação geral dos resíduos ponderado fica:

$$\int_0^L R_{\Delta} W_{\Delta} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) - f(x) \right) * W_{\Delta} = 0$$

Integrando uma vez por partes a parcela com as funções derivadas:

$$- \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) \right) * \frac{dW_{\Delta}}{dx} dx + \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) * W_{\Delta} \right]_0^L - \int_0^L f(x) * W_{\Delta} dx = 0$$

Integrando novamente e arranjando as parcelas obtemos:

$$- \int_0^L \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \frac{d^2 W_{\Delta}}{dx^2} - f(x) * W_{\Delta} \right) dx + \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) * W_{\Delta} - EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \frac{dW_{\Delta}}{dx} \right]_0^L = 0$$

Comentários

Integrando duas vezes por partes a diferenciação da função de aproximação reduz-se de $m=4$ para $m=2$ e a da função de ponderação aumenta para 2, permitindo distribuir as derivadas igualmente pelas duas funções. Ambas as funções têm que ser de classe $C^{m-1}=C^1$, ou seja têm que ser contínuas assim como a sua 1ª derivada. A segunda parcela que surge refere-se a condições de fronteira naturais, S2 (esforços / forças)

Sabendo que: $V(x) = -EI \frac{d^3u(x)}{dx^3}$ e que $M(x) = -EI \frac{d^2u(x)}{dx^2}$, o significado da segunda

parcela são as forças nodais nos extremos da barra (nos nós), com sentido positivo da figura 5.2, isto é:

$$V_1 = -V(0) = +EI \frac{d^3u(0)}{dx^3} ; \quad V_3 = V(L) = -EI \frac{d^3u(L)}{dx^3};$$

$$M_2 = M(0) = -EI \frac{d^2u(0)}{dx^2} ; \quad M_4 = -M(L) = +EI \frac{d^2u(L)}{dx^2}$$

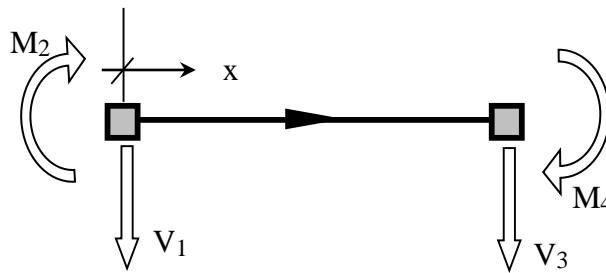


Figura 5.2

A EGRP fica com o seguinte aspecto:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2W_\Delta}{dx^2} - f * W_\Delta \right) dx + \left[-V_3 * W_\Delta(L) - V_1 * W_\Delta(0) - M_4 * \frac{dW_\Delta(L)}{dx} - M_2 * \frac{dW_\Delta(0)}{dx} \right]_0^L = 0$$

Aplicando o método de Galerkin, isto é, fazendo:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i * u_i; \quad W_\Delta = \delta u = \sum_{i=1}^n N_i * \delta u_i \quad \text{resulta:}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2N_i}{dx^2} * u_i; \quad \frac{d^2W_\Delta}{dx^2} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2N_i}{dx^2} * \delta u_i$$

Substituindo na EGRP, e para $j= 1, \dots, n$, vem:

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Delta^e} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} \frac{d^2N_j}{dx^2} u_i \delta u_j dx \right) - \int_{\Delta^e} f(x) N_j \delta u_j dx + \sum_{i=1}^n \left[\left(EI \frac{d^3N_i}{dx^3} N_j - \frac{d^2N_i}{dx^2} N_j \right) \delta u_j \right]_{-x_e}^{x_{e+1}} = 0$$

Para cada j surge uma equação tipo, que no conjunto dos j representam um sistema de equações algébrico:

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Delta^e} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx * u_i \right) = \int_{\Delta^e} f(x) N_j dx + \sum_{i=1}^n \left[EI \frac{d^3 N_i}{dx^3} N_j \right]_{x_{e+1}} + \sum_{i=1}^n \left[EI \frac{d^3 N_i}{dx^3} N_j \right]_{x_e} + \dots$$

$$\dots + \sum_{i=1}^n \left[EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} N_j \right]_{x_{e+1}} + \sum_{i=1}^n \left[EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} N_j \right]_{x_e} = 0$$

Ou seja:

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Delta^e} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx * u_i \right) = \int_{\Delta^e} f(x) N_j dx + V_3 N_j(x_{e+1}) + V_1 N_j(x_e) + M_4 N_j(x_{e+1}) + M_1 N_j(x_e)$$

ou, de forma compacta:

$$\sum_{i=1}^4 k^{e}_{ij} * u^e_j = F^e_j$$

cujas variáveis são:

- a matriz de rigidez $k^{e}_{ij} = k^{e}_{ji} = \int_{\Delta^e} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx *$

- o vector de deslocamentos: u^e_j

- o vector de forças nodais: $F^e_j = \int_{\Delta^e} f(x) N_j dx + V_3 N_j(x_{e+1}) + V_1 N_j(x_e) + M_4 N_j(x_{e+1}) + M_1 N_j(x_e)$

Matricialmente o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} k^{e}_{11} & k^{e}_{12} & k^{e}_{13} & k^{e}_{14} \\ k^{e}_{21} & k^{e}_{22} & k^{e}_{23} & k^{e}_{24} \\ k^{e}_{31} & k^{e}_{32} & k^{e}_{33} & k^{e}_{34} \\ k^{e}_{41} & k^{e}_{42} & k^{e}_{43} & k^{e}_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \\ u^e_3 \\ u^e_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^e_1 \\ f^e_2 \\ f^e_3 \\ f^e_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Adoptando como funções de interpolação as **funções de Hermite**,

$$H^e_1 = N_1 = 1 - 3 \left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^3 \quad H^e_2 = N_2 = -(x - x_e) * \left(1 - \frac{x - x_e}{h_e} \right)^2$$

$$H^e_3 = N_3 = 3 \left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^3 \quad H^e_4 = N_4 = -(x - x_e) * \left(\left(\frac{x - x_e}{h_e} \right)^2 - \frac{x - x_e}{h_e} \right)$$

e substituindo-as nas últimas definições resulta:

$$\frac{EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6h_e & -12 & -6h_e \\ -6h_e & 4h_e^2 & 6h_e & 2h_e^2 \\ -12 & 6h_e & 12 & 6h_e \\ -6h_e & 2h_e^2 & 6h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u^e_1 \\ u^e_2 \\ u^e_3 \\ u^e_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{f * h_e}{2} \\ \frac{f * h_e^2}{12} \\ \frac{12}{f * h_e} \\ \frac{2}{f * h_e^2} \\ -\frac{f * h_e^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

igualdade onde figuram grandezas já familiares, como a matriz de rigidez da viga e forças equivalentes a carga de vão uniforme.

5.2- Dedução da Matriz de Rigidez e Vectores de Força com base no PTV

Pretende-se deduzir a matriz de rigidez e o vector de forças nodais de um elemento finito viga de Euler-Benoulli, o qual é caracterizado pelo facto das secções se manterem planas e perpendiculares ao eixo da peça depois da deformação por flexão. Despreza-se a deformação por corte.

PASSO 1:

Dever-se-á: (i) identificar o problema, (ii) escolher um sistema de coordenadas conveniente, (iii) numerar os nós, (iv) determinar os graus de liberdade do elemento, (v) definir o vector de deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$ e (vi) definir o vector de forças nodais elementares $\{F^e\}$.

(i) - A viga só admite deformações por flexão, e por isso cada ponto só poderá ter deslocamentos transversais (flecha) $w(x)$, e rotações $\theta(x)$. Não há deformação axial.

(ii) e (iii)-

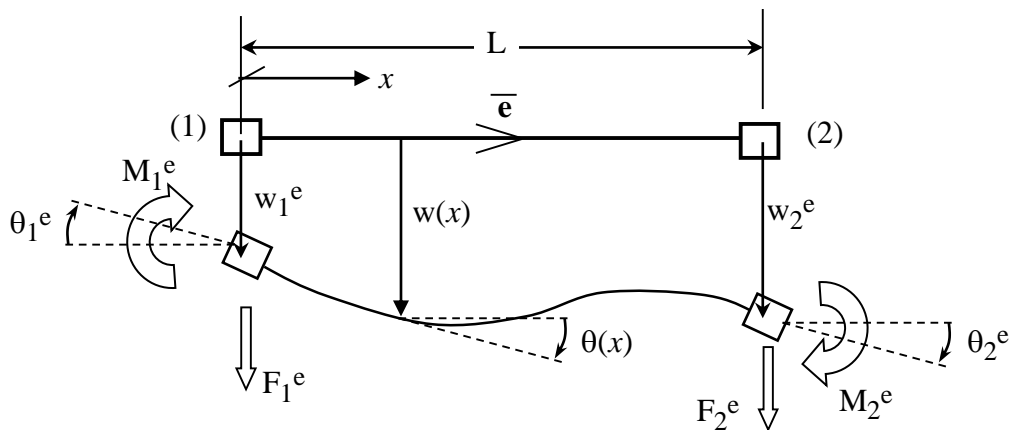


Figura 5.1- Deslocamentos e forças nodais elementares

(iv) - Cada nó de extremidade tem dois graus de liberdade, um de translação transversal ao eixo da barra e outro de rotação. Por conseguinte a viga com dois nós tem quatro graus de liberdade.

(v) e (vi) - Os vectores de deslocamentos e forças nodais são definidos a seguir sendo também estabelecida uma ordem sequencial dos seus elementos.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.1); \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ M_1^e \\ F_2^e \\ M_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

PASSO 2: Geração do Elemento Finito

PASSO 2.1: Funções de aproximação

Pretende-se escolher uma Função de Aproximação de Deslocamentos (ou Função Deslocamento) $\{\delta(x)\}$ que define os deslocamentos (translação e rotação) de qualquer ponto à coordenada x no interior de elemento, e posteriormente relacioná-los com os deslocamentos nodais elementares. Em geral a função é um polinómio completo que tem tantas parcelas, e consequentemente tantos coeficientes de parcela incógnitos $\{\alpha\}$, quanto o número de graus de liberdade do elemento.

$$\{\delta(x)\} = [\text{matriz de termos da variável } x] * \{\alpha\} \quad (5.4)$$

No problema "físico" "elemento de viga" a função deslocamento tem duas componentes, uma relativa a deslocamentos transversais ao eixo da viga $w(x)$ e outra relativa a rotações $\theta(x)$.

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{submatriz I de termos da variável } x \\ \text{submatriz II de termos da variável } x \end{bmatrix} * \{\alpha\} \quad (5.5)$$

Como há quatro graus de liberdade a função deslocamento transversal será, como já se afirmou, um polinómio completo com quatro parcelas e por isso do terceiro grau:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (5.6a)$$

Por outro lado as rotações, são neste caso particular, a primeira derivada do deslocamento transversal, $\theta(x) = d(w(x))/dx$:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (5.6b)$$

Logo a *Função Deslocamento* (constituída pelas componentes $w(x)$ e $\theta(x)$) é para o "elemento viga":

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\{\delta(x)\} = [C] * \{\alpha\} \quad (5.8)$$

$$\text{com: } [C] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Pretende-se agora relacionar os deslocamentos no interior do elemento $\{\delta(x)\}$ com os deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$. Atribui-se, então, à função deslocamento, os valores que ela assume em todos os seus nós, e que na verdade são os seus deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$. De (5.5) vem

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{submatriz I de termos da variável } x_1 \\ \text{submatriz II de termos da variável } x_1 \\ \text{submatriz I de termos da variável } x_2 \\ \text{submatriz II de termos da variável } x_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Logo :

$$\boxed{\{\delta^e\} = [A] * \{\alpha\}} \quad (5.11)$$

Resolvendo (5.11) em ordem aos coeficientes polinomiais $\{\alpha\}$ fica:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (5.11)$$

que substituído em (5.8) resulta na seguinte expressão:

$$\{\delta(x)\} = [C] * [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (5.12a)$$

$$\boxed{\{\delta(x)\} = [N] * \{\delta^e\}} \quad (5.12b)$$

com $[N]=[C][A]^{-1}$. Esta igualdade relaciona o campo de deslocamentos no interior da viga com os deslocamentos nodais, como se pretendia.

Voltando ao problema "elemento de viga" podemos construir a igualdade (5.10) substituindo $x_1=0$ e $x_2=L$:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Resolvendo em ordem a $\{\alpha\}$ (expressão 5.11):

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & +3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & +1/L^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

Colocando (5.14) em (5.7) fica:

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & +3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & +1/L^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\{\delta(x)\} = [N] * \{\delta^e\} \quad (5.12b)\text{-rep.}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} & 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} & -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

PASSO 2.2: Estabelecer as Relações Cinemáticas

Relacionar o campo de deslocamentos $\{\delta(x)\}$ no interior do elemento com o campo de deformações $\{\varepsilon(x)\}$. As deformações são em geral obtidas por derivação do campo de deslocamentos o qual depende do problema em estudo.

No caso geral (geometria de unidimensional) tem-se:

$$\{\varepsilon(x)\} = [\text{Operador diferencial sobre o campo de deslocamentos}] = [L] \quad (5.17)$$

Quando o operador $[L]$ é escrito em termos dos deslocamentos nodais resulta:

$$\{\varepsilon(x)\} = [B] * \{\delta^e\} \quad (5.18)$$

Voltemos novamente ao problema "elemento de viga"-

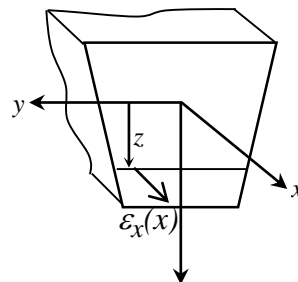


Figura 5.2

As deformações numa viga $\varepsilon_x(x)$, alongamento e encurtamento das fibras longitudinais na direcção x-x e à cota z, são proporcionais à curvatura $k(x)$ da secção localizada à coordenada x segundo o eixo do elemento, $\varepsilon_x(x) = k(x) * z$. Pode-se então afirmar que o "campo de deformações" dependente da coordenada x e é representado pelo campo de curvaturas [11]. A curvatura é, por outro lado, igual ao simétrico da primeira derivada das rotações do centro de gravidade da secção, ou ainda, igual ao simétrico da segunda derivada dos deslocamentos transversais ao eixo da viga, conforme se mostra na expressão 5.19. Como se vê a variável $\{\varepsilon(x)\}$ tem, no problema "elemento de viga", significado de curvatura.

$$\text{curvatura} = \{\varepsilon(x)\} = \left\{ -\frac{d\theta(x)}{dx} \right\} = \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) \right\} = \left\{ -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \right\}. \quad (5.19)$$

(O sinal negativo deve-se ao facto de que quando dx aumenta $d\theta$ diminui - ver figura 5.3.)

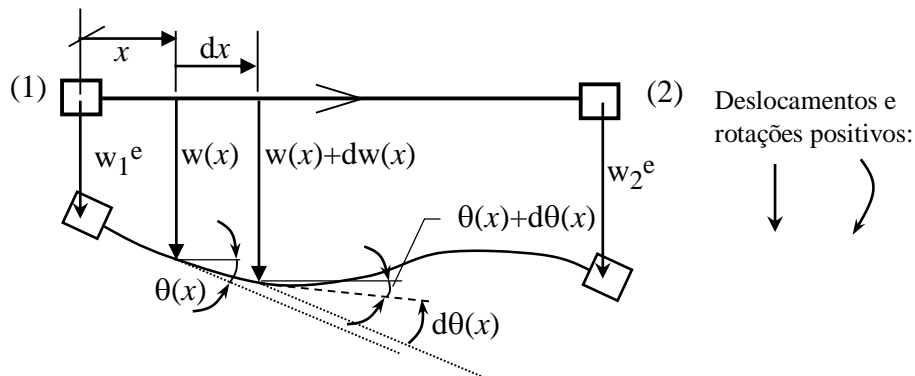


Figura 5.3- Deformações.

Podemos finalmente referir que o operador diferencial indicado em (5.17) é $[L] = \left(-\frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \right)$ o qual actua sobre o campo de deslocamentos transversais.

Desenvolvendo (5.19):

$$\{\varepsilon(x)\} = \left\{ -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \right\} = \left\{ -\frac{d^2(\alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3)}{dx^2} \right\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]^* \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Substituindo (5.14) em (5.20):

$$\{\varepsilon(x)\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & +3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & +1/L^2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.21a)$$

$$\{\varepsilon(x)\} = [L]^* [A]^{-1} * \{\delta^e\} = [B]^* \{\delta^e\} \quad (5.22)$$

com:

$$[B] = [L]^* [A]^{-1} = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \quad (5.23)$$

PASSO 2.3:

Estabelecer as Relações Constitutivas. Pretende-se relacionar o campo de tensões internas com o campo de deformações, que se escreve em geral:

$$\{\sigma(x)\} = [D]^* \{\varepsilon(x)\} \quad (5.24)$$

ou , em termos dos deslocamentos nodais elementares por:

$$\{\sigma(x)\} = [D] * [B] \{\delta^e\} \quad (5.25)$$

No caso particular das vigas ocorre o seguinte. Não estamos em geral interessados em saber a tensão numa determinada fibra que dista z do centro de gravidade da secção que está à coordenada

x , a qual seria dada por $\sigma(x) = E \left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right) * z$, mas sim no valor do momento flector à coordenada

x , $M(x)$. O momento flector é o integral na superfície transversal da secção do produto ("tensão" * "coordenada z ") :

$$M(x) = \int_A \sigma(x) * z dA = \int_A \left(E * -\frac{d^2 w}{dx^2} * z \right) * z dA = E * \int_A z^2 dA * \left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = EI \left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right) \quad (5.26)$$

Comparando (5.24) com (5.26) e tendo em conta a (5.19) podemos escrever:

$$M(x) = EI \left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right) \Leftrightarrow \{\sigma(x)\} = [D] * \{\varepsilon(x)\} \quad (5.27)$$

Deduz-se então que:

- o "campo de tensões" $\{\sigma(x)\}$ tem o significado de Momentos Flectores;
- a matriz de Elasticidade é:

$$[D] = EI$$

(5.28)

- o campo de deformações $\{\varepsilon(x)\}$ tem o significado de curvaturas.

PASSO 2.4: Estabelecer as Equações de Equilíbrio.

A forma como o Método dos Elementos Finitos é aqui apresentado, estabelece as equações de equilíbrio a partir do Teorema dos Deslocamentos Virtuais, o qual nos permite escrever:

$$\int_V [B]^T * [D] * [B] dV * \{\delta^e\} = \int_V [N]^T * \{f\} dV + \int_S [N]^T * \{t\} dS + \sum_i [N]^T * \{F_i\} + \{F^e\} \quad (5.29)$$

$$[k^e] * \{\delta^e\} = \{F_m^e\} + \{F_S^e\} + \{F_F^e\} + \{F^e\}. \quad (5.30)$$

(Expressões idênticas à (B.22) e (B.23). O vector de deslocamentos nodais elementares é agora $\{\delta^e\}$)

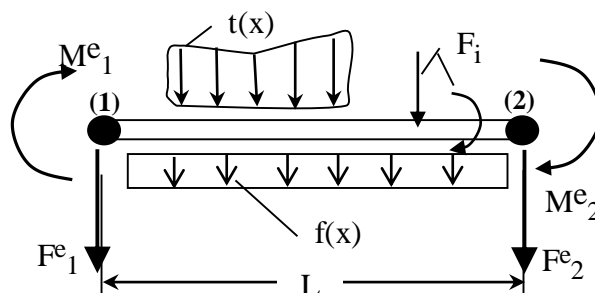


Figura 5.3- Elemento viga sujeita a acções estáticas.

Para o elemento viga desenvolvem-se agora as grandezas expressas em (B.30).

- Matriz de Rigidez Elementar, $[k^e]$

Tendo em consideração a definição adoptada para o campo de deformações efectuada na etapa 4, ou seja, a sua equivalência a curvaturas, e ainda, a transformação do campo de tensões para o campo de esforços, efectuada na etapa 5, a expressão (B.25) altera-se para:

$$[k^e] = \int_V [B]^T * [D] * [B] dV = \int_0^L [B]^T * [D] * [B] dx \quad (5.31)$$

$$[k^e] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} * EI * \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx \quad (5.32)$$

$$[k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

- Vector de Forças Nodais Equivalentes às Cargas de Vão

- vector de forças nodais equivalente às forças de massa:

$$\{F_m^e\} = \int_V [N]^T * \{f\} dV \quad (B.27)\text{-rep.}$$

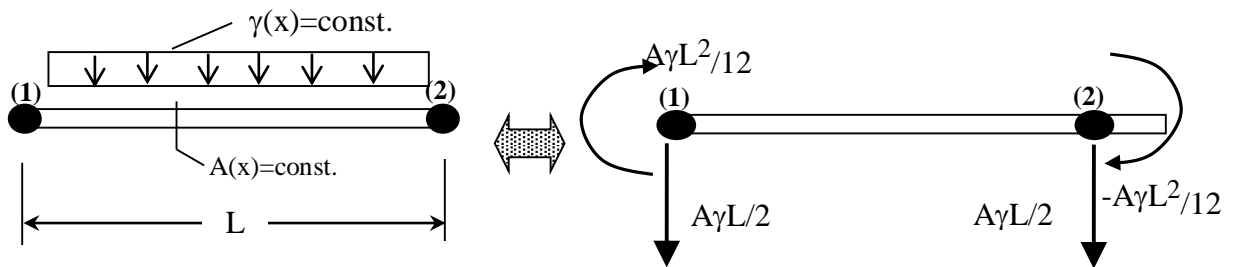
A massa define-se como uma força por unidade de volume. Se a secção da barra for constante esta acção pode ser traduzida por uma carga vertical por unidade de comprimento de valor $A * \gamma$. O vector de massa $\{f\}$, para efeito da análise estática, tem duas componentes em correspondência com cada grau de liberdade de cada ponto da viga. Assim ao primeiro grau de liberdade, que corresponde ao deslocamento vertical de cima para baixo, associa-se a força vertical $A * \gamma$, e ao segundo grau de liberdade, correspondente à rotação do ponto, não há associação possível de massa, pelo que, $\{f\} = \begin{Bmatrix} A * \gamma \\ 0 \end{Bmatrix}$.

$$\{F_m^e\} = \int_V [N]^T * \{f\} dV = \int_0^L [N]^T * \{f\} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} A * \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} dx = \dots \quad (5.34)$$

Desenvolvendo os integrais obtém-se: $\{F_m^e\} = \begin{Bmatrix} \frac{A\gamma L}{2} \\ \frac{A\gamma L^2}{12} \\ \frac{A\gamma L}{2} \\ \frac{A\gamma L^2}{12} \end{Bmatrix}$ (5.35)

Figura 5.4- Forças nodais equivalentes às forças de massa.

- vector de forças nodais equivalente às forças de superfície:



$$\{F_S^e\} = \int_S [N]^T * \{t\} dS \quad (B.28)\text{-rep.}$$

Apresenta-se um exemplo, o da figura 5.5. A força de superfície $t(x)$ (força por unidade de área) actua com valor constante ao longo da largura b da viga.

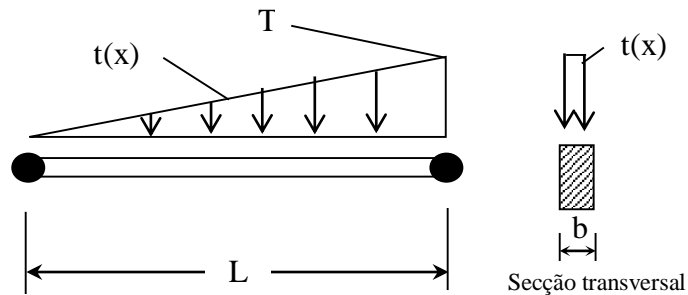


Figura 5.5- Exemplo de acção de superfície.

A força por unidade de comprimento será $(t(x) * b) = \frac{T}{L} x * b$, e o vector $\{t\}$:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} \frac{T * b}{L} x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Desenvolvendo (B.28):

$$\{F_S^e\} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \frac{bT}{L} x \\ 0 \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{3TbL}{20} \\ \frac{TbL^2}{7} \\ \frac{30}{7TbL} \\ \frac{20}{TbL^2} \\ -\frac{TbL^2}{20} \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

- vector de forças nodais equivalente às forças pontuais:

$$\{F_F^e\} = \sum_i [N(x_i)]^T * \{F_i\} \quad (B.29)\text{-rep.}$$

Como exercício determine $\{F_F^e\}$ para o caso de actuar uma força $F=25$ kN e $M=35$ kNm a $L/2$.

PASSO 3: Monta-se a matriz de rigidez global e o vector de forças global.

PASSO 4: Impõem-se as condições de fronteira.

PASSO 5: Estabelece-se o equilíbrio global da estrutura e determinam-se os deslocamentos nodais globais, $\{\delta\}$, seguindo o mesmo procedimento que foi brevemente descrito para o elemento finito barra.

PASSO 6:

Conhecidos os deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$ do elemento e determinam-se as tensões finais a partir da expressão (5.25).

$$\boxed{\{\sigma(x)\} = [D]^* [B]^* \{\delta^e\}} \quad (5.25)\text{-rep.}$$

Para o elemento viga substituindo (5.23) e (5.28) em (5.25) temos:

$$\{\sigma(x)\} = M(x) = EI^* \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right]^* \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

5.3 - Comentários

5.3.1 - Funções de Hermite de 1ª Ordem

A função de interpolação de deslocamentos transversais, expressão (5.6.a), pode ser escrita em termos dos deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$, bastando para tal substituir $\{\alpha\}$ calculado na igualdade (5.14). Na verdade não é mais do que a definição $w(x)$ da expressão (5.15), ou seja:

$$w(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & +3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & +1/L^2 \end{bmatrix}^* \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$$w(x) = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]^* \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\boxed{w(x) = [H_1^1 \quad H_2^1 \quad H_3^1 \quad H_4^1]^* \{\delta^e\} = [H]^* \{\delta^e\}} \quad (5.40)$$

Como se observa da igualdade (5.39) a função de interpolação de deslocamentos transversais $w(x)$, é uma função cúbica que interpola deslocamentos transversais e a sua derivada interpola rotações à custa dos deslocamentos nodais $\{w^e_1, \theta^e_1, w^e_2, \theta^e_2\}$. Os polinómios interpoladores com estas características pertencem à família de polinómios de interpolação de Hermite (ou polinómios de Hermite de 1ª ordem [6], funções H_1^1 , ou funções *spline* cúbicas [3]). Estes polinómios garantem a continuidade dos deslocamentos transversais e das rotações dos nós entre elementos de viga, dizendo-se que tem *continuidade C^1* .

Lembramos que as funções de interpolação (forma) de Lagrange interpolam deslocamentos à custa apenas dos deslocamentos nodais (e não das suas derivadas), tem *continuidade C^0* . Se usássemos funções de interpolação de Lagrange para vigas, apenas se garantia continuidade de deslocamentos nos nós, mas não de rotações.

(Compare [H] com a primeira linha da matriz $[\psi]$ da expressão (5.16)).

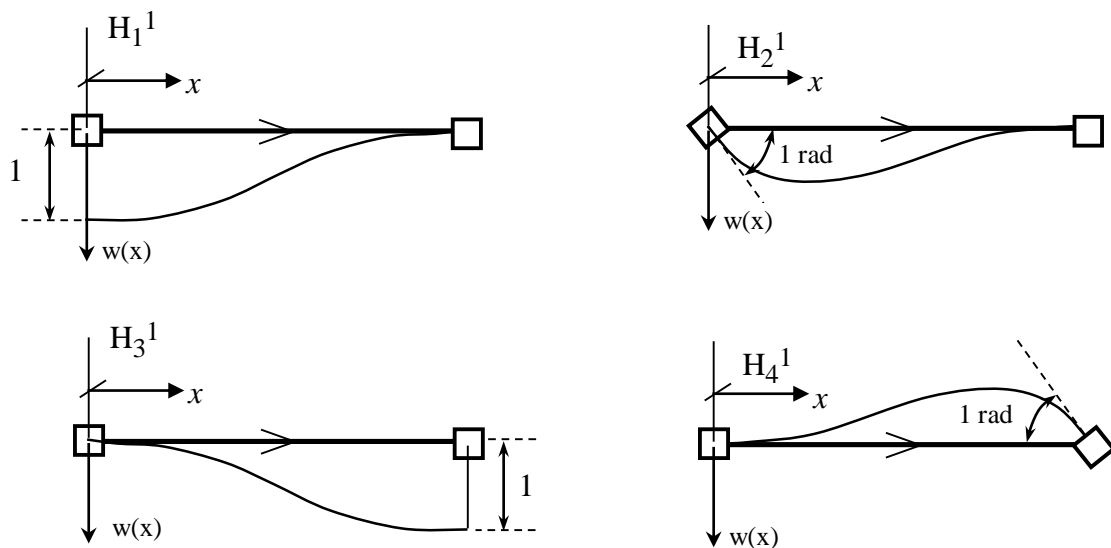


Figura 5.6 - Polinómios de interpolação de Hermite

5.3.2- Limitações

Sujeita às restrições usuais, viga inicialmente recta, com comportamento elástico linear, sem variação transversal de secção, a viga carregada por forças nodais e momentos nodais tem uma forma flectida igual à expressão (5.6.a) que é cúbica em x . O Método dos Elementos Finitos fornece uma solução exacta quando as forças e momentos actuarem nos seus nós. Uma carga

uniformemente distribuída produz na viga uma deformação de quarta ordem, e por isso, os resultados para este tipo de carga são aproximados.

5.4 - Exemplo.

Determine o diagrama de momentos e esforços transversos da seguinte viga . Discretize a barra em (i) 2 e (ii) 4 elementos de viga , definidas pelos polinómios de interpolação cúbicos de Hermite. $L=10m$, $EI=20 \times 10^6 \text{ kNm}^2$, $f = 25 \text{ kN/m.l.}$ (força gravítica)

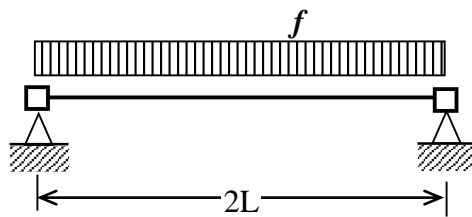
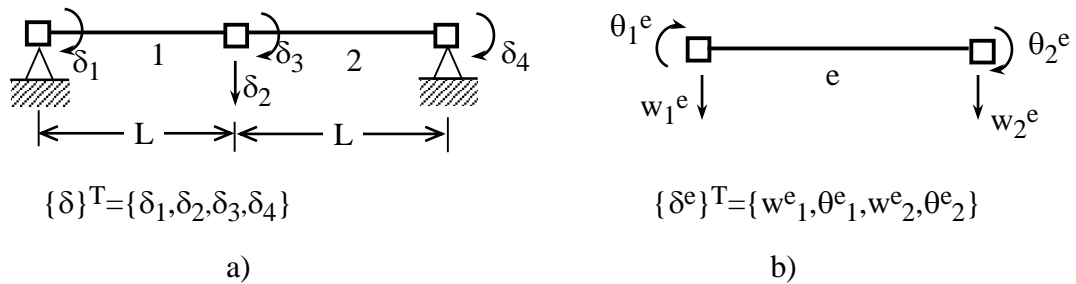


Figura 5.7

Resolução:

(i)-



$$\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$$

$$\{\delta^e\}^T = \{w_1^e, \theta_1^e, w_2^e, \theta_2^e\}$$

a)

b)

Figura 5.8 - a) Discretização em 2 elementos, deslocamentos nodais globais $\{\delta\}$

b) elemento finito de viga, deslocamentos nodais elementares $\{u^e\}$

Tabela de incidências:

G.L.Elementar \Rightarrow	1	2	3	4
G.L. Global no elemento 1 \Rightarrow	---	1	2	3
G.L. Global no elemento 2 \Rightarrow	2	3	---	4

Matriz de rigidez global:

$$k_{11} = k_{22}^{(1)} \quad k_{22} = k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} \quad k_{33} = k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} \quad k_{44} = k_{44}^{(2)}$$

$$k_{12} = k_{23}^{(1)} \quad k_{23} = k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} \quad k_{34} = k_{24}^{(2)}$$

$$k_{13} = k_{24}^{(1)} \quad k_{24} = 0 + k_{14}^{(2)}$$

$$k_{14} = 0$$

$$k_{11} = 4EI/L \quad k_{22} = 12EI/L^3 + 12EI/L^3 \quad k_{33} = 4EI/L + 4EI/L \quad k_{44} = 4EI/L$$

$$k_{12} = -6EI/L^2 \quad k_{23} = -6EI/L^2 + 6EI/L^2 \quad k_{34} = 2EI/L$$

$$k_{13} = 2EI/L \quad k_{24} = 6EI/L^2$$

$$k_{14} = 0$$

Vector de forças global

Forças nodais equivalentes às forças de vão (ver expressão 5.35 mas admitindo que $f(x)$ não é uma força de massa mas sim de superfície):

- elemento 1 :

- elemento 2:

$$\{F_S^1\} = \begin{Bmatrix} F_{s1}^1 \\ F_{s2}^1 \\ F_{s3}^1 \\ F_{s4}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{fL}{2} \\ \frac{fL^2}{12} \\ \frac{fL}{12} \\ \frac{2}{-fL^2} \\ -\frac{fL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 125.0 \\ 208.3 \\ 125.0 \\ -208.3 \end{Bmatrix} \quad \{F_S^2\} = \begin{Bmatrix} F_{s1}^2 \\ F_{s2}^2 \\ F_{s3}^2 \\ F_{s4}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{fL}{2} \\ \frac{fL^2}{12} \\ \frac{fL}{12} \\ \frac{2}{-fL^2} \\ -\frac{fL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 125.0 \\ 208.3 \\ 125.0 \\ -208.3 \end{Bmatrix} \quad (a),(b)$$

Vector de forças global:

$$F_1 = F_2^{(1)} = fL^2/12$$

$$F_2 = F_3^{(1)} + F_1^{(2)} = fL/2 + fL/2 \quad (c)$$

$$F_3 = F_4^{(1)} + F_2^{(2)} = -fL^2/12 + fL^2/12$$

$$F_4 = F_4^{(2)} = -fL^2/12$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -1.2 & 4 & 0 \\ -1.2 & 0.48 & 0 & 1.2 \\ 4 & 0 & 16 & 4 \\ 0 & 1.2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \times 10^6 * \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 208.3 \\ 250 \\ 0 \\ -208.3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 416.7 \\ 2604.2 \\ 0 \\ -416.7 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \quad (d),(e)$$

Logo para o elemento 1:

$$\{\delta^1\} = \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \theta_1^1 \\ w_2^1 \\ \theta_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

De (5.37) vem:

$$\sigma^1(x) = M(x) = EI * \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \theta_1^1 \\ w_2^1 \\ \theta_2^1 \end{Bmatrix} = 208.3 + 125 * x$$

[kNm]

(g)

Igualmente para o elemento 2:

$$\{\delta^1\} = \begin{Bmatrix} w_1^2 \\ \theta_1^2 \\ w_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ 0 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

(h)

$$\sigma^2(x) = M(x) = EI * \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} w_1^2 \\ \theta_1^2 \\ w_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = 1458.3 - 125 * x$$

[kNm]

(i)

Verifica-se que os momentos são lineares ao longo de cada elemento. Por outro lado os esforços transversos são a derivada dos momentos flectores, e por isso constantes ao longo do elemento:

$$V^1(x) = \frac{dM}{dx} = 125 \text{ kN}$$

$$V^2(x) = \frac{dM}{dx} = -125 \text{ kN}$$

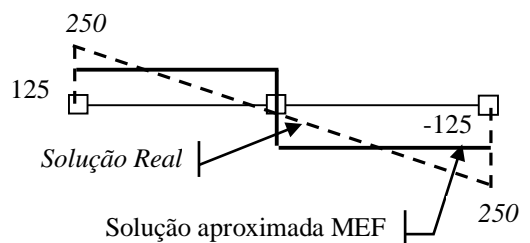
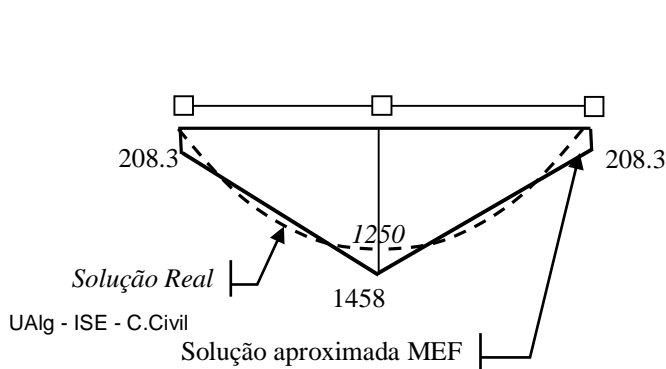


Figura E9 - Diagramas de momentos flectores e esforços transversos

(ii) Discretização com 4 elementos. Resolva-a. Compare os resultados.

Comentários:

a) Recorrendo por exemplo ao método dos deslocamentos podemos demonstrar que os deslocamentos nodais obtidos são exactos.

b) Também se demonstra que as forças nodais elementares obtidas são exactas. Vejamos o que acontece na barra 1. Faça-se o produto: $[k^1] * \{u^1\} = \{F^{*1}\}$

$$\begin{bmatrix} 0.24 & -1.2 & -0.24 & 1.2 \\ -1.2 & 8 & -1.2 & 4 \\ -0.24 & -1.2 & 0.24 & -1.2 \\ 1.2 & 4 & -1.2 & 8 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 416.7 \\ 2604.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -125.0 \\ +208.3 \\ +124.0 \\ -1458.3 \end{Bmatrix} = \{F^{*1}\}$$

O vector $\{F^{*1}\}$ que obtivemos, representa as forças nodais aplicadas aos nós 1 e 2, o qual de acordo com a expressão (5.30), é decomposto nas seguintes parcelas:

$$[k^1] * \{\delta^1\} = \{F_m^1\} + \{F_S^1\} + \{F_F^1\} + \{F^1\} = \{F^{*1}\}$$

No caso do problema em discussão as parcelas $\{F_m^1\}$ e $\{F_F^1\}$ são nulas, e as parcelas $\{F_S^1\}$ e $\{F^1\}$ são relativas respectivamente às forças equivalentes às cargas de superfície e forças de interacção aplicadas nos nós. Mas as forças nodais equivalentes às forças de superfície são conhecidas (ver expressão (a)), pelo que se podem determinar as forças nodais aplicadas aos nós, ou seja:

$$\{F_S^1\} + \{F^1\} = \{F^{*1}\} \Rightarrow \{F^1\} = \{F^{*1}\} - \{F_S^1\} \Rightarrow \{F^1\} = \begin{Bmatrix} -125.0 \\ +208.3 \\ +125.0 \\ -1458.3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} +125.0 \\ +208.3 \\ +125.3 \\ -208.3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250 \\ 0 \\ 0 \\ -1250 \end{Bmatrix}$$

As forças acabadas de obter são forças nodais exactas e representam respectivamente o seguinte:

- reacção de apoio vertical no apoio esquerdo de baixo para cima (-250 kN);
- momento no apoio esquerdo (0 kNm);
- esforço transversal no nó direito da barra 1 , ou seja a meio vão da viga, (0 kNm);
- momento no nó direito da barra 1, ou seja a meio vão da viga (-1250 kNm, atenção ao sentido!).

c) O campo de tensões $\sigma^1(x)$ ao longo da barra, o qual tem significado de momentos flectores é aproximado. Por exemplo para $x=L/4$ obtemos, da expressão (g) $\sigma^1(L/4) = M(L/4) = 520.8$,

quando o valor exacto é 546.875. Deve-se ao facto da função de aproximação de deslocamentos ser apenas do 3º grau, enquanto a deformada real da estrutura quando actuam cargas uniformes no vão ser de quarta ordem. Salienta-se que no caso de não haver cargas de vão a barra fornece valores de esforços exactos.

d) Para evitar o aparecimento do erro nos esforços ao longo da barra, deveremos determinar os esforços ao longo desta a partir das equações de equilíbrio da estática, em função das forças nodais $\{F^i\}$ e das acções de vão presentes.

5.5 - Exemplo.

Determine o diagrama de momentos e esforços transversos da seguinte viga . Discretize a barra em 4 elementos de viga , definidas pelos polinômios de interpolação cúbicos de Hermite.

$L=10m$, $EI=20 \times 10^6 \text{ kNm}^2$, $f = 25 \text{ kN/m.l.}$ (força gravítica)

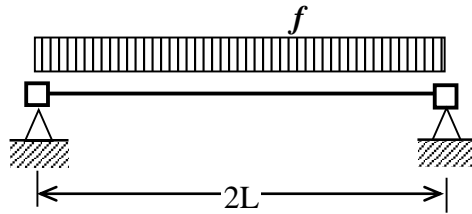
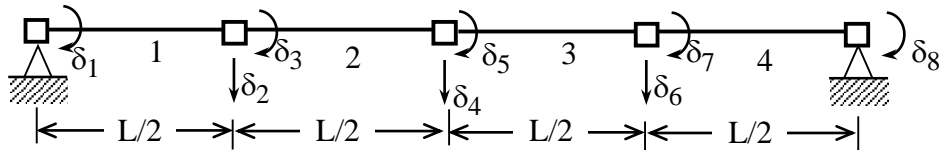


Figura 5.7

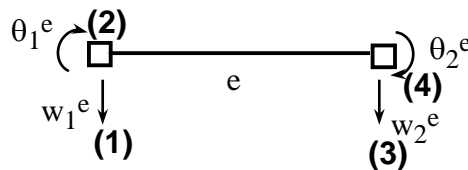
Resolução:

Graus de Liberdade Globais



$$\{\delta\}^T = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8\}$$

Graus de Liberdade Elementares



$$\{\delta^e\}^T = \{w_1^e, \theta_1^e, w_2^e, \theta_2^e\}$$

Tabela de incidências:

G.L.Elementar \Rightarrow	(1)	(2)	(3)	(4)
G.L.G no Elem. 1	---	1	2	3
G.L.G no Elem. 2	2	3	4	5
G.L.G no Elem. 3	4	5	6	7
G.L.G no Elem. 3	6	7	---	8

Matriz de rigidez global:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{22}^{(1)} & k_{12} &= k_{23}^{(1)} & k_{13} &= k_{24}^{(1)} & k_{14} & \text{a} & k_{18} &= 0 \\
 k_{22} &= k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{23} &= k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{24} &= k_{13}^{(2)} & k_{25} &= k_{14}^{(2)} & k_{26} & \text{a} & k_{28} &= 0 \\
 k_{33} &= k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{34} &= k_{23}^{(2)} & k_{35} &= k_{24}^{(2)} & k_{36} & \text{a} & k_{38} &= 0 \\
 k_{44} &= k_{33}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{45} &= k_{34}^{(2)} + k_{12}^{(3)} & k_{46} &= k_{13}^{(3)} & k_{47} &= k_{14}^{(3)} & k_{48} &= 0 \\
 k_{55} &= k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(3)} & k_{56} &= k_{23}^{(3)} & k_{57} &= k_{24}^{(3)} & k_{58} &= 0
 \end{aligned}$$

Elementos Finitos

Elemento Viga

$$k_{66} = k_{33}^{(3)} + k_{11}^{(4)} \quad k_{67} = k_{34}^{(3)} + k_{12}^{(4)} \quad k_{68} = k_{14}^{(4)}$$

$$k_{77} = k_{44}^{(3)} + k_{22}^{(4)} \quad k_{78} = k_{24}^{(4)}$$

$$k_{88} = k_{44}^{(4)}$$

$$[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} 1920 & 4800 & -1920 & 4800 \\ & 16000 & -4800 & 8000 \\ & & 1920 & -4800 \\ \text{Simetr.} & & & 16000 \end{bmatrix} * 10^3$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 16000 & -4800 & 8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4800 & 3840 & 0 & -1920 & 4800 & 0 & 0 & 0 \\ 8000 & 0 & 32000 & -4800 & 8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1920 & -4800 & 3840 & 0 & -1920 & 4800 & 0 \\ 0 & 4800 & 8000 & 0 & 32000 & -4800 & 8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1920 & -4800 & 3840 & 0 & 4800 \\ 0 & 0 & 0 & 4800 & 8000 & 0 & 32000 & 8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4800 & 8000 & 16000 \end{bmatrix} * 10^3$$

Vector de forças global

Forças nodais equivalentes às forças de vão (ver expressão 5.35 mas admitindo que $f(x)$ não é uma força de massa mas sim de superfície):

- elemento 1 :

$$\{F_S^1\} = \{F_S^1\} = \{F_S^1\} = \{F_S^1\} = \begin{Bmatrix} \frac{fL}{2} \\ \frac{fL^2}{12} \\ \frac{fL}{2} \\ -\frac{fL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 62.5 \\ 52.08 \\ 62.5 \\ -52.08 \end{Bmatrix} \quad (a),(b)$$

Vector de forças global:

$$\begin{aligned} F_{S1} &= F_{S2}^{(1)} = 52.08; & F_{S2} &= F_{S3}^{(1)} + F_{S1}^{(2)} = 125, & F_{S3} &= F_{S4}^{(1)} + F_{S2}^{(2)} = 0, \\ F_{S4} &= F_{S3}^{(2)} + F_{S1}^{(3)} = 125, & F_{S5} &= F_{S4}^{(2)} + F_{S2}^{(3)} = 0, & F_{S6} &= F_{S3}^{(3)} + F_{S1}^{(4)} = 125, \\ F_{S7} &= F_{S4}^{(3)} + F_{S2}^{(4)} = 0, & F_{S8} &= F_{S4}^{(4)} = -52.08 \end{aligned}$$

$$\{F_S\}^T = \{52.08 \quad 125 \quad 0 \quad 125 \quad 0 \quad 125 \quad 0 \quad -52.08\}$$

$$\{\delta\} = [K]^{-1} * \{F\} \Rightarrow \{\delta\}^T = \{0.41666; 1.85546; 0.28646; 2.60416; 0; 1.85546; -0.28646; -0.41666\} * 10^{-3}$$

Para cada elemento (e) vem:

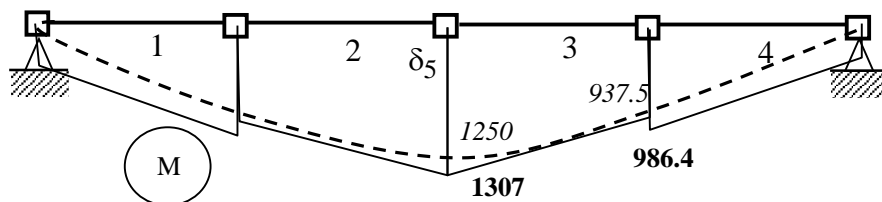
$$\begin{aligned} \{\delta^1\} &= \begin{Bmatrix} w_1^1 \\ \theta_1^1 \\ w_2^1 \\ \theta_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4167 \\ 1.856 \end{Bmatrix} * 10^{-3}; & \{\delta^2\} &= \begin{Bmatrix} w_1^2 \\ \theta_1^2 \\ w_2^2 \\ \theta_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.856 \\ 0.286 \\ 2.604 \\ 0 \end{Bmatrix} * 10^{-3} \\ \{\delta^3\} &= \begin{Bmatrix} w_1^3 \\ \theta_1^3 \\ w_2^3 \\ \theta_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.604 \\ 0 \\ 1.856 \\ -0.286 \end{Bmatrix} * 10^{-3}; & \{\delta^4\} &= \begin{Bmatrix} w_1^4 \\ \theta_1^4 \\ w_2^4 \\ \theta_2^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_6 \\ \delta_7 \\ 0 \\ \delta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.856 \\ -0.286 \\ 0 \\ -0.4167 \end{Bmatrix} * 10^{-3} \end{aligned} \quad (f)$$

De (5.37) vem:

$$\sigma^e(x) = M(x) = EI * \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}; -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] * \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \dots$$

$$\sigma^e(x) = EI * [0.24 - 0.096 * x; \quad 0.8 - 0.24 * x; \quad -0.24 + 0.096 * x; \quad 0.4 - 0.24 * x] * \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \dots \quad [kNm]$$

$$\begin{aligned} \sigma^1(x) &= 55.2 + 186.2 * x \quad (0 < x < 5), \quad \sigma^1(0) = 55.2 \quad ; \quad \sigma^1(5) = 986.2 \\ \sigma^2(x) &= 980.8 + 65.28 * x \quad (0 < x < 5), \quad \sigma^2(0) = 980.2 \quad ; \quad \sigma^2(5) = 1307.2 \\ \sigma^3(x) &= 1307.2 - 65.28 * x \quad (0 < x < 5), \quad \sigma^3(0) = 1307.2 \quad ; \quad \sigma^3(5) = 980.2 \\ \sigma^4(x) &= 986.4 - 186.24 * x \quad (0 < x < 5), \quad \sigma^4(0) = 986.4 \quad ; \quad \sigma^4(5) = 55.2 \end{aligned}$$



Aumentando o número de elementos obteve-se uma melhor aproximação (1307) relativamente ao valor exacto 1250 kNm.

6 - ELEMENTO FINITO BARRA de PÓRTICO

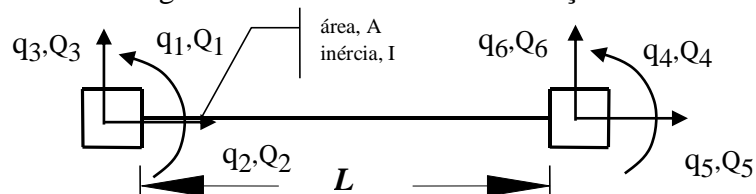
(fonte: Apontamentos de Análise de Estruturas II)

Por definição um elemento finito de *barra de treliça*, ou somente de *barra*, pode suportar apenas cargas axiais e ter apenas deformação axial. Um elemento finito de viga pode suportar cargas transversais ao seu eixo e momentos flectores, e apresentar deformação por flexão (e também por corte, embora seja em geral desprezável).

Uma treliça é habitualmente carregada apenas nos seus nós, e é constituída por elementos *barra*, que estão interligados entre si por rótulas. Estas não permitem o aparecimento de momentos e esforços transversos nas barras.

Num pórtico reticulado os elementos de *barra de pórtico* ou apenas de *pórtico*, podem ser ligados entre si por nós rígidos, permitindo assim, pelo equilíbrio nodal, o aparecimento de momentos flectores, esforços transversos e axiais nos elementos convergentes nesse nó. Pelo facto de neste elemento coexistirem esforços típicos de barra e de viga, e por serem independentes entre si, o elemento finito *barra de pórtico* pode ser modelado como a sobreposição de um elemento finito de barra e outro elemento finito de viga [3].

No plano, um elemento finito de barra de pórtico, tem seis graus de liberdade, que são os deslocamentos nodais independentes, agrupados no vector $\{q\}$ (ver figura 6.1). Associados a esses graus de liberdade podemos definir forças nodais independentes, agrupadas no vector $\{Q\}$, também mostradas na figura 6.1. A relação constitutiva entre as forças nodais e deslocamentos nodais é estabelecida pela matriz de rigidez $[K]$, a qual se determinará pela sobreposição das matrizes de rigidez do elemento barra de treliça e elemento viga.



Deslocamentos nodais, $\{q\}$ e forças nodais $\{Q\}$

Figura 6.1- Elemento finito barra de pórtico

Na figura 6.2 mostram-se os deslocamentos e forças nodais independentes respectivamente de um elemento de barra de treliça e de viga.

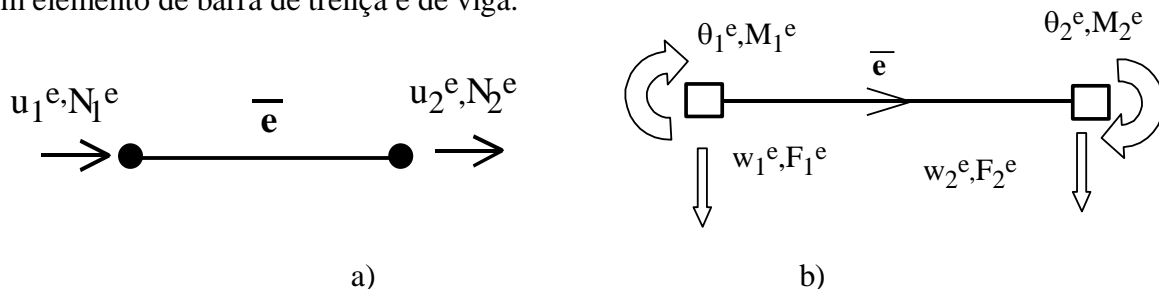


Figura 6.2

Numa barra de treliça os deslocamentos nodais independentes $\{u^e\}$, forças nodais $\{F^e\}$ e matriz de rigidez $[k^e]$ são respectivamente:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.1 \text{ a } 6.3)$$

que como se sabe se relacionam da seguinte forma:

$$\{F^e\} = [k^e] * \{u^e\} \quad (6.4)$$

Vamos relacionar os graus de liberdade do elemento barra com os do elemento pórtico, ou seja, vamos escrever o sistema de coordenadas do elemento barra em termos do sistema de coordenadas do elemento pórtico. Para tal há que fazer uma mudança de base recorrendo-se a uma matriz de transformação, $[T]$. Esta matriz permite escrever os deslocamentos nodais do primeiro sistema, tendo em consideração a direcção e sentido destes, em função das do segundo sistema, isto é:

$$\{u^e\} = [T] * \{q\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Substituindo (6.5) em (6.4) e multiplicando à esquerda pela transposta da matriz de transformação entre sistemas obtemos:

$$[T]^T * \{F^e\} = [T]^T * [k^e] * [T] * \{q\} \quad (6.6)$$

que é equivalente a :

$$\{Q'\} = [k'] * \{q\} \quad (6.7)$$

com:

$$\{Q'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1^e \\ 0 \\ 0 \\ N_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [k'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8) \text{ e } (6.9)$$

Ocorreu um espalhamento dos coeficientes da matriz de rigidez da barra pela matriz de rigidez do elemento pórtico. Como seria previsível e se constata os graus de liberdade 1 e 2 do elemento barra associam-se respectivamente aos graus de liberdade 2 e 5 do elemento de pórtico.

Vamos repetir este procedimento relacionando os sistemas de coordenadas do elemento viga com o do elemento pórtico. Os deslocamentos nodais independentes $\{\delta^e\}$, forças nodais $\{F^e\}$ e matriz de rigidez $[k^e]$ são na viga respectivamente:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ M_1^e \\ F_2^e \\ M_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.10 \text{ a } 6.12)$$

que como se sabe se relacionam da seguinte forma:

$$\{F^e\} = [k^e] * \{\delta^e\} \quad (6.13)$$

As coordenadas do 1º sistema relacionam-se com as do 2º através de $[T']$:

$$\{\delta^e\} = [T'] * \{q\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Substituindo (6.14) em (6.13) e multiplicando à esquerda pela transposta da matriz de transformação entre sistemas obtemos:

$$[T']^T * \{F^e\} = [T']^T * [k^e] * [T'] * \{q\} \quad (6.15)$$

que é equivalente a :

$$\{Q''\} = [k''] * \{q\} \quad (6.16)$$

com:

$$\{Q''\} = \begin{Bmatrix} M_1^e \\ 0 \\ F_1^e \\ M_2^e \\ 0 \\ F_2^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [k''] = \begin{bmatrix} 4EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \quad (6.17) \text{ e } (6.18)$$

Podemos finalmente, pela sobreposição de efeitos, determinar quer o vector de forças nodais final $\{Q\}$ como a matriz de rigidez $[K]$ para o elemento finito barra de pórtico. Assim:

$$\{Q\} = \{Q'\} + \{Q''\} \quad (6.19)$$

$$[K] = [k'] + [k''] \quad (6.20)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} M_1^e \\ N_1^e \\ F_1^e \\ M_2^e \\ N_2^e \\ F_2^e \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 4EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

A expressão (6.22) representa a matriz de rigidez de uma barra encastrada nos nós extremos, e cujos deslocamentos nodais independentes estão de acordo com a figura 6.1. Esta matriz já nos é familiar do método dos deslocamentos.

Apresentam-se de seguida matrizes de rigidez de diversos tipos de elementos de pórtico, caracterizados por terem uma geometria particular, como a existência de rótulas e troços rígidos, ou um comportamento diferente, como por exemplo a consideração da deformabilidade por esforço transversal.

Estas matrizes podem ser determinadas por vários processos como sejam, técnicas de condensação de graus de liberdade, aplicação do método das forças, aplicação do método dos elementos finitos, etc.

- Elemento finito de pórtico encastrado rotulado à direita

$$[k]_m = \begin{bmatrix} 3EI/L & 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 \end{bmatrix}_m \quad (6.23)$$

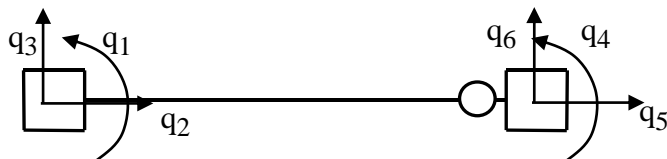


Figura 6.3 - Elemento finito encastrado-rotulado, E-R

- Elemento finito de pórtico encastrado com libertação de esforço transversal à direita

(também conhecido como elemento encastrado com apoio deslizante, E-D)

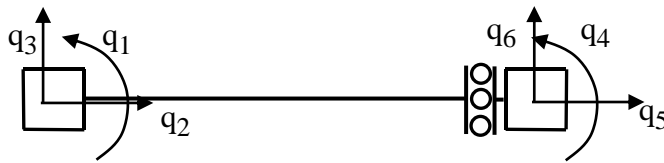


Figura 6.4 - Elemento E-V

$$K_m = \begin{bmatrix} EI/L & 0 & 0 & -EI/L & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EI/L & 0 & 0 & EI/L & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_m \quad (6.24)$$

- Elemento finito de pórtico rotulado rotulado

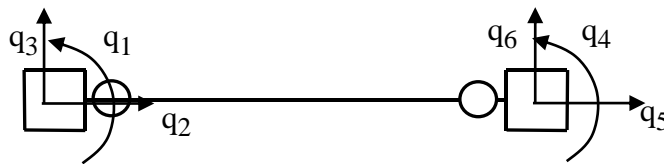


Figura 6.5 - Elemento R-R

$$K_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_m \quad (6.25)$$

- Elemento finito encastrado-encastrado com deformação por esforço transversal

$$K_m = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\phi\beta_1 & 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{2EI}{L}\phi\beta_2 & 0 & -\frac{6EI}{L^2}\phi \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi & \frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & -\frac{12EI}{L^3}\phi \\ \frac{2EI}{L}\phi\beta_2 & 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi & \frac{4EI}{L}\phi\beta_1 & 0 & -\frac{6EI}{L^2}\phi \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & -\frac{12EI}{L^3}\phi & -\frac{6EI}{L^2}\phi & 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi \end{bmatrix}_m$$

(6.26)

com:

$$\beta_1 = 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad \beta_2 = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{6EI}{L^2} * \frac{1}{GA'} \quad (6.27 \text{ a } 6.31)$$

$$\phi = \frac{1}{1 + 2\alpha}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

A' = área de corte da secção transversal

Para além da deformação axial e por flexão este elemento também é deformável por esforço transverso. Pode ser usado na modelação de paredes e consolas curtas.

Repare-se que quando se despreza a influência da deformação por esforço transverso se faz $GA' = \infty \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 1$. Por outro lado quando L é grande $\alpha \approx 0$ pelo que a influência deformabilidade por esforço transverso diminui.

-Elemento finito encastrado-encastrado com troços rígidos e com deformação por esforço transverso

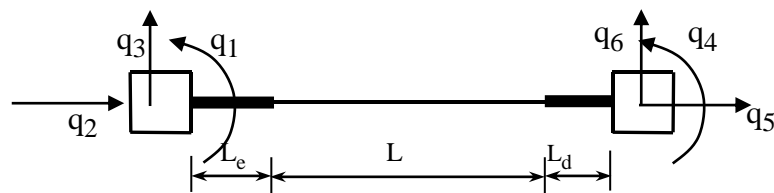


Figura 6.6 - Elemento E-E com troços rígidos e deformável por esf. transverso

$$K_m = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \phi \left[\beta_1 + 3 \frac{L_e}{L} \left(1 + \frac{L_e}{L} \right) \right] & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & \frac{2EI}{L} \phi \left(\beta_2 + 3 \frac{L_e + L_d}{L} + 6 \frac{L_e L_d}{L^2} \right) & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi & \frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi \\ \frac{2EI}{L} \phi \left(\beta_2 + 3 \frac{L_e + L_d}{L} + 6 \frac{L_e L_d}{L^2} \right) & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_e}{L} \right) & \frac{4EI}{L} \phi \left[\beta_1 + 3 \frac{L_d}{L} \left(1 + \frac{L_d}{L} \right) \right] & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \phi & -\frac{6EI}{L^2} \phi \left(1 + 2 \frac{L_d}{L} \right) & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi \end{bmatrix}_m \quad (6.27)$$

Os troços rígidos à esquerda e à direita tem dimensão respectivamente de L_e e L_d . O significado dos restantes parâmetros está no parágrafo anterior.

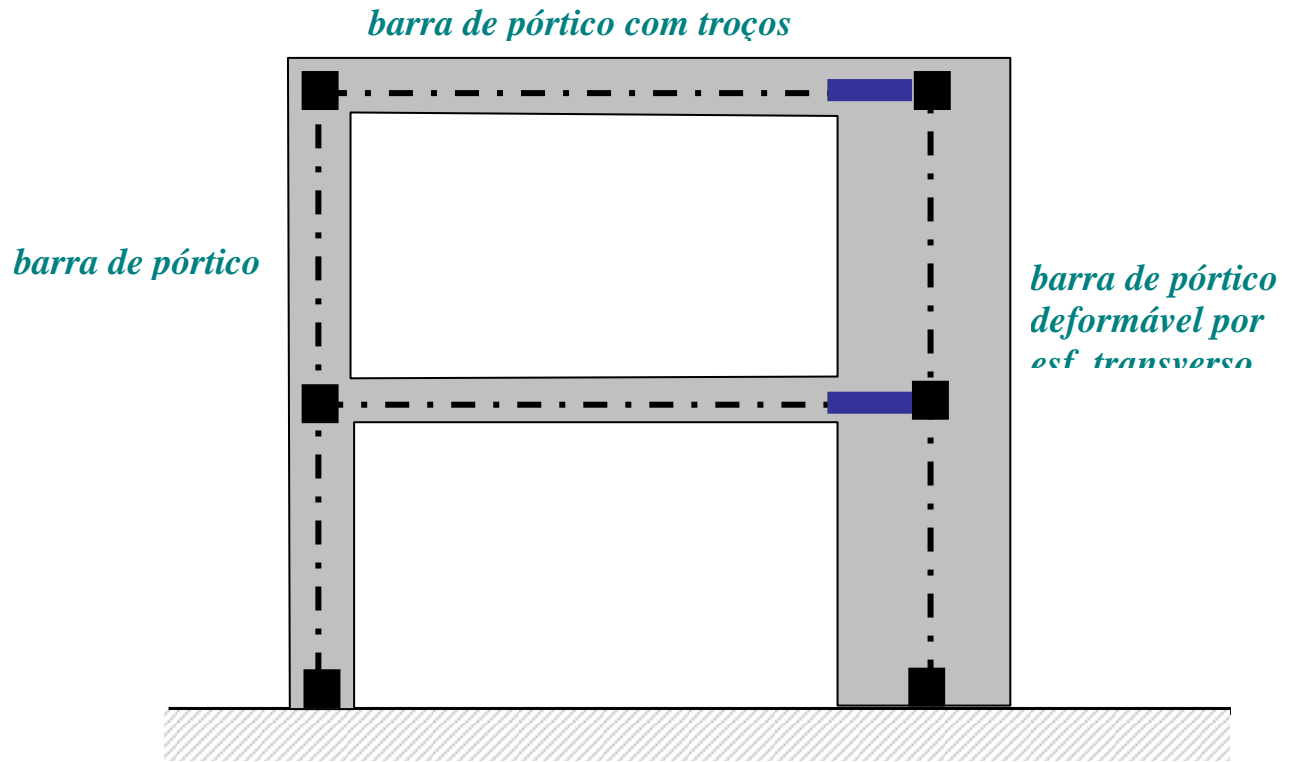


Figura 6.7 - Modelação de uma estrutura aporricada

7.- Mudanças de Base

(fonte: Apontamentos de Análise de Estruturas II)

7.1 - Barras inclinadas

Vimos até agora que os graus de liberdade $\{q_i\}$ que atribuímos aos nós de uma barra isolada estavam associados a um referencial local, X (X_1 , X_2 , X_3) (ver figura 7.1.a). Nesse referencial a 1ª coordenada refere-se à rotação em sentido anti-horário, e as 2ª e 3ª coordenadas respectivamente à translação no sentido do eixo da barra, e translação perpendicular ao eixo da barra. A barra é orientada do nó esquerdo para o direito e faz um ângulo positivo, α , medido no sentido anti-horário, em relação à linha de nível horizontal. Para além disso arbitrou-se uma sequência para a numeração dos graus de liberdade nodais $\{q_i\}$ começando pelo nó esquerdo.

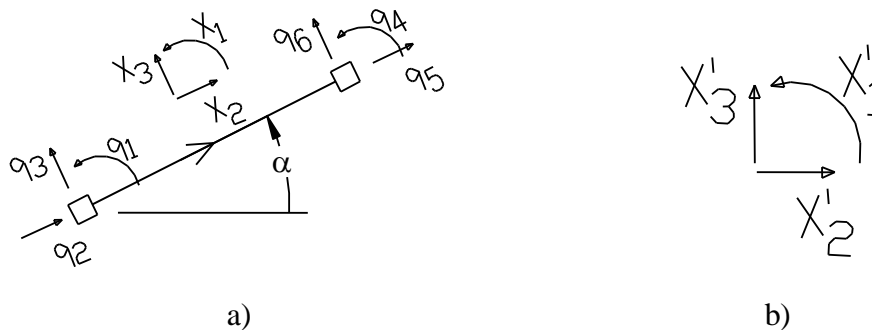


Figura 7.1- a) Referencial local de barra b) Referencial global

Foram com base nestas regras que se construíram as matrizes de rigidez das diversas barras de pórtico estudadas até agora. Por outro lado todas as forças nodais envolvidas estão também definidas em relação ao referencial local da barra.

Numa estrutura, que é constituída por várias barras, é necessário representar os deslocamentos e forças nodais de todas as barras no mesmo referencial, para que seja possível realizar o equilíbrio nodal destas forças. Daqui surge a necessidade de definir um referencial comum, o referencial **global**. As suas coordenadas X' (X'_1 , X'_2 , X'_3) são, em geral, a rotação em sentido anti-horário, translação segundo a horizontal e translação vertical (figura 7.1.b)).

Quando as barras de uma estrutura são horizontais ou verticais, os referenciais locais destas e o global são respectivamente coincidentes e complementares, sendo por isso fácil a soma (ou sobreposição) de deslocamentos e forças nodais.

Se a barra estiver inclinada teremos que decompor os deslocamentos e forças, em componentes no referencial global antes de podermos fazer a sobreposição dos efeitos de cada barra.

Pretende-se agora, para uma barra inclinada, calcular os coeficientes de rigidez no referencial global a partir dos coeficientes de rigidez previamente conhecidos do referencial local. Pretende-se

de igual modo escrever no referencial global as forças de fixação de cargas de vão. Tal só é possível recorrendo a mudanças de base.

7.1.1- Matriz de Transformação de Coordenadas

Pretende-se relacionar os deslocamentos nodais independentes {d'} no referencial global X' (X'1,X'2,X'3) com os deslocamentos equivalentes {q} no referencial local X (X1,X2,X3), como mostra a figura 7.2. Os eixos X2 e X'2 fazem entre si um ângulo α, positivo no sentido anti-horário, sendo o lado origem o eixo X2.

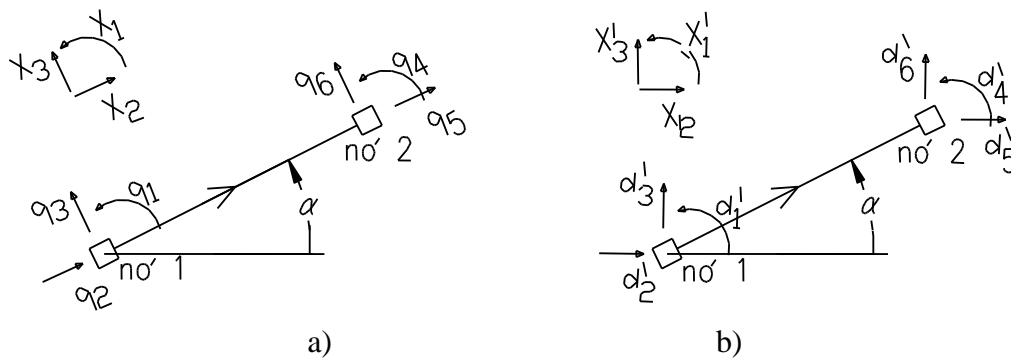


Figura 7.2 - Deslocamentos nodais da barra no referencial local (a) e global (b).

Relacionam-se esses deslocamentos, por exemplo no nó 1, de acordo com o esquema da figura 7.3 e expressões seguintes.

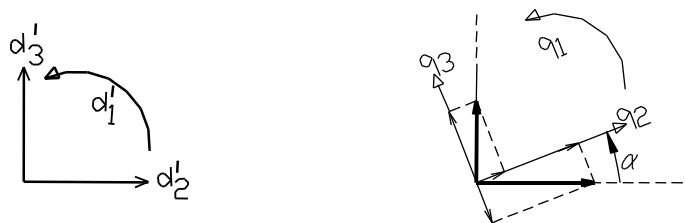


Figura 7.3

$$q_1 = d'_1$$

$$q_2 = d'_2 \cos\alpha + d'_3 \sin\alpha$$

$$q_3 = -d'_2 \sin\alpha + d'_3 \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & \cos\alpha & \sin\alpha \\ . & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

$$\boxed{\{q\} = [T_{n'1}] * \{d'\}} \quad (7.2)$$

Se em vez de relacionarmos deslocamentos q_i e d'_i relacionarmos coordenadas (X1,X2,X3) e (X'1,X'2,X'3) as relações 7.2 permanecem válidas (desde que se substitua q_i e d'_i respectivamente por X_i e X'_i). De facto as coordenadas e deslocamentos são grandezas vectoriais proporcionais. Nas igualdades acima define-se a matriz $[T_{n'1}]$ como a matriz de transformação de coordenadas do nó

1. Deduz-se a matriz de transformação de coordenadas para o nó 2, $[T_{nó2}]$ pelo mesmo processo a partir das igualdades 7.3.

$$\begin{aligned} q_4 &= d'_4 \\ q_5 &= d'_5 \cos \alpha - d'_6 \sin \alpha \\ q_6 &= d'_5 \sin \alpha + d'_6 \cos \alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha & + \sin \alpha \\ \cdot & - \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\boxed{\{q\} = [T_{nó2}] * \{d'\}} \quad (7.4)$$

Se considerarmos todos os graus de liberdade da barra a relação entre deslocamentos (ou entre coordenadas) é dada pela matriz $[T]$:

$$\{q\} = [T] * \{d'\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{nó1} & 0 \\ 0 & T_{nó2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix}, \quad (7.5a) \text{ e } b))$$

$$\text{com } [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

$[T]$ designa-se por **matriz de transformação de coordenadas** para uma barra.

Simbolicamente temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Coordenadas no referencial} \\ \text{local} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Coordenadas no referencial} \\ \text{global} \end{array} \right\} \quad (7.7-a))$$

ou,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Deslocamentos no referencial} \\ \text{local} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Deslocamentos no referencial} \\ \text{global} \end{array} \right\} \quad (7.7-b))$$

ou, em geral,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Grandezas no referencial} \\ \text{inicial} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \text{Matriz de} \\ \text{Transformação} \end{array} \right] * \left\{ \begin{array}{c} \text{Grandezas no referencial} \\ \text{final} \end{array} \right\} \quad (7.7-c))$$

Quando se recorre às expressões 7.7, transformam-se grandezas de um referencial noutra, e diz-se então que se realizou uma **mudança de base** à custa da matriz de transformação [T].

As relações 7.2, 7.4 e 7.5 desenvolvidas para deslocamentos nodais são também válidas para outras grandezas vectoriais a eles associados como sejam as forças nodais {F}, forças de equilíbrio {F_E}, forças nodais equivalentes à massa {F_m}. Desta forma também se poderá escrever:

$$\{F\} = [T]*\{F'\} \quad (7.8)$$

7.2.2 - Propriedade da Matriz de Transformação de Coordenadas

Fazendo

$$[T]^T * [T] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & -s & . & . & . \\ . & s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & -s \\ . & . & . & . & s & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & s & . & . & . \\ . & -s & c & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & s \\ . & . & . & . & -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ \hline . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (7.9)$$

com $c = \cos\alpha$ e $s = \sin\alpha$.

Como $[T]^{-1} * [T] = [I]$, concluímos que $[T]^T = [T]^{-1}$, ou seja, a transposta da matriz de transformação de coordenadas ($[T]^T$) é igual à sua matriz inversa ($[T]^{-1}$).

7.3 - Equação de Equilíbrio em Coordenadas Globais

Vamos agora redefinir a equação de equilíbrio de uma barra em termos de coordenadas globais. A barra terá uma inclinação α em relação ao eixo horizontal. Teremos também que redefinir os vectores {Q} e {Q₀}.

Como a mudança de referencial não pode alterar o trabalho realizado por um sistema de forças conservativo, (trabalho= força {F'} * deslocamento {d'} no sentido desta) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \{d'\}^T * \{F'\} &= \{q\}^T * \{F\} \\ &= ([T] * \{d'\})^T * \{F\} \\ &= \{d'\}^T * ([T]^T * \{F\}) \quad \text{logo,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\{F'\} = [T]^T * \{F\}} \quad (7.10)$$

(aliás, esta igualdade facilmente se obteria por inversão da equação 7.8 e atendendo à propriedade enunciada na secção 7.2.2)

A equação de equilíbrio de barras no referencial local é como se sabe:

$$[K] * \{u\} = \{F\} \quad (7.12)$$

Substituindo $\{u\} = [T] \{u'\}$ vem:

$$[K] * [T] * \{u'\} = \{F\} \quad (7.13)$$

e multiplicando à esquerda por $[T]^T$

$$[T]^T * [K] * [T] * \{u'\} = [T]^T * \{F\} \quad (7.14)$$

$$\boxed{[K'] * \{u'\} = \{F'\}} \quad (7.15)$$

que é a equação do método dos deslocamentos escrita no referencial X' (na nova base) com:

$$\boxed{[K'] = [T]^T * [K] * [T]} \quad (7.16)$$

$$\{F'\} = [T]^T * \{F\}. \quad (7.10\text{-rep})$$

7.3.1- Matriz de rigidez da barra Encastrada-encastrada em coordenadas globais.

A partir da definição 7.26 e atendendo à matriz de rigidez de uma barra em coordenadas locais, equação G.22, a matriz de rigidez da barra escrita em coordenadas globais é:

$$[K'] = [T]^T * [K] * [T] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & -s & . & . & . \\ . & s & c & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & -s \\ . & . & . & . & s & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & c & s & . & . & . \\ . & -s & c & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & c & s \\ . & . & . & . & -s & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs \\ \frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & \frac{6EI}{L^2}s & +\frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs \\ -\frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}cs + \frac{12EI}{L^3}cs & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}cs - \frac{12EI}{L^3}cs & +\frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

sendo $c = \cos\alpha$ e $s = \sin\alpha$.

A 5ª coluna da matriz de rigidez, por exemplo, são as forças de fixação k_{i5} necessárias aplicar à barra, no sentido das coordenadas globais para manter $d_5=1$ e os restantes $d_j=0$. A figura 7.4 representa este modo de deformação.

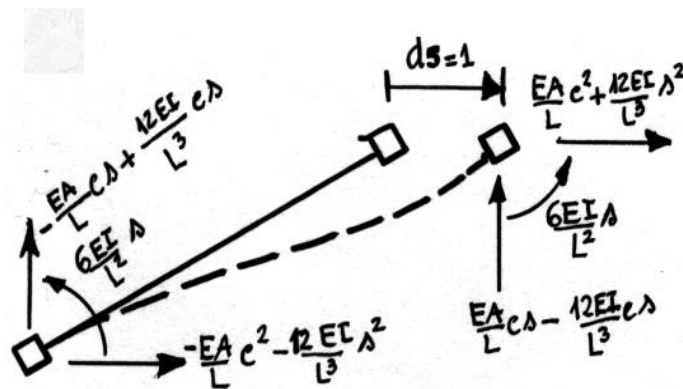


Figura 7.4 - 5º Modo de deformação

7.4 - Matriz Booleana

A matriz booleana ($[B_m]$) de uma barra (m) permite escrever os graus dessa barra (em coordenadas globais) em função dos graus de liberdade da estrutura completa (naturalmente em coordenadas globais), isto é:

$$\{q^*\}_m = [B_m] \{d^*\}$$

sendo $\{q^*\}_m$ os graus de liberdade da barra em coordenadas globais (daí o *)

e $\{d^*\}$ os graus de liberdade da estrutura completa

Este procedimento corresponde a uma mudança de base e permite escrever a matriz de rigidez da barra elementar em termos dos graus de liberdade da estrutura:

$$[K \text{ da barra nos graus de liberdade globais e no referencial global}] = [B_m]^T [K_m^*] [B_m].$$

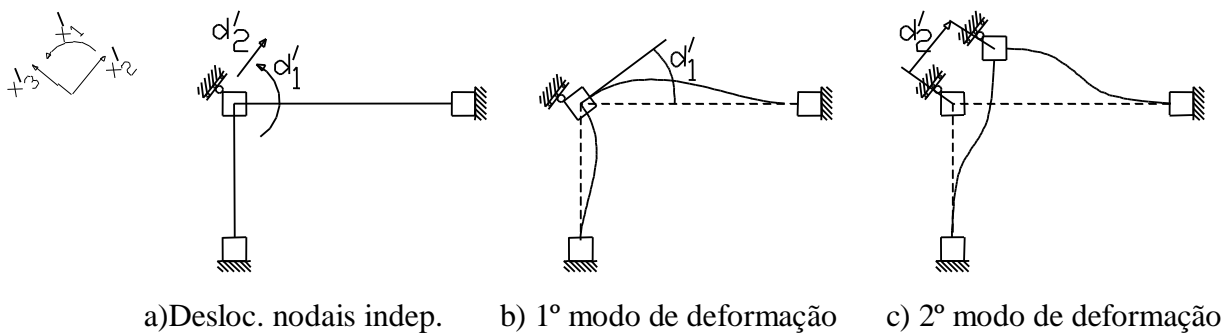
7.5 - Aparelhos de apoio inclinados

Figura 7.5

Surgem por vezes aparelhos de apoio que restringindo o movimento dos nós em certos sentidos o fazem em direcções não coincidentes com as coordenadas locais das barras. Este problema pode também ser tratado recorrendo à técnica de mudança de base.

A estrutura da figura 7.5 tem dois graus de liberdade, concretamente a rotação d_1 , e a translação d_2 na direcção oblíqua a qual é condicionada pelo apoio exterior. As forças nodais $\{F\}$ assim como os coeficientes K'_{ij} devem estar associadas aqueles dois deslocamentos nodais independentes.

Em alternativa, o comportamento desta estrutura pode ser simulado pelos modos de deformação da figura 7.6 associados aos deslocamentos nodais, d_1 , d_2 e d_3 (do referencial X), desde que se estabeleça uma condição de interdependência entre os deslocamentos d_2 e d_3 .

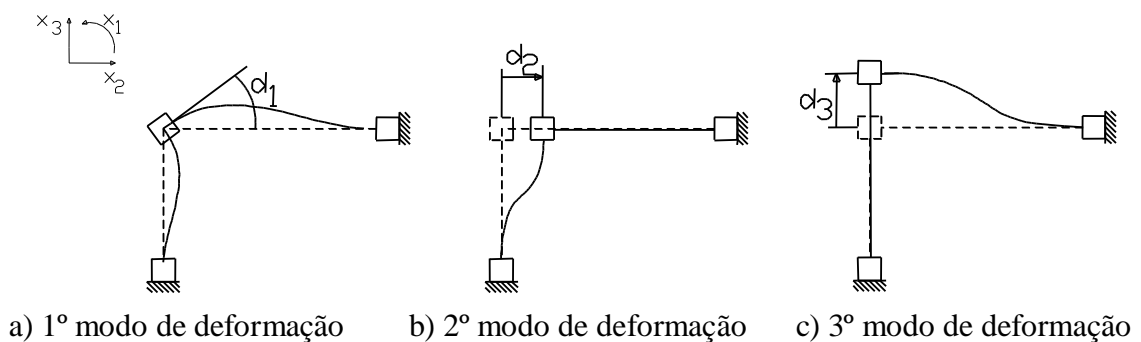


Figura 7.6

Os modos 2 e 3 são interdependentes e podem ser expressos como função de outro deslocamento nodal, o d_2 . (do referencial X'). A relação entre os deslocamentos escritos nos dois referenciais X e X' é realizada por meio da matriz de transformação de deslocamentos dependentes [T] (igualdade 7.21) :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= d'_1 \\
 d_2 &= d'_2 \cos \alpha \\
 d_3 &= d'_2 \sin \alpha
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cos \alpha \\ \cdot & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

$$\boxed{\{d\} = [T]^* \{d'\}} \quad (7.20)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & . \\ . & \cos \alpha \\ . & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Como se pode ver os deslocamentos d_2 e d_3 são interdependentes por intermédio de d'_2 e α .

A estrutura pode ser resolvida iniciando a construção da matriz de rigidez $[K]$ e dos vectores de forças nodais $\{F\}$ no referencial local $X(x_1, x_2, x_3)$. A equação do método neste referencial escrever-se-á:

$$[K] * \{u\} = \{F\} \quad (7.12\text{-rep})$$

representando um sistema com três equações, porque o problema tem inicialmente 3 graus de liberdade. Como na verdade dois dos graus de liberdade são dependentes entre si, reduzem-se a um só grau de liberdade. Restam-nos então no final apenas dois graus de liberdade. Numericamente isto pode ser realizado efectuando uma mudança de base a partir da matriz de transformação de deslocamentos indicada na equação 7.21 obtendo-se:

$$[K'] * \{d'\} = \{F'\} \quad (7.15\text{-rep})$$

que é um sistema de duas equações a duas incógnitas com $[K']$ e $\{F'\}$ definidos respectivamente pelas expressões 7.16, 7.11 e 7.10.

