

**Universidade do Algarve
Unidade de Ciências Exactas e Humanas**

Uso da FFT em Estruturas Radiantes Unidimensionais

Ana Cristina Esperança Pereira do Ó Ramos

**Dissertação para obtenção do grau de mestre em
Engenharia de Sistemas e Computação**

Outubro 1997

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
SERVIÇO DE DOCUMENTAÇÃO

912198 | 22370

CO4.Y

RAM#VSO

1

**Universidade do Algarve
Unidade de Ciências Exactas e Humanas**

**Uso da FFT em Estruturas Radianes
Unidimensionais**

Ana Cristina Esperança Pereira do Ó Ramos

**Dissertação para obtenção do grau de mestre em
Engenharia de Sistemas e Computação**

Outubro 1997

Tese realizada sob orientação do:

Doutor Eng. António Manuel E. S. Casimiro

Professor Auxiliar com Agregação e Nomeação Definitiva
da
Unidade de Ciências Exactas e Humanas
da
Universidade do Algarve

Declaro sob compromisso de honra que a presente tese é original.

Ana Cristina Esperança Pereira do Ó Ramos

Agradecimentos

Ao Prof. António Casimiro pela sua valiosa orientação, encorajamento e revisão deste texto.

À Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Algarve pelas facilidades concedidas.

À Unidade de Ciências Exactas e Humanas pela realização do mestrado.

Este trabalho decorreu sob o enquadramento do programa PRODEP, Acção 5.2 - Formação Avançada para o Ensino Superior que apoiou financeiramente a sua execução.

Sumário

A presente dissertação debruça-se sobre o uso da FFT (Fast Fourier Transform) em estruturas radiantes unidimensionais. Assim, pretende-se nomeadamente averiguar as condições de aplicação da FFT na análise e síntese de agrupamentos de antenas relacionando-os com os seus diagramas de radiação, verificar os erros cometidos devido à sua aplicação, preparando também o caminho para futuras utilizações em estruturas bidimensionais e tridimensionais.

São apresentados alguns exemplos de aplicação dos programas para a análise e síntese de agrupamentos de antenas que foram desenvolvidos usando a FFT no programa MATLAB.

Abstract

This work deals with the use of the FFT (Fast Fourier Transform) on one-dimensional antenna arrays. It was studied the conditions of application of the FFT in analysis and synthesis problems of an array of antennas, relating them with the radiation pattern, to verify the errors involved and to verify the possibility of using this technique for future utilizations on two-dimensional and three-dimensional arrays.

There are presented some examples using the programs developed in this work, using the program MATLAB, that deal with the analysis and synthesis problems of antenna arrays.

Lista de símbolos

freq - frequência de alimentação (Hz)

$\lambda = 3 \times 10^8 / \text{freq}$ - comprimento de onda no vazio

$$\beta_0 = 2\pi / \lambda$$

θ - ângulo em coordenadas polares

φ - ângulo em coordenadas polares

$$\beta = \beta_0 \cos \theta$$

F - Operador que realiza a Transformada de Fourier

N - número de antenas

C (ou modcor) - módulo das correntes (A)

FASE (ou fasecor)- fase das correntes (rad)

cor - correntes com módulo e fase

DX - distância de cada antena à origem (m)

d - distância entre antenas (m)

B - o mesmo que β_0

n - número de pontos da IFFT

m - vector correspondente aos pontos onde a IFFT vai ser calculada

beta - variável que representa o β

z - valores obtidos pelo cálculo da IFFT

alpha - factor de agrupamento, valores de z correspondentes à janela $-\beta_0$ a β_0

theta - ângulo que corresponde a: $\theta = \arccos(\beta/\beta_0)$, usado para desenhar o diagrama polar do factor de agrupamento

Índice

1 - Introdução.....	1
2 - Enquadramento da Análise e Síntese de Agrupamentos de Antenas.....	4
2.1 - Análise.....	4
2.2 - Síntese.....	6
3 - Resumo da Pesquisa Bibliográfica.....	7
3.1 - Introdução.....	7
3.2 - Resumo dos trabalhos.....	7
3.3 - Conclusão.....	23
4 - Processamento com a FFT.....	25
4.1 - Análise.....	25
4.2 - Síntese.....	31
4.3 - Erros cometidos.....	34
4.3.1 - Erros na análise.....	34
4.3.2 - Erros na síntese.....	35
5 - Exemplos de aplicação.....	37
5.1 - Análise.....	37
5.2 - Síntese.....	45
6 - Conclusão e desenvolvimentos futuros.....	52
Anexo A - A FFT.....	53
1 - Introdução.....	53
2 - Definição e algumas propriedades.....	53
2.1 - Sinais discretos.....	54
2.2 - Sinais contínuos.....	56
Anexo B - Programa para a análise.....	60
Anexo C - Programa para a síntese.....	68
Bibliografia.....	72

1 - Introdução

Como é sabido, não se conseguem normalmente só com uma antena certas características de radiação, pelo que se torna necessário juntar várias num agrupamento de antenas a fim de melhor poder aproximar as características desejadas.

O campo total do agrupamento é determinado pela adição dos campos radiados pelos elementos individuais. Por exemplo, para se conseguirem diagramas de radiação bastante directivos é necessário que os campos dos elementos interfiram construtivamente nas direcções desejadas e que interfiram destrutivamente nas restantes direcções.

Num agrupamento de elementos idênticos existem 5 maneiras de controlar o diagrama de radiação desse agrupamento e que são:

- a configuração do agrupamento (linear, circular, rectangular, etc.),
- a distância entre os vários elementos,
- a amplitude da corrente de excitação dos elementos,
- a fase da corrente de excitação,
- o diagrama de radiação dos elementos individuais.

Foi demonstrado por vários autores [15, 18] que, em determinadas condições, é possível apresentar o campo total do agrupamento de elementos individuais na forma:

$$E(\text{total}) = E(\text{1 elemento num ponto de referência}) * \text{Factor de agrupamento}$$

O trabalho desta dissertação decorre dentro dessas condições.

O factor de agrupamento, em geral, depende do número de elementos, da sua distribuição em termos espaciais, das amplitudes e fases relativas da corrente e também do seu distanciamento.

No nosso estudo vamos considerar um agrupamento de antenas iguais, unidireccional, discreto, com igual distância entre elementos adjacentes e com qualquer amplitude e fase de corrente de excitação.

A presente dissertação debruça-se sobre o uso da FFT (Fast Fourier Transform) neste tipo de agrupamentos. Assim, pretende-se nomeadamente averiguar as condições de aplicação da FFT na análise e síntese, verificar os erros cometidos devido à sua aplicação, preparando também o caminho para futuras utilizações em estruturas com maior número de dimensões.

A grande vantagem do uso da FFT prende-se com o facto de que durante anos foram optimizados algoritmos em Processamento do Sinal de modo a que os cálculos feitos usando esta ferramenta, quando possível, são menos pesados e demorados que os métodos convencionais, sendo este facto mais notório, no caso desta dissertação, quanto maior o número de antenas envolvido.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

Neste capítulo, que é a introdução, foi indicado o objectivo geral deste trabalho.

No capítulo 2 é feito, dentro do âmbito desta dissertação, um enquadramento da análise e síntese de agrupamentos de antenas.

No capítulo 3 é feito um resumo da pesquisa bibliográfica feita com o intuito de determinar o estado actual dos conhecimentos relativos ao uso da FFT na propagação e radiação, com particular interesse no âmbito deste trabalho.

O 4º capítulo apresenta a utilização da FFT em problemas de análise e síntese no âmbito desta dissertação. Neste capítulo são dadas também algumas explicações sobre a maneira como foram desenvolvidos os dois programas para fazer a análise e a síntese de agrupamentos de antenas usando o Programa MATLAB.

No capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de aplicação dos programas referidos anteriormente e comparados com o processo clássico de soma directa..

Por fim, no capítulo 6 são feitas algumas considerações sobre desenvolvimentos futuros, nomeadamente sobre a possibilidade de se usar a FFT em estruturas bidimensionais e tridimensionais.

Em anexo, no final deste trabalho, encontra-se um pequeno capítulo onde se relembra a definição da FFT bem como algumas das suas propriedades. Também são apresentadas as listagens dos dois programas para o cálculo da análise e da síntese de agrupamentos lineares de antenas igualmente espaçadas, desenvolvidos no âmbito desta dissertação.

2 - Enquadramento da Análise e Síntese de Agrupamentos de Antenas

Neste capítulo, a análise e síntese de Diagramas de Radiação criados por agrupamentos de antenas são enquadradas nos objectivos dos trabalhos desta dissertação.

2.1 - Análise

A análise de agrupamentos de antenas consiste em calcular o diagrama de radiação desse mesmo agrupamento do qual se sabe o número de antenas que o constitui, a distribuição espacial, o tipo de excitação a que as mesmas estão sujeitas (módulo e fase da corrente eléctrica que alimenta as antenas) e a frequência de trabalho.

O Diagrama de Radiação pode ser definido relativamente aos campos ou relativamente à potência (vector de Pointing), sendo tomado como referência, em qualquer dos casos, o campo eléctrico máximo. Assim, se o diagrama for definido relativamente aos campos, será dado pela expressão:

$$\frac{|E(\theta, \varphi)|}{|E_{\max}|} \quad (2.1)$$

e se for definido relativamente à potência:

$$\frac{S(\theta, \varphi)}{S_{\max}} = \frac{\left| \frac{E^2(\theta, \varphi)}{Z_0} \right|}{\left| \frac{E_{\max}^2}{Z_0} \right|} = \frac{|E^2(\theta, \varphi)|}{|E_{\max}^2|} \quad (2.2)$$

(Z_0 : impedância no vazio - S : módulo do vector de Pointing)

Nesta dissertação lidamos com o primeiro caso.

Em qualquer dos casos, e segundo um determinado plano, através do diagrama de radiação podemos ver a variação relativa do campo radiado conforme o ângulo θ . É fácil de ver que os valores máximo e mínimo do diagrama de radiação são respectivamente 1 e 0.

Como o nosso estudo vai incidir em estruturas radiantes unidimensionais, vamos considerar que os nossos agrupamentos de antenas vão estar sempre segundo um mesmo eixo, distanciadas da mesma distância d e que as antenas são todas iguais, embora possam estar alimentadas por correntes de valor diferente. O facto de serem considerados apenas agrupamentos em que a distância entre as antenas que o constituem ser sempre igual, é uma restrição que resulta de estarmos a estudar o caso da aplicação da FFT. Como é sabido, na FFT os pontos estão distanciados de $2\pi / N$ pois são obtidos de uma amostragem equidistante de N pontos (ver figura 1 do Anexo A). Existe liberdade na escolha do número de pontos da amostragem (N) mas depois que este é definido, o intervalo entre amostras é sempre constante.

Nos agrupamentos a que esta dissertação se refere, o campo eléctrico total é dado por:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_r \cdot F_A \quad (2.3)$$

com \vec{E}_r o campo de referência, ou seja, o campo de uma das antenas que se vai considerar como estando na origem e F_A o factor de agrupamento que vai depender de como as antenas estão alimentadas relativamente à antena de referência.

2.2 - Síntese

No que diz respeito à síntese de agrupamentos, o problema em estudo pretende determinar o número de antenas necessário e o módulo e fase das correntes de alimentação, assumindo um espaçamento entre antenas de $\lambda/2$ por razões mais adiante apresentadas. Assim, conforme a expressão 2.3:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_r \cdot F_A$$

no caso da síntese, conhecemos o \vec{E}_T e, decidido qual o tipo de antena de referência (\vec{E}_r), necessitamos determinar o factor de agrupamento através de:

$$F_A = \frac{|\vec{E}_T|}{|\vec{E}_r|} \quad (2.4)$$

para o qual se usará a FFT.

3 - Resumo da Pesquisa Bibliográfica

3.1 - Introdução

Com o intuito de actualizar os conhecimentos relativos ao uso da FFT nos estudos da radiação, foi feita uma pesquisa bibliográfica nas bibliotecas do Instituto Superior Técnico em Lisboa e da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Algarve (embora nesta última não exista praticamente bibliografia sobre o assunto) e também na Internet. Foram encontrados trabalhos que usavam a FFT na radiação mas, com excepção dos do orientador, o uso da FFT era feito com um fim e de forma diferente dos objectivos dos trabalhos desta dissertação. Mesmo assim, a fim de documentar resumidamente, de modo tão exaustivo quanto possível a utilização da FFT na resolução de problemas no campo da Radiação encontrada na bibliografia, de seguida é apresentado um resumo de alguns dos trabalhos encontrados. Os restantes trabalhos encontrados dos quais nem sequer é aqui apresentado um resumo, encontravam-se ainda mais longe dos objectivos desta dissertação.

3.2 - Resumo dos trabalhos

1 - "Application of the Fast Fourier Transform to the Computation of the Sommerfeld Integral for a Vertical Electric Dipole Above a Half-Space" [8]

No artigo é desenvolvida uma nova técnica para o cálculo do integral de Sommerfeld associado com um dipolo eléctrico Hertziano vertical. O tipo de geometria usada foi a ilustrada na figura 1.

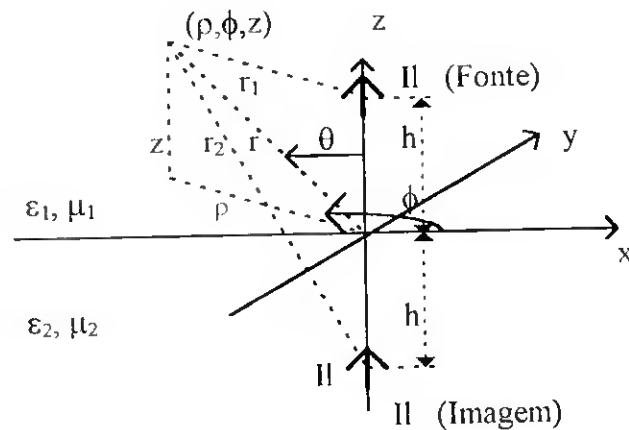


Fig. 1 - Geometria e sistema de coordenadas para um dipolo eléctrico vertical

Se o potencial eléctrico de Hertz é aplicado conjuntamente com a condição de Lorentz, verificam-se as seguintes equações ao serem usadas as equações de Maxwell:

$$(\nabla^2 + k_i^2) \Pi_e^{(i)} = -\frac{J}{j\omega\epsilon_i} \quad \left(\text{com } i = \begin{cases} 1; z > 0 \\ 2; z < 0 \end{cases} \right)$$

$$H^{(i)} = j\omega\epsilon \nabla \times \Pi_e^{(i)} \quad (3.1)$$

$$E^{(i)} = (\nabla\nabla \cdot + k_i^2) \Pi_e^{(i)} \quad (3.2)$$

com :

$$k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i\mu_i}$$

Para um dipolo vertical Hertziano caracterizado por: $\mathbf{J} = a_z \delta(x) \delta(y) \delta(z-h)$, os campos na região 1 podem ser dados em termos de:

$$\Pi_c^{(1)} = a_z \frac{H}{j\omega\epsilon_1} [g(r_1) - g(r_2) + {}_o\Pi_{vz}] \quad (3.3)$$

onde $g(r) = e^{-jk_1 r} / (4\pi r)$ é a função de Green em espaço livre e

$${}_o\Pi_{vz} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty \left[\frac{\epsilon_2 \tau_1}{\epsilon_2 \tau_1 + \epsilon_1 \tau_{21}} \right] J_0(\lambda \rho) e^{-j\tau_1(z-h)} \frac{\lambda}{\tau_1} d\lambda \quad (3.4)$$

$$\tau_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$$

é o integral de Sommerfeld que necessita ser calculado.

O artigo baseia-se no uso da FFT em conjunto com técnicas analíticas para obter uma expressão aproximada de (3.4). A ideia básica é aproximar a parte do integral que varia lentamente (ou seja, a que está entre parêntesis) usando a FFT.

Como a expressão resultante é uma função analítica da localização da fonte e das observações, as componentes dos campos podem depois ser calculadas por aplicação directa de (3.1) e (3.2).

A aplicação da FFT ao integral de Sommerfeld é feita usando mudanças de variável e simplificações da expressão (3.4). A Transformada de Fourier é aplicada a duas funções de variação lenta deste integral e atendendo às suas formas, a transformada que é usada é a FFST (Fast Fourier Sine Transform) pois é feito um desenvolvimento em série usando a função seno.

Depois de se ter uma expressão aproximada de (3.4) através do uso da FFST, o artigo apresenta um exemplo onde são confrontados os valores obtidos para este tipo de aproximação e os obtidos através do uso de um algoritmo de integração numérica. São também analisados os efeitos da escolha do número de termos usados na FFST na exactidão da aproximação feita.

A FFT aparece assim como uma ferramenta para calcular um integral e o artigo não se enquadra nos objectivos dos trabalhos desta dissertação.

2 - “Application of the Discrete Fourier Transform Method to Thin Dielectric Structures” [9]

O artigo foca o facto de que o DFTM (Método de Transformada de Fourier Discreta) é uma técnica numérica que pode ser aplicada de uma forma vantajosa na resolução das equações diferenciais-integrais que surgem na radiação electromagnética. Este método usa a FFT para calcular as derivadas e os integrais de convolução.

O artigo apresenta resultados em lâminas resistivas e em “slabs”(estruturas dieléctricas finas) usando o referido método.

Os resultados mostram que através da escolha de condutividade e espessura apropriadas para uma estrutura dieléctrica, esta estrutura pode comportar-se como uma lâmina metálica ou resistiva.

O artigo também refere que sendo o DFTM uma técnica do domínio das transformadas, ele é vantajoso relativamente a técnicas similares no que diz respeito a simplicidade, exactidão e necessidade de memória de computador.

No que se refere aos objectivos dos trabalhos desta dissertação, também este artigo não se lhes enquadra.

3 - "The Use of the FFT for the Efficient Solution of the Problem of Electromagnetic Scattering by a Body of Revolution" [10]

O trabalho refere-se à radiação de um corpo de revolução (BOR) que é um objecto de 3 dimensões que roda simetricamente em torno de um único eixo. É considerado o problema da radiação electromagnética de um BOR perfeitamente condutor.

Em geral, é a geração dos elementos da matriz do Método dos Momentos que consome a maior porção do tempo de computação. No artigo é mostrado que esse tempo pode ser reduzido significativamente através da manipulação da expressão dos elementos da matriz de modo a permitir o seu cálculo de uma forma eficiente através

do uso da FFT. É também apresentada uma técnica de forma a extrair a singularidade da função de Green que surge nos integrandos da diagonal da matriz e que vai realçar a utilidade da FFT. Como resultado verifica-se que o tempo de computação usando a FFT é bastante reduzido relativamente ao uso de outros algoritmos.

Mais uma vez, este artigo não se enquadra nos objectivos dos trabalhos desta dissertação.

4 - “The Relationship Between Tapped Delay-Line and FFT Processing in Adaptive Arrays” [11]

Um problema importante em agrupamentos adaptativos é o de que a sua performance se deteriora com a largura de banda de interferências, sendo tanto mais difícil o agrupamento anula-la quanto mais larga for a largura de banda do sinal de interferência.

No artigo são analisadas as relações SINR (signal-to-interference-plus-noise rate) para vários métodos que provocam um melhoramento da performance da largura de banda de um array adaptativo.

A FFT neste trabalho é usada porque um desses métodos consiste em usar FFTs depois dos elementos do array. A figura 2 ilustra este método.

À saída de cada elemento do array existe um conversor A/D que amostra o sinal recebido. Quando houverem k amostras de cada elemento, estas são transformadas com uma FFT e obtêm-se assim k amostras no domínio das frequências para cada elemento. Em seguida, cada uma destas amostras no domínio das frequências é multiplicada por um peso (uma constante) e adicionada com as amostras correspondentes de outros elementos, que tiveram exactamente o mesmo tratamento. Por fim, para se obter o array das amostras de saída no domínio dos tempos, é calculada a IFFT (FFT inversa) das amostras no domínio das frequências.

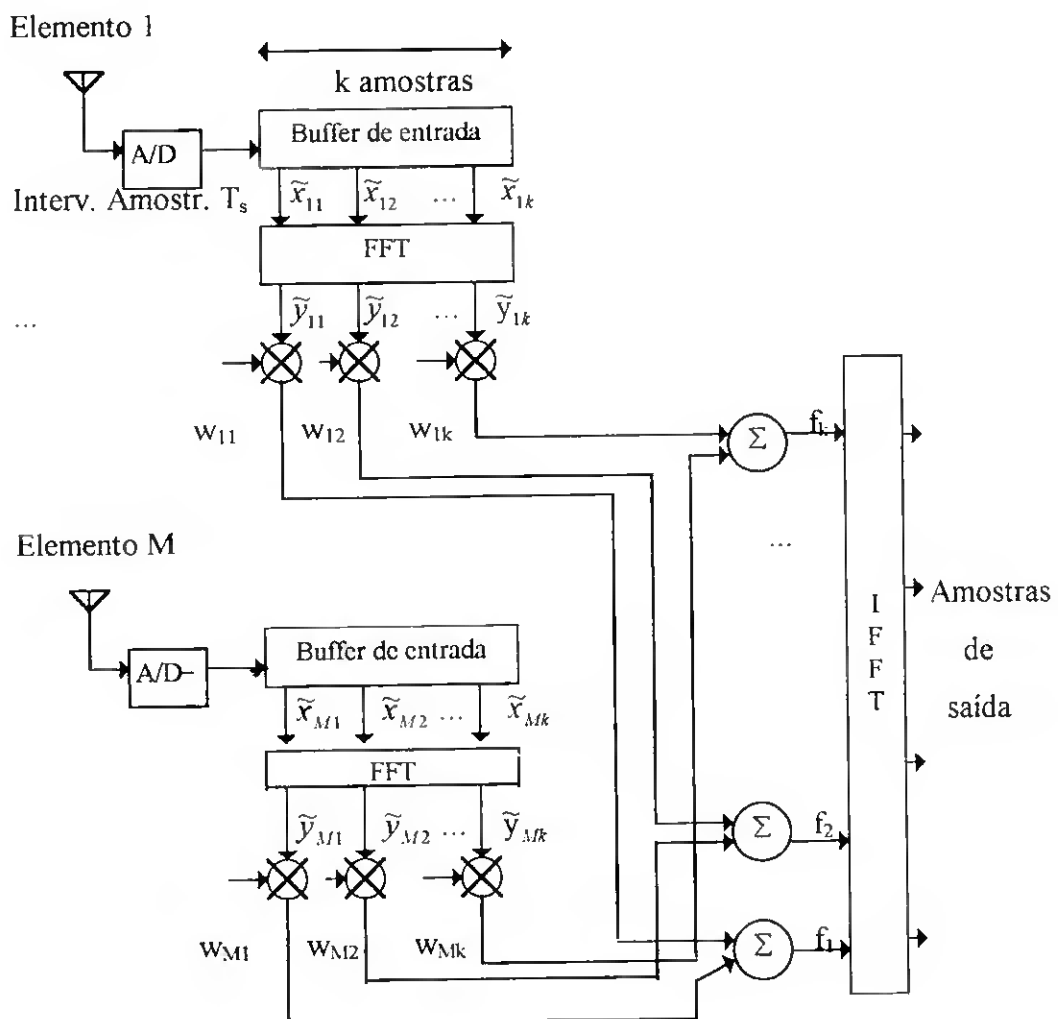


Fig.2 - Array adaptativo usando FFT

Como a FFT divide a largura de banda do sinal em sub-bandas mais pequenas e como podem ser aplicados pesos diferentes às várias amostras no domínio das frequências, o array pode compensar de uma forma diferente cada sub-banda. No entanto, ao longo do artigo são também estudadas outras possibilidades de estruturas e os autores acabam por concluir que o processamento com a FFT em si, não oferece qualquer melhoramento na performance da largura de banda do agrupamento relativamente a outras possibilidades de estruturas.

É assim um artigo que está mais relacionado com o Processamento de Sinal que com a radiação.

Os próximos três artigos referenciam a FFT integrada no método: Conjugate Gradiente-FFT:

5 - “Improving the Convergence Rate of the Conjugate Gradient FFT Method Using Subdomain Basis Function” [12]

Muitas das equações integrais que surgem no estudo da radiação electromagnética envolvem um integral de convolução cuja forma tipicamente é:

$$E^i(r) = \overline{\eta}(r) \cdot J(r) + \int_{v'} \overline{\Gamma}(|r-r'|) \cdot J(r') dv' \quad (3.5)$$

onde E^i é o campo de excitação, J o vector densidade de corrente que é desconhecido, $\overline{\Gamma}$ é a função de Green associada e $\overline{\eta}$ é algum tensor específico da geometria do problema.

(3.5) pode também ser escrita na forma: $A[J] = E^i$ (3.6)

O Método dos Momentos (M M) tem sido tradicionalmente aplicado a (3.6) o que envolve a discretização do operador depois de se introduzir uma expansão da corrente usando funções de base e sendo os coeficientes dessa expansão calculados através de um processo de inversão de matrizes. A capacidade de memória e o tempo gasto no processamento computacional e ainda a formulação numérica necessária para sistemas grandes limitam, no entanto, a aplicação do M M. Daí que fossem tentados novos processos o que deu origem ao desenvolvimento do método CG-FFT.

O Método do Gradiente Conjugado é um método não linear e semidirecto pois a solução vai sendo melhorada de iteração para iteração e na maioria das vezes, é mesmo possível obter a solução exacta num número finito de passos.

Como no domínio espectral a convolução corresponde a uma simples multiplicação, combinando este método com a FFT é possível reduzir os cálculos computacionais pois deixa de se calcular o integral de convolução para se fazer uma simples multiplicação no domínio espectral.

Se a Transformada de Fourier directa e inversa forem definidas para uma dimensão como:

$$\tilde{g}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-jk_x x} dx \quad (3.7)$$

$$F^{-1}\{\tilde{g}(k_x)\} = g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (3.8)$$

então (3.5) pode ser escrita de forma alternativa como:

$$E' = \overline{\eta} \cdot J + F^{-1}\{\overline{\Gamma} \cdot \tilde{J}\} \quad (3.9)$$

Claramente, (3.9) evita a criação da matriz quadrada correspondente a A e isso implica uma necessidade de armazenamento de $O(N)$ comparada com $O(N^2)$ que era a necessária para o M M. Esta economia de memória permite a aplicação do método para sistemas grandes.

O artigo apresenta uma técnica para melhorar a convergência do CG-FFT. Para o efeito a corrente é primeiramente expressa como a convolução de uma base subseccional (são usadas funções de base de subdomínios para representar a corrente desconhecida) escolhida com uma sequência finita de funções delta cujas amplitudes são os valores amostrados da corrente. Ao usar esta representação em conjunto com o teorema de convolução, a formulação do CG-FFT é estendido para funções de base gerais.

Não se relaciona também com os objectivos em vista nesta dissertação.

6 - "Application of the FFT and the Conjugate Gradient Method for the Solution of Electromagnetic Radiation from Electrically Large and Small Conducting Bodies" [13]

O trabalho estuda os problemas da radiação electromagnética de antenas filamentosas e de placas rectangulares condutoras resolvendo-os através do uso do método CG-FFT. É referido que o tempo de computação é muito menor do que quando é usado o método CG convencional. Para um problema de complexidade N esse tempo no método CG convencional é proporcional a N^3 enquanto no método CG-FFT é proporcional a $4 N (1 + \log_2 N)$. Assim, radiadores electricamente grandes podem ser analisados num muito menor tempo de processamento da CPU.

Além disso, como algumas derivadas com respeito às coordenadas espaciais são substituídas por multiplicações no domínio das transformadas, algumas das dificuldades computacionais deixam de existir e as estruturas electricamente pequenas podem ser tratadas de uma forma mais simples. Por fim, como o processo é iterativo, é possível saber a exactidão da solução em cada iteração.

O artigo apresenta resultados para dois tipos de radiadores: em espira e placas quadradas, em ambos os casos, quer para radiadores pequenos quer para grandes.

7 - "Spectral Analysis of Microstrip Antennas with CG-FFT: Two-Dimensional Results" [14]

O artigo investiga as várias correntes numa antena embutida com alimentação coaxial e examina a importância das correntes superficiais no topo e na base, na performance da antena. São formuladas equações para a corrente total numa antena

embutida e são estabelecidas relações entre várias correntes superficiais e campos distantes em termos desta corrente total.

No trabalho são obtidos resultados numéricos para estas quantidades, para duas dimensões, usando o método CG-FFT. Além disso, são comparados valores da admitância da abertura com resultados obtidos usando outros métodos.

Não tem também enquadramento nos trabalhos da dissertação.

8 - "FFT Antenna Design Analysis"[1]

Na secção são desenvolvidos os fundamentos para aplicar a FFT à análise de uma antena e é apenas considerado o caso de aberturas unidimensionais.

É dado o exemplo da distribuição do campo eléctrico de uma antena unidimensional, como ilustrado na figura 3 e é estabelecida a analogia entre a fórmula para o cálculo do diagrama de radiação em função de θ , com θ medido desde a perpendicular até à distribuição da abertura, e a fórmula de uma Transformada de Fourier.

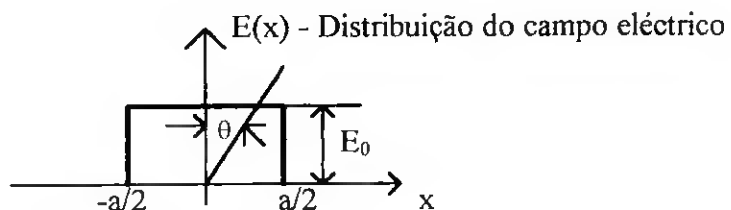


Fig. 3 - Distribuição do campo eléctrico

O diagrama de radiação em função de θ é dado por:

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) e^{-j 2\pi x (\sin\theta) / \lambda} dx \quad (3.10)$$

Assim, pode-se considerar que a dimensão da abertura (x) é equivalente ao tempo (t) e que a função de direcção $(\sin \theta)/\lambda$ é equivalente à frequência (f) da Transformada de Fourier convencional.

O livro alerta também para o facto de que é necessário interpretar correctamente as equivalências anteriormente referidas devido ao facto da variável f ser definida desde $-\infty$ até $+\infty$ enquanto a variável θ (referente a $(\sin \theta)/\lambda$) ser periódica com período 2π . Isto vai fazer com que apenas se possam considerar alguns valores de f .

Em seguida, para ilustrar este raciocínio, é feito o cálculo da Transformada de Fourier da função ilustrada na figura 3:

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j 2\pi f t} dt = \frac{E_0 [\sin(\pi a f)]}{\pi a f} \quad (3.11)$$

e é calculado o diagrama de radiação em função de θ , já definido anteriormente em (3.10) e cujo resultado é:

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[\pi a (\sin\theta) / \lambda]}{\pi a (\sin\theta) / \lambda} \quad (3.12)$$

Para desenhar o diagrama de radiação é necessário relacionar a dimensão da abertura da antena (a) com a frequência de trabalho da mesma. No exemplo do livro foi considerado que $a = 2\lambda$.

Ao comparar os resultados (3.11) e (3.12) verifica-se que enquanto (3.11) está definida para valores de frequência entre $-\infty$ e $+\infty$, o diagrama de radiação definido por (3.12) é periódico no intervalo -90° a 90° . Então, quando se comparam os dois resultados, verifica-se que é necessário truncar os resultados da Transformada de Fourier convencional para serem convertidos nos resultados de (3.12).

Para determinar o factor de conversão apropriado, bem como o valor de corte para a frequência, é necessário atender às equivalências anteriormente referidas, isto é:

$$x = t$$

$$(\sin \theta) / \lambda = f \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1}(f\lambda)$$

Assim, para o exemplo referido no livro temos que, como o máximo valor não periódico de θ é 90° , o valor de corte de f ocorre para $f\lambda = 1$, o que corresponde a $f = 2\text{Hz}$ pois no exemplo $a = 1$ e $\lambda = a/2$.