Para o exemplo em concreto obter-se-á:

$$[K'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} = [T]^T * [K] * [T] = \quad (7.16\text{-rep})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{H^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^3} + \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{H} + \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} = \dots \quad (7.16\text{-a})$$

$$= [T]^T * ([K] * [T]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{H^2}c + \frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{12EI}{H^3}c + \frac{EA}{L}c \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{EA}{H}s + \frac{12EI}{L^3}s \end{bmatrix} = \dots \quad (7.16\text{-b})$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & & \frac{6EI}{H^2} * c + \frac{6EI}{L^2} * s & \\ & & \frac{12EI}{H^3} + \frac{EA}{L} * c^2 + & \\ \hline \frac{6EI}{H^2} * c + \frac{6EI}{L^2} * s & & & + (\frac{EA}{H} + \frac{12EI}{L^3}) * s^2 \end{array} \right] \quad (7.16-c)$$

com $c = \cos(\alpha)$ e $s = \text{seno}(\alpha)$, e ainda:

$$\{F'\} = [T]^T * \{F\} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 c + F_3 s \end{Bmatrix} . \quad (7.10\text{-rep})$$

7.6- Algoritmo de Implementação Matricial do Método dos Deslocamentos

(fonte: Apontamentos de Análise de Estruturas II)

Introdução

O método dos elementos finitos utiliza o mesmo algoritmo de manipulação matricial que o método dos elementos deslocamentos, apenas diferindo deste na construção das matrizes de rigidez e vectores de força elementares. Por isso se justifica o título desta secção de texto, embora o objectivo deste estudo seja o método dos elementos finitos..

A equação de equilíbrio habitual no método dos elementos finitos é:

$$[K \text{ rigidez}] * \{\text{deslocamentos nodais}\} = \{F \text{ equivalente de carga de vão}\} + \{F \text{ nodais aplicadas}\}$$

$$[k] * \{u\} = \{F_v\} + \{F^e\}$$

e a equação de equilíbrio habitual no método dos deslocamentos é:

$$[K \text{ rigidez}] * \{\text{deslocamentos nodais}\} + \{F \text{ de fixação de carga de vão}\} = \{F \text{ nodais aplicadas}\}$$

$$[k] * \{d\} + \{Q_0\} = \{F^e\}.$$

A diferença fundamental entre os métodos reside em que no método dos elementos finitos se determinam as forças equivalentes às acções de vão $\{F_v\}$ enquanto no método dos deslocamentos as forças de fixação das acções de vão $\{Q_0\}$, tendo as mesmas significado simétrico e por isso: $\{F_v\} = -\{Q_0\}$.

Descreve-se de forma breve a implementação matricial do método dos deslocamentos a uma estrutura reticulada plana. Indicar-se-ão as etapas de cálculo e discutem-se os diversos aspectos computacionais relevantes deste processo de cálculo.

Passo 1: Discretização da Estrutura. Definição do Referencial Global.

Desde já é necessário discretizar a estrutura. Consiste em numerar os nós, numerar e orientar as barras, numerar as secções críticas ou seja onde se pretendam determinar esforços. A numeração dos nós deve ser tal que minimize a semibanda da matriz de rigidez se esta for bandada (ver 7.8.1).

Adopta-se um referencial global (X^*_1, X^*_2, X^*_3) para a estrutura em relação ao qual se determina o número total de deslocamentos nodais independentes da estrutura livre, isto é da estrutura supondo que não tem apoios. Os deslocamentos nodais independentes são ordenados no vector $\{d^*\}$ representando o seu número total o número de graus de liberdade total, G_{L^*} , da estrutura.

Passo 2: Identificação dos Elementos Base. Matrizes de Rigidez Elementares.

Relativamente a cada uma das barras identifica-se qual o tipo de elemento finito (E-E, E-R, R-R, etc), identifica-se cada um dos graus de liberdade no referencial local da barra e que serão agrupados no vector $\{q_m\}$ e determina-se o número de graus de liberdade elementar, G_{Le} (em geral 6). Identificam-se as matrizes de rigidez das barras em coordenadas locais também designadas por *matrizes de rigidez elementares*.

Passo 3: Construção das Matrizes de Rigidez Elementares no Referencial Global.

Considerando a orientação do referencial local da barra relativamente ao referencial global monta-se a matriz de transformação de coordenadas da barra m , $[T]_m$. Em seguida a matriz de rigidez elementar da barra m em coordenadas locais $[k]_m$, é escrita em termos de coordenadas globais $[k^*]_m$. Recorre-se então à equação 7.16 de mudança de base, tendo-se contudo em consideração a nomenclatura presente. A matriz de rigidez elementar em coordenadas globais será então:

$$[k^*]_m = [T]_m^T \times [k]_m \times [T]_m \quad (7.21)$$

Passo 4: Espalhamento da Matriz de Rigidez Elementar pela Matriz Global

A rigidez associada a cada grau de liberdade da barra irá contribuir para a rigidez de certo coeficiente da matriz de rigidez global da estrutura, ao qual está associado a determinado grau de liberdade global. Para se concretizar este objectivo há que previamente relacionar cada grau de liberdade elementar com um grau de liberdade global. Para tal elabora-se uma tabela de incidências ou contrói-se a matriz booleana $[B]_m$. Tanto a tabela como a matriz referidas relacionam os deslocamentos nodais elementares em coordenada globais, agrupados no vector $\{q^*\}_m$, com os deslocamentos nodais globais, agrupados no vector $\{d^*\}$. Esta relação escreve-se:

$$\{q^*\}_m = [B]_m \times \{d^*\} \quad (7.22)$$

A matriz booleana $[B]_m$, constituída por zeros e uns, é em geral rectangular e tem G_{Le} linhas e G_{Lt} colunas. Salienta-se que $\{q^*\}_m$ tem G_{Le} elementos e que $\{d^*\}$ é um “super” vector com G_{Lt} elementos.

Ao processo que consiste na transferência de cada elemento da matriz de rigidez elementar para um certo elemento da matriz de rigidez da estrutura completa se designa por espalhamento da matriz elementar (da barra) pela matriz global. Em termos algébricos é como se ocorresse uma

transformação de coordenadas cuja matriz de transformação é $[B]_m$. Assim os coeficientes da matriz de rigidez elementar da barra m em coordenadas globais, $(k^*_{ij})_m$, vão ocupar a posição K^*_{rs} da matriz de rigidez global de acordo com a seguinte transformação:

$$[k^*]_m = [B]_m^T [k]_m [B]_m \dots \quad (7.23.a)$$

$$\dots = [B]_m^T [T]_m^T [k]_m [T]_m [B]_m \quad (7.23.b)$$

Repetindo este processo de espalhamento por todas as barras da estrutura, concretiza-se a montagem (ou a *assemblagem*) da matriz de rigidez global da estrutura livre. As rigidezes elementares de cada barra vão sendo sucessivamente acumuladas em elementos adequados da matriz de rigidez global. A matriz de rigidez global vale:

$$[k^*] = \sum_m [k^*]_m = \sum_m [B]_m^T [k]_m [B]_m = \sum_m [B]_m^T [T]_m^T [k]_m [T]_m [B]_m \quad (7.24)$$

sendo m o número total de barras.

Passo 5: Montagem do Vector Global de Forças de Fixação devido às cargas de vão em Coordenadas Globais, $\{Q^*_0\}$.

Por cada barra m determinam-se as forças nodais de fixação das cargas de vão, no referencial local, $\{Q_0\}_m$. De seguida faz-se uma mudança de coordenadas explicitando estas forças em termos de coordenadas globais, $\{Q^*_0\}_m$:

$$\{Q^*_0\}_m = [T]_m^T \{Q_0\}_m \quad (7.25)$$

É agora possível realizar o espalhamento de $\{Q^*_0\}_m$ por $\{Q^*_0\}$ recorrendo a $[B]_m^T$. Considerando a contribuição de todas as m barras procede-se à assemblagem no vector $\{Q^*_0\}$:

$$\{Q^*_0\} = \sum_m [B]_m^T \{Q^*_0\}_m = \sum_m [B]_m^T [T]_m^T \{Q_0\}_m \quad (7.26)$$

Passo 6: Vector de Forças Aplicadas e Construção do Vector de Termos Independentes, $\{F^*\}$

As forças nodais directamente aplicadas nos nós devem ser definidas em coordenadas globais, compondo o vector $\{Q^*\}$.

O vector de termos independentes é então definido por

$$\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q^*_0\} \quad (7.27)$$

Passo 7: Escrita da Equação do Método dos Deslocamentos

Neste instante a equação do método dos deslocamentos é um sistema com G_{Lt} equações que se escreve:

$$[k^*] x \{d^*\} = \{F^*\} \quad (7.28)$$

Cada uma das equações tem correspondência relativamente a cada grau de liberdade da estrutura global livre, ou seja, da estrutura considerada sem apoios. É como se a estrutura estivesse livre no espaço podendo deslocar-se como corpo rígido. Nestas circunstâncias o sistema referido é um sistema de equações dependentes.

Passo 8: Imposição das Condições de Fronteira

Há que impor ao sistema de equações 7.28 restrições equivalentes aos impedimentos dos graus de liberdade restringidos pelos apoios. Dos $\{d^*\}$ deslocamentos nodais, haverá um certo número de deslocamentos nodais restringidos nos nós de apoio, $\{d^*_R\} = \{0\}$, sendo os restantes, $\{d^*_L\}$, os deslocamentos nodais dos livres.

Em termos algébricos, impor as condições de apoio ao sistema consiste em eliminar do sistema as equações associadas ao equilíbrio de forças no sentido dos graus de liberdade restringidos. Corresponde portanto, numa igualdade matricial, a retirar da matriz de rigidez as linhas e colunas associadas aos graus de liberdade restringidos ficando o sistema reduzido apenas às equações associadas aos graus de liberdade livres. Em alternativa poderemos reordenar do sistema de equações deixando para último lugar, por exemplo, as equações associadas aos graus de liberdade restringidos. A equação 7.28 escreve-se então na seguinte forma :

$$\begin{bmatrix} K_{LL}^* & K_{LR}^* \\ K_{RL}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_R^* \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

Passo 9: Resolução da Equação do Método dos Deslocamentos. Cálculo de $\{d_L^*\}$ e de $\{d^*\}$.

Resolvendo o sub-sistema associado aos graus de liberdade livres:

$$[K_{LL}^*] x \{d_L^*\} = \{F_L^*\} \quad (7.30)$$

obtemos os deslocamentos nodais $\{d_L^*\}$. Na medida em que os vectores $\{d_L^*\}$ e $\{d_R^*\}$ são

conhecidos remontamos o vector de deslocamentos global $\begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* \end{Bmatrix}$ e tornamos a reordenar os seus

elementos de acordo com a sequência inicial (aquela adoptada no passo 1) obtendo-se por fim o vector $\{d^*\}$.

Passo 10: Cálculo de Reacções de Apoio.

As reacções de apoio no referencial global obtêm-se a partir da *exploração* da segunda equação da igualdade 7.29 :

$$\{F^*_R\} = [K^*_{RL}] * \{d^*_L\} \quad (7.31)$$

O vector $\{F^*_R\}$ é um subvector de $\{F\}$ definido por (7.27) que se pode reescrever como:

$$\{F^*\} = \{Q^*\} - \{Q^*_0\} \Rightarrow \quad (7.27\text{-rep})$$

$$\begin{Bmatrix} F^*_L \\ F^*_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q^*_L \\ Q^*_R \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q^*_{0L} \\ Q^*_{0R} \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

sendo Q^*_L as forças exteriores nodais directamente aplicadas aos nós livres, vulgarmente designadas por cargas nodais aplicadas, e Q^*_R as forças exteriores nodais directamente aplicadas aos nós restringidos as quais se designam por reacções de apoio. Por outro lado as forças Q^*_{0L} e Q^*_{0R} são as forças de fixação das acções de vão aplicadas respectivamente aos nós livres e restringidos. O sentido positivo destas forças continua a ser o adoptado pelo referencial global.

Considerando a segunda linha da igualdade (7.32) e a expressão (7.31) obteremos a seguinte definição de reacção de apoio:

$$\{Q^*_R\} = [K^*_{RL}] * \{d^*_L\} + \{Q^*_{0R}\} \quad (7.33)$$

Passo 11: Cálculo de Esforços nas Barras.

Os esforços na barra m determinam-se seguindo as seguintes etapas:

(i) Seleccionar do vector $\{d^*\}$ os deslocamentos nodais da barra m em coordenadas globais, $\{q^*\}_m$.

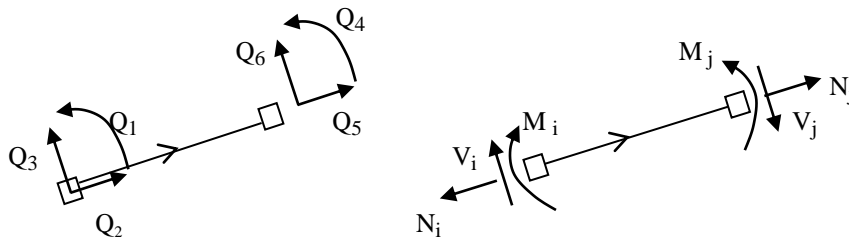
$$\{q^*\}_m = [B]_m * \{d^*\} \quad (7.22\text{-rep})$$

(ii) Escrever os deslocamentos nodais da barra m em coordenadas locais.

$$\{q\}_m = [T]_m * \{q^*\}_m = [T]_m * [B]_m * \{d^*\} \quad (7.34)$$

A este processo se pode chamar re-alocação de deslocamentos.

(iii) Esforços finais no referencial local

Figura 7.7 - Forças nodais independentes, $\{Q\}_m$, e esforços independentes, $\{X\}_m$.

Na figura 7.7 e expressão (7.35) relacionam-se as forças nodais $\{Q\}$, no referencial local, com o vector de esforços $\{X\}$ nas secções críticas (i e j):

$$\{Q\}_m = [T_E] \times \{X\}_m \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ N_i \\ V_i \\ M_j \\ N_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (7.35(a))$$

sendo $[T_E]$ designada por Matriz de Transformação de Esforços. Como a matriz é matriz diagonal com elementos unitários verifica-se a seguinte propriedade

$$[T_E] = [T_E]^T \quad (7.35(b))$$

de onde se pode escrever:

$$\boxed{\{X\}_m = [T_E] \times \{Q\}_m} \quad (7.35(c))$$

A equação de equilíbrio da barra no referencial local é, como sabemos :

$$\{Q\}_m = [K]_m \times \{q\}_m + \{Q_0\}_m \quad (7.36-a)$$

que colocada em 7.35(c) e resulta em:

$$\{X\}_m = [T_E] \times (\{Q_C\}_m + \{Q_0\}_m) \quad (7.35-b)$$

$$\boxed{\{X\}_m = [T_E] \times ([K]_m \times \{q\}_m + \{Q_0\}_m)} \quad (7.35-c)$$

$$\{X\}_m = ([T_E] \times [K]_m) \times \{q\}_m + [T_E] \times \{Q_0\}_m \quad (7.35-e)$$

$$\{X\}_m = [E]_m \times \{q\}_m + \{X_0\}_m \quad (7.35-f)$$

Esta última expressão já nos é bastante familiar porque é correntemente usada na implementação manual do método dos deslocamentos (ver disciplina de Análise de Estruturas II).

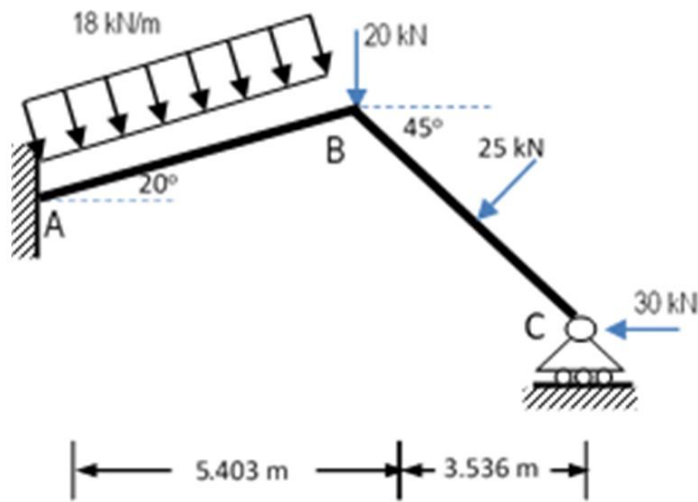
Finalmente é importante referir que os esforços ao longo das barras são determinados recorrendo às equações de equilíbrio da estática ($\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma M_o=0$) e eventualmente ao princípio da sobreposição de efeitos.

7.6.1- Exemplo:

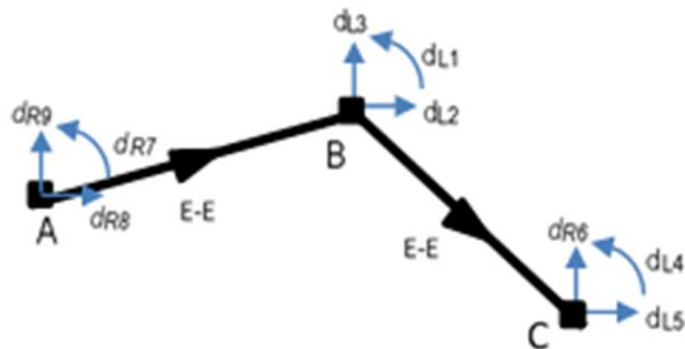
Exemplo de aplicação do Método dos Deslocamentos

Cálculos Preliminares

Barra	Compr L	EA	EA/L	EI	EI/L	EI/L ²	EI/L ³	ângulo	coseno	seno
		10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶			
1	5.75	6.96	1.21	0.3712	64556	11227	1952	20	0.9400	0.3420
2	5	6.96	1.39	0.3712	74200	14848	2970	-45	-0.7071	0.7071



Passo 1



Passo 2

Barra 1: tipo E-E - 6 graus de liberdade elementares

Barra 2: tipo E-E - 6 graus de liberdade elementares

A matriz de rigidez para ambas as barras está definida na equação 2.8

Passo 3 - Matrizes de transformação de coordenadas

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9397 & 0.342 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.342 & 0.9397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9397 & 0.342 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.342 & 0.9397 \end{bmatrix}$$

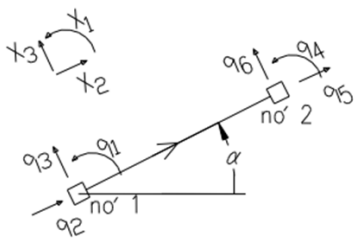
$$T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez elementares em coordenadas LOCAIS

$$ke1 = \begin{bmatrix} 258226 & 0 & 67363 & 129113 & 0 & -67363 \\ 0 & 1210435 & 0 & 0 & -1210435 & 0 \\ 67363 & 0 & 23431 & 67363 & 0 & -23431 \\ 129113 & 0 & 67363 & 258226 & 0 & -67363 \\ 0 & -1210435 & 0 & 0 & 1210435 & 0 \\ -67363 & 0 & -23431 & -67363 & 0 & 23431 \end{bmatrix}$$

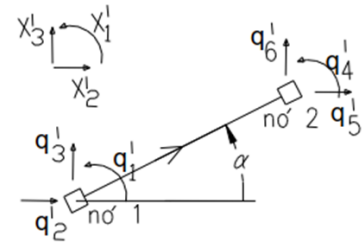
$$ke2 = \begin{bmatrix} 296960 & 0 & 89088 & 148480 & 0 & -89088 \\ 0 & 1392000 & 0 & 0 & -1392000 & 0 \\ 89088 & 0 & 35635 & 89088 & 0 & -35635 \\ 148480 & 0 & 89088 & 296960 & 0 & -89088 \\ 0 & -1392000 & 0 & 0 & 1392000 & 0 \\ -89088 & 0 & -35635 & -89088 & 0 & 35635 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez elementares em coordenadas GLOBAIS



$$T1^T \cdot ke1 \cdot T1$$

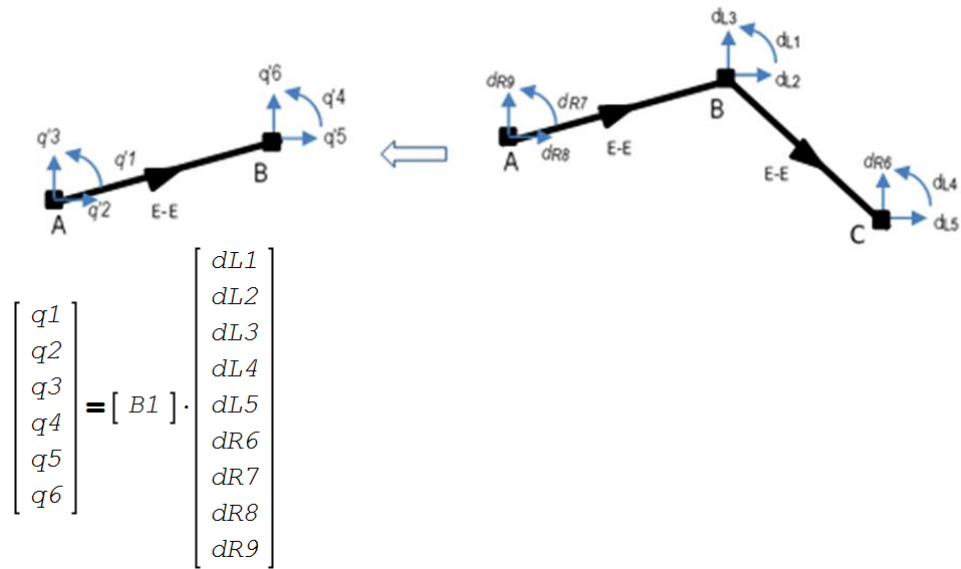
$$T2^T \cdot ke2 \cdot T2$$



$$T1^T \cdot ke1 \cdot T1 = \begin{bmatrix} 258226 & -23040 & 63301 & 129113 & 23040 & -63301 \\ -23040 & 1071582 & 381496 & -23040 & -1071582 & 381496 \\ 63301 & 381496 & 162284 & 63301 & -381496 & -162284 \\ 129113 & -23040 & 63301 & 258226 & 23040 & -63301 \\ 23040 & -1071582 & -381496 & 23040 & 1071582 & 381496 \\ -63301 & -381496 & -162284 & -63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

$$T2^T \cdot ke2 \cdot T2 = \begin{bmatrix} 296960 & 62995 & 62995 & 148480 & -62995 & -62995 \\ 62995 & 713818 & -678182 & 62995 & -713818 & 678182 \\ 62995 & -678182 & 713818 & 62995 & 678182 & -713818 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 \end{bmatrix}$$

Passo 4 - Matrizes Booleanas



$$B1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento da matriz $[k^*]_1$ pela matriz global $[k^*]$

$$KG1 := B1^T \cdot T1^T \cdot ke1 \cdot T1 \cdot B1$$

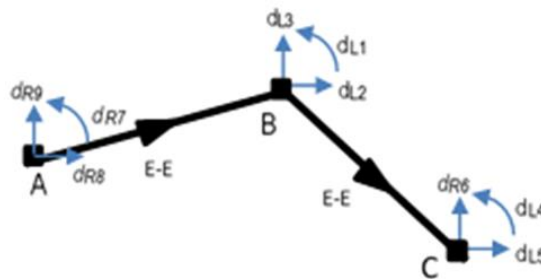
$$KG1 = \begin{bmatrix} 258226 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 129113 & -23040 & 63301 \\ 23040 & 1071582 & 381496 & 0 & 0 & 0 & 23040 & -1071582 & -381496 \\ -63301 & 381496 & 162284 & 0 & 0 & 0 & -63301 & -381496 & -162284 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 129113 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 258226 & -23040 & 63301 \\ -23040 & -1071582 & -381496 & 0 & 0 & 0 & -23040 & 1071582 & 381496 \\ 63301 & -381496 & -162284 & 0 & 0 & 0 & 63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

e Espalhamento da matriz $[k^*]_2$ pela matriz global $[k^*]$

$$KG2 := B2^T \cdot T2^T \cdot ke2 \cdot T2 \cdot B2$$

$$KG2 = \begin{bmatrix} 296960 & 62995 & 62995 & 148480 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ 62995 & 713818 & -678182 & 62995 & -713818 & 678182 & 0 & 0 & 0 \\ 62995 & -678182 & 713818 & 62995 & 678182 & -713818 & 0 & 0 & 0 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assemblagem da matriz de rigidez global



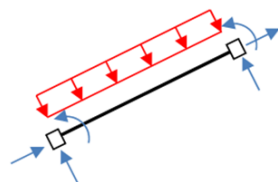
$$KG = \begin{bmatrix} 555186 & 86034 & -306 & 148480 & -62995 & -62995 & 129113 & -23040 & 63301 \\ 86034 & 1785399 & -296687 & 62995 & -713818 & 678182 & 23040 & -1071582 & -381496 \\ -306 & -296687 & 876101 & 62995 & 678182 & -713818 & -63301 & -381496 & -162284 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 & 0 & 0 & 0 \\ 129113 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 258226 & -23040 & 63301 \\ -23040 & -1071582 & -381496 & 0 & 0 & 0 & -23040 & 1071582 & 381496 \\ 63301 & -381496 & -162284 & 0 & 0 & 0 & 63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix}$$

Passo 5 - Vectors $\{Q_0\}_1$ e $\{Q_0\}_2$ em coordenadas locais

Barra 1

$$M01 := \frac{18 \cdot 5.5^2}{12} = 45.375 \quad V01 := 18 \cdot \frac{5.5}{2} = 49.5$$

$$Q01 := \begin{bmatrix} M01 \\ 0 \\ V01 \\ -M01 \\ 0 \\ V01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.4 \\ 0 \\ 49.5 \\ -45.4 \\ 0 \\ 49.5 \end{bmatrix}$$

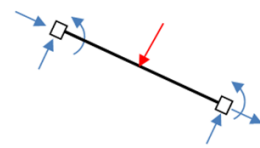


Vectors $\{Q_0\}_1$ e $\{Q_0\}_2$ em

Barra 2

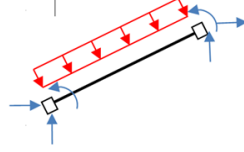
$$M02 := \frac{25 \cdot 5}{8} = 15.625 \quad V02 := \frac{25}{2} = 12.5$$

$$Q02 := \begin{bmatrix} M02 \\ 0 \\ V02 \\ -M02 \\ 0 \\ V02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 0 \\ 12.5 \\ -15.6 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

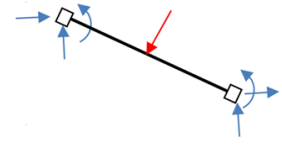


coordenadas globais

$$Q01_G := T1^T \cdot Q01 = \begin{bmatrix} 45.4 \\ -16.9 \\ 46.5 \\ -45.4 \\ -16.9 \\ 46.5 \end{bmatrix}$$



$$Q02_G := T2^T \cdot Q02 = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \end{bmatrix}$$



Espalhamento de \$\{Q^*_0\}_1\$ e \$\{Q^*_0\}_2\$ em \$\{Q^*_0\}\$ e montagem

$$Q01G_G := B1^T \cdot Q01_G = \begin{bmatrix} -45.4 \\ -16.9 \\ 46.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 45.4 \\ -16.9 \\ 46.5 \end{bmatrix}$$

Barra 2

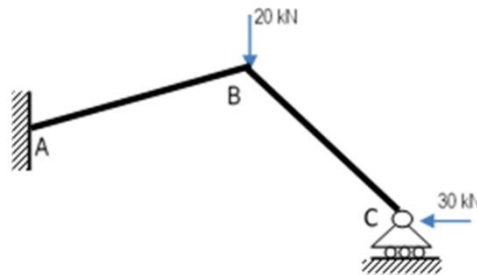
$$Q02G_G := B2^T \cdot Q02_G = \begin{bmatrix} 15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ADIÇÃO: Barra 1 + Barra 2

$$Q0G := Q01G_G + Q02G_G = \begin{bmatrix} -29.8 \\ -8.1 \\ 55.4 \\ -15.6 \\ 8.8 \\ 8.8 \\ 45.4 \\ -16.9 \\ 46.5 \end{bmatrix}$$

Passo 6 - Vector de forças nodais aplicadas \$\{Q^*\}\$ e vector de termos independentes \$\{F^*\}=\{Q^*\}-\{Q^*_0\}\$

$$Q := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Vector de termos independentes \$\{F^*\}=\{Q^*\}-\{Q^*_0\}\$

$$F := Q - Q0G = \begin{bmatrix} 29.8 \\ 8.1 \\ -75.4 \\ 15.6 \\ -38.8 \\ -8.8 \\ -45.4 \\ 16.9 \\ -46.5 \end{bmatrix}$$

Passo 7 - Equação do Método dos deslocamentos : $[k^*]x\{d^*\}=\{F^*\}$

$$\begin{bmatrix} 555186 & 86034 & -306 & 148480 & -62995 & -62995 & 129113 & -23040 & 63301 \\ 86034 & 1785399 & -296687 & 62995 & -713818 & 678182 & 23040 & -1071582 & -381496 \\ -306 & -296687 & 876101 & 62995 & 678182 & -713818 & -63301 & -381496 & -162284 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 & -62995 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 & -678182 & 0 & 0 & 0 \\ -62995 & 678182 & -713818 & -62995 & -678182 & 713818 & 0 & 0 & 0 \\ 129113 & 23040 & -63301 & 0 & 0 & 0 & 258226 & -23040 & 63301 \\ -23040 & -1071582 & -381496 & 0 & 0 & 0 & -23040 & 1071582 & 381496 \\ 63301 & -381496 & -162284 & 0 & 0 & 0 & 63301 & 381496 & 162284 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dL1 \\ dL2 \\ dL3 \\ dL4 \\ dL5 \\ dR6 \\ dR7 \\ dR8 \\ dR9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.8 \\ 8.1 \\ -75.4 \\ 15.6 \\ -38.8 \\ -8.8 \\ -45.4 \\ 16.9 \\ -46.5 \end{bmatrix}$$

Passo 8 Redução da equação do método dos deslocamentos

Passo 8 Redução da equação do método dos deslocamentos

$$d_{R6}^* = d_{R7}^* = d_{R8}^* = d_{R9}^* = 0$$

$$[K^*] \cdot \{d_G^*\} = \{F^*\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{LL}^* & K_{LR}^* \\ K_{RL}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_R^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_R^* \end{Bmatrix}$$

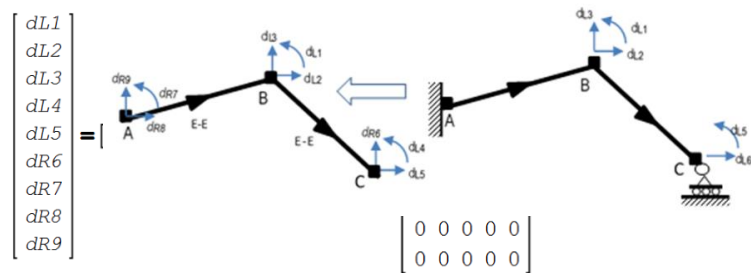
Nota Importante: Na igualdade matricial as primeiras cinco equações dizem respeito ao equilíbrio nodal segundo grau de liberdade livres e as restantes aos restringidos do que resulta a arrumação dos coeficientes de rigidez nas submatrizes $[K_{LL}]$ $[K_{LR}]$ $[K_{RL}]$ $[K_{RR}]$. Resultou assim porque houve no início a preocupação de numerar primeiro os GL livres. Caso contrário as equações respeitantes a GL livres e restringidas surgiriam algo misturadas entre si. Para se colocarem arrumadas em bloco, como acima, haveria que implementar uma operação adicional que seria a troca de ordem das equações, que causam na equação matricial a troca de linhas nas equações e de linhas e colunas na matriz de rigidez. Para essa operação, consoante outros objectivos, também se podem usar técnicas de transformação de base ou outras.

PASSO 9: Resolução do sistema $[k^*_{LL}]x\{d^*_L\}=\{F^*_L\}$. Montagem de $\{d^*_G\}$

Podemos reduzir a equação do passo 8 à apresentada no título do passo 9 deduzindo antes a seguinte matriz $[RL]$

Matriz booleana para graus de liberdade livres
 $dGLG = RL \cdot dL\text{Livres}$

(a)



$$KGR = \begin{bmatrix} 555186 & 86034 & -306 & 148480 & -62995 \\ 86034 & 1785399 & -296687 & 62995 & -713818 \\ -306 & -296687 & 876101 & 62995 & 678182 \\ 148480 & 62995 & 62995 & 296960 & -62995 \\ -62995 & -713818 & 678182 & -62995 & 713818 \end{bmatrix}$$

$$KGR := RL^T \cdot KG \cdot RL$$

$$FL := RL^T \cdot F$$

$$FL := RL^T \cdot F = \begin{bmatrix} 34 \\ 8.9 \\ -77.5 \\ 15.6 \\ -38.8 \end{bmatrix}$$

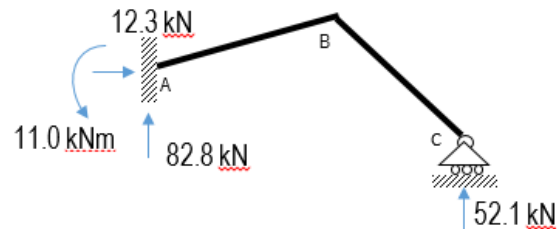
logo: $\{d^*_L\} = [k^*_{LL}]^{-1} \times \{F^*_L\} = \begin{Bmatrix} 0.00004 \\ 0.00025 \\ -0.00079 \\ 0.00035 \\ 0.00098 \end{Bmatrix}$. Da relação (a) obtemos o vector de deslocamentos globais,

$$\{d^*_G\} = \begin{Bmatrix} 0.00004 \\ 0.00025 \\ -0.00079 \\ 0.00035 \\ 0.00098 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

PASSO 10: Cálculo das reacções de apoio $\{Q^*_R\} = [k^*_{RL}] \{d^*_L\} + \{Q^*_{0R}\}$

Do passo 7 obtemos directamente a matriz $[k^*_{RL}]$, que multiplicada pelo vector $\{d^*_L\}$ do passo anterior e somada ao subvector $\{Q^*_{0R}\}$ do vector final $\{Q^*_{0G}\}$ do passo 5 se obtém as reacções de apoio:

$$\{Q^*_R\} = \begin{Bmatrix} 52.1 \\ 110.0 \\ 12.3 \\ 82.8 \end{Bmatrix}$$



Em alternativa podemos deduzir a matriz de transformação $[RR]$ que relaciona os GL globais com os GL restringidos: $\{d^*_G\} = [RR] \{d^*_R\}$ (à semelhança do que se faz na igualdade (a) do passo 9).

Sabendo que: $[k^*_{RL}] = [RR]^T [K^*_G] [RR]$, que $\{d^*_L\} = [RL]^T \{d^*_G\}$ e que $\{Q^*_{0R}\} = [RR]^T \{Q^*_{0G}\}$

substituindo em $\{Q^*_R\} = [k^*_{RL}] \{d^*_L\} + \{Q^*_{0R}\}$ fica:

$$\{Q^*_R\} = [RR]^T [K^*_G] \{d^*_G\} + [RR]^T \{Q^*_{0G}\}$$

PASSO 11: Calculo de esforços nas barras

Barra 1 – deslocamentos em coordenadas LOCAIS e Forças de equilíbrio Locais

$$q1 := T1 \cdot B1 \cdot RL \cdot dL = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000038 \\ -0.0000329 \\ -0.000824 \end{Bmatrix} \quad Q1 := ke1 \cdot q1 + Q01 = \begin{Bmatrix} 110 \\ 39.9 \\ 73.6 \\ 15.7 \\ -39.9 \\ 29.9 \end{Bmatrix}$$

Barra 2 – deslocamentos em coordenadas LOCAIS e Forças de equilíbrio Locais

$$q2 := T2 \cdot B2 \cdot RL \cdot dL = \begin{Bmatrix} 0.000038 \\ 0.0007329 \\ -0.0003781 \\ 0.0003544 \\ 0.0006911 \\ 0.0006911 \end{Bmatrix} \quad Q2 := ke2 \cdot q2 + Q02 = \begin{Bmatrix} -15.7 \\ 58.1 \\ 9.4 \\ 2.9 \cdot 10^{-13} \\ -58.1 \\ 15.6 \end{Bmatrix}$$

Matriz [TE] de transformação de forças nodais locais em esforços:

$$\begin{matrix} \text{Esforço} & = & [\text{TE}] * & \text{Força Nodal} \\ M_i & & & Q_1 \\ N_i & & & Q_2 \\ V_i & = & [\text{TE}] * & Q_3 \\ M_j & & & Q_4 \\ N_j & & & Q_5 \\ V_j & & & Q_6 \end{matrix}$$

$$TE := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esforços Finais nas Barras

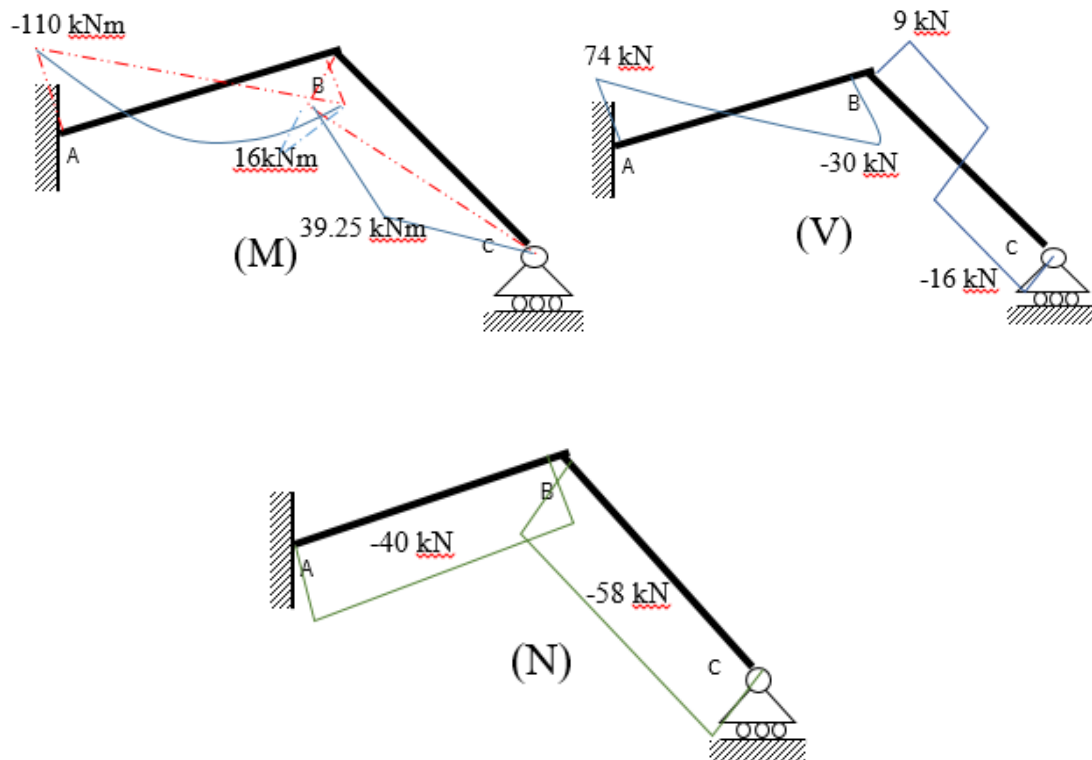
Barra 1

$$X1 := TE \cdot Q1 = \begin{bmatrix} -110 \\ -40 \\ 74 \\ 16 \\ -40 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Barra 2

$$X2 := TE \cdot Q2 = \begin{bmatrix} 16 \\ -58 \\ 9 \\ 3 \cdot 10^{-13} \\ -58 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Diagramas de esforços



7.6.2- Exemplo:

Exemplifica-se uma lista de instruções possível para resolver o problema anterior em SCILAB. Lembra-se que o programa e as subrotinas Mke() e MTc() devem estar na mesma directoria que o próprio programa, e actualizar "D:\2-DISCIPLINAS \ 7 -OUTRAS_DISCIPLINAS \INFORMATICA\Exercicios\")

Facilmente e rapidamente pode fazer alterações para resolver outras estruturas pequenas.

```
//Cálculo de uma estrutura plana
// Inicialização das rotinas Mke() e MTc()
chdir("D:\2-DISCIPLINAS\7-OUTRAS_DISCIPLINAS\INFORMATICA\Exercicios\")
clear
exec("Mke.sci")
exec("MTc.sci")
//dados da estrutura
NBAR=2;nGLG=9;nGLGR=4;
nGLGL=nGLG-nGLGR; // numero de GL que ficam livres depois dos apoios
vGLGR=[6,7,8,9]; // vector com os GLG que devem ficar restringidos
E=29e6
L1=5.75;alfa1=20;A1=0.3*0.8;I1=0.3*0.8^3/12
L2=5.00;alfa2=-45;A2=0.3*0.8;I2=0.3*0.8^3/12

// Forças de fixação de cargas de vão barra 1, Q01()
Q01(1)=18*L1^2/12;Q01(2)=0;Q01(3)=18*L1/2;
Q01(4)=-18*L1^2/12;Q01(5)=0;Q01(6)=18*L1/2;

// Forças de fixação de cargas de vão barra 2, Q02()
Q02(1)=25*L2/8;Q02(2)=0;Q02(3)=25/2;
Q02(4)=-25*L2/8;Q02(5)=0;Q02(6)=25/2;

// Matrizes Booleanas B1() e B2(), GLE = B()*GLG()
// Barra 1
B1=zeros(6,nGLG);B1(1,7)=1;B1(2,8)=1;B1(3,9)=1;B1(4,1)=1;
B1(5,2)=1;B1(6,3)=1;
// Barra 2
B2=zeros(6,nGLG);B2(1,1)=1;B2(2,2)=1;B2(3,3)=1;B2(4,4)=1;
B2(5,5)=1;B2(6,6)=1;
// INICIO do calculo
// Rigidez elemental em coordenadas blobais, ke1() e ke2()
EI1=E*I1;EA1=E*A1;ke1=Mke(EI1,EA1,L1);
EI2=E*I2;EA2=E*A2;ke2=Mke(EI2,EA2,L2);

// Matrizes de Transformação de coordenadas, Tc1() e Tc2()
C1=cos(alfa1*%pi/180);S1= sin(alfa1*%pi/180);Tc1=MTc(C1,S1);
C2=cos(alfa2*%pi/180);S2= sin(alfa2*%pi/180);Tc2=MTc(C2,S2);

// Matrizes de rigidezes globais em coodenadas globais, KG1() e KG2()
// - Espalhamento
KG1=B1'*Tc1'*ke1*Tc1*B1;
KG2=B2'*Tc2'*ke2*Tc2*B2;
// Matriz global da estrutura, KG()
// - Adição
KG= KG1+KG2;

// Forças de fixação de cargas de vão em coord. Globais, Q01G(),Q02G()
// - Espalhamento
Q01G=B1'*Tc1'*Q01;
Q02G=B2'*Tc2'*Q02;
// Força de Fixação Global, Q0G()
// -Adição
UAlg - ISE - C.Civil
```

```

Q0G=Q01G+Q02G

// Vector de forças externas aplicadas nos nós, Q()
Q=zeros(nGLG,1);Q(3,1)=-20;Q(5,1)=-30

// Vector de Forças Independentes F()= Q() - Q0G()
F=Q-Q0G
// Equação de equilíbrio da estrutura livre (sem apoios) KG()*d()==F()

// RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
// ===== Processo 1 - via redução do sistema =====
//      Matriz de redução GLLivres para GLGlobais, TL()

TL=zeros(nGLG,nGLGL);
TL(1,1)=1;TL(2,2)=1;TL(3,3)=1;TL(4,4)=1;TL(5,5)=1;
// Equação de equilíbrio reduzida
KGR=TL'*KG*TL;
FR=TL'*F;
// Deslocamentos nodais livres (resolução do sistema de equações)
dL=inv(KGR)*FR;
// Vector de deslocamentos (livres + restringidos) global
d=TL*dL;
//=====

// ===== Processo 2 - Método da substituição =====

// vector de graus de liberdade restringidos (dado do problema)
for i=1:nGLGR
p=vGLGR(i);
    for j= 1 : nGLG
        KG(p,j)=0;KG(j,p)=0;
    end
    KG(p,p)=1;F(p)=0;
end

// Resolução do sistema de equações
d=inv(KG)*F;
//=====

// CALCULO de DESLOCAMENTOS E DE ESFORÇOS NAS BARRAS
// Vectors de deslocamentos nodais das barras 1 e 2 em coord. locais
q1=Tc1*B1*d;
q2=Tc2*B2*d;

// Forças nodais de equilíbrio nas barras 1 e 2
Q1= ke1*q1+Q01;
Q2= ke2*q2+Q02;

// Esforços nas barras
// matriz de transformação de forças nodais em esforços nodais, TE
TE= eye(6,6);TE(1,1)=-1;TE(2,2)=-1;TE(6,6)=-1
// Esforços nodais finais nas barras 1 e 2
X1 = TE*Q1
X2 = TE*Q2

// ===== F I M =====
=====
==
function ke=Mke(EI, EA, L) // Matriz de rigidez de barra encastrada encastrada
    ke=zeros(6,6)
    ke(1,1)=4*EI/L;ke(4,4)=ke(1,1)

```

```

ke(1,4)=2*EI/L;
ke(1,3)=6*EI/L^2;ke(1,6)=-ke(1,3);ke(3,4)=ke(1,3);ke(4,6)=-ke(1,3);
ke(2,2)=EA/L;ke(2,5)=-ke(2,2);ke(5,5)=ke(2,2)
ke(3,3)=12*EI/L^3;ke(6,6)=ke(3,3);ke(3,6)=-ke(3,3);
for i=2:6
    for j=1:i
        ke(i,j)=ke(j,i)
    end
end
endfunction

```

```

=====
function Tc=MTc(C, S) // Matriz de transformação de coordenadas
    Tc=eye(6,6)
    Tc(2,2)=C;Tc(2,3)=S;Tc(3,2)=-S;Tc(3,3)=C;
    Tc(5,5)=C;Tc(5,6)=S;Tc(6,5)=-S;Tc(6,6)=C;
endfunction
=====
=====

```

7.7 – Alguns aspectos a considerar

7.7.1- Semibanda

Como resultado do espalhamento e montagem da matriz de rigidez global, traduzida pela equação 7.24, os coeficientes de rigidez elementares irão “espalhar-se” pela matriz de rigidez global, ocupando lugares nesta matriz que correspondem à coincidência entre os deslocamentos elementares e deslocamentos globais. A forma deste “espalhamento” pode ser mais concentrada em certas zonas ou mais dispersa (esparsa), dependendo disso da sequência como foram numerados os deslocamentos nodais globais, ou melhor, os graus de liberdade globais. Em última análise dependem da sequência de numeração dos nós da estrutura porque os deslocamentos nodais se numeram primeiro num determinado nó (serão 3 por cada nó numa estrutura plana) e depois no nó seguinte (mais 3) e assim sucessivamente.

Apresentam-se dois exemplos (figuras 7.9 e 7.10) do espalhamento das matrizes elementares pela matriz global, de uma mesma estrutura, na qual os nós, e por consequência os deslocamentos nodais (d^*_i) foram numerados por ordem diferente.

Neste exemplo todas as barras são do tipo rotulado-rotulado às quais se associam quatro graus de liberdade como mostra a figura 7.8. Consequentemente a matriz de rigidez elementar é uma matriz de dimensão 4×4 .

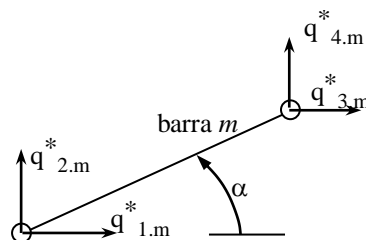


Figura 7.8 - Graus de liberdade da barra bi-rotulada de ordem m em coordenadas globais

Para o caso 1 faz-se a representação gráfica do espalhamento das rigidezes associadas aos graus de liberdade dos nós da barra 7 pela matriz de rigidez global. Verificamos que os graus de liberdade $q_{1,7}, q_{2,7}, q_{3,7}$ e $q_{4,7}$ da barra 7 (ver figura 7.9) se relacionam respectivamente com os graus de liberdade globais $d^*_5, d^*_6, d^*_9,$ e d^*_{10} . Assim as rigidezes elementares k^*_{ij} , com i e j a variar de 1 a 4, se espalham na matriz de rigidez global ocupando as posições k^*_{rs} , com r e s a terem ordenadamente os valores 5, 6, 9 e 10. Repare que o ângulo α da barra 7 é negativo.

Como se pode observar o espalhamento é disperso no primeiro caso sendo concentrado numa faixa em redor da diagonal principal no segundo caso. A largura máxima desta faixa designa-se por *banda* e pode ser definida como a máxima distância entre elementos não nulos medidos segundo uma linha ou uma coluna. É garantido que valores situados fora da banda são nulos porque são coeficientes que não tem qualquer correspondência com qualquer deslocamento. Não há por conseguinte que guardar em memória os valores (nulos) fora da banda.

Caso 1:

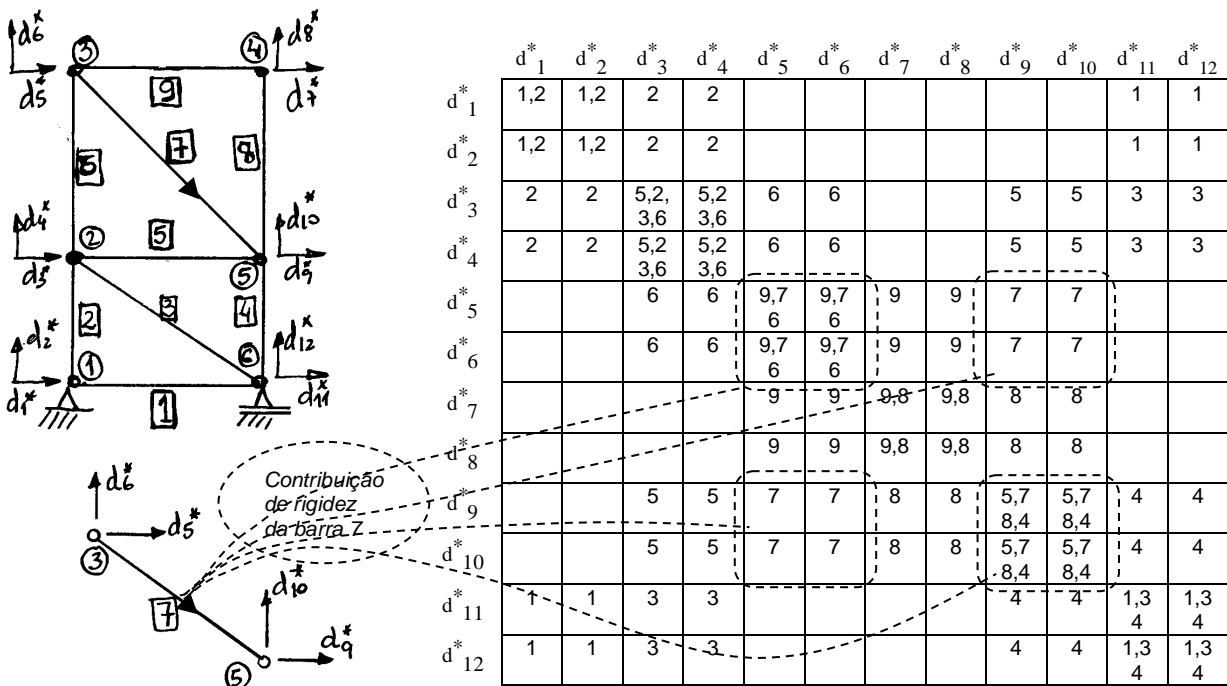
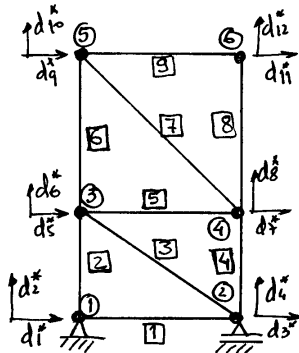


Figura 7.9- Matriz de rigidez esparsa. Espalhamento da barra 7 na matriz de rigidez global.

Caso 2:



Deslocamentos nodais independentes

Semibanda

	d ₁ [*]	d ₂ [*]	d ₃ [*]	d ₄ [*]	d ₅ [*]	d ₆ [*]	d ₇ [*]	d ₈ [*]	d ₉ [*]	d ₁₀ [*]	d ₁₁ [*]	d ₁₂ [*]
d ₁ [*]	1,2	1,2	1	1	2	2						
d ₂ [*]	1,2	1,2	1	1	2	2						
d ₃ [*]	1	1	1,4 3	1,4 3	3	3	4	4				
d ₄ [*]	1	1	1,4 3	1,4 3	3	3	4	4				
d ₅ [*]	2	2	3	3	5,2 3,6	5,2 3,6	5	5	6	6		
d ₆ [*]	2	2	3	3	5,2 3,6	5,2 3,6	5	5	6	6		
d ₇ [*]			4	4	5	5	5,4 7,8	5,4 7,8	7	7	8	8
d ₈ [*]			4	4	5	5	5,4 7,8	5,4 7,8	7	7	8	8
d ₉ [*]					6	6	7	7	9,7 6	9,7 6	9	9
d ₁₀ [*]					6	6	7	7	9,7 6	9,7 6	9	9
d ₁₁ [*]							8	8	9	9	9,8	9,8
d ₁₂ [*]							8	8	9	9	9,8	9,8

Figura 7.10 - Matriz de rigidez em banda

Por outro lado como a matriz de rigidez é simétrica apenas precisamos de conhecer os valores da diagonal principal e os que lhe ficam acima ou baixo até ao limite da banda. Esta largura chama-se semibanda. O seu valor é dado por:

$$\text{Semibanda} = \text{GLN} \times (\text{dif} + 1) \tag{7.37}$$

sendo GLN- o número de graus de liberdade máximo por cada nó
 dif – máxima diferença entre nós de um elemento

Nos exemplos temos:

- Caso 1: GLN=2, dif = 6 - 1 = 5, lido na barra 1. → Semibanda = 12. Curiosamente a semibanda é igual à dimensão da matriz de rigidez global. Há que guardar em memória toda a matriz 144 números, a qual tem muitas zonas dispersas com zeros.

- Caso 2: GLN=2, dif = 5 - 3 = 2 , lido na barra 6.→ Semibanda = 6. Só ocuparemos 6 posições na matriz de rigidez global centradas na diagonal principal (72 números).

Matriz bandada correspondente ao caso 2

d_1^*	1,2	1,2	1	1	2	2
d_2^*	1,2	1	1	2	2	
d_3^*	1,4, 3	1,4 3	3	3	4	4
d_4^*	1,4 3	3	3	4	4	
d_5^*	5,2 3,6	5,2 3,6	5	5	6	6
d_6^*	5,2 3,6	5	5	6	6	
d_7^*	5,4 7,8	5,4 7,8	7	7	8	8
d_8^*	5,4 7,8	7	7	8	8	
d_9^*	9,7 6	9,7 6	9	9		
d_{10}^*	9,7 6	9	9			
d_{11}^*	9,8	9,8				
d_{12}^*	9,8					

Figura 7.11 - Matriz de rigidez bandada

As matrizes quadradas que apresentem uma semibanda pequena contêm no canto superior direito e inferior esquerdo zonas de zeros. Sendo a matriz simétrica basta-nos guardar em memória os valores desde a diagonal principal até ao limite da semibanda. A matriz de rigidez que é originalmente quadrada converte-se numa matriz rectangular designada por matriz bandada (bandeada), cujo número de linhas é igual ao número de graus de liberdade da estrutura livre e o número de colunas igual à semibanda. Esta matriz terá no seu canto inferior direito um pequeno triângulo de zeros (cujo número é $nsb \times (nsb-1) / 2$ sendo nsb a semibanda). Este novo tipo de armazenamento poupa em geral uma quantidade enorme de memória.

Entretanto desenvolveram-se subrotinas para o cálculo de sistemas de equações que contêm matrizes bandadas, as quais efectuam um número menor de operações aritméticas, reduzindo o erro e o tempo de cálculo.

Há ainda outros processos de armazenamento da matriz de rigidez mais eficazes como o armazenamento da matriz num super vector chamado "sky line". Os elementos guardados vão, coluna a coluna, desde a diagonal principal até ao último elemento não nulo da coluna. Há necessidade de criar outro vector, o vector "pointer", para permitir a localização do último elemento não nulo de cada coluna. É o processo melhor pois o número de zeros depende menos da forma como se numeram os nós (ou identicamente, os deslocamentos nodais independentes) da estrutura. As rotinas de cálculo do sistema de equações, são mais complexas porque necessitam de actualização dos índices, onde se perde um pouco mais de tempo. Por outro lado executam menos operações algébricas sobre os elementos da matriz, o que é vantajoso sob o ponto de vista de erros

numéricos. É o processo de armazenamento mais eficaz.

Em conclusão podemos adiantar que uma grande parte do software de estruturas incorpora subrotinas de resolução de sistemas de equações de matrizes bandadas. Por isso é conveniente numerar adequadamente os nós da estrutura de forma a fazer reduzir ao máximo a dimensão da semibanda. Há porém certo software que numera automaticamente os nós, o que obviamente dispensa então esta preocupação por parte do utilizador.

Acrescenta-se finalmente que a numeração dos elementos (barras) é arbitrária. Tem apenas a ver com a saída dos resultados que é em geral por ordem sequencial dos elementos. Por exemplo, na estrutura articulada apresentada seria preferível numerar primeiro os pilares, depois as vigas e finalmente as escoras (barras diagonais).

7.7.2 - Método da penalização.

Verificámos no Passo 6 que para estabelecer as condições de fronteira era necessário subdividir o sistema de equações em dois sub-sistemas, um associado aos graus de liberdade livres e os restantes aos graus de liberdade restringidos. Podemos adoptar um método alternativo, o método da penalização.

Este método consiste em aumentar artificialmente o elemento da diagonal principal da matriz de rigidez (k_{rr}) associado ao grau de liberdade restringido pelo apoio com um valor de rigidez muito elevado, por exemplo 10^{10} , "penalizando-o". Esse valor deverá ser muito grande quando comparado com o elemento de maior rigidez da matriz.

A equação de equilíbrio do método dos deslocamentos associada aquele deslocamento nodal impedido, d_r^* , escreve-se $\sum k_{rj}^* x d_j^* = F_r^*$. Explicitando a equação em ordem a d_r^* obtemos:

$$d_r^* = \frac{F_r^* - \sum_{j=1, (mas\ j \neq r)}^{GLt} k_{rj}^* x d_j^*}{k_{rr}^*} . \quad (7.38)$$

Ora sendo $k_{rr}^* \gg \gg k_{rj}^*$ e $k_{rr}^* \gg \gg F_r^*$ verificamos que resulta $d_r^* \approx 0$ que não é mais do que a condição de restrição de apoio. O sistema de equações pode então ser resolvido directamente sem ser necessário alterar a ordem das linhas e colunas como exigia antes o Passo 6. Os elementos do vector de deslocamentos final $\{d^*\}$ associados a graus de liberdade impedidos serão aproximadamente zero, $\{d_R^*\} = \{0\}$, e os restantes elementos daquele vector $\{d^*\}$ representarão os deslocamentos reais dos nós livres da estrutura $\{d_L^*\}$. Este método conduz a resultados aproximados mas perfeitamente aceitáveis em problemas de pequena dimensão.

O método da penalização engloba os seguintes passos:

(i) Colocar na diagonal principal associada ao grau de liberdade restringido um número muito grande;

(ii) Resolver o sistema de equações completo (equivale ao Passo 8) do qual se obtém o vector total $\{d^*\}$, que engloba os elementos sub-vectores $\{d^*_L\}$ e $\{d^*_R\}$.

Exemplo 7.2:

Pretende-se resolver a equação de equilíbrio do método dos deslocamentos do exemplo 7.1 pelo método da penalização.

A equação de equilíbrio é a seguinte: $[k^*]x\{d^*\}=\{F^*\}$

$$\begin{pmatrix} 0.297 & 0 & 0.089 & 0.148 & 0 & -0.089 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.392 & 0 & 0 & -1.392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.089 & 0 & 0.036 & 0.089 & 0 & -0.036 & 0 & 0 & 0 \\ 0.148 & 0 & 0.089 & 0.668 & -0.07 & 0.032 & 0.186 & 0.0696 & -0.121 \\ 0 & -1.392 & 0 & -0.07 & 2.7144 & 0.723 & -0.07 & -1.322 & -0.723 \\ -0.089 & 0 & -0.036 & 0.032 & 0.7233 & 0.523 & 0.121 & -0.723 & -0.487 \\ 0 & 0 & 0 & 0.186 & -0.07 & 0.121 & 0.371 & 0.0696 & -0.121 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & -1.322 & -0.723 & 0.07 & 1.3224 & 0.723 \\ 0 & 0 & 0 & -0.121 & -0.723 & -0.487 & -0.121 & 0.7233 & 0.487 \end{pmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ 0 \\ -30 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ -17.32 \end{Bmatrix}$$

Os graus de liberdade respeitantes a deslocamentos impedidos são o 1º, 2º, 3º e 9º. Anulam-se as colunas e linhas da matriz de rigidez associadas a estes graus de liberdade e multiplica-se o elemento da diagonal principal por um número muito grande, por exemplo 10^{10} . Os elementos do vector de forças associados a estes graus de liberdade serão durante o processo de cálculo divididos por aquele número (produto) pelo que se tornarão praticamente nulos. Nesta fase podemos mantê-los com o seu valor mas será melhor anulá-los.

A igualdade anterior ficará com o seguinte aspecto:

$$\begin{pmatrix} 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.668 & -0.07 & 0.032 & 0.186 & 0.0696 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.07 & 2.7144 & 0.723 & -0.07 & -1.322 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.032 & 0.7233 & 0.523 & 0.121 & -0.723 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.186 & -0.07 & 0.121 & 0.371 & 0.0696 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & -1.322 & -0.723 & 0.07 & 1.3224 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{10} \end{pmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} d^*1 \\ d^*2 \\ d^*3 \\ d^*4 \\ d^*5 \\ d^*6 \\ d^*7 \\ d^*8 \\ d^*9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo em ordem a $\{d^*\}$:

$$\begin{Bmatrix} d^{*1} \\ d^{*2} \\ d^{*3} \\ d^{*4} \\ d^{*5} \\ d^{*6} \\ d^{*7} \\ d^{*8} \\ d^{*9} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.747 & 0.000 & 0.264 & -0.982 & 0.104 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.718 & -0.003 & 0.001 & 0.716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.261 & -0.009 & 17.062 & -7.528 & 9.702 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.980 & 0.004 & -7.519 & 6.469 & -4.396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.102 & 0.713 & 9.710 & -4.405 & 7.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-10} \end{pmatrix} \times 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -67.32 \\ 20 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d^{*1} \\ d^{*2} \\ d^{*3} \\ d^{*4} \\ d^{*5} \\ d^{*6} \\ d^{*7} \\ d^{*8} \\ d^{*9} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -30.8 \\ -6.9 \\ -1492.0 \\ 718.7 \\ -874.2 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$$

7.7.3 - Método da eliminação.

Como o método anterior envolve operações com números muito grandes e muito pequenos induz um certo erro de origem numérica devido às truncaturas e ou arredondamentos do processador matemático. O procedimento a seguir explicado permite minorar estes erros porque elimina artificialmente do sistema global de equações aquelas associadas aos graus de liberdade restringidos. Chamemos a este método o "método da eliminação" o qual engloba os seguintes passos:

- (i) Substituir por zeros as linhas e colunas da matriz de rigidez cujo número de ordem é igual ao número de ordem do deslocamento nodal restringido pelo nó de apoio;
- (ii) Colocar na diagonal principal associada ao grau de liberdade restringido um valor unitário;
- (iii) Substituir por zeros o elemento do vector de forças (termo independente) associado ao número de ordem do grau de liberdade restringido pelo nó de apoio;
- (iv) Resolver o sistema de equações completo do qual se obtém o vector total $\{d^*\}$, que incorpora elementos dos vectores $\{d^*_L\}$ e $\{d^*_R\}$.

7.7.4 - Assentamentos de apoio.7.7.4.1 – Assentamento de apoio. Abordagem a partir do sistema de equações completo

Defina-se um sub-vector $\{d_a^*\}$ incluído no vector de deslocamentos global $\{d^*\}$. No sub-vector $\{d_a^*\}$ inscrevem-se os assentamentos de apoio impostas à estrutura segundo os graus de liberdade globais da estrutura livre (sem apoios). Em coerência a matriz de rigidez será subdividida como se mostra na equação de equilíbrio global:

$$\begin{bmatrix} K_{LL}^* & K_{LA}^* & K_{LR}^* \\ K_{AL}^* & K_{AA}^* & K_{AR}^* \\ K_{RL}^* & K_{RA}^* & K_{RR}^* \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} d_L^* \\ d_A^* \\ d_R^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L^* \\ F_A^* \\ F_R^* \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

Da primeira linha deste sistema de submatrizes podemos escrever:

$$[K_{LL}^*] * \{d_L^*\} = \{F_L^*\} - [K_{LA}^*] * \{d_A^*\} - [K_{LR}^*] * \{d_R^*\} \quad (7.40)$$

em que no 2º termo da igualdade, a terceira parcela é nula e a segunda parcela, designada por $\{F_A\}$, vale:

$$\{F_A^*\} = [K_{LA}^*] * \{d_A^*\} = \{\hat{1}\} * [K] * \{\hat{d}_A^*\} \quad (7.41(a))$$

$$[K_{LA}^*] * \{d_A^*\} = \{1 \ 0 \ 0\} * [K] * \begin{Bmatrix} 0 \\ d_A^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.41(b))$$

sendo :

$\{\hat{1}\} = \{1 \ 0 \ 0\}$ - um vector cujos elementos são unitários quando associados a graus de liberdade livres, e nulos para os restantes elementos (graus de liberdade com assentamentos ou restringidos);

$[K^*]$ - a matriz de rigidez global da estrutura;

$\{\hat{d}_A^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d_A^* \\ 0 \end{Bmatrix}$ - um vector cujos elementos são não nulos nos graus de liberdade associados a assentamentos de apoio, e cujo valor é o próprio assentamento.

Desenvolvendo (7.40) fica com o formato standard de (7.30) sendo possível a resolução da indeterminação cinemática da estrutura.

7.7.4.2 – Assentamento de apoio. Abordagem a partir do sub-sistema de equações $[K_{LL}]$

Imagine-se uma estrutura com n graus de liberdade “livres”, isto é, associados aos nós que não são os seus apoios. Para ela pode escrever-se a seguinte equação do método dos deslocamentos, em que a matriz de rigidez é, afinal, a matriz $[K_{LL}]$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}}_{[K_{LL}]} \begin{matrix} * \\ \left. \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{matrix} \right\} \end{matrix}, \quad \text{com} \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{matrix} \right\} - \begin{matrix} \left. \begin{matrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (7.42-7.43)$$

(Nota: Nesta secção abandonamos o “asterisco” (que simboliza coordenadas globais) porque simplifica a representação sem criar confusão ao leitor.)

Pretende-se impor uma deformação ou um assentamento de apoio, de valor d_a , segundo um dos possíveis graus de liberdade restringidos (num dos nós de apoio). Como esta deformação imposta surge segundo um grau de liberdade previamente restringido, é necessário acrescentar ao sistema de equações (7.42) mais uma equação de equilíbrio. Aparecerá então mais uma coluna $\{K_{ia}\}$ e uma linha $\{k_{aj}\}$ na matriz rigidez associadas a este grau de liberdade, assim como mais um elemento nos vectores $\{Q\}$ e $\{Q_0\}$, respectivamente os elementos Q_a e Q_{a0} .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & k_{1a} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & k_{2a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & k_{na} \\ k_{a1} & k_{a2} & \dots & k_{an} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \\ d_a \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{matrix} \right\} \end{matrix}, \quad \text{com} \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \\ Q_a \end{matrix} \right\} - \begin{matrix} \left. \begin{matrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \\ Q_{a0} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (7.44-45)$$

Como o deslocamento segundo esse grau de liberdade (d_a) é conhecido, podemos, em cada linha i do sistema, passar a parcela a ele respeitante $\{k_{ia} * d_a\}$, para o segundo termo, de onde se obterá:

$$\begin{matrix} \text{n colunas} \\ \text{n+1 linhas} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \\ k_{a1} & k_{a2} & \dots & k_{an} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \\ d_a \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \\ F'_a \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \text{com} \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \\ F'_a \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \\ F_a \end{matrix} \right\} - \begin{matrix} \left. \begin{matrix} k_{1a} * d_a \\ k_{2a} * d_a \\ \dots \\ k_{3a} * d_a \\ k_{na} * d_a \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (7.46-47)$$

Trata-se de um sistema de $n+1$ incógnitas, das quais n são os deslocamentos d_1 a d_n e ainda a reacção F'_{an} . Para resolver a indeterminação cinemática do problema basta-nos resolver o sistema das n primeiras equações com o vector de termos independentes alterado por (7.47), ou seja:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \dots \\ F'_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ \dots \\ Q_{n0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k_{1a} * d_a \\ k_{2a} * d_a \\ \dots \\ k_{na} * d_a \end{Bmatrix} \quad (7.48-49)$$

O processo apresentado exige que se determinem os coeficientes da coluna a da matriz de rigidez, $\{k_{ia}\}$, dispensando no entanto a determinação de F'_a . Embora seja o processo adequado para implementar em cálculo automático é trabalhoso.

7.7.4.3 – Assentamento de apoio. Abordagem a partir do método da penalização ou eliminação.

Um algoritmo alternativo consiste em juntar ao processo 7.8.4.1. um dos métodos: o da penalização ou o da eliminação. Consiste no seguinte:

(i) construir um vector $\{\hat{d}^*_A\}$ correspondente a $\{d^*\}$ mas em que os elementos não nulos são os assentamentos segundo cada G.L;

(ii) alterar o vector de termos independentes $\{F^*\}$ para $\{F^{*'}\}$, fazendo $\{F^{*'}\} = \{F^*\} - [K^*] \{\hat{d}^*_A\}$;

(iii) impor as condições de fronteira ao sistema de equações fazendo $[K^*]x\{d^*\} = \{F^{*'}\}$, optando:

(iv.a) pelo método da penalização- onde para além do especificado em 7.8.2 substituirá o termo F^*_i por $d^*_{Ai} * 10^{10}$, ou;

(iv.b) pelo método da eliminação- onde para além do especificado em 7.8.3 substituirá o termo F^*_i por d^*_{Ai} .

A ordem i corresponde ao assentamento associado ao G.L. i .

7.7.4.4 – Assentamento de apoio. Tratamento em algum tipo de software.

Um procedimento usado em certo tipo de software consiste em colocar uma mola de rigidez elevada segundo o grau de liberdade onde ocorre o assentamento de apoio (ou deformação exterior imposta), e aplicar segundo aquele grau de liberdade uma força que é o produto da rigidez da mola pelo valor do assentamento. Há que ter algum cuidado porque molas demasiado rígidas poderão causar erros numéricos (este assunto será revisto na matéria a seguir). A precisão do resultado é controlada comparando o valor final de deslocamento obtido com aquele que queremos impor.

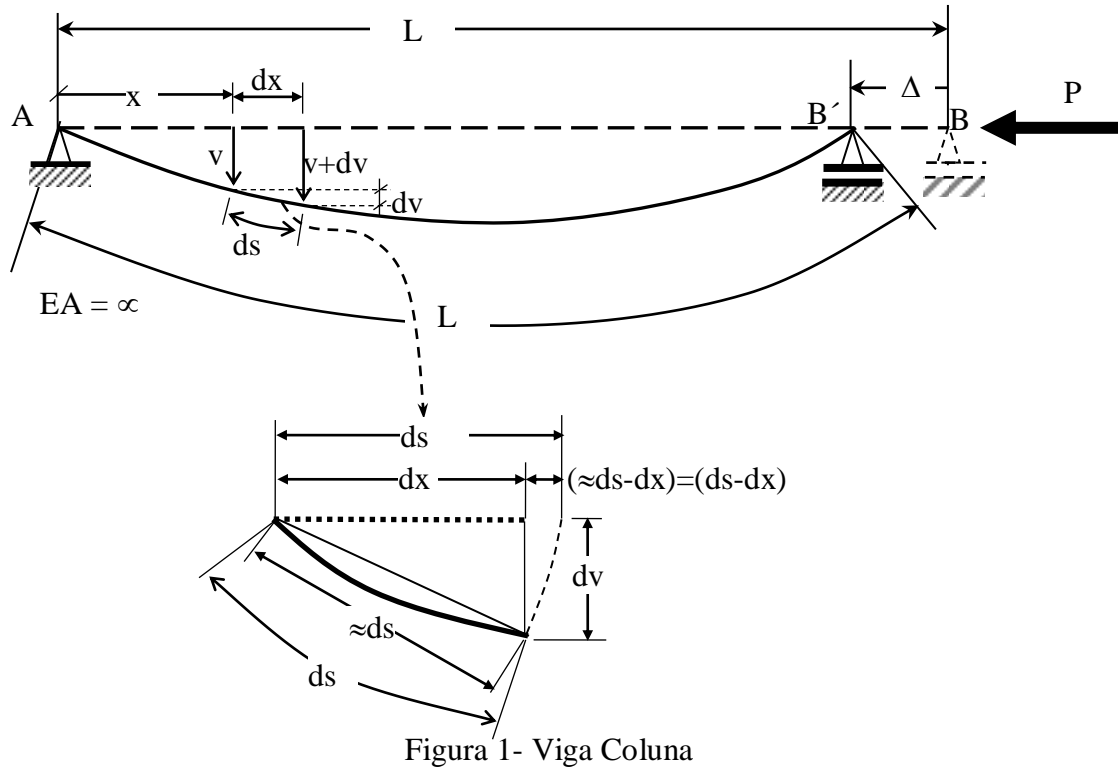
7.7.5 - Cálculo das reacções de apoio.

Após a determinação de $\{d^*\}$ por qualquer dos métodos descritos em 7.8.2 ou 7.8.3, se multiplicarmos a matriz original $[K^*]$ por $\{d^*\}$ obtemos o vector de forças nodais $\{F^*\}$. Os elementos deste último estão associados quer a graus de liberdade livres, que compõem o sub-vector $\{F^*_L\}$, quer a graus de liberdade restringidos, representados pelo sub-vector $\{F^*_R\}$. Mas como $\{F^*_R\} = \{Q^*_R\} - \{Q^*_{0R}\}$ (expressão 7.32) a reacção de apoio associada ao grau de liberdade i , pode ser determinada por $Q^*_{Ri} = F^*_{Ri} + Q^*_{0Ri}$ sendo Q^*_{0Ri} a força de fixação das acções de vão associadas aquele grau de liberdade.

7.9 - Viga Coluna

7.9.1 - Objectivo:

- (i)- Deduzir a matriz de rigidez deste tipo de elemento
- (ii)- Breve introdução à análise geométrica não linear



7.9.2- Deslocamento axial devido à flexão de uma barra esbelta

$(ds-dx)$ = variação de comprimento segundo x por cada dx .

$$\text{Para toda a barra } \Delta = \sum (ds - dx) = \int_0^L (ds - dx)$$

Mas:

$$\begin{aligned} ds-dx &= \sqrt{dx^2 - dv^2} - dx = dx \left[\sqrt{1 - \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 \right] = \dots \\ &= dx \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{dv}{dx}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{dv}{dx}\right)^6 + \dots \right)}_{\text{desprezar}} - 1 \right] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \end{aligned}$$

Logo:

$$\Delta = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

7.9.3- Energia Potencial Total de barra esbelta à compressão

$$V = U + V_e$$

(i) Energia potencial das forças internas

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx, \quad \text{mas } EA = \infty, \text{ e como } M = \frac{d^2v}{dx^2} EI = EI * v''$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI * (v'')^2 dx$$

(ii) Energia potencial das forças externas

$$V_e = -W_{ext} = -P * \Delta = -P * \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \quad \text{logo}$$

$$V_e = -\frac{P}{2} \int_0^L (v')^2 dx$$

(iii) Energia potencial total

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI * (v'')^2 - P * (v')^2 \right] dx$$

7.9.4- Matriz de Rigidez Aproximada

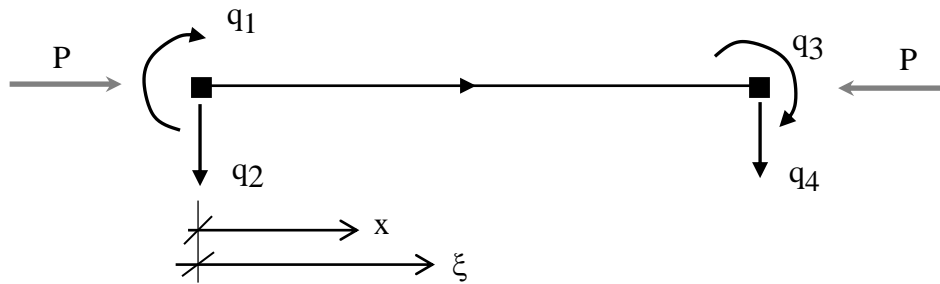


Figura 2 - Graus de liberdade do elemento viga-coluna

- Utilizar-se-á o Método de Rayleigh Ritz para escrever a energia potencial total do sistema.

- Note que os graus de liberdade estão ordenados por ordem distinta da que se adoptou para o elemento viga. Resulta apenas facto de na fonte bibliográfica ser assim [Dinar Camotim, A. J. Reis; "Estabilidade de Estruturas"]. Contudo em relação a esta fonte trocámos a designação dos deslocamentos e forças nodais para evitar confusões ao leitor dos apontamentos desta disciplina (E.F.)

(i)- Função de aproximação: é um polinómio do 3º grau:

$$v(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \cdot x \quad (1)$$

(ii)- Satisfação das Condições de Fronteira Cinemáticas

$$v_{,x}(x=0) = q_1, \quad v(x=0) = q_2 \quad (2)$$

$$v_{,x}(x=L) = q_3, \quad v(x=L) = q_4$$

(iv)- Cálculo dos parâmetros de deslocamento. Funções de Forma

- usando (1) em (2), e resolvendo o sistema de equações resultante os parâmetros de deslocamento ficarão:

$$a = \frac{1}{L^2} \left(q_1 + 2 \frac{q_2}{L} + q_3 - 2 \frac{q_4}{L} \right), \quad b = \frac{1}{L} \left(-q_1 - 3 \frac{q_2}{L} - q_3 + 3 \frac{q_4}{L} \right) \quad (3)$$

$$c = q_1, \quad d = q_2$$

- Substituir as definições (3) na função de aproximação (1), e simultaneamente fazer a seguinte mudança de coordenadas $\xi = x / L$, de onde se obtém o aspecto final da função de aproximação de deslocamentos verticais:

$$v(\xi) = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(\xi) * q_i \quad (4)$$

com :

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi) &= L * (\xi^3 - 2 * \xi^2 + \xi), & \Psi_2(\xi) &= (2 * \xi^3 - 3 * \xi^2 + 1), \\ \Psi_3(\xi) &= L * (\xi^3 - \xi^2), & \Psi_4(\xi) &= (-2 * \xi^3 + 3 * \xi^2), \end{aligned} \quad (5)$$

em que $0 \leq \xi \leq 1$, e que não são mais do que as funções de interpolação de Hermite em coordenadas naturais (ver equação 5.39).

(v)- Energia Potencial do Sistema

Substituir (4) na definição da energia potencial do sistema para este problema tipo.

(vi)- Equação de Equilíbrio.

Aplicando o Princípio Estacionário da Energia Potencial (PEEP) ou seja, fazendo a derivada $\frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} = 0$, para cada grau de liberdade q_i , obtemos o seguinte sistema de equações:

$$[[\mathbf{K}] - N * [\mathbf{G}]] * \{q\} = \{0\} \quad (6)$$

em que:

$[\mathbf{K}_t] = [[\mathbf{K}] - N * [\mathbf{G}]]$: matriz de Rigidez Total

$[\mathbf{K}]$: matriz de Rigidez Linear

$[\mathbf{G}]$: matriz de Rigidez Geométrica

P: Esforço axial na barra

ou:

$$K_{ij} = \int_0^L EI * \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} dx = \int_0^L EI * \Psi_{i,xx} * \Psi_{j,xx} dx \quad (7)$$

$$G_{ij} = \int_0^L \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} * \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} dx = \int_0^L \Psi_{i,x} * \Psi_{j,x} dx \quad (8)$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 6/L & 2 & -6/L \\ & 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 \\ & & 4 & -6/L \\ \text{Simétr.} & & & 12/L^2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2L/15 & 1/10 & -L/30 & -1/10 \\ & 6/(5L) & 1/10 & -6/(5L) \\ & & 2L/15 & -1/10 \\ \text{Simetr.} & & & 6/(5L) \end{bmatrix} \quad (9, 10)$$

- A rigidez total da barra decresce linearmente com o acréscimo do esforço axial.

7.9.5- Matriz de Rigidez Exacta

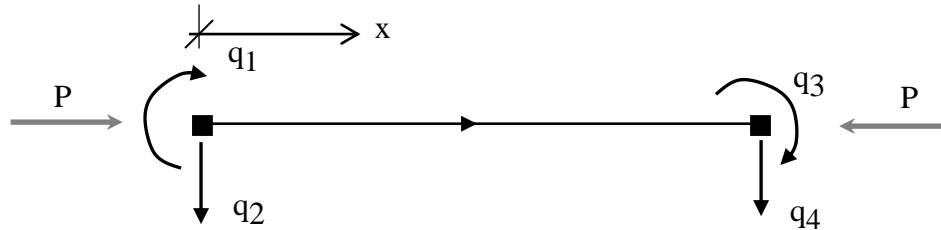


Figura 2 (rep.)- Graus de liberdade de elemento viga-coluna

- Utilizar-se-á novamente o Método de Rayleigh Ritz para escrever a energia potencial total do sistema.