Conclui-se então que para os valores do exemplo considerado, para se obter o diagrama de radiação, basta calcular a Transformada de Fourier da distribuição do campo eléctrico dada, considerar valores de frequência apenas até ao valor de 2Hz e fazer a conversão de f para θ através da relação: $\theta = \sin^{-1}(f\lambda)$ (3.13)

A secção termina com a indicação de que para aplicar a FFT no cálculo do diagrama de radiação de antenas apenas é necessário implementar os princípios básicos referidos anteriormente. Isto é, considera-se a distribuição do campo eléctrico como

uma função no domínio dos tempos, calcula-se a sua FFT e aplica-se em seguida o factor de escala apropriado para a conversão das variáveis dado por (3.13). É ainda apresentado um exemplo com valores concretos mas os resultados são apresentados através de figuras, sem que se indiquem cálculos mais detalhados.

É, no entanto um trabalho que está mais relacionado com os objectivos dos trabalhos desta dissertação.

9 - "FFT for Radiation Pattern Analysis and Synthesis"[17]



Este artigo é a base do trabalho desta dissertação.

É usado o facto de, com uma representação conveniente e em determinadas condições, existir sempre uma relação de Fourier entre o diagrama de radiação de uma distribuição espacial de fontes radiantes e essa mesma distribuição. Essa relação é uma janela na Transformada espacial de Fourier inversa dessa distribuição. O artigo também diz que em alguns casos, quando nos problemas de síntese para gerar o campo distante desejado existe uma distribuição infinita de fontes, é necessário, por questões de ordem prática, eliminar algumas fontes.

Nos casos em que é necessário modificar a distribuição de fontes de modo a torná-la finita, como referido anteriormente, é necessário ter um certo cuidado com os erros cometidos e exigir que eles se mantenham dentro de uns certos limites pois ao fazer

esta modificação na distribuição de fontes, vai haver também uma alteração no diagrama de radiação.

Para se fazer com que o diagrama de radiação seja uma função periódica, uma maneira possível é através da amostragem da distribuição de fontes (figura 4).

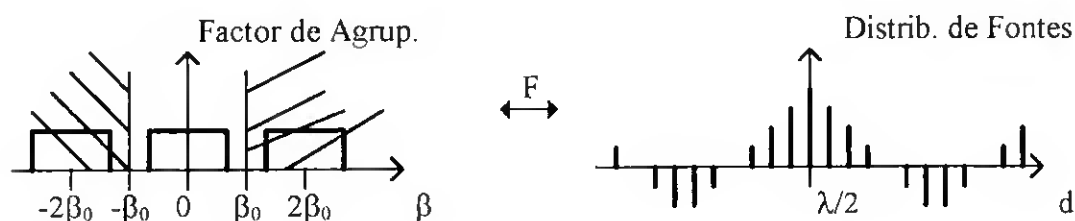


Fig. 4 - Relação entre factor de agrupamento e distribuição de correntes

Isto acontece porque para amostrar a distribuição de fontes pode-se multiplicá-la por uma função com impulsos de Dirac e como a Transformada de Fourier deste tipo de função é ainda uma função com impulsos de Dirac e também porque a multiplicação num dos domínios corresponde à convolução no outro domínio, o resultado é a repetição do factor de agrupamento de modo a ficar uma função periódica.

Desde que a amostragem da distribuição de fontes seja feita a uma distância de $\lambda/2$ ou menos, o factor de agrupamento vai ter um período de $2\beta_0$ ou mais.

De modo análogo, também é possível tornar periódica a função relacionada com a distribuição espacial de fontes, o que vai fazer com que a função relacionada com o diagrama de radiação seja amostrada.

Atendendo a que ambas as funções são discretas, periódicas e estão relacionadas pela Transformada de Fourier, é possível usar a FFT para fazer a análise e a síntese do agrupamento em causa, sendo o número de amostras imposto por limitações espaciais das fontes (figura 5).

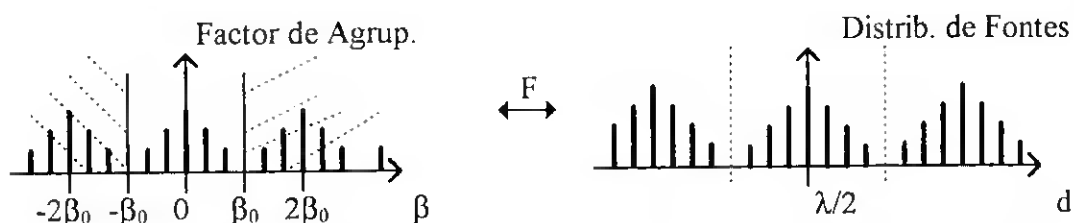


Fig. 5 - Factor de agrupamento e distribuição de correntes discretas e periódicas

Quando a distribuição de fontes é limitada, é possível usando a relação de Fourier, simular a periodicidade da distribuição de fontes riantes e do factor de agrupamento de modo a tornar possível usar a FFT.

3.3 - Conclusão

Pelos resumos anteriores dos trabalhos encontrados na área da propagação e radiação verificou-se que, à excepção do trabalho (9) que é do orientador, neles o uso da FFT era feito com um fim e de forma diferente da pensada nesta tese. Excluindo o (9), o trabalho (8) é aquele que mais se aproxima do tipo de estudo que se pretende com esta tese mas, mesmo assim, apenas se refere à análise para uma só antena de abertura (distribuições contínuas), não fazendo qualquer estudo relativamente à síntese

nem considerando agrupamentos de antenas. Além disso, como referido anteriormente, os resultados práticos são apresentados apenas através de figuras, sem que se indiquem cálculos mais detalhados.

Assim se justifica um trabalho de processamento com a FFT nas condições referidas anteriormente, que deu origem a esta dissertação.

4 - Processamento com a FFT

4.1 - Análise

Para ser possível determinar o factor de agrupamento de um agrupamento de antenas, em primeiro lugar é necessário saber qual é o número de antenas de que este é constituído, saber qual é a distância entre as antenas, a forma como elas estão dispostas (no nosso caso a disposição é linear), a frequência de trabalho e a corrente de alimentação (em módulo e fase) de cada uma das antenas, como já foi referido anteriormente no capítulo 2.

Depois de se saberem estes dados temos informação de qual é a distribuição de correntes e assim, atendendo à Relação de Fourier referida em [16] onde foi demonstrado que a relação entre a distribuição de correntes e o diagrama de radiação é a transformada espacial de Fourier, aplicando a Transformada de Fourier Inversa tem-se o diagrama de radiação da distribuição em função da variável β . Desta distribuição apenas se considera a janela compreendida entre $-\beta_0$ e β_0 (fig. 1), devido à relação:

$$\beta = \beta_0 \cos \theta \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

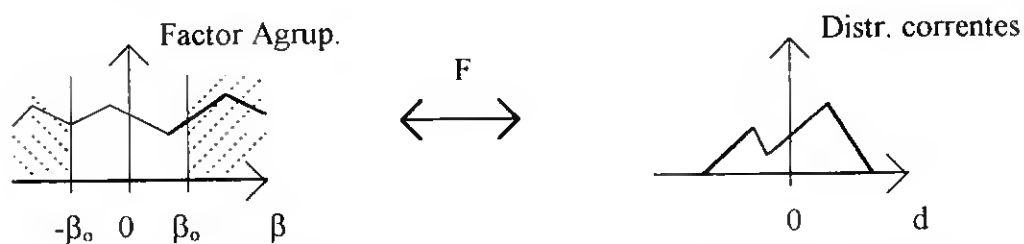


Fig. 1 - Relação entre factor de agrupamento e distribuição de correntes

Para ser possível traçar o diagrama de radiação em coordenadas polares é necessário fazer a conversão da variável β para a variável θ . Esta conversão é feita através da relação: $\beta = \beta_0 \cos \theta$, já referida anteriormente.

A função alpha (nome que dei à variável que corresponde ao factor de agrupamento), obtida ao ter-se aplicado a Transformada de Fourier Inversa à distribuição de correntes em função da distância, apenas corresponde à variação de θ entre 0 e π . A variação de π a 2π é obtida através do facto de se saber que o diagrama de radiação é simétrico.

Nos trabalhos de análise, nesta dissertação para a representação da Relação de Fourier usou-se a FFT, incluída na ferramenta computacional utilizada: o MATLAB. Recorrendo à Toolbox de Processamento de Sinal, foi utilizada a função IFFT (x, n) pré-definida nesta Toolbox. Esta função permite calcular a IFFT (FFT Inversa) com n pontos de uma função qualquer x.

Como o MATLAB apresenta o resultado desta função colocando o espectro relativo à parte que estaria à esquerda da origem depois da parte que estaria à direita, foi usada também a função fftshift (x) que troca os valores da função x de modo a que seja possível representar o espectro com os valores centrados em 0.

Outro pormenor também importante é o facto de ser necessário converter os valores onde a IFFT é calculada (no código apresentado no anexo B designado como

vector m), para a variável β pois o que se pretende é o factor de agrupamento da distribuição em função de β .

Esta conversão é feita usando a variável m e atendendo a que a relação entre a variável β e d é: $\beta = 2\pi / d$ conforme provado em [16].

Como foi referido anteriormente, para traçar o diagrama de radiação só interessam os valores que correspondam à janela entre $-\beta_0$ e β_0 , assim, dependendo da distancia d entre as antenas, vão haver valores que resultam do cálculo da IFFT que vão ser aproveitados e outros que não. No caso do valor de d ser o ideal, valor esse que corresponde a $d = \lambda / 2$, pois é o que permite obter o mesmo factor de agrupamento usando uma distribuição discreta com o menor número de antenas sem haver “aliasing”, como referido em [16], todos os valores calculados são usados no cálculo do factor de agrupamento. Se $d < d_{ideal}$, todos os valores calculados que correspondem a valores de β maiores que β_0 ou menores que $-\beta_0$, são desprezados e apenas os restantes são utilizados para o cálculo do diagrama.

No caso de $d > d_{ideal}$, como o MATLAB apenas representa n pontos da função periódica obtida pela IFFT e atendendo a que o intervalo de variação de β é:

$$\Delta \beta = 2\pi \Delta m / d = 2\pi / nd,$$

($\Delta m = 1/n$ com n o número de pontos da IFFT, que é o que define o intervalo de amostragem da função (anexo A))

se fosse usado exactamente o mesmo método de cálculo que para $d = d_{ideal}$, verificava-se que para um mesmo n , usando o MATLAB, não era possível visualizar toda a variação de β entre pelo menos $-\beta_0$ e β_0 , pois como o d era maior, a gama de variação do β , pela maneira como estava definida, era menor. Para ultrapassar este problema o que foi feito foi alterar a função que representa a distribuição de correntes de maneira a que a distância entre valores da corrente passasse para o dobro. Isto provoca na função transformada inversa uma repetição da curva que seria obtida com a distribuição de correntes “original” mas com uma variação de β de metade (fig. 2).

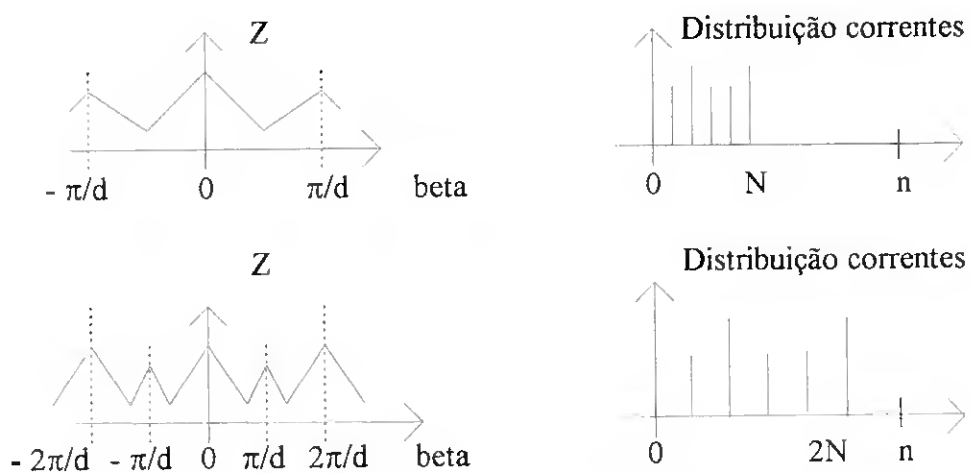


Fig. 2 - Efeito provocado ao “alargar” a distribuição de correntes

“Alargar” a distribuição de correntes corresponde a que Z fique “mais comprimida” e assim já é possível saber toda a variação desejada de Z e aplicar a janela de forma conveniente. Neste caso, no entanto, para que a parte “aproveitável” seja a correcta, é necessário adaptar a variável β ao raciocínio feito. Assim, em vez de $\beta = 2\pi m / d$, neste caso temos: $\beta = 4\pi m / d$.

Nota: Na figura 2 a função Z foi representada como sendo contínua apenas por uma questão de facilidade de representação porque na realidade esta função é discreta estando todos os pontos igualmente espaçados com intervalos de $2\pi/nd$, como referido anteriormente.

O valor usado para delimitar a janela é o mesmo: $\beta_0 = 2\pi f / c = 2\pi / \lambda$.

O valor escolhido para n deve preferencialmente ser uma potência de 2 de modo a que o MATLAB possa calcular mais rapidamente a IFFT, isto por questões internas ao próprio programa e que têm a ver com o tipo de algoritmo por este usado para o cálculo da transformada.

Outro factor que influencia também a escolha de n é o facto de se pretender desenhar o diagrama de radiação em coordenadas polares. Assim, é desejável que para um ângulo θ entre 0° e 180° se tivessem pelo menos 180 pontos (1 grau de resolução). Devemos ter então pelo menos 180 pontos no intervalo correspondente à janela utilizável que é de $2\beta_0 = 4\pi / \lambda$.

Como o intervalo entre dois pontos no eixo dos betas é dado por:

$$\Delta \beta = 2\pi \Delta m / d = 2\pi / nd$$

e considerando x como sendo o número de pontos (que queremos que seja $x \geq 180$) temos:

$$x \Delta \beta = 2\beta_0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi nd}{2\pi \lambda} \Leftrightarrow x = \frac{2nd}{\lambda}$$

Então:

$$\frac{2nd}{\lambda} \geq 180 \Leftrightarrow n \geq \frac{90\lambda}{d} \quad (4.1)$$

Em termos práticos, verifica-se no entanto que mesmo escolhendo um valor de n um pouco inferior ao dado pela relação (4.1), o MATLAB consegue desenhar o diagrama polar de uma forma correcta mesmo com uma resolução inferior a 1 ponto por cada grau.

No anexo B encontra-se uma listagem do código desenvolvido para se fazer a análise de um agrupamento de antenas usando a IFFT. Esse código constitui um M-file de nome “analise.m”.

Para se calcular o factor de agrupamento, como referido anteriormente, é necessário saber as seguintes características do agrupamento de antenas: número de antenas, módulo das correntes de alimentação, fase das correntes, distância de cada antena à origem e a frequência de trabalho. No programa estes dados são introduzidos pelo utilizador e correspondem às variáveis: N, C, FASE, DX e freq. O utilizador, se assim o pretender, tem a possibilidade de guardar estes dados num ficheiro com o nome indicado por si.

O utilizador tem a possibilidade de visualizar o factor de agrupamento em função da variável β , em coordenadas polares em função da variável θ ou ambas as hipóteses.

Existe também a hipótese de gravar o diagrama de radiação em coordenadas polares num ficheiro com o nome indicado pelo utilizador, a fim de posteriormente poder ser imprimido.

Quanto à escolha do número de pontos para o cálculo da IFFT, é ao utilizador que cabe essa escolha, dentro do problema a resolver, mas é-lhe indicado que esse número deve ser uma potência de 2 (por questões internas ao cálculo da FFT).

4.2 - Síntese

Na síntese, como já foi referido anteriormente, o que é conhecido à partida é o factor de agrupamento numa forma discreta e pretende-se obter uma distribuição discreta de antenas que o aproxime.

No anexo C encontra-se uma listagem do código desenvolvido para se fazer a síntese de um agrupamento de antenas usando a FFT. Esse código, à semelhança do que foi feito no caso da análise de agrupamentos de antenas, constitui um M-file, neste caso de nome "síntese.m".

Neste programa de início é perguntado ao utilizador o nome da variável que representa o factor de agrupamento, ou seja, o vector que contém os valores que o mesmo toma, bem como o nome da variável que contém os valores do β .

Atendendo a que a distribuição de correntes vai ser calculada através da aplicação da FFT ao factor de agrupamento em função de β , é necessário que a variável β varie com igual espaçamento pois a FFT aplica-se apenas a pontos igualmente espaçados.

O número de pontos usados para calcular a FFT, neste caso, está já definido à partida pelo número de pontos que o vector que representa o factor de agrupamento contém, não sendo por isso permitido ao utilizador escolher esse número de uma forma independente.

O utilizador deve indicar qual a frequência de trabalho e é baseado nesse valor que se obtém a distância entre antenas que é dada por:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{3 \times 10^8}{2 \text{ freq}}$$

O motivo pelo qual é este o valor da distância entre as antenas é o de que é este o valor ideal para a mesma.

Tal como é referido em [16], para sintetizar um factor de agrupamento periódico de período $2 \beta_0$, definido pela sua variação entre $-\beta_0$ e β_0 temos que como $d = 2 \pi / \beta$ então, se β varia entre $-\beta_0$ e β_0 , a sua variação total é de $2\beta_0$ logo:

$$d = \frac{2 \pi}{2 \beta_0} = \frac{2 \pi \lambda}{4 \pi} = \frac{\lambda}{2}$$

A figura seguinte ilustra um exemplo em que $d = d_{ideal}$.

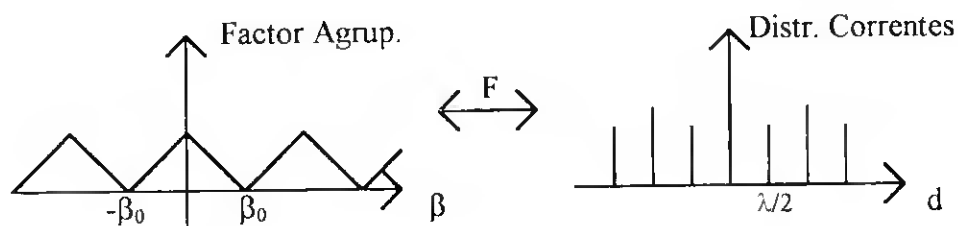


Fig. 3 - Caso com $d = d_{ideal}$

Como a FFT considera os sinais como sendo periódicos e como entre dois sinais relacionados pela Transformada de Fourier, se o sinal num dos domínios se “comprime” no outro domínio ele “alarga”, temos que se a distância entre as antenas for inferior a $\lambda/2$ isto provoca inutilmente um aumento do número de fontes pois provoca um maior afastamento na repetição da função sem que o factor de agrupamento seja alterado entre $-\beta_0$ e β_0 (fig. 4).

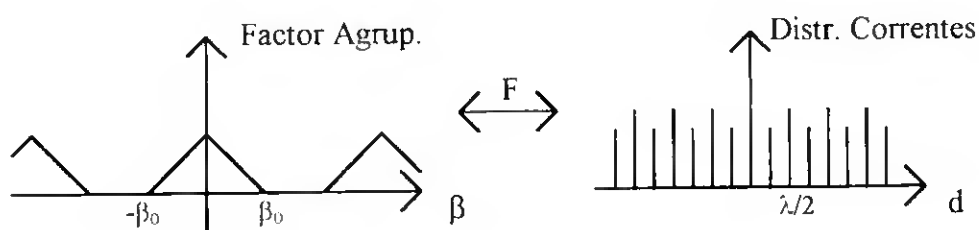


Fig. 4 - Caso com $d < d_{ideal}$

Pelas mesmas razões, se $d > d_{ideal}$ pode ocorrer aliasing o que provoca uma sobreposição do factor de agrupamento entre $-\beta_0$ e β_0 (fig. 5) e pode causar um cálculo errado para a distribuição de correntes.

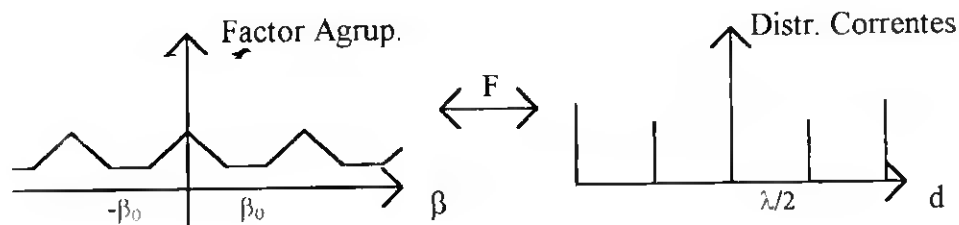


Fig. 5 - Caso com $d > d_{ideal}$

No programa “sintese.m” é possível optar entre serem apenas consideradas as antenas que tenham uma corrente com módulo superior a 10% do valor da corrente de maior módulo ou serem consideradas todas as antenas.

Como resultado final, este programa indica qual é a distância entre as antenas, o número de antenas que têm módulo de acordo com o critério referido anteriormente e os módulos e fases correspondentes a essas antenas, num período.

4.3 - Erros cometidos

4.3.1 - Erros na Análise

No caso da análise parte-se da distribuição de correntes, que já é uma função discreta em que cada ponto diz respeito a uma antena e que a IFFT considera como sendo uma função periódica. Neste caso, o factor de agrupamento obtido também é discreto e tem n pontos.

Supondo o agrupamento limitado, nunca são cometidos erros, pois ao considerar o agrupamento periódico vamos obter simplesmente uma amostragem do Factor de Agrupamento (fig. 6).

Neste caso então, para não haverem erros basta escolher um n tal que seja superior ou igual a N , de modo a que se tenha o número de pontos pretendido no factor de agrupamento.

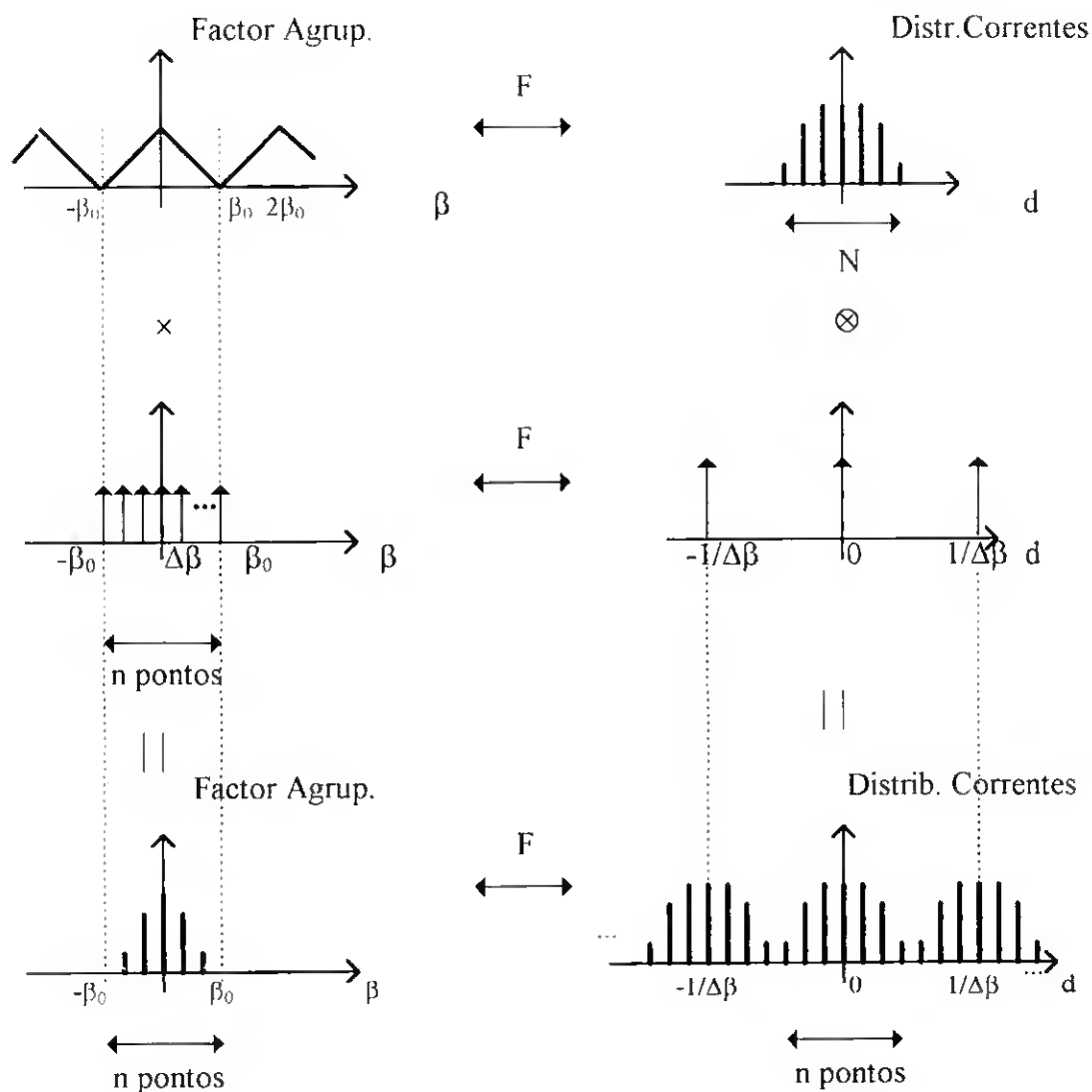


Fig. 6 - Amostragem do factor de agrupamento

4.3.2 - Erros na Síntese

No caso da síntese, parte-se do conhecimento do factor de agrupamento, como amostragem de uma função contínua, para se obter a distribuição de correntes. Por isso, como para os cálculos computacionais não se considera que o factor de agrupamento é uma função contínua, mas apenas são considerados n pontos desta

função, isto equivale a multiplicar o factor de agrupamento por uma função constituída por n impulsos de Dirac distanciados de $\Delta\beta$ (fig. 6).

Como a Transformada de Fourier de um trem infinito de impulsos de Dirac é ainda um trem infinito de impulsos de Dirac e como a multiplicação num dos domínios corresponde à convolução no outro domínio, verifica-se que a distribuição de correntes que se obtém no final é uma réplica da distribuição de correntes inicial (se não houver “aliasing”), mas repetida com um período n .

No nosso caso, como a distância entre antenas é sempre: $d = \lambda/2$ e atendendo ao exposto em 4.2, não existem quaisquer erros. Além disso, temos a garantia que o número n de pontos da FFT é igual ao número N de antenas que é possível utilizar. Isto só não se verifica quando existem pontos que corresponderiam a um módulo de corrente nula e que se consideram como posições que não têm qualquer antena (neste caso $n > N$).

Os erros cometidos quando não se impõe à partida um número N de antenas nas condições ideais, serão investigados em trabalhos futuros.

5 - Exemplos de Aplicação

5.1 - Análise

Com o intuito de validar e ilustrar alguns dos resultados possíveis de obter com o programa “analise.m”, desenvolvido no programa MATLAB, de seguida são apresentados dois exemplos de aplicação. Para se poder comparar os resultados obtidos usando o referido programa, que como já foi referido anteriormente usa a IFFT, com os resultados obtidos usando o método clássico de soma directa, aplicaram-se os dois métodos a ambos os exemplos.

O primeiro exemplo consistiu em considerar um agrupamento de 7 antenas, todas com uma corrente de alimentação de 1A com fase nula, distanciadas de 1.5m entre elas e com uma frequência de trabalho de 100MHz. Estes dados conduzem a uma distribuição de correntes como a ilustrada na figura 1:

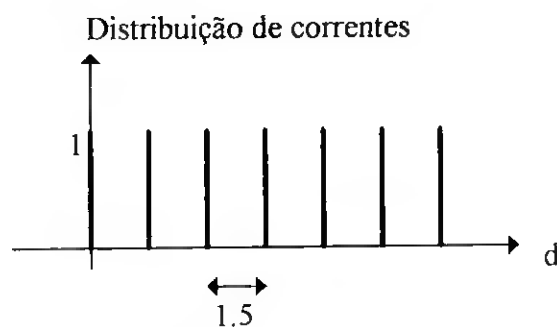


Fig.1 - Distribuição de correntes

Ao aplicar a soma directa, os resultados obtidos para o factor de agrupamento quer em função da variável β , quer em função da variável θ (em representação polar) são os ilustrados nas figuras 2 e 3, respectivamente.

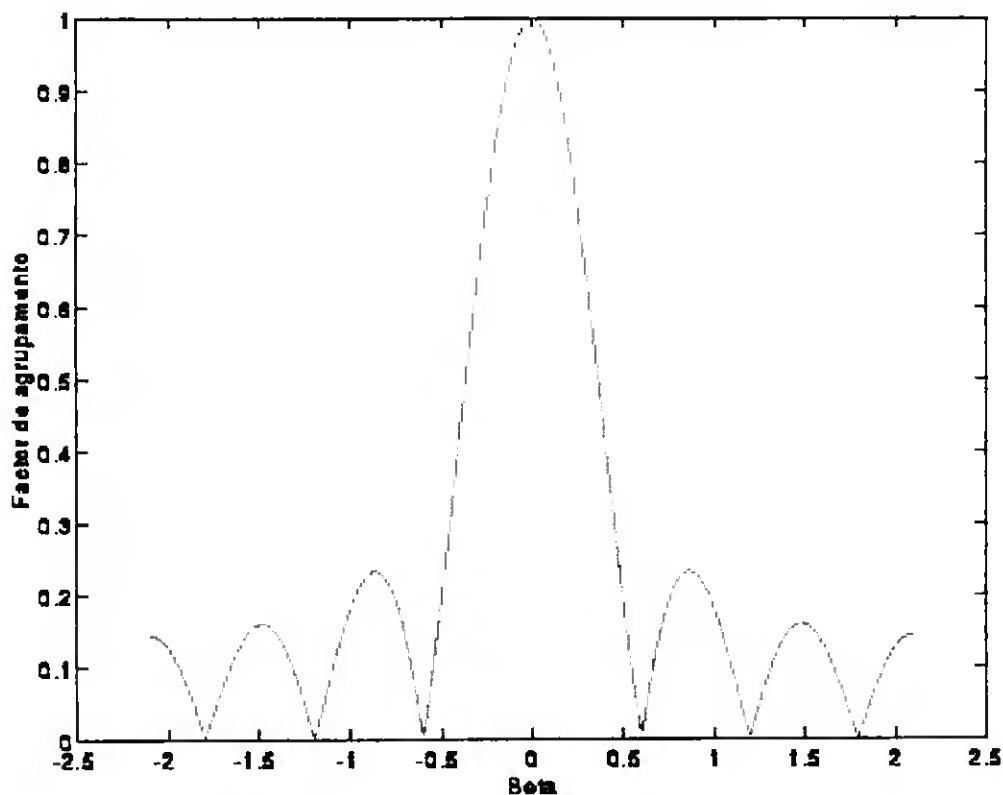


Fig. 2 - Factor de agrupamento em representação linear (soma directa)

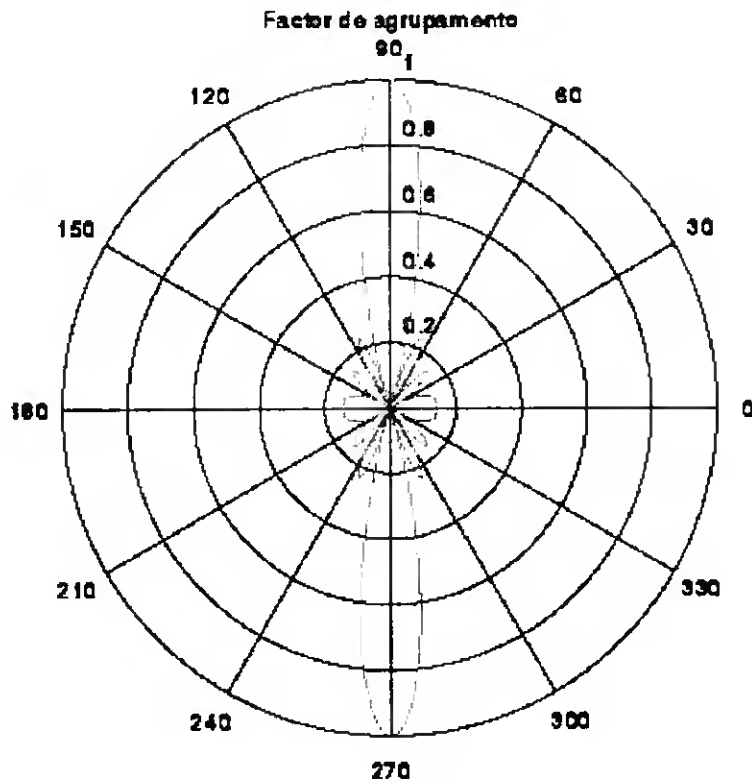


Fig. 3 - Factor de agrupamento em função de θ (soma directa)

Quando para os mesmos dados anteriores é usado o programa “analise.m”, os resultados obtidos são os ilustrados nas figuras 4 e 5. Neste caso o número de pontos utilizado no cálculo da IFFT foi $N = 512$.