(i) Função de aproximação: é uma função mista sinusoidal e polinomial com quatro parcelas:

$$v(x) = \alpha_1 * \text{sen}(kx) + \alpha_2 * \cos(kx) + \alpha_3 * x + \alpha_4 \quad (11)$$

com: $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$

(ii) Satisfação das Condições de Fronteira Cinemáticas

$$\begin{aligned} v_{,x}(x=0) &= q_1, & v(x=0) &= q_2 \\ v_{,x}(x=L) &= q_3, & v(x=L) &= q_4 \end{aligned} \quad (12)$$

(iv)-Cálculo dos parâmetros de deslocamento

- usando (11) em (12), obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] * \{\alpha\} &= \{q\} \Rightarrow \{\alpha\} = [\mathbf{A}]^{-1} * \{q\} \Leftrightarrow \dots \\ \dots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{A-B}{kA} & \frac{\text{sen}(kL)}{A} & \frac{-B}{kA} & \frac{-\text{sen}(kL)}{A} \\ \frac{C}{A} & \frac{B}{A} & \frac{D}{A} & \frac{-B}{A} \\ \frac{B}{A} & \frac{-k * \text{sen}(kL)}{A} & \frac{B}{A} & \frac{k * \text{sen}(kL)}{A} \\ \frac{A}{-C} & \frac{A}{A-B} & \frac{A}{-B} & \frac{A}{B} \\ \frac{A}{A} & \frac{A}{A} & \frac{kA}{A} & \frac{A}{A} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

com:

$$A = 2 * (\cos(kL) - 1) + kL * \text{sen}(kL), \quad B = \cos(kL) - 1,$$

$$C = kL * \text{sen}(kL) - \text{sen}(kL), \quad D = \text{sen}(kL) - kL.$$

- Resolvendo o sistema (n) em ordem a α_i , a função de aproximação de deslocamentos fica:

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 \Psi_i(x) * q_i \quad (14)$$

com :

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= \frac{A-B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{C}{kA} \cos(kx) + \frac{B}{A} x - \frac{C}{kA}, \\
\Psi_2(x) &= \frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) + \frac{B}{A} \cos(kx) - \frac{k \text{sen}(kL)}{A} x + \frac{A-B}{A} \\
\Psi_3(x) &= -\frac{B}{kA} \text{sen}(kx) + \frac{D}{kA} \cos(kx) + \frac{B}{A} x - \frac{D}{kA} \\
\Psi_4(x) &= -\frac{\text{sen}(kL)}{A} \text{sen}(kx) - \frac{B}{A} \cos(kx) + \frac{k \text{sen}(kL)}{A} x + \frac{B}{A}
\end{aligned} \tag{15}$$

(v)- Energia Potencial do Sistema

Substituir (14) na definição da energia potencial do sistema para este problema tipo.

(vi)- Equação de Equilíbrio.

Aplicando o Princípio Estacionário da Energia Potencial (PEEP), obtemos o sistema de equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \left[\mathbf{K}^t \right]^* \{q\} = \{0\} \tag{16}$$

em que:

$\left[\mathbf{K}^t \right]$: matriz de rigidez total exacta, e vale,

$$\left[\mathbf{K}^t \right] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 * \phi_3 & 6 * \phi_2 / L & 2 * \phi_4 & -6 * \phi_2 / L \\ & 12 * \phi_1 / L^2 & 6 * \phi_2 / L & -12 * \phi_1 / L^2 \\ & & 4 * \phi_3 & -6 * \phi_2 / L \\ \text{Simétrica} & & & 12 * \phi_1 / L^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Que se distingue da matriz de rigidez (9) por incluir as funções ϕ_i , designadas por funções de estabilidade, valem:

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{\beta^2}{3 * (1 - \beta * \cotg(\beta))}, & \phi_1 &= \beta * \phi_2 * \cotg(\beta), & \phi_3 &= \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta * \cotg(\beta), \\
\phi_4 &= \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta * \cotg(\beta)
\end{aligned} \tag{18}$$

com:

$$\beta = \frac{kL}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_E}} \tag{19}$$

e N_E (ou P_E) a Carga Crítica de Euler de uma barra biarticulada de comprimento L

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{20}$$

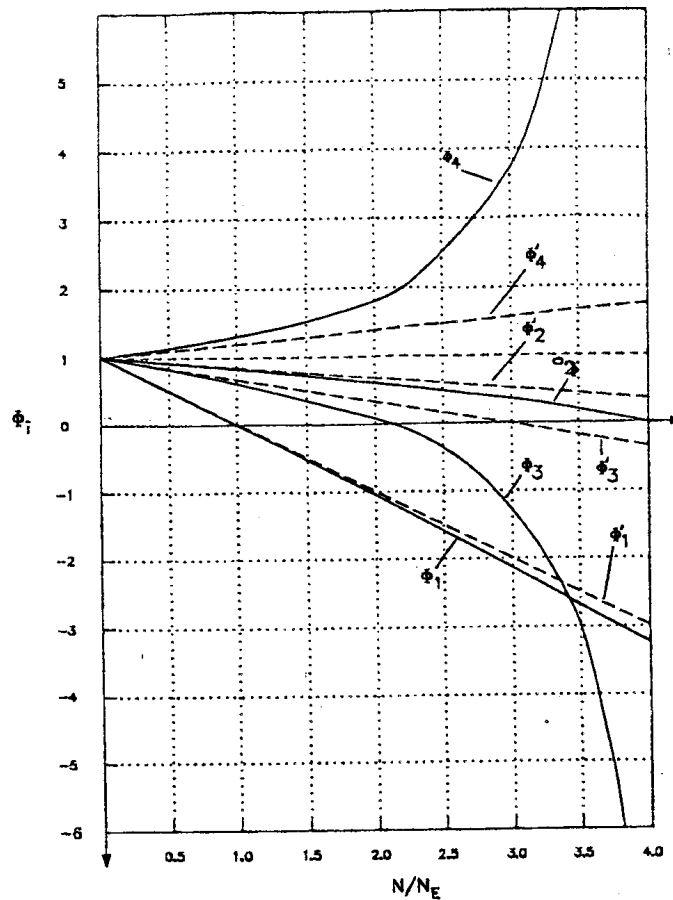


Figura 3- Funções de estabilidade e respectivas aproximações lineares

(adaptado de: António Reis, Dinar Camotim, "Estabilidade Estrutural", McGraw Hill, 2000)

Como se constata a matriz de rigidez total depende do nível de esforço axial da barra, N , de uma forma altamente não linear devido às características das funções de estabilidade. O efeito de N em compressão reduz a rigidez das barras. As funções de estabilidade são diferentes se N for de tracção, mas como esse caso é favorável, porque aumenta a sua rigidez de flexão, adopta-se, para efeitos práticos, $\phi_i=1$.

Se derivarmos as funções de estabilidade em relação ao esforço axial, e na origem, obtemos rectas tangentes na origem (funções ϕ'_i), cujo valor são os coeficientes a matriz de rigidez geométrica aproximada, como pode ser visto da figura 3.

De modo a se obterem resultados aceitáveis quando se trabalha com matrizes elementares aproximadas, é conveniente que a relação N/N_E (ou P/P_E) seja pequena (≤ 0.4 , ver figura 3), bastando para tal subdividir em três sub-barras cada barra fortemente comprimida.

7.9.6- Comportamento Geometricamente não Linear

Numa estrutura sujeita a uma determinada combinação de acções cada das barras terá um esforço axial particular. De modo a fazer depender os esforços axiais de todas as barras de uma única variável, parametriza-se o carregamento, ou seja, multiplicam-se as cargas daquela combinação de acções por um parâmetro de carga, λ . Consequentemente, todos os esforços, nomeadamente os esforços axiais ficam dependentes deste parâmetro, porque como se sabe, existe uma relação de proporcionalidade linear entre a combinação de acções e os esforços.

A vantagem da utilização do parâmetro de carga é poder variá-lo gradualmente, simulando desta forma acréscimo gradual do esforço axial, propriedade necessária para a análise que a seguir se explica. Como é previsível quando λ tomar o valor unitário significa que toda a combinação de acções está aplicada à estrutura.

Do exposto nos parágrafos anteriores, podemos agora afirmar que matrizes de rigidez elementares totais que dependiam de N se podem agora escrever como dependentes de λ . Esta dependência era, como se viu, (i) linear no caso da matriz de rigidez aproximada, e (ii) altamente não linear, no caso da matriz de rigidez exacta. Este comportamento mantém-se quando se procede, agora, à construção por espalhamento e assemblagem da matriz de rigidez global e vector de forças global, ficando a equação de equilíbrio global da estrutura com o seguinte aspecto:

$$\left[\mathbf{K}^t(\phi(\lambda)) \right] * \{u\} = \{F(\lambda)\} \quad (21)$$

Afinal, o parâmetro de carga λ mede o *nível* de esforço axial na estrutura.

Ora, o sistema de equações (v) tem que ser resolvido iterativamente, isto é, fazendo variar gradualmente λ (em princípio de zero a um), porque quer os coeficientes da matriz de rigidez $\left[\mathbf{K}^t(\phi(\lambda)) \right]$ quer o termo independente do sistema de equações $\{F(\lambda)\}$ dependem do parâmetro de carga λ . Por este motivo os deslocamentos observados $\{u\}$ têm uma variação não linear, ou seja, não são directamente proporcionais às cargas aplicadas, dizendo-se que a estrutura tem assim um comportamento não linear. Entretanto as estruturas esbeltas são muito deformáveis, sendo que, os deslocamentos $\{u\}$ não são desprezáveis visto o seu valor interferir nos resultados dos esforços finais. O comportamento diz-se define-se então como geometricamente não linear, deixando de ser válida a hipótese dos "pequenos deslocamentos" (ver figura 4).

De uma forma aproximada podemos afirmar:

Seja : $M_I = P * b$, e Δ como resultado da aplicação de P.

→ Se $P * \Delta < 10 \% * M_I$ então, a análise pode ser realizada linearmente

→ Se $P * \Delta > 10 \% * M_I$ então, a análise é geometricamente não linear

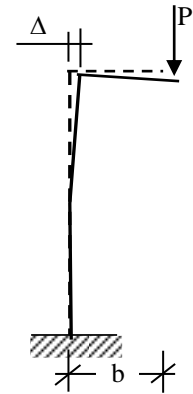


Figura 4

7.9.7- Carga Crítica de Colapso por Instabilidade

Imagine que as cargas vão sendo aumentadas gradualmente e indefinidamente por intermédio de λ . A matriz de rigidez degradar-se-á progressivamente até que para um determinado valor de λ um ou mais dos coeficientes principais de rigidez total se anula e a estrutura (ou parte dela) se transforma num mecanismo. Atinge-se assim o parâmetro de carga crítica (teórico) da estrutura, λ_{cr} . Nesse instante estão associados os esforços axiais críticos em cada barra, N_{cr} . Como é previsível, para haver segurança estrutural λ_{cr} deverá ser superior a um.

O cálculo do parâmetro de carga crítica de uma estrutura é um problema de "valores e vectores próprios", em que o valor próprio mais baixo é o parâmetro de carga crítica e o vector próprio representa o modo de deformação associado. Pode ser calculado a partir da matriz de rigidez exacta ou aproximada.

Se partirmos da matriz de rigidez global exacta o parâmetro de carga crítica pode ser obtido pela anulação do determinante:

$$| [K^t(\lambda)] | = 0$$

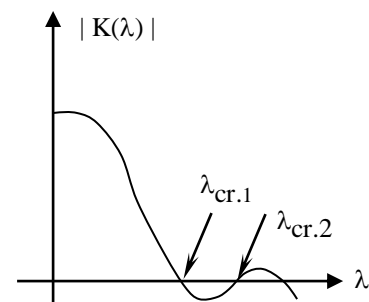


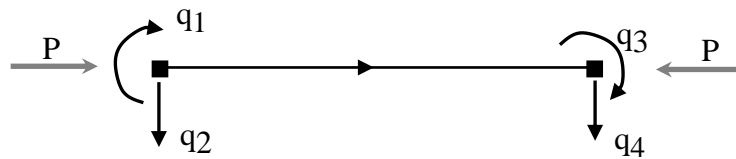
Figura 5- Carga crítica

Partindo das matrizes de rigidez elementares aproximadas, a equação característica obtém-se de:

$$| [[K]-\lambda*[G]]_{global} | = 0$$

Neste tipo de problemas de estabilidade apenas nos interessa um só valor próprio, o primeiro, que é o menor.

• Elemento Viga-Coluna Encastrado-Encastrado



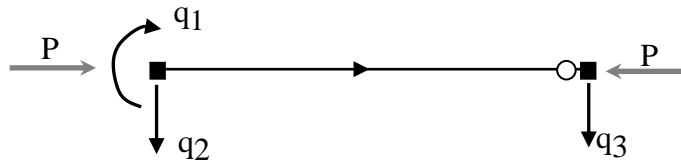
Matriz de Rigidez Exacta

$$[K^t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4*\phi_3 & 6*\phi_2/L & 2*\phi_4 & -6*\phi_2/L \\ 12*\phi_1/L^2 & 6*\phi_2/L & -12*\phi_1/L^2 & \\ & 4*\phi_3 & -6*\phi_2/L & \\ \text{Simétrica} & & & 12*\phi_1/L^2 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Aproximada

$$[K_{ij}^t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 6/L & 2 & -6/L \\ & 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 \\ & & 4 & -6/L \\ \text{Simétr.} & & & 12/L^2 \end{bmatrix} - N^* \begin{bmatrix} 2L/15 & 1/10 & -L/30 & -1/10 \\ & 6/(5L) & 1/10 & -6/(5L) \\ & & 2L/15 & -1/10 \\ \text{Simetr.} & & & 6/(5L) \end{bmatrix}$$

• Elemento Viga-Coluna Encastrado-Rotulado



Por um processo de condensação de graus de liberdade (ou mudança de base) constroem-se as matrizes de rigidez exacta e aproximada deste tipo de elemento finito.

Matriz de Rigidez Exacta

$$[K_{ij}^t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} & \frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) & -\frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) \\ \cdot & \frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & -\frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{3\phi_4}{2\phi_3} \right) \\ \text{Sim.} & \cdot & \frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Aproximada

$$[K_{ij}^t] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 3 & 3/L & -3/L \\ \cdot & 3/L^2 & -3/L^2 \\ \text{Sim.} & \cdot & 3/L \end{bmatrix} - N^* \begin{bmatrix} L/5 & 1/5 & -1/5 \\ \cdot & 6/(5L) & -6/(5L) \\ \text{Sim.} & \cdot & 6/(5L) \end{bmatrix}$$

Funções de Estabilidade

N / N _E	φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	N / N _E	φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄
0.00	1	1	1	1	2.00	-1.0337	0.6113	0.0357	1.7624
0.05	0.9506	0.9917	0.9834	1.0084	2.05	-1.0865	0.5996	-0.0034	1.8054
0.10	0.9012	0.9834	0.9667	1.0170	2.10	-1.1395	0.5877	-0.0439	1.8510
0.15	0.8517	0.9751	0.9497	1.0259	2.15	-1.1926	0.5757	-0.0860	1.8993
0.20	0.8021	0.9666	0.9324	1.0350	2.20	-1.2458	0.5636	-0.1299	1.9506
0.25	0.7525	0.9581	0.9149	1.0445	2.25	-1.2992	0.5514	-0.1755	2.0052
0.30	0.7028	0.9496	0.8972	1.0543	2.30	-1.3527	0.5390	-0.2232	2.0633
0.35	0.6531	0.9409	0.8792	1.0644	2.35	-1.4063	0.5265	-0.2730	2.1253
0.40	0.6033	0.9323	0.8610	1.0748	2.40	-1.4601	0.5138	-0.3251	2.1916
0.45	0.5534	0.9235	0.8424	1.0856	2.45	-1.5141	0.5010	-0.3799	2.2626
0.50	0.5035	0.9147	0.8236	1.0968	2.50	-1.5682	0.4880	-0.4375	2.3388
0.55	0.4534	0.9058	0.8045	1.1084	2.55	-1.6225	0.4748	-0.4981	2.4207
0.60	0.4034	0.8968	0.7851	1.1204	2.60	-1.6769	0.4615	-0.5622	2.5090
0.65	0.3532	0.8878	0.7653	1.1328	2.65	-1.7315	0.4480	-0.6301	2.6044
0.70	0.3030	0.8787	0.7452	1.1456	2.70	-1.7863	0.4344	-0.7023	2.7077
0.75	0.2527	0.8695	0.7248	1.1590	2.75	-1.8412	0.4206	-0.7791	2.8199
0.80	0.2023	0.8603	0.7040	1.1728	2.80	-1.8964	0.4066	-0.8612	2.9421
0.85	0.1518	0.8509	0.6828	1.1872	2.85	-1.9517	0.3924	-0.9493	3.0756
0.90	0.1013	0.8415	0.6612	1.2021	2.90	-2.0072	0.3780	-1.0441	3.2222
0.95	0.0507	0.8320	0.6393	1.2176	2.95	-2.0629	0.3634	-1.1466	3.3835
1.00	0.0000	0.8225	0.6169	1.2337	3.00	-2.1188	0.3486	-1.2580	3.5618
1.05	-0.0508	0.8128	0.5940	1.2505	3.05	-2.1749	0.3336	-1.3796	3.7600
1.10	-0.1016	0.8031	0.5707	1.2679	3.10	-2.2312	0.3184	-1.5130	3.9812
1.15	-0.1526	0.7933	0.5469	1.2861	3.15	-2.2878	0.3030	-1.6604	4.2297
1.20	-0.2036	0.7833	0.5225	1.3050	3.20	-2.3445	0.2874	-1.8243	4.5106
1.25	-0.2547	0.7733	0.4977	1.3247	3.25	-2.4015	0.2715	-2.0080	4.8304
1.30	-0.3060	0.7633	0.4722	1.3453	3.30	-2.4588	0.2554	-2.2157	5.1975
1.35	-0.3573	0.7531	0.4462	1.3668	3.35	-2.5163	0.2390	-2.4530	5.6229
1.40	-0.4087	0.7428	0.4196	1.3893	3.40	-2.5740	0.2224	-2.7271	6.1212
1.45	-0.4602	0.7324	0.3922	1.4128	3.45	-2.6320	0.2055	-3.0480	6.7124
1.50	-0.5118	0.7219	0.3642	1.4373	3.50	-2.6903	0.1883	-3.4297	7.4245
1.55	-0.5635	0.7114	0.3355	1.4631	3.55	-2.7488	0.1709	-3.8925	8.2978
1.60	-0.6153	0.7007	0.3060	1.4901	3.60	-2.8077	0.1532	-4.4667	9.3930
1.65	-0.6672	0.6899	0.2757	1.5184	3.65	-2.8668	0.1352	-5.1998	10.8052
1.70	-0.7192	0.6790	0.2445	1.5481	3.70	-2.9262	0.1169	-6.1713	12.6932
1.75	-0.7713	0.6680	0.2124	1.5793	3.75	-2.9860	0.0983	-7.5240	15.3427
1.80	-0.8235	0.6569	0.1793	1.6122	3.80	-3.0461	0.0793	-9.5436	19.3251
1.85	-0.8759	0.6457	0.1451	1.6468	3.85	-3.1065	0.0600	-12.8969	25.9737
1.90	-0.9284	0.6343	0.1099	1.6833	3.90	-3.1673	0.0404	-19.5837	39.2885
1.95	-0.9810	0.6229	0.0734	1.7217	3.95	-3.2284	0.0204	-39.6042	79.2695
					4.00	-3.28987	-4.3E-10	1.91E+09	-3.8E+09

$$\beta = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_E}}, \quad N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

8.1. Elementos Finitos em Estruturas Contínuas

Numa estrutura contínua temos que sub dividir artificialmente a estrutura em partes mais pequenas de comportamento matematicamente bem conhecido, os elementos finitos, e ligá-los pelos nós. A continuidade da variável primária, que em problemas de mecânica dos sólidos são em geral os deslocamentos, é garantida pelo menos nos nós. Escolhendo de um modo criterioso as funções de aproximação de deslocamentos consegue-se por vezes garantir a continuidade total ou parcial das funções deslocamento ao longo da fronteira. Um elemento finito está bem simulado se, mesmo que só permita a continuidade nodal, consiga representar bem a estrutura real como uma unidade com continuidade global.

As estruturas aporticadas diferem das contínuas fundamentalmente no modo como se faz a subdivisão em elementos finitos, e no modo como se calcula a matriz de rigidez.

Uma subdivisão da estrutura contínua em elementos finitos mais pequenos, conduz a uma maior precisão, maior número de elementos, mais tempo de cálculo e de análise, e por isso mais caro. A subdivisão deve ser gradual concentrando mais elementos junto de cargas pontuais, apoios pontuais, aberturas pequenas e cantos. As cargas actuantes nas estruturas contínuas são em geral substituídas por cargas nodais equivalentes. É sempre aconselhável realizar um estudo de convergência de resultados, alterando a forma da malha e/ou variando o número de elementos.

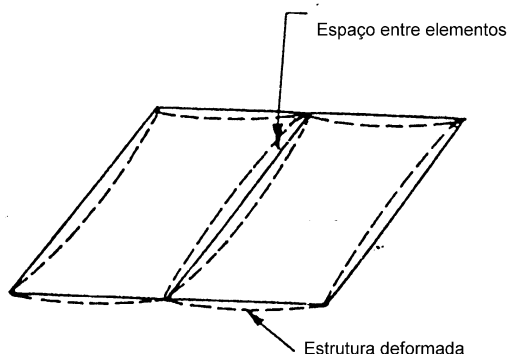


Figura 8.1- Tipo de deformação onde se assegura apenas continuidade de deslocamentos nos nós [11].

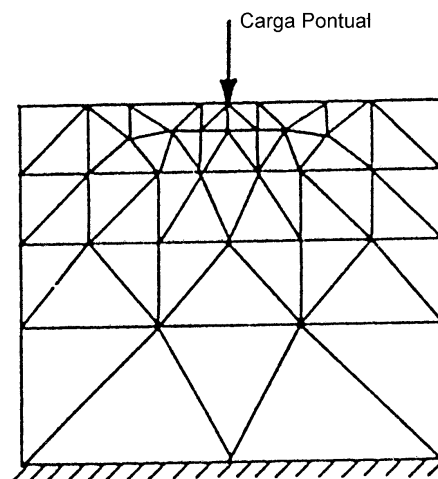


Figura 8.2 - Malha gradual[11]

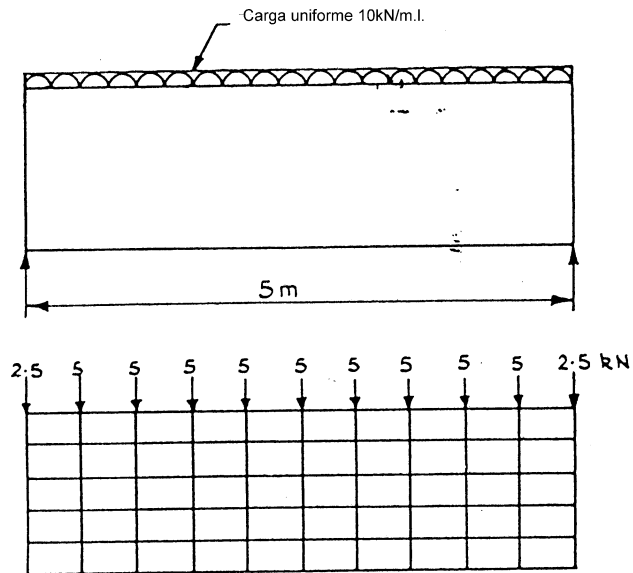


Figura 8.3 - Forças nodais representando uma carga distribuída [11]

8.2 - Elemento Triangular de Placa

Nos problemas de elasticidade plana intervêm estruturas contínuas carregadas no seu plano. O problema subdivide-se em duas classes: (i) problemas de tensões planas e (ii) problemas de deformações planas. São problemas de tensões planas as almas de vigas sujeitas a tensões normais devidas à flexão e tangenciais devidas ao esforço de corte, uma chapa com um buraco no seu seio sujeita à tracção pura, etc. São problemas de deformação plana a secção transversal de uma barragem longa sujeita ao seu peso próprio e impulso das águas, a secção transversal de um tubo longo sob pressão, etc. As relações constitutivas (entre tensões e deformações) destes dois casos já foram tratadas no capítulo de introdução à teoria de elasticidade.

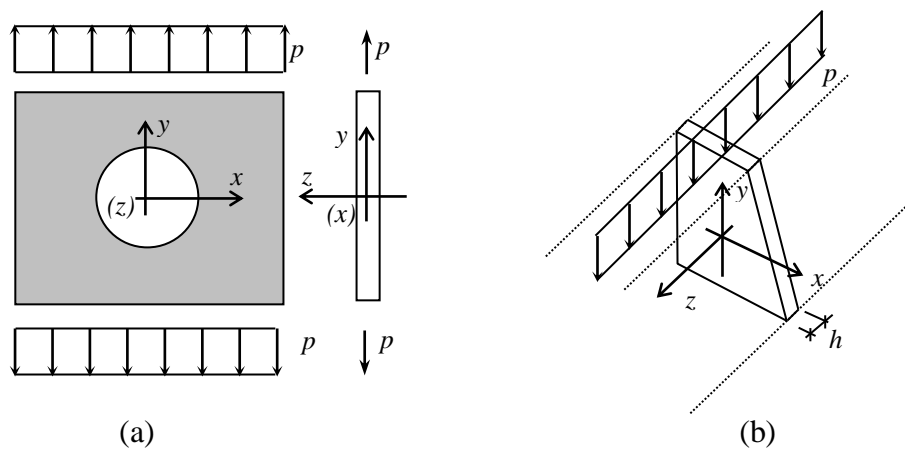


Figura 8.4 - a) Estado plano de tensão, b) Estado plano de deformação

Vamos deduzir a matriz de rigidez de um elemento finito triangular de placa de três nós. A metodologia é válida quer para o estado plano de tensões como para o estado plano de deformações, diferindo apenas na etapa 5 onde se estabelecem as relações constitutivas.

No caso do estado plano de tensões, este elemento de três nós diz-se de deformação constante (CST- constant strain triangle [1]). Relembra-se que as relações constitutivas para um elemento no estado plano de tensões é:

$$\{\sigma\} = [D] * \{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.38\text{-rep.})$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

$$\text{com:} \quad d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad d_{12} = d_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad \text{e} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8.2 \text{ a } 8.4)$$

8.3 - Cálculo da Matriz de rigidez elementar de um elemento finito triangular de placa de deformação constante.

PASSO 1: (i) Escolhe-se um sistema de coordenadas conveniente, que neste caso é o sistema global XoY (por conveniência adoptam-se as letras minúsculas xoy), (ii) numeram-se os nós do elemento, no sentido anti-horário, (iii) definem-se os elementos do vector de deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$, e, (iv) os elementos do vector de forças nodais $\{F^e\}$.

- coordenadas dos nós 1, 2 e 3: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .

- vectores de deslocamentos nodais e de forças nodais:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \quad (8.5 \text{ e } 8.6)$$

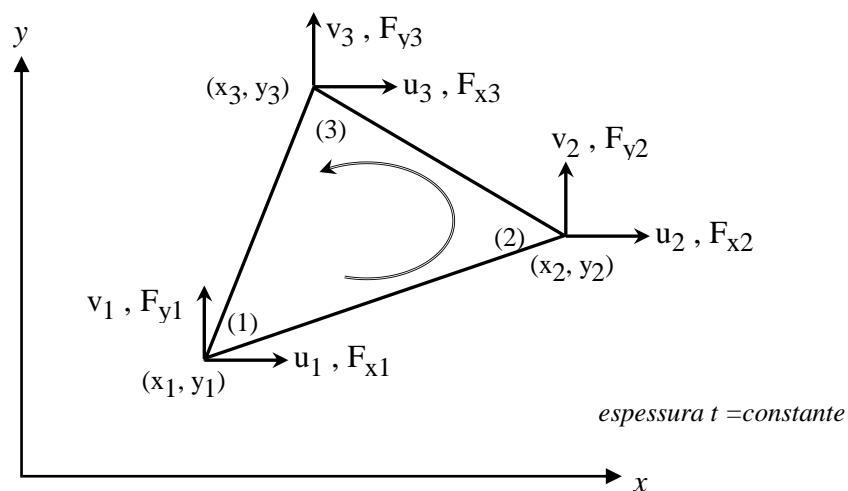


Figura 8.5 - Elemento finito triangular de placa

Cada ponto da placa, incluindo cada nó, têm dois graus de liberdade, respectivamente as translações segundo x e y. Por isso a placa apresenta seis graus de liberdade, os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$, os quais se relacionarão com as forças nodais $\{F^e\}$ através da matriz de rigidez elementar $[k^e]$.

PASSO 2: Geração do Elemento Finito

PASSO 2.1 : Escolher a função deslocamento, $[f(x,y)]$. Explicitar os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$

A função deslocamento define o deslocamento de qualquer ponto no interior do corpo de coordenadas (x,y) . No plano o vector deslocamento tem duas componentes, $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Como há seis graus de liberdade a(s) função(ões) deslocamento(s) terá seis parcelas assim distribuídas:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (8.7)$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (8.8)$$

Como se verifica cada componente de deslocamento é linear em x e y , e surgem seis coeficientes de deslocamento desconhecidos, α_i (com $i=1$ a 6). As funções deslocamento devem garantir a continuidade de deslocamentos no interior do elemento, e se possível entre elementos por intermédio do seu lado fronteira.

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] * \{\alpha\} \quad (8.9)$$

Explicitam-se agora os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_2) \\ v(x_2, y_2) \\ u(x_3, y_3) \\ v(x_3, y_3) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\delta^e\} = [A] * \{\alpha\} \quad (8.10)$$

Invertendo a matriz $[A]$ podemos escrever:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (8.11)$$

que substituído em (8.9) nos permite escrever os deslocamentos no interior da placa em função dos deslocamentos nodais:

$$\boxed{\{\delta(x,y)\} = \{f(x,y)\} * [A]^{-1} * \{\delta^e\}} \quad (8.12)$$

ou:

$$\boxed{\{\delta(x,y)\} = [N(x,y)] * \{\delta^e\}} \quad (8.13)$$

Elaborando os cálculos temos:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} * \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ \hline 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{array} \right] \quad (8.14)$$

onde :

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 2 \times \text{Área do Triângulo} \quad (8.15)$$

De uma forma mais compacta, em notação indicial, teríamos:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} * \left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ \hline 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{array} \right] \quad (8.16)$$

com:

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \begin{cases} \text{se } i = 1, j = 2 \text{ e } k = 3, \\ \text{se } i = 2, j = 3 \text{ e } k = 1, \\ \text{se } i = 3, j = 1 \text{ e } k = 2. \end{cases} \quad (8.17)$$

A expressão (8.12) pode finalmente escrever-se:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} * \frac{1}{2\Delta} * \left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ \hline 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{array} \right] * \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8.18)$$

$$\{\delta(x, y)\} = [N(x, y)] \{u^e\} \quad (8.19)$$

com:
$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} * \frac{1}{2\Delta} * \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ \hline 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (8.20(a))$$

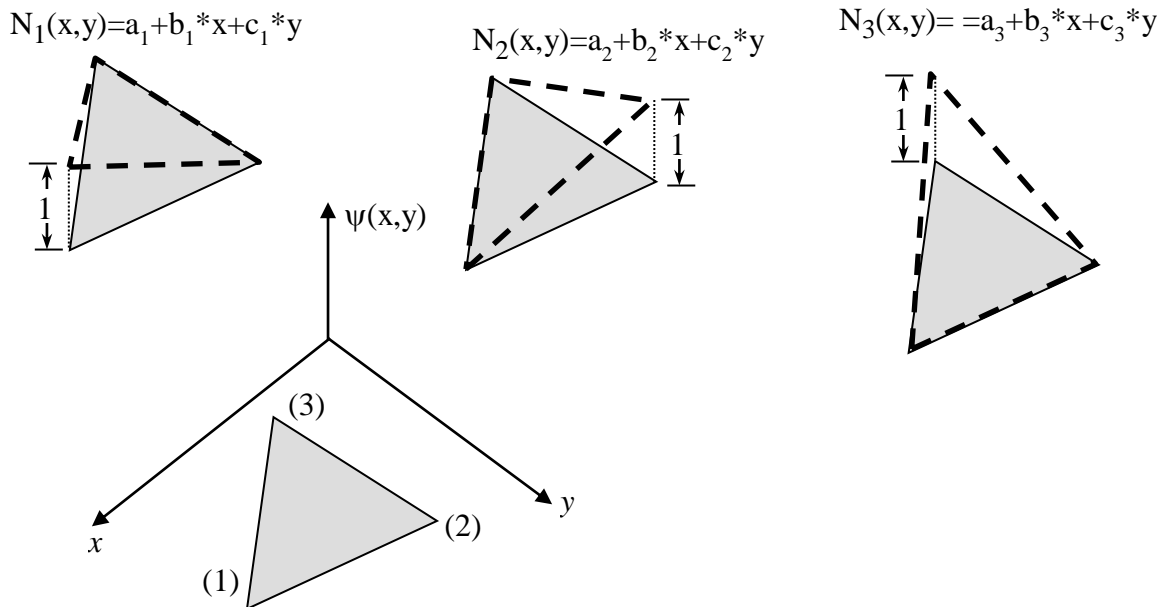


Figura 8.6 - Funções de forma.

ou, sinteticamente:

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \quad (8.20(b))$$

com:
$$N_i(x,y) = a_i + b_i * x + c_i * y \quad (8.20(c))$$

PASSO 2.2 - Relações Cinemáticas ou Relações - Deformação deslocamento.

Explicitar as deformações no interior do corpo em função dos deslocamentos no interior e posteriormente em função dos deslocamentos nodais. Em problemas planos de tensões e deformações, as relações cinemáticas são:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8.21)$$

Para as funções de deslocamento adotadas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (8.22)$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [L] * \{\alpha\} \quad (8.23)$$

Substituindo (8.11) em (8.23) fica:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [L] * [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (8.24)$$

$$\boxed{\{\varepsilon(x,y)\} = [B] * \{\delta^e\}} \quad (8.25)$$

A matriz [B] é:

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

que em notação indicial se escreve:

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

com: $b_i = y_j - y_k$, e, $c_i = x_k - x_j$.

Como se verifica os coeficientes da matriz [B] são constantes, e por via da expressão (8.25) se conclui que as deformações no interior do elemento são sempre constantes. Daqui surge a razão da designação de "deformação constante" para caracterizar este tipo de elemento finito.

PASSO 2.3 - Relações Constitutivas ou Relações Tensão deformação.

Explicitar as tensões em qualquer ponto no interior do elemento $\{\sigma(x,y)\}$ em função das deformações $\{\varepsilon(x,y)\}$ e posteriormente em função dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$.

Como se sabe esta relação escreve-se:

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] * \{\varepsilon(x,y)\} \quad (8.28)$$

sendo [D] o operador das relações constitutivas o qual é distinto consoante se trate de um problema de tensão plana ou de deformação plana. Atendendo a (8.22) podemos escrever (8.25) em termos dos deslocamentos nodais:

$$\boxed{\{\sigma(x,y)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\}} \quad (8.29)$$

$$[D]^* [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} d_{11}(y_2 - y_3) & d_{12}(x_3 - x_2) & d_{11}(y_3 - y_1) & d_{12}(x_1 - x_3) & d_{11}(y_1 - y_2) & d_{12}(x_2 - x_1) \\ d_{21}(y_2 - y_1) & d_{22}(x_3 - x_2) & d_{21}(y_3 - y_1) & d_{22}(x_1 - x_3) & d_{21}(y_1 - y_2) & d_{22}(x_2 - x_1) \\ d_{33}(x_3 - x_2) & d_{33}(y_2 - y_3) & d_{33}(x_1 - x_3) & d_{33}(y_3 - y_1) & d_{33}(x_2 - x_1) & d_{33}(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Em notação indicial:

$$[D]^* [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} d_{11}b_1 & d_{12}c_1 & d_{11}b_2 & d_{12}c_2 & d_{11}b_3 & d_{12}c_3 \\ d_{21}b_1 & d_{22}c_1 & d_{21}b_2 & d_{22}c_2 & d_{21}b_3 & d_{22}c_3 \\ d_{33}c_1 & d_{33}b_1 & d_{33}c_2 & d_{33}b_2 & d_{33}c_3 & d_{33}b_3 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

Como se constata também as tensões são constantes no elemento.

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio.

Explicitar as forças nodais $\{F^e\}$ em função dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$. Como se sabe esta relação entre forças e deslocamentos nodais é conseguida, de entre vários processos, pela aplicação do Teorema dos Deslocamentos Virtuais, de onde se obtém:

$$\{F^e\} = \left[\int_V [B]^T * [D] * [B] dV \right] * \{\delta^e\} \quad (8.32)$$

Como os elementos $[D]$ e $[B]$ são constantes o integral fica:

$$\int_V [B]^T * [D] * [B] dV = [B]^T * [D] * [B] * \text{área } \Delta * \text{espessura } t$$

Logo:

$$[k^e] = [B]^T * [D] * [B] * \text{área } \Delta * \text{espessura } t \quad (8.33)$$

A matriz $[K^e]$ apresenta-se desenvolvida na figura 8.7. Em alternativa em notação indicial é:

$$[K^e] = \frac{t}{4\Delta} * \begin{bmatrix} b_1^2 \cdot d_{11} + c_1^2 \cdot d_{33} & c_1 \cdot b_1 \cdot (d_{12} + d_{33}) & b_1 \cdot d_{11} \cdot b_2 + c_1 \cdot d_{33} \cdot c_2 & b_1 \cdot d_{12} \cdot c_2 + c_1 \cdot d_{33} \cdot b_2 & b_1 \cdot d_{11} \cdot b_3 + c_1 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_1 \cdot d_{12} \cdot c_3 + c_1 \cdot d_{33} \cdot b_3 \\ c_1 \cdot b_1 \cdot (d_{21} + d_{33}) & c_1^2 \cdot d_{22} + b_1^2 \cdot d_{33} & c_1 \cdot d_{21} \cdot b_2 + b_1 \cdot d_{33} \cdot c_2 & c_1 \cdot d_{22} \cdot c_2 + b_1 \cdot d_{33} \cdot b_2 & c_1 \cdot d_{21} \cdot b_3 + b_1 \cdot d_{33} \cdot c_3 & c_1 \cdot d_{22} \cdot c_3 + b_1 \cdot d_{33} \cdot b_3 \\ b_1 \cdot d_{11} \cdot b_2 + c_1 \cdot d_{33} \cdot c_2 & b_2 \cdot d_{12} \cdot c_1 + b_1 \cdot d_{33} \cdot c_2 & b_2^2 \cdot d_{11} + c_2^2 \cdot d_{33} & c_2 \cdot b_2 \cdot (d_{12} + d_{33}) & b_2 \cdot d_{11} \cdot b_3 + c_2 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_2 \cdot d_{12} \cdot c_3 + c_2 \cdot d_{33} \cdot b_3 \\ c_2 \cdot d_{21} \cdot b_1 + c_1 \cdot d_{33} \cdot b_2 & c_1 \cdot d_{22} \cdot c_2 + b_1 \cdot d_{33} \cdot b_2 & c_2 \cdot b_2 \cdot (d_{21} + d_{33}) & c_2^2 \cdot d_{22} + b_2^2 \cdot d_{33} & c_2 \cdot d_{21} \cdot b_3 + b_2 \cdot d_{33} \cdot c_3 & c_2 \cdot d_{22} \cdot c_3 + b_2 \cdot d_{33} \cdot b_3 \\ b_1 \cdot d_{11} \cdot b_3 + c_1 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_3 \cdot d_{12} \cdot c_1 + b_1 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_2 \cdot d_{11} \cdot b_3 + c_2 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_3 \cdot d_{12} \cdot c_2 + b_2 \cdot d_{33} \cdot c_3 & b_3^2 \cdot d_{11} + c_3^2 \cdot d_{33} & c_3 \cdot b_3 \cdot (d_{12} + d_{33}) \\ c_3 \cdot d_{21} \cdot b_1 + c_1 \cdot d_{33} \cdot b_3 & c_1 \cdot d_{22} \cdot c_3 + b_1 \cdot d_{33} \cdot b_3 & c_3 \cdot d_{21} \cdot b_2 + c_2 \cdot d_{33} \cdot b_3 & c_2 \cdot d_{22} \cdot c_3 + b_2 \cdot d_{33} \cdot b_3 & c_3 \cdot b_3 \cdot (d_{21} + d_{33}) & c_3^2 \cdot d_{22} + b_3^2 \cdot d_{33} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

O vector de forças de massa é:

$$\{F_m^e\} = \int_V [N(x, y)]^T * \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} dV = \frac{A * t}{3} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (8.35)$$

sendo A a área do triângulo e t a espessura.

$$[K^e] = \frac{t}{4\Delta}$$

$d_{11}(y_2 - y_3)^2 + d_{33}(x_3 - x_2)^2$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$	$d_{11}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)$	$d_{12}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1)$	$d_{11}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$
$d_{21}(y_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$	$d_{22}(x_3 - x_2)^2 + d_{33}(y_2 - y_3)^2$	$d_{12}(y_3 - y_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$	$d_{22}(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + d_{33}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$	$d_{21}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$
$d_{11}(y_2 - y_3)(x_3 - x_2) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)$	$d_{11}(y_3 - y_1)^2 + d_{33}(x_1 - x_3)^2$	$d_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)$	$d_{11}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)$
$d_{21}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1)$	$d_{22}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$	$d_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)$	$d_{22}(x_1 - x_3)^2 + d_{33}(y_3 - y_1)^2$	$d_{21}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$	$d_{22}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)$
$d_{11}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$	$d_{12}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3)$	$d_{11}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$	$d_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$	$d_{11}(y_1 - y_2)^2 + d_{33}(x_2 - x_1)^2$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$
$d_{21}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)$	$d_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)$	$d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)$	$d_{21}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$	$d_{22}(x_2 - x_1)^2 + d_{33}(y_1 - y_2)^2$

Figura 8.7 - Matriz de rigidez de um elemento triangular de placa (CST)

PASSO 3: Determinação da matriz de rigidez global e vector de forças global da estrutura.

PASSO 4: Imposição das condições de fronteira.

PASSO 5: Resolução do sistema de equações, ou seja, determinação do valor da variável de campo (variável primária), deslocamentos:

$$\{\delta\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n\}$$

PASSO 6: Calculo de tensões em cada elemento

Começa-se por ler os deslocamentos do elemento em causa, o que é feito por um processo de realocação de deslocamentos, isto é,

$$\{\delta^e\} = [\text{Bool}^e] * \{\delta\} \quad \Rightarrow \quad \{\delta^e\}^T = \{u_1^e \quad v_1^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad u_3^e \quad v_3^e\}.$$

Calcular as tensões num dado elemento sendo conhecidos os seus deslocamentos nodais.

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\} = [H] * \{\delta^e\} \quad (8.36)$$

Para efeito de traçado de linhas de igual tensão e interpretação de resultados, as tensões neste elemento costumam ser referidas em relação ao seu centro de gravidade.

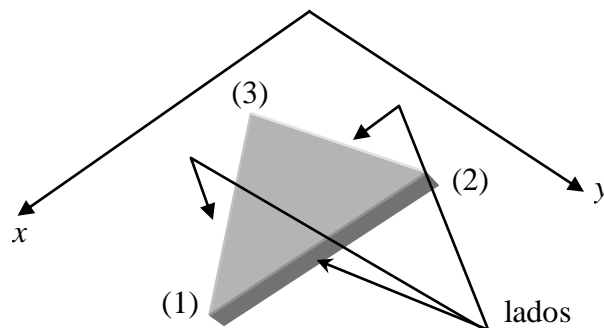
As tensões na fronteira (lados do elemento) $\{T\}$ são determinadas por:

$$T_j = \sigma_{ji} n_i \quad (1.21\text{-rep})$$

que no caso bidimensional é:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (8.37)$$

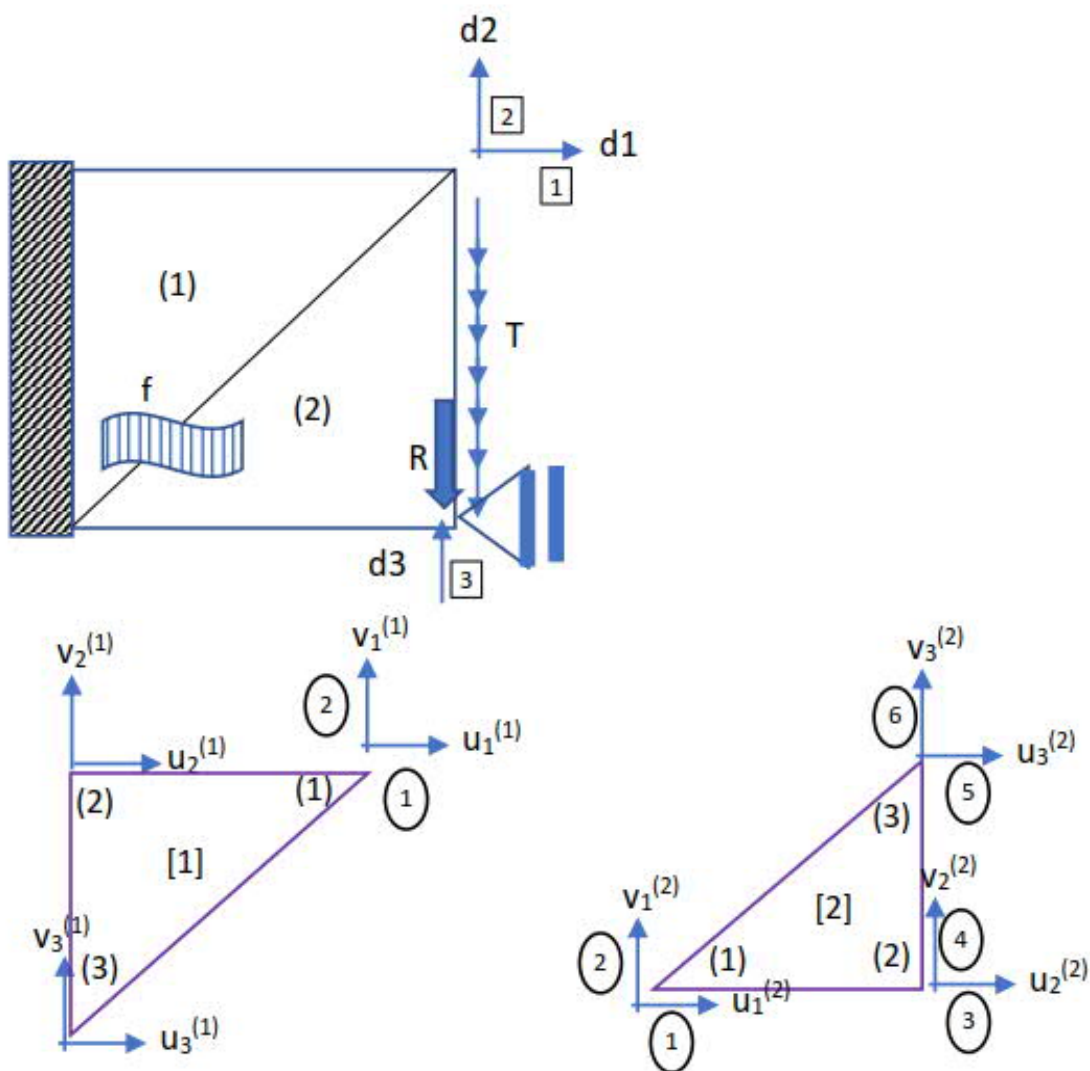
sendo n_x e n_y as componentes do versor normal à superfície.



Problema:

- Monte a matriz de rigidez global da estrutura
- Monte o vetor global de forças equivalentes a cargas de superfície e de massa. Monte o vetor de forças global (total)
- determine os deslocamentos nodais
- determine as deformações no elemento 1
- determine as tensões no elemento 1. Desenhe-as num elemento material.
- calcule as tensões na fronteira entre os elementos 1 e 2 a partir de 1
- repita as alíneas d) a f) para o elemento 2.

A estrutura tem 1 metro de lado.



$$E := 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad \nu := 0.3 \quad \gamma := 77 \text{ kN/m}^3 \quad T := 1000 \text{ kN/m}^2 \quad t := 0.1 \text{ m}$$

$$R := 265 \text{ kN}$$

O problema é um problema de placa no estado de tensão, cuja matriz constitutiva é:

$$d_{11} := \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad d_{22} := d_{11} \quad d_{12} := \nu \cdot d_{11} \quad d_{21} := d_{12} \quad d_{33} := \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$$D := \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2.3077 \cdot 10^8 & 6.9231 \cdot 10^7 & 0 \\ 6.9231 \cdot 10^7 & 2.3077 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0769 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Relacionando os GLG com os GLE de cada elemento controla-se a tabela de incidências (ou de conectividade)

		u1	v1	u2	v2	u3	v3
		1	2	3	4	5	6
GLG	no Elem 1	d1	d2				
		(1)	(2)				
	no Elem 2				d3	d1	d2
					(3)	(1)	(2)

a) Matriz de Rigidez Global

$$k_{1,1} = ke_{1,1} + ke_{5,5} \quad k_{1,2} = ke_{1,2} + ke_{5,6} \quad k_{1,3} = ke_{5,4}$$

$$k_{2,2} = ke_{2,2} + ke_{6,6} \quad k_{2,3} = ke_{6,4}$$

$$k_{3,3} = ke_{4,4}$$

- vamos, de seguida, calcular os coeficientes de rigidez elementares que são necessários

Elemento 1

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Area1} := \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| \quad \text{Area1} = 0.5$$

$$b_{1,1} := y_2 - y_3 \quad b_{1,2} := y_3 - y_1 \quad b_{1,3} := y_1 - y_2 \quad c_{1,1} := x_3 - x_2 \quad c_{1,2} := x_1 - x_3 \quad c_{1,3} := x_2 - x_1 \quad b1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ke_{1,1} := \left[(b_{1,1})^2 \cdot d_{11} + (c_{1,1})^2 \cdot d_{33} \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area1}}$$

$$ke_{1,1} = 1.1538 \cdot 10^7$$

$$ke_{1,2} := \left[(c_{1,1} \cdot b_{1,1}) \cdot (d_{12} + d_{33}) \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area1}}$$

$$ke_{1,2} = 0$$

$$ke_{2,2} := \left[(c_{1,1})^2 \cdot d_{22} + (b_{1,1})^2 \cdot d_{33} \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area1}}$$

$$ke_{2,2} = 4.0385 \cdot 10^6$$

$$c1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$x := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Area2} := \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \text{Area2} = 0.5$$

Nota: Devido às características da folha de cálculo levam a que representemos o vector $\{b\}$ do elemento 1, ou seja, $\{b^{(1)}\}$, como sendo b_1 . A componente 3, por exemplo, deste vector será b_1_3 .

$$b_{2_1} := y_2 - y_3 \quad b_{2_2} := y_3 - y_1 \quad b_{2_3} := y_1 - y_2 \quad c_{2_1} := x_3 - x_2 \quad c_{2_2} := x_1 - x_3 \quad c_{2_3} := x_2 - x_1 \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ke_{2_{5,5}} := \left[(b_{2_3})^2 \cdot d_{11} + (c_{2_3})^2 \cdot d_{33} \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{5,5}} = 4038462$$

$$ke_{2_{5,6}} := \left[(c_{2_3} \cdot b_{2_3}) \cdot (d_{12} + d_{33}) \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{5,6}} = 0$$

$$ke_{2_{5,4}} := (b_{2_3} \cdot c_{2_2} \cdot d_{12} + b_{2_2} \cdot c_{2_3} \cdot d_{33}) \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{5,4}} = 4.0385 \cdot 10^6$$

$$ke_{2_{6,4}} := (c_{2_2} \cdot c_{2_3} \cdot d_{22} + b_{2_2} \cdot b_{2_3} \cdot d_{33}) \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{6,4}} = -1.1538 \cdot 10^7$$

$$ke_{2_{4,4}} := \left[(c_{2_2})^2 \cdot d_{22} + (b_{2_2})^2 \cdot d_{33} \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{4,4}} = 1.5577 \cdot 10^7$$

$$ke_{2_{6,6}} := \left[(c_{2_3})^2 \cdot d_{22} + (b_{2_3})^2 \cdot d_{33} \right] \cdot \frac{t}{4 \cdot \text{Area2}} \quad ke_{2_{6,6}} = 1.1538 \cdot 10^7$$

- Matriz de Rigidez Global:

$$k_{1,1} := ke_{1_{1,1}} + ke_{2_{5,5}} \quad k_{1,2} := ke_{1_{1,2}} + ke_{2_{5,6}} \quad k_{1,3} := ke_{2_{5,4}}$$

$$k_{2,2} := ke_{1_{2,2}} + ke_{2_{6,6}} \quad k_{2,3} := ke_{2_{6,4}}$$

$$k_{3,3} := ke_{2_{4,4}}$$

$$k_{2,1} := k_{1,2} \quad k_{3,1} := k_{1,3} \quad k_{3,2} := k_{2,3}$$

$$k = \begin{bmatrix} 15576923 & 0 & 4038462 \\ 0 & 15576923 & -11538462 \\ 4038462 & -11538462 & 15576923 \end{bmatrix}$$

2) Cálculo do Vector de Forças Nodais

2.1) Vector de Forças de Massa Global

2.1.1) Vector de Forças de Massa Elementares

$$\begin{array}{l}
 \text{Elemento 1} \\
 F_{me1} := \frac{\text{Area1} \cdot t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix} \quad F_{me1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.2833 \\ 0 \\ -1.2833 \\ 0 \\ -1.2833 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{Elemento 2} \\
 F_{me2} := \frac{\text{Area2} \cdot t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix} \quad F_{me2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.2833 \\ 0 \\ -1.2833 \\ 0 \\ -1.2833 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2.2.2) Vector de Forças de Massa Global

$$F_{m1} := F_{me1_1} + F_{me2_5}$$

$$F_{m2} := F_{me1_2} + F_{me2_6}$$

$$F_{m3} := 0 + F_{me2_4}$$

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.5667 \\ -1.2833 \end{bmatrix}$$

2.2) Vector de Forças de Superfície(face 1-2 do Elemento 2)

$$\begin{array}{l}
 F_{se2_4} := -T \cdot \frac{1}{2} \cdot t \\
 F_{se2_6} := -T \cdot \frac{1}{2} \cdot t \\
 F_{se2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

O Fse1 do elemento 1 não existe porque este elemento não tem cargas de superfície

Vector De forças de Superfície em Coordenadas Globais

$$F_{s_1} := F_{se2_5} \quad F_{s_2} := F_{se2_6} \quad F_{s_3} := F_{se2_4} \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Vector de Forças Aplicadas Directamente nos nós: FN

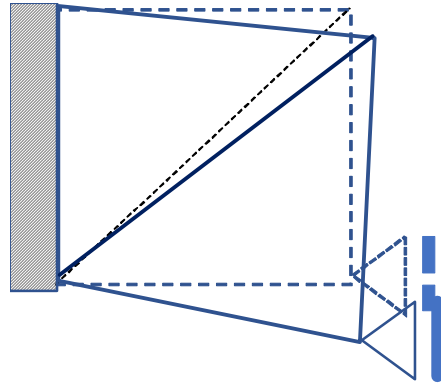
$$FN := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \quad FN = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -265 \end{bmatrix}$$

Vector de Forças Nodais (Global) : F = Fm + Fs + FN

$$F := F_m + F_s + FN \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -52.5667 \\ -316.2833 \end{bmatrix}$$

3) Cálculo de Deslocamentos

$$d := k^{-1} \cdot F \quad d = \begin{bmatrix} 1.539 \cdot 10^{-5} \\ -4.735 \cdot 10^{-5} \\ -5.937 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$



CÁLCULO do CAMPO DE DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO 1

Vamos calcular : $\{\varepsilon\} = [B] * \{\delta^{(e)}\}$

Realocação de deslocamentos: Os deslocamentos nodais elementares $\{\delta^{(e)}\}$ são, com a ajuda da tabela de incidencias:

$$u_1 := d_1 \quad v_1 := d_2 \quad u_2 := 0 \quad v_2 := 0 \quad u_3 := 0 \quad v_3 := 0$$

$$\delta 1 := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta 1 = \begin{bmatrix} 1.5393 \cdot 10^{-5} \\ -4.7354 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de Extensões:

Mas antes já tinhamos calculado $\{b(1)\}$ em $\{c(1)\}$ do elemento (1).

$$B1 := \frac{1}{2 \cdot \text{Areal}} \cdot \begin{bmatrix} b1_1 & 0 & b1_2 & 0 & b1_3 & 0 \\ 0 & c1_1 & 0 & c1_2 & 0 & c1_3 \\ c1_1 & b1_1 & c1_2 & b1_2 & c1_3 & b1_3 \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendendo a que há elementos nulos em $\delta 1$ podemos simplificar (8.26).

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \text{Areal}} \cdot \begin{bmatrix} b1_1 \cdot \delta 1_1 + 0 \cdot \delta 1_2 \\ 0 \cdot \delta 1_1 + c1_1 \cdot \delta 1_2 \\ c1_1 \cdot \delta 1_1 + b1_1 \cdot \delta 1_2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon := \frac{1}{2 \cdot \text{Areal}} \cdot \begin{bmatrix} b1_1 \cdot \delta 1_1 + 0 \cdot \delta 1_2 \\ 0 \cdot \delta 1_1 + c1_1 \cdot \delta 1_2 \\ c1_1 \cdot \delta 1_1 + b1_1 \cdot \delta 1_2 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 1.5393 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ -4.7354 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

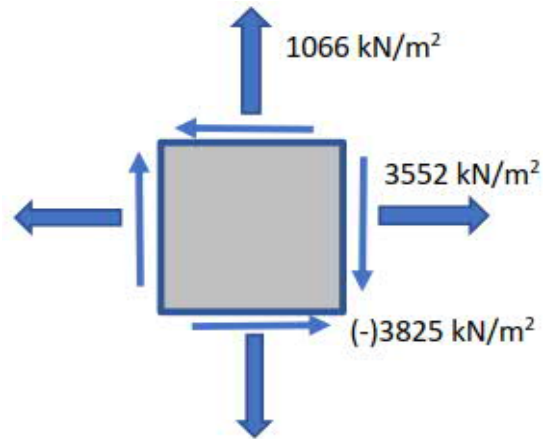
CÁLCULO do CAMPO DE TENSÕES NO ELEMENTO 1

$$\sigma := D \cdot \varepsilon \quad \sigma = \begin{bmatrix} 3552 \\ 1066 \\ -3825 \end{bmatrix}$$

(Para o calculo directo de tensões poderia em alternativa usar 8.29 e 8.30 dispensando-se a determinação de $\{\varepsilon\}$)

ou seja, de acordo com a nomenclatura usual:

$$\begin{aligned}\sigma_x &:= \sigma_1 & \sigma_x &= 3552 \\ \sigma_y &:= \sigma_2 & \sigma_y &= 1066 \\ \sigma_{xy} &:= \sigma_3 & \sigma_{xy} &= -3825\end{aligned}$$



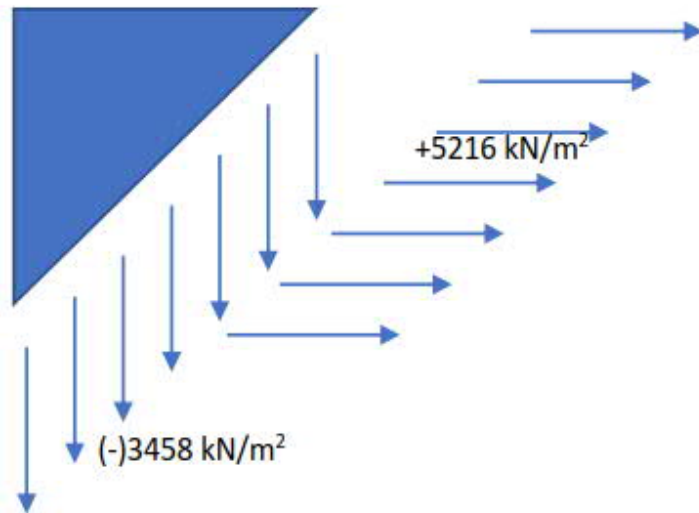
CÁLCULO DE TENSÕES NA FRONTEIRA DO ELEMENTO 1

Os versores da normal à superfície 1-2 são:

$$n_x := \frac{\sqrt{2}}{2} \quad n_y := -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

As tensões normais à superfície são:

$$\begin{aligned}T_x &:= \sigma_x \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y & T_x &= 5216 \\ T_y &:= \sigma_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y & T_y &= -3458\end{aligned}$$



CÁLCULO do CAMPO DE DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO 2

$$\{\varepsilon\} = [B] * \{\delta^{(e)}\}$$

Realocação de deslocamentos: Os deslocamentos nodais elementares são:

$$\begin{aligned}u_1 &:= 0 & v_1 &:= 0 & u_2 &:= 0 & v_2 &:= d_3 & u_3 &:= d_1 & v_3 &:= d_2 \\ u_1 &= 0 & v_1 &= 0 & u_2 &= 0 & v_2 &= -5.9373 \cdot 10^{-5} & u_3 &= 1.5393 \cdot 10^{-5} & v_3 &= -4.7354 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5.937 \cdot 10^{-5} \\ 1.539 \cdot 10^{-5} \\ -4.735 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

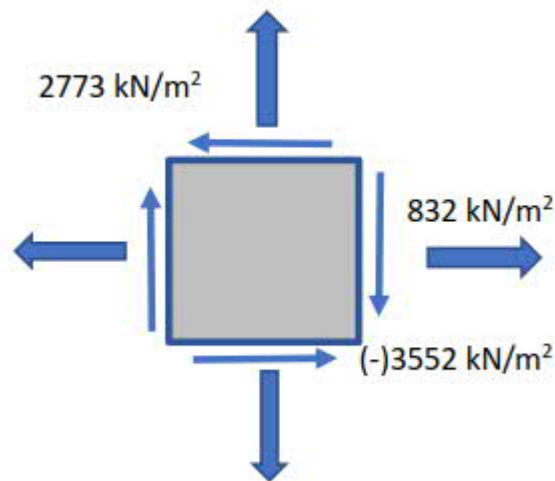
Os elementos não nulos do vetor de deslocamentos são os 4º, 5º e 6º elementos.

Para estes deslocamentos NÃO NULOS vector de deformações vale (equações 8.27 e 8.25):

$$B2 := \frac{1}{2 \cdot \text{Area2}} \begin{bmatrix} b2_1 & 0 & b2_2 & 0 & b2_3 & 0 \\ 0 & c2_1 & 0 & c2_2 & 0 & c2_3 \\ c2_1 & b2_1 & c2_2 & b2_2 & c2_3 & b2_3 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Atendendo a que há elementos nulos em $\delta 2$ podemos simplificar (8.26), e obtemos:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \text{Area2}} \begin{bmatrix} b2_3 \cdot \delta 2_5 \\ c2_2 \cdot \delta 2_4 + c2_3 \cdot \delta 2_6 \\ b2_2 \cdot \delta 2_4 + c2_3 \cdot \delta 2_5 + b2_3 \cdot \delta 2_6 \end{bmatrix} \quad \varepsilon := \frac{1}{2 \cdot \text{Area2}} \begin{bmatrix} b2_3 \cdot \delta 2_5 \\ c2_2 \cdot \delta 2_4 + c2_3 \cdot \delta 2_6 \\ b2_2 \cdot \delta 2_4 + c2_3 \cdot \delta 2_5 + b2_3 \cdot \delta 2_6 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2018 \cdot 10^{-5} \\ -4.398 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$



CÁLCULO do CAMPO DE TENSÕES NO ELEMENTO 2

$$\sigma := D \cdot \varepsilon \quad \sigma = \begin{bmatrix} 832 \\ 2773 \\ -3552 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x := \sigma_1 \quad \sigma_x = 832$$

$$\sigma_y := \sigma_2 \quad \sigma_y = 2773$$

$$\sigma_{xy} := \sigma_3 \quad \sigma_{xy} = -3552$$

CÁLCULO DE TENSÕES NA FRONTEIRA DO ELEMENTO 2

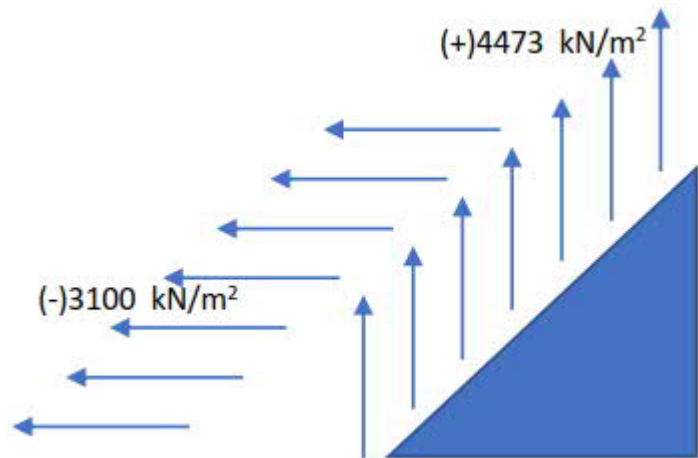
Os versores da normal à superfície 1-2 são:

$$n_x := \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad n_y := \frac{\sqrt{2}}{2}$$

As tensões normais à superfície são:

$$T_x := \sigma_x \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y \quad T_x = -3100$$

$$T_y := \sigma_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y \quad T_y = 4473$$



8.5 - Elemento de Placa Rectangular Linear

8.5.1 - Introdução

O elemento finito rectangular de quatro nós, também designado por Q4, apresenta em cada direcção quatro graus de liberdade, os deslocamentos dos quatro nós segundo x ou segundo y. Consequentemente a função de interpolação de deslocamentos em cada direcção, por exemplo na direcção x-x, será um polinómio de quatro parcelas do tipo:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (8.38)$$

sendo x e y coordenadas de um ponto no interior do elemento no sistema global e α_i parâmetros de deslocamentos (desconhecidos). O polinómio é incompleto porque faltam os termos em x^2 e y^2 . Demonstra-se [20] que por este motivo, para elementos quadriláteros, não é possível obter uma função de interpolação em coordenadas globais que seja invariante em relação a rotações. É então necessário que as interpolações das diversas grandezas em jogo se façam em relação a um sistema de coordenadas naturais.

Verificar-se-á que as funções de interpolação são as funções de Lagrange bidimensionais (em coordenadas naturais), as quais podem ser deduzidas a partir do produto de funções de Lagrange lineares unidimensionais. Por este motivo este elemento finito rectangular também se designa como elemento bilinear quadrilátero [1].

- Funções de Lagrange lineares unidimensionais:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.9)\text{-rep.}$$

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), \quad N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (4.9)\text{-rep.}$$

- Funções de Lagrange bidimensionais (bilineares):

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{1\text{Linear}}(\xi) \\ N_{2\text{Linear}}(\xi) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N_{1\text{Linear}}(\eta) & N_{2\text{Linear}}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (8.40 \text{ e } 8.41)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (8.42 \text{ e } 8.43)$$

Por conveniência de exposição da matéria trataremos em primeiro lugar de elementos rectangulares cujos lados são paralelos ao referencial global, e posteriormente os elementos cujos lados são dispostos arbitrariamente.

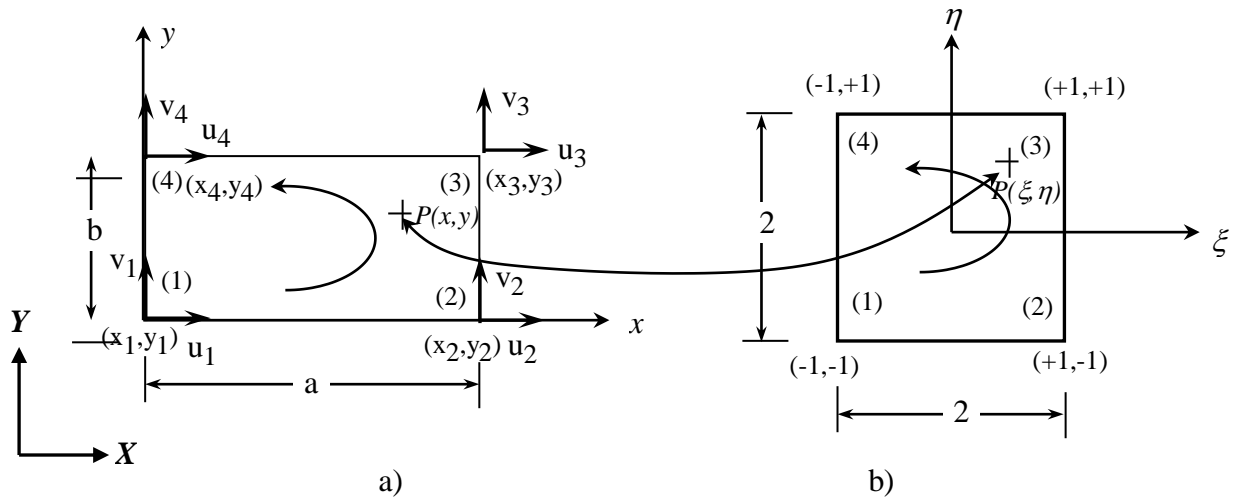
8.5.2 - Elemento Rectangular Linear paralelo ao sistema de coordenadas global.**PASSO 1:**

Figura 8.7 - a)Elemento rectangular real, b)elemento mestre

A figura 8.7.a) ilustra a numeração dos nós de um elemento rectangular, a qual é realizada no sentido anti-horário começando pelo nó inferior esquerdo. Enumeram-se também os deslocamentos nodais (u_i e v_i) associados aos graus de liberdade de cada nó i do elemento. A figura 8.7.b) representa o elemento mestre, que é uma imagem do elemento real. Todas as operações a efectuar para dedução da matriz de rigidez e dos vectores de força nodais equivalentes, serão realizadas sobre o elemento mestre, cujas coordenadas ξ e η variam de -1 a +1. A cada ponto do elemento mestre de coordenadas (ξ, η) corresponderá um outro ponto no elemento real de coordenadas (x, y) . Qualquer função no elemento mestre de valor $z = F_m(\xi, \eta)$ terá o mesmo valor no elemento real $z = F(x, y)$, e vice-versa. A relação é biunívoca.

Estabelece-se uma relação entre aqueles elementos através de uma transformação de coordenadas, representada pelas seguintes expressões:

$$x = \frac{a}{2}(\xi + 1) \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{2}(\eta + 1) \quad (8.44)$$

Inversamente:

$$\xi = \frac{2x - a}{a} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{2y - b}{b} \quad (8.45)$$

Cada elemento tem 8 graus de liberdade, os deslocamentos nodais agrupados no vector de deslocamentos nodais elementares:

$$\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\} \quad (8.46)$$

aos quais se associam as forças nodais, no vector de forças nodais elementares:

$$\{F^e\}^T = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}\} \quad (8.47)$$

PASSO 2: Geração do Elemento Finito**PASSO 2.1 :** Função deslocamento. Função de interpolação ou funções de forma

Como em cada direcção há quatro graus de liberdade a função de interpolação de deslocamentos em cada direcção é um polinómio com quatro parcelas. A função deslocamento no elemento mestre é:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \{\alpha\} \quad (8.48)$$

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = [f(\xi, \eta)] * \{\alpha\} \quad (8.49)$$

com $\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ (8.50)

Como se pode observar os deslocamentos são funções quadráticas no interior do elemento (ξ e η são arbitrários) e são lineares ao longo dos bordos (quando ξ ou η tomam valores de ± 1). Por este motivo as funções de forma $\psi_i(\xi, \eta)$ tem os lados rectilíneos enquanto a sua superfície é curvilínea (ver figura 8.8).

Concretizando (8.48) para cada um dos nós:

$$\{\delta(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \{\alpha\} \quad (8.51)$$

$$\begin{Bmatrix} u(\xi_1, \eta_1) \\ v(\xi_1, \eta_1) \\ u(\xi_2, \eta_2) \\ v(\xi_2, \eta_2) \\ u(\xi_3, \eta_3) \\ v(\xi_3, \eta_3) \\ u(\xi_4, \eta_4) \\ v(\xi_4, \eta_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\delta^e\} = [A] * \{\alpha\} \quad (8.52)$$

Fazendo:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (8.53)$$

e substituindo em (8.48) fica:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.54)$$

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = [N(\xi, \eta)] * \{\delta^e\} \quad (8.55)$$

com :

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

a matriz das funções de forma. Os seus elementos são exactamente os polinómios de Lagrange definidos nas expressões (8.40) a (8.43), como pode verificar ao desenvolver a igualdade (8.54).

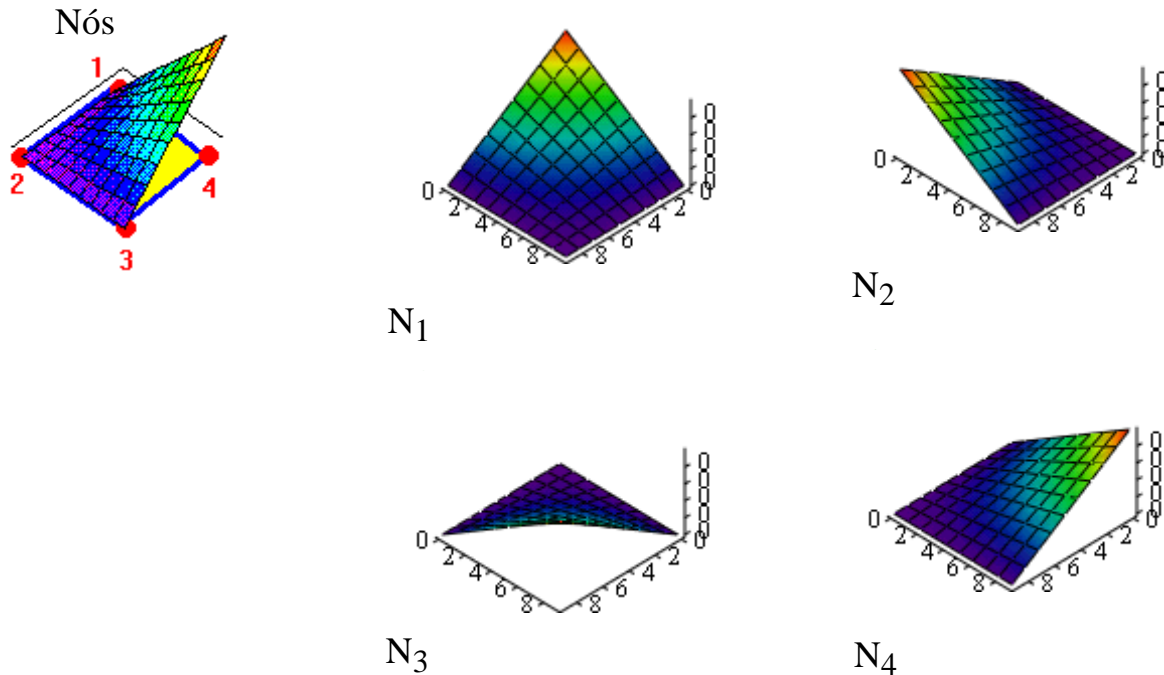


Figura 8.8 - Funções de forma bilineares de Lagrange [21].

PASSO 2.2.: Estabelecer as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos.

Como já se viu para problemas de estados planos de deformação ou tensão temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (8.57)$$

Derivaremos recorrendo à regra da derivada da função composta:

$$\varepsilon_x(\xi, \eta) = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2}{a} \alpha_2 + \frac{2}{a} \eta \alpha_4 + 0$$

$$\varepsilon_y(\xi, \eta) = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{2}{b} \alpha_7 + \frac{2}{b} \xi \alpha_8 + 0 \quad (8.58)$$

$$\gamma_{xy}(\xi, \eta) = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{2}{b} \alpha_3 + \frac{2}{b} \xi \alpha_4 + 0 \right) + \left(\frac{2}{a} \alpha_6 + \frac{2}{a} \eta \alpha_8 + 0 \right)$$

Escrevendo estas igualdades matricialmente e atendendo a (8.53) obtemos os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{-1+\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & \frac{-1-\eta}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\xi}{b} & 0 & \frac{-1-\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{-1+\xi}{b} \\ \frac{-1+\xi}{b} & \frac{-1+\eta}{a} & \frac{-1-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & \frac{-1-\eta}{a} \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.59)$$

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = [B] * \{\delta^e\} \quad (8.60)$$

PASSO 2.3: Relações Constitutivas. Escrever as tensões em função dos deslocamentos nodais

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.61)$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\} \quad (8.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} \frac{-1+\eta}{a} & d_{12} \frac{-1+\xi}{b} & d_{11} \frac{1-\eta}{a} & d_{12} \frac{-1-\xi}{b} & d_{11} \frac{1+\eta}{a} & d_{12} \frac{1+\xi}{b} & d_{11} \frac{-1-\eta}{a} & d_{12} \frac{1-\xi}{b} \\ d_{21} \frac{-1+\eta}{a} & d_{22} \frac{-1+\xi}{b} & d_{21} \frac{1-\eta}{a} & d_{22} \frac{-1-\xi}{b} & d_{21} \frac{1+\eta}{a} & d_{22} \frac{1+\xi}{b} & d_{21} \frac{-1-\eta}{a} & d_{22} \frac{1-\xi}{b} \\ d_{33} \frac{-1+\xi}{b} & d_{33} \frac{-1+\eta}{a} & d_{33} \frac{-1-\xi}{b} & d_{33} \frac{1-\eta}{a} & d_{33} \frac{1+\xi}{b} & d_{33} \frac{1+\eta}{a} & d_{33} \frac{1-\xi}{b} & d_{33} \frac{-1-\eta}{a} \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.63)$$

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio. Cálculo do vector de forças de massa e da matriz de rigidez elementar. O vector de forças de massa vale:

$$\{F_m^e\} = \int_A t * [N(x, y)]^T * \{f(x, y)\} dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T * \{f(\xi, \eta)\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66)$$

Entretanto das equações diferenciais de equilíbrio interno de um corpo sabemos que:

$$\frac{\partial \sigma_x(\xi, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial y} + f_x(\xi, \eta) = 0 \quad (8.67.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\xi, \eta)}{\partial y} + f_y(\xi, \eta) = 0 \quad (8.67.b)$$

Resolvendo em ordem a $\{f(\xi, \eta)\}$ e atendendo à regra de derivação composta:

$$f_x(\xi, \eta) = - \frac{\partial \sigma_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8.68.a)$$

$$f_y(\xi, \eta) = - \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8.68.b)$$

Substituindo estas expressões em (8.64) e integrando o vector de forças de massa fica:

$$\{F_m^e\}^T = \frac{A * t}{4} \{f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y\} \quad (8.69)$$

A matriz de rigidez elementar é:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D][B] dv = t \int_A [B]^T [D][B] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.64)$$

Para o estado plano de tensão a matriz de rigidez é:

$$[K^e] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} A & E & C & F & B & -E & D & -F \\ & A & -F & D & -E & B & F & C \\ & & A & -E & D & F & B & E \\ & & & A & -F & C & E & B \\ & & & & A & E & C & F \\ & & \text{Sim.} & & & A & -F & D \\ & & & & & & A & -E \\ & & & & & & & A \end{bmatrix} \quad (8.65.a)$$

$$\beta = b/a$$

$$\begin{aligned} A &= 4\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}, & B &= -2\beta - \frac{(1-\nu)}{\beta}, & C &= -4\beta + \frac{(1-\nu)}{\beta}, & D &= 2\beta - \frac{2(1-\nu)}{\beta} \\ E &= 3\nu\beta + \frac{3(1-\nu)}{2\beta}, & F &= 3\nu\beta - \frac{3(1-\nu)}{2\beta} \end{aligned} \quad (8.65.b)$$

PASSO 3: Montar a matriz de rigidez global e vector de forças global;

PASSO 4: Impor as condições de fronteira.

PASSO 5: Resolução do sistema de equações para determinação dos deslocamentos nodais livres.

PASSO 6:

Para cada elemento determinar as tensões no interior do elemento, na fronteira e forças nodais. Para o fazer é necessário antecipadamente transpor os deslocamentos nodais globais para deslocamentos nodais elementares.

a) Tensões Internas

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.70)$$

ou

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\} \quad (8.71)$$

b) Tensões na fronteira

Da expressão (8.37):

$$\begin{Bmatrix} T_x(\xi, \eta) \\ T_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) & \sigma_{xy}(\xi, \eta) \\ \sigma_{yx}(\xi, \eta) & \sigma_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (8.37\text{-rep})$$

c) Forças nodais totais

Obtém-se directamente de:

$$\{F^e\} = [K^e] * \{\delta^e\} \quad (8.72)$$

8.5 - Elemento de Placa Rectangular Linear

8.5.1 - Introdução

O elemento finito rectangular de quatro nós, também designado por Q4, apresenta em cada direcção quatro graus de liberdade, os deslocamentos dos quatro nós segundo x ou segundo y. Consequentemente a função de interpolação de deslocamentos em cada direcção, por exemplo na direcção x-x, será um polinómio de quatro parcelas do tipo:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (8.38)$$

sendo x e y coordenadas de um ponto no interior do elemento no sistema global e α_i parâmetros de deslocamentos (desconhecidos). O polinómio é incompleto porque faltam os termos em x^2 e y^2 . Demonstra-se [20] que por este motivo, para elementos quadriláteros, não é possível obter uma função de interpolação em coordenadas globais que seja invariante em relação a rotações. É então necessário que as interpolações das diversas grandezas em jogo se façam em relação a um sistema de coordenadas naturais.

Verificar-se-á que as funções de interpolação são as funções de Lagrange bidimensionais (em coordenadas naturais), as quais podem ser deduzidas a partir do produto de funções de Lagrange lineares unidimensionais. Por este motivo este elemento finito rectangular também se designa como elemento bilinear quadrilátero [1].

- Funções de Lagrange lineares unidimensionais:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.9)\text{-rep.}$$

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), \quad N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (4.9)\text{-rep.}$$

- Funções de Lagrange bidimensionais (bilineares):

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_{1\text{Linear}}(\xi) \\ N_{2\text{Linear}}(\xi) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N_{1\text{Linear}}(\eta) & N_{2\text{Linear}}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (8.40 \text{ e } 8.41)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (8.42 \text{ e } 8.43)$$

Por conveniência de exposição da matéria trataremos em primeiro lugar de elementos rectangulares cujos lados são paralelos ao referencial global, e posteriormente os elementos cujos lados são dispostos arbitrariamente.