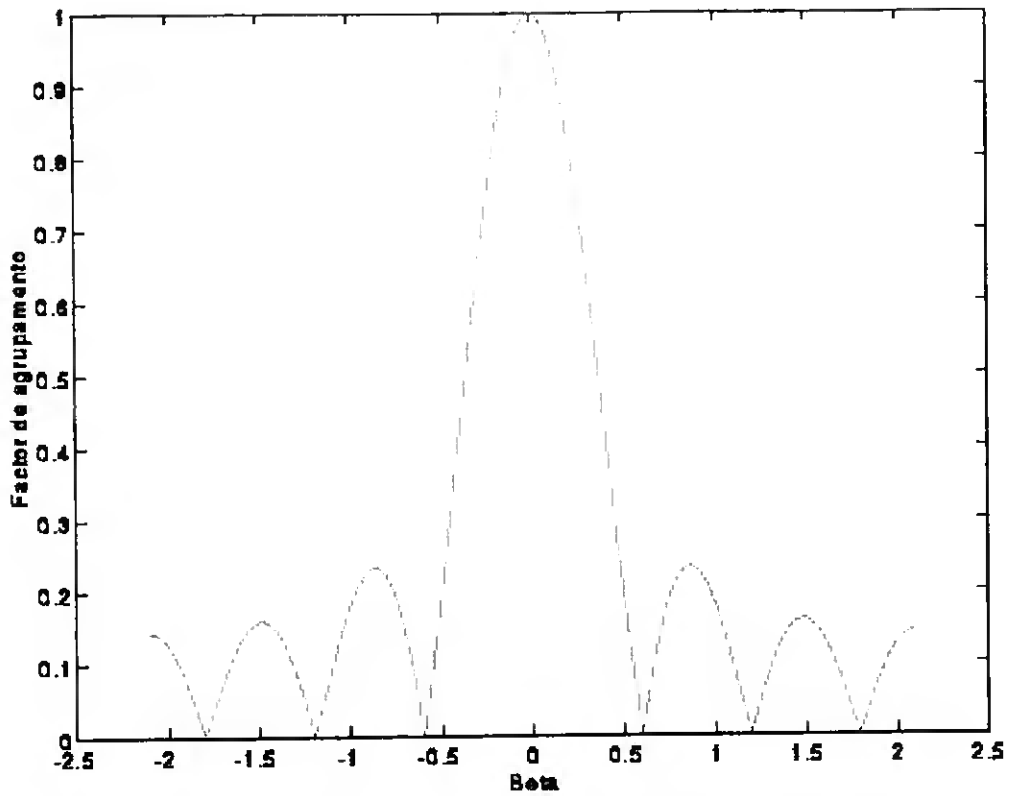


Fig. 4 - Factor de agrupamento em representação linear (FFT)

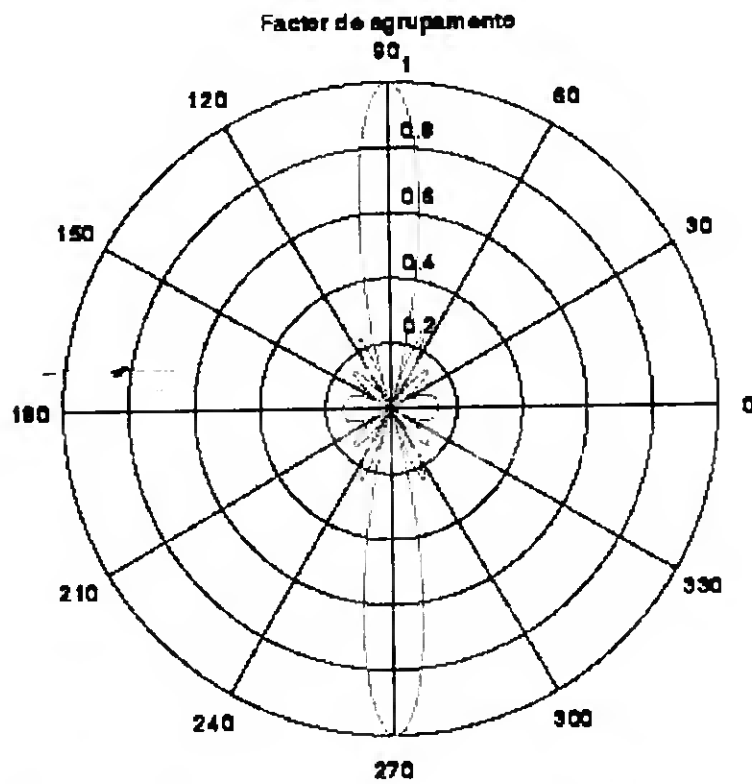


Fig. 5 - Factor de agrupamento em função de θ (FFT)

Nas figuras 2 e 4 é de salientar o facto de que as funções representadas são discretas. Por questões de melhor visualização optou-se por representar os contornos das funções de modo a terem um aspecto de funções contínuas.

É também de salientar que nestas figuras o factor de agrupamento é representado entre os valores $-\beta_0$ e β_0 , como seria de esperar, que neste caso corresponde aos valores -2.0944 e 2.0944 .

Por comparação das figuras 2 e 4 e também 3 e 5, verifica-se que os resultados obtidos não apresentam diferenças para os dois métodos distintos.

No segundo exemplo é considerado um agrupamento de 9 antenas distanciadas de 1.68m e com a mesma frequência de trabalho que no exemplo anterior (100MHz) mas neste caso considerou-se que a corrente de alimentação das antenas seguia uma distribuição de Tchebycheff com os seguintes valores de módulo e fase:

1	2	3	4	5	6
$1e^{j0^\circ}$	$1.81e^{j101^\circ}$	$2.85e^{j202^\circ}$	$3.69e^{j303^\circ}$	$3.96e^{j44^\circ}$	$3.69e^{j145^\circ}$
	7	8	9		
	$2.85e^{j246^\circ}$	$1.81e^{j347^\circ}$	$1e^{j88^\circ}$		

Mais uma vez usando os dois processos diferentes, os resultados obtidos usando o método da soma directa estão ilustrados nas figuras 6 e 7 e os obtidos usando a IFFT correspondem às figuras 8 e 9, tendo-se neste caso usado um $N = 256$ como número de pontos para a IFFT.

É de salientar que apesar de apenas aqui serem apresentados estes dois tipos importantes de agrupamentos, muitos mais testes foram feitos ao programa “analise.m” verificando-se que os resultados são praticamente os mesmos que usando o método da soma directa. Assim, foram usados agrupamentos com outros números de antenas, com antenas distanciadas com $d = d_{ideal} = \lambda/2$, com $d > \lambda/2$ e com $d < \lambda/2$ e também com antenas com correntes de alimentação diferentes entre si e com variação progressiva de fase ou não. Para se poder aplicar a IFFT é no entanto necessário que, independentemente do valor de d (distância entre antenas), este tem que ser sempre constante entre antenas consecutivas num mesmo agrupamento, como já foi referido num capítulo anterior.

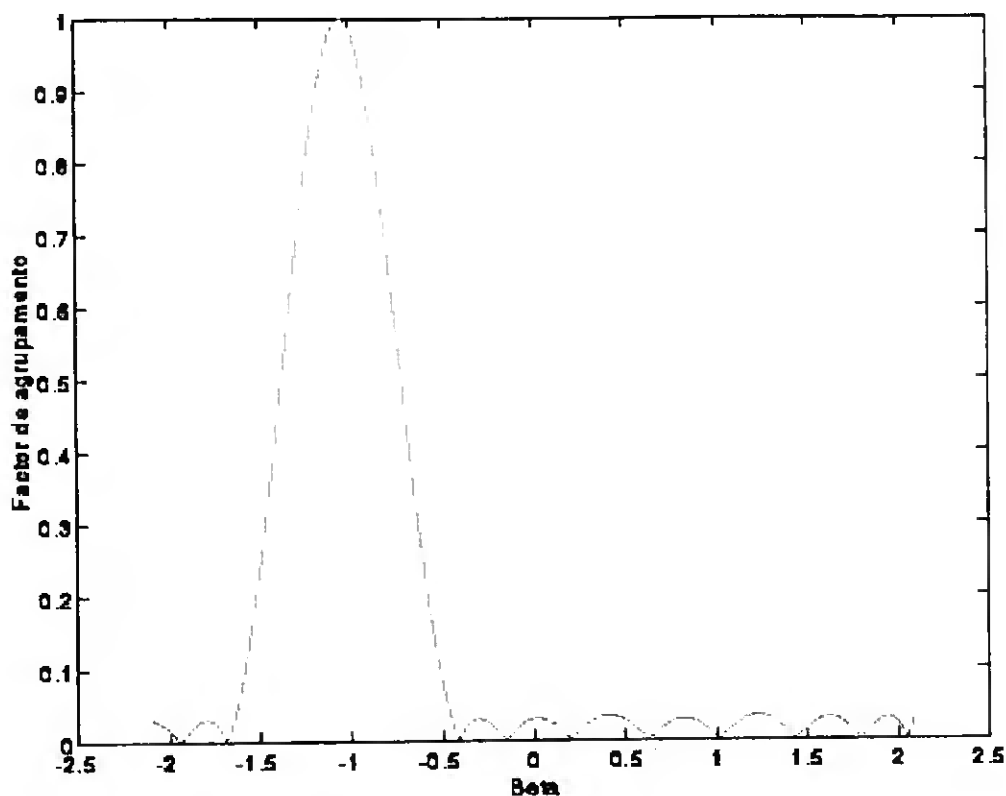


Fig. 6 - Factor de agrupamento em representação linear (soma directa)

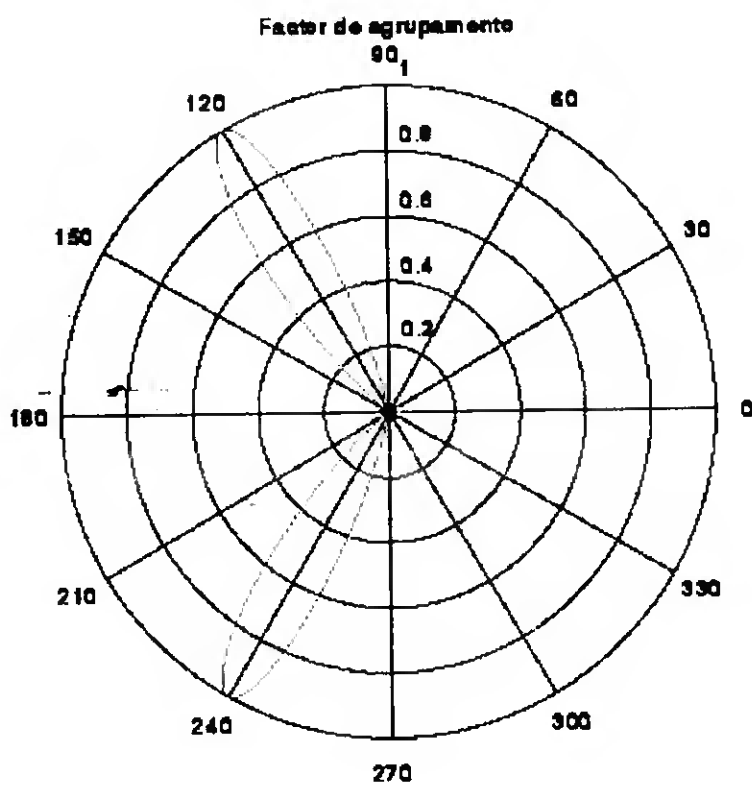


Fig. 7 - Factor de agrupamento em função de θ (soma directa)

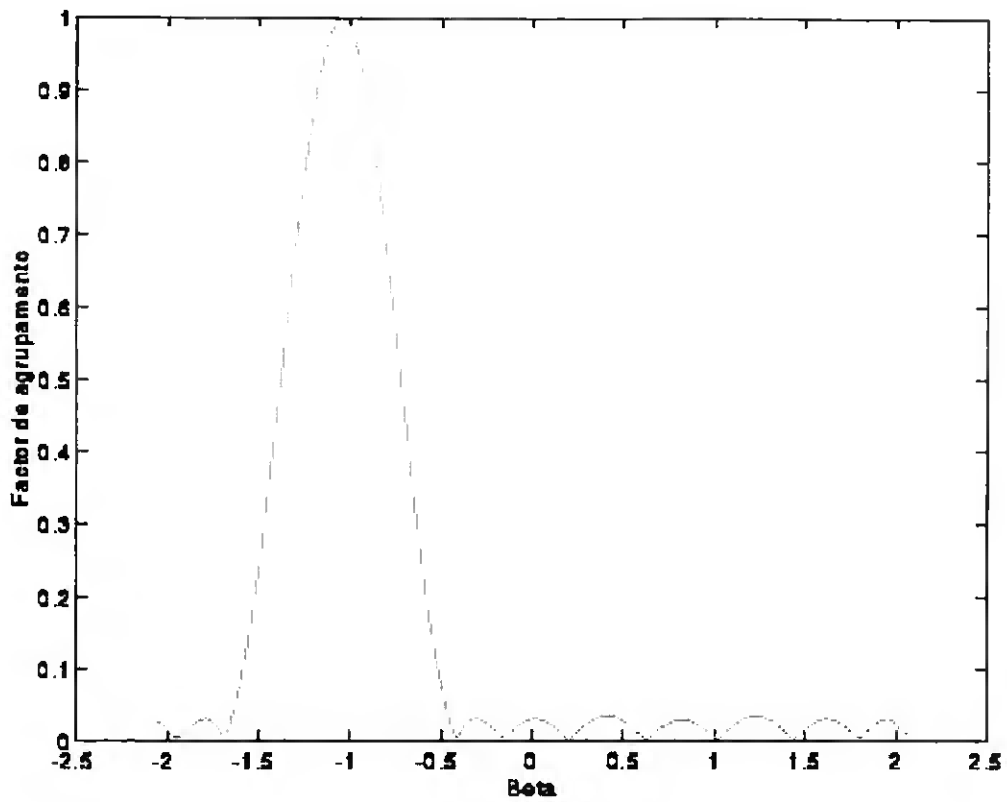


Fig. 8 - Factor de agrupamento em representação linear (FFT)

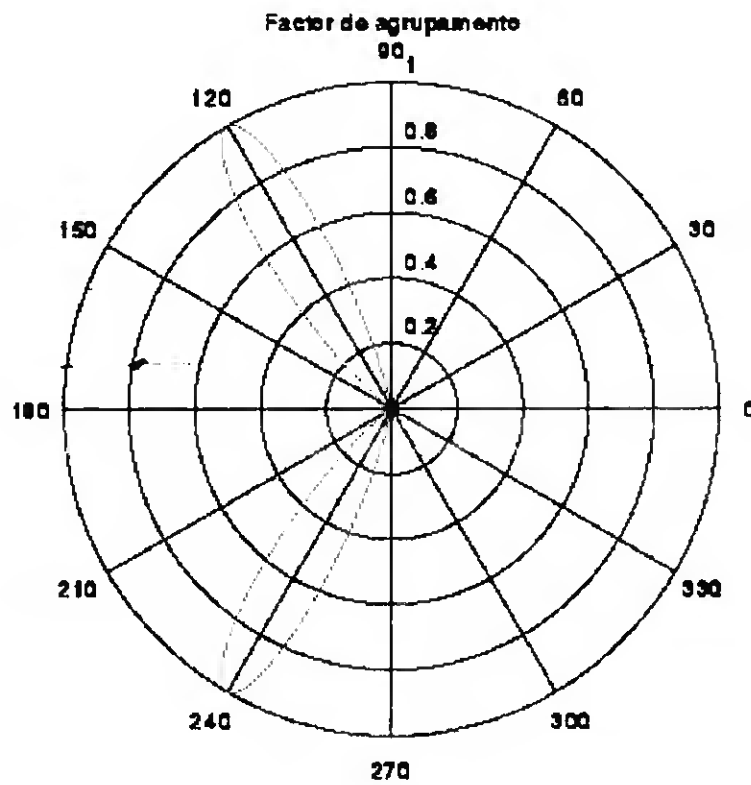


Fig. 9 - Factor de agrupamento em função de θ (FFT)

5.2 - Síntese

No caso da síntese, para ilustrar o programa “síntese.m” também desenvolvido no programa MATLAB, recorreu-se a um procedimento um pouco diferente do usado no caso da análise. Assim, apesar de também irem ser apresentados dois exemplos concretos, como neste caso não havia qualquer programa desenvolvido anteriormente que pudesse ser usado como termo de comparação dos resultados obtidos, o método usado para avaliar os resultados do uso do programa “síntese.m” foi em primeiro lugar aplicar o referido programa e depois, à distribuição de correntes daí resultante, aplicar o método de soma directa e comparar o factor de agrupamento obtido com aquele de que se partiu no início.

No primeiro exemplo partiu-se de um factor de agrupamento do tipo do ilustrado na figura 10.

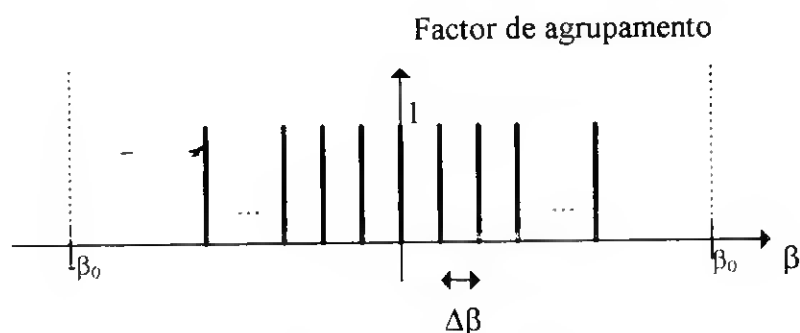


Fig. 10 - Factor de agrupamento

O valor do β_0 é o mesmo dos exemplos de 5.1 uma vez que o valor de frequência usado foi na mesma 100MHz e como é sabido $\beta_0 = 2\pi \text{ freq}/3 \times 10^8$.

Quanto ao valor de $\Delta\beta$, este depende do número de pontos que se considera para o cálculo da FFT e também depende do valor encontrado para d que neste caso é:

$$d = d_{\text{ideal}} = \lambda/2 = 1.5$$

Assim, considerando $n = 256$ pontos temos para $\Delta\beta$ o valor:

$$\Delta\beta = 2\pi / nd = 0.01636$$

O módulo da distribuição de correntes obtida após a aplicação do programa “sintese.m” ao factor de agrupamento da figura 10 foi o ilustrado na figura 11. A fase das correntes varia alternadamente entre 0 e π .

Apesar de neste caso obtermos 256 valores, na prática apenas 33 deles correspondem a valores de corrente superiores a 10% do valor máximo. No entanto, como a ideia deste exemplo não era a implementação prática dos resultados mas a sua validação com o método da soma directa, optou-se por não desprezar os valores inferiores.

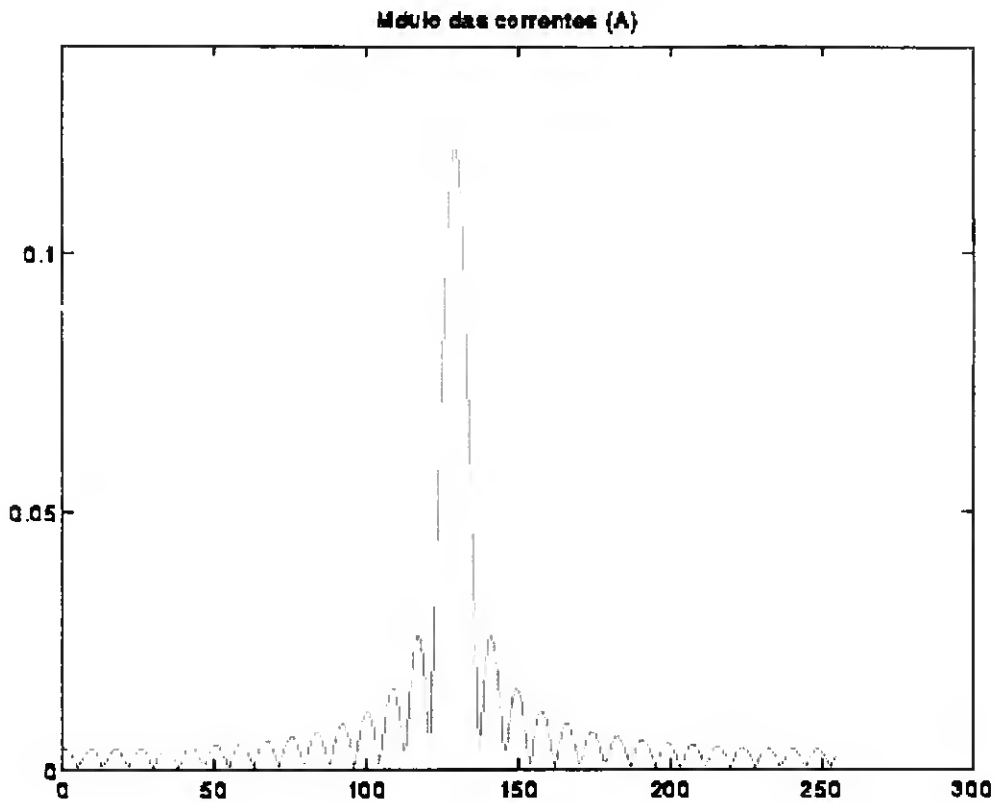


Fig. 11 - Módulo da distribuição de corrente

Como referido anteriormente, aplicou-se depois à distribuição de correntes o método da soma directa e o factor de agrupamento que se obteve encontra-se representado em função de β na figura 12. Mais uma vez, a função representada é contínua apenas por uma questão de facilidade de representação.

Na figura 13 pode-se ver o factor de agrupamento em representação polar.

Nota: É de salientar novamente que apesar de na figura 11 aparecer uma distribuição contínua isto deve-se apenas a uma questão de representação pois na realidade o que se obtém depois de aplicar o programa "sintese.m" é uma função discreta com 256 valores, cada um com um determinado valor que representa o módulo da corrente de alimentação da antena que lhe corresponde.

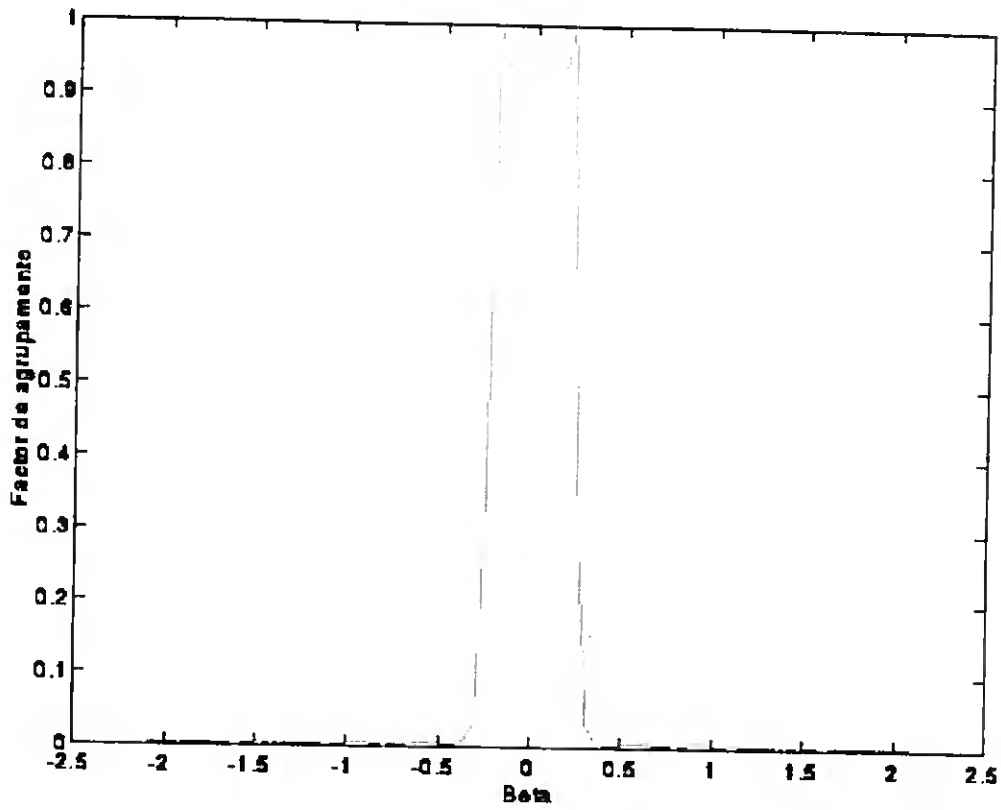


Fig. 12 - Factor de agrupamento em função de β

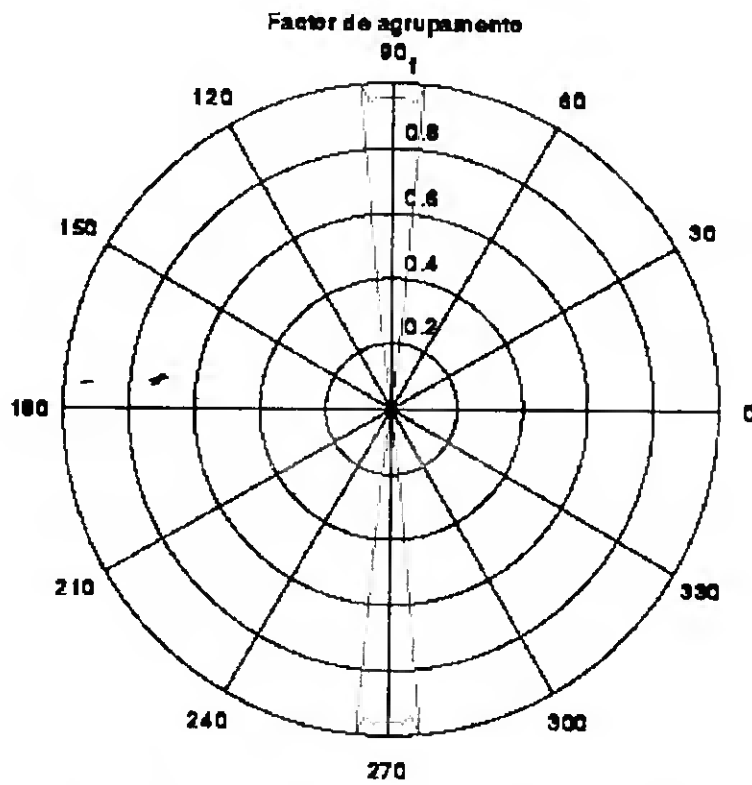


Fig. 13 - Factor de agrupamento em função do ângulo θ

Verifica-se que existe uma ligeira diferença entre o resultado obtido no final e o factor de agrupamento de que se partiu inicialmente. Esta diferença, que é o aparecimento de um pequeno “ripple”, deve-se ao facto de existir uma repetição na função e ao respectivo “aliasing” pois no início, quando é usado o programa “sintese.m”, o factor de agrupamento é considerado como uma função periódica, como sempre acontece com as funções às quais é aplicada a FFT, enquanto depois apenas se considera um período para se calcular o factor de agrupamento ao usar o método da soma directa. No ponto 9 da secção 3.2 encontra-se descrito o processo pelo qual surge a referida repetição da função e na fig.2 do Anexo A aparece uma situação análoga. Por outro lado, nunca se consegue representar um rectângulo usando um número finito de amostras da sua transformada.

No segundo exemplo partiu-se de um factor de agrupamento do tipo do ilustrado na figura 14 e os valores de frequência, β_0 , $\Delta\beta$, n e d foram os mesmos do exemplo anterior.

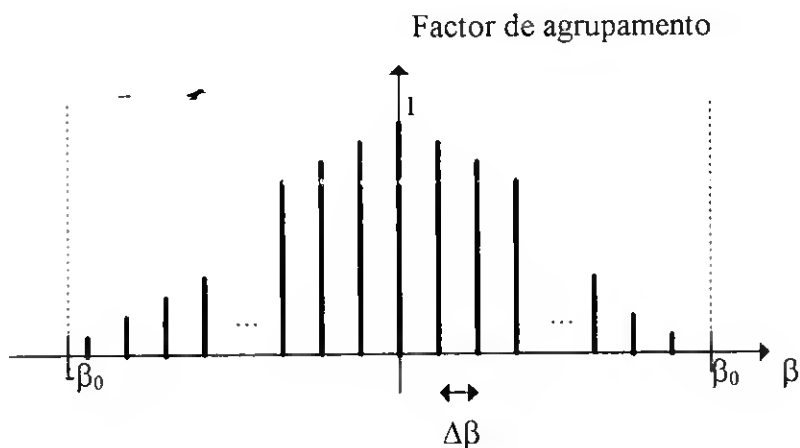


Fig. 14 - Factor de agrupamento

A função que representa o contorno dos valores obtidos para o módulo das correntes de alimentação das antenas encontram-se representada na figura 15.