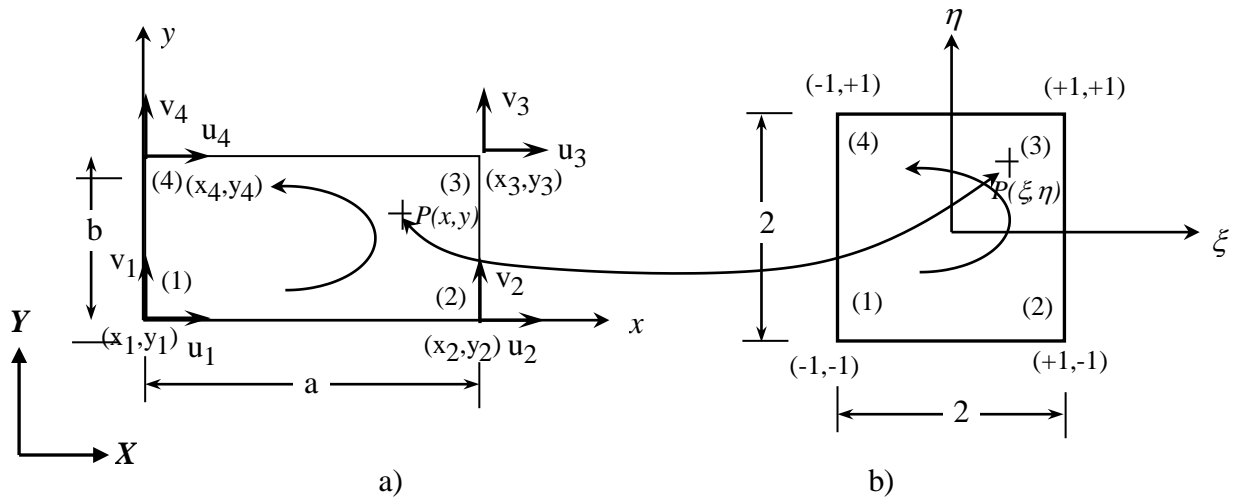
8.5.2 - Elemento Rectangular Linear paralelo ao sistema de coordenadas global.**PASSO 1:**

Figura 8.7 - a)Elemento rectangular real, b)elemento mestre

A figura 8.7.a) ilustra a numeração dos nós de um elemento rectangular, a qual é realizada no sentido anti-horário começando pelo nó inferior esquerdo. Enumeram-se também os deslocamentos nodais (u_i e v_i) associados aos graus de liberdade de cada nó i do elemento. A figura 8.7.b) representa o elemento mestre, que é uma imagem do elemento real. Todas as operações a efectuar para dedução da matriz de rigidez e dos vectores de força nodais equivalentes, serão realizadas sobre o elemento mestre, cujas coordenadas ξ e η variam de -1 a +1. A cada ponto do elemento mestre de coordenadas (ξ, η) corresponderá um outro ponto no elemento real de coordenadas (x, y) . Qualquer função no elemento mestre de valor $z = F_m(\xi, \eta)$ terá o mesmo valor no elemento real $z = F(x, y)$, e vice-versa. A relação é biunívoca.

Estabelece-se uma relação entre aqueles elementos através de uma transformação de coordenadas, representada pelas seguintes expressões:

$$x = \frac{a}{2}(\xi + 1) \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{2}(\eta + 1) \quad (8.44)$$

Inversamente:

$$\xi = \frac{2x - a}{a} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{2y - b}{b} \quad (8.45)$$

Cada elemento tem 8 graus de liberdade, os deslocamentos nodais agrupados no vector de deslocamentos nodais elementares:

$$\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\} \quad (8.46)$$

aos quais se associam as forças nodais, no vector de forças nodais elementares:

$$\{F^e\}^T = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}\} \quad (8.47)$$

PASSO 2: Geração do Elemento Finito**PASSO 2.1 :** Função deslocamento. Função de interpolação ou funções de forma

Como em cada direcção há quatro graus de liberdade a função de interpolação de deslocamentos em cada direcção é um polinómio com quatro parcelas. A função deslocamento no elemento mestre é:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \{\alpha\} \quad (8.48)$$

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = [f(\xi, \eta)] * \{\alpha\} \quad (8.49)$$

com $\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ (8.50)

Como se pode observar os deslocamentos são funções quadráticas no interior do elemento (ξ e η são arbitrários) e são lineares ao longo dos bordos (quando ξ ou η tomam valores de ± 1). Por este motivo as funções de forma $\psi_i(\xi, \eta)$ tem os lados rectilíneos enquanto a sua superfície é curvilínea (ver figura 8.8).

Concretizando (8.48) para cada um dos nós:

$$\{\delta(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \{\alpha\} \quad (8.51)$$

$$\begin{Bmatrix} u(\xi_1, \eta_1) \\ v(\xi_1, \eta_1) \\ u(\xi_2, \eta_2) \\ v(\xi_2, \eta_2) \\ u(\xi_3, \eta_3) \\ v(\xi_3, \eta_3) \\ u(\xi_4, \eta_4) \\ v(\xi_4, \eta_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{\delta^e\} = [A] * \{\alpha\} \quad (8.52)$$

Fazendo:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (8.53)$$

e substituindo em (8.48) fica:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} * \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.54)$$

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = [N(\xi, \eta)] * \{\delta^e\} \quad (8.55)$$

com :

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

a matriz das funções de forma. Os seus elementos são exactamente os polinómios de Lagrange definidos nas expressões (8.40) a (8.43), como pode verificar ao desenvolver a igualdade (8.54).

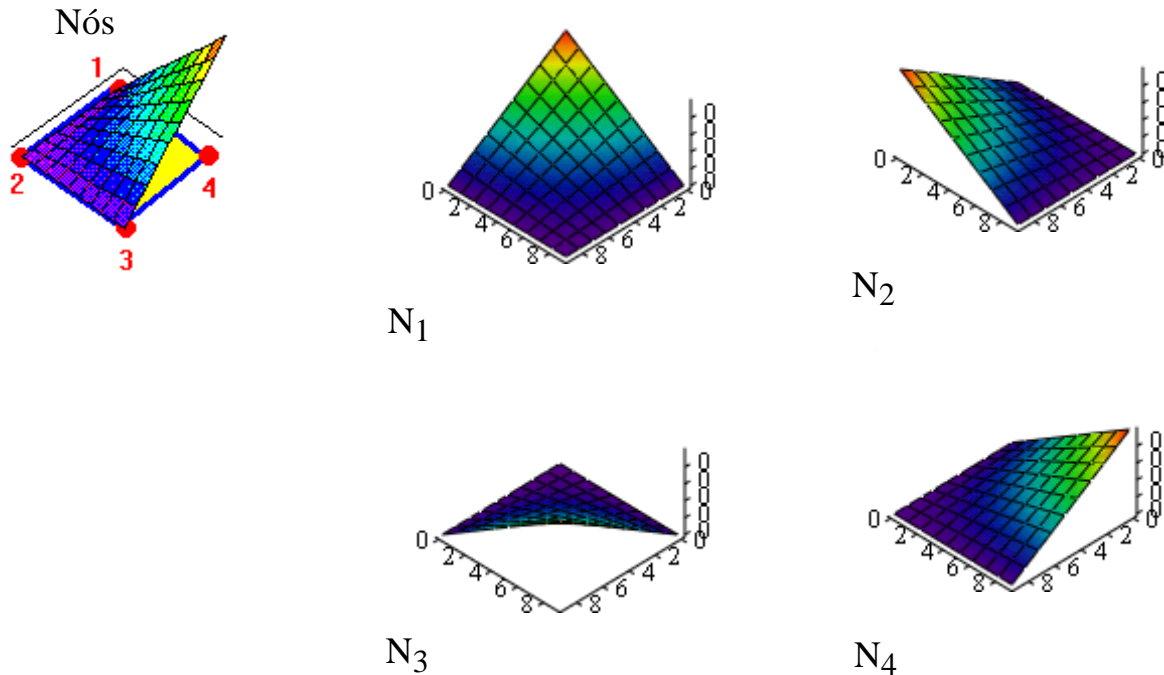


Figura 8.8 - Funções de forma bilineares de Lagrange [21].

PASSO 2.2.: Estabelecer as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos.

Como já se viu para problemas de estados planos de deformação ou tensão temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (8.57)$$

Derivaremos recorrendo à regra da derivada da função composta:

$$\varepsilon_x(\xi, \eta) = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2}{a} \alpha_2 + \frac{2}{a} \eta \alpha_4 + 0$$

$$\varepsilon_y(\xi, \eta) = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{2}{b} \alpha_7 + \frac{2}{b} \xi \alpha_8 + 0 \quad (8.58)$$

$$\gamma_{xy}(\xi, \eta) = \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \dots$$

$$\dots = \left(\frac{2}{b} \alpha_3 + \frac{2}{b} \xi \alpha_4 + 0 \right) + \left(\frac{2}{a} \alpha_6 + \frac{2}{a} \eta \alpha_8 + 0 \right)$$

Escrevendo estas igualdades matricialmente e atendendo a (8.53) obtemos os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{-1+\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & \frac{-1-\eta}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\xi}{b} & 0 & \frac{-1-\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{-1+\xi}{b} \\ \frac{-1+\xi}{b} & \frac{-1+\eta}{a} & \frac{-1-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & \frac{-1-\eta}{a} \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.59)$$

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = [B] * \{\delta^e\} \quad (8.60)$$

PASSO 2.3: Relações Constitutivas. Escrever as tensões em função dos deslocamentos nodais

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.61)$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\} \quad (8.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} \frac{-1+\eta}{a} & d_{12} \frac{-1+\xi}{b} & d_{11} \frac{1-\eta}{a} & d_{12} \frac{-1-\xi}{b} & d_{11} \frac{1+\eta}{a} & d_{12} \frac{1+\xi}{b} & d_{11} \frac{-1-\eta}{a} & d_{12} \frac{1-\xi}{b} \\ d_{21} \frac{-1+\eta}{a} & d_{22} \frac{-1+\xi}{b} & d_{21} \frac{1-\eta}{a} & d_{22} \frac{-1-\xi}{b} & d_{21} \frac{1+\eta}{a} & d_{22} \frac{1+\xi}{b} & d_{21} \frac{-1-\eta}{a} & d_{22} \frac{1-\xi}{b} \\ d_{33} \frac{-1+\xi}{b} & d_{33} \frac{-1+\eta}{a} & d_{33} \frac{-1-\xi}{b} & d_{33} \frac{1-\eta}{a} & d_{33} \frac{1+\xi}{b} & d_{33} \frac{1+\eta}{a} & d_{33} \frac{1-\xi}{b} & d_{33} \frac{-1-\eta}{a} \end{bmatrix} * \{\delta^e\} \quad (8.63)$$

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio. Cálculo do vector de forças de massa e da matriz de rigidez elementar. O vector de forças de massa vale:

$$\{F_m^e\} = \int_A t * [N(x, y)]^T * \{f(x, y)\} dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T * \{f(\xi, \eta)\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66)$$

Entretanto das equações diferenciais de equilíbrio interno de um corpo sabemos que:

$$\frac{\partial \sigma_x(\xi, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial y} + f_x(\xi, \eta) = 0 \quad (8.67.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\xi, \eta)}{\partial y} + f_y(\xi, \eta) = 0 \quad (8.67.b)$$

Resolvendo em ordem a $\{f(\xi, \eta)\}$ e atendendo à regra de derivação composta:

$$f_x(\xi, \eta) = - \frac{\partial \sigma_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8.68.a)$$

$$f_y(\xi, \eta) = - \frac{\partial \sigma_{xy}(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (8.68.b)$$

Substituindo estas expressões em (8.64) e integrando o vector de forças de massa fica:

$$\{F_m^e\}^T = \frac{A * t}{4} \{f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y\} \quad (8.69)$$

A matriz de rigidez elementar é:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D][B] dv = t \int_A [B]^T [D][B] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.64)$$

Para o estado plano de tensão a matriz de rigidez é:

$$[K^e] = \frac{Et}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} A & E & C & F & B & -E & D & -F \\ & A & -F & D & -E & B & F & C \\ & & A & -E & D & F & B & E \\ & & & A & -F & C & E & B \\ & & & & A & E & C & F \\ & & \text{Sim.} & & & A & -F & D \\ & & & & & & A & -E \\ & & & & & & & A \end{bmatrix} \quad (8.65.a)$$

$$\beta = b/a$$

$$\begin{aligned} A &= 4\beta + \frac{2(1-\nu)}{\beta}, & B &= -2\beta - \frac{(1-\nu)}{\beta}, & C &= -4\beta + \frac{(1-\nu)}{\beta}, & D &= 2\beta - \frac{2(1-\nu)}{\beta} \\ E &= 3\nu\beta + \frac{3(1-\nu)}{2\beta}, & F &= 3\nu\beta - \frac{3(1-\nu)}{2\beta} \end{aligned} \quad (8.65.b)$$

PASSO 3: Montar a matriz de rigidez global e vector de forças global;

PASSO 4: Impor as condições de fronteira.

PASSO 5: Resolução do sistema de equações para determinação dos deslocamentos nodais livres.

PASSO 6:

Para cada elemento determinar as tensões no interior do elemento, na fronteira e forças nodais. Para o fazer é necessário antecipadamente transpor os deslocamentos nodais globais para deslocamentos nodais elementares.

a) Tensões Internas

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.70)$$

ou

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\} \quad (8.71)$$

b) Tensões na fronteira

Da expressão (8.37):

$$\begin{Bmatrix} T_x(\xi, \eta) \\ T_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) & \sigma_{xy}(\xi, \eta) \\ \sigma_{yx}(\xi, \eta) & \sigma_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (8.37\text{-rep})$$

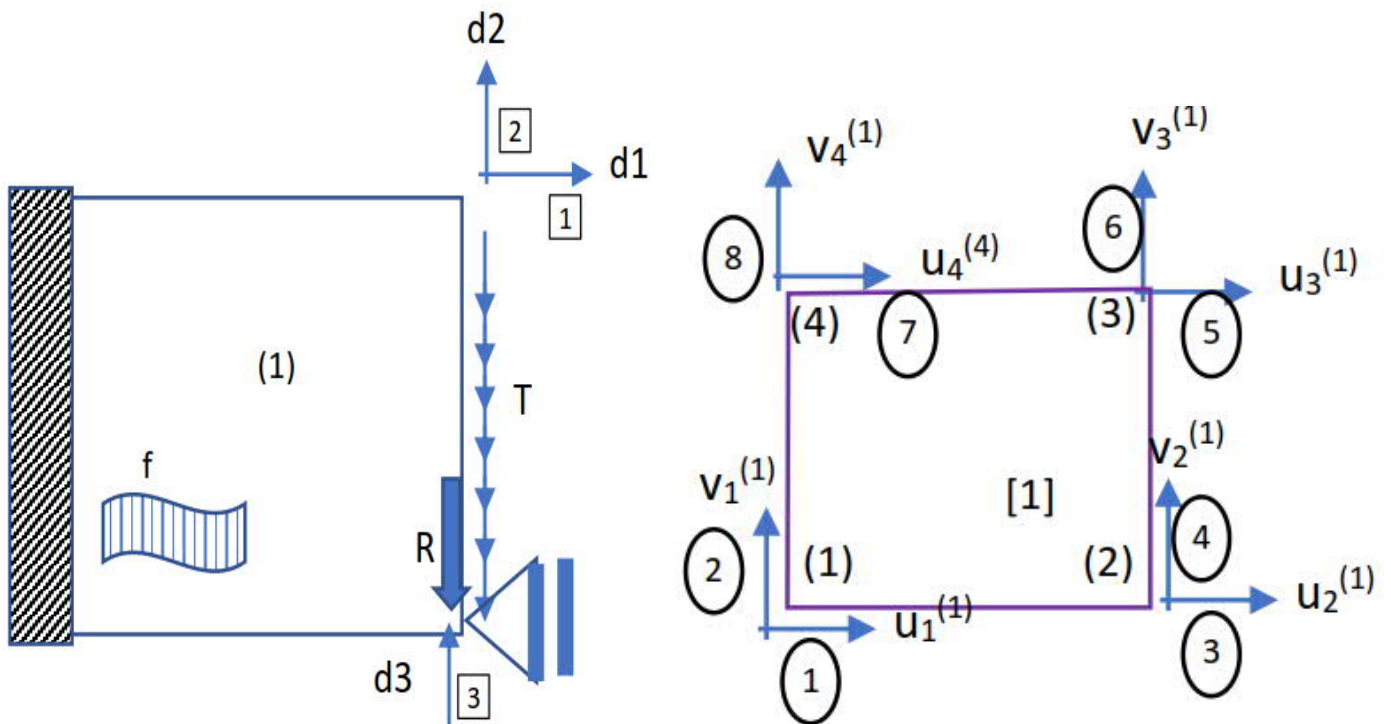
c) Forças nodais totais

Obtém-se directamente de:

$$\{F^e\} = [K^e] * \{\delta^e\} \quad (8.72)$$

Problema:

- a) Monte a matriz de rigidez global da estrutura
 - b) Monte o vetor global de forças equivalentes a cargas de superfície e de massa. Monte o vetor de forças global (total)
 - c) determine os deslocamentos nodais
 - d) determine as deformações no elemento 1
 - e) determine as tensões no elemento 1. Desenhe-as num elemento material.
 - f) calcule as tensões na fronteira e desenhe-as
- A estrutura tem 1 metro de lado.



$EL := 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
 $\nu := 0.3$
 $\gamma := 77 \text{ kN/m}^3$
 $T := 1000 \text{ kN/m}^2$
 $t := 0.1 \text{ m}$
 $R := 265 \text{ kN}$

O problema é um problema de placa no estado de tensão, cuja matriz constitutiva é:

$$d_{11} := \frac{EL}{(1 - \nu^2)} \quad d_{22} := d_{11} \quad d_{12} := \nu \cdot d_{11} \quad d_{21} := d_{12} \quad d_{33} := \frac{EL}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$D := \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2.3077 \cdot 10^8 & 6.9231 \cdot 10^7 & 0 \\ 6.9231 \cdot 10^7 & 2.3077 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0769 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Relacionando os GLG com os GLE de cada elemento controlou-se a tabela de incidências (ou de conectividade)

GL Elementar		u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4
		1	2	3	4	5	6	7	8
GLG	no Elem 1				d3	d1	d2		
					(3)	(1)	(2)		

a) Matriz de Rigidez Global

$$k_{1,1} = ke1_{5,5}$$

$$k_{1,2} = ke1_{5,6}$$

$$k_{1,3} = ke1_{5,4}$$

$$k_{2,2} = ke1_{6,6} = k_{1,1}$$

$$k_{2,3} = ke1_{6,4}$$

$$k_{3,3} = ke1_{4,4} = k_{1,1}$$

- vamos, de seguida, calcular os coeficientes de rigidez elementares que são necessários

Elemento 1

$$a := 1 \quad b := 1 \quad \beta := \frac{b}{a} \quad A := 4 \cdot \beta + \frac{2 \cdot (1 - \nu)}{\beta} \quad E := 3 \cdot \nu \cdot \beta + \frac{3 \cdot (1 - \nu)}{2 \cdot \beta} \quad F := 3 \cdot \nu \cdot \beta - \frac{3 \cdot (1 - \nu)}{2 \cdot \beta} \quad C := -4 \cdot \beta + \frac{(1 - \nu)}{\beta}$$

$$\beta = 1$$

$$A = 5.4$$

$$E = 1.9$$

$$F = -0.1$$

$$C = -3.3$$

$$ke1_{5,5} := \frac{EL \cdot t}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot A$$

$$ke1_{5,6} := \frac{EL \cdot t}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot E$$

$$ke1_{5,4} := \frac{EL \cdot t}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (-F)$$

$$ke1_{6,4} := \frac{EL \cdot t}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot (C)$$

- Matriz de Rigidez Global:

$$k_{1,1} := ke1_{5,5}$$

$$k_{1,2} := ke1_{5,6}$$

$$k_{1,3} := ke1_{5,4}$$

$$k_{2,2} := k_{1,1}$$

$$k_{2,3} := ke1_{6,4}$$

$$k_{3,3} := k_{1,1}$$

$$k_{2,1} := k_{1,2} \quad k_{3,1} := k_{1,3} \quad k_{3,2} := k_{2,3}$$

$$k = \begin{bmatrix} 10384615.4 & 3750000 & 288461.5 \\ 3750000 & 10384615.4 & -6346153.8 \\ 288461.5 & -6346153.8 & 10384615.4 \end{bmatrix}$$

2) Cálculo do Vector de Forças Nodais**2.1) Vector de Forças de Massa Global****2.1.1) Vector de Forças de Massa Elementares**

Elemento 1

$$\text{Areal} := a \cdot b$$

$$F_{me1} := \frac{\text{Areal} \cdot t}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix} \quad F_{me1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.925 \\ 0 \\ -1.925 \\ 0 \\ -1.925 \end{bmatrix}$$

2.2.2) Vector de Forças de Massa Global

$$F_{m1} := F_{me1_5}$$

$$F_{m2} := F_{me1_6}$$

$$F_{m3} := F_{me1_4}$$

$$F_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.925 \\ -1.925 \end{bmatrix}$$

2.2) Vector de Forças de Superfície(face 1-2 do Elemento 2)

$$F_{se1_4} := -T \cdot \frac{1}{2} \cdot t \quad F_{se1_6} := -T \cdot \frac{1}{2} \cdot t \quad F_{se1_8} := 0$$

$$F_{se1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector De forças de Superfície em Coordenadas Globais

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Placa com elementos Q4

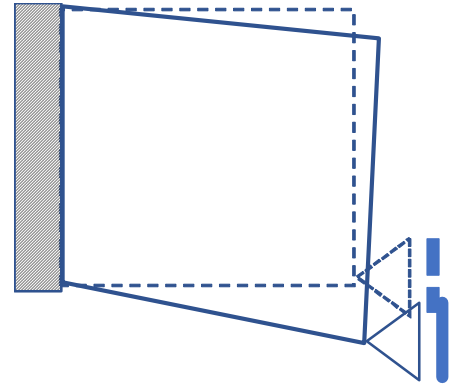
$$F_{s_1} := F_{se1_5} \quad F_{s_2} := F_{se1_6} \quad F_{s_3} := F_{se1_4} \quad F_s = \begin{bmatrix} -50 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Vector de Forças Aplicadas Directamente nos nós: FN

$$FN := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \quad FN = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -265 \end{bmatrix}$$

Vector de Forças Nodais (Global) : F = Fm + Fs + P

$$F := F_m + F_s + FN \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -51.9 \\ -316.9 \end{bmatrix}$$



3) Cálculo de Deslocamentos

$$d := k^{-1} \cdot F \quad d = \begin{bmatrix} 1.961 \cdot 10^{-5} \\ -4.958 \cdot 10^{-5} \\ -6.136 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

CÁLCULO do CAMPO DE DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO 1

Vamos calcular : $\{\varepsilon\} = [B] * \{\delta^{(e)}\}$

Realocação de deslocamentos: Os deslocamentos nodais elementares $\{\delta^{(e)}\}$ são, com a ajuda da tabela de incidencias:

$$u_1 := 0 \quad v_1 := 0 \quad u_2 := 0 \quad v_2 := d_3 \quad u_3 := d_1 \quad v_3 := d_2$$

$$u_4 := 0 \quad v_4 := 0$$

$$\delta_{e1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_{e1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.1362 \cdot 10^{-5} \\ 1.9609 \cdot 10^{-5} \\ -4.958 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A) Determine o campo de deformações e de tensões no elemento a partir da defenição do campo de deslocamentos

Campo de deslocamentos para o elemento 1

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 [N_i(\xi, \eta)] \cdot u_{e1_i} \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 [N_i(\xi, \eta)] \cdot v_{e1_i}$$

Neste caso particular só os deslocamentos $\delta_{e1}(4), \delta_{e1}(5), \delta_{e1}(6)$, são difetentes de zero pelo que nas igualdades anteriores só consideraremos as parcelas que envolvam atsu deslocamentos. As funções de aprox lineares de Lagrange são:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta)$$

O campo de deslocamentos é:

$$u(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) \cdot u_3 \quad u(\xi, \eta) := \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot u_3$$

$$u(\xi, \eta) := \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \eta + \frac{1}{4} \cdot \xi + \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta \right) \cdot (1.9609 \cdot 10^{-5})$$

$$v(\xi, \eta) := \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \eta + \frac{1}{4} \cdot \xi - \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta \right) \cdot (-6.1362 \cdot 10^{-5}) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \eta + \frac{1}{4} \cdot \xi + \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \eta \right) \cdot (-4.958 \cdot 10^{-5})$$

$$u(\xi, \eta) = 4.90225 \cdot 10^{-6} + 4.90225 \cdot 10^{-6} \cdot \eta + 4.90225 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 4.90225 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \cdot \eta$$

$$v(\xi, \eta) = -(2.77355 \cdot 10^{-5}) + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta - 2.77355 \cdot 10^{-5} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \cdot \eta$$

Campo de deformações:

A transformação de coordenadas inversa é: $\xi(x, y) = \frac{2 \cdot x - a}{a}$ e $\eta(x, y) = \frac{2 \cdot y - b}{b}$

e sabendo que: $\frac{d}{dx} \xi(x, y) = \frac{2}{a}$ $\frac{d}{dy} \xi(x, y) = 0$ $\frac{d}{dx} \eta(x, y) = 0$ $\frac{d}{dy} \eta(x, y) = \frac{2}{b}$ e ainda que: $a := 1$ $b := 1$

vem que, o campo de deformações é, aplicando a regra da derivada da função composta (ver eq. 8.58):

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} u(\xi, \eta) \\ \frac{d}{dy} v(\xi, \eta) \\ \frac{d}{dy} u(\xi, \eta) + \frac{d}{dx} v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\xi} u(\xi, \eta) \cdot \frac{2}{a} \\ \frac{d}{d\eta} v(\xi, \eta) \cdot \frac{2}{b} \\ \frac{d}{d\eta} u(\xi, \eta) \cdot \frac{2}{b} + \frac{d}{d\xi} v(\xi, \eta) \cdot \frac{2}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8045 \cdot 10^{-6} + 9.8045 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \\ 5.891 \cdot 10^{-6} + 5.891 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \\ -(2.2833 \cdot 10^{-5}) + 4.9022 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x(\xi, \eta) := 9.8045 \cdot 10^{-6} + 9.8045 \cdot 10^{-6} \cdot \eta$$

$$\varepsilon_y(\xi, \eta) := 5.891 \cdot 10^{-6} + 5.891 \cdot 10^{-6} \cdot \xi$$

$$\gamma_{xy}(\xi, \eta) := -(2.2833 \cdot 10^{-5}) + 4.9022 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta$$

A evolução das deformações é linear, sendo que as extensões ε_x não dependem da abscissa ξ e as ε_y não dependem da ordenada η .

Deformações nos cantos e no centro:

Ponto (-1,-1)	Ponto (1,-1)	Ponto (1,1)	Ponto (-1,1)	Ponto (0,0)
$\varepsilon_x(-1, -1) = 0$	$\varepsilon_x(1, -1) = 0$	$\varepsilon_x(1, 1) = 2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_x(-1, 1) = 2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_x(0, 0) = 9.8 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon_y(-1, -1) = 0$	$\varepsilon_y(1, -1) = 1.2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_y(1, 1) = 1.2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_y(-1, 1) = 0$	$\varepsilon_y(0, 0) = 5.9 \cdot 10^{-6}$
$\gamma_{xy}(-1, -1) = -3.1 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(1, -1) = -2.1 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(1, 1) = -1.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(-1, 1) = -2.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(0, 0) = -2.3 \cdot 10^{-5}$

Campo de tensões:

$$\sigma(\xi, \eta) := D \cdot \varepsilon(\xi, \eta)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \\ \sigma_{xy}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3077 \cdot 10^8 & 6.9231 \cdot 10^7 & 0 \\ 6.9231 \cdot 10^7 & 2.3077 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0769 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.8045 \cdot 10^{-6} + 9.8045 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \\ 5.891 \cdot 10^{-6} + 5.891 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \\ -(2.2833 \cdot 10^{-5}) + 4.9022 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \end{bmatrix}$$

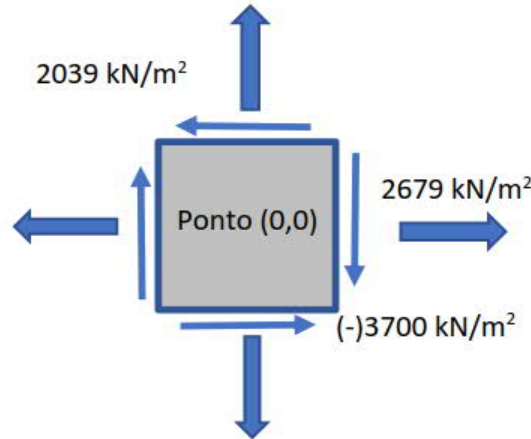
$$\sigma_x(\xi, \eta) := 2670.42 + 2262.58 \cdot \eta + 407.84 \cdot \xi$$

$$\sigma_y(\xi, \eta) := 2038.24 + 678.78 \cdot \eta + 1359.47 \cdot \xi$$

$$\sigma_{xy}(\xi, \eta) := 1944.20 + 295.05 \cdot \xi + 227.01 \cdot \eta$$

Tensões nos cantos e no centro:

Ponto (-1,-1)	Ponto (1,-1)	Ponto (1,1)	Ponto (-1,1)	Ponto (0,0)
$\sigma_x(-1,-1) = 1.7 \cdot 10^{-13}$	$\sigma_x(1,-1) = 815.7$	$\sigma_x(1,1) = 5340.8$	$\sigma_x(-1,1) = 4525.2$	$\sigma_x(0,0) = 2670.4$
$\sigma_y(-1,-1) = -0$	$\sigma_y(1,-1) = 2718.9$	$\sigma_y(1,1) = 4076.5$	$\sigma_y(-1,1) = 1357.5$	$\sigma_y(0,0) = 2038.2$
$\sigma_{xy}(-1,-1) = -2478.1$	$\sigma_{xy}(1,-1) = -1686.2$	$\sigma_{xy}(1,1) = -1210.3$	$\sigma_{xy}(-1,1) = -2002.2$	$\sigma_{xy}(0,0) = -1844.2$



B) Determine o campo de deformações e de tensões no elemento de forma expedita.

O campo de deformações é dado pela expressão 8.59:

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1+\eta}{a} & 0 & \frac{1-\eta}{a} & 0 & \frac{1+\eta}{a} & 0 & \frac{-1-\eta}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\xi}{b} & 0 & \frac{-1-\xi}{b} & 0 & \frac{1+\xi}{b} & 0 & \frac{1-\xi}{b} \\ \frac{-1+\xi}{b} & \frac{-1+\eta}{a} & \frac{-1-\xi}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} & \frac{-1-\eta}{a} \end{bmatrix} \cdot \delta e1$$

Neste caso particular só os deslocamentos $\delta e1(4), \delta e1(5), \delta e1(6)$, são diferentes de zero pelo que na igualdade anterior só consideraremos as colunas 4, 5 e 6. Sabemos também que $a=b=1$.

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1+\eta}{a} \cdot \delta e1_5 \\ \frac{-1-\xi}{b} \cdot \delta e1_4 + \frac{1+\xi}{b} \cdot \delta e1_6 \\ \frac{1-\eta}{a} \cdot \delta e1_4 + \frac{1+\xi}{b} \cdot \delta e1_5 + \frac{1+\eta}{a} \cdot \delta e1_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8045 \cdot 10^{-6} + 9.8045 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \\ 5.891 \cdot 10^{-6} + 5.891 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \\ -(2.2833 \cdot 10^{-5}) + 4.9022 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\xi, \eta) &:= 9.8045 \cdot 10^{-6} + 9.8045 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) &:= 5.891 \cdot 10^{-6} + 5.891 \cdot 10^{-6} \cdot \xi \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) &:= -(2.2833 \cdot 10^{-5}) + 4.9022 \cdot 10^{-6} \cdot \xi + 2.9455 \cdot 10^{-6} \cdot \eta \end{aligned}$$

Deformações nos cantos e no centro:

Ponto (-1,-1)	Ponto (1,-1)	Ponto (1,1)	Ponto (-1,1)	Ponto (0,0)
$\varepsilon_x(-1,-1) = 0$	$\varepsilon_x(1,-1) = 0$	$\varepsilon_x(1,1) = 2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_x(-1,1) = 2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_x(0,0) = 9.8 \cdot 10^{-6}$
$\varepsilon_y(-1,-1) = 0$	$\varepsilon_y(1,-1) = 1.2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_y(1,1) = 1.2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_y(-1,1) = 0$	$\varepsilon_y(0,0) = 5.9 \cdot 10^{-6}$
$\gamma_{xy}(-1,-1) = -1.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(1,-1) = -2.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(1,1) = -1.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(-1,1) = -2.5 \cdot 10^{-5}$	$\gamma_{xy}(0,0) = -2.3 \cdot 10^{-5}$

O campo de tensões é dado pela expressão (8.62.)

Neste caso particular só os deslocamentos $\delta\epsilon_1(4), \delta\epsilon_1(5), \delta\epsilon_1(6)$, são diferentes de zero pelo que na igualdade anterior só consideraremos as colunas 4, 5 e 6. Logo

$a := 1$ $b := 1$

$$\sigma(\xi, \eta) := \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} d12 \cdot \frac{-1-\xi}{b} & d11 \cdot \frac{1+\eta}{a} & d12 \cdot \frac{1+\xi}{b} \\ d22 \cdot \frac{-1-\xi}{b} & d21 \cdot \frac{1+\eta}{a} & d22 \cdot \frac{1+\xi}{b} \\ d33 \cdot \frac{1-\eta}{a} & d33 \cdot \frac{1+\xi}{b} & d33 \cdot \frac{1+\eta}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\epsilon_1(4) \\ \delta\epsilon_1(5) \\ \delta\epsilon_1(6) \end{bmatrix} \quad \sigma(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \\ \sigma_{xy}(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

Ponto (-1,-1)

$$\sigma(-1, -1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4956.2 \end{bmatrix}$$

Ponto (1,-1)

$$\sigma(1, -1) = \begin{bmatrix} 815.7 \\ 2719 \\ -3372.4 \end{bmatrix}$$

Ponto (1,1)

$$\sigma(1, 1) = \begin{bmatrix} 5340.7 \\ 4076.5 \\ -2420.8 \end{bmatrix}$$

Ponto (-1,1)

$$\sigma(-1, 1) = \begin{bmatrix} 4525 \\ 1357.5 \\ -4004.6 \end{bmatrix}$$

Ponto (0,0)

$$\sigma(0, 0) = \begin{bmatrix} 2670.4 \\ 2038.2 \\ -3688.5 \end{bmatrix}$$

Ponto (-0.5,0.5)

$$\sigma(-0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 3597.7 \\ 1697.9 \\ -3846.5 \end{bmatrix}$$

Ponto (0.5,-0.5)

$$\sigma(0.5, -0.5) = \begin{bmatrix} 1743 \\ 2378.6 \\ -3530.5 \end{bmatrix}$$

3)Determine e desenhe as tensões na face superior

As tensões em qualquer face são definidas por:

$$T_x(\xi, \eta) = \sigma_x(\xi, \eta) \cdot n_x + \sigma_{xy}(\xi, \eta) \cdot n_y$$

$$T_y(\xi, \eta) = \sigma_{xy}(\xi, \eta) \cdot n_x + \sigma_y(\xi, \eta) \cdot n_y$$

mas de acordo com a representação vectorial acima usada com o seguintes aspeto:

$$T_x(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta)_1 \cdot n_x + \sigma(\xi, \eta)_3 \cdot n_y$$

$$T_y(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta)_3 \cdot n_x + \sigma(\xi, \eta)_2 \cdot n_y$$

A face superior tem como versores normais a essa face os vetores n_x e n_y seguintes: $n_x := 0$ $n_y := 1$

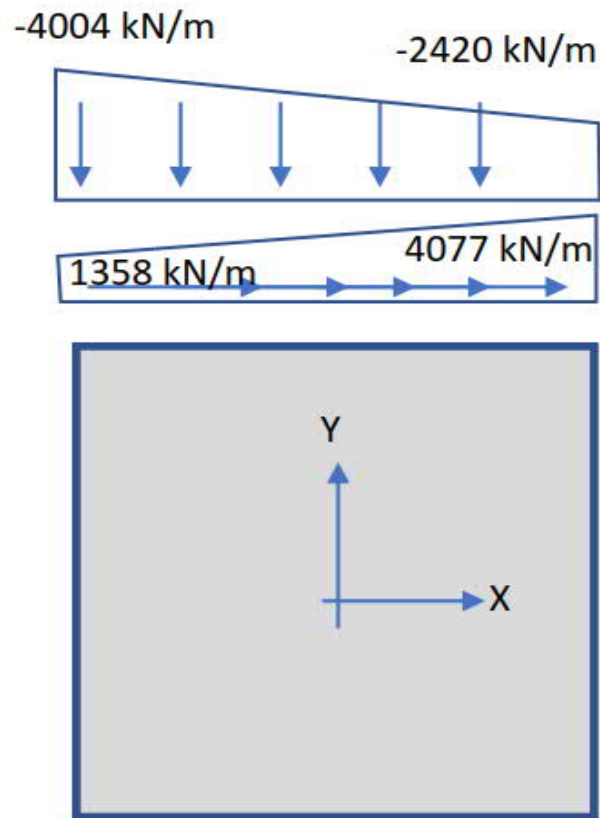
Nessa face a ordenada é $\eta=1$ e a abcissa está entre os limites $-1 \leq \xi \leq +1$, e por isso as expressões anteriores reduzem-se a:

$$T_x(\xi, \eta) := \sigma(\xi, 1)_3 \cdot n_y$$

$$T_y(\xi, \eta) := \sigma(\xi, 1)_2 \cdot n_y$$

As tensões nos cantos desse lado serão:	Ponto (1,-1)	Ponto (1,1)
	$T_x(-1, 1) = -4004.6$	$T_x(1, 1) = -2420.8$
	$T_y(-1, 1) = 1357.5$	$T_y(1, 1) = 4076.5$

Deveriam ser nulas... porque não há forças de superfícies aplicadas...

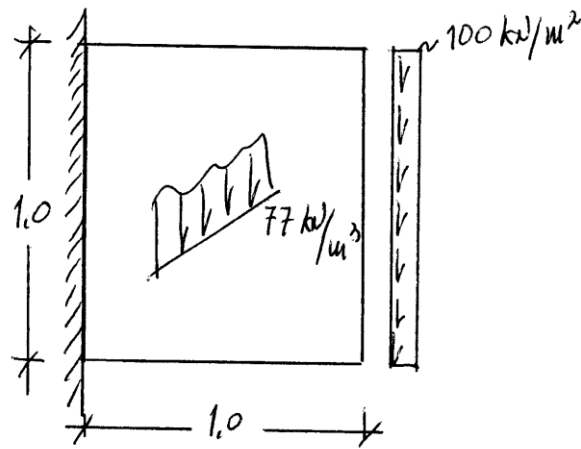


EXEMPLO:

①

(Adaptado de [5])

- 1) Determine os deslocamentos nodais
- 2) e o campo de tensões no elemento 1.
- 3) e e e e e e aplicadas na fronteira no elemento 1.



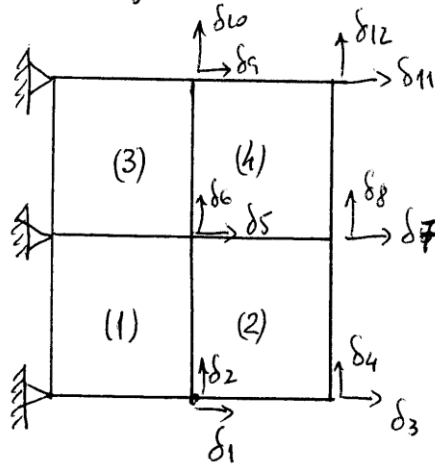
$$E = 206 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,30$$

Resolução:

1)

Discretização



$\bar{\delta}_i = \text{desplac. nodais livres}$

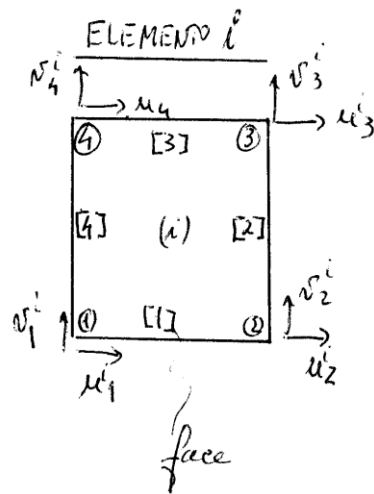


Tabela de incidências:

GL Elementar →		u1 ^(e)	v1 ^(e)	u2 ^(e)	v2 ^(e)	u3 ^(e)	v3 ^(e)	u4 ^(e)	v4 ^(e)
		1	2	3	4	5	6	7	8
G.L. Global	no Elem 1			δ1	δ2			δ5	δ6
	no Elem 2	δ1	δ2	δ3	δ4	δ7	δ8	δ5	δ6
	no Elem 3			δ5	δ6			δ9	δ10
	no Elem 4	δ5	δ6	δ7	δ8	δ11	δ12	δ9	δ10

A matriz de rigidez elementar é igual em todos os elementos porque têm todas igual dimensão.

$$\underline{k}^{(1)} = \underline{k}^{(2)} = \underline{k}^{(3)} = \underline{k}^{(4)}$$

$$\underline{k}^{(i)} = 18,864 \times 10^6 \begin{bmatrix} 5,4 & 1,95 & -3,3 & -0,15 & -2,7 & -1,95 & 0,6 & 0,15 \\ 5,4 & 0,15 & 0,6 & -1,95 & -2,7 & -0,15 & -3,3 & \\ \hline & 5,4 & -1,95 & 0,6 & -0,15 & -2,7 & 1,95 & \\ & & 5,4 & 0,15 & -3,3 & 1,95 & -2,7 & \\ \hline & & & 5,4 & 1,95 & -3,3 & -0,15 & \\ & & & & 5,4 & 0,15 & 0,6 & \\ & & & & & 5,4 & -1,95 & \\ & & & & & & & 5,4 \end{bmatrix}$$

SIM.

Matriz de rigidez global

(3)

Recorrendo à tabela de incidências:

$$k_{11} = k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} + 0 + 0 = 10,8 \times 18,864 \times 10^4$$

$$k_{12} = k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} + 0 + 0 = 0 \times "$$

$$k_{13} = 0 + k_{13}^{(2)} + 0 + 0 = -3,3 \times "$$

$$k_{14} = 0 + k_{14}^{(2)} + 0 + 0 = -0,15 \times "$$

...

$$k_{56} = k_{56}^{(1)} + k_{78}^{(2)} + k_{34}^{(3)} + k_{12}^{(4)} = 0 \times "$$

$$k_{57} = 0 + k_{78}^{(2)} + 0 + k_{13}^{(4)} = -6,6 \times "$$

etc.

A matriz completa apresenta-se na página

O vetor de forças de massa elementares também é igual para os quatro elementos

$$\underline{F}_{m}^{(1)} = \underline{F}_{m}^{(2)} = \underline{F}_{m}^{(3)} = \underline{F}_{m}^{(4)} = \frac{0,5 \times 0,5}{4} \times (-77) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vetor de Forças de Massa Global

Atendendo à tabela de incidências constrói-se o vetor de forças de massa global:

$$\begin{array}{l}
 \tilde{F}_{m1} \\
 \tilde{F}_{m2} \\
 \tilde{F}_{m3} \\
 \tilde{F}_{m4} \\
 \tilde{F}_{m5} \\
 \tilde{F}_{m6} \\
 \tilde{F}_{m7} \\
 \tilde{F}_{m8} \\
 \tilde{F}_{m9} \\
 \tilde{F}_{m10} \\
 \tilde{F}_{m11} \\
 \tilde{F}_{m12}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 F_{m3}^{(1)} + F_{m1}^{(2)} + 0 + 0 = 0 \times 4,812 \\
 F_{m4}^{(1)} + F_{m2}^{(2)} + 0 + 0 = 2 \text{ " } \\
 0 + F_{m3}^{(2)} + 0 + 0 = 0 \text{ " } \\
 0 + F_{m4}^{(2)} + 0 + 0 = 1 \text{ " } \\
 F_{m5}^{(1)} + F_{m7}^{(2)} + F_{m3}^{(3)} + F_{m1}^{(4)} = 0 \text{ " } \\
 F_{m6}^{(1)} + F_{m8}^{(2)} + F_{m4}^{(3)} + F_{m2}^{(4)} = 4 \text{ " } \\
 0 + F_{m5}^{(2)} + 0 + F_{m3}^{(4)} = 0 \text{ " } \\
 0 + F_{m6}^{(2)} + 0 + F_{m4}^{(4)} = 2 \text{ " } \\
 0 + 0 + F_{m5}^{(3)} + F_{m7}^{(4)} = 0 \text{ " } \\
 0 + 0 + F_{m6}^{(3)} + F_{m8}^{(4)} = 2 \text{ " } \\
 0 + 0 + 0 + F_{m5}^{(4)} = 0 \text{ " } \\
 0 + 0 + 0 + F_{m6}^{(4)} = 1 \text{ " }
 \end{array}$$

As forças elementares associadas às tensões aplicadas à superfície distribuem-se apenas pelos elementos 2 e 4 e valem:

$$\tilde{F}_t^{(2)} = -25 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \tilde{F}_t^{(4)} = -25 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estas forças são espalhadas e "assembladas" no vetor de forças global tendo-se em conta a tabela de incidências:

$$\tilde{F}_t = (-25) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-25) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -25 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As forças nodais totais valem:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_m = \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -4,8125 \\ 0 \\ -19,25 \\ 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -4,8125 \end{pmatrix}$$

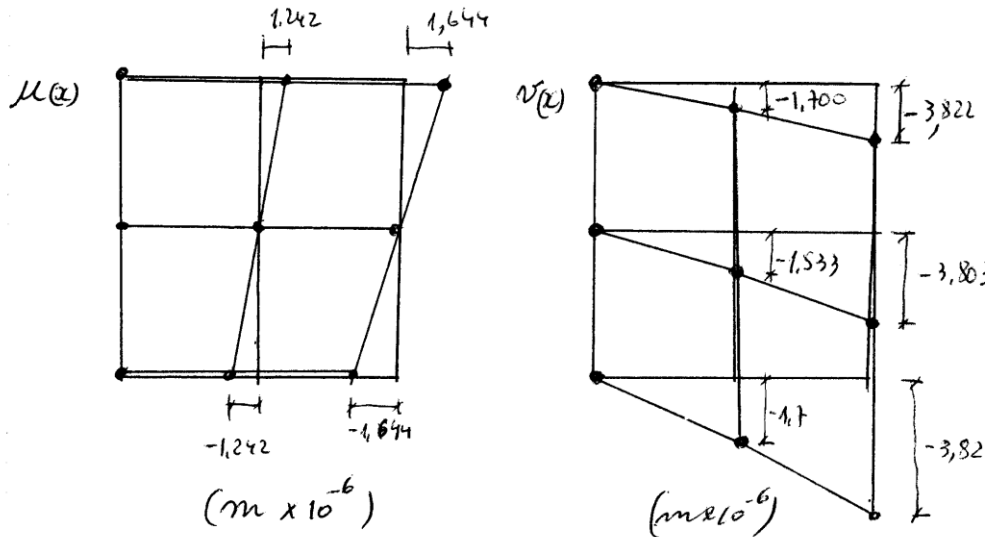
(5)

Resolvendo o sistema de equações de equilíbrio de forças, obtemos o vetor de deslocamentos nodais δ

$$\vec{K} \vec{\delta} = \vec{F}$$

$$\begin{pmatrix} 10,8 & 0 & -3,3 & -0,15 & 1,2 & 0 & -2,7 & -1,95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8 & 0,15 & 0,6 & 0 & -6,6 & -1,95 & -2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & -1,95 & -2,7 & 1,95 & 0,6 & -0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & 1,95 & -2,7 & 0,15 & -3,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21,6 & 0 & -6,6 & 0 & 1,2 & 0 & -2,7 & -1,95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21,6 & 0 & 1,2 & 0 & -6,6 & -1,95 & 2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8 & 0 & -2,7 & 1,95 & 0,6 & -0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8 & 1,95 & -2,7 & 0,15 & -3,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10,8 & 0 & -3,3 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19,8 & -0,15 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & 1,95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -4,8125 \\ 0 \\ -19,25 \\ 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -9,625 \\ 0 \\ -4,8125 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}^T = \{-1,242; -1,7; -1,644; -3,822; 0; -1,533; 0; -3,803; 1,242; -1,700; 1,644; -3,822\} \times 10^{-6} \text{ m}$$



Os deslocamentos do canto de cima esquerda para diversas malhas foram os seguintes:

malha - elementos	$u \times 10^6$	$v \times 10^6$
2 el. triangulares	0,549	2,382
1 el. retangular	1,360	3,108
4 el. retangulares	1,644	3,822
100 el. parabólicos	1,658	3,565

2) Cálculo de tensões no elemento 1

Do vetor de deslocamentos nodais globais \underline{d} e recorrendo à tabela de incidências lida no "sentido inverso", obtemos os deslocamentos nodais do elemento 1, $\underline{d}^{(1)}$:

$$\underline{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ v_3^{(1)} \\ u_4^{(1)} \\ v_4^{(1)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,242 \\ -1,700 \\ 0 \\ 1,533 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$$

As tensões valem:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(e)}(\varphi, \eta) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(e)}(\varphi, \eta) \quad e \quad \textcircled{7}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(e)}(\varphi, \eta) = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} u^{(e)}(\varphi, \eta) \\ \frac{\partial}{\partial y} v^{(e)}(\varphi, \eta) \\ \frac{\partial}{\partial y} u^{(e)}(\varphi, \eta) + \frac{\partial}{\partial x} v^{(e)}(\varphi, \eta) \end{array} \right\}$$

O campo de desloc. no elemento é

$$\underline{\underline{d}}^{(e)}(\varphi, \eta) = \begin{Bmatrix} u^{(e)}(\varphi, \eta) \\ v^{(e)}(\varphi, \eta) \end{Bmatrix} = [\varphi] \times \underline{\underline{d}}^{(e)} \quad \text{logo:}$$

$$u^{(e)}(\varphi, \eta) = \frac{1}{4} (-1,242 - 1,242\varphi + 1,242\eta + 1,242\varphi\eta) \frac{10^{-6}}{4}$$

$$v^{(e)}(\varphi, \eta) = \frac{1}{4} (-3,233 - 3,233\varphi + 0,16\eta + 0,16\varphi\eta) \frac{10^{-6}}{4}$$

O campo de deformação é:

$$\varepsilon_x^{(e)}(\varphi, \eta) = \frac{\partial u^{(e)}(\varphi, \eta)}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y^{(e)}(\varphi, \eta) = \frac{\partial v^{(e)}(\varphi, \eta)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^{(e)}(\varphi, \eta) = \frac{\partial u^{(e)}(\varphi, \eta)}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v^{(e)}(\varphi, \eta)}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\text{mas } \varphi = \frac{2x-a}{a} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2}{a} = \frac{2}{0,5} = 4,0$$

$$\eta = \frac{2y-b}{b} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2}{b} = \frac{2}{0,5} = 4,0$$

$$\text{Note: } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Logo

$$\varepsilon_x^{(1)}(\xi, \eta) = (-1,242 + 1,242\eta) \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y^{(1)}(\xi, \eta) = (0,167 + 0,167\xi) \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy}^{(1)}(\xi, \eta) = (-1,991 + 1,242\xi + 0,167\eta) \times 10^{-6}$$

(8)

Finalmente procedendo ao produto $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ obtemos o campo de tensões internas:

$$\sigma_x^{(1)}(\xi, \eta) = -269,85 + 11,34\xi + 281,19\eta \quad \text{kN/m}^2$$

$$\sigma_y^{(1)}(\xi, \eta) = -46,55 + 37,81\xi + 84,36\eta \quad "$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(\xi, \eta) = -157,77 + 98,42\xi + 13,23\eta \quad "$$

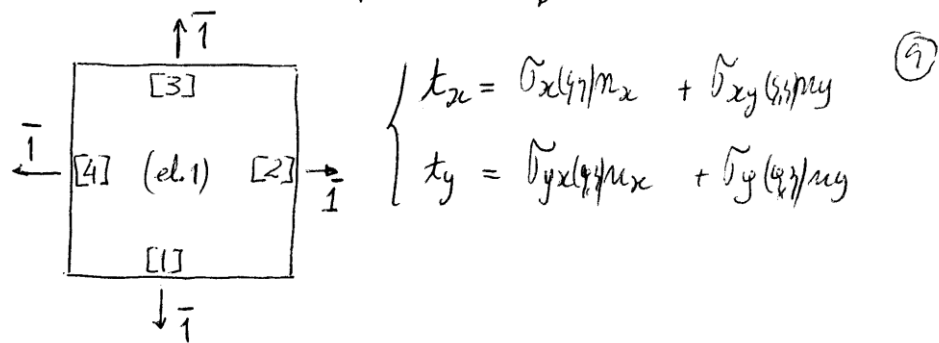
Por ser oportuno, embora não seja pedido pelo problema, pode mos determinar as forças de massa. São quantificadas a partir das equações diferenciais de equilíbrio no interior de um corpo (1.13). Para um problema bidimensional vale:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

$$f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = -98,28 \text{ kN/m}^3$$

$$f_y = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = -731,12 \text{ kN/m}^3$$

3) Cálculo das tensões aplicadas na fronteira do elemento



face [1] $n_x = 0$, $n_y = -1$

$$t_x^{(1)}(\eta) = 171,00 - 98,42 \eta \quad \text{kd/cm}^2$$

$$t_y^{(1)}(\eta) = 130,91 - 37,81 \eta \quad \text{kd/cm}^2$$

face [2] $n_x = 1$ $n_y = 0$

$$t_x^{(2)}(\eta) = -258,51 + 281,19 \eta \quad \text{kd/cm}^2$$

$$t_y^{(2)}(\eta) = 59,35 + 13,23 \eta \quad "$$

face [3] $n_x = 0$ $n_y = 1$

$$t_x^{(3)}(\xi) = -144,54 + 98,42 \xi \quad \text{kd/cm}^2$$

$$t_y^{(3)}(\xi) = 37,81 + 37,81 \xi \quad "$$

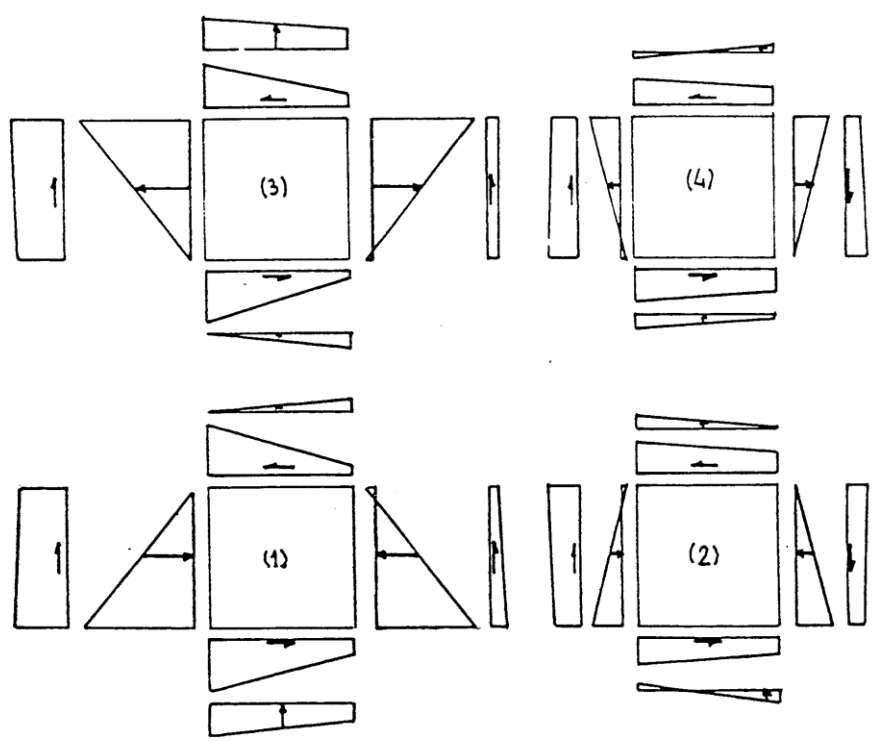
face [4]

$$t_x^{(4)}(\eta) = 281,19 - 281,19 \eta \quad \text{kd/cm}^2$$

$$t_y^{(4)}(\eta) = 256,19 - 13,23 \eta \quad "$$

105

3,101



Escala: $1\text{cm} = 300\text{kg/m}^2$

Figura 4.6: Campo de tensões da solução por 4 elementos retangulares.

8.6 - Elemento de Placa Quadrilátero Linear Isoparamétrico

8.6.1- Introdução. Transformação de Coordenadas

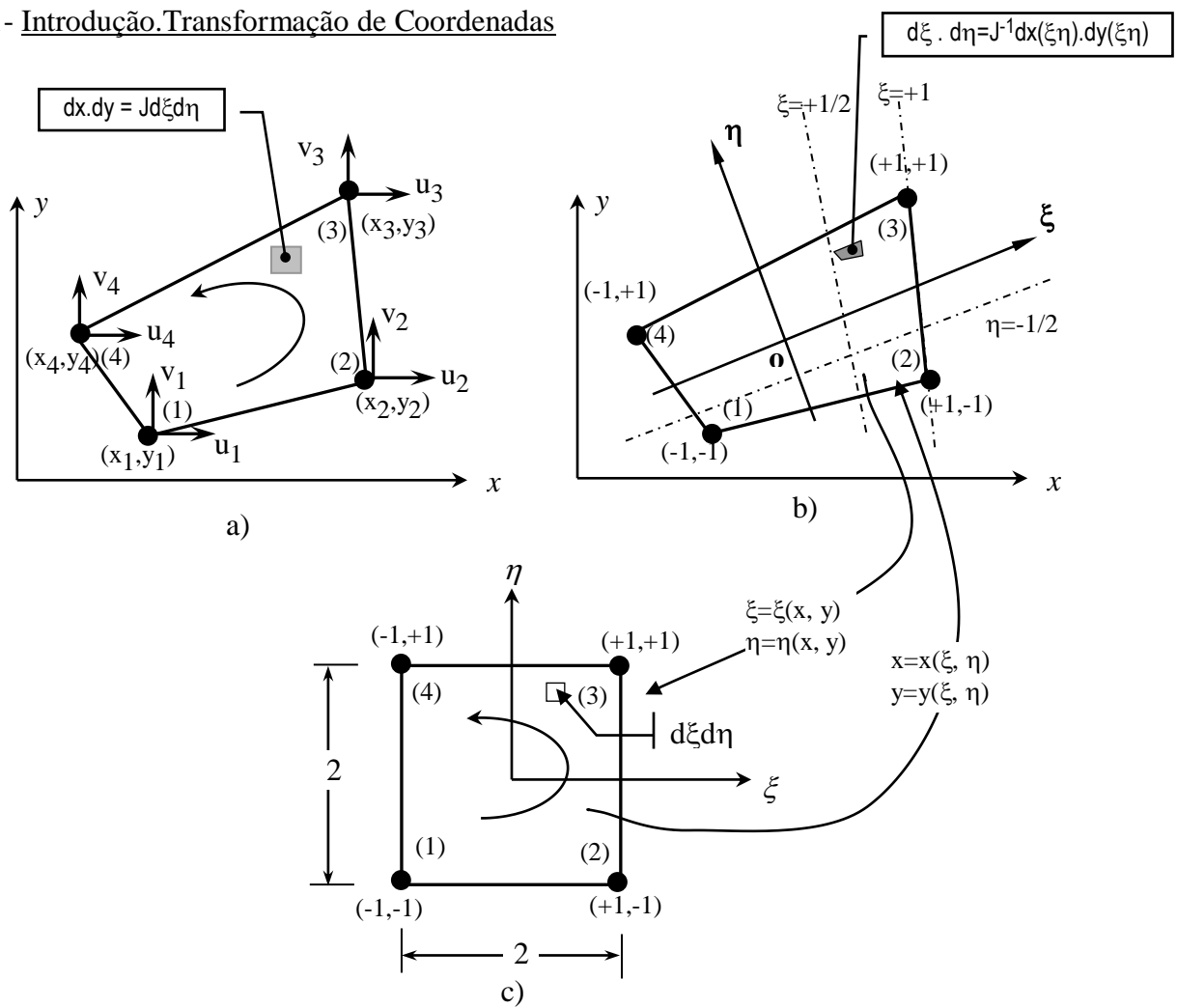


Figura 8.9

A figura 8.9.a) representa o elemento real bilinear de placa no sistema de coordenadas global (coordenadas cartesianas), enquanto a figura 8.9.b) representa o mesmo elemento no sistema de coordenadas natural (ξ, η) (também designadas por coordenadas curvilíneas [10] - porque $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ são em geral polinómios de grau superior a 1 e portanto curvas). Como as coordenadas ξ e η tem como domínio o intervalo de valores $[-1, +1]$ é usual representar o elemento mestre como na figura 8.9.c).

A geometria do elemento da figura 8.9.a) pode então ser representada por um quadrado de dimensão 2×2 . A transformação entre o elemento mestre e o elemento real é acompanhada pela transformação de coordenadas na forma:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(\xi, \eta) * x_i^e & (8.73.a) \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(\xi, \eta) * y_i^e & (8.73.b) \end{cases}$$

sendo x_i^e, y_i^e as coordenadas dos nós no referencial global, e $\psi_i(\xi, \eta)$ as funções de interpolação em coordenadas naturais (no elemento mestre) e n o número de nós. Estas funções são neste exemplo particular as funções de forma bilineares de Lagrange. Noutros casos, que não o do problema de estados planos de tensão e de deformação, também se poderá recorrer a funções de Hermite.

Atendendo às expressões (8.73), e se forem lineares, uma linha recta no elemento mestre é representada por outra linha recta no elemento real. No caso mais geral, para funções de forma não lineares (portanto de ordem superior a 1) linhas rectas no elemento mestre são representadas por curvas no elemento real.

As funções de transformação (8.73) permitem escrever as coordenadas globais (x,y) em função das coordenadas naturais (ξ, η) , isto é, transformam um ponto de coordenadas naturais (ξ, η) do elemento mestre noutra de coordenadas globais (x,y) no elemento real. A transformação inversa também é verdadeira e unívoca se o determinante do Jacobiano para todo o par ordenado (ξ, η) for positivo definido, isto é, se $\det[J(\xi, \eta)] > 0$.

É importante realçar que a transformação de um elemento real num elemento mestre só é justificável pela necessidade de se recorrer à integração numérica de Gauss para resolver os integrais que definem quer a matriz de rigidez quer o vector de forças nodais equivalentes às acções de vão. Nenhuma transformação ocorre no âmbito de fenómenos físicos ou nos elementos, na análise por elementos finitos, tratando-se pois de apenas um artifício matemático.

- Matriz Jacobina e Jacobiano

Em problemas de mecânica de sólidos o campo de deformações resulta da derivada do campo de deslocamentos $(u(x,y)$ e $v(x,y))$ em relação às coordenadas globais x e y , que no caso de estados planos de tensão ou de deformação é:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (8.21\text{-rep.})$$

O campo de deformações representa a variação de deslocamentos a respeito do incremento da coordenada global dx e/ou dy . É necessário traduzir esta variação em termos do incremento de coordenada naturais $d\xi$ e $d\eta$. Assim tomando *como exemplo* a função $u(x,y)$ e atendendo à regra de derivação por partes podemos escrever:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.74.a)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8.74.b)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.75)$$

Embora tenhamos usado a função $u(x, y)$ para deduzir esta última igualdade, ela seria válida para a derivação de qualquer outra função $f(x, y)$ definida no domínio do elemento real. A matriz quadrada que estabelece esta relação é designada por matriz Jacobiana de transformação:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

→ Introduzindo (8.73) em (8.76) a Matriz Jacobiana fica com o seguinte aspecto:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \xi} * x_i^e & \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \xi} * y_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \eta} * x_i^e & \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \eta} * y_i^e \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \psi_{1, \xi} & \psi_{2, \xi} & \psi_{3, \xi} & \psi_{4, \xi} \\ \psi_{1, \eta} & \psi_{2, \eta} & \psi_{3, \eta} & \psi_{4, \eta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

(repare que nos elementos da matriz intervêm a 1ª derivada das funções de interpolação de Lagrange)

Podemos agora escrever a operação inversa, substituindo também x e y pelas transformações definidas em (8.73) ($u(x, y) \equiv u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \equiv u(\xi, \eta)$):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J(\xi, \eta)]^{-1} * \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (8.77)$$

Como sabemos da Álgebra Linear, dada uma Matriz $[A]$ a sua inversa é $[A]^{-1}$ e define-se por:

$$[A]^{-1} = \frac{[\text{Cofactor}[A]]^T}{\det[A]} = \frac{[\text{Adjunta}[A]]}{\det[A]}, \text{ ou seja, } [A]^{-1} = \frac{[\text{Cof}[A]]^T}{\det[A]} = \frac{[\text{Adj}[A]]}{\det[A]}.$$

Em relação à matriz Jacobiana $[J(\xi, \eta)]$ pode-se escrever:

$$\text{com : } [J(\xi, \eta)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix}}{\det[J(\xi, \eta)]} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \quad (8.78)$$

A operação inversa só é possível se a matriz Jacobiana for invertível. É assim condição necessária e suficiente para que a inversa da matriz Jacobiana exista que o determinante dessa matriz, denominado por Jacobiano (J), seja positivo definido em qualquer ponto (ξ, η) :

$$J(\xi, \eta) = \det[J(\xi, \eta)] = \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} > 0 \quad (8.79)$$

As funções $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$ têm de ser contínuas, diferenciáveis e invertíveis [3].

No caso de elementos com quatro nós o $\det[J(\xi, \eta)]$ escreve-se da seguinte forma (substituir (8.73 a) e b)) na expressão (8.79):

$$\det[J(\xi, \eta)] = \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * x_i^e \right) * \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * y_i^e \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * x_i^e \right) * \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * y_i^e \right) \quad (8.80)$$

$$J_{11}^* = \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * y_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{12}^* = -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * y_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{21}^* = -\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * x_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{22}^* = \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * x_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{11}^* = \frac{+J_{22}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{12}^* = \frac{-J_{12}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{21}^* = \frac{-J_{21}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{22}^* = \frac{+J_{11}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

- Integração Numérica

A resolução das integrais respeitantes aos coeficientes da matriz de rigidez e dos elementos do vector de forças nodais equivalentes é, na maioria das vezes, trabalhosa e de difícil resolução analítica. Em alternativa recorre-se à integração numérica aplicando as fórmulas de quadratura bidimensionais de Gauss ao elemento mestre. Estas são obtidas a partir das correspondentes fórmulas de Gauss Legendre unidimensionais:

$$\iint_{\text{mestre}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{j=1}^M F(\xi, \eta_j) W_j \right) d\xi = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N F(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \quad (8.83)$$

N e M são o número de pontos de Gauss na direcção y e x e W_i e W_j os pesos respectivos. Como o grau de aproximação nas duas direcções é em geral da mesma ordem deve usar-se também o mesmo número de pontos em cada direcção.

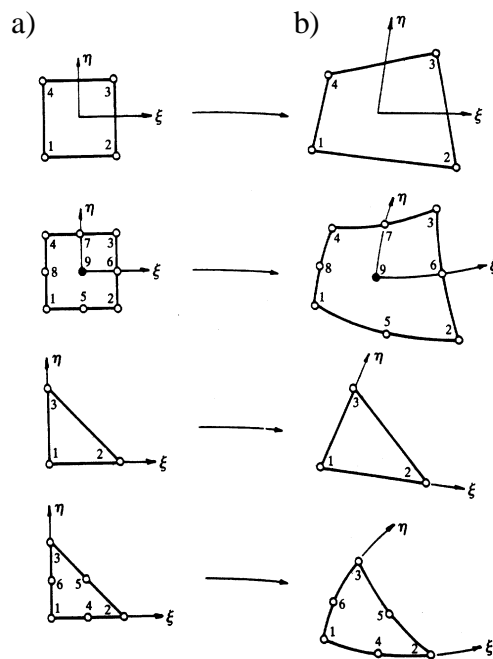
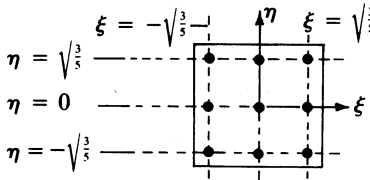
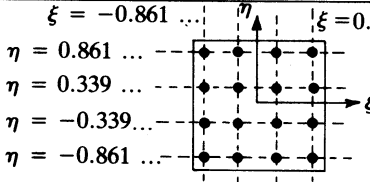


Figura 8.10- Elementos mestre lineares e quadráticos (a) e suas transformações (b)) [3]

TABLE 9.2
Selection of the integration order and location of the Gauss points for linear, quadratic, and cubic quadrilateral elements (nodes not shown)

Element type	Maximum polynomial degree	Order of integration ($r \times r$)	Order of the residual $O(h^k)$	Location of integration points* in master element
Linear ($r = 2$)	2	2×2	$O(h^4)$	
Quadratic ($r = 3$)	4	3×3	$O(h^6)$	
Cubic ($r = 4$)	6	4×4	$O(h^8)$	

*See Table 7.2 for the integration points and weights for each coordinate direction.

Figura 8.11- Localização dos pontos de Gauss [3]

GAUSS POINTS AND WEIGHTS FOR GAUSSIAN QUADRATURE

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

Number of points, n	Location, ξ_i	Weights, w_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346

Figura 8.12 - Pesos e coordenadas de pontos de Gauss [2]

8.6.2 - Elemento Rectangular Linear Isoparamétrico.

Pretende-se determinar a matriz de rigidez deste elemento e o vector de forças nodais equivalentes às forças de massa. Assim só interessa rever as etapas de 1 a 7.

PASSO 1:

O elemento está representado na figura 8.9. Tem 8 graus de liberdade e os deslocamentos nodais são agrupados no vector:

$$\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\} \quad (8.46\text{-rep})$$

aos quais se associam as forças nodais:

$$\{F^e\}^T = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}\} \quad (8.47\text{-rep})$$

A geometria do elemento é aproximada por:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum \Psi_i(\xi, \eta) * x_i^e & (8.73.a\text{-rep}) \\ y(\xi, \eta) = \sum \Psi_i(\xi, \eta) * y_i^e & (8.73.b\text{-rep}) \end{cases}$$

Sendo $\psi_i(\xi, \eta)$ as funções de forma bidimensionais de Lagrange:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad \psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (8.40 \text{ e } 8.41\text{-rep})$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad \psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (8.42 \text{ e } 8.43\text{-rep})$$

PASSO 2: Geração do Elemento Finito.**PASSO 2.1:** Função deslocamento e de interpolação (forma).

Neste elemento as funções de deslocamento $\{\delta^e(\xi, \eta)\}$ são aproximadas por polinómios de Lagrange do mesmo grau dos utilizados para a geometria:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u^e(\xi, \eta) \\ v^e(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [\Psi(\xi, \eta)] * \{\delta^e\} \quad (8.55\text{-rep})$$

com :

$$[\Psi(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & 0 & \psi_2(\xi, \eta) & 0 & \psi_3(\xi, \eta) & 0 & \psi_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_1(\xi, \eta) & 0 & \psi_2(\xi, \eta) & 0 & \psi_3(\xi, \eta) & 0 & \psi_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.56\text{-rep})$$

PASSO 2.2. Estabelecer as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos.

Como já se viu para problemas de estados planos de deformação ou tensão temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (8.57\text{-rep})$$

Atendendo a (8.77) e às definições (8.73.a e b) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{11}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} u_i^e + J_{12}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} u_i^e \\ J_{21}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} v_i^e + J_{22}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} v_i^e \\ J_{21}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} u_i^e + J_{22}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} u_i^e + J_{11}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} v_i^e + J_{12}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} v_i^e \end{Bmatrix} \quad (8.84)$$

↔

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} \quad (8.85)$$

com :

$$a_i = J_{11}^* \Psi_{i,\xi}(\xi, \eta) + J_{12}^* \Psi_{i,\eta}(\xi, \eta) \quad (8.86.a)$$

$$b_i = J_{21}^* \Psi_{i,\xi}(\xi, \eta) + J_{22}^* \Psi_{i,\eta}(\xi, \eta) \quad (8.86.b)$$

A igualdade (8.84) pode finalmente escrever-se como:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = [B] * \{\delta^e\} \quad (8.87)$$

Repare-se que [B] é uma matriz cujos coeficientes são a combinação de derivadas das funções de Lagrange, as quais são lineares. Por outro lado, os elementos da matriz [B] dependem dos elementos da matriz inversa da matriz Jacobiana, J_{ij}^* , (ver equação 8.78), os quais são determinados a partir da inversa do Jacobiano. Este valor é um número muito pequeno quando a geometria do elemento for muito alongada. Consequentemente a sua inversa será um número muito grande que ampliará artificialmente os resultados das deformações e posteriormente as tensões. É por isso de evitar a modelação de malhas com elementos alongados. Também é de evitar elementos com nós colineares ou lados côncavos, porque haverá um ou mais pontos (ξ, η)

para os quais o Jacobiano é nulo. Os nós deverão entretanto ser sempre numerados no sentido anti-horário, para que o sistema de coordenadas natural seja directo como o é o sistema de coordenadas global, caso contrário o Jacobiano será negativo.

PASSO 2.3 : Escrever as tensões em função dos deslocamentos nodais

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.61\text{-rep})$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* [B]^* \{\delta^e\} \quad (8.62\text{-rep})$$

sendo [D] a matriz das relações constitutivas para os estados planos de tensão ou de deformação.

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio.

Das relações de equilíbrio resultam a Matriz de rigidez elementar e do vector de forças de massa:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv = t \int_A [B]^T [D] [B] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.64\text{-rep})$$

Considerando a matriz [B] da expressão (8.84) a matriz de rigidez definida em (8.64) fica:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_I & K_{II} \\ K_{III} & K_{IV} \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

em que:

$$[K_I] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{11} * a_i * a_j + d_{33} * b_i * b_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.a)$$

$$[K_{II}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{12} * a_i * b_j + d_{33} * b_i * a_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.b)$$

$$[K_{III}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{21} * b_i * a_j + d_{33} * a_i * b_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.c)$$

$$[K_{IV}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{22} * b_i * b_j + d_{33} * a_i * a_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.d)$$

em que a_i e a_j estão definidas em (8.86 a) e b)) e os índices i e j variam de 1 a 4 em cada submatriz.

O vector de forças de massa vale:

$$\{F^e\} = \int_A t * [\Psi(x, y)]^T * \{f(x, y)\} dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Psi(\xi, \eta)]^T * \begin{Bmatrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66\text{-rep})$$

$$F_{2i-1} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.a)$$

$$F_{2i} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.b)$$

A matriz de rigidez depende dos coeficientes a_i e b_i definidas para a matriz [B]. Estes coeficientes são por outro lado determinados a partir dos elementos da inversa da matriz Jacobina, J_{ij}^* , (ver equação 8.78). São na verdade a razão entre dois polinómios, o que em geral não é um polinómio, e que para além disso, afectados pelos diversos factores das expressões (8.89) tornam difícil (ou impossível) integração analítica. Por este motivo de deve recorrer à integração numérica, neste caso a de Gauss. As funções integrandas em (8.90) são também de alguma complexidade e por isso se recorre novamente à integração de Gauss para a sua resolução.

O vector de forças de massa vale:

$$\left\{ F^e \right\} = \int_A t * [\Psi(x, y)]^T * \{ f(x, y) \} dx dy = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\Psi(\xi, \eta)]^T * \left\{ \begin{matrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{matrix} \right\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66-rep)$$

$$\left\{ F^e \right\} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_1(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_2(\xi, \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_3(\xi, \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} * \left\{ \begin{matrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{matrix} \right\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \dots$$

$$\dots = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \\ F_7^e \\ F_8^e \end{bmatrix} t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{matrix} \psi_1(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_1(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_2(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_2(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_3(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_3(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_4(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_4(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \end{matrix} \right\} d\xi d\eta \Rightarrow$$

$$F_{2i-1} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.a)$$

$$F_{2i} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.b)$$

PASSOS 3 a 5 - Têm tratamento igual ao dos restantes EF.

PASSO 6: Cálculo de Tensões:

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* [B]^* \{\delta^e\} \quad (8.62\text{-rep})$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{bmatrix} * \{\delta^e\}$$

$$a_i = J_{11}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\xi} + J_{12}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\eta} \quad e \quad b_i = J_{21}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\xi} + J_{22}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\eta}$$

$$J_{11}^* = \frac{\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{12}^* = \frac{-\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{21}^* = \frac{-\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{22}^* = \frac{\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

8.6 - Elemento de Placa Quadrilátero Linear Isoparamétrico

8.6.1- Introdução. Transformação de Coordenadas

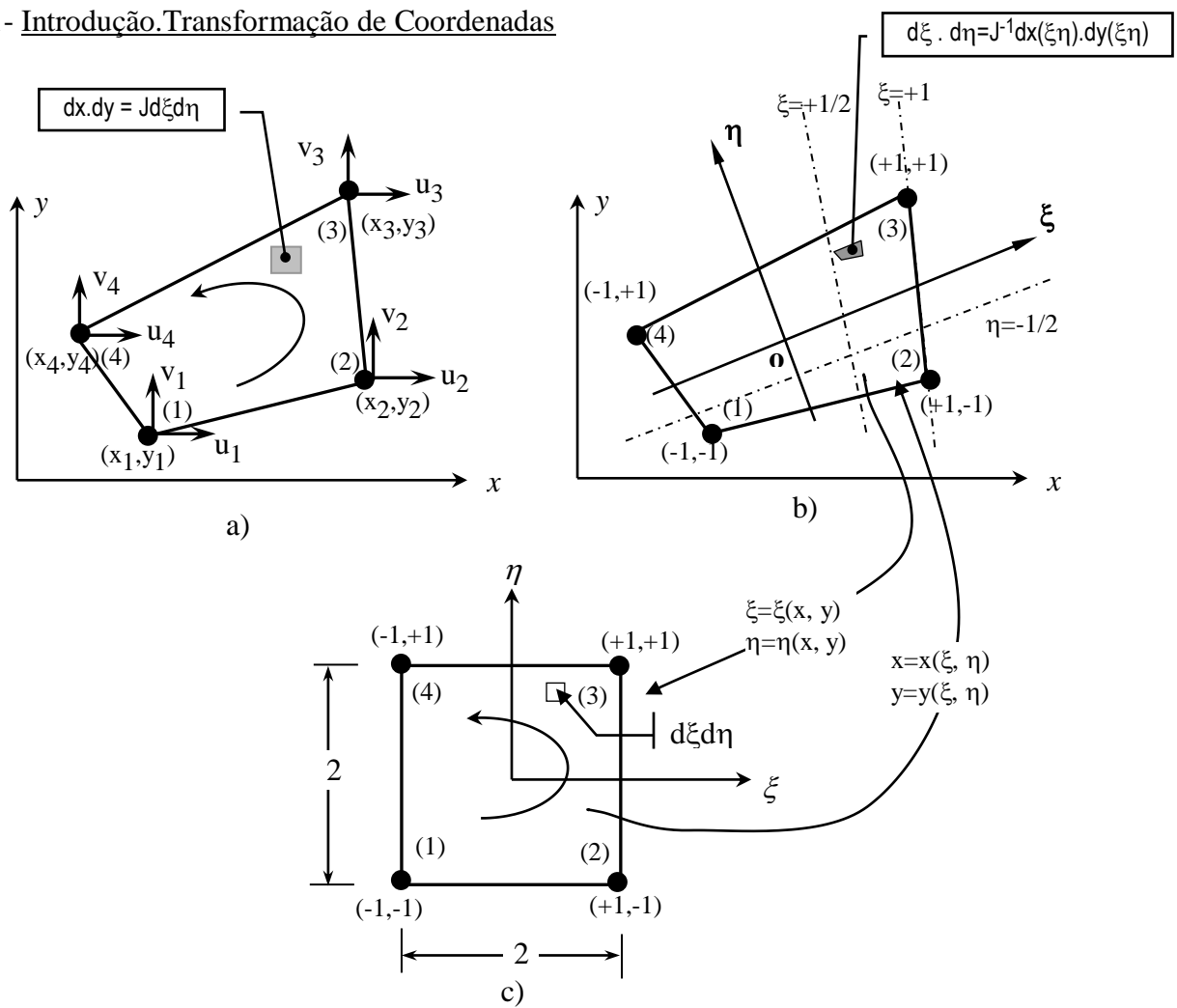


Figura 8.9

A figura 8.9.a) representa o elemento real bilinear de placa no sistema de coordenadas global (coordenadas cartesianas), enquanto a figura 8.9.b) representa o mesmo elemento no sistema de coordenadas natural (ξ, η) (também designadas por coordenadas curvilíneas [10] - porque $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ são em geral polinómios de grau superior a 1 e portanto curvas). Como as coordenadas ξ e η tem como domínio o intervalo de valores $[-1, +1]$ é usual representar o elemento mestre como na figura 8.9.c).

A geometria do elemento da figura 8.9.a) pode então ser representada por um quadrado de dimensão 2×2 . A transformação entre o elemento mestre e o elemento real é acompanhada pela transformação de coordenadas na forma:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(\xi, \eta) * x_i^e & (8.73.a) \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(\xi, \eta) * y_i^e & (8.73.b) \end{cases}$$

sendo x_i^e, y_i^e as coordenadas dos nós no referencial global, e $\psi_i(\xi, \eta)$ as funções de interpolação em coordenadas naturais (no elemento mestre) e n o número de nós. Estas funções são neste exemplo particular as funções de forma bilineares de Lagrange. Noutros casos, que não o do problema de estados planos de tensão e de deformação, também se poderá recorrer a funções de Hermite.

Atendendo às expressões (8.73), e se forem lineares, uma linha recta no elemento mestre é representada por outra linha recta no elemento real. No caso mais geral, para funções de forma não lineares (portanto de ordem superior a 1) linhas rectas no elemento mestre são representadas por curvas no elemento real.

As funções de transformação (8.73) permitem escrever as coordenadas globais (x,y) em função das coordenadas naturais (ξ, η) , isto é, transformam um ponto de coordenadas naturais (ξ,η) do elemento mestre noutra de coordenadas globais (x,y) no elemento real. A transformação inversa também é verdadeira e unívoca se o determinante do Jacobiano para todo o par ordenado (ξ,η) for positivo definido, isto é, se $\det[J(\xi,\eta)] > 0$.

É importante realçar que a transformação de um elemento real num elemento mestre só é justificável pela necessidade de se recorrer à integração numérica de Gauss para resolver os integrais que definem quer a matriz de rigidez quer o vector de forças nodais equivalentes às acções de vão. Nenhuma transformação ocorre no âmbito de fenómenos físicos ou nos elementos, na análise por elementos finitos, tratando-se pois de apenas um artifício matemático.