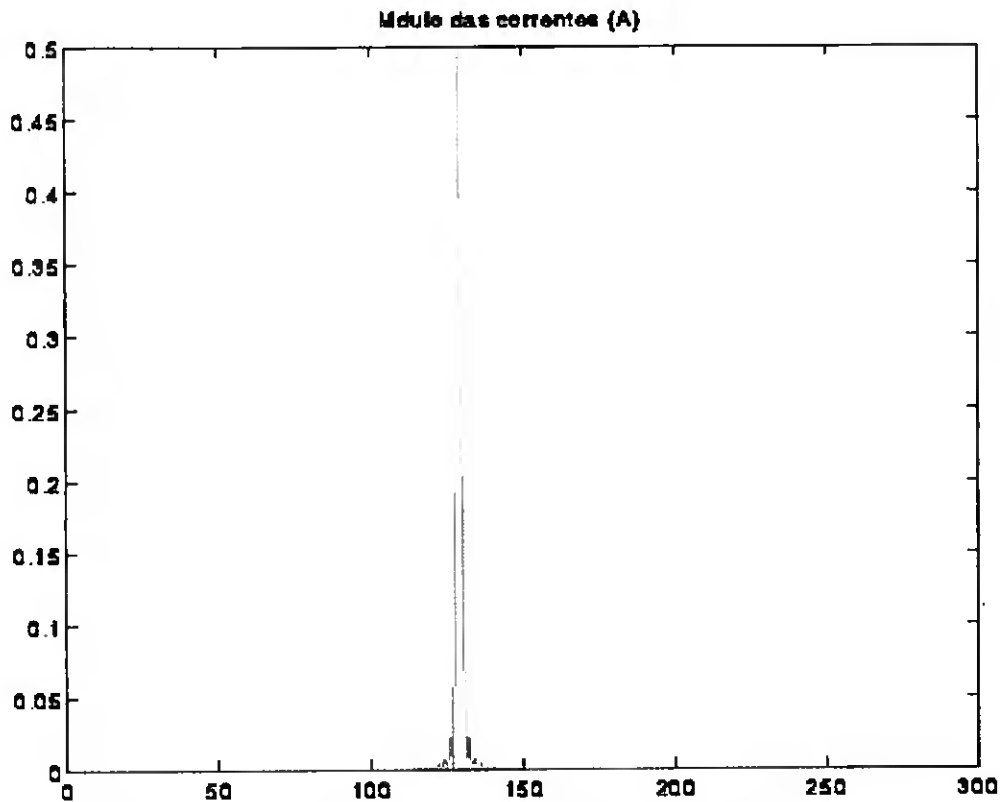


Fig. 15 - Módulo das correntes de alimentação

Neste caso apenas 3 antenas têm valor superior ou igual a 10% do valor máximo da corrente mas, mais uma vez, não se desprezou os restantes valores pois isso iria introduzir alguns erros para a parte seguinte que é aplicar à distribuição de correntes obtida o método da soma directa.

As figuras que se seguem ilustram o resultado final em coordenadas lineares e em coordenadas polares, respectivamente. Neste caso os resultados foram ainda mais satisfatórios do que no exemplo anterior pois o factor de agrupamento obtido tem a forma quase exacta do factor de agrupamento dado inicialmente.

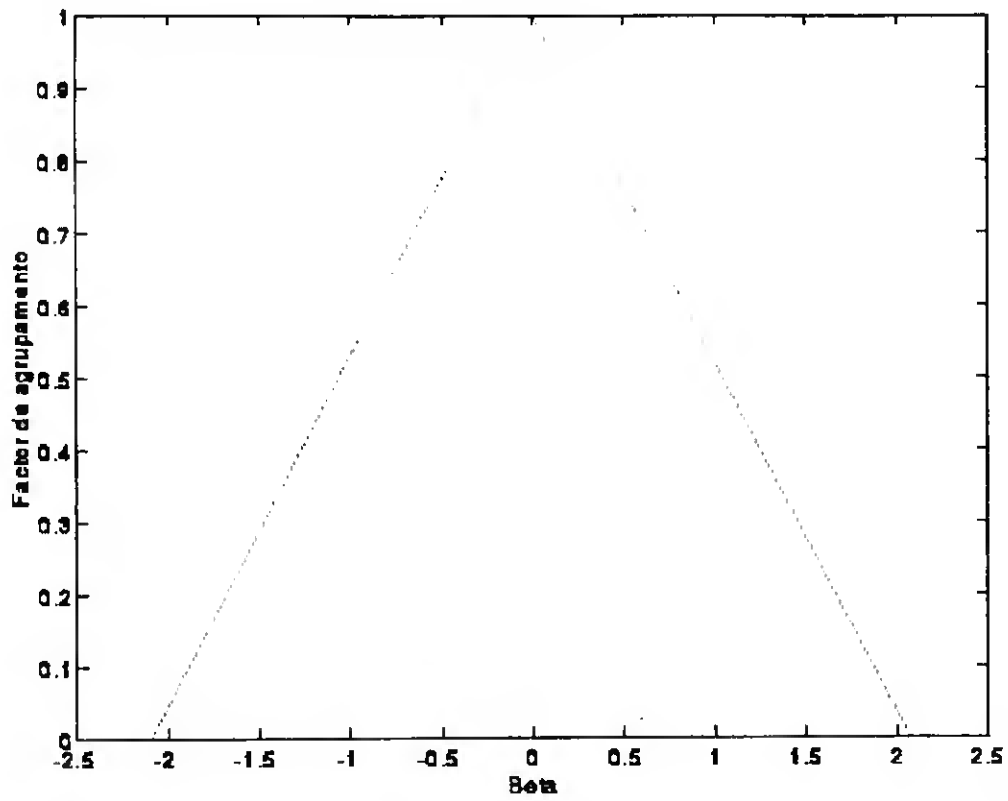


Fig. 16 - Contorno do factor de agrupamento em função de β

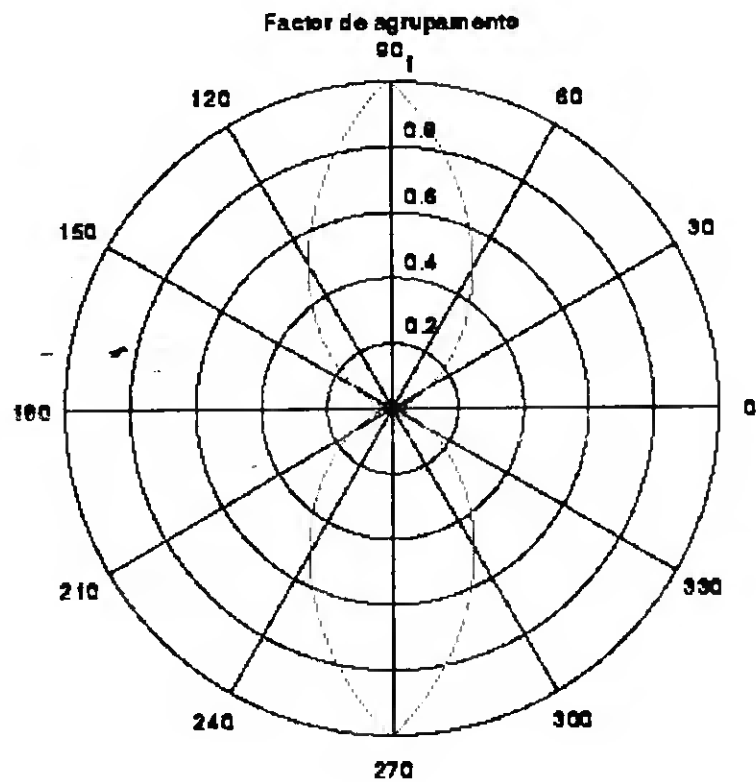


Fig. 17 - Factor de agrupamento em função do ângulo θ

6 - Conclusão e Desenvolvimentos Futuros

A presente dissertação debruçou-se sobre o uso da FFT (e da IFFT) em estruturas radiantes unidimensionais e averiguou-se as condições de aplicação das mesmas na análise e síntese de agrupamentos de antenas dispostas segundo um mesmo eixo, em condições particulares, validando os algoritmos desenvolvidos. Atendendo ao sucesso da aplicação da FFT a este tipo de agrupamentos, será pois de todo o interesse investigar em futuros desenvolvimentos, a possibilidade do uso desta ferramenta em agrupamentos bidimensionais e tridimensionais.

Outro tipo de desenvolvimento futuro a investigar, mesmo nos agrupamentos unidimensionais, é a possibilidade de se determinar previamente o número mínimo de pontos a usar no cálculo da FFT (n). Assim o algoritmo determinaria automaticamente o número de antenas adequado para um determinado erro máximo.

Ficariamos assim na posse de uma ferramenta que nos permitia calcular a distribuição de correntes e aproximar o diagrama de radiação pretendido, dentro de determinado erro, mesmo quando o referido diagrama de radiação fosse de tal modo complexo que não permitisse o tratamento analítico.

Anexo A - A FFT

1 - Introdução

A FFT (Fast Fourier Transform) como o nome indica, é um algoritmo que permite obter a DFT (Transformada de Fourier Discreta) de uma forma mais rápida devido à forma como são agrupados alguns termos do cálculo da DFT e atendendo às periodicidades do factor $e^{-jk2\pi/N}$. Assim, os resultados obtidos usando o algoritmo são idênticos aos obtidos usando a DFT, o número de passos envolvidos nos cálculos é que é muito menor.

Como o que é importante para o presente trabalho é a aplicação da FFT e não a maneira como está construído o algoritmo, vamos relembrar em mais pormenor a DFT.

A nomenclatura dos termos varia de autor para autor, pelo que vamos definir o significado das siglas neste trabalho.

2 - Definição e algumas propriedades

A DFT é a Transformada de Fourier para sinais discretos periódicos. Esta transformada indica as componentes de frequência presentes em sinais discretos mas

também pode ser usada para analisar uma versão amostrada de um sinal contínuo ao aproximar a sua Transformada de Fourier contínua.

A grande vantagem da utilização da DFT é que sendo uma função discreta em ambos os domínios, a análise do sinal pode ser feita usando um computador.

2.1 - Sinais discretos

Quando trabalhamos sinais discretos aperiódicos, a sua representação em termos de frequência pode ser feita usando a DTFT (Transformada de Fourier Discreta no Tempo):

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\theta n}$$

que possui as características:

- o somatório estende-se até infinito,
- a transformada é uma função contínua da frequência.

Estas características causam dificuldades para o tratamento computacional. Assim, para ultrapassar estas dificuldades foi desenvolvida a DFT para um determinado tipo de sinais. A sua relação com a DTFT está ilustrada na figura que se segue:

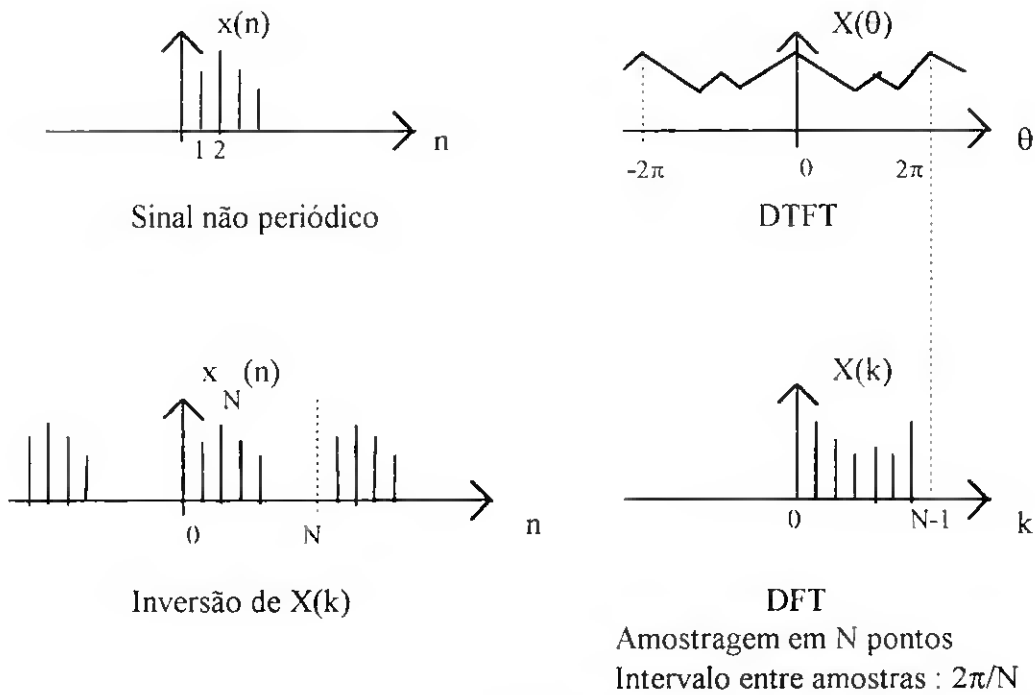


Fig.1 - Relação entre a DFT e a DTFT

Considera-se um período da DTFT, faz-se uma amostragem com N pontos, que como o período da DTFT é de 2π , faz com que o intervalo entre amostras seja $2\pi/N$.

Assim, o somatório da transformada que era infinito passa a ser de apenas N pontos e a transformada é calculada como se tivesse-mos um sinal periódico com período N. Como em cada período N temos uma réplica do sinal original $x(n)$, se o pretendermos recuperar basta filtrar $x_N(n)$ de modo a ter só um período.

A DFT pode ser escrita por:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk2\pi/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jnk2\pi/N}$$

O número de pontos a ser usado na DFT é escolhido por nós. É este o número de pontos do espectro, ou seja, a resolução do espectro. Assim, aumentando N , a transformada não vai ser alterada, vamos é ter um maior número de pontos disponíveis.

Propriedades:

Algumas das propriedades da DFT são:

	$x(n)$	$X(k)$
Linearidade:	$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a X_1(k) + b X_2(k)$
Translação:	$x(n-n_0)$	$e^{-j k n_0 \frac{2\pi}{N}} X(k)$
Modulação:	$e^{j k n_0 \frac{2\pi}{N}} x(n)$	$X(k - k_0)$
Dualidade:	$1 / N X(n)$	$x(-k)$
Convolução circular	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(k) X_2(k)$

A prova de qualquer destas propriedades pode ser vista em livros sobre as transformadas de Fourier [1,6].

No que diz respeito à convolução, esta é uma convolução circular porque apesar de os sinais poderem não ser periódicos, a DFT trata-os como se fossem sinais periódicos com período N .

2.2 - Sinais contínuos

Como já foi referido anteriormente, pode-se usar a DFT para estimar a transformada de Fourier de um sinal contínuo.

Na figura 2 está ilustrado o processo para aproximar o mais possível a transformada de Fourier contínua de um sinal $h(t)$.

Como tanto o sinal $x(t)$ como a sua Transformada de Fourier $X(f)$ são sinais contínuos, o primeiro passo a realizar é amostrar o sinal $x(t)$. Isto é feito multiplicando $x(t)$ por uma função amostradora (um trem de impulsos) em que o intervalo de amostragem é T (fig. 2(b)). Na fig. 2(c) podem ver-se o sinal amostrado e a sua Transformada de Fourier. É de notar o aparecimento de “aliasing” que resulta da amostragem. Se a função $x(t)$ for amostrada a uma frequência de pelo menos o dobro da sua maior componente de frequência, não existe qualquer perda de informação. No entanto, se a função $x(t)$ não for de banda limitada então a amostragem vai introduzir “aliasing”. O único meio de tentar reduzir este erro é escolhendo um T menor, ou seja, aumentando a frequência de amostragem.

Como na fig. 2(c) é considerado um número infinito de amostras de $x(t)$, ainda não é possível usar este sinal para cálculos computacionais. Assim, para que seja apenas considerado um número finito de amostras é necessário multiplicar o sinal amostrado por um sinal como o ilustrado na fig. 2(d). O resultado desta multiplicação pode ser visto na fig. 2(e). Esta multiplicação no domínio dos tempos corresponde a uma convolução no domínio das frequências e o sinal resultante dessa convolução, como se pode ver na figura, tem um “ripple”. Este “ripple”, que é causado pela forma de $Y(f)$, pode ser reduzido se se escolher a função $y(t)$ o mais larga possível (T_0 o maior possível).