- Matriz Jacobina e Jacobiano

Em problemas de mecânica de sólidos o campo de deformações resulta da derivada do campo de deslocamentos $(u(x,y)$ e $v(x,y))$ em relação às coordenadas globais x e y , que no caso de estados planos de tensão ou de deformação é:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (8.21\text{-rep.})$$

O campo de deformações representa a variação de deslocamentos a respeito do incremento da coordenada global dx e/ou dy . É necessário traduzir esta variação em termos do incremento de coordenada naturais $d\xi$ e $d\eta$. Assim tomando *como exemplo* a função $u(x,y)$ e atendendo à regra de derivação por partes podemos escrever:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8.74.a)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8.74.b)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.75)$$

Embora tenhamos usado a função $u(x, y)$ para deduzir esta última igualdade, ela seria válida para a derivação de qualquer outra função $f(x, y)$ definida no domínio do elemento real. A matriz quadrada que estabelece esta relação é designada por matriz Jacobiana de transformação:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8.76)$$

→ Introduzindo (8.73) em (8.76) a Matriz Jacobiana fica com o seguinte aspecto:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \xi} * x_i^e & \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \xi} * y_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \eta} * x_i^e & \sum_{i=1}^4 \psi_{i, \eta} * y_i^e \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \psi_{1, \xi} & \psi_{2, \xi} & \psi_{3, \xi} & \psi_{4, \xi} \\ \psi_{1, \eta} & \psi_{2, \eta} & \psi_{3, \eta} & \psi_{4, \eta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

(repare que nos elementos da matriz intervêm a 1ª derivada das funções de interpolação de Lagrange)

Podemos agora escrever a operação inversa, substituindo também x e y pelas transformações definidas em (8.73) ($u(x, y) \equiv u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \equiv u(\xi, \eta)$):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J(\xi, \eta)]^{-1} * \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (8.77)$$

Como sabemos da Álgebra Linear, dada uma Matriz $[A]$ a sua inversa é $[A]^{-1}$ e define-se por:

$$[A]^{-1} = \frac{[\text{Cofactor}[A]]^T}{\det[A]} = \frac{[\text{Adjunta}[A]]}{\det[A]}, \text{ ou seja, } [A]^{-1} = \frac{[\text{Cof}[A]]^T}{\det[A]} = \frac{[\text{Adj}[A]]}{\det[A]}.$$

Em relação à matriz Jacobiana $[J(\xi, \eta)]$ pode-se escrever:

$$\text{com : } [J(\xi, \eta)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} & -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \end{bmatrix}}{\det[J(\xi, \eta)]} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \quad (8.78)$$

A operação inversa só é possível se a matriz Jacobiana for invertível. É assim condição necessária e suficiente para que a inversa da matriz Jacobiana exista que o determinante dessa matriz, denominado por Jacobiano (J), seja positivo definido em qualquer ponto (ξ, η) :

$$J(\xi, \eta) = \det[J(\xi, \eta)] = \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} > 0 \quad (8.79)$$

As funções $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$ têm de ser contínuas, diferenciáveis e invertíveis [3].

No caso de elementos com quatro nós o $\det[J(\xi, \eta)]$ escreve-se da seguinte forma (substituir (8.73 a) e b)) na expressão (8.79):

$$\det[J(\xi, \eta)] = \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * x_i^e \right) * \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * y_i^e \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * x_i^e \right) * \left(\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * y_i^e \right) \quad (8.80)$$

$$J_{11}^* = \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * y_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{12}^* = -\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * y_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{21}^* = -\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \eta} * x_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{22}^* = \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]} = \frac{\sum_{i=1}^4 \Psi_{i, \xi} * x_i^e * \frac{1}{\det[J(\xi, \eta)]}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

$$J_{11}^* = \frac{+J_{22}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{12}^* = \frac{-J_{12}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{21}^* = \frac{-J_{21}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{22}^* = \frac{+J_{11}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

- Integração Numérica

A resolução das integrais respeitantes aos coeficientes da matriz de rigidez e dos elementos do vector de forças nodais equivalentes é, na maioria das vezes, trabalhosa e de difícil resolução analítica. Em alternativa recorre-se à integração numérica aplicando as fórmulas de quadratura bidimensionais de Gauss ao elemento mestre. Estas são obtidas a partir das correspondentes fórmulas de Gauss Legendre unidimensionais:

$$\iint_{\text{mestre}} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{j=1}^M F(\xi, \eta_j) W_j \right) d\xi = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N F(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \quad (8.83)$$

N e M são o número de pontos de Gauss na direcção y e x e W_i e W_j os pesos respectivos. Como o grau de aproximação nas duas direcções é em geral da mesma ordem deve usar-se também o mesmo número de pontos em cada direcção.

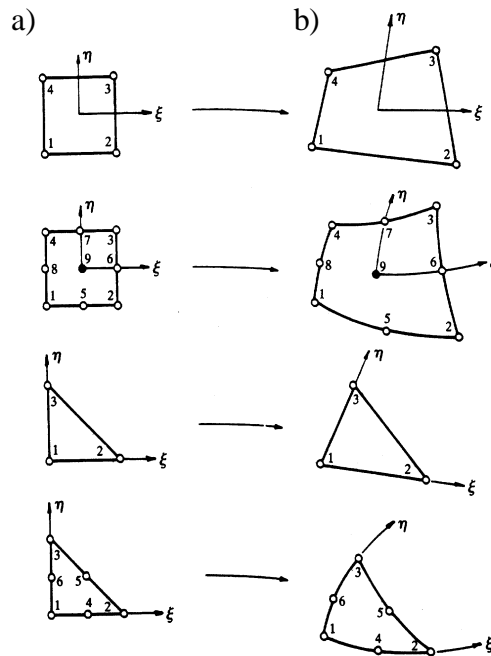
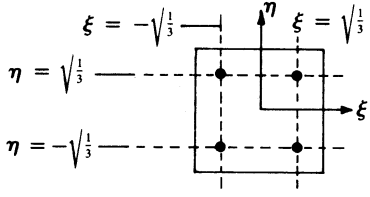
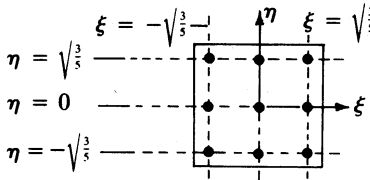
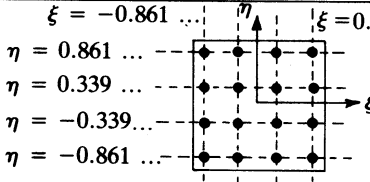


Figura 8.10- Elementos mestre lineares e quadráticos (a) e suas transformações (b)) [3]

TABLE 9.2
Selection of the integration order and location of the Gauss points for linear, quadratic, and cubic quadrilateral elements (nodes not shown)

Element type	Maximum polynomial degree	Order of integration ($r \times r$)	Order of the residual $O(h^k)$	Location of integration points* in master element
Linear ($r = 2$)	2	2×2	$O(h^4)$	
Quadratic ($r = 3$)	4	3×3	$O(h^6)$	
Cubic ($r = 4$)	6	4×4	$O(h^8)$	

*See Table 7.2 for the integration points and weights for each coordinate direction.

Figura 8.11- Localização dos pontos de Gauss [3]

GAUSS POINTS AND WEIGHTS FOR GAUSSIAN QUADRATURE

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

Number of points, n	Location, ξ_i	Weights, w_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346

Figura 8.12 - Pesos e coordenadas de pontos de Gauss [2]

8.6.2 - Elemento Rectangular Linear Isoparamétrico.

Pretende-se determinar a matriz de rigidez deste elemento e o vector de forças nodais equivalentes às forças de massa. Assim só interessa rever as etapas de 1 a 7.

PASSO 1:

O elemento está representado na figura 8.9. Tem 8 graus de liberdade e os deslocamentos nodais são agrupados no vector:

$$\{\delta^e\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\} \quad (8.46\text{-rep})$$

aos quais se associam as forças nodais:

$$\{F^e\}^T = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}\} \quad (8.47\text{-rep})$$

A geometria do elemento é aproximada por:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum \Psi_i(\xi, \eta) * x_i^e & (8.73.a\text{-rep}) \\ y(\xi, \eta) = \sum \Psi_i(\xi, \eta) * y_i^e & (8.73.b\text{-rep}) \end{cases}$$

Sendo $\psi_i(\xi, \eta)$ as funções de forma bidimensionais de Lagrange:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad \psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (8.40 \text{ e } 8.41\text{-rep})$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad \psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (8.42 \text{ e } 8.43\text{-rep})$$

PASSO 2: Geração do Elemento Finito.**PASSO 2.1:** Função deslocamento e de interpolação (forma).

Neste elemento as funções de deslocamento $\{\delta^e(\xi, \eta)\}$ são aproximadas por polinómios de Lagrange do mesmo grau dos utilizados para a geometria:

$$\{\delta^e(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u^e(\xi, \eta) \\ v^e(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [\Psi(\xi, \eta)] * \{\delta^e\} \quad (8.55\text{-rep})$$

com :

$$[\Psi(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & 0 & \psi_2(\xi, \eta) & 0 & \psi_3(\xi, \eta) & 0 & \psi_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_1(\xi, \eta) & 0 & \psi_2(\xi, \eta) & 0 & \psi_3(\xi, \eta) & 0 & \psi_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (8.56\text{-rep})$$

PASSO 2.2. Estabelecer as relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos.

Como já se viu para problemas de estados planos de deformação ou tensão temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (8.57\text{-rep})$$

Atendendo a (8.77) e às definições (8.73.a e b) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{11}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} u_i^e + J_{12}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} u_i^e \\ J_{21}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} v_i^e + J_{22}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} v_i^e \\ J_{21}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} u_i^e + J_{22}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} u_i^e + J_{11}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\xi} v_i^e + J_{12}^* \sum_{i=1}^4 \Psi_{i,\eta} v_i^e \end{Bmatrix} \quad (8.84)$$

↔

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\xi, \eta) \\ \varepsilon_y(\xi, \eta) \\ \gamma_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} \quad (8.85)$$

com :

$$a_i = J_{11}^* \Psi_{i,\xi}(\xi, \eta) + J_{12}^* \Psi_{i,\eta}(\xi, \eta) \quad (8.86.a)$$

$$b_i = J_{21}^* \Psi_{i,\xi}(\xi, \eta) + J_{22}^* \Psi_{i,\eta}(\xi, \eta) \quad (8.86.b)$$

A igualdade (8.84) pode finalmente escrever-se como:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = [B] * \{\delta^e\} \quad (8.87)$$

Repare-se que [B] é uma matriz cujos coeficientes são a combinação de derivadas das funções de Lagrange, as quais são lineares. Por outro lado, os elementos da matriz [B] dependem dos elementos da matriz inversa da matriz Jacobiana, J_{ij}^* , (ver equação 8.78), os quais são determinados a partir da inversa do Jacobiano. Este valor é um número muito pequeno quando a geometria do elemento for muito alongada. Consequentemente a sua inversa será um número muito grande que ampliará artificialmente os resultados das deformações e posteriormente as tensões. É por isso de evitar a modelação de malhas com elementos alongados. Também é de evitar elementos com nós colineares ou lados côncavos, porque haverá um ou mais pontos (ξ, η)

para os quais o Jacobiano é nulo. Os nós deverão entretanto ser sempre numerados no sentido anti-horário, para que o sistema de coordenadas natural seja directo como o é o sistema de coordenadas global, caso contrário o Jacobiano será negativo.

PASSO 2.3 : Escrever as tensões em função dos deslocamentos nodais

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* \{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (8.61\text{-rep})$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* [B]^* \{\delta^e\} \quad (8.62\text{-rep})$$

sendo [D] a matriz das relações constitutivas para os estados planos de tensão ou de deformação.

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio.

Das relações de equilíbrio resultam a Matriz de rigidez elementar e do vector de forças de massa:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dv = t \int_A [B]^T [D] [B] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.64\text{-rep})$$

Considerando a matriz [B] da expressão (8.84) a matriz de rigidez definida em (8.64) fica:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_I & K_{II} \\ K_{III} & K_{IV} \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

em que:

$$[K_I] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{11} * a_i * a_j + d_{33} * b_i * b_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.a)$$

$$[K_{II}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{12} * a_i * b_j + d_{33} * b_i * a_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.b)$$

$$[K_{III}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{21} * b_i * a_j + d_{33} * a_i * b_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.c)$$

$$[K_{IV}] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [d_{22} * b_i * b_j + d_{33} * a_i * a_j] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.89.d)$$

em que a_i e a_j estão definidas em (8.86 a) e b)) e os índices i e j variam de 1 a 4 em cada submatriz.

O vector de forças de massa vale:

$$\{F^e\} = \int_A t * [\Psi(x, y)]^T * \{f(x, y)\} dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\Psi(\xi, \eta)]^T * \begin{Bmatrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66\text{-rep})$$

$$F_{2i-1} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.a)$$

$$F_{2i} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.b)$$

A matriz de rigidez depende dos coeficientes a_i e b_i definidas para a matriz [B]. Estes coeficientes são por outro lado determinados a partir dos elementos da inversa da matriz Jacobina, J_{ij}^* , (ver equação 8.78). São na verdade a razão entre dois polinómios, o que em geral não é um polinómio, e que para além disso, afectados pelos diversos factores das expressões (8.89) tornam difícil (ou impossível) integração analítica. Por este motivo de deve recorrer à integração numérica, neste caso a de Gauss. As funções integrandas em (8.90) são também de alguma complexidade e por isso se recorre novamente à integração de Gauss para a sua resolução.

O vector de forças de massa vale:

$$\left\{ F^e \right\} = \int_A t * [\Psi(x, y)]^T * \{ f(x, y) \} dx dy = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\Psi(\xi, \eta)]^T * \left\{ \begin{matrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{matrix} \right\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.66-rep)$$

$$\left\{ F^e \right\} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_1(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_2(\xi, \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_3(\xi, \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \psi_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} * \left\{ \begin{matrix} f_x(\xi, \eta) \\ f_y(\xi, \eta) \end{matrix} \right\} \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \dots$$

$$\dots = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \\ F_7^e \\ F_8^e \end{bmatrix} t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_1(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_2(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_2(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_3(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_3(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_4(\xi, \eta) f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \\ \psi_4(\xi, \eta) f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] \end{bmatrix} d\xi d\eta \Rightarrow$$

$$F_{2i-1} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_x(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.a)$$

$$F_{2i} = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi_i(\xi, \eta) * f_y(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (8.90.b)$$

PASSOS 3 a 5 - Têm tratamento igual ao dos restantes EF.

PASSO 6: Cálculo de Tensões:

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]^* [B]^* \{\delta^e\} \quad (8.62\text{-rep})$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{bmatrix} * \{\delta^e\}$$

$$a_i = J_{11}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\xi} + J_{12}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\eta} \quad e \quad b_i = J_{21}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\xi} + J_{22}^* \psi_i(\xi, \eta)_{,\eta}$$

$$J_{11}^* = \frac{\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{12}^* = \frac{-\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{21}^* = \frac{-\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\det[J(\xi, \eta)]}, \quad J_{22}^* = \frac{\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\det[J(\xi, \eta)]}$$

9. Funções de Deslocamento, de Interpolação e de Forma e Elementos de Ordem Superior.

9.1.- CrITÉrios de Escolha da Função Deslocamento Bidimensionais

A função deslocamento $[f(x,y)]$ reduz um problema com infinitos graus de liberdade, os graus de liberdade de cada ponto no interior do elemento finito, a um problema com finitos graus de liberdade, os graus de liberdade dos seus nós. Este procedimento pode comprometer a determinação da solução exacta.

De modo a garantir que o modelo se deforme tanto quanto possível próximo do elemento real, melhorando assim a solução primária (aquela em termos de deslocamentos), as funções de deslocamento devem obedecer aos seguintes critérios:

- (i) assegurar continuidade no interior do elemento,
- (ii) assegurar compatibilidade entre elementos adjacentes;
- (iii) incluir um modo de deformação equivalente ao deslocamento de corpo rígido, o qual deverá não introduzir deformações ou tensões no elemento;
- (iv) o estado de deformação não depende da dimensão e orientação do elemento.

No caso de se adoptar como função deslocamento um polinómio o critério (i) é cumprido. A continuidade inter-elementar num determinado bordo do elemento (critério ii) é satisfeita se os deslocamentos ao longo desse bordo forem função apenas dos deslocamentos dos nós existentes nesse bordo. Garante-se sempre continuidade de deslocamentos entre os elementos nos seus nós. Para garantir o critério (iii) os polinómios devem ter um termo constante.

Em princípio o número de termos do polinómio da função deslocamento deverá ser igual ao número de graus de liberdade do elemento. Por exemplo, no estado plano de tensão as componentes do campo de deslocamentos $u(x,y)$ e $v(x,y)$ respectivamente nas direcções x e y do referencial cartesiano são independentes. Sendo o elemento triangular de três nós, cada uma das funções de deslocamento terá três termos, por serem três os deslocamentos nodais independentes em cada direcção:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5x + \alpha_6y$$

Os termos daqueles polinómios deverão ser escolhidos de acordo com o triângulo de Pascal quer em elementos triangulares, figura 9.1, quer em elementos rectangulares, figura 9.9. Deverão constituir polinómios completos ficando assim assegurada a invariância geométrica referida no requisito (iv) ou condição de isotropia do elemento

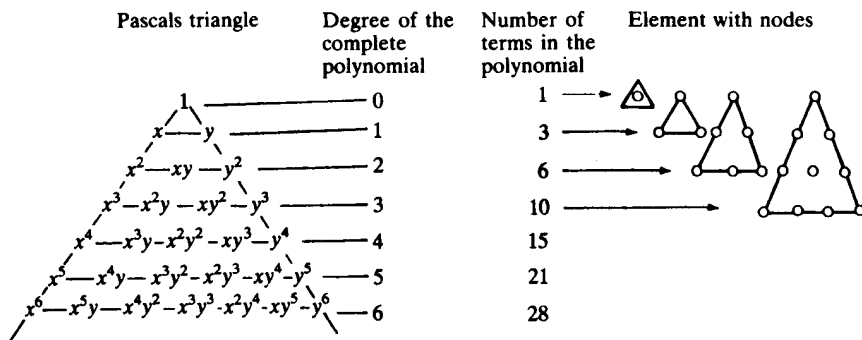


Figura 9.1 - Triângulo de Pascal para Elementos Triangulares [3]

9.2 - Funções de Interpolação e de Forma

As funções de forma $\psi_i(x,y)$, devidamente agrupadas na matriz das funções de forma $[\psi(x,y)]$, relacionam os deslocamentos no interior do elemento com os deslocamentos nodais através de:

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] * [A]^{-1} * \{\delta^e\} = [\psi(x, y)] * \{\delta^e\}$$

Os deslocamentos no interior do elemento finito são obtidos por interpolação dos deslocamentos nodais com suporte das funções $[\psi(x,y)]$ as quais por este motivo também se podem ser designadas por funções de interpolação. Por outro lado o termo "forma" advém do facto de $\psi_i(x,y)$ associada ao grau de liberdade i do elemento ter uma forma bem definida, isto é, ser unitária nesse grau de liberdade e nula nos restantes, e ser contínua no domínio. Entretanto os critérios de escolha das funções deslocamento (secção 9.1) são aplicáveis também às funções de forma, na medida em que estas resultam daquelas pela multiplicação de uma matriz de coeficientes ($[A]^{-1}$). Contudo, as funções de forma podem ser as famílias de funções de Lagrange e de Hermite. Aliás estas funções de forma são as mais usuais em problemas de mecânica de sólidos. Recorrem-se às funções de interpolação de Lagrange (unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais) quando se pretende a interpolação da variável dependente do problema a partir dos seus valores nos nós, ou seja, a interpolação de funções de continuidade C^0 . A família de funções de interpolação de Hermite são usadas quando se pretende a interpolação em termos da variável dependente e também a sua primeira derivada nos nós do elemento, ou seja, para funções com continuidade C^1 . Por razões de natureza numérica é muito vantajoso gerar as funções de forma acima mencionadas em coordenadas naturais.

9.3 - Família de Elementos Triangulares

Os elementos triangulares são frequentemente evitados devido às suas pobres performances, mas como são muito simples tornam-se úteis para quem se inicia no estudo de elementos finitos. Por outro lado, têm a vantagem de representar melhor formas geométricas curvas quando comparados com elementos rectangulares, sendo também os algoritmos automáticos de geração de malha mais simples que os relativos a elementos rectangulares [4].

Os elementos triangulares também podem ser obtidos a partir de elementos rectangulares fazendo nestes coincidir dois nós de canto, elementos quadriláteros degenerados [2]. Esta técnica é válida também para elementos isoparamétricos. A integração numérica permite o uso de tais elementos, mas o nível de precisão é menor do que nos elementos genuinamente triangulares.

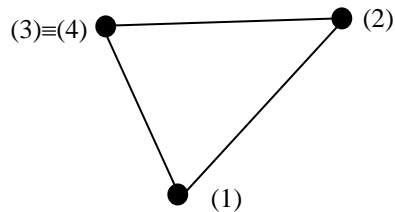


Figura 9.2 - Elemento quadrilátero degenerado num elemento triangular

9.3.1 - Elemento triangular de deformação constante (CST)

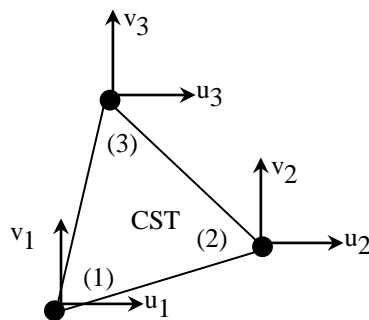


Figura 9.3

É o elemento plano mais simples constituído por três nós. O campo de deformações é constante no seu interior e por isso se designa de elemento triangular de deformação constante (constant strain triangle - CST). Também é chamado de *elemento triangular linear* porque o campo de deslocamentos no interior do elemento é linear em x e y.

Os lados do elemento mantêm-se rectos durante a deformação. O campo de tensões é constante visto ser proporcional ao de deformações. Por consenso lêem-se as tensões no baricentro deste elemento, ou seja no ponto de coordenadas $(x_{cg} = \Sigma x_i/3 ; y_{cg} = \Sigma y_i/3)$.

Este elemento é relativamente pouco eficaz mas, por ter poucos graus de liberdade, é útil como introdução ao estudo de matérias relativas à análise estrutural por elementos finitos.

9.3.1.1 - Coordenadas de área

Como vimos no capítulo 8 deduzimos as funções de interpolação para o elemento triangular CST representadas pela expressão (8.20). Cada uma das funções de forma $\psi_i(x,y)$ então determinadas não são mais do que as coordenadas de área lineares L_i do elemento triangular. Qualquer ponto P de coordenadas globais (x, y) no interior do elemento pode ser definido em pelo terno ordenado (L_1, L_2, L_3) cujos elementos são as coordenadas de área desse ponto. L_i é a razão entre a área A_i e a área total do triângulo A. A área A_i é formada pelo triângulo cuja base é o lado oposto ao nó i e cujo vértice é o ponto P (ver figura 9.4)

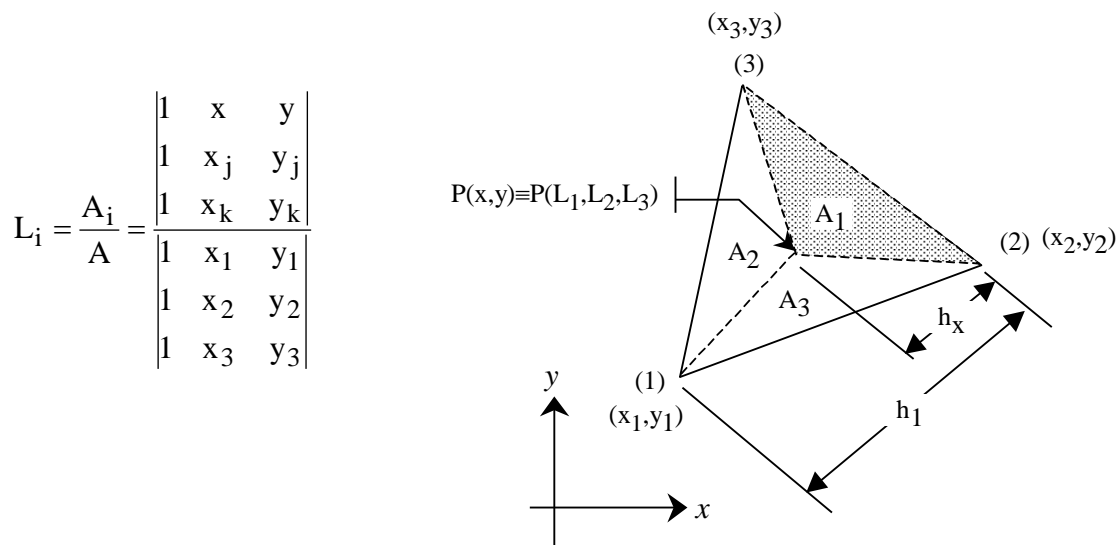


Figura 9.4 - Coordenadas de área

L_i ainda pode ser definido pela razão entre as alturas h_x e h_i . O contador i (em L_i) varia sempre de 1 a 3 e representa os nós dos vértices do triângulo.

Qualquer grandeza, por exemplo $u(x,y)$, no interior do elemento com n nós pode ser obtida por uma combinação linear dos valores que ela assume nos seus nós:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(L_1, L_2, L_3) * u_i^e$$

sendo (L_1, L_2, L_3) as coordenadas de área do ponto (x, y) e ψ_i funções de forma definidas em termos das coordenadas de área [3, 5]. Estas funções de forma pertencem à família de funções de forma de Lagrange em coordenadas de área para elementos triangulares [3] mas não são aqui desenvolvidas. Apresentam-se de seguida as funções de forma para alguns tipos de elementos, incluindo os de ordem superior. É oportuno dizer que as integrações numéricas necessárias efectuar para calcular as matrizes de rigidez e vectores de força são também escritas em termos destas coordenadas.

Elemento Linear (ver figura 9.5.a))

$$\psi_1 = L_1, \quad \psi_2 = L_2, \quad \psi_3 = L_3$$

Elemento Quadrático (ver figura 9.5.b))

$$\psi_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad \psi_2 = 4L_1L_2, \quad \psi_3 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$\psi_4 = 4L_2L_3, \quad \psi_5 = L_3(2L_3 - 1), \quad \psi_6 = 4L_1L_3$$

Elemento Cúbico (ver figura 9.5.b))

$$\psi_1 = \frac{L_1}{2}(3L_1 - 1)(3L_2 - 2) \quad \psi_2 = \frac{9}{2}(L_1L_2)(3L_1 - 1) \quad \psi_3 = \frac{9}{2}(L_1L_2)(3L_2 - 1)$$

$$\psi_4 = \frac{L_2}{2}(3L_1 - 1)(3L_2 - 2) \quad \psi_5 = \frac{9}{2}(L_2L_3)(3L_2 - 1) \quad \psi_6 = \frac{9}{2}(L_2L_3)(3L_3 - 1)$$

$$\psi_7 = \frac{L_3}{2}(3L_3 - 1)(3L_3 - 2) \quad \psi_8 = \frac{9}{2}(L_1L_3)(3L_2 - 1) \quad \psi_9 = \frac{9}{2}(L_1L_3)(3L_3 - 1)$$

$$\psi_{10} = 27(L_1L_2L_3)$$

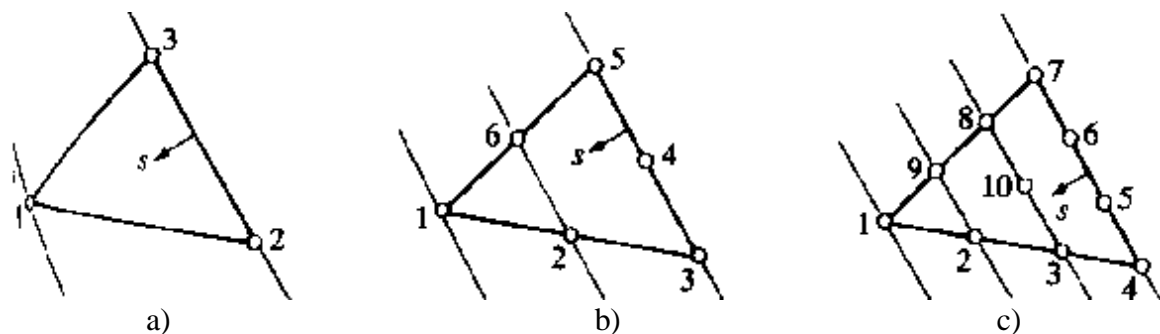


Figura 9.5 -

9.3.2 - Elementos Triangulares de Ordem Superior

Os polinómios de interpolação de grau superior a 1 são gerados com recurso ao triângulo de Pascal (ver figura 9.1), o qual define os termos necessários para se obter um polinómio completo até certo grau. Um elemento triangular com k nós por lado e igualmente espaçados tem no total n nós. As funções de interpolação serão definidas por polinómios de grau p .

$$n = \frac{1}{2} * k * (k + 1) \quad p = k - 1$$

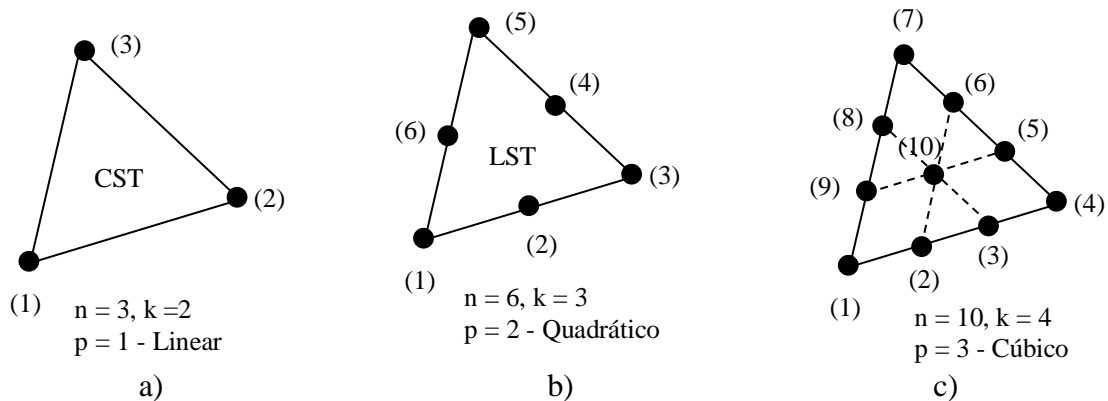


Figura 9.6

Por exemplo para o elemento de 10 nós a função de interpolação de deslocamentos na direcção x é:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} x^3$$

Verificamos que nos elementos com nós interiores, como o elemento de 10 nós, apenas os nós que estão na fronteira contribuem para a imposição de continuidade dos deslocamentos inter-elementar. Só estes nós contribuem de forma explícita para a obtenção da equação de equilíbrio global [5]. Assim, recorrendo à técnica de *condensação estática*, podemos escrever quer a matriz de rigidez do elemento quer o vector de forças nodais em função de apenas dos graus de liberdade dos nós da fronteira. Estas novas matrizes e vector de forças apresentam de forma implícita as rigidezes e forças nodais associadas ao(s) nó(s) interior(es).

9.3.2.1 - Elemento Triangular de Deformação Linear (LST)

Este elemento está apresentado na figura (9.6.b), é constituído por 6 nós, três nos cantos e três a meio dos lados. Em cada direcção o campo de deslocamentos é interpolado por um polinómio quadrático, e a sua derivada, o campo de deformações, é linear em x e y . Por este último motivo o elemento é designado por elemento triangular de deformação linear (linear

strain triangle - LST). Também pode ser denominado por *elemento triangular quadrático* em virtude do o campo de deslocamentos o ser. Os lados do elemento deformam-se como curvas do segundo grau. A matriz de rigidez é mais facilmente deduzida se se adoptarem "coordenadas de área", sendo também necessária integração numérica. Os lados do elemento real podem ser curvos. A figura 9.7 mostra duas funções de forma do elemento LST.

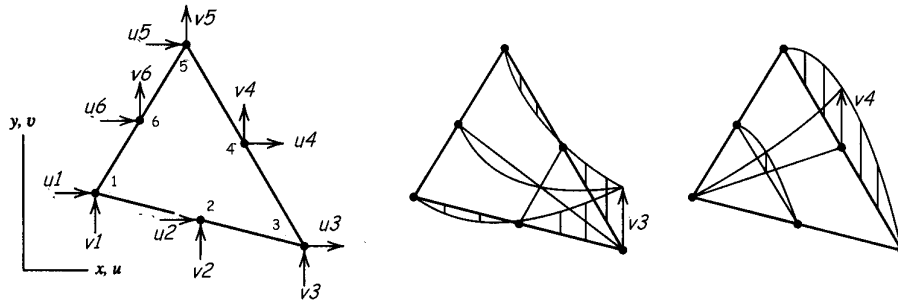


Figura 9.7 - Funções de Forma para o LST (adaptado de [1])

9.3.3 - Elemento Triangular Isoparamétrico

Uma vantagem dos elementos isoparamétricos é que mantêm a continuidade C^0 independentemente da orientação, forma da fronteira (recta ou curva), devido ao facto da função de deslocamento adoptada ter todos os termos do polinómio ("completeness") [4].

Os elementos isoparamétricos, sobretudo os quadráticos ou de ordem superior adaptam bem a geometria do elemento. Estes elementos mestre, triangulares ou quadriláteros, têm sempre as mesmas características: lados rectos, e nós nos lados colocados equidistantemente. Para interpolar correctamente os deslocamentos quadráticos, é recomendável que o elemento real, tenha as mesmas características que o elemento mestre, de tal modo que ele apareça como simples escala do elemento mestre. Em geral, quanto mais o elemento real se desviar do elemento mestre menor exactidão existirá. Este desvio de características chama-se "distorção". Embora haja elementos mais sensíveis do que outros à distorção, esta pode traduzir-se por vezes no "locking", que é a rigidificação do elemento comportando-se como corpo rígido.

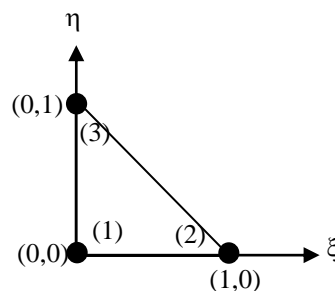


Figura 9.8 - Elemento mestre CST isoparamétrico [4]

Apresenta-se na figura 9.8 o elemento triangular isoparamétrico de deformação constante sendo as funções de forma deste elemento as seguintes:

$$\psi_1(\xi,\eta) = L_1=1-\xi-\eta, \quad \psi_2(\xi,\eta) = L_2= \xi, \quad \psi_3(\xi,\eta) = L_3 = \eta$$

O elemento triangular isoparamétrico de deformação linear pode ser visto na figura 8-10. Para elementos triangulares isoparamétricos de ordem superior é conveniente que os nós dos lados no elemento real se situem na zona central (entre 1/4 a 3/4 do lado) de modo a que o Jacobiano não se anule [2].

9.4- Família de Elementos Quadriláteros

Analogamente à família de elementos triangulares de Lagrange, os elementos rectangulares de Lagrange também podem ser desenvolvidos a partir do triângulo de Pascal, como se mostra na figura 9.9. Os elementos rectangulares são mais "robustos" que os triangulares do mesmo tipo (linear, quadrático, etc) pois incluem mais um termo na função de aproximação de deslocamentos. Estes elementos apresentam um bom compromisso entre exactidão e custo de cálculo [4].

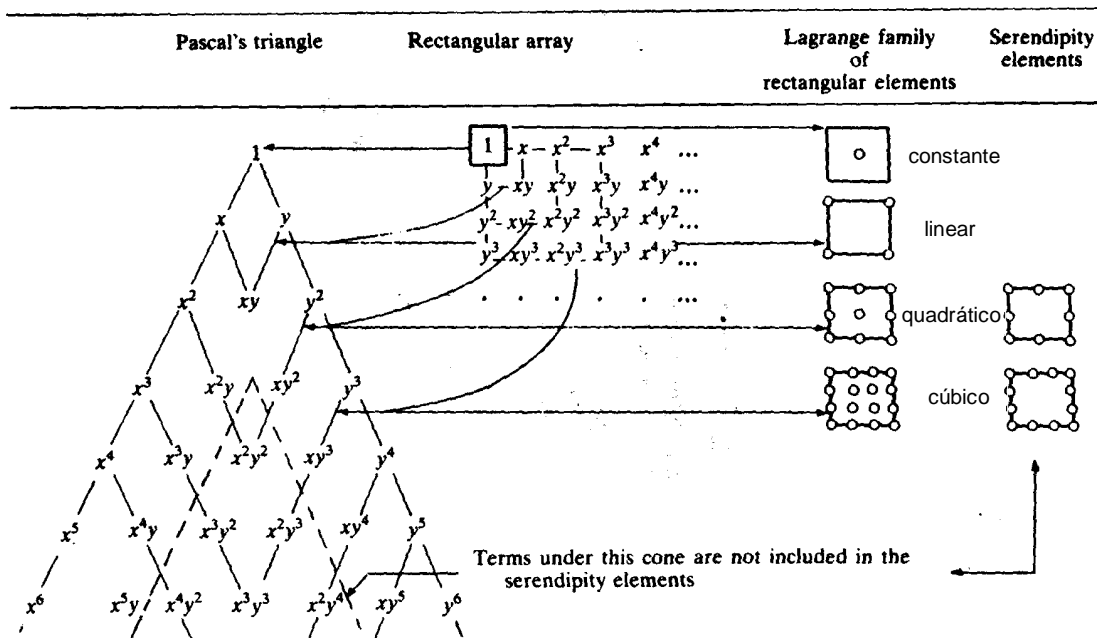


Figura 9.9 - Triângulo de Pascal para elementos quadriláteros [adaptado de 3].

Para elementos de Lagrange rectangulares os polinómios das funções de interpolação não são completos, e por isso não são geometricamente invariantes. Os lados dos elementos devem ser paralelos ao referencial cartesiano. Para superar esta limitação é conveniente fazer

uma transformação de coordenadas para o referencial natural (ξ O η), a qual é também útil para a formulação isoparamétrica.

Como já vimos em secções anteriores a família de funções bidimensionais de Lagrange resultam do produto vectorial de famílias de funções polinomiais unidimensionais de Lagrange (ver secção 8.5.1).

9.4.1 - Elemento Quadrilátero Bilinear ou Elemento de Quatro Nós (Q4)

É o elemento rectangular mais simples caracterizado por ter quatro nós, 8 graus de liberdade. O elemento é bilinear porque as funções de aproximação de deslocamento resultam do produto de funções lineares em cada direcção, $(\alpha_1 + \alpha_2 x)(\alpha_3 + \alpha_4 y)$. O campo de deslocamentos é:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

O campo de deformações é:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_7 + \alpha_8 x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_4 x + \alpha_8 y$$

Considere-se uma fibra na direcção x . Verifica-se que as deformações ε_x são constantes em x mas lineares em y (e vice-versa). O campo de deformações ε_x é então independente de x o que significa que este tipo de elemento não modela bem paredes em consola sujeitas à flexão. De facto aquelas deformações reais variam segundo x o que não acontece no modelo no interior de cada elemento, embora o elemento apresente a variação daquelas deformações segundo y , o que acontece na realidade. Este tipo de elemento ao deformar-se apresenta os lados rectos, e por isso não garante a perpendicularidade de lados adjacentes, o que deveria acontecer nas peças à flexão pura. Os elementos apresentam distorções de corte segundo x e y . Devido a estas particularidades o elemento Q4 apresenta-se artificialmente mais rígido quando usado para modelar painéis de parede longos (segundo x) em flexão.

Entretanto o campo de deslocamentos $(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ pode ser interpolado pelas funções de

$$\text{Lagrange bidimensionais: } u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi, \eta) * u_i^e \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi, \eta) * v_i^e$$

sendo as funções de interpolação as funções de Lagrange seguintes:

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned}$$

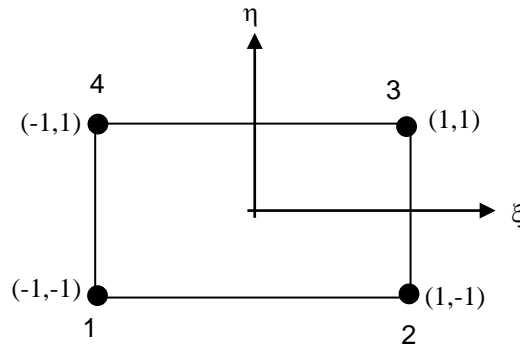


Figura 9.10 - Elemento Q4.

Avaliando as funções de aproximação de deslocamentos verificamos que estas variam linearmente em ξ e η , chegando-se às mesmas conclusões quando estas eram definidas em coordenadas locais (x, y) .

Na prática as tensões nestes elementos são determinadas nos pontos de Gauss, os quais também são usados para efectuar a integração numérica [2]. Os valores das tensões nestes pontos podem depois ser extrapolados para se determinarem os valores nodais.

9.4.2 - Elemento Quadrilátero Quadrático ou Elemento de Nove Nós (Q9)

Multiplicando vectorialmente as funções de interpolação unidimensionais cúbicas definidas pelas expressões 4.12 obtemos as funções de interpolação bidimensionais:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \\ \psi_3(\xi) \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \psi_1(\eta) & \psi_2(\eta) & \psi_3(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & \psi_4(\xi, \eta) & \psi_7(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) & \psi_5(\xi, \eta) & \psi_8(\xi, \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) & \psi_6(\xi, \eta) & \psi_9(\xi, \eta) \end{Bmatrix}$$

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, \quad \psi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, \quad \psi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2), \quad \psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta, \quad \psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$\psi_9(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\xi\eta$$

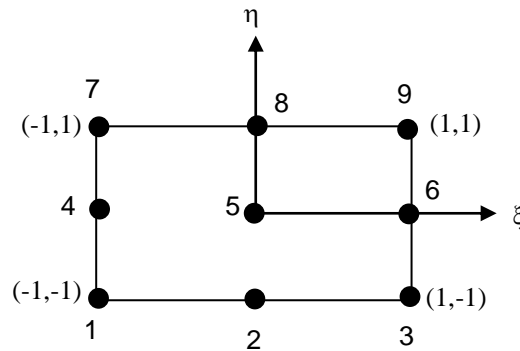


Figura 9.11- Elemento Q9.

Este tipo de elemento é muito eficaz na prática de elementos finitos. Elementos de ordem superior conduzem a uma interpolação de ordem superior, de melhor precisão. Permitem também detectar melhor as variações de tensão junto de zonas pontuais da estrutura como cantos, furos, cordões de soldadura, etc.

Os elementos de ordem superior também podem ser usados para definir a geometria, recorrendo-se então à formulação isoparamétrica. Podem ter lados curvos se assim se desejar. Contudo em estruturas regulares, é possível definir elementos subparamétricos usando funções de nove nós para interpolar os deslocamentos e apenas de quatro nós para definir a geometria.

9.4.3 - Elemento Quadrilátero Quadrático (Q8)

Pode ser obtido do elemento anterior por condensação estática dos graus de liberdade do nó 5. Estes graus de liberdade passam a ser dependentes dos restantes.

9.4.4 - Elemento Serendipity de oito nós, ou Serendipiano quadrático.

Este elemento pertence à família de elementos *serendipianos*. Todos os nós estão localizados na fronteira. As funções de interpolação de deslocamentos não contêm os termos do polinómio identificados para além da linha a tracejado da figura 9.9. As funções de forma em coordenadas naturais são as seguintes:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta), & \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta), & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta) \end{aligned}$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$\psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi - \eta),$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$\psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta)$$

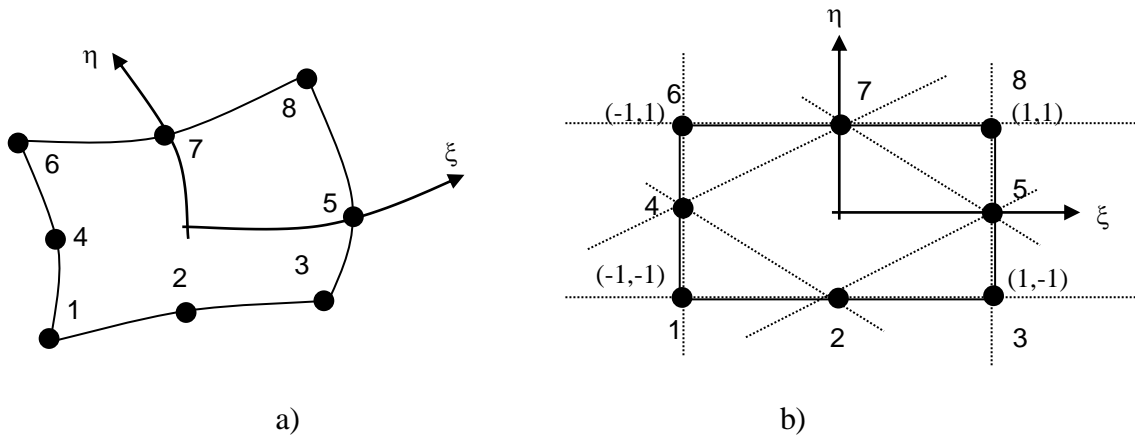


Figura 9.12 - Elemento no espaço xOy e no espaço $\xi O\eta$

A função de forma ψ_1 tem a particularidade de se anular ao longo das linhas a tracejado que passam pelos nós 2 e 4, 6 e 8, e, 3 e 8. A função de forma ψ_2 do nó 2, anula-se ao longo dos lados 3 e 8, 6 e 8, e, 1 e 6. Para os restantes nós podem deduzir-se regras semelhantes. A figura 9.13 mostra as funções de forma para um elemento quadrático de nove nós (de Lagrange) e um elemento serendipiano de oito nós.

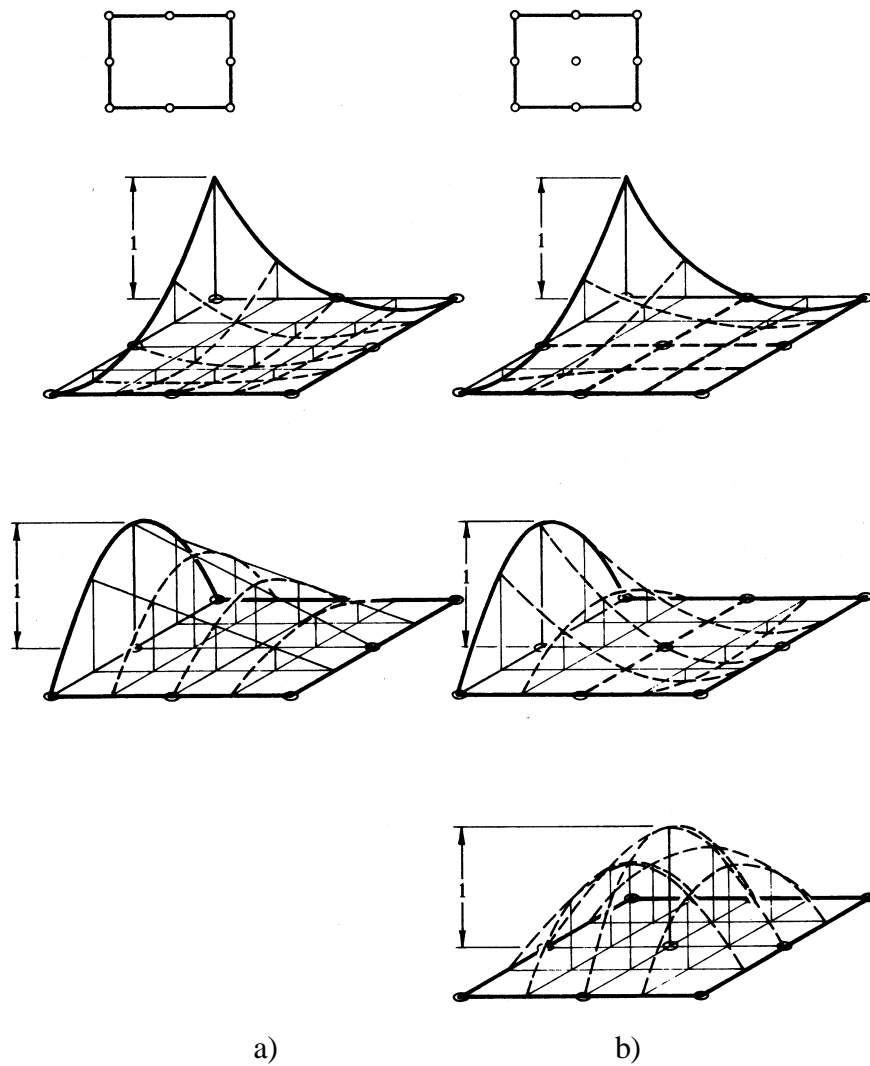


Figura 9.13 - Funções de forma para famílias: a) "serendipianas" e b) "lagrangeanas" [10]

9.4.5 - Elemento Serendipity de doze e dezassete nós, ou Serendipiano cúbico e quártico.

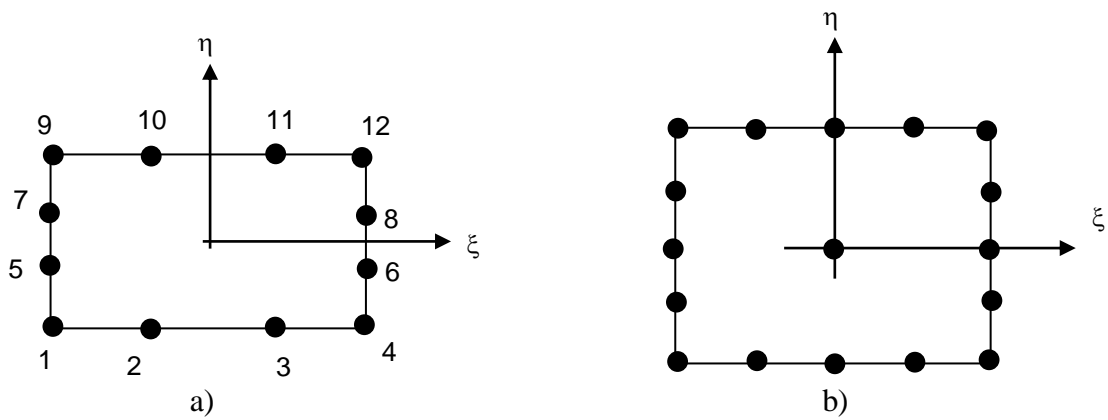


Figura 9.14 - Elementos serendipianos a) cúbico e b) quártico

As funções de forma do elemento cúbico podem ser vistas na publicação [3].

9.4.6 - Família de funções de Hermite

A família de funções de interpolação de Hermite interpolam a função e sua derivada e são úteis em elementos finitos de laje, assunto a ser tratado mais tarde. O elemento de laje apresenta-se na figura 9.15. As funções de interpolação apresentam-se na figura 9.16 e referem-se a dois casos baseados respectivamente na interpolação de cada nó sobre respectivamente as entidades $u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u^2 / \partial x \partial y$ e sobre as entidades $u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y$.

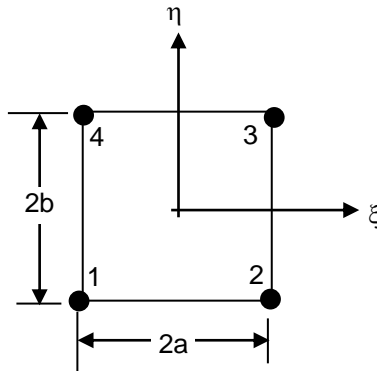


Figura 9.15

Hermite cubic element:		
Interpolation functions for		
variable u	$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ & -\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ & -\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \\ & \frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \end{aligned} \right\}$	For node i ($i = 1, \dots, 4$)
derivative $\partial u / \partial \xi$		
derivative $\partial u / \partial \eta$		
derivative $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$		
Interpolation functions for		
variable u	$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) \\ & \frac{1}{2}\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1) \\ & \frac{1}{2}\eta_i(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1) \end{aligned} \right\}$	For node i ($i = 1, \dots, 4$)
derivative $\partial u / \partial \xi$		
derivative $\partial u / \partial \eta$		
	$\xi = (x - x_c) / a, \quad \eta = (y - y_c) / b$ $\xi_0 = \xi\xi_i, \quad \eta_0 = \eta\eta_i$	($2a$ and $2b$ are the sides of the rectangular element)
<p>(ξ_i, η_i) denote the natural coordinates of the ith node of the element; (x_c, y_c) are the global coordinates of the center of the element.</p>		

Figura 9.16 - Funções de interpolação cúbicas de Hermite [3]

9. Funções de Deslocamento, de Interpolação e de Forma e Elementos de Ordem Superior.

9.1.- CrITÉrios de Escolha da Função Deslocamento Bidimensionais

A função deslocamento $[f(x,y)]$ reduz um problema com infinitos graus de liberdade, os graus de liberdade de cada ponto no interior do elemento finito, a um problema com finitos graus de liberdade, os graus de liberdade dos seus nós. Este procedimento pode comprometer a determinação da solução exacta.

De modo a garantir que o modelo se deforme tanto quanto possível próximo do elemento real, melhorando assim a solução primária (aquela em termos de deslocamentos), as funções de deslocamento devem obedecer aos seguintes critérios:

- (i) assegurar continuidade no interior do elemento,
- (ii) assegurar compatibilidade entre elementos adjacentes;
- (iii) incluir um modo de deformação equivalente ao deslocamento de corpo rígido, o qual deverá não introduzir deformações ou tensões no elemento;
- (iv) o estado de deformação não depende da dimensão e orientação do elemento.

No caso de se adoptar como função deslocamento um polinómio o critério (i) é cumprido. A continuidade inter-elementar num determinado bordo do elemento (critério ii) é satisfeita se os deslocamentos ao longo desse bordo forem função apenas dos deslocamentos dos nós existentes nesse bordo. Garante-se sempre continuidade de deslocamentos entre os elementos nos seus nós. Para garantir o critério (iii) os polinómios devem ter um termo constante.

Em princípio o número de termos do polinómio da função deslocamento deverá ser igual ao número de graus de liberdade do elemento. Por exemplo, no estado plano de tensão as componentes do campo de deslocamentos $u(x,y)$ e $v(x,y)$ respectivamente nas direcções x e y do referencial cartesiano são independentes. Sendo o elemento triangular de três nós, cada uma das funções de deslocamento terá três termos, por serem três os deslocamentos nodais independentes em cada direcção:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5x + \alpha_6y$$

Os termos daqueles polinómios deverão ser escolhidos de acordo com o triângulo de Pascal quer em elementos triangulares, figura 9.1, quer em elementos rectangulares, figura 9.9. Deverão constituir polinómios completos ficando assim assegurada a invariância geométrica referida no requisito (iv) ou condição de isotropia do elemento

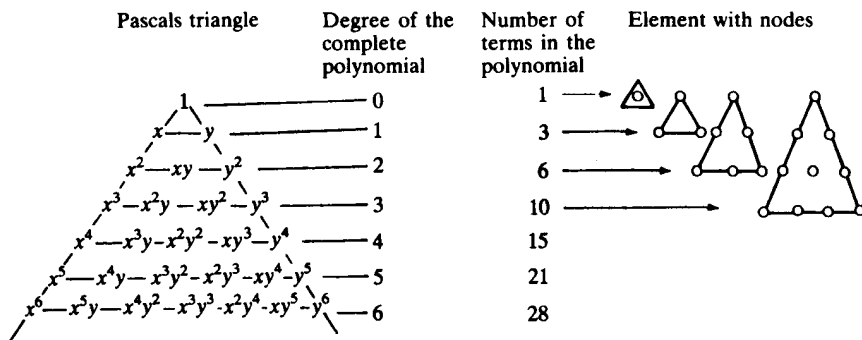


Figura 9.1 - Triângulo de Pascal para Elementos Triangulares [3]

9.2 - Funções de Interpolação e de Forma

As funções de forma $\psi_i(x,y)$, devidamente agrupadas na matriz das funções de forma $[\psi(x,y)]$, relacionam os deslocamentos no interior do elemento com os deslocamentos nodais através de:

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] * [A]^{-1} * \{\delta^e\} = [\psi(x, y)] * \{\delta^e\}$$

Os deslocamentos no interior do elemento finito são obtidos por interpolação dos deslocamentos nodais com suporte das funções $[\psi(x,y)]$ as quais por este motivo também se podem ser designadas por funções de interpolação. Por outro lado o termo "forma" advém do facto de $\psi_i(x,y)$ associada ao grau de liberdade i do elemento ter uma forma bem definida, isto é, ser unitária nesse grau de liberdade e nula nos restantes, e ser contínua no domínio. Entretanto os critérios de escolha das funções deslocamento (secção 9.1) são aplicáveis também às funções de forma, na medida em que estas resultam daquelas pela multiplicação de uma matriz de coeficientes ($[A]^{-1}$). Contudo, as funções de forma podem ser as famílias de funções de Lagrange e de Hermite. Aliás estas funções de forma são as mais usuais em problemas de mecânica de sólidos. Recorrem-se às funções de interpolação de Lagrange (unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais) quando se pretende a interpolação da variável dependente do problema a partir dos seus valores nos nós, ou seja, a interpolação de funções de continuidade C^0 . A família de funções de interpolação de Hermite são usadas quando se pretende a interpolação em termos da variável dependente e também a sua primeira derivada nos nós do elemento, ou seja, para funções com continuidade C^1 . Por razões de natureza numérica é muito vantajoso gerar as funções de forma acima mencionadas em coordenadas naturais.

9.3 - Família de Elementos Triangulares

Os elementos triangulares são frequentemente evitados devido às suas pobres performances, mas como são muito simples tornam-se úteis para quem se inicia no estudo de elementos finitos. Por outro lado, têm a vantagem de representar melhor formas geométricas curvas quando comparados com elementos rectangulares, sendo também os algoritmos automáticos de geração de malha mais simples que os relativos a elementos rectangulares [4].

Os elementos triangulares também podem ser obtidos a partir de elementos rectangulares fazendo nestes coincidir dois nós de canto, elementos quadriláteros degenerados [2]. Esta técnica é válida também para elementos isoparamétricos. A integração numérica permite o uso de tais elementos, mas o nível de precisão é menor do que nos elementos genuinamente triangulares.

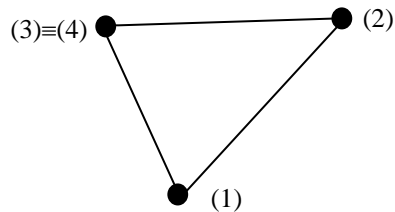


Figura 9.2 - Elemento quadrilátero degenerado num elemento triangular

9.3.1 - Elemento triangular de deformação constante (CST)

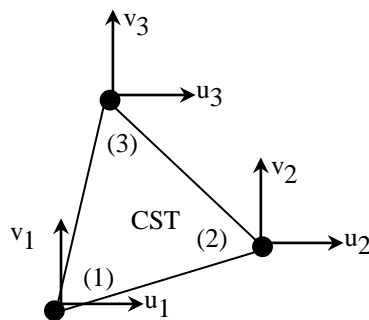


Figura 9.3

É o elemento plano mais simples constituído por três nós. O campo de deformações é constante no seu interior e por isso se designa de elemento triangular de deformação constante (constant strain triangle - CST). Também é chamado de *elemento triangular linear* porque o campo de deslocamentos no interior do elemento é linear em x e y.

Os lados do elemento mantêm-se rectos durante a deformação. O campo de tensões é constante visto ser proporcional ao de deformações. Por consenso lêem-se as tensões no baricentro deste elemento, ou seja no ponto de coordenadas $(x_{cg} = \Sigma x_i/3 ; y_{cg} = \Sigma y_i/3)$.

Este elemento é relativamente pouco eficaz mas, por ter poucos graus de liberdade, é útil como introdução ao estudo de matérias relativas à análise estrutural por elementos finitos.

9.3.1.1 - Coordenadas de área

Como vimos no capítulo 8 deduzimos as funções de interpolação para o elemento triangular CST representadas pela expressão (8.20). Cada uma das funções de forma $\psi_i(x,y)$ então determinadas não são mais do que as coordenadas de área lineares L_i do elemento triangular. Qualquer ponto P de coordenadas globais (x, y) no interior do elemento pode ser definido em pelo terno ordenado (L_1, L_2, L_3) cujos elementos são as coordenadas de área desse ponto. L_i é a razão entre a área A_i e a área total do triângulo A. A área A_i é formada pelo triângulo cuja base é o lado oposto ao nó i e cujo vértice é o ponto P (ver figura 9.4)

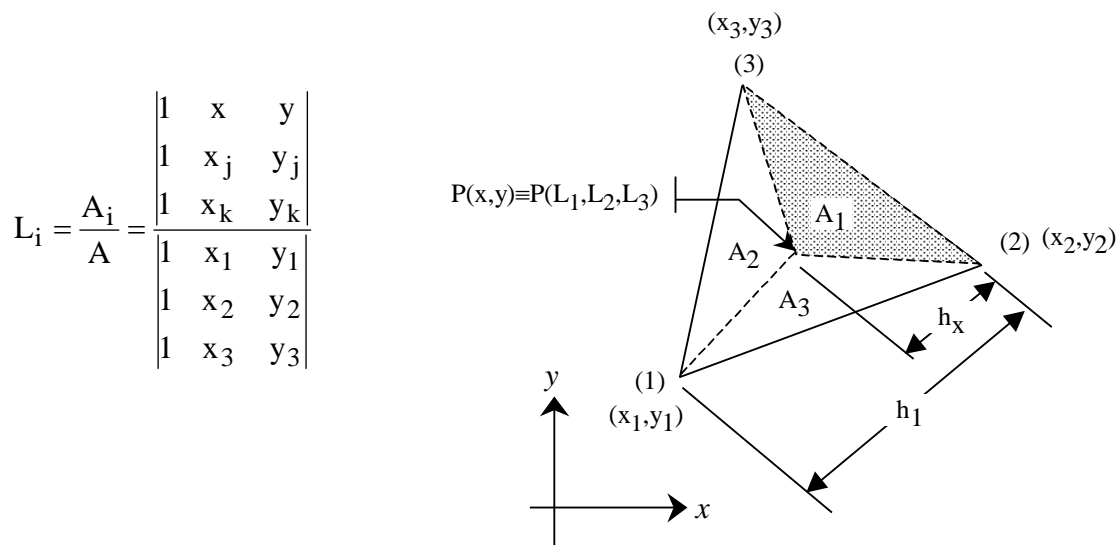


Figura 9.4 - Coordenadas de área

L_i ainda pode ser definido pela razão entre as alturas h_x e h_i . O contador i (em L_i) varia sempre de 1 a 3 e representa os nós dos vértices do triângulo.

Qualquer grandeza, por exemplo $u(x,y)$, no interior do elemento com n nós pode ser obtida por uma combinação linear dos valores que ela assume nos seus nós:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(L_1, L_2, L_3) * u_i^e$$

sendo (L_1, L_2, L_3) as coordenadas de área do ponto (x, y) e ψ_i funções de forma definidas em termos das coordenadas de área [3, 5]. Estas funções de forma pertencem à família de funções de forma de Lagrange em coordenadas de área para elementos triangulares [3] mas não são aqui desenvolvidas. Apresentam-se de seguida as funções de forma para alguns tipos de elementos, incluindo os de ordem superior. É oportuno dizer que as integrações numéricas necessárias efectuar para calcular as matrizes de rigidez e vectores de força são também escritas em termos destas coordenadas.

Elemento Linear (ver figura 9.5.a))

$$\psi_1 = L_1, \quad \psi_2 = L_2, \quad \psi_3 = L_3$$

Elemento Quadrático (ver figura 9.5.b))

$$\psi_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad \psi_2 = 4L_1L_2, \quad \psi_3 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$\psi_4 = 4L_2L_3, \quad \psi_5 = L_3(2L_3 - 1), \quad \psi_6 = 4L_1L_3$$

Elemento Cúbico (ver figura 9.5.b))

$$\psi_1 = \frac{L_1}{2}(3L_1 - 1)(3L_2 - 2) \quad \psi_2 = \frac{9}{2}(L_1L_2)(3L_1 - 1) \quad \psi_3 = \frac{9}{2}(L_1L_2)(3L_2 - 1)$$

$$\psi_4 = \frac{L_2}{2}(3L_1 - 1)(3L_2 - 2) \quad \psi_5 = \frac{9}{2}(L_2L_3)(3L_2 - 1) \quad \psi_6 = \frac{9}{2}(L_2L_3)(3L_3 - 1)$$

$$\psi_7 = \frac{L_3}{2}(3L_3 - 1)(3L_3 - 2) \quad \psi_8 = \frac{9}{2}(L_1L_3)(3L_2 - 1) \quad \psi_9 = \frac{9}{2}(L_1L_3)(3L_3 - 1)$$

$$\psi_{10} = 27(L_1L_2L_3)$$

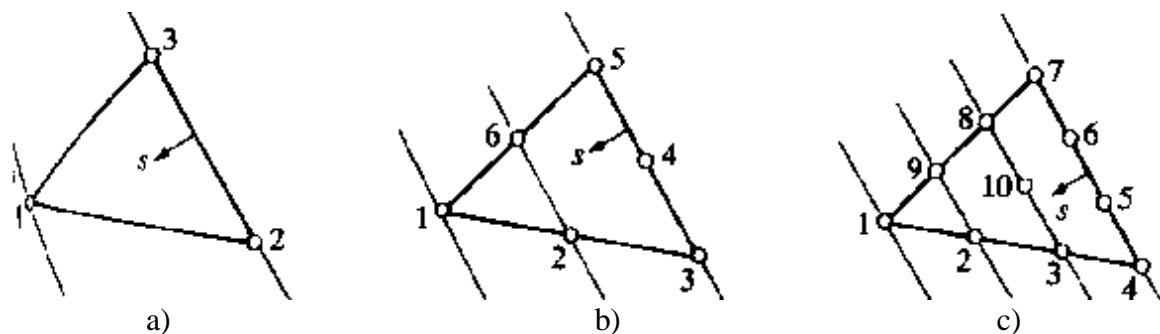


Figura 9.5 -

9.3.2 - Elementos Triangulares de Ordem Superior

Os polinómios de interpolação de grau superior a 1 são gerados com recurso ao triângulo de Pascal (ver figura 9.1), o qual define os termos necessários para se obter um polinómio completo até certo grau. Um elemento triangular com k nós por lado e igualmente espaçados tem no total n nós. As funções de interpolação serão definidas por polinómios de grau p .

$$n = \frac{1}{2} * k * (k + 1) \quad p = k - 1$$

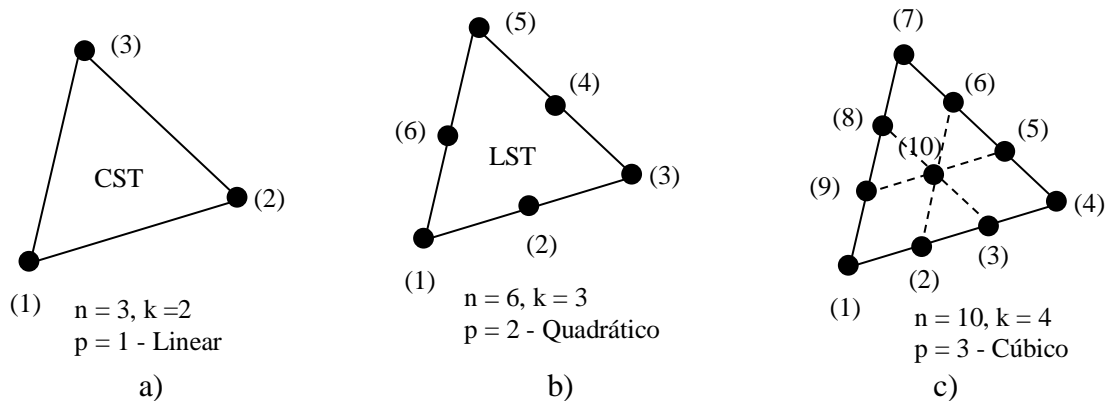


Figura 9.6

Por exemplo para o elemento de 10 nós a função de interpolação de deslocamentos na direcção x é:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} x^3$$

Verificamos que nos elementos com nós interiores, como o elemento de 10 nós, apenas os nós que estão na fronteira contribuem para a imposição de continuidade dos deslocamentos inter-elementar. Só estes nós contribuem de forma explícita para a obtenção da equação de equilíbrio global [5]. Assim, recorrendo à técnica de *condensação estática*, podemos escrever quer a matriz de rigidez do elemento quer o vector de forças nodais em função de apenas dos graus de liberdade dos nós da fronteira. Estas novas matrizes e vector de forças apresentam de forma implícita as rigidezes e forças nodais associadas ao(s) nó(s) interior(es).

9.3.2.1 - Elemento Triangular de Deformação Linear (LST)

Este elemento está apresentado na figura (9.6.b), é constituído por 6 nós, três nos cantos e três a meio dos lados. Em cada direcção o campo de deslocamentos é interpolado por um polinómio quadrático, e a sua derivada, o campo de deformações, é linear em x e y . Por este último motivo o elemento é designado por elemento triangular de deformação linear (linear

strain triangle - LST). Também pode ser denominado por *elemento triangular quadrático* em virtude do o campo de deslocamentos o ser. Os lados do elemento deformam-se como curvas do segundo grau. A matriz de rigidez é mais facilmente deduzida se se adoptarem "coordenadas de área", sendo também necessária integração numérica. Os lados do elemento real podem ser curvos. A figura 9.7 mostra duas funções de forma do elemento LST.

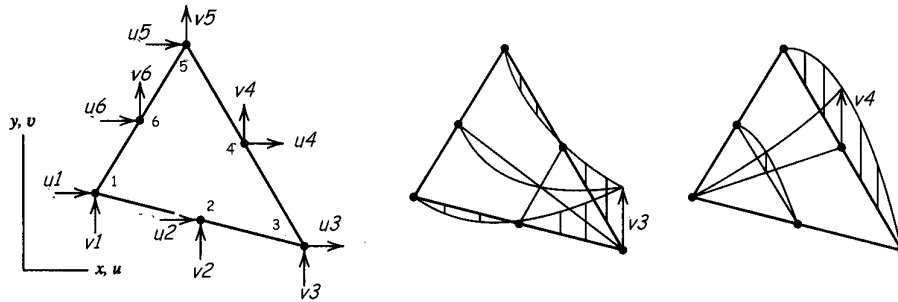


Figura 9.7 - Funções de Forma para o LST (adaptado de [1])

9.3.3 - Elemento Triangular Isoparamétrico

Uma vantagem dos elementos isoparamétricos é que mantêm a continuidade C^0 independentemente da orientação, forma da fronteira (recta ou curva), devido ao facto da função de deslocamento adoptada ter todos os termos do polinómio ("completeness") [4].

Os elementos isoparamétricos, sobretudo os quadráticos ou de ordem superior adaptam bem a geometria do elemento. Estes elementos mestre, triangulares ou quadriláteros, têm sempre as mesmas características: lados rectos, e nós nos lados colocados equidistantemente. Para interpolar correctamente os deslocamentos quadráticos, é recomendável que o elemento real, tenha as mesmas características que o elemento mestre, de tal modo que ele apareça como simples escala do elemento mestre. Em geral, quanto mais o elemento real se desviar do elemento mestre menor exactidão existirá. Este desvio de características chama-se "distorção". Embora haja elementos mais sensíveis do que outros à distorção, esta pode traduzir-se por vezes no "locking", que é a rigidificação do elemento comportando-se como corpo rígido.

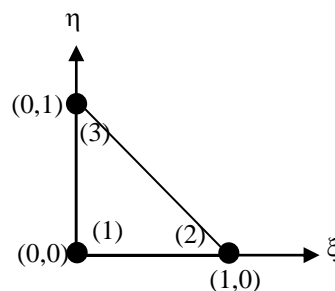


Figura 9.8 - Elemento mestre CST isoparamétrico [4]

Apresenta-se na figura 9.8 o elemento triangular isoparamétrico de deformação constante sendo as funções de forma deste elemento as seguintes:

$$\psi_1(\xi,\eta) = L_1=1-\xi-\eta, \quad \psi_2(\xi,\eta) = L_2= \xi, \quad \psi_3(\xi,\eta) = L_3 = \eta$$

O elemento triangular isoparamétrico de deformação linear pode ser visto na figura 8-10. Para elementos triangulares isoparamétricos de ordem superior é conveniente que os nós dos lados no elemento real se situem na zona central (entre 1/4 a 3/4 do lado) de modo a que o Jacobiano não se anule [2].

9.4- Família de Elementos Quadriláteros

Analogamente à família de elementos triangulares de Lagrange, os elementos rectangulares de Lagrange também podem ser desenvolvidos a partir do triângulo de Pascal, como se mostra na figura 9.9. Os elementos rectangulares são mais "robustos" que os triangulares do mesmo tipo (linear, quadrático, etc) pois incluem mais um termo na função de aproximação de deslocamentos. Estes elementos apresentam um bom compromisso entre exactidão e custo de cálculo [4].

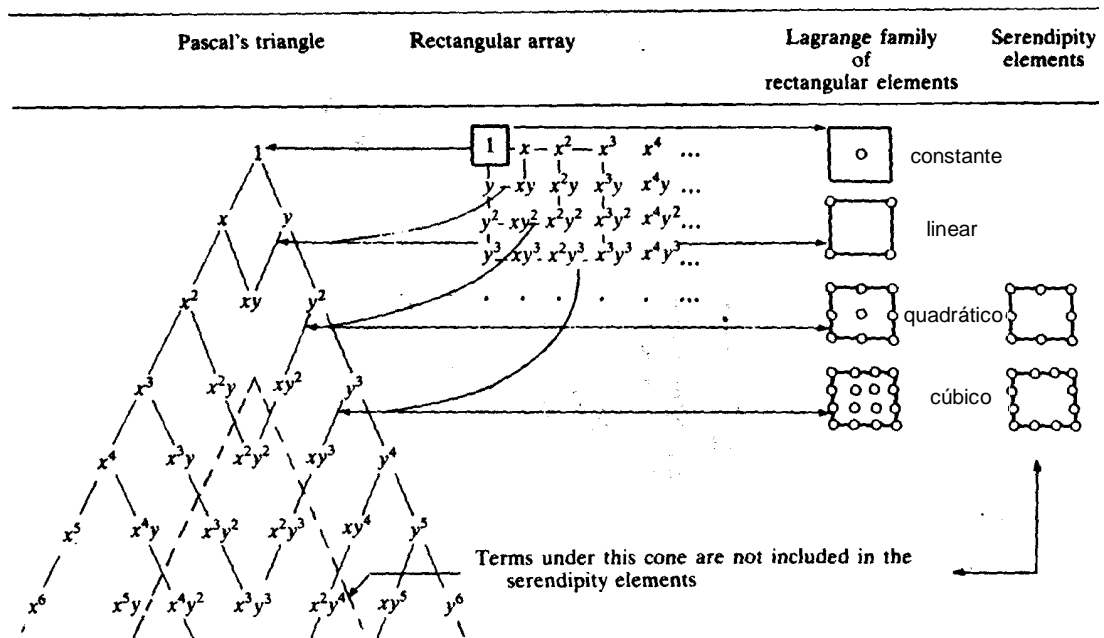


Figura 9.9 - Triângulo de Pascal para elementos quadriláteros [adaptado de 3].

Para elementos de Lagrange rectangulares os polinómios das funções de interpolação não são completos, e por isso não são geometricamente invariantes. Os lados dos elementos devem ser paralelos ao referencial cartesiano. Para superar esta limitação é conveniente fazer

uma transformação de coordenadas para o referencial natural (ξ O η), a qual é também útil para a formulação isoparamétrica.

Como já vimos em secções anteriores a família de funções bidimensionais de Lagrange resultam do produto vectorial de famílias de funções polinomiais unidimensionais de Lagrange (ver secção 8.5.1).

9.4.1 - Elemento Quadrilátero Bilinear ou Elemento de Quatro Nós (Q4)

É o elemento rectangular mais simples caracterizado por ter quatro nós, 8 graus de liberdade. O elemento é bilinear porque as funções de aproximação de deslocamento resultam do produto de funções lineares em cada direcção, $(\alpha_1 + \alpha_2 x)(\alpha_3 + \alpha_4 y)$. O campo de deslocamentos é:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

O campo de deformações é:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_7 + \alpha_8 x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_4 x + \alpha_8 y$$

Considere-se uma fibra na direcção x . Verifica-se que as deformações ε_x são constantes em x mas lineares em y (e vice-versa). O campo de deformações ε_x é então independente de x o que significa que este tipo de elemento não modela bem paredes em consola sujeitas à flexão. De facto aquelas deformações reais variam segundo x o que não acontece no modelo no interior de cada elemento, embora o elemento apresente a variação daquelas deformações segundo y , o que acontece na realidade. Este tipo de elemento ao deformar-se apresenta os lados rectos, e por isso não garante a perpendicularidade de lados adjacentes, o que deveria acontecer nas peças à flexão pura. Os elementos apresentam distorções de corte segundo x e y . Devido a estas particularidades o elemento Q4 apresenta-se artificialmente mais rígido quando usado para modelar painéis de parede longos (segundo x) em flexão.

Entretanto o campo de deslocamentos ($u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$) pode ser interpolado pelas funções de

$$\text{Lagrange bidimensionais: } u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi, \eta) * u_i^e \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi, \eta) * v_i^e$$

sendo as funções de interpolação as funções de Lagrange seguintes:

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned}$$

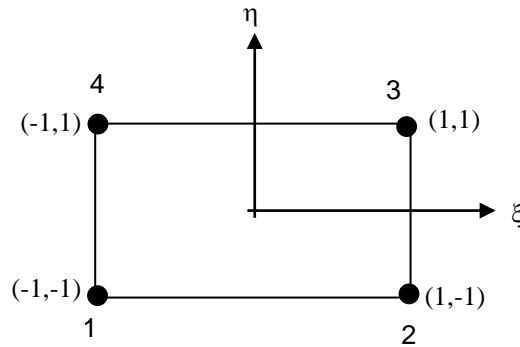


Figura 9.10 - Elemento Q4.

Avaliando as funções de aproximação de deslocamentos verificamos que estas variam linearmente em ξ e η , chegando-se às mesmas conclusões quando estas eram definidas em coordenadas locais (x,y).

Na prática as tensões nestes elementos são determinadas nos pontos de Gauss, os quais também são usados para efectuar a integração numérica [2]. Os valores das tensões nestes pontos podem depois ser extrapolados para se determinarem os valores nodais.

9.4.2 - Elemento Quadrilátero Quadrático ou Elemento de Nove Nós (Q9)

Multiplicando vectorialmente as funções de interpolação unidimensionais cúbicas definidas pelas expressões 4.12 obtemos as funções de interpolação bidimensionais:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \\ \psi_3(\xi) \end{Bmatrix} * \{ \psi_1(\eta) \quad \psi_2(\eta) \quad \psi_3(\eta) \} = \begin{Bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & \psi_4(\xi, \eta) & \psi_7(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) & \psi_5(\xi, \eta) & \psi_8(\xi, \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) & \psi_6(\xi, \eta) & \psi_9(\xi, \eta) \end{Bmatrix}$$

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, \quad \psi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, \quad \psi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2), \quad \psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta, \quad \psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$\psi_9(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\xi\eta$$

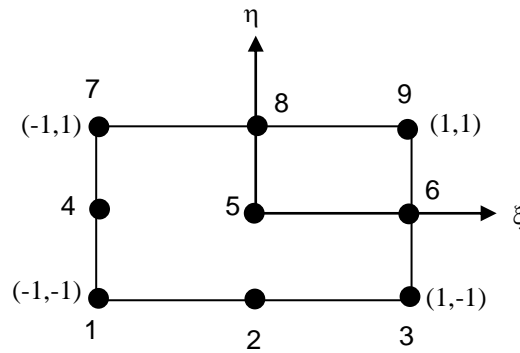


Figura 9.11- Elemento Q9.

Este tipo de elemento é muito eficaz na prática de elementos finitos. Elementos de ordem superior conduzem a uma interpolação de ordem superior, de melhor precisão. Permitem também detectar melhor as variações de tensão junto de zonas pontuais da estrutura como cantos, furos, cordões de soldadura, etc.

Os elementos de ordem superior também podem ser usados para definir a geometria, recorrendo-se então à formulação isoparamétrica. Podem ter lados curvos se assim se desejar. Contudo em estruturas regulares, é possível definir elementos subparamétricos usando funções de nove nós para interpolar os deslocamentos e apenas de quatro nós para definir a geometria.

9.4.3 - Elemento Quadrilátero Quadrático (Q8)

Pode ser obtido do elemento anterior por condensação estática dos graus de liberdade do nó 5. Estes graus de liberdade passam a ser dependentes dos restantes.

9.4.4 - Elemento Serendipity de oito nós, ou Serendipiano quadrático.

Este elemento pertence à família de elementos *serendipianos*. Todos os nós estão localizados na fronteira. As funções de interpolação de deslocamentos não contêm os termos do polinómio identificados para além da linha a tracejado da figura 9.9. As funções de forma em coordenadas naturais são as seguintes:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta), & \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta), & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta) \end{aligned}$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$\psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi - \eta),$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$\psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta)$$

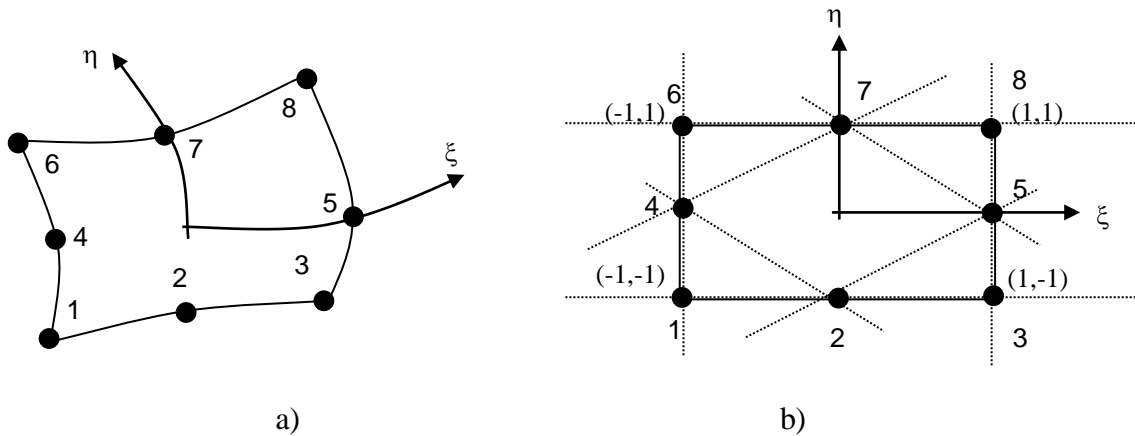


Figura 9.12 - Elemento no espaço xOy e no espaço $\xi O\eta$

A função de forma ψ_1 tem a particularidade de se anular ao longo das linhas a tracejado que passam pelos nós 2 e 4, 6 e 8, e, 3 e 8. A função de forma ψ_2 do nó 2, anula-se ao longo dos lados 3 e 8, 6 e 8, e, 1 e 6. Para os restantes nós podem deduzir-se regras semelhantes. A figura 9.13 mostra as funções de forma para um elemento quadrático de nove nós (de Lagrange) e um elemento serendipiano de oito nós.