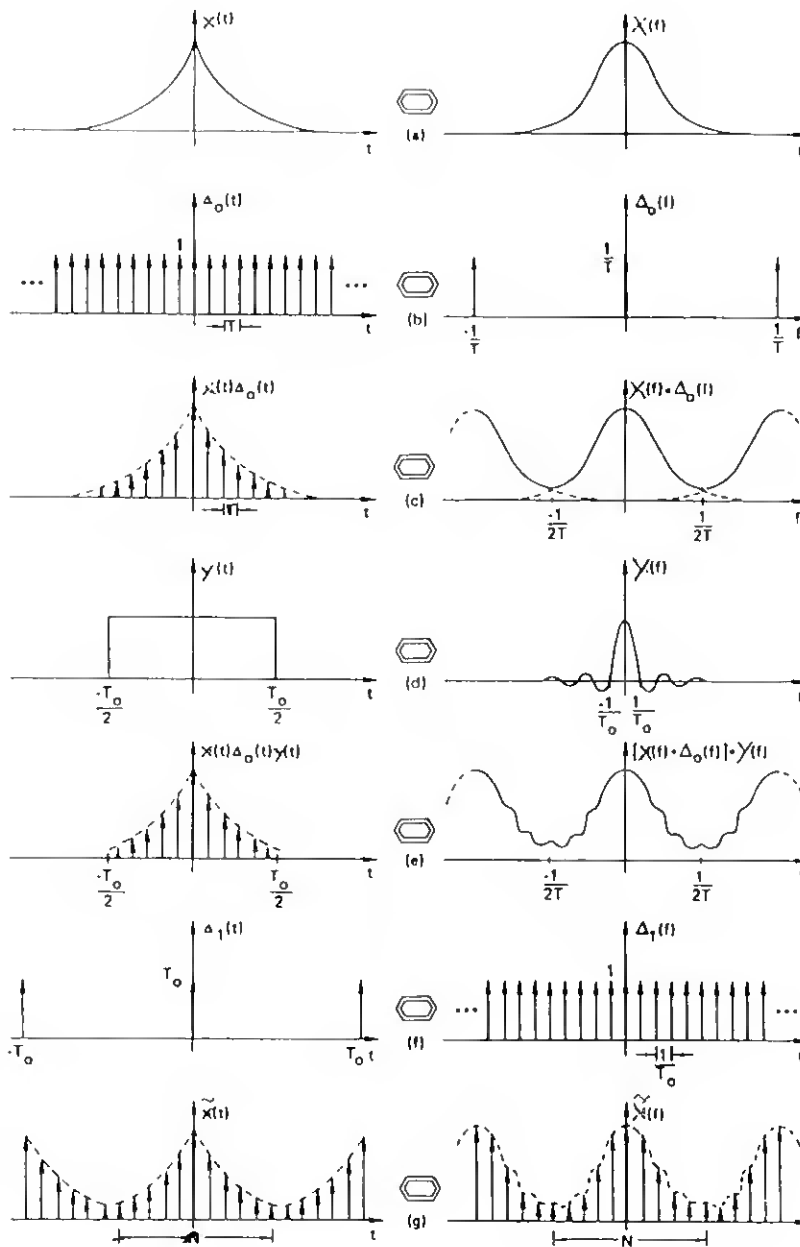


Fig. 2 - Passos para cálculo da DFT de um sinal contínuo

Como o sinal no domínio das frequências ainda é um sinal contínuo, ainda não está na forma pretendida. Assim, é necessário amostrar este sinal através da sua multiplicação pelo sinal $\Delta_1(f)$ (fig. 2(f)). O intervalo de amostragem é $1/T_0$.

Na fig. 2(g) pode ver-se o resultado final em que tanto o sinal no domínio dos tempos como no domínio das frequências são representados por valores discretos, como pretendido. Pode-se ver também que os dois sinais são periódicos com período N. A periodicidade deve-se a que a amostragem no domínio dos tempos provoca uma função periódica no domínio das frequências e vice-versa.

Cada conjunto de N amostras define o par DFT que tem valores aproximados aos do par de Fourier original, como desejado.

A DFT pode então ser escrita por:

$$\tilde{X}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)e^{-jnk2\pi/N} \quad , n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$x(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}\left(\frac{n}{NT}\right)e^{jnk2\pi/N} \quad , k = 0, 1, \dots, N - 1$$

sendo as funções no domínio do tempo e no domínio da frequência ambas periódicas.

Anexo B - Programa para a Análise

```
%Programa para cálculo do factor de agrupamento para
%agrupamentos lineares usando a IFFT
%
%Variáveis utilizadas no programa:
%Variáveis - significado
%   N - nº de antenas
%   C - módulo das correntes(A)
%   FASE - fase das correntes(rad)
%   DX - distancia à origem (m)
%   d - distancia entre antenas
%   freq - frequência(Hz)
%   n - nº de pontos para cálculo da IFFT
%
%Os dados introduzidos através do teclado podem ser
%guardados num ficheiro (com o nome a atribuir pelo utilizador),
%se o for pretendido.
%No final é possível gravar o diagrama de radiação.
clear;
clc;
flag=0;
fprintf('\n\n\n');
for i=1:4000
end

fprintf('\n\n\n Entrada de dados\n');
```

```

%Entrada de dados pelo teclado
%-----
clc;
fprintf('\n\n');
flag=1;
N=input('O nº de antenas=');

d=input('A distância entre antenas(m)=');
for i=1:N
    DX(i)=(i-1)*d;
end

per2=input('Pretende a mesma variação de fase entre as antenas? (S\N):','s');
while ((per2~='s')&(per2~='S')&(per2~='n')&(per2~='N'))
    per2=input('Pretende a mesma variação de fase entre as antenas? (S\N):','s');
end
if ((per2=='S')|(per2=='s'))
    fase=input('A fase entre antenas(rad)=');
    for i=1:N
        FASE(i)=(i-1)*fase;
    end
end
end

per3=input('Pretende a mesma corrente nas antenas? (S\N):','s');
while ((per3~='s')&(per3~='S')&(per3~='n')&(per3~='N'))
    per3=input('Pretende a mesma corrente nas antenas? (S\N):','s');
end
if ((per3=='S')|(per3=='s'))
    x=input('A corrente nas antenas (A) =');
    C=ones(1,N)*x;
end
freq=input('A frequência (Hz)=');

```

```

clc;
for i=1:N
if i<10
    if ((per3=='n')|(per3=='N'))
        fprintf('\n Módulo da corrente %.1g',i)
        C(i)=input(' é igual a (A):');
    end

    if ((per2=='n')|(per2=='N'))
        fprintf('\n A fase da corrente %.1g',i)
        FASE(i)=input(' é igual a (rad):');
    end

else
    if ((per3=='n')|(per3=='N'))
        fprintf('\n Módulo da corrente %.2g',i)
        C(i)=input(' é igual a (A):');
    end

    if ((per2=='n')|(per2=='N'))
        fprintf('\n A fase da corrente %.2g',i)
        FASE(i)=input(' é igual a (rad):');
    end

end

end
end
end

% envio dos dados do teclado para um ficheiro

```

```

if flag==1
    clc;
    fprintf('\n\n');
    perg=input('Pretende enviar estes dados para um ficheiro? (S/N):','s');
    while ((perg~='s')&(perg~='S')&(perg~='n')&(perg~='N'))
        perg=input('Pretende enviar estes dados para um ficheiro? (S/N):','s');
    end
    if ((perg=='s')|(perg=='S'))
        fprintf('\n\n');
        fich=input('Qual o caminho e nome (sem extensão) do ficheiro:','s');
        fprintf(fich,'N=%g;\n',N);
        for i=1:N
            fprintf(fich,'DX(%g)=%g;\n',i,DX(i));
            fprintf(fich,'FASE(%g)=%g;\n',i,FASE(i));
            fprintf(fich,'C(%g)=%g;\n',i,C(i));
        end
        fprintf(fich,'freq=%g;\n',freq);
    end
end

% cálculo do factor de agrupamento usando a IFFT

clc;
B=2*pi*freq/3e8;

n=input('Número de pontos da FFT (potência de 2) =');
fprintf('\n\n Aguarde um momento por favor\n\n');
fprintf(' ...Estou a calcular...\n\n');
for i=1:4000
    end

if d>3e8/(2*freq)    %d > d ideal

```

```

i=1;
for ii=1:2:(2*N)
    cor(ii)=C(i).*exp(j*FASE(i)); %cor: corrente c/ módulo e fase
    i=i+1;
end;

else          %d <= d ideal

for i=1:N
    cor(i)=C(i).*exp(j*FASE(i)); %cor: corrente c/ módulo e fase
end
DX=[0:d:(N-1)*d];
stem(DX,cor)
xlabel('d (m)')
ylabel('Corrente (A)')
fprintf('\n\n\n Prima tecla...\n\n');
pause;
end;

cor=cor(:);          %coloca cor na forma de vector
m=(1/n)*[0:(n-1)]'; %vector contendo valores normalizados de m
mid=ceil(n/2)+1;     %determina o meio de n
m(mid:n)=m(mid:n)-1; %m: vector correspondente aos pontos onde
                    - %a IFFT vai ser calculada

if d>3e8/(2*freq)    % d > d ideal
    beta=4*pi*m/d;
else
    beta=2*pi*m/d;    %relação entre beta e d: B1=2*pi/d1
end;

z=n*ifft(cor,n);     %cálculo da IFFT

```

```

a=0; %a: variável auxiliar
for i=1:n
    if ((beta(i)>=-B)&(beta(i)<=B)) %aplicação da janela: -B a B
        a=a+1;
        alpha(a)=z(i);
        theta(a)=acos(beta(i)/B); %passagem de beta para ang. theta
    end;
end;

theta1=fftshift(theta); %para efeitos de representação
alpha1=fftshift(alpha);
beta1=B*cos(theta1);

k=menu('Visualização do factor de agrupamento',...
    'Em coordenadas lineares','Em coordenadas polares','Ambas');
if (k==1)
    alpha3=abs(alpha1); % cálculo do módulo do factor de agrup.
    alpha3=alpha3/max(alpha3); % normalização do factor de agrup.
    stem(beta1,alpha3)
    xlabel('Beta')
    ylabel('Factor de agrupamento')
    fprintf('\n\n Prima tecla...\n\n');
    pause;

elseif (k==2)
    alpha2=[alpha1 fliplr(alpha1)]; %para desenhar de pi a 2pi
    theta2=[theta1 theta1-pi];

    alpha2=abs(alpha2); %cálculo do módulo do factor agrup.
    alpha2=alpha2/max(alpha2); %para normalizar alpha2 (máx.=1)
    % (valor máximo = 1)

```

```

polar(theta2,alpha2,'g') %factor de agrupamento em coord. polares
title('Factor de agrupamento')
fprintf('\n\n\n Prima tecla...\n\n');
pause;

elseif (k==3)
alpha3=abs(alpha1); % cálculo do módulo do factor de agrup.
alpha3=alpha3/max(alpha3); % normalização do factor de agrup.
plot(beta1,alpha3, 'g')
xlabel('Beta')
ylabel('Factor de agrupamento')
fprintf('\n\n Prima tecla...\n\n');
pause;

alpha2=[alpha1 fliplr(alpha1)]; %para desenhar de pi a 2pi
theta2=[theta1 theta1-pi];

alpha2=abs(alpha2); %cálculo do modulo do factor agrup.
alpha2=alpha2/max(alpha2); %para normalizar alpha2 (máx.=1)
                                % (valor máximo = 1)

polar(theta2,alpha2,'g') %factor de agrupamento em coord. polares
title('Factor de agrupamento')
fprintf('\n\n\n Prima tecla...\n\n');
pause;
end

perg1=input('Pretende gravar o diagrama de radiação? (S/N):','s');
while ((perg1~='s')&(perg1~='S')&(perg1~='n')&(perg1~='N'))
    perg1=input('Pretende gravar o diagrama de radiação? (S/N):','s');
end

```

```
if ((perg1=='s')|(perg1=='S'))  
  figura=input('Qual o caminho e nome (sem extensão) do ficheiro:', 's');  
  print -dpcx16 figura.pcx  
end
```

Anexo C - Programa para a Síntese

```
%Programa para a síntese de diagramas de radiação de agrupamentos
%de antenas lineares usando a FFT.
%
%Variáveis utilizadas no programa:
%
%Variáveis - significado
%   N - nº de antenas
%   modcor - módulo das correntes (A)
%   fasecor - fase das correntes (rad)
%   d - distancia entre antenas (m)
%   freq - frequência (Hz)

alpha=input(' Indique o nome da variável que representa o factor de agrupamento:');
fprintf('\n\nNota: A variável beta deve variar com intervalos iguais \n')
fprintf('   para se poder aplicar a FFT.\n')

beta=input(' Indique o nome da variável que contém os valores do beta:');

l=length(beta);

if min(beta)~=beta(1)
    beta=[fliplr(beta(1:l/2)) fliplr(beta(l/2+1:l))];
    alpha=[fliplr(alpha(1:l/2)) fliplr(alpha(l/2+1:l))];
end
```

```

freq=input(' A frequência (Hz)=');

B=2*pi*freq/3e8;

stem(beta,alpha)
xlabel('Beta')
ylabel('Factor de agrupamento')

fprintf('\n\n Prima tecla...\n\n');
pause;

alpha=alpha(:);    %coloca alpha na forma de vector

correntes=fft(alpha,length(alpha))/length(alpha);

modcor=abs(correntes); %corresponde a C
fasecor=angle(correntes); %corresponde a FASE, angle dá ang. em
                        %radianos entre -pi e pi

d=3e8/(2*freq);

fprintf('\n A distância entre antenas é %g (m)\n',d)

N=length(correntes);

k=menu('Critério de valores de corrente a considerar',...
'Superiores a 10% do máximo do módulo da corrente',...
'Todos os valores');

```

```

for i=1:length(correntes)

    if (k==1)

        if modcor(i)<=0.1*max(modcor) %se o valor do módulo da corrente
            modcor(i)=0;                %for inferior ou igual a 10% do máximo
            N=N-1;                      %considera-se =0
        end

        elseif (k==2)                %não se consideram apenas os valores

            if modcor(i)=0            %de corrente iguais a 0
                N=N-1;
            end

        end

        if abs(fasecor(i))<10.^(-5) %se o valor absoluto da fase da
            fasecor(i)=0;            %corrente for inferior a 10.^(-5)
        end                          %considera-se = 0

    end

    fprintf('\nO número de antenas é %g\n',N)

    for i=1:length(correntes)

        if modcor(i)~=0
    
```

```
fprintf('\nA antena colocada na posição %g tem corrente com',i)
fprintf(' módulo %g (A) e fase %g (rad)\n',modcor(i),fasecor(i))
end
```

```
end
```

```
fprintf('\nAs restantes posições não têm antena.\n')
```

Bibliografia

1 - Brigham, E. Oran;

The Fast Fourier Transform and its Applications

Prentice-Hall International Editions

2 - Etter, D. M.;

Engineering Problem Solving With Matlab

Prentice-Hall

3 - Burrus, McClellan, Oppenheim, Parks, Schafer, Schuessler;

Computer-Based Exercises for Signal Processing Using Matlab

Prentice-Hall

4 - Harrington, Roger F.;

Field Computation by Moment Methods

Krieger Publishing Company

5 - Balmer, Leslie;

Signals and Systems, An Introduction

Prentice-Hall

6 - Wilson, Howard B.; Tourcotte, Louis H.;

Advanced Mathematics and Mechanics Applications using Matlab

CRC Press

7 - The Student Edition of Matlab, For MS-DOS Personal Computers

Prentice-Hall

8 - Dvorak, Steven L.;

Application of the Fast Fourier Transform to the Computation of the Sommerfeld Integral for a Vertical Electric Dipole Above a Half-Space

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.40, N°.7, July 1992

9 - Shen, Chung Y.;

Application of the Discrete Fourier Transform Method to Thin Dielectric Structures

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.37, N°.10, October 1989

10 - Gedney, Stephen D.; Mittra, Ray;

The Use of the FFT for the Efficient Solution of the Problem of Electromagnetic Scattering by a Body of Revolution

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.38, N°.3, March 1990

11 - Compton JR., R.T.;

The Relationship Between Tapped Delay-Line and FFT Processing in Adaptive Arrays

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.36, N°.1, January 1988

12 - Barkeshli, Kasra; Volakis, John L.;

Improving the Convergence Rate of the Conjugate Gradient FFT Method Using Subdomain Basis Function

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.37, N°.7, July 1989

13 - Sarkar, Tapan K.; Arvas, Ercument; Rao, Sadasiva M.;

Application of the FFT and the Conjugate Gradient Method for the Solution of Electromagnetic Radiation from Electrically Large and Small Conducting Bodies

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-34, N°.5, May 1986

14 - Willis, Thomas M.; Sengupta, Dipak L.;

Spectral Analysis of Microstrip Antennas with CG-FFT: Two-Dimensional Results

IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.37, N°.7, July 1989