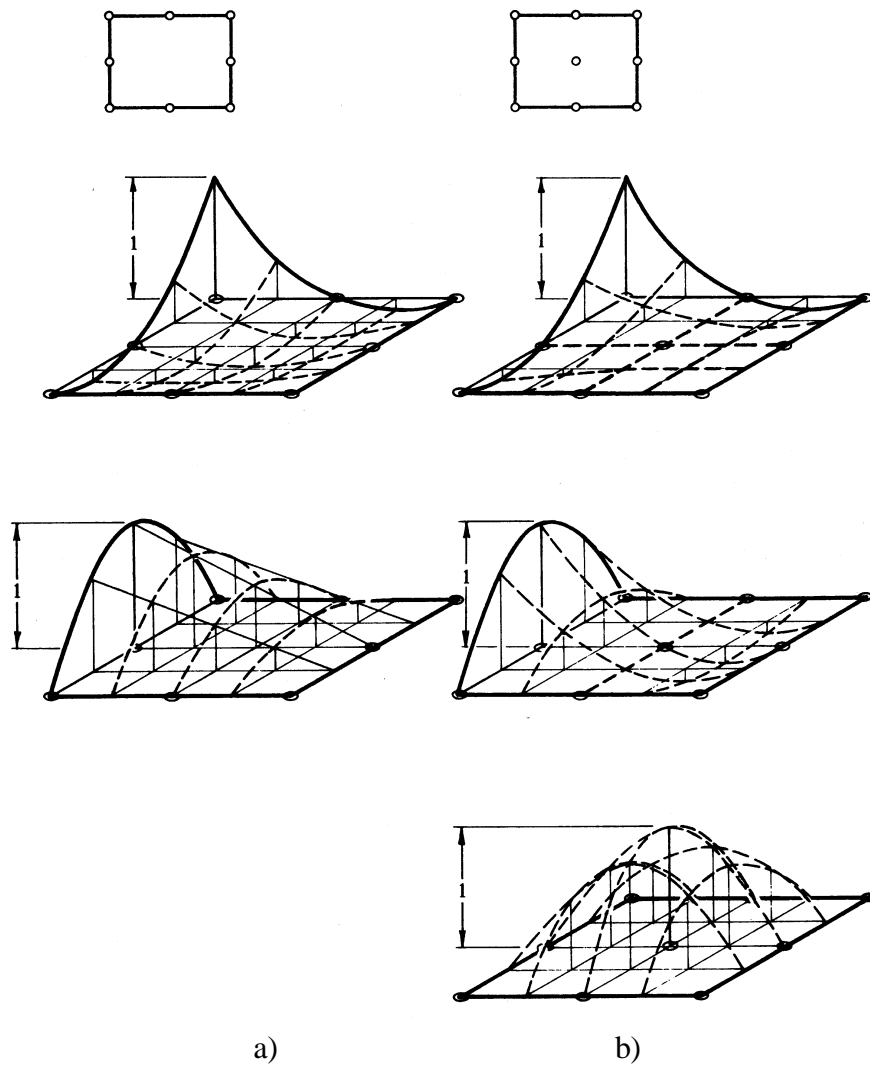


Figura 9.13 - Funções de forma para famílias: a) "serendipianas" e b) "lagrangeanas" [10]

9.4.5 - Elemento Serendipity de doze e dezassete nós, ou Serendipiano cúbico e quártico.

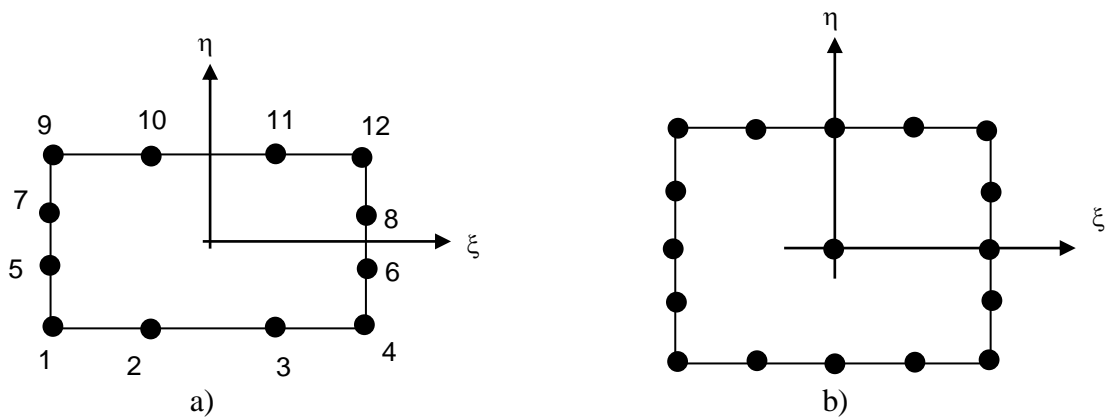


Figura 9.14 - Elementos serendipianos a) cúbico e b) quártico

As funções de forma do elemento cúbico podem ser vistas na publicação [3].

9.4.6 - Família de funções de Hermite

A família de funções de interpolação de Hermite interpolam a função e sua derivada e são úteis em elementos finitos de laje, assunto a ser tratado mais tarde. O elemento de laje apresenta-se na figura 9.15. As funções de interpolação apresentam-se na figura 9.16 e referem-se a dois casos baseados respectivamente na interpolação de cada nó sobre respectivamente as entidades $u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u^2 / \partial x \partial y$ e sobre as entidades $u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y$.

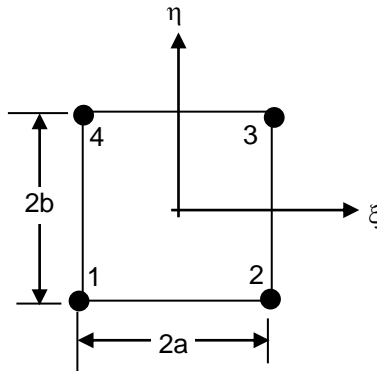


Figura 9.15

Hermite cubic element:		
Interpolation functions for		
variable u	$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ & -\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2) \\ & -\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \\ & \frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1) \end{aligned} \right\}$	For node i ($i = 1, \dots, 4$)
derivative $\partial u / \partial \xi$		
derivative $\partial u / \partial \eta$		
derivative $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$		
Interpolation functions for		
variable u	$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) \\ & \frac{1}{2}\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1) \\ & \frac{1}{2}\eta_i(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1) \end{aligned} \right\}$	For node i ($i = 1, \dots, 4$)
derivative $\partial u / \partial \xi$		
derivative $\partial u / \partial \eta$		
	$\xi = (x - x_c) / a, \quad \eta = (y - y_c) / b$ $\xi_0 = \xi\xi_i, \quad \eta_0 = \eta\eta_i$	($2a$ and $2b$ are the sides of the rectangular element)
<p>(ξ_i, η_i) denote the natural coordinates of the ith node of the element; (x_c, y_c) are the global coordinates of the center of the element.</p>		

Figura 9.16 - Funções de interpolação cúbicas de Hermite [3]

10. - DIMENSIONAMENTO de ELEMENTOS LAMINARES de PLACA10.1- CEB-FIP Model Code 1990

n_{sdx} - força actuante por metro linear de placa normal à face perpendicular ao eixo x (face x)

n_{sdy} - força actuante por metro linear de placa normal à face perpendicular ao eixo y (face y)

v_{sd} - força actuante por metro linear de placa nas faces x e y

A_{sx} - armadura resistente por metro linear segundo a direcção x

A_{sy} - armadura resistente por metro linear segundo a direcção y

b - dimensão da fractura

εI - extensão na direcção principal I (neste caso de encurtamento)

εII - extensão na direcção principal II (neste caso de alongamento)

Hipóteses:

- Neste problema as relações de compatibilidade são difíceis de concretizar
- Considerar-se-ão apenas as relações de equilíbrio, sacrificando-se um pouco o rigor, o que pode ser válido em peças de betão armado.
- As direcções x e y coincidem com a armadura que será ortogonal.
- O ângulo θ é entre a direcção x e a biela de compressão.

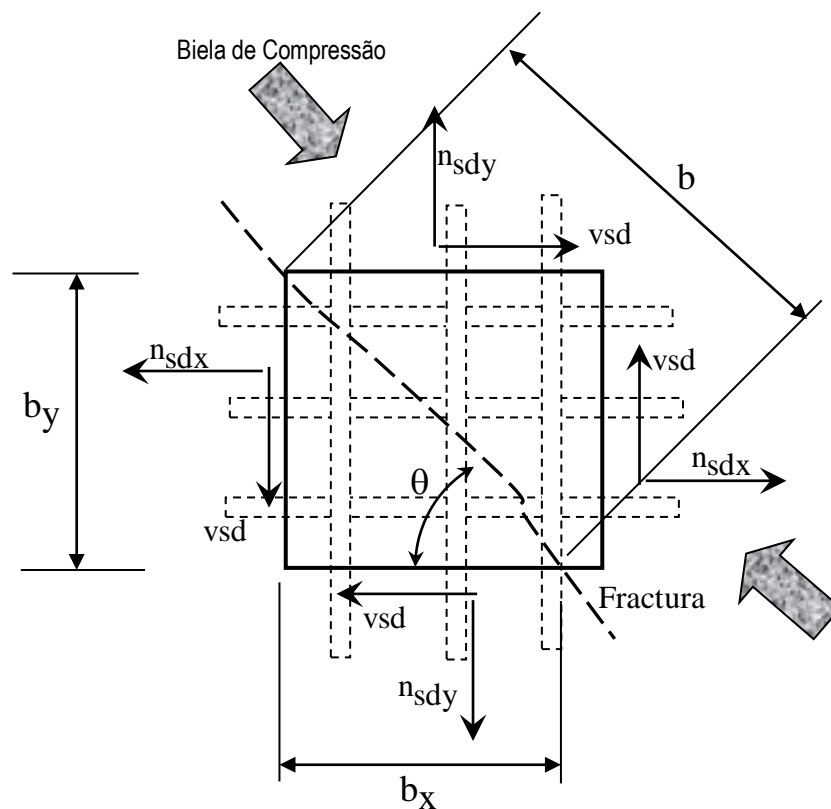
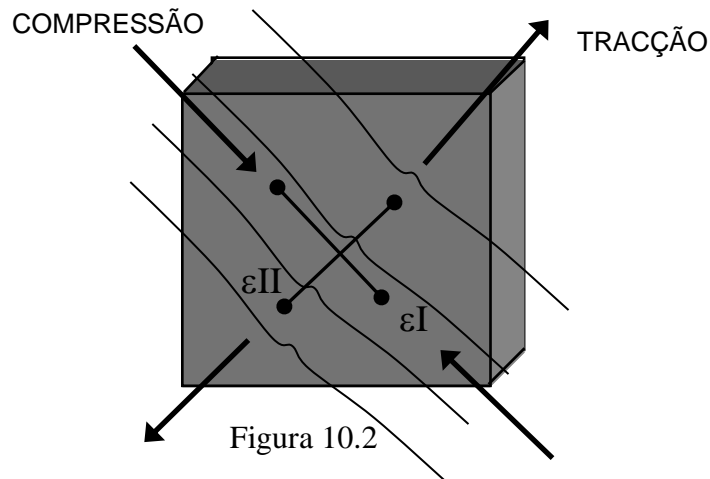


Figura 10.1



CASO I - Armaduras que participam nas duas direcções

n_{Rdx} - força resistente por metro linear conferida pelas armaduras na direcção x :

$$n_{Rdx} = A_{sx} * f_{syd} \quad (10.1)$$

n_{Rdy} - força resistente por metro linear conferida pelas armaduras na direcção y :

$$n_{Rdy} = A_{sy} * f_{syd} \quad (10.2)$$

F_c - força resistente do betão à compressão por metro linear.

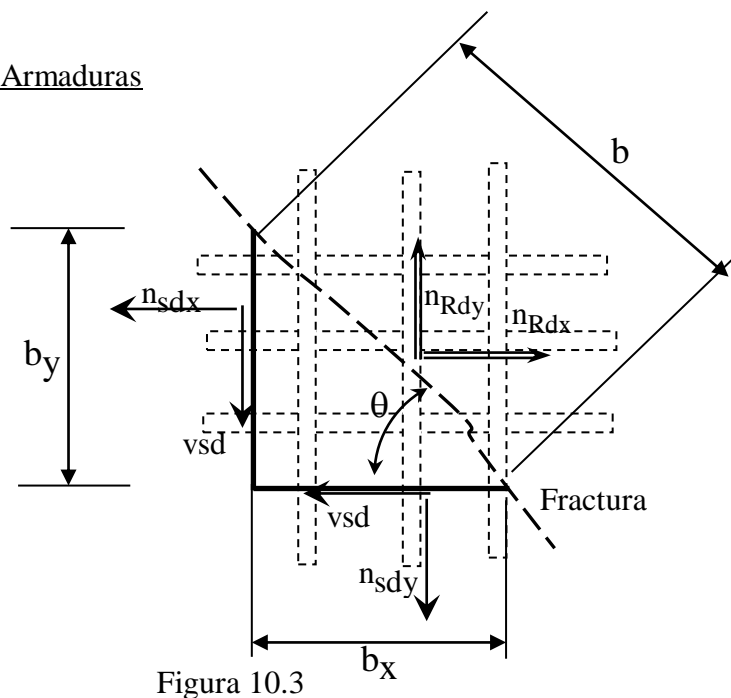
$$F_c = \sigma_c \times t \quad [\text{kN/m.l.}] \quad (10.3)$$

t - espessura da parede

CRITÉRIOS DE ROTURA : (i) Controle da Cedência das Armaduras

(ii) Controle das Tensões de Compressão no Betão

(i) Controle da Cedência das Armaduras



Equilíbrio segundo x-x:

$$n_{Rdx} * b_y - n_{sdx} * b_y - v_{sd} * b_x = 0$$

$$n_{Rdx} = n_{sdx} + v_{sd} * \cotg \theta \quad (10.4)^{(1)}$$

Equilíbrio segundo y-y:

$$n_{Rdy} * b_x - n_{sdy} * b_x - v_{sd} * b_y = 0$$

$$n_{Rdy} = n_{sdy} + v_{sd} * \tg \theta \quad (10.5)^{(1)}$$

Há três incógnitas (n_{sdx} , n_{sdy} , v_{sd}) e duas equações. A equação em falta tem a ver com as relações de compatibilidade. Através das funções $\tg\theta$ e $\cotg\theta$ é possível relacionar n_{Rdy} e n_{Rdx} como se mostra na figura seguinte.

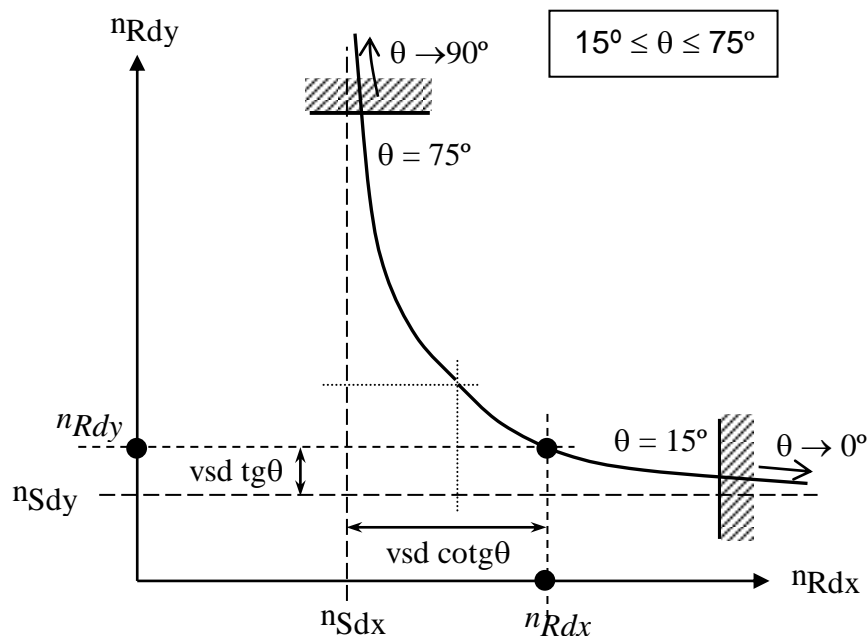


Figura 10.4

Entretanto o CEB-FIP Model Code 1990 (MC 90) só considera a armadura eficaz se o ângulo da fractura em relação a esta for superior a 15° .

A solução óptima é aquela onde se gasta menos armadura, ou seja onde $(n_{Rdx} + n_{Rdy})$ for

mínimo, ou seja, quando a $\frac{\partial}{\partial \theta} (n_{sdx} + n_{sdy}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\cotg\theta + \tg\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 45^\circ$.

Nesse caso teremos:

$$n_{Rdx} = n_{sdx} + v_{sd} \quad (10.6)$$

$$n_{Rdy} = n_{sdy} + v_{sd} \quad (10.7)$$

¹ **Nota:** Nestas expressões o v_{sd} poderá ser substituído pelo seu módulo ($|v_{sd}|$) para se ter em conta que na realidade θ possa pertencer a um dos intervalos $\theta \in ([15;75] \text{ ou } [-15;-75])$.

(ii) Controle da Tensões de Compressão no Betão

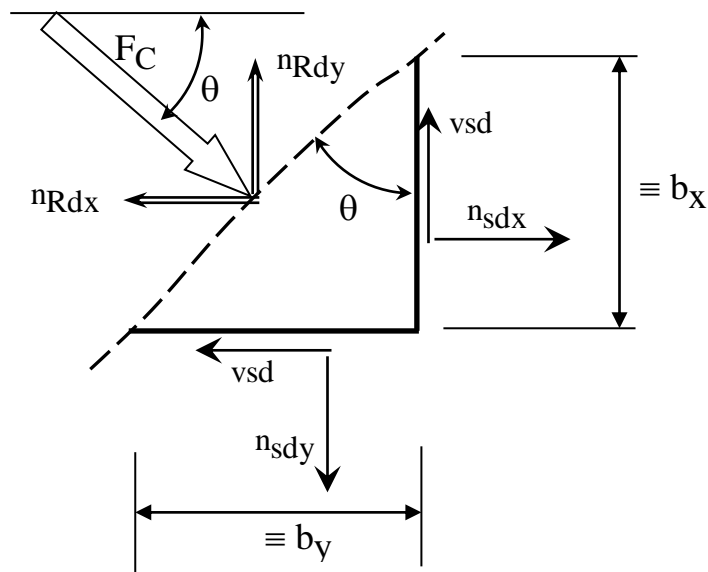


Figura 10.5

Equilíbrio x-x:

$$F_c \cdot \cos\theta \cdot b + n_{sdx} \cdot b_x - n_{Rdx} \cdot b_x - v_{sd} \cdot b_y = 0$$

$$F_c \cdot b \cdot \cos\theta = -n_{sdx} \cdot b \cdot \cos\theta + n_{Rdx} \cdot b \cdot \cos\theta + v_{sd} \cdot b \cdot \sin\theta$$

$$\sigma_c \cdot t = v_{sd} (\cotg\theta + tg\theta) = v_{sd} / (\sin\theta \cos\theta) \tag{10.8}$$

Verificação de Segurança:

$$\sigma_c \cdot t \leq f_{cd2} \cdot t \tag{10.9}$$

- Tensão resistente do betão não confinado transversalmente: f_{cd2}

$$f_{cd2} = \alpha [1 - f_{ck} / 250] \cdot f_{cd} \quad f_{ck}, f_{cd}: [\text{MPa}] \tag{10.10}$$

sendo: $\alpha = 0.6$ para betão não confinado (zona muito fendilhada), e

$\alpha = 0.85$ para betão confinado.

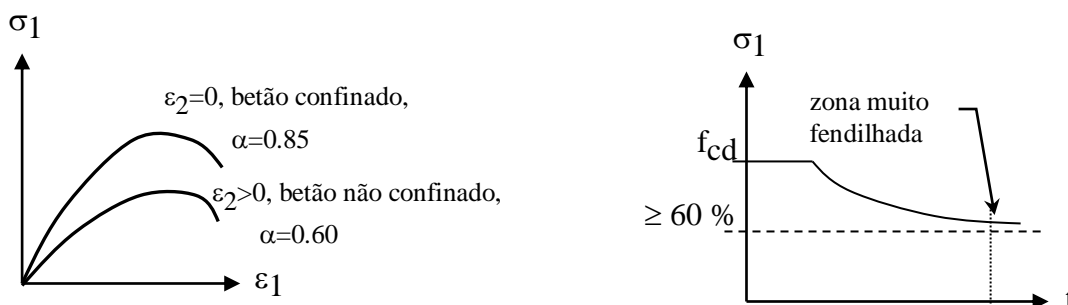


Figura 10.6

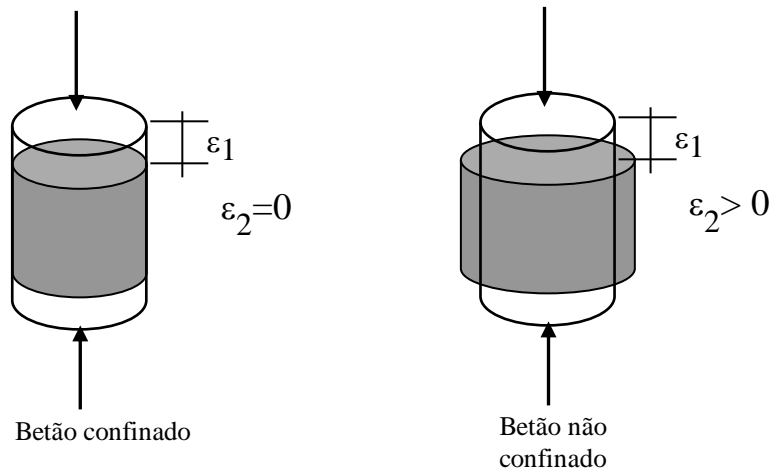


Figura 10.7

CASO II - Armaduras que participam apenas na direcção y-y**(i) Controle da Cedência das Armaduras**

Equilíbrio segundo x-x:

$$n_{Rdx} = 0$$

Da equação (10.4) vem:

$$\cotg\theta = -\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} \quad (10.11)$$

Da equação (10.5) vem:

$$n_{Rdy} = n_{sdy} - \frac{v_{sd}^2}{n_{sdx}} \quad (10.12)$$

(ii) Controle da Tensões de Compressão no BetãoComo $\sigma_c t = v_{sd} (\cotg \theta + tg\theta)$ substituindo $\cotg\theta$ e $tg\theta$ vem:

$$\sigma_c * t = -v_{sd} \left[\frac{1 + \left(\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} \right)^2}{\left(\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} \right)} \right] = -n_{sdx} * \left(1 + \left(\frac{v_{sd}}{n_{sdx}} \right)^2 \right) \quad (10.13)$$

Verificação de Segurança:

$$\sigma_c * t \leq f_{cd2} * t$$

(10.9-rep)

Deixa de ter sentido prático se $n_{sdx}=0$ ou se $v_{sd}*\cotg\theta=0$

CASO III - Armaduras que participam apenas na direcção x-x**(i) Controle da Cedência das Armaduras**

Equilíbrio segundo x-x:

$$n_{Rdy} = 0$$

Da equação (10.4) vem:

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{n_{sdy}}{v_{sd}} \quad (10.14)$$

Da equação (10.5) vem:

$$n_{Rdx} = n_{sdx} - \frac{v_{sd}^2}{n_{sdy}} \quad (10.15)$$

(ii) Controle da Tensões de Compressão no Betão

$$\sigma_c * t = -v_{sd} \left[\frac{1 - \left(\frac{n_{sdy}}{v_{sd}} \right)^2}{\left(\frac{n_{sdy}}{v_{sd}} \right)} \right] = -n_{sdy} * \left(1 + \left(\frac{v_{sd}}{n_{sdy}} \right)^2 \right) \quad (10.16)$$

Verificação de Segurança:

$$\sigma_c * t \leq f_{cd2} * t \quad (10.9\text{-rep})$$

CASO IV - Armaduras NÃO participam em ambas as direcções - (SEM Armadura)

Recorremos á equação de equilíbrio do critério de rotura (ii), o controle de tensões no betão.

Da figura 10.5 deduz-se:

Equilíbrio x-x:

$$F_c * \cos\theta * b + n_{sdx} * b * \cos\theta - v_{sd} * b * \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (10.16)$$

Equilíbrio y-y:

$$-F_c * \operatorname{sen}\theta * b - n_{sdy} * b * \operatorname{sen}\theta + v_{sd} * b * \cos\theta = 0 \quad (10.17)$$

$$\begin{cases} \sigma_c * t = -n_{sdx} + v_{sd} * \operatorname{tg}\theta \\ -\sigma_c * t = +n_{sdy} - v_{sd} * \operatorname{cotg}\theta \end{cases}$$

$$\sigma_c * t = -\left(\frac{n_{sdx} + n_{sdy}}{2} \right) + \left(\frac{v_{sd}}{\operatorname{sen}\theta * \cos\theta} \right) \quad (10.18)$$

Sabendo que $\operatorname{sen}\theta * \cos\theta = \operatorname{sen}(2*\theta)$ e recorrendo à circunferência de Mohr pode-se demonstrar que :

$$\text{sen}(2 * \theta) = \frac{v_{sd}}{\sqrt{\left(\frac{n_{sdx} - n_{sdy}}{2}\right)^2 + v_{sd}^2}} \quad (10.19)$$

que substituído em (10.18) fica:

$$\sigma_c * t = -\left(\frac{n_{sdx} + n_{sdy}}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n_{sdx} + n_{sdy}}{2}\right)^2 + v_{sd}^2} \quad (10.20)$$

(Nota: $n_{sdx} > 0$ e $n_{sdy} > 0$ quando são de tracção)

$$\text{tg}(2\theta_p) = \frac{2v_{sd}}{n_{sdx} - n_{sdy}} \quad (10.21)$$

• Critério de segurança:

$$\sigma_c * t \leq f_{cd1} * k * t \quad (10.22)$$

sendo $f_{cd1} * k$ a resistência do betão para o estado multiaxial (tridimensional) de tensões.

$$- f_{cd1} = 0.85 * \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] * f_{cd} \quad (\text{betão não fissurado e não confinado}) \quad (10.23)$$

$$- k = \frac{f_{ctm}}{f_{cm}} = \frac{\text{tensão resistente no estado biaxial}}{\text{tensão resistente no estado uniaxial}} \quad (10.24)$$

$$- f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad \text{com:} \quad (10.25)$$

$\Delta f = 8 \text{ Mpa}$, e f_{ck} = resistência característica em provetes cilíndricos.

Na ausência de dados para determinado betão podem adoptar-se os seguintes valores:

$$f_{ctk, \min} = f_{ctk0, \min} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}}\right)^{2/3}; \quad f_{ctk, \max} = f_{ctk0, \max} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}}\right)^{2/3} \quad (10.26 \text{ e } 27)$$

$$f_{ctm} = f_{ctk0, m} \left(\frac{f_{ck}}{f_{ck0}}\right)^{2/3} \quad (10.28)$$

com $f_{ck0} = 10 \text{ Mpa}$, $f_{ctk0, \min} = 0.95 \text{ MPa}$, $f_{ctk0, \max} = 1.85 \text{ MPa}$, $f_{ctk0, m} = 1.4 \text{ MPa}$.

Para as diferentes classes de betão temos:

Betão	C12	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
f_{ck}	12	20	30	40	50	60	70	80
f_{ctm}	1.6	2.2	2.9	3.5	4.1	4.6	5.1	5.6
$f_{ctk, \min}$	1.1	1.5	2.0	2.4	2.8	3.1	3.5	3.8
$f_{ctk, \max}$	2.1	2.9	3.8	4.7	5.4	6.1	6.8	7.4

• Condição Limite de Extensões

- quer para f_{cd1} quer para f_{cd2}

$$\varepsilon_{\text{máx. betão}} \leq \varepsilon_m^* = 0.004 - 0.002 \frac{f_{ck}}{100} \tag{10.29}$$

[fck : MPa]

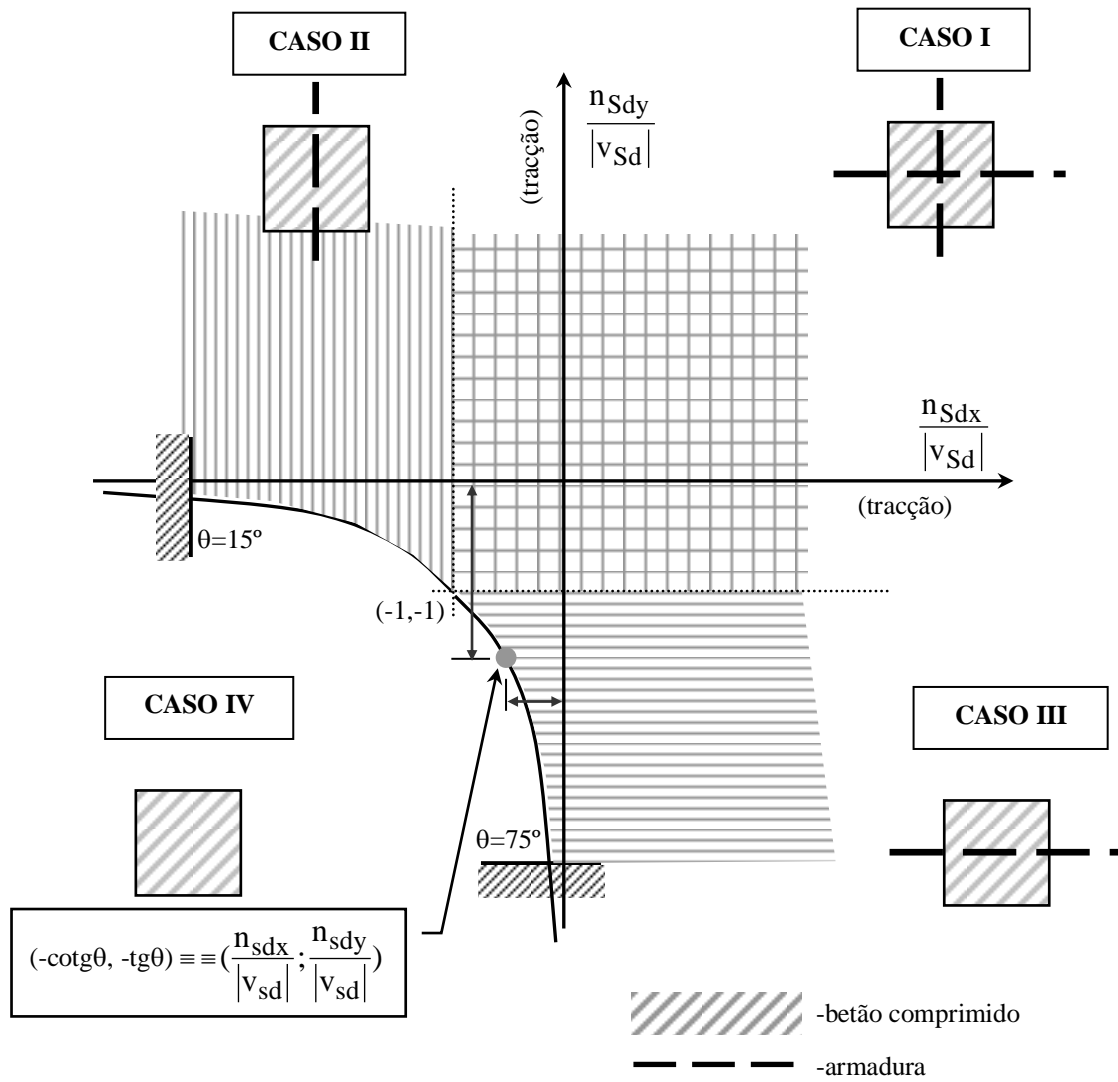


Figura 10.8

10.2 - EUROCÓDIGO 2

f_{tdx} - valores de cálculo fictícios das tensões de tracção no aço das armadura segundo x.

f_{tdy} - valores de cálculo fictícios das tensões de tracção no aço das armadura segundo y.

$$\rho_x = \frac{f_{tdx}}{f_{yd}}; \quad \rho_y = \frac{f_{tdy}}{f_{yd}} : \text{percentagem de armaduras segundo x e y.}$$

-valores negativos de f_{tdx} ou f_{tdy} são considerados nulos.

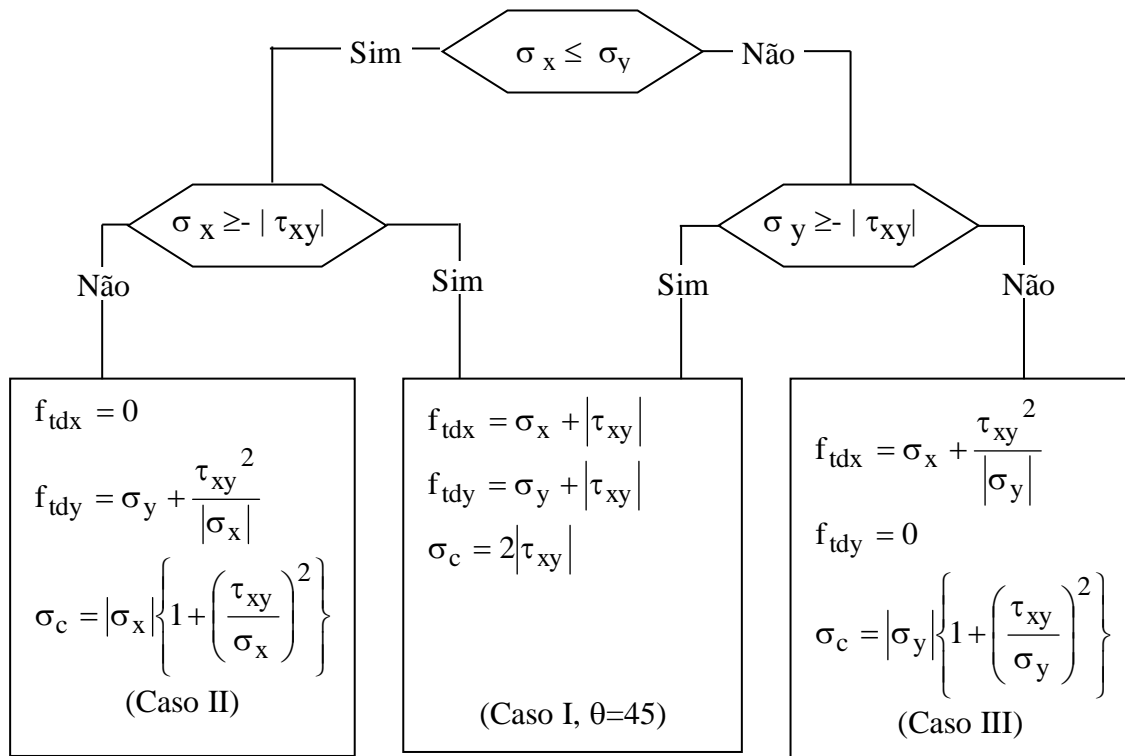
Cálculo de Armaduras

Figura 10.9

Em paredes armadas nas duas faces a tensão no betão deve ser limitada a :

$$\sigma_c \leq f_{cd} \quad (10.30)$$

e ainda: $|\tau_{xy}| \leq 1/2 v f_{cd} \quad (10.31)$

sendo v o factor de eficácia :

$$v = 0.7 - f_{ck} / 200 \text{ mas não inferior a } 0.5 \text{ N/mm}^2. \quad (10.32)$$

Método Alternativo

$$f_{tdx} = \sigma_x + \gamma * |\tau_{xy}| \quad (10.33)$$

$$f_{tdy} = \sigma_y + 1/\gamma * |\tau_{xy}| \quad (10.34)$$

$$\sigma_c = |\tau_{xy}| * (\gamma + 1/\gamma) \quad (10.35)$$

sendo γ escolhido de modo a que os resultados fiquem entre metade e o dobro dos obtidos pelo método anterior. Admite-se deste modo uma certa redistribuição de tensões, e consequentemente um acerto nas armaduras.

EXEMPLO 1:

Em que direcções será necessário colocar armaduras e qual o valor resistente das mesmas.

Resolução:

$$n_{Sdx} = -269$$

$$n_{Sdy} = -47$$

$$v_{Sd} = -158$$

$$\text{logo : } n_{Sdx} / |v_{Sd}| = -1.71, n_{Sdy} / |v_{Sd}| = -0.30$$

Identificando este ponto na figura 10.8 verificamos que está incluído no caso II, e por isso só há necessidade de armaduras segundo y-y.

Recorrendo à expressão (10.11) podemos identificar a direcção da fractura :

$$\cotg\theta = -\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} = -\frac{-269}{-158} = -1.71 \rightarrow \theta = -30.31^\circ$$

O valor resistente das armaduras deverá ser:

$$n_{Rdy} = n_{sdy} - \frac{v_{sd}^2}{n_{sdx}} = -47 - \frac{158^2}{-269} = +45.7 \text{ kN/m.l.}$$

Há que verificar se as tensões de compressão não ultrapassam o valor resistente do betão. De (10.13) vem:

$$\sigma_c * t = -v_{sd} \left[\frac{1 + \left(\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} \right)^2}{\left(\frac{n_{sdx}}{v_{sd}} \right)} \right] = -(-158) \left[\frac{1 + (1.71)^2}{(1.71)} \right] = 363 \text{ kN/m.l.}$$

Para o betão C25 temos:

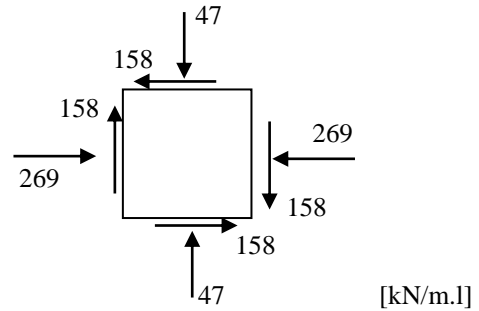
$$f_{cd2} = \alpha [1 - f_{ck} / 250] * f_{cd=0.6} * [1 - 20 / 250] * 13.3 = 7.34 \text{ MPa} = 7340 \text{ kN/m}^2$$

Verificação de segurança do betão:

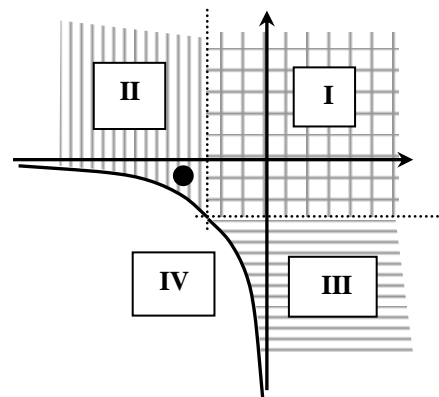
$$\sigma_c * t \leq f_{cd2} * t$$

$$363 \text{ kN/m.l.} \leq 7340 * 0.17 = 1248 \text{ kN/m.l}$$

É satisfeita a verificação de segurança do betão à compressão.



Material: C20
Espessura: 0.17m



EXEMPLO 2:

Em que direcções será necessário colocar armaduras e qual o valor resistente das mesmas.

Resolução:

$$n_{Sdx} = -78$$

$$n_{Sdy} = 15$$

$$v_{Sd} = -119$$

$$\text{logo : } n_{Sdx} / |v_{Sd}| = -0.65, \quad n_{Sdy} / |v_{Sd}| = 0.12$$

Identificando este ponto na figura 10.8 verificamos que está incluído no caso I, e por isso só há necessidade de armaduras em ambos os sentidos.

Recorrendo às expressões (10.4) e (10.5) temos o valor resistente das armaduras:

$$\begin{cases} n_{Rdx} = n_{sdx} + v_{sd} * \cotg \theta = -78 - 119 \cotg \theta \\ n_{Rdy} = n_{sdy} + v_{sd} * \tg \theta = 15 - 119 \tg \theta \end{cases}$$

As solução é indeterminada porque depende do ângulo θ . Consoante a armadura escolhida assim se desenvolverá uma fractura segundo aquele ângulo. Podemos raciocinar de modo inverso, isto é, para que ambos os valores de n_{Rdx} e n_{Rdy} sejam de tracção, é necessário que o ângulo a atribuir esteja dentro de um dos intervalos $[15^\circ; 75^\circ]$ ou $[-15^\circ; -75^\circ]$. Se tal não for possível uma das armaduras está à compressão considerando-se inactiva, cujo domínio é um dos restantes casos.

Escolhendo $\theta = -45^\circ$ obtemos $n_{Rdx} = 41$ kN/m.l. e $n_{Rdy} = 134$ kN/m.l., às quais corresponderão respectivamente as armaduras $A_{sx} = n_{Rdx} / f_{syd}$ e $A_{sy} = n_{Rdy} / f_{syd}$.

Tensão de compressão no betão:

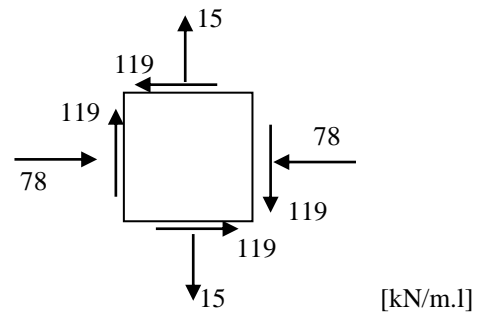
$$\sigma_c * t = v_{sd} (\cotg \theta + \tg \theta) = 119 * (\cotg(-45) + \tg(-45)) = 238 \text{ kN/m.l}$$

Verificação de segurança do betão ao esmagamento:

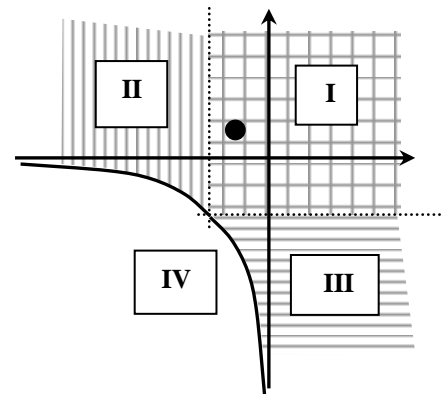
$$\sigma_c * t \leq f_{cd2} * t$$

$$238 \text{ kN/m.l.} \leq 7340 * 0.17 = 1248 \text{ kN/m.l}$$

É satisfeita a verificação de segurança do betão à compressão.



Material: C20
Espessura: 0.17m



11.1 - Estrutura Geral de Um programa de elementos Finitos

Uma análise pelo método dos elementos finitos é uma interacção lógica entre três estágios de actividade seguintes: (i) pré-processamento, (ii) processamento e (iii) pós-processamento.

O pré-processamento envolve a preparação de dados. Trata da definição, leitura e ou geração de dados como sejam: (i) o tipo de problema (mecânica de sólidos, transmissão de calor, etc); (ii) a definição ou geração de elementos de malha, isto é, as coordenadas de nós, tipos e número de elementos, topologia, etc.; (iii) a escolha das propriedades dos materiais; (iv) a demarcação das condições de fronteira; (v) a aplicação de cargas e (vi) a tradução de informação diversa como sejam impressão/não impressão, análise estática/dinâmica, análise linear/não linear (geometricamente ou materialmente), nº de modos, nº pontos de Gauss, etc.

No processamento efectua-se: (i) a geração das matrizes elementares e integração numérica; (ii) a assemblagem de matrizes e vectores; (iii) a imposição das condições de fronteira e (iv) a resolução do(s) sistema(s) de equações no sentido da determinação dos valores nodais da solução, que se denomina de solução primária (os deslocamentos no caso de problemas de mecânica de sólidos).

O pós-processamento quantifica e apresenta os resultados finais. Assim neste estágio obtém-se: (i) os deslocamentos noutros pontos que não os nós, por processos de interpolação; (ii) as variáveis secundárias como sejam as deformações, tensões, esforços, reacções, modos de deformação e vibração, etc.; (iii) os gradientes das variáveis primárias e secundárias e (iv) a impressão e/ou a apresentação escrita e/ou gráfica dos resultados.

O pré-processamento e o pós-processamento requerem um esforço considerável se efectuado manualmente. Neste caso, em virtude do número elevado de dados, os erros são frequentes, o que não é encorajador para o analista. Por este motivo se elaboram as rotinas apropriadas que em alguns casos tem a capacidade de detecção de erros de dados e análise de resultados. Assim as rotinas de Pré-processamento e de pós-processamento podem ser simples ou muito sofisticadas, traduzindo-se respectivamente numa menor e maior comodidade de utilização pelo analista. A sua sofisticação depende sobretudo do número de tipos de problemas físicos que ele pode resolver, das ferramentas numéricas que incorpora e dos objectivos finais pretendidos. Num programa sofisticado o trabalho de programação das rotinas de pré- e pós-processamento podem corresponder a uma grande fatia do trabalho de total de programação. Existe software específico de pré e pós processamento compatível com software de processamento de outras origens (marcas).

As rotinas de processamento são evidentemente a parte principal de um programa de elementos finitos. Estão mais tipificadas porque resolvem o problema matemático em questão o qual não tem muitas variantes. O processamento envolve muito cálculo numérico e por

isso, para estruturas grandes de certo tipo de problemas, pode consumir muito tempo, o que terá o seu custo.

11.2 - Modelação

A Modelação por elementos finitos é uma simulação do comportamento físico por processos numéricos baseados na interpolação polinomial. No sentido de obter uma solução fiável o analista deve ter de compreender o problema físico em análise, seja ele de tensão, de condução de calor, de percolação em solos, de escoamento hidráulico, etc.. A modelação por elementos finitos é muito mais do que preparar uma malha e efectuar o pré processamento.

A perícia na modelação por elementos finitos é baseada na capacidade de visualizar o problema físico e relacioná-lo com o comportamento de um tipo de elemento finito. Esta aptidão é desenvolvida com a prática e pela análise crítica e sistemática dos resultados obtidos em problemas anteriores. São necessários conhecimentos de base como estática, Teoria Estrutural, Resistência de Materiais, etc., e claro de Métodos Numéricos, em que o método dos Elementos Finitos é um deles. Devemos conhecer as limitações e as hipóteses em que se baseia qualquer das teorias mencionadas de modo a não as aplicar inadequadamente. Um bom conhecimento dos princípios básicos e hipóteses que governam o processo e a teoria de elementos finitos possibilitam o desenvolvimento de um bom modelo numérico representativo do processo. Resumindo, a modelação requer que a acção física do problema seja bem compreendida, de modo a poder ser possível a escolha do tipo de elementos e sua quantidade. Por outro lado a aproximação polinomial do campo de variáveis primárias que a teoria de elementos finitos requer exige que o analista saiba prever como vários tipos de elemento responderão a vários tipos de solicitações.

11.3 - Como Modelar ?

Queremos evitar elementos de geometria irregular, elementos muito grandes para representar importantes variações de campo. Por outro lado queremos evitar o gasto de tempo em análise e recursos de computação associados ao refinamento excessivo, ou seja, evitar o uso de excessivos elementos para representação do campo. Mais tarde, depois de efectuados os cálculos pelo computador, há que verificar se os resultados são razoáveis. A verificação é muito importante porque é fácil efectuar erros ao transcrever o problema para dados do programa.

Um problema difícil ou de grande dimensão não deve ser tratado de imediato. É preferível começar com casos mais simples e malhas mais grosseiras, e depois rever o modelo

sucessivamente. Procedendo assim perde-se menos tempo e ganha-se em confiança de resultados.

Se o problema for não linear ou envolver anisotropia deverá antes ser resolvido linearmente ou com isotropia. Se houver efeitos dinâmicos é preferível resolver primeiro o problema estático usando cargas próximas da máxima carga dinâmica. As análises lineares são mais simples e podem despertar o analista para defeitos grosseiros do modelo.

11.4 - Geração de Malha e Discretização

A geração de malha deve seguir as seguintes regras [3]:

- (i) Deve apresentar a geometria do domínio computacional e as cargas com precisão;
- (ii) Os grandes gradientes da solução devem ser representados adequadamente;
- (iii) Não deverá conter elementos de geometria inapropriada especialmente em zonas de grandes gradientes.

Deve-se começar com uma malha grosseira mas respeitando os três requisitos acima indicados, explorar as simetrias possíveis, interpretar os resultados à luz do entendimento físico do problema e usar informação aproximada analítica e/ou experimental. Estes resultados podem ser usados como guia para futuros refinamentos de malha ou análises.

De molde a cumprir estes requisitos apresenta-se nas secções seguintes matéria que nos alerta como actuar de maneira a que a solução final seja melhorada.

11.4.1 - Refinamento de Malha

As malhas com um único tipo de elemento são simples de gerar devido à compatibilidade entre os mesmos. Como vimos na secção 4.7 o refinamento de malha pode ser do tipo h, p, r e misto. Em geral, os refinamentos locais não devem ser tais que elementos muito pequenos sejam adjacentes de elementos grandes (ver figura 11.1).

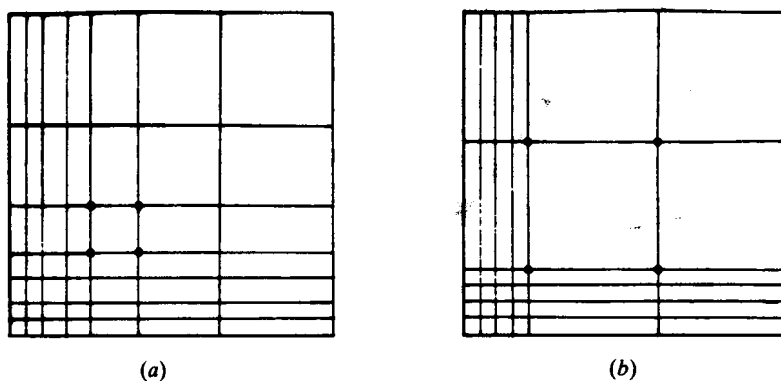


Figura 11.1- Refinamento de malhas. a) Malha aceitável e b) e não aceitável.

11.4.2 - Distorção de Elementos

Na verdade não se pode modelar uma estrutura de forma arbitrária só por exemplo com elementos rectangulares. Os elementos LST, Q4, e Q8, entre muitos outros, podem ter uma representação isoparamétrica permitindo deste modo que a sua geometria real possa ter os lados curvos e ou não perpendiculares entre si. É de facto uma vantagem pois facilita a adaptação da malha ao corpo real, mas estas distorções geométricas são usualmente desvantajosas no que respeita à exactidão dos resultados. Vejamos porquê.

Na verdade a resolução numérica de integrais no domínio do elemento envolve a mudança de coordenadas do elemento real para o elemento mestre, e vice versa. A transformação só é aceitável se e só se cada ponto do elemento real se projectar univocamente no elemento mestre e vice versa como foi visto em capítulos anteriores. Este requisito é cumprido se o Jacobiano da matriz de transformação (que representa a razão entre a área do elemento e a correspondente área no elemento mestre, $dx dy = \det[J] d\xi d\eta$) for não nulo em qualquer ponto do elemento real. Se o Jacobiano for zero então a área real é projectada no elemento real como área nula, e se for negativo um sistema de coordenadas directo é projectado como um sistema de coordenadas inverso, o que em qualquer dos casos é inaceitável.

Na prática e em geral o Jacobiano realiza uma transformação não uniforme no elemento real, o que corresponde a uma "*distorção*" do elemento real. Para garantir que o Jacobiano seja positivo e que tenha valores afastados de zero, evitando casos extremos de distorção, certas formas geométricas não devem ser usadas (ver figura 11.2). Por exemplo o ângulo interior num canto não deve ser próximo de zero nem de 180° pois pode conduzir ao mau condicionamento da matriz de rigidez. Aconselham-se ângulos entre 15° e 165° .

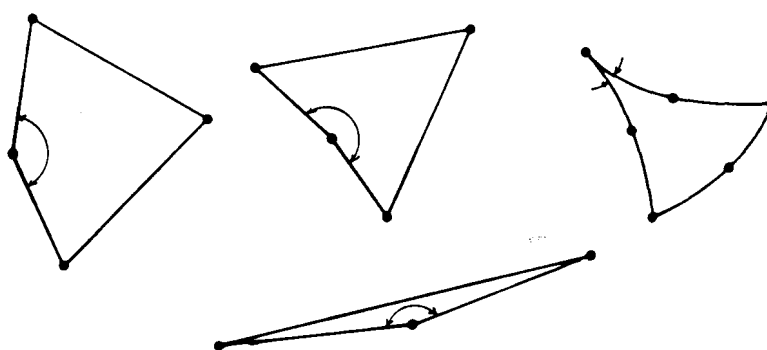


Figura 11.2 - Elementos finitos com ângulos não aceitáveis [3].

Para elementos de Lagrange de ordem superior, a localização dos nós ao longo dos lados e no centro dos elementos também contribuem para a distorção pelo que devem situar-se longe dos nós de canto, isto é, para além de 1/4 da distância entre os nós de canto como se mostra na figura 11.3.

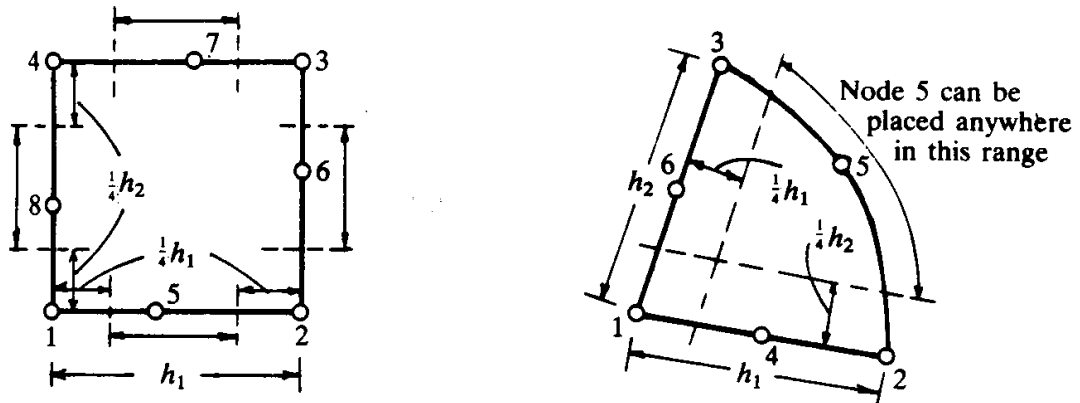


Figura 11.3 - Localização adequada dos nós ao longo dos lados [3]

Devemos reger-nos pelas seguintes regras básicas: os elementos se comportam-se melhor se a sua forma for compacta (isto é, não alongada) e se os ângulos entre os lados forem de ordem de grandeza semelhante. Assim um triângulo ideal será equilátero e um quadrilátero ideal um quadrado. Contudo os elementos que confinam com a fronteira do corpo poderão ter os lados curvos e não respeitar aquelas regras, mas os elementos no interior do corpo já devem apresentar os seus lados rectos e forma compacta.

Evitaremos usar elementos do tipo apresentado na figura 11.4. Estes elementos apresentam distorções que reduzem a exactidão dos resultados e tornam os elementos mais rígidos, onde conseqüentemente se concentram, artificialmente, tensões.

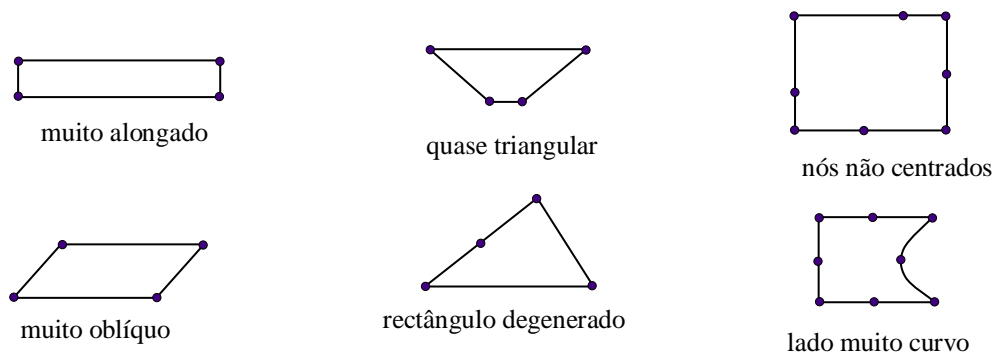


Figura 11.4 - Distorções que reduzem a precisão dos resultados

Acrescenta-se ainda que um elemento que tenha termos quadráticos no campo de deslocamentos pode, em virtude da distorção, comportar-se como um elemento linear. A distorção degrada as tensões mais do que os deslocamentos, as frequências naturais, os modos de deformação, e campo de temperatura. Estes elementos concentram tensões.

Quer seja bem ou mal desenhada a malha, se os elementos representarem exactamente o estado de deformação constante, então a convergência de resultados é garantida à medida que se refina a malha.

A escolha criteriosa da forma do elemento (triangular ou quadrilátero) e sua ordem (linear, quadrático, cúbico, etc) pode conduzir a poupança em termos de custos computacionais.

11.4.3.- Elementos de Diferente Ordem

Podemos combinar elementos de diferente ordem, ou seja um elemento linear a um elemento quadrático. Há dois processos. O primeiro consiste em usar um elemento de transição adequado com um número de nós diferentes em cada lado (figura 11.6.(a)). O outro processo consiste em impor uma *restrição* ou *coacção* (*constraint*) ao nó no centro do lado, de modo a que tenha o mesmo valor esperado dos nós de menor ordem. Contudo este tipo de resoluções não garantem continuidade inter-elementar como pode ser observado na figura 11.7.b) onde não existe continuidade ao longo dos lados.

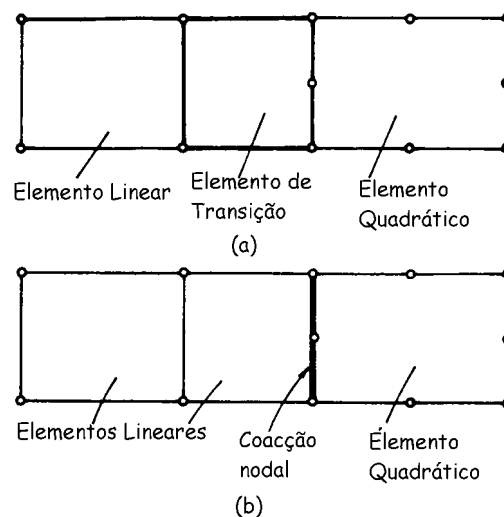


Figura 11.6- Combinação de elementos de diferente ordem. (a) Uso de elementos de transição
(b) Uso de um constrangimento linear para ligar um lado linear a um quadrático [3].

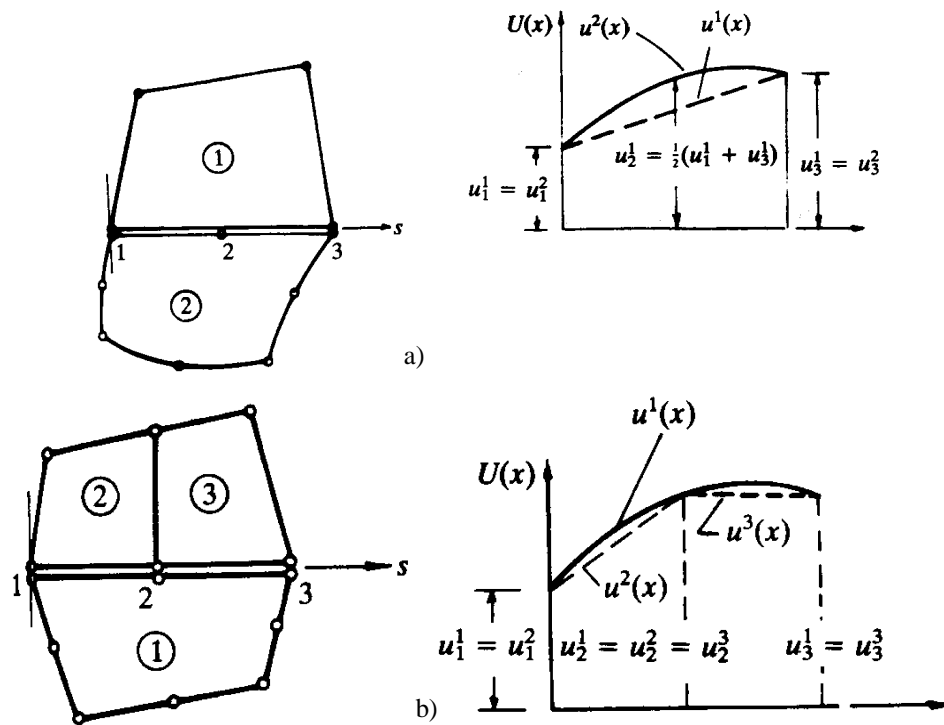


Figura 11.7 -Ligações incompatíveis. Falta de continuidade inter-elementar [3]

11.4.4 - Elementos de Natureza Diferente

Podemos combinar elementos de natureza diferente (barra, parede, etc.), desde que os nós comuns tenham os mesmos graus de liberdade, isto é, que sejam compatíveis. Um caso de não compatibilidade. Trata-se de ligar uma viga de Euler Bernoulli, cujos graus de liberdade nodais são a rotação e deslocamento vertical, a um elemento de parede, cujos graus de liberdade nodais são deslocamentos de translação. Os graus de liberdade são "incompatíveis". Para solucionar este problema poderá prolongar-se a viga de modo a intersectar vários nós no interior da parede ou então usar um elemento finito apropriado a este tipo ligação designado por *elemento finito de transição*.

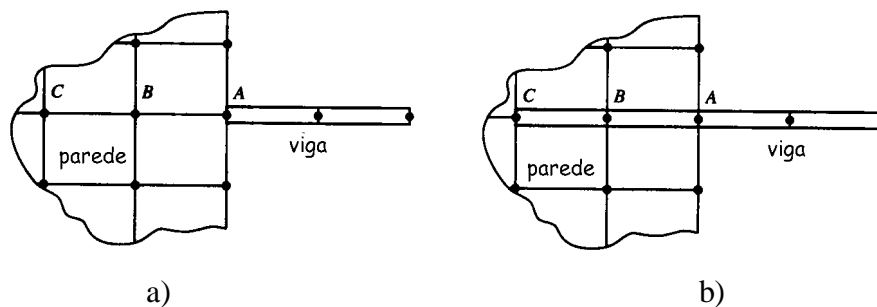


Figura 11.8 - Ligação viga-parede a) Momento não transmitido e b) transmitido [1].

11.5 - Sub-modelação

Consiste em estudar à parte e em detalhe uma zona particular de uma estrutura e a partir de resultados provenientes da estrutura global. Veja-se o exemplo da figura 11.8.

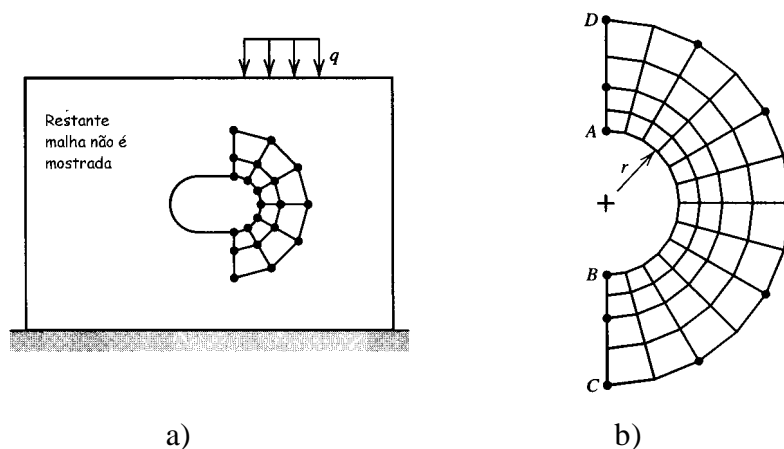


Figura 11.8 - a) Malha grosseira b) Submodelação [1]

Pretende-se estudar a distribuição de tensões junto ao furo. Começa-se por modelar a estrutura total sujeita ao carregamento prescrito com uma malha geral que no entanto será mais refinada junto ao furo. A seguir elabora-se outra malha independente, ainda mais fina, que contenha alguns dos nós da primeira. O estudo desta malha, no sentido de se obter melhor distribuição de tensões, é realizado adoptando como solicitação, deslocamentos impostos iguais aos obtidos da resolução da primeira malha. Como na segunda malha há nós que não existem na primeira, os deslocamentos prescritos para estes nós podem ser obtidos por interpolação.

11.6 - Meios Semi-infinitos

Ocasionalmente uma região de interesse pode estar embebida num meio contínuo tão grande que pode ser considerado sem fronteiras. É o caso de um solo sujeito a uma carga transmitida por uma placa rígida (ver figura 11.9-a)). Não se sabe à partida como e que porção do solo se deve considerar na análise. A que distância será colocada a linha limite CD? Muito próximo conduz a erros e muito longe conduz a um problema muito pesado. Uma forma de resolver o problema é introduzir elementos "infinitos". Estes são definidos por funções de forma especiais, na formulação isoparamétrica, de modo que os nós de um lado do elemento são concebidos para se mover até ao infinito. É o que acontece abaixo da linha CD cujos nós não se mostram. À medida que se afasta de CD os deslocamentos decaem para zero.

Outra forma de tratar o problema, e que está actualmente a ser objecto de investigação intensa, é recorrer a elementos finitos de fronteira (Boundary Finite Elements, BFE). Estes elementos são adequados para modelar o solo. Para além disso é possível associar no mesmo

problema elementos finitos e elementos de fronteira. Assim um elemento finito de fronteira contacta directamente a placa, não apresenta nós no interior da zona ABCD mas apenas ao longo da linha perimetral da mesma (ver figura 11.9b)). Nos nós ao longo desta linha são definidas as condições de fronteira estáticas e cinemáticas. Este método, por ter menos nós, reduz o tempo de preparação de dados, reduz o número de graus de liberdade do problema, mas o tempo de calculo aumenta (comparavelmente ao número de nós) visto as matrizes globais serem cheias e não simétricas.

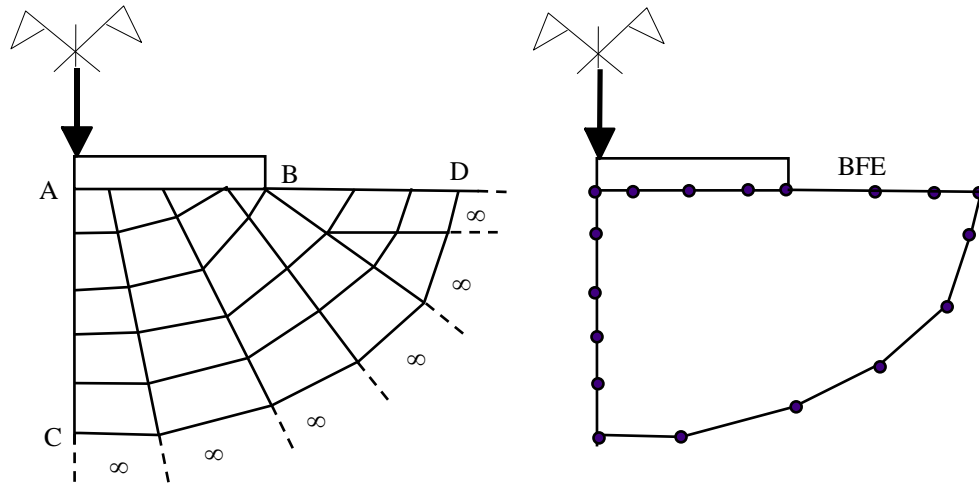


Figura 11.9-a)Malha de E.F. com elementos "infinitos" b)Malha de elementos de fronteira

11.7 -Representação de Forças

Uma força concentrada actuante num corpo deve ser aplicada num nó preferencialmente partilhado por diversos elementos, e não num só nó lateral de um elemento finito. Como o nó tem dimensão nula, a força traduz-se fisicamente por uma tensão infinita, o que obrigaria à cedência do material naquele ponto. Trata-se portanto de uma idealização. Uma idealização mais aproximada seria adoptar uma distribuição sinusoidal da carga aplicada numa zona restrita do corpo (ver figura 11.10) abrangendo por isso vários nós.

Um momento não pode ser aplicado em elementos que só tenham graus de liberdade de translação. Nestes casos pode ser simulado por um binário ou então distribuído por um grupo de nós usando técnicas de coacção dos nós.

As acções de superfície e de massa devem ser convertidas pelo método dos elementos finitos em forças nodais equivalentes. A figura 11.11 apresenta forças nodais equivalentes à massa para diversos tipos de elementos. No caso de elementos finitos de barra e viga, e para certas formas de carga incluindo a pontual, é fácil o seu cálculo manual: Contudo para outro tipo de elementos é trabalhoso devendo então ser desenvolvidas rotinas apropriadas. De uma

forma aproximada e em alternativa podem determinar-se forças nodais equivalentes à forças de superfície e de massa proporcionais às de influência.

Em problemas lineares as forças mantêm a sua orientação no espaço independentemente dos deslocamentos sofridos. O problema torna-se não linear quando as direcções das forças se tornam dependentes da deformação da estrutura (forças subordinadas). A análise não linear (geométrica ou de 2ª ordem) é obrigatória se os deslocamentos não forem desprezáveis.

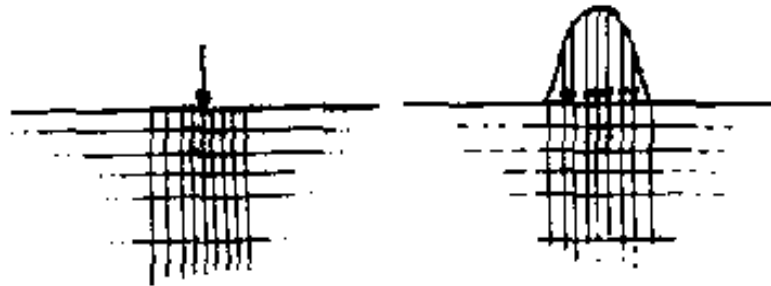


Figura 11.10 - Carga pontual [3]

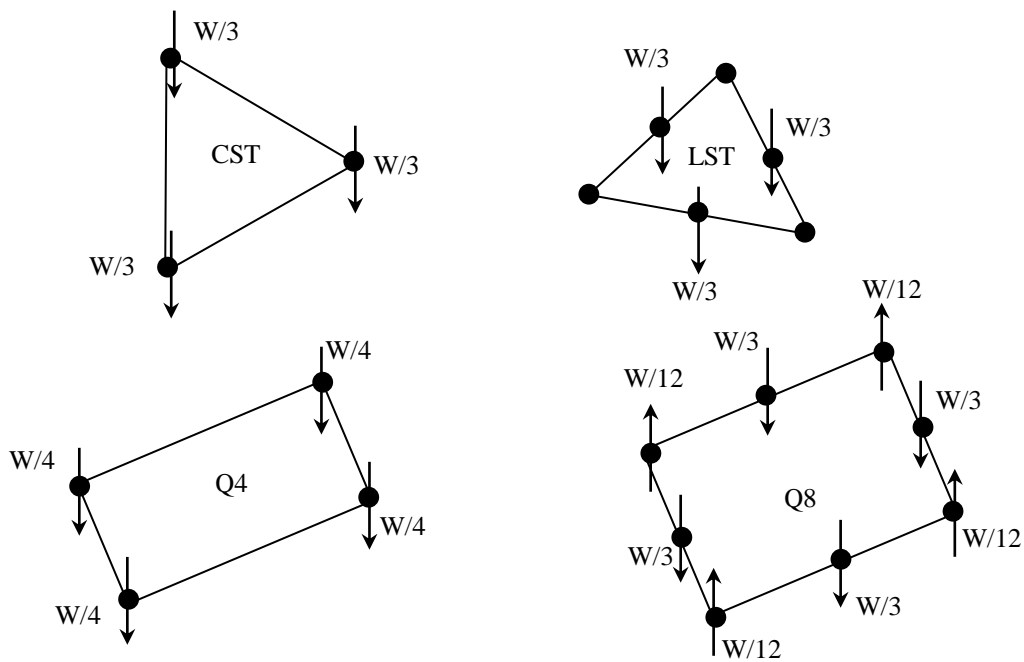


Figura 11.11- Forças equivalentes à massa para diversos tipos de elementos de placa.

11.8 - Apresentação e Interpretação de Resultados

11.8.1 "Adoçamento" ou "Ajustamento"

Os resultados podem ser apresentados de forma tabelar ou gráfica. A forma gráfica, como sejam diagramas, bandas coloridas linhas de nível, etc, são de mais fácil interpretação, e por isso obrigatória para se ter um bom rendimento na análise. Na opção gráfica, os utilizadores poderão eleger como opção do programa o "adoçamento" ou "ajustamento" dos resultados. Este consiste em determinar os resultados finais com base (i) ou nas médias obtidas dos seus valores nodais inter-elementares ou (ii) por processos de interpolação geral (como o método dos mínimos quadrados), antes de se realizar a apresentação gráfica. Desta forma não haverá descontinuidades nos traçados gráficos nas zonas inter-elementares. É uma prática "pobre" porque remove informação útil ao analista. Como se verá, as tensões são em geral descontínuas entre os lados de elementos adjacentes como mostra a figura 11.12. Se na realidade se verificarem grandes descontinuidades tal quererá dizer que é necessário uma malha mais refinada, mais perfeita. Ao optar-se pelo "ajustamento" perde-se esta informação. Após o "ajustamento" as linhas de nível traçadas a partir de médias de tensões são contínuas entre elementos, o que nos priva acerca da informação do erro. Como se viu, as descontinuidades inter-elementares são uma medida qualitativa do refinamento da malha.

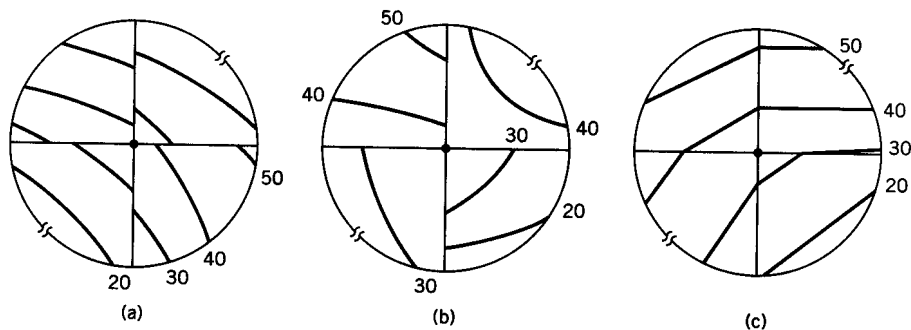


Figura 11.12 - Continuidade adequada (a) e não adequada (b). Depois de realizada a média (c) sendo difícil afirmar se os resultados são adequados ou não. [1]

Uma opção corrente na maioria dos programas é calcular a média das tensões nos nós. Assim se n elementos convergirem num nó, determina-se o somatório de n tensões e divide-se por n . Por vezes a média pode ser ponderada pelo volume do elemento ou pela proximidade do nó em relação ao centro do elemento ou outro factor.

Aparentemente existe boa continuidade de tensões (ver figura 11.14-b)) quando as linhas de nível se suportam em valores médios. Na verdade, não realizando a média de tensões as descontinuidades são evidentes. A malha é inaceitável.

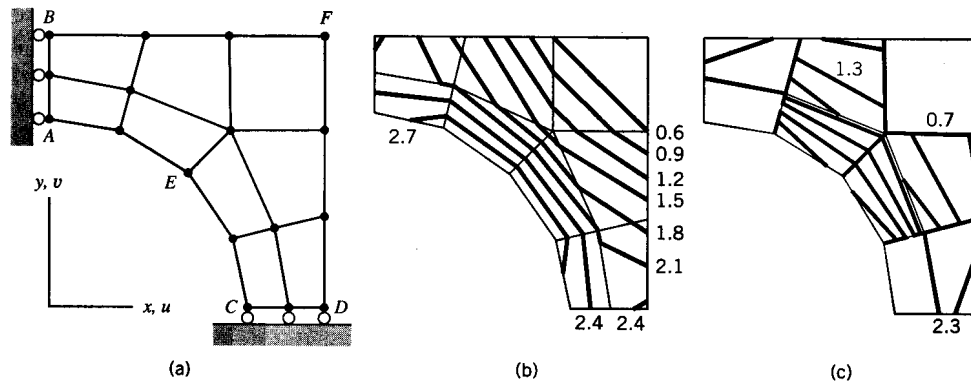


Figura 11.14 - a) Malha grosseira b) Contorno de tensões b) "ajustado" e c) não "ajustado".

Refinando a malha verifica-se que a descontinuidade parece ser aceitável (ver figura 11.15-b)) mesmo tendo-se optado por uma malha proposadamente não simétrica.

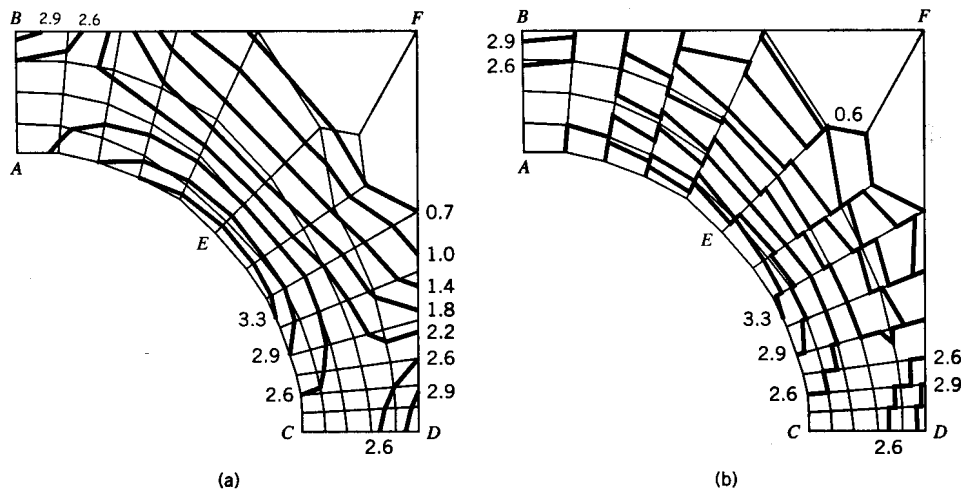


Figura 11.15- Contorno de tensões em malha fina. a) valores "ajustados" e b) não "ajustados"

Existe um método alternativo que quantifica as forças nodais elemento a elemento, e que, posteriormente, pela minimização do erro pelo método dos mínimos quadrados permite a quantificação aproximada do campo de tensões (ver parágrafo 11.8.4). Este método alternativo é mais trabalhoso mas apresenta as seguintes vantagens:

- (i) confere melhor precisão para o caso de carga associado a deslocamentos impostos;
- (ii) as tensões são pelo menos tão precisas quanto os deslocamentos obtidos (o que não acontece nos métodos tradicionais);
- (iii) o método evita dificuldades associadas com a harmonização do campo de deformações e campo de temperaturas;
- (iv) o método é relativamente insensível à distorção dos elementos.

Há casos em que não se devem determinar a média das tensões como sejam (i) quando elementos adjacentes tem espessura diferente ou materiais diferentes (ii) quando as tensões estão escritas em termos de sistemas de coordenadas com orientações diferentes.

11.8.2 - Cálculo de tensões

Nos programas convencionais após a determinação de deslocamentos nodais determinam-se as tensões, $\{\sigma\} = [E][B]\{d\} + \{\sigma_0\}$, elemento a elemento. Em geral $[B]$ é função das coordenadas e por isso o utilizador (desde que o programa permita) pode decidir em que pontos do elemento as tensões são calculadas. As tensões tendem a ser mais exactas no seio do elemento, como por exemplo nos pontos de Gauss, do que na sua fronteira. (figura 2.5.4) Para além disso ao longo da fronteira da estrutura com o exterior as tensões tendem a ser maiores, a qual também é a fronteira de vários elementos. Como é comum na prática usar 2×2 pontos de Gauss para integrar a matriz de rigidez $[K]$ em elementos planos de quatro e oito nós, também se usam os mesmos pontos para a quantificação de deformações e de tensões. As tensões nos nós e noutros pontos dos elementos são obtidas depois por extrapolação ou interpolação dos valores dos pontos de Gauss.

11.8.3 - Invariante de Tensões

Em mecânica dos sólidos certas tensões são grandezas invariantes, ou seja, apresentam o mesmo valor numérico independentemente da orientação do sistema de coordenadas. Trata-se por exemplo da tensão de von Mises (ou tensão efectiva ou tensão equivalente):

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

onde as tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 são tensões principais e $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Como σ_e representa o estado de tensão total desenham-se as linhas de nível correspondentes de modo a averiguar a sua continuidade inter-elementar e assim aferir a qualidade dos resultados obtidos. Numa estrutura simétrica com carregamento simétrico obtém-se sempre σ_e simétrico. No que respeita às suas componentes por exemplo σ_1 , ou σ_x não há que garantir simetria nem ser tão exigente quanto à continuidade inter-elementar.

11.8.4 - Valores nodais a partir de valores constantes elementares

Apresenta-se um procedimento para a determinação de valores nodais com base no *método dos mínimos quadrados* (*least square fit*). O processo serve para o "adoçamento" de diagramas de resultados, isto é, obter um diagrama de resultados contínuo, aproximado ao valor real mas de erro mínimo. Está desenvolvido para o caso em que a variável de interesse é constante no domínio (como por exemplo as tensões em elementos CST). Se a variável de interesse for variável há apenas que a representar por uma aproximação polinomial e aplicar o procedimento no qual certos integrais ficarão mais complexos.

Considere um elemento triangular e em cujo domínio determinada função tem valor constante de valor f_e . Pretende-se determinar os valores nodais f_1 , f_2 e f_3 (desconhecidos) através da minimização do erro quadrático englobando todos os elementos da estrutura. O valor da função f é dado por:

$$f = \{\psi\} * \{f\}^T = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} * \{f_1, f_2, f_3\}^T \quad (1)$$

sendo ψ_i as funções de forma lineares.

O Erro quadrático em toda a estrutura é representado por

$$E = \sum_e \frac{1}{2} \int_e (f - f_e)^2 dA \quad (2)$$

o qual se pretende minimizar. Expandindo (2) e substituindo (1) em (2) fica

$$E = \sum_e \left[\frac{1}{2} \{f\}^T \left(\int_e \{\psi\}^T \{\psi\} dA \right) \{f\} - \{f\}^T \left(f_e \int_e \{\psi\}^T dA \right) + \frac{1}{2} f_e^2 A \right] \quad (3)$$

Verificamos que o último termo é constante e definimos

$$\left[\mathbf{W}^e \right] = \int_e \{\psi\}^T \{\psi\} dA = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\left\{ \mathbf{R}^e \right\} = f_e \int_e \{\psi\}^T dA = \frac{f_e A_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

pelo que se pode escrever:

$$E = \sum_e \left[\frac{1}{2} \{f\}^T \left[\mathbf{W}^e \right] \{f\} - \{f\}^T \left\{ \mathbf{R}^e \right\} + \text{constante} \right] \quad (6)$$

Fazendo a assemblagem para toda a estrutura obtemos:

$$E = \frac{1}{2} \{F\}^T \left[\mathbf{W} \right] \{F\} - \{F\}^T \{R\} + \text{constante} \quad (7)$$

em que $\{F\}$ é o vector de valores nodais global:

$$\{F\} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n\acute{o}n}\}^T \quad (8)$$

e $[W]$ a matriz de "rigidez" global, que é bandeada e simétrica.

Para minimizar o erro definido em (7) é necessário derivar (7) em ordem a F_i e igualar a zero, de onde resulta:

$$[W] \{F\} = \{R\} \quad (9)$$

que é um sistema de equações lineares de cuja resolução se obtêm os valores nodais $\{F\}$.

11.8.5- Desenho de linhas de nível em elementos triangulares de três nós.

Exemplifica-se o cálculo das linhas de nível num elemento triangular conhecidos os valores nodais da variável de interesse.

Considere a variável f sobre o elemento triangular. Ela é interpolada linearmente usando as funções de interpolação lineares para triângulos. Os valores que a função f tem nos nós 1, 2 e 3 são respectivamente f_1 , f_2 e f_3 . Imagine que f^* é um valor típico de uma curva de nível. Se f^* estiver no intervalo f_2 - f_3 então estará num dos intervalos f_1 - f_2 ou f_1 - f_3 . Suponhamos que está no intervalo f_1 - f_3 . Então f tem o valor f^* ao longo da linha AB. As coordenadas do ponto A são obtidas de:

$$c = (f^* - f_2) / (f_3 - f_2) , \quad x_A = c x_3 + (1 - c) x_2 , \quad y_A = c y_3 + (1 - c) y_2$$

As coordenadas de B são obtidas substituindo os índices 2, 3 por 1, e 3 respectivamente.

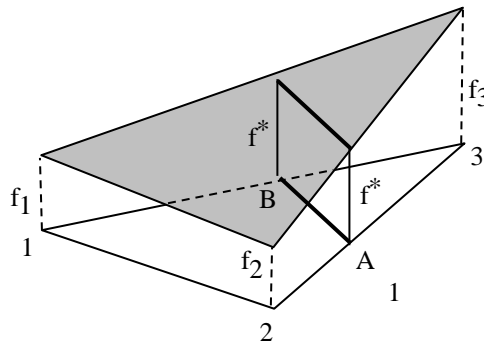


Figura 11.16- Linha de nível de valor f^* .

11.8.6 - Exemplos de aplicação

A figura apresenta a flecha no ponto C e a tensão σ_{xB} da barra em consola discretizada por diversos tipos de elementos e geometria de malhas. Realce-se o modo como estão discretizados os apoios e como se simula a aplicação da carga.

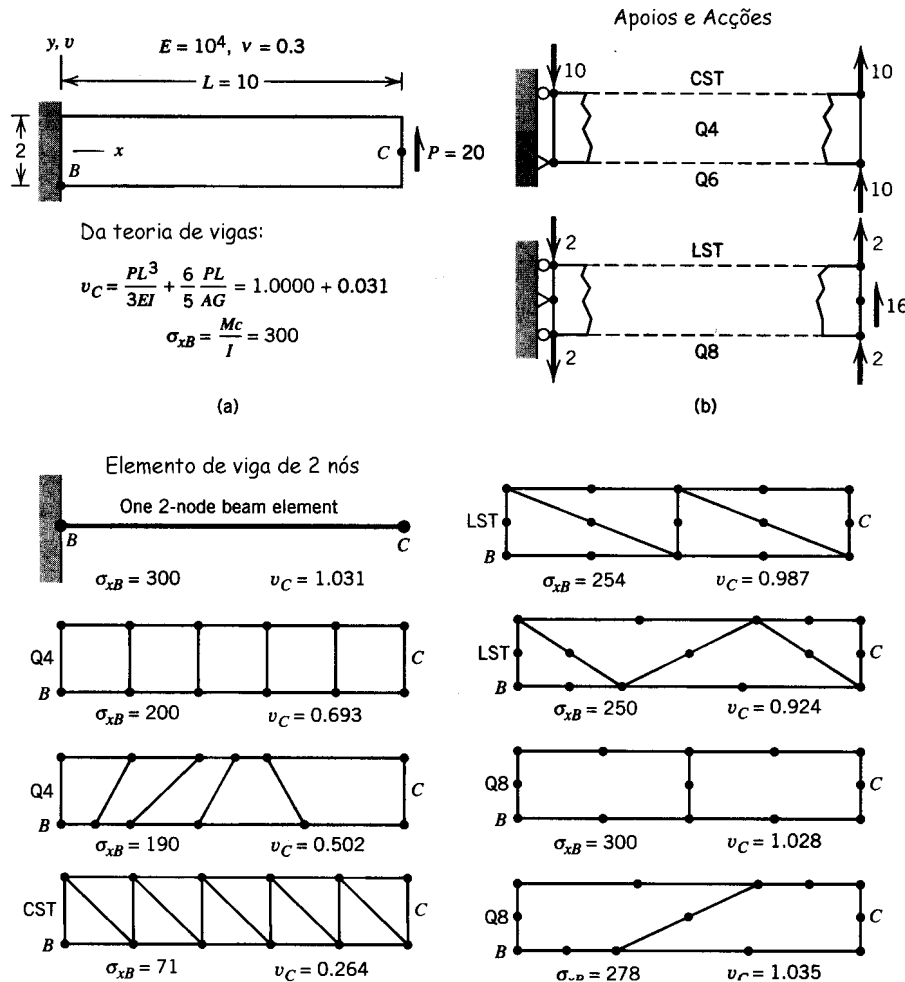


Figura 11.13 - Viga em consola. Resultados de modelos com vários tipos de elementos. [1]

11.9 - Extrapolação de Resultados

Por vezes os resultados de duas análises podem ser extrapolados de modo a se obter uma solução melhorada. Este argumento obedece à convergência do tipo h . Assume-se desde já que a convergência é monotónica e que a taxa de convergência é conhecida: por exemplo se um certo erro se reduz quatro vezes quando a dimensão dos elementos se reduz a metade, então o erro é proporcional a h^2 . A figura 11.17-a) ilustra o caso geral de erro proporcional a h^q , a qual é representada por uma linha recta quando a abcissa é h^q . A quantidade ϕ é a variável de interesse, tal como deslocamentos ou tensões em certos pontos. Por uma simples interpolação linear de ϕ versus h^q , obtemos:

$$\phi_{\infty} = \frac{\phi_1 h_2^q - \phi_2 h_1^q}{h_2^q - h_1^q}$$

sendo o valor de ϕ_{∞} esperado para uma malha com refinamento infinito, $h = 0$.

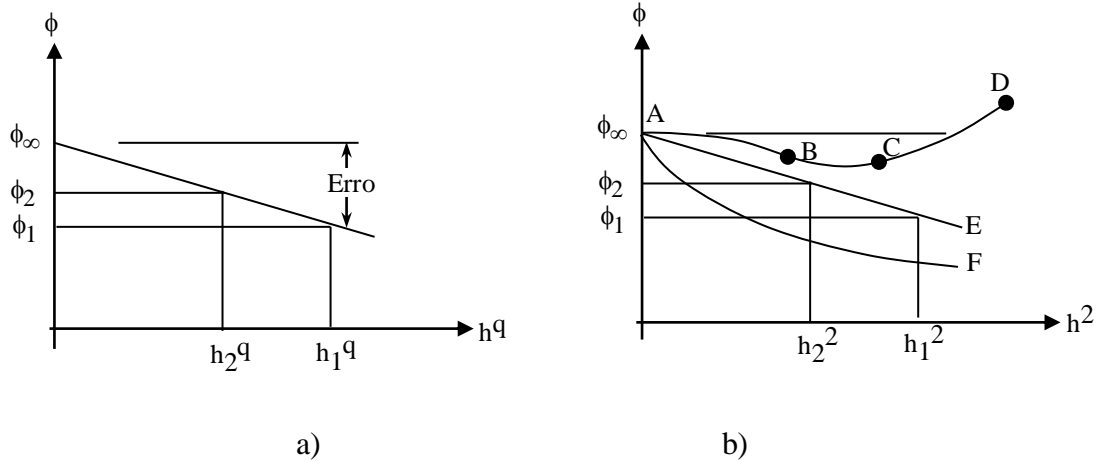


Figura 11.17 - Extrapolação: a) com erro proporcional a h^q ; b) com erro não monotónico.

Como mostra a figura 11.17-b) para uma convergência não monotónica (curva ABCD) e proporcional a h^2 , a extrapolação baseada nos valores de ϕ nos pontos C e D pode produzir piores resultados. Entretanto a curva AF seria uma recta se a abcissa fosse h . Note-se que pelo menos três análises são necessárias para se determinar o coeficiente q e todas elas devem ser baseadas em pelo menos refinamentos de malha moderados se se quiser obter q com exactidão. Se os sucessivos refinamentos de malha não forem uniformes não é claro onde determinar h_1, h_2 etc., sugerindo-se que talvez se deva determinar h_i em pontos próximos do ponto da variável de interesse.

Por vezes analisamos duas malhas as quais estão substancialmente concordantes, e se conclui que a convergência é completa. A conclusão é plausível mas pode ser incorrecta. Por exemplo os pontos B e C na figura anterior apresentam o mesmo erro.

11.10 - Medidas de Erro

Pretende-se determinar o erro de discretização de uma só malha. Para facilitar a exposição aplica-se esta metodologia à barra mostrada na figura 11.18.

Imagine-se então o campo de tensões calculado numa determinada malha. De elemento para elemento as tensões não são contínuas nos pontos inter-elementares. Pretende-se obter um campo de tensões contínuo e aproximado ao longo da estrutura, e por isso também entre os elementos, mas cujo erro seja mínimo. O erro é aqui a diferença entre o valor da função

aproximada (σ^*) e o valor da tensão obtida (σ) como resultado da análise por elementos finitos, em todo o domínio ponto a ponto.

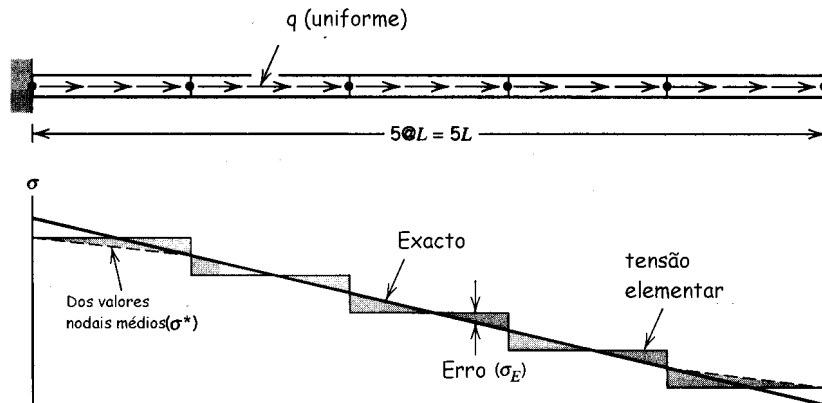


Figura 11.18- Barra modelada por elementos de 2 nós. Tensões associadas à carga axial uniforme.

Identificam-se as seguintes tensões:

σ : campo de tensão, descontínuo de elemento para elemento (resultado da análise por E.F.)

σ^* : campo de tensões médio, interpolado ou adoçado

$\sigma_E = \sigma - \sigma^*$: "erro" do campo de tensões (zona sombreada na figura 11.18).

A energia de deformação, por exemplo de uma barra, pode ser associada ao campo de tensões:

$$U = \sum_{i=1}^n \int \frac{\sigma^2}{2E} Adx, \quad U^* = \sum_{i=1}^n \int \frac{\sigma^{*2}}{2E} Adx, \quad U_E = \sum_{i=1}^n \int \frac{\sigma_E^2}{2E} Adx$$

onde A é a área da secção transversal, L o comprimento de cada elemento barra, e os somatórios representam as contribuições em energia de deformação de cada elemento.

Para elementos de tipo arbitrário as tensões são vectores, a constante E é uma matriz de coeficientes e os integrais estendem-se ao longo do volume do corpo. Por exemplo um dos integrais passa a escrever-se:

$$U = \sum_{i=1}^n \int [\sigma]^T [E] [\sigma] dV$$

A quantidade global η , *erro relativo em energia*, é usada para se realizar o teste de convergência:

$$\eta = \left(\frac{U_E}{U + U_E} \right)^{1/2} \quad \text{onde } 0 \leq \eta \leq 1.$$

Note que η é uma medida de erro global e não deve ser usada para medir o erro em zonas

pontuais ou a elementos individualmente pois poderá conduzir conclusões erradas. Por outro lado nem η (global) nem U_{Ei} podem ser usados como medidor de percentagem de erro em zonas de concentração de tensões.

Para as figuras 11.14 e 11.15 obtemos valores de erro relativo em energia respectivamente de 0.373 e 0.183, o que ainda é considerado não satisfatório. Sugere-se como erro aceitável o de 0.05.

Há programas que utilizam a convergência auto-adaptativa, procurando que U_{Ei} seja semelhante em todos os elementos i (modificando a dimensão dos elementos e/ou introduzindo mais nós), e estabelecem um limite de erro relativo em energia η_{limite} como critério paragem.

11.11 - Erros - Alguns erros de modelação e formais

11.11.1 - Mau Condicionamento

Um conjunto de equações está mal condicionada quando pequenas alterações nos coeficientes matriz produzem grandes alterações no vector solução. Trata-se de um erro numérico associado a deficiente modelação.

Considere o seguinte sistema de equações de equilíbrio da estrutura apresentada na figura 11.19:

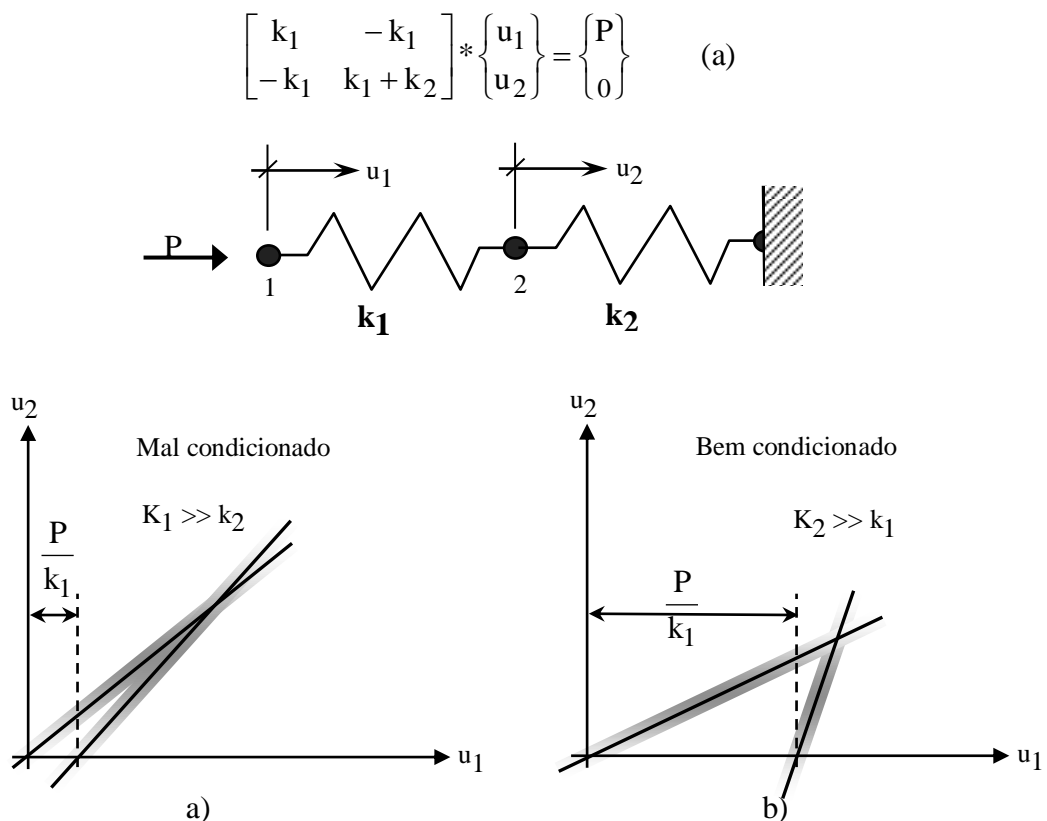


Figura 11.19- a) Apoio flexível b) Apoio rígido

Cada equação é representada por linhas rectas no sistema de coordenadas u_1 ou u_2 . Estas linhas são representadas por um traço nítido e uma banda envolvente sombreada que pretende sugerir a pouca precisão devido ao facto de cada número ser representado por um número finito de dígitos (ou bits) na memória do computador. A solução exacta é representada pela intersecção das duas linhas. Como se constata graficamente quando $k_1 \gg k_2$ essa intersecção corresponde a uma região grande enquanto para $k_2 \gg k_1$ é muito mais pequena. A incerteza da solução é grande no primeiro caso, dizendo-se que o sistema está mal condicionado, traduzindo-se em soluções com falta de precisão. Adicionando as duas equações do sistema (a) obtemos:

$$[(k_1 + k_2) - k_1] * u_2 = P \quad (b)$$

que será exactamente igual a $k_2 u_2 = P$ se o computador usar um número infinito de dígitos para representar k_1 e k_2 . Mas se $k_1 = 1.000000$ e $k_2 = 4.123456 \times 10^{-6}$ e o computador arredondar na sexta casa decimal a subtracção da equação (b) será $1.000004 - 1.000000 = 0.4 \times 10^{-6}$, isto é, sobrando só um dígito significativo. Se o computador arredondar na quinta casa decimal teremos $1.00000 - 1.00000 = 0.00000$ e portanto a matriz de rigidez será singular. Este problema não surgirá se $k_2 \gg k_1$.

Erros numéricos deste tipo são mais prováveis quando elementos ou regiões no seio da estrutura têm muita diferença de rigidez, quando a parte mais rígida é suportada por uma outra muito flexível. No caso de haver regiões muito rígidas é então preferível adoptá-las como perfeitamente rígidas impondo aos seus graus de liberdade coacções (constrangimentos). O maior perigo do mau condicionamento reside não no facto do sistema se tornar singular e por isso não resolúvel, mas sim, no facto inverso em que não se chega à singularidade da matriz de rigidez, produzindo-se uma solução muito pouco precisa, com erros sérios mas não suficientemente grandes para que seja óbvio detectar que alguma coisa está mal.

11.11.2 - Modelo linear inapropriado

É necessário relembrar que uma solução linear é baseada em equações de equilíbrio escritas em relação à estrutura com geometria indeformada. No caso da estrutura apresentada na figura 11.20 a análise linear determinará a reacção de apoio na mola embora apresente deslocamentos muito grandes. Estes não são compatíveis com uma análise linear pelo que os resultados obtidos não correspondem à realidade física do problema.

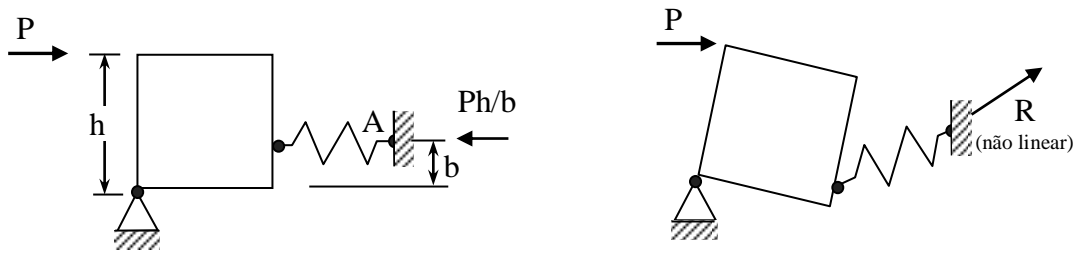


Figura 11.20 - 1 pag 134

11.11.3 - Escolha do Número de Pontos de Integração. Instabilidades

Um modelo de elementos finitos é usualmente inexacto por ser usualmente mais rígido que a realidade, como já se constatou em capítulos anteriores. A sobre-rigidificação é usualmente agravada pelo uso de mais pontos de Gauss para integrar a matriz de rigidez, porque pontos adicionais capturam termos de ordem superior em $[K]$. Estes termos resistem a certos modos de deformação, o que não ocorre em termos de ordem inferior, e por conseguinte actuam rigidificando o elemento. Consequentemente melhor exactidão da integração de $[K]$ produz pior exactidão na solução e elementos finitos para além de requerer mais cálculo.

Por outro lado o uso de poucos pontos de Gauss produz uma situação pior, aqui não tratada, conhecida por vários nomes: instabilidade, falso (spurious) modo singular, mecanismo, modo cinemático, modo de energia-zero e modo de ampulheta (hourglass mode). Ocorrem instabilidades se um ou mais modos aparecem com deformações nulas nos pontos de Gauss, o que quer dizer que $[K]$ não tem resistência para aqueles modos.

Na prática para elementos quadriláteros de placa e de laje usam-se 2x2, 3x3 pontos de Gauss ou oito pontos de integração para calcular as matrizes de rigidez. A determinação de tensões pode ser gerada com menos pontos, 2x2 pontos de Gauss.

11.11.4 - Equilíbrio Global

Uma forma corrente de averiguar a qualidade dos resultados é verificar se as reacções de apoio estão em equilíbrio com as cargas aplicadas, o que é sempre verdade quando as estruturas são isostáticas. Contudo no caso de estruturas hiperestáticas reacções incorrectas podem ainda garantir o equilíbrio global, dando um falso sentido de segurança, quando na verdade a malha pode não ser ainda adequada. Portanto para estruturas hiperestáticas a condição de equilíbrio reacções-cargas é necessária mas não é suficiente.

Pode-se aferir o equilíbrio interno num determinado nó, e assim a qualidade dos resultados, comparando os valores nodais (elementares) dos diversos elementos que partilham esse nó. Para tensões um erro aceitável é de 5% em relação à média.

11.12 - Definição, classificação e descrição dos erros

Qualquer que seja o método de análise adoptado para estudo de um problema nós não analisamos o problema físico em si, mas apenas o seu modelo matemático [1]. Por isso há que admitir a existência de diferenças ou erros entre aqueles modelos e no próprio método matemático. As fontes de erro que contribuem para a falta de exactidão da solução por elementos finitos [1, 3] são os *erros de discretização*, *erros computacionais*, *erros de aproximação* e *erros de modelação*. Podem finalmente existir outro tipos de erros, os *erros formais*, onde se incluem "bugs" de programação, fornecimento de dados errados, esquecimento de cargas, de apoios, etc..

O *erro de discretização* (ou *erro de aproximação do domínio*) é inerente ao facto de traduzirmos a realidade contínua por elementos discretos, assim como as condições de fronteira, e as forças distribuídas por forças pontuais. Por exemplo num pilar de secção variável, discretizamo-lo como um conjunto de elementos de dimensões transversais diferentes mas em que cada elemento tem secção constante. O erro de discretização surge na medida em que quer o problema físico quer o modelo matemático têm infinitos graus de liberdade independentes (nomeadamente os deslocamentos de uma infinidade de pontos) enquanto o modelo de elementos finitos tem apenas alguns graus de liberdade independentes (os deslocamentos nodais). O modelo matemático é implementado em domínios bem definidos, os elementos finitos, os quais se interligam de forma discreta formando um todo, o modelo da estrutura em análise.

Os *erros computacionais ou numéricos* são devidos à inexactidão na determinação de $[K]$ e $\{F\}$ quando se efectua a integração numérica (quadratura), à determinação da solução $\{d\}$ durante a resolução do sistema de equações e a erros de arredondamentos ou truncaturas resultantes do facto de haver uma quantidade limitada de "bits" para representar um número. Estes erros são em geral muito pequenos mas certas práticas de modelação podem aumentá-los consideravelmente.

Os *erros de aproximação* são devidos à adopção de uma função de aproximação (polinomial ou outra) para representar campo de deslocamentos, a qual é tipicamente escrita na forma:

$$u \approx u_{\text{aprox}} = \sum_i \psi_i u_i^e$$

Finalmente, os *erros de modelação* surgem da dificuldade em classificar e interpretar adequadamente as estruturas reais e o seu comportamento. Por exemplo na teoria elementar de vigas representamos uma viga por uma simples linha e ignoramos a sua deformação por esforço transversal. Sabemos que se trata de uma boa aproximação para vigas esbeltas, mas já

não o é para vigas parede ou consolas curtas onde seria mais adequado a sua modelação por elementos de placa no estado plano de tensão. Casos há em que não se têm tantas certezas como sejam os nós de pórticos, reforços em "gousset", ligações, etc..

Há ainda que admitir que o "software" poderá apresentar erros, denominados correntemente por "bugs". Os programas comerciais são vastos, versáteis, complexos e por isso é natural que surjam erros de programação. Quando estes são fatais é imediata a sua detecção. Quando o não são, passam despercebidos, fornecendo mesmo a resultados finais, o que é perigoso. É por isso importante que o analista tenha em mente qual ordem de grandeza ou tipo de resultados que vai obter, se possível baseado em modelos mais simples. Um utilizador responsável deve compreender a natureza física do problema assim como o comportamento dos elementos finitos que vai adoptar de modo a conceber um modelo que lhe dê resultados com qualidade. A responsabilidade dos resultados produzidos é do analista que usa o software e não da empresa que o vendeu ou que o concebeu. Por este motivo, o analista ao comprar programas profissionais deverá munir-se de manuais devidamente explícitos quanto às características do bem que adquire, como sejam, as hipóteses em que se fundamentam as rotinas do programa, o domínio de aplicação e os métodos ou processos de cálculo usados.

Descrevem-se nas secções seguintes tipos de erro mais comuns.

Erros mais comuns

Realça-se uma vez mais que o maior erro na modelação de estruturas reside no mau conhecimento ou interpretação do fenómeno físico presente, da falta de conhecimento das limitações das análises e o ignorar as mensagens de erro produzidas pelos programas.

Quando houver dúvidas quanto ao modelo de elementos finitos a adoptar o analista deverá obter resultados experimentais ou analíticos com outros modelos mesmo que mais simples. Para certos problemas podem ser obtidas soluções aproximadas de tabelas. Estes resultados são depois comparados com os dos elementos finitos. Temos que saber justificar estes últimos quando comparados com os dos modelos experimentais e analíticos mais simples. Há contudo uma tendência, errada, que consiste actuar precisamente ao contrário, ou seja, tentando justificar os modelos simples com base nos resultados de elementos finitos.

Expõem-se alguns tipos de erro, como a divisão por zero, singularidade da matriz de rigidez, etc.

A divisão por zero pode ocorrer quando:

- (i) o coeficiente de Poisson for 0.5 em problemas planos de tensão ou deformação;
- (ii) a espessura de placa for nula;

A singularidade da matriz de rigidez pode ser causada por um dos seguintes factos:

- (i) se o módulo de elasticidade for nulo;
- (ii) se um ou mais nós não estiverem ligados a nenhum elemento;
- (iii) se não há suportes ou havendo se eles permitirem deslocamentos ou rotações de corpo rígido;
- (iv) se um mecanismo é criado devido ao número exagerado de libertações prescritas no mesmo nó;
- (v) se um mecanismo é criado quando parte da estrutura está inadequadamente restringida ou ligado a outro tipo de elemento finito;
- (vi) quando há uma grande diferença de rigidez entre elementos ou apoios;
- (vii) no caso da análise não linear quando ligações ou suportes atingem rigidez nula.

Há ainda outros erros que conduzem a resultados plausíveis mas inexactos. Erros deste tipo, muito perigosos, residem no seguinte:

- (i) o uso de elementos do tipo errado, elementos de parede em vez de elementos sólidos;
- (ii) a existência de apoios errados quanto à localização, tipo e orientação;
- (iii) a existência de cargas erradas quanto à localização, tipo e orientação, e ainda na deficiente exploração de casos de simetria e anti-simetria;
- (iv) na definição de grandezas com unidades incompatíveis ou com erros na redução de unidades (conversão em múltiplos ou sub-múltiplos)
- (v) na definição repetida do mesmo um elemento, ou na falta de elementos (vazios);
- (vi) na ligações sem significado físico entre elementos de tipo diferente.
- (vii) realização de análises lineares em casos não admissíveis (ver exemplo no parágrafo 11.11.5)

Lajes12.1-Modelo Estrutural. Introdução.

O comportamento estrutural de peças laminares depende grandemente da sua espessura quando comparada com as outras dimensões do painel, e do tipo de acções a que está sujeito.

Podem distinguir-se os seguintes casos:

- a) lajes finas com pequenas flechas
- b) lajes finas com grandes flechas
- c) lajes espessas
- d) placas

As placas contêm esforços apenas no seu plano médio (normais e de corte no plano da peça) enquanto as lajes estão sujeitas principalmente a esforços não existentes no seu plano médio (momentos flectores e torçores e esforços transversos).

Quanto ao modo de carregamento as placas são solicitadas segundo o seu plano médio enquanto nas lajes as solicitações são perpendiculares a esse plano.

a) Lajes finas com pequenas flechas

- $h/a \leq 1/5$ e $w \leq h/5$ (sendo: h - espessura, a - menor dimensão, w - flecha)

Neste tipo de lajes as flechas w de uma laje são pequenas quando comparadas com a sua espessura h . A teoria de flexão pura (isto é, sem esforço transversal) satisfaz o comportamento da laje podendo assumir-se como válidas as seguintes hipóteses clássicas da teoria de lajes finas:

1º) as fibras normais ao plano médio da peça mantêm-se rectas, ortogonais à superfície média e são inextensíveis;

2º) não há deformação no plano médio da laje (plano neutro), sendo nulas as tensões normais nesse plano;

3º) as tensões na direcção transversal à laje são desprezáveis ($\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} \approx 0$).

As duas primeiras hipóteses são as do modelo de lajes de Kirchhoff.

A primeira hipótese permite desprezar o efeito do esforço transversal durante a flexão da laje (se assim não fosse o plano da secção transversal ficaria ondulado). Esta simplificação é usualmente válida excepto em zonas próximas de aberturas com médias dimensões.

A segunda hipótese só é satisfeita em lajes cujo plano médio deformado tenha a forma de uma superfície de revolução, como seja uma forma cilíndrica ou cónica. No caso geral tal não ocorre. Contudo, em lajes com pequenas flechas, a rigidez de flexão é elevada e as

deformações segundo o plano médio e as tensões de membrana tornam-se desprezáveis. Neste tipo de lajes as tensões de membrana (normais) são inferiores a 5% das tensões normais de flexão.

Outros autores usam o parâmetro de rigidez de laje, θ , para classificar o tipo de laje [R. Barès]. Assim se o parâmetro de rigidez θ for superior a θ^* o painel de laje considera-se fino de pequena flecha.

$$\theta = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4$$

Apoio	a/b	θ^*
encastrado	1:1	55
	1:1.5	33
deslizante horizontal	1:1	26
	1:1.5	13
fixo	1:1	12
	1:1.5	5

b) Lajes finas com grandes flechas

$$- w / h > 1 / 5$$

Nestes casos a flexão é acompanhada por deformação do seu plano médio de onde resultam tensões normais não desprezáveis tendo o tipo de apoio tem muita influência no comportamento da laje. Estes painéis por terem pouca resistência à flexão, e estando fixos ou encastrados no seu contorno comportam-se como membranas. Estas são elementos estruturais com elevadas tensões normais no plano médio. Estas tensões têm papel rigidificador, isto é, se forem de tracção aumentam a rigidez de flexão do painel, e se forem de compressão reduzem essa rigidez. Por outro lado compressões elevadas podem conduzir o a painel a fenómenos de encurvadura.

c) Lajes espessas

$$- h / a \geq 1 / 5$$

É necessário recorrer à teoria de Mindlin, a qual considera a deformabilidade por esforço transversal dos painéis de laje, para resolver este tipo de pavimento.

d) Placas

São carregadas no seu plano. Tratam-se de elementos no estado plano de tensão.

12.2- Classificação das lajes [17]• Lajes quanto ao comportamento estrutural

Laje Isotrópica (ou isotrópica) - é constituída por material homogéneo com propriedades mecânicas iguais em todas as direcções (ex.: chapa de aço)

Laje Anisotrópica (ou anisótropa) - A anisotropia pode ter várias origens:

- (i) no material: as propriedades mecânicas variam com a direcção (ex.: betão armado)
- (ii) na forma : laje com geometria variável consoante a direcção (ex.: lajes nervuradas)
- (iii) na ortotropia: as propriedades mecânicas e/ou geométricas são diferentes em direcções perpendiculares. (ex.: lajes com nervuras ortogonais, laje de betão armado com armaduras nas duas direcções, etc.)

• Lajes quanto à geometria e constituição:

- lajes maciças
- lajes aligeiradas - estas podem ser de vigotas, com cofragem perdida ou não.

• Lajes quanto à forma de apoio:

- lajes vigadas - se os painéis se apoiam em vigas
- lajes fungiformes - se o apoio é conferido directamente por pilares

• Lajes quanto à forma como se armam:

- laje armada numa só direcção (uma direcção principal)
- laje armada em duas direcções (duas direcções principais)

12.3- Flexão de Lajes Finas

Hipóteses:

- 1º- material homogéneo, isotrópico, comportamento elástico linear;
- 2º- espessura constante e pequena comparada com o vão;
- 3º- são válidas as hipóteses de Kirschhoff
- 4º- as tensões na direcção transversal à laje são desprezáveis ($\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} \approx 0$).
- 5º- as flechas são pequenas comparadas com a espessura da laje ($w < h/5$) e as inclinações são pequenas comparadas com a unidade ($\partial w / \partial x \ll 1, \partial w / \partial y \ll 1$);
- 6º- o peso próprio e as cargas exteriores actuam no plano médio;
- 7º- os apoios não permitem o levantamento dos bordos.

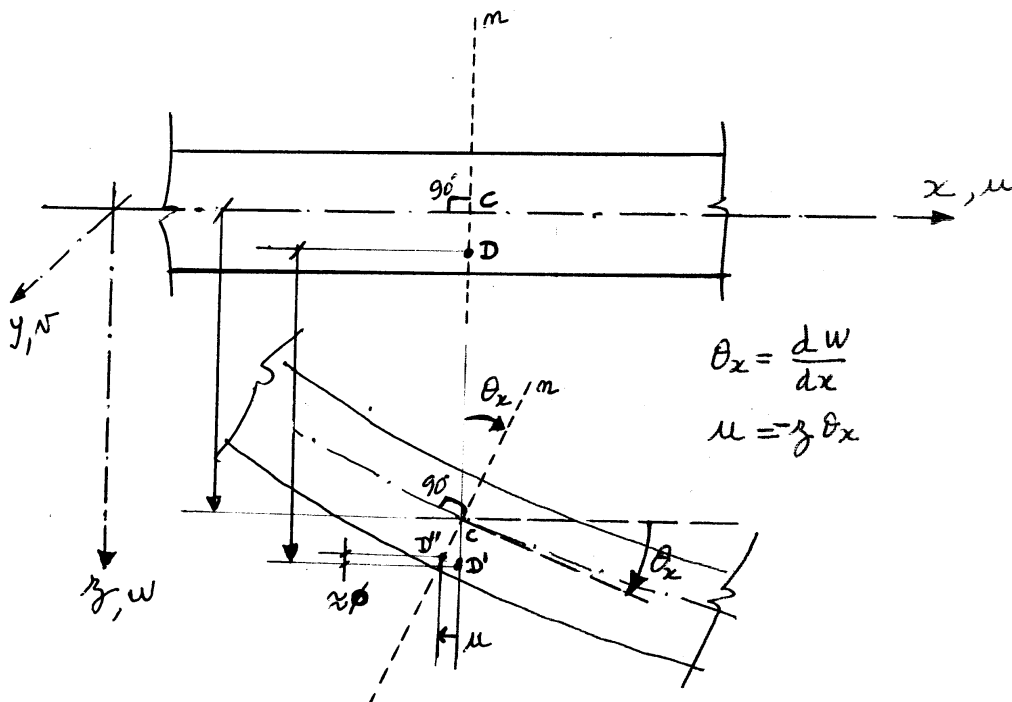


Figura 12.1- deslocamentos de um ponto à cota z

12.3.1- Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos (u, v, w) num ponto de coordenadas (x, y, z) , por exemplo o ponto D da figura 12.1, é:

$$u(x, y, z) = -z * \theta_x(x, y) = -z * \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (12.1)$$

$$v(x, y, z) = -z * \theta_y(x, y) = -z * \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (12.2)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (12.3)$$

12.3.2- Campo de Deformações. Relação entre Deformações e Deslocamentos

Um folheto paralelo ao plano médio e à cota z , fica sujeito a um estado plano de tensão quando a laje flecte. Para o estado plano de tensão, as deformações (extensões e distorções) relacionam-se com o campo de deslocamentos pelas definições (1.22) do capítulo 1. Atendendo (12.1) e (12.2) aquelas as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações valem:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = -z * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad (12.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = -z * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (12.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = -2z * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (12.6)$$

e são agrupadas no vector de deformações independentes à cota z ,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T. \quad (12.6(a))$$

Definindo-se como curvaturas de flexão, χ_x e χ_y , e de torção, χ_{xy} , de uma laje como:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (12.7), (12.8) \text{ e } (12.9)$$

podemos afirmar que o estado de deformação num ponto (x, y, z) do folheto paralelo ao plano médio da laje à cota z , é proporcional à curvatura da laje nesse ponto, ou seja,

$$\{\varepsilon\} = z * \{\chi\} \quad (12.6(b))$$

sendo:

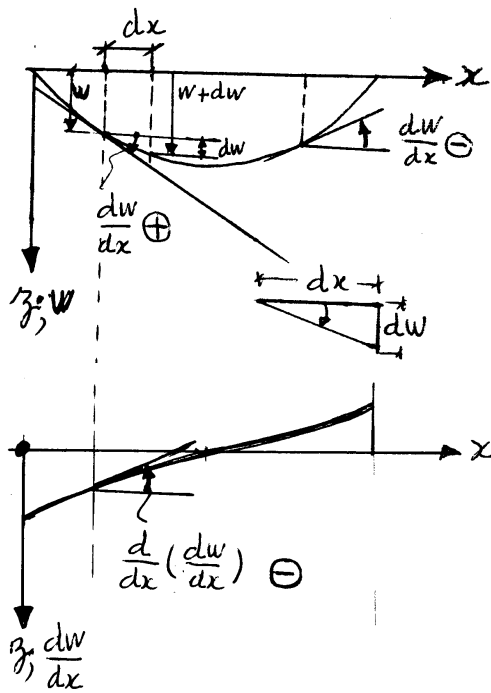
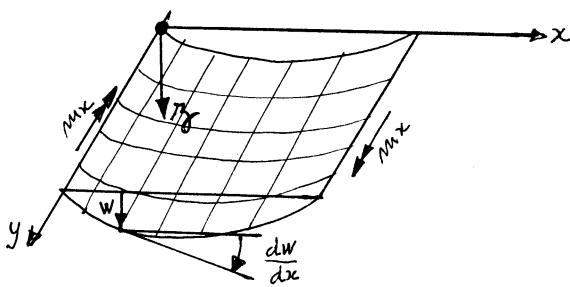
$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2 * \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -\frac{2 * \partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (12.6(c))$$

O vector $\{\chi\}$ designa-se por *vector de curvaturas de uma laje*, o qual é constituído pelas curvaturas de flexão χ_x e χ_y , e pela dupla curvatura de torção ($2\chi_{xy}$) que representa fisicamente a *curvatura da laje num estado de "torção" pura*. Este estado corresponde a estados de corte puro em cada folheto da laje e é o resultado da aplicação conjunta de dois pares de momentos auto equilibrados, o par m_{xy} e o par m_{yx} . Cada um deles induz na laje as

curvaturas de χ_{xy} e χ_{yx} (que são iguais porque $m_{xy} = m_{yx}$), e por isso a curvatura total em torção pura é dupla.

A 1ª hipótese de Kirschhoff determina que "as fibras perpendiculares ao plano neutro da laje são rectas". Consequentemente todos os pontos da fibra naquela perpendicular têm as mesmas curvaturas. O estado de deformação de uma laje pode ser definido pelo vector de curvaturas $\{\chi\}$ em vez do deformações $\{\epsilon\}$ e com vantagens na medida em que o primeiro é independente da cota z . Assim, define-se frequentemente como campo de deformações da laje o campo de curvaturas.

Estudemos agora sinal das relações (12.7) a (12.9). Em matemática define-se curvatura como a segunda derivada de uma função e é positiva quando a convexidade é para baixo. Aqui, como o eixo z (perpendicular ao plano das variáveis independentes x e y) está orientado de cima para baixo, a convexidade é positiva quando estiver para cima.



(a)

(b)

Figura 12.2- Curvaturas de flexão (a) e de torção (b)

A figura 12.2 pretende ilustrar estes conceitos. A deformação $w(x,y)$ do plano médio da laje em flexão pura cilíndrica em torno de y , da figura 12.2a), quando sujeita a momentos positivos m_x , apresenta uma curvatura χ_x é negativa porque a convexidade é para baixo. De facto, a tangente à (curva) deformada $w(x,y)$, isto é a inclinação $dw(x,y)/dx$, reduz-se à medida que ocorrem incrementos dx , (inclinação positiva mede-se do eixo x para o z). Por outras palavras, a taxa de variação da inclinação da deformada $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}$, que é a segunda derivada da função deslocamento vertical $w(x,y)$, é decrescente e o por isso negativa. Conclusões idênticas se podem obter para as curvaturas χ_y e χ_{xy} (para esta última consulte-se a figura 12.2.b).

12.3.3- Campo de Tensões. Relação entre Tensões Deslocamentos (ou Curvaturas)

As tensões no folheto à cota z são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{cota } z} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{cota } z} \quad (1.38\text{-rep})$$

que desenvolvida é:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{-E}{1-\nu^2} * z * \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad (12.10)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = \frac{-E}{1-\nu^2} * z * \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right) \quad (12.11)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = \frac{-E(1-\nu)}{2*(1-\nu^2)} * z * \left(\frac{2 * \partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (12.12)$$

ou em termos das curvaturas:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} * z * (\chi_x + \nu * \chi_y) \quad (12.13)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} * z * (\chi_y + \nu * \chi_x) \quad (12.14)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = \frac{E(1-\nu)}{2*(1-\nu^2)} * z * (2 * \chi_{xy}) \quad (12.15)$$

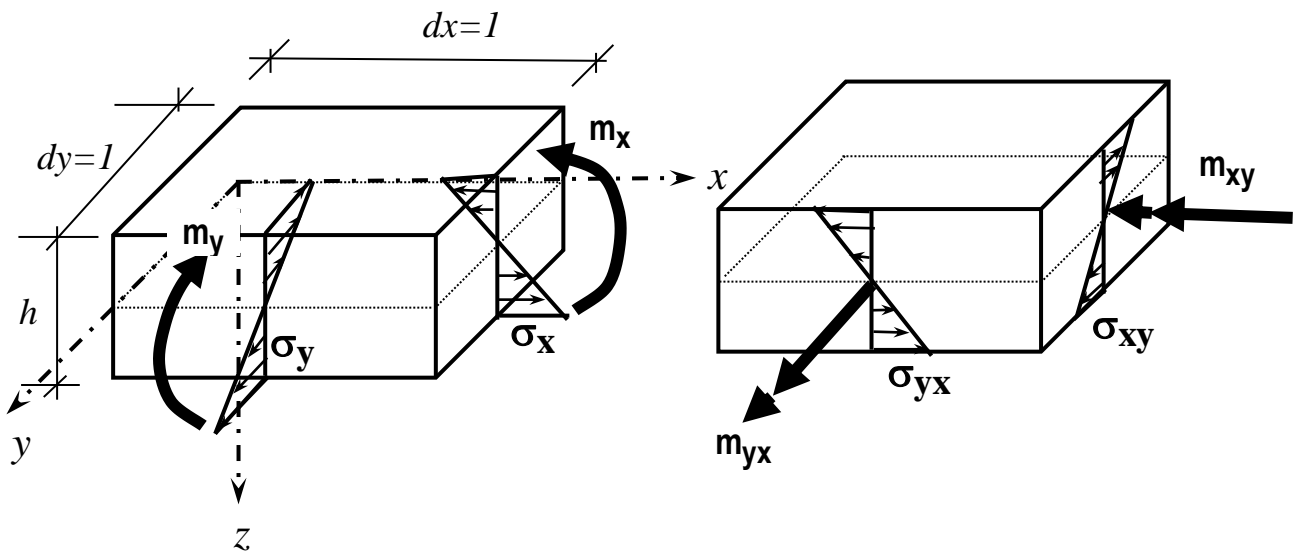


Figura 12.3- Distribuição de tensões normais e tangenciais

12.3.4- Momentos. Relação entre Momentos e Deslocamentos (ou Curvaturas)

Atendendo à definição dos momentos numa secção, ou seja, à resultante da distribuição das tensões (normais ou tangenciais) multiplicadas pela coordenada de posição em relação ao eixo de flexão, o obtemos os momentos:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y, z) * z \, dz = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (12.16)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(x, y, z) * z \, dz = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (12.17)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y, z) * z \, dz = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{2 * \partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (12.18)$$

ou matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -2 * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (12.18a)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2 * \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12.18b)$$

sendo o parâmetro D a *rigidez de flexão da laje* (por metro de largura):

$$D = \frac{E * h^3}{12 * (1 - \nu^2)} \tag{12.19}$$

12.3.5- Equações de Equilíbrio

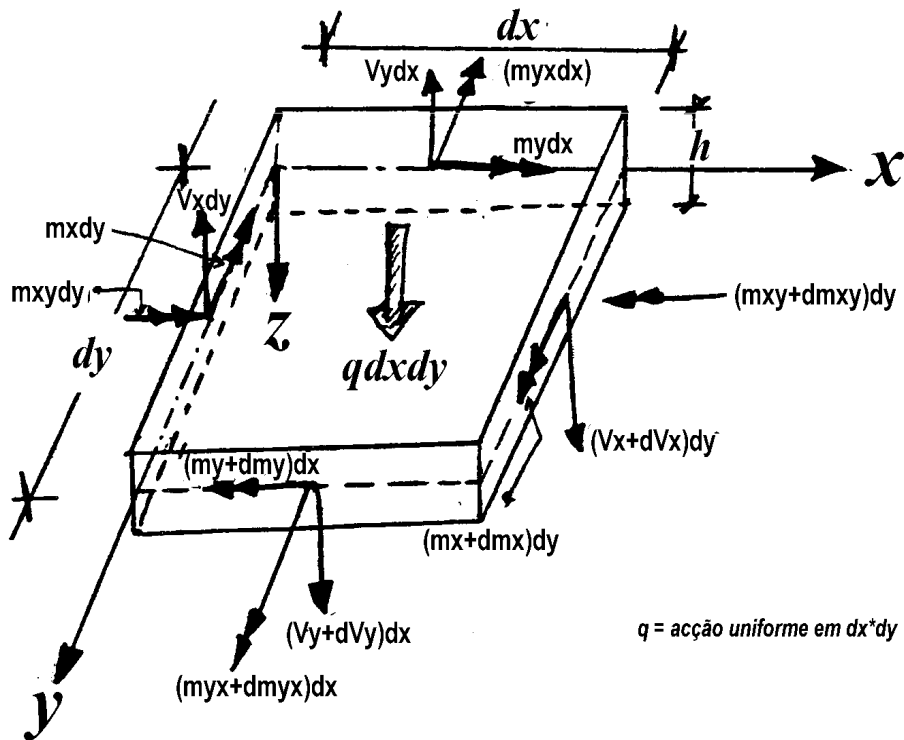


Figura12.4- Elemento de laje em equilíbrio estático

O equilíbrio de um elemento infinitesimal de laje, mostrado na figura 12.4, sujeito a uma carga uniforme q é:

$$\sum m_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \tag{12.20}$$

$$\sum m_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - v_y = 0 \tag{12.21}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \tag{12.22}$$

Resolvendo (12.20) e (12.21) em ordem a v_x e v_y e substituindo em (12.22) obtemos a seguinte **equação diferencial de equilíbrio** de lajes isotrópicas (em termos de esforços):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \nu \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (12.23)$$

Substituindo as equações (12.16), (12.17) e (12.18) na equação de equilíbrio (12.23) obtemos a **Equação Diferencial de Lagrange para Lajes**:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \nu \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (12.24.a)$$

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q}{D} \quad (12.24.b)$$

A teoria de lajes resume-se ao cálculo desta equação diferencial satisfazendo as condições de fronteira adequadas. Em casos de lajes com condições de fronteira simples é possível a sua resolução analítica. Noutros mais complicados recorre-se à análise de Fourier, aos métodos das diferenças finitas, ao método dos elementos finitos, ou outros.

Conhecida a solução da equação diferencial, ou seja o campo de deslocamentos $w(x, y)$, é possível calcular os momentos flectores e torçores a partir das expressões (12.16) a (12.18). Os esforços transversos (no interior de um elemento de laje) obtêm-se do desenvolvimento das expressões de equilíbrio interno (12.20) e (12.21) em ordem a v_x e v_y e substituindo m_x , m_y e m_{xy} pelas definições (12.16) a (12.18). Obtém-se:

$$v_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (12.25)$$

$$v_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (12.26)$$

12.3.6- Condições de Fronteira

As condições de fronteira a seguir discutidas referem-se a lajes rectangulares.

12.3.6.1- Apoio simplesmente apoiado

Se o lado $x=a$ for simplesmente apoiado a flecha e flexão ao longo do bordo não nulas, ou seja:

- condição de fronteira cinemática:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (a)$$

- condição de fronteira estática:

$$(m_x)_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (b)$$

Sobre o apoio, a curvatura é nula, ou seja, para $x=a$ e quando se percorre y , $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Consequentemente a condição de fronteira (b) é equivalente a: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0$ (c)

Em resumo as condições de fronteira de um apoio simples são:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (12.27.a) \text{ e } b))$$

12.3.6.2- Apoio encastrado

Se o lado $x=a$ for encastrado quer a flecha do plano médio quer a sua inclinação são nulas, ou seja:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (12.28.a) \text{ e } b))$$

12.3.6.3- Bordo Livre

Se o bordo $x=a$ for livre então os momentos flectores, momentos torçores e esforço transversal são nulos, ou seja:

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad , \quad (m_{xy})_{x=a} = 0 \quad \text{e} \quad (V_x)_{x=a} = 0 \quad (a, b \text{ e } c)$$

designadas por condições de fronteira de Poisson [15].

Foi mostrado por Kirchoff que as condições (b) e (c) eram equivalentes a uma só. Tal demonstração é a seguir apresentada.

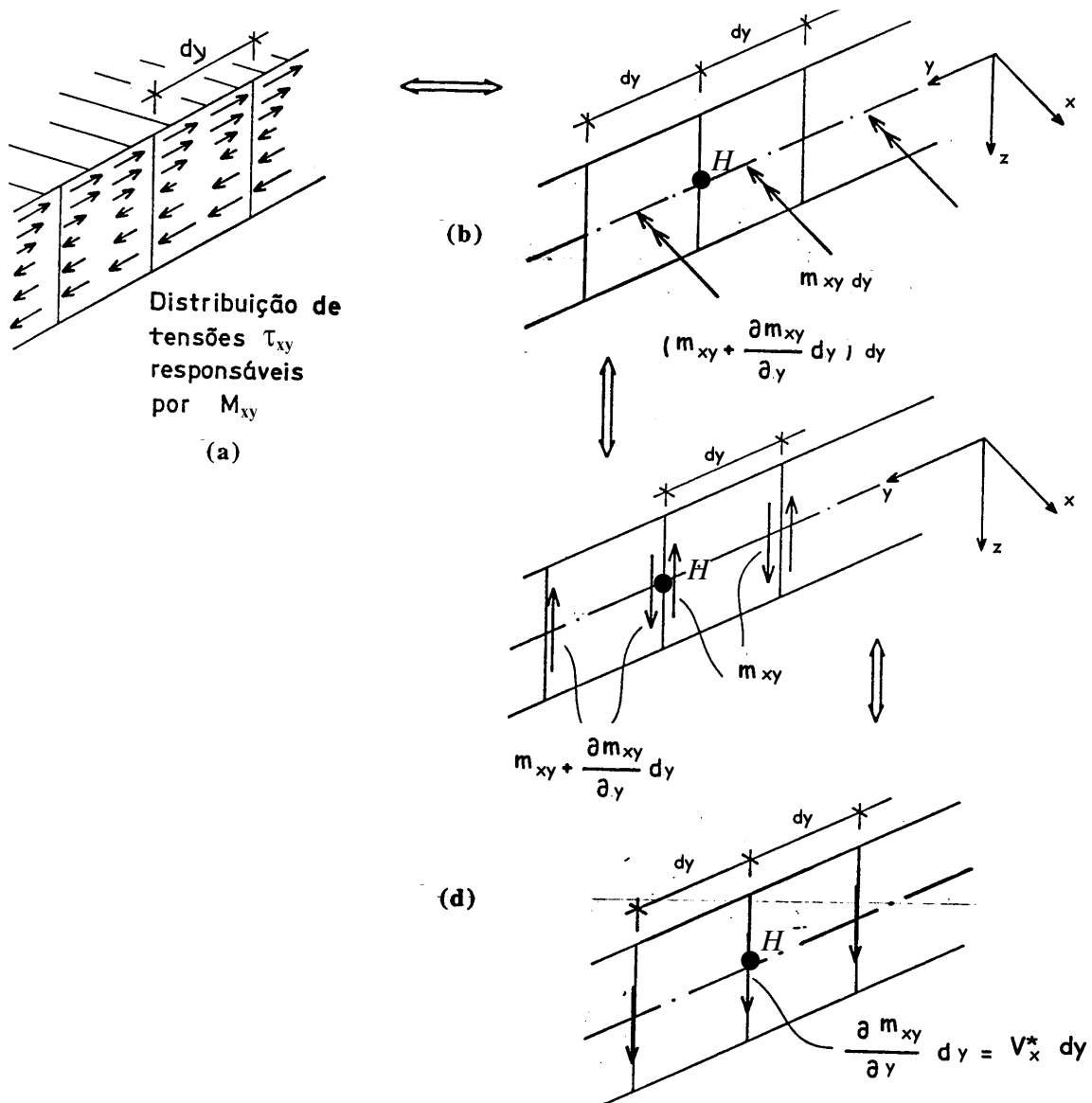


Figura 12.5 - Equivalência estática entre o momento torçor, m_{xy} , e o esforço transverso, V_x^* (adaptado de [23])

Ao longo do lado $x=a$ e para um elemento de comprimento dy , o momento torçor é $M_{xy}dy$ o qual pode ser substituído por duas forças de magnitude m_{xy} à distância dy uma da outra. Para o elemento imediatamente próximo de dimensão dy , o momento torçor tem a magnitude $(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy)dy$ o qual pode ser substituído pelas forças de valor $(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy)$ aplicadas à distância dy , mostradas na figura 12.5. Entre elementos adjacentes, no ponto H, resulta uma força vertical de cima para baixo de valor dm_{xy}/dy . O momento positivo m_{xy} , é

estaticamente equivalente a um esforço transversal vertical, v_x^* , actuando de cima para baixo, e adjacente às linhas de separação entre elementos, distanciadas entre si dy :

$$v_x^* = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} . \quad (12.29)$$

Este esforço, v_x^* , deve ser somado ao esforço transversal resultante do equilíbrio interno de um elemento de laje, obtendo-se o que se designa por esforço transversal efectivo (reacções), r_x ao longo do bordo $x=a$.

Os esforços transversos efectivos ao longo dos bordos $x=a$ e $y=b$ são:

$$r_x = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} + \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^2 \partial x} \right) \quad (12.30)$$

$$r_y = \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{y=b} + \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{y=b} = -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (12.31)$$

As condições de fronteira para o bordo livre $x=a$ são:

$$\left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^2 \partial x} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (12.32.a)$$

e

$$(m_x)_{x=a} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu^* \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (12.32.b)$$

12.3.6.4- Apoio Elástico Vertical

As condições de fronteira de um bordo elasticamente apoiado verticalmente e ao longo de $x=a$ são:

$$(w)_{x=a} = -\frac{D}{K_s} \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^2 \partial x} \right) \Big|_{x=a} \quad (12.33.a)$$

$$(m_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu^* \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (12.33.b)$$

sendo K_s a rigidez de translação vertical da mola.

No caso particular da laje ser suportada por uma viga, de inércia de flexão I_b , a condição (12.33.a) fica:

$$-\left(EI_b \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \Big|_{x=a} = -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^2 \partial x} \right) \Big|_{x=a} \quad (12.34)$$

12.3.6.5- Apoio Elástico de Rotação

As condições de fronteira de um bordo elasticamente apoiado à rotação e ao longo de $x=a$ são,

$$(w)_{x=a}=0 \quad (12.35.a)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = + \frac{D}{K_r} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} \quad (12.35.a)$$

12.4- Leitura adicional

(i) Acerca de:

- "O caracter tensorial das curvaturas"
- "Sobre a rigidez de torção em lajes quando comparada com a das vigas"
- "O caracter tensorial dos momentos"
- "Comparação de comportamento estrutural de viga e laje"

a ver em [19]:

Leitão, Vítor M.A.; Castro, Luís M.S.S.; Freitas, João A. de; Pereira, Orlando J.B.A.; "Apontamentos sobre análise elástica linear de lajes", Análise de Estruturas I, Secção de Folhas da AEIST, IST DECivil.

(ii) Acerca de:

- Lajes Ortótropas (capítulo 7.3)

a ver em [23]:

Martins, João A.C.; "Teoria Elástica Linear de Placas e Lajes", IST, 1995

Lajes**12.4- Leitura adicional****Soluções Analíticas para alguns tipos de lajes**

[15]-Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Kriegar, S. "Theory of Plates and Shells", McGraw-hill Book Company, London, 1981.

A) Laje Rectangular Simplesmente Apoiada e Carga Sinusoidal

Hipóteses:

- forma: laje rectangular de dimensão a segundo x e b segundo y
- condições de apoio: simplesmente apoiada
- carga: sinusoidal do tipo q com amplitude q_0 .

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Equação de equilíbrio de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 * \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (a)$$

Condições e fronteira:

- bordo paralelo a xx : $w=0$ e $w,xx=0$ para $x=0$ e $x=a$
- bordo paralelo a yy : $w=0$ e $w,yy=0$ para $y=0$ e $y=b$

Todas as condições de fronteira são satisfeitas se adoptarmos como solução:

$$w(x,y) = C \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

que colocado em (a) permite calcular C: $\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 * C = \frac{q_0}{D}$

logo, a solução é:

$$w(x,y) = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (b)$$

B) Laje Rectangular Simplesmente Apoiada e Carga Qualquer - Solução de Navier

Qualquer tipo de carga dada por $q = f(x,y)$ se desenvolve em série de Fourier:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

e é possível demonstrar que:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (c)$$

A cada caso particular de m e n corresponde uma solução semelhante à expressão (b) que é a seguinte:

$$w(x, y, m, n) = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (d)$$

Logo a flecha total é a produzida pelo somatório de cargas elementares a_{mn} ou seja:

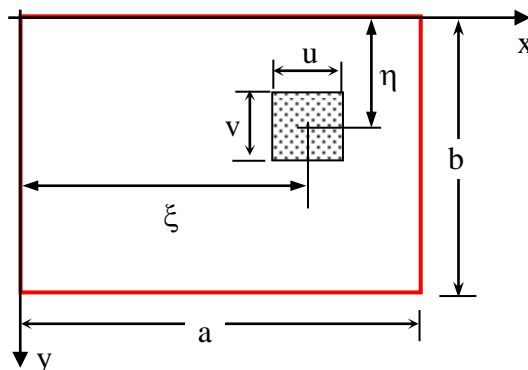
$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (e)$$

C) Laje Rectangular Simplesmente Apoiada e Carga Uniforme - Solução de Navier

Neste caso particular da solução de Navier a carga superficial de valor constante, q_0 , pode escrever-se: $f(x, y) = q_0$. Resolvendo o integral (c) obtém-se: $a_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ com m e n ímpares, e por isso a solução fica:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^* n^* \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (f)$$

D) Laje Rectangular Simplesmente Apoiada e Carga Pontual - Solução de Navier



Desde que seja possível o cálculo do integral (c) a análise de Fourier permite desenvolver a solução de Navier para o caso presente. Uma carga pontual P pode ser reduzida a uma carga distribuída de valor $(P/(uv))$ sendo u e v as dimensões da zona por onde a carga se reparte.

Designando por (ξ, η) as coordenadas do ponto de aplicação da carga o integral (c) fica:

$$a_{mn} = \frac{P}{abuv} \int_{\xi-\frac{u}{2}}^{\xi+\frac{u}{2}} \int_{\eta-\frac{v}{2}}^{\eta+\frac{v}{2}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{16P}{\pi^2 mn uv} \sin\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{b}\right)$$

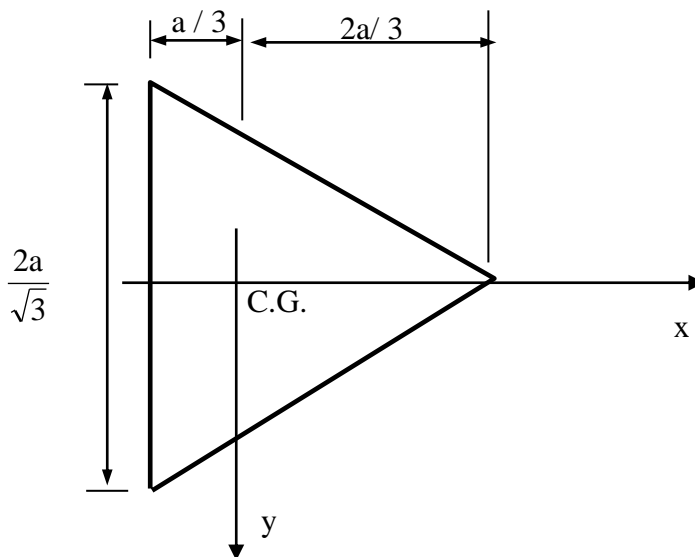
quando $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow 0$, vem:

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right)$$

e a solução fica:

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (g)$$

E) Laje Triangular Equilátera Simplesmente Apoiada e Carga Uniforme



Solução para carga uniforme:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] * \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right)$$

F) Laje Rectangular Simplesmente Apoiada e Carga Uniforme - Solução de Levy

[19]-Leitão, Vitor M.A.; Castro, Luís M.S.S.; Freitas, João A.Teixeira de; Pereira, Orlando J.B.A.; "Apontamentos Sobre Análise Elástica Linear de Lajes (Análise de Estruturas I)", AEIST, 1998.(*)

Esta solução admite que dois bordos opostos são simplesmente apoiados, pelo que a solução se torna mais simples com uma expansão em série simples em vez de série dupla da solução de Navier.

Admitindo dois bordos simplesmente apoiados segundo y a solução é:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

onde Y_m depende só de y , $Y_m = f(y)$.

A solução de Lévy é:

$$w(x, y) = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) * \sin \frac{m\pi x}{a}$$

com

$$A_m = \frac{2(\alpha_m \tanh \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m}; \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m}; \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

com m inteiro ímpar, e $x \in [0, a]$, $y \in [-b/2; b/2]$.

G) Conclusão Geral

Mesmo para casos simples as soluções analíticas são de difícil utilização, pese embora, a sua rápida convergência, bastando por vezes um ou dois termos para se obterem resultados de boa qualidade.

(i) Acerca de:

- "O carácter tensorial das curvaturas"
- "Sobre a rigidez de torção em lajes quando comparada com a das vigas"
- "O carácter tensorial dos momentos"
- "Comparação de comportamento estrutural de viga e laje"

a ver em [19]:

Leitão, Vítor M.A.; Castro, Luís M.S.S.; Freitas, João A. de; Pereira, Orlando J.B.A.; "Apontamentos sobre análise elástica linear de lajes", *Análise de Estruturas I, Secção de Folhas da AEIST, IST DECivil.*

(ii) Acerca de:

- Lajes Ortótropas (capítulo 7.3)

a ver em [23]:

Martins, João A.C.; "Teoria Elástica Linear de Placas e Lajes", IST, 1995

12.4.1-Influência do Modulo de Poisson em Lajes.

[“Tablas para el calculo de placas y vigas pared”; Richard Barës; Ed. Gustavo Gili, S.A.]

Se a determinação de flechas e esforços em lajes não for por intermédio de um software adequado, é sempre possível recorrer a tabelas de cálculo, que apresentam aquela informação para tipos de carregamento mais comuns, em função da relação entre vãos e do coeficiente de Poisson.

Para betão armado o coeficiente de Poisson vale 0.15 enquanto para chapas em aço 0.25 a 0.30.

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y, z) * z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (12.16)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y(x, y, z) * z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu * \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (12.17)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y, z) * z dz = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{2 * \partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (12.18)$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 * \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}} \quad (12.24.a)$$

$$D = \frac{E * h^3}{12 * (1 - \nu^2)} \quad (12.19)$$

Estudando as expressões 12.16, 12.17, 12.18, 12.24a) e 12.19 podemos deduzir o seguinte:

- quando a rigidez D aumenta, diminuem as flechas e aumentam os momentos.
- se para uma laje cujo material tem, por exemplo, $\nu=0.15$, se se utilizar uma tabela construída para um $\nu=0$ verifica-se que:

(i) obtém-se uma flechas maiores que a real em 2%, e que é desprezável;

(ii) os momentos flectores são obtidos com um erro por defeito de 15%, e por isso contra a segurança, o que é importante no centro e bordos onde estas grandezas são condicionantes.

Ao adoptar uma tabela com coeficiente de Poisson superior ao real acontecerá o inverso.

O problema que agora se põe é o seguinte: se forem conhecidos os esforços $M_{x.1}$ e $M_{x.2}$ associados respectivamente a duas tabelas de coeficiente de Poisson ν_1 e ν_2 , qual será o esforço $M_{x.3}$ correspondente para o coeficiente de Poisson real de valor ν_3 ?

Conhecendo:

$$M_{x.1} = -D(W_{,xx} + \nu_1 * W_{,yy}),$$

$$M_{x.2} = -D(W_{,yy} + \nu_2 * W_{,xx})$$

Pretendemos:

$$M_{x.3} = -D(W_{,xx} + \nu_3 * W_{,yy})$$

Combinando as três equações, e repetindo o raciocínio também para $M_{y.3}$, obtemos, respectivamente:

$$M_{x.3} = \frac{(\nu_2 - \nu_3)M_{x.1} - (\nu_1 - \nu_3)M_{x.2}}{(\nu_2 - \nu_1)}$$

$$M_{y.3} = \frac{(\nu_2 - \nu_3)M_{y.1} - (\nu_1 - \nu_3)M_{y.2}}{(\nu_2 - \nu_1)}$$

No que respeita a reacções de apoio (esforço transversal efectivo) obtém-se:

$$R_{x.3} = \frac{(\nu_2 - \nu_3)R_{x.1} - (\nu_1 - \nu_3)R_{x.2}}{(\nu_2 - \nu_1)}$$

$$R_{y.3} = \frac{(\nu_2 - \nu_3)M_{y.1} - (\nu_1 - \nu_3)M_{y.2}}{(\nu_2 - \nu_1)}$$

Conhecendo a flecha w_1 de uma laje de coef. de Poisson ν_1 , as flechas, momentos torçores e reacções de canto da laje com ν_2 serão:

$$w_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{1 - \nu_1^2} * w_1$$

$$M_{xy.2} = \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} * M_{xy.1}$$

$$R_{0.2} = \frac{1 - \nu_2}{1 - \nu_1} * R_{0.1}$$

Os esforços transversos (internos) não dependem da variação do coeficiente de Poisson.

12.5 - Elemento Finito de Laje

PASSO 1: Escolha do sistema de coordenadas. Identificação dos graus de liberdade e vectores de deslocamento e forças nodais.

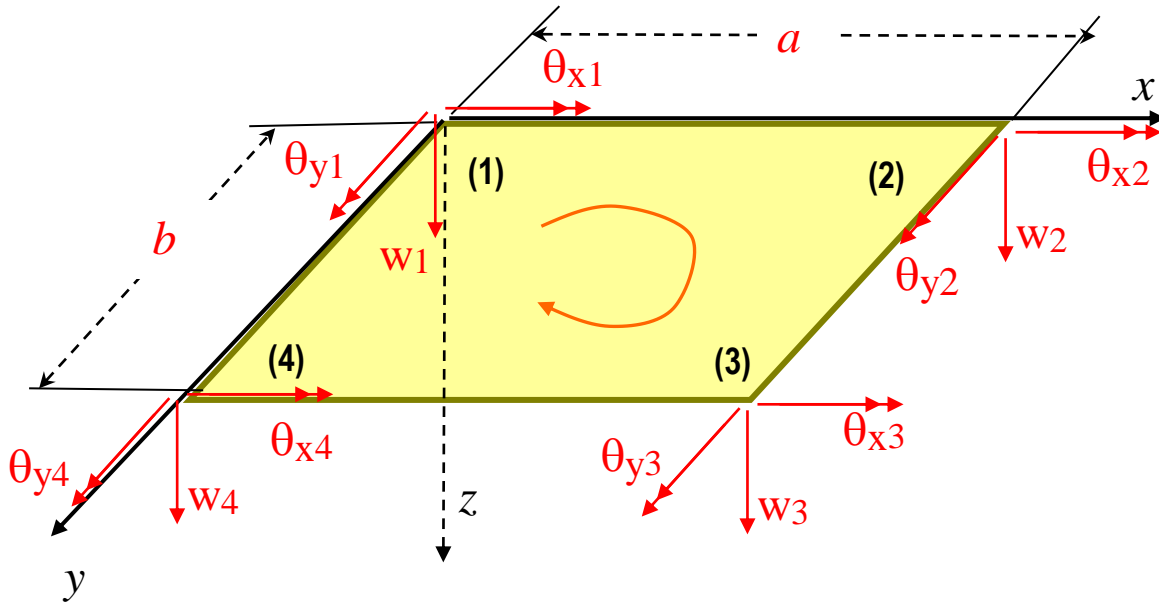


Figura 12.6 - Elemento finito de laje de quatro nós

Vectores de deslocamento e de forças nodais elementares.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{F}^e\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_1\} \\ \{\mathbf{F}_2\} \\ \{\mathbf{F}_3\} \\ \{\mathbf{F}_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{z3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ F_{z4} \\ M_{x4} \\ M_{y4} \end{Bmatrix} \quad (12.36 \text{ e } 12.37)$$

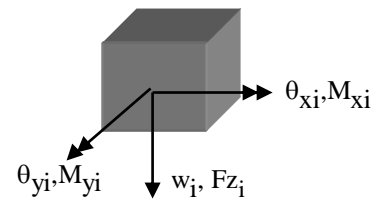


Figura 12.7

PASSO 2: Geração do Elemento Finito

PASSO 2.1: Definição do campo de deslocamentos. Expressar os deslocamentos no interior do elemento $\{\delta(x,y)\}$ em função dos deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$.

O campo de deslocamentos $\{\delta(x,y)\}$ em cada ponto no interior do elemento é caracterizado pelo deslocamento vertical $w(x,y)$ e pelas rotações $\theta_x(x,y)$ e $\theta_y(x,y)$:

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \theta_x(x,y) \\ \theta_y(x,y) \end{Bmatrix} \quad (12.38)$$

Estes deslocamentos consideram-se positivos quando lidos segundo o referencial global indicado na figura 12.7. Como a laje tem 12 graus de liberdade o campo de deslocamentos verticais será aproximado a um polinómio de doze parcelas:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \\ + \alpha_{11} x^3y + \alpha_{12} xy^3 \quad (12.39)$$

As rotações num ponto de coordenadas (x,y) são:

$$\theta_x(x,y) = +dw(x,y) / dy = \dots \quad (12.40.a)$$

$$= \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \quad (12.40.b)$$

$$\theta_y(x,y) = -dw(x,y) / dx = \dots \quad (12.41.a)$$

$$= -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2y + \alpha_{12} y^3) \quad (12.41.b)$$

O sinal negativo do grau de liberdade θ_y indica que se num ponto de coordenadas (x,y) se impuser um deslocamento dw à distância dx do eixo $y-y$, a rotação dw/dx em torno do eixo $y-y$ será contrária ao grau de liberdade estipulado na figura (12.7) [24].

Os deslocamentos no interior do elemento $\{\delta(x,y)\}$ são agora expressos em função dos deslocamentos nodais elementares $\{\delta^e\}$, ou seja:

$$\{\delta(x,y)\} = [\Psi(x,y)] * \{\delta^e\} \quad (12.42)$$

O campo de deslocamentos é definido pelas expressões (12.39), (12.40) e (12.41) pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\{\delta(x,y)\} = [F(x,y)] * \{\alpha\} \quad (12.43.a)$$

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \theta_x(x,y) \\ \theta_y(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (12.43.b)$$

Concretizando $[F(x,y)]$ para valores das coordenadas dos nós do elemento obtemos a matriz $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & 0 & -b^3 \end{bmatrix} \quad (12.44)$$

que relaciona $\{\delta^e\}$ com $\{\alpha\}$, ou seja:

$$\{\delta^e\} = [A] * \{\alpha\} \quad (12.45)$$

A relação inversa é:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} * \{\delta^e\} \quad (12.46)$$

Substituindo (12.46) em (12.43) obtemos a relação (12.42) e a definição da matriz de funções de forma $[\psi(x,y)]$:

$$[\psi(x,y)] = [F(x,y)] * [A]^{-1} \quad (12.47)$$

(3x12) (3x12) (12x12)

PASSO 2.2: Relações Cinemáticas. Expressar as deformações em função dos deslocamentos em cada ponto e posteriormente em função dos deslocamentos nodais.

Como já foi referido em 12.3.2 o campo de deformações de uma laje, quando representada apenas pelo seu plano médio, são as curvaturas de flexão χ_x , χ_y e de torção χ_{xy} :

$$\{\varepsilon(x,y)\} \equiv \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial xy^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy) \\ -(2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy) \\ -2(\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2) \end{Bmatrix} \quad (12.48.a)$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} \equiv \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (12.48.b)$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L] * \{\alpha\} \quad (12.48.c)$$

Substituindo (12.46) em (12.48.c)) obtemos:

$$\boxed{\{\varepsilon(x, y)\} = [B] * \{\delta^e\}} \quad (12.49)$$

com: $[B] = [L] * [A]^{-1} \quad (12.50)$

PASSO 2.3: Relações Constitutivas. Relacionam-se as tensões internas $\{\sigma(x,y)\}$ com as deformações internas $\{\varepsilon(x,y)\}$ e posteriormente com os deslocamentos nodais, $\{\delta^e\}$.

No caso deste problema de flexão de lajes, por ser mais prático, substituímos as tensões ao longo da espessura da laje pelas suas resultantes, isto é pelos esforços m_x , m_y e m_{xy} . Como já foi referido as deformações ao nível do plano médio da laje são equivalentes às curvaturas de flexão e torção desse plano.

Estas relações são dadas pelas expressões (12.16) a (12.18), e que para uma laje ortotrópica valem:

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12.18b)\text{-rep}$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] * \{\varepsilon(x, y)\} \quad (12.51.b)$$

$$D = \frac{E * h^3}{12 * (1 - \nu^2)} \quad (12.19\text{-rep})$$

Nota: Para lajes ortotrópicas tem-se:

$$\{\sigma(x, y)\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (12.51.a)$$

com:

$$D_x = \frac{(E \cdot I)_x}{(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{(E \cdot I)_y}{(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_1 = \nu_y D_x = \nu_x D_y, \quad D_{xy} = \frac{1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}}{2} * \sqrt{D_x D_y}$$

(I_x - inércia da faixa na direcção x-x) (12.52.a) a 12.52.d))

$$\text{Em lajes isotrópicas: } D_x = D_y = D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}, \quad D_1 = \nu D, \quad D_{xy} = \frac{1 - \nu}{2} * D$$

(12.53.a) a 12.53.c))

A relação entre tensões (esforços) e deslocamentos nodais é obtida substituindo (12.49) em (12.51.b)):

$$\boxed{\{\sigma(x, y)\} = [D] * [B] * \{\delta^e\}} \quad (12.54)$$

PASSO 2.4: Relações de Equilíbrio. Cálculo da matriz de rigidez do elemento e vectores equivalentes a acções de vão.

Como já se viu em capítulos anteriores, da imposição de um deslocamento virtual a um elemento em equilíbrio, e atendendo ao P.T.V., pode obter-se a matriz de rigidez elementar:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.25\text{-rep})$$

que se encontra desenvolvida na página seguinte.

Vectores Equivalentes a Acções de Vão

Apresentam-se vectores de forças nodais equivalentes respectivamente a: (i) uma acção uniformemente distribuída p_z ; (ii) a um carregamento transversal V uniforme ao longo do lado x-x.; (iii) e a uma variação de temperatura linear na espessura h da laje e independente de x e y [23], obtidos do desenvolvimento das expressões (3.26) e (3.41).

Acção (i):

$$\{F_s\}^T_{\text{unif}} = p_z * a * b * \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{b}{24} \quad \frac{-a}{24} \mid \frac{1}{4} \quad \frac{b}{24} \quad \frac{a}{24} \mid \frac{1}{4} \quad \frac{-b}{24} \quad \frac{+a}{24} \mid \frac{1}{4} \quad \frac{-b}{24} \quad \frac{-a}{24} \right\} \quad (12.55)$$

Acção (ii) ao longo do lado 1-2:

$$\{F_s\}^T_{\text{faca-lado1-2}} = V * a * \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{-a}{12} \mid \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{a}{12} \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (12.56)$$

Acção (iii) [15]:

$$\{F_s\}^T_{\text{temp}} = \frac{\alpha \Delta T^* D^* (1 + \nu)}{2h} * \{0 \quad +b \quad -a \mid 0 \quad +b \quad +a \mid 0 \quad -b \quad -a \mid 0 \quad -b \quad -a\}$$

$$\text{com: } \Delta T^* = \frac{\Delta T_i - \Delta T_s}{2} \quad (\text{a laje é livre de alongamentos e encurtamentos no seu plano médio}) \quad (12.57)$$

$$[k^e] = \frac{1}{15ab} *$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	SF	SE	-SD	SM	SJ	SH	SY	SU	-SQ	SX	SS	SO	1
		SC	-SB	SJ	SI	0	-SU	ST	0	-SS	SR	0	2
			SA	-SH	0	SG	SQ	0	SP	SO	0	SN	3
				SF	SE	SD	SX	SS	-SO	SY	SU	SQ	4
					SC	SB	-SS	SR	0	-SU	ST	0	5
						SA	-SO	0	SN	-SQ	0	SP	6
							SF	-SE	SD	SM	-SJ	-SH	7
								SC	-SB	-SJ	SI	0	8
				Simétrica					SA	SH	0	SG	9
										SF	-SE	-SD	10
											SC	SB	11
												SA	12

(12.58)

com:

$p = b / a$ $SA = 20b^2 D_x + 8a^2 D_{xy}$ $SB = 15abD_1$ $SC = 20a^2 D_y + 8b^2 D_{xy}$ $SD = 30bpD_x + 15aD_1 + 6aD_{xy}$ $SE = 30ap^{-1}D_y + 15bD_1 + 6bD_{xy}$ $SF = 60p^{-2}D_y + 60p^2D_x + 30D_1 + 84D_{xy}$ $SG = 10b^2D_x - 2a^2D_{xy}$ $SH = -30bpD_x - 6aD_{xy}$ $SI = 10a^2D_y - 8b^2D_{xy}$ $SJ = 15ap^{-1}D_y - 15bD_1 - 6bD_{xy}$	$SM = 30p^{-2}D_y - 60p^2D_x - 30D_1 - 84D_{xy}$ $SN = 10b^2D_x - 8a^2D_{xy}$ $SO = -15bpD_x + 15aD_1 + 6aD_{xy}$ $SP = 5b^2D_x + 2a^2D_{xy}$ $SQ = 15bpD_x - 6aD_{xy}$ $SR = 10a^2D_y - 2b^2D_{xy}$ $SS = 30ap^{-1}D_y + 6bD_{xy}$ $ST = 5a^2D_y + 2b^2D_{xy}$ $SU = 15ap^{-1}D_y - 6bD_{xy}$ $SX = 60p^{-2}D_y + 30p^2D_x - 30D_1 - 84D_{xy}$ $SY = -30p^{-2}D_y - 30p^2D_x + 30D_1 + 84D_{xy}$
---	---

PASSO 3:

Nestes apontamentos esta etapa corresponde à montagem da matriz de rigidez global e vector de forças global.

PASSO 4: Imposição de condições de fronteira.

PASSO 5: Resolução do sistema de equações, ou seja, determinação da solução, os deslocamentos nodais da estrutura.

PASSO 6: Cálculo de Tensões ("esforços momento flector e torçor"). Por um processo de retro-alocação obtemos os deslocamentos nodais elemento a elemento.

Substituindo as coordenadas (x,y) de cada nó e aplicando a expressão (12.54) obtemos os momentos flectores nodais m_x e m_y e o momento torçor m_{xy} (consultar figura 12.4):

$$\{\sigma\} = [D]*[B]*\{\delta^e\} = [H]*\{\delta^e\} \tag{12.59}$$

O produto $[D][B]$, também muitas vezes representado por $[H]$, é:

$$[D]*[B] = \frac{1}{ab} * [H]$$

	1	2	3	4	5	6	
...	$6pD_x+6p^{-1}D_1$	$4aD_1$	$-4bD_x$	$-6pD_x$	0	$-2bD_x$...
...	$6p^{-1}D_y+6pD_1$	$4aD_y$	$-4bD_1$	$-6pD_1$	0	$-2bD_1$...
...	$+2D_{xy}$	$+2bD_{xy}$	$-2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	0	...
...	$-6pD_x$	0	$2bD_x$	$6pD_x+6p^{-1}D_1$	$4aD_1$	$4bD_x$...
...	$-6pD_1$	0	$2bD_1$	$6p^{-1}D_y+6pD_1$	$4aD_y$	$4bD_1$...
...	$+2D_{xy}$	$+2bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$-2aD_{xy}$...
...	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	$-2aD_1$	0	...
...	0	0	0	$-6p^{-1}D_y$	$-2aD_y$	0	...
...	$+2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	0	$-2aD_{xy}$...
...	$-6p^{-1}D_1$	$-2aD_1$	0	0	0	0	...
...	$-6p^{-1}D_y$	$-2aD_y$	0	0	0	0	...
...	$+2D_{xy}$	0	$-2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	0	0	...
...	0	0	0	$-6p^{-1}D_1$	$2aD_1$	0	...
...	0	0	0	$-6p^{-1}D_y$	$2aD_y$	0	...
...	$+2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	0	$+2aD_{xy}$...
...	$-6p^{-1}D_1$	$2aD_1$	0	0	0	0	...
...	$-6p^{-1}D_y$	$2aD_y$	0	0	0	0	...
...	$+2D_{xy}$	0	$+2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	0	0	...
...	$6pD_x+6p^{-1}D_1$	$-4aD_1$	$4bD_x$	$-6pD_x$	0	$2bD_x$...
...	$6p^{-1}D_y+6pD_1$	$-4aD_y$	$4bD_1$	$-6pD_1$	0	$2bD_1$...
...	$+2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	$+2aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$+2bD_{xy}$	0	...
...	$-6pD_x$	0	$-2bD_x$	$6pD_x+6p^{-1}D_1$	$-4aD_1$	$-4bD_x$...
...	$-6pD_1$	0	$-2bD_1$	$6p^{-1}D_y+6pD_1$	$-4aD_y$	$-4bD_1$...
...	$+2D_{xy}$	$-2bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	$+2bD_{xy}$	$+2aD_{xy}$...

$$\tag{12.60}$$

12.6 - Comentários12.6.1 - Laje não conforme

Pretende-se, agora, averiguar a continuidade de deslocamentos e rotações entre fronteira de elementos.

Os deslocamentos ao longo do lado $x=0$ são:

$$w(0,y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \quad (a)$$

$$\theta_x(0,y) = + (\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \quad (b)$$

$$\theta_y(0,y) = -(\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3) \quad (c)$$

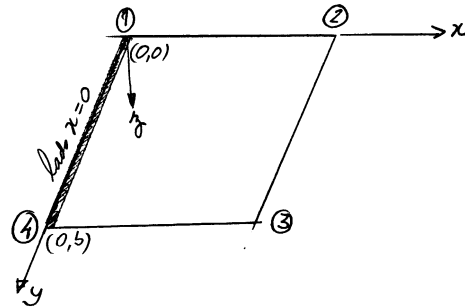


Figura 12.8

Estas funções para serem contínuas entre elementos deverão ser:

- (i) dependentes apenas dos graus de liberdade existentes nos nós que pertencem a esse lado,
- (ii) determinadas, isto é, devemos saber se é possível o cálculo independente dos coeficientes α_i a elas associados.

O seu cálculo é efectuado concretizando as funções nos nós:

Nó 1 :

$$w(0,0) = \alpha_1 \quad (d)$$

$$\theta_x(0,0) = + \alpha_3 \quad (e)$$

$$\theta_y(0,0) = -\alpha_2 \quad (f)$$

Nó 4:

$$w(0,b) = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3 \quad (g)$$

$$\theta_x(0,b) = + (\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) \quad (h)$$

$$\theta_y(0,b) = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3) \quad (i)$$

Como se vê há seis equações ((d) a (i)) e oito coeficientes, por isso há coeficientes não determináveis. Porém, as quatro equações $w(0,0)$, $\theta_x(0,0)$, $w(0,b)$ e $\theta_x(0,b)$ partilham os mesmos coeficientes (α_1 , α_3 , α_6 , α_{10}) ficando determináveis e independentes. Contrariamente $\theta_y(x,y)$ pode ser obtido por valores diferentes de α_2 , α_5 , α_9 e α_{12} . Concluimos que $w(x,y)$ e $\theta_x(x,y)$ são contínuos ao longo da fronteira e $\theta_y(x,y)$ é descontínuo. Repetindo esta análise verificamos que a rotação em torno dos lados (representada por dw/dn sendo n a normal ao lado) é descontínua entre elementos. Esta característica de comportamento deste elemento de laje resultou da escolha da função deslocamento $w(x,y)$ (da qual $\theta_x(x,y)$ e $\theta_y(x,y)$ são as suas primeiras derivadas) a qual não tem todos os termos de um polinómio completo do 4º grau. O elemento finito de laje em estudo com estas características diz-se não conforme porque viola as condições de continuidade ao longo da fronteira.

Verifica-se que este elemento em estudo, embora seja não conforme, converge (porque satisfaz as condições de parede [26]) e por isso pode ser usado e dá bons resultados [3]. Verifica-se que é mais flexível que o elemento real e por isso converge, em termos de deslocamentos, por valores superiores.

O elemento em causa é conhecido como CTP(N) - Classical Plate Theory (Non-conforming element), ou elemento quadrilátero MZC (Melosh, Zienkiewicz e Cheung).

nós.

Para elementos rectangulares é possível estabelecer para cada nó quatro graus de liberdade associados a (w , dw/dx , dw/dy , $d^2w/dxdy$). Neste caso o polinómio de interpolação de deslocamentos é completo, o elemento torna-se conforme, fica mais rígido que a placa real, sendo conhecido por CPT(C) ou por elemento BFS (Bogner, Fox, Smidt []).

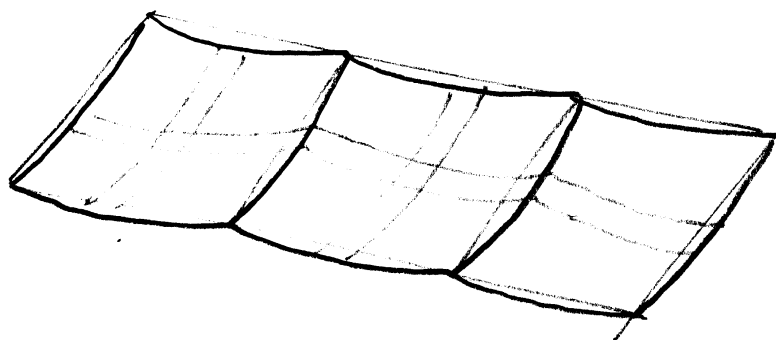


Figura 12.9 - Deformada de painéis de laje não conformes

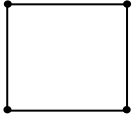
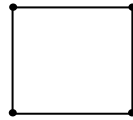
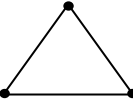
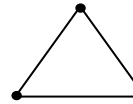
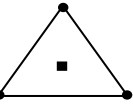
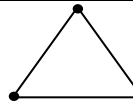
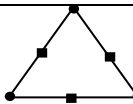
Também se podem desenvolver um elementos triangulares com 3 graus de liberdade por nó. Uma vez que o polinómio interpolador de deslocamentos não é completo e por isso o elemento se torna não conforme.

Para superar esta dificuldade, um dos artifícios a que se recorre é colocar nós nos lados em que se tomam como graus de liberdade as rotações destes em relação à normal ao lado (dw/dn). Outra técnica consiste em dividir o elemento em sub-elementos e montar a matriz de rigidez global condensando depois os graus de liberdade comuns entre sub-elementos, e escolhendo criteriosamente os graus de liberdade de modo a que das derivadas dw/dn sejam dependentes apenas dos nós desse lado.

A convergência depende do número de graus de liberdade e sua natureza, havendo elementos com comportamentos singulares.

Apresenta-se um quadro resumo apenas ilustrativo da variedade de elementos de laje de kirchhoff, elaborado a partir de [26].

Quadro 12.1- Elementos de laje não conformes

Designação		
MZC Melosh Zienkiewicz Cheung		Não Conforme Satisfaz o critério de parede 3 G.L. / nó - $\{w; w_{,x}; w_{,y}\}^T$ polinómio com 12 termos, aproximação cúbica com alguns termos quárticos $w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3$ (omite x^4, x^2y^2, y^4)
BFS Bogner Fox Schmidt		Conforme 4 G.L. / nó - $\{w; w_{,x}; w_{,y}; w_{,xy}\}^T$ polinómio com 16 termos Produto de funções cúbicas de Hermite de vigas com dois nós
Adini		Não conforme 10 termos - $u(x,y)$ = (coordenadas globais) polinómio cúbico incompleto falta de $\alpha_{,xy} \Rightarrow$ não reproduz estados de curvatura de torção 3 G.L. / nó - $\{w; w_{,x}; w_{,y}\}^T$
Tocher		Não conforme 10 termos - $u(x,y)$ = (coordenadas globais) 3 G.L. / nó - $\{w; w_{,x}; w_{,y}\}^T$ agrupa $\alpha_8(x^2y + xy^2)$ não respeita dw/dn em lados comuns
Harvey + Kilsley	 $\bullet \equiv \{w; w_{,x}; w_{,y}\}^T$ nó central $\blacksquare \equiv \{w\}$	Não conforme 10 termos - $u(x,y)$ = (coordenadas globais) não converge O Harvey+Hilsey Modificado c/multiplicadores de Lagrange - Converge
CKZ Cheung King Zienkiewicz		Não Conforme Polinómio cúbico incompleto em coordenadas de área (L_1, L_2, L_3) Popular 3 G.L. / nó - $\{w; w_{,x}; w_{,y}\}^T$
Morley	 $\bullet \equiv \{w\}$ $\blacksquare \equiv \{dw/dn\}$	Não Conforme 6 G.L. Totais Polinómio completo do 2º grau Estado de curvatura constante \Rightarrow Momentos const. $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ no elemento

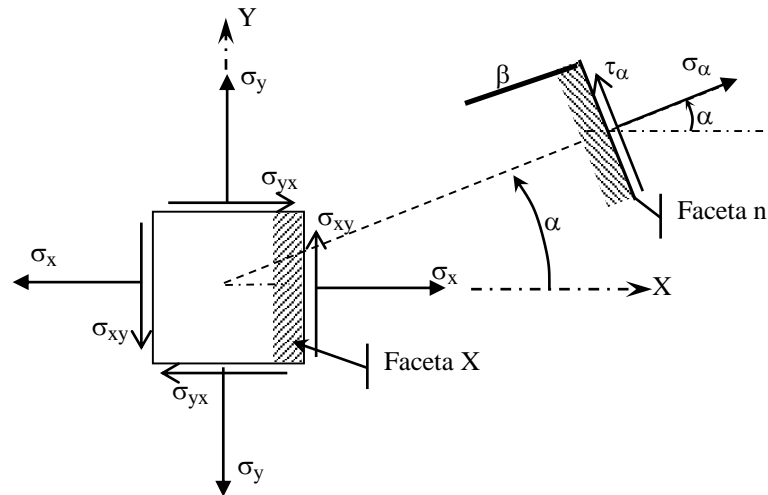
12.8- Esforços de Cálculo para o Dimensionamento de Lajes12.8.1- Círculo de Mohr (Revisão)I) Estado Plano de Tensão em PlacasI.1- Equações de Equilíbrio

Figura 12.12- Ponto material sujeito a um Estado Plano de Tensão

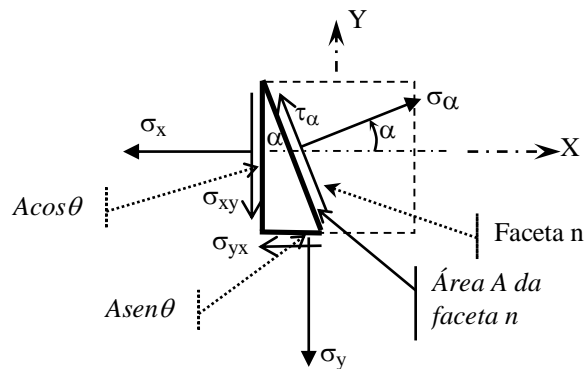


Figura 12.13

Num elemento no estado plano de tensão e sujeito às tensões positivas de acordo com a Figura 1, é possível quantificar as tensões normal σ_α e tangencial τ_α na faceta n com orientação α em relação ao eixo x . Para tal procede-se ao estabelecimento das equações de equilíbrio estático das forças (tensões x áreas) representadas na Figura 12.13, deduzindo-se as expressões seguintes:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x * \cos^2 \alpha + \sigma_y * \sin^2 \alpha + 2 * \sigma_{xy} * \sin \alpha * \cos \alpha \quad (a)$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) * \sin \alpha * \cos \alpha - \sigma_{xy} * (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (b)$$

Numa faceta β orientada a um ângulo $(\alpha + 90)$ graus a tensão normal é:

$$\sigma_\beta = \sigma_x * \sin^2 \alpha + \sigma_y * \cos^2 \alpha - 2 * \sigma_{xy} * \sin \alpha * \cos \alpha \quad (c)$$

Derivando $d\sigma_n / d\alpha = 0$ obtém-se uma das direcções principais α_p , sendo que a outra dista desta um ângulo recto. Segundo as direcções principais as tensões normais são máximas ou mínimas, sendo nulas as tensões tangenciais. A direcção principal α_p é dada pela equação (d) e é medida a partir do eixo x . A outra direcção principal fica a $90 + \alpha_p$ (em graus) do mesmo eixo.

$$\operatorname{tg}(2 * \alpha_p) = \left(\frac{2 * \sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (d)$$

Para se saber a que tensão principal (máxima ou mínima) está associada à direcção α_p há que desenvolver as expressões (a) e/ou (c) para $\alpha = \alpha_p$. Por convenção atribui-se σ_I à tensão principal máxima e σ_{II} à tensão principal mínima. Note que a expressão (a) passa a fornecer o valor da tensão da faceta α_p e (c) a da faceta $90 + \alpha_p$.

Relativamente a qualquer sistema de coordenadas cartesiano e ortogonal, a soma das direcções normais segundo os eixos do sistema é um invariante (ou seja, é constante). Assim, conhecidos dois sistemas XoY e $\alpha o \beta$, verifica-se sempre a igualdade :

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_\beta = \text{constante} \quad (e)$$

As direcções segundo as quais as tensões tangenciais são máximas distam 45 graus das direcções principais. As tensões normais são iguais, e no caso particular de serem nulas, está-se presente a um estado de tensão de *corte puro*. Inversamente, um estado de corte puro, pode ser representado por tensões normais de tracção iguais às de compressão mas orientadas segundo as direcções principais.

I.2- Círculo de Mohr

O estudo do estado de tensão num ponto segundo direcções arbitrárias, a determinação das tensões e direcções principais, entre outras possibilidades, pode ser efectuada graficamente recorrendo-se ao Círculo de Mohr.

- Construção do círculo:

$$\text{Faceta X} \equiv \text{ponto } (\sigma_x ; +\tau_{xy}) \quad (f)$$

$$\text{Faceta Y} \equiv \text{ponto } (\sigma_y ; -(\tau_{xy})) \quad (g)$$

$$\text{Centro: } C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \quad (h,i)$$

$$\text{Raio: } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\sigma_{xy})^2} \quad \Leftrightarrow \quad R = \left|\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right| \quad (\text{j,k})$$

- Tensões numa faceta α em relação à direcção X:

$$\sigma(\alpha) = C + R \cos(2 * \alpha) \quad (\text{l})$$

$$\tau(\alpha) = R * \text{sen}(2 * \alpha) \quad (\text{m})$$

- Tensões Principais:

$$\sigma_I = C + R \quad (\text{n})$$

$$\sigma_{II} = C - R \quad (\text{o})$$

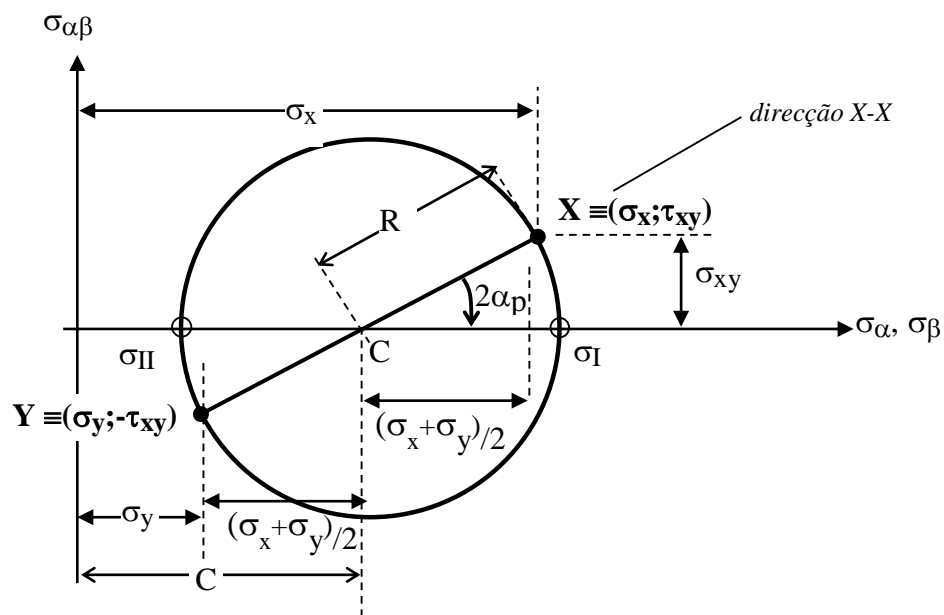


Figura 12.14 - Círculo de Mohr representando o Estado Plano de Tensão de um ponto material

- Direcções Principais:

De acordo com o círculo de Mohr :

$$(2 * \alpha_p) = \left| \arctg \left(\frac{2 * \sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \right|. \quad (\text{p})$$

Comparando as figuras 12.12 e 12.14 constatamos que quando no elemento material, a partir da direcção X se roda num sentido, no círculo de Mohr, e também a partir da direcção X neste representada, se roda em sentido contrário.

II) Estado de Flexão em Lajes

II.1- Equações de Equilíbrio

Os esforços numa laje são positivos de acordo com o seguinte referencial:

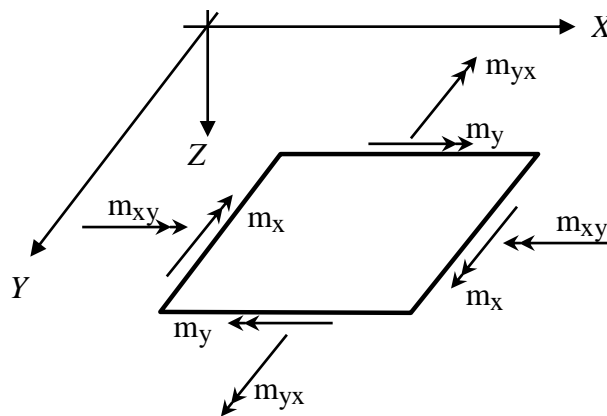


Figura 12.15 - Elemento de laje sujeito a esforços positivos e em equilíbrio

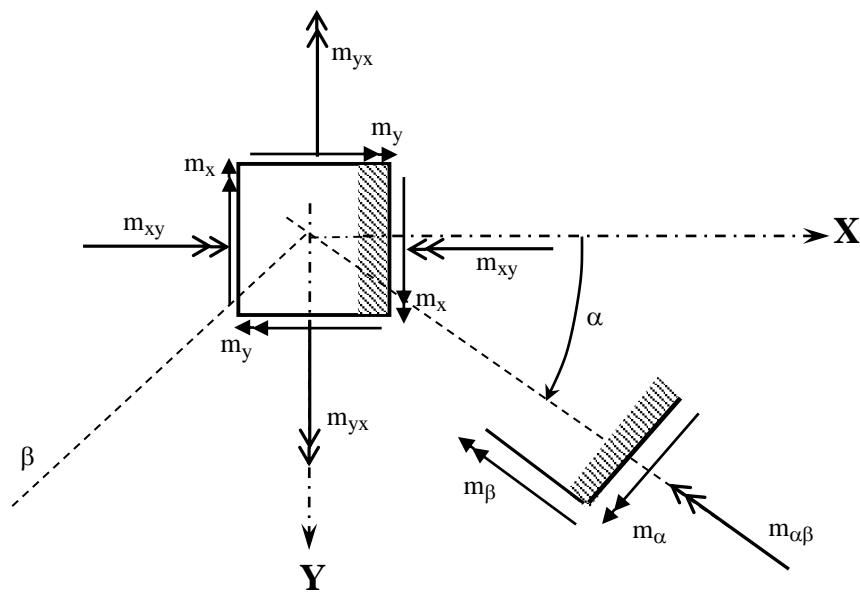


Figura 12.16 - Elemento de laje com orientação α em relação a X-X

Pode-se demonstrar que os esforços em facetas orientadas em direcções arbitrárias α e β podem ser quantificados utilizando as mesmas expressões (de (a) a (c)) dos elementos de placa no estado plano de tensão, bastando apenas substituir σ_x , σ_y e σ_{xy} respectivamente por m_x , m_y e m_{xy} , e ainda, σ_α , σ_β e τ_α por m_α , m_β e $m_{\alpha\beta}$. Também as direcções principais e a soma dos momentos flectores em direcções ortogonais são invariantes, como se expressa nas igualdades (d) e (e) (fazendo as devidas substituições aqui indicadas).

II.2 - Círculo de Mohr

A utilização do círculo de Mohr em substituição das expressões anteriores é também possível. Há no entanto uma alteração importante. O elemento de placa no estado plano de tensão tem o eixo Y orientado de baixo para cima (ver figura 12.12), que é contrária à orientação do elemento de laje como mostra a figura 12.16. Assim, as ordenadas dos pares ordenados que representam as facetas X e Y das lajes deverão ser alterados para as seguintes definições:

$$\text{Faceta X} \equiv \text{ponto } (\mathbf{m}_x ; -(\mathbf{m}_{xy})) \quad (\text{q})$$

$$\text{Faceta Y} \equiv \text{ponto } (\mathbf{m}_y ; +(\mathbf{m}_{xy})) \quad (\text{r})$$

À parte desta alteração a utilização do círculo de Mohr é semelhante à descrita na secção I.2, nomeadamente quando num elemento de laje se roda num determinado sentido a partir de X-X, no círculo de Mohr roda-se em sentido contrário a partir da direcção X nele representada.

III. Exemplo Ilustrativo

É conhecido o "estado de flexão" de uma laje num determinado ponto, cujos esforços são $m_x = -75 \text{ kNm}$, $m_y = -30 \text{ kNm}$ e $m_{xy} = -30 \text{ kNm}$.

- Determine os momentos no referencial $\alpha\beta$ no qual o eixo α está orientado a 35° em relação a X.
- Determine, recorrendo ao círculo de Mohr, as direcções e momentos principais.

Resolução:

- Utilizando as expressões (a), (c) e (b) obtemos respectivamente:

$$m_\alpha = -88.4 \text{ kNm}, \quad m_\beta = -16.6 \text{ kNm} \quad \text{e} \quad m_{\alpha\beta} = -10.9 \text{ kNm}.$$

- As facetas X e Y correspondem, de acordo com (q) e (r) aos pontos:

$$\text{Faceta X} \equiv \text{ponto } (\mathbf{m}_x ; -(\mathbf{m}_{xy})) = (-75 ; -(-30))$$

$$\text{Faceta Y} \equiv \text{ponto } (\mathbf{m}_y ; +(\mathbf{m}_{xy})) = (-30 ; -30)$$

Posicionam-se estes pontos no plano $m_\alpha - m_{\alpha\beta}$ e traça-se o círculo de Mohr. Em alternativa pode determinar-se a abcissa do centro e o valor do raio, respectivamente pelas expressões (h) e (j):

$$C = -52.5 \text{ kNm}, \quad R = 37.5 \text{ kNm}$$

Os momentos principais são dados pelas igualdades (n) e (o),

$$m_I = C + R = -15 \text{ kNm}$$

$$m_{II} = C - R = -90 \text{ kNm}$$

Estes valores podem ser confirmados sobre o círculo de Mohr.

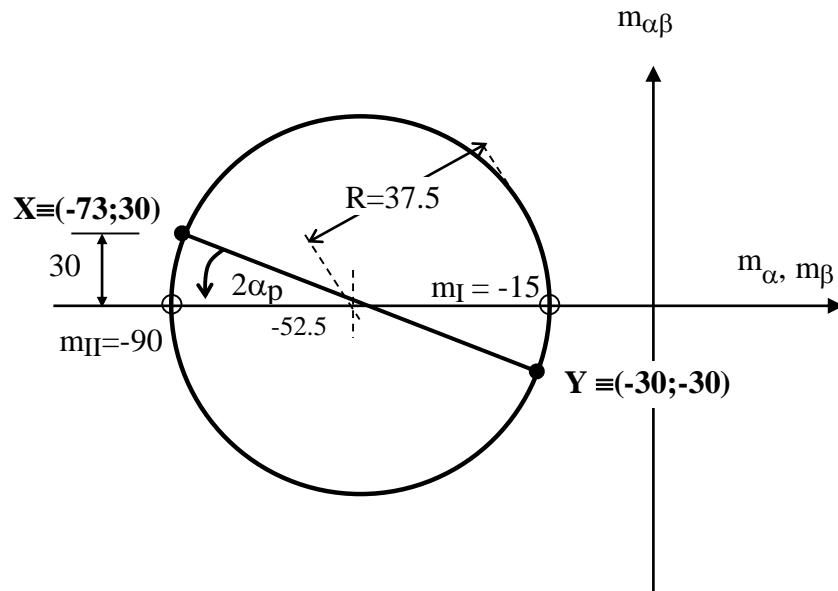


Figura 12.17- Círculo de Mohr para Momentos (flectores e torçores)

O ângulo $2\alpha_p$ pode ser obtido da figura acima notando que é igual a :

$$2\alpha_p = \text{tg} (m_{xy} / \text{Raio}) = \text{tg} (30/37.5) \quad (\text{equivalente à expressão (p)}).$$

Não deverá considerar o sinal algébrico do resultado mas interpretá-lo graficamente. No círculo de Mohr a faceta X deverá rodar $2\alpha_p$ no sentido horário para se chegar à direcção principal II (a de menor momento principal), ou então $2(\alpha_p+90)$ para se atingir a direcção principal I.

Em alternativa poderia recorrer-se à expressão (d) cujo resultado seria:

$$2\alpha_p = +53^\circ \Rightarrow \alpha_p = +26.5^\circ$$

O resultado é positivo o que quer dizer que no elemento de laje deverá rodar α_p no sentido positivo que encontrará uma direcção principal, embora à partida não se saiba se é a direcção principal I ou II.. No círculo de Mohr rodará no sentido contrário o valor $2\alpha_p$, e devido à natureza gráfica do mesmo fica logo a saber a que momento principal corresponde aquela direcção. Analiticamente é necessário substituir α_p nas expressões (a) e (c) de modo a saber-se a que direcção principal (I ou II) correspondem os momentos.

$$\text{- para } \alpha = \alpha_p = 26.5^\circ \Rightarrow \text{equação (a)} \Rightarrow m_\alpha = -90$$

$$\text{- para } \alpha = \alpha_p = 26.5^\circ \Rightarrow \text{equação (c)} \Rightarrow m_\beta = -15 \quad (\text{note que } \beta = \alpha + 90)$$

Logo, como $m_\alpha < m_\beta \Rightarrow m_\alpha \Leftrightarrow m_{II}$ e $m_\beta \Leftrightarrow m_I$

12.8.2 - Esforços de Cálculo para o Dimensionamento Armaduras de Lajes de Acordo com Eurocódigo 2.

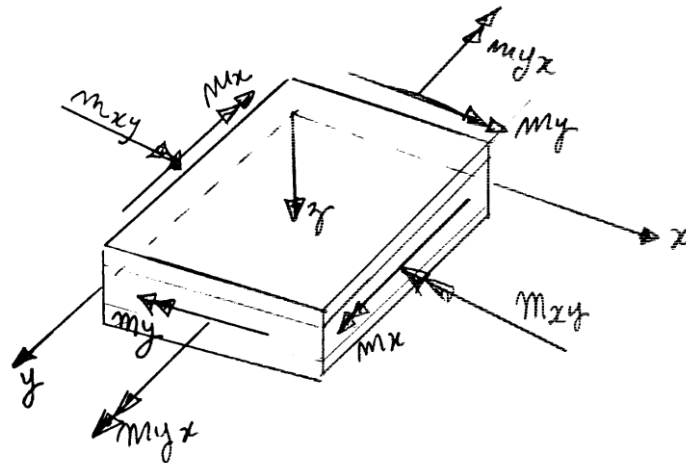


Figura 12.18

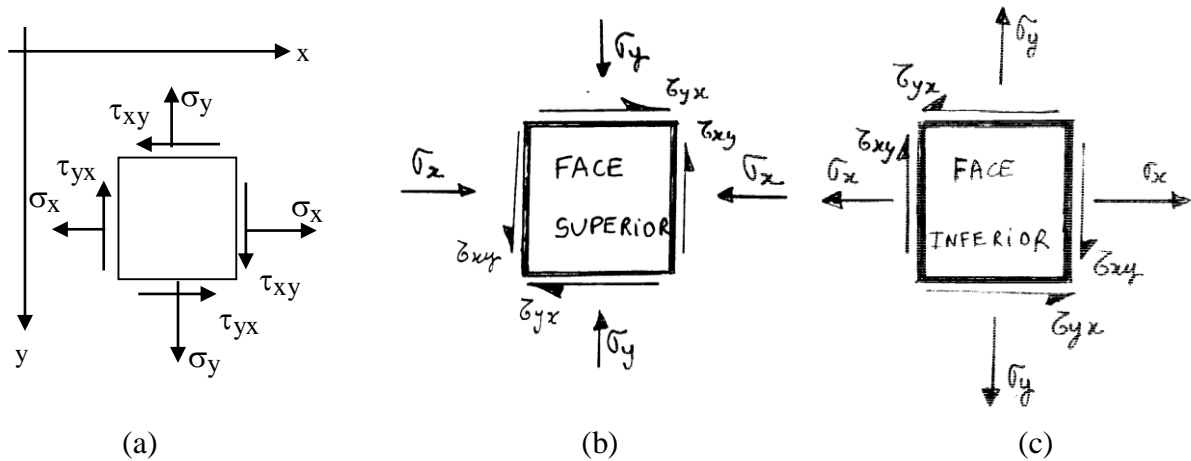


Figura 12.19

A Figura 12.18 mostra um elemento de laje sujeito a um conjunto de momentos positivos (por unidade de comprimento) e que podem ser agrupados no vector $\{m\} = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$. Estes momentos são estaticamente equivalentes a binários de forças que actuam nas faces superiores e inferiores da laje nas direcções e sentidos mostrados na Figura 12.19 (b) e (c).

Os binários são constituídos por forças por unidade de largura, as quais, em cada uma das faces da laje, constituem estados planos de tensão. Por este motivo se designarão aquelas forças por "tensões" que se podem agrupar no vector $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}^T$. As tensões são positivas conforme a Figura 2(a).

O braço do binário vale z , é a distância entre os centros de gravidade das resultantes das "tensões", os quais concretizam o centro de gravidade das armaduras da laje e o da zona de betão (camada) comprimida. De acordo com o M.C. 90 o cálculo dos braços é complexo e pode

requerer iterações pois dependem do nível de armadura e da espessura das camadas de betão. Como ponto partida é razoável adoptar para todos os braços (z_x , z_y e z_{xy}) o valor de $2 \cdot h/3$.

Outra alternativa consiste em determinar a distância da linha neutra x à face mais comprimida (em geral em função do parâmetro $\alpha=x/d$) a partir dos momentos reduzidos, e, adoptar como diagrama de compressão no betão o diagrama rectangular, cuja base de contacto de tensões é de $(0.8 \cdot x)$. Nestas circunstâncias o braço é dado pela expressão $z = d - 0.4 \cdot x$.

De qualquer modo, no que se explica a seguir, o braço do binário não tem qualquer influência excepto no controle das tensões de compressão no betão.

Como se referiu antes, ao conjunto de momentos (positivos) da Figura 12.18 correspondem, em cada uma das faces, estados planos de tensão que de acordo com a Figuras 12.19 a) a c), permite estabelecerem-se as seguintes igualdades:

a) Face Inferior

$$\text{Para } \begin{array}{l} m_x > 0 \Rightarrow \sigma_x > 0 \\ m_y > 0 \Rightarrow \sigma_y > 0 \\ m_{xy} > 0 \Rightarrow \tau_{xy} \geq 0 \end{array} \quad (a) \quad \begin{cases} m_x = |z| \cdot \sigma_x \\ m_y = |z| \cdot \sigma_y \\ m_{xy} = +z \cdot \tau_{xy} \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \sigma_x = m_x / z \\ \sigma_y = m_y / z \\ \tau_{xy} = + m_{xy} / z \end{cases}$$

O estado plano de tensão instalado nesta face, caracterizado por σ_x , σ_y e σ_{xy} , requererá ou não armadura de acordo com fluxograma da Figura 10.9 (página 10.9). O fluxograma, tendo sido deduzido para o estado plano de tensão em paredes, pode agora ser readaptado para flexão em lajes, se as tensões resultantes destes momentos forem substituídas pelas igualdades (b) acima indicadas. Este procedimento efectuar-se-á quer nas inequações como nas fórmulas, fazendo-se realçar que o braço do binário z desaparece por coexistir em ambos termos daquelas expressões. Às inequações do fluxograma da figura 10.9 correspondem as seguintes equivalências:

$$\begin{array}{l} \sigma_x \leq \sigma_y \quad \Leftrightarrow \quad m_x \leq m_y \\ \sigma_x \geq -|\tau_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_x \geq -|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_x \geq -|m_{xy}| \\ \sigma_y \geq -|\tau_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_y \geq -|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_y \geq -|m_{xy}| \end{array}$$

Ao valor de cálculo das tensões de tracção da armadura segundo x (f_{tdx}) corresponde agora o momento de cálculo de armadura positivas na direcção x , designado por m_{udx} . Igualmente à tensão f_{tdy} se associa o momento de cálculo m_{udy} . Caso algum destes momentos resulte negativo não se considera porque não tem significado físico.

Caso se pretenda comprovar o nível de tensões no betão é necessário determinar F_c , sendo preciso determinar quer o braço z como a zona de betão comprimida. Na verificação aos Estados Limites Últimos de Resistência pode adoptar-se um diagrama rectangular de altura igual a 0.8

x , sendo x a distância da linha neutra à face mais comprimida (definida em geral nas tabelas de betão armado em função de $\alpha=x/d$).

Na parte superior da Figura 12.20 apresenta-se o fluxograma para dimensionamento de armaduras inferiores adaptado para lajes.

b) Face Superior

$$\text{Para } \begin{array}{l} m_x > 0 \Rightarrow \sigma_x < 0 \\ m_y > 0 \Rightarrow \sigma_y < 0 \\ m_{xy} > 0 \Rightarrow \tau_{xy} < 0 \end{array} \quad (c) \quad \begin{cases} m_x = -z * \sigma_x \\ m_y = -z * \sigma_y \\ m_{xy} = -z * \tau_{xy} \end{cases} \quad (d) \quad \begin{cases} \sigma_x = -m_x / z \\ \sigma_y = -m_y / z \\ \tau_{xy} = -m_{xy} / z \end{cases}$$

Altera-se agora o fluxograma original confrontando a Figura 2(c) com a Figura 1. As inequações do fluxograma original ficam com as seguintes equivalências:

$$\begin{array}{l} \sigma_x \leq \sigma_y \quad \Leftrightarrow \quad -m_x \leq -m_y \quad \Leftrightarrow \quad m_x > m_y \quad \Leftrightarrow \quad \{ m_x \leq m_y \text{ e permutando Sim} \leftrightarrow \\ \text{Não} \} \\ \sigma_x \geq -|\tau_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad -m_x \geq -|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_x < +|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_x < +|m_{xy}| \\ \sigma_y \geq -|\tau_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad -m_y \geq -|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_y < +|m_{xy}| \quad \Leftrightarrow \quad m_y < +|m_{xy}| \end{array}$$

Aos valores de cálculo das tensões de tracção das armaduras segundo x e y (f_{tdx} e f_{tdy}) correspondem agora os momentos de cálculo de armadura negativos (na face superior) respectivamente nas direcções x e y , designados por $m_u'dx$ e $m_u'dy$.

Para se comprovar o nível de tensões no betão é necessário determinar F_c' .

Uma vez mais se alerta que os momentos de cálculo $m_u'dx$ e $m_u'dy$ resultam em grandezas positivas, embora estejam associadas a armaduras "negativas" (para a face superior da laje). Quando estes momentos ($m_u'dx$ e $m_u'dy$) forem negativos não se considera o seu resultado porque não tem significado físico.

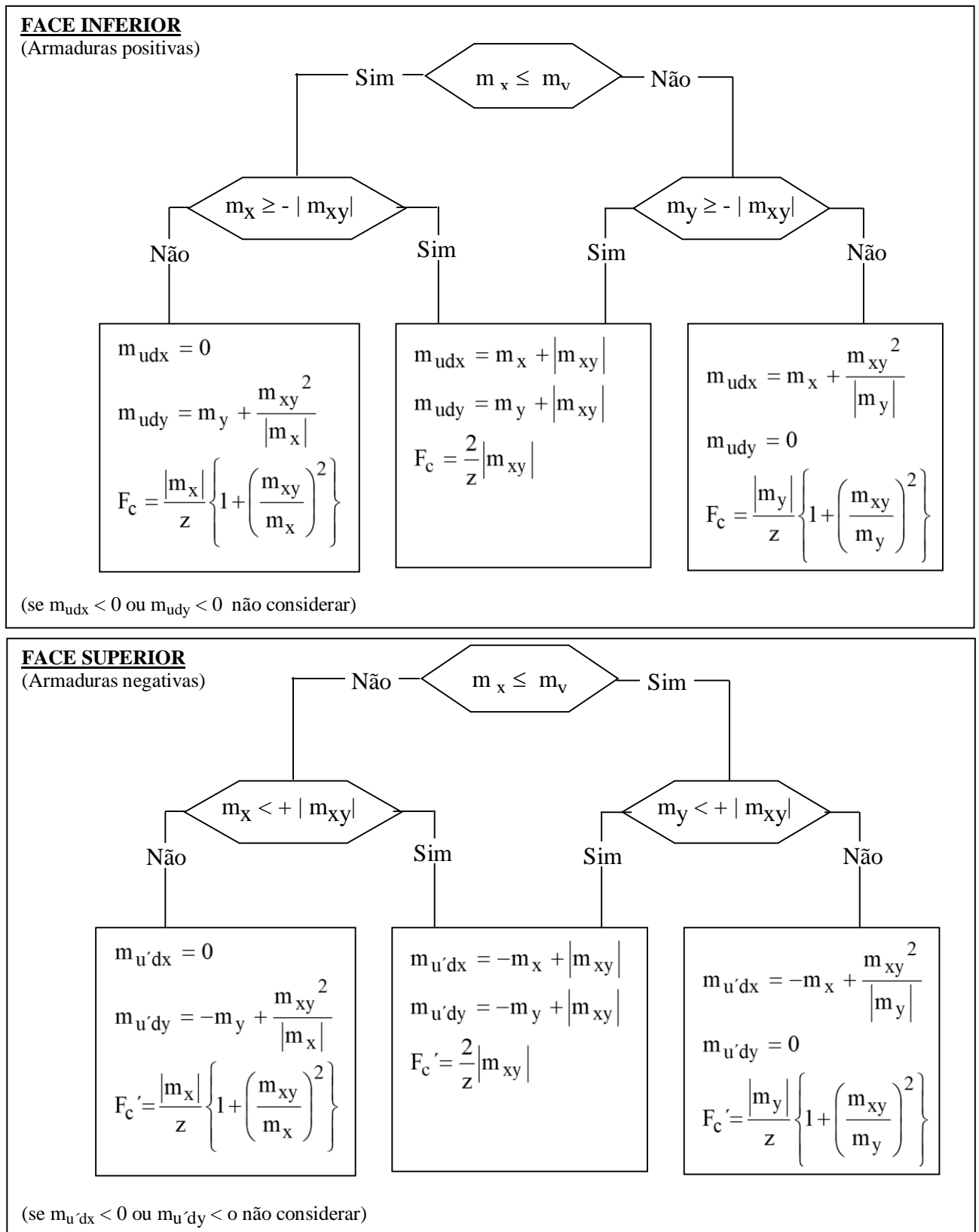


Figura 12.20 - Cálculo de Armaduras em Lajes (adaptado do Eurocódigo 2)

Nota: Se trocar o sinal aos momentos o fluxograma respeitante à face inferior permite o cálculo das armaduras negativas (superiores).

Método Alternativo 1:

- Face Inferior - Armaduras positivas:

$$m_{udx} = m_x + \gamma |m_{xy}|$$

$$m_{udy} = m_y + \gamma |m_{xy}|$$

- Face Superior - Armaduras negativas:

$$m_{u'dx} = m_x + (1/\gamma') |m_{xy}|$$

$$m_{u'dy} = m_y + (1/\gamma') |m_{xy}|$$

Os parâmetros γ e γ' são tais que os resultados se situem entre metade e o dobro dos obtidos pelo método anterior. Trata-se de um dimensionamento plástico.

Método Alternativo 2:

Poderá considerar-se que a capacidade de uma secção para suportar uma dada combinação de momentos é satisfatória se forem cumpridas as seguintes condições:

- 1º) $-(m_{udx} - m_x)(m_{udy} - m_y) + m_{xy}^2 \leq 0$
- 2º) $-(m_{u'dx} - m_x)(m_{u'dy} - m_y) + m_{xy}^2 \leq 0$
- 3º) $m_x \leq m_{udx}$
- 4º) $m_y \leq m_{udy}$
- 5º) $m_x \geq -m_{u'dx}$
- 6º) $m_y \geq -m_{u'dy}$

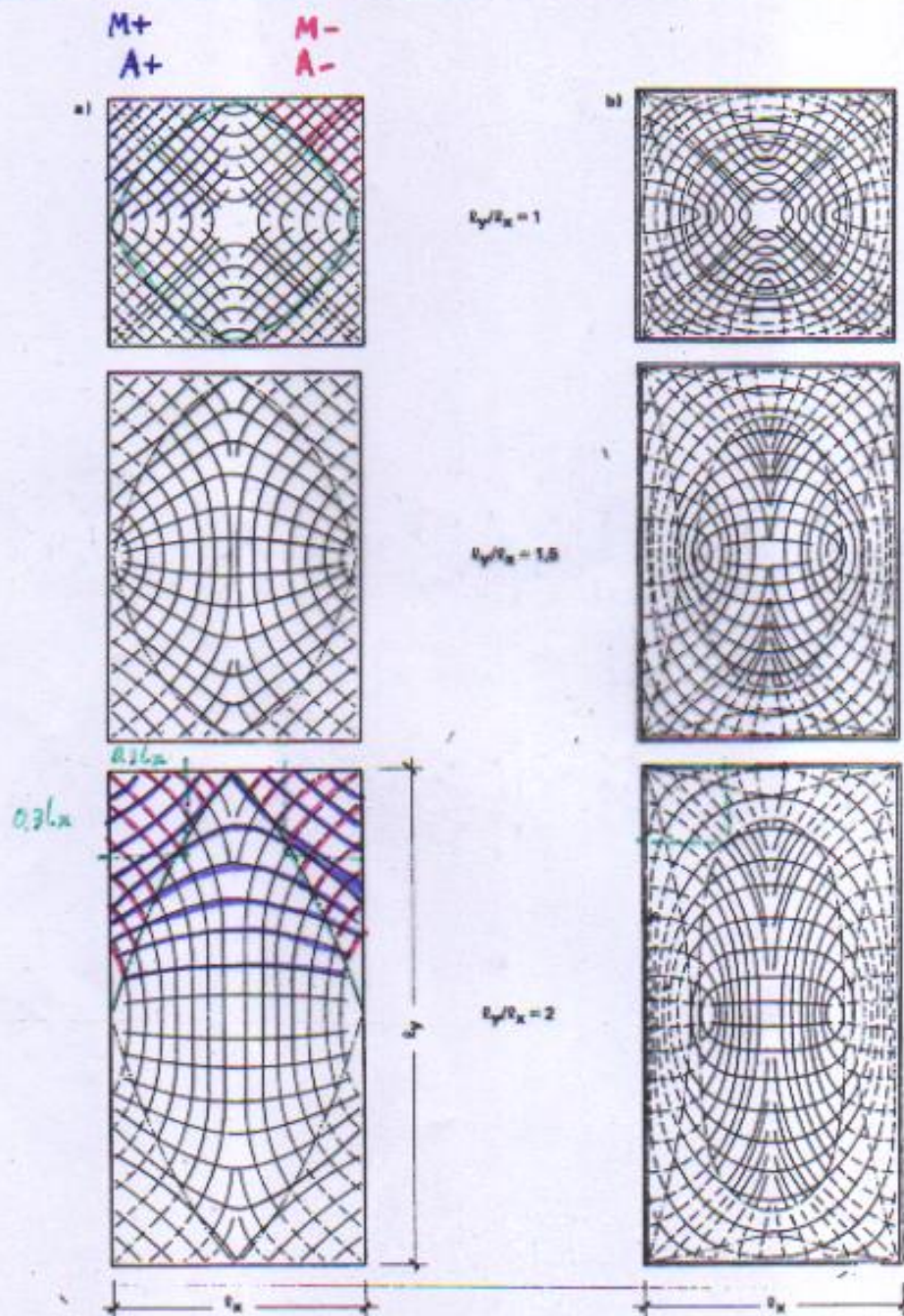


Figura 8.22 Direções dos momentos principais de lajes retangulares com carga uniformemente distribuída, desenhadas nas direções das tensões de flexão por eles produzidas: a) apoios livres à rotação em todo o contorno; b) engaste em todo o contorno

- Momentos principais positivos (tração na face inferior da laje)
- Momentos principais negativos (tração na face superior da laje)
- - - Mudança de sinal dos momentos principais

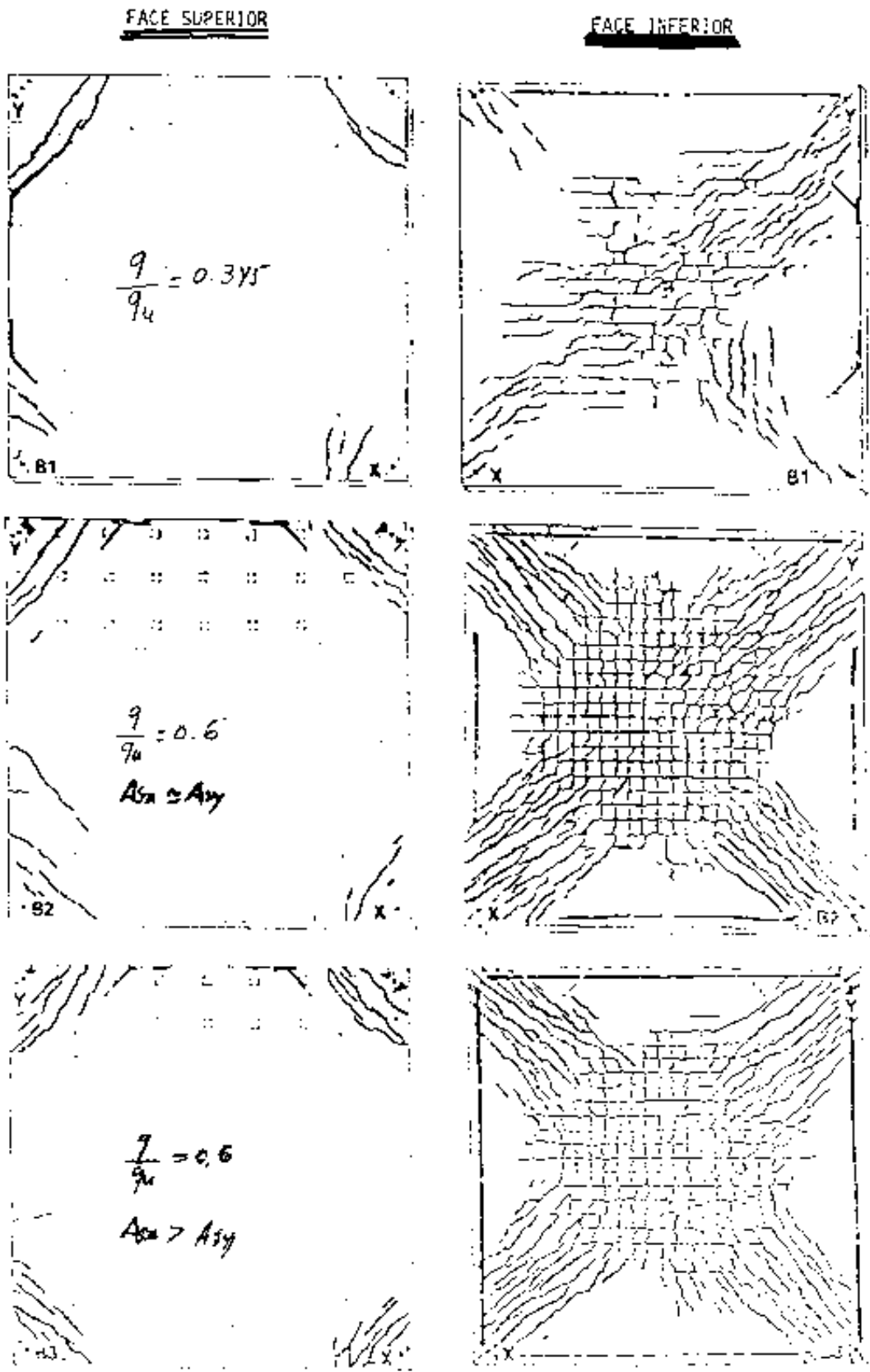


Fig. 1.13

Programa Q4Q8Q9

para

EPT ou EPD

VB6-Versao3-Q4Q8Q9 -malha 2

Aplicativo EXCEL na Inversão e Multiplicação de Matrizes

<u>P</u>	=	<u>A</u>		*	<u>F</u>	
10		0.6	-0.8	0	F1	
30		0.8	0.6	0	F2	
0		0	0.8	1	F3	
<u>A</u>⁻¹				*	<u>P</u>	=
0.6	0.8	0			10	30
-0.8	0.6	0			30	10
0.64	-0.48	1			0	-8

Álgebra Matricial Básica usando Microsoft Excel:

- 1) Colocar os valores de cada elemento das matrizes necessessárias.
- 2) Para inverter a matriz, seleccione (highlight) a zona desejada onde pretende colocar *matriz invertida*. Depois faça **=MINVERSE(** e seleccione a matriz original. Feche o parenteses e cargue CTRL+SHIFT+ENTER.
Nota : Se não carregar CTRL+SHIFT+ENTER, não definirá o conjunto de números como matriz (array) e a função não funcionará como deseja. Como verificação, quando seleccionar qualquer célula dentro da matriz invertida, a função deverá aparecer-lhe dentro de parênteses curvos {}...
- 3) Para multiplicar duas matrizes, seleccione a zona onde se localizará o produto delas. Depois escreva **=MMULT(** , seleccione a primeira matriz, vírgula, seleccione a segunda matriz. Feche o parenteses e carregue em CTRL+SHIFT+ENTER.

Operações similares incluem:

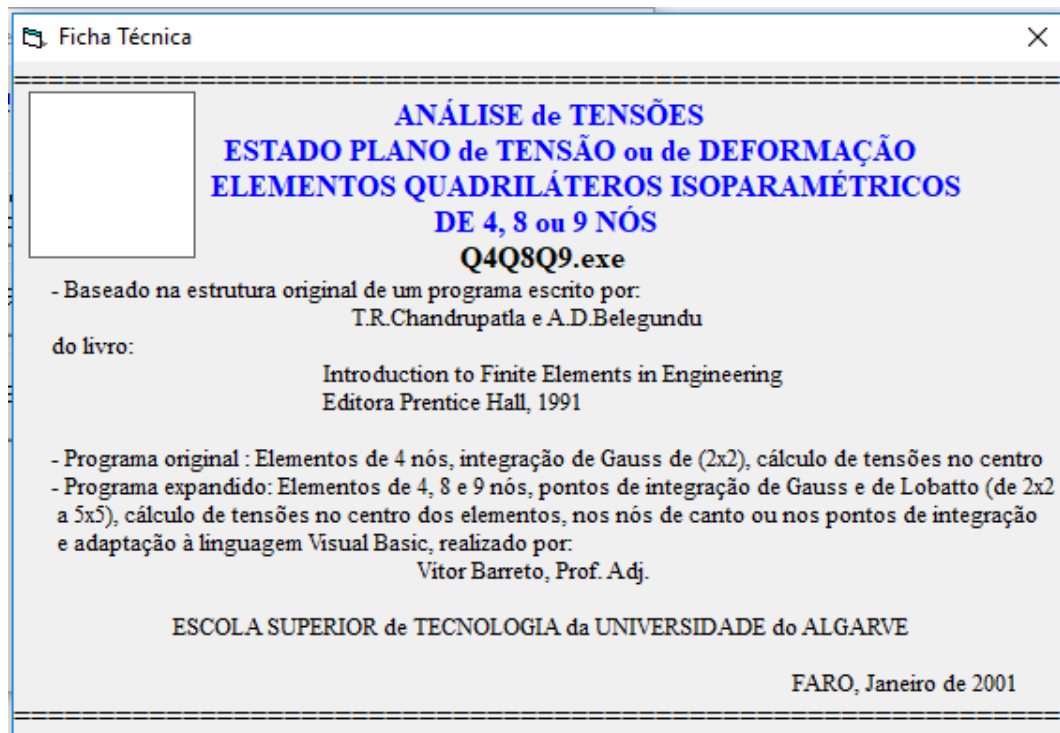
Determinante	=MDETERM(original matrix)
Transposta	=TRANSPOSE(original matrix)

	Versão Inglesa	Versão
Potuguesa		
Matriz inversa	MINVERSE	
MATRIZ.INVERSA		
Multiplicar	MMULT	MATRIZ.MULT

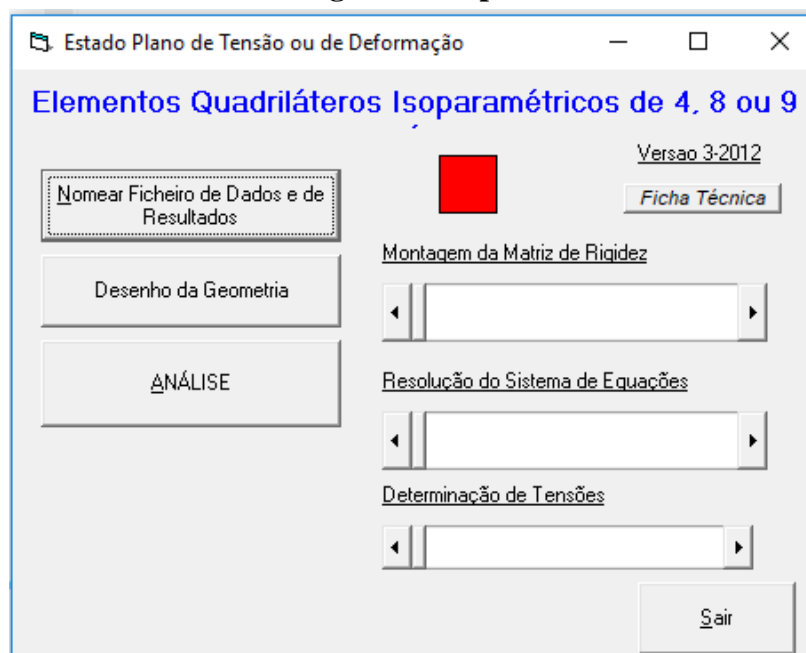
Q4Q8Q9.exe

Este aplicativo contempla elementos finitos de Placa (paredes). Apresentam-se os ecrãs do programa que sugerem o modo de funcionamento do mesmo, um exemplo numérico e os ficheiros de dados e de resultados correspondentes.

1-Ficha Técnica



2-Página Principal



3-Usar o WordPad para escrever ficheiro de dados

```

DADOS Consola.txt - Bloco de notas
Ficheiro Editar Formatar Ver Ajuda
8 3 5 3 1 4
1 2 2 1
0.16 30E6 0.2
0 0
2 0
4 0
6 0
0 1.25
2 1.25
4 1.25
6 1.25
1 2 6 5 1
2 3 7 6 1
3 4 8 7 1
1 0
2 0
4 0
9 0
10 0
12 -200
14 -200
16 -200

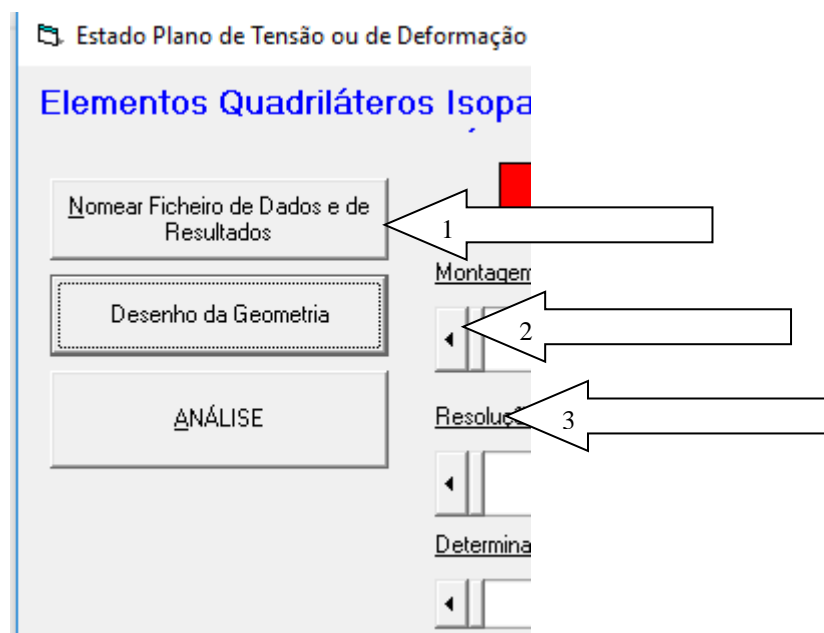
'Folha de dados
'n.Nos, n.Elem.,n.GLRestr.,n.Compon.Carga,n.Materiais, nos por elemento
' T.Quadratura(*1), n. p.integracao(*2), P.de tensões(*3), EPT/EPD(*4)
'espessura do material 1 , Módulo de Elasticidade 1, Coef. Poisson 1
'espessura do material 2 , Módulo de Elasticidade 2, Coef. Poisson 2
'... ..
'espessura n do material 3, Módulo de Elasticidade n, Coef. Poisson n
'X1,Y1
'X2,Y2
'... , ...

```

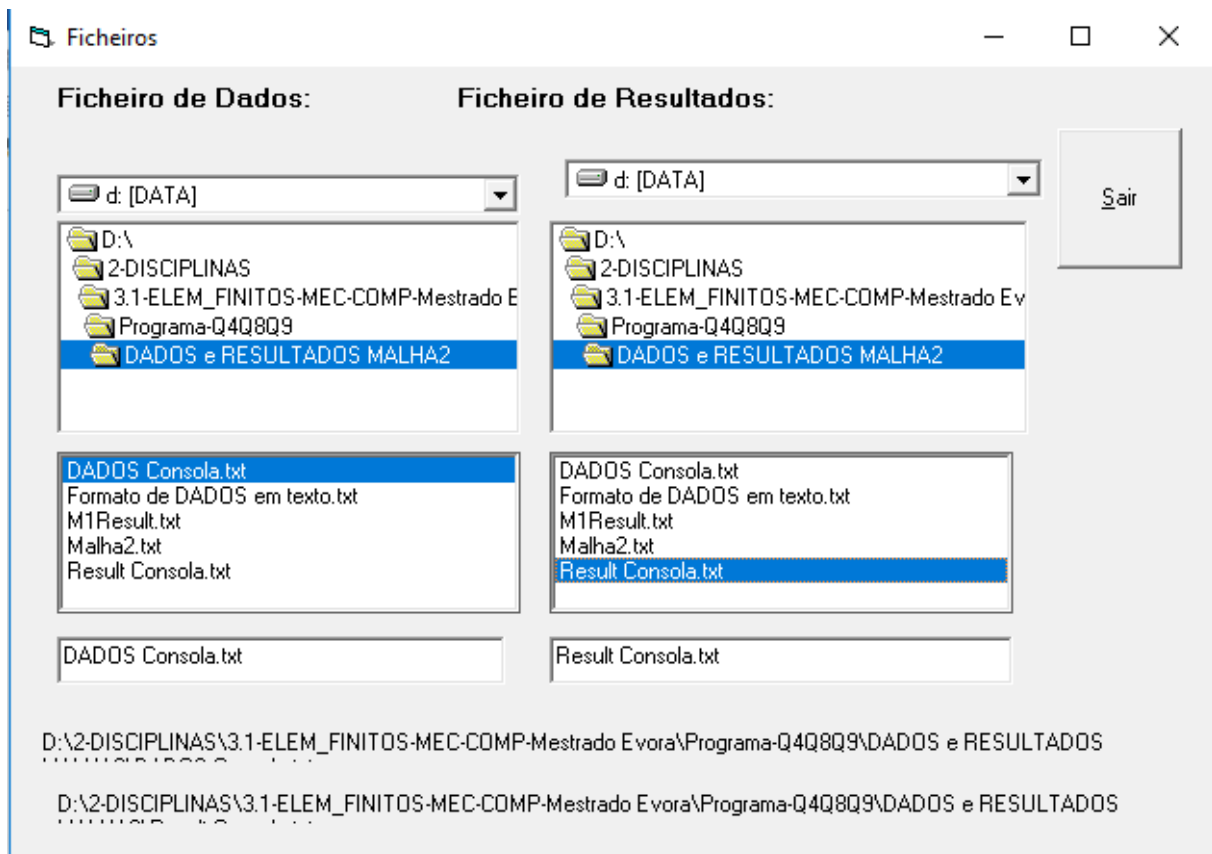
Formato de DADOS em texto.txt - Bloco de notas

Ficheiro Editar Formatar Ver Ajuda

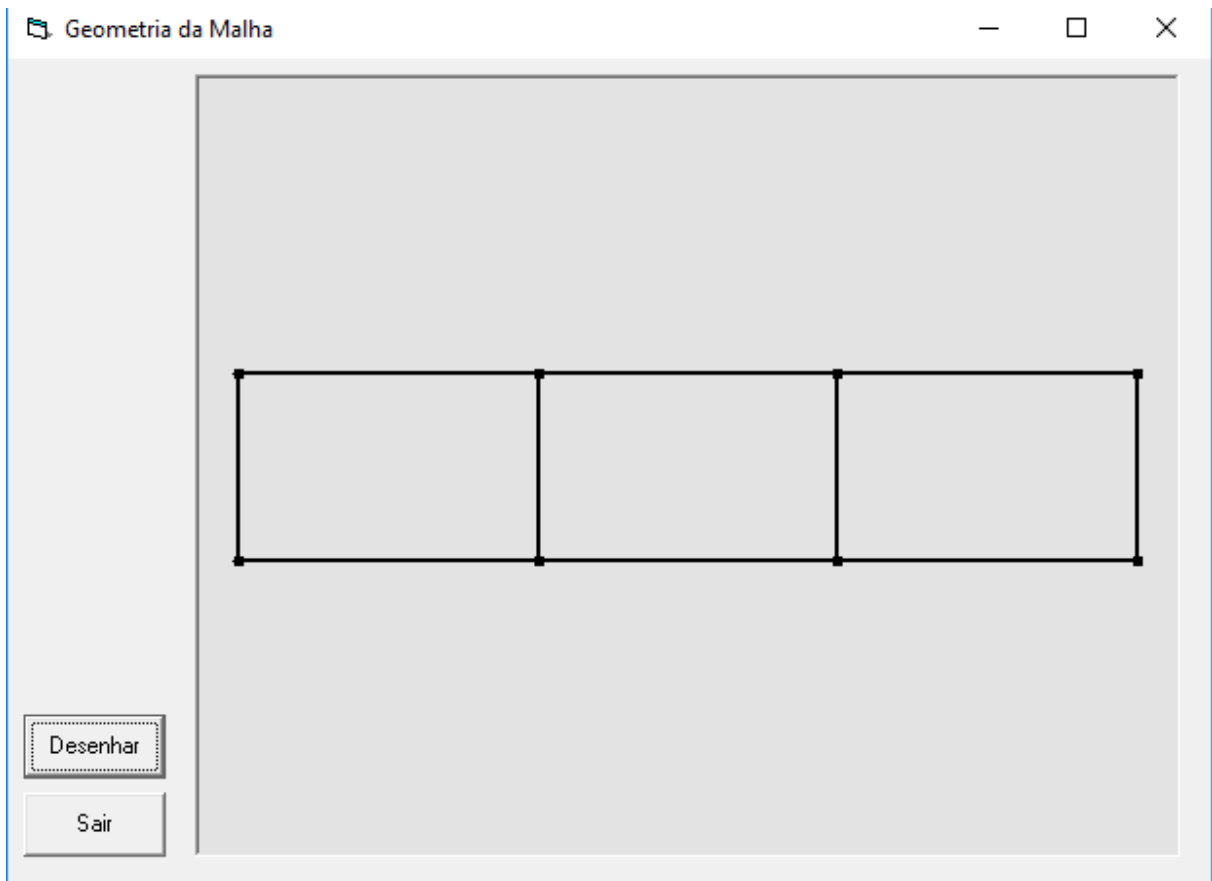
```
'Folha de dados
'n.Nos, n.Elem.,n.GLRestr.,n.Compon.Carga,n.Materiais, nos por elemento
' T.Quadratura(*1), n. p.integração(*2), P.de tensões(*3), EPT/EPD(*4)
'espessura do material 1, Módulo de Elasticidade 1, Coef. Poisson 1
'espessura do material 2, Módulo de Elasticidade 2, Coef. Poisson 2
'... ..
'espessura n do material 3, Módulo de Elasticidade n, Coef. Poisson n
'X1,Y1
'X2,Y2
'... , ...
'Xn,Yn
'no11, no21, no31, no41 , material 1
'no12, no22, no32, no42 , material 2
'no13, no23, no33, no43 , material
'noli, no2i, no3i, no4i , material n.mat
'... , ... , ... , ... , ...
'no1n,no2n,no3n, no4n , material m
'GLrestringido 1, valor do deslocamento restringido
'... , ...
'GLrestringido n, valor do deslocamento n
'GL com carga 1, valor da carga 1
'... , ...
'GL com carga n, valor da carga n
'-----
'NOTAS:
'(*1): Tipo de Quadratura: 1=Gauss, 2=Lobatto
'(*2): n. pontos de integração em cada direcção : 2 , 3 , 4 ou 5
'(*3): Pontos onde se calculam tensões:
'          1=centro, 2=nºs decanto,3= pontos de integração
'(*4): Estado plano de : 1= Tensão, 2= Deformação
```

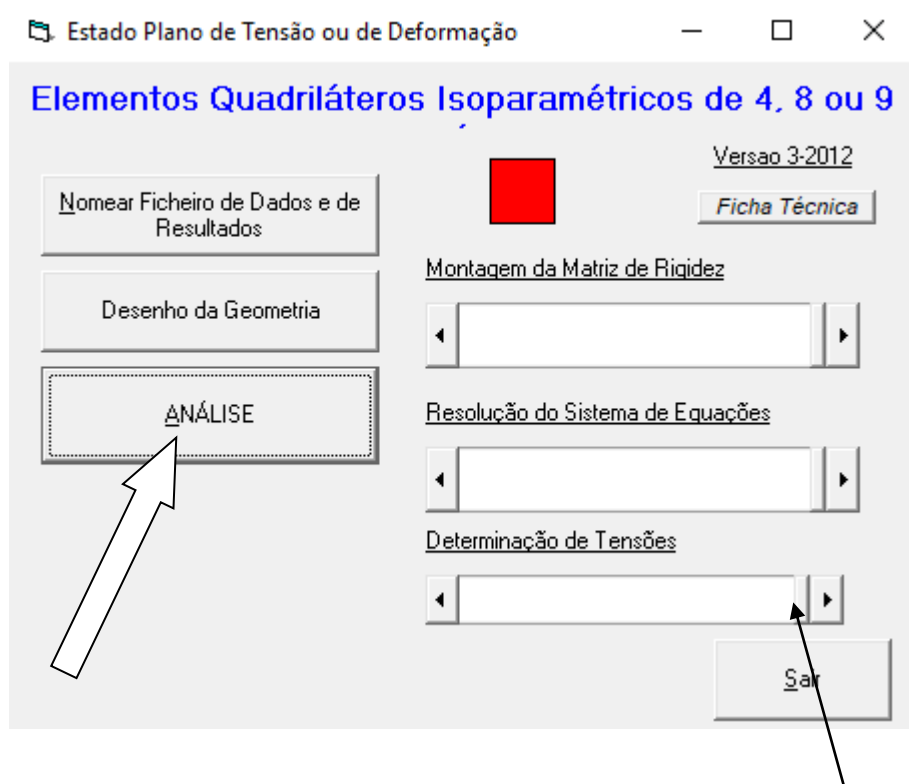


4-Indicar os nomes e localização dos ficheiros de dados e resultados



5- Observar sumariamente se a geometria está bem





6-O botão Análise faz correr o programa gerando o ficheiro de resultados

7-O ficheiro de resultados pode ser lido pelo Wordpad (ou outro aplicativo *.TXT)

```

Result Consola.txt - Bloco de notas
Ficheiro Editar Formatar Ver Ajuda
*** ANÁLISE DE TENSÕES ***
***      DADOS      ***

- ESTADO PLANO DE TENSÃO -

Directório do ficheiro de dados.....:
D:\2-DISCIPLINAS\3.1-ELEM_FINITOS-MEC-COMP-Mestrado Evora\Programa-Q4Q8Q9\DADOS e
Directório do ficheiro de resultados:
D:\2-DISCIPLINAS\3.1-ELEM_FINITOS-MEC-COMP-Mestrado Evora\Programa-Q4Q8Q9\DADOS e
Nome do ficheiro de dados .....:DADOS Consola.txt
Nome do ficheiro de resultados :Result Consola.txt

Nº  Nº  GL  Comp. Nº  Nºnós por
Nós Elem Restr. Carga Mater. Elemento
8  3  5  3  1  4

Quadratura de GAUSS com 2 pontos de integração em cada direcção

As tensões são calculadas nos nós de canto

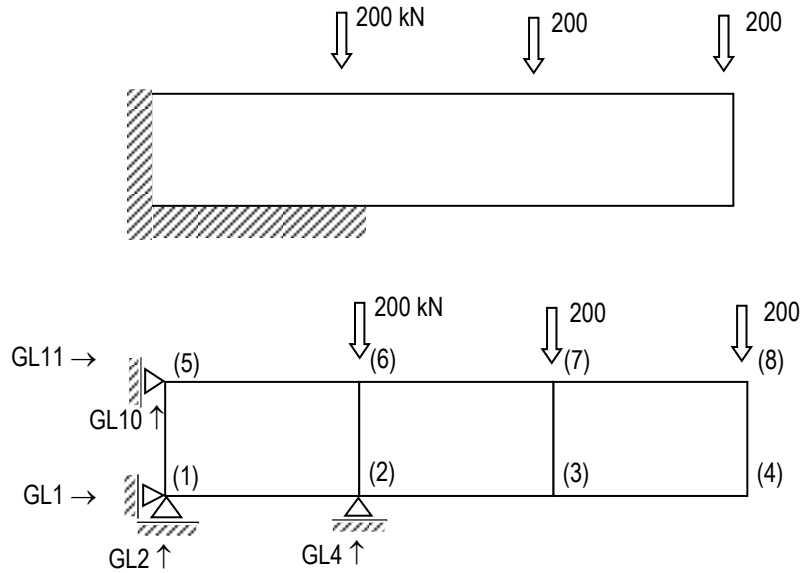
Material Espessura Mód.Elast.  Coef.Poisson
1  0.16  30000000  0.2

Nó  COORD.-X  COORD.-Y
1  0  0
2  2  0
3  4  0
4  6  0
5  0  1.25
6  2  1.25
7  4  1.25

```

EXEMPLO

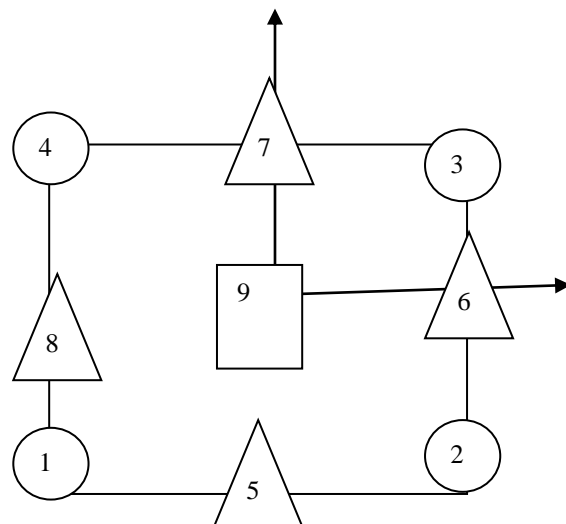
Parede com 0.16 m de espessura , 6 metros de comprimento e 1.25 de altura. Discretizar a estrutura com 3 elementos rectangulares. ($E=30\text{ GPa}$, $\nu=0.20$)



Ficheiro de Dados

```

8 3 5 3 1 4 <----- Esta é a primeira linha do ficheiro
1 2 2 1
0.16 30E6 0.2
0 0
2 0
4 0
6 0
0 1.25
2 1.25
4 1.25
6 1.25
1 2 6 5 1
2 3 7 6 1
3 4 8 7 1
1 0
2 0
4 0
9 0
10 0
12 -200
14 -200
16 -200
    
```



Elementos Finitos

Anexo

Nó	COORD.-X	COORD.-Y
1	0	0
2	2	0
3	4	0
4	6	0
5	0	1.25
6	2	1.25
7	4	1.25
8	6	1.25

Elem.	Nó1	Nó2	Nó3	Nó4	Material
1	- 1	2	6	5	- 1
2	- 2	3	7	6	- 1
3	- 3	4	8	7	- 1

G.L.	Restringido,	Deslocamento	Especificado
1			0
2			0
4			0
9			0
10			0

Acções Nodais

Comp= 12 Valor=-200 Comp= 14 Valor=-200 Comp= 16 Valor=-200

*** RESULTADOS ***

Nó	G.L.-	Desloc-X	G.L.-	Desloc-Y
1	1	6.671573E-10	2	8.525045E-10
2	3	-3.657576E-04	4	-6.108712E-09
3	5	-9.535084E-04	6	-2.617376E-03
4	7	-1.101345E-03	8	-6.172408E-03
5	9	-6.671608E-10	10	2.410339E-09
6	11	4.114874E-04	12	-1.429147E-04
7	13	1.037972E-03	14	-2.595512E-03
8	15	1.193693E-03	16	-6.218909E-03

G.L.	Reacção
1	-140.659
2	-179.7364
4	1287.92
9	140.6597
10	-508.1798

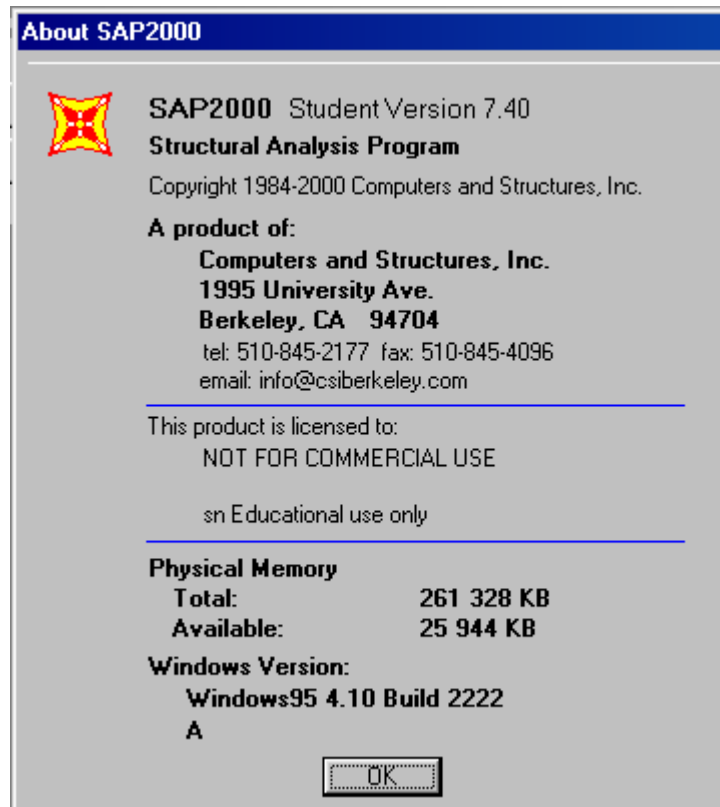
As tensões são calculadas nos nós de canto

El.	P.	SX	SY	TXY	S1	S2	ANG (°) SX->S1
1	1	-5714.965	-1142.956	-5.685078E-02			
	2				-1142.956	-5714.965	-89.99929
	3	-6429.516	-4715.709	7772.407	2246.889	-13392.11	48.14571
	4	5714.959	-2286.814	6879.219	9672.134	-6243.989	29.90907
	4	6429.51	1285.939	-893.2451	6580.217	1135.232	-9.576694
2	1	-9898.147	-5409.436	-8586.109	1220.802	-16528.38	-52.3245
	2	-9074.287	-1290.127	3556.247	89.90625	-10454.32	68.79082
	3	9898.145	2504.357	4586.074	12091.84	310.6572	25.56363
	4	9074.283	-1614.949	-7556.283	12985.06	-5525.729	-27.36397
3	1	-2200.631	84.60716	-2304.147	1513.889	-3629.913	-58.18833
	2	-2542.455	-1624.513	731.4261	-1219.98	-2946.987	61.05415
	3	2200.628	-675.8956	304.148	2232.436	-707.7028	5.970188
	4	2542.454	1033.217	-2731.427	4621.586	-1045.916	-37.27799

Alguns Elementos Finitos do Programa de Cálculo SAP

(Computers and Structures INC, Berkeley)

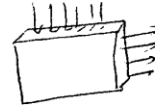
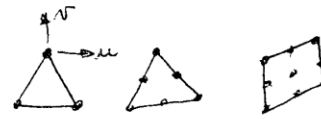
Está disponível na internet uma versão *free ware* para estudantes e que tem algumas restrições nomeadamente quanto ao número de nós.



Apresenta-se na página seguinte alguns tipos de elementos usados neste software.

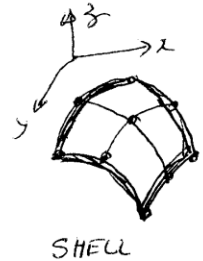
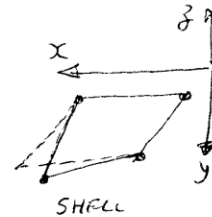
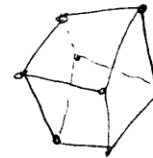
**SAP
PLANE ELEMENT**

- 3 a 9 nós
- modela sólidos bidimensionais com espessura constante
- formulação isoparamétrica
- Trata de ESTADOS PLANOS de TENSÃO ou de EST. PL. de DEFORMAÇÃO
- as tensões e deformações são constantes ao longo da espessura
- Acções: Gravidade , Temperatura , Pressão em Faces Laterais ,
- Integração Numérica de 8 nós (não indica qual o tipo de integração (?))
- Calcula as tensões nos pontos de Gauss e extrapola para os nós (2, 2 Gauss)
- Recomenda usar elementos de NOVE NÓS



ELEMENTO SÓLIDO (SOLID)

- modela elementos tridimensionais
- 8 nós
- Formulação isoparamétrica
- Acções: Gravidade , Temperatura , Pressão em Faces Laterais ,
- Integração Numérica de 2x2x2 Gauss
- Calcula as tensões nos pontos de Gauss e extrapola para os nós

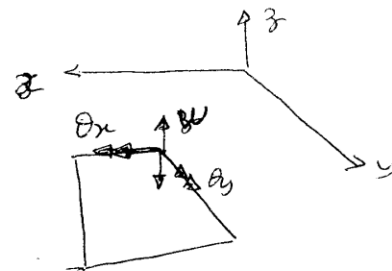
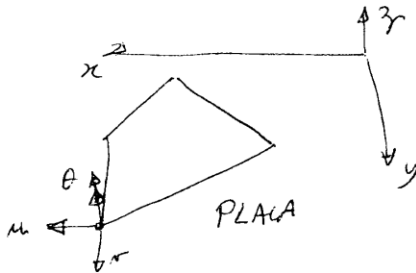


ELEMENTO CASCA (SHELL)

- combina separadamente comportamento de PLACA e de LAJE
- os nós podem ser NÃO coplanares
- PLACA : - indicar graus de liberdade u, v, θ normal
- LAJE : - indicar graus de liberdade w, θ_x, θ_y

- CASCA (tanques, abóbodas, lajes planas inclinadas, etc)
- PLACA : (paredes) MEMBRANE
- LAJE : (lajes de piso) PLATE

- Matriz de rigidez é obtida com 8 pontos de integração
- As tensões (esforços=integral de tensões) é calculada em coordenadas locais nos 2x2 pontos de Gauss e extrapoladas para os nós do elemento
- uma forma de medir o erro é comparar os valores nodais (esforços) num nó comum a vários elementos
- Acções: gravidade , cargas uniformes , pressão de topo e lateral, variação de temperatura.



AJUDA para elaboração de malha a partir do SAP

- acertar unidades
- New Model > Wall
- construir a malha com as ferramentas do SAP
- "ver nome dos nós e elementos":
 - Botão friso Set Display option
 - Joints > labels OK
 - Areas > labels OK
- "ver tabelas com coordenadas de nós e incidências"
 - Botão friso Display > Show Tables >
 - Connectivity Data OK
 - "Guardar as tabelas em Excel"
 - friso "File" > export all tables > to Excel

UAUHHHH !..... YES !

Agora certifica se está bem e apaga o que está a mais.